

REPUBLICQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

22/97

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT : GENIE ELECTRIQUE

OPTION : AUTOMATIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention du diplôme
d'ingénieur d'état en automatique

Thème :

ETUDE DE LA COMMANDE H_{∞}
APPLICATION : PUMA 560

Proposé par :
Mr Mc. **SOUAMI**

Etudié par :
Mr Y. **YAHIA-CHERIF**
Mr S. **YAGOUR**

PROMOTION 1997

ENP, 10 Avenue Hassen BADI El-Harrach Alger



*A mes chers parents
A mes deux frères
A ma soeur
A toute ma famille
et à tous mes amis*

S. YAGOUB

*A mes parents
A mes frères et soeurs
A ma belle soeur
A ma nièce Souhila
A toute ma famille
A tous mes amis*

Y. YAHIA-CHERIF

REMERCIEMENTS

o

Nous tenons très sincèrement à remercier notre promoteur M^r SOUAMI pour nous avoir fait confiance dans la réalisation de ce projet, et l'aide précieuse qu'il nous a apportée.

Nous tenons également à exprimer nos remerciements à messieurs les membres du jury, qui nous ont fait l'honneur de juger ce travail.

Notre sincère reconnaissance va à nos parents qui nous ont soutenus et encouragés depuis le tout premier jour d'école jusqu'à la veille de la remise de ce projet.

Nous tenons évidemment à remercier vivement tous nos amis plus particulièrement, SIDALI, SMAIL, MOHSEN, MOURAD ainsi que tous les membres de l'Agence Lotus Design.

Nos vifs remerciements vont à notre ami KOUSSAILA.

Nos remerciements les plus sincères vont également à tous les agents de la bibliothèque de l'ENP, plus particulièrement KRIMOU, SALAH, HOURIA et SABINA, sans oublier les agents de la salle des revues de l'INHIC, LINDA de la bibliothèque de l'INELEC et tous les travailleurs du service internet du CERIST d'Alger pour leurs aides précieuses.

SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : Problème H_∞ Standard	2
I-1 INTRODUCTION	3
I-2 CONCEPTS MATHÉMATIQUES	3
I-3 FORMULATION DU PROBLÈME H_∞ STANDARD	8
I-4 RESOLUTION DU PROBLÈME H_∞ STANDARD	10
I-5 APPLICATION	14
I-6 CONCLUSION	20
CHAPITRE II : Synthèse d'un correcteur par la théorie des jeux	22
II-1 INTRODUCTION	23
II-2 PROBLÈME DU JEU DIFFÉRENTIEL	23
II-2-1 Formulation du problème de manière générale	23
II-2-2 Problème du jeu quadratique linéaire	25
II-3 APPROCHE DE LA THÉORIE DES JEUX APPLIQUÉE AUX PROBLÈMES A INFORMATIONS PARTIELLES	26
II-3-1-1 Formulation du problème de l'atténuation de la perturbation par le jeu différentiel	26
II-3-2 Approche de la solution	28
II-4 SYNTHÈSE D'UN COMPENSATEUR INVARIANT DANS LA TEMPS PAR LA THÉORIE DES JEUX	35
II-5 CONCLUSION	37
CHAPITRE III Commande H_∞ appliquée en robotique	38
III-1 INTRODUCTION	39

III-2 FORMULATION DU PROBLEME AVEC LA PERFORMANCE H_∞	39
III-2-1 Commande optimale quadratique par modèle de référence	39
III-2-2 Formulation du problème avec la performance H_∞	44
III-2-3 Résolution du problème H_∞	49
III-3 CONCLUSION	61
CHAPITRE IV Application et Simulation	62
IV-1 INTRODUCTION	63
IV-2 MODELISATION DYNAMIQUE	63
IV-2-1 Approche d'EULER- LAGRANGE.....	63
IV-2-2 Modèle dynamique du PUMA 560	68
IV-3 SIMULATION	72
IV-3-1 Trajectoire de référence	72
IV-3-2 Spécification des incertitudes paramétriques, des perturbations et des frottements visqueux	73
IV-3-3 Simulation et interprétation des résultats	74
IV-4 CONCLUSION	99
CONCLUSION GENERALE	100

NOTATIONS ET SYMBOLES

\mathcal{R}	ensemble des nombres réels
C	ensembles des nombres complexes
A^T	matrice transposée de la matrice A
A^*	matrice conjuguée de la matrice A
A^{-1}	matrice inverse de la matrice A
$ \alpha $	valeur absolue de α
$Re(\alpha)$	partie réelle de $\alpha \in C$
$det(A)$	determinant de la matrice A
$\lambda(A)$	valeur propre de la matrice A
$\rho(A)$	rayon spectral de la matrice A
$\sigma(A)$	vecteur des valeurs singulières de la matrice A
$L_2(-\infty, +\infty)$	espace de Lebesgue dans le domaine temporel
$L_2(-\infty, 0)$	sous espace de $L_2(-\infty, +\infty)$
$L_2(0, +\infty)$	sous espace de $L_2(-\infty, +\infty)$
L_2	espace de Lebesgue dans le domaine fréquentiel
RL_2	sous espace de L_2 des fonctions réelles rationnelles, dont les vecteurs sont réels rationnels, strictement propres et ne possédant pas de pôles sur l'axe imaginaire
H_2	espace de Hardy: sous espace de L_2 des fonctions analytiques dans $Re(s) > 0$
RH_2	espace des vecteurs réels, rationnels stables et strictement propres
L_∞	espace de Lebesgue des fonctions bornées
RL_∞	espace des matrices propres, ne possédant pas de pôles dans $Re(s) < 0$

H_∞	espace de Hardy des fonctions analytiques dans $Re(s) < 0$
RH_∞	espace des matrices réelles rationnelles propres et stables
$\ A\ $	norme spectrale de A : $\ A\ = \sigma(A)$
$\ A\ _2$	norme H_2 de A
$\ A\ _\infty$	norme H_∞ de A

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
 BIBLIOTHEQUE — المكتبة
 Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE

○

Un des axes principaux de l'automatique moderne ces deux dernières décennies est sans doute la commande H_∞ . Des objectifs concernant la robustesse, l'atténuation des perturbations et tout problème de poursuite peuvent être atteints en minimisant certaines normes H_∞ .

Le problème H_∞ a été introduit pour la première fois en 1981 par ZAMES et se posait essentiellement comme un problème d'optimisation dans le domaine fréquentiel. Il s'en est suivie de nombreuses recherches et publications et le problème H_∞ a été présenté sous différents aspects dont le plus connue est celui proposé par J.C. DOYLE et al dans [9] dans le cadre des systèmes linéaires et invariants dans le temps. Le problème consisté alors à trouver un régulateur pour un système donné, qui assurerait la stabilité interne du système et minimiserait l'effet des perturbations externes sur les grandeurs à réguler.

La solution à ce problème s'opère à travers la résolution de deux équations algébriques de RICATTI et la structure du régulateur est celle d'un retour d'état - Observateur.

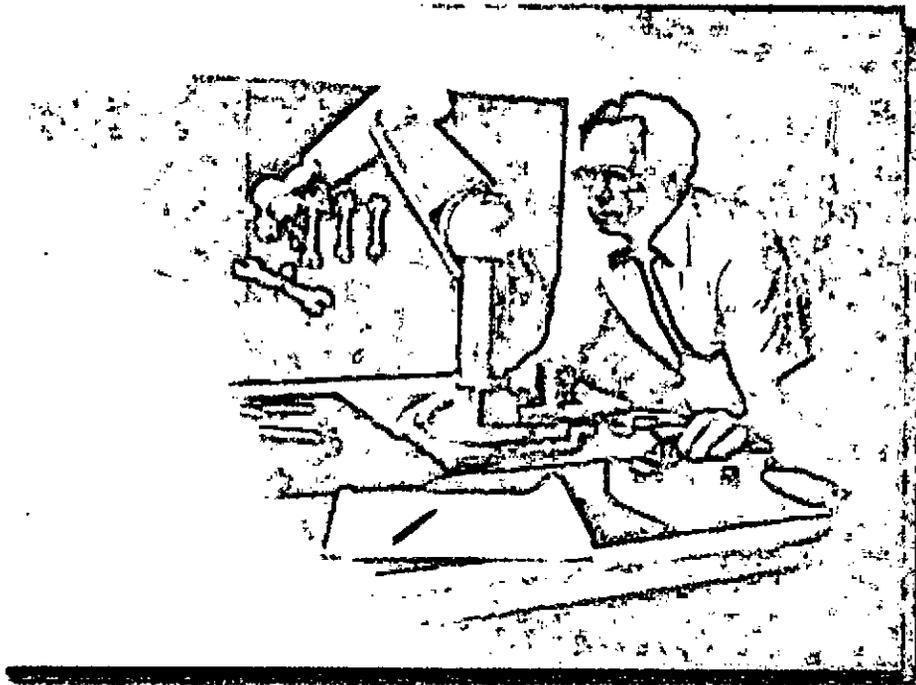
A partir de ces résultats, de nombreux auteurs ont pu étendre le problème H_∞ standard linéaire au cas non linéaire et présenté des solutions globales impliquant des équations différentielles partielles qui sont souvent difficiles à résoudre. On s'orienta alors vers d'autres approches pour contourner ces difficultés, et l'approche la plus intéressante se trouve être la théorie des jeux et plus particulièrement le jeu linéaire quadratique minimax développé essentiellement par T. BASAR et P. BERNARD, I. RHEE et J.L. SPEYER.

Dans ce travail nous allons tout d'abord présenter le problème H_∞ standard. Un exemple académique nous permettra d'illustrer les différentes étapes à suivre pour sa résolution.

Le second volet de notre travail fera l'objet d'un exposé général sur la théorie des jeux et où on fera le lien entre cette dernière et le problème H_∞ standard.

Le troisième chapitre sera consacré à l'élaboration d'une loi de commande robuste appliquée à un bras manipulateur en utilisant les techniques de H_∞ . Pour tester les performances de cette loi de commande, nous procéderons à différentes simulations. Les résultats de celles-ci seront exposés dans le quatrième et dernier chapitre.

CHAPITRE I



Problème H_∞ standard

I-1 INTRODUCTION :

Une des préoccupations majeures dans l'automatique est l'analyse et la conception de régulateurs pour des systèmes multivariables. Or si pour les systèmes monovariables, les outils de l'automatique classique, à savoir le diagramme de BODE, lieux d'EVANS et le critère de stabilité de NYQUIST sont des moyens d'analyse efficaces, il n'en n'est pas de même pour les systèmes multivariables. En effet, la fonction de transfert d'un système multivariable est une matrice et la notion de pôles ou de zéros pose problème. Afin d'éviter tout cela, on se propose d'utiliser la représentation d'état pour les systèmes multivariables, car la seule différence entre la représentation d'état de ces dernières et des systèmes monovariables se trouve dans le nombre de colonnes de la matrice B (nombre d'entrées) et le nombre de lignes de la matrice C (nombre de sorties). Nombre d'automaticiens trouvèrent alors dans cette approche temporelle, un moyen d'analyse subtil pour la synthèse de commandes des systèmes multivariables. Les commandes LQR et LQG en sont des exemples.

Pour autant, l'analyse fréquentielle n'a pas été délaissée et on introduisit de nouvelles notions qui sont des extensions des notions de l'automatique classique comme le diagramme de BODE des valeurs singulières, lieux caractéristiques (lieux d'EVANS pour les systèmes SISO), et tout récemment la notion de la norme H_∞ et par là, la commande H_∞ .

Le problème de la commande H_∞ a été formulée la première fois par ZAMES au début des années 80 dans [33] et se posait essentiellement comme une méthode d'optimisation dans le domaine fréquentiel pour la synthèse de commandes robustes. Depuis le problème H_∞ a été reformulé et présenté sous différents aspects, et des recherches ont été mené dans le but de trouver de nouvelles techniques pour résoudre le problème d'optimisation H_∞ en vue de synthétiser des lois de commandes robustes.

Dans ce chapitre consacré au problème d'optimisation H_∞ dans le cadre des systèmes linéaires invariants dans le temps, nous allons tout d'abord donner les notions essentielles se rapportant à la norme H_∞ , puis poser le problème d'optimisation H_∞ et enfin présenter l'algorithme permettant de résoudre ce problème.

I-2 CONCEPTS MATHÉMATIQUES :

Dans ce paragraphe, on va définir la norme H_∞ d'une fonction de transfert, et pour des raisons de simplicité et une meilleure compréhension, on se limitera au cas monovariabile.

Mais tout d'abord définissons l'espace HARDY H_∞ .

L'espace HARDY H_∞ est l'espace des fonctions complexes $F(S)$ de la variable S qui est analytique et bornée dans le demi-plan droit, $Re S > 0$; bornée veut dire qu'il existe un nombre réel b tel que :

$$|F(S)| \leq b, \quad Re S > 0$$

On définit alors la norme H_∞ de $F(S)$ et qui est :

$$\|F\|_\infty = \text{Sup}\{F(S) : Re S > 0\} \quad (\text{I-1})$$

Si maintenant la fonction de transfert $F(S)$ est réelle, rationnelle, propre ($|F(\infty)| < \infty$) et stable, on dira que $F \in RH_\infty$ tel que RH_∞ représente l'ensemble des fonctions réelles, rationnelles, propres et stables appartenants à l'espace H_∞ .

Dans l'expression (I-1), on peut remplacer S par $j\omega$ et aboutir à l'expression suivante :

$$\|F\|_\infty = \text{Sup}\{F(j\omega) : \omega \in \mathbb{R}\} \tag{I-2}$$

Il apparaît alors à partir de cette expression et en utilisant le lieu de NYQUIST de $F(S)$ que $\|F\|_\infty$ représente la distance entre l'origine et le point le plus éloigné du lieu de NYQUIST.

Cette interprétation de la norme H_∞ est très importante, car elle permet de ramener le problème de stabilité d'un système à une contrainte sur la norme H_∞ , et c'est ce qu'on va voir à travers les deux exemples suivants :

Exemple 1 : [10]

Soit le système de la figure suivante :

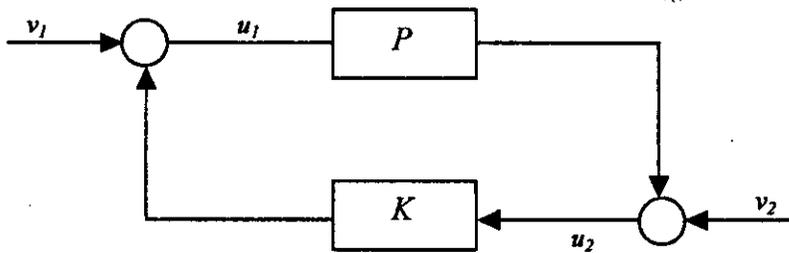


Figure (I-1)

$P(S)$ et $K(S)$ appartiennent à RH_∞ .

Le système de la figure (I-1) est dit stable intérieurement si les quatre fonctions de transfert de v_1 et v_2 à u_1 et u_2 sont stables [10]. Considérons par exemple la fonction de transfert de v_1 à u_2 qui est égale à $(1 - PK)^{-1}$. Le critère de NYQUIST stipule que le système est intérieurement stable si et seulement si le lieu de NYQUIST de PK ne passe pas par, ou n'encercle pas le point $S = 1$. Une condition suffisante alors pour la stabilité interne est que $\|PK\|_\infty < 1$, et elle est issue du théorème du petit gain.

Voyons maintenant le problème stabilisation robuste et introduisons un terme $\Delta P(S)$ dans la

fonction de transfert et qui représenterait les incertitudes du système à commander où les dynamiques négligées comme il est indiqué sur la figure (I-2a).

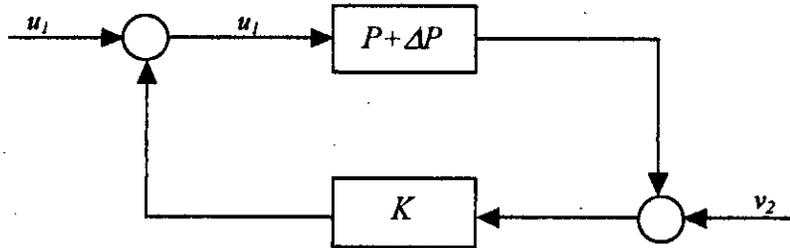


Figure (I-2a)

On supposera que P , ΔP et K sont réels, rationnels, P , ΔP strictement propres et stables et K propre. On supposera aussi que le système est intérieurement stable pour $\Delta P = 0$.

La question qu'on peut se poser est : quelle est la limite de $|\Delta P|$ au delà de la quelle la stabilité interne n'est plus assurée ?

Si on suppose qu'il existe une fonction $R \in RH_\infty$ tel que :

$$|\Delta P(j\omega)| < |R(j\omega)| \quad \text{pour } 0 < \omega \leq \infty$$

qui est équivalent à :

$$\|R^{-1} \Delta P\|_\infty < 1 \tag{I-3}$$

Le problème sera résolu comme suit :

Transformer le schéma de la figure (I-2a) pour aboutir au schéma de la figure (I-2b) ci-dessous :

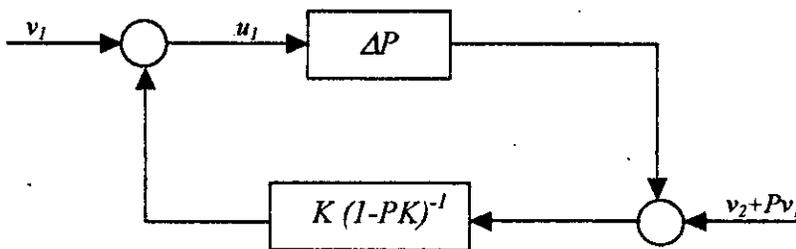


Figure (I-2b)

A partir de ce schéma, poser la condition suffisante pour la stabilité interne issue de la théorie du petit gain

$$\left\| \Delta P K (I - P K)^{-1} \right\|_\infty < 1 \quad (\text{I-4})$$

En utilisant la relation (I-4), on aboutit à la condition suffisante suivante :

$$\left\| R K (I - P K)^{-1} \right\|_\infty < 1 \quad (\text{I-5})$$

Exemple II :

Pour le deuxième exemple, on va définir un autre espace de Hardy et qui est l'espace H_2 [10]. L'espace de Hardy H_2 est l'espace des fonction $F(S)$ analytiques dans $Re(S)$ et qui vérifient la condition suivante :

$$\|F\|_2 = \left[\text{Sup} (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\xi + j\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2} < \infty$$

$\|F\|_2$ représente la norme H_2 de F .

On définit aussi l'espace RH_2 qui est l'espace des fonctions réelles, rationnelles, stables et strictement propres.

Pour de telles fonctions :

$$\|F\|_2 = \left[(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2} \quad (\text{I-6})$$

Considérons maintenant un signal $x(t)$ (zéro pour $t < 0$) et supposons que sa transformée de LAPLACE $\hat{x}(S)$ appartient à RH_2 , le théorème de PLANCHEREL stipule que :

$$\int_0^{\infty} \hat{x}(t)^2 = \|\hat{x}\|_2^2$$

$\|\hat{x}\|_2^2$ peut être interprétée comme l'énergie du signal $x(t)$.

Maintenant, considérons un système de fonction de transfert $F(S) \in RH_\infty$. Le signal d'entrée et le signal de sortie sont notés respectivement $x(t)$ et $y(t)$. Il est évident de constater que si $\hat{x} \in RH_2$ et $\|\hat{x}\|_2 = 1$ alors $\hat{y} \in RH_2$ et $\|\hat{y}\|_2 \leq \|F\|_\infty$.

De ce fait la norme H_∞ de F est :

$$\text{Sup} \{ \|\hat{y}\|_2, \hat{x} \in RH_2, \|\hat{x}\|_2 = 1 \}$$

et de manière plus générale :

$$\|F\|_\infty = \text{Sup} \{ \|F x\|_2, \hat{x} \in RH_2, \|\hat{x}\|_2 = 1 \} \quad (\text{I-7})$$

Pour illustrer l'utilité de cette relation, posons le problème de l'atténuation de l'effet de perturbation du système de la figure (I-1) et supposons que $v_1 = 0$ et v_2 représente cette perturbation qui intervient à la sortie du système. Notre objectif est d'atténuer l'effet de v_2 sur u_2 . La fonction de transfert de v_2 sur u_2 est la fonction de sensibilité :

$$S = (I - PK)^{-1}$$

Admettons que u_2 est un signal qui n'est pas fixe, mais une fonction de la classe :

$$\{v_2 : v_2 = W x \text{ pour } x \in RH_2, \|x\|_2 \leq 1\} \quad (\text{I-8})$$

où $W, W^{-1} \in H_\infty$; ceci étant, le signal de perturbation consiste en tout les signaux v_2 sur H_2 tel que :

$$\|W^{-1} v_2\|_2 \leq 1 \quad (\text{I-9})$$

L'inégalité (I-9) peut être interprétée comme une contrainte sur la pondération de l'énergie de v_2 .

L'objectif sera donc de minimiser l'énergie de u_2 pour la pire perturbation v_2 de la classe (I-8). Ce qui est équivalent en vertu de (I-7) à minimiser $\|WS\|_\infty$, c'est à dire la norme H_∞ de la fonction de sensibilité pondérée. Dans la synthèse du régulateur P et W sont connues et reste donc à déterminer K qui minimiserait $\|WS\|_\infty$ tout en garantissant la stabilité du système.

Pour récapituler, nous avons vu à travers les deux exemples précédents que certains objectifs lors de la synthèse de commandes, comme la stabilité robuste ou l'atténuation des effets de perturbations externes, peuvent être atteints en minimisant certaines normes H_∞ .

I-3 FORMULATION DU PROBLEME D'OPTIMISATION H_∞ : PROBLEME H_∞ STANDARD

Le schéma de base sur lequel a été développée la théorie H_∞ ou du moins le plus utilisé est celui de la figure (I-3) qu'on appelle "Schéma Bloc-Standard"

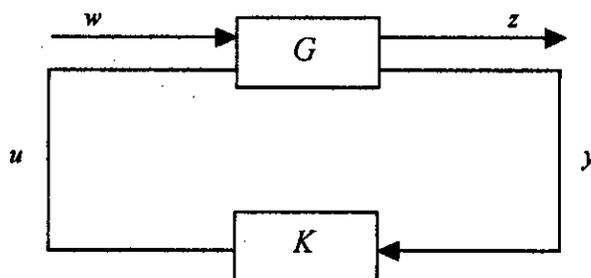


Figure (I-3)

Il a été proposé pour la première fois en 1984 par J.DOYLE dans [8].

On distingue sur ce schéma deux blocs principaux :

Le bloc (G) qui représente le modèle général du processus, et le bloc (K) qui représente le régulateur à synthétiser.

On distingue aussi les différents signaux (w , z , u , y) qui agissent sur le système où le caractérisent, i.e. les entrées du système et ses sorties.

Les entrées se décomposent en deux catégories :

- Les signaux de commande u .
- Les signaux externes regroupés dans le vecteur w et qui peuvent être ou des consignes ou des perturbations externes. Le plus souvent w inclut des sources de perturbation influant sur le système et dont on voudrait atténuer l'effet sur les grandeurs à réguler.

Les sorties, elles aussi se décomposent en deux classes :

- La grandeur à contrôler z . Typiquement, il s'agira des écarts entre les consignes et les grandeurs à réguler.
- Les mesures qui se définissent comme l'ensemble de toutes les entrées du régulateur K , exprimées par le vecteur y et qui inclut les mesures directes des perturbations ou des composants d'état du système à commander.

Il apparaît clairement maintenant que le modèle générale G comprend le modèle du processus proprement dit et le modèle générateur de perturbations. Il peut inclure des pondérations à caractère fréquentiel. G est appelé aussi modèle augmenté.

Décomposons G de la manière suivante :

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

D'après le schéma standard, on a :

$$\begin{aligned} z &= G_{11} w + G_{12} u \\ y &= G_{21} w + G_{22} u \\ u &= K y \end{aligned} \tag{I-10}$$

G et K sont supposées propres, réelles et rationnelles.

Pour définir ce que signifie pour K stabiliser G , introduisons deux nouvelles entrées v_1 et v_2 comme il est indiqué sur la figure (I-4) :

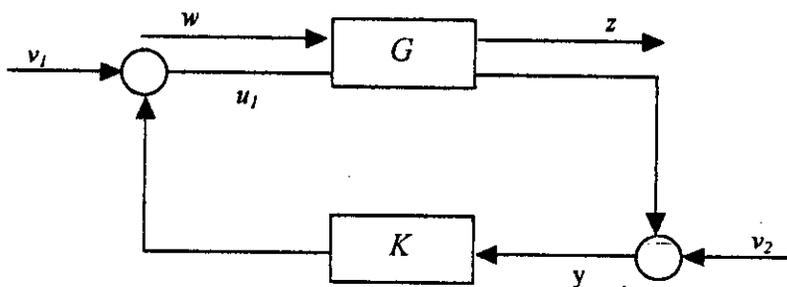


Figure (I-4)

L'équation reliant les trois entrées w, v_1, v_2 aux signaux z, v, y est :

$$\begin{bmatrix} I & -G_{12} & 0 \\ 0 & I & -K \\ 0 & -G_{22} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_{11} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -G_{21} & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{I-11}$$

On supposera que la matrice $\begin{bmatrix} I & -G_{12} & 0 \\ 0 & I & -K \\ 0 & -G_{22} & I \end{bmatrix}$ qui est réelle, rationnelle et propre possède une matrice inverse réelle, rationnelle et propre pour tout K . Une condition suffisante pour cela est que G_{22} soit strictement propre. De ce fait, les neuf fonctions de transfert de w, v_1, v_2 à $z,$

v, y sont propres. Si elles sont stables, c'est à dire qu'elles appartiennent à RH_∞ on dira que K stabilise G . Cette notion est une notion usuelle de la stabilité interne. Le régulateur K est dit régulateur admissible.

Le problème standard peut être formulé de la manière suivante :

Trouver K , réelle, rationnelle et propre qui minimise la norme H_∞ de la fonction de transfert de w à z $T_{wz} = [G_{11} + G_{21}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}]$, sous la contrainte que K stabilise G .

I-4 RESOLUTION DU PROBLEME H_∞ STANDARD : [9]

La solution au problème H_∞ standard que nous allons présenter et celle qui a été proposée par J.DOYLE et K.GLOVER dans [9] dans le cadre des systèmes linéaires invariants dans le temps. Il est important alors de distinguer deux problèmes différents : le problème H_∞ standard et le problème H_∞ optimal.

En effet, dans le paragraphe précédent, nous avons dit que le problème standard était de trouver un régulateur admissible K qui minimiserait la norme H_∞ de la fonction de transfert T_{wz} , alors qu'en réalité ce problème est dit problème H_∞ optimal. Ce n'est qu'un abus de langage de le présenter sous le nom de H_∞ standard. Le problème H_∞ standard consiste en fait à trouver un régulateur K admissible telle que la norme H_∞ de la fonction de transfert T_{wz} soit inférieur à γ , γ étant un réel positif donné. Le problème H_∞ optimal revient à trouver γ optimal au dessous duquel il n'existe pas de solution au problème H_∞ standard.

Le régulateur correspondant au problème H_∞ optimal est dit optimal, et celui correspondant au problème H_∞ standard, sous-optimal.

L'algorithme de DOYLE-GLOVER résout le problème standard à partir d'une nouvelle représentation d'état du système augmenté G et qui est donnée par les équations suivantes :

$$x = Ax + B_1 w + B_2 u \tag{I-12}$$

$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \tag{I-13}$$

$$y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \tag{I-14}$$

Avec $\dim(w) = m_1$; $\dim(u) = m_2$; $\dim(z) = P_1$; $\dim(y) = P_2$.

Les hypothèses suivantes sont émises :

i)- (A, B_1) est stabilisable et (C_1, A) est détectable.

ii)- (A, B_2) est stabilisable et (C_2, A) est détectable.

iii)- $\text{Rang } D_{12} = m_2$, $\text{Rang } (D_{21}) = P_2$.

$$\text{iv)- } \text{Rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m_2 \quad \forall \omega \in R$$

$$\text{v)- } \text{Rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + p_2 \quad \forall \omega \in R$$

$$\text{vi)- } D_{12}' [C_1 \quad D_{21}] = [0 \quad I]$$

$$\text{vii)- } \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}' = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$\text{viii) } D_{11} = 0, D_{22} = 0.$$

Interprétation des hypothèses :

- L'hypothèse (i) et (ii) sont nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un régulateur K stabilisant.
- L'hypothèse (iii) est suffisante pour assurer que le régulateur soit propre.
- L'hypothèse (iv) signifie que le sous-système G_{12} ne doit pas avoir des zéros de transmissions sur l'axe imaginaire si (C_1, A, B_2) est une réalisation minimale.
- L'hypothèse (v) impose à ce que le système proprement dit n'est pas de pôles sur l'axe imaginaire. Si c'est le cas, il conviendra de les stabiliser d'une manière artificielle.
- L'hypothèse (vi) signifie que $C_1 x$ et $D_{12} w$ sont orthogonaux de sorte qu'il y ait pas de pondérations sur les termes croisés en x et w dans z et que la pondération sur u est normalisée.
- L'hypothèse (vii) est duale de l'hypothèse (vi).
- L'hypothèse (viii) signifie qu'il n'y a pas de terme direct entre le signal perturbateur w et la sortie Y . Cette hypothèse simplifie le problème. Si cette condition n'est pas vérifiée, il est possible de reformuler le problème pour qu'elle le soit, comme il a été démontré dans [26] et [33].

La solution au problème H_∞ standard sollicite deux matrices Hamiltoniennes H_∞, J_∞ définies comme suit :

$$H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^2 B_1 B_1' - B_2 B_2' \\ C_1' C_1 & -A' \end{bmatrix} \quad \text{(I-15)}$$

$$J_\infty = \begin{bmatrix} A' & \gamma^2 C_1' C_1 - C_2' C_2 \\ B_1 B_1' & -A \end{bmatrix} \quad \text{(I-16)}$$

Théorème (I-1) : [9]

Il existe un régulateur admissible K_{SOP} tel que $\|T_{wz}\|_\infty < \gamma$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

a) $H_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ et $X_\infty = \text{Ric}(H_\infty) \geq 0$

b) $J_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ et $Y_\infty = \text{Ric}(J_\infty) \geq 0$

c) $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$

$H_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ signifie que X_∞ est solution de l'équation de RICCATI suivante :

$$A' X_\infty + X_\infty A + X_\infty (\gamma^2 B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty + C_1^T C_1 = 0 \quad (\text{I-17})$$

De même que pour la condition b), Y_∞ est solution de l'équation de RICCATI suivante :

$$A Y_\infty + Y_\infty A^T + Y_\infty (\gamma^2 C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y_\infty + B_1 B_1^T = 0 \quad (\text{I-18})$$

Le symbole ρ de la condition (c) désigne le rayon spectrale.

L'interprétation des conditions (a), (b), (c) sont plus détaillées dans l'annexe A.

Si les conditions citées sont vérifiées, le contrôleur admissible K_{SOP} est donné par la représentation d'état suivante :

$$K_{SOP} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & 0 \end{array} \right] \quad (\text{I-19})$$

Où :

$$\hat{A} = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 \quad (\text{I-20})$$

$$L_\infty = -Y_\infty C' \quad , \quad F_\infty = B_2' X_\infty \quad (\text{I-21})$$

$$Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} \quad (\text{I-22})$$

Ce qui peut être reformulé par l'équation d'état suivante :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1\hat{w} + B_2u + Z_\infty L_\infty (C_2\hat{x} - y) \quad (\text{I-23})$$

où :

$$u = F_\infty \hat{x} \quad (\text{I-24})$$

et :

$$\hat{w} = \gamma^{-2} B_1^T X_\infty \hat{x} \quad (\text{I-25})$$

Il apparaît alors à partir des équations (I-23) à (I-25) que la structure du régulateur K_{SOP} est celle d'un retour d'état-Observateur où \hat{x} s'interprète comme une estimée de l'état x , F_∞ le gain du retour d'état et $Z_\infty L_\infty$ le gain de l'observateur. La structure du régulateur K_{SOP} vérifie de façon évidente le principe de séparation. La différence majeure entre l'observateur donné par l'équation (I-23) et le filtre de KALMAN réside dans la présence du terme \hat{w} qui s'interprète comme une estimée de la pire perturbation possible.

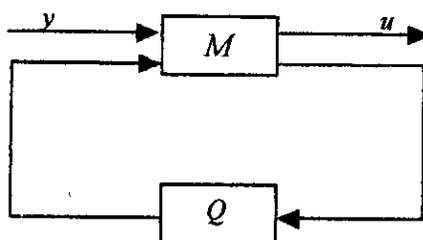
Si γ tend vers l'infini, les équation (I-17) et (I-18) tendent vers les équations de RICCATI associée au filtre de KALMAN, Z_∞ tend vers l'identité et \hat{w} vers 0. Dans ce cas, le régulateur K_{SOP} convergerait vers le régulateur LQG minimisant le critère $J = E \left\{ \int_0^{\infty} z^T(t) z(t) dt \right\}$ (voir référence [7]).

K_{SOP} est appelé le régulateur central, son ordre est le même que celui du système augmenté. A partir de ce régulateur, il est possible de trouver tout les régulateurs K'_{SOP} pour lesquels on a $\|T_{wz}\|_\infty \leq \gamma$.

Le théorème suivant donne une paramétrisation de ces régulateurs.

Théorème (I-2) : [9]

Si la condition (a), (b), (c) du théorème (I-1) sont vérifiées, alors l'ensembles des régulateurs admissibles pour lesquels on a $\|T_{wz}\|_\infty < \gamma$ est égale à l'ensemble de toutes les matrices de transfert de y à u du schéma ci-dessous :



Avec :

$$M_\infty(S) = \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_2 \\ \hline F_\infty & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{array} \right] \quad (\text{I-26})$$

Où :

$$Q \in RH_\infty, \quad \|Q\|_\infty < \gamma$$

Ces régulateurs sont paramétrisés à travers une transformation linéaire fractionnelle fixe par un paramètre Q libre. Le régulateur central est obtenu par $Q = 0$.

En résumé, les étapes à suivre pour la résolution du problème H_∞ standard sont les suivantes :

1. former la représentation d'état donné par les équations (I-12) et (I-14).
2. voir si les hypothèses i à viii sont vérifiées. Si elles ne le sont pas, reformuler le problème en rajoutant des pondérations.
3. sélectionner γ positif.
4. résoudre les équations de RICCATI (I-17) et (I-18), vérifier si elles sont semi-définies positives ; et la condition sur le rayon spectral.
5. si les conditions citées ci-dessus sont vérifiées, diminuer γ et répéter les opérations 4 et 5 jusqu'à ce qu'on atteigne la solution optimale.

I-5 APPLICATION :

Pour mieux comprendre le problème H_∞ standard et illustrer les différentes étapes à suivre pour le résoudre, nous avons procédé à l'application suivante :

Soit le système donné par la figure (I-5).

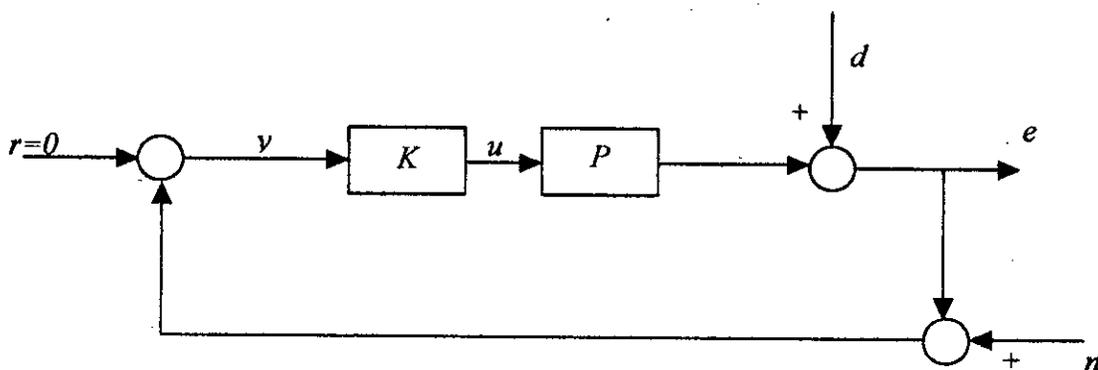


Figure (I-5)

- P représente le système proprement dit et K le régulateur.
- e la grandeur à réguler.
- d un signal perturbateur.
- n les bruits de mesures.
- u la sortie du régulateur c'est à dire la commande.

