

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département de Genie Electrique

thèse de projet de fin d'étude

Pour l'obtention de titre

Ingénieur

En Automatique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Thème

**COMMANDE ADAPTATIVE NON-LINEAIRE
D'UN BRAS DE ROBOT MANIPULATEUR**
« Application par simulation à un robot à deux degrés de liberté »

Proposé par :
M^r. RILLOUL

Etudié par :
Z. Tidjani
M.F. Belazreg

Dirigé par
RILLOUL
L.GUENFAF

Promotion 1995.

Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département de Genie Electrique

thèse de projet de fin d'étude

Pour l'obtention de titre

Ingénieur

En Automatique

Thème

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

**COMMANDE ADAPTATIVE NON-LINEAIRE
D'UN BRAS DE ROBOT MANIPULATEUR**
« Application par simulation à un robot à deux degrés de liberté »

Proposé par :
M^r. RILLOUL

Etudié par :
Z. Tidjani
M.F. Belazreg

Dirigé par
RILLOUL
L. GUENFAF

Promotion 1995.

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
10, Avenue Hassen badi El-harrach Alger

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE

CHAPITRE I

MODELISATION

Introduction.....	1
I.1 Modélisation cinématique.....	1
I.1.1 Modèle géométrique direct.....	1
I.1.2 Modèle géométrique inverse.....	3
I.1.3 Modèle cinématique direct et inverse.....	3
I.2 Modélisation dynamique.....	4
I.2.1 Modèle dynamique sans charge.....	4
I.2.2 Modèle dynamique avec charge.....	8
I.3 Trajectoires de références.....	9
I.4 Application au robot 2R.....	10
I.5 Simulation en boucle ouverte	

CHAPITRE II

Hyperstabilité principaux théorèmes et définitions

Introduction

II.1 Commande adaptative à modèle de référence.....	19
II.2 Approche de l'hyperstabilité.....	21
II.2.1 cas des systèmes continus.....	21
II.2.2 cas des Systèmes discrets.....	23

CHAPITRE III COMMANDE PASSIVE ADAPTATIVE

Introduction.....	26
III.1 Commande passive	27
III.2 Commande passive modifiée.....	30
III.3 Commande passive adaptative dans l'espace généralisé.....	32
III.3.1 Algorithme d'adaptation paramétrique.....	34
III.3.2 Bornitude des signaux.....	36
III.4 Commande dans l'espace cartésien.....	39
III.5 Simulation et interprétation.....	41
Conclusion.....	44

CHAPITRE IV COMMANDE ADAPTATIVE DISCRETE A MODELE DE REFERENCE

Introduction.....	59
IV.1 Commande dans l'espace généralisé.....	59
IV.1.1 Modèle discret du robot.....	60
IV.1.2 synthèse de la commande	60
IV.2 Commande dans l'espace cartésien.....	68
IV.5.Simulation et discussion.....	71
Conclusion.....	74

CONCLUSION GENERALE

ANNEXES

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La robotique est une large discipline qui recouvre aujourd'hui un champ d'application important dans le domaine industriel pour l'automatisation des chaînes de production et de montage, l'assistance et l'intervention dans des milieux et environnements nocifs ou hostiles [1].

Dans l'industrie, on exige au robot l'exécution de tâche aussi complexes et précises que diversifiées. Ces exigences sont difficiles à maintenir par le fait que les équations dynamiques du robot sont fortement non linéaires et couplées à cause du couplage entre les articulations et la variation de l'inertie effective des liaisons [2].

Ces dernières années, les recherches dans les systèmes de commandes ont enregistré un progrès important. Ces recherches se sont soldées par la distinction de deux classes principales de conception [] :

-Première classe (model-based technics) couvre les techniques basées sur la compensation des non-linéarités de la dynamique du robot avec des régulateurs on 'feed-back'. Ces dynamiques sont basées sur une connaissance parfaite de la dynamique du robot, des valeurs des paramètres du manipulateur et de la charge. Ces exigences sont difficiles à satisfaire vu la difficulté de modélisation des frottements et leurs dépendances des conditions opérationnelles. Ces difficultés dégradent les performances dynamiques et peuvent rendre le réglage instable.

-Deuxième classe (Performances-based technics) couvre les techniques basées sur la commande adaptative. Dans le réglage adaptatif, les paramètres du régulateur sont adaptés dans le but de maintenir les performances dynamiques du système à régler dans le voisinage des performances désirées, et ce, même en présence d'incertitudes paramétriques.

La stratégie des commandes robustes joue le même rôle que la stratégie des commandes adaptatives, mais cette dernière permet l'amélioration de la précision du temps s , car la

mécanique d'adaptation extrait les informations sur les paramètres à partir de l'erreur de poursuite.

Dans le cadre de cette étude, on s'intéresse à l'aspect modélisation et à la commande des robots. Les techniques traitées sont appliquées par simulation à un robot planaire à deux rotations ($2R$).

Pour la simulation on a choisi pour trajectoires de référence une cycloïde dans l'espace généralisé, et un cercle dans l'espace cartésien. Dans ce chapitre on s'intéresse à l'élaboration des différents modèles du robot. L'utilisation de la transformation de Dinavit-Hartenberg ($D-H$), nous permet d'obtenir les modèles géométriques et cinématiques direct et inverse. La trajectoire de référence est présentée dans ce chapitre.

Dans le deuxième chapitre, on présente les principaux théorèmes de la commande adaptative, et de l'approche de l'hyperstabilité.

Dans le troisième chapitre, en utilisant l'approche de l'hyperstabilité, on présente la commande passive, sous ses deux formes à paramètres connus et adaptative ainsi que les résultats de simulations de l'application sur un robot $2R$.

Dans le dernier chapitre, nous présentons la commande adaptative discrète à modèle de référence. La synthèse est effectuée par l'approche de l'hyperstabilité. Les résultats de simulation de l'application sur notre robot sont interprétés et suivis d'une conclusion.

A la fin de cette étude, on donne une conclusion générale sur les deux techniques présentées.

Chapitre I

MODELISATION

INTRODUCTION

L'analyse, la synthèse et la simulation des systèmes dynamiques nécessitent la connaissance des relations entrées-sorties du système. L'ensemble des équations mathématiques qui décrivent, avec précision, le comportement dynamique du système et son interaction avec l'environnement constitue le modèle du système. On distingue deux types de modèles [2]:

- 1 - Un modèle de représentation obtenu par des méthodes d'identifications.
- 2 - Modèle de connaissance, obtenu par l'application des lois de la physique.

Tout robot manipulateur peut être considéré comme étant l'enchaînement de plusieurs liaisons rigides connectées par des articulations rotationnelles ou translationnelles actionnées par des moteurs. Une extrémité de la chaîne est attachée à un support de base, tandis que l'autre, elle est liée à un élément terminal dont la fonction est de saisir des objets [4].

Afin d'établir les modèles géométriques et cinématiques du robot on utilise la transformation de Denavit-Hartenberg (T.D.H). De même le modèle dynamique est obtenu en utilisant le formalisme d'Euler-Lagrange et les matrices définies par (T.D.H)

I.1. Modélisation cinématique

Dans la modélisation cinématique on s'intéresse à la description analytique du déplacement du robot dans l'espace en fonction du temps, en particulier la relation entre les positions et vitesses généralisées et la position et vitesse de l'élément terminal sans prendre en compte les causes de ce déplacement [4].

Dans la cinématique on distingue quatre types de modèles:

I.1.1 Modèle géométrique direct :

On appelle modèle géométrique direct d'un robot le système d'équations littérales donnant explicitement les coordonnées opérationnelles en fonction des coordonnées

généralisées. Autrement dit il donne la position de l'élément terminal (X) en fonction de la configuration du robot (q) [1], donc

$$X = F(q) \quad (I.1)$$

avec :

$$X = [x \ y \ z] \quad \text{et} \quad q = [q_1 \ \dots \ q_n]$$

Pour obtenir le modèle géométrique direct on propose de suivre les étapes suivantes:

- 1- Pour chaque articulation i , on établit le repère R_i défini par la transformation de Denavit-Hartenberg [4], le repère R_0 est lié à la base [voir Annexe A].
- 2- On déduit pour chaque liaison, les paramètres géométriques $a_i, d_i, \alpha_i, \theta_i$, et par la suite les matrices de passages T_i^{i+1} $i = 1..n-1$ où [voir Annexe A]:

$$T_{i-1}^i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i s\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i c\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I.2.a)$$

- 4- Si la position de l'élément terminal dans le repère R_n est r_n alors sa position dans le repère R_0

$$r = T_0^n r_n \quad \text{est} \quad (1.2.b)$$

où:

$$r = [X \ 1]^T = [x \ y \ z \ 1]^T \quad \text{et} \quad T_0^n = \prod_0^{n-1} T_i^{i+1} r_n$$

sous forme implicite on a:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(q) \\ f_2(q) \\ f_3(q) \end{bmatrix} \quad (I.2.c)$$

T_0^n : la matrice de passage du repère R_n au repère R_0 .

L'équation (I.2.c) constitue le modèle géométrique direct.

I.1.2 Modèle géométrique inverse

On appelle modèle géométrique inverse d'un robot le système d'équations donnant explicitement les coordonnées généralisées en fonction des coordonnées opérationnelles.

Il donne la configuration du robot en fonction de la position de l'élément terminal [1], donc :

$$q = F^{-1}(X) \quad (I.3)$$

Le calcul de la matrice des fonctions inverses F^{-1} est difficile en général, de plus sa résolution ne conduit pas toujours à une solution unique.

I.1.3 Modèle cinématique direct et inverse

Le modèle cinématique direct consiste à exprimer la vitesse de l'élément terminal (\dot{X}) en fonction des vitesses généralisées (\dot{q}).

Soit X le vecteur de la position de l'élément terminal (l'effecteur) dans le repère R_0 ; en dérivant l'équation du modèle géométrique direct, on obtient :

$$\dot{X} = J_c(q) \dot{q} \quad (I.5. a)$$

$$J_c(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_2(q)}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_2(q)}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_3(q)}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_3(q)}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (I.5. b)$$

avec : J_c : la matrice jacobienne

Si le robot est non redondant (le nombre des variables généralisées est égale au nombre des coordonnées de l'élément terminal), et les trajectoires désirées ne présentent pas des singularités, l'équation (I.5) devient:

$$\dot{q} = J(q)^{-1} \dot{X} \quad (I.5. c)$$

Cette équation constitue le modèle cinématique inverse.

I.2. MODELISATION DYNAMIQUE

La modélisation dynamique s'intéresse à la formulation mathématique des équations de mouvement du robot. Généralement les performances dynamiques des robots dépendent directement de l'efficacité des algorithmes de contrôle et du modèle dynamique du robot.

Il existe plusieurs approches de modélisation dynamique, certaines sont favorisées pour la synthèse des lois de commande, et d'autres pour la simulation et l'implémentation des commandes en temps réel [4].

Parmi les approches de modélisation on trouve celle de Euler-Lagrange et celle de Newton-Euler. Le modèle obtenu par la première approche est un système d'équations différentielles ordinaires du second ordre, il est mieux adapté à la synthèse des lois de commande. Le modèle obtenu par la deuxième méthode est un système d'équations récursives, il est mieux adapté à la simulation et à l'implémentation des commandes en temps réel [4].

Dans cette étude, on développe l'algorithme d'Euler-Lagrange basé sur les matrices de la transformation de Denavit-Hartenberg, pour aboutir à une formulation simple et systématique des modèles du robot.

I.2.1 Modèle dynamique sans charge

Cette approche est basée sur l'application des lois de la mécanique lagrangienne développée pour les systèmes non-conservatifs .

L'équation de mouvement de Euler-Lagrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = u(t) \quad i=1 \dots n \quad (I.6)$$

où:

E_c : énergie cinétique du robot.

E_p : énergie potentielle du robot.

$L = E_c - E_p$: lagrangien du système.

E_d : énergie de dissipation.

τ : vecteur des forces généralisées.

q : vecteur des variables généralisées.

n : nombre de degrés de liberté.

Pour utiliser cet algorithme, on doit calculer les différentes énergies : énergie cinétique, potentielle et de dissipation.

• **Energie cinétique:** Soit un élément différentiel de la liaison i , sa vitesse dans le repère

R_0 est [2]:

$$V_i^i = \sum_{j=1}^i (U_{\theta} \dot{q}_j) r_i^i$$

où :

$$U_{\theta} = \begin{cases} T_i^{i-1} Q_j T_{j-1}^i & j \leq i \\ 0 & j > i \end{cases} \quad (I.7)$$

$$Q_j = \begin{cases} Q' & \text{si l'articulation } i \text{ est rotroïde} \\ Q'' & \text{si l'articulation } i \text{ est prismatique} \end{cases}$$

avec :

$$Q' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad Q'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $r_i^i = [x_i \quad y_i \quad z_i \quad 1]^T$: vecteur position de l'élément différentiel de l'articulation i dans le repère R_i

- T_i^{i+1} : matrice de passage définie par (I.2.a).

$$-T_j^i = \sum_{k=j}^{i-1} T_k^{k+1}$$

L'énergie cinétique de cet élément est:

$$dK_i = \frac{1}{2} Tr(V_i V_i^T) dm = \frac{1}{2} Tr\left(\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_p (r_i^p dm r_i^{pT}) U_p^T \dot{q}_p, \dot{q}_p\right)$$

L'énergie cinétique de la liaison i est:

$$E_{c,i} = \int dK = \frac{1}{2} Tr\left(\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_p J_i U_p^T \dot{q}_p, \dot{q}_p\right)$$

avec:

$$J_i = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm_i & \int x_i y_i dm_i & \int x_i z_i dm_i & \int x_i dm_i \\ \int x_i y_i dm_i & \int y_i^2 dm_i & \int y_i z_i dm_i & \int y_i dm_i \\ \int x_i z_i dm_i & \int y_i z_i dm_i & \int z_i^2 dm_i & \int z_i dm_i \\ \int x_i dm_i & \int y_i dm_i & \int z_i dm_i & \int dm_i \end{bmatrix} \quad (I.8)$$

L'énergie cinétique totale E_c est la somme des énergies cinétiques des liaisons:

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i Tr(U_p J_i U_p^T \dot{q}_p, \dot{q}_p) \quad (I.9)$$

- **Energie potentielle:** Pour le robot l'énergie potentielle est due seulement à la gravitation.

L'énergie potentielle de la liaison i est:

$$E_{p,i} = - \sum_{k=1}^n m_k g^T (T_0^k r_i^k) \quad (I.10)$$

où:

- r_i^k : le vecteur position du centre de gravite de la liaison i dans le repère R_k .
- $g^T = [g_x \ g_y \ g_z \ 0] = g^T = [g' \ 0]$: vecteur du champs de gravitation exprimé dans le repère R_0

- **Energie de dissipation:** L'énergie dissipée par les frottements visqueuses et secs est :

$$E_d = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mu_i \dot{q}_i^2 + \sum_{i=1}^n \zeta_i \dot{q}_i \text{sgn}(\dot{q}_i) \quad (I.11)$$

où :

μ_i : coefficient de frottements visqueuses rapporté à l'articulation i .

ζ_i : coefficient de frottements secs rapporté à l'articulation i .

sign : la fonction signe

En tenant compte des équations (I.9), (I.10) et (I.11), l'équation (I.6) devient []:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^k Tr(U_{kp} J_k U_{kp}^T) \ddot{q}_p + \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i Tr(U_{ipr} J_k U_{ipr}^T) \dot{q}_r \dot{q}_p - \sum_{k=1}^n m_k g U_{ik} r + \sum_{k=1}^n m_k g U_{ik} r + \mu_i \dot{q} + \zeta_i \operatorname{sgn}(\dot{q}) = \tau_i(t)$$

avec:

$$U_{ik} = \begin{cases} T_0^{j-1} Q_j T_{j-1}^{k-1} Q_k T_{k-1}^i & \text{si } j \leq k \leq i \\ T_0^{k-1} Q_k T_{k-1}^j Q_j T_{j-1}^i & \text{si } k \leq j \leq i \\ 0 & \text{si } i < j \text{ ou } i < k \end{cases} \quad (I.12)$$

où sous forme contractée :

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) + H(\dot{q}) = \tau(t) \quad (I.13.a)$$

avec : $q(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ \dots \ q_n(t)]$: vecteur des positions généralisées

- $\dot{q}(t) = [\dot{q}_1(t) \ \dot{q}_2(t) \ \dots \ \dot{q}_n(t)]$: vecteur des vitesses généralisées

- $\ddot{q}(t) = [\ddot{q}_1(t) \ \ddot{q}_2(t) \ \dots \ \ddot{q}_n(t)]$: vecteur des accélérations généralisées

- $M(q)$: matrice d'inertie symétrique (n x n) d'éléments:

$$M_{ik} = \sum_{j=1}^n Tr(U_{ijk} J_j U_{ijk}^T) \quad i, k = 1..n \quad (IV.13.b)$$

J_i est donnée par (I.8).

- $V(q, \dot{q})$: vecteur des forces Coriolis et centrifuge (n x 1),

$$V(q, \dot{q}) = [V_1(q) \ \dots \ V_n(q)]^T$$

$$V_i(q) = \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m (V_{ikm} J_k U_{ikm}^T) \quad (I.13.c)$$

$$V_{ikm} = \sum_{n=1}^n Tr(U_{ikm} J_n U_{ikm}^T) \quad i, k, m = 1..n \quad (I.13.d)$$

on peut décomposer le vecteur V sous la forme:

$$V(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q}) \dot{q}$$

- $G(q)$: vecteur des forces dues à la gravitation (nx1):

$$G(q) = [G_1(q) \ \dots \ G_n(q)]^T$$

$$G_i(q) = - \sum_{j=1}^n m_j g^T U_{ij} r_j^i \quad i = 1..n \quad (I.13.e)$$

- $H(\dot{q})$: vecteur des forces de dissipations (nx1) donné par:

$$H(\dot{q}) = [H_1(\dot{q}) \ \dots \ H_n(\dot{q})]^T$$

$$H_i(\dot{q}) = \mu_i \dot{q} + \zeta_i \operatorname{sgn}(\dot{q}) \quad (I.13.f)$$

$\tau(t) : (n \times 1)$ vecteur des forces généralisées appliquées aux niveaux des articulations $(n \times 1)$.

Les équations (I.13.a-f) constituent le modèle dynamique du robot. C'est un système d'équations différentielles ordinaires du second ordre, couplées et non linéaires.

Remarque

Bien que la structure du modèle obtenu se prête à la synthèse des schémas de commande, sans simplification il est très difficile de l'utiliser pour effectuer la commande en temps réel car elle nécessite un temps de calcul très importants [4].

I.3.2 Modèle dynamique avec charge:

Dans la pratique lors d'exécution d'une tâche spécifique, le robot porte des charges avec son élément terminal, et ces charges peuvent varier d'un moment à l'autre. Pour analyser les effets, on doit les introduire dans les équations dynamiques.

Considérons une masse ponctuelle m portée par l'élément terminal, si on veut la déplacer avec une accélération \ddot{X} dans un plan où la force de gravitation intervient, on doit exercer sur l'élément terminal une force supplémentaire F_s :

$$F_s = m(\ddot{X} + g') \quad (I.14)$$

Comme physiquement, on ne peut appliquer directement cette force, on calcule la force généralisée équivalente τ_s [5] :

$$\tau_s(t) = J_c(q)^T F_s \quad (I.15)$$

Pour exprimer \ddot{X} en fonction des variables généralisées, on dérive l'équation (I.1) deux fois, on obtient:

$$\ddot{X}(t) = \dot{J}_c(q, \dot{q})\dot{q}(t) + J_c(q)\ddot{q} \quad (I.16)$$

où:

$$J_c = \frac{dJ_c}{dt}$$

En substituant (I.14) dans (I.15) et en tenant compte de (I.16), il résulte :

$$\tau_c(t) = m J_c^T(q) (J_c(q, \dot{q}) \dot{q} + J_c(q) \ddot{q} + g') \quad (I.17)$$

On introduit le couple supplémentaire dans le modèle de l'équation (I.13.a), on obtient:

$$\bar{M}(m, q) \ddot{q} + \bar{V}(m, q, \dot{q}) + \bar{G}(m, q) + H(\dot{q}) = \tau(t) \quad (I.18)$$

avec:

$$\begin{aligned} \bar{M}(m, q) &= M(q) + m J_c(q)^T J_c(q) \\ \bar{V}(m, q, \dot{q}) &= V(q, \dot{q}) + m J_c(q)^T J_c(q, \dot{q}) \dot{q} \\ \bar{G}(m, q) &= G(q) + m J_c(q)^T g' \end{aligned}$$

L'équation (I.18) constitue le modèle dynamique du robot avec charge.

I.3 TRAJECTOIRES DE REFERENCES

En exécutant des tâches le robot doit passer par un certain nombre de points, selon des trajectoires prédéfinies. Dans le choix de la trajectoire, il y'a plusieurs critères : des critères liés à l'énergie consommée, ou au temps d'exécution de la tâche (minimisation ou maximisation), d'autre sont choisis pour assurer une évolution continue et lisse de certaines grandeurs physiques (les efforts exigés...). Dans cette étude, on a choisit une famille de trajectoires qui assurent le dernier critère.

Dans cette famille, on trouve les fonctions cycloïdes [5]. Par définition une variable $q(t)$ qui change d'une position initiale q_I à une position final q_F dans un temps t_F est une fonction cycloïde si elle évolue selon la fonction suivante :

$$q(t) = \begin{cases} q_I + (q_F - q_I) \left(\frac{t}{t_F} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi t}{t_F}\right)}{2\pi} \right) & \text{si } t \leq t_F \\ q_F & \text{si } t > t_F \end{cases}$$

par dérivation, on obtient respectivement la vitesse et l'accélération:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \begin{cases} \frac{(q_F - q_I)}{t_F} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{t_F}\right) \right) & \text{si } t \leq t_F \\ 0 & \text{si } t > t_F \end{cases} \\ \ddot{q}(t) &= \begin{cases} 2\pi \frac{(q_F - q_I)}{t_F^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{t_F}\right) & \text{si } t \leq t_F \\ 0 & \text{si } t > t_F \end{cases} \end{aligned}$$

une variable cycloïde possède en plus un "jerck" ($\ddot{q}(t) = \frac{d^3}{dt^3}(q(t))$) lisse et continu, donc le couple demandé et sa dérivé sont continus [5].

I.4 Application au Robot 2R

Présentation du Robot :

Pour valider les deux algorithmes développés dans cette étude, on a choisi un robot à deux degrés de liberté en rotation, dans un plan vertical. Ces rotations sont définies par les deux angles q_1 et q_2 comme indique la figure (I.1).

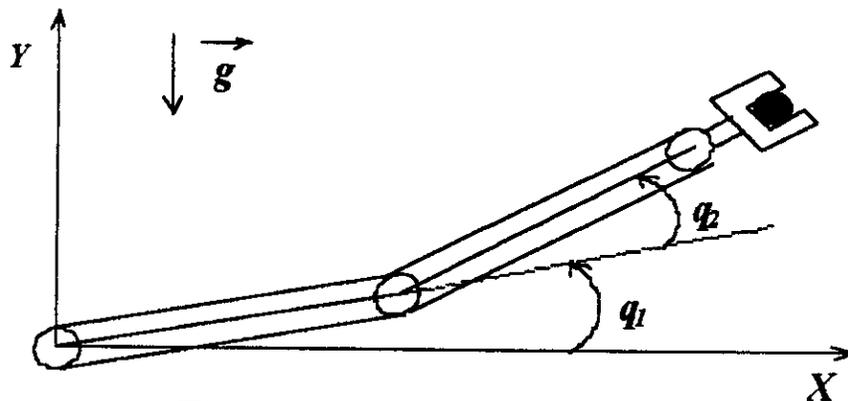


Figure I.1 Représentation du robot planaire 2R

Pour établir les différents modèles du robot, on considère les hypothèses simplificatrices suivantes [2]:

- 1- Les frottements sont linéaires par rapport aux vitesses généralisées.
- 2- Les différentes liaisons sont rigides.
- 3- Les actionneurs sont idéaux (la force généralisée est proportionnelle au signal de commande)
- 4- Les capteurs ont un gain unitaire, et de dynamiques négligeables.

Les repères de la transformation de Denavit-Hartenberg sont représentés par la figure (I.2).

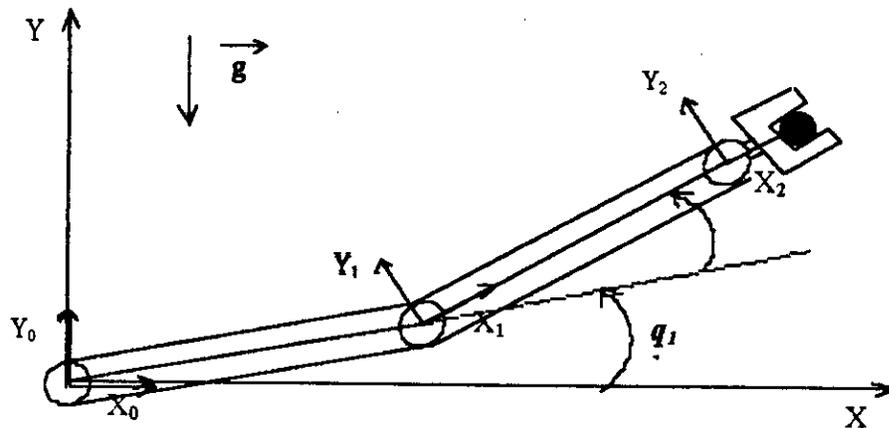


Figure I.2 Représentation des repères de la transformation de denavit-hartenberge

Les paramètres de la transformation de D-H sont :

$$- a_1 = l_1 = l \quad \theta_1 = q_1 \quad \alpha_1 = d_1 = 0$$

$$- a_2 = l_2 = l \quad \theta_2 = q_2 \quad \alpha_2 = d_2 = 0$$

Les matrices de passages de D-H deviennent:

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & lc_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & ls_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; T_1^2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & lc_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & ls_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; T_0^2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l(c_{12} + c_1) \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l(s_{12} + s_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} s_1 &= \sin(q_1) & c_1 &= \cos(q_1) \\ s_{12} &= \sin(q_1 + q_2) & c_{12} &= \cos(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

Si l'élément terminal (supposé de dimension négligeable par rapport aux bras) est fixé à l'extrémité de la deuxième liaison, son vecteur de position dans le repère R_2 est:

$$r_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

D'après l'équation (I.2.b) le modèle géométrique direct est:

$$x = f_1(q) = l(c_1 + c_{12}) \quad (I.19.a)$$

$$y = f_2(q) = l(s_1 + s_{12}) \quad (I.19.b)$$

$$z = f_3(q) = 0$$

Le modèle inverse s'obtient en effectuant le calcul suivant :

$$x^2 + y^2 = 2l^2(1 + c_2)$$

donc :

$$q_2 = \arctg\left(\frac{\sqrt{1 - A^2}}{A}\right) \quad (I.20.a)$$

avec :

$$A = \frac{x^2 + y^2}{2l^2} - 1$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} x &= l(1 + c_2)c_1 - l s_1 s_2 \\ y &= l(1 + c_2)s_1 + l c_1 s_2 \end{aligned}$$

alors :

$$\frac{y}{x} = \frac{\left(\frac{s_1}{c_1}\right) + \frac{s_2}{(1 + c_2)}}{1 - \frac{s_1 s_2}{c_1(1 + c_2)}}$$

en utilisant la relation :

$$\text{Arctg}(a) + \text{Arctg}(b) = \text{Arctg}\left(\frac{a + b}{1 - a \times b}\right)$$

avec :

$$a = \frac{s_1}{c_1} = \text{tg}(q_1) \quad \text{et} \quad b = \frac{s_2}{1 + c_2}$$

On obtient :

$$q_1 = \text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \text{Arctg}\left(\frac{s_2}{1 + c_2}\right) \quad (I.20.b)$$

Les équations (I.20.a,b) représentent le modèle géométrique inverse du robot.

Modèle cinématique direct, s'obtient par les relations (I.5.a,b) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = l \begin{bmatrix} -s_1 - s_{12} & -s_{12} \\ c_1 + c_{12} & c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Le modèle cinématique inverse est donné par la relation (I.5.c) :

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{ls_2} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} \\ -c_1 - c_{12} & -s_1 - s_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} ; q_2 \notin k\pi \text{ avec } k\pi \notin \underline{\mathbb{Z}}$$

Pour établir le modèle dynamique, on a besoin de calculer les matrices U_y et U_{y^*} pour cela nous utilisons les relations (I.7) et (I.12), On obtient :

$$Q_1 = Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad U_{11} = \begin{bmatrix} -s_1 & -c_1 & 0 & -ls_1 \\ -c_1 & -s_1 & 0 & lc_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{22} = T_0^1 Q_2 T_1^2 = \begin{bmatrix} -s_{12} & -c_{12} & 0 & -ls_{12} \\ c_{12} & -s_{12} & 0 & lc_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; U_{21} = Q_1 T_0^2 = \begin{bmatrix} -s_{12} & -c_{12} & 0 & -l(s_{12} - s_1) \\ c_{12} & -s_{12} & 0 & l(c_{12} + c_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{212} = U_{211} = Q_1 T_0^1 Q_2 T_1^2 = Q_1 U_{22} = \begin{bmatrix} -c_{12} & s_{12} & 0 & -lc_{12} \\ -s_{12} & -c_{12} & 0 & -ls_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$U_{222} = T_0^1 Q Q T_1^2 = U_{222} ; \quad U_{211} = \begin{bmatrix} -c_{12} & s_{12} & 0 & -l(c_{12} + c_1) \\ -s_{12} & -c_{12} & 0 & -l(s_{12} + s_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & \bar{x}_1 m_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{x}_1 m_1 & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} ; \quad J_2 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 & \bar{x}_2 m_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{x}_2 m_2 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

avec $g^{i^T} = [0 \ 0 \ -g_0]$ $r_i^T = [-\bar{x}_i \ 0 \ 0 \ 1]$. En utilisant les relations (I.13.a-f), on obtient le modèle suivant :

$$\begin{bmatrix} b_1 + b_2 \cos(q_2) & b_2 + \frac{b_2}{2} \cos(q_2) \\ b_2 + \frac{b_2}{2} \cos(q_2) & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} b_2 \dot{q}_1 \sin(q_2) - b_2 \dot{q}_1 \sin(q_2) \\ -\frac{1}{2} b_2 \dot{q}_1 \sin(q_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_4 \cos(q_1) + b_5 \cos(q_1 + q_2) \\ b_5 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 \dot{q}_1 + \zeta_1 \operatorname{sgn}(\dot{q}_1) \\ \mu_2 \dot{q}_2 + \zeta_2 \operatorname{sgn}(\dot{q}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} b_1 &= I_1 + I_2 + 2l(m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2) \\ b_2 &= 2m_2 l(\bar{x}_2 + l) \\ b_3 &= I_2 + m_2 l(2\bar{x}_2 + l) \\ b_4 &= g_0(m_1(\bar{x}_1 + l) + m_2 l) \\ b_5 &= g_0 m_2(\bar{x}_2 + l) \end{aligned}$$

où :

- I_i : moment d'inertie de l'articulation i par rapport au repère R_{i-1}
- \bar{x}_i : coordonné du centre de gravité de la liaison i selon l'axe X_{i-1} du repère R_{i-1} .
- K_i : gain de l'actionneur de l'articulation i .

