

5/95

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DÉPARTEMENT  
OPTION

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة —  
BIBLIOTHEQUE —  
Ecole Nationale Polytechnique

GÉNIE ÉLECTRIQUE  
AUTOMATIQUE

PROJET DE FIN D'ÉTUDES

THÈME

COMMANDE DÉCENTRALISÉE DES  
SYSTÈMES COMPLEXES :  
APPLICATION A UN RÉSEAU  
ÉLECTRIQUE.

DIRIGÉ PAR  
D.BOUKHETALA  
A.HELLAL

ÉTUDIÉ PAR  
B.AMMARI  
A.B.TAHARI

PROMOTION  
JUN 95

E.N.P 10, Avenue Hacem Badi El-harrach. ALGER

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

**DÉPARTEMENT  
OPTION**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

**GÉNIE ÉLECTRIQUE  
AUTOMATIQUE**

**PROJET DE FIN D'ÉTUDES**

**THÈME**

**COMMANDE DÉCENTRALISÉE DES  
SYSTÈMES COMPLEXES :  
APPLICATION A UN RÉSEAU  
ÉLECTRIQUE.**

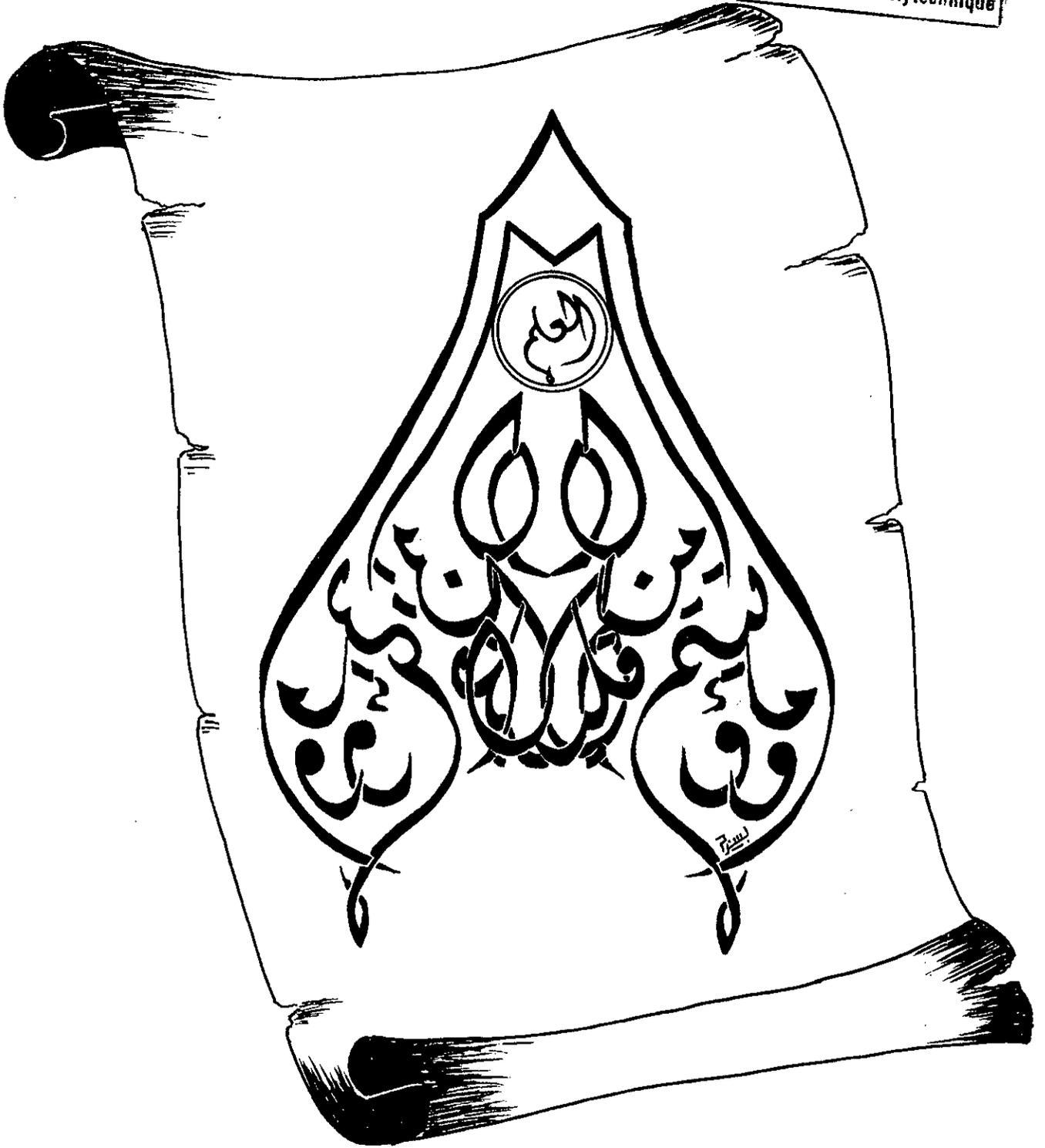
**DIRIGÉ PAR  
D.BOUKHETALA  
A.HELLAL**

**ÉTUDIÉ PAR  
B.AMMARI  
A.B.TAHARI**

**PROMOTION  
JUN 95**

**E.N.P 10, Avenue Hacén Badi El-harrach. ALGER**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique



## *Dédicace*

*A toute ma famille...*

*A mes amis...*

*Je dédie ce modeste travail*

*Belgacem*

*A mes parents...*

*A toute ma famille...*

*A toutes les personnes qui me sont chères*

*Je dédie ce modeste travail*

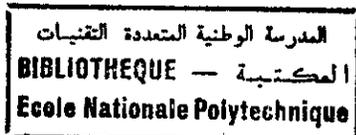
*Kadda*

## Remerciements

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à nos deux promoteurs Messieurs D.BOUKHETALA et A.HELLAL qui ont dirigés ce travail et nous ont prodigués de nombreux conseils.

Nous voudrions également exprimer notre gratitude à tous les enseignants de l'Ecole Nationale Polytechnique et en particulier ceux du département de Génie Electrique.

# Sommaire



Introduction générale .....	1
<b>Chapite I</b> <b>Généralités</b>	
1.Introduction .....	3
1.1.L'analyse .....	3
1.2.Etapes intermédiaires.....	3
1.3.Synthèse et algorithmes de commande.....	4
2.Décomposition d'un système interconnecté .....	6
Conclusion .....	11
3.Notion de modes fixes.....	12
3.1.Commande centralisée et commande décentralisée .....	12
3.1.1.La commande centralisée .....	12
3.1.2.La commande décentralisée.....	12
3.2.Généralités .....	13
3.3.Définition d'un mode fixe .....	14
4.Caractérisation des modes fixes .....	15
4.1.Caractérisation par l'approche d'état .....	16
4.2.Caractérisation par les matrices polynomiales .....	16
4.3.Conclusion .....	18
<b>Chapitre II</b> <b>Commande décentralisée optimale</b>	
Commande décentralisée optimale .....	20
1.Introduction.....	20
2.Methode de l'optimalité locale .....	20
2.1.L'optimalité globale.....	22
2.2.Conclusion.....	28
3.Commande optimale par retour de sorties par la méthode du gradient .....	29
3.1Conclusion .....	37
<b>Chapite III</b> <b>Commande par placement de pôles</b>	
1.Introduction .....	38
2.Commande décentralisée par placement de pôles .....	38
3.Conclusion.....	52
<b>Chapitre IV</b> <b>Modélisation d'un réseau électrique</b>	
1.Modélisation d'un réseau électrique.....	53
2.Structure d'un réseau multimachines .....	53
3.Modélisation des composants du réseau multimachines.....	54

3.1. Modélisation des générateurs .....	54
3.2. Modélisation des charges .....	59
3.3. Modélisation du réseau complet .....	60
4. Modèle d'un système interconnecté .....	60
<b>Chapitre V</b>	
<b>Application</b>	
1. Introduction .....	63
2. Commandes centralisée et décentralisée optimales .....	65
2.1. Commande centralisée optimale .....	65
2.2. Commande optimale décentralisée par la méthode du gradient .....	66
2.3. Interpretation des résultats .....	75
2.4. Conclusion .....	75
3. Commande par placement de pôles .....	75
<b>Conclusion générale</b> .....	76
Annexe 1 .....	77
Annexe 2 .....	80

## Symboles et abréviations

$x(t)(x_i(t))$  vecteur d'état du système global (sous-système i).

$y(t)(y_i(t))$  vecteur de sortie du système global (sous-système i).

$u(t)(u_i(t))$  vecteur d'entrée du système global (sous-système i).

$A(A_i)$  matrice d'état du système global (sous-système i).

$B(B_i)$  matrice de commande du système global (sous-système i).

$C(C_i)$  matrice de sortie du système global (sous-système i).

$l(l_i)$  dimension du vecteur de sortie du système global (sous-système i).

$m(m_i)$  dimension du vecteur d'entrée du système global (sous-système i).

$n(n_i)$  dimension du vecteur d'état du système global (sous-système i).

S nombre des sous-systèmes.

$K_{cen}$  matrice de retour dans le cas d'une commande centralisée.

$K_{dec}$  matrice de retour dans le cas d'une commande décentralisée.

$A_{cen}$  matrice d'état en boucle fermée dans le cas d'une commande centralisée.

$A_{dec}$  matrice d'état en boucle fermée dans le cas d'une commande décentralisée.

SC station de commande locale.

$p(s)$  polynôme caractéristique.



## *Chapitre 0*

### **Introduction générale**

## Introduction générale

Pendant les deux dernières décennies plusieurs outils ont été développés pour l'analyse et la synthèse de commande pour les systèmes de grandes dimensions.

Les systèmes, de réseaux d'énergie, trafic urbain et de communication sont parmi beaucoup d'autres exemples qui peuvent être considérés comme étant composés de plusieurs sous systèmes interconnectés et géographiquement éloignés.

La complexité de l'étude des grands systèmes résulte d'une part, de l'insuffisance de moyens informatiques et des techniques destinées à l'étude de ces systèmes. Ce qui a entraîné le développement de nouvelles méthodes de décomposition, d'agrégation et d'analyse structurelle, et d'autre part de l'éloignement géographique des sous-systèmes interconnectés qui engendre des problèmes de coût et de fiabilité dans l'échange d'information.

Pour de tels systèmes une nouvelle structure de commande a été développée. Dans cette structure chaque unité (station) de commande n'a accès qu'à des sorties et des états locaux, et ne peut commander que des entrées locales. Ceci caractérise la commande décentralisée.

La commande décentralisée n'a connue son évolution qu'après (1973) lorsque Wang & Davison [3] ont étudiés le problème de stabilisation et ont introduit le concept de mode fixe qui peut apparaître comme conséquence de la décentralisation de l'information. Plusieurs travaux ont été élaborés dans ce sens parmi lesquels on peut citer Corfmat & Morse (1976)[9], Potter, Anderson & Morse (1976)[11], Anderson (1979)[10]... Mais jusqu'à la fin des années 70 les résultats obtenus ont concernés l'aspect analyse du problème de la commande décentralisée. Après cette période les chercheurs ont commencé à s'intéresser à l'aspect synthèse. Les travaux de Geromel, Bernossou, (1979)[6], Yang, Munro, Braneller (1989)[5] et Tarokh (1989)[7] ont constitué un grand pas dans le développement de la synthèse de la commande décentralisée.

Dans le premier chapitre nous donnons quelques notions générales sur les systèmes complexes ainsi que sur leurs analyse et décomposition. A la fin de ce chapitre nous introduirons la notion des modes fixes qui jouent un rôle primordial dans la stabilisation décentralisée, par conséquent leur connaissance et leurs caractérisations deviennent nécessaires.

Dans le deuxième chapitre, nous aborderons le problème de la commande décentralisée optimale par deux approches différentes:

- La première approche, consiste à synthétiser pour chaque sous-système une commande optimale locale au sens classique, en suite un test pour la vérification de l'optimalité globale sera

présenté en utilisant l'algorithme de Yang et al (1989)[5]. Un exemple numérique sera donné ainsi que les résultats des simulation.

- Le deuxième approche, consiste à calculer une commande décentralisée optimale au sens d'un critère. Cette méthode itérative est basée sur l'algorithme du gradient. Le même exemple traité pour la première méthode sera requis, et les résultats de la simulation seront également données.

Dans le troisième chapitre le problème de synthèse de la commande décentralisée par placement de pôles sera abordé. L'algorithme de synthèse de Tarokh (1989)[7] sera donné, le même exemple sera traité ainsi qu'un autre exemple, les résultats seront comparés.

Le quatrième chapitre sera consacré à la modélisation d'un réseau électrique qui constitue un bon exemple pratique d'un système interconnecté, très adapté à la structure de commande décentralisée

Dans le cinquième et dernier chapitre, la commande décentralisée optimale, synthétisée par la méthode itérative du gradient, sera appliquées au modèle du réseau électrique développé dans le quatrième chapitre. En fin les résultats de la simulation seront exposés

A la fin de ce mémoire, une conclusion générale, dans laquelle les résultats seront discutés, sera donnée, ainsi que quelques perspectives de notre travail.



## *Chapitre I*

### **Généralités**

## 1. Introduction [1]

Les systèmes complexes sont des systèmes de grandes dimensions qui peuvent être composés de plusieurs sous systèmes interconnectés pouvant avoir des objectifs en conflit. Ces systèmes peuvent poser des problèmes importants aux niveaux de l'analyse, de l'agrégation, et de la commande. Ces problèmes sont généralement rencontrés dans l'étude des grands systèmes de production, socio-économiques, de transport et de la distribution d'énergie.

Les problèmes purement économiques et parfois techniques nous ont ouvert une nouvelle voie de traitement et de synthèse de la commande, à savoir :

- 1) De nouvelles méthodes d'analyse
- 2) Etapes intermédiaires - Agrégation  
- Décomposition
- 3) La synthèse, les algorithmes disponibles pour avoir la commande.

### 1.1. L'analyse

Dans un système de grande dimension, en général la structure du système peut nous informer sur l'existence d'une hiérarchie ou une partition évidente (système composé de sous-systèmes éloignés géographiquement).

Si cette structure n'existe pas, on doit chercher la possibilité d'une partition convenable.

Donc le but de l'analyse est de définir la structure sur laquelle la commande va être basée. On vise dans l'analyse l'extraction d'une matrice de couplage qui existe entre les différentes parties du système. Cette matrice peut être sous forme booléenne qui définit l'existence ou la non existence de l'interconnexion ou bien une matrice qui donne une information quantitative.

### 1.2. Etapes intermédiaires

Lors de la synthèse de la commande on a intérêt à décomposer les grands systèmes et/ou de les agréger. Pour cela plusieurs auteurs ont proposé des nouvelles théories en utilisant des outils mathématiques modernes tel que la théorie des graphes structurelle.

### 1.3.Synthèse et algorithmes de commande

Les méthodes classiques de synthèse de la commande appliquées à des nouvelles structures construit la nouveauté de cet axe de recherche

Lors de la synthèse de la commande d'un système complexe on peut distinguer plusieurs approches à savoir :

- \* Commande par agrégation
- \* Commande décentralisée
- \* Commande hiérarchisée

Notons que les trois types de commande citées peuvent être utilisées conjointement

Après avoir eu une structure de partition on a intérêt à réaliser des commandes locales pour chaque sous système comme le montre la figure suivante :

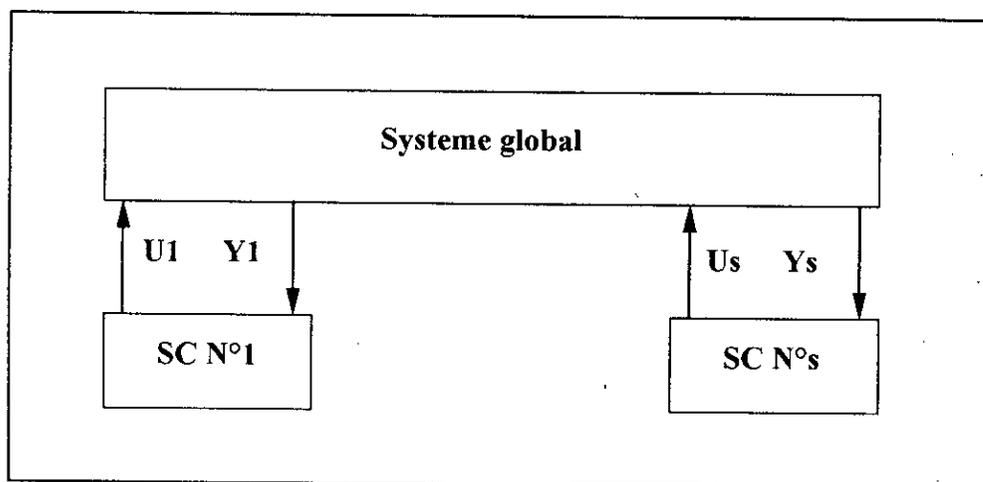
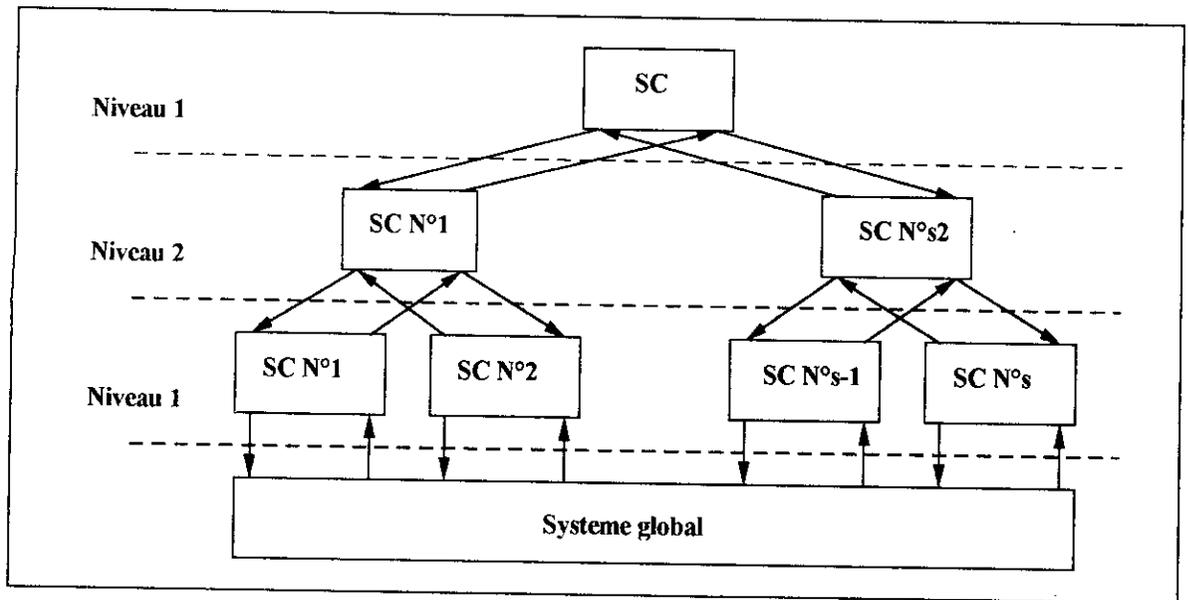


Fig (I.1) Schéma de principe de la commande décentralisée

D'après le schéma précédent , chaque sous-système est commandé localement par une station de commande (S C). A cause de l'effet des interconnexions, généralement fortes, on doit recourir à une commande à deux ou plusieurs niveaux pour coordonner les objectifs des sous-systèmes. Ceci est caractérisé par ce qu'on appelle la commande à structure hiérarchisée.