Notre but dans la synthèse du régulateur est d'assurer la stabilité du système global et d'éliminer ou du moins atténuer les effets de d et n sur e .

D'après l'algèbre des schémas fonctionnels, on a :

$$e(S) = \frac{1}{1+P(S)K(S)}d(S) - \frac{P(S)K(S)}{1+P(S)K(S)}n(S)$$

$S = \frac{1}{1+P(S)K(S)}$ est la fonction de sensibilité.

$T = \frac{P(S)K(S)}{1+P(S)K(S)}$ est la fonction de sensibilité complémentaire.

Si on suppose que d est un signal riche en basses fréquences (ce qui est souvent le cas), et que n est riche en hautes fréquences, le problème de rejection de ces deux perturbations sera résolu en minimisant les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire dans les bandes passantes correspondantes. Ce qui revient donc à minimiser S en basses fréquences et T en hautes fréquences, et conformer le lieu de BODE de la boucle ouverte $P(S)K(S)$, à l'allure de la figure (I-6), c'est à dire un gain de la boucle ouverte important en basses fréquences, et faible en hautes fréquences. C'est ce qu'on appelle faire un "Loop-Shaping".

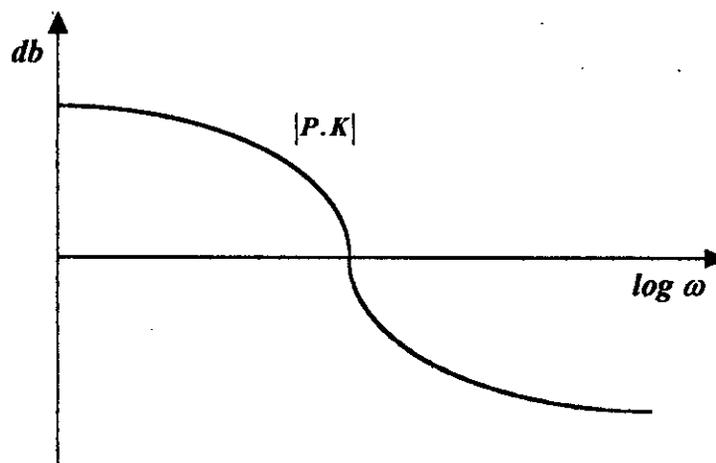


Figure (I-6)

Revenons maintenant au problème H_∞ standard et essayons de remodeler le schéma de la figure (I-5) pour aboutir à un schéma équivalent au schéma standard de la figure (I-3).
En faisant le choix des entrées et des sorties suivant :

$$w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix}; \quad y = n - e; \quad z = \begin{bmatrix} e \\ u \end{bmatrix}$$

Nous aboutissons au schéma standard équivalent de la figure (I-7).

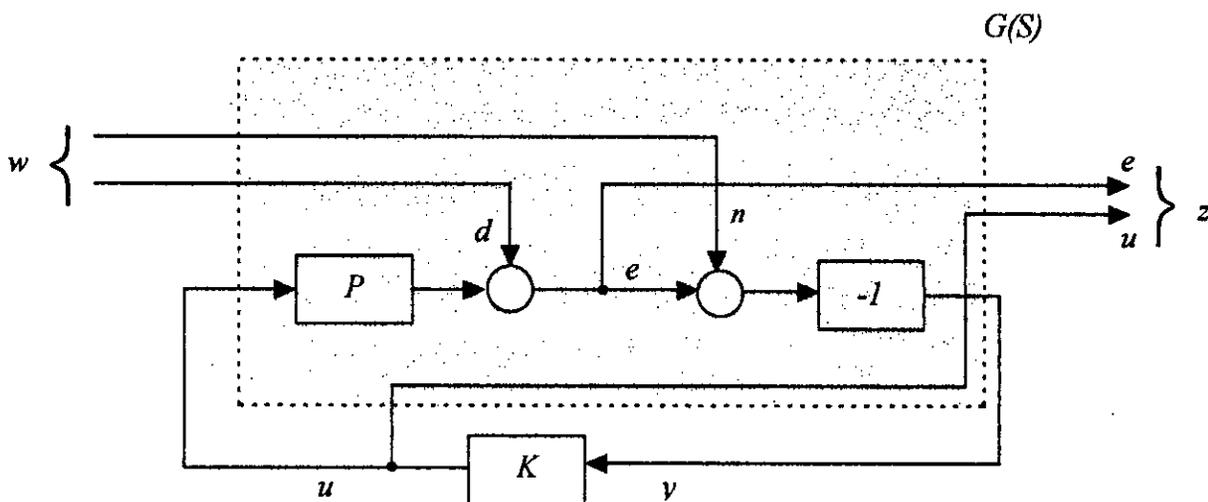


Figure (I-7)

Supposons que P représente un double intégrateur, cela se traduirait par le schéma de la figure (I-8).

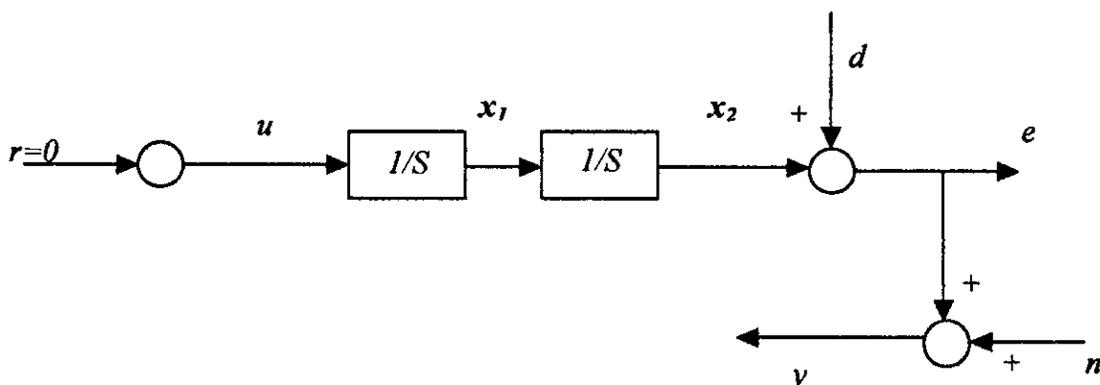


Figure (I-8)

A partir de ce schéma et en tenant compte du choix des entrées et des sorties, nous aboutissons aux équations suivantes :

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

$$z = \begin{bmatrix} e \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

$$y = -e - n = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix}$$

Ces équations correspondent à la représentation d'état proposée pour la résolution du problème H_∞ standard et donnée par les équations (I-12) à (I-14), d'où :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad D_{22} = 0$$

Le problème H_∞ standard a été résolu en utilisant le logiciel de programmation MATLAB 4.2 sous Windows, et après plusieurs itérations sur γ nous avons abouti à un γ optimal égal à 1.3553. Le régulateur H_∞ correspondant est :

$$K_\infty(S) = \frac{10^3(8.36841.S + 0.83684)}{10^4(0.0001.S^2 + 1.10383.S + 2.01671)}$$

Les figures (I-9) et (I-10) ci-dessous donnent respectivement les diagrammes de BODE de la fonction de sensibilité S et la fonction de sensibilité complémentaire.

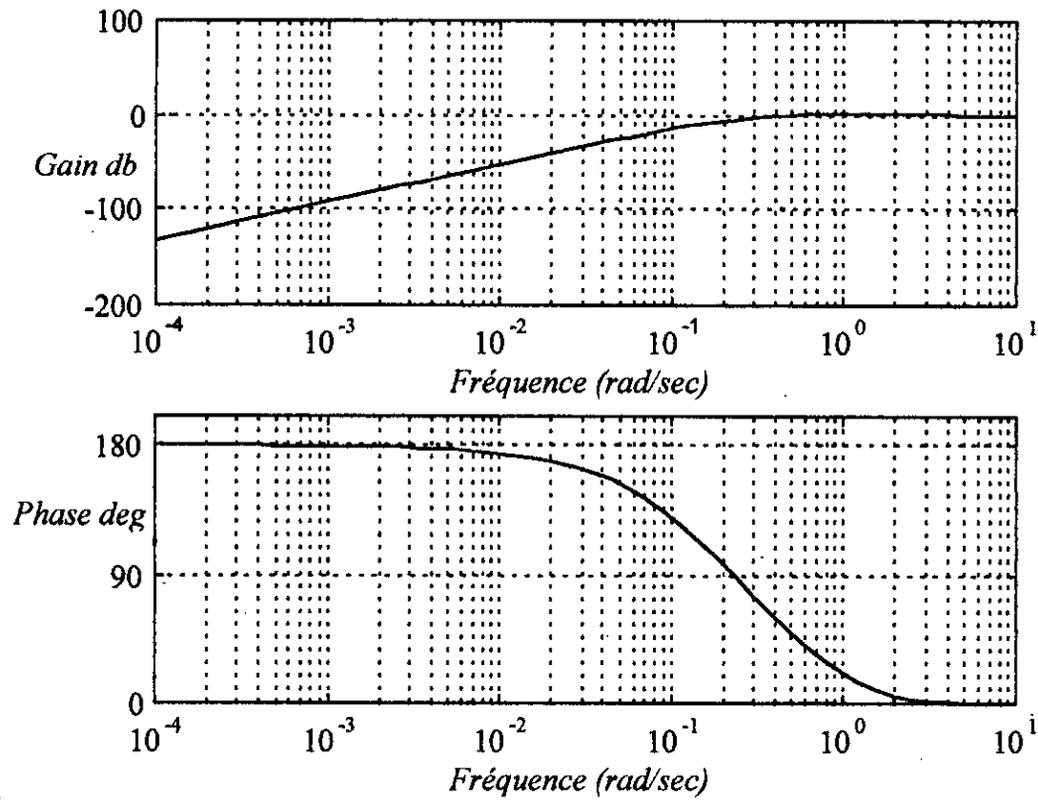


Figure (I-9)

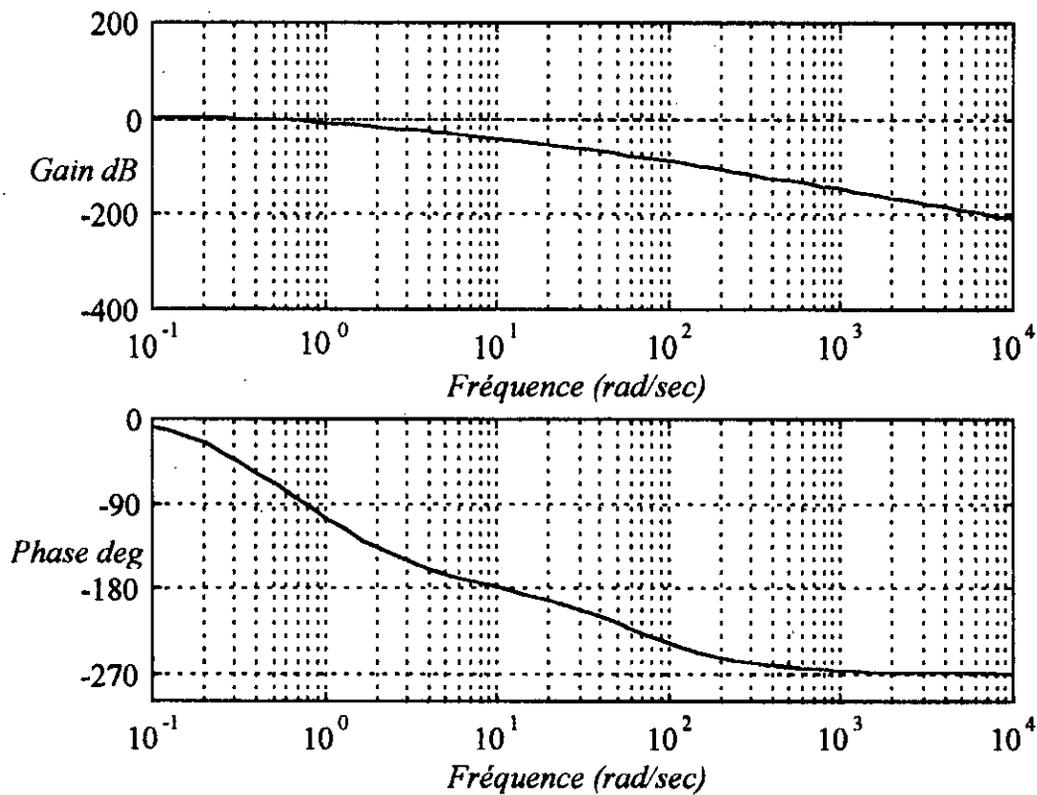


Figure (I-10)

On constate que les allures de ces deux diagrammes sont conformes aux allures souhaitées, c'est à dire pour S un faible gain en basses fréquences, et pour T un faible gain en hautes fréquences.

Pour attester de ces résultats, nous avons simulé le système pour un échelon de perturbation d , celle-ci est atténuée à partir de 20 secondes et n'influe pratiquement plus sur la sortie e (Voir figure (I-11)).

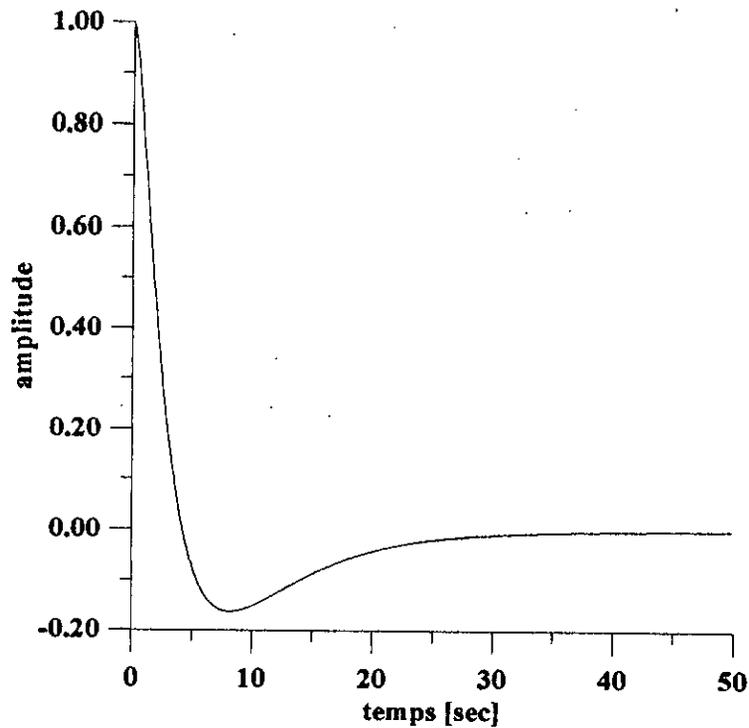
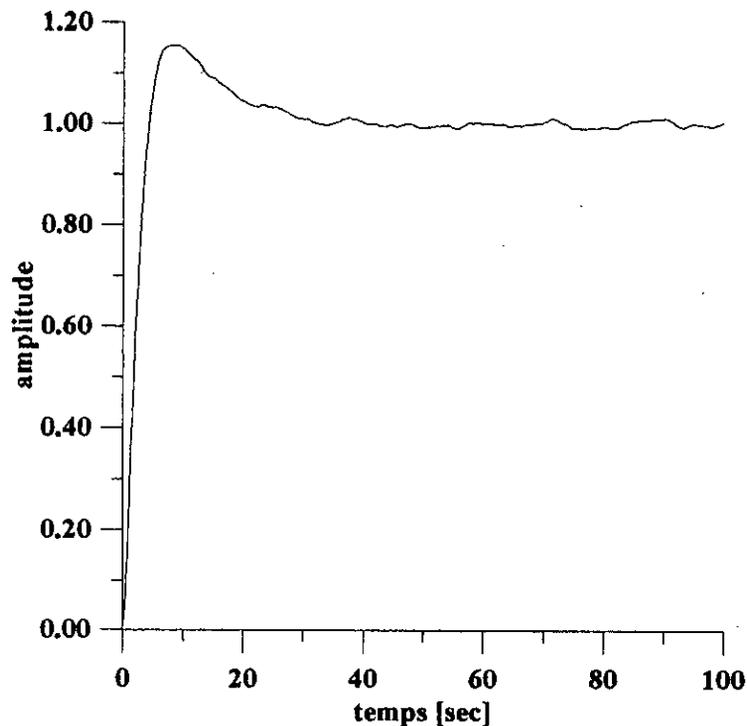


Figure (I-11)

Nous avons effectué une autre simulation, concernant la perturbation n qui représente un bruit blanc. On constate alors que pour un échelon de référence, l'effet de n est considérablement atténué. (Voir figure (I-12)).

*Figure (I-12)*

En somme le régulateur K_∞ qu'on a synthétisé, répond aux performances désirées.

Remarque I-1:

La résolution du problème H_∞ standard et la synthèse du régulateur a été effectuée en utilisant le logiciel de programmation MATLAB 4.2 sous Windows. Ce logiciel contient, en plus des outils mathématiques intéressants tels que la résolution des équations de RICATTI, permettant ainsi la programmation de la solution du problème de la commande H_∞ des toolbox destinés aux problèmes de la commande robuste tout particulièrement H_∞ . Il s'agit des toolbox Robust et Mu-tools.

I-6 CONCLUSION :

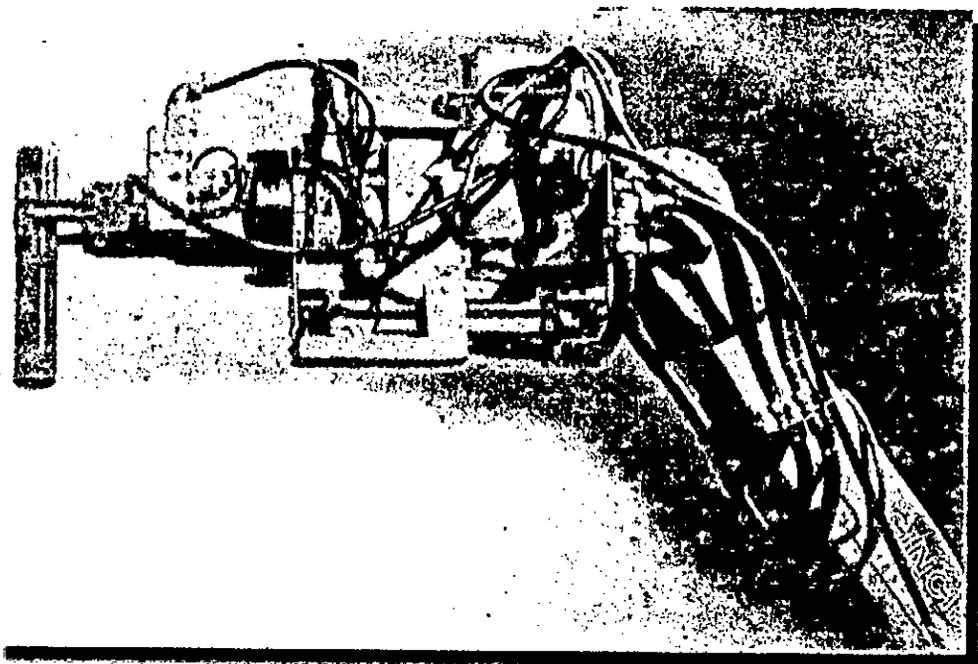
Nous avons essayé à travers ce chapitre de donner les notions de base se rapportant à la norme H_∞ et la présenter comme un moyen et un outil intéressant dans la conception et la synthèse de régulateurs. Le problème H_∞ standard est une formulation générale, qui peut inclure différents objectifs, tel l'atténuation des effets de perturbations, la minimisation de la fonction de transfert entre la consigne et le signal d'erreur dans le cas de la régulation, ou encore la stabilisation robuste de systèmes sujet à des incertitudes.

La solution présentée s'opère principalement à travers la résolution de deux équations algébriques de RICCATI, c'est à dire les équations (I-17) et (I-18), et le régulateur issu de cette théorie possède la structure d'un retour d'état -Observateur.

Ce chapitre est un prélude au thème principal de notre travail qui est la technique de la commande H_∞ non linéaire appliquée à un robot manipulateur.

Dans le prochain chapitre qui concerne la théorie des jeux, on montrera que le problème H_∞ standard et équivalent au jeu linéaire quadratique et que la synthèse du régulateur H_∞ fait appel aux techniques de la théorie du jeu linéaire quadratique.

CHAPITRE II



**Synthèse d'un Correcteur
par la théorie des jeux**

II-1 INTRODUCTION :

Le jeu différentiel est un problème d'optimisation dynamique multiple, dans lequel les joueurs ont des intérêts (objectifs) en conflit. Chaque joueur essaye de minimiser (optimiser) son propre index de performances, si les intérêts des joueurs sont directement opposés, on fait ce que l'on appelle un jeu de sommation zéro. La stratégie optimale adoptée généralement pour le jeu différentiel reste celle de la théorie des jeux à point chargé (saddle point) du problème minimax. Dans ce chapitre nous allons commencer par introduire la notion du problème du jeu différentiel, en particulier le jeu quadratique linéaire (sommation zéro), puis appliquer la théorie des jeux pour résoudre le problème du jeu à information partielle, et enfin nous verrons dans la dernière section que le correcteur obtenu à partir de la théorie des jeux est équivalent, sous certaines conditions, à un régulateur H_∞ explicité dans le chapitre I.

II-2 PROBLEME DU JEU DIFFERENTIEL :

Dans cette section, nous introduirons le concept de base du jeu différentiel, ainsi, nous aborderons le problème du jeu à information complète et le jeu quadratique linéaire.

II-2-1 Formulation du problème de manière générale : [19]

Le jeu différentiel consiste à trouver les stratégies $(u_1^*, u_2^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i^*, \dots, u_N^*)$ tel que :

$$J_i(u_1^*, u_2^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i^*, \dots, u_N^*) \leq J_i(u_1^*, u_2^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_N^*) \quad i=1,2,\dots,N. \quad \text{(II-1)}$$

Où u_i est un vecteur de dimension p_i et J_i est l'index de performances que le joueur u_i essaye de minimiser (maximiser). Les index de performances J_i sont de la forme :

$$J_i = \phi_i(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L_i(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)) dt \quad i=1,2,\dots,N.$$

où $(x(t_f), t_f)$ est soumise à la contrainte finale $\psi(x(t_f), t_f) = 0$ et $x(t)$ est assujetti à la contrainte dynamique :

$$\dot{x} = f(x, u_1, \dots, u_N, t) \text{ et } x(t_0) = x_0.$$

avec $u_i(t) \in U_i$, l'ensemble des stratégies admissibles, dépendantes des informations disponibles pour le joueur u_i à l'instant t . Lorsque $u_i(t)$ est en fonction de $x(t)$ à l'instant t , on dit que l'information est complète, par contre, si $u_i(t)$ est une fonction des mesures historiques, on dit que l'information est partielle i.e. que $u_i(t)$ est une fonction de y_{it} et t , avec:

$y_{ii} = \{y_i(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$ où y_i est sujet au bruit de mesure s .

soit :

$$y_i(t) = h_i(x(t), t) + v_i(t).$$

si pour tout t_0, x_0 et u_i : $\sum_{i=1}^N J_i = 0$, on dit que le jeu est à sommation zéro.

Pour deux joueurs, la condition du jeu sommation zéro devient celle du point chargé :

$$J(u^*, w) \leq J(u^*, w^*) \leq J(u, w^*) \tag{II-2}$$

Où :

$$u = u_1, w = u_2 \text{ et } J = J_1 = -J_2$$

La stratégie du point chargé peut être obtenue, en résolvant les deux problèmes d'optimisation suivants :

$$\min_u \max_w J(u, w) \tag{II-3}$$

et

$$\max_w \min_u J(u, w) \tag{II-4}$$

La solution aux problèmes (II-3) et (II-4) produit une stratégie du point chargé si :

$$\min_u \max_w J(u, w) = \max_w \min_u J(u, w) \tag{II-5}$$

La solution de l'équation (II-5) est appelée le point chargé dans la théorie des jeux. [19]

Définissons l'Hamiltonien H par : [19]

$$H = L + \lambda^T f \quad \text{et} \quad \Phi(x(t_f), t_f) = \phi(x(t_f), t_f) + v^T \psi(x(t_f), t_f)$$

En utilisant le calcul variationnel, les conditions nécessaires au problème minimax sont :

$$\dot{x} = f, x(t_0) = x_0, \quad \dot{\lambda} = -H_x^T, \lambda(t_f) = \Phi(x(t_f), t_f), \quad H_u = 0, \quad H_w = 0 \tag{II-6}$$

où :

$$H_x = \frac{\partial H}{\partial x}$$

Si :

$$f = f_1(x, u, t) + f_2(x, w, t), \quad L = L_1(x, u, t) + L_2(x, w, t)$$

Alors l'Hamiltonien est séparable, ce qui donne :

$$\min_u \max_w H(u, w) = \max_w \min_u H(u, w)$$

Donc l'ordre du minimax n'est pas important pour l'Hamiltonien, mais la séparabilité de H , n'implique pas celle de J et la solution de (II-6) obtenue peut ne pas satisfaire la condition du point chargé (II-5). En réalité, la condition (II-5) est compliquée, dans beaucoup d'applications, on admet que l'un des joueurs annonce au départ sa stratégie, dans ce cas l'approche variationnelle reste toujours utile. Par exemple, si w est un bruit, le jeu différentiel peut être défini comme un jeu de commande contre le pire des cas de perturbation (ce qui sera le cas de notre application en robotique, où le robot est sujet à une perturbation combinée des incertitudes paramétriques et d'une perturbation externe).

II-2-2 Problème du jeu quadratique linéaire :

Dans ce qui suit, nous définissons le jeu quadratique linéaire à information complète et à sommation zéro à deux joueurs comme suit : [19]

Pour le système dynamique linéaire suivant :

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad x(t) = x_0 \quad (\text{II-7})$$

et l'index de performance :

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) S_f x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u + w^T E w) dt \quad (\text{II-8})$$

où S_f , Q , R et E sont des matrices symétriques, S_f et Q sont semi-définies positives, R et E sont définies positives, trouver u^* et w^* tel que la condition (II-2) soit satisfaite.

Le problème défini par (II-7) et (II-8) est équivalent dans le fond au problème de commande optimale quadratique, la seule différence réside dans le fait que les matrices de pondération du jeu quadratique linéaire sont indéfinies. le problème définit par (II-7), (II-8)

ainsi que la condition (II-6) est équivalent alors à l'existence d'une solution à une équation différentielle de RICCATI, ceci est formulé par le théorème suivant :

Théorème II-1: [19]

S'il existe S, une matrice de fonction symétrique sur $[t_0, t_f]$, satisfaisant l'équation différentielle de RICCATI :

$$\dot{S} = -S A - A^T S + S^T (B_2 R^{-1} B_2^T - B_1 E^{-1} B_1^T) S - Q, \quad S(t_f) = S_f \quad (\text{II-9})$$

alors le jeu défini par les équations (II-7) et (II-8) a pour valeur $J = \frac{1}{2} x_0^T S(t_0) x_0$ et une stratégie du point chargé donnée par le retour d'état optimal suivant :

$$\begin{aligned} u(t) &= -R^{-1}(t) B_2^T(t) S(t) x(t) \\ w(t) &= E^{-1}(t) B_1^T(t) S(t) x(t) \end{aligned} \quad (\text{II-10})$$

si A, B_1, B_2, Q, R et E sont des matrices constantes et que $t_f \rightarrow \infty$, alors $s(t)$ est remplacée par la matrice constante S, solution de l'équation algébrique de RICCATI suivante :

$$-S A - A^T S + S^T (B_2 R^{-1} B_2^T - B_1 E^{-1} B_1^T) S - Q = 0 \quad (\text{II-11})$$

II-3 APPROCHE DE LA THEORIE DES JEUX APPLIQUEE AUX PROBLEMES A INFORMATIONS PARTIELLES : [27]

Dans cette section nous posons le problème d'atténuation de perturbations sous forme d'une inégalité. Cette inégalité est transformé en un indice de performance qui inclue la commande et les perturbations. Le problème est alors transformé dans un premier temps en un problème de jeu différentiel à informations partielles dans lequel les perturbations et la commande sont en conflit. Une fois que la stratégies optimale sera trouver, on reviendra au problème de départ et on posera les conditions sous lesquelles l'inégalité est vérifiée. Il sera montré que le correcteur résultant de cette théorie possède une structure équivalente à celle issue du problème H_∞ standard, traité dans le chapitre précédent.

II-3-1 Formulation du problème de l'atténuation de la perturbation par le jeu différentiel :

Considérons le système linéaire variant dans le temps décrit par :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t) \quad (\text{II-12})$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} Q_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ R_1(t) \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{II-13})$$

$$y(t) = C_2(t)x(t) + v(t) \quad (\text{II-14})$$

où x est un vecteur d'état ($n \times 1$), u est un vecteur d'entrée ($m \times 1$), y est le vecteur de mesures ($p \times 1$), w et v sont les vecteurs de perturbation ($q \times 1$) et ($p \times 1$) respectivement, z est le vecteur des sorties contrôlées ; on suppose que $R = R_1^T R_1$ est non singulière et que la condition initiale $x(0)$ est inconnue. Toutes les matrices sont de dimensions appropriées et sont variables dans le temps.

Les mesures historiques sont définies comme :

$$y_t = \{y(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$$

Les commandes admissibles sont restreintes uniquement à l'ensemble des fonctions de y_t . Soit U cet ensemble et U_t le sous-ensemble de U qui concerne uniquement les fonctions linéaires de y_t .

Le problème d'atténuation de la perturbation est défini comme suit : [27]

Trouver les commandes $u \in U_t$ tel que :

$$x^T(t_f) \pi_f x(t_f) + \int_0^{t_f} z^T z dt \leq \gamma^2 \left[x^T(0) P_0^{-1} x(0) + \int_0^{t_f} (w^T W^{-1} w + v^T V^{-1} v) dt \right] \quad (\text{II-15})$$

Pour tout $w, v \in L_2(0, t_f)$, $x(0) \in \mathcal{R}^n$ tel que $(w(t), v(t), x(0)) \neq 0$, définis pour $t \in [0, t_f]$ où γ est une constante positive, P_0, W, V sont des matrices définies positives, W et V peuvent être variables dans le temps, π_f est définie non négative.

En notant, $Q = Q_1^T Q_1$ on a :

$$\int_0^{t_f} z^T z dt = \int_0^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

On peut considérer alors le problème du jeu quadratique linéaire relatif au système décrit par (II-12), (II-13), (II-14) ainsi que (II-15) qui consiste à trouver $u^* \in U$, v^* , $w^* \in L_2(0, t_f)$ et $x^*(0) \in \mathcal{R}^n$ satisfaisant la condition du point chargé :

$$J(u^*, v, w, x(0)) \leq J(u^*, v^*, w^*, x^*(0)) \leq J(u, v^*, w^*, x^*(0)) \quad (\text{II-16})$$

où :

$$J(u, v, w, x(0)) = \frac{1}{2} \left[-\gamma^2 (x(0) - \hat{x}_0)^T P_0^{-1} (x(0) - \hat{x}_0) + x^T(t_f) \pi_f x(t_f) \right] + \int_0^{t_f} \left\{ x^T Q x + u^T R u - \gamma^2 (w^T W^{-1} w + v^T V^{-1} v) \right\} dt \quad (\text{II-17})$$

où \hat{x}_0 est un vecteur donné, pour tout $u, v, w \in L_2(0, t_f)$ et $x(0) \in \mathcal{R}^n$. L'équation (II-17) est la formulation par le jeu quadratique linéaire du problème de l'atténuation de la perturbation. Puisque $v = y - C_2 x$ l'équation (II-17) est équivalente à :

$$J = \frac{1}{2} \left[-\gamma^2 (x(0) - \hat{x}_0)^T P_0^{-1} (x(0) - \hat{x}_0) + x^T(t_f) \pi_f x(t_f) \right] + \int_0^{t_f} \left\{ x^T Q x + u^T R u - \gamma^2 (w^T W^{-1} w + (y - C_2 x)^T V^{-1} (y - C_2 x)) \right\} dt \quad (\text{II-18})$$

II-3.2. Approche de la solution : [27]

La stratégie du point chargé peut être obtenue en résolvant les deux problèmes d'optimisations suivants :

$$\min_u \max_v \max_w \max_{x(0)} J(u, v, w, x(0)) = J^* \quad (\text{II-19})$$

$$\max_v \max_w \max_{x(0)} \min_u J(u, v, w, x(0)) = J_* \quad (\text{II-20})$$

Les solutions des problèmes (II-19) et (II-20) produisent une stratégie du point chargé si : $J^* = J_*$

L'ordre correspondant au premier problème minimax défini par (II-19) joue un rôle important dans la résolution du problème à information partielle. De ce fait, la procédure de résolution du problème minimax est arrangée de la manière suivante :

Premièrement, maximisation par rapport à la perturbation w et la condition initiale $x(0)$ en gardant u et v fixes, la fonction objective résultante est maximisée et minimisée par rapport à v et u respectivement, pour déterminer par la suite la stratégie du point chargé du correcteur correspondant.

Maximisation par rapport à w et $x(0)$:

Considérons la fonction coût (objective), donnée par l'équation (II-18). Premièrement, on maximise J par rapport à w et $x(0)$ pour un y donné et une stratégie $u \in U$, pour lesquelles les variations de u et y sont nulles.

Soit $J_1 = \max_w \max_{x(0)} J$, la fonction coût résultante, J_1 sera ensuite minimisée et maximisée

par rapport à u et y respectivement. Soit l'Hamiltonien H donné par : [27]

$$H = \frac{1}{2} \left[x^T Q x + u^T R u - \gamma^2 \left(w^T W^{-1} w + (y - C_2 x)^T V^{-1} (y - C_2 x) \right) \right] + \lambda^T (A x + B_2 u + B_1 w) \quad (\text{II-21})$$

En appliquant la procédure du calcul variationnel standard [27], on aboutit aux conditions nécessaires pour l'existence d'un maximum qui sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{1}{\gamma^2} H_x^T, \quad \lambda(t_f) = -\frac{1}{\gamma^2} \pi_f x(t_f) \\ \lambda(0) &= -P_0^{-1} [x(0) - \hat{x}_0] \end{aligned} \quad (\text{II-22})$$

$$w = -W B_1^T \lambda \quad (\text{II-23})$$

En substituant l'équation (II-23) dans (II-12), on aboutit au problème des deux points à valeurs bornées suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B_1 W B_1^T \\ -\left(-\frac{1}{\gamma^2} Q + C_2^T V^{-1} C_2 \right) & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 u \\ C_2^T V^{-1} y \end{bmatrix} \quad (\text{II-24})$$

avec :

$$x(0) = \hat{x}_0 - P_0 \lambda(0), \quad \lambda(t_f) = -\frac{1}{\gamma^2} \pi_f x(t_f) \quad (\text{II-25})$$

L'équation (II-24) peut être résolue par la méthode de balayage en définissant :

$$x = \hat{x} - P \lambda \quad (\text{II-26})$$

Et en substituant (II-26) dans (II-24) nous obtenons:

$$\left[\dot{P} - P A^T - A P + P \left(C_2^T V^{-1} C_2 - \frac{1}{\gamma^2} Q \right) P - B_1 W B_1^T \right] \lambda = \dot{\hat{x}} - A \hat{x} - B_2 u - P C_2^T V^{-1} (y - C_2 \hat{x}) - \frac{1}{\gamma^2} P Q \hat{x} \quad (\text{II-27})$$

Pour avoir l'égalité des deux membres de l'équation (II-27) on pose :

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + B_2 u + P C_2^T V^{-1} (y - C_2 \hat{x}) + \frac{1}{\gamma^2} P Q \hat{x}, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (\text{II-28})$$

$$\dot{P} = P A^T + A P - P \left(C_2^T V^{-1} C_2 - \frac{1}{\gamma^2} Q \right) P + B_1 W B_1^T, \quad P(0) = P_0 \quad (\text{II-29})$$

Donc P est la solution de l'équation différentielle de RICCATI (E.D.R) (II-29).