Application numérique :

Les valeurs numérique choisis pour la simulation sont [5] :

- Les liaisons sont homogènes: $l_1 = l_2 = l = 0.432 \text{ m}$, et $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = -\frac{l}{2}$ donc

$$I_1 = 1/3 m_1 l^2, I_2 = 1/3 m_2 l^2;$$

d'autre part on a : $m_1 = 15.91 \text{ Kg}$ et $m_2 = 11.36 \text{ Kg}$.

$$- g_0 = 9.81 \text{ Kg.m/s}^2$$

- Les coefficients de frottements visqueuses : $\mu_1 = \mu_2 = 1 \text{ Nt.m/Rd.S}^{-1}$

- Les coefficients de frottements secs : $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.5 \text{ Nt.m}$

- La charge est de masse $m = 10 \text{ Kg}$

- $K_1 = 100$; $K_2 = 50$ Après calcul, on obtient :

$$b_1 = 3.81 \text{ Kg. m}^2 \quad ; \quad b_2 = 2.12 \text{ Kg. m}^2 \quad ; \quad b_3 = 0.71 \text{ Kg. m}^2 \quad ;$$

$$b_4 = 81.82 \text{ Kg. m}^2/\text{s}^2 \quad ; \quad b_5 = 24.06 \text{ Kg. m}^2/\text{s}^2$$

I.4 SIMULATION EN BOUCLE OUVERTE

Pour simuler le comportement dynamique du robot en boucle ouverte, on a résolu le système d'équations différentielles précédent par la méthode de Range-Kutta d'ordre 4, avec un pas de calcul $h = 1 \text{ ms}$ le vecteur d'état choisit est:

$$[\dot{q}_1(t) \quad q_1(t) \quad \dot{q}_2(t) \quad q_2(t)]$$

La figure (I.1) est obtenue suite à l'application d'un signal de commande $u = [0.2 \quad 0]^T$.

Les figures (I.2) et (I.3) sont obtenues en appliquant, respectivement, les échelons

$$u = [0 \quad 1]^T \text{ et } u = [0.2 \quad 1]^T.$$

Ces résultats montrent que le robot, en boucle ouverte est un système instable (la présence d'une action intégrale), de dynamique couplée et à déphasage minimal.

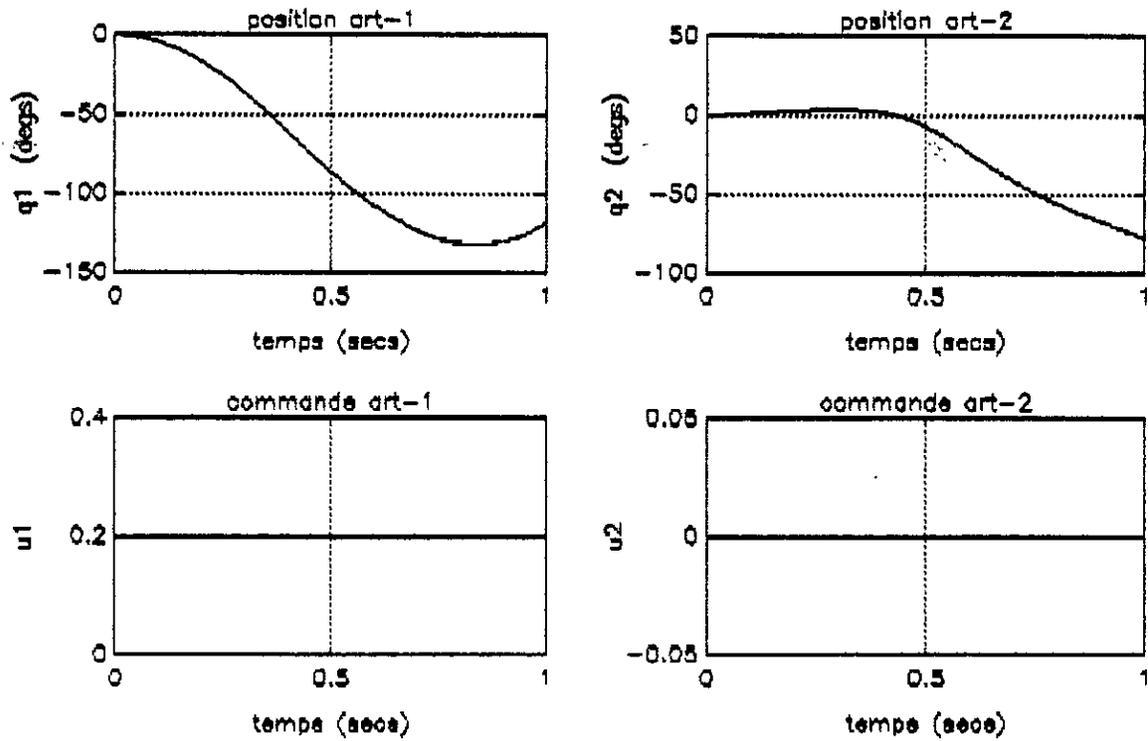


Figure (I.1): Réponse du système en boucle ouverte pour un signal de commande $u=[0.2 \ 0]^T$

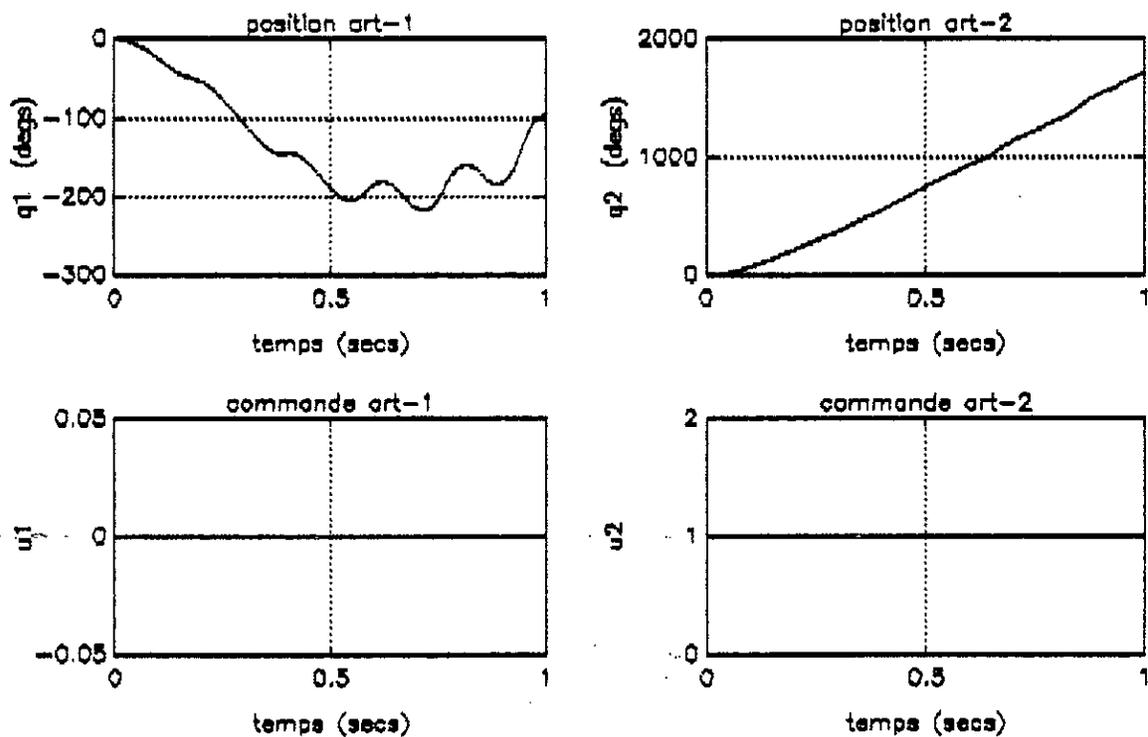


Figure (I.2): Réponse du système en boucle ouverte pour un signal de commande $u=[0 \ 1]^T$

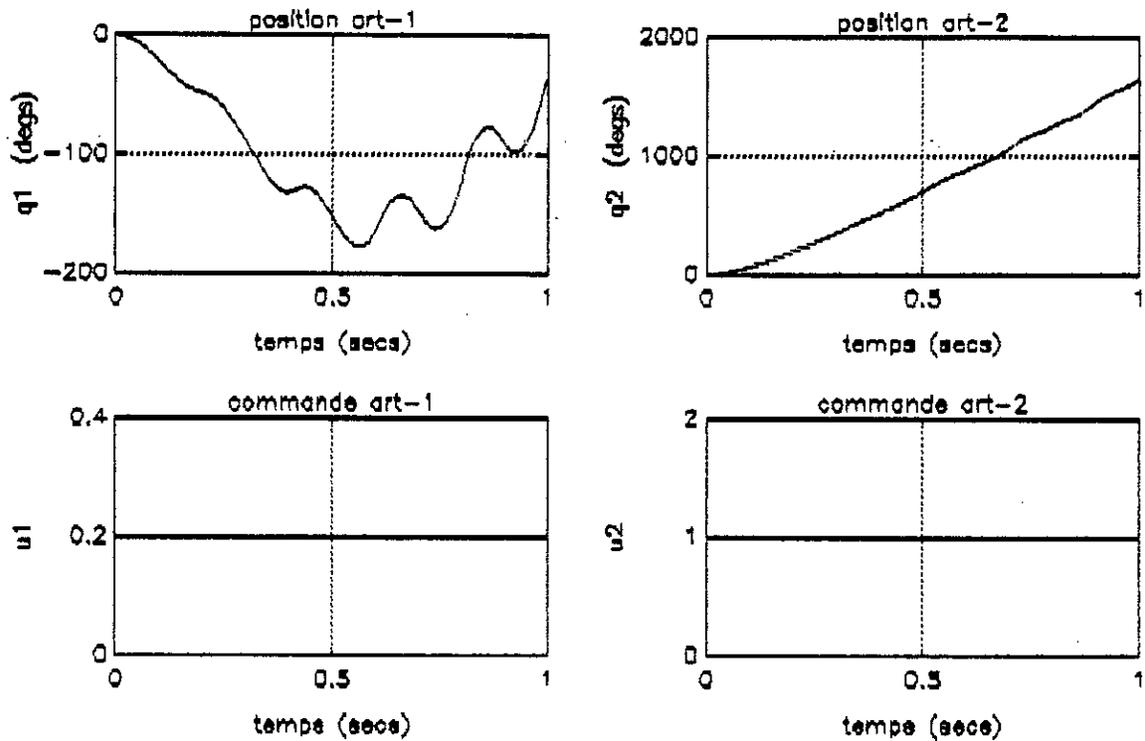


Figure (I.3): Réponse du système en boucle ouverte pour un signal de commande $u=[0.2 \ 1]^T$

Chapitre II

Hyperstabilite

principaux théorèmes et définitions

INTRODUCTION

Dans le champs des applications industrielles de la robotique le contrôle est une opération importante qui consiste à asservir les articulations des robots par une commande appropriée pour ramener l'effecteur à une position désirée. Comme le modèle du robot est très complexe, et fortement non-linéaire, Les chercheurs ont orienté leurs efforts pour le développement de nouvelles commandes, permettant aux robots d'effectuer les tâches.

La première catégorie, marquée par les travaux de *Paule, begezy et Markiewicz*, couvre les techniques de commandes basées sur la linéarisation au moyen d'un régulateur et par un retour non linéaire, ce dernier exige la connaissance complète du modèle dynamique et des valeurs des paramètres du modèle et de la charge.

La seconde catégorie couvre les commandes robustes et les méthodes basées sur la théorie de la commande adaptative, marquée par les travaux de *Dubosky et Desforges*. Cette catégorie a connue des recherches considérables assistées par des applications. Ces développements sont dus essentiellement que la commande adaptative est particulièrement souhaitable pour les robots manipulateurs où le modèle dynamique est très complexe est peut contenir des paramètres inconnus. Dans ce cas la tâche du contrôleur est l'ajustement des gains du régulateur pour que les performances définies par le concepteur soient maintenues [3].

Dans la première partie de ce chapitre on donne la définition de la commande adaptative directe et indirecte. Les principaux théorèmes l'hyperstabilité pour les systèmes continus, et les systèmes discrets sont introduites dans la seconde partie.

II.1 LA COMMANDE ADAPTATIVE

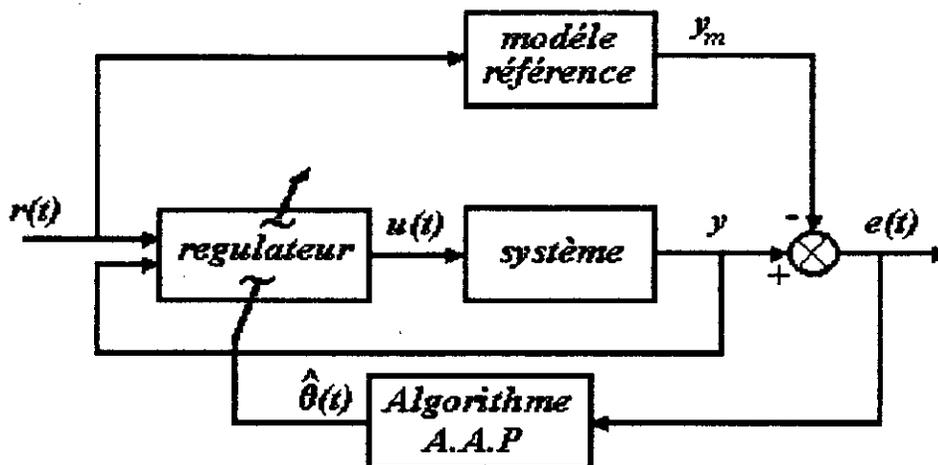
Parmi les différentes définitions données à la commande adaptative on retient celle de **LANDAU**[9]:

"La commande adaptative est un ensemble de techniques utilisées pour l'ajustement automatique en ligne et en temps réel des régulateurs de boucle de régulation afin de maintenir un certain niveau de performances quand les paramètres du procédé à commandé sont inconnus et/ou variants dans le temps".

II.1.1 COMMANDE ADAPTATIVE A MODELE DE REFERENCE

La commande adaptative à modèle de référence est une technique de commande qui devient très efficace et systématique pour la commande des systèmes à paramètres inconnus ou partiellement inconnus. Les performances de la commande sont spécifiées en terme de modèle de référence, un modèle de comportement désiré, qui reflète les performances désirées en boucle fermée (*B.F*).

Pour cela un mécanisme d'adaptation agit sur les paramètres d'un régulateur ajustable, permet de stabiliser le système en (*B.F*) et de maintenir ses performances dans le voisinage des performances désirées *figure*(II.1).



*Figure*II.1 Schéma de commande adaptative à modèle de référence.

Selon la façon dont l'adaptation agit, on distingue deux types de schémas adaptatives.

Le schéma direct : Ce schéma consiste à identifier les paramètres du modèle(ou à trouver un arrangement des paramètres) du processus et les utiliser pour le calcul de la commande.

Le schéma indirecte : Ce schéma conduit à l'estimation directe des paramètres de la loi de commande. La phase d'estimation des paramètres du procédé est ainsi éliminer.

En robotique, il est pratique de spécifier les performances désirées sous forme d'une trajectoire de référence, dans ce cas on distingue la classe des commandes adaptative à modèle de référence. Cette catégorie a comme objectif, l'élaboration d'une loi de commande permettant au robot la poursuites d'une trajectoire désirée.

Parmi les approches de la synthèse des algorithmes de commande, on cite : l'approche de Lyapounov, et l'approche de l'hyperstabilité. Seulement cette dernière sera présentée.

II.2 Approche d'hyperstabilité :

Pour résoudre le problème de la stabilité, et la poursuite d'un modèle de référence en utilisant la commande adaptative à modèle de référence, l'approche de l'hyperstabilité s'avère utile. Cette approche consiste à choisir la structure de la loi de commande, et à trouver une représentation adéquate du système en $(B.F)$ sous forme de deux blocs en contre réaction :

- Un bloc de système linéaire $(S.L)$, strictement réelle positif.
- Un bloc de système non linéaire $(S.N.L.V)$, vérifie une inégalité particulière dite inégalité de Popov.

Cette structure donne une grande souplesse dans le choix de mécanisme d'adaptation[9].

On présente dans le reste de cette section les principaux définitions et théorèmes utiles pour la synthèse des mécanismes d'adaptation dans les systèmes continus et discrets.

II.2.1 Cas des systèmes continus :

Soit le système SI , composé par la contre-réaction de deux systèmes :

- Un système linéaire invariant dans le temps $(S.L.I)$, décrit par les équations suivantes :
- Un système non-linéaire variant dans le temps $(S.N.V.L)$, décrit par les équations suivantes

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) - Bu(t) \\ v(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (II.1)$$

et vérifie l'inégalité de Popov définie par :

$$\int_{t_0}^{\infty} u^T(t)v(t)dt \geq -\gamma_0^2 \quad \text{avec } \gamma_0^2 < \infty \quad \forall t \geq t_0 \quad (II.2)$$

avec :

A, B, C, D : des matrices constantes de dimensions appropriées.

$u(t)$: vecteur d'entrée du *S.L.I* et de sortie du *S.N.L.V*

$v(t)$: vecteur d'entrée du *S.N.L.V* et de sortie du *S.L.I*

(A,B) , (A,C) : respectivement contrôlable et observable.

L : un fonctionnel non-linéaire.

Le système *SI* peut être représenté comme indique la *figure (II.1)*.

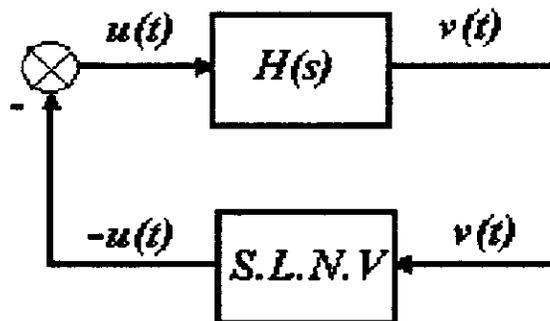


Figure (II.1) représentation en contre réaction du système continu en boucle fermée

Le système linéaire est caractérisé par une fonction de transfert donnée par :

$$H(s) = D + C(sI - A)^{-1}B \quad (II.3)$$

Théorème 1 (d'hyperstabilité) [9]

Toute solutions $x(x(t_0), t)$, du système *SI*, satisfait la propriété suivante

$$\forall t > 0, \exists \delta > 0, \gamma_0 < \infty: \quad \|x(t)\| \leq \delta \|x(t_0) + \gamma_0\| \quad (II.4)$$

si et seulement si la matrice de transfert $H(s)$ est réelle positive (R.P).

Théorème 2 (hyperstabilité asymptotique) [9]

Toute solutions du système $S1$, satisfait (II.4), de plus nous avons

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

pour toute entrée bornée qui vérifie :

$$\int_0^{\infty} u^T(t)u(t)dt < \infty \quad (II.5)$$

si et seulement si la matrice de transfert $H(s)$ est strictement réelle positive (S.R.P) ■

Definition 1

Une matrice de transfert $H(s)$ ($n \times n$) de fonctions réelles rationnelles est strictement réelle positive si :

- Tous les pôles des éléments de $H(s)$ sont dans le demi-plan gauche $Re[s] < 0$
- La matrice $H(j\omega) + H^T(j\omega)$ est hermitienne définie positive pour tous ω . ■

Definition 2 (Matrice hermitienne)

- Une matrice $H(s)$ de fonctions rationnelle de la variable complexe s est dite Hermitienne si

$$H(s) = H(s^*)$$

Où : s^* est le conjugué de s . ■

II.2.2 Cas des systèmes discrets

Soit le système $S2$ composé de la contre réaction de deux systèmes :

- Un système linéaire invariant dans le temps (S.L.I), décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) - Bu(k) \\ v(k) = Cx(k) + Dx(k) \end{cases} \quad (II.6)$$

- Un système non-linéaire variant dans le temps (S.N.L.V), décrit par l'équation suivante:

$$u(k) = L(v, k, k_0)$$

et vérifie l'inégalité de Popov définie par :

$$\sum_{k=k_0}^{k_1} u^T(k)v(k) \geq -\gamma_0^2 \tag{III.7}$$

avec :

A, B, C, D : des matrices constantes de dimensions appropriées.

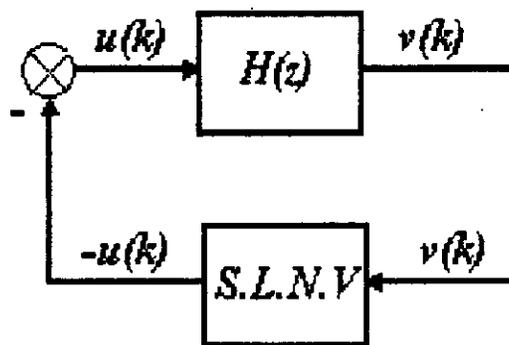
$u(k)$: vecteur d'entrée du *S.L.I* et de sortie du *S.N.L.V*

$v(k)$: vecteur d'entrée du *S.N.L.V* et de sortie du *S.L.I*

(A,B) , (A,C) : respectivement controlable et observable.

L :fonctionnel non-linéaire.

Le système $S2$ peut être représenté comme indique la *figure (II.2)*.



Figure(II.2) représentation en contre réaction du système discret en boucle fermée.

Le système $S2$ est caractérisé par une fonction de transfert discrète donnée par :

$$H(z) = D + C(zI - A)^{-1}B \tag{II.8}$$

Théorème 3 (d'hyperstabilité) [10]

Toute solutions $x(x(k_0), k)$, du système $S2$, satisfait la propriété suivante :

$$\forall k > 0, \exists \delta > 0, \gamma_1 < \infty \quad \|x(k)\| \leq \|x(k_0)\| + \gamma_1 \tag{II.9}$$

si et seulement si la matrice de transfert $H(z)$ est réelle positive. ■

Théorème 4 (hyperstabilité asymptotique) [9]

Toute solutions $x(x(k_0), k)$ du système $S2$, satisfait (II.9), de plus nous avons :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0$$

si et seulement si la matrice de transfert $H(z)$ est strictement réelle positive (S.R.P).

Théorème 5 [9]:

La matrice de transfert discrete $H(z)$ définie par l'équation (II.8) est S.R.P. si et seulement s'il existe des matrices R et Q symétriques définies positives et des matrices K et L tel que :

$$\begin{cases} A^T P A - P = -L^T L - Q \\ B^T P A + K^T L^T = C \\ K^T K = D + D^T - B^T P B \end{cases} \quad (III.10)$$

Pour utiliser les théorèmes d'hyperstabilité asymptotique dans les systèmes dynamiques, on propose une structure de la loi de commande, puis on représente les équations dynamiques du système en boucle fermée sous forme de deux blocs en contre-réaction. Le mécanisme d'adaptation est déterminé de telle manière que les conditions d'hyperstabilité soient vérifiées.

Introduction

Les techniques de commande non adaptatives développées dans la littérature qui se base sur une linéarisation locale ou sur le découplage, exigent la connaissance exacte du modèle du robot et de ces paramètres. La satisfaction de ces exigences étant difficile dans la pratique, dans cette situation les performances dynamiques du robot peuvent se dégradés et même conduire à l'instabilité du système en boucle fermée.

Dans ce chapitre on présente une loi de commande adaptative basée sur la passivité du système en boucle fermée. Un mécanisme d'adaptation basé sur l'approche de l'hyperstabilité, garantir la stabilité du système en boucle fermée, et assure la poursuite d'une trajectoire désirée en présence d'erreurs paramétriques.

Dans la première partie de ce chapitre on présente la loi de commande passive à paramètres connus. La loi de commande modifiée est présentée dans la deuxième partie. La version adaptative de la commande passive est introduite dans la troisième partie. La synthèse de l'algorithme d'adaptation paramétrique est exposée dans la quatrième partie. L'étude de la bornitude des signaux est effectuée dans la cinquième partie. Les résultats de la simulation sont interprétés dans la dernière partie. On terminera par une conclusion.

III.1 COMMANDE PASSIVE :

Dans le cas où les paramètres sont supposés connus la dynamique du robot est régie par un système d'équations différentielles sous la forme matricielle suivante [équation (I.13.a) :

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + H(\dot{q}) \quad (III.1)$$

Où $M, C, G, et H$ sont définies dans (I.13.b-f)

La commande passive cherche la positivité du système en boucle fermée, c'est une commande basée sur l'énergie du système. La stabilité est assurée si l'énergie consommée par le robot est dissipée, cela s'obtient par un choix approprié d'un couple $\tau(t)$ à appliquer, défini selon la forme suivante [8][10] :

$$\tau(t) = M_o(q)\ddot{q}_d + C_o(q, \dot{q})\dot{q}_d + G_o(q) + H_o(\dot{q}) - K_v \dot{e}_d - K_p e_d \quad (III.2)$$

Où :

$q_d, \dot{q}_d et \ddot{q}_d$: dénotent les trajectoires désirées en position, en vitesse et en accélération
 $e_d, \dot{e}_d et \ddot{e}_d$: désignent les erreurs de suivi des trajectoire en positions, en vitesses et en accélérations. Elles sont données par :

$$\begin{cases} e_d = q - q_d \\ \dot{e}_d = \dot{q} - \dot{q}_d \\ \ddot{e}_d = \ddot{q} - \ddot{q}_d \end{cases} \quad (III.3)$$

Avec $K_p et K_v$: des matrices ($n \times n$) définies positives diagonales.

Le terme $(-K_p e_d - K_v \dot{e}_d)$ réalise un compensateur linéaire, proportionnel dérivé (P.D) par un retour d'état sur l'erreur en position et en vitesse. Il permet de corriger la trajectoire réelle autour de la trajectoire désirée.

Le terme T_{ap} défini par :

$$T_{ap}(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) = M_o(q)\ddot{q}_d + C_o(q, \dot{q})\dot{q}_d + G_o(q) + H_o(\dot{q})$$

(III.4)

réalise une anticipation sur la dynamique du robot avec une compensation de l'effet des frottements visqueux et secs, et de l'action des forces de gravitation qui varient en fonction de la position angulaire du robot, pour assurer la poursuite désirée[11].

Dans le cas où le modèle est connu avec une précision suffisante , on a :

$$\begin{cases} M_o(q) = M(q) & ; C_o(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q}) \\ G_o(q) = G(q) & ; H_o(\dot{q}) = H(\dot{q}) \end{cases}$$

En substituant la loi de commande défini par (III.2) dans l'équation dynamique du robot, on obtient :

$$M(q) \ddot{e}_a + C(q, \dot{q}) \dot{e}_a = -K_p e_a - K_v \dot{e}_a \quad (III.5.a)$$

où :

$$K_p e_a + K_v \dot{e}_a = -(M(q) \ddot{e}_a + C(q, \dot{q}) \dot{e}_a) \quad (III.5.b)$$

L'équation (III.5.b) peut être schématisée comme l'indique la *figure(III.1)*, avec :

$$\tilde{\tau} = K_p e_a + K_v \dot{e}_a \quad (III.6)$$

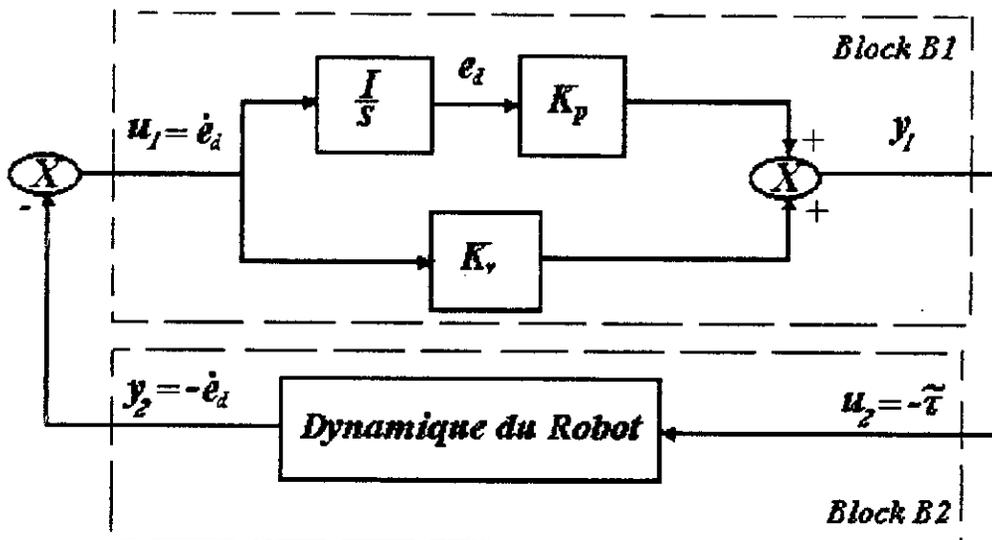


Figure III.1 Schéma de la représentation équivalente en contre-réaction de l'équation dynamique de l'erreur

La structure du système en boucle fermée [figure (III.1)] est formée par deux

systèmes mis en contre-réaction :

-Un système linéaire invariant dans le temps (S.L.I), dans la chaîne directe décrit par l'équation (III.6). (block B1)

-Un système non linéaire variant dans le temps (S.N.L.V), dans la chaîne de retour, décrit par l'équation suivante (Block B2) :

$$\tilde{\tau}(t) = -M(q)\ddot{e}_d - C(q, \dot{q})\dot{e}_d \quad (III.7)$$

Pour étudier la stabilité globale du système en boucle fermée, on fait appel à la théorie d'hyperstabilité, ou on doit montrer que l'inégalité de Popov suivante est vérifiée

$$I = \int_0^{\infty} y^T(t)u(t)dt \geq -\gamma^2 \quad (III.8)$$

Où : $\gamma^2 < \infty \quad \forall t \geq 0$, avec :

$$\begin{cases} u(t) = u_1(t) + y_2(t) \\ y(t) = u_2(t) = y_1(t) \end{cases}$$

-Le bloc non linéaire décrit par l'équation dynamique du robot (block B2), est un système positif qui satisfait l'inégalité :

$$I = \int_0^{\infty} \dot{e}_d^T(t)\tilde{\tau}(t)dt \geq -\frac{1}{2}\dot{e}_d^T(o)M(q(o))\dot{e}_d(o) \quad (III.9)$$

Si on pose : $\gamma_o^2 = -\frac{1}{2}\dot{e}_d^T(o)M(q(o))\dot{e}_d(o)$

on démontre dans 'l'Annexe B' l'inégalité suivante :

$$I = \int_0^{\infty} \dot{e}_d^T(t)\tilde{\tau}(t)dt \geq -\gamma_o^2 \quad (III.10)$$

D'après la définition donnée dans le chapitre (II), il est facile de vérifier que la matrice de transfert $H(s)$ du S.L.I donnée par :

$$H(s) = K_v + \frac{K_p}{s} \quad (III.11)$$

est réelle positive (R.P), Où s est l'opérateur de Laplace.

Ceci nous assure la stabilité du système en boucle fermée au regard de la structure de la figure (III.1), le système dissipe son énergie en fonction de la vitesse et par conséquent l'erreur en vitesse $\dot{e}_d(t)$ sera nulle lorsque l'équilibre est atteint, mais l'erreur en position e_d

(t) ne le sera pas forcément. D’après le théorème de l’hyperstabilité (*chapitre II*), l’état e_a (t) du (S.L.I) sera borné, donc :

$$\|e_a(t)\| \leq \delta \|e_a(0) + \gamma_0\| \quad (III.12)$$

Où : $\delta > 0$.