La figure suivante représente le principe de cette commande .



Fig(I.2) Schéma du principe d'une commande décentralisée hiérarchisée

Dans notre étude nous nous intéresserons à la commande décentralisée (fig I.1 ) en appliquant les méthode de synthèses suivantes :

- \* Commande décentralisée par deux approches différentes.
- \* Commande décentralisée par placement de pôles.

Ces méthodes seront appliquées à un réseau multimachines.

## 2. Décomposition d'un système interconnecté [2]

Dans cette section nous allons étudier la représentation d'un système assez large par un nombre fini de sous-systèmes interconnectés généralement. D'après l'analyse structurelle du système, on peut prévoir s'il y a une décomposition évidente ou non. Dans le dernier cas, il existe des théories pour faire une décomposition optimale. On cite la théorie des graphes qui consiste essentiellement à représenter les états, les sorties et les entrées du système avec des noeuds et les relations avec des flèches puis à réduire ce graphe de manière à obtenir une décomposition. Dans notre cas, on se limitera à donner la méthode de décomposition la plus simple.

Considérons un système linéaire régi par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (I.1)$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système

$U(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrées et A,B sont des matrices constantes de dimensions respectives (n.n) et (n.m)

Ce système peut être décomposé en s éléments dynamiques

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + \sum_{i \neq j}^s A_{ij} x_j(t) + B_i u_i(t) \quad (I.2)$$

$$i = 1, 2, \dots, s$$

tels que

$$x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$$

$$x(t) = (x_1^T(t), x_2^T(t), \dots, x_s^T(t))^T$$

$$n = \sum_{i=1}^s n_i \text{ et la paire } (A_i, B_i) \text{ soit commandable.}$$

On utilise le critère de KALMAN pour vérifier cette commandabilité.

Pour rendre cette décomposition portée sur une seule entrée pour chaque sous-système utilisons la transformation suivante :

$$\bar{x}_i(t) = Q_i^{-1} x_i(t)$$

avec

$$Q_i = [b_1^i, \dots, A_i^{n_i-1} b_1^i, \dots, b_m^i, \dots, A_i^{n_i-1} b_m^i]$$

Tel que

$$b_j^i \in R^{n_{ij}} \quad j = 1, 2, \dots, m \text{ est la colonne } j \text{ de la matrice } B_i \text{ avec } n_i = \sum_{j=1}^m n_{ij}$$

donc on trouve :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_i(t) &= \bar{A}_i \bar{x}_i(t) = \sum_{i \neq j}^s \bar{A}_{ij} \bar{x}_j(t) + \bar{B}_i u(t) \\ i &= 1, 2, \dots, s \end{aligned} \quad (I.3)$$

telle que la matrice

$$\bar{B}_i = \begin{bmatrix} \bar{b}_1^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \bar{b}_s^i \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{b}_i^i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (I.4)$$

On a

$$\begin{cases} \bar{A}_i = Q_i^{-1} A_i Q_i \\ \bar{A}_{ij} = Q_i^{-1} A_{ij} Q_j \\ \bar{B}_i = Q_i^{-1} B_i \end{cases} \quad (I.5)$$

De (I.4) on peut décomposer  $\bar{x}_i$  de chaque élément transformé (I.3) comme suit

$$\bar{x}_i(t) = \left( \bar{x}_{i_1}^T(t), \bar{x}_{i_2}^T(t), \dots, \bar{x}_{i_s}^T(t) \right)^T, \bar{x}_{i_j}(t) \in R^{n_{ij}} \quad (I.6)$$

Donc pour chaque  $\bar{x}_{i_j}(t)$  on associe le vecteur  $\bar{b}_j^i$  et l'entrée correspondante  $u_j \in R$  d'entrées  $u \in R^m$ . On regroupe les  $\bar{x}_{i_j}(t)$  de chaque  $i$  éléments, qui correspondent à la même entrée  $u_j$ , et on forme le  $j^{\text{eme}}$  sous système avec le vecteur d'état  $x_i(t) \in R^{n_i}$  tel que

$$x_i(t) = \left( \bar{x}_{i_1}^T(t), \bar{x}_{i_2}^T(t), \dots, \bar{x}_{i_s}^T(t) \right)^T \text{ et } n_j = \sum_{i=1}^s n_{ij}$$

Ce processus de regroupement rend finalement le système (I.1) sous forme de m sous-systèmes interconnectés comme suit :

$$\dot{\hat{x}}_i(t) = \hat{A}_i \hat{x}_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^m \hat{A}_{ij} \hat{x}_j(t) + \hat{b}_i u_i(t) \quad (I.7)$$

Pour calculer les matrices  $\hat{A}_i, \hat{A}_{ij}, \hat{b}_i$  on utilise les matrices  $\bar{A}_i, \bar{A}_{ij}, \bar{B}_i$  et la formulation suivante:

Soit :

$$\bar{x}(t) = \left( \bar{x}_1^T(t), \bar{x}_2^T(t), \dots, \bar{x}_r^T(t) \right)^T \quad \text{et} \quad x(t) = \left( x_1^T(t), x_2^T(t), \dots, x_m^T(t) \right)^T$$

les vecteurs d'état correspondants aux systèmes (I.3) et (I.7) respectivement .

Donc le processus de regroupement peut être décrit par la transformation non singulière linéaire suivante :

$$\hat{x}(t) = P \bar{x}(t) \quad (I.8)$$

tel que la matrice de permutation  $P = (P_1^T \dots P_m^T)^T$  et que  $P_i \in R^{n_i \times n}$  est définie par

$$P_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & I_{1i} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \vdots & \mathbf{0} & I_{2i} & \ddots & \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mathbf{0} & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & I_{si} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (I.9)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{i-1} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{(s-1)m+1}$

tel que  $I_{ij}$  étant la matrice identité de dimensions  $n_{ij} \times n_{ij}$

On reformule ensuite le problème en écrivant l'équation (I.3) comme suit :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A} \bar{x}(t) + \bar{B} u(t) \quad (I.10)$$

et

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \cdots & \bar{A}_{1s} \\ \bar{A}_{21} & \ddots & \ddots & \bar{A}_{2s} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \bar{A}_{s1} & \bar{A}_{s2} & \cdots & \bar{A}_{ss} \end{bmatrix} \text{ et } \bar{B}_i = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \vdots \\ \bar{B}_s \end{bmatrix} \quad (I.11)$$

En appliquant la transformation (I.8) à la relation (I.10) devient

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \quad (I.12)$$

$$\begin{cases} \hat{A} = P\bar{A}P^T \\ \hat{B} = P\bar{B} \end{cases} \quad (I.13)$$

et

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_m \end{bmatrix} \text{ et } b_i = \begin{bmatrix} \bar{b}_i^1 \\ \vdots \\ \bar{b}_i^s \end{bmatrix} \quad (I.14)$$

tel que  $b_i \in \mathbf{R}^{n_i}$  et  $n = \sum_{i=1}^m n_i$ . Finalement, le système (I.1) a été décomposé en  $m$  sous-systèmes interconnectés décrit par (I.7)

#### Remarque 1

On peut procéder de la même façon pour décomposer le système par rapport aux sorties mais à condition de passer au système dual.

#### Algorithme de décomposition :

- 1- Déterminer  $A, B$
- 2- Décomposition selon les entrées  $A_i, A_{ij}, B_j$
- 3- Calcul de :

$$Q_i = [b_1^i, \dots, A_i^{n_i-1} b_1^i, \dots, b_m^i, \dots, A_i^{n_i-1} b_m^i]$$

$$\bar{A}_i, \bar{A}_{ij}, \bar{B}_j$$

4- Calcul de

$$\begin{cases} \bar{A}_i = Q_i^{-1} A_i Q_i \\ \bar{A}_{ij} = Q_i^{-1} A_{ij} Q_j \\ \bar{B}_i = Q_i^{-1} B_i \end{cases}$$

5-Formation de P

6-Formulation finale

$$\begin{cases} \hat{A} = P \bar{A} P^T \\ \hat{B} = P \bar{B} \end{cases}$$

*Exemple 1[4]*

Soit un système défini par les matrices d'état suivantes :

$$A = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 7 & 2 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \end{array} \right] \quad B = \left[ \begin{array}{c} 0 \ 2 \\ 3 \ 1 \\ 0 \ 1 \\ 1 \ 1 \end{array} \right]$$

avec :

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

En calculant les différents éléments de la décomposition de  $\bar{A}_{ij}$ , on forme  $\bar{A}$ .

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -3.55 & -1.833 & 0 & 2.33 \\ 4.5 & 1.5 & 8 & 2 \\ 3 & -0.5 & -4 & -1.5 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'où les matrices :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En formant P on procède au calcul de  $\hat{A}, \hat{B}$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -3.5 & 0 & -1.83 & 2.33 \\ 3 & -4 & -0.5 & -1.5 \\ 4.5 & 8 & 1.5 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On peut décomposer ce même système sous une autre structure (3x1)

#### Remarque 2

Cette méthode n'est applicable que si la décomposition n'est pas évidente par la structure du système où l'éloignement géographique des stations de commande locales

#### Conclusion

Cette méthode est efficace pour la décomposition d'un système où il n'y a pas de contraintes structurelles imposants cette décomposition.

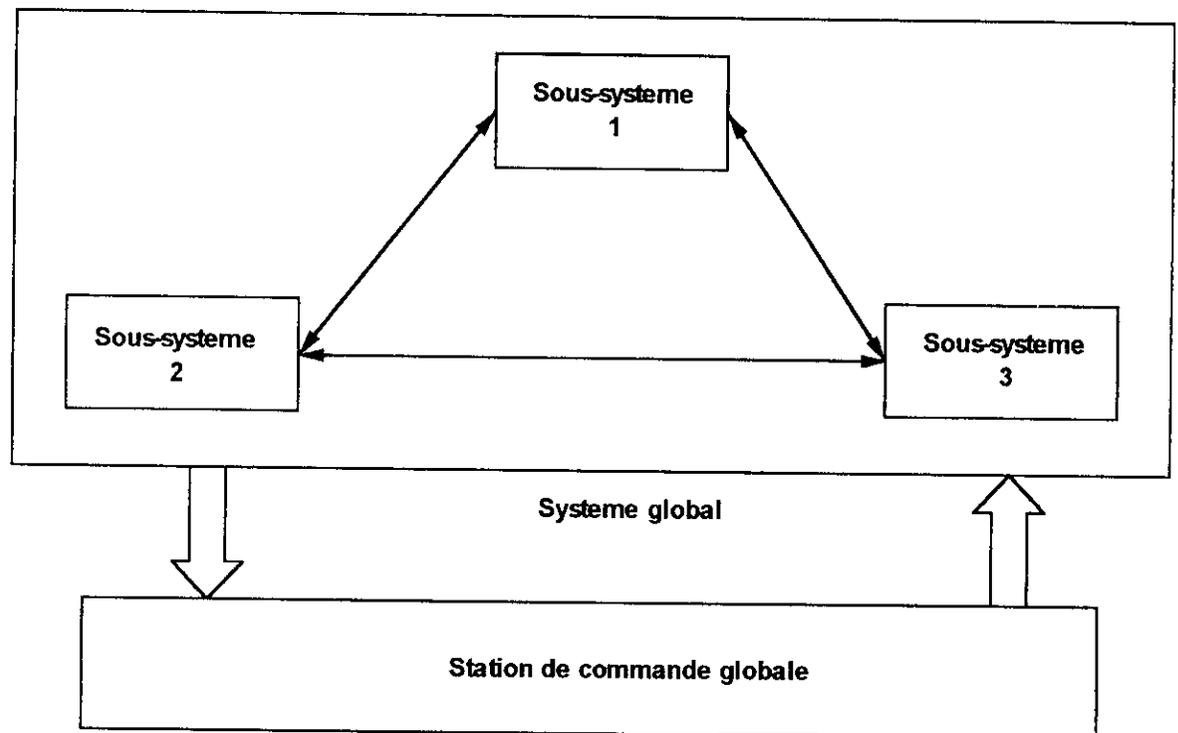
### 3. Notion de modes fixes

#### 3.1. Commande centralisée et commande décentralisée

##### 3.1.1. La commande centralisée

La commande à structure centralisée est une approche classique dans laquelle on a aucune contrainte structurelle sur la matrice de retour.

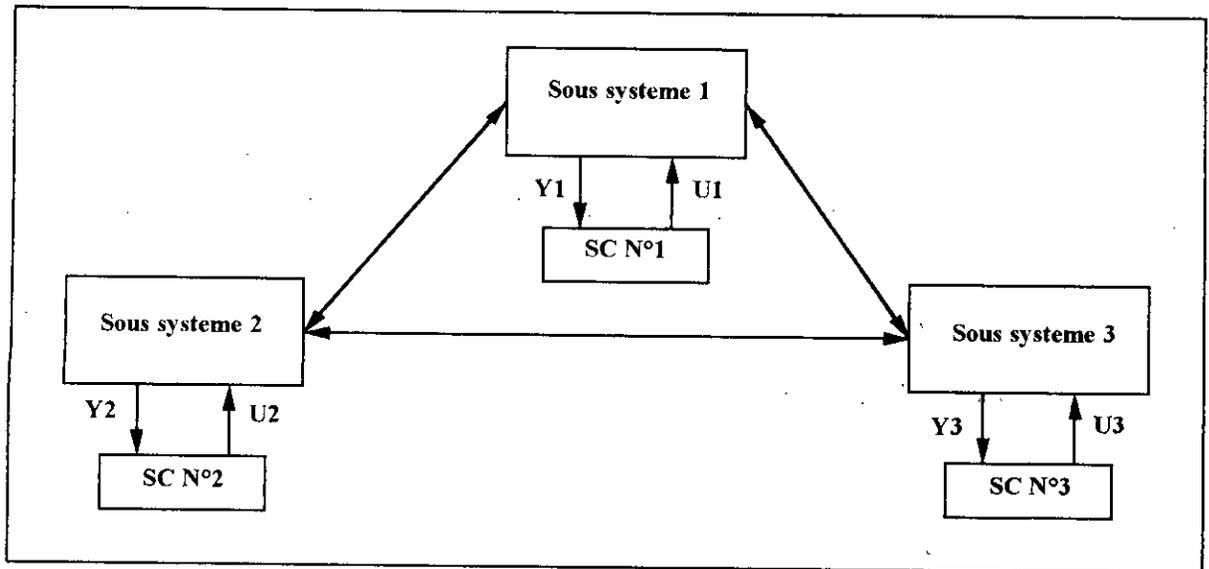
Lors de l'utilisation de la commande centralisée l'unité de commande reçoit l'information e toutes les sorties ( états ) et envoi les commandes vers toutes les entrées du système. Pour cette structure de commande il existe suffisamment de techniques pour la synthèse des lois de commande, telles que les techniques de placement de pôles et de la commande optimale par critère quadratique. Le schéma de principe de cette commande est illustré par la figure(I.3).



Fig(I.3) Schéma de principe de la commande centralisée

##### 3.1.2. La commande décentralisée

La commande décentralisée est une technique récente destinée pour les systèmes interconnectés. Elle est caractérisée par l'utilisation des informations locales au niveau de chaque sous-système pour effectuer un retour d'état ou de sorties en gardant la stabilité du système global avec les performances souhaitées. Le principe de cette commande est illustré par la figure (I.4)



Fig(I.4) Schéma de principe de la commande décentralisée

L'utilisation de la commande décentralisée pour la conduite des systèmes complexes peut engendrer un problème de stabilisation du système global. Ce problème de stabilisation s'interprète par l'apparition dans le système en boucle fermée de fréquences indépendantes de la commande utilisée. Ces fréquences appelées "Modes fixes", apparaissent comme conséquences de la décentralisation de l'information.

### 3.2.Généralités

Soit le système physique composé de s sous-systèmes dont chacun est commandé par une station de commande locale .

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^s B_i u_i(t) \\ y_i(t) = C_i X(t) \end{cases} \quad (I.15)$$

avec

$$A \in R^{n \times n}, \quad B_i \in R^{n \times m_i}, \quad C_i \in R^{l_i \times n}$$

$x, u_i$  et  $y_i$  sont respectivement vecteur d'état du système, entrées et sorties de chaque sous-système.

Une commande par retour de sorties est appliquée

$$u_i = F_i y_i + V_i \quad (I.16)$$

## Exemple 2

Soit le système suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0.1 & -1.2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.85 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1.25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$C_2 = [0 \ 0 \ 0.5 \ 0]$$

Les valeurs propres de A sont :

$$\lambda(A) = \{0.5, -1.2, -1, -2\}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix}$$

avec  $F_1 = f_1$  et  $F_2 = f_2$

$$A_F = A + \sum_{i=1}^2 B_i F_i C_i$$

Les valeurs propres de  $A_F$  sont

$$\lambda(A_F) = \{-1.2, -2, -1 + 0.625f_1, 0.5 + 0.85f_2\}$$

On remarque que les valeurs propres communes entre A et  $A_F$  sont  $\lambda_1 = -1.2$  et  $\lambda_2 = -2$  qui sont indépendantes de F d'où le système possède deux modes fixes.

## 4. Caractérisation des modes fixes [4]

### 4.1. Caractérisation par l'approche d'état

Anderson(1981) à présenté cette approche dont nous omettons de donner la démonstration

#### *Théorème 1[4]*

La condition nécessaire et suffisante pour que le système (I.15) avec le retour de sorties (2) ait un mode fixe en  $S=S_0$  est que pour une partition de l'ensemble  $V=\{1,2,\dots,s\}$  en deux sous ensembles  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  et  $\{i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_s\}$ :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} s_0 I - A & B_{i_1} & \dots & B_{i_k} \\ C_{i_{k+1}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ C_{i_s} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} < n \quad (I.19)$$

où  $n$  est la dimension de  $A$  et  $I$  est la matrice identité.