A partir de (II-25) et (II-26), nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda(t_f) &= \left(-\frac{1}{\gamma^2}\right) \pi_f \left[I - \frac{1}{\gamma^2} P(t_f) \pi_f \right]^{-1} \hat{x}(t_f) \\ x(t_f) &= \left[I - \frac{1}{\gamma^2} P(t_f) \pi_f \right]^{-1} \hat{x}(t_f) \end{aligned} \quad (\text{II-30})$$

où nous supposons que $\left[I - \frac{1}{\gamma^2} P(t_f) \pi_f \right]^T$ est non singulière. On peut alors calculer $\lambda(t)$ à partir de:

$$\dot{\lambda} = - \left[-A - P \left(-\frac{1}{\gamma^2} Q + C_2^T V^{-1} C_2 \right) \right]^T \lambda + C_2^T V^{-1} (y - C_2 \hat{x}) + \frac{1}{\gamma^2} Q \hat{x} \quad (\text{II-31})$$

En substituant $x(0) = \hat{x}_0 - P_0 \lambda(0)$ et $w = -WB_1^T \lambda$ dans la fonction coût, J_1 peut être réécrite de la manière suivante :

$$J_1 = \frac{1}{2} \left[\hat{x}^T(t_f) S_f \hat{x}(t_f) + \int_0^{t_f} \left\{ \hat{x}^T Q \hat{x} + u^T R u - \gamma^2 (y - C_2 \hat{x})^T V^{-1} (y - C_2 \hat{x}) \right\} dt \right] \quad (\text{II-32})$$

où :

$$S_f = \pi_f + \frac{1}{\gamma^2} \pi_f \left[P^{-1}(t_f) - \frac{1}{\gamma^2} \pi_f \right]^T \pi_f \quad (\text{pour plus de détails voir [27]}).$$

L'ensemble de l'index de performance (II-32) et la contrainte dynamique (II-28) forment le jeu différentiel à informations partielles.

Si on pose : $\hat{v} = y - C_2 \hat{x}$, l'équation (II-28) devient :

$$\dot{\hat{x}} = \bar{A} \hat{x} + B_2 u + \bar{B}_1 \hat{v}, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (\text{II-33})$$

où :

$$\bar{A} = A + \frac{1}{\gamma^2} P Q \quad \text{et} \quad \bar{B}_1 = P C_2^T V^{-1}$$

l'index de performance J_1 est changé en :

$$J_1 = \frac{1}{2} \left[\hat{x}^T(t_f) S_f \hat{x}(t_f) + \int_0^{t_f} \left\{ \hat{x}^T Q \hat{x} + u^T R u + \hat{v}^T V^{-1} \hat{v} \right\} dt \right] = J_1(u, \hat{v}) \quad (\text{II-34})$$

Solution du point chargé [27]:

Les équations (II-33) et (II-34) définissent le jeu quadratique linéaire à sommation zéro standard à deux joueurs à savoir $\min_u \max_v J_1(u, \hat{v})$, pour lequel la stratégie du retour d'état optimal $u^* \in U$ et \hat{v}^* est donnée par :

$$u^* = -R^{-1} B_2^T S \hat{x} \quad (\text{II-35})$$

$$\hat{v}^* = \frac{1}{\gamma^2} C_2 P S \hat{x} \quad (\text{II-36})$$

où S est une solution de l'E.D.R suivante :

$$\dot{S} = -S \bar{A} - \bar{A}^T S + S \left(B_2 R^{-1} B_2^T - \frac{1}{\gamma^2} \bar{B}_1 V^{-1} \bar{B}_1^T \right) S - Q \quad (\text{II-37})$$

dans $[0, t_f]$, avec la condition finale $S(t_f) = S_f$.

En remplaçant u^* et \hat{v}^* dans J_1 , on obtient la valeur suivante de J_1 :

$$J_1(u^*, \hat{v}^*) = \frac{1}{2} \hat{x}_0^T S(0) \hat{x}_0 \quad (\text{II-38})$$

Notons $x^*(t)$, $\lambda^*(t)$, et $\hat{x}^*(t)$ les trajectoires optimales de x , λ , et \hat{x} respectivement. $x^*(t)$, $\lambda^*(t)$, et $\hat{x}^*(t)$ sont les solutions de x , λ , et \hat{x} avec $u = u^*$, et $v = \hat{v}^*$. En substituant (II-35) et (II-36) dans (II-28) et (II-31) on aboutit aux équations suivantes :

$$\dot{\hat{x}}^* = \left(A + \frac{1}{\gamma^2} P Q \right) \hat{x}^* - B_2 R^{-1} B_2^T S \hat{x}^* + \frac{1}{\gamma^2} P C_2^T V^{-1} C_2 P S \hat{x}^* \quad (\text{II-39})$$

$$\hat{x}^*(0) = \hat{x}_0^*$$

$$\dot{\lambda}^* = - \left(A + \frac{1}{\gamma^2} P Q \right)^T \lambda^* + C_2^T V^{-1} C_2 P \left(\lambda^* + \frac{1}{\gamma^2} S \hat{x}^* \right) - \frac{1}{\gamma^2} Q \hat{x}^* \quad (\text{II-40})$$

avec $\lambda^*(t_f) = -\frac{1}{\gamma^2} S_f \hat{x}^*(t_f)$. $\hat{x}^*(t)$ peut être calculée indépendamment à partir de (II-39).

De plus, on a :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\gamma^2} S \hat{x}^* \right) = - \left(A + \frac{1}{\gamma^2} P Q \right)^T \left(\frac{1}{\gamma^2} S \hat{x}^* \right) - \frac{1}{\gamma^2} Q \hat{x}^* \quad (\text{II-41})$$

En comparant (II-41) et (II-40), on obtient :

$$\lambda^*(t) = -\frac{1}{\gamma^2} S \hat{x}^*(t), t \in [0, t_f] \quad (\text{II-42})$$

En remplaçant (II-35) et (II-42) dans (II-24) et (II-26) on obtient la trajectoire optimale $x^*(t)$ et qui est :

$$x^*(t) = \left(I + \frac{1}{\gamma^2} P S \right) \hat{x}^*(t) \quad , \quad t \in [0, t_f] \quad (\text{II-43})$$

$$x^*(0) = \left(I + \frac{1}{\gamma^2} P_0 S(0) \right) \hat{x}_0$$

A partir de (II-13), (II-35), (II-42) et (II-43) , on obtient les trajectoires optimales de $v(t)$, $x(0)$, $w(t)$ et qui sont :

$$v^*(t) = \left\{ \hat{v}^*(t) + C_2 (\hat{x}^*(t) - x^*(t)) \right\} = 0 \quad , \quad t \in [0, t_f] \quad (\text{II-44})$$

$$x^*(0) = \left\{ I + \frac{1}{\gamma^2} P_0 S(0) \right\} \hat{x}_0 \quad (\text{II-45})$$

$$w^*(t) = \frac{1}{\gamma^2} W B_1^T S \hat{x}^*(t) \quad , \quad t \in [0, t_f] \quad (\text{II-46})$$

En supposant que $\left[I + \frac{1}{\gamma^2} P S \right]$ est non singulière sur $t \in [0, t_f]$, l'équation (II-45) peut être réécrite de la manière suivante :

$$w^*(t) = \frac{1}{\gamma^2} W B_1^T \Pi x^*(t) \quad , \quad t \in [0, t_f] \quad (\text{II-47})$$

avec :

$$\Pi = S \left(I + \frac{1}{\gamma^2} P S \right)^{-1} \quad (\text{II-48})$$

Il a été démontré dans [27] que la stratégie optimale satisfaisant la condition du point chargé donnée par (II-16) est la suivante :

$$\begin{aligned} u^* &= -R^{-1} B_2^T \Pi x_c \\ w^* &= \frac{1}{\gamma^2} W B_1^T \Pi x_c \\ v^* &= 0 \\ x^*(0) &= \left[I - \frac{1}{\gamma^2} P_0 \Pi(0) \right]^{-1} \hat{x}_0 \end{aligned} \quad (\text{II-49})$$

avec :

$$x_c = \left[I - \frac{1}{\gamma^2} P \Pi \right]^{-1} \hat{x}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A x_c + B_2 u + \frac{1}{\gamma^2} B_1 W B_1^T \Pi x_c + M C_2^T V^{-1} (y - C_2 x_c) \\ x_c(0) &= \left[I - \frac{1}{\gamma^2} P_0 \Pi(0) \right]^{-1} \hat{x}_0 \end{aligned} \quad (\text{II-50})$$

où :

$$M = \left[I - \frac{1}{\gamma^2} P \Pi \right]^{-1} P \quad (\text{II-51})$$

et Π défini par (II-46) satisfait l'équation différentielle de RICCATI :

$$\begin{aligned} -\dot{\Pi} &= A^T \Pi + \Pi A - \Pi \left(B_2 R^{-1} B_2^T - \frac{1}{\gamma^2} B_1 W B_1^T \right) \Pi + Q \\ \Pi(t_f) &= \pi_f \end{aligned} \quad (\text{II-52})$$

et que pour $\hat{x}_0 = 0$, le problème d'atténuation de perturbation posée par (II-15) est résolu pour $u = u^* = -R^{-1} B_2^T \Pi x_c$.

2-4 SYNTHÈSE D'UN COMPENSATEUR INVARIANT DANS LE TEMPS PAR LA THÉORIE DES JEUX :

Dans cette section, nous admettons que le système (II-12), (II-13) et (II-14) est un système invariant dans le temps et que les matrices de pondérations dans (II-15) sont également constantes, en particulier W et V sont des matrices identités.

On admet en plus que (A, B_1) et (A, B_2) sont des paires stabilisables et commandables respectivement et que (C_2, A) et (Q_1, A) sont détectables.

Le problème de l'atténuation de la perturbation pour ce système bien défini a été résolu dans [9] (voir chapitre 1), basé sur deux équations algébriques de RICCATI (EAR). Tous les compensateurs stabilisateurs qui peuvent être construits satisfont une norme H_∞ bornée.

On suppose qu'il existe deux matrices $\bar{\Pi}$ et \bar{P} , définies non négative et positive respectivement et satisfaisant aux deux E.A.R suivantes :

$$0 = A^T \bar{\Pi} + \bar{\Pi} A - \bar{\Pi} \left(B_2 R^{-1} B_2^T - \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T \right) \bar{\Pi} + Q_1^T Q_1 \quad (\text{II-53})$$

$$0 = A \bar{P} + \bar{P} A^T - \bar{P} \left(C_2^T C_2 - \frac{1}{\gamma^2} Q_1^T Q_1 \right) \bar{P} + B_1 B_1^T \quad (\text{II-54})$$

tel que :

$$\bar{P}^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} \bar{\Pi} > 0 \quad (\text{II-55})$$

A partir du corollaire (voir Annexe B), la solution $\Pi(t)$ de l'équation différentielle de RICCATI (II-52) converge vers $\bar{\Pi}_m$, si $t_f \leq \bar{\Pi}_m$ où $\bar{\Pi}_m$ est la solution définie non négative minimale de l'E.A.R (II-53) (voir définition Annexe B).

Quand $t_f \rightarrow \infty$, le compensateur décrit par (II-49), (II-50) et (II-51) devient un compensateur invariant dans le temps de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u &= C_c x_c \end{aligned} \quad (\text{II-56})$$

où :

$$A_c = A - B_2 R^{-1} B_2^T \bar{\Pi} - \bar{M} C_2^T C_2 + \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T \bar{\Pi}$$

$$\begin{aligned} B_c &= \bar{M} C_2^T \\ C_c &= -R^{-1} B_2^T \bar{\Pi} \end{aligned}$$

et :

$$\bar{M} = \left(I - \frac{1}{\gamma^2} \bar{P} \bar{\Pi} \right)^{-1} \bar{P} > 0$$

De plus si nous choisissons \bar{P} et $\bar{\Pi}$ comme étant les solutions définies non négative et positive minimales, alors le correcteur (II-56) invariant dans le temps est équivalent au correcteur H_∞ standard proposé par J. DOYLE et K. GLOVER dans [9] et explicité dans le chapitre précédent.

Ainsi le système en boucle fermée devient :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A_{cl} \bar{x} + T_{cl} \bar{w} \\ z &= C_{cl} \bar{x} \end{aligned} \tag{II-57}$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}, \quad \bar{w} = \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}, \quad A_{cl} = \begin{bmatrix} A & B_2 C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix} \\ T_{cl} &= \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_C \end{bmatrix}, \quad C_{cl} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & R_1 C_c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La fonction de transfert entre la perturbation \bar{w} et z est donnée par :

$$T_{\bar{w}z}(S) = C_{cl} [S I - A_{cl}]^{-1} T_{cl}$$

Proposition : [27]

Le système en boucle fermée (II-57) est stable et :

$$\|T_{\bar{w}z}\|_\infty \leq \gamma \tag{II-58}$$

(Pour la démonstration voir référence [27])

II-5 CONCLUSION :

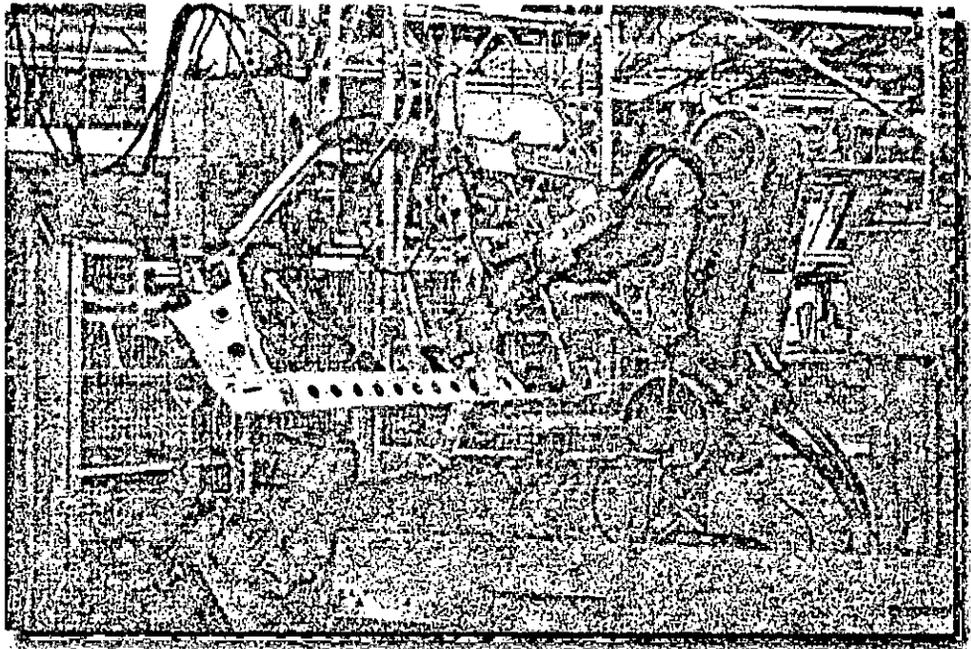
Dans ce chapitre, nous avons présenté la technique de la théorie des jeux . Dans un premier temps nous avons posé le problème du jeu quadratique linéaire à information complète qui consiste à trouver la stratégie de la commande et de la perturbation minimisant un index de performance. Le problème tel qu'il a été posé suggère la connaissance de tous les états à tout instant et des conditions initiales. La stratégie de la commande a été trouvée à travers la résolution d'une équation de RICCATI.

Dans un deuxième temps nous avons considéré le même problème mais cette fois ci avec les conditions initiales inconnues et nous avons supposé que les états n'étaient pas toujours disponibles. Le problème consistait alors à trouver une stratégie qui en premier lieu produirait se qu'on a appelé un point chargé et en second lieu minimiserait l'index de performance et donc satisferait la propriété d'atténuation des perturbations. La solution s'opère à travers la résolution de deux équations de RICCATI.

Enfin nous avons vu que la synthèse du correcteur issue de la théorie des jeux était équivalent à celui issue de la commande H_∞ standard sous certaines conditions.

Dans le chapitre à venir nous allons utiliser les techniques exposées dans le but de synthétiser une commande robuste appliquée à un robot manipulateur.

CHAPITRE III



Commande H_{∞} appliquée
à un Robot

III-1 INTRODUCTION :

Durant longtemps la technique dite " the computed torque " ou " le couple calculé " en robotique était considéré comme des commandes peu robustes face à des incertitudes sur le modèle dynamique du robot. Cette méthode qui consisté à compenser les non linéarités de l'équation dynamique du robot exigé la connaissance parfaite de ces paramètres, ce qui n'est pas possible et qui pose problème.

Dans ce chapitre nous allons voir que les techniques de la commande H_∞ peuvent être utilisées pour justement pallier à ce genre d'inconvénients.

Dans cet esprit, le problème de commande optimale par modèle de référence avec une atténuation désirée des perturbations, (problème de commande H_∞ en robotique pour simplifier) est exposé. Cette commande a été proposée par BOR-SEN CHEN en 1994. Elle peut parer à la fois aux perturbations externes et aux incertitudes paramétriques du problème.

Dans l'approche qu'on expose pour atteindre une atténuation de la perturbation combinée, le problème H_∞ va être transformé en un problème de commande optimale non-linéaire avec une contrainte minimax. La théorie de jeux dynamiques est alors utilisée pour traiter le problème, qui implique la résolution d'une équation dite de BELLMAN-ISAACS. Ce qui conduit à une condition suffisante pour la résolution de la commande par modèle de référence avec une atténuation désirée de la perturbation. Aussi, notre exposé nous permet de présenter un nouveau modèle de commande non-linéaire dans laquelle le problème H_∞ admet une solution globale explicite en combinant la commande H_∞ non-linéaire par retour d'état et les résultats des travaux de R. JOHANSSON dans [14].

III-2 FORMULATION DU PROBLEME AVEC LA PERFORMANCE H_∞ :

Avant de poser le problème avec la performance H_∞ , nous allons tout d'abord donner les principaux résultats des travaux de JOHANSSON dans [14] concernant la commande optimale quadratique par modèle de référence appliquée à un bras de robot manipulateur. A partir de ces résultats, on formulera le problème avec la performance H_∞ .

JOHANSSON pose dans [14] le problème de la commande par modèle de référence dans le cadre de la commande optimale quadratique. On se donnant un modèle de référence, il dérive l'équation dynamique de l'erreur incluant le couple. A partir de cette représentation, il pose le problème suivant: quel est l'effort (forces) qui doit être minimisé ? En calculant cet effort, l'équation dynamique de l'erreur sera réécrite de sorte à faire ressortir cet effort puis pose le problème de la commande optimale quadratique.

III-2-1 Commande optimale quadratique par modèle de référence : [14]

Selon la représentation de DENAVIT-HARTENBERG, la configuration géométrique d'un

bras manipulateur à n degrés de liberté peut être décrite par un ensemble de coordonnées généralisées $q \in \mathcal{R}^n$. La méthode la plus systématique pour aboutir à l'équation dynamique du mouvement reste celle de la théorie de Lagrange qui implique explicitement les expressions de l'énergie cinétique E_C et l'énergie potentielle E_P liées par l'équation d'EULER-LAGRANGE suivante : [25]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) = L \quad (\text{III-1})$$

où :

$$L(q, \dot{q}) = E_C(q, \dot{q}) - E_P(q) \quad (\text{III-2})$$

$L(q, \dot{q})$ représente le Lagrangien du système et $\tau \in \mathcal{R}^n$ représente les forces généralisées correspondantes. Pour les systèmes robotique, l'énergie cinétique $E_C(q, \dot{q})$ est une fonction quadratique du vecteur vitesse \dot{q} et est de la forme :

$$E_C(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (\text{III-3})$$

Ainsi, l'équation dynamique du mouvement d'un tel système peut être obtenue à partir de (III-2) pour aboutir à l'équation suivante:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (\text{III-4})$$

où :

$M(q) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ représente la matrice d'inertie, elle est symétrique et définie positive ($M(q) = M^T(q) > 0$), pour tout $q \in \mathcal{R}^n$.

$C(q, \dot{q})$ représente la matrice des couples dues à l'accélération de CORIOLIS et aux forces centrifuges.

$G(q)$ représente le couple de la gravitation.

τ : représente le vecteur des couples (forces) généralisé(e)s.

avec :

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \dot{M}(q, \dot{q})\dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T M(q) \dot{q}) \quad (\text{III-5})$$

$$G(q) = \frac{\partial U(q)}{\partial q} \quad (\text{III-6})$$

a. Objectif de la commande :

La trajectoire de référence désirée qui est l'objectif de poursuite de la commande est considérée comme une fonction bornée du temps en terme de position généralisée $q_r \in L^1$ et ses correspondantes vitesses et accélération \dot{q}_r et \ddot{q}_r , respectivement. Les variables \ddot{q}_r , \dot{q}_r et q_r peuvent être convenablement garanties par un modèle de référence du type :

$$\ddot{q}_r + K_v \dot{q}_r + K_p q_r = K_r r \quad (\text{III-7})$$

Où r est un signal de consigne borné. Le système dynamique (III-7) avec ses matrices $n \times n$, K_v , K_p et K_r doit être stable.

b. Représentation d'état :

La variable d'état de l'erreur de poursuite est définie comme suit :

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\ddot{q}} \\ \tilde{\dot{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} - \dot{q}_r \\ q - q_r \end{bmatrix} \quad (\text{III-8})$$

Ainsi, le problème de la poursuite de la position généralisée q est transformé en un problème de régulation de la variable d'état de l'erreur \tilde{x} . En utilisant (III-7) et (III-4), l'équation dynamique de l'erreur de poursuite est donnée par :

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\ddot{q}} \\ \tilde{\dot{q}} \end{bmatrix} = A(q, \dot{q})\tilde{x} + B_0(\ddot{q}_r, \dot{q}_r, \dot{q}, q) + B M^{-1}(q) \tau \quad (\text{III-9})$$

où :

$$A(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -M^{-1}(q)C(q, \dot{q}) & 0_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}$$

$$B_0(\ddot{q}_r, \dot{q}_r, \dot{q}, q) = \begin{bmatrix} -\ddot{q}_r - M^{-1}(q)(G(q) + C(q, \dot{q})\dot{q}_r) \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix}$$

c. Quel est l'effort de la commande qui doit être minimisé ? [14]

L'action naturelle est de minimiser la vitesse et l'erreur en position avec un minimum de couple à appliquer et d'énergie à consommer.

L'équation d'EULER-LAGRANGE dans où l'énergie potentielle est indépendante de la vitesse

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q} + \frac{\partial E_P}{\partial q} = \tau \quad \text{(III-10)}$$

La variation de l'énergie potentielle due à la gravitation est inévitable, et d'ailleurs elle peut être déterminée uniquement à partir du point de départ et le point d'arrivée. Donc, il n'y a pas lieu de minimiser l'effort due à l'énergie potentielle.

Soit le couple τ_k (couple qui affecte l'énergie cinétique) donné par :

$$\begin{aligned} \tau_k &= \tau - \frac{\partial E_P}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q} \\ &= M(q)\ddot{q} + \dot{M}(q, \dot{q})\dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T M(q) \dot{q}) \end{aligned} \quad \text{(III-11)}$$

Pour étudier les propriétés de τ_k , on introduit la matrice $N(q, \dot{q})$ (Skew-Symmetric), dont les éléments n_{ij} sont définis par les éléments m_{ij} de $M(q)$ comme suit:

$$n_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \quad \text{(III-12)}$$

et :

$$N(q, \dot{q})\dot{q} = \frac{1}{2}\dot{M}(q, \dot{q})\dot{q} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q}(\dot{q}^T M(q)\dot{q}) \quad (\text{III-13})$$

et donc τ_k devient :

$$\tau_k = M(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{M}(q, \dot{q})\dot{q} + N(q, \dot{q})\dot{q} \quad (\text{III-14})$$

Un résultat standard de la mécanique Lagrangienne est que le troisième terme de (III-14) représente les forces du système qui ne travaillent pas. Le choix naturel de la variable de commande à minimiser est pour cette raison :

$$\left(M(q), \frac{1}{2}\dot{M}(q, \dot{q}) \right) \begin{pmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{pmatrix} \quad (\text{III-15})$$

Pour minimiser les forces (couples) nécessaires, on introduit le choix de variables de commande dans une définition plus générale :

$$\begin{aligned} u &= \left(M(q), \frac{1}{2}\dot{M}(q, \dot{q}) + N(q, \dot{q}) \right) \begin{pmatrix} \ddot{\tilde{z}} \\ \dot{\tilde{z}} \end{pmatrix} \\ &= M(q)T_1\ddot{\tilde{x}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\dot{M}(q, \dot{q}) + N(q, \dot{q}) \right)}_{c(q, \dot{q})} T_1\dot{\tilde{x}} \end{aligned} \quad (\text{III-16})$$

avec \tilde{z} et T_1 sont introduites par l'intermédiaire de la transformation d'état de \tilde{x} suivante :

$$\tilde{z} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix} = T_0\tilde{x} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & I_{n \times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{q}} \end{pmatrix} \quad (\text{III-17})$$

où T_{11} et T_{12} sont des matrices constantes qui seront à déterminées adéquatement.

Cette définition implique les forces (couples) affectant l'énergie cinétique (III-11), la trajectoire de référence (III-8) et la transformation d'état (III-17). Les termes impliquant $N(q, \dot{q})$ sont facultatifs.

L'équation (III-9) peut ainsi être transformé de la manière suivante:

$$\dot{\tilde{x}} = A_1(q, \dot{q}) \tilde{x} + B_1(q) u \quad (\text{III-18})$$

avec:

$$A_1(q, \dot{q}) = T_0^{-1} \begin{bmatrix} -M(q)^{-1} C(q, \dot{q}) & 0_{n \times n} \\ T_{11}^{-1} & T_{11}^{-1} T_{12} \end{bmatrix} T_0 \quad (\text{III-19})$$

$$B_1(q) = T_0^{-1} \begin{pmatrix} M(q)^{-1} \\ 0_{n \times n} \end{pmatrix} \quad (\text{III-20})$$

Le problème de la commande optimale quadratique relatif à l'équation (III-18) est posé alors comme suit :

trouver la commande optimale u^* qui minimiserait le critère suivant :

$$J(u) = \int_0^\infty L(\tilde{x}, u) dt \quad (\text{III-21})$$

tel que:

$$L(\tilde{x}, u) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T(t) Q \tilde{x}(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R u(t) \quad (\text{III-22})$$

Ce critère est connue sous l'appellation d'index de performance H_2 .

Une fois la commande optimale u^* trouvée, le couple optimal τ^* correspondant est donné par:

$$\tau^* = M(q) \left[\ddot{q}_r - T_{11}^{-1} T_{12} \ddot{q} - T_{11}^{-1} M(q)^{-1} (C(q, \dot{q}) B^T T_0 \tilde{x} + u^*) \right] + C(q, \dot{q}) + G(q) \quad (\text{III-23})$$

III-2-2 Formulation du problème avec la performance H_∞ :

La commande optimale par modèle de référence avec l'index de performance H_2 qui est décrite dans le paragraphe précédent, ne garantit pas en général une grande robustesse face aux incertitudes paramétriques et encore moins face aux perturbations externes. En pratique les système robotique sont souvent sujet à des perturbations externes et à des incertitudes paramétriques. Donc, il est très significatif de considérer l'effet de ces deux perturbations.

Définition des incertitudes paramétriques :

Les incertitudes paramétriques dites également incertitudes structurées permettent la description la plus concrète relatives à des constantes physiques (masses, raideurs, capacités.....). Ces incertitudes sont:

ΔM : incertitudes de $M(q)$ dues aux incertitudes paramétriques des masses des articulations.

ΔC : incertitudes de $C(q, \dot{q})$ dues au changement de moment d'inertie de $\Delta M(q)$ et aux frottements.

ΔG : perturbation de la force de gravitation due à la configuration et à l'incertitudes de la masse totale du manipulateur.

L'incertitude paramétrique des masses des articulations sera détaillée plus loin (Chapitre IV : Application et Simulation).

Donc les matrices du modèle du robot (III-4), peuvent être divisées en une partie nominale et une autre partie perturbatrice:

$$\begin{aligned} M(q) &= M_0(q) + \Delta M(q) \\ C(q, \dot{q}) &= C_0(q, \dot{q}) + \Delta C(q, \dot{q}) \\ G(q) &= G_0(q) + \Delta G(q) \end{aligned} \quad \text{(III-24)}$$

où $M_0(q), C_0(q, \dot{q}), G_0(q)$ sont les matrices à paramètres nominaux, elles sont parfaitement connues, alors que les paramètres de perturbations $\Delta M(q), \Delta C(q, \dot{q}), \Delta G(q)$ sont inconnues. d'autre part certaines dynamiques non linéaires négligées (telles que les frottements) peuvent être considérées comme des perturbations par rapport aux entrées de commande.

En tenant compte de l'effet de ces perturbations, l'équation dynamique réelle du bras manipulateur prend la forme suivante :

$$[M_0(q) + \Delta M(q)]\ddot{q} + [C_0(q, \dot{q}) + \Delta C(q, \dot{q})]\dot{q} + [G_0(q) + \Delta G(q)] = \tau + w \quad \text{(III-25)}$$

ou w représente une perturbation externe à énergie finie.

Maintenant, puisque les perturbations $\Delta M(q), \Delta C(q, \dot{q}), \Delta G(q)$ sont incertaines, le couple (III-23) ne peut être appliquée qu'uniquement avec les paramètres nominaux $M_0(q), C_0(q, \dot{q}), G_0(q)$, et que :

$$\tau^* = M_0(q) \left[\ddot{q}_r - T_{11}^{-1} T_{12} \ddot{q} - T_{11}^{-1} M_0(q)^{-1} (C_0(q, \dot{q}) B^T T_0 \tilde{x} + u^*) \right] + C_0(q, \dot{q}) + G_0(q) \quad \text{(III-26)}$$

En posant :

$$\delta = -(\Delta M(q)\ddot{q} + \Delta C(q, \dot{q})\dot{q} + \Delta G(q) - w) \quad (\text{III-27})$$

qui représente la perturbation combinée des incertitudes paramétriques et la perturbation externe w , l'équation (III-25) peut être réécrite comme suit :

$$M_o(q)\ddot{q} + C_o(q, \dot{q})\dot{q} + G_o(q) = \tau + \delta \quad (\text{III-28})$$

Avec le couple appliqué donné par (III-26) en terme de paramètres nominaux, on peut former la dynamique de l'erreur de poursuite perturbée (de u à \tilde{x}), en suivant les étapes de dérivation du cas non perturbé décrit ci-dessus.

On aboutit à la forme suivante :

$$\dot{\tilde{x}} = T_o^{-1} \begin{bmatrix} M_o^{-1}(q)C_o(q, \dot{q}) & 0_{n \times n} \\ T_{11}^{-1} & -T_{11}^{-1}T_{12} \end{bmatrix} T_o \tilde{x} + T_o^{-1} \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix} M_o^{-1}(q)u + \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix} M_o^{-1}(q)\delta \quad (\text{III-29})$$

On définit un nouveau vecteur de perturbation : [6]

$$d = M_o(q)T_{11}M_o^{-1}(q)\delta \quad (\text{III-30})$$

Et puisque :

$$\begin{bmatrix} M_o^{-1}(q)\delta \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^{-1}M_o^{-1}(q)\{M_o(q)T_{11}M_o^{-1}(q)\delta\} \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix} = T_o^{-1} \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix} M_o^{-1}(q)d \quad (\text{III-31})$$

alors, l'équation (III-29) devient :

$$\dot{\tilde{x}} = A_T(\tilde{x}, t)\tilde{x} + B_T(\tilde{x}, t)u + B_T(\tilde{x}, t)d \quad (\text{III-32})$$

où :

$$A_T(\tilde{x}, t) = T_0^{-1} \begin{bmatrix} -M_0^{-1}(q)C(q, \dot{q}) & 0_{n \times n} \\ T_{11}^{-1} & -T_{11}^{-1}T_{12} \end{bmatrix} T_0 \quad (\text{III-33})$$

et :

$$B_T(\tilde{x}, t) = T_0^{-1} \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix} M_0^{-1}(q) \quad (\text{III-34})$$

Remarque III-1 :

Dans les équation (III-33) et (III-34), on a considéré que la matrice M_0 est fonction de \tilde{x} et de t . Ceci est vrais car la trajectoire de référence $q_r(t)$ est définie par une fonction de t uniquement. D'où :

$$M_0(q) = M_0(\tilde{q} + q_r(t)) = M_0(\tilde{x}, t)$$

de même :

$$C_0(q, \dot{q}) = C_0(\tilde{q} + q_r(t), \tilde{q} + \dot{q}(t)) = C_0(\tilde{x}, t)$$

et

$$\dot{M}_0(q, \dot{q}) = \dot{M}_0(\tilde{q} + q_r(t), \tilde{q} + \dot{q}(t)) = \dot{M}_0(\tilde{x}, t)$$

En général, les paramètres de perturbation $\Delta M, \Delta C, \Delta G$ ainsi que la perturbation externe w , ne peuvent pas à priori être estimés précisément, la perturbation combinée est incertaine. Il n'est pas facile de trouver une stratégie de commande pour annuler complètement cet effet, en comparaison avec le cas non perturbé (III-18) on trouve un terme en plus d qui apparaît dans l'équation de l'erreur perturbée (III-32), et donc une commande par modèle de référence modifiée doit être appliquée en considérant atténuation de la perturbation. Un nouveau critère de performance est proposé. Ce critère est le suivant: [6]

$$\frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{2} (\tilde{x}^T(t) Q \tilde{x}(t) + u^T(t) R u(t)) dt}{\int_0^{\infty} \frac{1}{2} d^T d(t) dt} \quad (\text{III-35})$$

avec la condition initiale $\tilde{x}(0) = 0$.

En posant $z = \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ D \end{bmatrix} u$, avec C et D des matrices de dimensions appropriées choisies convenablement et représentant les factorisations de CHOLESKY des matrices Q et R , c'est à

dire $Q = C^T C$ et $R = D^T D$, on peut interpréter le critère (III-35) comme étant le gain L_2 de la perturbation d à la sortie contrôlée z définit pour le système non linéaire suivant : [31]

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A_T(\tilde{x}, t)\tilde{x} + B_T(\tilde{x}, t)u + B_T(\tilde{x}, t)d \\ z &= \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ D \end{bmatrix} u \end{aligned} \tag{III-36}$$

Par référence au problème H_∞ standard présenté dans le chapitre I, on peut définir le problème de la commande optimale H_∞ standard non linéaire dans les termes suivants:

Définition III-1 : [31]

Pour le système défini par (III-36), trouver si elle existe, la plus petite valeur $\gamma^* \geq 0$ tel que pour tout $\gamma > \gamma^*$, il existe un retour d'état u^* tel que le gain L_2 de d à z soit inférieur ou égale à γ .

Cette définition est quelque peu différente à celle qui a été donnée pour le problème H_∞ standard linéaire. En effet dans cette dernière la stabilité interne du système était requise, c'est à dire que le système en boucle fermée devait être asymptotiquement stable. Or dans la définition ci-dessus cette condition n'apparaît pas en des termes directes, mais elle est implicitement impliquée dans la condition que vérifie le gain L_2 et qui est dite propriété atténuation, et qu'il est plus facile de considérer en premier lieu le problème H_∞ sans conditions préalables sur la stabilité interne du système. [31]

Remarque III-2 :

Nous avons utilisé dans *définition III-1* le terme H_∞ . Ceci n'est pas tout à fait correcte, car la norme H_∞ concerne les matrices de transfert, ce qui n'est pas le cas ici puisque on est dans le domaine temporel. Il serait plus juste d'utiliser le terme de gain L_2 qui caractérise les systèmes non linéaires.

La solution au problème H_∞ standard non linéaire a été traitée dans plusieurs travaux dont ceux de A. ISIDORI et ASTOLFI dans [13], A.J. VAN DER SHAFT dans [30] et [31] et tout récemment W. LIN et J.C. DOYLE dans [21] et W.M. LIN dans [22]. Les solutions proposées requièrent la résolutions d'équations différentielles partielles non linéaires qui sont généralement difficiles à résoudre.

Pour contourner cet inconvénient, le problème H_∞ non linéaire peut être formulé comme un problème minimax, c'est à dire un jeu quadratique à deux joueurs, en l'occurrence u et d , et poser le critère de performance (III-35) de la manière suivante:

$$\min_{u(\cdot) \in L_2} \max_{d(\cdot) \in L_2} \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{2} (\tilde{x}^T(t) Q \tilde{x}(t) + u^T(t) R u(t)) dt}{\int_0^{\infty} \frac{1}{2} d^T d(t) dt} \leq \gamma^2 \quad (\text{III-37})$$

où la trajectoire d'état $\tilde{x}(\cdot)$ débute par la condition initiale $\tilde{x}(0) = 0$. Si le critère (III-37) est vérifié par u^* et par d^* on dira que u^* est la commande optimale et que d^* est le pire des cas des perturbations. Dans ce cas, en synthétisant un retour d'état $u = u^*$ pour le système en boucle fermée, on a la garantie que l'effet de la pire des perturbations d^* sur l'erreur de poursuite et le signal de commande u est inférieure ou égale à γ c'est à dire que :

$$\max_{d \in L_2} \frac{\|z^*(t)\|_{L_2}}{\|d(t)\|_{L_2}} \leq \gamma^2 \quad (\text{III-38})$$

où :

$$z^*(t) = \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ D \end{bmatrix} u^*(t) \quad (\text{III-39})$$

L'expression ci-dessus (III-38) signifie que la norme H_∞ (norme L_2 induite) de d à z^* est inférieure ou égale à γ , à partir de ce raisonnement, on dira qu'on est en face d'un problème d'atténuation de la perturbation par H_∞ optimale pour la commande par modèle de référence d'un robot manipulateur, pour simplifier on l'appellera commande par H_∞ non linéaire d'un robot manipulateur.