Le Principal objectif de ce système est l’asservissement en vitesse. En assurant une erreur en vitesse nulle. Si le manipulateur ne se trouve pas à la position désirée, il ne peut réduire l’erreur en position sans un supplément de vitesse relativement à la vitesse désirée qui permet de rattraper la position désirée[8]. Pour avoir :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_a(t) = 0 \quad (III.13)$$

il sera nécessaire de modifier la loi de commande.

III.2 Commande passive modifiée

Pour assurer une stabilité asymptotique globale du système en boucle fermée, une redéfinition de la loi de commande s’avère nécessaire, ceci nous amène à définir une trajectoire de référence en vitesse $\dot{q}_r(t)$. En tenant compte de la discussion précédente la référence en vitesse doit être en fonction de la vitesse désirée et de l’écart à la position désirée, soit [8][10]

$$\dot{q}_r(t) = \dot{q}_d(t) - \Lambda e_a(t) \quad (III.14)$$

Où : $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$, $\lambda_i > 0$.

Ainsi, la poursuite en vitesse sera assurée une fois que l’erreur en position sera nulle.

L’accélération désirée devient alors :

$$\ddot{q}_r(t) = \ddot{q}_d(t) - \Lambda \dot{e}_a(t) \quad (III.15)$$

Avec:

$$u(t) = \ddot{q}_r(t) \quad (III.16)$$

l’erreur en vitesse relative à la nouvelle référence de vitesse devient :

$$\dot{e}_r(t) = \dot{e}_a(t) + \Lambda e_a(t) \quad (III.17)$$

D’où on passant dans le plan de Laplace :

$$\dot{e}_r(s) = (sI + \Lambda)^{-1} e_s(s) \quad (III.18)$$

la matrice Λ est choisie de sorte que la matrice de transfert du nouveau (S.L.I) :

$$H(s) = K_v + K_p(sI + \Lambda)^{-1} \quad (III.19)$$

soit strictement réelle positive [10]. Dans ce cas l'expression de la loi de commande devient :

$$\tau(t) = M(q)u + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + G(q) + H(\dot{q}) - K_v \dot{e}_r - K_p e_s \quad (III.20)$$

En substituant l'équation (III.1) dans l'expression de $\tau(t)$, et en utilisant l'équation (III.17), on obtient l'équation dynamique de l'erreur en boucle fermée, illustrée par la *figure (III.2)* [10].

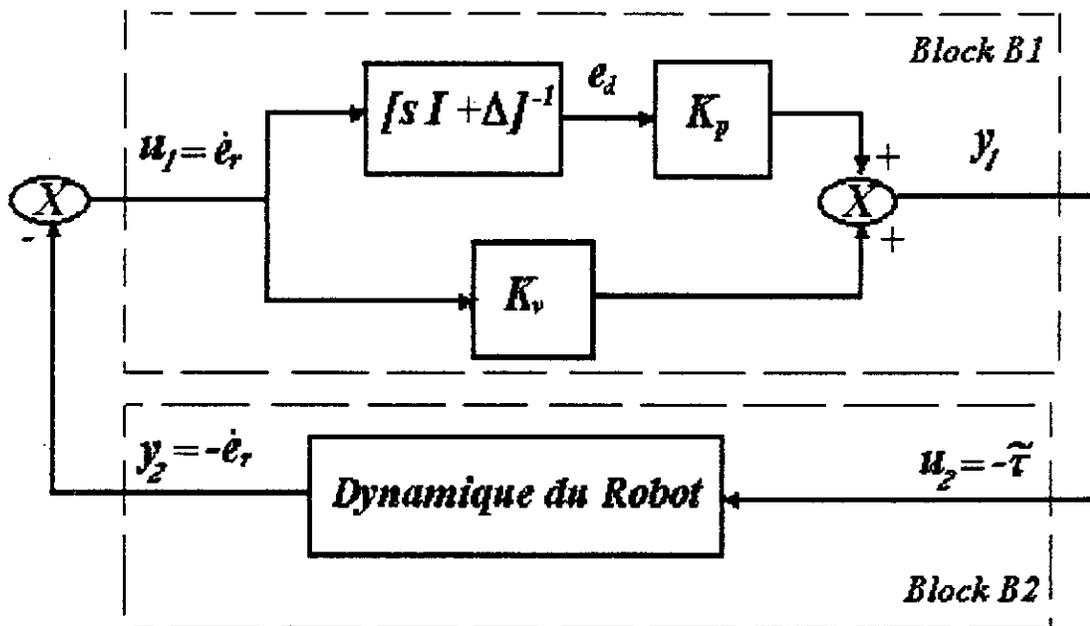


Figure III.2 Schéma de la représentation équivalente en contre-réaction de l'équation dynamique de l'erreur

Ce qui montre bien que l'erreur en position tend également vers zéro, si Λ est une matrice défini positive. Dans ce cas la nouvelle structure de la commande, nous garantie la stabilité globale asymptotique du système en boucle fermée. L'architecture d'une telle loi est illustrée par la *figure (III.3)* [8].

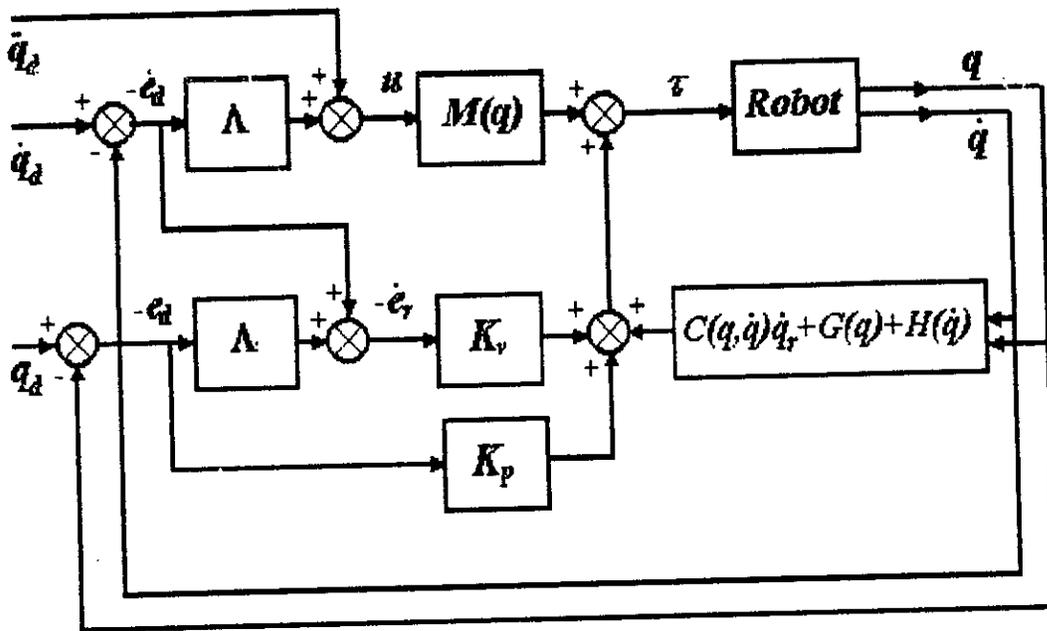


Figure III.3 Architecture de la commande passive à paramètres connus

Algorithme de commande :

Dans le cas où les paramètres dynamiques du robot sont connus, l'algorithme de la commande passive est :

- **Données** : modèle du robot M, C, G, H
Choix de K_p, K_v et Λ
- **Etape 1** : génération des trajectoires q_d, \dot{q}_d et \ddot{q}_d .
- **Etape 2** : Calcul de l'erreur en position et en vitesse (Eq.III-3).
- **Etape 3** : Calculs des trajectoires de références et de l'erreur de référence en vitesse (Eq III.14, 15 et 17)
- **Etape 4** : Calcul de la commande $\tau(t)$ (Eq III.20)
- $t = t + 1$, revenir à l'étape 1.

III.3 Commande passive adaptative :

Lorsque l'information qu'on dispose sur les paramètres du robot, est insuffisante (les termes d'inertie, forces de centrifuges de coriolis, de gravitation et de frottements), sont mal

connus à cause de la difficulté de calcul. En plus on a négligé les termes relatifs à la dynamique de l'actionneur, l'élasticité et la variation de la charge, une version adaptative de la loi de commande donnée par l'équation (III.20), est alors nécessaire. On utilise dans ce cas le modèle estimé. La loi de commande proposée[10] :

$$\tau(t) = \hat{M}(q)u + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{G}(q) + \hat{H}(\dot{q}) - K_v \dot{e}_r - K_p e_s \quad (III.21)$$

Où : $\hat{M}, \hat{C}, \hat{G}$ et \hat{H} sont respectivement les estimations de M, C, G et H .
En substituant l'équation (III.21) dans l'équation (III.1), on obtient :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + H(\dot{q}) = \hat{M}(q)u + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{G}(q) + \hat{H}(\dot{q}) - K_v \dot{e}_r - K_p e_s \quad (III.22)$$

En ajoutant et en retranchant le terme :

$$M(q)u + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + G(q) + H(\dot{q}) \quad (III.23)$$

du terme de droite de l'équation (III.22), on obtient :

$$M(q)\ddot{e}_r + C(q, \dot{q})\dot{e}_r = (\tilde{M}(q)u + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \tilde{G}(q) + \tilde{H}(\dot{q})) - K_v \dot{e}_r - K_p e_s \quad (III.24)$$

Où :

$$\begin{cases} \tilde{M}(q) = \hat{M}(q) - M(q) \\ \tilde{C}(q, \dot{q}) = \hat{C}(q, \dot{q}) - C(q, \dot{q}) \\ \tilde{G}(q) = \hat{G}(q) - G(q) \\ \tilde{H}(\dot{q}) = \hat{H}(\dot{q}) - H(\dot{q}) \end{cases}$$

Pour l'élaboration de l'algorithme d'adaptation une réparamétrisation du modèle du robot s'avère nécessaire. Pour cela on réécrit ce dernier défini par l'équation (III.1), sous la forme suivante [8][10][11] :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + H(\dot{q}) = W(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta \quad (III.25)$$

Où :

$W(q, \dot{q}, \ddot{q})$: matrice ($n \times m$) d'observation [1], ou de régression [8], elle dépend de la géométrie du robot (indépendante des paramètres dynamiques), connue a priori.

θ : vecteur ($m \times 1$) de paramètres fonctions des propriétés d'inertie du robot et de la charge et des coefficients de frottements.

Avec cette nouvelle paramétrisation, le terme non-linéaire de loi de commande défini par l'équation (III.20), s'écrit alors sous la forme suivante [10] :

$$M(q)u + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + G(q) + H(\dot{q}) = W(q, \dot{q}, \dot{q}_r, u)\theta \quad (III.26)$$

Dans le cas où l'on utilise le modèle estimé du robot, l'équation (III.21) devient :

$$\hat{M}(q)u + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{G}(q) + \hat{H}(\dot{q}) = W(q, \dot{q}, \dot{q}_r, u)\hat{\theta}(t) \quad (III.27)$$

Où : $\hat{\theta}(t)$ est l'estime du vecteur paramètre θ .

En comparant les équations (III.27) et (III.26), on trouve :

$$\tilde{M}(q)u + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \tilde{G}(q) + \tilde{H}(\dot{q}) = W(q, \dot{q}, \dot{q}_r, u)\tilde{\theta}(t) \quad (III.28)$$

Où : $\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta$:

L'équation dynamique de l'erreur en boucle fermée devient alors :

$$M(q)\ddot{e}_r + C(q, \dot{q})\dot{e}_r = W(q, \dot{q}, \dot{q}_r, u)\tilde{\theta}(t) - K_v\dot{e}_r - K_p e_r \quad (III.29)$$

La structure de l'équation (III.29) est illustrée par le schéma de la figure (III.4), où $f(\cdot)$, est une fonction à définir.

III.3.1. Synthèse de l'algorithme d'adaptation paramétrique :

L'algorithme d'adaptation calcule l'évolution des estimations, par l'ajustement en ligne du vecteur paramètres $\hat{\theta}(t)$, en utilisant le signal d'erreurs de références, en vitesse $\dot{e}_r(t)$ et de la matrice d'observation $W(q, \dot{q}, \dot{q}_r, u)$ [10]. Ainsi on peut écrire :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\theta}}(t) = f(\dot{e}_r, W(q, \dot{q}, \dot{q}_r, u), t, v) & ; t \leq v \\ \dot{\tilde{\theta}}(t) = 0 & \text{si } \dot{e}_r(t) = 0 \end{cases} \quad (III.30)$$

Donc, le but est de trouver un fonctionnel $f(\cdot)$ qui permet de définir la loi d'adaptation paramétrique (A.A.P), en assurant la stabilité globale asymptotique du système en boucle fermée. Pour cela on réécrit l'équation (III.29) sous la forme suivante :

$$K_v \dot{e}_r + K_p e_r = -(M(q)\ddot{e}_r - C(q, \dot{q})\dot{e}_r - W(q, \dot{q}, \dot{q}_r, u)\tilde{\theta}(t)) \quad (III.31)$$

La représentation en contre-réaction de cette équation est illustrée par la *figure (III.4)*

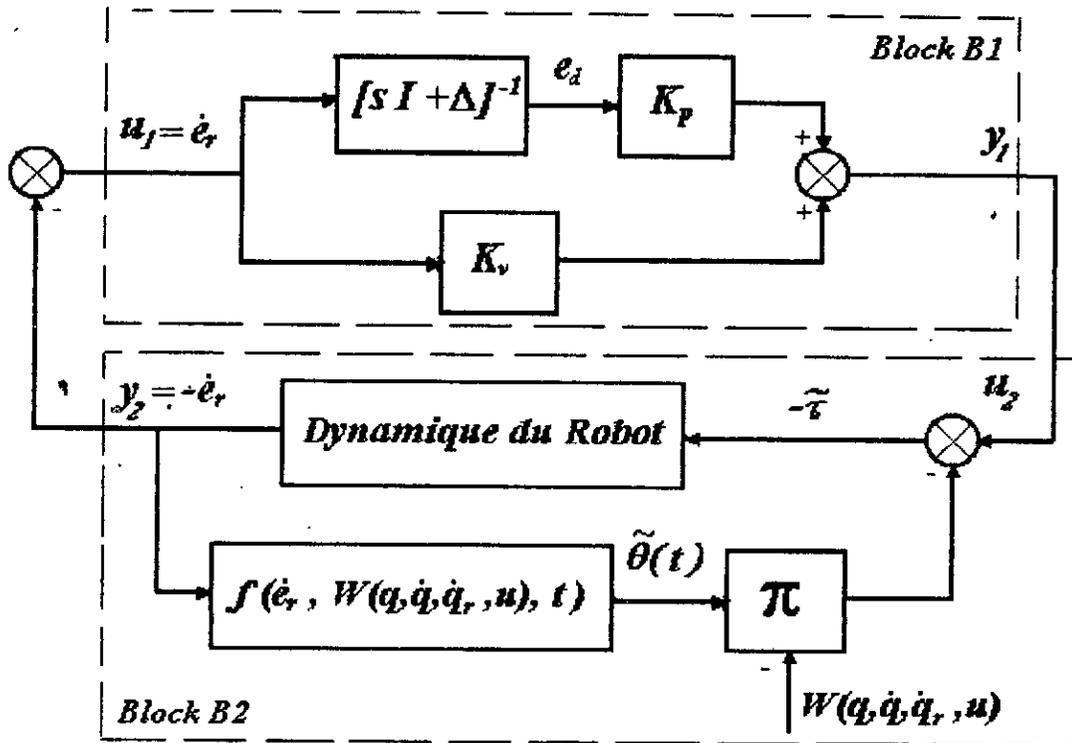


Figure III.4 Schéma de la représentation équivalente en contre-réaction de l'équation de l'erreur

La structure de la *figure (III.4)*, est constituée d'un bloc linéaire dans la chaîne directe (*bloc.B1*), et d'un retour non linéaire (*bloc.B2*). Ce dernier est formé de la connexion en contre-réaction de deux blocs non linéaires : la dynamique du robot d'une part et l'A.A.P d'autre part. Pour montrer la stabilité asymptotique d'une telle structure, on utilise le théorème de l'hyperstabilité asymptotique [10] :

- La chaîne directe (*block B1*) est strictement réelle positive (S.P.R), par construction suivant le choix de Λ .

- La chaîne de contre-réaction (*block B2*), doit vérifier l'inégalité de Popov suivante [10] :

$$\int_0^t y_2^T(t) u_2(t) dt \geq -\gamma_1^2$$

(III.32)

$$\gamma_1^2 < \infty \quad \forall t \geq 0.$$

La dynamique du robot étant un système positif, comme la connexion en contre- réaction de deux systèmes positifs (ou vérifiant l'inégalité de Popov) est un système positif (ou verifie l'inégalité de Popov), donc il sera suffisant de concevoir une fonction $f(\cdot)$ telle que la chaîne d'adaptation, qui possède comme entrée $-\dot{e}_r(t)$ et comme sortie $W(q, \dot{q}, \ddot{q}, u)\hat{\theta}(t)$, satisfait l'inégalité suivante [10] :

$$\int_0^t -\dot{e}_r^T(v) W(q, \dot{q}, \ddot{q}, u) \tilde{\theta}(v) dv \geq -\gamma_2^2 \tag{III.33}$$

Où : $\gamma_2^2 < \infty \quad \forall t \geq 0$.

Pour satisfaire l'inégalité ci-dessus, Landau [9] propose une loi d'adaptation de type proportionnel + Intégrale (P.I) définie par :

$$\hat{\theta}(t) = -\int_0^t F_i(t-v) W^T(q, \dot{q}, \ddot{q}, u) \dot{e}_r(v) dv - F_p W^T(q, \dot{q}, \ddot{q}, u) \dot{e}_r(t) + \hat{\theta}(0) \tag{III.34}$$

Avec : F_p ($m \times m$) une matrice semi-définie positive.

F_i ($m \times m$) un noyau définit positif, dont le transformé de Laplace est une matrice de transfert réelle positive [9]10]. Une solution particulière correspond à des gains d'adaptations constants

$$F_i(t-v) = F_i, \quad F_i > 0$$

(III.35)

Avec ce choix, on démontre dans l'Annexe C que l'inégalité (III.33) est vérifiée. Donc en utilisant cette approche, la satisfaction de l'inégalité(III.33) de la chaîne d'adaptation permet la synthèse de nouveaux algorithmes d'A.A.P, qui peuvent être applicables sur les robots manipulateurs.

III.3. Bornitude des signaux :

Afin que le système en $B.F$ soit asymptotiquement stable, il reste à vérifier que les signaux q, \dot{q}, \ddot{q} , et \ddot{q} , et $W(q, \dot{q}, \ddot{q}, u)$ (qui interviennent dans le block B2), sont bornés.

Dans ce cas nous aurons :

$$\begin{cases} \text{Lim}_{t \rightarrow \infty} e_s(t) = 0 \\ \text{Lim}_{t \rightarrow \infty} \dot{e}_s(t) = 0 \end{cases}$$

Considérons la fonction candidate suivante :

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2} \dot{e}_s^T M(q) \dot{e}_s + \sigma_0^2 + \int_0^1 -\dot{e}_s^T (W \tilde{\theta}) d\nu + \sigma_1^2 + \int_0^1 \dot{e}_s^T (K_v \dot{e}_s + K_p e_s) d\nu \quad (\text{III-36})$$

avec $\sigma_1^2 < \infty$; $\sigma_0^2 < \infty \quad \forall t \geq 0$

De l'équation (III.34) [Annexe C], on a :

$$\int_0^1 -\dot{e}_s^T(\nu) (W(q, \dot{q}, \ddot{q}, u) \tilde{\theta}(\nu)) d\nu = \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T(t) F_i^{-T} \tilde{\theta}(t) - \sigma_0^2$$

(III.37)

De la S.P.R du bloc linéaire, on peut écrire [Chapitre.II] :

$$\int_0^1 \dot{e}_s^T(\nu) K_p e_s(\nu) d\nu \geq \frac{1}{2} e_s^T P e_s - \sigma_1^2 \quad (\text{III.38})$$

Avec $\sigma_1^2 = \frac{1}{2} e_s^T(0) P e_s(0)$

P : matrice ($n \times n$)

Comme la matrice K_p est définie positive alors :

$$\int_0^1 \dot{e}_s^T(\nu) K_p \dot{e}_s(\nu) d\nu \geq 0 \quad (\text{III.39})$$

De l'équation (III.39), on peut écrire :

$$\Gamma(t) \geq \frac{1}{2} \dot{e}_s^T(t) M(q) \dot{e}_s(t) + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T(t) F_i^{-T} \tilde{\theta}(t) + \frac{1}{2} e_s^T(t) P e_s(t) \quad (\text{III.40})$$

En dérivant la fonction $\Gamma(t)$ par rapport au temps on obtient :

$$\dot{\Gamma}(t) = \dot{e}_s^T M(q) \ddot{e}_s + \frac{1}{2} \dot{e}_s^T \dot{M}(q) \dot{e}_s - \dot{e}_s^T W \tilde{\theta} + \dot{e}_s^T K_v \dot{e}_s + \dot{e}_s^T K_p e_s \quad (\text{III.41})$$

D'autre part, de l'équation de l'erreur en boucle fermée (III.31), on peut écrire :

$$M(q) \ddot{e}_s = -K_v \dot{e}_s - K_p e_s - C(q, \dot{q}) \dot{e}_s - W(q, \dot{q}, \ddot{q}, u) \tilde{\theta}(t) \quad (\text{III.42})$$

En substituant l'équation (III.42) dans (III.41), on obtient :

$$\dot{\Gamma}(t) = \dot{e}_r^T(t) \left(\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right) \dot{e}_r(t) \quad (III.43)$$

D'après la propriété d'antisymétrie [Annexe B], on obtient :

$$\Gamma(t) = C^{st} \quad (III.43)$$

Le membre de droite de l'inéquation (III.40) est majoré supérieurement par la fonction $\Gamma(t)$. Donc les signaux définis par ce membre, à savoir $e_s(t)$, $\dot{e}_r(t)$ et $\tilde{\theta}(t)$ sont bornés. On conclue alors que le système en boucle fermée est asymptotiquement stable.

III.33 Structure de l'algorithme de la commande passive adaptative

La structure de l'algorithme de la commande passive adaptative (C.P.A) est illustrée sur le schéma de la *fig(III.5)*.

Algorithme de commande :

Données : modèle du robot M, C, G, H .

Choix de $K_p, K_v, \Lambda, F_t, F_p$

- **Etape 1** : génération des trajectoires désirées q_d, \dot{q}_d et \ddot{q}_d
- **Etape 2** : Calcul de l'erreur en position et en vitesse (*Equation(III.3)*).
- **Etape 3** : Calcul des trajectoires de référence et de l'erreur de référence en vitesse, (*Equations III.14,15,17*).
- **Etape 4** : Estimation des paramètres à partir de l'équation (III.24).
- **Etape 5** : Calcul de la commande $\tau(t)$, *Equation (III.21)*.
- $t = t + 1$, revenir à l'étape 1.

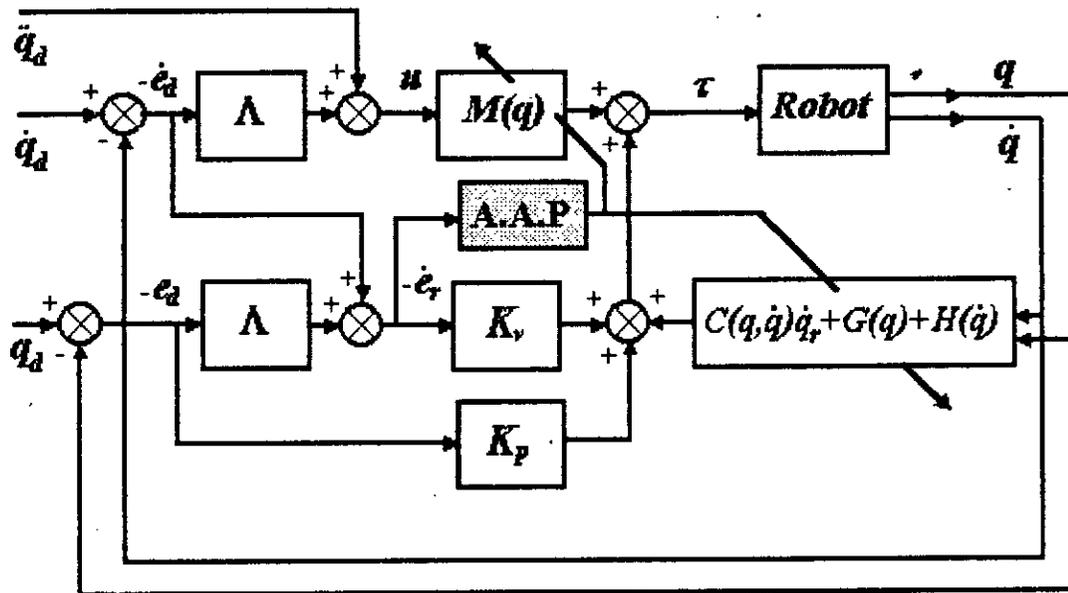


Figure III.5 Architecture de la commande passive adaptative

III.4.COMMANDE PASSIVE DANS L'ESPACE CARTESIEN

Les méthodes utilisées dans les parties précédentes seront étendues dans l'espace cartésien, pour la commande du mouvement de l'organe terminale.

La difficulté de synthèse de la commande provient du fait que ces actionneurs n'agissent pas directement dans l'espace cartésien. Pour pallier à cette difficulté, on doit transformer la synthèse de la loi de commande. Elle est établie en utilisant les expressions du modèle géométrique et cinématique développées dans le *chapitre (I)*, en établit ainsi directement q_s, \dot{q}_s et \ddot{q}_s à partir de X_s, \dot{X}_s et \ddot{X}_s .

$$\begin{cases} q_s(t) = F^{-1}(X_s(t)) \\ \dot{q}_s(t) = J_c^{-1}(q_s)\dot{X}_s(t) \\ \ddot{q}_s(t) = J_c^{-1}(q_s)(\ddot{X}_s(t) - \dot{J}_c(q_s, \dot{q}_s)\dot{q}_s(t)) \end{cases} \quad (III.45)$$

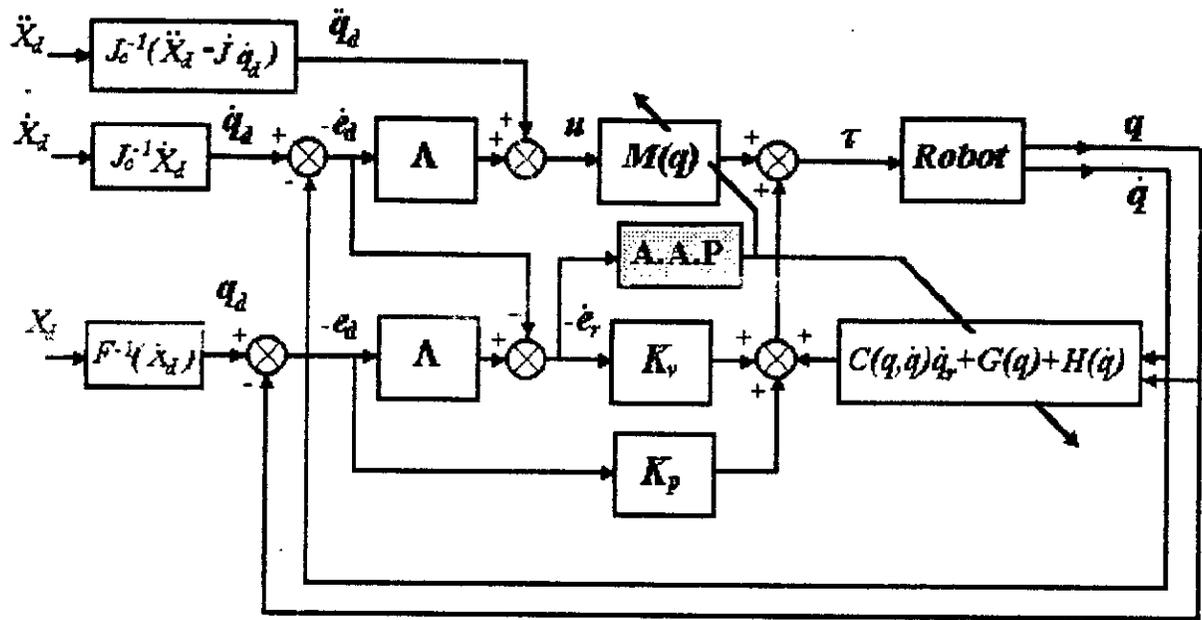


Figure III.6 Architecture de la commande passive adaptative dans l'espace cartésien.

Dans ce cas l'algorithme de commande est donné par :

Algorithme de commande :

- **Données** : Modèle du robot M , C , G , H .

Choix de K_v , K_p , Λ , F_i et F_p

- **Etape 1** : Génération des trajectoires désirées : X_d , \dot{X}_d et \ddot{X}_d .
- **Etape 2** : Calcul des trajectoires généralisées désirées q_d , \dot{q}_d et \ddot{q}_d
(Equation (III.41)).
- **Etape 3** : Calcul de l'erreur en position et en vitesse. (Equation III.3)
- **Etape 4** : Calcul des trajectoires de références et de l'erreur de référence en vitesse
(Equations III.14, 15 et 17)
- **Etape 5** : Estimation des paramètres à partir de l'équation (III.34)
- **Etape 6** : Calcul de la commande $\tau(t)$ (Equation III.21).
- $t=t+1$: revenir à l'étape 1.

III.4 Simulation et interprétation :

On applique l'algorithme de la commande passive sur le robot présenté dans le chapitre modélisation. Le pas de simulation est de $h = 1 \text{ ms}$, et la période d'échantillonnage est choisi

$T_e = 2 \text{ ms}$. La trajectoire est une fonction Cycloïde (*chapitre I*), avec :

$$q_N = [0^\circ \quad 0^\circ]^T ; \quad q_F = [45^\circ \quad -90^\circ]^T$$

Où le terme de paramétrisation de la loi de commande $\tau = W(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{q}_r) \theta$:

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} & w_{15} & w_{16} & 0 & w_{18} & 0 \\ 0 & w_{22} & w_{23} & 0 & w_{25} & 0 & w_{27} & 0 & w_{29} \end{bmatrix}$$

$$\theta = [b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5 \quad \mu_1 \quad \mu_2 \quad \zeta_1 \quad \zeta_2]^T$$

est défini comme suivant :

$$\begin{cases} w_{11} = \ddot{q}_{r1} ; w_{13} = \ddot{q}_{r2} ; w_{23} = \ddot{q}_{r1} + \ddot{q}_{r2} ; \\ w_{14} = 9.81 \cos(q_1) ; w_{15} = w_{25} = 9.81 \cos(q_1 + q_2) ; \\ w_{16} = \dot{q}_1 ; w_{27} = \dot{q}_2 ; w_{18} = 1. \text{sign}(\dot{q}_1) ; w_{29} = 1. \text{sign}(\dot{q}_2) ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{12} = (\ddot{q}_{r1} + 5\ddot{q}_{r2}) \cos(q_2) - (\ddot{q}_{r1} + 5\ddot{q}_{r2}) \dot{q}_2 \sin(q_2) \\ w_{22} = 5\ddot{q}_{r1} \cos(q_2) + 5\dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2) \end{cases}$$

-Résultats de la simulation :

Pour évaluer les performances de la commande passive, nous avons simulé dans un premier temps le modèle du robot sous la commande passive à paramètres connus. Avec un choix particulier du compensateur (*P.D*) définie de la forme suivante :

$$K(t) = \beta M(q)$$

Où : $\beta > 0$.