#### *Exemple 3*

Reprenons l'exemple précédent et vérifiant pour  $S_0=-2$  avec la partition de  $V=\{1,2\}$  en  $\{i_1=1\}$  et  $\{i_2=2\}$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} s_0 I - A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} -2.5 & 0 & -1 & 0 & 0.85 \\ -1 & -0.8 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 < 4$$

D'où la condition est vérifiée pour  $S_0=-2$

## 4.2. Caractérisation par les matrices polynomiales

*Factorisation de Wolovich(1974) [4]*

Si on considère le système (I.15) et la commande décentralisée (I.16), sa matrice de transfert en boucle ouverte peut être écrite sous sa forme factorisée à gauche :

$$\frac{y(s)}{u(s)} = w(s) = D_g^{-1}(s) \cdot N_g(s) \quad (I.20)$$

où  $D_g^{-1}(s), N_g(s)$  sont des matrices polynomiales en  $s$ . Par la notation de la transformée de LAPLACE on peut écrire:

$$D_g(s)y(s) = N_g(s)u(s) \quad (I.21)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} D_g(s) = [D_{g_1}(s), D_{g_2}(s), \dots, D_{g_s}(s)] \\ N_g(s) = [N_{g_1}(s), N_{g_2}(s), \dots, N_{g_s}(s)] \end{array} \right. \quad (I.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{g_i}(s) = [D_{g_i1}(s), D_{g_i2}(s), \dots, D_{g_i p_i}(s)] \\ N_{g_i}(s) = [N_{g_i1}(s), N_{g_i2}(s), \dots, N_{g_i m_i}(s)] \end{array} \right. \quad (I.23)$$

ont respectivement  $p_i, m_i$  colonnes  $i=1, 2, \dots, s$

L'équation (I.21) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^s D_{g_i}(s)y_i(s) = \sum_{i=1}^s N_{g_i}(s)u_i(s) \quad (I.24)$$

Le système en boucle fermée aura la matrice de transfert factorisée suivante :

$$W_F(s) = \bar{D}_g^{-1}(s) N_g(s) \quad (I.25)$$

avec:

$$\bar{D}_g(s) = [D_{g_1}(s) + N_{g_1}(s)F_1, \dots, D_{g_s}(s) + N_{g_s}(s)F_s] \quad (I.26)$$

*Théorème 2 [Anderson et Clements ][4]*

Le système décrit par (I.20) et le retour de sorties, possède un mode fixe en  $S=S_0$  si et seulement si  $\overline{D}_g(s_0)$  est une matrice singulière  $\forall F_i, i = 1, 2, \dots, s$ .

Pour aboutir à un résultat équivalent au précédent, on formule le théorème suivant:

*Théorème 3 [4]*

Le système (I.15) donné par la matrice de factorisation à gauche (I.20) possède un mode fixe en  $S=S_0$  si et seulement s'il existe un sous ensemble

$e \neq \Phi \quad e = \{i_1, i_2, \dots, i_j\} \subset \{1, 2, \dots, s\}$  pour lequel :

$$\text{rang} \left[ D_{g_{i_1}}(s_0)N_{g_{i_1}}(s_0), \dots, D_{g_{i_j}}(s_0)N_{g_{i_j}}(s_0) \right] < \sum_{i \in e} m_i$$

Où  $m_i$  est le nombre de colonne de  $N_{g_i}$

*Exemple 4*

Reprenons l'exemple précédent:

$$D_g(s) = \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & s-3 \end{bmatrix}$$

$$N_g(s) = \begin{bmatrix} s+2 & s+4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$m_1=1$  et  $m_2=1$ .

En prenant  $j=1$  nous aurons

$$e = \{i_1\} \subset \{1, 2\} \quad \text{et} \quad i_1 = 1$$

$$\text{rang} \left[ D_{g_1}(s_0)N_{g_1}(s_0) \right] = \text{rang} \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & s+2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{s=-2} = 0 < 1$$

D'où  $S_0=-2$  est un mode fixe

**4.3.Conclusion**

Ces caractérisations présentent un caractère théorique et ne servent qu'à vérifier si une certaine valeur donnée de  $S$  est un mode fixe. Par contre l'algorithme de DAVISON peut servir pour évaluer les modes fixes .



*Chapitre II*

**Commande optimale décentralisée**

## Commande décentralisée optimale

### 1. Introduction

La théorie de la commande optimale par critère quadratique a été développée pour les systèmes à commande centralisée, afin de minimiser un critère économique généralement lié aux exigences pratiques. Cette théorie a été récemment appliquée au cas décentralisé.

Dans ce chapitre, on verra comment établir une commande optimale décentralisée et les critères qui prédominent sa définition.

### 2. Méthode de l'optimalité locale [5]

Dans cette section on présentera une méthode de synthèse de commande optimale décentralisée qui consiste à trouver la matrice de bouclage qui minimise un certain critère pour chaque sous-système (optimalité locale). Une condition suffisante sera exposée pour vérifier l'optimalité globale du système qui n'est pas toujours vérifiée.

On considère le système dynamique composé de  $s$  sous-systèmes interconnectés:

$$\dot{x}(t)_i = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^s A_{ij} x_j(t) \quad i = 1, \dots, s \quad (II.1)$$

Chaque sous-système est décrit par :

$$S_i: \quad \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) \quad (II.2)$$

tel que  $x_i$  est le vecteur d'état de dimensions  $n_i$  et  $u_i$  est le vecteur d'entrées de dimension  $m_i$ ; donc le système global peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\dot{x}(t) = A_d x(t) + B_d u(t) + A_c x(t) \quad (II.3)$$

Avec

$$x(t) = (x_1^T(t), x_2^T(t), \dots, x_s^T(t))^T$$

$$u(t) = (u_1^T(t), u_2^T(t), \dots, u_s^T(t))^T$$

Et

$$A_d = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s), \quad B_d = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_s) \quad \text{et} \quad A_c = (A_{ij})_{i \neq j}$$

Le problème est de trouver la loi de commande par retour d'état décentralisée de la forme de :

$$u_i = -K_i x_i \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (II.4)$$

qui peut également s'écrire :

$$u = -K_d x$$

$$K_d = \text{diag}(K_1, K_2, \dots, K_s)$$

avec

$$K_d = \text{diag}(K_1, K_2, \dots, K_s)$$

Le système global sans tenir compte des interconnexions est décrit par :

$$S_d: \quad \dot{x}(t) = A_d x(t) + B_d u(t)$$

la loi de commande (II.4) est obtenue par minimisation du critère:

$$J_d = \int_0^{\infty} (x^T(t) Q_d x(t) + u^T(t) R_d u(t)) dt \quad (II.5)$$

où:

$$Q_d = \text{diag}(Q_1, Q_2, \dots, Q_s)$$

$$R_d = \text{diag}(R_1, R_2, \dots, R_s)$$

des matrices définies positives

$Q_i, R_i$  sont de dimensions appropriées

\* On doit vérifier que les paires  $(A_i, B_i)$  et  $(A_i, Q_i^{1/2})$  soient commandables.

\* La loi de commande optimale locale décentralisée est de la forme :

$$U_i(t) = K_i X_i(t) = -R_i^{-1} B_i^T P_i X_i(t) \quad (II.6)$$

où  $P_i$  est une matrice définie positive et solution de l'équation de RICCATI suivante:

$$A_i^T P_i + P_i A_i - P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i + Q_i = 0 \quad (II.7)$$

- Cette commande est localement optimale. L'optimalité du système global n'est toujours pas assurée. Une condition suffisante pour l'optimalité globale. doit être vérifiée.

2.1.L'optimalité globale

*Théorème 1 [M.Ikeda et D.D.Siljak][5]*

On définit une matrice  $W=(W_{ij})$  de dimension  $S \times S$  tel que

$$W_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} \lambda_m(Q_i) - \lambda_m(P_i) \|A_{ij}\| & i = j \\ -\lambda_M(P_i) \|A_{ij}\| & i \neq j \end{cases} \quad (II.8)$$

Avec

$\lambda_m(.)$  et  $\lambda_M(.)$  sont respectivement le minimum et le maximum des valeurs propres de  $(.)$

$\|.\|$  est la norme euclidienne de la matrice  $(.)$ .

S'il existe  $S$  nombres  $d_1, d_2, \dots, d_s$  tels que:

1°-

$$d_i W_{ij} > \sum_{i \neq j} d_i |W_{ij}| \quad i = 1, \dots, s \quad (II.9)$$

2°- La condition d'observabilité globale est vérifiée pour la paire  $(A_d + A_c, Q^{1/2})$ .

Alors le retour d'état optimal décentralisé (II.6) est globalement optimal et vérifie la minimisation du critère suivant:

$$\tilde{J} = \int_0^{\infty} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt \quad (II.10)$$

avec

$$Q = D_q Q_d - A_c^T P_d D_q - D_q P_d A_c \quad (II.11)$$

$$R = D_r R_d \quad (II.12)$$

$$D_q = \text{diag}(d_1 I_{n_1}, d_2 I_{n_2}, \dots, d_s I_{n_s}) \quad (II.13)$$

$$D_r = \text{diag}(d_1 I_{m_1}, d_2 I_{m_2}, \dots, d_s I_{m_s}) \quad (II.14)$$

où  $I_{n_i}$  est la matrice identité de dimension  $n_i \times n_i$

$I_{m_i}$  est la matrice identité de dimension  $m_i \times m_i$

ce théorème est pratiquement inutilisable.

le théorème suivant donne une condition équivalente simple.

*Théorème 2 [5]*

La commande décentralisée locale décrite par (II.6) en minimisant le critère (II.10) est globalement optimale si

$$\frac{\lambda_m(Q_i)}{\lambda_M(P_i)} > v \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (II.15)$$

pour tous les sous système  $S_i$

Où  $v$  est un nombre calculé à partir de  $\|A_{ij}\|$

Avant de donner l'algorithme pour le calcul de  $v$  nous devons introduire les définitions suivantes:

*Définition 1*

Soit une matrice  $T$

Si  $\forall i, j \ T_{ij} \geq 0$ ,  $T$  est une matrice non négative ( $T \geq 0$ )

Si  $\forall i, j \ T_{ij} > 0$ ,  $T$  est une matrice positive ( $T > 0$ )

*Définition 2 [5]*

Soit  $T$  une matrice carrée non négative on dit que  $T$  est une matrice primitive s'il existe un entier  $k$  tel que  $T^k > 0$

*Théorème 3[5]*

Soit  $T$  une matrice carrée tel que  $T \geq 0$  et  $T$  est une matrice primitive alors  $T$  possède une valeur propre réelle  $r$  appelée la P-F (Perron Frolinius) valeur propre tel que:

1-  $r > 0$

2-  $r > |\lambda_i|$  . où  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $T$

3-  $r$  est une racine simple de l'équation caractéristique

Le vecteur propre correspondant à  $r$  est appelé le P-F vecteur propre.

*Définition 3[5]*

On appelle une matrice  $T > 0$  une "matrice normale" si tous les éléments de la diagonale sont égaux à 1.

*Algorithme pour le calcul de  $v$* 

1- Calculer  $\|A_{ij}\|$  ( $i, j=1, 2, \dots, s$ )

2- Former la matrice normale  $T$  tel que  $T_{ij} = \|A_{ij}\|$

et on calcule la P-F valeur propre de  $T$

3- On pose  $Z = \max(\|A_{ii}\|)$  et  $\alpha_i = Z - \|A_{ii}\| + \sigma$   $i=1, 2, \dots, s$   
la valeur initiale de  $\sigma$  peut être choisie égale à 1

4- Changer  $T$  de la manière suivante:

1°- Ajoutant une petite incrémentation  $\delta\sigma$  à  $\sigma$  (positive ou négative) selon la P-F valeur propre de  $T$  (supérieure ou inférieure à 2)

2°- On multiplie les éléments hors diagonale de  $T$  de la  $i$ ème ligne par  $1/\alpha_i$  ( $i=1, 2, \dots, s$ ). Jusqu'à ce que la P-F valeur propre soit égale à 2

3°- A cette étape on pose

$$T^* = T, \sigma^* = \sigma, \alpha_i^* = \alpha_i$$

4-  $v = 2(Z + \sigma^*)$ .

*Remarque 1*

Si on veut vérifier l'optimalité globale d'une commande décentralisée localement optimale on procède de la façon suivante:

1- On calcule  $W$  à partir de la relation (II.8)

2- On pose  $C_i = 1/W_{ii}$

$$T = \text{diag}(C_i)W \quad i=1, 2, \dots, s$$

3- Si la P-F valeur propre de  $T$  est inférieure à 2 alors la commande est globalement optimale.

## Exemple 1[7]

Soit le système suivant ayant trois entrées et trois sorties :

$$\dot{x}(t) = \left[ \begin{array}{cc|ccc} -0.4 & 0.2 & 0.6 & 0.1 & -0.2 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.4 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.5 & -1.25 & 0 \\ 0.25 & 0 & -0.2 & 0.5 & -1 \end{array} \right] x(t) + \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] u(t)$$

$$y(t) = \left[ \begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] x(t)$$

Les lignes séparatrices désignent la décomposition en sous-systèmes.

Ce système est décentralisé par rapport aux entrées, observable, commandable et stable en boucle ouverte.

Pour cet exemple et suivant les étapes de l'algorithme on trouve  $v = 7.1642$

En choisissant les pondérations suivantes pour le sous système 1 le test est vérifié

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 27 \end{bmatrix} \quad R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec

$$K_1 = \begin{bmatrix} 2.8312 & 4.1714 \\ -4.0112 & 2.6757 \end{bmatrix}$$

De la même façon pour le sous-système 2

$$Q_2 = 10^{19} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 = 10$$

avec

$$K_2 = 10^8 \times \begin{bmatrix} 4.0472 & -8.2272 & 3.9934 \end{bmatrix}$$

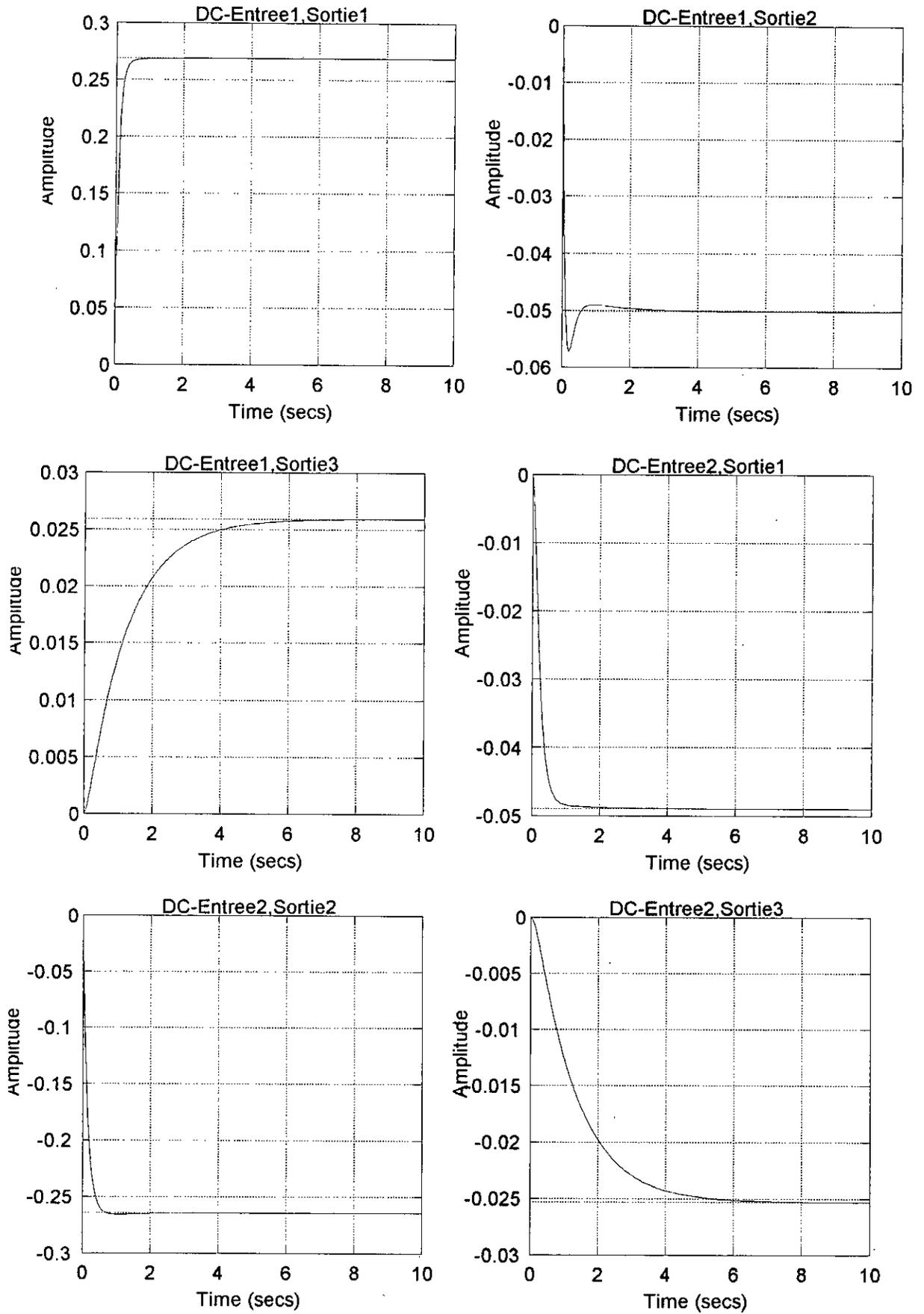
D'après les résultats obtenus il y'a une grande différence entre l'ordre de grandeur des pondération pour les deux sous systèmes car il n'y a pas de méthode systématique pour le choix des pondérations qui satisfasse le test d'optimalité globale.