Une fois la solution u^* est trouvée pour un γ donné, on peut calculer successivement de plus petites valeurs de γ jusqu'à l'obtention du niveau maximal (optimal) d'atténuation de la perturbation.

III-2-3 RESOLUTION DU PROBLEME H_∞ :

A partir de l'analyse faite dans la section ci-dessus, le problème de la commande par modèle de référence avec une atténuation désirée des incertitudes paramétriques et de la perturbation externe est formulée comme un problème de commande H_∞ qui lui même est équivalent à un jeu quadratique minimax. Dans cette section, il sera montré qu'avec un choix

adéquat d'une fonction (fonction d'énergie emmagasinée), le problème de commande H_∞ du robot manipulateur, peut être globalement résolu en terme d'une formule explicite par l'intermédiaire de l'équation dite de BELLMAN-ISAACS de la théorie du jeu différentiel [6]

Après réarrangement de l'équation (III-37), le critère de performance devient comme suit :

$$\min_{U(\cdot)} \max_{\substack{d(\cdot) \in L_2^0 \\ \neq 0}} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} \tilde{x}^T(t) Q \tilde{x}(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R u(t) - \frac{1}{2} \gamma^2 d^T d(t) \right) dt \leq 0, \tilde{x}(0) = 0 \quad (\text{III-40})$$

On définit la fonction coût :

$$J(\tilde{x}(t), u(t), d(t), t) = \int_t^{\infty} L(\tilde{x}(s), u(s), d(s)) ds \quad (\text{III-41})$$

avec le Lagrangien de l'optimisation $L(\tilde{x}, u, d)$ donné par :

$$L(\tilde{x}, u, d) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T Q \tilde{x} + \frac{1}{2} u^T R u - \frac{1}{2} \gamma^2 d^T d \quad (\text{III-42})$$

et en introduisant la fonction $V(\tilde{x}(t), t)$ donnée par :

$$V(\tilde{x}(t), t) = \min_{u(\cdot)} \max_{d(\cdot)} J(\tilde{x}(t), u, d, t) \quad (\text{III-43})$$

le critère de performance (III-37) est équivalent à :

$$\min_{u(\cdot)} \max_{d(\cdot)} J(\tilde{x}(0), u, d, 0) = V(\tilde{x}(0), 0) \leq 0, \quad \text{quand } \tilde{x}(0) = 0 \quad (\text{III-44})$$

Donc, à partir de l'analyse ci-dessus, on peut voir que la solution du problème de commande H_∞ d'un robot manipulateur peut être subdivisé en deux étapes et qui sont les suivantes :

Etape 1 : Résoudre le problème minimax

$$V(\tilde{x}(0), 0) = \min_{u(\cdot)} \max_{d(\cdot)} J(\tilde{x}(0), u, d, 0) \quad (\text{III-45})$$

lié à l'équation dynamique de l'erreur de poursuite perturbée (III-32).

Étape 2 : Trouver la condition pour laquelle l'inégalité suivante :

$$V(\tilde{x}(0), 0) \leq 0 \quad \text{(III-46)}$$

soit vérifiée quand $\tilde{x}(0) = 0$.

Pour clarifier notre présentation, nous commencerons par résoudre l'étape 1, c'est à dire trouver la commande (minimale) u^* et le pire des cas de perturbation (maximale) d^* ainsi que la valeur de la fonction minimax V associée. La résolution de la deuxième étape ne sera alors qu'une conséquence directe des résultats de la première étape.

• **Resolution du problème minimax:**

La résolution du problème minimax (III-45) qui est équivalent au problème minimax posé par les équations (II-2), (II-7) et (II-8) du chapitre II, s'opère par l'application de l'équation minimax de BELLMAN-ISAACS [6]. Sous l'hypothèse que la fonction V existe et est continuellement différentiable, le problème de commande minimax (III-45) lié à (III-32) est résolu par la paire d'équilibre u^*, d^* si et seulement si $V(\tilde{x}(t), t)$ satisfait l'équation minimax de BELLMAN-ISAACS suivante : [6] [15]

$$-\frac{\partial V(\tilde{x}(t), t)}{\partial t} = \min_{u(\cdot)} \max_{d(\cdot)} \left\{ L(\tilde{x}, u, d) + \left(\frac{\partial V(\tilde{x}(t), t)}{\partial \tilde{x}} \right)^T \tilde{x} \right\} \quad \text{(III-47)}$$

$$= \min_{u(\cdot)} \max_{d(\cdot)} H(\tilde{x}, u, d, t) \quad \text{(III-48)}$$

$$= H^*(\tilde{x}, u^*, d^*, t) \quad \text{(III-49)}$$

où H représente l'Hamiltonien, et en référence à la fonction coût J , la fonction candidate V doit vérifier la contrainte finale suivante :

$$V(\tilde{x}(\infty), \infty) = 0 \quad \text{(III-50)}$$

La fonction candidate V est choisie de la manière suivante : [6]

$$V(\tilde{x}, t) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T P(\tilde{x}, t) \tilde{x} \quad \text{(III-51)}$$

où $P(\tilde{x}, t)$ est une matrice symétrique définie positive pour tout \tilde{x} et t .

En utilisant la technique "completing the squares" on a :

$$\frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} = P(\tilde{x}, t) \tilde{x} + \frac{1}{2} \tilde{x}^T \frac{\partial P(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} \tilde{x} \quad (\text{III-52})$$

ce qui donne :

$$\left(\frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} \right)^T \dot{\tilde{x}} = \tilde{x}^T P(\tilde{x}, t) \dot{\tilde{x}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} \tilde{x}^T \left(\frac{\partial P(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} \dot{\tilde{x}} \right) \tilde{x} \quad (\text{III-53})$$

et l'Hamiltonien devient :

$$H(\tilde{x}(t), u, d, t) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T Q \tilde{x} + \frac{1}{2} u^T R u - \frac{1}{2} \gamma^2 d^T d + \tilde{x}^T P(\tilde{x}, t) \dot{\tilde{x}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} \tilde{x}^T \left(\frac{\partial P(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} \dot{\tilde{x}} \right) \tilde{x} \quad (\text{III-54})$$

En substituant l'équation (III-32) dans (III-54) nous aboutissons à :

$$H(\tilde{x}(t), u, d, t) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T Q \tilde{x} + \frac{1}{2} u^T R u + \tilde{x}^T P(\tilde{x}, t) B_T(\tilde{x}, t) u - \frac{1}{2} \gamma^2 d^T d + \tilde{x}^T P(\tilde{x}, t) B_T(\tilde{x}, t) d + \tilde{x}^T P(\tilde{x}, t) A_T(\tilde{x}, t) \tilde{x} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} \tilde{x}^T \left(\frac{\partial P(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} \dot{\tilde{x}} \right) \tilde{x} \quad (\text{III-55})$$

La commande optimale $u = u^*$ pour laquelle H atteint sa valeur minimale, est obtenue par la dérivée partielle par rapport à u :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u^T R + \tilde{x}^T P(\tilde{x}, t) B_T(\tilde{x}, t) \quad (\text{III-56})$$

L'optimum est obtenu en posant $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, ce qui donne :

$$u^* = -R^{-1} B_T^T(\tilde{x}, t) P(\tilde{x}, t) \tilde{x} \quad (\text{III-57})$$

Cet optimum est un minimum, en effet : $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = R > 0$

En faisant la même chose par rapport à d on obtient :

$$d^* = \frac{1}{\gamma^2} B_T^T(\tilde{x}, t) P(\tilde{x}, t) \tilde{x} \quad (\text{III-58})$$

pour qui on obtient un maximum, en effet : $\frac{\partial^2 H}{\partial d^2} = -\gamma^2 < 0$

En posant :

$$G_I(\tilde{x}, t) = B_T^T(\tilde{x}, t) P(\tilde{x}, t) \tilde{x} \quad (\text{III-59})$$

et sachant que :

$$\frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial t} = \tilde{x}^T \frac{\partial P(\tilde{x}, t)}{\partial t} \tilde{x}$$

L'équation (III-47) devient :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \tilde{x}^T \frac{\partial P(\tilde{x}, t)}{\partial t} \tilde{x} = & \frac{1}{2} \tilde{x}^T Q \tilde{x} + \tilde{x}^T P(\tilde{x}, t) A_T(\tilde{x}, t) - \frac{1}{2} G_I^T(\tilde{x}, t)^T R^{-1} G_I(\tilde{x}, t) + \\ & + \frac{1}{2\gamma^2} G_I^T(\tilde{x}, t)^T G_I(\tilde{x}, t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} \tilde{x}^T \left(\frac{\partial P(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}_i} \tilde{x}_i \right) \tilde{x} \end{aligned} \quad (\text{III-60})$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \tilde{x}^T \left\{ \dot{P}(\tilde{x}, t) + P(\tilde{x}, t) A_T(\tilde{x}, t) + A_T^T(\tilde{x}, t) P(\tilde{x}, t) - \right. \\ \left. P(\tilde{x}, t) B_T(\tilde{x}, t) \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right) B_T^T(\tilde{x}, t) P(\tilde{x}, t) + Q \right\} \tilde{x} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-61})$$

La commande optimale u^* et le pire des cas de perturbations d^* correspondant sont :

$$u^*(t) = -R^{-1} G_1(\tilde{x}, t) = -R^{-1} B_T^T(\tilde{x}, t) P(\tilde{x}, t) \tilde{x} \quad (\text{III-62})$$

et

$$d^*(t) = \frac{1}{\gamma^2} G_1(\tilde{x}, t) = \frac{1}{\gamma^2} B_T^T(\tilde{x}, t) P(\tilde{x}, t) \tilde{x} \quad (\text{III-63})$$

et à partir de l'équation (III-61), on aboutit à l'équation non linéaire de RICCATI suivante :

$$\begin{aligned} \dot{P}(\tilde{x}, t) + P(\tilde{x}, t) A_T(\tilde{x}, t) + A_T^T(\tilde{x}, t) P(\tilde{x}, t) \\ - P(\tilde{x}, t) B_T(\tilde{x}, t) \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right) B_T^T(\tilde{x}, t) P(\tilde{x}, t) + Q = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-64})$$

On voit bien que la stratégie de commande donnée par les équations (III-62) et (III-63) associées à l'équation de RICCATI (III-64) est celle qui a été proposée dans le chapitre précédent.

En général, il n'est pas facile de résoudre l'équation de RICCATI non linéaire. Cependant, en robotique l'équation (III-64) peut être simplifiée d'avantage en une équation algébrique matricielle par un choix adéquat de la fonction P et en utilisant l'hypothèse concernant la matrice $N(q, \dot{q})$ (Skew Symmetric). P est alors choisit de la manière suivante : [6]

$$P(\tilde{x}, t) = T_0^T \begin{bmatrix} M_0(\tilde{x}, t) & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} T_0 \quad (\text{III-65})$$

où K est une matrice constante symétrique définie positive, représentant la contrainte de la source d'action autour de la position de référence donnée, puisque le terme contenant $M_0(q)$ représente l'énergie cinétique. On peut interpréter la fonction candidate $V(\tilde{x}, t)$ comme l'énergie totale emmagasinée dans l'erreur d'état \tilde{x} dans le temps t .

Il faut trouver maintenant sous quelles conditions la fonction suggérée (III-65) est une solution de l'équation de RICCATI non linéaire (III-64). Considérons le 2^{ème} et le 3^{ème} terme de l'équation de RICCATI non linéaire (III-64), en utilisant l'hypothèse suivante :

$$x^T N(q, \dot{q}) x = 0 \quad (\text{III-66})$$

où :

$$N(q, \dot{q}) = C_0(q, \dot{q}) - \frac{1}{2} \dot{M}_0(q, \dot{q})$$

on trouve :

$$P(\tilde{x}, t) A_T(\tilde{x}, t) + A_T^T(\tilde{x}, t) P(\tilde{x}, t) = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & K \\ K & 0_{n \times n} \end{bmatrix} + T_0^T \begin{bmatrix} -\dot{M}(q, \dot{q}) & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} T_0 \quad (\text{III-67})$$

(Voir Annexe C)

En posant

$$B_T^T(\tilde{x}, t) P(\tilde{x}, t) = B^T T_0 \text{ où } B = \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (\text{III-68})$$

et en substituant (III-67) et (III-68) dans l'équation de RICCATI non linéaire (III-64), cette dernière devient une équation algébrique de la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{bmatrix} + Q - T_0^T B \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right) B^T T_0 = 0 \quad (\text{III-69})$$

Remarque III-3 :

Lorsque $\gamma \rightarrow \infty$ (i.e pas de contraintes imposées sur l'atténuation de la perturbation d) l'équation algébrique matricielle (III-69) tend vers :

$$\begin{bmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{bmatrix} + Q - T_0^T B R^{-1} B^T T_0 = 0$$

qui est le résultat de la commande optimale H_2 considéré par JOHANSSON dans [14].

A partir de l'analyse faite ci-dessus, il s'en suit que la fonction candidate V de (III-51) est solution de l'équation (III-47) avec $u^* = -R^{-1} B^T T_0 \tilde{x}$ et $d^* = \frac{1}{\gamma^2} B^T T_0 \tilde{x}$ si les matrices K et T_0 satisfont l'équation algébrique (III-69).

Il reste maintenant à vérifier que V satisfait la condition finale (III-50) pour que le problème minimax (III-45) soit résolu. Pour cela il suffit de prouver que V est une fonction de LYAPOUNOV sous une certaine condition.

Preuve:

$V(\tilde{x}, t)$ est continue et puisque la matrice $K > 0$ et T_0 est non singulière nous avons comme conséquence directe que $V(\tilde{x}, t) > 0$ pour tout $\tilde{x} \neq 0$.

En prenant la dérivée de la fonction candidate V par rapport au temps t et pour $u = u^*$ et $d = d^*$, nous obtenons :

$$\frac{dV(\tilde{x}, t)}{dt} = \left(\frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} \right)^T \tilde{\dot{x}} \Big|_{u^*, d^*} + \frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial t}$$

De (III-49) on a :

$$\frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial t} = -L(\tilde{x}, u^*, d^*) - \left(\frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} \right)^T \tilde{\dot{x}} \Big|_{u^*, d^*}$$

alors :

$$\begin{aligned} \frac{dV(\tilde{x}, t)}{dt} &= -\frac{1}{2} \tilde{x}^T Q \tilde{x} - \frac{1}{2} u^{*T} R u^* + \frac{1}{2} \gamma^2 d^{*T} d^* \\ &= -\frac{1}{2} \tilde{x}^T \left\{ Q + T_0^T B \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right) B^T T_0 \right\} \tilde{x} < 0 \end{aligned}$$

Si :

$$\gamma^2 I > R \tag{III-70}$$

et puisque $Q > 0$, nous avons $\frac{dV(\tilde{x}, t)}{dt} < 0$ pour tout $\|\tilde{x}\| \neq 0$ et donc V est une fonction de

LYAPUNOV. Sachant alors que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$, et puisque V est continue nous avons:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\tilde{x}(t), t) = V\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t), \infty\right) = 0$$

Ce résultat nous permet de dire alors que $V(\tilde{x}(0), 0) = \min_{u(\cdot)} \max_{d(\cdot)} J(\tilde{x}(0), u, d, 0)$. En effet:

$$\begin{aligned} \frac{dV(\tilde{x}, t)}{dt} &= \left(\frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} \right)^T \tilde{x} \Big|_{u^*, d^*} + \frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial t} \\ &= -L(\tilde{x}, u^*, d^*) \\ &= -\left(\frac{1}{2} \tilde{x}^T Q \tilde{x} + \frac{1}{2} u^{*T} R u^* - \frac{1}{2} \gamma^2 d^{*T} d^* \right) \end{aligned}$$

En intégrant l'équation ci-dessus membre par membre, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dV(\tilde{x}, t) &= V(\tilde{x}(\infty), \infty) - V(\tilde{x}(0), 0) \\ &= -\min_{u(\cdot)} \max_{d(\cdot)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} \tilde{x}^T(t) Q \tilde{x}(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R u(t) - \frac{1}{2} \gamma^2 d^T(t) d(t) \right) dt \end{aligned}$$

et comme $V(\tilde{x}(\infty), \infty) = 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} V(\tilde{x}(0), 0) &= \min_{u(\cdot)} \max_{d(\cdot)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} \tilde{x}^T(t) Q \tilde{x}(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R u(t) - \frac{1}{2} \gamma^2 d^T(t) d(t) \right) dt \\ &= \min_{u(\cdot)} \max_{d(\cdot)} J(\tilde{x}(0), u, d, 0) \end{aligned}$$

Maintenant que L'étape 1 est achevée nous pouvons constater que la condition posée dans l'étape 2 du problème de la commande H_∞ du bras manipulateur est directement impliquée. En effet :

$$V(\tilde{x}, t) = \frac{1}{2} \tilde{x}(t)^T \begin{bmatrix} M_o(q(t)) & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \tilde{x}(t)$$

d'où pour $\tilde{x}(0) = 0$ $V(\tilde{x}(0), 0) = 0$.

En récapitulant, le problème de la commande H_∞ d'un bras manipulateur est résoluble si:

1- l'équation algébrique (III-69) admet la paire de solution $K > 0$ et T_0 non singulière.

2- $\gamma^2 I > R$

La commande optimale $u^*(t)$ et la pire des cas de perturbation d^* sont donnés respectivement par :

$$u^* = -R^{-1} B^T T_0 \tilde{x} \quad \text{et} \quad d^* = \frac{1}{\gamma^2} B^T T_0 \tilde{x}.$$

Ainsi à partir de (III-23), le couple à appliquer correspondant qui garantit la performance H^∞ est donné par :

$$\tau^* = M_0(q) \left[\ddot{q}_r - T_{11}^{-1} T_{12} \dot{\tilde{q}} - T_{11}^{-1} M_0(q)^{-1} \left(C_0(q, \dot{q}) B^T T_0 \tilde{x} + u^* \right) \right] + C_0(q, \dot{q}) + G_0(q).$$

Remarque III-4 :

L'inégalité (III-70) impose une contrainte sur le niveau d'atténuation de la perturbation γ à atteindre. Ceci est due à la pénalité sur l'effort de commande u qui apparaît dans l'index de performance (III-37).

Cependant, lorsque $R \rightarrow 0$ i.e que la pénalité commande u est faible, γ peut prendre de plus petite valeurs que possible, mais ceci peu exiger une énergie de commande importante.

• **Solution de l'équation algébrique matricielle (III-69) : [6]**

Pour implémenter le moment à appliquer (III-23), on doit trouver les matrices T_0 et K solutions de l'équation quasi-algébrique de RICCATI (III-69).

Soit Q une matrice symétrique définie positive factorisée comme suit :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1^T Q_1 & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_2^T Q_2 \end{bmatrix} \quad \text{(III-71)}$$

Avec cette factorisation (III-69) se fractionne en quatre équations qui sont les suivantes :

$$Q_1^T Q_1 - T_{11}^T \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right) T_{11} = 0 \quad \text{(III-72)}$$

$$K + Q_{12}^T - T_{12}^T \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right) T_{11} = 0 \quad \text{(III-73)}$$

$$K + Q_{12} - T_{11}^T \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right) T_{12} = 0 \quad (\text{III-74})$$

$$Q_2^T Q_2 - T_{12}^T \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right) T_{12} = 0 \quad (\text{III-75})$$

De (III-72) à (III-75) la matrice $\left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right)$ doit être définie positive, puisque les matrices $Q_1^T Q_1$ et $Q_2^T Q_2$ sont définies positives. Soit :

$$R_1^T R_1 = \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right)^{-1} \quad (\text{III-76})$$

En substituant (III-76) dans (III-72) et (III-75), les sous-matrices T_{11} et T_{12} , et donc T_0 peuvent être obtenues comme suit :

$$T_0 = \begin{bmatrix} R_1^T Q_1 & R_1^T Q_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{III-77})$$

Par substitution des valeurs de T_{11} et T_{12} dans (III-73) et (III-74) respectivement, on aboutit à la matrice symétrique K donnée par :

$$K = \frac{1}{2} (Q_1^T Q_2 + Q_2^T Q_1) - \frac{1}{2} (Q_{12}^T + Q_{12}) \quad (\text{III-78})$$

En résumé, la synthèse de la commande H_∞ d'un robot manipulateur peut être conçues par les étapes suivantes :

Algorithme de conception :

Etape 1 : Choisir le niveau désiré d'atténuation de la perturbation, $\gamma > 0$.

Etape 2 : Sélectionner les matrices de pondération R et Q tel que $R > 0$ et que

$\lambda_{\max}(R) < \gamma^2$ et Q soit de la forme :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1^T Q_1 & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_2^T Q_2 \end{bmatrix} \text{ avec : } (Q_1^T Q_2 + Q_2^T Q_1) - (Q_{12}^T + Q_{12}) > 0$$

Etape 3 : Calculer la factorisation de CHOLESKY :

$$R_l^T R_l = \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right)^{-1}$$

pour avoir :

$$T_0 = \begin{bmatrix} R_l^T Q_1 & R_l^T Q_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Etape 4 : Aboutir au moment appliqué correspondant :

$$\tau^* = M_o(q) \left[\ddot{q}_r - T_{11}^{-1} T_{12} \ddot{\tilde{q}} - T_{11}^{-1} M_o(q)^{-1} \left(C_o(q, \dot{q}) B^T T_0 \tilde{x} + u^* \right) \right] + C_o(q, \dot{q}) + G_o(q)$$

où :
$$u^* = -R^{-1} B^T T_0 \tilde{x}$$

En choisissant $Q = \alpha I$ et $R = \beta I$ pour tout α réel positif et $\beta < \gamma^2$, avec choix de K toujours définie positive, on aura $T_{11} = T_{12} = \rho I$, pour un certain réel ρ , l'expression du couple appliquée devient :

$$\tau^* = M_o(q) \left[\ddot{q}_r - \ddot{\tilde{q}} - M_o^{-1}(q) \left(C_o(q, \dot{q}) - R^{-1} \right) (\ddot{\tilde{q}} + \tilde{q}) \right] + C_o(q, \dot{q}) + G_o(q) \quad \text{(III-79)}$$

Remarque III-5 :

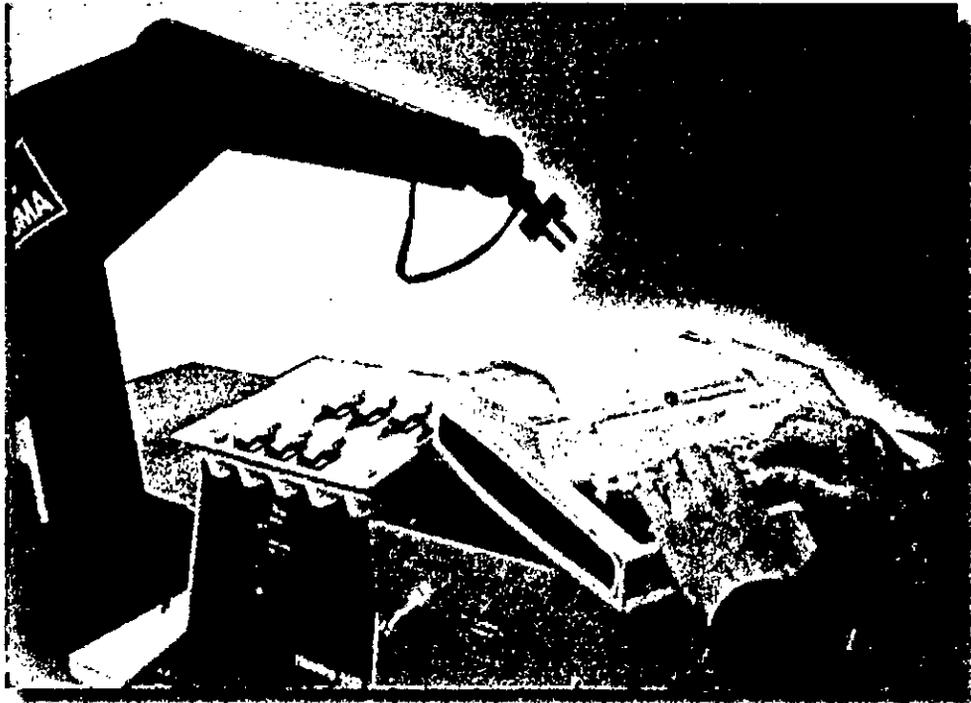
La pondération R où plus exactement β tel que $R = \beta I$ est d'une importance capitale. C'est elle qui en fait détermine le degrés d'atténuation des perturbations. En effet, en se fixant un degrés d'atténuation γ_0 la solution au problème H_∞ existe si $\beta < \gamma_0^2$, mais cela ne limite pas pour autant le choix sur β et rien n'empêche de prendre des valeurs très petites de β et implicitement diminuer γ_0 de manière à ce que β reste toujours inférieur à γ_0^2 , ce qui aura pour effet l'amélioration de la qualité d'atténuation et surtout d'augmenter la valeur de la pire perturbation atténuable. Il est alors logique, lors de la synthèse de la commande de considérer tout d'abord β puis lui faire correspondre un degrés d'atténuation γ .

III-3 CONCLUSION :

Il serait hâtif de vouloir conclure maintenant sans avoir procédé à des simulations pour tester l'efficacité de la commande, ce qui sera l'objet du quatrième et dernier chapitre. Néanmoins nous pouvons récapituler les principaux résultats. Tout d'abord concernant les travaux de JOHANSSON dans [14]. Celui-ci pose le problème de la commande d'un bras manipulateur par modèle de référence en appliquant la commande H_2 , qui consiste à minimiser l'erreur de poursuite et l'effort à appliquer. Ce dernier est soigneusement choisi puisque il écarte l'effort due à l'énergie potentielle. La stratégie de la commande qui serait proposé en utilisant la commande H_2 ne permettrait d'avoir de bon résultats que si le modèle dynamique du robot est parfaitement connue, ce qui n'est pas le cas dans la réalité et que celui-ci est souvent sujet à des incertitudes paramétriques et de perturbations externes. A partir de là nous avons proposé d'utiliser les technique de H_∞ pour palier justement à ce genre de difficultés. Dans un premier temps, le problème a été transformé en un problème de H_∞ non linéaire, puis, dans un second temps en un problème de contrainte minimax. Nous avons alors aboutit à une condition suffisante pour l'existence de la solution au problème minimax et donc de la commande avec la performance H_∞ .

Le chapitre suivant achevera notre travail, puisque il s'agira de simulations concernant l'application de la loi de commande (III-79) sur le robot manipulateur PUMA 560

CHAPITRE IV



Application et Simulation

IV-1 INTRODUCTION :

Dans ce quatrième et dernier volet nous allons appliquer la commande présentée dans le chapitre précédent sur le bras de robot PUMA 560 de Puma Unimation Inc., et procéder à des simulations qui nous permettront de juger de l'efficacité de cette commande.

La première partie de ce chapitre fera l'objet de la modélisation dynamique du PUMA 560, où on a considéré uniquement les trois premiers degrés de libertés.

Dans la deuxième partie nous allons procéder à différentes simulations, présenter les résultats de celles-ci, puis les interpréter.

IV-2 MODELISATION DYNAMIQUE :

La dynamique du robot est régit par des équations mathématiques issues des lois de la physique Newtoniennes et Lagrangiennes . Deux approches essentielles nous permettent d'aboutir à ce modèle mathématique et qui sont les approches d'Euler-Lagrange et Newton-Euler, dans notre cas on s'intéresse uniquement à la première

Le modèle ainsi obtenu nous permet de synthétiser une loi de commande et de simuler le mouvement du manipulateur pour tester l'efficacité de cette commande .

IV-2-1 Approche d'Euler Lagrange : [2] [25]

L'approche d'Euler Lagrange associée à la représentation de [D-H] permet d'établir un système d'équations différentielles reliant les coordonnées généralisées aux forces généralisées, obtenant ainsi le modèle dynamique du robot manipulateur .

L'équation d'Euler-Lagrange est donnée par : [2] [25]

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}_i} = \tau_i \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{IV-1})$$

où L est le Lagrangien qui s'exprime par :

$$L = E_C - E_P \quad (\text{IV-2})$$

- E_C : énergie cinétique totale de toutes les liaisons ;
- E_P : énergie potentielle totale de toutes les liaisons ;
- E_D : énergie de dissipation en cas de présence de frottement visqueux ;
- T_i : force généralisée a la $i^{\text{ème}}$ articulation ;
- n : nombre de degré de liberté ;
- q_i : coordonnée généralisée d'ordre i ;
- \dot{q}_i : dérivée de la coordonnée généralisée.

a. Energie cinétique:

L'énergie cinétique est calculée par l'expression de la vitesse.

$$V_0^i = \frac{dr_0^i}{dt} \tag{IV-3}$$

$$r_0^i = {}_0 T^i r_i^i \tag{IV-4}$$

où r_i^i est la coordonnée homogène du point (i) exprimée dans le repère R_i . Comme la liaison n'est pas flexible, on a $\frac{dr_i^i}{dt} = 0$ donc :

$$V_0^i = \sum_{j=1}^i \frac{\partial_0 T^i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} r_i^i \tag{IV-5}$$

avec T_{i-1}^i est la matrice de transformation homogène. Sous une forme plus compacte, on peut écrire :

$$V_0^i = \sum_{j=1}^i [U_j \dot{q}_j] r_i^i \tag{IV-6}$$

et :

$$U_j = \begin{cases} {}_0 T^{j-1} Q_j {}_{j-1} T^i & j \leq i \\ 0 & j \geq i \end{cases} \tag{IV-7}$$

pour une liaison rotative on a :

$$Q_j = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-8})$$

et pour une liaison translationnelle :

$$Q_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-9})$$

l'énergie cinétique de l'élément i dans la liaison i est :

$$dE_{Cl} = \frac{1}{2} \text{trace}(V_i V_i^T) dm \quad (\text{IV-10})$$

en développant l'expression précédente, on obtient :

$$dE_{Cl} = \frac{1}{2} \text{trace} \left(\sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^l U_{ij} (r_i^j r_i^{jT} dm) U_{ik}^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right) \quad (\text{IV-11})$$

l'énergie cinétique de la liaison i est :

$$E_{Cl} = \frac{1}{2} \text{trace} \left(\sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^l U_{ij} J_i U_{ik}^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right) \quad (\text{IV-12})$$

avec :

$$J_i = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int x_i^2 dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int x_i z_i dm & \int y_i z_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix} \quad (\text{IV-13})$$

L'énergie cinétique des actionneurs est définie par :

$$E_{Ca} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \dot{q}_i^2 \quad (\text{IV-14})$$

où I_i caractérise un moment d'inertie dans le cas d'une rotation et une masse dans le cas d'une translation de l'actionneur i . L'énergie cinétique totale sera :

$$E_C = \sum_{i=1}^n E_{Ci} + E_{Ca} \tag{IV-15}$$

b. Energie potentielle:

$$E_P = \sum_{i=1}^n -m_i g^T r_i^l = -\sum_{i=1}^n m_i g^T T_0^l r_i^l \tag{IV-16}$$

avec $g^T = [g_x \quad g_y \quad g_z \quad 1]$ exprimée dans le repère R_0 , dans notre cas :

$$g^T = [0 \quad 0 \quad -|g| \quad 1] \tag{IV-17}$$

où g est la gravité.

Enfin, l'énergie de dissipation est donnée par :

$$E_D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f_{vi} \dot{q}_i^2 \tag{IV-18}$$

où f_{vi} le coefficient de frottement visqueux ($i=1, n$).

c. Equation Dynamique :

D'après l'expression du lagrangien, L sera donné par :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^l \text{trace}(U_{ij} J_i U_{jk}^T) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_i m_i g^T T_0^l r_i^l \tag{IV-19}$$

Appliquant la formule d'Euler-Lagrange à la fonction Lagrangienne donnée ci-dessus, on obtient la force ou couple généralisé donné par :

$$\tau_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \text{trace}(U_{jk} J_j U_{ji}^T) \ddot{q}_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^k \text{trace}(U_{jk} J_j U_{jl}^T) \dot{q}_k \dot{q}_l - \sum_{j=1}^n m_j g^T U_{ji} r_j^j + f_{vi} \dot{q}_i \quad (\text{IV-20})$$

avec :

$$U_{ijk} = \begin{cases} {}_0T^{k-1} Q_k {}_{j-1}T^{k-1} Q_j {}_{j-1}T^i & k \leq j \leq i \\ {}_0T^{j-1} Q_j {}_{k-1}T^{j-1} Q_k {}_{k-1}T^i & j \leq k \leq i \\ 0 & j < i < k \end{cases} \quad (\text{IV-21})$$

Ou encore sous une forme plus compacte :

$$T_i = \sum_{j=1}^n M_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_{ijk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k + G_i(q) + H_i(\dot{q}_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{IV-22})$$

$$M_{ij}(q) = \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{trace}(U_{kj} J_k U_{ki}^T) \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{matrix} \quad (\text{IV-23})$$

$$G_i(q) = - \sum_{j=1}^n m_j g^T U_{ji} r_j^j \quad (\text{IV-24})$$

$$C_{ijk}(q) = \sum_{l=\max(i,j,k)}^n \text{trace}(U_{lk} J_l U_{li}^T) \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \\ k = 1, \dots, n \end{matrix} \quad (\text{IV-25})$$

$$H_i(\dot{q}_i) = f_{vi} \dot{q}_i \quad (\text{IV-26})$$

La forme matricielle est donnée par :

$$\tau(t) = M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) + H(\dot{q}). \quad (\text{IV-27})$$

avec $q \in \mathbb{R}^n$, $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$, $\ddot{q} \in \mathbb{R}^n$ représentent respectivement les positions, les vitesses et les accélérations articulaires et :

$M(q) \in \mathcal{R}^{n \times n}$: matrice symétrique définie positive des accélérations inertielles dans l'élément M_{ij} de cette matrice est l'inertie de la $i^{\text{ème}}$ articulation sur la $j^{\text{ème}}$ articulation et vice versa ;

$C(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathcal{R}^n$: vecteur de forces et/ou couples dus aux accélérations de coriolis et centrifuge ;

$G(q) \in \mathcal{R}^n$: vecteur de forces et/ou couples dus aux forces de gravitation ;

$H(\dot{q}) \in \mathcal{R}^n$: représente les frottements visqueux ;

$\tau(t) \in \mathcal{R}^n$: vecteur de forces et/ou couples;

Si de plus on introduit un vecteur de perturbation $w(t)$ au niveau du vecteur couples $\tau(t)$ l'équation dynamique du robot devient:

$$w(t) + \tau(t) = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + H(\dot{q}) \quad (\text{IV-28})$$

IV-2-2 Modèle dynamique du robot PUMA 560 : [2] [5] [25]

Le calcul du modèle dynamique final a été obtenu en appliquant l'approche d'Euler-Lagrange. Dans ce qui suit nous allons donner directement l'expression de ce modèle, en renvoyant tout lecteur soucieux des détails et de démonstrations à la référence [5]. Ce manipulateur réalise 3 mouvements rotationnels, le premier suivant l'axe horizontal, le second et le troisième suivant deux axes verticaux comme indiqué sur la figure ci-dessous :

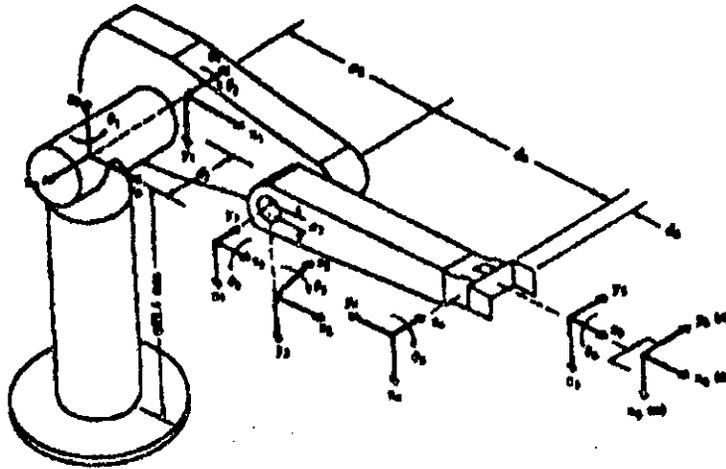


Figure (IV-1)

Le modèle dynamique est le suivant :

$$w(t) + \tau = (M(q) + ME(q)) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) + H(\dot{q}) + \tau_m \quad (\text{IV-29})$$

avec

$$M(q) = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 c_{23}^2 + I_3 c_2^2 + I_4 c_2 c_{23} & I_5 s_{23} + I_6 s_2 & I_5 s_{23} \\ I_5 s_{23} + I_6 s_2 & I_7 + I_4 c_3 & I_8 + 0.5 I_4 c_3 \\ I_5 s_{23} & I_8 + 0.5 I_4 c_3 & I_8 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-30})$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & \begin{pmatrix} -(2(I_3 s_2 c_2 + I_2 s_{23} c_{23}) + I_4 (c_2 s_{23} + s_2 c_{23})) \dot{q}_1 + (I_6 c_2 + I_5 c_{23}) \dot{q}_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -(2 I_2 s_{23} c_{23} + I_4 c_2 s_{23}) \dot{q}_1 + (2 I_5 c_{23}) \dot{q}_2 \dot{q}_3 + (I_5 c_{23}) \dot{q}_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (I_3 c_2 s_2 + I_2 c_{23} s_{23} + 0.5 I_4 (s_2 c_{23} + c_2 s_{23})) \dot{q}_1 \\ (I_2 s_{23} c_{23} + 0.5 I_4 c_2 c_{23}) \dot{q}_1 \end{pmatrix} & 0 & \begin{pmatrix} -(I_4 s_3) \dot{q}_2 \dot{q}_3 - (0.5 I_4 s_3) \dot{q}_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (0.5 I_4 s_3) \dot{q}_2 \end{pmatrix} & & 0 \end{bmatrix}$$

(IV-31)

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(m_3 l_2 + 0.5 m_2 l_2) g c_2 - 0.5 m_3 l_3 g c_{23} \\ -0.5 m_3 l_3 g c_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-32})$$

$$H(\dot{q}) = \begin{bmatrix} f_{v_1} \dot{q}_1 \\ f_{v_2} \dot{q}_2 \\ f_{v_3} \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-33})$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-34})$$

où :

$$\begin{aligned} c_i &= \cos(q_i) & c_{ij} &= \cos(q_i + q_j) \\ s_i &= \sin(q_i) & s_{ij} &= \sin(q_i + q_j) \end{aligned} \quad (\text{IV-35})$$

et :

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{yy1} + I_{xx2} + m_2 d_2 (d_2 + e) + m_3 d_2^2 + I_{xx3} \\ I_2 &= I_{yy3} - I_{xx3} \\ I_3 &= I_{yy2} - I_{xx2} + m_3 l_2^2 \\ I_4 &= m_3 l_2 l_3 \\ I_5 &= 0.5 m_3 l_3 d_2 \\ I_6 &= 0.5 m_2 l_2 (d_2 + e) + m_3 d_2 l_2 \\ I_7 &= I_{zz2} + I_{zz3} + m_3 l_2^2 \\ I_8 &= I_{zz3} \end{aligned} \quad (\text{IV-36})$$

La matrice ME représente les effets de l'effecteur car ce dernier possède une masse non négligeable. Pour le calcul de cette matrice on se contente de la méthode donnée par : [1]

$$\begin{aligned}
 ME_{11} &= I_{xx} + m_1 d_2^2 + I_{M1} + (I_{yy} - I_{xx} + m_1 l_3^2) c_{23}^2 + m_1 l_2^2 c_2^2 + 2 m_1 l_2 l_3 c_2 c_{23} \\
 ME_{12} &= m_1 l_3 d_2 s_{23} + m_1 d_2 l_2 s_2 \\
 ME_{13} &= m_1 l_3 d_2 s_{23} \\
 ME_{22} &= I_{zz} + m_1 (l_2^2 + l_3^2) + I_{M2} + 2 m_1 l_2 l_3 c_3 \\
 ME_{23} &= I_{zz} + m_1 l_3^2 + m_1 l_2 l_3 c_3 \\
 ME_{33} &= I_{zz} + m_1 l_3^2 + I_{M3}
 \end{aligned}
 \tag{IV-37}$$

I_{mi} moments d'inertie des différents moteurs .