Avec le choix de $A = \beta I$, la loi de commande dans ce cas devient :

$$\tau(t) = M(q)(\ddot{q}_d - 2\beta \dot{e}_d - \beta^2 e_d) + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + G(q) + H(\dot{q})$$

D'après les résultats de simulation illustrés par la *figure (III.6)*, la poursuite des trajectoires référence $q_{d1}(t)$ et $q_{d2}(t)$, est parfaite, où l'erreur en position est inférieure à $[0.04 \ -0.05]$ (.04 pour la 1^{ère} articulation et -.05 pour la 2^{ème}) qui s'annule en régime permanent avec un signal de commande très lisse.

En présence d'erreurs de modélisation, l'utilisation de la commande passive adaptative s'avère nécessaire pour l'ajustement des paramètres supposés mal connus. Pour la simulation de l'application de cette commande sur le modèle du robot, on a choisi les pondérations suivantes:

$$K_p = \text{diag}(k_{p1} \ k_{p2}); \quad K_v = \text{diag}(k_{v1} \ k_{v2}).$$

$$k_{pi} = 100; \quad k_{vi} = 10; \quad \lambda_i = 20, \quad i=1..2$$

$$\hat{\theta}(0) = 0.6 \times \theta.$$

qui reste fixe durant toutes les simulations. avec :

$$F_{ii} = f_i; \quad F_{pi} = f_p, \quad i=1..9$$

$$f_i = 10; \quad f_p = 0.1$$

Les résultats de la simulation sont illustrés sur les *figures (III.7)*. On remarque la bonne poursuite des positions articulaires $q_1(t)$ et $q_2(t)$ suivant les trajectoires désirées $q_{d1}(t)$ et $q_{d2}(t)$, l'erreur en position étant inférieure à $[1^\circ \ 0.7^\circ]$, les commandes sont lisses, mais présentent un pic de l'ordre de 80% de la commande en régime permanent, avec un régime transitoire très rapide au début pour l'ajustement des paramètres. L'évolution de ces derniers est consignée sur la *figures(III.8)*.

Pour tester la robustesse de la commande passive vis-à-vis du changement de trajectoire avec les mêmes pondérations, on prend :

$$q_N = [90^\circ \ 0^\circ]^T; \quad q_F = [0^\circ \ 90^\circ]^T$$

On obtient les résultats consignés sur la *figure (III.9)*. Ces courbes illustrent la bonne poursuite de la nouvelle trajectoire où l'erreur est inférieure à $[0.8^\circ \ 0.5^\circ]$ qui s'annule au régime permanent avec un signal de commande lisse.

Performance sous une variation de la charge :

Pour tester l'adaptabilité du robot avec la commande passive adaptative, on introduit une charge de masse $m=10\text{ kg}$, à l'instant 1 s , avec les mêmes pondérations que précédemment. La

figure(III.10) illustre les résultats de simulation. On remarque un bon suivi de la trajectoire, néanmoins, l'erreur dynamique augmente jusqu'à 1.5° pour les deux articulations, avec des signaux de commandes plus importants et oscillatoires et un pic de l'ordre de 100% de la valeur du signal de commande en régime permanent, à l'instant de l'introduction de la charge.

Pour diminuer les oscillations de la commande, ainsi que l'erreur de poursuite, on augmente la valeur des pondérations de la matrice d'adaption F_i à $f_{ij}=50, j=1..9$.

Les résultats de simulations sont consignés sur la *figure (III.11)* (L'erreur de poursuite est inférieure à $[0.75^\circ \ 0.3^\circ]^T$ avec un signal de commande lisse dont le pic est de l'ordre de 70%

Pour accélérer la convergence de l'erreur désirée, avec les mêmes pondérations que précédemment, on augmente la valeur de la matrice F_p à $f_{pj}=1.0 \quad j=1..9$.

La convergence rapide de la commande passive adaptative est illustrée par la *figure (III.12)* (L'erreur en position est inférieure à $[0.4^\circ \ 0.2^\circ]$ et s'annule très rapidement en régime perman--ant avec un signal de commande lisse et réalisable).

Afin de montrer l'efficacite de l'algorithme en présence de bruit de commande, on 'a superposé au signal utile de commande, un bruit d'amplitude maximale de 25% du signal de commande

au régime permanent. Les résultats obtenus sont consignés sur la *figure(13)*, le robot rejette ces bruits puisqu' il est de nature d'un filtre *passé-bas*.

En définitif, pour tester la capacité de poursuite de la commande passive, dans l'espace cartésien on applique au robot une trajectoire de référence circulaire de centre $(l, l/2)$ et de rayon de $l/2$, avec l la longueur des liaisons ($l_1=l_2=0.432m$), définie par :

$$\begin{cases} x_d(t) = .432 + .216s \cdot \sin(\omega t) \\ y_d(t) = .216 - .216 \cos(\omega t) \end{cases}$$

Avec $\omega = 2\pi/T$, $T = 3s$

Les résultats de la commande passive à paramètres connus sont consignés sur la *figure(III.14)*.

Pour améliorer la convergence de l'erreur de poursuite, on applique la commande passive adaptative. Les résultats de cette commande sans charge et avec charge sont consignés sur la *figure(III.15,16)*.

CONCLUSION

Dans ce chapitre, on s'est intéressé à développer la commande passive à paramètres connus et adaptative.

L'implémentation de la commande passive à paramètres connus nécessite la connaissance exacte du modèle du robot, avec des trajectoires désirées continues en position, en vitesse et en accélération. Dans ces conditions on aboutit à une poursuite parfaite.

Dans le cas de changement ou de mauvaise connaissance des paramètres du robot, en utilisant cette commande, les performances dynamiques en boucle fermée se dégradent et l'utilisation de la commande passive adaptative s'avère nécessaire. La notion de passivité et de l'approche de l'hyperstabilité permet l'analyse de la stabilité d'un tel algorithme. Le choix des matrices K_p , K_v , Λ , F_i , F_p consiste à une étape très importante pour la synthèse de la loi de commande.

En premier lieu, les matrices K_p et K_v permettent d'ajuster les paramètres du régulateur (P.D). En second lieu, la matrice Λ assure la convergence asymptotique de l'erreur de poursuite. Enfin, l'accélération de la convergence de l'erreur est assurée par les matrices F_v et F_p .

L'algorithme d'adaptation paramétrique ajuste les valeurs des paramètres pour développer le couple nécessaire et assurer une convergence de l'erreur désirée vers zéros sans aucune condition sur l'estimation exacte des paramètres. L'avantage de l'algorithme de commande, est qu'il ne demande pas l'inversion de la matrice d'inertie M , ni le calcul de l'accélération $\ddot{q}(t)$ qui pose des problèmes pour sa mesure.

L'extension de la commande passive sur l'espace opérationnel donne de bons résultats. Néanmoins, la commande dans cet espace rallonge le temps de calcul du au retard occasionné par les calculs du modèle géométrique, de la matrice jacobienne et de sa dérivée. Ainsi, le problème de la singularité se pose. Afin d'éviter celui-ci, un choix judicieux des trajectoires s'impose.

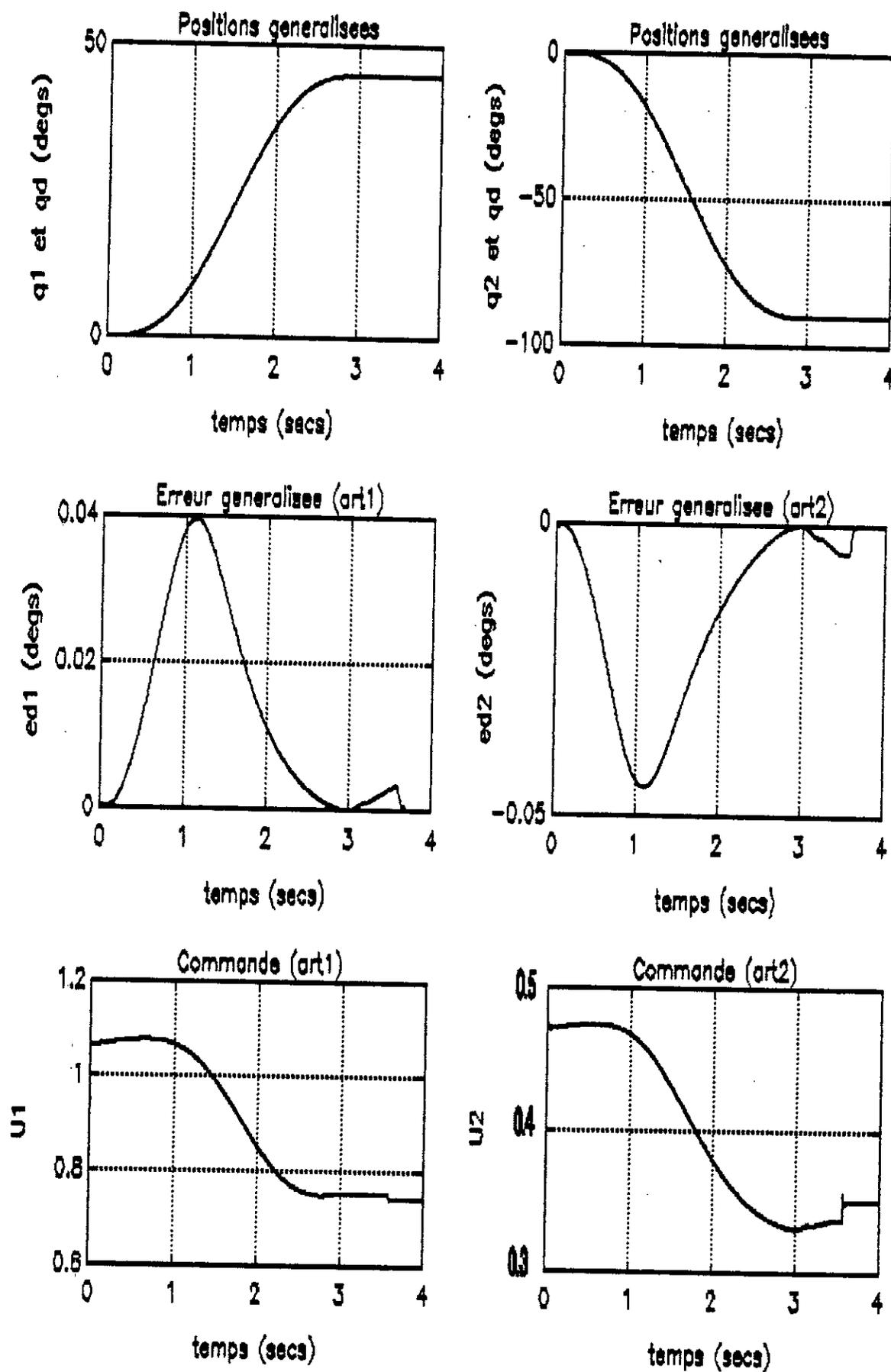


Figure (III.7): Réponse du système non chargé à des trajectoires cycloïdes pour la commande passive à paramètres connus avec $\lambda_f=20$ (positions généralisées, erreurs et commandes)

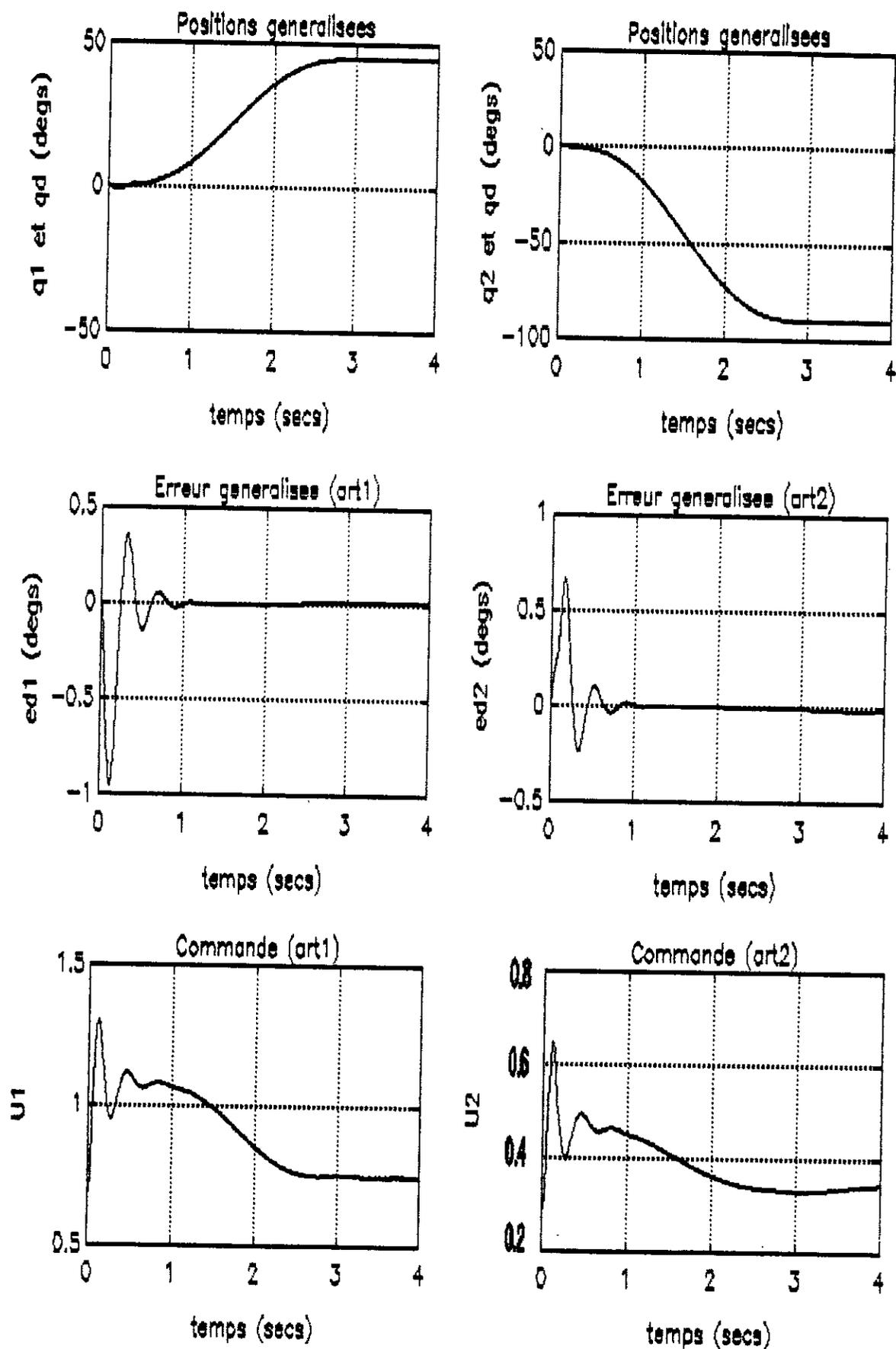


Figure (III.8.a): Réponse du système non chargé à des trajectoires cycloïdes pour $k_{pi}=100$, $k_i=10$, $\lambda_i=20$, $f_{pj}=0.1$, $f_{ij}=0.02$ (positions généralisées, erreurs et commandes).

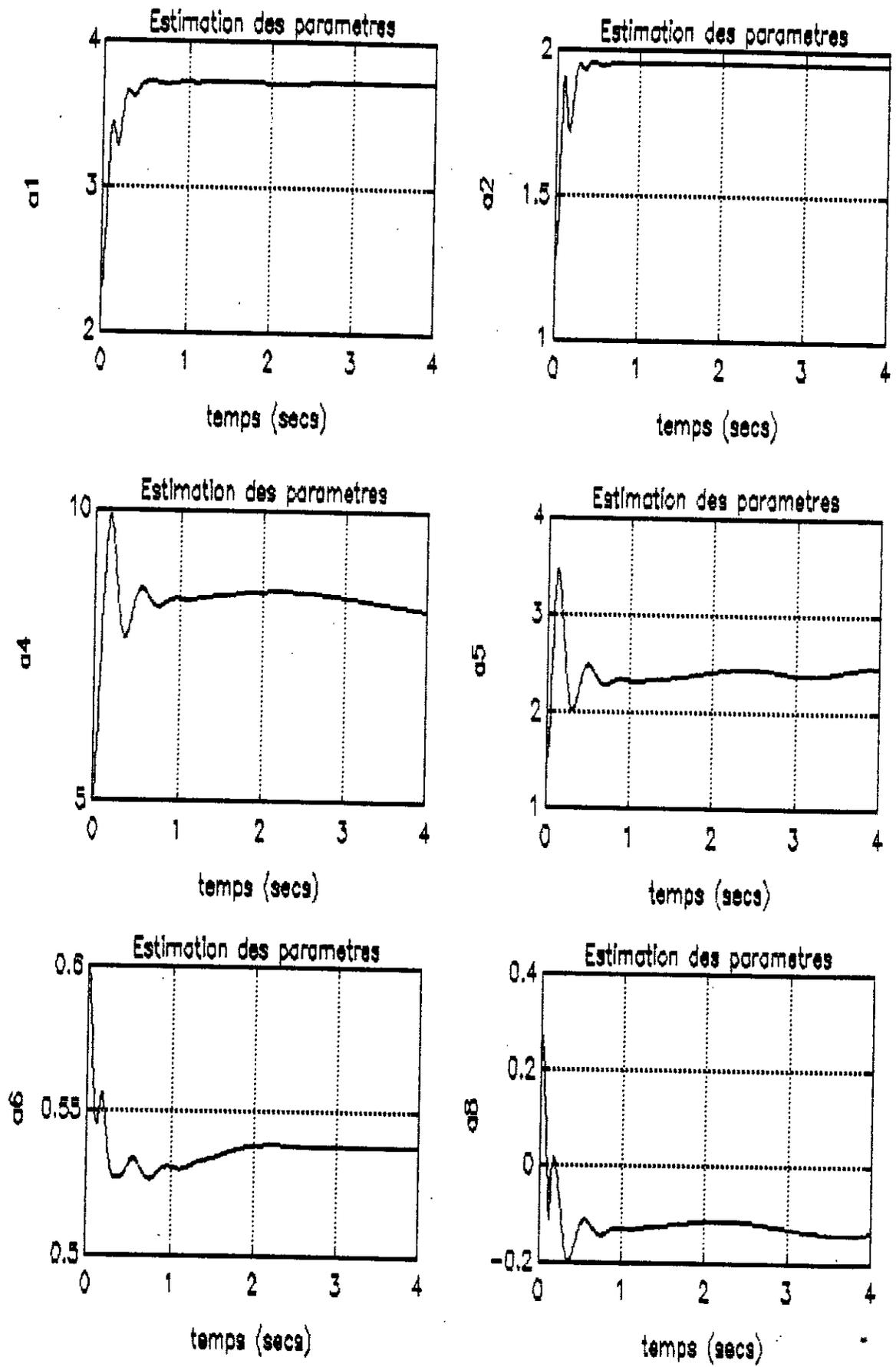


figure (III.8.b): Evolution des paramètres pour la commande passive adaptative sans charge

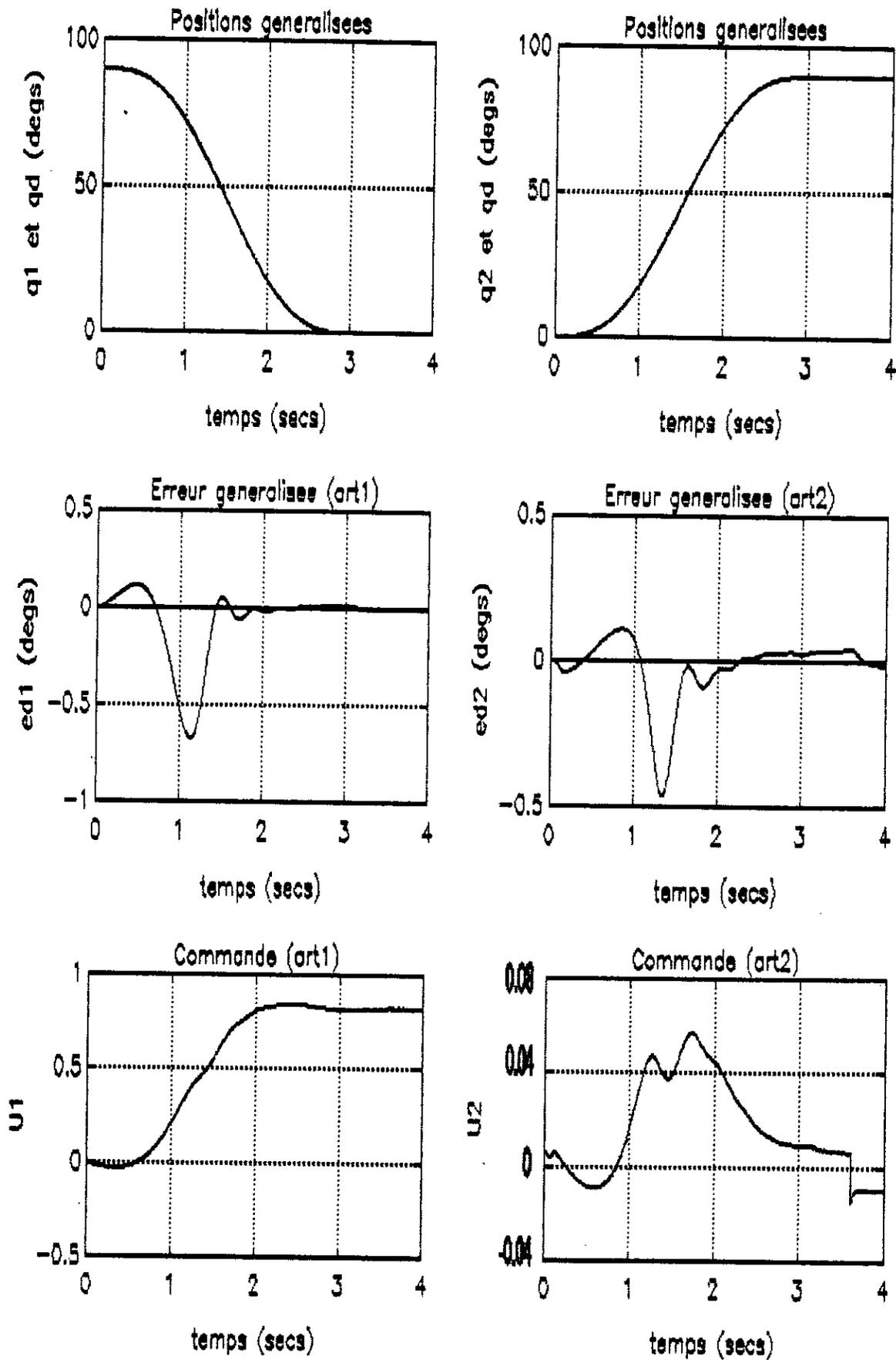


Figure (III.9): Réponse du système chargé à des autres trajectoires cycloïdes pour $k_{p_i}=100$, $k_{v_i}=10$, $\lambda_i=20$, $f_{p_j}=0.1$, $f_{i_j}=10$ (positions généralisées, erreurs et commandes).

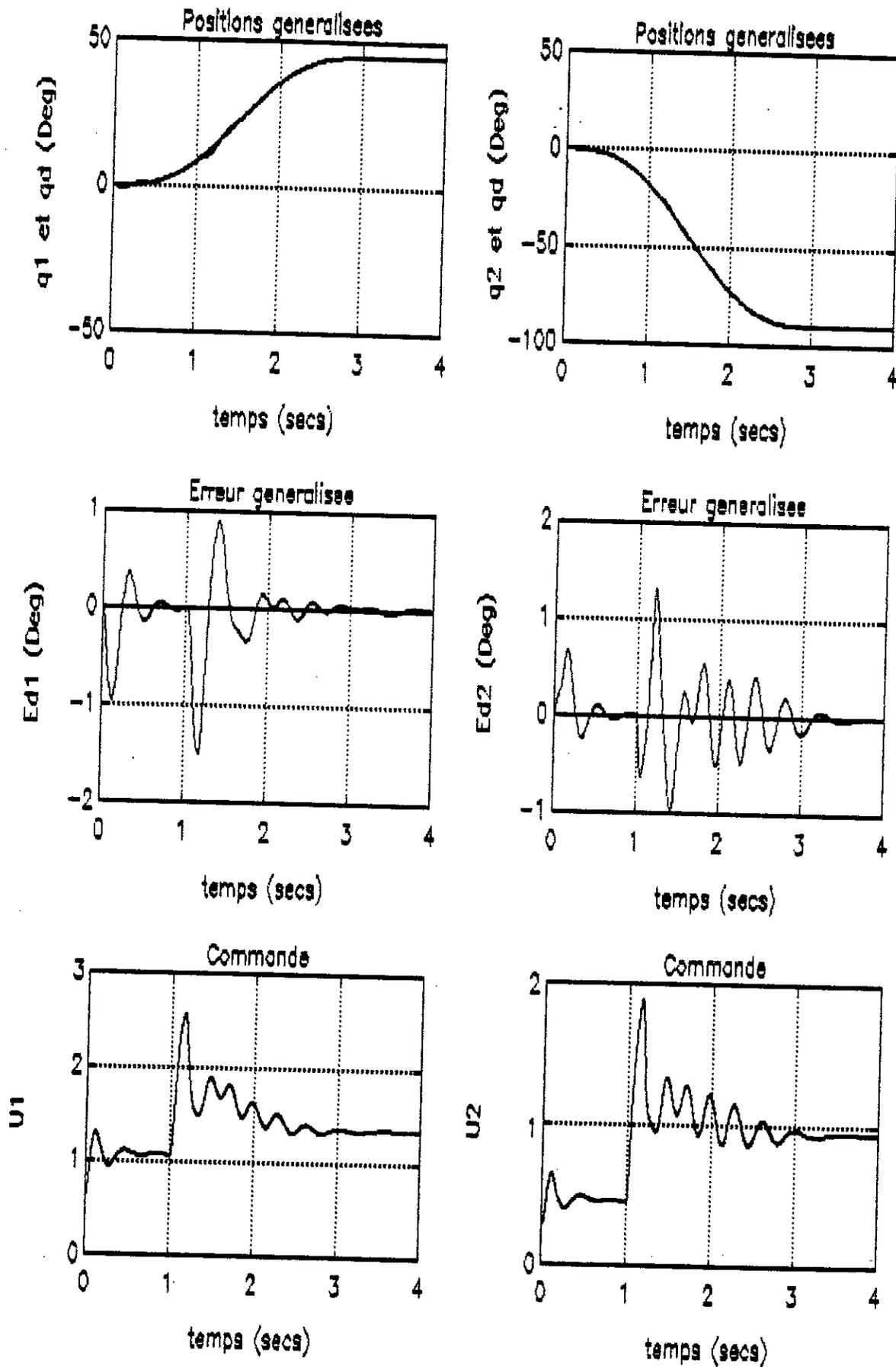


Figure (III.10.a): Réponse du système chargé à des trajectoires cycloïdes pour $k_{pi}=100$, $k_{di}=10$, $\lambda_i=20$, $f_{pj}=0.1$, $f_{ij}=10$ (positions généralisées, erreurs et commandes).

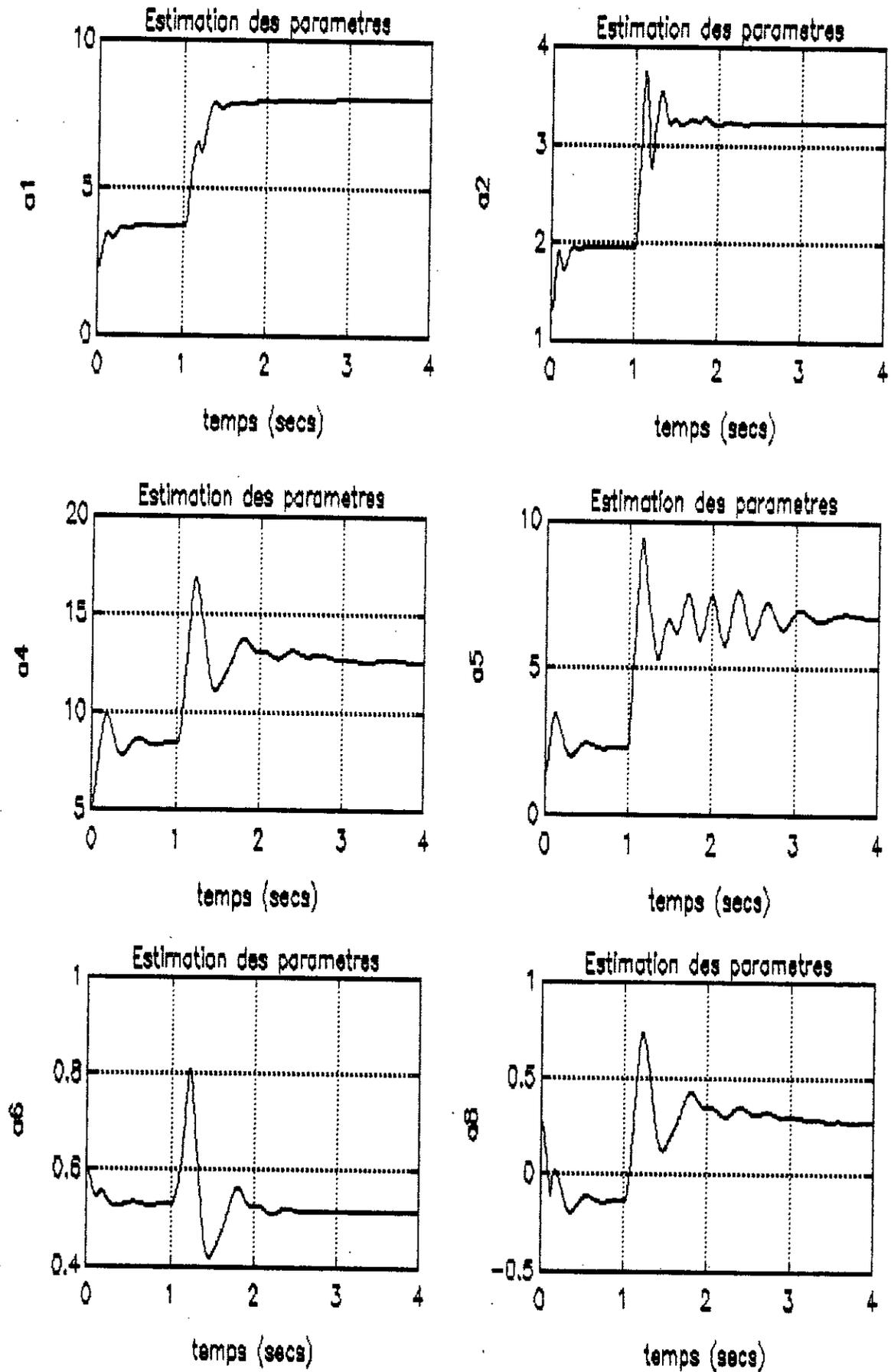


figure (III.10.b): Evolution des paramètres pour la commande passive adaptative avec charge

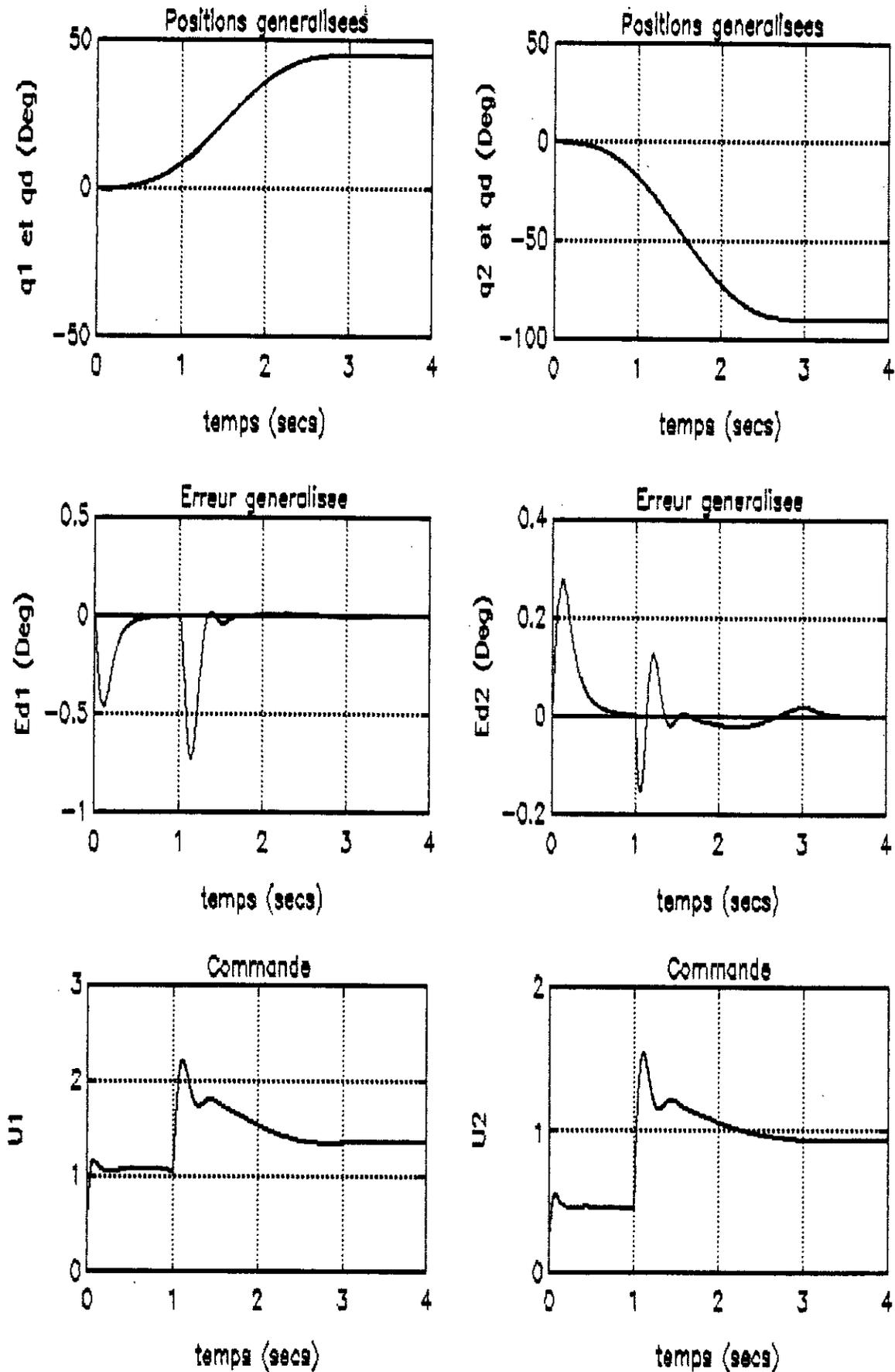


Figure (III.11): Réponse du système chargé à des trajectoires cycloïdes pour $k_{p_i}=100$, $k_{v_i}=10$, $\lambda_i=20$, $f_{p_j}=0.1$, $f_{i_j}=50$ (positions généralisées, erreurs et commandes).