La matrice d'état en boucle fermée est

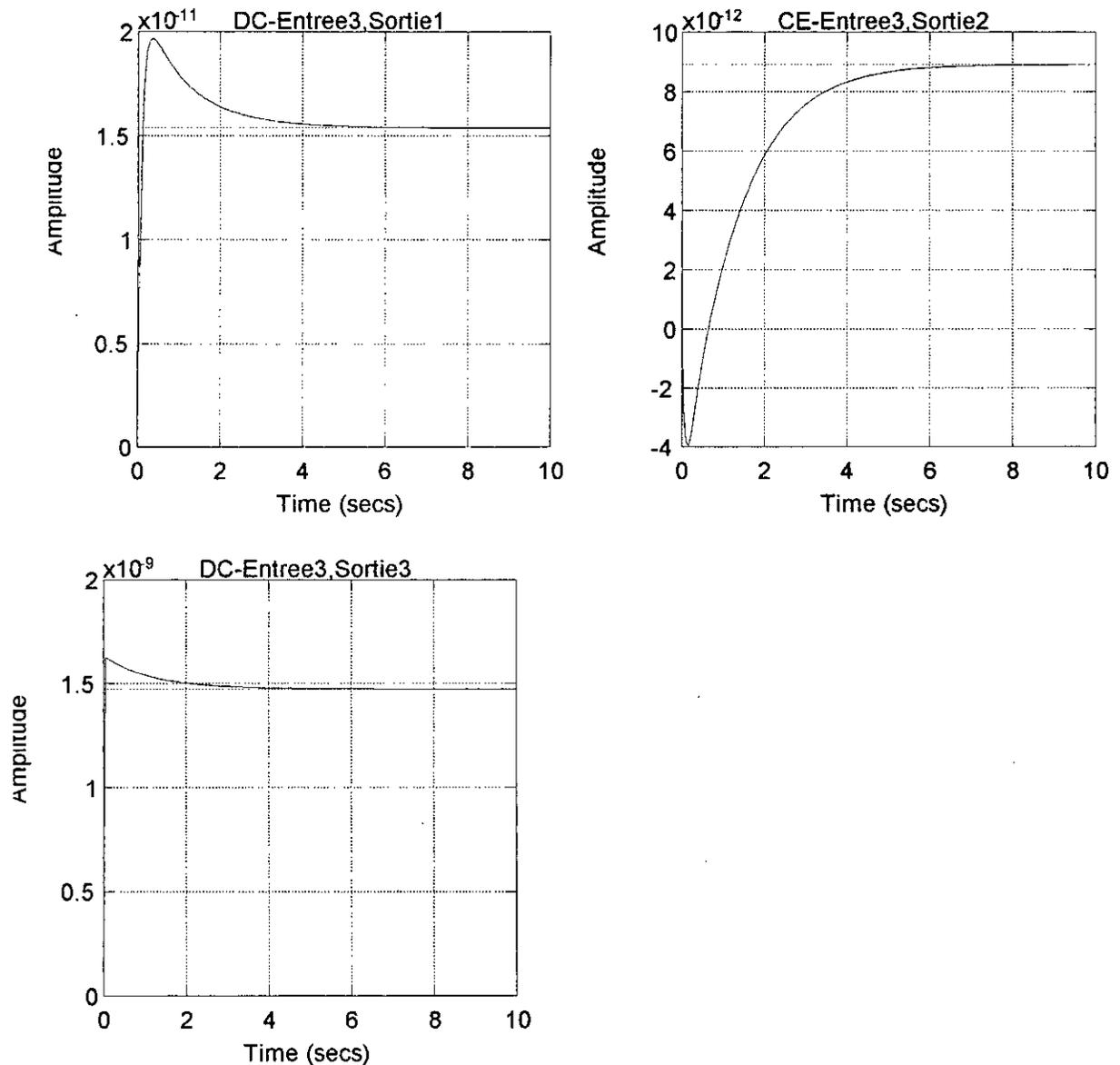
$$A_{dec} = \begin{bmatrix} -7.2424 & -1.2957 & 0.6 & 0.1 & -0.2 \\ -1.6512 & -11.5185 & 0.0 & 0.0 & 0.4 \\ 0.0 & 0.0 & -0.4047 \times 10^9 & 0.8227 \times 10^9 & -0.3993 \times 10^9 \\ 0.2 & 0.1 & 0.8094 \times 10^9 & -1.6454 \times 10^9 & 0.7987 \times 10^9 \\ 0.25 & 0.0 & -0.4047 \times 10^9 & 0.8227 \times 10^9 & -0.3993 \times 10^9 \end{bmatrix}$$

La figure (II.1) montre les réponses indicielles des éléments de la matrice de transfert du système décentralisé en boucle fermée.

- commande décentralisée - DC



Fig(II.1 a) Les réponses indicielles du système décentralisée en boucle fermée



Fig(II.1.b) Les réponses indicielles du système décentralisée en boucle fermée

#### Remarque

Dans ce cas la synthèse d'une commande optimale centralisée avec les mêmes pondération conduit à un résultats erroné qui est du au moyen de calcul limité qui néglige  $Q_1$  devant  $Q_2$ .

## 2.2.Conclusion

L'avantage de cette méthode résulte dans la facilité de vérification de l'optimalité globale d'une commande décentralisée optimale localement, déjà établie. La synthèse de commande locales est obtenue en utilisant les programme destinés à la synthèse de commande optimale centralisée.

L'algorithme utilisé nous a permis de vérifier l'optimalité globale de la commande. Les résultats de simulation ont montrés que la stabilité globale du système est assurée.

### 3. Commande optimale par retour de sorties par la méthode du gradient [6]

Dans ce paragraphe nous présenterons une autre approche de la commande décentralisée optimale qui consiste à l'utilisation d'un algorithme itératif. A la convergence de l'algorithme nous aurons la matrice de gain qui correspond à une commande décentralisée globalement optimale.

Soit le système ayant  $s$  stations de commande

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^s B_i u_i(t) \\ y_i(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i = 1, \dots, s \quad (II.16)$$

où

$$x(t) \in R^n, u_i(t) \in R^{m_i}, y_i(t) \in R^{p_i}$$

$$P = \sum_{i=1}^s P_i \quad m = \sum_{i=1}^s m_i$$

avec les conditions initiales  $x(0) = x_0$

Les commandes locales sont de la forme :

$$u_i(t) = K_i y(t) = K_{ii} y_i(t) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^s K_{ij} y_j(t) \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (II.17)$$

la structure  $S$  de  $K$  est :

$$K = (K_{ij}) = [K_1, K_2, \dots, K_s]^T$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, p$$

L'ensemble des matrices ayant cette structure est définie par  $\Omega(s)$

Le problème consiste à trouver une commande de type (II.17) qui minimise le critère quadratique:

$$\min_{K \in \Omega(s)} J(K) = \int_0^{\infty} (X^T Q X + U^T R U) dt$$

avec  $Q \geq 0 \quad R > 0$

sous

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ u = Ky(t) \end{cases}$$

et  $x(0) = x_0$

pour des commandes totalement décentralisées, c'est à dire

$$\Omega(s) = \left\{ K \in \mathbb{R}^{m \times p} / K = \text{bloc diag}[K_{11}, K_{22}, \dots, K_{ss}], K_{ii} \in \mathbb{R}^{m_i \times l_i} \right\}$$

Et dans le cas d'un retour d'état ( $C = I_{n \times n}$ ) nous avons à notre disposition l'algorithme de Geromel & Bernussou[6] en partant d'une matrice initiale  $K_0$  satisfaisant les contraintes et rendant le système en boucle fermée stable. Chaque itération de l'algorithme comprend les étapes suivantes:

1- Calcul du gradient du critère

$$\frac{\partial J(K)}{\partial K} = 2(RK + B^T P)L$$

avec

$$\begin{cases} (A + BK)^T P + P(A + BK) + Q + K^T R K = 0 \\ L(A + BK)^T + (A + BK)L + I = 0 \end{cases}$$

2- Projection du gradient matriciel sur l'ensemble de  $\Omega(s)$

$$D = (d_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, l}} = \begin{cases} d_{ij} = \left[ \frac{\partial J(K)}{\partial K} \right]_{ij} & K_{ij} \neq 0 \\ d_{ij} = 0 & K_{ij} = 0 \end{cases}$$

3- Progression dans la direction du gradient

$$K^{q+1} = K^q - aD$$

où  $a$  est le pas du gradient tel que  $a > 0$  avec

$$J(K - aD) < J(K)$$

4- le test d'arrêt est l'annulation du gradient

$$\frac{\partial J(K)}{\partial K} = 0$$

Exemple 2 [7]

Reprenons le même exemple du paragraphe précédent:

En prenant la valeur initiale de

$$K = \begin{bmatrix} -0.3593 & -0.7439 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1665 & -0.8977 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1337 & 0.4979 & -0.1858 \end{bmatrix}$$

le pas du gradient  $a=1$

Vu que le test d'arrêt n'est jamais vérifié on peut admettre une certaine marge d'erreur par exemple  $\sum \text{abs}(\delta J_{ij}(K)) < \alpha$

Dans cet exemple  $\alpha=0.4147$

avec les pondérations suivantes  $Q=I_5$  et  $R=I_3$

La valeur finale de  $K$  est la suivante :

$$K_{dec} = \begin{bmatrix} -0.5493 & -0.7439 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5886 & -0.3791 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1337 & 0.4979 & -0.1858 \end{bmatrix}$$

La matrice d'état en boucle fermée est

$$A_{dec} = \begin{bmatrix} -1.5379 & -0.1648 & 0.6 & 0.1 & -0.2 \\ -0.5101 & -2.3670 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & -2.1337 & 0.4979 & 0.0124 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7675 & -2.2458 & 0.3716 \\ 0.25 & 0 & -0.3337 & 0.9979 & -1.1858 \end{bmatrix}$$

On fera une comparaison avec une commande centralisée optimale avec les mêmes pondérations Q et R

La matrice de retour sera:

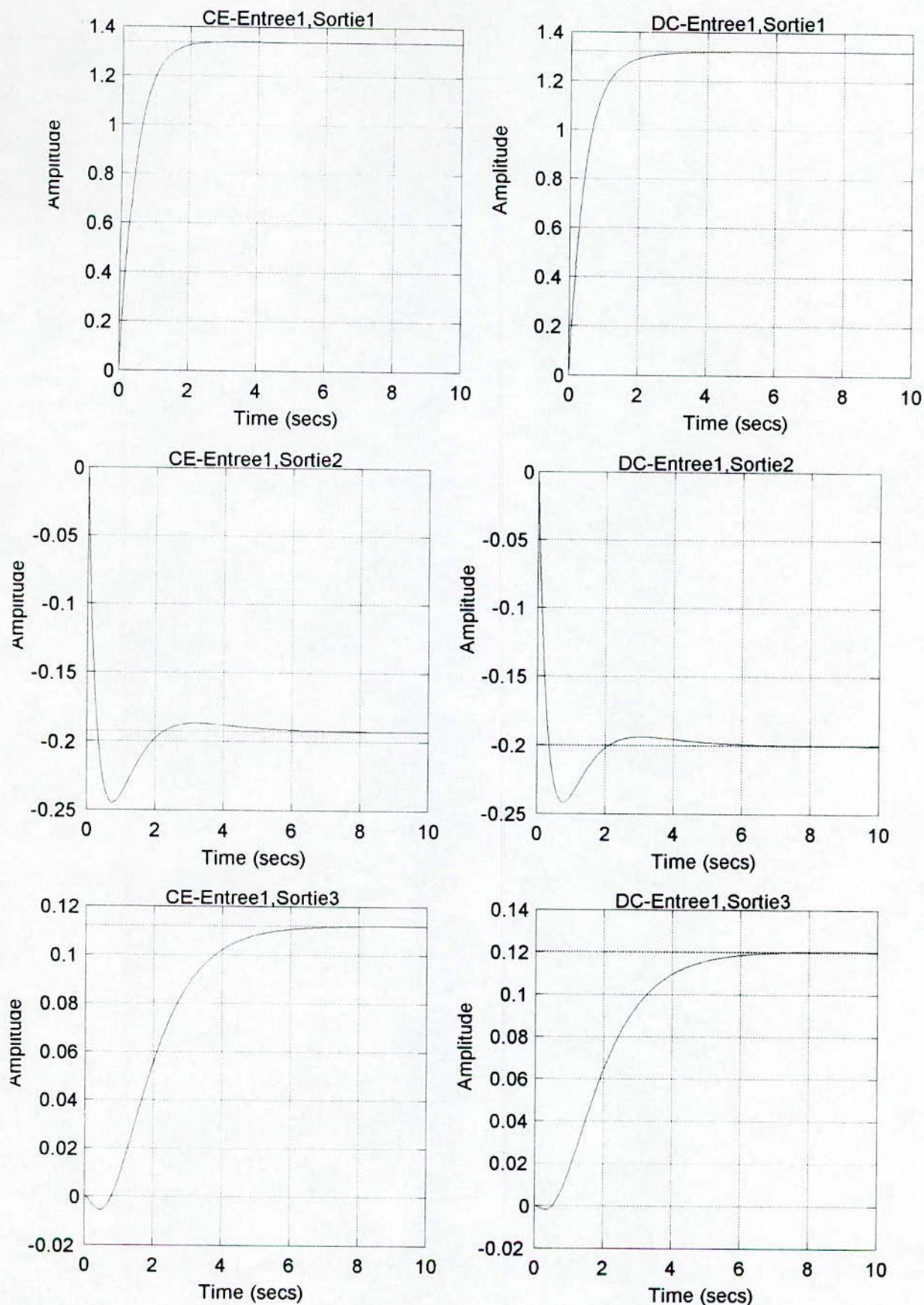
$$K_{cen} = \begin{bmatrix} -0.5160 & -0.7024 & -0.0984 & -0.0926 & -0.1103 \\ 0.5691 & -0.3777 & 0.1121 & 0.0444 & -0.0340 \\ 0.0006 & -0.0115 & -0.1347 & 0.4969 & -0.1855 \end{bmatrix}$$

La matrice d'état en boucle fermée est

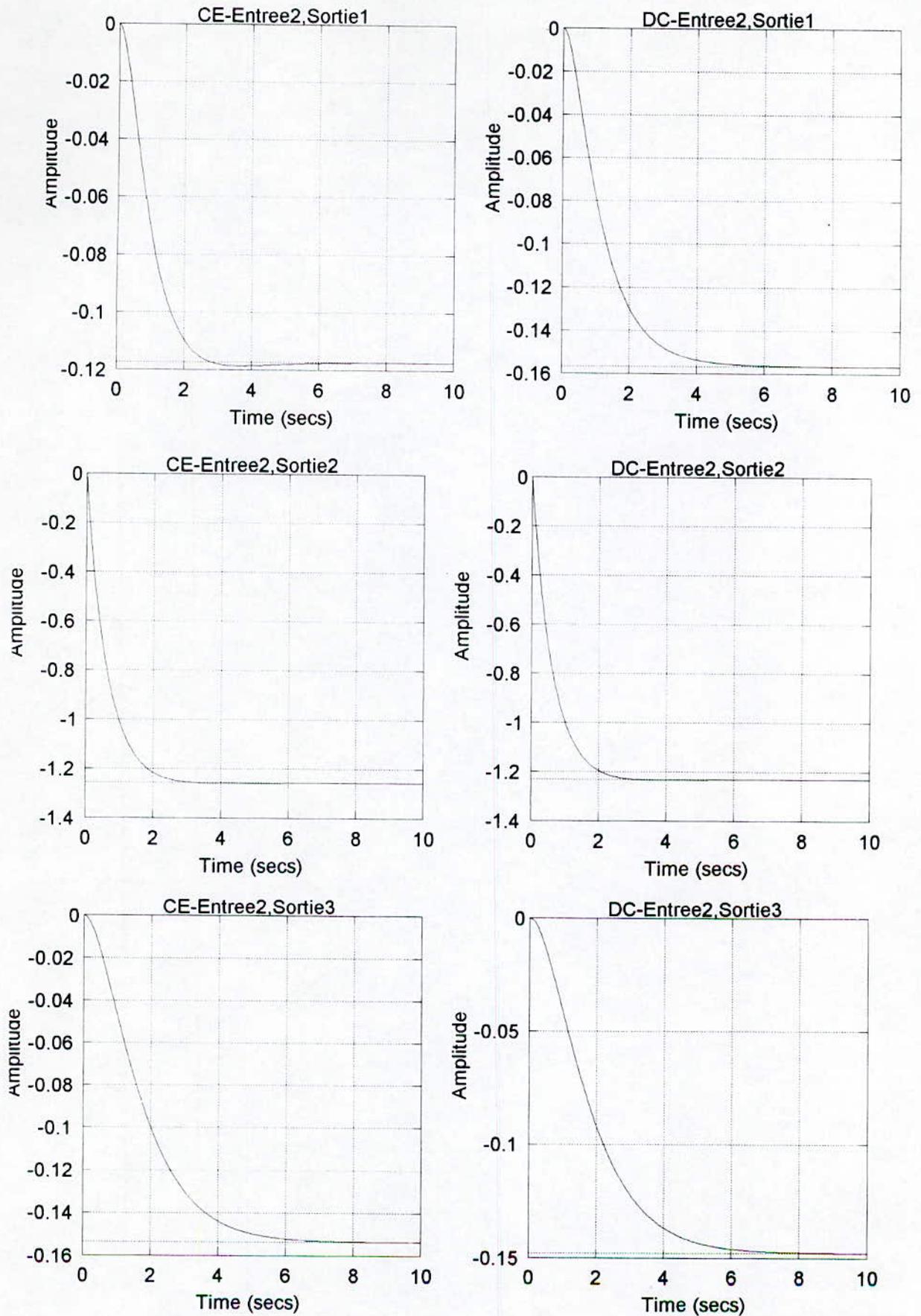
$$A_{cen} = \begin{bmatrix} -1.4851 & -0.1246 & 0.3896 & -0.0370 & -0.2762 \\ -0.4629 & -2.2824 & -0.0847 & -0.1407 & 0.1454 \\ -0.0006 & -0.0115 & -2.1347 & 0.4969 & 0.0145 \\ 0.2013 & 0.1229 & 0.7694 & -2.2438 & 0.3709 \\ 0.2494 & -0.0115 & -0.3347 & 0.9969 & -1.1855 \end{bmatrix}$$

La figure (II.2) représente les réponses indicielles des éléments de la matrice de transfert dans les deux cas (centralisé, décentralisé).