I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} moments d'inertie totaux par rapport aux principaux axes de l'effecteur.

Le vecteur des couples additifs τ_{mc} représente l'effet de la charge, il est calculé par la matrice Jacobienne, cette dernière est la dérivée du vecteur position de l'effecteur.

$$J_j(q) = \frac{\partial p}{\partial q_j}
 \tag{IV-38}$$

En particulier, pour le robot PUMA 560, on a :

$$J(q) = [J_1(q) \quad J_2(q) \quad J_3(q)]
 \tag{IV-39}$$

et :

$$p = [c_1(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) - d_2 s_1 \quad s_1(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) + d_2 c_1 \quad -(l_2 s_2 + l_3 s_{23})]^T
 \tag{IV-40}$$

d'où la matrice Jacobienne :

$$J(q) = \begin{bmatrix} -s_1(l_2 s_2 + l_3 c_{23}) - d_2 c_1 & -c_1(l_2 s_2 + l_3 s_{23}) & -c_1(l_3 s_{23}) \\ c_1(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) - d_2 s_1 & -s_1(l_2 s_2 + l_3 s_{23}) & -s_1(l_3 s_{23}) \\ 0 & -(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) & -(l_3 c_{23}) \end{bmatrix}
 \tag{IV-41}$$

Le couple du à la portée de la charge sera :

$$\tau_{mc} = m_0 J^T(q) [J(q) \ddot{q} + \dot{J}(q, \dot{q}) \dot{q} + g]
 \tag{IV-42}$$

avec $g = [0 \ 0 \ 9.81]^T$ et $J(q, \dot{q})$ dérivée de la matrice Jacobienne obtenue à partir de la différentiation par rapport au temps.

L'expression finale de l'équation dynamique (IV-29) inclue les incertitudes paramétriques au niveau des masses de chaque articulation, les frottements visqueux exprimés par le vecteur $H(\dot{q})$ et le vecteur de perturbation $w(t)$. Cette expression peut se mettre sous la forme suivante:

$$\delta + \tau = (M_o(q) + ME_o(q)) \ddot{q} + C_o(q, \dot{q}) \dot{q} + G_o(q) + \tau_{o_m} \quad (\text{IV-43})$$

de sorte que δ représente la perturbation combinée due aux incertitudes paramétriques, à la perturbation externe $w(t)$ et aux frottements visqueux et $M_o(q), ME_o(q), C_o(q, \dot{q}),$

$G_o(q), \tau_{o_m}$ représentent le modèle nominal du robot dont les paramètres sont donnés dans l'annexe D.

IV-3 SIMULATION :

IV-3-1 Trajectoire de référence :

Les trajectoires de référence q_{r1}, q_{r2} et q_{r3} sont convenablement choisies par le modèle de référence suivant:

$$q_r + k_v \dot{q}_r + k_p q_r = k_r r$$

avec

$$q_r = \begin{bmatrix} q_{r1} \\ q_{r2} \\ q_{r3} \end{bmatrix}; \quad q_r(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad r = \begin{bmatrix} \pi / 6 \\ \pi / 3 \\ \pi / 6 \end{bmatrix};$$

et

$$k_v = 0_{3 \times 3}; \quad k_p = I_{3 \times 3}; \quad k_r = I_{3 \times 3};$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}q_{r1}(t) &= (2 - \pi/6) \cos t + \pi/6 \\q_{r2}(t) &= (2 - \pi/3) \cos t + \pi/3 \\q_{r3}(t) &= (2 - \pi/6) \cos t + \pi/6\end{aligned}$$

La période de ces signaux est de 2π , en robotique cet horizon représente une dynamique lente, on se propose alors de diviser cette période par 3 pour exciter d'avantage la dynamique du robot sur un horizon plus petit. On faisant le changement de variable $t = 3t'$, ce qui donne:

$$\begin{aligned}q_{r1}(t') &= (2 - \pi/6) \cos 3t' + \pi/6 \\q_{r2}(t') &= (2 - \pi/3) \cos 3t' + \pi/3 \\q_{r3}(t') &= (2 - \pi/6) \cos 3t' + \pi/6\end{aligned}$$

Autre trajectoire qu'on va utiliser est la trajectoire cycloïdale proposée pour le test de Leahvy et qui est donnée par la fonction suivante :

$$q_n(t) = \begin{cases} q_n(0) + \frac{\Delta}{2\pi} (\omega.t - \sin(\omega.t)) & 0 \leq t \leq t_f \\ q_n(t_f) & t \geq t_f \end{cases} \quad i = 1,2,3$$

avec: $\omega = \frac{2\pi}{t_f}$; $\Delta = q_n(t_f) - q_n(0)$;

Le test de Leahvy suggère de déplacer les différentes articulations de la position $[-50^\circ -135^\circ 135^\circ]$ à la position $[45^\circ -85^\circ 30^\circ]$ en 1.5 secondes [16]. Ce test est effectué sans charge.

IV-3-2 Spécification des incertitudes paramétriques, de la perturbation et des frottements visqueux :

a. Spécification des incertitudes paramétriques du modèle :

Les incertitudes paramétriques du modèle concerne uniquement les masses des trois articulations du robot manipulateur, tel que :

$$m_i = m_{0i} + \Delta m_i, \quad i = 1, 2, 3$$

où m_{0i} représente la masse nominale de chaque articulation et Δm_i l'incertitude. Cette dernière peut être écrite sous la forme:

$$\Delta m_i = m_{0i} \zeta \quad \text{où } \zeta \in \mathfrak{R} \text{ et } |\zeta| \leq 1$$

Au niveau des simulations ζ sera choisit soit comme paramètre fixe soit comme fonction sinusoïdale d'amplitude inférieure ou égale à 1.

b. Spécification de la perturbation :

Les éléments $w_1(t)$, $w_2(t)$ et $w_3(t)$ du vecteur de perturbation externe $w(t)$ sont de signaux carrés de période $2\pi/3$ et sont de la forme:

$$w_1(t) = w_3(t) = \begin{cases} 2 & 0 \leq t \leq \pi/3 \\ 0 & \pi/3 \leq t \leq 2\pi/3 \end{cases}; \quad w_2(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \pi/3 \\ -2 & \pi/3 \leq t \leq 2\pi/3 \end{cases};$$

c. Spécification des frottements visqueux :

En plus de la perturbation externe $w(t)$, les frottements visqueux exprimés par le vecteur $H(\dot{q})$ sont rajoutés comme dynamique négligée au niveau du modèle et sont considérés comme des perturbations. Les coefficients f_{v_1} , f_{v_2} et f_{v_3} sont pris égaux à 0.5.

IV-3-3 Simulation et interprétation des résultats :

L'ensemble des simulations qu'on va présenter ont été réalisées sur Pc munis d'un μp Intel Pentium 133 Mhz et en utilisant le langage de programmation Matlab 4.2 sous Win.95. Les équations différentielles ont été résolues numériquement par la méthode de Runge-Kutta classique d'ordre 4 à pas constant $h=0.001$. Les résultats de ces simulations sont donnés par les figures ci-dessous. Sur chaque figure est indiqué le type de test effectué et le degré d'atténuation imposée. Ce dernier et en tenant compte de la remarque (IV-6) du chapitre précédent est spécifié uniquement par le choix de β . Pour alléger les figures nous avons adopté les abréviations suivantes:

sans charge → **sc**

avec charge → **ac**

avec charge lâchée a l'instant $t = 2.5$ secondes → **acl 2.5(s)**

sans perturbation → **sp**

avec perturbation → **ap**

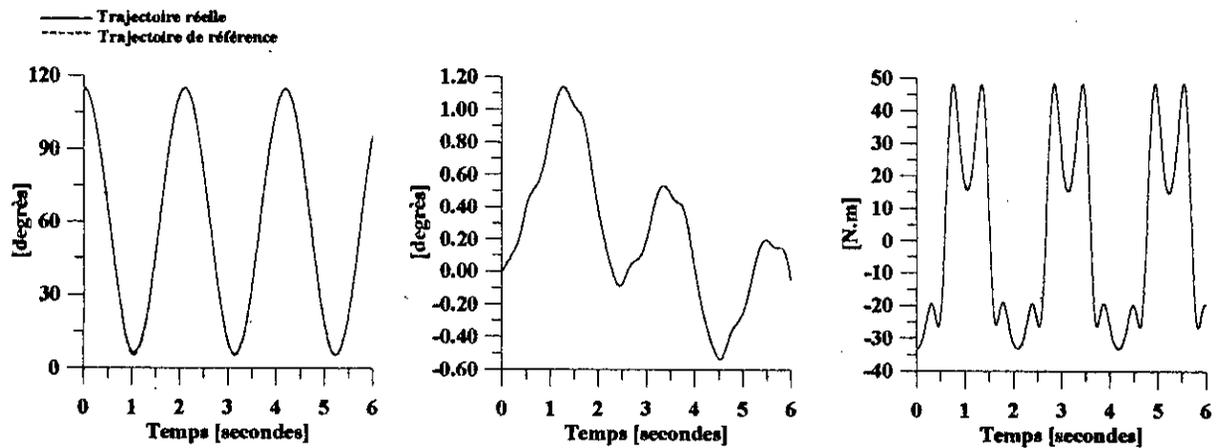
sans frottements visqueux → **sfv**

avec frottements visqueux → **afv**

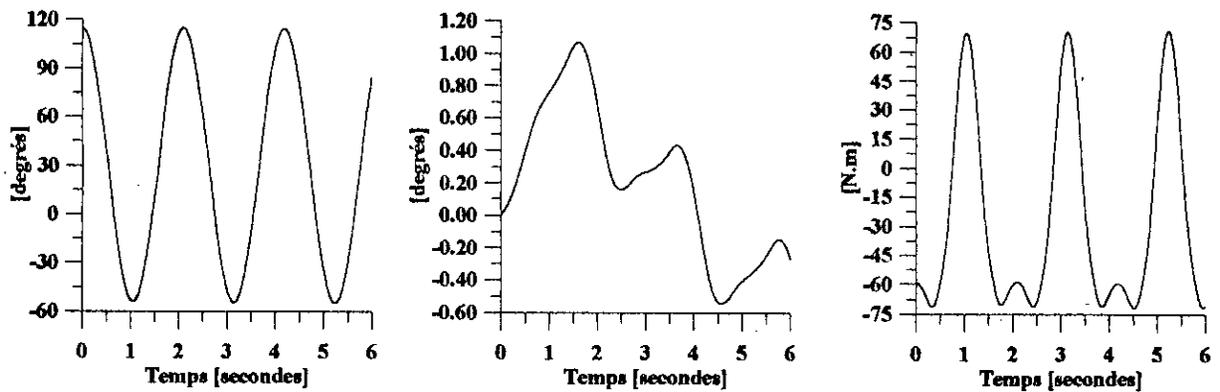
sans incertitudes paramétriques → **sip**

avec incertitudes paramétriques fixes de $x\%$ → **aipf x**

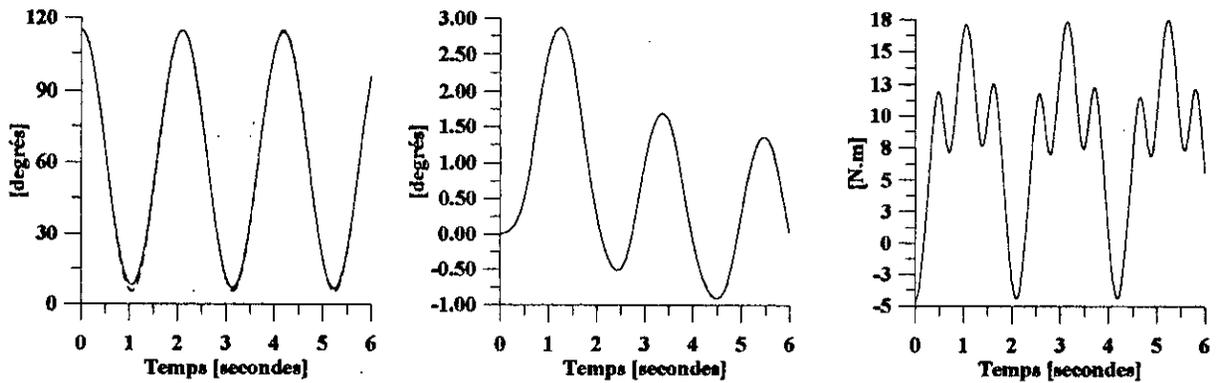
avec incertitude paramétriques sinusoïdales d'amplitude de $x\%$ → **aips x**



Position, Erreur en position et Commande de la première articulation

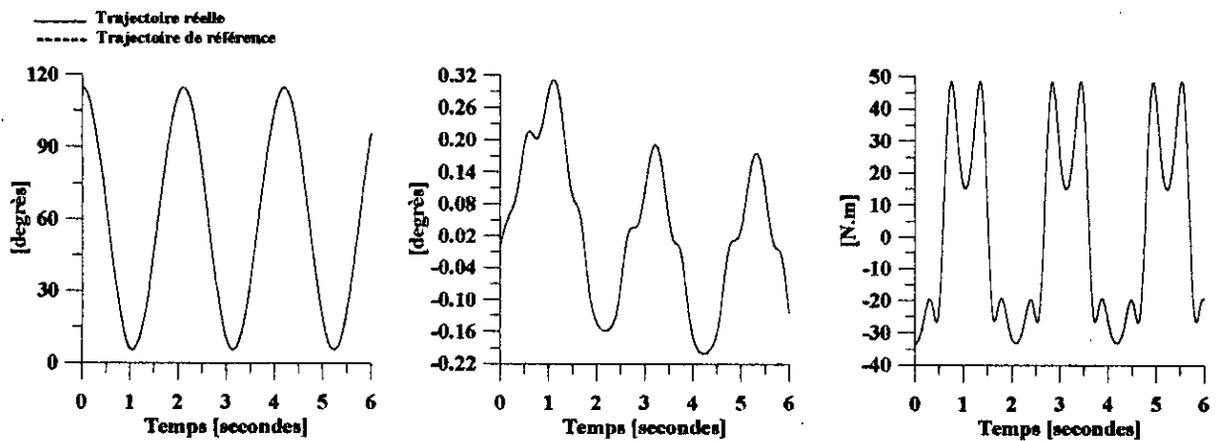


Position, Erreur en position et Commande de la deuxième articulation

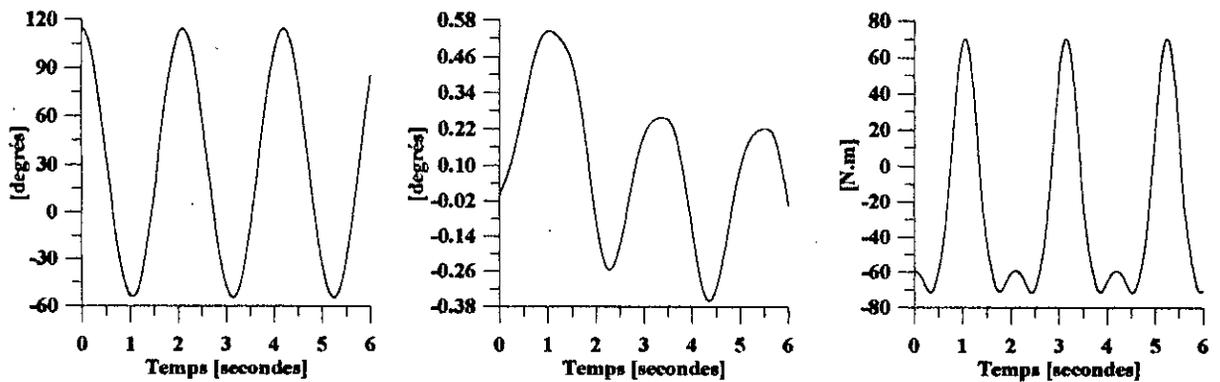


Position, Erreur en position et Commande de la troisième articulation

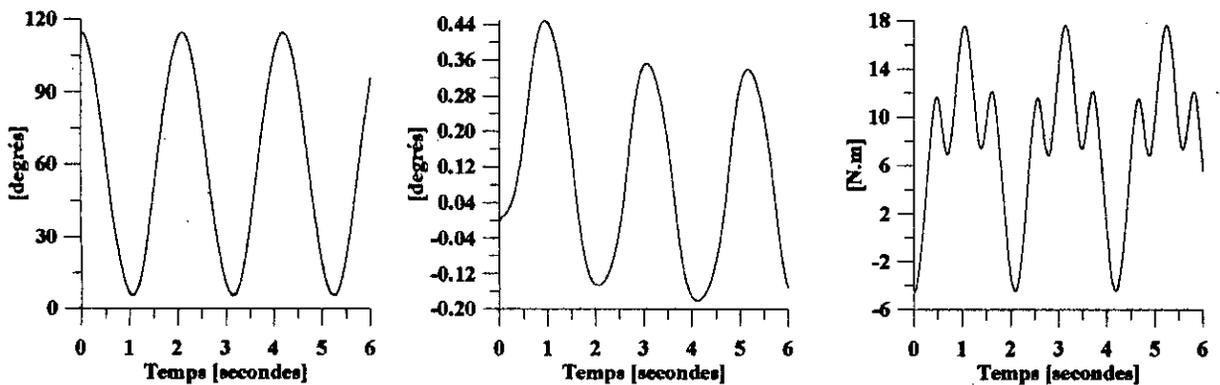
Figure (IV-1a)
Réponses en boucle fermée sc, sip, sfv, sp, et pour $\beta = 0.5$



Position, Erreur en position et Commande de la première articulation

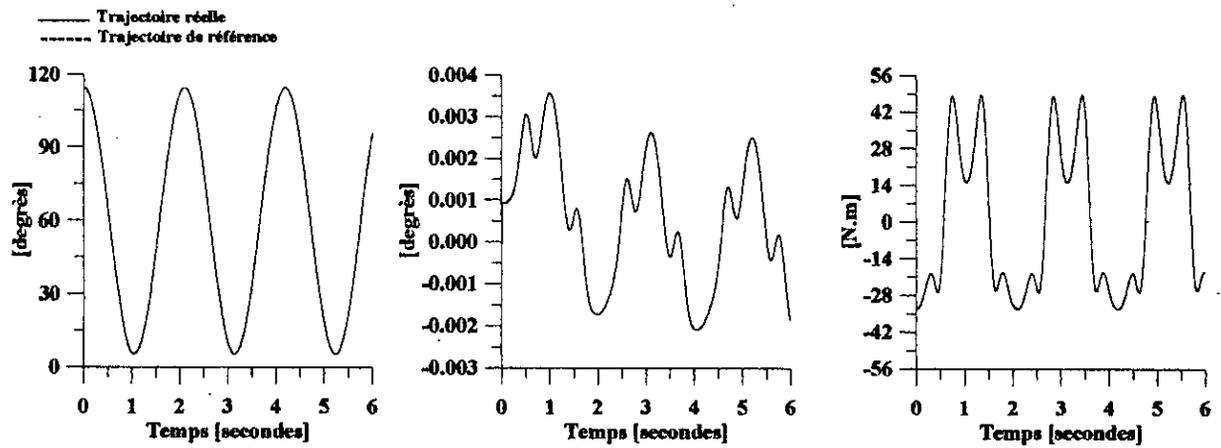


Position, Erreur en position et Commande de la deuxième articulation

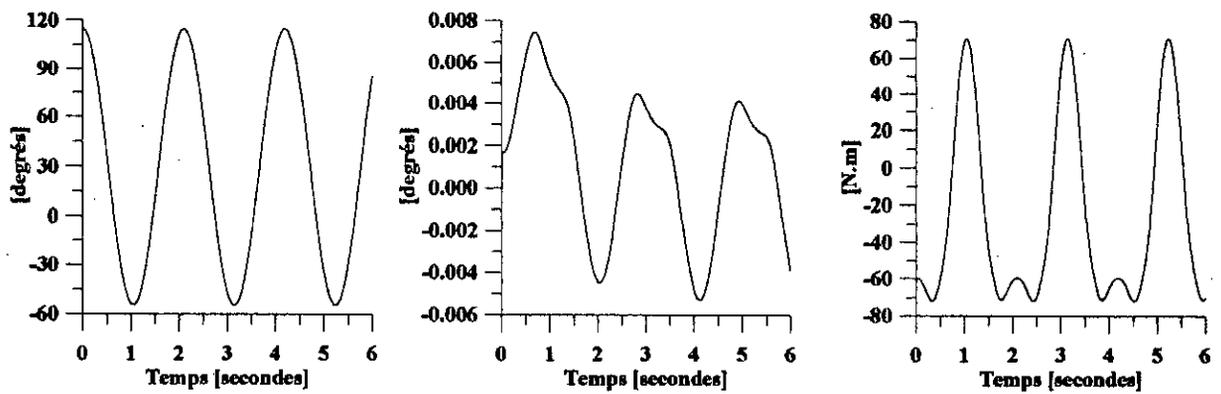


Position, Erreur en position et Commande de la troisième articulation

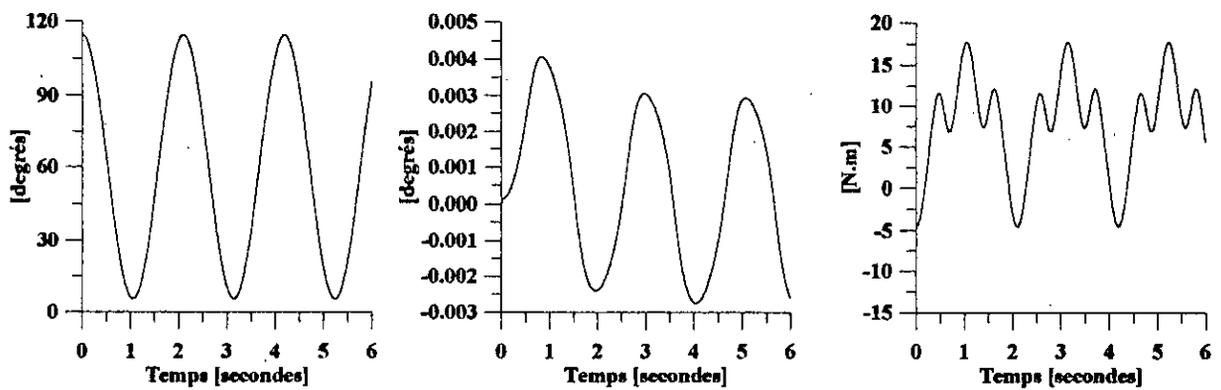
Figure (IV-1b)
Réponses en boucle fermée sc, sip, sfv, sp et pour $\beta = 5.10^{-02}$



Position, Erreur en position et Commande de la première articulation

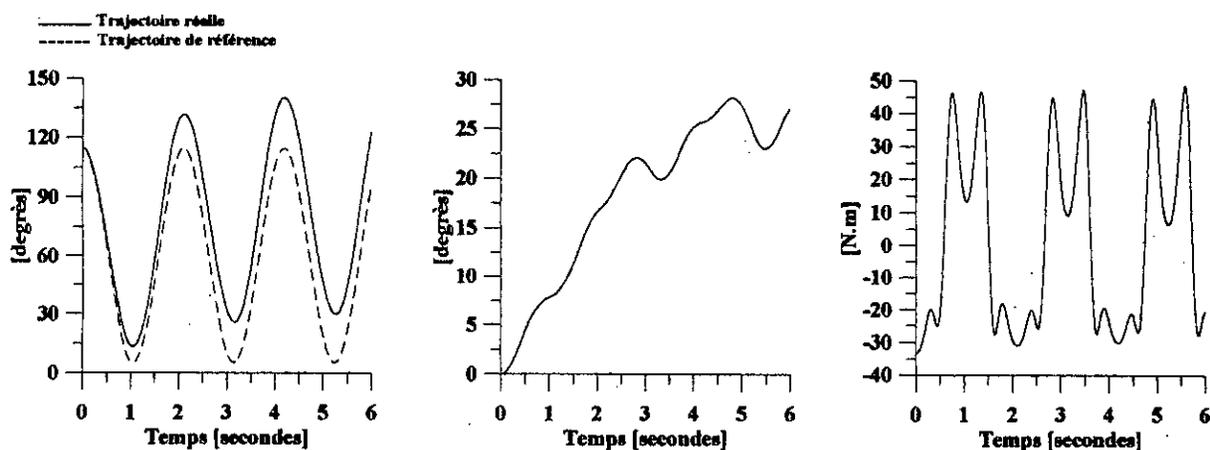


Position, Erreur en position et Commande de la deuxième articulation

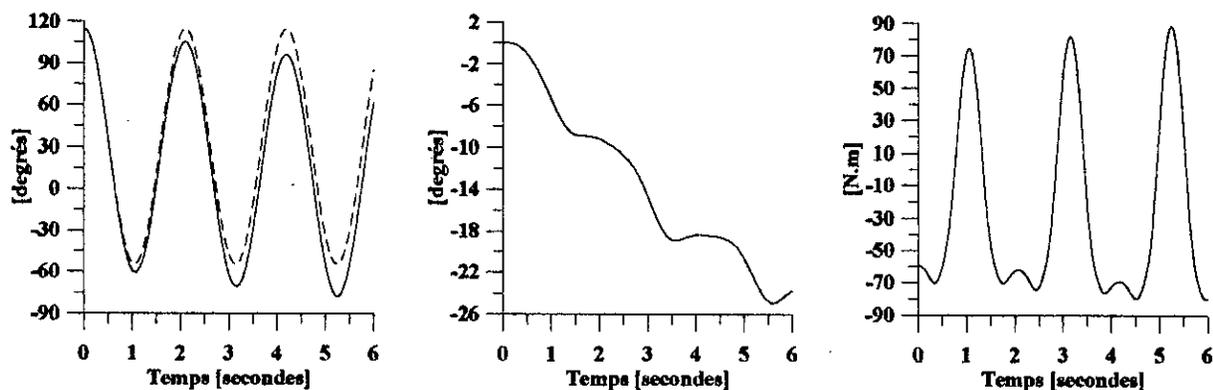


Position, Erreur en position et Commande de la troisième articulation

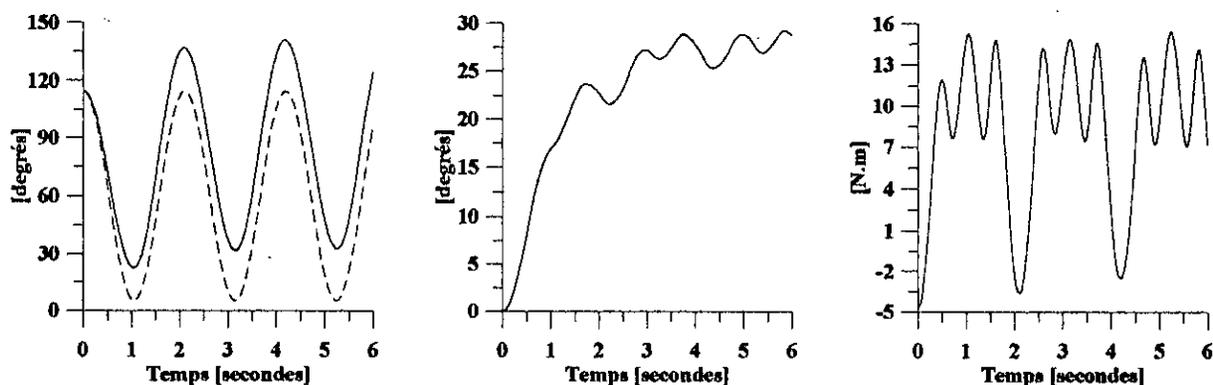
Figure (IV-1c)
 Réponses en boucle fermée sc, sip, sfv, sp et pour $\beta = 5.10^{-04}$



Position, Erreur en position et Commande de la première articulation

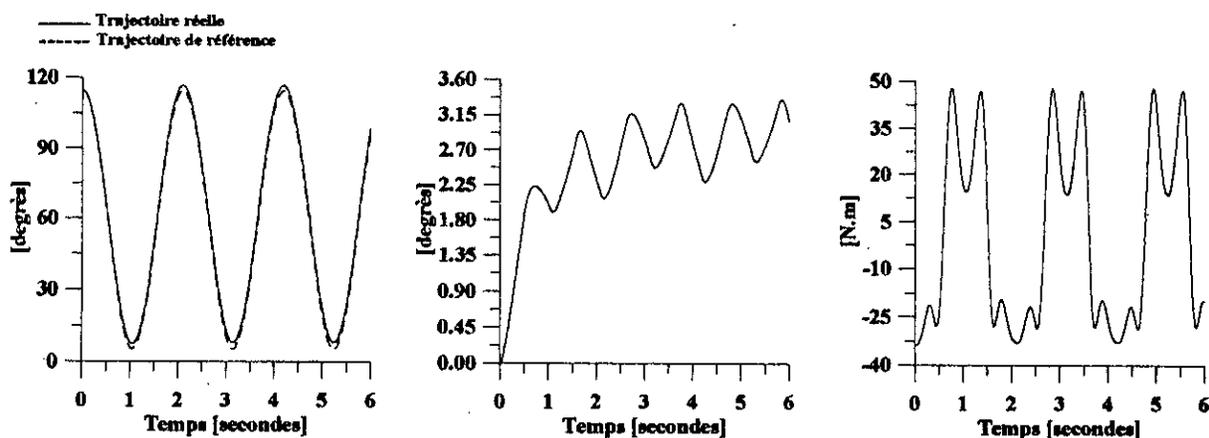


Position, Erreur en position et Commande de la deuxième articulation

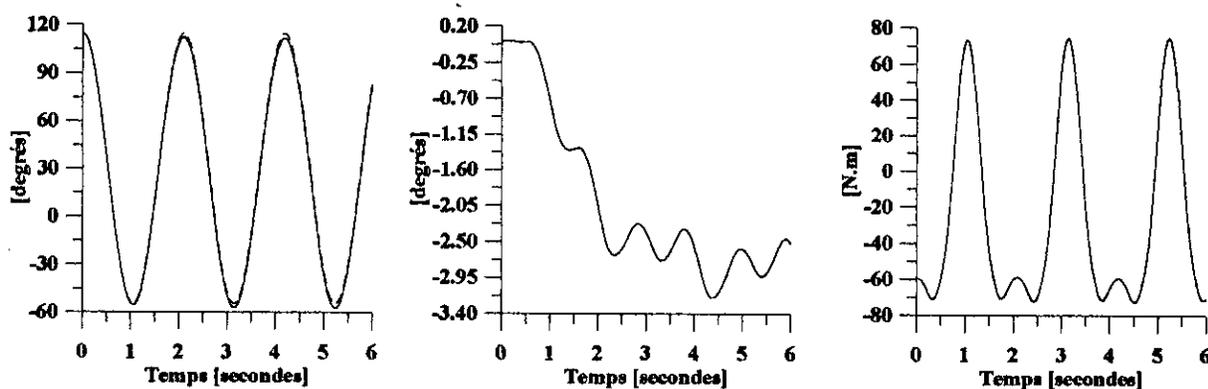


Position, Erreur en position et Commande de la troisième articulation

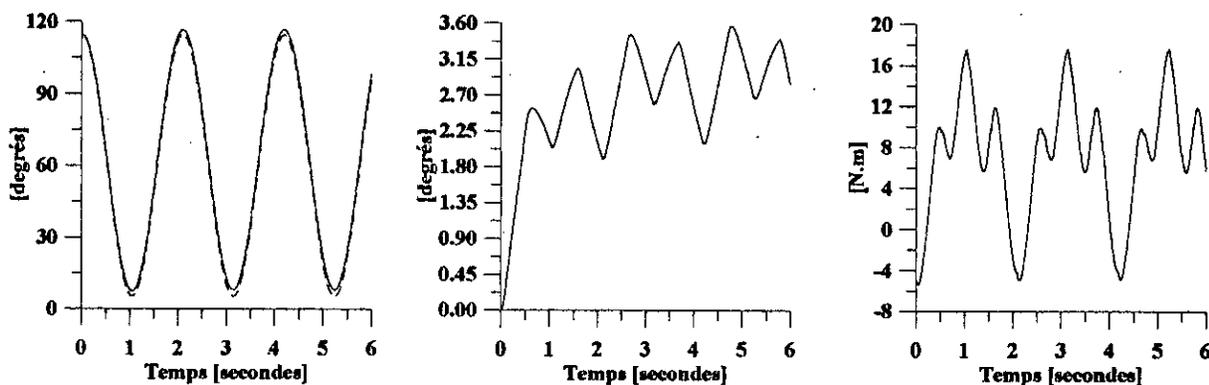
Figure (IV-2a)
Réponses en boucle fermée sc, sip, afv, ap et pour $\beta = 5.10^{-01}$