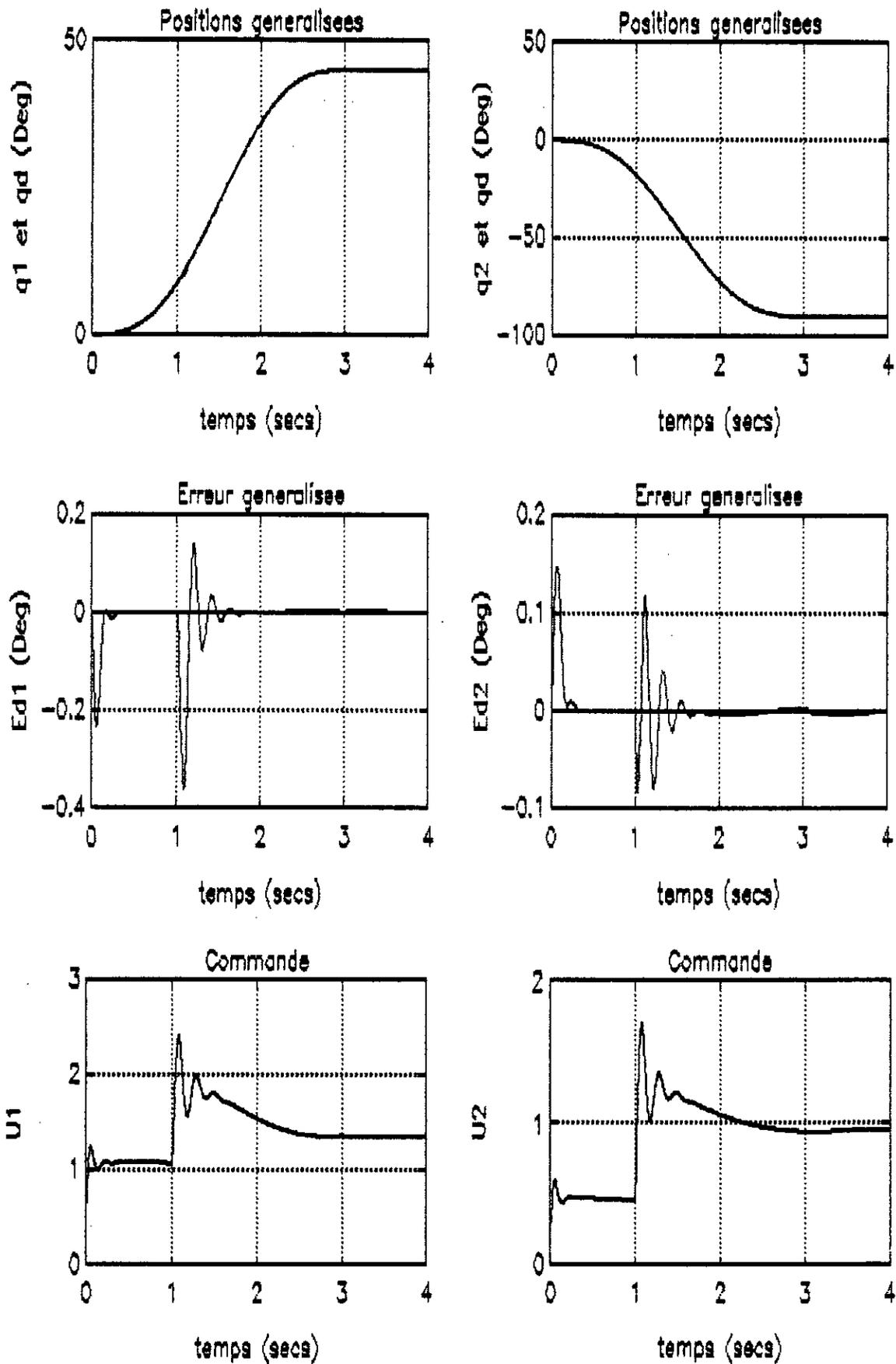


Figure (III.12): Réponse du système chargé à des trajectoires cycloïdes pour $k_{p_i}=100$, $k_{v_i}=10$, $\lambda_i=20$, $f_{p_j}=1$, $f_{i_j}=50$ (positions généralisées, erreurs et commandes).

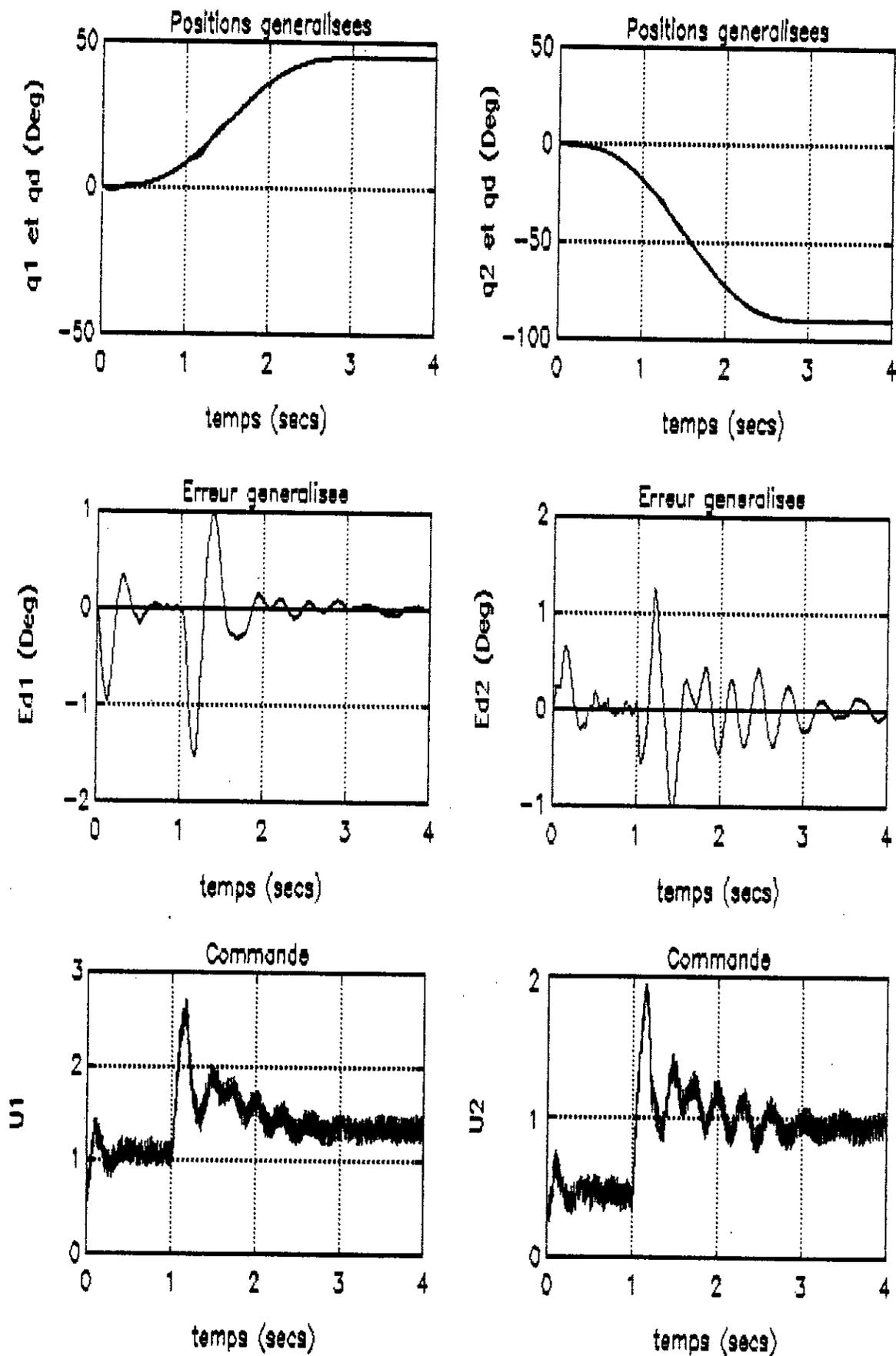


Figure (III.13): Réponse du système chargé à des trajectoires cycloïdes pour en présence de bruits de commande pour $k_{p_i}=100$, $k_{v_i}=10$, $\lambda_i=20$, $f_{p_j}=0.1$, $f_{i_j}=10$ (positions généralisées, erreurs et commandes).

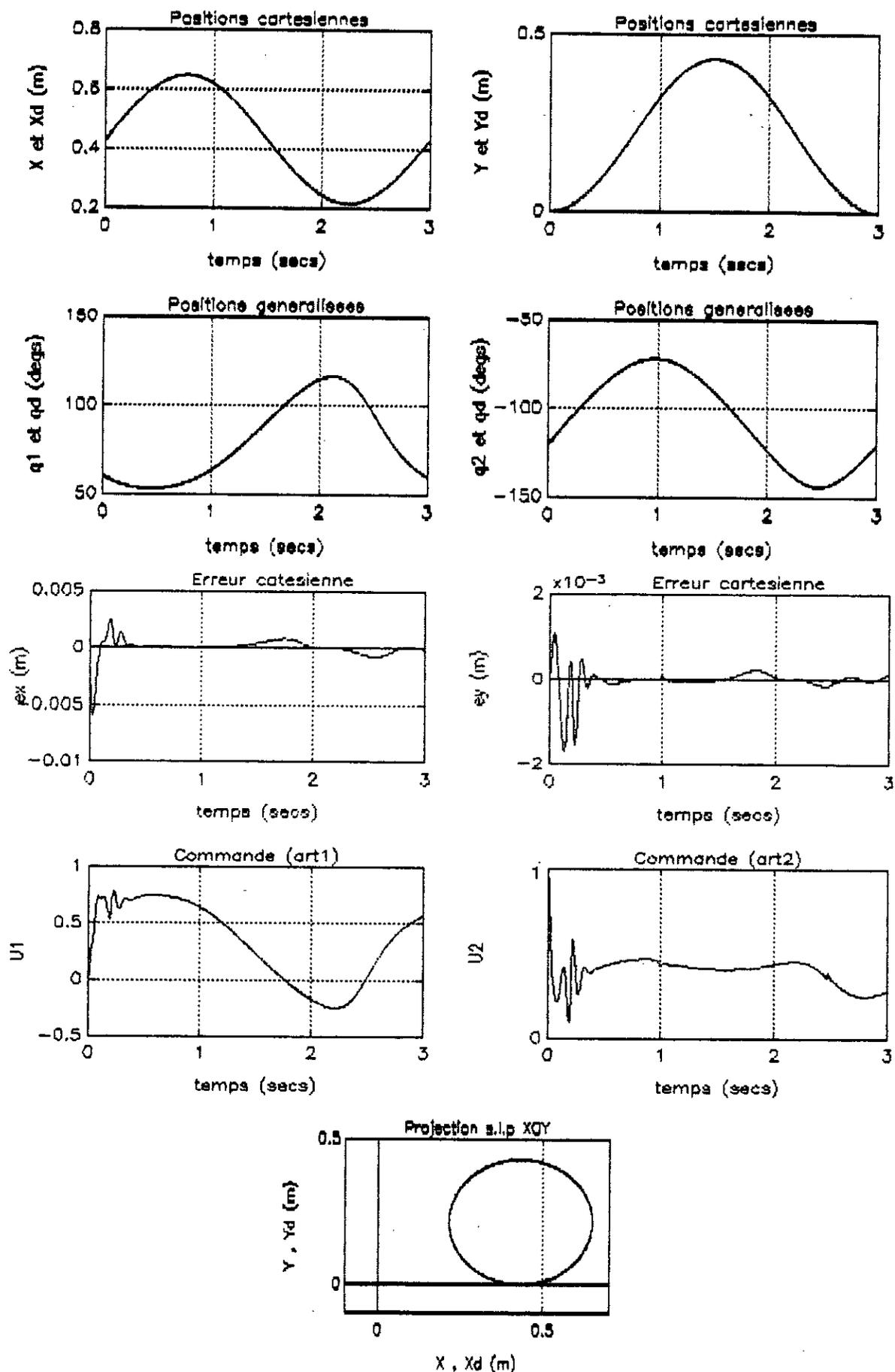


Figure (III.15): Réponse du système chargé à une trajectoire circulaire pour $k_{pi}=100$, $k_{vi}=10$, $i=20$, $f_{pj}=0.1$, $f_{ij}=50$ (positions généralisées et cartésiennes, erreurs généralisées et commandes).

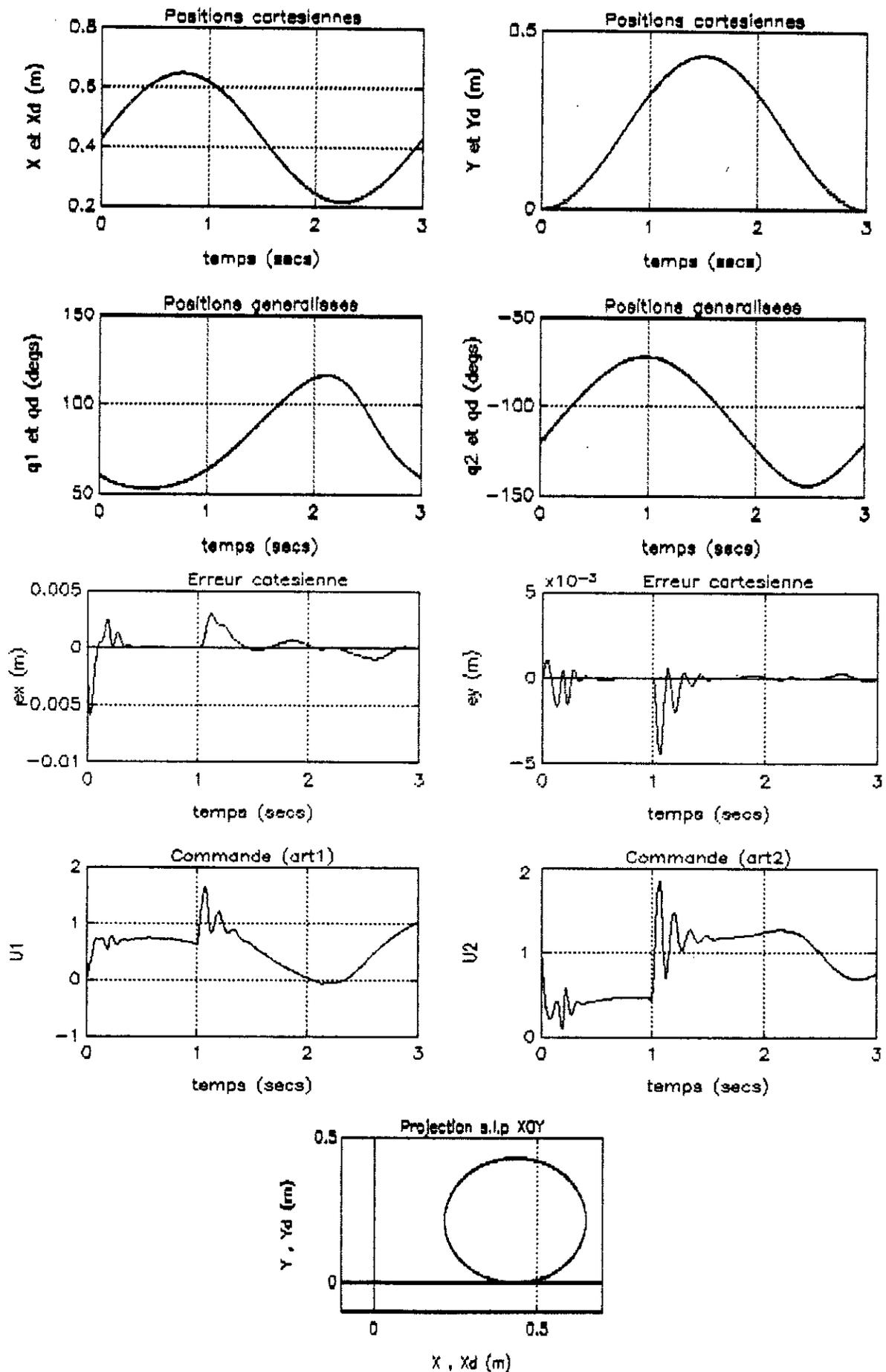


Figure (III.16): Réponse du système chargé à une trajectoire circulaire pour $k_{pi}=100$, $k_{di}=10$, $i=20$, $f_{pj}=1$, $f_{ij}=50$ (positions généralisées et cartésiennes, erreurs généralisées et commandes):

Chapitre IV

**COMMANDE ADAPTATIVE
DISCRETE
A MODELE DE REFERENCE**

INTRODUCTION

La loi de commande développée dans le chapitre précédent est une loi continue. En pratique l'implémentation d'une telle loi sur un ordinateur numérique peut engendrer une dégradation des performances dynamiques du système en boucle fermée et même le rendre instable, en particulier si le pas d'échantillonnage n'est pas convenablement choisi [], d'où la nécessité de développer une loi de commande adaptative discrète permettant de mieux prendre en charge ce problème.

Le problème de contrôle consiste à développer un schéma de commande assurant au robot la poursuite des trajectoires désirées $qd(t)$, (où $qd(t)$ est un vecteur de fonctions dépendantes du temps). Il est désirable que cette poursuite soit insensible aux incertitudes paramétriques et non-paramétriques.

En se basant sur un modèle dynamique discret du robot dans l'espace généralisé, Tarokh [] propose une structure de loi de commande discrète. L'utilisation de la version discrète de l'approche de l'hyperstabilité permet la détermination du mécanisme d'adaptation. Vu la similarité entre le modèle dynamique dans l'espace cartésien et dans l'espace généralisé, l'extension de la loi précédente dans l'espace cartésien est possible.

IV.1 COMMANDE ADAPTATIVE DISCRETE DANS L'ESPACE GENERALISE

IV.1.1 Modèle discret du robot

Le modèle discret du robot est un système d'équations aux différences liant les variables articulaires aux forces généralisées appliquées à ce robot, aux instants d'échantillonnages.

Soit le modèle de connaissance donnée par l'équation (I.13.a-f) :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + H(\dot{q}) = \tau(t) \quad (IV.1)$$

- q , \dot{q} , \ddot{q} dépendent du temps, et par conséquent les matrices M , C , G et H en dépendent implicitement.

Soit T la période d'échantillonnage. Le temps aux instants d'échantillonnages s'écrit:

$t = k T$ avec $k=0,1,\dots$

pour raison de simplification: $k T$ sera noté k .

En utilisant des approximations linéaires des variables positions et vitesses q, \dot{q} , l'équation (IV.1) devient:

$$A_2(k) q(k-2) + A_1(k) q(k-1) + A_0(k) = \tau(k) \quad (IV.2)$$

$$A_2(k) = \frac{M(k)}{T^2}$$

$$A_1(k) = -\frac{C(k)}{T} - 2 \frac{M(k)}{T^2}$$

$$A_0(k) = G(k) - \frac{C(k)}{T} + \frac{M(k)}{T^2}$$

L'équation (IV.2) constitue le modèle discret du robot.

IV.1.2 Synthèse de la loi d'adaptation

Pour synthétiser une commande permettant la poursuite d'une trajectoire de référence, on utilise l'approche de l'hyperstabilité, en suivant les étapes suivantes:

1. Choisir la structure du régulateur et la mise des équations du système en boucle fermée sous forme de deux systèmes en contre-réaction : dans la chaîne directe un système linéaire invariant dans le temps (S.L.I), et dans la chaîne de retour un système non-linéaire variant dans le temps (S.N.L.V).
2. Vérifier que la matrice de transfert du S.L.I est strictement réelle positive (S.R.P), et le S.N.L.V vérifie l'inégalité de Popov.

Soit le vecteur d'erreurs des positions articulaires défini par:

$$ed(k) = qd(k) - q(k) \quad (IV.3)$$

avec :

qd (nx1) vecteur des trajectoires désirées.

De l'équation (IV.3), on tire $q(k)$ et on le remplace dans (IV.2). On obtient :

$$A_0(k) ed(k) = -\tau(k) - A_1(k) ed(k-1) - A_2(k) ed(k-2) + A_0(k) qd(k) + A_1(k) qd(k-1) + A_2(k) qd(k-2) \quad (IV.4)$$

A partir de l'équation (IV.4) et pour influencer $ed(k)$, Tarokh [] a proposé la loi de commande suivante :

$$\tau(k) = P_1(k)ed(k-1) + P_2(k)ed(k-2) + Q_0(k)qd(k) + Q_1(k)qd(k-1) + Q_2(k)qd(k-2) \quad (IV.5)$$

où: P_1, P_2, Q_0, Q_1 et Q_2 sont des matrices ($n \times n$) dépendantes du temps à déterminer.

η signal auxiliaire ($n \times 1$), utilisé pour améliorer la commande.

L'introduction de cette commande dans le modèle du robot (l'équation (IV.4)) nous donne l'équation du système en boucle fermée soit :

$$A_0(k)ed(k) + (P_1(k) + A_1(k))ed(k-1) + (P_2(k) + A_2(k))ed(k-2) = (A_0(k) - Q_0(k))qd(k) + (A_1(k) - Q_1(k))qd(k-1) + (A_2(k) - Q_2(k))qd(k-2) - \eta(k) \quad (IV.6)$$

Comme modèle de référence, on propose le modèle de l'erreur en position suivant []:

$$em(k) + c_1 em(k-1) + c_2 em(k-2) = 0 \quad (IV.7)$$

où : - em : vecteur ($n \times 1$) de l'erreur idéal (erreur de référence).

- c_1 et c_2 : sont des matrices ($n \times n$) choisies de telle façon que les pôles $\{ (\lambda_{1i}, \lambda_{2i}) \}_{i=1..n}$ de l'équation caractéristique du système décrit par (IV.7) soient dans le cercle unité.

Dans la terminologie de la commande adaptative les équations (IV.6) et (IV.7) représentent respectivement : le système ajustable et le modèle de référence.

Dans le but d'obtenir la représentation équivalente de deux systèmes en contre réaction, on définit $e(k)$ le vecteur d'erreur entre l'erreur réelle $ed(k)$ et l'erreur idéale $em(k)$:

$$e(k) = em(k) - ed(k) \quad (IV.8)$$

En éliminant le vecteur de l'erreur idéale em des équations (IV.7) et (IV.8), on obtient :

A partir de l'équation (IV.4) et pour influencer $ed(k)$, Taròkh [] a proposé la loi de commande suivante :

$$\tau(k) = P_1(k)ed(k-1) + P_2(k)ed(k-2) + Q_0(k)qd(k) + Q_1(k)qd(k-1) + Q_2(k)qd(k-2) \quad (IV.5)$$

où: P_1, P_2, Q_0, Q_1 et Q_2 sont des matrices ($n \times n$) dépendantes du temps à déterminer.

η signal auxiliaire ($n \times 1$), utilisé pour améliorer la commande.

L'introduction de cette commande dans le modèle du robot (l'équation (IV.4)) nous donne l'équation du système en boucle fermée soit :

$$A_0(k)ed(k) + (P_1(k) + A_1(k))ed(k-1) + (P_2(k) + A_2(k))ed(k-2) = (A_0(k) - Q_0(k))qd(k) + (A_1(k) - Q_1(k))qd(k-1) + (A_2(k) - Q_2(k))qd(k-2) - \eta(k) \quad (IV.6)$$

Comme modèle de référence, on propose le modèle de l'erreur en position suivant []:

$$em(k) + c_1 em(k-1) + c_2 em(k-2) = 0 \quad (IV.7)$$

où : - em : vecteur ($n \times 1$) de l'erreur idéal (erreur de référence).

- c_1 et c_2 : sont des matrices ($n \times n$) choisies de telle façon que les pôles $\{ (\lambda_{1i}, \lambda_{2i}) \}_{i=1..n}$ de l'équation caractéristique du système décrit par (IV.7) soient dans le cercle unité.

Dans la terminologie de la commande adaptative les équations (IV.6) et (IV.7) représentent respectivement : le système ajustable et le modèle de référence.

Dans le but d'obtenir la représentation équivalente de deux systèmes en contre réaction, on définit $e(k)$ le vecteur d'erreur entre l'erreur réelle $ed(k)$ et l'erreur idéale $em(k)$:

$$e(k) = em(k) - ed(k) \quad (IV.8)$$

En éliminant le vecteur de l'erreur idéale em des équations (IV.7) et (IV.8), on obtient :

$$e(k) + c_1 e(k-1) + c_2 e(k-2) = -(ed(k) + c_1 ed(k-1) + c_2 ed(k-2))$$

On tire l'erreur réelle $ed(k)$ de (IV.6), et on le remplace dans l'équation précédente, on trouve:

$$e(k) + c_1 e(k-1) + c_2 e(k-2) = -\rho(k) \quad (IV.9.a)$$

$$\rho(k) = \sum_{j=1}^k \rho_j(k) \quad (IV.9.b)$$

$$\rho_1(k) = (c_1 - A_0(k)^{-1}(A_1(k) + P_1(k)))ed(k-1) = \psi_1(k)ed(k-1) \quad (IV.9.c)$$

$$\rho_2(k) = (c_2 - A_0(k)^{-1}(A_1(k) + P_2(k)))ed(k-2) = \psi_2(k)ed(k-2) \quad (IV.9.d)$$

$$\rho_3(k) = A_0(k)^{-1}(A_0(k) + Q_0(k))qd(k) = \psi_3(k)qd(k) \quad (IV.9.e)$$

$$\rho_4(k) = A_0(k)^{-1}(A_1(k) + Q_1(k))qd(k-1) = \psi_4(k)qd(k-1) \quad (IV.9.f)$$

$$\rho_5(k) = A_0(k)^{-1}(A_2(k) + Q_2(k))qd(k-2) = \psi_5(k)qd(k-2) \quad (IV.9.g)$$

$$\rho_6(k) = A_0(k)^{-1}\eta(k) = \psi_6(k) \quad (IV.9.h)$$

Sous forme d'équations d'états, l'équation (IV.9.a) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} e(k-1) \\ e(k) \end{bmatrix} = \mathcal{E} \begin{bmatrix} e(k-2) \\ e(k-1) \end{bmatrix} + B \rho(k) \quad (IV.10.a)$$

avec:

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -c_2 & -c_1 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0_n \\ I_n \end{bmatrix} \quad (IV.10.b)$$

Afin de vérifier la condition de S.R.P du S.L.I, introduisons le variable $v(k)$ défini par :

$$v(k) = D \begin{bmatrix} e(k-1) \\ e(k) \end{bmatrix} \quad (IV.11)$$

D : matrice constante ($n \times 2n$)

La représentation équivalente des équations (IV.9.a-f), (IV.10.a,b) et (IV.11) sous forme de deux systèmes en contre-réaction est celle de la figure (IV.1) :

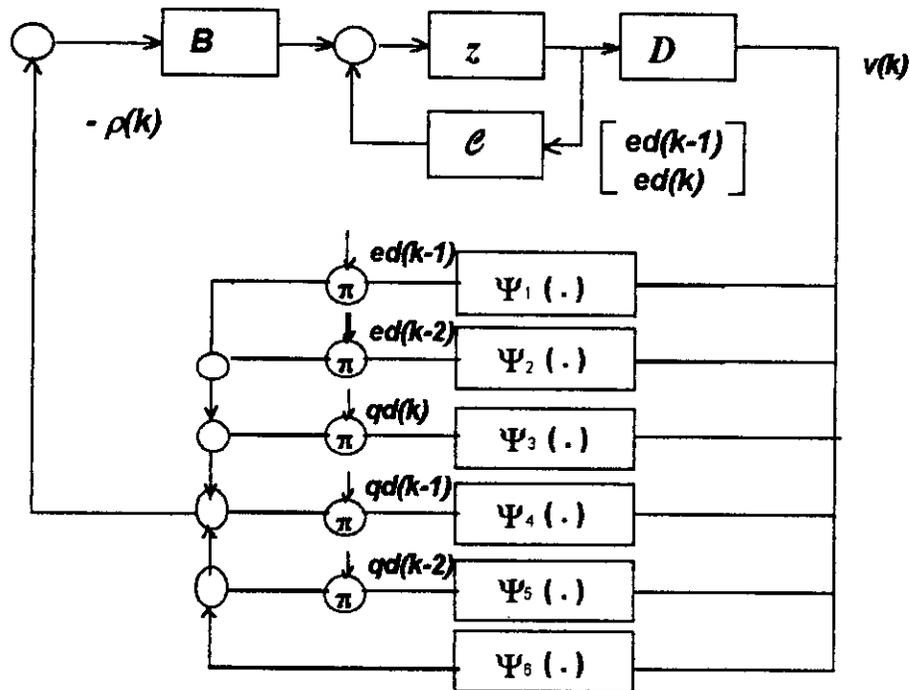


Figure (I.V) Représentation équivalente de la dynamique de l'erreur

Dans cette représentation, on distingue :

1. Un système linéaire invariant dans le temps (S.L.I) dans la chaîne direct, son entrée est $\rho(k)$ et sa sortie $v(k)$
2. Un système non-linéaire variant dans le temps (S.N.L.V) dans la chaîne de retour, ses entrées sont $v(k), ed(k), ed(k-1), qd(k), qd(k-1), qd(k-2)$, et sa sortie $\rho(k)$.