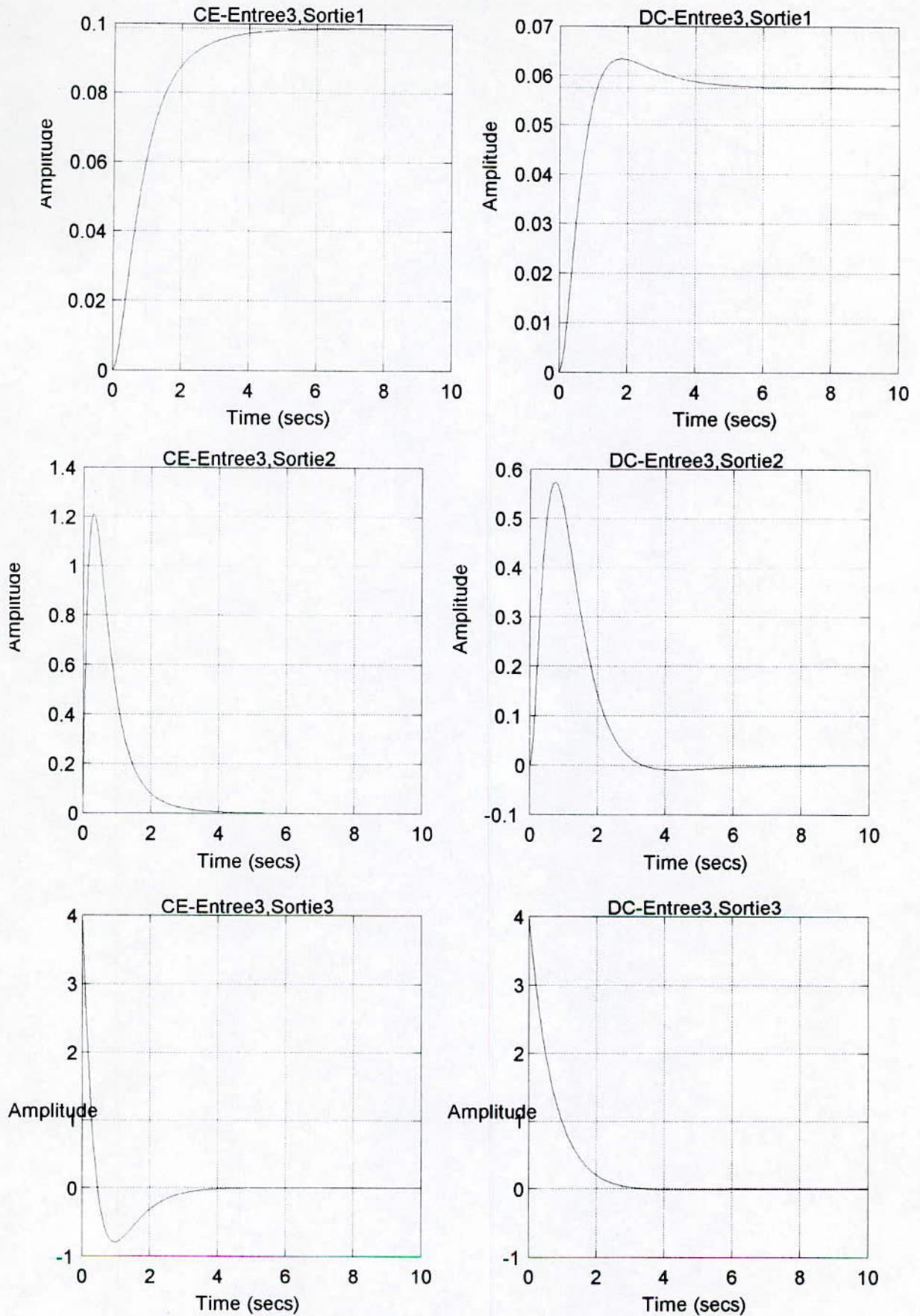
- Commande centralisée (CE)
- Commande décentralisée (DC)



Fig(II.2.a) Les réponses indicielles du système en boucle fermée



Fig(II.2.b) Les réponses indicielles du système en boucle fermée



Fig(II.2.c) Les réponses indicielles du système en boucle fermée

Les matrices de transfert en boucle fermée sont les suivantes:

$$F_{1dec}(s) = \frac{1}{p_{dec}(s)} \begin{bmatrix} 3s^4 + 21.23s^3 + 53.12s^2 + 56.16s + 21.18 \\ -s^4 - 6.03s^3 - 12.02s^2 - 9.64s - 3.05 \\ -0.24s^3 - 0.23s^2 + 1.36s + 1.77 \end{bmatrix}$$

$$F_{2dec}(s) = \frac{1}{p_{dec}(s)} \begin{bmatrix} -0.45s^3 - 2.5s^2 - 4.03s - 1.87 \\ -2s^4 - 15.48s^3 - 42.79s^2 - 49.55s - 19.91 \\ -0.19s^3 - 1.32s^2 - 3.13s - 2.43 \end{bmatrix}$$

$$F_{3dec}(s) = \frac{1}{p_{dec}(s)} \begin{bmatrix} 0.52s^3 + 2.26s^2 + 3.23s + 1.56 \\ -0.15s^3 - 0.3s^2 + 0.25s + 0.58 \\ 4s^4 + 25.07s^3 + 56.62s^2 + 54.52s + 18.83 \end{bmatrix}$$

Où  $F_i$  est la colonne  $i$  de  $F(s)$ .

avec

$$p_{dec}(s) = s^5 + 9.33s^4 + 33.62s^3 + 58.41s^2 + 48.95s + 15.85$$

$$F_{1cen}(s) = \frac{1}{p_{cen}(s)} \begin{bmatrix} 3s^4 + 21.29s^3 + 53.50s^2 + 56.82s + 21.52 \\ -s^4 - 6.09s^3 - 12.31s^2 - 10.09s - 3.25 \\ -0.15s^3 - 0.12s^2 + 1.79s + 1.96 \end{bmatrix}$$

$$F_{2cen}(s) = \frac{1}{p_{cen}(s)} \begin{bmatrix} -0.48s^3 - 2.75s^2 - 4.78s - 2.55 \\ -2s^4 - 15.71s^3 - 43.88s^2 - 50.82s - 20.02 \\ -0.15s^3 - 1.15s^2 - 2.94s - 2.40 \end{bmatrix}$$

$$F_{3cen}(s) = \frac{1}{p_{cen}(s)} \begin{bmatrix} 0.6s^3 + 2.25s^2 + 2.64s + 0.93 \\ -0.2s^3 - 0.41s^2 + 0.17s + 0.56 \\ 4s^4 + 25.61s^3 + 58.64s^2 + 56.64s + 19.25 \end{bmatrix}$$

avec

$$p_{cen}(s) = s^5 + 9.47s^4 + 34.55s^3 + 60.53s^2 + 50.79s + 16.27$$

#### Remarques et interprétations

On constate que les coefficients des polynômes dans le cas centralisé et le cas décentralisé sont très proches.

En comparant les réponses indicielles des éléments des matrices de transfert qui sont presque identiques, il est évident que cette méthode donne des résultats meilleurs que la méthode précédente .

### **3.1 Conclusion**

D'après les résultats de simulation, on constate que cette méthode est très efficace car les réponses indicielles dans le cas décentralisé et le cas centralisé sont presque identiques.

Le seul inconvénient que nous avons remarqué en utilisant cette méthode, résulte dans le choix d'une matrice initiale qui doit avoir une structure décentralisée tout en gardant le système global stable en boucle fermée.



### *Chapitre III*

**Commande décentralisée  
par placement de pôles**

## 1. Introduction

La position des pôles des systèmes linéaires détermine leur stabilité et leur comportement dynamique. C'est pour cette raison que le placement de pôles a beaucoup d'importance.

La commande décentralisée par placement de pôles s'impose dans plusieurs cas où l'échange de l'information est impossible entre les sous-systèmes ou non fiable.

Dans ce domaine plusieurs travaux ont été effectués : *Kimura (1975)[11]*, *Davison & Wang (1975)[12]*, mais ces derniers n'ont fait l'objet que des conditions suffisantes pour la possibilité d'effectuer le placement de pôles décentralisé. En 1989 *Tarokh[7]* a développé une nouvelle méthode pour le placement de pôles décentralisé. C'est sur cette dernière approche que va se baser le présent chapitre.

## 2. Commande décentralisée par placement de pôles [7]

Dans cette partie nous présentons une des méthodes de placement de pôles. Cette méthode peut être utilisée pour la synthèse de commande centralisée, commande décentralisée et même pour une structure quelconque.

### Définition

- On appelle matrice de gain de retour plein une matrice nécessaire pour faire un retour de sorties de dimension  $m \times l$  et dont aucun de ces éléments n'est nul.
- On appelle matrice de gain décentralisée une matrice de gain diagonale constituée par des blocs de dimensions  $m_i \times l_i$  avec  $\sum m_i \times \sum l_i < m \times l$   
 $i$  est l'indice des sous-systèmes.
- On appelle vecteur de gain de retour un vecteur constitué par les éléments de la matrice de retour  $K_S$  en réarrangeant ses colonnes en une seule colonne et en éliminant les éléments nuls

La méthode sera exposée d'une manière générale, c'est à dire, pour une matrice de gain  $K_S$  ayant une structure quelconque.

### Remarque 1

On considère le système linéaire et multivariables

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (III.1)$$

tels que :

$x$  est le vecteur d'état de dimension  $(n \times 1)$

$u$  est le vecteur de commande de dimension  $(m \times 1)$

$y$  est la sortie de dimension  $(l \times 1)$

L'équation caractéristique en boucle ouverte est :

$$p(s) = \det(sI - A) = s^n + p_1 s^{n-1} + \dots + p_n$$

$P_1, P_2, \dots, P_n$  sont des constantes scalaires

on applique un retour de sorties de la forme :

$$u(t) = K_s y(t) + v \quad (III.2)$$

où

$K_s$  est une matrice de gain structurée

$v$  est le vecteur de référence

l'équation d'état en boucle fermée est

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \hat{A}x(t) + Bv \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (III.3)$$

avec

$$\hat{A} = A + BK_s C$$

l'équation caractéristique en boucle fermée est donnée par:

$$\hat{P}(s) = \det(sI - A - BK_s C) = s^n + \hat{p}_1 s^{n-1} + \dots + \hat{p}_n \quad (III.4)$$

On peut écrire la relation suivante entre les scalaires  $\hat{p}_i, p_i$

$$\hat{p}_i = p_i + L_i + \Phi_i(K_s) \quad (III.5)$$

avec

$$L_i = \text{trace}(K_s (p_{i-1}CB + p_{i-2}CAB + \dots + CA^{n-1}B)) \quad (III.6)$$

$L_i$  est une fonction linéaire par rapport aux éléments de  $K_s$

$\Phi_i(K_S)$  est une fonction non linéaire par rapport aux éléments de  $K_S$ , on note que  $\Phi_i(K_S)$  contient des éléments de  $K_S$  de l'ordre supérieur ou égal à 2 et des multiplications de la forme de  $k_1 k_{1+1} \dots k_2 k_{2+1} \dots k_1 k_{1+2} \dots$  etc.

avec  $\Phi_i(0)=0$

L'expression (6) peut écrire sous la forme

$$L_i = (p_{i-1}e_0 + p_{i-2}e_1 + \dots + e_{i-1})k \quad (III.7)$$

où  $k$  est un vecteur de gain de dimension  $(u \times 1)$

$e_j$  est une ligne de dimension  $u$  formée le réarrangement des lignes de  $CA^jB$  sur une même ligne en éliminant les éléments qui correspondent aux éléments nuls dans  $K_S$ .

donc

$$\hat{p}_i = p_i + (p_{i-1}e_0 + p_{i-2}e_1 + \dots + e_{i-1})k + \Phi_i(k) \quad (III.8)$$

$i=1,2,\dots,n$

On voit bien que le problème du placement de pôles revient à résoudre une équation non linéaire très complexe (III.8).

Pour résoudre ce problème on présente une méthode basée sur la linearisation de l'équation (8) et l'incrémentement du retour de sortie

On considère le système de l'équation (III.3) avec l'équation caractéristique (III.4) et on fait appel à la matrice de gain  $\delta k_S$  ou ses éléments  $\delta k_1, \delta k_2, \dots, \delta k_u$  sont suffisamment petits .L'application de  $\delta k_S$  produit une petite variation des paramètres de l'équation caractéristique  $\delta p_1, \delta p_2, \dots, \delta p_u$ , et on élimine la partie non linéaire  $\Phi_i(K_S)$  qui tend vers zéro .

d'où

$$\hat{p}_i + \delta p_i = \hat{p}_i + (\hat{p}_{i-1}\hat{e}_0 + \hat{p}_{i-2}\hat{e}_1 + \dots + \hat{e}_{i-1})\delta k + \Phi_i(\delta k) \quad (III.9)$$

tels que

-  $\hat{e}_i$  formé de la même façon que  $e_i$  mais avec les matrices  $C(A + BK_S C)^i B$

-  $\hat{p}_i$  sont les coefficients de  $\det(sI - A - BK_S C)$

$$-\Phi_i(\delta K_s) \longrightarrow 0$$

alors on obtient le système suivant:

$$\begin{pmatrix} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ \vdots \\ \delta p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_{n-1} & \dots & p_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_0 \\ \hat{e}_1 \\ \vdots \\ \hat{e}_{n-1} \end{pmatrix} \delta k$$

qu'on note sous forme condensée

$$\delta p = \hat{p} \hat{E} \delta k$$

*Théorème*

On considère le système (A,B,C) commandable et observable et qui ne contient pas de modes fixes,  $\Omega_d = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  l'ensemble des pôles désirés.

Alors il existe un retour à structure quelconque Si:

$$\text{rang}(\hat{E}) = n$$

*Algorithme du placement de pôles*

1- Mettre le système sous forme d'équation d'état (A,B,C), choisir l'ensemble des pôles à placer  $\Omega_d = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

2- Calculer les coefficients de l'équation caractéristique  $P_0$  pour  $\det(sI - A - CK_{s0}B)$  avec  $K_{s0}$  une matrice initiale qui rend le système en boucle fermée stable ( $K_{s0}=0$ ) si le système est stable en boucle ouverte.

3- Calculer les coefficients de l'équation caractéristique désirée

$$p_d = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i)$$

$\lambda_i$  sont les valeurs propres désirées

4- Initialisation

$$\begin{cases} P_j = P_0 \\ A_j = A + CK_{s0}B \\ \delta P_j = (P_j - P_d)/M \\ K_{sj} = K_{s0} \end{cases}$$

5- Calculer  $CA_j^i B$   $i = 1, 2, \dots, n-1$

former  $\hat{E}_i$  et  $\hat{P}_j$

vérifier que  $\text{rang}(\hat{E}_j) = n$

6- Résoudre  $\delta P_j = \hat{P}_j \hat{E}_j \delta k_j$

7- Réarranger  $\delta k_j$  pour avoir  $\delta K_j$

Calculer  $A_{j+1} = A_j + B \delta K_j C$

et

$P_{j+1}$  de  $A_{j+1}$

$$\delta P_{j+1} = (P_{j+1} - P_d)/M$$

8-  $j=j+1$

Retour à 5 jusqu'à  $P_d = P_j$

*Exemple 1[7]*

Reprenons l'exemple précédent

Les pôles en boucle ouverte sont:  $\{-0.2592, -1.4535, -1.8564, -0.7904+0.147j, -0.7904-0.147j\}$

On veut imposer les pôles suivants :  $\{-1, -1, -2, -3, -4\}$

En prenant la valeur initiale de  $K=0_{3 \times 3}$

Le résultat de l'algorithme est le suivant :

$$K_{dec} = \begin{bmatrix} -3.4226 & -0.5098 & 0 \\ -13.9302 & -1.7717 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0914 \end{bmatrix}$$

La matrice d'état en boucle fermée est :

$$A_{dec} = \begin{bmatrix} 11.3695 & 9.4457 & 0.6 & 0.1 & -0.2 \\ -23.5667 & -18.4840 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & -1.9086 & -0.0914 & 0.2914 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3172 & -1.0672 & -0.1828 \\ 0.25 & 0 & -0.1086 & 0.4086 & -0.9086 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de  $A_{dec}$  sont  $\{-3.9981, -3.0010, -0.9994, -1.0006, -2.000\}$

Le même placement de pôles avec une commande centralisée a donné le résultat suivant:

$$K_{cen} = \begin{bmatrix} -2.1741 & -0.6515 & -0.8847 \\ -1.5907 & -0.8836 & -0.9379 \\ -0.7534 & -1.3310 & -0.4364 \end{bmatrix}$$

La matrice d'état en boucle fermée est la suivante:

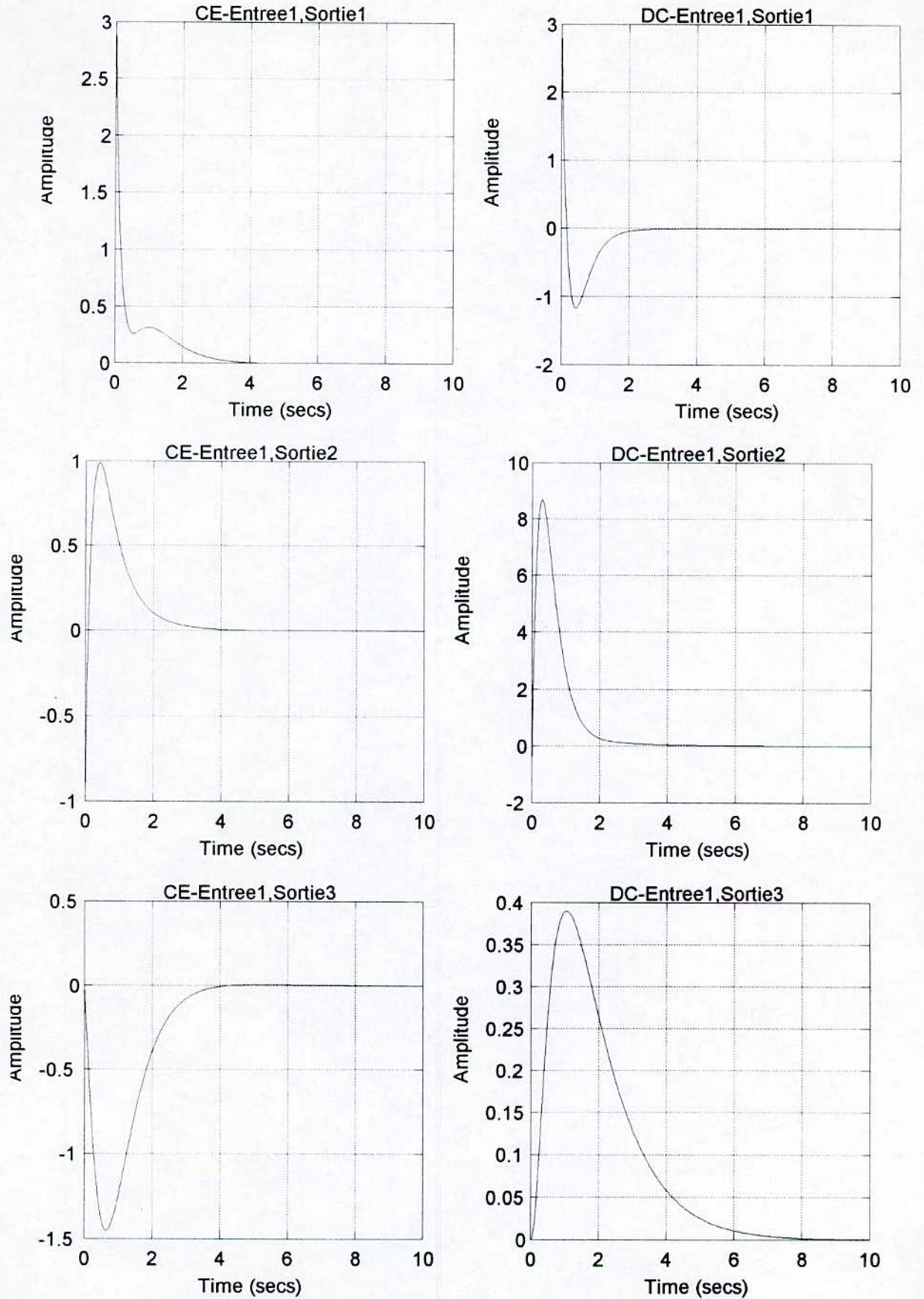
$$A_{cen} = \begin{bmatrix} -0.7513 & -0.6155 & 0.6532 & 0.0468 & -0.1468 \\ -8.1255 & -4.2523 & -2.7073 & 2.7073 & -2.3073 \\ -2.0844 & 0.5776 & -2.4364 & 0.4364 & -0.2364 \\ 4.3688 & -1.0552 & 1.3728 & -2.1228 & 0.8728 \\ -1.8344 & 0.5776 & -0.6364 & 0.9364 & -1.4364 \end{bmatrix}$$