Position, Erreur en position et Commande de la première articulation

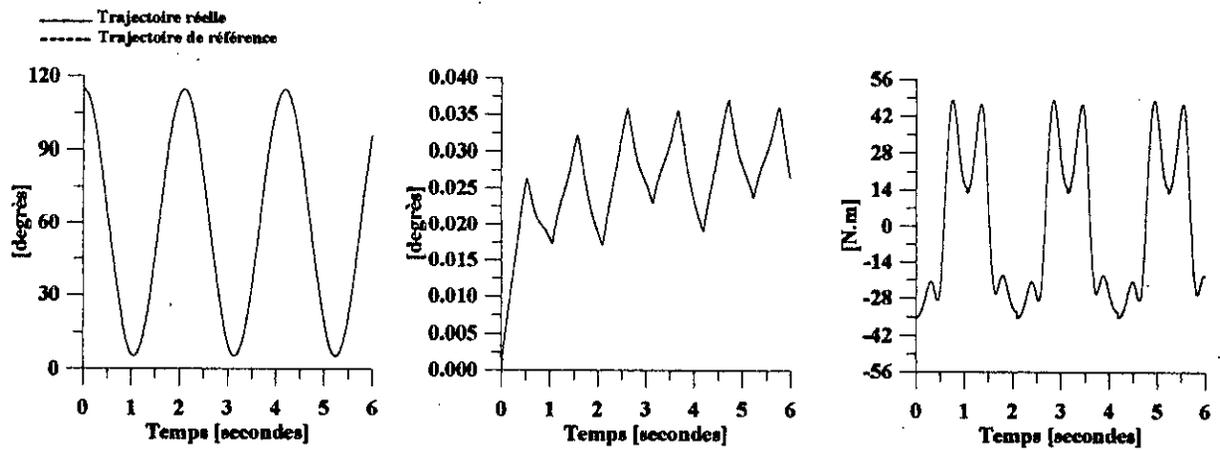


Position, Erreur en position et Commande de la deuxième articulation

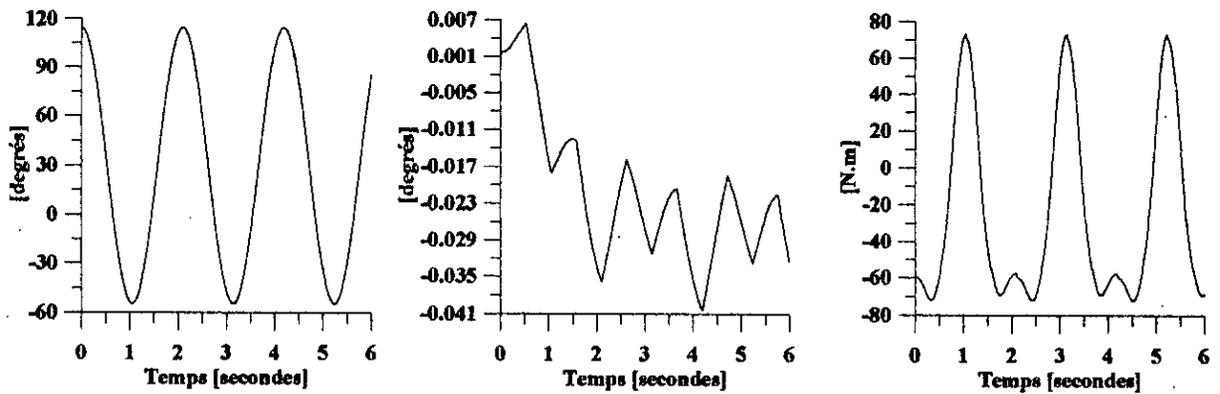


Position, Erreur en position et Commande de la troisième articulation

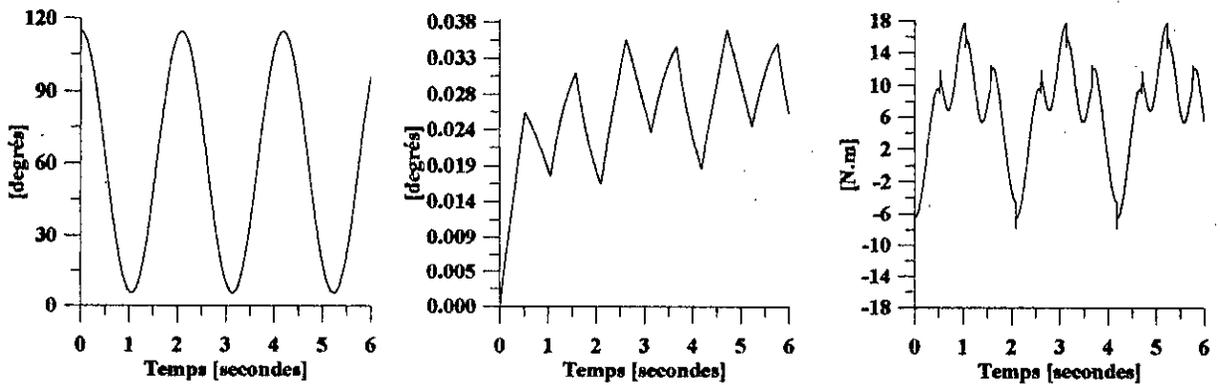
Figure (IV-2b)
Réponses en boucle fermée sc, sip, afv, ap et pour $\beta = 5.10^{-02}$



Position, Erreur en position et Commande de la première articulation

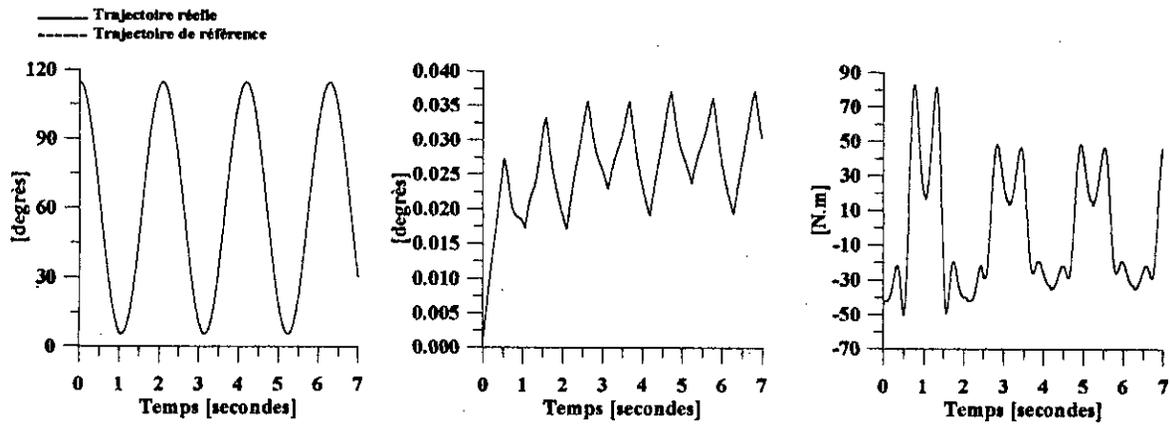


Position, Erreur en position et Commande de la deuxième articulation

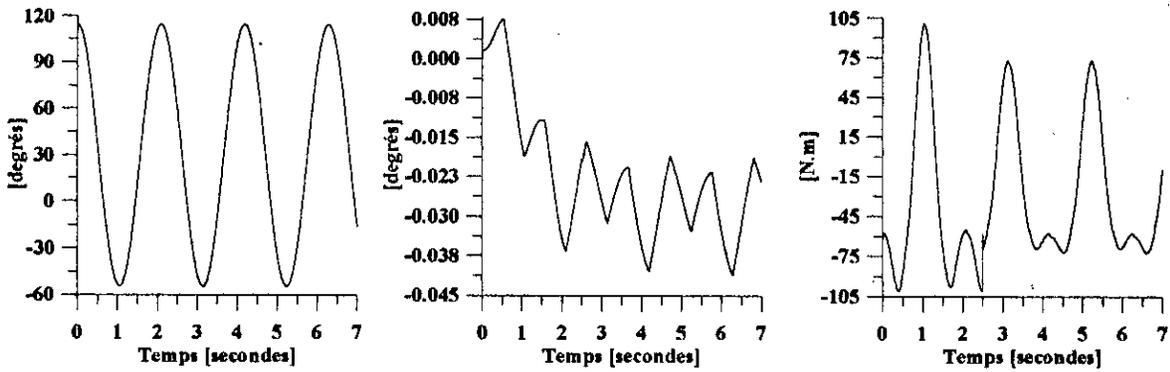


Position, Erreur en position et Commande de la troisième articulation

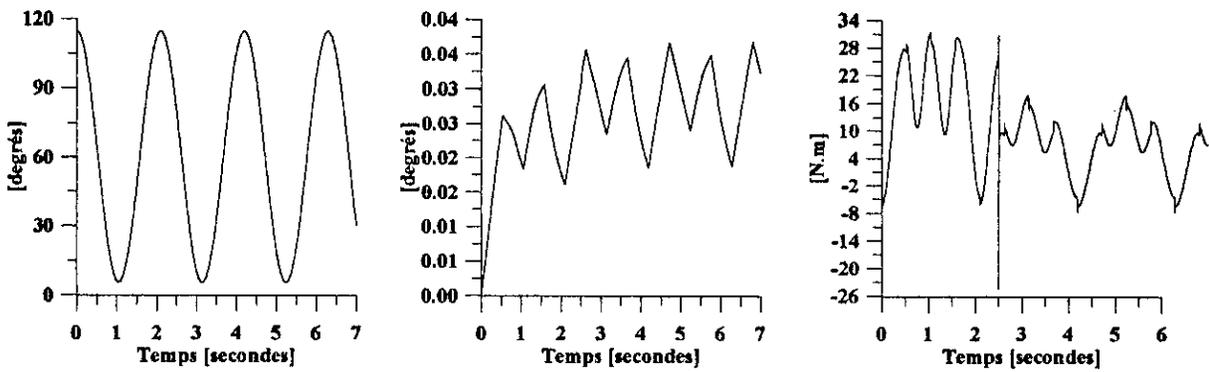
Figure (IV-2c)
Réponses en boucle fermée sc, sip, afv, ap et pour $\beta = 5.10^{-04}$



Position, Erreur en position et Commande de la première articulation

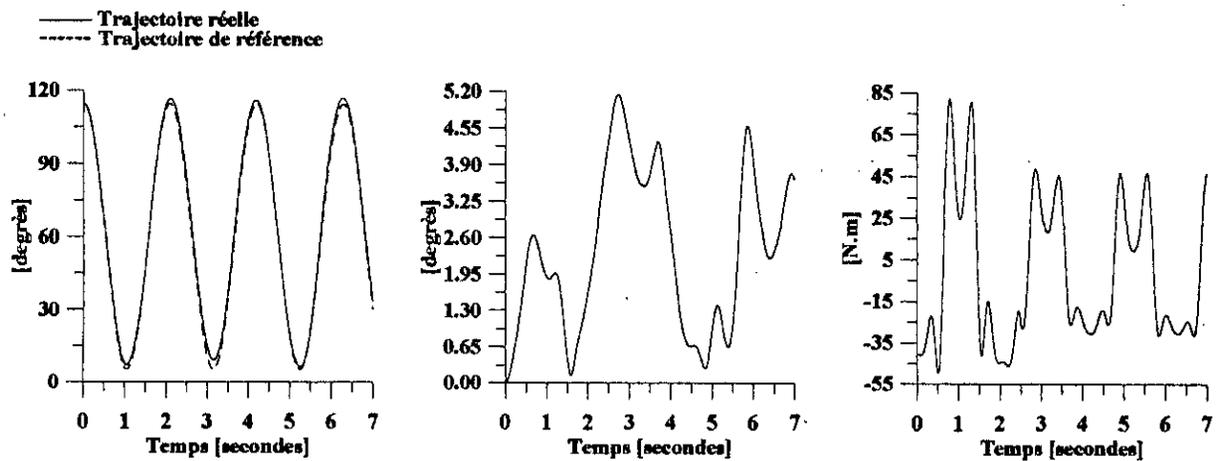


Position, Erreur en position et Commande de la deuxième articulation

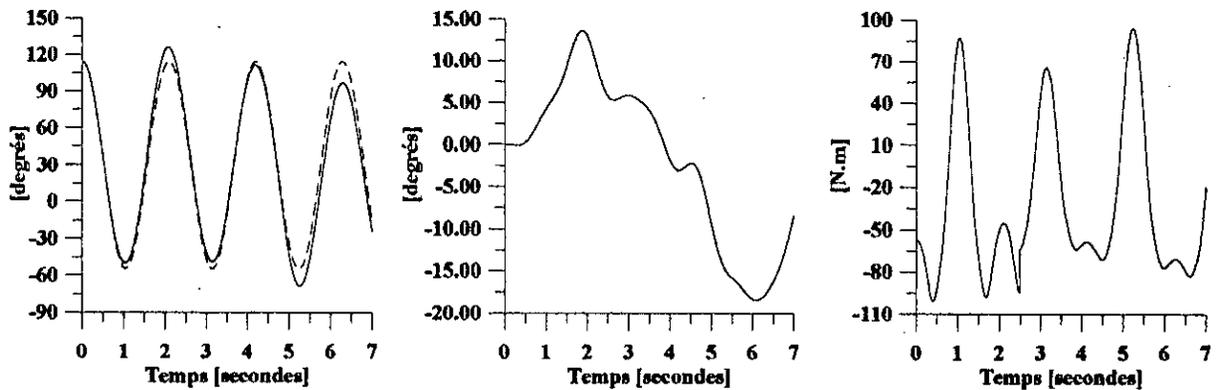


Position, Erreur en position et Commande de la troisième articulation

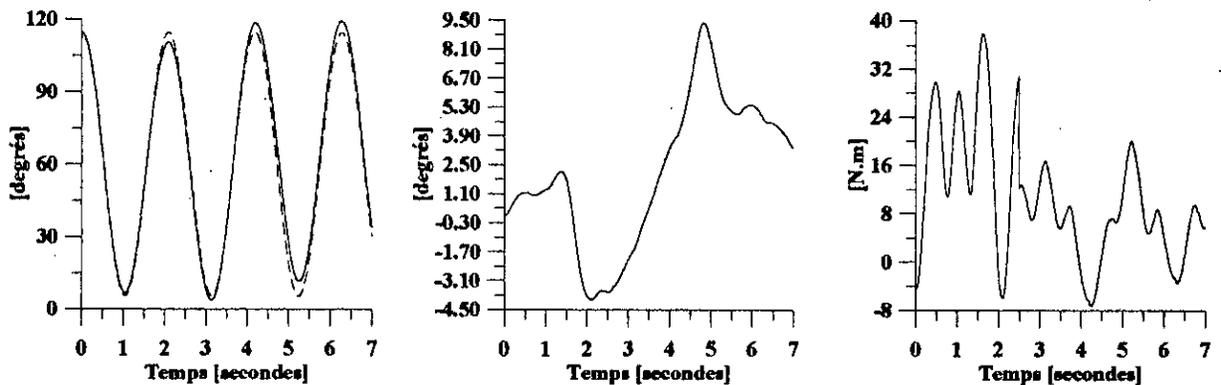
Figure (IV-3)
Réponses en boucle fermée acl à 2.(s), sip, afv, ap et pour $\beta = 5.10^{-04}$



Position, Erreur en position et Commande de la première articulation

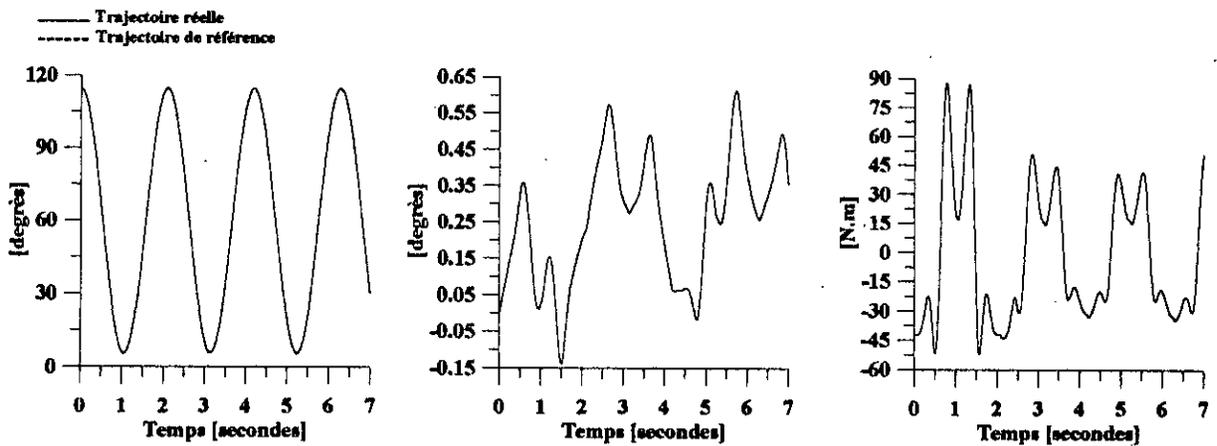


Position, Erreur en position et Commande de la deuxième articulation

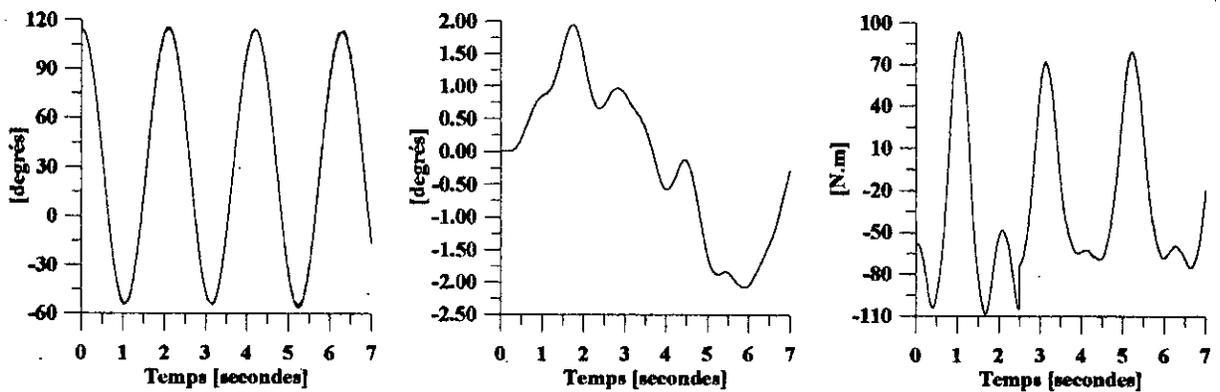


Position, Erreur en position et Commande de la troisième articulation

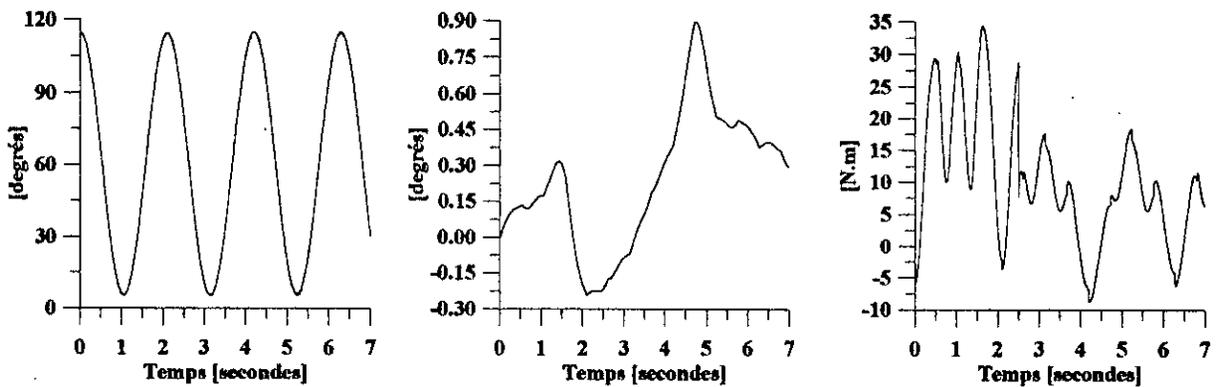
Figure (IV-4a)
Réponses en boucle acl à 2.5(s), aips 25, afv, ap et pour $\beta = 5.10^{-02}$



Position, Erreur en position et Commande de la première articulation

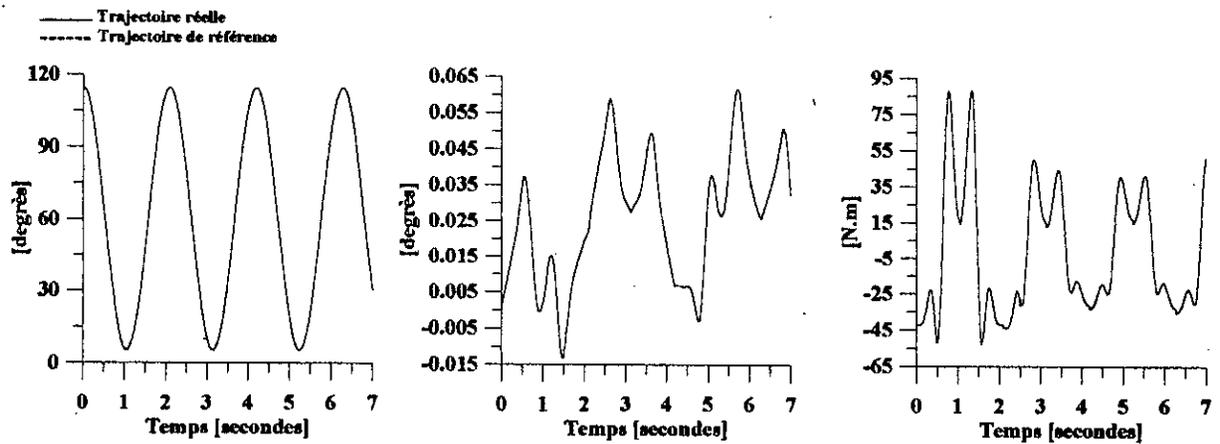


Position, Erreur en position et Commande de la deuxième articulation

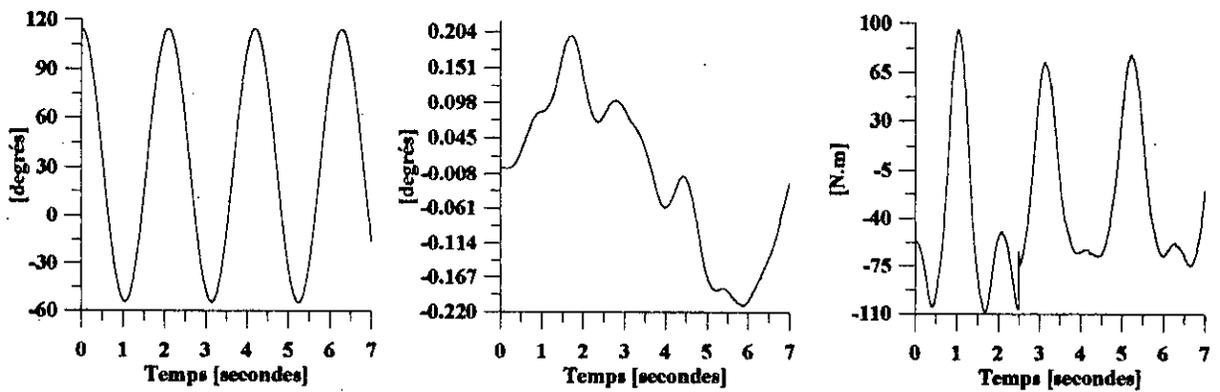


Position, Erreur en position et Commande de la troisième articulation

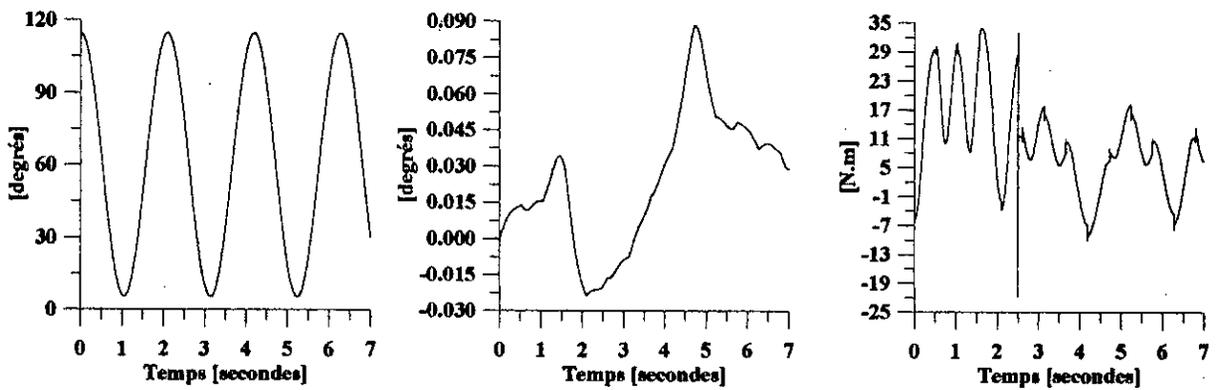
Figure (IV-4b)
Réponses en boucle fermée acl à 2.5(s), aips 25, afv, ap et pour $\beta = 5.10^{-03}$



Position, Erreur en position et Commande de la première articulation

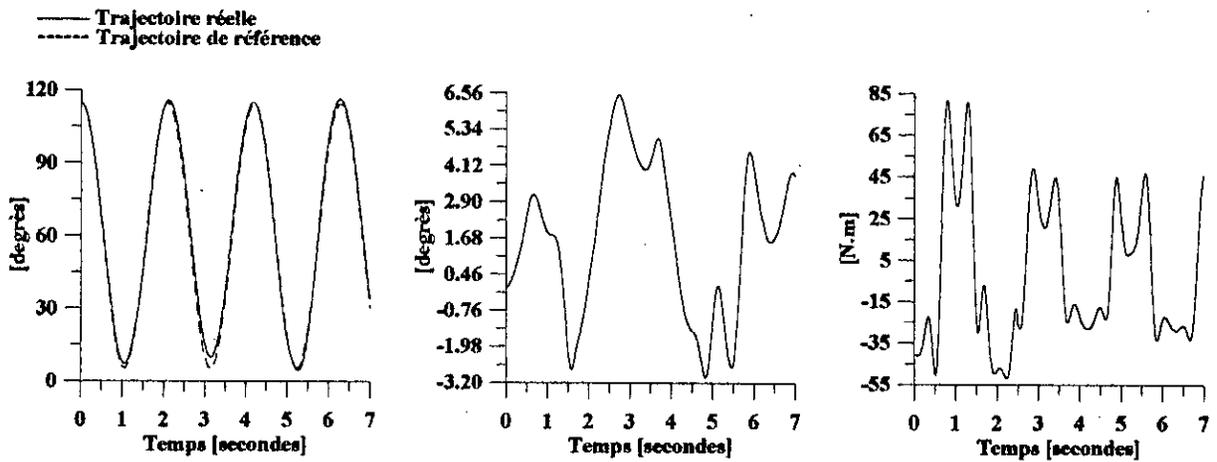


Position, Erreur en position et Commande de la deuxième articulation

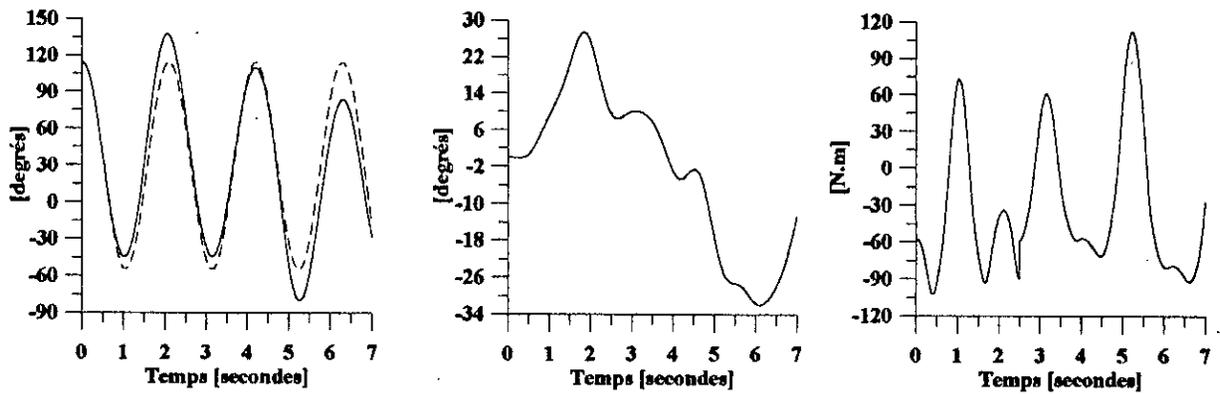


Position, Erreur en position et Commande de la troisième articulation

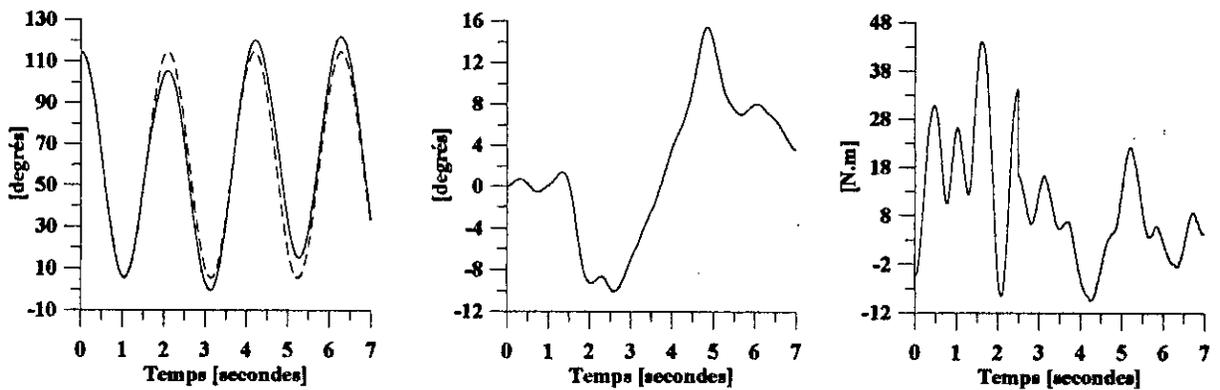
Figure (IV-4c)
Réponses en boucle fermée acl à 2.5(s), aips 25, afv, ap et pour $\beta = 5.10^{-04}$



Position, Erreur en position et Commande de la première articulation

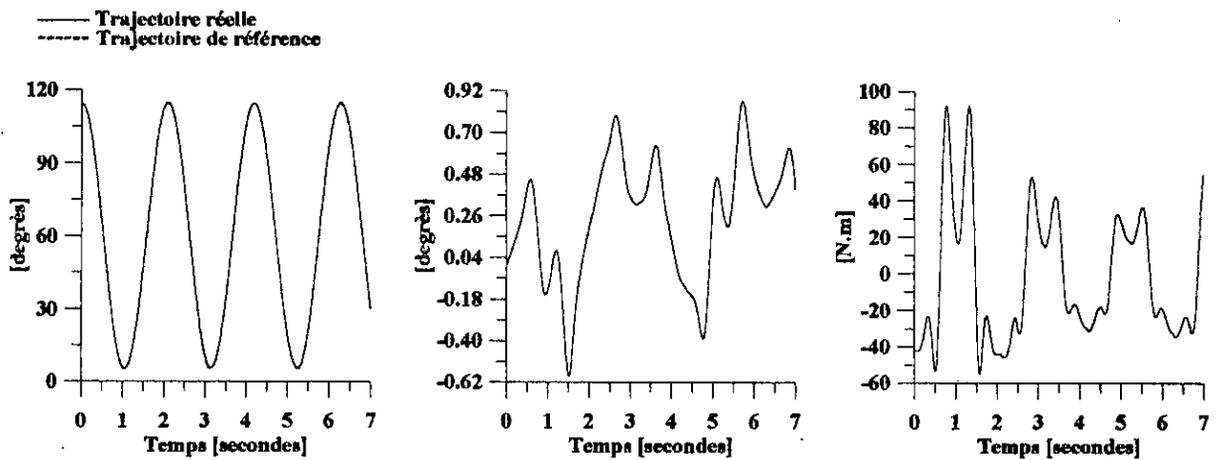


Position, Erreur en position et Commande de la deuxième articulation

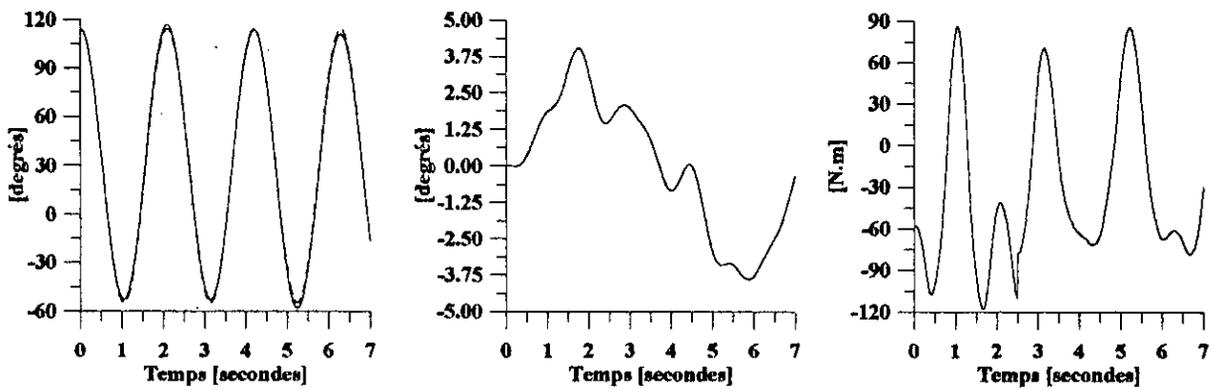


Position, Erreur en position et Commande de la troisième articulation

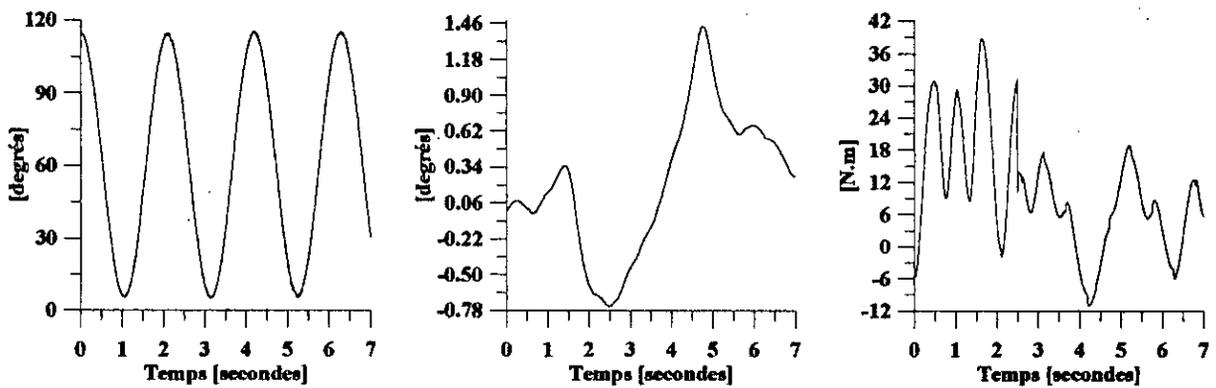
Figure (IV-5a)
Réponses en boucle fermée acl à 2.5(s), aips 50, afv, ap et pour $\beta = 5.10^{-02}$