Après l'établissement de la représentation équivalente du système en boucle fermée, il est possible d'utiliser la théorie de l'hyperstabilité pour déterminer les paramètres inconnus de la loi de commande.

Pour que le système globale de la figure (IV.1) soit asymptotiquement hyperstable, il est nécessaire et suffisant que (voir Chapitre II) :

1 - le S.L.I possède une fonction de transfert strictement réelle positive (S.R.P).

2 - le S.N.L.V vérifie l'inégalité de Popov définie par :

$$\forall k_1 \geq 1 ; \exists \gamma_0 < \infty : \sum_{k=1}^{k_1} v(k)^T \rho(k) \geq \gamma_0^2 \quad (IV.12)$$

Dans ce cas, nous avons :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} ed(k) = 0_{n \times 1}$$

où: $0_{n \times 1}$: matrice (nx1) d'éléments nuls

donc après un régime transitoire , le système suivra la trajectoire de référence.

1. Vérification de l'inégalité de Popov

Considérons l'équation (IV.9.b); pour que l'inégalité (IV.12) soit vérifiée, il suffit de démontrer que : $\forall k_1 \geq 1 ; \exists \gamma_{0j} < \infty : \sum_{k=1}^{k_1} v(k)^T \rho_j(k) \geq \gamma_{0j}^2 \quad j = 1..6$

D'après les résultats généraux donnés par Landau [], les inégalités précédentes sont vérifiées si on choisit:

$$\psi_1(k) = Gv(k)ed(k-1)^T E1_p + \sum_{j=0}^{k-1} v(j)ed(j-1)^T E1_l \quad (IV.13.a)$$

$$\psi_2(k) = Gv(k)ed(k-2)^T E2_p + \sum_{j=0}^{k-1} v(j)ed(j-2)^T E2_l \quad (IV.13.b)$$

$$\psi_3(k) = Gv(k)qd(k)^T F0_p + G \sum_{j=0}^{k-1} v(j)qd(j-1)^T F0_l \quad (IV.13.c)$$

$$\psi_4(k) = Gv(k)qd(k-1)^T F1_p + G \sum_{j=1}^k v(j)qd(j-2)^T F1_l \quad (IV.13.d)$$

$$\psi_5(k) = Gv(k)qd(k-2)^T F2_p + G \sum_{j=0}^{k-1} v(j)qd(j-3)^T F2_l \quad (IV.13.e)$$

$$\psi_6(k) = Gv(k)\beta_p + G\beta_l \sum_{j=0}^{k-1} v(j) \quad (IV.13.F)$$

- $G, E1_p, E1_l, \dots, F2_p, F2_l$ des matrices (nxn) semi définies positives, choisies arbitrairement.

- β_p, β_l sont des scalaires positifs arbitraires.

Chacune des expressions précédentes fait intervenir les deux actions classiques :

- L'action intégrale indexée par la lettre ' *l* '.
- L'action proportionnelle indexée par la lettre ' *p* '.

Après avoir déterminé les matrices Ψ_j , il est nécessaire de trouver les expressions des gains $P_1, P_2, Q_0, Q_1, Q_2, \eta$ utilisées dans le calcul de la loi de commande (IV.5). Pour cela considérons les variations suivantes :

$$\Delta P_j(k) = P_j(k) - P_j(k-1) \quad j=1,2 \quad (IV.14.a)$$

$$\Delta Q_j(k) = Q_j(k) - Q_j(k-1) \quad j=0,1,2 \quad (IV.14.b)$$

$$\Delta A_j(k) = A_j(k) - A_j(k-1) \quad j=0,1,2 \quad (IV.14.c)$$

$$\Delta c_j(k) = c_j(k) - c_j(k-1) \quad j=1,2 \quad (IV.14.d)$$

Si on suppose que l'adaptation des gains s'effectue de telle manière que le modèle du robot apparait lentement variable entre deux instants d'échantillonnages :

ou encore :

$$\Delta P_j(k) \gg \Delta A_j(k) - \Delta A_0(k) c_j \quad j=1,2$$

$$\Delta Q_j(k) \gg \Delta A_j(k) \quad j=1,2$$

dans ce cas les équations (IV.13.a-f) s'écrivent :

$$P_j(k) = P_j(k-1) - v(k) e d(k-j)^T E_j + v(k-1) e d(k-j-1)^T (E_j - E_{j-1}) \quad j=1,2$$

$$Q_i(k) = Q_i(k-1) - v(k) q d(k-j)^T F_j + v(k-1) q d(k-j-1)^T (F_j - F_{j-1}) \quad j=0,1$$

$$\eta(k) = \eta(k-1) - \beta_p v(k) + (\beta_p - \beta_i) v(k-1)$$

avec :

$$v(k) = D \begin{bmatrix} e(k-1) \\ e(k) \end{bmatrix}$$

le seul paramètre qui reste à déterminer dans la loi de commande est la matrice D .

2. Vérification de la S.R.P du S.L.I

La matrice de transfert discrète du S.L.I est tirée directement des équations (IV.10.a-c) et (IV.11) :

$$H(z) = DB + DC(z I_{2n} - C)^{-1} B \quad (IV.16)$$

On démontre dans l'Annexe D que la matrice $H(z)$ est strictement réelle positive en choisissant :

$$D = [R2 \ R3]$$

$$R2 = \text{diag} \{r_{2i}; i=1..n\} ; R3 = \text{diag} \{r_{3i}; i=1..n\} \quad (IV.17.a)$$

deux matrices diagonales d'ordre n avec :

$$r_{2i} = \alpha_i \lambda_{1i} \lambda_{2i} (\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) \quad i = 1..n \quad (IV.17.b)$$

$$r_{3i} = \alpha_i (1 + \lambda_{1i} \lambda_{2i}) \quad i = 1..n \quad (IV.17.c)$$

avec $\alpha_i > 0$ un nombre arbitraire, λ_{1i} , λ_{2i} les deux pôles de la dynamique de l'erreur idéale em associés à l'articulation i .

Après avoir déterminé la matrice D , et comme le modèle de référence de l'erreur em est imposé avec un régime transitoire très court par rapport à la dynamique du robot, l'équation (IV.8) devient :

$$e(k) = em(k) - ed(k) \approx -ed(k)$$

donc :

$$v(k) = -R2 ed(k-1) - R3 ed(k) = -et(k)$$

La loi de commande discrète est donnée par les équations (IV.5), (IV.15.a-c) et (IV.17.a) s'écrit :

$$et(k) = R2 ed(k-1) + R3 ed(k) \quad (IV.18.a)$$

$$P_1(k) = P_1(k-1) + et(k) ed(k-1)^T E1_p + et(k-1) ed(k-2)^T (E1_1 - E1_p) \quad (IV.18.b)$$

$$P_2(k) = P_2(k-1) + et(k) ed(k-2)^T E2_p + et(k-1) ed(k-3)^T (E2_1 - E2_p) \quad (IV.18.c)$$

$$Q_0(k) = Q_0(k-1) + et(k) qd(k)^T F0_p + et(k-1) qd(k-1)^T (F0_1 - F0_p) \quad (IV.18.d)$$

$$Q_1(k) = Q_1(k-1) + et(k) qd(k-1)^T F1_p + et(k-1) qd(k-2)^T (F1_1 - F1_p) \quad (IV.18.e)$$

$$Q_2(k) = Q_2(k-1) + et(k) qd(k-2)^T F2_p + et(k-1) qd(k-3)^T (F2_1 - F2_p) \quad (IV.18.f)$$

$$\eta(k) = \eta(k-1) + \beta_p et(k) + (\beta_1 - \beta_p) et(k-1) \quad (IV.18.g)$$

$$\tau(k) = P_1(k) ed(k-1) + P_2(k) ed(k-1) + Q_0(k) qd(k) +$$

$$Q_1(k) qd(k-1) + Q_2(k-2) qd(k-2) + \eta(k) \quad (IV.18.h)$$

- Les matrices $E0_t \dots F2_p$ sont des matrices (nxn) symétriques définies positives.
- β_t, β_p des scalaires positifs.
- $R2, R3$ des matrices d'éléments donnés par (IV.17.b,c).
- Les valeurs initiales de $P_1 \dots Q_2$ sont arbitraires.

Cet algorithme nous garantit l'hyperstabilité asymptotique du système global donc :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0$$

ou bien :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} ed(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} em(k) = 0$$

donc le robot poursuit les trajectoires de références.

Dans la loi de commande développée, l'adaptation des gains P_t est liée directement à l'erreur de poursuite. Ces gains ont une action direct ('Feedforward bloc'), tandis que l'adaptation des gains Q_i c'est à partir des trajectoires de référence, ils ont une action en retour ('Feedback bloc'). Le schéma de commande est celui de la figure (IV.2)

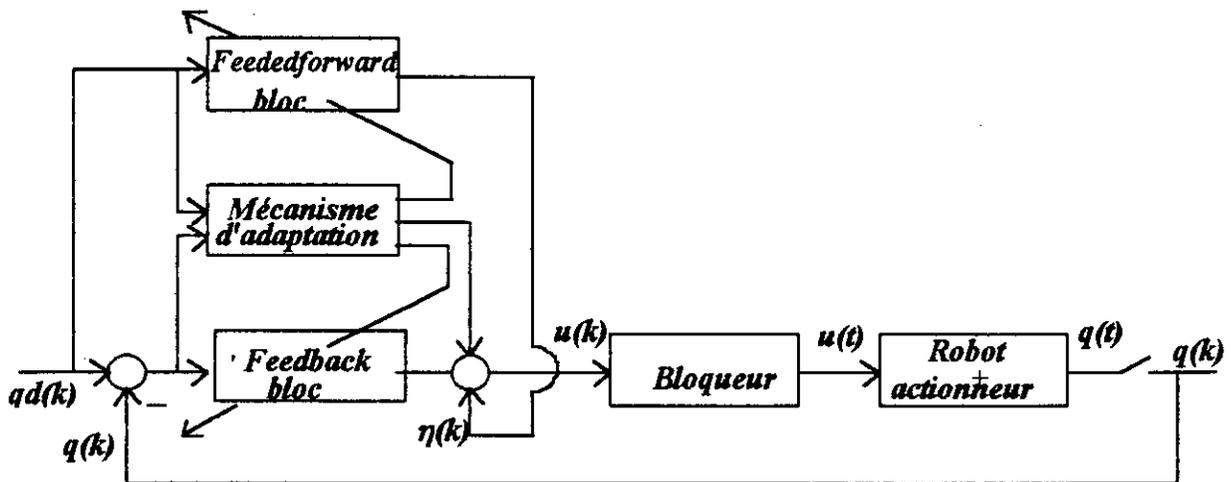


Figure (IV.2) Schéma de principe de la commande 'DM.R.A.C' dans l'espace généralisé.

Remarque

D'autre type de loi d'adaptation des gains sont possible puisque la vérification de l'inégalité de Popov possède d'autres solutions.

Algorithme de la commande dans l'espace généralisé [2]

- Données** degré de liberté du système. (n)
 Choisir $R2$ et $R3$ en utilisant (IV.17.b,c) Choisir le modèle de référence (IV.7)
 Choisir les matrices $E1_p, E1_t, \dots, F2_p, F2_t$.
 Choisir les gains β_1 et β_p .
 Choisir les valeurs initiales de P_1, P_2, Q_0, Q_1, Q_2 et η
- Etape 1** Générer les trajectoires de références $qd(k)$
- Etape 2** Calcul de l'erreur $ed(k)$
- Etape 3** Adaptation des paramètres $et(k), P_1, P_2, Q_0, Q_1, Q_2$ et η (IV.18.a-g)
- Etape 4** Calcul de la commande à partir de (IV.18.h)
- $t = t + 1$ Revenir à l'étape 1

IV.2 COMMANDE DANS L'ESPACE CARTESIEN

Dans plusieurs applications industrielles, les tâches que doit effectuer le robot, sont prescrites en terme de déplacement de l'élément terminal, tandis que les actionneurs agissent à partir des asservissements articulaires []. Pour palier à ce problème, on propose de synthétiser une loi de commande dans l'espace cartésien à partir d'un modèle développé dans cet espace.

Pour développer le modèle du robot dans l'espace cartésien, considérons l'équation du modèle cinématique direct (équation (I.5.a)):

$$\dot{X} = J_c(q) \dot{q}$$

par dérivation, on obtient :

$$\ddot{q} = J_c(q)^{-1} (\dot{J}_c(q, \dot{q}) \dot{q} - \ddot{X})$$

donc l'équation du modèle dynamique (IV.1) devient []:

$$M^*(X)\ddot{X} + C^*(X, \dot{X})\dot{X} + G^*(X) + H^*(\dot{X}) = Fc(t) \quad (IV.19.a)$$

avec :

$$M^*(X) = (J_c(q)^T)^{-1} M(q) J(q)^{-1} \quad (IV.19.b)$$

$$C^*(X, \dot{X})\dot{X} = (J_c(q)^T)^{-1} C(q, \dot{q})\dot{q} - M^*(q) \dot{J}_c(q, \dot{q})\dot{q} \quad (IV.19.c)$$

$$G^*(X) = (J_c(q)^T)^{-1} G(q) \quad (IV.19.d)$$

$$V^*(X) = (J_c(q)^T)^{-1} V(q) \quad (IV.19.e)$$

$$Fc(t) = (J_c(q)^T)^{-1} \tau(t) \quad (IV.19.f)$$

Le modèle dynamique dans l'espace cartésien de l'équation (IV.19.a) a la même structure que celui dans l'espace généralisée, en plus ils ont quelques propriétés similaires, on montre que [] :

- M^* est une matrice symétrique définie positive

- La matrice N^* définie par:

$$N^*(X, \dot{X}) = \dot{M}^*(X) - 2C^*(X, \dot{X})$$

est une matrice antisymétrique (pour la définition voir Annexe B)

Vu la similarité entre le modèle dynamique dans les deux espaces généralisé et cartésien, l'algorithme développé précédemment est applicable dans l'espace cartésien (puisque l'algorithme de commande a été développé en basant seulement sur la structure du modèle dynamique).

Dans ce cas, l'erreur modifiée $et(t)$ est calculée à partir de l'erreur sur les coordonnées de l'élément terminal : x, y, z . Une fois les forces cartésiennes (ou vertielles) sont calculées, on passe aux commandes généralisées équivalentes par la relation (IV.19.f).

La figure (IV.3) représente le schéma de commande.

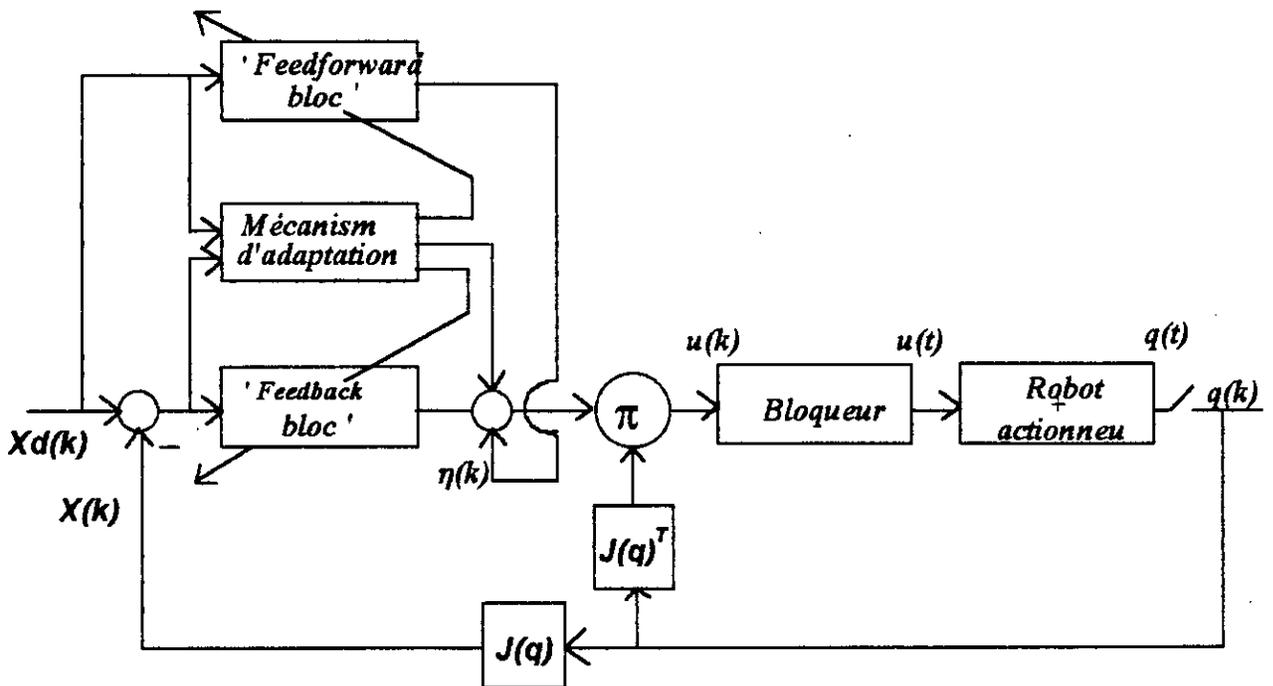


Figure (IV.3) Schéma de principe de la commande 'D.M.R.A.C' dans l'espace cartésien

Algorithme de la commande dans l'espace cartésien []

Données Degré de liberté du système. (n)

Choisir $R2$ et $R3$ en utilisant (IV.17.b,c) Choisir le modèle de référence (IV.7)

Choisir les matrices $E1_p, E1_t, \dots, F2_p, F2_t$.

Choisir les gains β_1 et β_p .

Choisir les valeurs initiales de P_1, P_2, Q_0, Q_1, Q_2 et η

Etape 1 Générer les trajectoires de références $X_d(k) = [x_d(k) \ y_d(k) \ z_d(k)]^T$

Etape 2 Calcul de la position cartésienne $X(k) = [x(k) \ y(k) \ z(k)]^T$ en utilisant le modèle géométrique direct, donné par la relation $X(k) = J(q)$

Etape 3 Calcul de l'erreur cartésien $ed_x(k) = X_d(k) - X(k)$

Etape 4 Adaptation des paramètres $et(k), P_1, P_2, Q_0, Q_1, Q_2$ et η (IV.18.a-g)

Etape 5 Calcul de la commande cartésienne à partir de l'équation (IV.18.h)

Etape 6 Calcul de la commande généralisée équivalent en utilisant la relation (IV.19.f)

$t = t + 1$ Revenir à l'étape 1

IV.3 SIMULATION ET DISCUSSION

La commande développée dans ce chapitre a été appliquée au robot 2R présenté dans le chapitre I.

Les trajectoires de référence sont cycloïdes ayant pour valeurs initiales: $q_I = [0^\circ \ 0^\circ]^T$ et valeurs finales $q_F = [45^\circ \ -90^\circ]^T$

Les paramètres du régulateur qui restent fixes pendant toutes les simulations (dans l'espace généralisé ou cartésien) sont :

$$F0_p = F1_p = F2_p = 0_{2 \times 2} \quad F0_I = F1_I = F2_I = 0.001 I_{2 \times 2}$$

$$E1_I = E2_I = 10 I_{2 \times 2} \quad E1_p = E2_p = 10 I_{2 \times 2}$$

$$\beta_I = 1$$

avec: $0_{2 \times 2}$: matrice (2x2) d'éléments nuls

$I_{2 \times 2}$: matrice d'identité d'ordre 2.

Les valeurs initiales des gains sont :

$\eta(0) = [104 \ 25]^T$ (pour initialement améliorer la réponse on compense l'effet de la gravitation) ;

$$P_I(0) = P_z(0) = 0_{2 \times 2} \quad (0_{2 \times 2} \text{ matrice } (2 \times 2) \text{ d'éléments nuls})$$

Pour la première simulation on prend:

$\lambda_{1I} = \lambda_{12} = \lambda_{2I} = \lambda_{22} = \lambda = -0.95$; $\beta_p = 300$; $\alpha_I = \alpha_I = \alpha = 550$ et un pas d'échantillonnage $T_e = 1 \text{ ms}$.

Sans charge, les résultats obtenus sont consignés sur la figure (IV.4). On remarque la bonne poursuite des trajectoires de références, l'erreur en position est inférieure à $[0.07^\circ \ 0.012^\circ]^T$ (0.07° pour la première articulation et 0.012° pour la seconde) et devient nulle en régime permanent.

Le signal de commande a une allure lisse en régime transitoire et en régime permanent.

Pour tester l'efficacité de l'algorithme en cas de variation de charge, on introduit une charge de masse $m = 10 \text{ Kg}$ à l'instant $t = 1 \text{ s}$, avec les mêmes paramètres du régulateur,

on obtient donc les résultats de la figure (IV.5). Malgré la violation de la supposition que le modèle du robot est lentement variable par rapport aux variations des gains d'adaptations (puisque la charge est appliquée brusquement), le robot continue remarquablement la poursuite des trajectoires de référence, et l'erreur reste inférieure à $[0.7^\circ \ 0.4^\circ]^T$ et s'annule en régime permanent. Les commandes sont lisses mais présentent un pic de l'ordre de 70 % de la commande en régime permanent à l'instant d'application de la charge. On remarque que ces commandes sont de même allure et ordre de grandeurs que les commandes idéales de la figure (IV.6), calculées en injectant les trajectoires désirées (positions, vitesses et accélération) dans le modèle dynamique. Une des raisons de la bonne poursuite dans ces conditions, c'est que l'hyperstabilité est une condition suffisante et non pas nécessaire. La stratégie de commande utilisée peut donc marcher cas de non satisfaction des conditions exigés.

Pour tester la robustesse par rapport au changement de trajectoires, avec les mêmes paramètres on prend:

$q_I = [0^\circ \ 0^\circ]$ et $q_F = [-45^\circ \ 120^\circ]^T$ avec une durée de transition $t_F = 1$ s. La charge est appliquée à l'instant $t = 0.5$ s. On obtient les résultats de la figure (IV.7). Ces courbes montrent une bonne poursuite des nouvelles trajectoires, l'erreur est inférieure à $[0.7^\circ \ 0.4^\circ]^T$ et s'annule en régime permanent. Les commandes sont lisses.

Pour illustrer les effets des paramètres λ , α et β_p , on prend les trajectoires de la première simulation et on prend un pas d'échantonnage $T_e = 1$ ms

On choisit: $\lambda = -0.99$; $\alpha = 300$; $\beta_p = 300$, on obtient les résultats de la figure (IV.8). On remarque une bonne poursuite mais avec une augmentation de l'erreur dynamique (jusqu'à $[1.35^\circ \ 0.63^\circ]^T$) qui s'annule en régime permanent. Les signaux de commandes sont plus importants avec des pics de l'ordre de 90%.

En diminuant λ , ($\lambda = -0.8$) on obtient les résultats de la figure (IV.9). L'erreur de poursuite a diminué remarquablement (inférieure à $[0.08^\circ \ 0.03^\circ]^T$); par contre les commandes sont

devenues oscillatoires après application de la charge. Ces oscillations deviennent importantes si λ devient plus petit et rend le système instable. Dans la loi de commande, λ présente les pôles de la dynamique de l'erreur imposée, Une faible valeur de λ correspond à une dynamique rapide du robot, ce qui exige une action rapide de l'algorithme pour annuler l'erreur survenant lors de l'application de la charge et une action de commande importante à cause de l'inertie du robot.

Quant au gain β_p , on a pris $\beta_p = 12$. les résultats obtenus sont consignés sur la figure (IV.10) On remarque que les articulations poursuivent les trajectoires, mais avec une erreur relativement élevée (jusqu'à $[1.7^\circ \ 0.75^\circ]^T$). Cela est prévu puisque pour maintenir un couple suffisant, dans le cas de diminution du gain β_p , l'erreur $e_d(t)$ doit obligatoirement augmenter (voir équations (IV.18.g,h)).

Afin de montrer l'efficacité de l'algorithme en présence de bruit de commande, on a superposé au signal utile, un bruit gaussien d'écart-type 10 N.m . Les résultats obtenus sont consignés sur la figure (IV.11). Le robot rejette ces bruits puisque le robot est de nature filtre passe bas.

Contrairement au cas précédent l'algorithme est très sensible aux bruits de mesures, pour des faibles bruits il devient instable. En calculant la commande nécessaire à la poursuite de la trajectoire de référence, le régulateur adaptative n'est lié à l'état du robot qu'à travers les mesures de positions, donc toute erreur sur les positions errone totalement la commande, pour palier à ce problème, on doit introduire un préfiltrage des mesures.

Pour voir l'influence de l'augmentation du pas d'échantillonnage, on a pris $T = 7 \text{ ms}$. Afin de maintenir la stabilité du système, on diminue le gain $\beta_p =$. La figure (IV.12) représente les résultats obtenus. Ces résultats montrent que l'erreur de poursuite est inférieure à . La commande est lisse .

Pour la commande dans l'espace cartésien, On a pris une trajectoire de référence circulaire de centre $(0, \frac{3}{2}l)$, et de rayon $\frac{1}{4}l$ avec l la longueur des liaisons ($l_1=l_2=l=0.432 \text{ m}$)

(cette trajectoire passe par un point de singularité). La coordonnée $yd(t)$ choisie est une fonction cycloïde.

Initialement tous les gains d'adaptations sont nuls.

On a choisit : $\lambda = -0.9$; $\beta_p = 100$; $\alpha = [500 \ 500]$.

La charge, de masse $m = 10 \text{ Kg}$, est appliquée à l'instant $t=1 \text{ sec}$.

La figure (IV.13) montre les résultats obtenus. On remarque que le robot poursuit la trajectoire de référence, mais avec une erreur relativement élevée.

Pour améliorer la poursuite, on a changé les gains comme suivant:

$\lambda = -0.95$; $\beta_p = 400$; $\alpha = [800 \ 800]$.

On a obtenu les résultats de la figure (IV.14). La réponse est améliorée, l'erreur a diminué, et les commandes prennent des évolutions moins oscillatoires.

CONCLUSION

L'utilisation de l'approche de l'hyperstabilité nous a permis la synthèse de la loi de commande adaptative discrète à modèle de référence de type direct. Dans l'espace généralisé et avec un choix convenable des paramètres du régulateur, les résultats obtenus ont montré la robustesse de l'algorithme vis-à-vis des variations de charge ou de trajectoire. Tandis que cet algorithme est relativement robuste quant aux bruits de commandes, il reste très sensible aux bruits de mesures.

Parmi les avantages de Cet algorithme : il ne nécessite ni la connaissance du modèle, ni les mesures des vitesses ou des accélérations. De même les opérations nécessaires pour le calcul de la commande sont simples.