Les deux systèmes ont les mêmes pôles mais pas les mêmes zéros

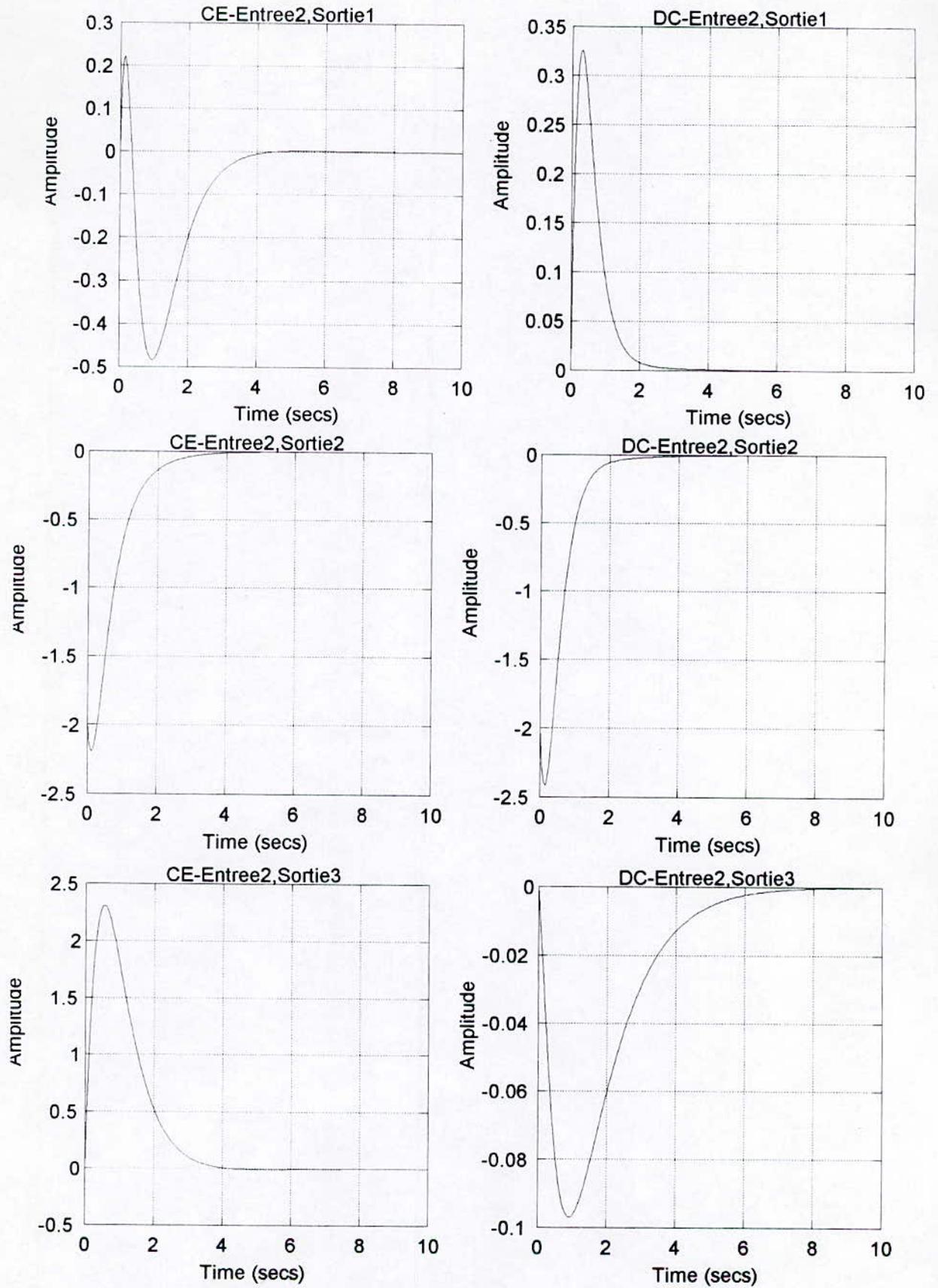
La figure(III. 1) montre les réponses impulsionnelles des éléments des matrices de transfert pour chaque type de commande (centralisée et décentralisée ).

CE : Commande centralisée

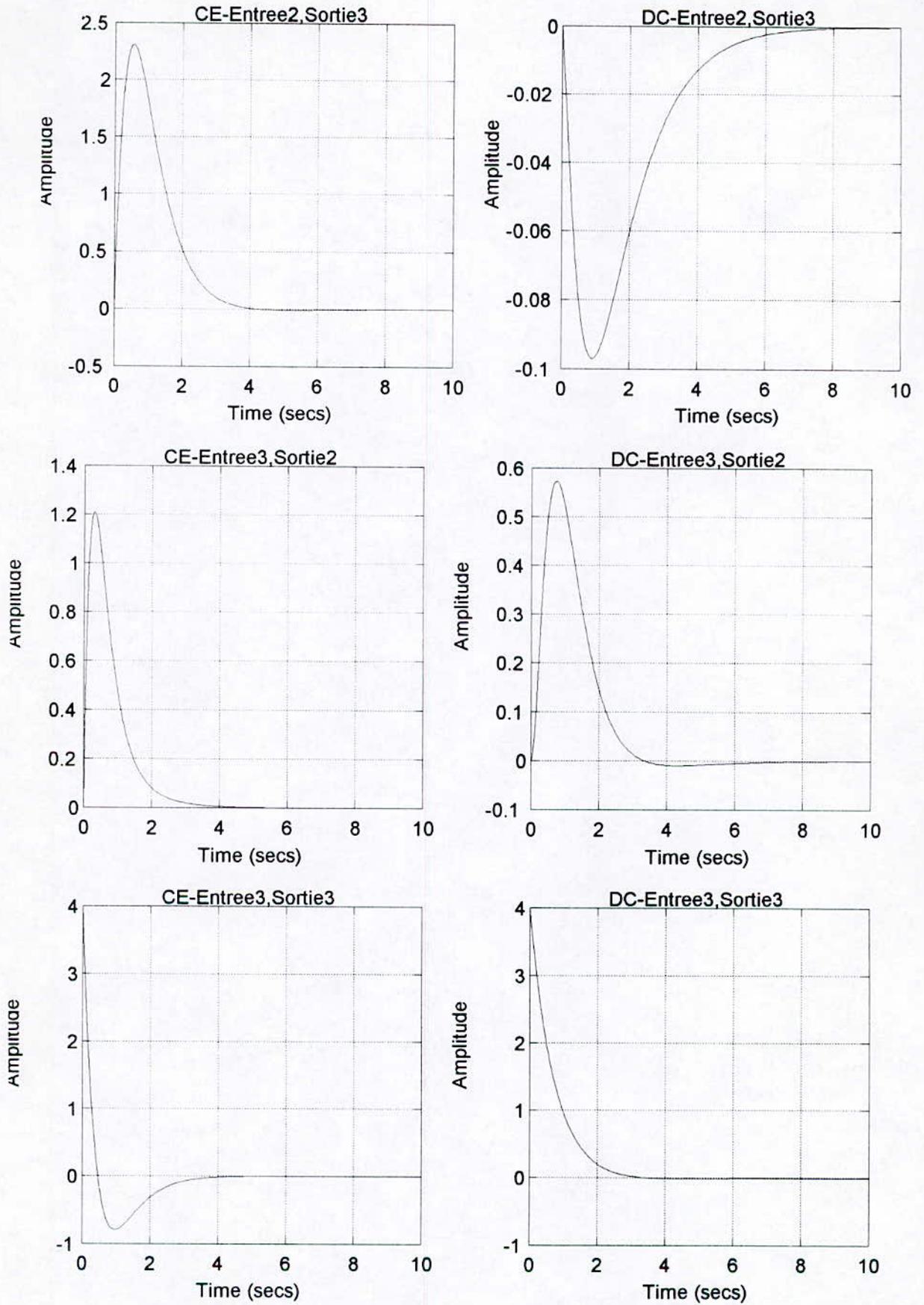
DC: Commande décentralisée



Fig(III.1.a) Réponses impulsionnelles du système en boucle fermée



Fig(III.1 b) Réponses impulsionnelles du système en boucle fermée



Fig(III.1.c) Réponses impulsionnelles du système en boucle fermée

Les matrices de transfert en boucle fermée dans le cas décentralisé et le cas centralisé sont les suivantes:

$$F_{1dec}(s) = \frac{1}{p_{dec}(s)} \begin{bmatrix} 3s^4 + 14.38s^3 + 38.58s^2 + 52.43s + 22.78 \\ -s^4 + 3.64s^3 + 30.42s^2 + 49.96s + 23.32 \\ -3.86s^3 - 49.10s^2 - 102.91s - 50.70 \end{bmatrix}$$

$$F_{2dec}(s) = \frac{1}{p_{dec}(s)} \begin{bmatrix} 4s^3 - 2.28s^2 - 25.07s - 15.47 \\ -2s^4 - 25.73s^3 - 87.40s^2 - 111.01s - 46.17 \\ 10.49s^3 + 85.97s^2 + 161.89s + 77.01 \end{bmatrix}$$

$$F_{3dec}(s) = \frac{1}{p_{dec}(s)} \begin{bmatrix} -10.01s^3 - 28.22s^2 - 21.54s - 4.86 \\ 10.84s^3 + 46.66s^2 + 63.62s + 27.27 \\ 4s^4 + 30.01s^3 + 48.17s^2 + 9.71s - 8.08 \end{bmatrix}$$

Où  $F_i$  est la colonne  $i$  de  $F(s)$ .

avec

$$p_{dec}(s) = s^5 + 10.99s^4 + 44.99s^3 + 84.97s^2 + 73.97s + 23.98$$

$$F_{1cen}(s) = \frac{1}{p_{cen}(s)} \begin{bmatrix} 3s^4 + 2.72s^3 - 19.88s^2 - 36.98s - 17.66 \\ -s^4 + 79.79s^3 + 320.031s^2 + 405.53s + 168.42 \\ -0.15s^3 + 6.36s^2 + 25.39s + 22.06 \end{bmatrix}$$

$$F_{2cen}(s) = \frac{1}{p_{cen}(s)} \begin{bmatrix} 3.15s^3 + 12.21s^2 + 15.18s + 6.19 \\ -2s^4 - 29s^3 - 92.15s^2 - 107.29s - 42.58 \\ -0.15s^3 - 2.28s^2 - 6.88s - 5.41 \end{bmatrix}$$

$$F_{3cen}(s) = \frac{1}{p_{cen}(s)} \begin{bmatrix} 0.6s^3 - 0.45s^2 - 3.6s - 2.02 \\ -0.2s^3 + 16.42s^2 + 38.61s + 18.06 \\ 4s^4 + 38.45s^3 + 126.31s^2 + 162.86s + 65.14 \end{bmatrix}$$

avec

$$p_{cen}(s) = s^5 + 10.99s^4 + 44.99s^3 + 84.97s^2 + 73.97s + 23.98$$

*Remarque*

On remarque qu'il y'a une légère différence entre les réponses impulsionnelles des deux types de commandes malgré que les matrices en boucle fermée ont les mêmes pôles, cette différence est due, a notre avis à la présence de zéros qui ne sont pas identique dans les deux cas.

*Exemple 2*

soit le système suivant composé de trois sous-systèmes et trois entrées :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

Les pôles en boucle ouverte sont:  $\{-2.4719, -0.322+1.4278j, -0.322-1.4278j, 0.2413, -1, -0.5616+0.6826j, -0.5616-0.6826j\}$

On veut imposer les pôles suivants :  $\{-0.2, -0.2, -0.2, -0.5, -0.5, -1, -2.5\}$

En prenant la valeur initiale de

$$K = \begin{bmatrix} 0.5045 & 0.5163 & 0.3190 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0.9866 & 0.4940 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2661 & 0.0907 \end{bmatrix}$$

Le résultat de l'algorithme est le suivant :

$$K_{dec} = \begin{bmatrix} 2.3081 & 1.1272 & -1.1635 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1.9518 & 1.3052 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1871 & -0.2418 \end{bmatrix}$$

La matrice d'état en boucle fermée est la suivante :

$$A_{dec} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.3081 & -0.8728 & -2.1635 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.9518 & 1.3052 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2.1871 & -3.2418 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de  $A_{dec}$  sont  $\{-0.2, -0.2, -0.2, -0.5, -0.5, -1, -2.5\}$

Le même placement de pôles avec une commande centralisée a donné le résultat suivant:

$$K_{cen} = \begin{bmatrix} 0.5666 & 1.1312 & 1.5124 & -0.4966 & -0.5192 & -0.4428 & -0.3291 \\ -0.1249 & -0.6210 & -0.5935 & 0.3383 & -0.4501 & -0.9772 & -0.4459 \\ -0.9492 & -0.9140 & -0.7219 & -0.4416 & -0.0654 & -3.2736 & -1.1623 \end{bmatrix}$$

La matrice d'état en boucle fermée est la suivante:

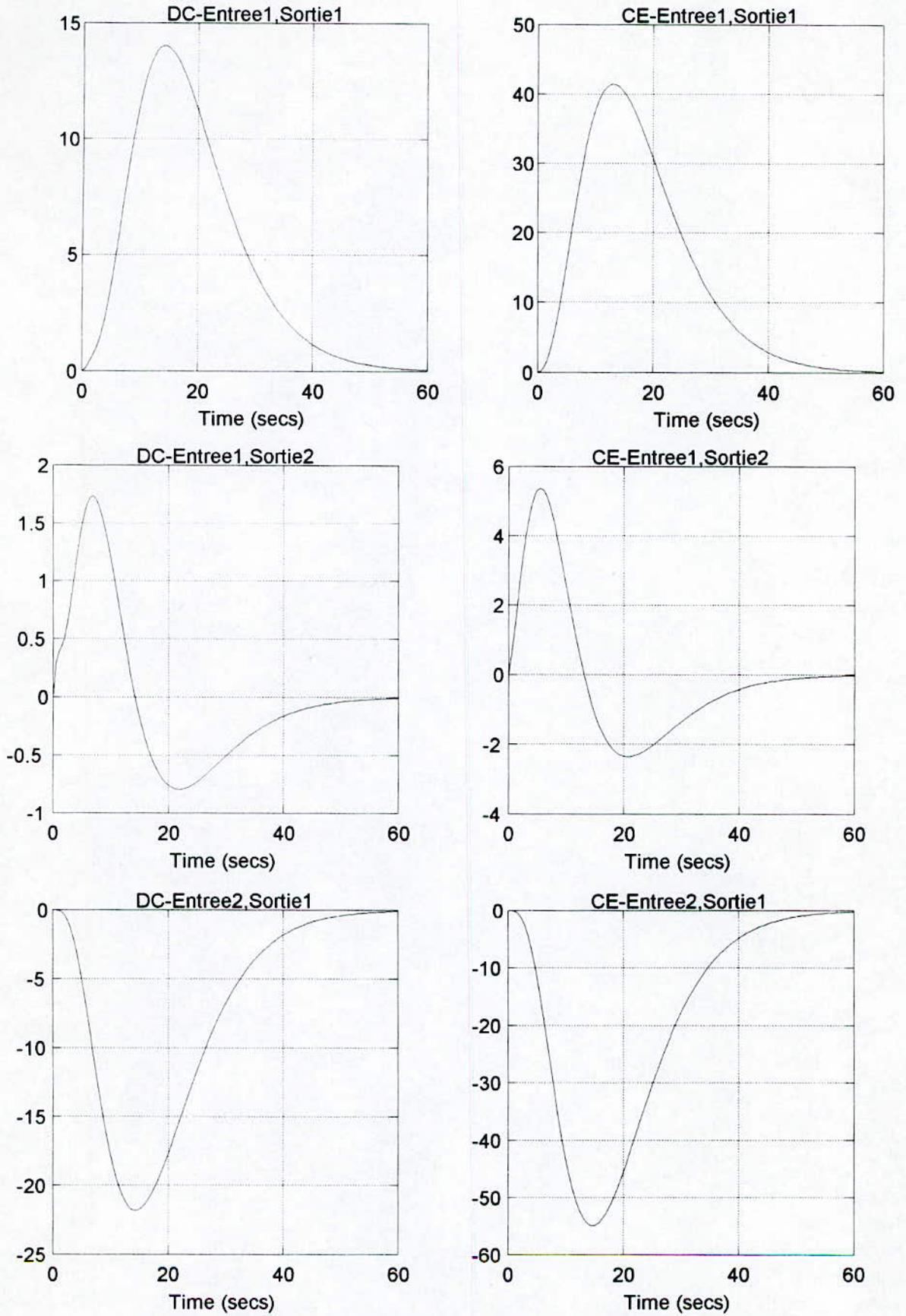
$$A_{cen} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.43334 & -0.8688 & 0.5124 & 0.5034 & -0.5192 & -0.4428 & -0.3291 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -0.1249 & -0.6210 & -0.5935 & 0.3383 & -0.4501 & 0.0288 & -0.4459 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.9492 & -0.9140 & -0.7219 & -1.4416 & -1.0654 & -5.2736 & -4.1623 \end{bmatrix}$$

Les deux systèmes ont les mêmes pôles mais pas les mêmes zéros

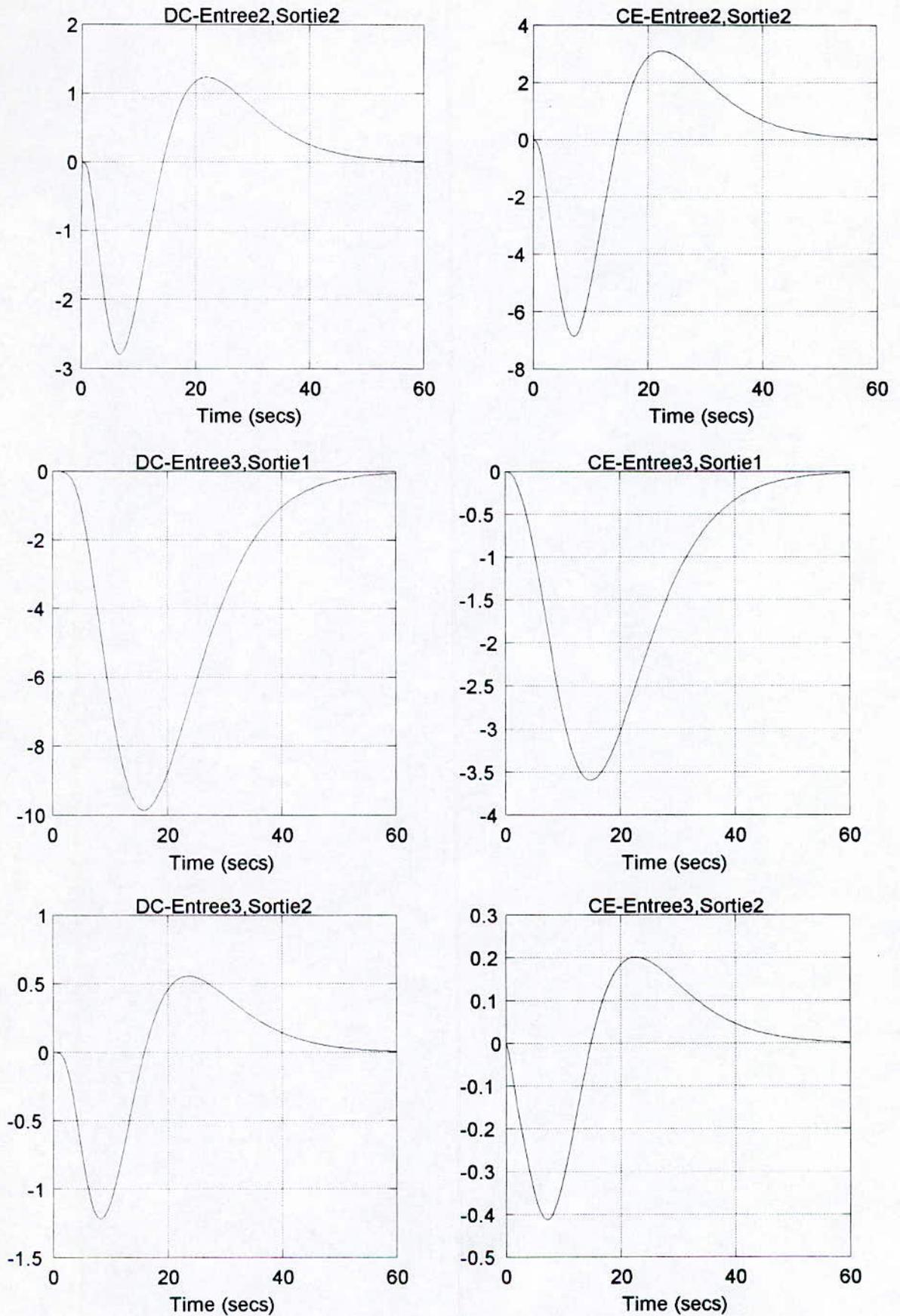
La figure(III.2) montre les réponses impulsionnelles des éléments des matrices de transfert pour chaque type de commande correspondant aux deux premiers éléments du vecteur d'état (centralisée et décentralisée).