Position, Erreur en position et Commande de la première articulation

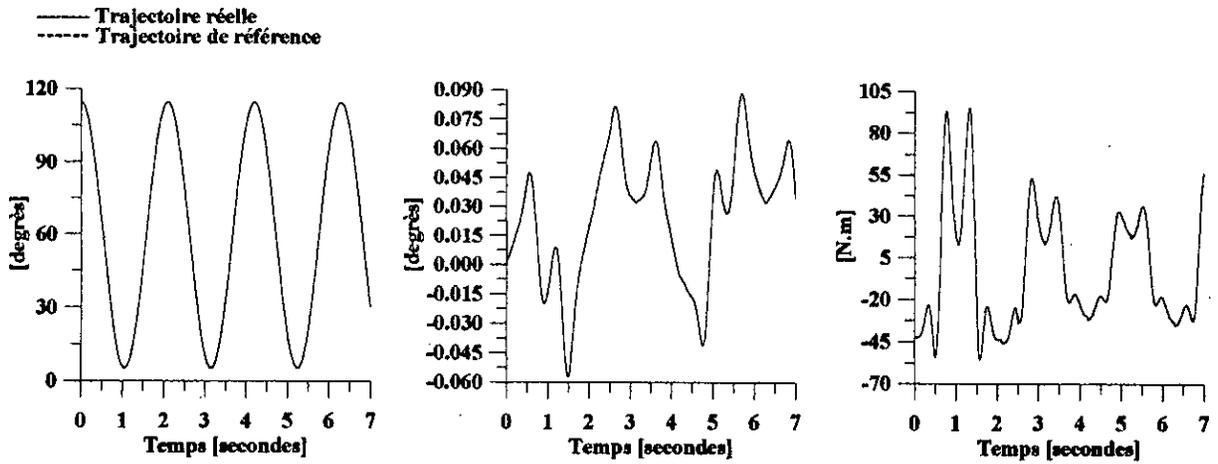


Position, Erreur en position et Commande de la deuxième articulation

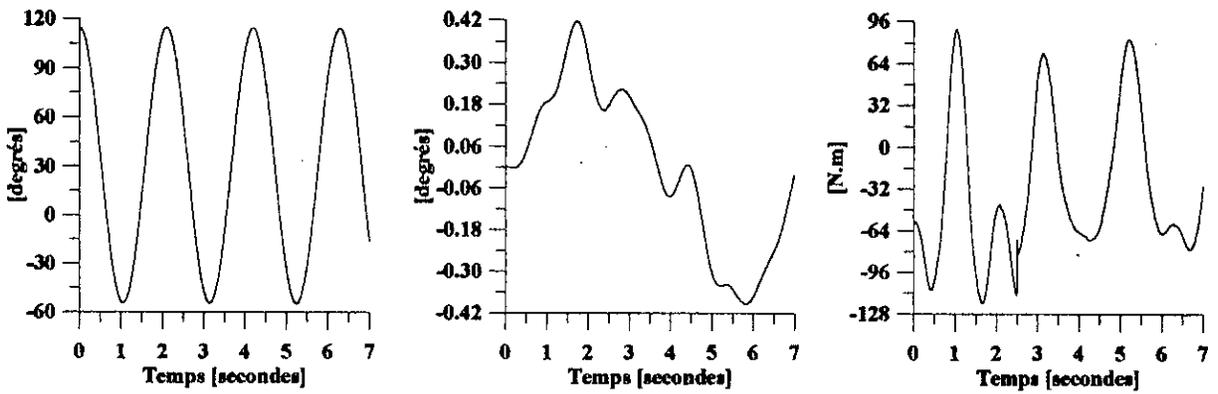


Position, Erreur en position et Commande de la troisième articulation

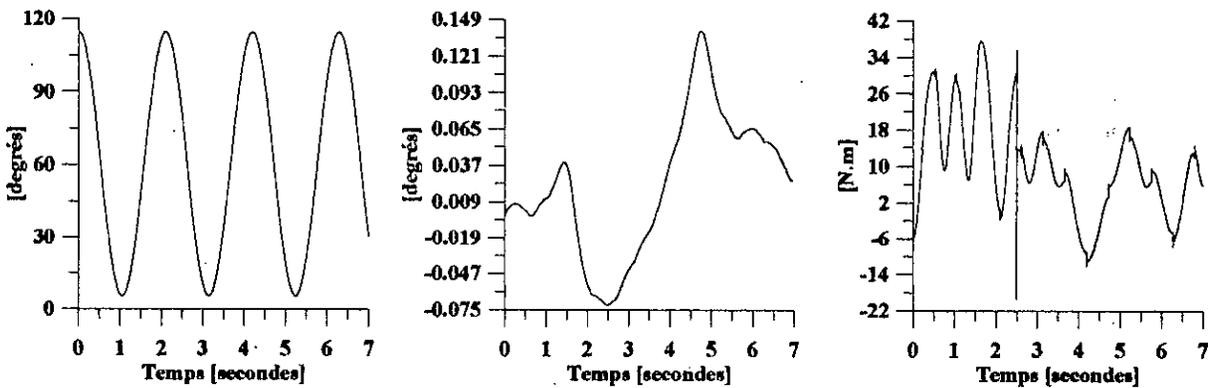
Figure (IV-5b)
Réponses en boucle fermée acl à 2.5(s), aips 50, afv, ap et pour $\beta = 5.10^{-03}$



Position, Erreur en position et Commande de la première articulation

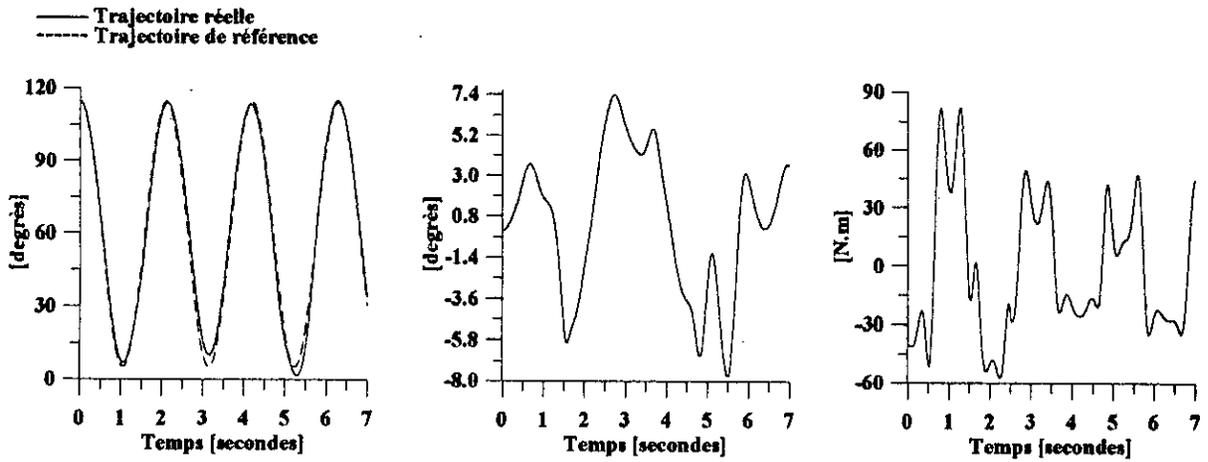


Position, Erreur en position et Commande de la deuxième articulation

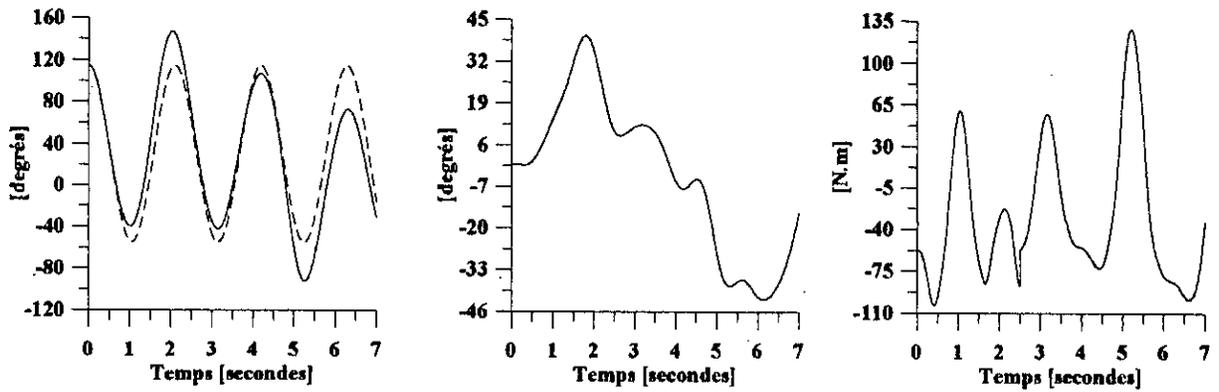


Position, Erreur en position et Commande de la troisième articulation

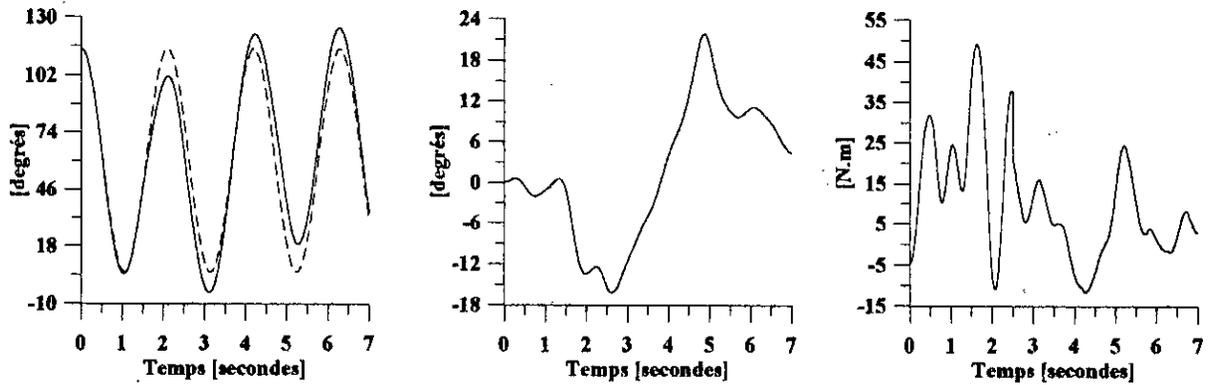
Figure (IV-5c)
Réponses en boucle fermée acl à 2.5(s), aips 50, afv, ap et pour $\beta = 5.10^{-04}$



Position, Erreur en position et Commande de la première articulation

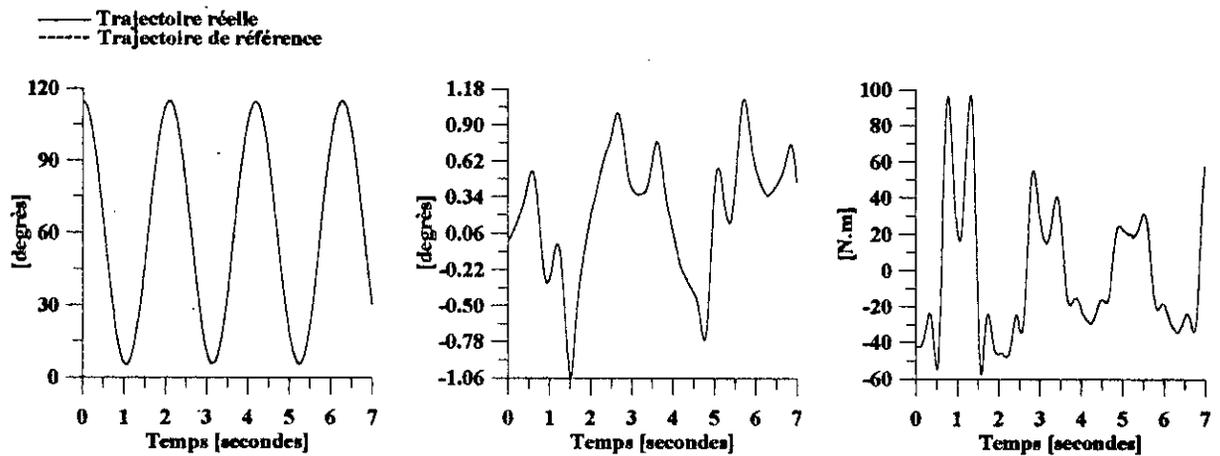


Position, Erreur en position et Commande de la deuxième articulation

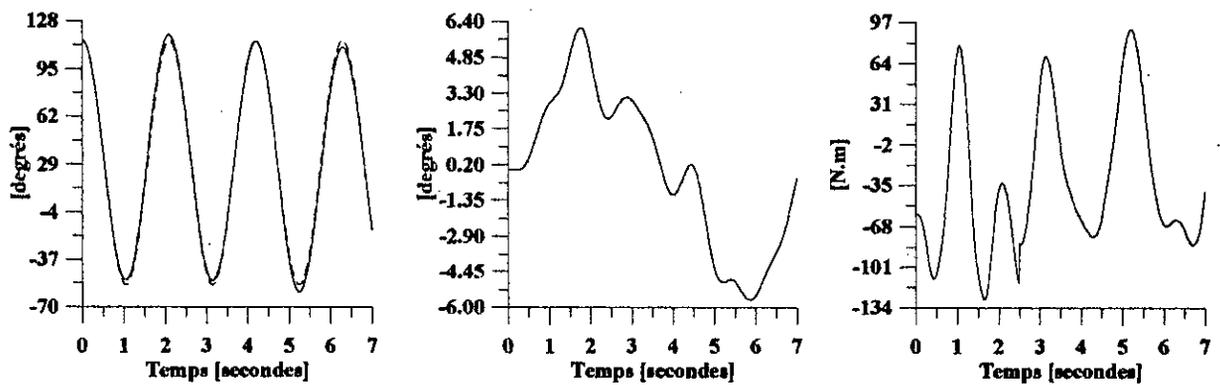


Position, Erreur en position et Commande de la troisième articulation

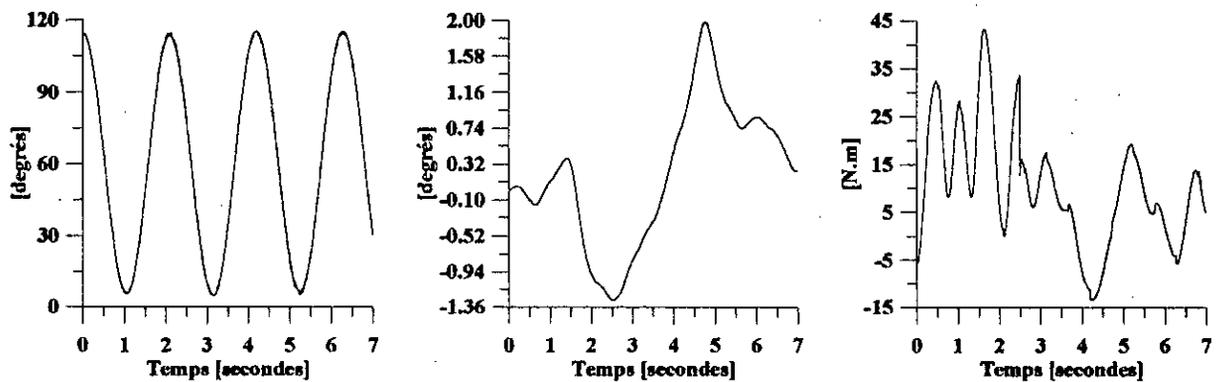
Figure (IV-6a)
 Réponses en boucle fermée acl à 2.5(s), aips 75, afv, ap et pour $\beta = 5.10^{-02}$



Position, Erreur en position et Commande de la première articulation

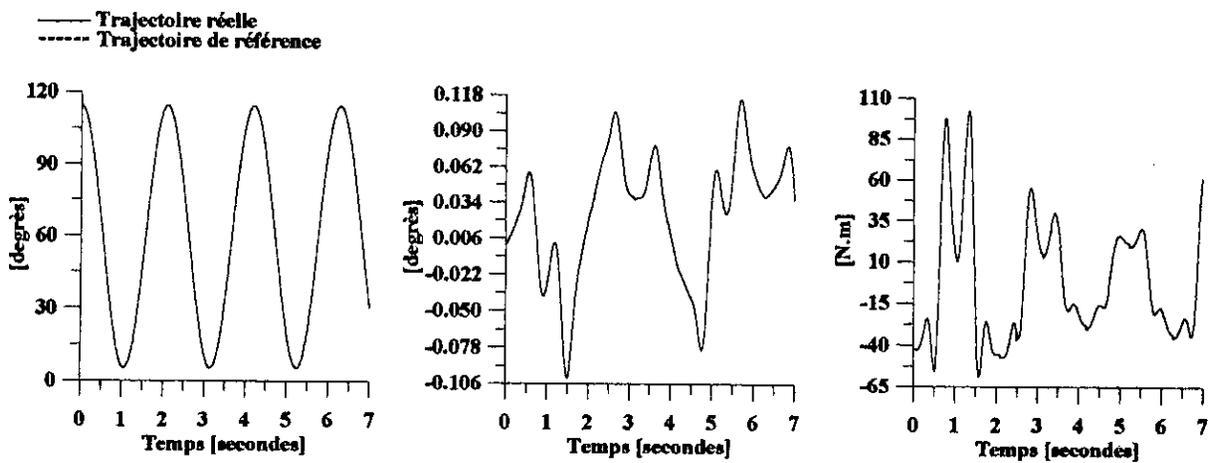


Position, Erreur en position et Commande de la deuxième articulation

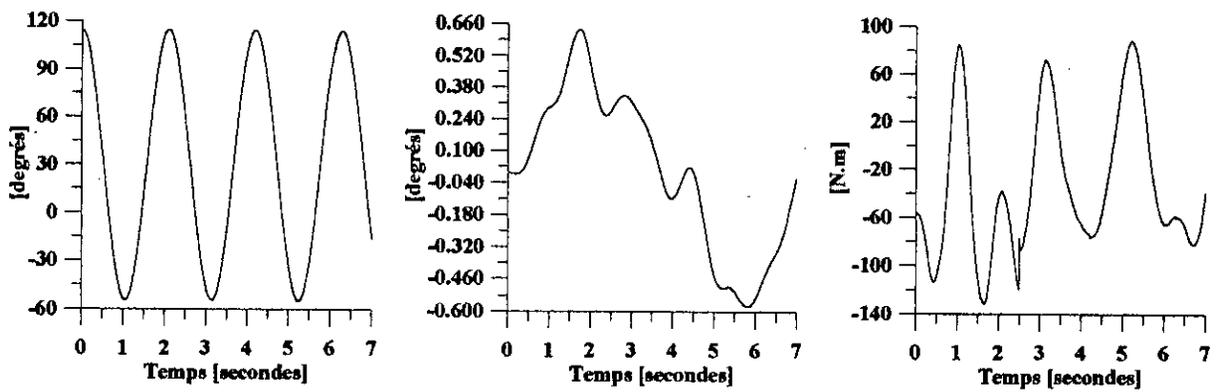


Position, Erreur en position et Commande de la troisième articulation

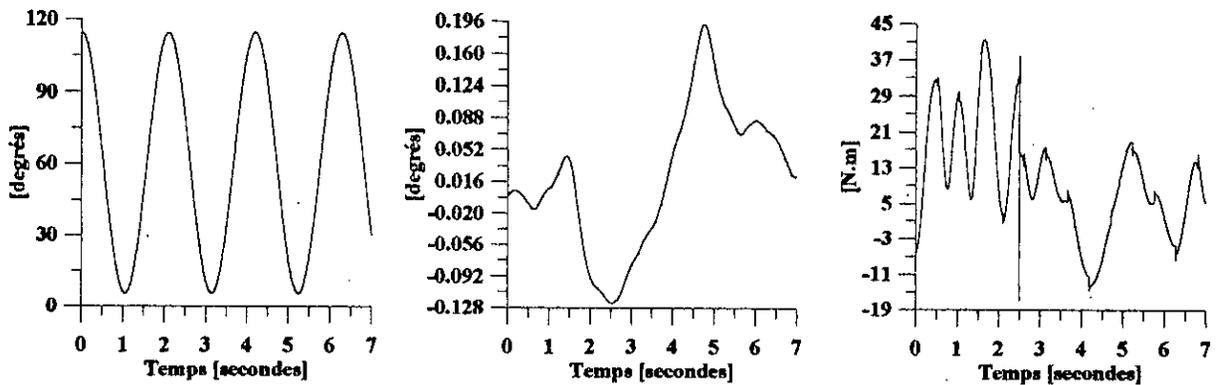
Figure (IV-6b)
Réponses en boucle fermée acl à 2.5(s), aips 75, afv, ap et pour $\beta = 5.10^{-03}$



Position, Erreur en position et Commande de la première articulation

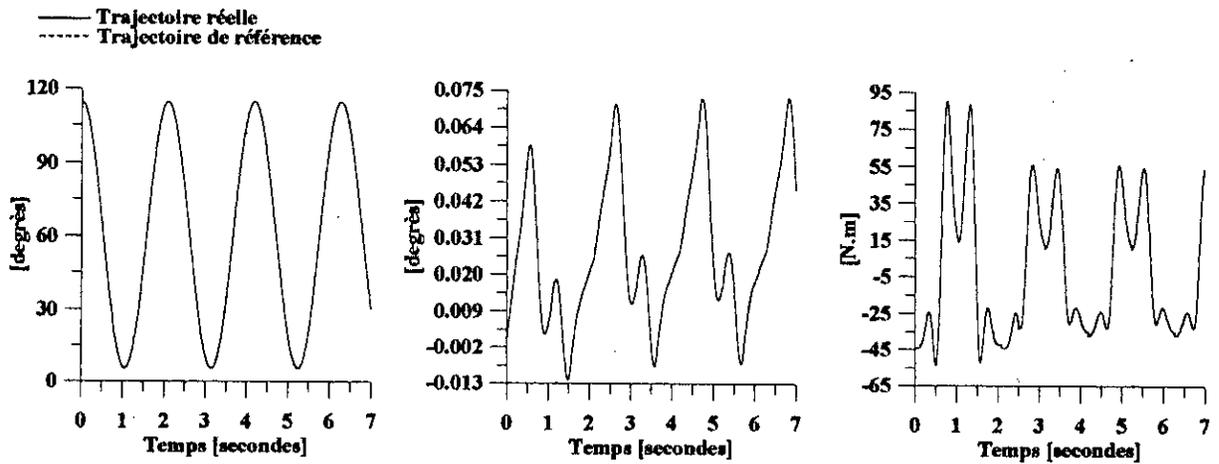


Position, Erreur en position et Commande de la deuxième articulation

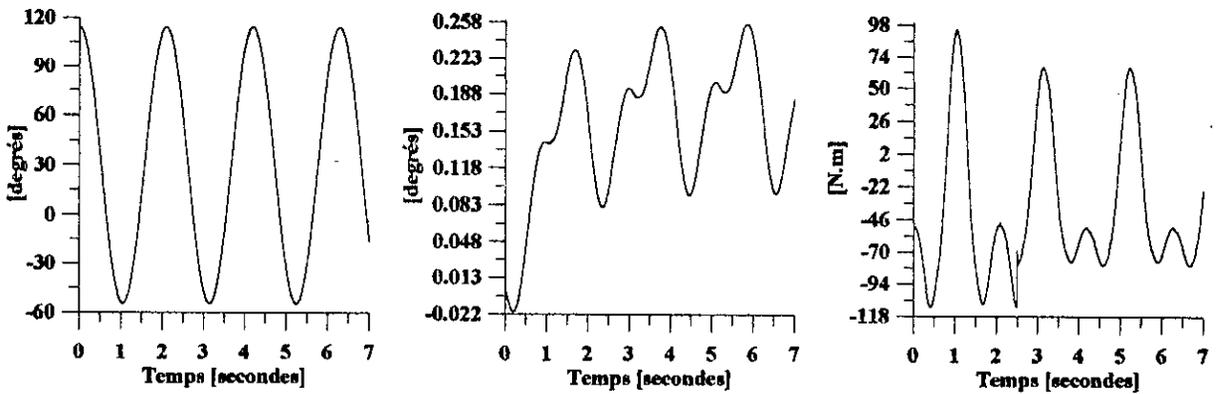


Position, Erreur en position et Commande de la troisième articulation

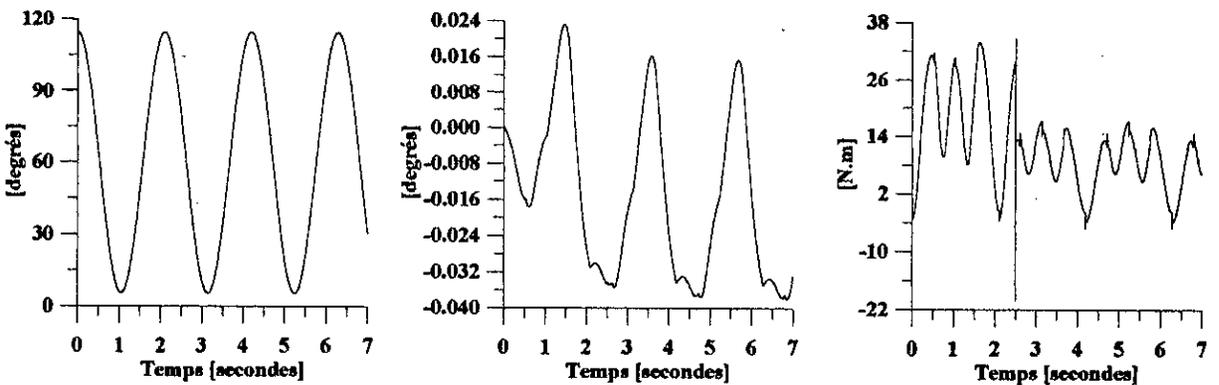
Figure (IV-6c)
Réponses en boucle fermée acl à 2.5(s), aips 75, afv, ap et pour $\beta = 5.10^{-04}$



Position, Erreur en position et Commande de la première articulation

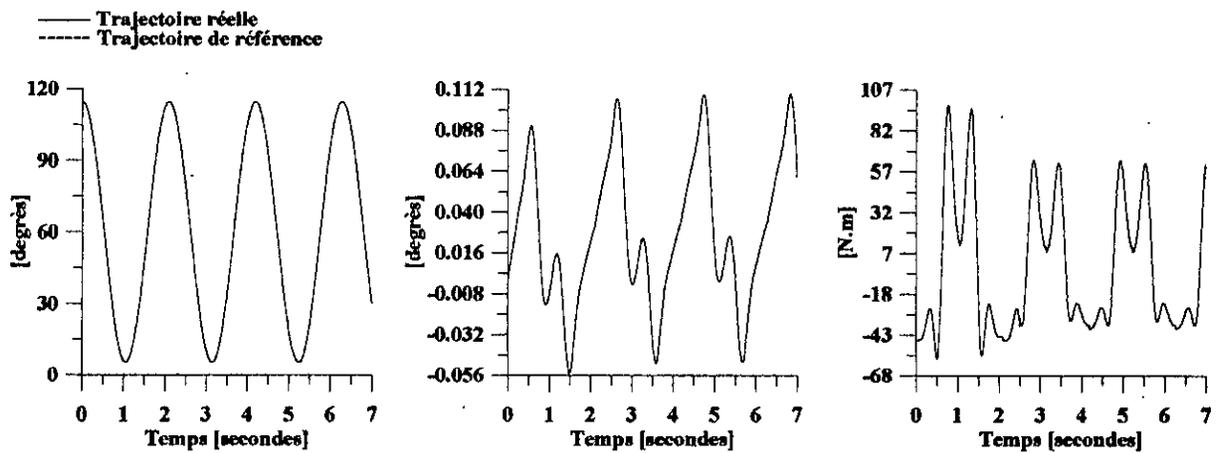


Position, Erreur en position et Commande de la deuxième articulation

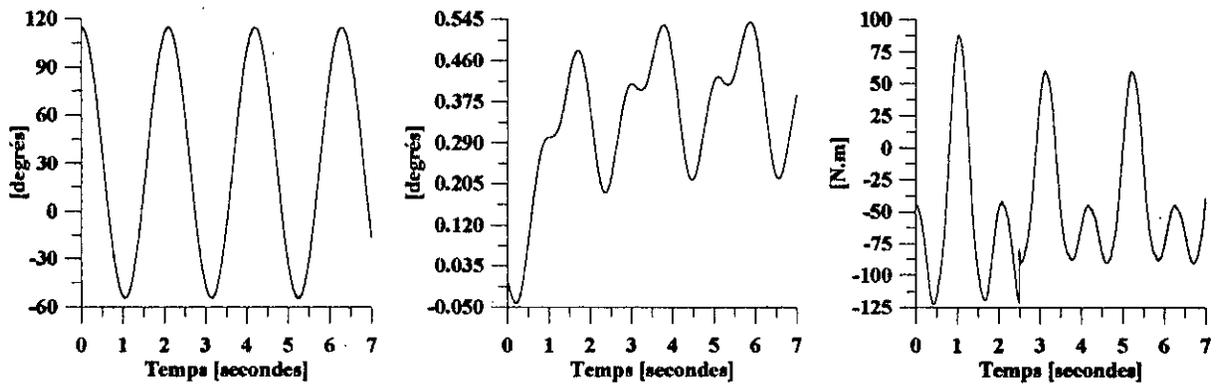


Position, Erreur en position et Commande de la troisième articulation

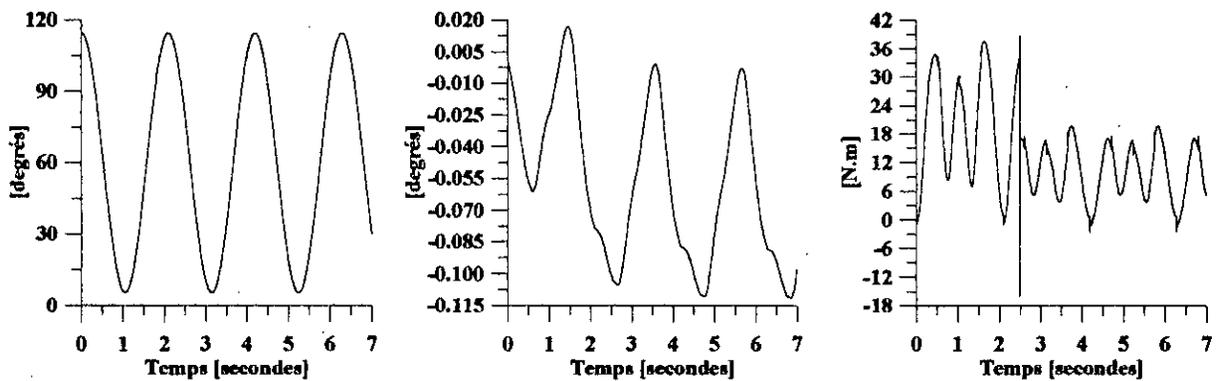
Figure (IV-7a)
Réponses en boucle fermée acl à 2.5(s), aipf 25, aiv, ap et pour $\beta = 5.10^{-04}$



Position, Erreur en position et Commande de la première articulation

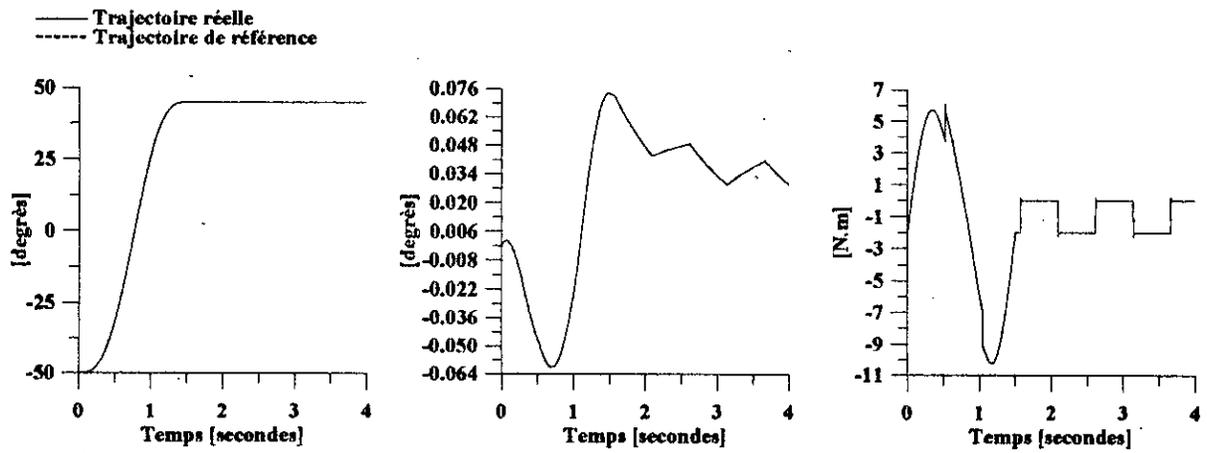


Position, Erreur en position et Commande de la deuxième articulation

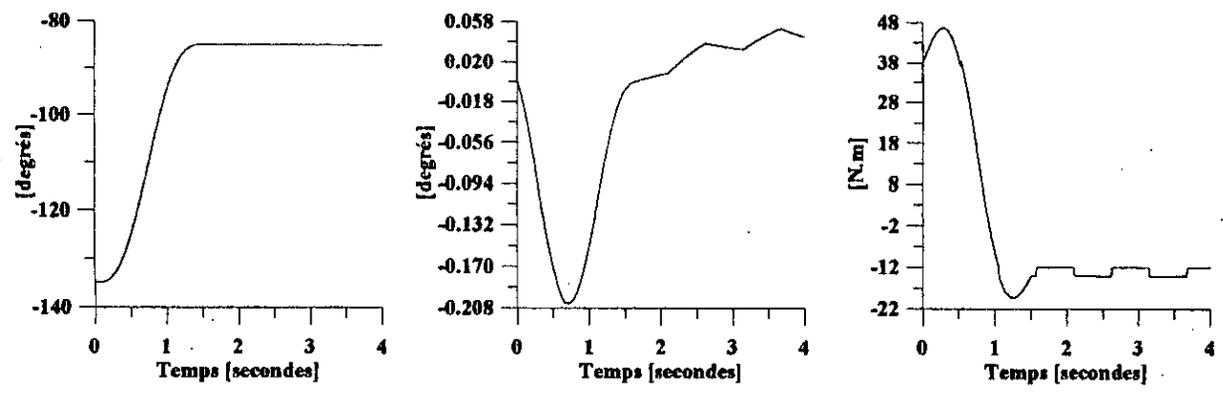


Position, Erreur en position et Commande de la troisième articulation

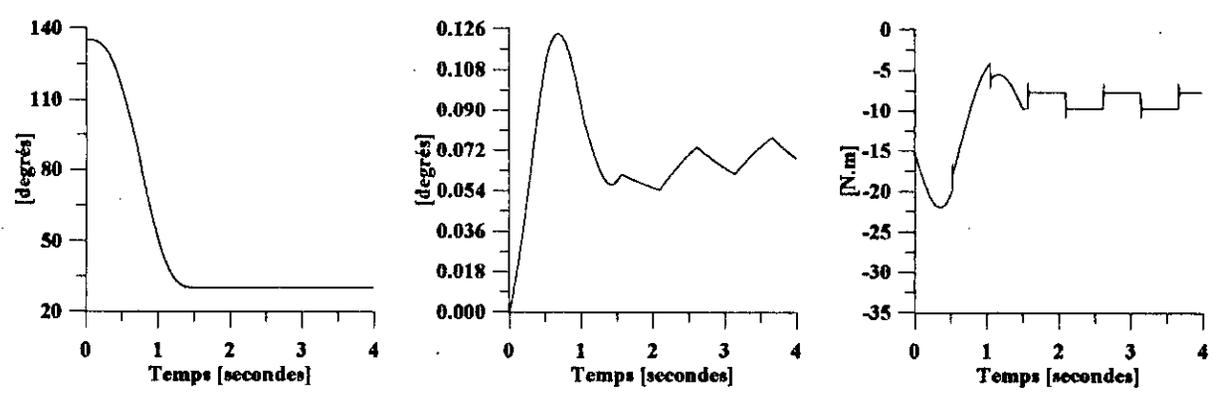
Figure (IV-7 b)
Réponses en boucle fermée acl 2.5(s), aipf 50, afv, ap et pour $\beta = 5.10^{-04}$