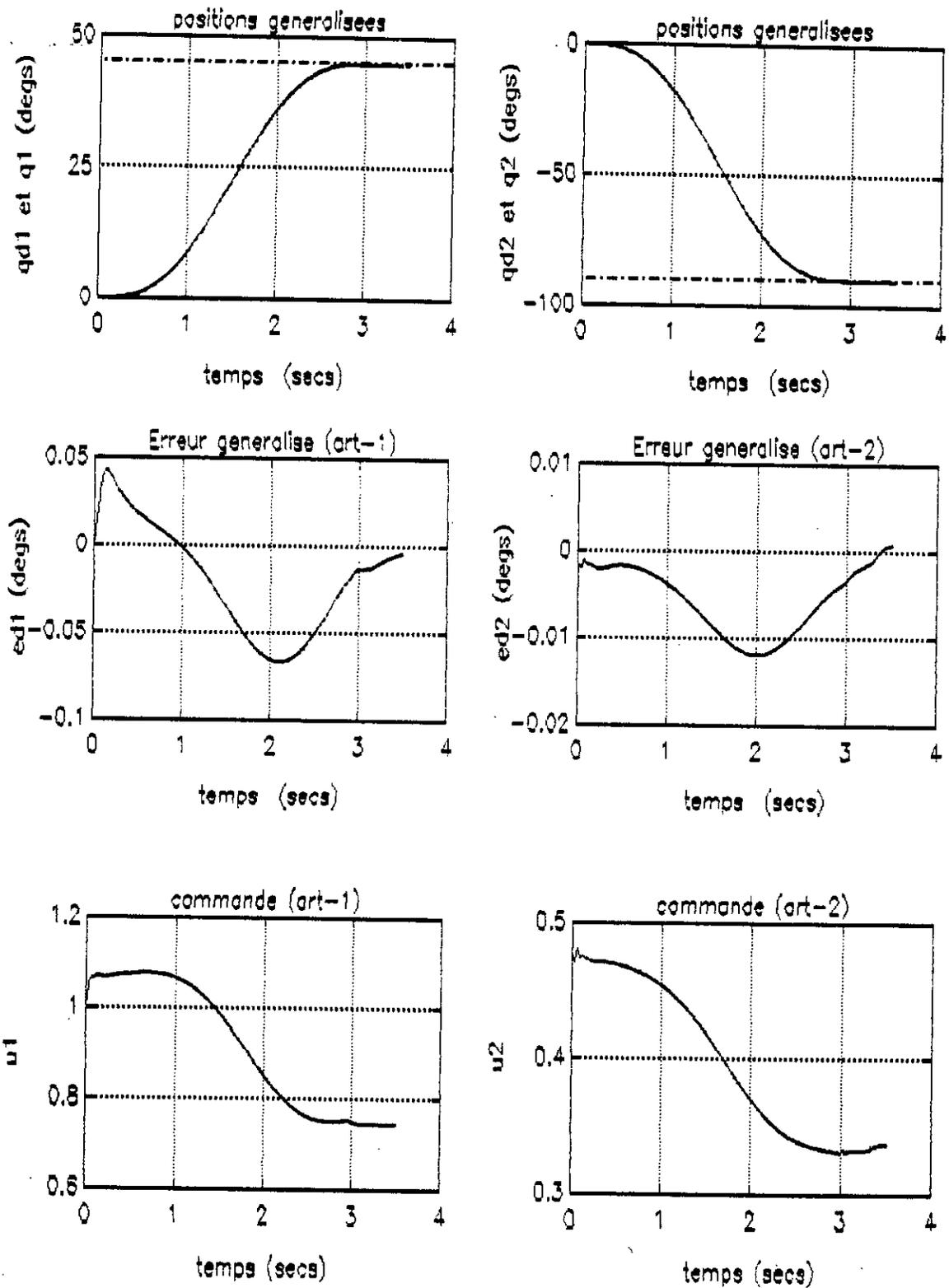


Figure (IV.4): Réponse du système non chargé à des trajectoires cycloïde pour $\beta_p=300, \alpha=550, \lambda=-0.99$ (positions, erreurs généralisées et commandes)

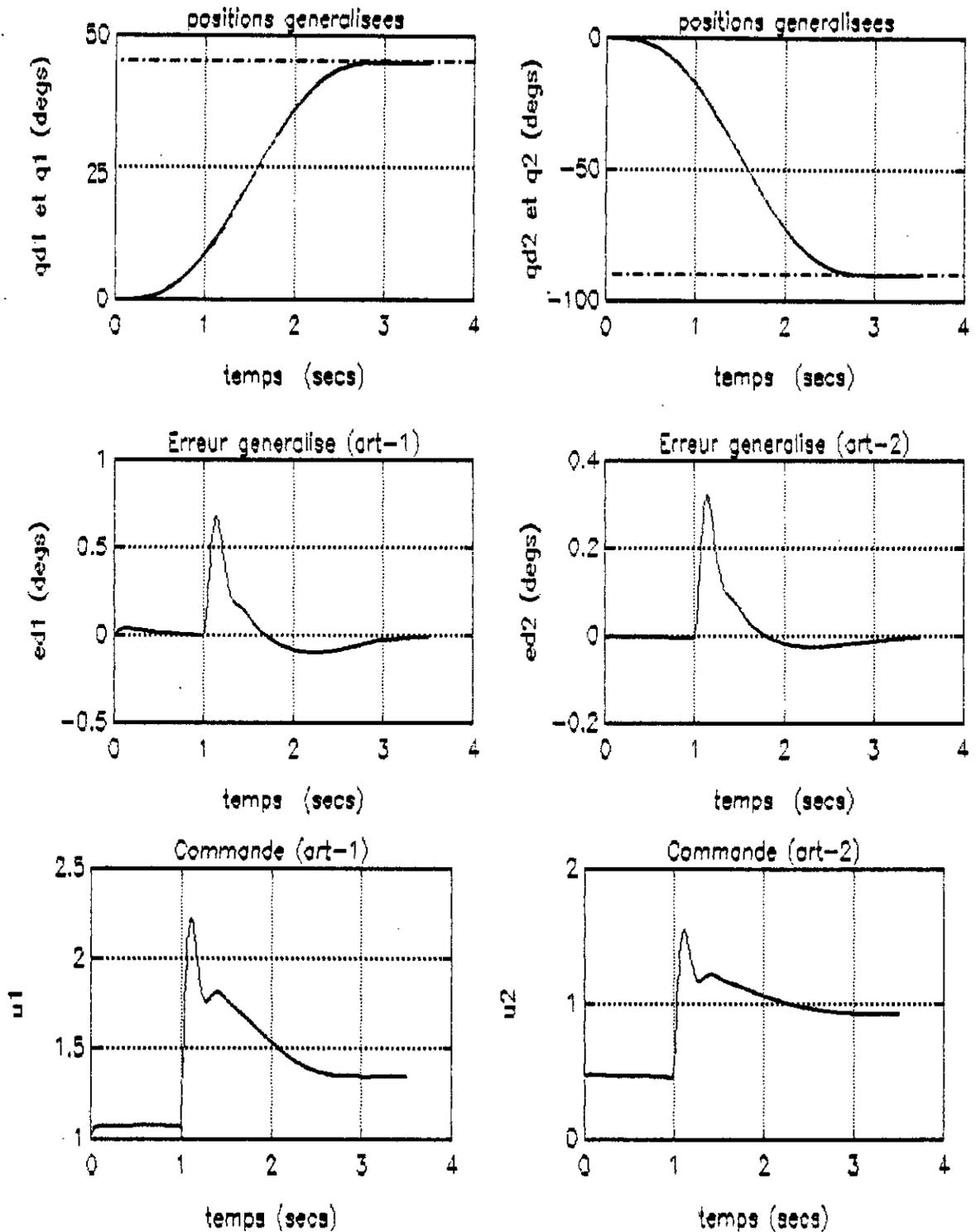


Figure (IV.5): Réponse du système chargé à des trajectoires cycloïde pour $\beta_p=300, \alpha=550, \lambda=-0.99$ (positions, erreurs généralisées et commandes)

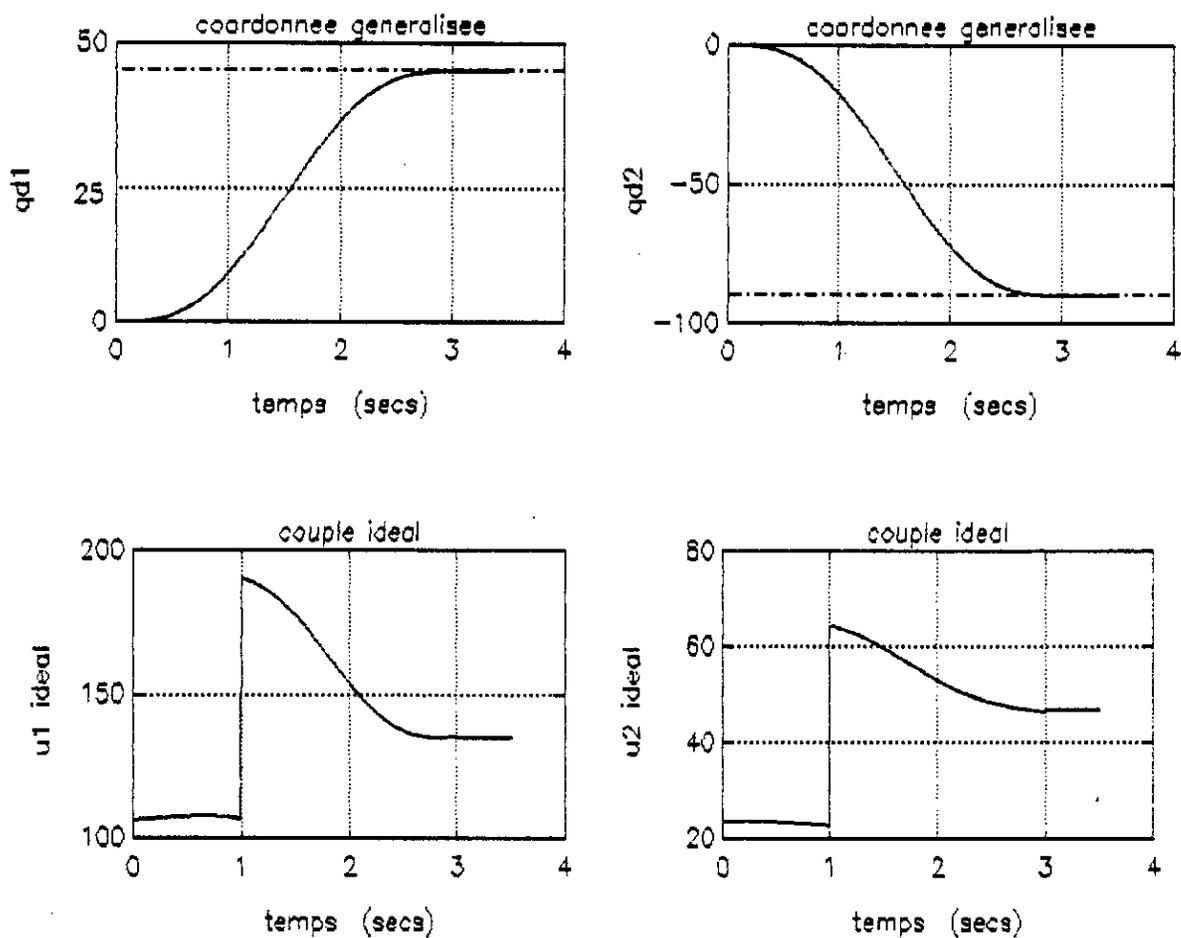


Figure (IV.6): Réponse désirée et commandes idéales pour des trajectoires cycloïdes

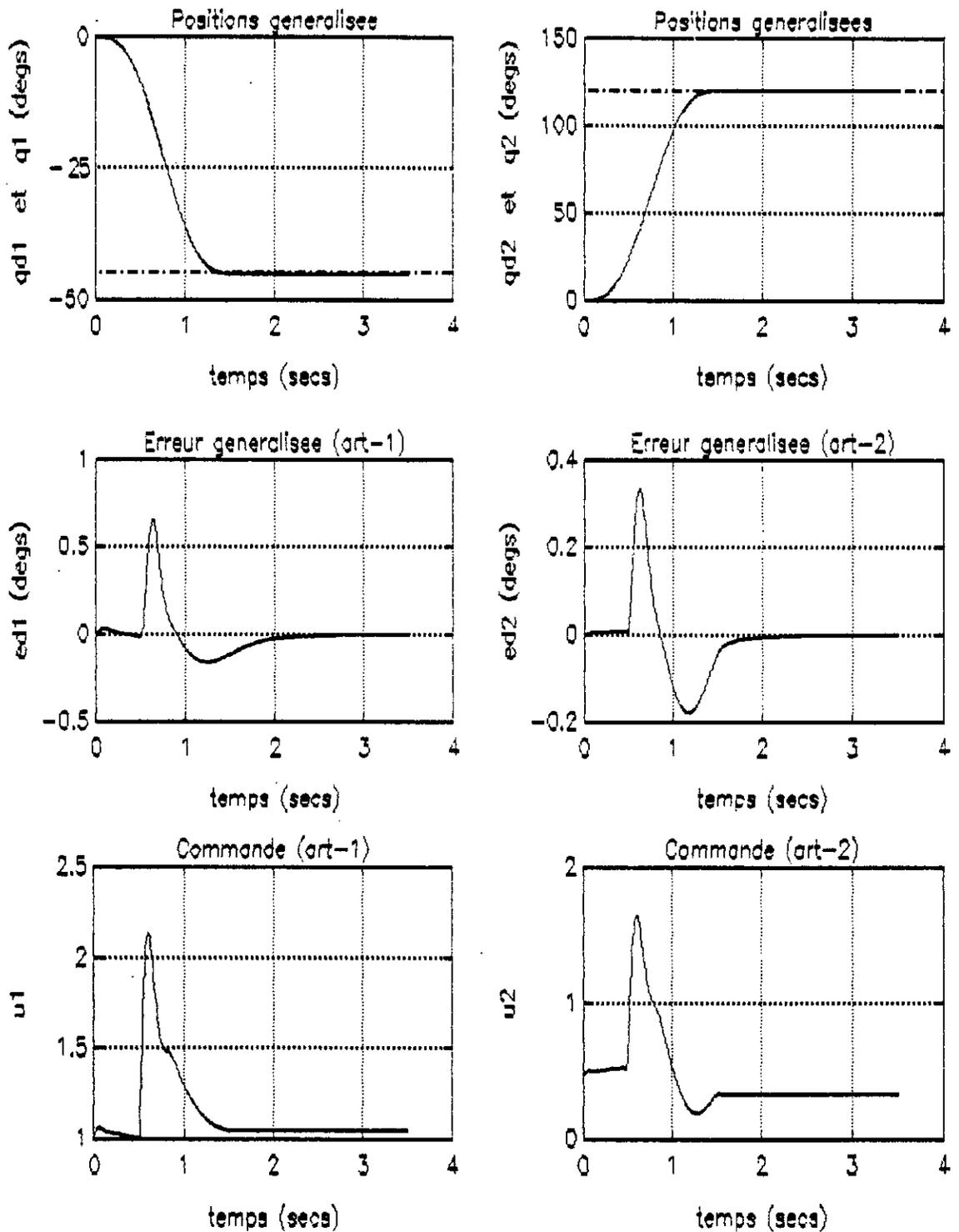


Figure (IV.7): Réponse du système chargé avec changement des trajectoires avec $\beta p=300, \alpha=550, \lambda=-0.99$ (positions, erreurs généralisées et commandes)

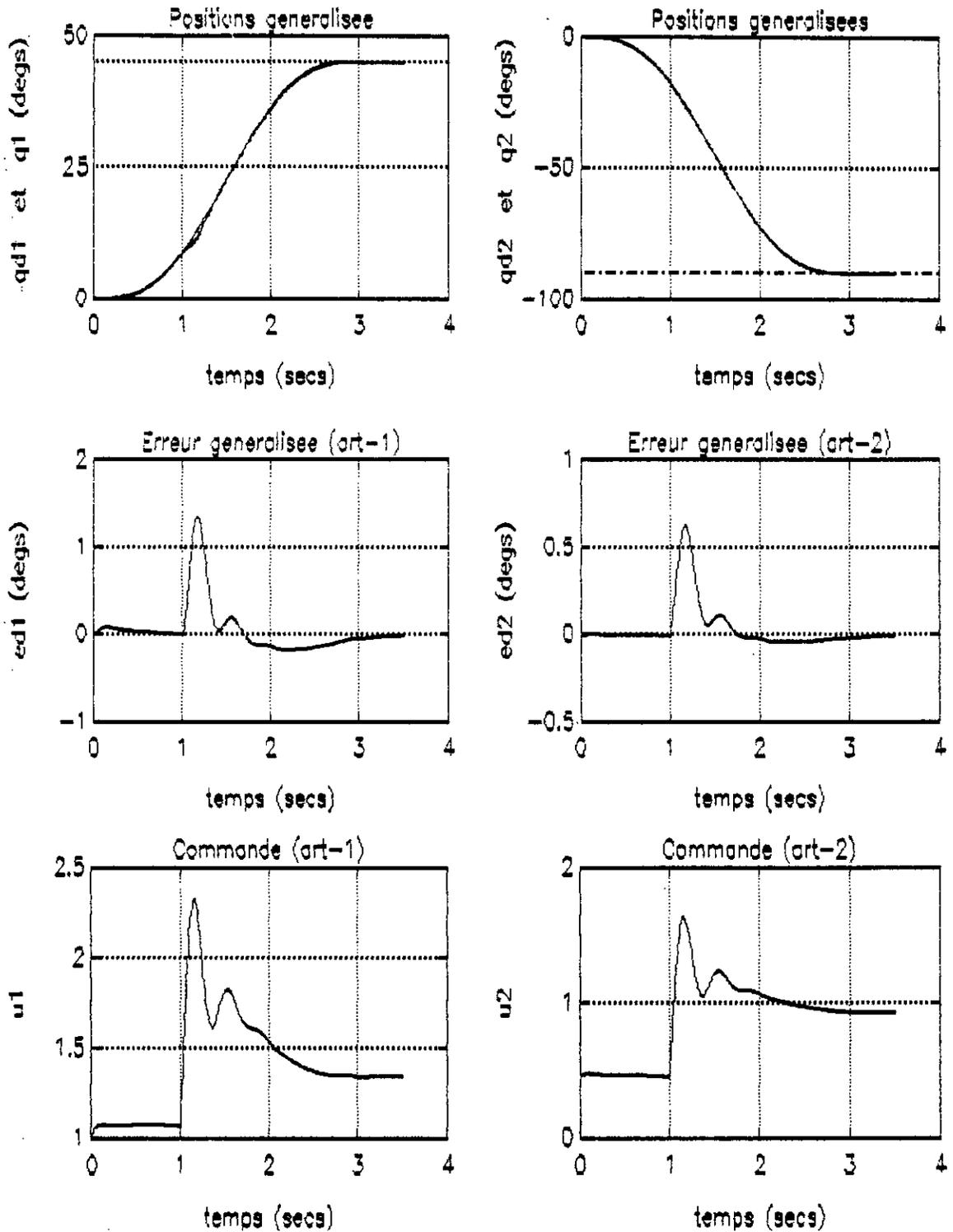


Figure (IV.8): Réponse du système chargé à des trajectoires cycloïde pour $\beta_p=300, \alpha=300, \lambda=-0.99$ (positions, erreurs généralisées et commandes)

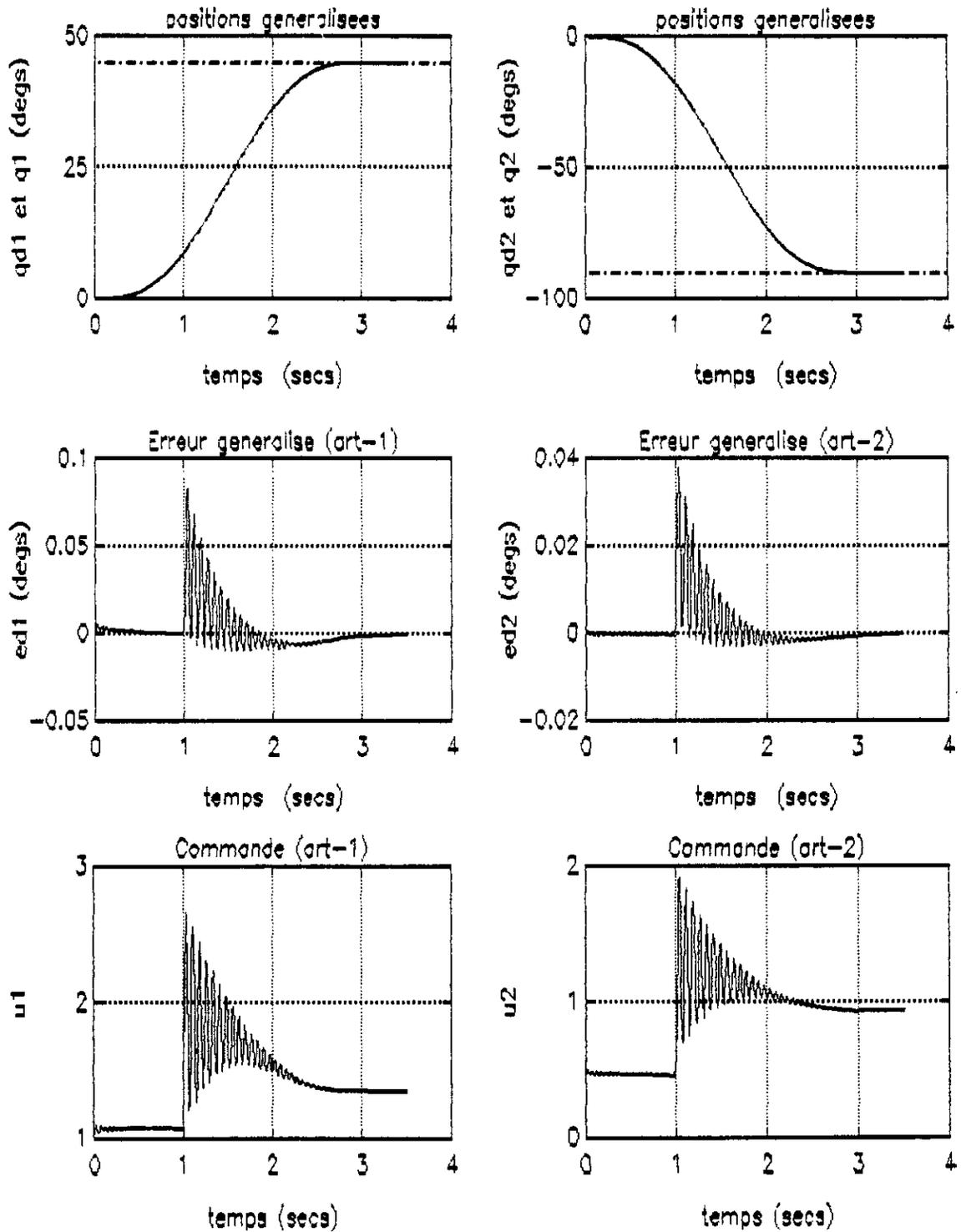


Figure (IV.8): Réponse du système chargé à des trajectoires cycloïde pour $\beta_p=300, \alpha=550, \lambda=-0.8$ (positions, erreurs généralisées et commandes)

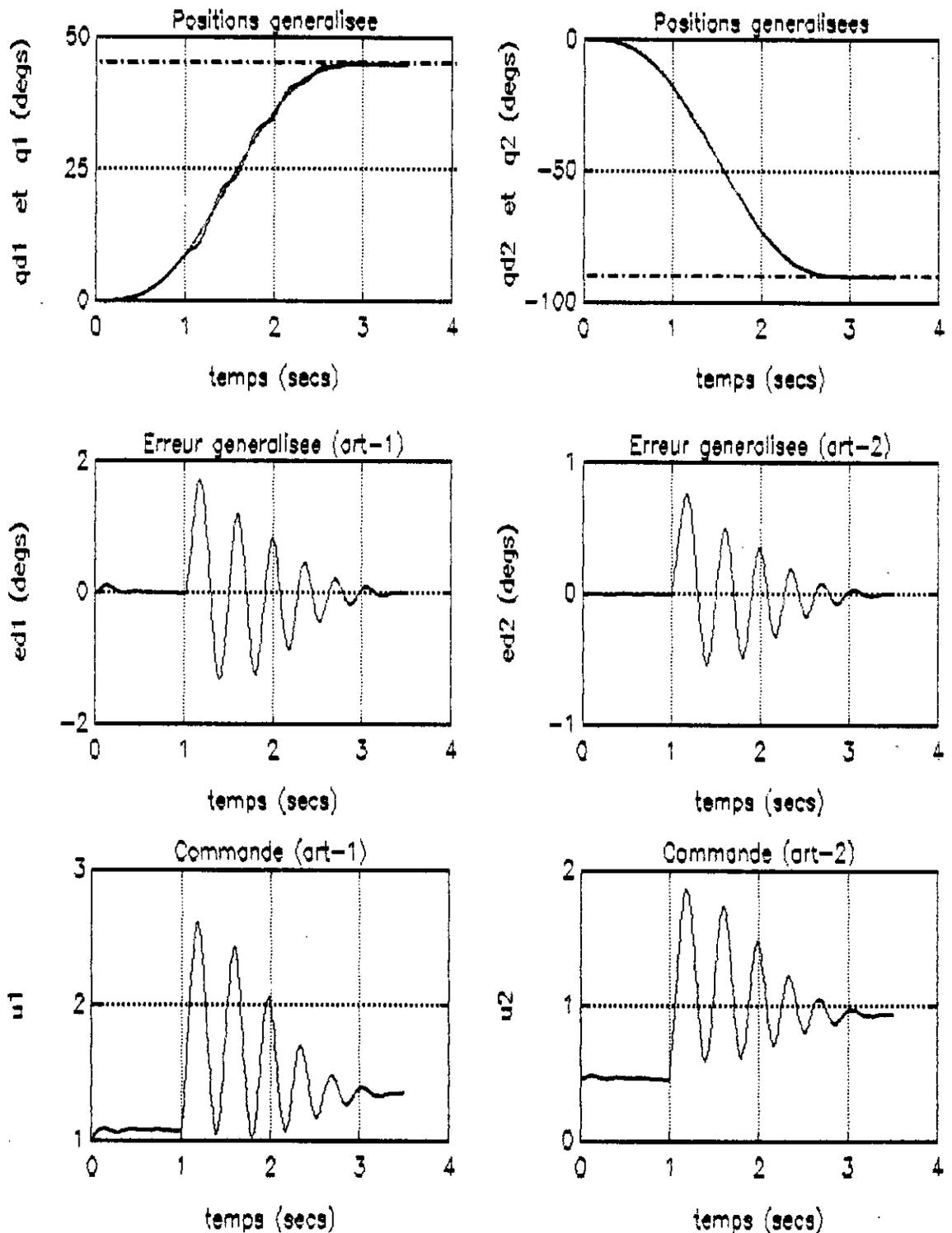


Figure (IV.10): Réponse du système chargé à des trajectoires cycloïde pour $\beta_p=100, \alpha=550, \lambda=-0.99$ (positions, erreurs généralisées et commandes)

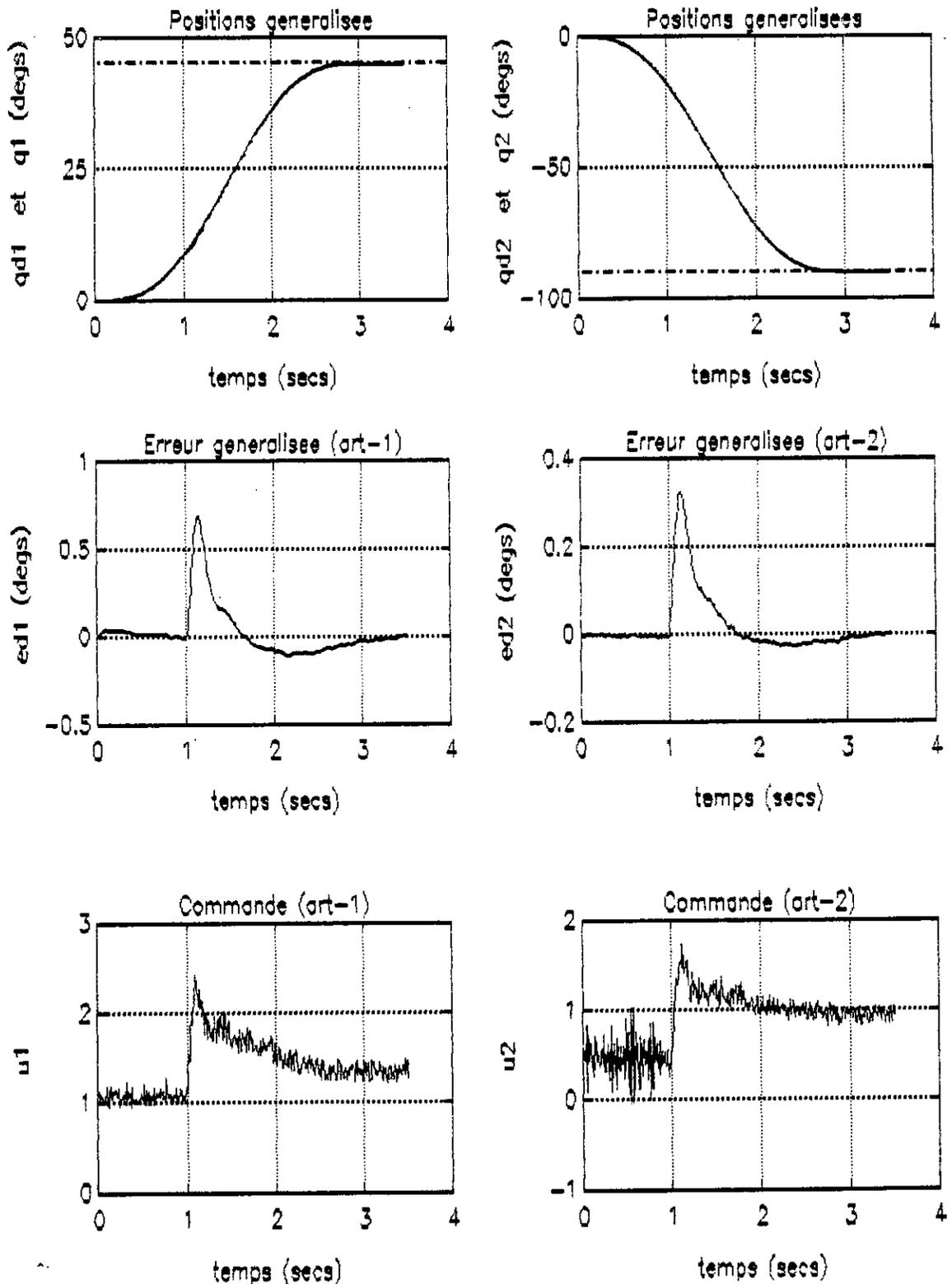


Figure (IV.10): Réponse du système chargé à des trajectoires cycloïde en présence de bruits de commandes avec $\beta p=300, \alpha=550, \lambda=-0.99$ (positions, erreurs généralisées et commandes)

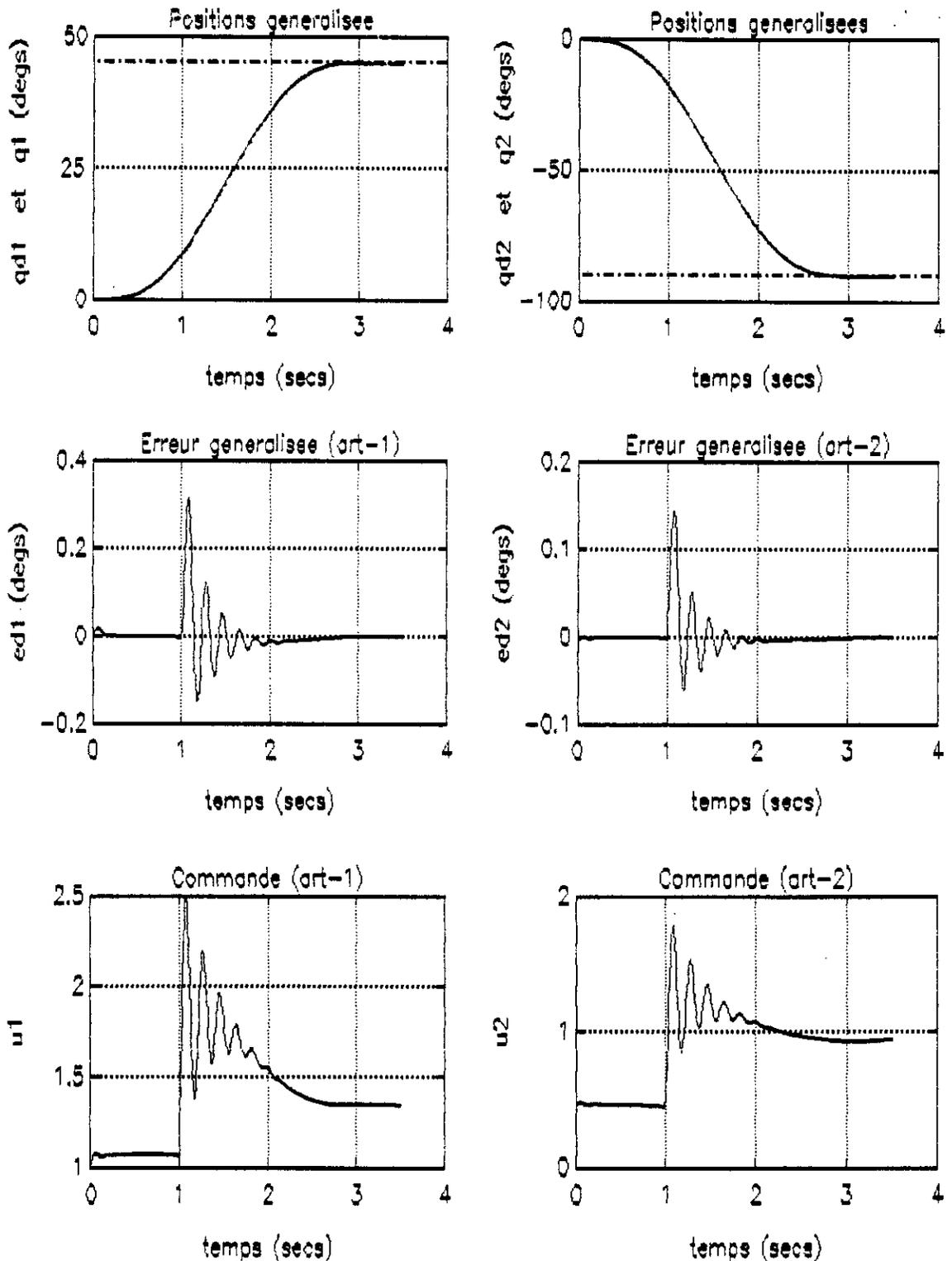


Figure (IV.12): Réponse du système chargé à des trajectoires cycloïdes avec un pas d'échantillonnage $T=7$ ms avec $\beta p=300$, $\alpha=550$, $\lambda=-0.99$ (positions, erreurs généralisées et commandes)