CE : Commande centralisée

DC: Commande décentralisée



Fig(III.2.a) Réponses impulsionnelles du système en boucle fermée



Fig(III.2.b) Réponses impulsionnelles du système en boucle fermée

### **3. Conclusion**

Cette méthode dans le cas où elle est applicable, est efficace pour le placement des pôles d'un système avec une structure quelconque de la matrice de retour. Lors de l'utilisation de cette méthode, nous avons constaté qu'elle donne les mêmes valeurs des pôles que les pôles désirés aussi bien en commande centralisée qu'on commande décentralisée. On peut dire donc, que cette méthode a permis de résoudre un grand problème de la commande décentralisée.

Néanmoins, l'application de cette technique nécessite la vérification de la condition sur le rang de la matrice E ( $\text{Rang } E = n$ ), ce qui n'est pas toujours le cas.



## *Chapitre IV*

### **Modélisation d'un réseau électrique**

## 1. Modélisation d'un réseau électrique[8]

Le but de cette partie est la modélisation d'un réseau électrique qui représente un bon exemple des systèmes interconnectés, avec des stations locales de commande géographiquement éloignées.

On commencera par donner les modèles des différents composants du réseau (générateur, charges statiques et charges dynamiques). Par la suite on assemblera tous les sous-systèmes du réseau pour obtenir le modèle du système global.

Cette technique présente les avantages suivants:

- Une bonne structuration.
- La flexibilité.
- Les composants de l'équation d'état peuvent être identifiés facilement par des formulations mathématiques.
- La matrice d'état est constituée de deux matrices, la première a une structure de blocs non nuls sur la diagonale et des blocs hors diagonaux nuls, cette dernière représente la dynamique des sous-systèmes. La deuxième matrice portera des blocs nuls sur la diagonale et des blocs non nuls ailleurs, elle représente les interconnexions entre les sous-systèmes.

## 2. Structure d'un réseau multimachines

Un réseau électrique multimachines est un système de puissance constitué par les éléments suivants:

- 1- Des unités génératrices avec leurs dispositifs de régulation de vitesse et d'excitation.
- 2- Des charges statiques et dynamiques. On supposera qu'une seule charge statique et une seule charge dynamique sont connectées à un noeud
- 3- Des lignes de transmission et des transformateurs.

Pour établir cette modélisation nous procéderons aux étapes suivantes:

- Modélisation des générateurs.
- Modélisation des charges.
- Modélisation du réseau complet.
- Présentation du système interconnecté.

### 3. Modélisation des composants du réseau multimachines

#### 3.1. Modélisation des générateurs

Pour établir cette modélisation on se basera sur les points suivants :

- Un modèle de degré 3 basé sur la transformation de PARK est utilisé pour chaque rotor de la machine synchrone.
- Pas de transformateur de tension et la résistance du stator est négligée.
- La saturation est ignorée.
- L'amortissement présent dans les circuits d'amortissement est pris en considération en incluant le facteur d'amortissement équivalent.

En considérant ces propositions, les équations algébriques du  $i^{\text{eme}}$  générateur connecté au  $i^{\text{eme}}$  noeud sont :

$$v_{di} = x_{qi} i_{qi} \quad (IV.2)$$

$$v_{qi} = -x_{di} i_{di} + x_{mdi} i_{fi} \quad (IV.3)$$

$$\Psi_{fi} = -x_{mdi} i_{di} + x_{fi} i_{fi} \quad (IV.4)$$

tels que

$d_i, q_i$  l'axe direct et l'axe en quadrature d'une machine.

$v_{di}, v_{qi}$  les composants de la tension du stator suivant les axes d et q

$i_{di}, i_{qi}$  les composants du courant du stator suivant les axes d et q

$i_{fi}$  courant d'excitation.

$x_{di}, x_{qi}$  réactances synchrones suivant d et q

$x_{mdi}$  la réactance mutuelle entre l'armature et le rotor selon d

$x_{fi}$  la réactance du circuit d'excitation.

Les composants des tensions et des courants de chaque machine peuvent être rapportés aux axes communs de rotation synchronisés (D,Q) par la transformation :

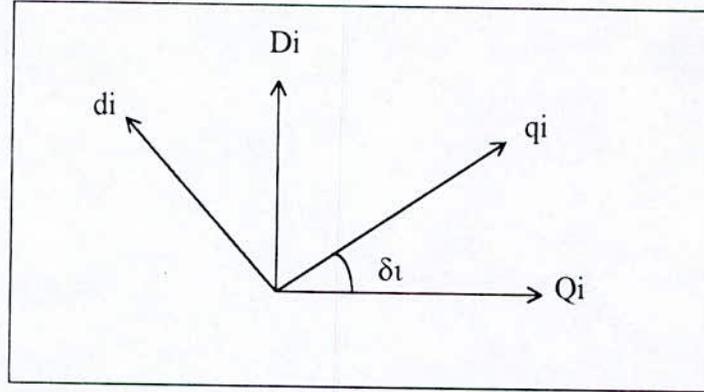
$$\begin{pmatrix} v_{di} \\ v_{qi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta_i & \sin \delta_i \\ -\sin \delta_i & \cos \delta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{Di} \\ v_{Qi} \end{pmatrix} \quad (IV.5)$$

$D, Q$  Sont les axes direct et en quadrature

$\delta_i$  Est le déphasage du rotor par rapport à l'axe D.

$v_D, v_Q$  Sont les composantes de la tension du stator selon les axes D et Q.

Schéma de la transformation:



Fig(IV.1)

Une relation analogue est obtenue par la linearisation des équations (IV.2) et (IV.5) autour d'un point de fonctionnement et on trouve:

$$\Delta I_i = R_i \Delta V_i + W_i' x_{gi} \tag{IV.6}$$

$$\Delta I_{fi} = \bar{R}_i \Delta V_i + \bar{W}_i' x_{gi} \tag{IV.7}$$

avec

$\Delta I$  la variation du courant du stator autour d'un point de fonctionnement.

$\Delta I_{fi}$  la variation du courant d'excitation autour d'un point de fonctionnement.

$\Delta V_i$  la variation de la tension du stator autour d'un point de fonctionnement.

$x_{gi}$  vecteur d'état sera défini par la suite :

$$\begin{cases} \Delta I_i = [\Delta i_{Di}, \Delta i_{Qi}]^T \\ \Delta V_i = [\Delta v_{Di}, \Delta v_{Qi}]^T \\ x_{gi} = [\Delta \delta_i, \Delta \dot{\delta}_i, \Delta \Psi_{di}]^T \end{cases}$$

$R_i, W_i', \bar{R}_i, \bar{W}_i$  sont des matrices constantes donnés dans l'annexe 1.

En considérant l'équation différentielle pour le  $i^{eme}$  générateur, on peut écrire :

$$v_{fi} = \frac{1}{\omega_0} \dot{\Psi}_{fi} + V_{fi} i_{fi} \quad (IV.8)$$

$$M_i \delta \ddot{i} + D_i \delta \dot{i} = T_{mi} - T_{ei} \quad (IV.9)$$

$$T_{ei} = I_i' V_i \quad (IV.10)$$

tels que

$v_{fi}$  la tension d'excitation.

$\omega_0$  la vitesse angulaire synchronisée du réseau.

$$M_i = \frac{H_i}{\pi f_0} \quad \text{avec } H_i \text{ constante d'inertie}$$

$T_{mi}$  couple mécanique.

$T_{ei}$  couple électrique.

$D_i$  coefficient d'amortissement.

Avec la linearisation de (IV.8), (IV.9) et (IV.10) et en utilisant les équations (IV.6) et (IV.7) on obtient:

$$\dot{x}_{gi} = A_i' x_{gi} + B_i' U_i' + C_i' \Delta V \quad (IV.11)$$

avec  $A_i'$ ,  $B_i'$ ,  $C_i'$  des matrices constantes définies dans l'annexe 1.

$$U_i' = [\Delta T_{mi}, \Delta E_{fdi}]^T$$

$\Delta T_{mi}$  La variation du couple mécanique.

$\Delta E_{fdi}$  La variation de la tension d'excitation.

En utilisant seulement un régulateur d'excitation, le schéma bloc du circuit d'excitation est le suivant :

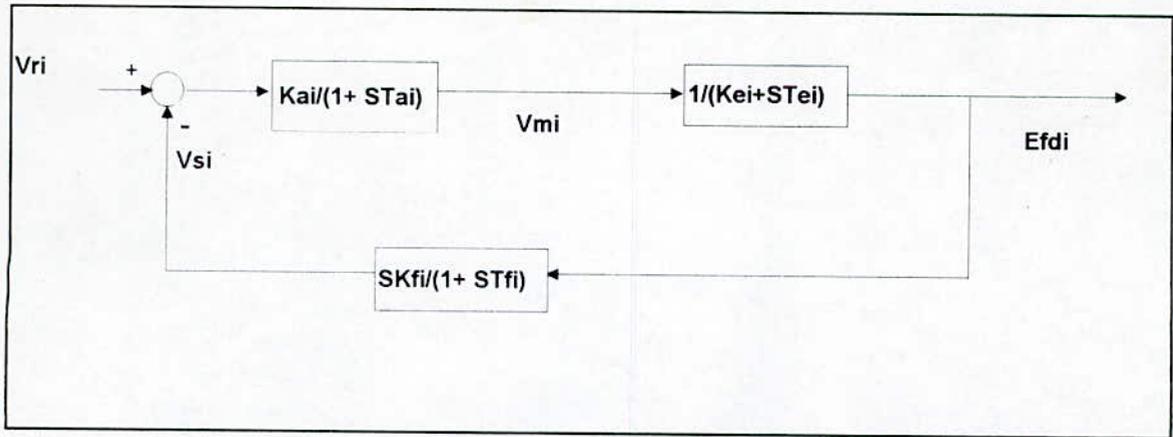


fig IV.2 Schéma bloc du circuit d'excitation

L'équation d'état du circuit d'excitation à la forme suivante :

$$\dot{x}_{ei} = A_{ei}x_{ei} + B_{ei}\Delta V_{Ri} \quad (IV.12)$$

$$y_{ei} = C_{0i}^T x_{ei} \quad (IV.13)$$

avec :

$\Delta V_{Ri}$  est la variation de la tension de commande du circuit d'excitation.

$$C_{0i}^T = [1, 0, 0]$$

$$x_{ei} = [\Delta E_{fdi}, \Delta V_{mi}, \Delta V_{si}]^T$$

$A_{ei}, B_{ei}, C_{ei}$  sont des matrices constantes définies dans l'annexe 1.

En posant  $B'_i = [B_{1i}', B_{2i}']$

L'équation d'état complète d'un générateur sera :

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + C_i \Delta V_i \quad (IV.16)$$

avec

$$x_i = [x_{gi}, x_{ei}]^T$$

$$u_i = [\Delta V_{Ri}]^T$$

$$A_i = \begin{bmatrix} A'_i & B_{2i}' C_{0i}^T \\ 0 & A_{ei} \end{bmatrix} \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{ei} \end{bmatrix} \quad C_i = \begin{bmatrix} C'_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A(2,1) & -\frac{D_i}{M_i} & -\frac{V_{di}(x_{di} - x_{di}')}{x_{mdi}x_{di}'M_i} & \frac{1}{M_v} & 0 & 0 \\ \frac{-x_{mdi}v_{di}}{x_{di}'T_{d0}} & 0 & \frac{-x_{di}}{x_{d0}'T_{d0}} & \frac{x_{mdi}}{(x_{di} - x_{di}')T_{d0}'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-K_{Ei}}{T_{Ei}} & \frac{1}{T_{Ei}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{T_{Ai}} & \frac{-K_{Ai}}{T_{Ai}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-K_{Ei}K_{Fi}}{T_{Fi}T_{Fi}} & \frac{K_{Fi}}{T_{Ei}T_{Fi}} & \frac{-1}{T_{Fi}} \end{bmatrix}$$

avec  $A(2,1) = \frac{-1}{M_i} \left( v_{qi}i_{di} - v_{di}i_{qi} + \frac{v_{qi}^2}{x_{qi}} + \frac{v_{di}^2}{x_{di}'} \right)$

$$B_i = \left( 0, 0, 0, 0, \frac{K_{Ai}}{T_{Ai}}, 0 \right)^T$$

$$C_i^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{M_i} \left[ \left( i_{di} + \frac{v_{qi}}{x_{qi}} \right) \cos \delta & i - \left( i_{qi} - \frac{v_{di}'}{x_{di}} \right) \sin \delta & i \right] & \frac{-x_{mdi} \sin \delta}{x_{di}' T_{d0}} & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{M_i} \left[ \left( i_{di} + \frac{v_{qi}}{x_{qi}} \right) \sin \delta & i + \left( i_{qi} - \frac{v_{di}'}{x_{di}} \right) \cos \delta & i \right] & \frac{x_{mdi} \cos \delta}{x_{di}' T_{d0}} & i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors L'équation (6) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \Delta I_i &= R_i \Delta V_i + W_i x_i \\ W_i &= [W_i \quad \vdots \quad 0] \end{aligned} \tag{IV.17}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A(2,1) & -\frac{D_i}{M_i} & -\frac{V_{di}(x_{di} - x_{di}')}{x_{mdi}x_{di}'M_i} & \frac{1}{M_v} & 0 & 0 \\ \frac{-x_{mdi}v_{di}}{x_{di}'T_{d0}} & 0 & \frac{-x_{di}}{x_{d0}'T_{d0}} & \frac{x_{mdi}}{(x_{di} - x_{di}')T_{d0}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-K_{Ei}}{T_{Ei}} & \frac{1}{T_{Ei}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{T_{Ai}} & \frac{-K_{Ai}}{T_{Ai}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-K_{Ei}K_{Fi}}{T_{Fi}T_{Fi}} & \frac{K_{Fi}}{T_{Ei}T_{Fi}} & \frac{-1}{T_{Fi}} \end{bmatrix}$$

avec  $A(2,1) = \frac{-1}{M_i} \left( v_{qi}i_{di} - v_{di}i_{qi} + \frac{v_{qi}^2}{x_{qi}} + \frac{v_{di}^2}{x_{di}'} \right)$

$$B_i = \left( 0, 0, 0, 0, \frac{K_{Ai}}{T_{Ai}}, 0 \right)^T$$

$$C_i^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{M_i} \left[ \left( i_{di} + \frac{v_{qi}}{x_{qi}} \right) \cos \delta \ i - \left( i_{qi} - \frac{v_{di}'}{x_{di}'} \right) \sin \delta \ i \right] & \frac{-x_{mdi} \sin \delta \ i}{x_{di}'T_{d0}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{M_i} \left[ \left( i_{di} + \frac{v_{qi}}{x_{qi}} \right) \sin \delta \ i + \left( i_{qi} - \frac{v_{di}'}{x_{di}'} \right) \cos \delta \ i \right] & \frac{x_{mdi} \cos \delta \ i}{x_{di}'T_{d0}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors L'équation (6) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \Delta I_i &= R_i \Delta V_i + W_i x_i \\ W_i &= [W_i \quad ; \quad 0] \end{aligned} \tag{IV.17}$$

### 3.2. Modélisation des charges

Dans cette modélisation on ne considère que les charges statiques

Le modèle qui caractérise une charge placée au noeud h est:

$$\begin{cases} P_{Lh} = \overset{\circ}{P}_{Lh} V_{ch}^{kph} \\ Q_{Lh} = \overset{\circ}{Q}_{Lh} V_{ch}^{kqh} \end{cases} \quad (IV.18)$$

tels que

$P_{Lh}$  et  $Q_{Lh}$  sont les puissances active et réactive associées au noeud h.

$K_{ph}, K_{qh}$  Sont des constantes dont les valeurs dépendent de la nature de la charge.

$V_{ch}$  Est la tension au h<sup>eme</sup> noeud.

Les composants du courant relatif a la h<sup>eme</sup> charge statique ramenés aux axes D et Q s'écrivent :

$$\begin{cases} i_{LDh} = (P_{Lh} V_{cDh} + Q_{Lh} V_{cQh}) / V_{ch}^2 \\ i_{LQh} = (P_{Lh} V_{cQh} - Q_{Lh} V_{cDh}) / V_{ch}^2 \end{cases} \quad (IV.19)$$

tel que  $V_{cDh}, V_{cQh}$  sont les composants de  $V_{ch}$  a la h<sup>eme</sup> charge par rapport aux axes D et Q

En linearisant (IV.19) et en prenant en considération (IV.18) on trouve :

$$\Delta I_{Lh} = R_{Lh} \Delta V_{ch} \quad (IV.20)$$

tels que :

$$\begin{cases} \Delta I_{Lh} = [\Delta i_{LDh}, \Delta i_{LQh}]^T \\ \Delta V_{ch} = [\Delta V_{cDh}, \Delta V_{cQh}]^T \end{cases}$$

où  $R_{Lh}$  est une matrice de dimension (2x2)

$$\begin{aligned}
 R_{Lh}(1,1) &= \frac{1}{V_{ch}^2} \left[ P_{Lh} + (k_{ph} - 2) \frac{V_{cDh}^2}{V_{ch}^2} P_{Lh} + (k_{qh} - 2) \frac{V_{cDh} V_{cQh}}{V_{ch}^2} Q_{Lh} \right] \\
 R_{Lh}(1,2) &= \frac{1}{V_{ch}^2} \left[ Q_{Lh} + (k_{qh} - 2) \frac{V_{cQh}^2}{V_{ch}^2} Q_{Lh} + (k_{ph} - 2) \frac{V_{cDh} V_{cQh}}{V_{ch}^2} P_{Lh} \right] \\
 R_{Lh}(2,1) &= -\frac{1}{V_{ch}^2} \left[ P_{Lh} + (k_{ph} - 2) \frac{V_{cDh}^2}{V_{ch}^2} P_{Lh} + (k_{qh} - 2) \frac{V_{cDh} V_{cQh}}{V_{ch}^2} Q_{Lh} \right] \\
 R_{Lh}(2,2) &= \frac{1}{V_{ch}^2} \left[ P_{Lh} + (k_{ph} - 2) \frac{V_{cDh}^2}{V_{ch}^2} P_{Lh} + (k_{qh} - 2) \frac{V_{cDh} V_{cQh}}{V_{ch}^2} Q_{Lh} \right]
 \end{aligned}$$

### 3.3. Modélisation du réseau complet

Pour déterminer la modélisation du réseau complet on doit déterminer les relations entre les noeuds de ce réseau. On suppose qu'il est constitué de m noeuds de charge et n noeud de générateur donc le nombre total des noeuds est n+m.