Position, Erreur en position et Commande de la première articulation

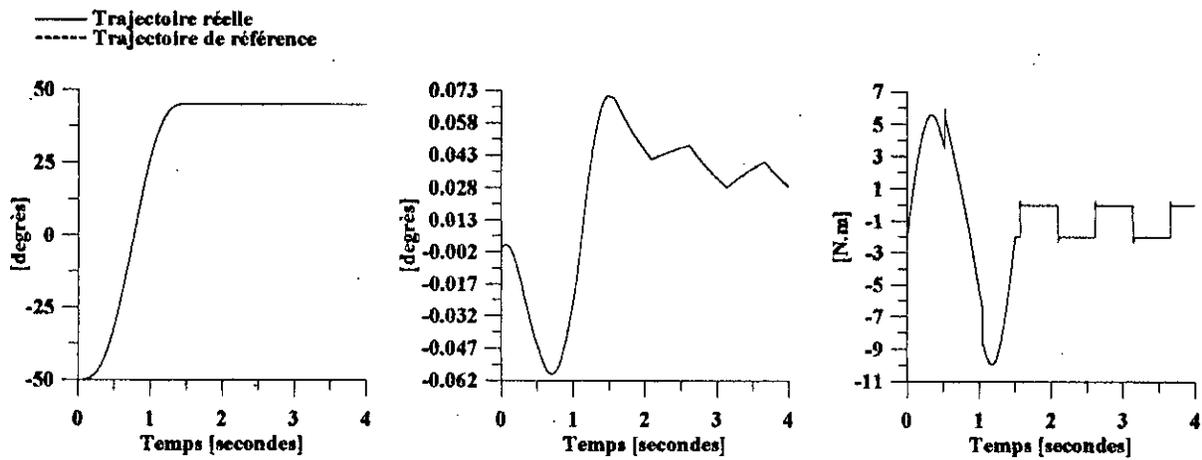


Position, Erreur en position et Commande de la deuxième articulation

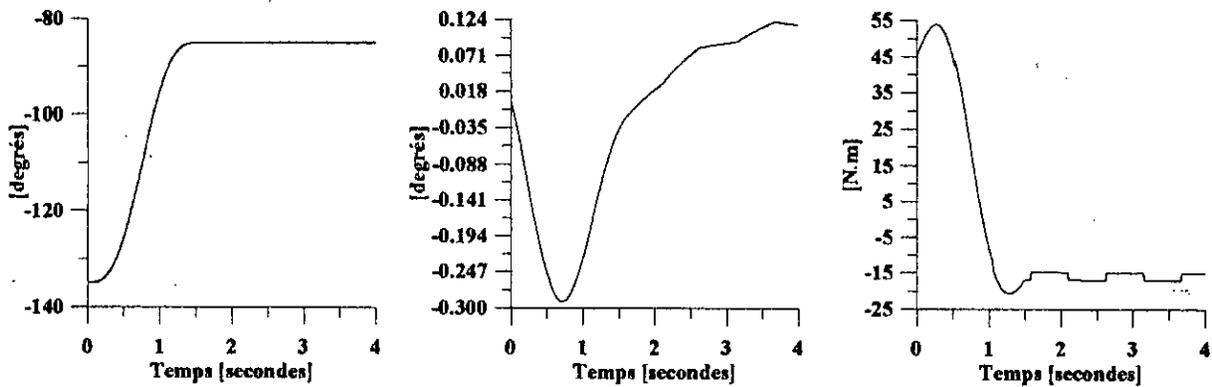


Position, Erreur en position et Commande de la troisième articulation

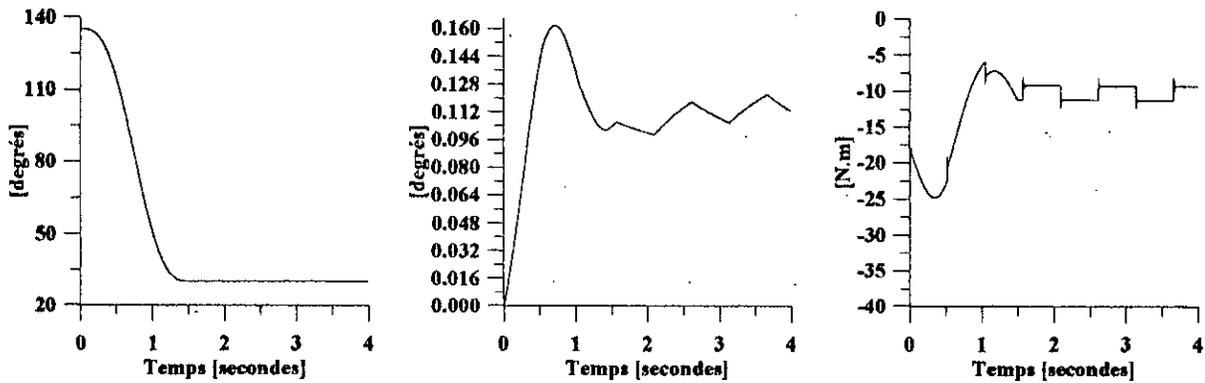
Figure (IV-8a)
Réponses en boucle fermée sc, aipf 25, afv, ap et pour $\beta = 5.10^{-04}$



Position, Erreur en position et Commande de la première articulation

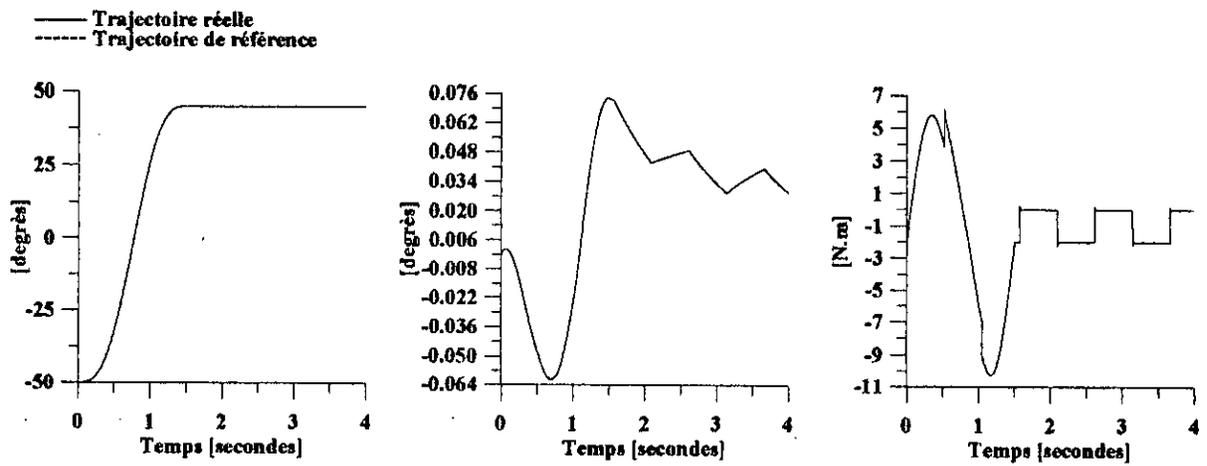


Position, Erreur en position et Commande de la deuxième articulation

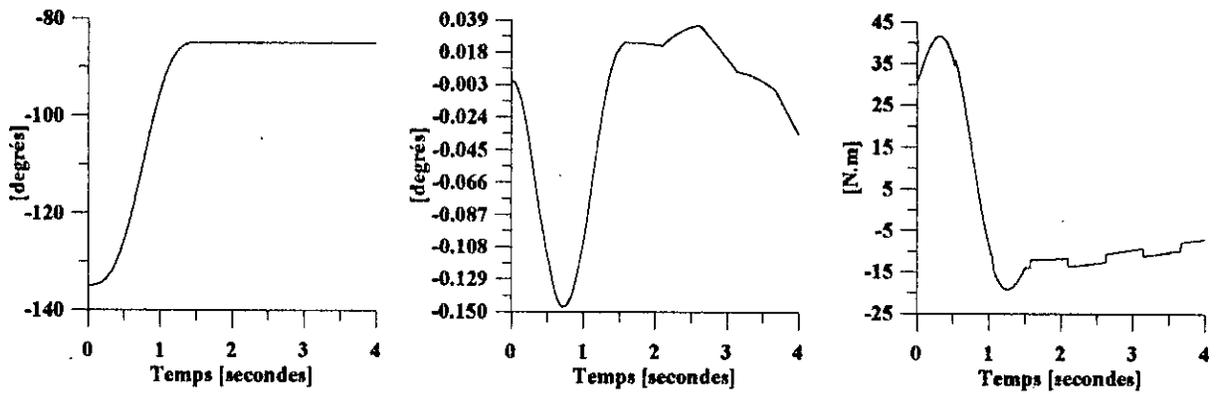


Position, Erreur en position et Commande de la troisième articulation

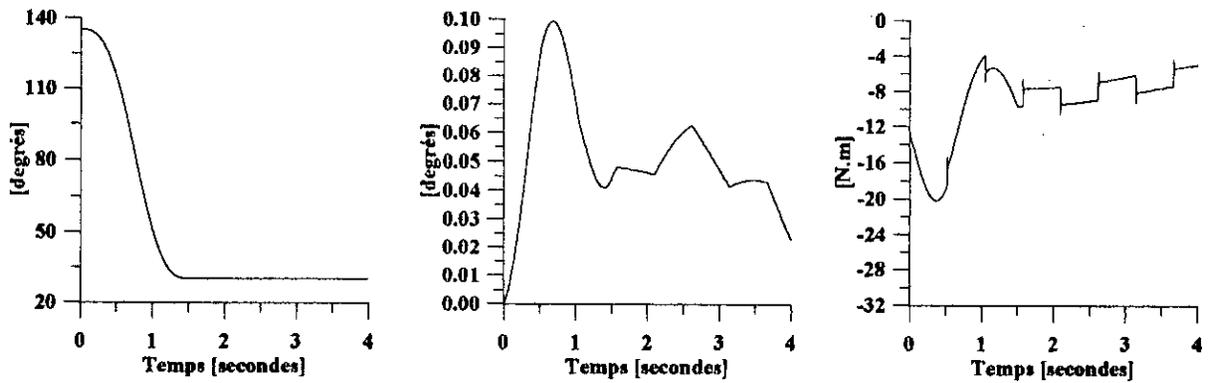
Figure (IV-8 b)
Réponses en boucle fermée sc, aipf 50, afv, ap et pour $\beta = 5.10^{-04}$



Position, Erreur en position et Commande de la première articulation

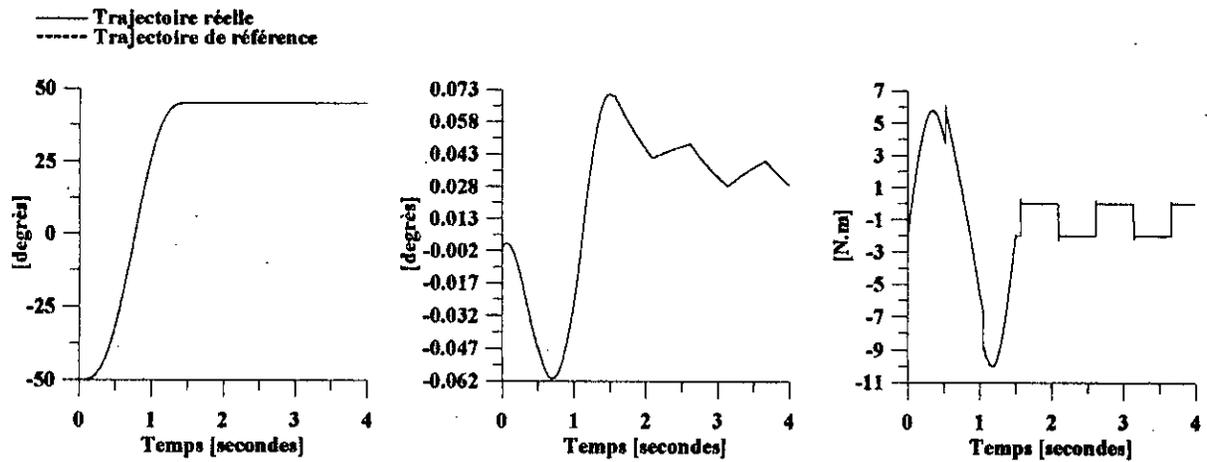


Position, Erreur en position et Commande de la deuxième articulation

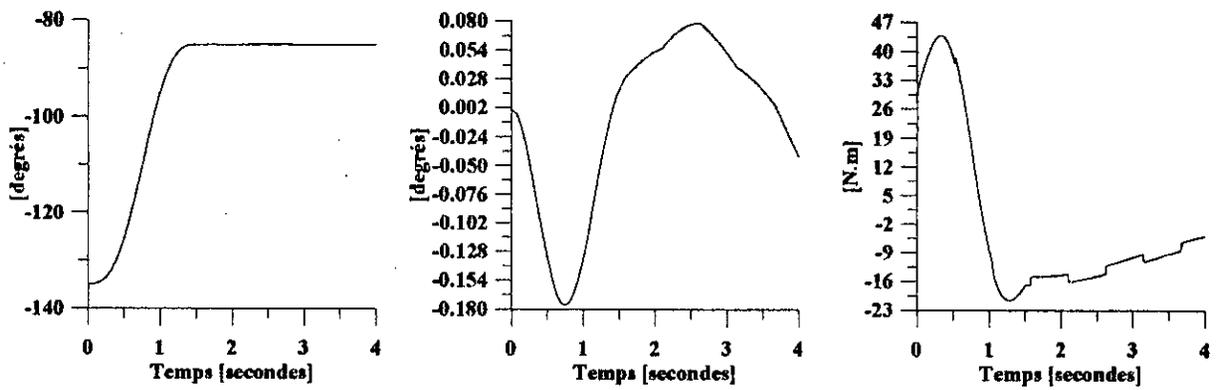


Position, Erreur en position et Commande de la troisième articulation

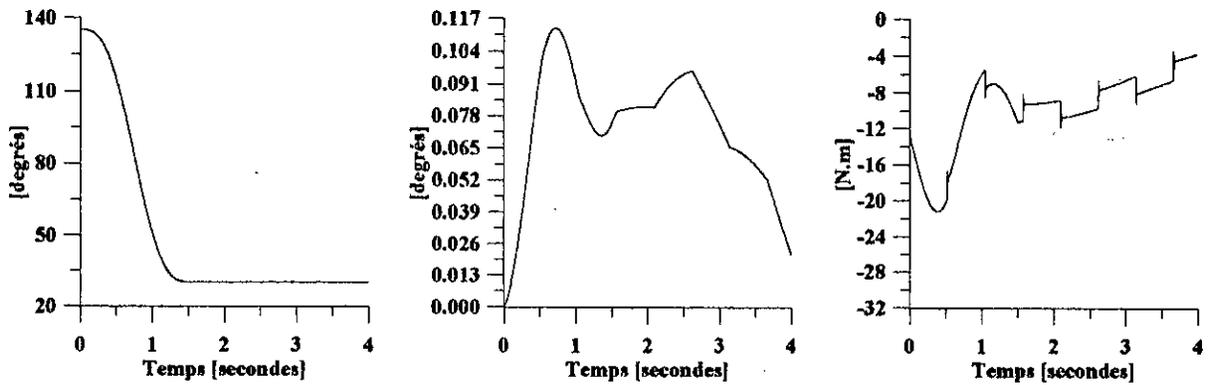
Figure (IV-9a)
Réponses en boucle fermée sc, aips 25, afv, ap et pour $\beta = 5.10^{-04}$



Position, Erreur en position et Commande de la première articulation



Position, Erreur en position et Commande de la deuxième articulation



Position, Erreur en position et Commande de la troisième articulation

Figure (IV-9b)
Réponses en boucle fermée sc, aips 50, afv, ap et pour $\beta = 5.10^{-04}$

Interprétations des résultats :

Figures (IV-1a) à (IV-1c) : en l'absence de perturbations et d'incertitude paramétriques, on constate que la poursuite est assurée, elle d'autant plus meilleur que β est plus petit. Ceci s'explique par le fait que dans ce cas là précis on retombe dans le cas de la commande H_2 , pour lequel la pondération de l'erreur \tilde{x} est d'autant plus importante que la pondération sur u en diminuant β , donc une meilleure poursuite.

Figures (IV-2a) à (IV-2c) : malgré l'introduction des perturbations et de frottements visqueux sur le système, on constate que, pour un choix optimal de β , le système est stable et la poursuite est très satisfaisante.

Figure (IV-3) : en plus des perturbations et des frottements, on fait subir au système un test de variation brusque de la charge de 4 kg. à zéro. Nous constatons que la commande réagit à cette brusque variation et que le système reste stable. A noter que ce test a été effectué pour β optimal égal à 0.0005.

A travers les simulations des figures (IV-4) (a,b,c), (IV-5) (a,b,c), (IV-6) (a,b,c), pour lesquelles le système est non seulement contraint aux tests cités auparavant, mais est aussi sujet à des incertitudes paramétriques sinusoïdales, générées sous forme de perturbations internes au système, on constate que lorsque $\beta \rightarrow \beta_{opt}$, l'effet de cette perturbation combinée est considérablement atténuée et la poursuite reste satisfaisante.

La simulation représentée par les figures (IV-7) (a,b), nous montre que la commande H_∞ synthétisée est toujours robuste pour le β_{opt} (i.e. poursuite satisfaisante, erreur stable et bornée et les commandes sont lissent), malgré l'introduction d'incertitudes paramétriques fixes de 25% à 50%.

Les dernières simulations représentées par les figures (IV-8) (a,b) et (IV-9) (a,b) sont consacrées au test de LEAVHY , dont lequel on excite la dynamique du système pour une trajectoire cycloïdale sur un horizon de 1.5 seconde, à noter que le robot est à vide, mais est toujours sujet à une perturbation, aux frottements visqueux et aux incertitudes paramétriques sinusoïdales (figures (IV-9) (a,b) 25 à 50%) et fixes (figures (IV-8) (a,b) 25 à 50%). On constate une fois de plus que le système est stable et présente une poursuite quasi-parfaite , pour des commandes lissent et d'amplitudes réduites.

Remarque IV-1 :

Il est important de noter qu'à travers les différentes simulations présentées, l'erreur de poursuite statique est non nulle, mais qu'elle reste bornée dans des proportions très

admissibles . On pourrait exiger que l'erreur soit d'avantage plus petite par rapport aux résultats présentés ci-dessus, cela est possible en faisant diminuer β mais en contre partie, on doit diminuer la période d'échantillonnage, ce qui demanderait un temps et des moyens de calcul plus importants, donc un compromis : temps de calcul, performances exigées doit être fait.

IV-4 CONCLUSION :

A travers les différentes simulations réalisées, nous pouvons conclure que la loi de commande synthétisée à partir des techniques de H_∞ non linéaire, présentée dans le chapitre III est robuste et offre l'avantage de générer des commandes lisses. L'association de la technique dite " the computed torque", et de la commande H_∞ non linéaire permet de palier aux problèmes souvent rencontrés dans ce genre de commandes, à savoir l'incertitude du modèle, mais aussi d'autres types de perturbations, notamment rupture d'informations, mauvaise connaissance des conditions initiales, où encore les bruits de mesures.

CONCLUSION GENERALE

○

Que peut on conclure ? Tout d'abord de l'application. Nous avons vu à travers les résultats des simulations que la loi de commande synthétisée est robuste face aux incertitudes paramétriques du robot, des dynamiques négligées et des perturbations externes. On a constaté que pour un choix optimal du degrés d'atténuation γ l'effet de la perturbation combinée est considérablement amoindrit. En perspective, et concernant l'application elle même, nous proposons d'étendre le problème minimax qui a été posé pour résoudre le problème H_∞ non linéaire, à un jeu différentiel à information incomplète à quatre joueurs, et ceci dans le cas où on ignore les conditions initiales et où les états du système ne sont accessibles.

De la commande H_∞ linéaire. Elle offre une garantie de stabilité et permet d'atteindre différents objectifs à la fois. Elle minimise la sensibilité d'un système contre toute sortes de perturbations en basses fréquences et offre une robustesse contre les perturbations hautes fréquences. La commande H_∞ linéaire présenté dans le chapitre 1 fait l'objet de nombreuse recherches, dans le but de trouver de nouvelles représentation d'état des régulateurs.

De la commande H_∞ non linéaire. Au delà de l'approche utilisée pour la résolution du problème H_∞ non linéaire, ce qui est important de retenir c'est que à chaque fois qu'un problème de poursuite peut être présenté sous forme d'une représentation d'état de l'erreur de poursuite incluant la commande et un terme indépendant de la commande, celui-ci peut être considéré comme une perturbation sur le système et en spécifiant la sortie à contrôler, la technique de la commande H_∞ non linéaire peut être suggérée pour la résolution du problème.

 ANNEXE A

I- Opérateur de RICCATI :

Considérons la matrice de transfert ci-dessous :

$$G = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \quad (\text{A-1})$$

tel que A est stable de dimension $n \times n$.

Soit Q, R deux matrices réelles, symétriques de dimension $n \times n$.

Définissons la matrice Hamiltonienne $2n \times 2n$ suivante :

$$H = \left[\begin{array}{cc} A & R \\ Q & A' \end{array} \right] \quad (\text{A-2})$$

Admettons que H n'a pas de pôles sur l'axe imaginaire. Elle possède forcément alors n valeurs propres dans $Re S < 0$ et n valeurs propres dans $Re S > 0$. Considérons maintenant deux sous-espaces spectraux de dimension n $X_-(H)$ et $X_+(H)$. Le premier correspond aux valeurs propres dans $Re S < 0$ et le deuxième aux valeurs propres dans $Re S > 0$. En trouvant une base pour $X_-(H)$, puis, en ordonnant les vecteurs de celle-ci on obtient:

$$X_-(H) = Im \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A-3})$$

tel que $X_1, X_2 \in R^{n \times m}$. Si les deux sous-espaces:

$$X_-(H), Im \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (\text{A-4})$$

sont complémentaires, on peut écrire $X = X_2 X_1^{-1}$. X alors est uniquement déterminé par H , c'est à dire, $H \rightarrow X$ est une fonction. Elle est notée Ric ; $X = Ric(H)$. On note $dom(Ric)$, le domaine des matrices Hamiltoniennes possédants deux propriétés : H n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire, et $X_-(H), Im \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ sont complémentaires. La première propriété est appelée propriété de stabilité, la deuxième, propriété de la complémentarité.

Les lemmes suivants concernent les propriétés de X et de H .

Lemme A-1 : [9]

Supposons que $H \in \text{dom}(\text{Ric})$ et $X = \text{Ric}(H)$ alors :

a) X est symétrique.

b) X satisfait l'équation algébrique de RICCATI :

$$A'X + XA + XRX - Q = 0$$

c) $A + RX$ est stable.

Lemme A-2 : [9]

Supposons que H possède pas de valeurs propres imaginaires, et R semi-définie positive ou semi-définie négative, et (A, R) est stabilisable, alors $H \in \text{dom}(\text{Ric})$.

Lemme A-3 : [9]

Supposons que H est de la forme :

$$H = \begin{bmatrix} A & -BB' \\ -C'C & -A' \end{bmatrix}$$

Avec (A, B) stabilisable et (C, A) détectable. Soit X le sous-espace non observable. Alors $H \in \text{dom}(\text{Ric})$ et $X = \text{Ric}(H) \geq 0$ et $\text{Ker}(X) \subset X$.

II- Norme H_∞ :

Définissons pour la matrice de transfert $G(S)$ donnée par A-1, avec A stable et pour $\gamma > 0$, la matrice Hamiltonienne suivante :

$$H = \begin{bmatrix} A & -\gamma^2 BB' \\ -C'C & -A' \end{bmatrix} \quad (\text{A-5})$$

Lemme A-4 : [9]

Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\|G\|_{\infty} < \gamma$

b) H ne possède de valeurs propres sur l'axe imaginaire.

c) $H \in \text{dom}(\text{Ric})$.

d) $H \in \text{dom}(\text{Ric})$ et $\text{Ric}(H) \geq 0$, ($\text{Ric}(H) > 0$ si (C, A) est observable).

ANNEXE B

QUELQUES PROPRIETES DES EQUATIONS DE RICCATI :

Considérons l'équation différentielle de Riccati de la forme :

$$-\dot{X} = A^T X + X A - X^T (B B^T - D D^T) X + L \quad (\mathbf{B-1})$$

$$X(t_f) = X_f \geq 0, \quad t \leq t_f$$

où les matrices A , B , Q et L sont des matrices variables dans le temps.

On admet que L et X_f sont des matrices non négatives.

Soit $x(t, X_f)$ la solution de **(B-1)** si elle existe.

Lemme: [27]

Supposons que $x(t, X_f)$ existe sur $[t_0, t_f]$, si $X_f \geq 0$ (> 0), alors $x(t, X_f)$ est définie non négative (positive) sur $[t_0, t_f]$. Si maintenant, nous considérons les matrices A , B , D , L comme constantes, alors l'équation algébrique de Riccati associée à **(B-1)** est :

$$0 = A^T \bar{X} + \bar{X} A - \bar{X}^T (B B^T - D D^T) \bar{X} + L \quad (\mathbf{B-2})$$

Définition [27]

Une matrice symétrique définie non négative \bar{X}_1 , satisfaisant à l'équation **(B-2)** est dite, la solution définie non négative minimale de **(B-2)** si pour toute autre solution symétrique définie non négative \bar{X}_2 de **(B-2)** on a $\bar{X}_1 \leq \bar{X}_2$.

Corollaire : [27]

Supposons qu'il existe une matrice définie non négative \bar{X}_1 , satisfaisant à l'E.A.R **(B-2)**, si $0 \leq X_f \leq \bar{X}_1$, alors : $x(t, X_f)$ existe et $0 \leq x(t, X_f) \leq \bar{X}_1$, pour $t \leq t_f$. d'ailleurs, si

$0 \leq X_f \leq \tilde{X}$, où \tilde{X} , est la solution définie non négative minimale de (B-2), alors $x(t, X_f) \rightarrow \tilde{X}$ quand $t \rightarrow -\infty$

ANNEXE C

Dérivation de l'équation (III-67) :

$$P(\tilde{x}, t) = T_0^T \begin{bmatrix} M(\tilde{x}, t) & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} T_0, \quad A_T(\tilde{x}, t) = T_0^{-1} \begin{bmatrix} -M^{-1}(q) C_0(q, \dot{q}) & 0_{n \times n} \\ T_{11}^{-1} & T_{11}^{-1} T_{12} \end{bmatrix} T_0$$

En utilisant :

$$C_0(q, \dot{q}) = N(q, \dot{q}) + \frac{1}{2} \dot{M}(q, \dot{q})$$

nous avons:

$$A_T(\tilde{x}, t) = T_0^{-1} \begin{bmatrix} -M^{-1}(q) \left(N(q, \dot{q}) + \frac{1}{2} \dot{M}(q, \dot{q}) \right) & 0_{n \times n} \\ T_{11}^{-1} & T_{11}^{-1} T_{12} \end{bmatrix} T_0$$

donc :

$$\begin{aligned} P(\tilde{x}, t) A_T(\tilde{x}, t) &= T_0^T \begin{bmatrix} M_0(q) & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \frac{T_0 T_0^{-1}}{I} \begin{bmatrix} -M^{-1}(q) \left(N(q, \dot{q}) + \frac{1}{2} \dot{M}(q, \dot{q}) \right) & 0_{n \times n} \\ T_{11}^{-1} & T_{11}^{-1} T_{12} \end{bmatrix} T_0 \\ &= T_0^T \begin{bmatrix} N(q, \dot{q}) + \frac{1}{2} \dot{M}(q, \dot{q}) & 0 \\ K T_{11}^{-1} & -K T_{11}^{-1} T_{12} \end{bmatrix} T_0 \\ &= T_0^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K T_{11}^{-1} & -K T_{11}^{-1} T_{12} \end{bmatrix} T_0 + \\ &\quad + T_0^T \underbrace{\begin{bmatrix} -N(q, \dot{q}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{T_0^T B N(q, \dot{q}) B^T T_0} T_0 + T_0^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \dot{M}(q, \dot{q}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_0 \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (III-66) :

$$T_0^T B N(q, \dot{q}) B^T T_0 = 0$$

où :

$$B = \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix}$$

d'où :

$$T_0 = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \Rightarrow T_0^T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{12} & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_0^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ +K T_{11}^{-1} & -K T_{11}^{-1} T_{12} \end{bmatrix} T_0 &= \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{12} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ +K T_{11}^{-1} & -K T_{11}^{-1} T_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ +K T_{11}^{-1} & -K T_{11}^{-1} T_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donc :

$$P(\tilde{x}, t) A_T(\tilde{x}, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K & 0 \end{bmatrix} + T_0^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \dot{M}(q, \dot{q}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_0$$

et comme :

$$A_T^T(\tilde{x}, t) P(\tilde{x}, t) = (P(\tilde{x}, t) A_T(\tilde{x}, t))^T \quad (P(\tilde{x}, t) = P^T(\tilde{x}, t))$$

nous avons:

$$\begin{aligned} A_T^T(\tilde{x}, t) P(\tilde{x}, t) &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K & 0 \end{bmatrix} \right) + \left(T_0^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \dot{M}(q, \dot{q}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_0 \right)^T \\ &= \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + T_0^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \dot{M}(q, \dot{q}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_0 \end{aligned}$$

et donc :

$$P(\bar{x}, t) A_T(\bar{x}, t) + A_T^T(\bar{x}, t) P(\bar{x}, t) = \begin{bmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{bmatrix} + T_o^T \begin{bmatrix} -\dot{M}(q, \dot{q}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_o$$

ANNEXE D

PARAMETRES PHYSIQUES DU PUMA 560 [1] [5]

• **MASSES DES DIFFERENTES LIAISONS :**

$$m_2 = 17.40 \text{ kg} \quad m_3 = 5.04 \text{ kg} \quad m_4 = 0.82 \text{ kg}$$

$$m_5 = 0.35 \text{ kg} \quad m_6 = 0.09 \text{ kg} \quad m_1 = m_4 + m_5 + m_6 = 1.26 \text{ kg.}$$

• **PARAMETRES GEOMETRIQUES :**

$$d_2 = 149.09 \text{ mm} \quad l_2 = 431.8 \text{ mm} \quad l_3 = 433.07 \text{ mm.}$$

• **PARAMETRES D'INERTIE :**

N° de la liaison	I_{xx} [kg m^2]	I_{yy} [kg m^2]	I_{zz} [kg m^2]	I_M [kg m^2]
1	-	$350 \cdot 10^{-3}$	-	1.14
2	$130 \cdot 10^{-3}$	$524 \cdot 10^{-3}$	$539 \cdot 10^{-3}$	4.71
3	$192 \cdot 10^{-3}$	$15.4 \cdot 10^{-3}$	$212 \cdot 10^{-3}$	0.83
4	$1.30 \cdot 10^{-3}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	-
5	$0.30 \cdot 10^{-3}$	$0.30 \cdot 10^{-3}$	$0.40 \cdot 10^{-3}$	-
6	$0.04 \cdot 10^{-3}$	$0.15 \cdot 10^{-3}$	$0.15 \cdot 10^{-3}$	-
4+5+6	$1.64 \cdot 10^{-3}$	$2.25 \cdot 10^{-3}$	$2.35 \cdot 10^{-3}$	-

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

○

- [1] **B. AMSRONG, O. KHATIB and J. BURDICK**, « The explicit dynamic model and inertial parameters of PUMA 560 arm », Proc. IEEE International Conference on Robotic and Automatic, pp 510-518, San Francisco 1986.
- [2] **N. BALI**, Etude des performances de la commande prédictive généralisée : Application aux robots manipulateurs PUMA et SCARA, Thèse de Magister, ENP 1995.
- [3] **J. BALL, J.W. HELTON and M.L. WALKER**, « H_∞ Control for Nonlinear Systems with Output Feedback », IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 38, April 1993.
- [4] **J. BERNUSSOU**, Commande robuste : développement et applications, Hermès, Paris 1996.
- [5] **H. BOUKARI, M.S. NEDJARI**, Commande adaptative décentralisée : Application en robotique, PFE, ENP 1996.
- [6] **B.S. CHEN, T.S. LEE and J.H. FENG**, « A nonlinear H_∞ control design in robotic systems under parameter perturbation and external disturbance », Int. J. Control, vol. 39, pp 439-460, 1994.
- [7] **D'AZZO**, Linear control system analysis and design conventional and modern, Auckland : Mc Graw-Hill 1984.
- [8] **J.C. DOYLE**, « Lecture notes in advances in multivariable control », ONR / Honeywell Workshop, Minneapolis, MN 1984.
- [9] **J.C. DOYLE, K. GLOVER, P. KHARGONEKHAR and B.A. FRANCIS**, « State space solutions to standard H_2 and H_∞ control problem », IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 34, pp 831-847, August 1989.
- [10] **B.A. FRANCIS**, A course in H_∞ control theory », New York : Springer-Verlag, 1987.
- [11] **B.A. FRANCIS and J.C. DOYLE**, « Linear control, theory with an H_∞ optimally criterion », SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 25, pp 815-844, 1987.
- [12] **K.GLOVER, D. McFARALANE**, « Robust stabilization of normalized coprime factor plant description with H_∞ bounded uncertainty », IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 34, No. 8, August 1989.

- [13] **A. ISIDORI and A. ASTOLFI**, « Disturbance attenuation and H_∞ control via measurement feedback in nonlinear systems », IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 37, September 1992.
- [14] **R. JOHANSON**, « Quadratique Optimization of motion coordination and control », IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 28, pp 162-171.
- [15] **D.E. KIRK**, Optimal control theory : An introduction, Printice-Hall, Electrical Engineering series, 1970.
- [16] **M.B. LEAVY Jr**, « Model based auxiliary input control : Development and experimental analysis », Proc. Of the 29th conf. on Dicision and Control, Honolulu, Hawaii Dec 1990.
- [18] **D.J.N. LIMEBEER, B.D.O. ANDERSON, P.P. KHARGONEKAR, P.P. and GREEN**, « A game theoretic approach to H_∞ control for time varying systems », SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 30, pp 262-283, 1992.
- [19] **C.F. LIN**, « Advanced control systems design », Printice-Hall, Inc, 1994.
- [20] **W. LIN**, « Mixed H_2/H_∞ control via state feedback for nonlinear systems », Int. J. Control, vol. 64, pp 899-922, 1996.
- [21] **W.M. LU and J.C. DOYLE**, « Control of nonlinear systems via output feedback : Controller parametrization », IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 39, Dec 1994.
- [22] **W.M. LU**, « H_∞ control of nonlinear time-varying systems with finite time horizon » Int. J. Control, vol. 64, pp 241-262, 1996.
- [23] **D. McFARALANE, K. GLOVER**, « A loop shaping design procedure using H_∞ synthesis », IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 37, June 1992.
- [25] **R.P. PAUL**, Robots manipulators : Mathematics, programmings and control, MIT Press, Gambridge, MA, 1981.
- [26] **M.S. SAFONOV and D.J.N. LIMEBEER**, « Simplifying the H_∞ theory via loop shifting », in Proc. 27th IEEE conf. Dicision Contr, Austin, Tx, 1988.
- [27] **I. RHEE, L. SEYER**, « A game theoretic approach to a finite time disturbance attenuation », IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 36, N°9, September 1991.
- [28] **B.SHAHNAN, M. HASSUL**, Control system design using Matlab, Englewood diffs., New Jersey 1993.

- [29] **J.J.E. SLOTINE, W. LI**, Applied nonlinear control, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1993
- [30] **A.J. VAN DER SHAFT**, « On a state space approach to nonlinear H_∞ optimal control », Syst. Contr. Lett, vol. 16, pp 1-8, 1991.
- [31] **A.J. VAN DER SHAFT**, « L_2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H_∞ control », IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 37, June 1992.
- [32] **C. ZAMES**, « Feedback and optimal sensitivity model reference transformation, multiplicative seminorms, and approximate inverses », IEEE Transaction on Automatic Control, vol. AC-26, pp 301-320, 1981.
- [33] **K. ZHOU and P.P. KHARGONEKAR**, « An algebraic Riccati equation approach to H_∞ optimization », Syst. Contr. Lett., vol. 11, pp 85-92, 1988.

Résumé:

A travers cet exposé, nous avons posé le problème de la commande H_∞ non linéaire appliquée à un robot manipulateur en l'occurrence le *PUMA 560* dont le modèle dynamique est sujet à des incertitudes paramétriques et une perturbation externe. Il a été montré que ce problème est équivalent à un jeu différentiel à information complète à deux joueurs, dont la solution passe par la résolution de l'équation algébrique de RICCATI, la commande résultante est robuste et procure des performances acceptables pour un choix optimal positif du niveau d'atténuation désirée γ de la perturbation combinée.

Abstract:

Within this project, we introduced H_∞ non linear control problem applied on robotics systems in other hands the *PUMA 560* whose dynamic model is under parametric uncertainties and external disturbance. It has been shown that this problem is equivalent to a two players full information differential game which can be resolved via the algebraic RICCATI equation. The resulting control is robust and procure acceptable performances for an positive optimal choice of the desired attenuation level γ of the combined disturbance.

ملخص :

في هذا العمل , عرضنا مشكلة التحكم اللاخطي H_∞ المطبقة على ذراع آلي بالخصوص على *PUMA 560*, الذي يخضع نموذجه الديناميكي لإرتيابات وسيطية و لإضطراب خارجي. بينا أن هذا المشكل يكافئ لعبة تفاضلية ذات معلومات كاملة بلاعبين و حلها يتم عبر معادلة RICCATI الجبرية. التحكم الناتج متين و يعطي كفاءات مقبولة بإختيار أمثلي موجب لمستوى التخامد المرغوب فيه γ للإضطراب المركب.