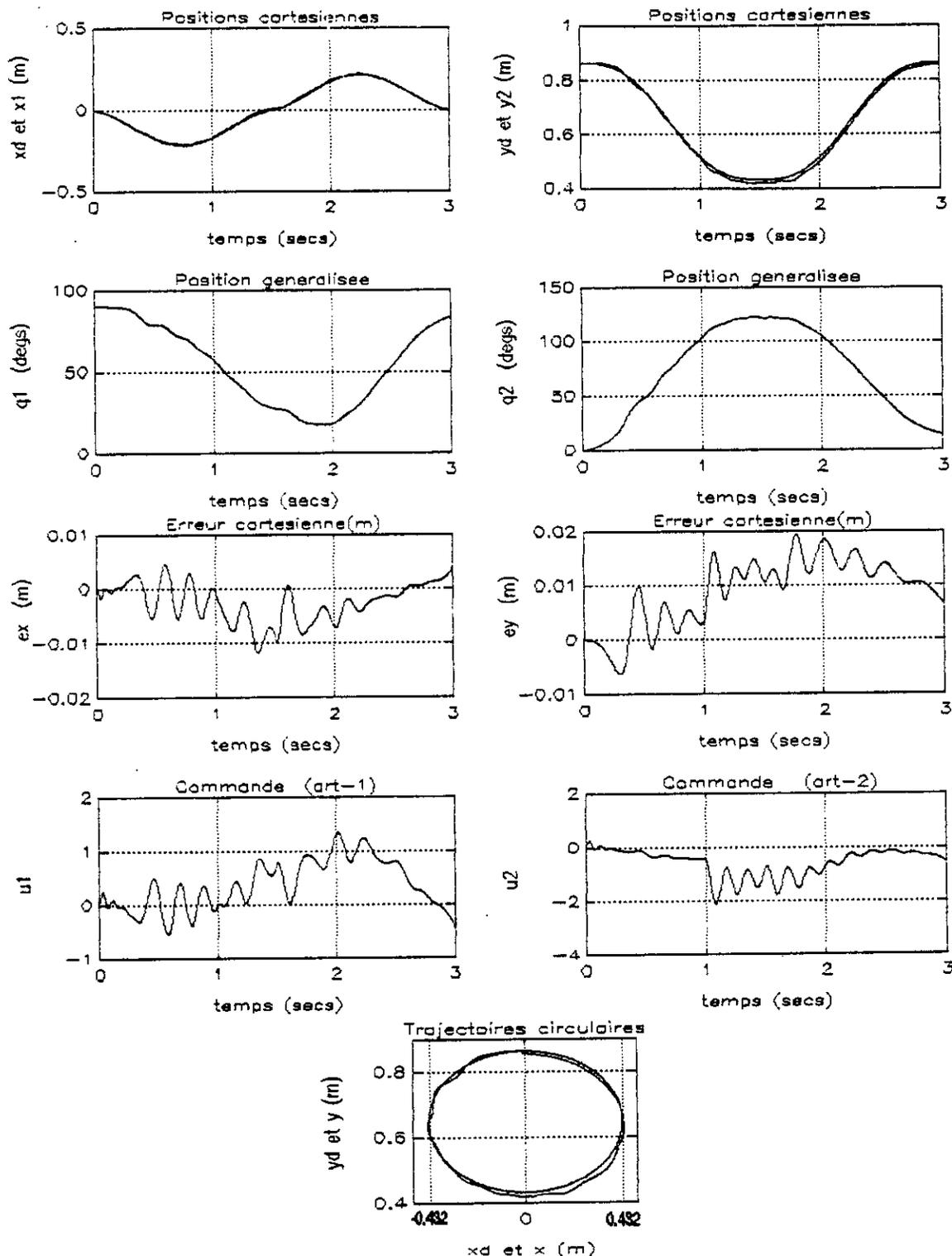


Figure (IV.13): Réponse du système chargé à une trajectoire circulaire avec $\beta p=100, \alpha=500, \lambda=-0.9$ (positions généralisées et cartésiennes, erreurs cartésiennes et commandes)

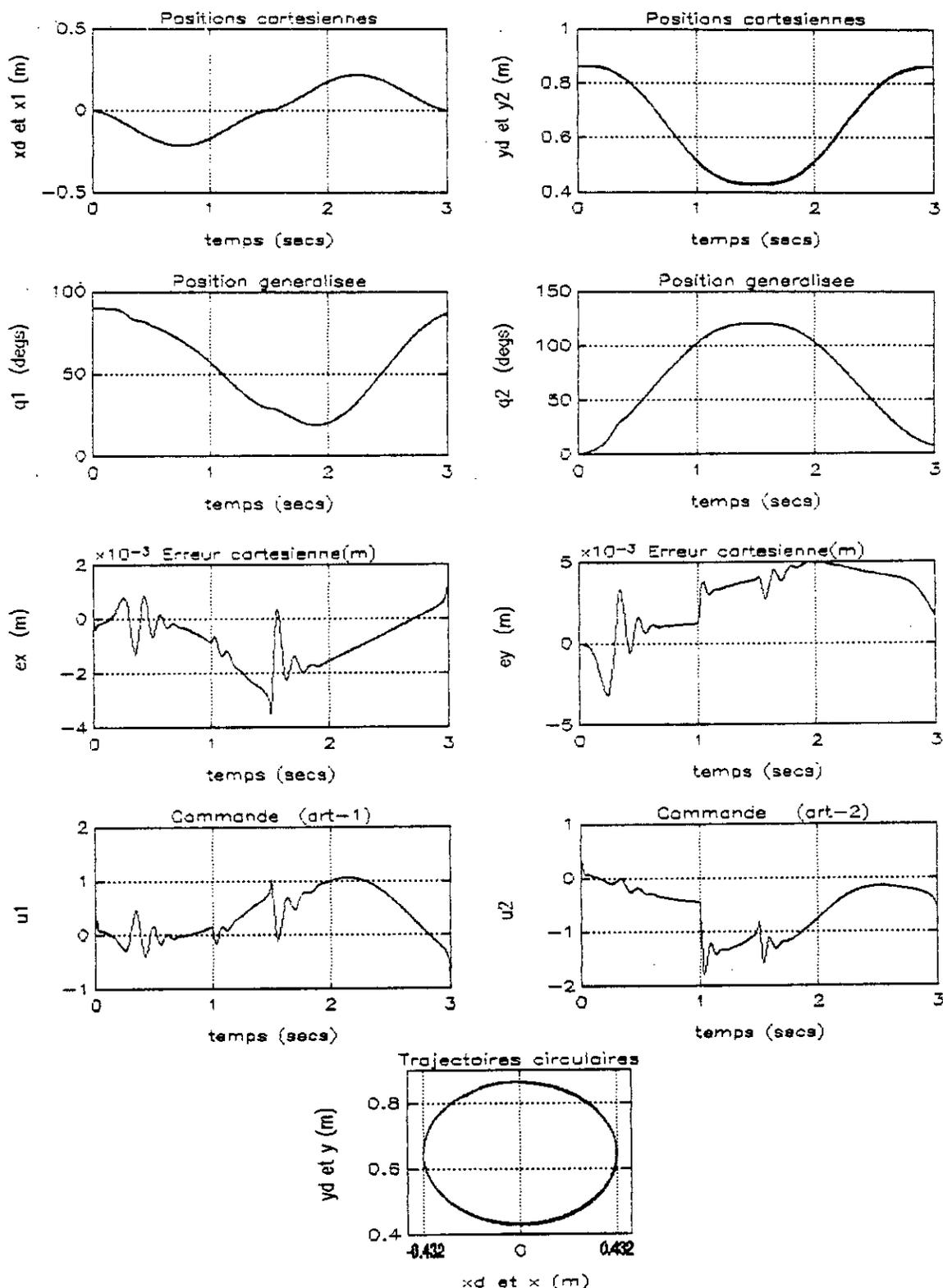


Figure (IV.14) : Réponse du système chargé à une trajectoire circulaire avec $\beta_p=400, \alpha=800, \lambda=-0.95$ (positions généralisées et cartésiennes, erreurs cartésiennes et commandes)

CONCLUSIONS GENERALES

Dans cette étude nous nous sommes proposés d'étudier la commande adaptative non linéaire d'un bras de robot manipulateur à deux degrés de liberté. Deux techniques ont été présentées.

- La commande Passive adaptative à modèle de référence 'C.P.A'.
- La commande adaptative discrète à modèle de référence 'D.M.R.A.C'.

Toutes deux ont été testées par simulation sur un robot à deux degrés de liberté, situé dans un plan vertical.

Le modèle dynamique obtenu par le formalisme d'Euler-lagrange montre les non-linéarités et les couplages dans la dynamique du robot.

La simulation en B.O nous a montré le couplage entre les articulations, la présence d'un déphasage non minimal et d'un comportement intégral (système instable).

Les deux techniques précédentes ont été développées en utilisant l'approche d'hyperstabilité. Celle-ci nous garantit la stabilité globale asymptotique du système en boucle fermée.

Dans la commande passive, la connaissance de la structure du modèle est nécessaire. En exploitant les propriétés du modèle dynamique, on a aboutit à une loi de commande de type proportionnelle-dérivée.

A paramètres connus, la commande passive montre une poursuite satisfaisante de la trajectoire de référence, mais l'introduction de variations paramétriques dégrade les performances du système en boucle fermée. De ce fait, l'utilisation d'une version adaptative s'avère nécessaire. La commande passive adaptative indirecte a été ainsi introduite. L'algorithme est effectué en deux

étapes:une étape d'adaptation paramétrique (liée aux paramètres du modèle),et une deuxième où l'on calcule la commande à partir des paramètres adaptés. Les résultats obtenus par simulation montrent une bonne poursuite de la trajectoire de référence en présence d'incertitudes paramétriques. De meme, un choix convenable des pondérations fait de la loi de commande une loi robuste par rapport aux changements de trajectoires de référence. L'utilisation de cet algorithme dans l'espace cartésien donne des résultats satisfaisants.

La deuxième technique utilisée dans le cadre de ce travail est la commande adaptative discrète à modèle de référence.La stabilité du système en boucle fermée a été analysée par l'approche de l'hyperstabilité.Cette approche garantit une poursuite asymptotique des trajectoires de référence.

L'algorithme de commande nécessite seulement les mesures de positions et les trajectoires de références. Donc, il agit indépendamment d'une connaissance parfaite de la dynamique du robot,de ces paramètres de manipulation,ou de la charge

D'une part,cet algorithme peut etre implémenté directement pour la commande en temps réels,les opérations de calcul etant simples;d'autre part, il offre une grande flexibilité,car disposant de plusieurs de plusieurs paramètres arbitraires.

La sensibilité de l'algorithme aux bruits de mesures confère à celui-ci une utilisation difficile dans les milieux où les mesures sont bruitées.Dans ce cas,il est nécessaire d'introduire un préfiltrage.

Annexe A

TRANSFORMATION DE DENAVIT ET HARTENBERG

Denavite et Hartenberg (*D-H*) proposent une approche généralisée et systématique pour décrire et représenter la géométrie spatiale des liaisons du robot par rapport à un repère référentiel. Cette méthode utilise une matrice (4 x 4) dite de transformation homogène, pour décrire les déplacements des liaisons mécaniques rigides et adjacentes et transformer le problème de la cinématique et de la modélisation à trouver des matrices (4x4) décrivant les déplacements spatiaux des liaisons.

A.1 Paramètres de la transformation de D-H :

Pour déterminer les paramètres utilisés dans la matrice de transformation de D-H on suit les étapes suivantes :

Etapes 1 :

-Numéroter chaque liaison, en commençant de la base notée 0 , jusqu'à celle de l'effecteur (l'élément terminal) notée n . La liaison i se déplace par rapport à la liaison $i+1$.

Etape 2 :

Etablir les repères de chaque articulation en suivant les règles suivantes :

a - L'axe Z_{i-1} est choisi le long de l'axe de mouvement de l'articulation i .

b - L'axe X_i est choisi perpendiculaire à Z_{i-1} dont le sens peut être choisi arbitrairement (ou $X_i = Z_{i-1} \wedge Z_i$).

c - L'axe Y_i est choisi de telle sorte à former un trièdre droit

Etape 3 :

Définir les paramètres de la transformation :

θ_i : angle entre X_{i-1} et X_i , obtenue par rotation de X_{i-1} vers X_i autour de Z_{i-1} .

d_i : Coordonnée de O_i dans R_{i-1} (le long de Z_{i-1} .)

a_i : distance entre Z_{i-1} et Z_i le long de X_i

α_i Angle entre Z_{i-1} et Z_i .

Ces paramètres sont représentés sur la *figure (Ann.A.1)*.

A.2 Matrices de la transformation de D-H :

La matrice T , de passage d'un repère $R_i (O_i X_i Y_i Z_i)$, à un repère $R_{i+1} (O_{i+1} X_{i+1} Y_{i+1} Z_{i+1})$ est donnée par [4][2] :

$$T_{i-1}^i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i s\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i c\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, i=1,4 \quad (\text{Ann A.1})$$

La matrice de passage du repère R_i vers le repère $R_j (j < i)$ est donnée par :

$$T_j^i = \sum_{k=j}^{i-1} T_k^{k+1} \quad (\text{Ann A.2})$$

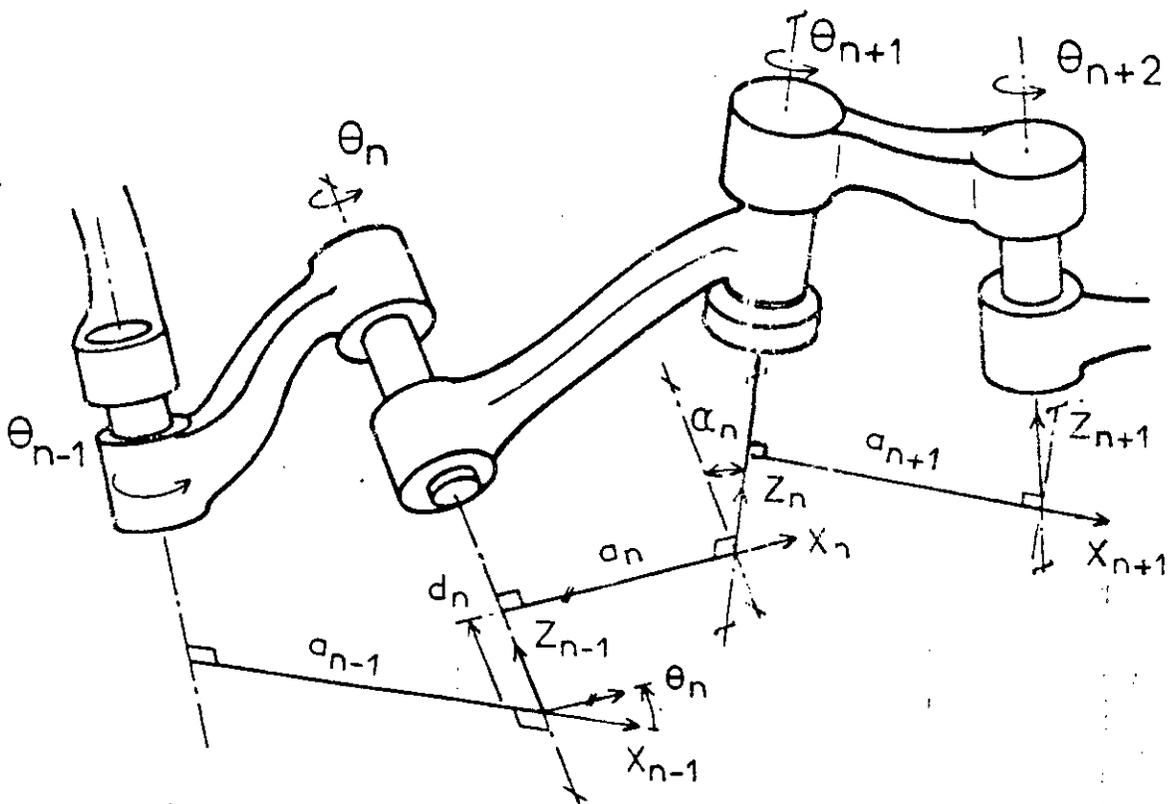


Figure (Ann.1) Représentation des repères de la transformation de D-H

Annexe B

POSITIVITE DU MODELE DU ROBOT

Une propriété intéressante et utile pour démontrer la positivité du robot c'est que la matrice $N(q, \dot{q})$ définie par :

$$N(q, \dot{q}) = \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \quad (\text{Ann B.1})$$

est une matrice **Antisymétrique** :

$$\forall x \in R^n \quad x^T [\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})] x = 0 \quad (\text{Ann B.2})$$

Où encore :

$$N(q, \dot{q})^T = -N(q, \dot{q}) \quad (\text{Ann B.3})$$

B.1 Antisymétrie :

Pour établir l'expression des éléments de $N(q, \dot{q})$, considérons l'équation de Euler-Lagrang :

$$\tau(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{E}_d}{\partial \dot{q}} \quad (\text{Ann B.4})$$

avec :

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - E_p \quad (\text{Ann B.5})$$

ou sous la forme de l'équation (I.13.a) :

$$\tau(t) = M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) + H(\dot{q}) \quad (\text{Ann B.6})$$

ou :

$$V(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} = \dot{M}(q)\dot{q} - \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial q} \quad (\text{Ann B.7})$$

où l'élément i du vecteur V s'écrit

$$v_i(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{k=1}^{k=n} v_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (\text{Ann B.8})$$

Avec

$$v_{ijk} = \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \quad (\text{Ann B.9})$$

on peut écrire l'équation précédente sous la forme :

$$v_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j \quad (\text{Ann B.10})$$

d'après l'équation (Ann B.2), les éléments C_{ij} et N_{ij} s'écrivent :

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \dot{M}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \quad (\text{Ann B.11})$$

$$N_{ij} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \quad (\text{Ann B.12})$$

$$N_{ij} = -N_{ji} \quad (\text{Ann B.13})$$

Donc la matrice N est une matrice Antisymétrique .

B.2 Vérification de l'inégalité de Popov :

L'inégalité à vérifier est donnée par (III.9) :

$$\forall t \geq 0, \exists \gamma_0 > 0 \quad ; \quad I = \int_0^t \dot{e}_s^T(t) \tilde{\tau}(t) dt \geq -\gamma_0^2 \quad (\text{Ann B.14})$$

avec :

$$\tilde{\tau}(t) = M(q)\ddot{e}_s + C(q, \dot{q})\dot{e}_s \quad (\text{Ann B.15})$$

L'inégalité de Popov s'écrit :

$$I = \int_0^t (\dot{e}_s^T M(q)\ddot{e}_s + \dot{e}_s^T C(q, \dot{q})\dot{e}_s) dt \quad (\text{Ann B.16.a})$$

D'où

$$I = \int_0^t \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{e}_s^T M(q)\dot{e}_s) - \frac{1}{2} \dot{e}_s^T \dot{M}(q)\dot{e}_s + \dot{e}_s^T C(q, \dot{q})\dot{e}_s \right) dt \quad (\text{Ann B.16.b})$$

mais d'après la propriété d'antisymétrie, on a :

$$\dot{e}_s^T (\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}))\dot{e}_s = 0 \quad \forall \dot{e}_s \in \mathbb{R}^n \quad (\text{Ann B.17})$$

Donc :

$$I = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{dt} (\dot{e}_s^T M(q) \dot{e}_s) dt \geq -\frac{1}{2} \dot{e}_s^T(0) M(q(0)) \dot{e}_s(0) = -\gamma_0^2 \quad (\text{Ann B.18})$$

d'où l'inégalité (Ann B.1) est vérifiée .

Annexe C

**DEMONSTRATION DE L'HYPERSTABILITE DE LA L' A.A.P
POUR C.P.A.**

L'inégalité à satisfaire est :

$$I = - \int_0^t \dot{e}_r^T (W(q, \dot{q}, \ddot{q}, u) \tilde{\theta}(v)) dv \geq -\gamma_1^2 \quad (\text{Ann C.1})$$

Où : $\gamma_1^2 < \infty \forall t \geq 0$.

Pour une loi d'adaptation de type : Intégrale + Proportionnel de l'A.A.P, l'erreur du vecteur des paramètres $\tilde{\theta}(t)$ est régie par l'équation suivante :

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = - \int_0^t F_r W^T(q, \dot{q}, \ddot{q}, u) \dot{e}_r dv - F_r W^T(q, \dot{q}, \ddot{q}, u) \dot{e}_r + \tilde{\theta}(0) \quad (\text{Ann C.2})$$

En substituant l'expression de $\tilde{\theta}(t)$ dans (Ann C.1), l'inégalité ci-dessus peut être mise sous la forme de deux inégalités définies par :

$$I_1 = - \int_0^t \dot{e}_r^T (W(q, \dot{q}, \ddot{q}, u) F_r W^T(q, \dot{q}, \ddot{q}, u)) \dot{e}_r dt \geq -\gamma_{21}^2 \quad (\text{Ann C.3})$$

$$I_2 = - \int_0^t \dot{e}_r^T W(q, \dot{q}, \ddot{q}, u) \left(\int_0^t F_r W^T(q, \dot{q}, \ddot{q}, u) \dot{e}_r dv - \tilde{\theta}(0) \right) dt \geq -\gamma_{22}^2 \quad (\text{Ann C.4})$$

Où : $\gamma_{21}^2 < \infty$; $\gamma_{22}^2 < \infty$

F_p : une matrice ($m \times m$) semi-définie positive, donc le terme entre parenthèses dans I_1 satisfait l'inégalité suivante :

$$\forall t \geq 0 \quad W(q, \dot{q}, \ddot{q}, u) F_r W^T(q, \dot{q}, \ddot{q}, u) \geq 0 \quad (\text{Ann C.5})$$

On conclue que l'inégalité (Ann C.3), est vérifiée pour tout signal $\dot{e}_r(t)$ avec $\gamma_{21} = 0$.

La matrice F_i est définie positive, alors elle peut être mise sous la forme suivante :

$$F_i = S S^T \quad (\text{Ann C.6})$$

Où : $S(m \times m)$ matrice non singulière .

On définit la matrice auxiliaire donnée par :

$$W^* = W(q, \dot{q}, \ddot{q}, u) S \quad (\text{Ann C.7.a})$$

$$W^{*T} = S^T W^T(q, \dot{q}, \ddot{q}, u) \quad (\text{Ann C.7.b})$$

Donc l'équation (Ann.C.4), devient :

$$I_2 = - \int_0^t \dot{e}_r^T W^* \left(\int_0^t W^{*T} \dot{e}_r \, dv - S^{-1} \tilde{\theta}(0) \right) dt \quad (\text{Ann C.8})$$

Ou sous la forme :

$$I_2 = - \int_0^t \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (f^T(t) f(t)) dt \quad (\text{Ann C.9})$$

Avec

$$f(t) = \int_0^t W^{*T} \dot{e}_r \, dv - S^{-1} \tilde{\theta}(0) \quad (\text{Ann C.10})$$

De l'équation (Ann C.9) , on peut écrire :

$$I_2 \geq - \frac{1}{2} f^T(0) f(0) \quad (\text{Ann C.11})$$

Cependant de l'équation (Ann C.10), on a :

$$f^T(0) f(0) = \tilde{\theta}^T(0) K_i^{-T} \tilde{\theta}(0) \quad (\text{Ann C.12})$$

La matrice K_i^{-T} est définie positive alors il suffit de choisir :

$$\gamma_n^2 = - \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T(0) K_i^{-T} \tilde{\theta}(0) \quad (\text{Ann C.13})$$

Donc l'inégalité définie par (Ann C.1) est Vérifiée .

Annexe D

VÉRIFICATION DE LA S.R.P de $H(z)$

Le problème est de vérifier que la matrice $H(z)$ définie ci-dessous est une matrice strictement réelle positive (S.R.P) :

$$H(z) = DB + D\mathcal{E}(zI_{2n} - \mathcal{E})^{-1}B \quad (\text{Ann D.1})$$

En utilisant le *théorème 5* du *chapitre II*, la matrice précédente est strictement réelle positive s'il existe :

- R, S matrices symétriques définies positive de dimension $(2n \times 2n)$

- K, L matrices de dimensions $(n \times n), (2n \times n)$ respectivement telque :

$$\mathcal{E}^T R \mathcal{E} - R = -LL^T - S \quad (\text{Ann D.2. a})$$

$$B^T R \mathcal{E} + K^T L^T = D\mathcal{E} \quad (\text{Ann D.2. b})$$

$$K^T K = (DB) + (DB)^T - B^T R B \quad (\text{Ann D.2. c})$$

Avec

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_2 & R_3 \end{bmatrix} \quad (\text{Ann D.3})$$

On choisit :

$$D = [R_2 \quad R_3] \quad (\text{Ann D.4})$$

On remplace D, R et B (donnée par (IV.10.b), dans l'équation (Ann D.4), on obtient :

$$K = \text{dig}\{\sqrt{r_{3i}}, i = 1 \dots n\} \quad (\text{Ann D.5})$$

Pour trouver la matrice L , remplaçons R, B, D et K dans (Ann.D.3), on obtient :

$L = O_{2n \times n}$: avec $O_{2n \times n}$ matrice $(2n \times n)$ d'éléments nuls .

Pour que la matrice S soit symétrique, on choisit :

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & O_{n \times n} \\ O_{n \times n} & S_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Ann D.6})$$

$$S_i = \text{dig}\{s_{ij} > 0, i = 1 \dots 2, j = 1 \dots n\}$$

Si on remplace S, R, L et C (donnée par (IV 13.b)), on trouve la solution suivante:

$$r_{1i} = s_{1i} + \alpha_i c_{2i}^2 (1 + c_{2i}) \quad (\text{AnnD.7.a})$$

$$r_{2i} = \alpha_i c_{2i} c_{1i} \quad (\text{AnnD.7.b})$$

$$r_{3i} = \alpha_i (1 + c_{2i}) \quad (\text{AnnD.7.c})$$

avec :

$$\alpha_i = \frac{s_{1i} + s_{2i}}{(1 - c_{2i})((1 + c_{2i})^2 - c_{2i}^2)} \quad i = 1 \dots n \quad (\text{Ann D.8})$$

il reste à démontrer que la matrice R soit définie positive, il faut que les racines de l'équation caractéristique

$$\text{Det}(s I_{2n} - R) = 0 \quad (\text{Ann D.9})$$

Soient à parties réelles positives. D'après l'équation (Ann D.3):

$$\Delta R(s) = \text{Det}\left(\prod_{i=1}^n (s^2 - (r_{1i} + r_{3i})s + (r_{1i}r_{3i} - r_{2i}^2))\right) = 0 \quad (\text{Ann D.10})$$

Une condition nécessaire est suffisante pour que la matrice R soit définie positive, les coefficients de $\Delta R(s)$ soient positifs, ce qui est équivalent d'après les équations

(Ann D.9-11) [13]:

$$\alpha_i > 0 \quad (\text{AnnD.11.a})$$

$$1 + c_{2i} > 0 \quad (\text{AnnD.11.b})$$

$$1 + c_{2i} - c_{1i} > 0 \quad (\text{AnnD.11.c})$$

$$1 + c_{2i} + c_{1i} > 0 \quad (\text{AnnD.11.d})$$

pour vérifier ces inégalités, considérons le polynôme caractéristique de l'erreur idéal $e_m(k)$ de chaque articulation :

$$\delta_i(z) = (z + \lambda_{1i})(z + \lambda_{2i}) = z^2 + c_{1i}z + c_{2i} \quad i = 1 \dots n \quad (\text{Ann D.12})$$

Comme, $|\lambda_{1i}| < 1, |\lambda_{2i}| < 1$ d'après l'équation précédente on a :

$$1 + c_{2i} > 0 \quad i = 1 \dots n \quad (\text{AnnD.13.a})$$

$$\delta_i(1) = 1 + c_{2i} - c_{1i} > 0 \quad i = 1 \dots n \quad (\text{AnnD.13.b})$$

$$|\delta_i(-1)| = 1 + c_{2i} + c_{1i} > 0 \quad i = 1 \dots n \quad (\text{AnnD.13.c})$$

$$|\delta_i(0)| = c_{2i} < 1 \quad i = 1 \dots n \quad (\text{AnnD.13.d})$$

ce qui montre que les inégalités (Ann D.13.a-d) sont vérifiées. Donc la matrice R est symétrique définie positive.

Comme résultat la matrice $H(z)$ est strictement réelle positive, en plus on a :

$$D = [R_2 \quad R_3]$$

les éléments de $R1$ et $R2$ sont données par (Ann D.7.b-c), avec $\alpha_i > 0 \quad i=1..n$ des nombres arbitraires positifs.

REFERENCES

REFERANCES

- [1] **A.Debilou.** 'Commande dynamique des robots manipulateurs étude comparative de deux approches de commande non adaptative et adaptative'. Ingenieur d'état en automatique I.N.H.C 1993.
- [2] **L.Guenfai.** 'Etude des différentes stratégies de la commande adaptative ': Thèse de magister en automatique 1995.
- [3] **H.Seraji.** 'A new approach of manipulators 'Journal of dynamics systems, measurements and control. Vol 109/199. september 1987.
- [4] **K.S.Fu.** 'robotics : Control, sensing, vision and antelliegante ' McGaw Hill 1987.
- [5] **H.Seraji.** 'Desentralized adaptative control of manipulators theory: simulation and experimentation'. I.E.E.E.Transaction on robotics and Vol.5.N°2 April
- [6] **I.D.Landau,S.L.Dugard:** 'Commande adaptative:aspets pratique et théorique'. Masson 1986.
- [7] **H.Seraji** 'An approach to multivariabe control of manipulators' Transaction of the A.S.M.E, Vol 109, June 1987.
- [8] **N.K. M'Sirdi** : 'Modélisation, analyse et commande de processus: application à la commande des systèmes robotiques'. Genie robotique et production, LRP université de versaille et Quentin (U.V.S.Q) 1993.
- [9] **I.D.Landau.** 'Adaptive control .The Model Reference Approach'. Marcel dekker 1979.
- [10] **I.D.Landau et R.Horwitz** 'Applications of the passive systems approach to the stabilite, analysis of adaptive controlllers for Robot manipulators': International Journal of adaptative control and signal procecing, Vol. 3,pp23.38 [1989].

- [11] **J.Jacques E.Slotine.**'Adaptive mnipulators control : A case study '. IEEE, Transaction on automatic control, Vol.33, N°11. November 1988.
- [12] **J. J.E.Slotine.** 'Applied non-linear control'. Sw.IIi, Prentice hall, MIT1991.
- [13].**M.Tarokh.**'A discret time aptative control scheme for robot manipulators'. : Journal of Robotics systems 145.168.(1990).