La relation qui existe entre ces noeuds est illustrée par la matrice des admittance Y tel que

$$\begin{bmatrix} \Delta I \\ \Delta I_c \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} \Delta V \\ \Delta V_c \end{bmatrix} \quad (IV.21)$$

$\Delta I, \Delta V$  Variation du courant et de la tension aux noeuds des générateurs

$\Delta I_c, \Delta V_c$  Variation du courant et de la tension aux noeuds des charges.

avec :

$$\Delta I = [\Delta I_1, \Delta I_2, \dots, \Delta I_n]^T$$

$$\Delta V = [\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n]^T$$

$$\Delta I_c = [\Delta I_{c1}, \Delta I_{c2}, \dots, \Delta I_{cm}]^T$$

$$\Delta V_l = [\Delta V_{c1}, \Delta V_{c2}, \dots, \Delta V_{cm}]^T$$

#### 4. Modèle d'un système interconnecté

Comme il a été indiqué le système est composé de  $n$  générateur et  $m$  charges statiques.

De l'équation (IV.16) on peut écrire:

$$\dot{x} = Ax + BU + C\Delta V \quad (IV.22)$$

avec

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

$$u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$$

$$A = \text{bloc diag}[A_1, A_2, \dots, A_n]$$

$$B = \text{bloc diag}[B_1, B_2, \dots, B_n]$$

$$C = \text{bloc diag}[C_1, C_2, \dots, C_n]$$

et

$$\Delta I = R\Delta V + Wx \quad (IV.23)$$

$$\Delta I_c = R_L \Delta V_c \quad (IV.24)$$

où

$$R = \text{diag}[R_1, R_2, \dots, R_n]$$

$$W = \text{diag}[W_1, W_2, \dots, W_n]$$

$$R_L = \text{diag}[R_{L1}, R_{L2}, \dots, R_{Lm}]$$

A partir des équations (IV.21), (IV.22) et (IV.23) on obtient:

$$\begin{bmatrix} \Delta V \\ \Delta V_c \end{bmatrix} = -HWx \quad (IV.25)$$

$$\text{avec } H = \left[ \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R_L \end{bmatrix} - Y \right]^{-1}$$

et

$$W = \text{diag}(W_1, W_2, \dots, W_n)$$

En remplaçant (IV.25) dans (IV.22) on obtient le modèle complet :

$$\dot{Z} = \tilde{A}Z + \tilde{B}U$$

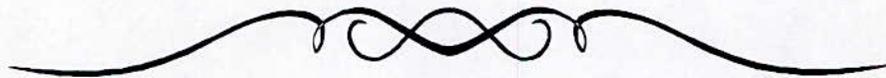
avec

$$\tilde{A} = A - CHW$$

$$\tilde{B} = B$$

où la matrice  $\tilde{A}$  est composée par des blocs diagonale représentant la dynamique du système découplé et par une matrice d'interconnexion notée T

$$T = -C_0HW$$



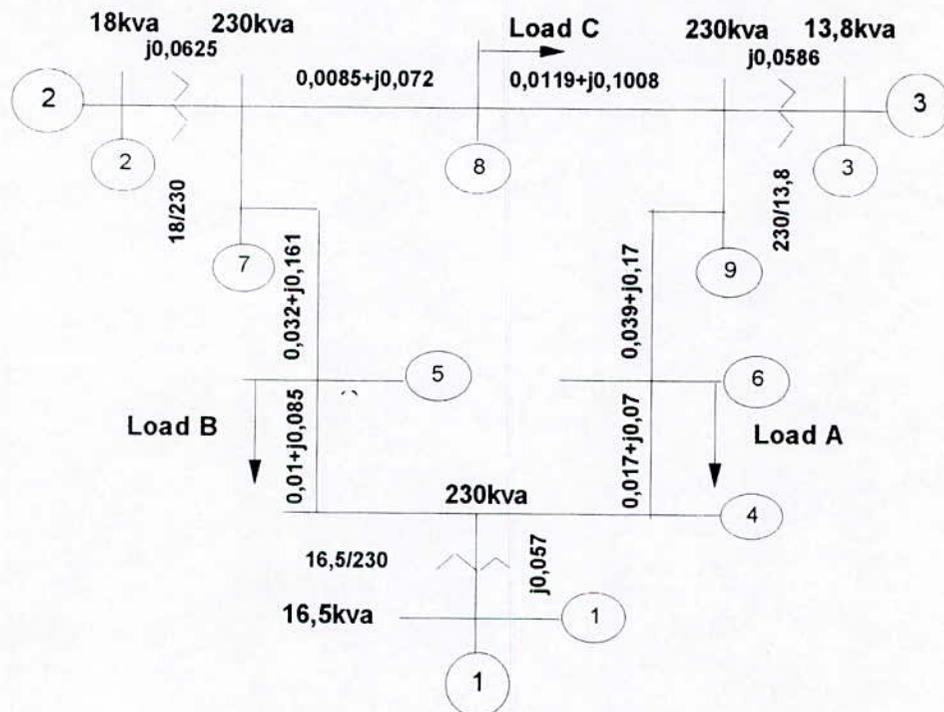
*Chapitre V*

**Application de la commande  
décentralisée sur un réseau électrique**

### 1.Introduction

Dans ce chapitre, et en vue de montrer son efficacité dans les systèmes réels, nous allons appliquer la commande décentralisée, développée dans les chapitres précédents, à un réseau électrique constitué de trois machines. Le modèle de ce réseau a été développé au chapitre IV. Une comparaison entre la commande centralisée et la commande décentralisée qui seront appliquées à ce réseau sera faite.

Le schéma du réseau étudié est donné par la figure suivante : [13]



Tous les paramètres de ce réseau sont donnés dans l'annexe (2).

En suivant les mêmes étapes de modélisation développées au chapitre précédent, on a abouti à l'équation d'état du système global suivante :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & \mathbf{0}_{6 \times 1} & \mathbf{0}_{6 \times 1} \\ \mathbf{0}_{6 \times 1} & b_2 & \mathbf{0}_{6 \times 1} \\ \mathbf{0}_{6 \times 1} & \mathbf{0}_{6 \times 1} & b_3 \end{bmatrix}$$

avec:  $\dim(A_{ij}) = 6 \times 6$  et  $\mathbf{0}_{6 \times 1}$  est le vecteur nul de dimension  $6 \times 1$

$$A_{11} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0 & .001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -.5362 & 0 & 1.6596 & .0604 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.0003 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .0006 & .0014 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.0048 & -1.0095 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .0001 & -.0006 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0 & .001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -.1607 & .0004 & 1.9982 & .0331 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.0008 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .0006 & .002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.01 & -1.41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .0001 & -.0011 \end{bmatrix}$$

$$A_{33} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0 & .001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -.1668 & .0004 & 1.3889 & .0347 & 0 & 0 \\ .0001 & 0 & -.0008 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.0004 & .002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.02 & -1.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .0002 & -.002 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .9773 & 0 & 102.85 & 0 & 0 & 0 \\ .0007 & 0 & -.0095 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .361 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .0015 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{13} = A_{23} = A_{31} = A_{32} = 0_{6 \times 6}$$

$$b_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1009.5 \ 0]^T$$

$$b_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1410 \ 0]^T$$

$$b_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1400 \ 0]^T$$

Dans ce qui suit on s'intéressera à la variation de la tension et du courant au niveau des charges et des générateurs.

$\Delta I, \Delta V$  Variation du courant et de la tension aux noeuds des générateurs

$\Delta I_c, \Delta V_c$  Variation du courant et de la tension aux noeuds des charges.

Les entrées du système sont la tension de commande du circuit d'excitation au niveau de chaque générateur.

Les matrices de sorties sont déduites des relations (IV.23), (IV.24) et (IV.25).

## 2. Commandes centralisée et décentralisée optimales

Dans cette partie nous allons dans premier temps appliquer la commande centralisée optimale au réseau électrique donné par la figure (V.1), et modélisé par les équations données au chapitre IV. En suite une commande décentralisée optimale basée sur l'algorithme du gradient (chapitre II) sera aussi appliquée sur le même réseau. L'objectif principal de cette partie est de tester l'aptitude de la commande décentralisée pour régler le problème de stabilisation du réseau et la comparaison de ces résultats avec ceux de la commande centralisée classique.

### 2.1. Commande centralisée optimale

La commande centralisée optimale est une commande largement utilisée en automatique. Cette commande, basée sur la minimisation d'un critère quadratique est obtenue par la résolution algébrique de l'équation de Riccati suivante :

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

avec

**A** et **B** respectivement matrice d'évolution (état) et matrice de commande d'un système donné par la représentation d'état usuelle

**Q** et **R** sont des matrices de pondération définies semi-positives.

La matrice de retour centralisée est donnée par

$$K = -R^{-1}B^T P$$

où **P** est la solution de l'équation de Riccati ainsi définie.

Dans notre application les matrices de pondération sont choisies comme suit :

$$Q = I_{18}$$

$$R = I_3$$

La résolution de l'équation de Riccati nous donne :

$$K_{cen} = [K_1 \quad K_2 \quad K_3]$$

avec

$$K_1 = \begin{bmatrix} 19.57 & -0.05 & -61.55 & -2.92 & -1 & 0.96 \\ -0.02 & 0 & -0.03 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.04 & 0 & -3.81 & 0 & 0 & 0 \\ 10.62 & -0.23 & -135.96 & -2.96 & -1 & 0.96 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10.4 & -0.23 & -91.49 & -3.04 & -0.99 & 0.96 \end{bmatrix}$$

## 2.2. Commande optimale décentralisée par la méthode du gradient

En prenant les mêmes pondérations que la commande centralisée

$$Q = I_{18}$$

$$R = I_3$$

L'algorithme du gradient nous donne la matrice de retour décentralisée suivante :

$$K_{dec} = \begin{bmatrix} k_1 & 0_{1 \times 6} & 0_{1 \times 6} \\ 0_{1 \times 6} & k_2 & 0_{1 \times 6} \\ 0_{1 \times 6} & 0_{1 \times 6} & k_3 \end{bmatrix}$$

avec

$$k_1 = [-0.17 \quad -0.05 \quad -0.68 \quad -0.68 \quad -0.94 \quad -0.38]$$

$$k_2 = [-0.14 \quad -0.47 \quad -0.03 \quad -0.74 \quad -0.67 \quad -0.71]$$

$$k_3 = [0.06 \quad -0.31 \quad -0.07 \quad -0.5 \quad -0.65 \quad -0.6]$$

Les figures suivantes représentent la variation du courant et de la tension au niveau des charges et des générateurs pour des entrées indicielles et impulsionnelles.

Les graphes en lignes continues représentent la commande centralisée.

Les graphes en lignes discontinues représentent la commande décentralisée.

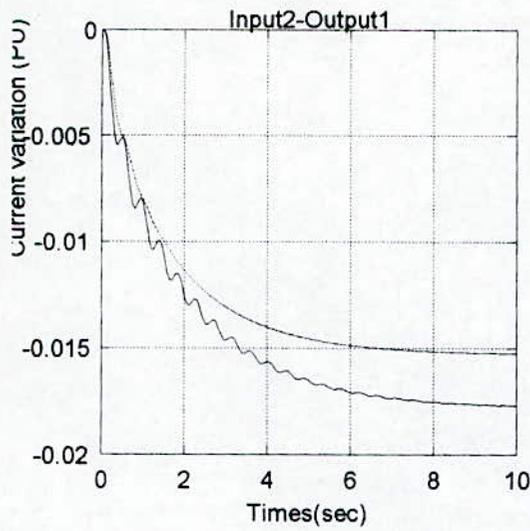


Fig a

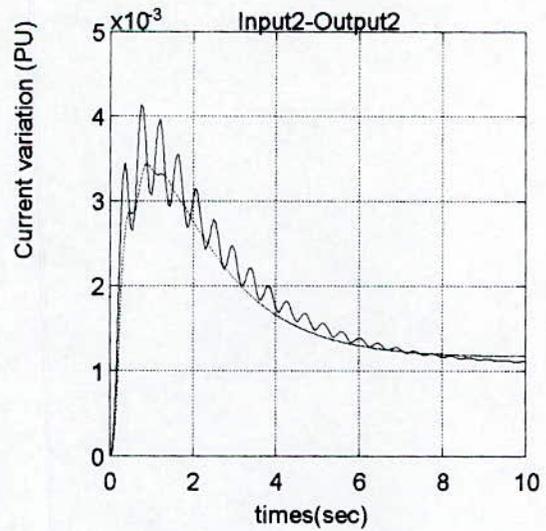


Fig b

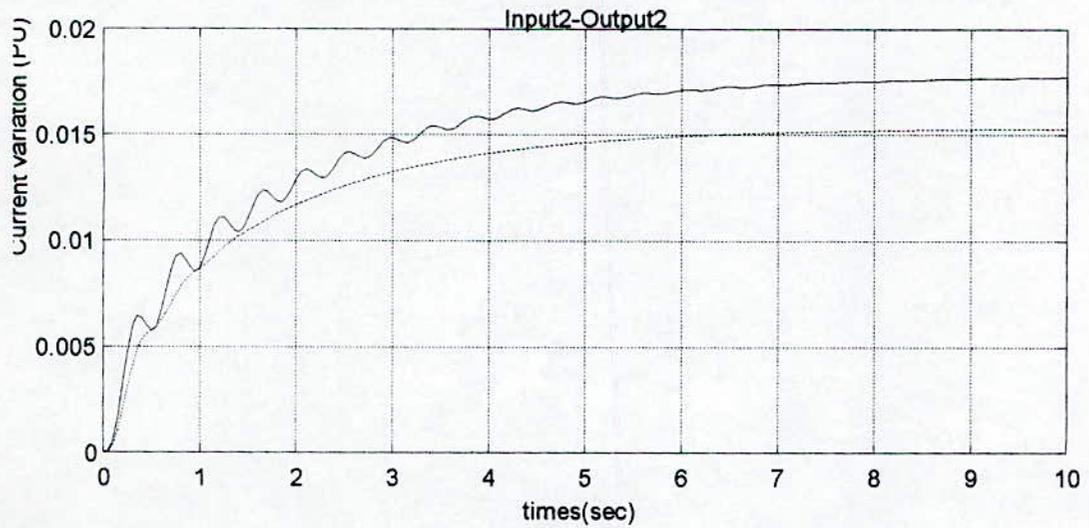


Fig c

Fig (V4) Variation du courant au niveau de la seconde charge pour une entrée indicielle sur le deuxième générateur

- a : est la variation selon l'axe D
- b : est la variation selon l'axe Q
- c : est la variation du courant

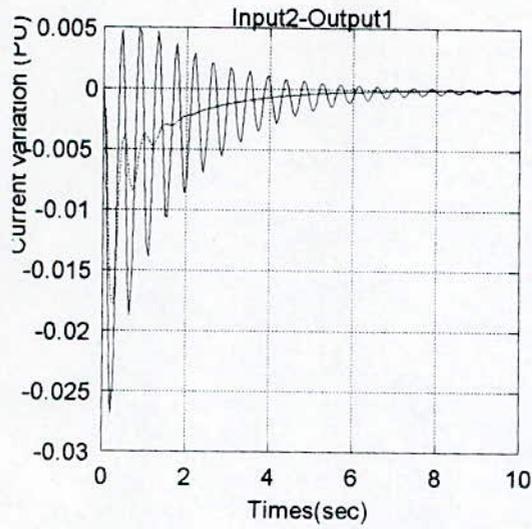


Fig a

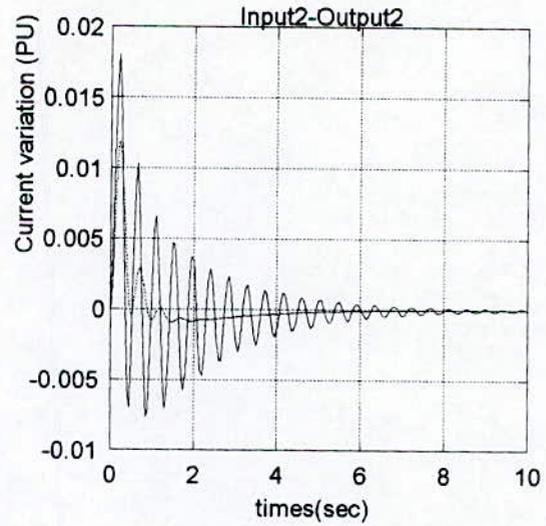


Fig b

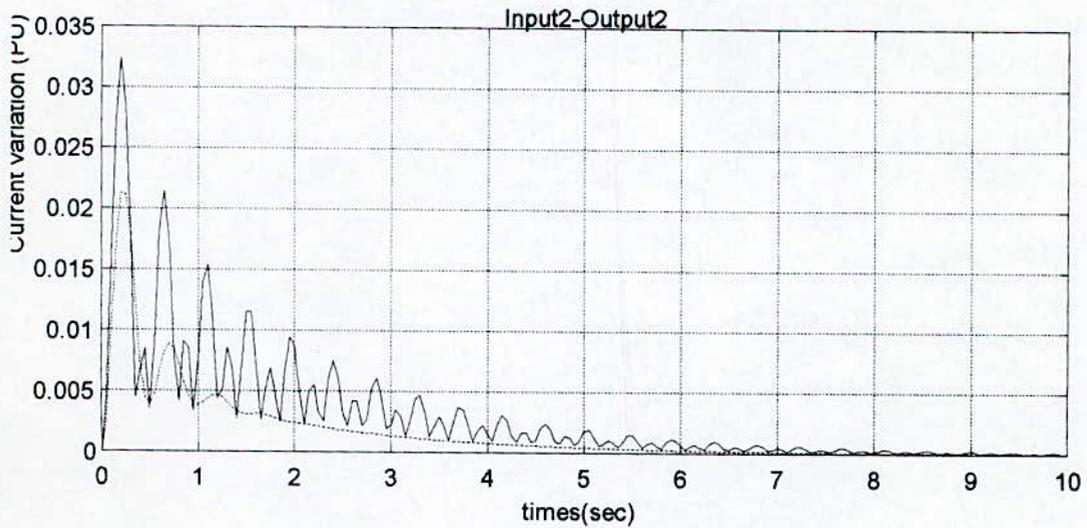


Fig c

Fig (V.2) Variation du courant au niveau de la seconde charge pour une entrée impulsionnelle sur le deuxième générateur

- a : est la variation selon l'axe D
- b : est la variation selon l'axe Q
- c : est la variation du courant.

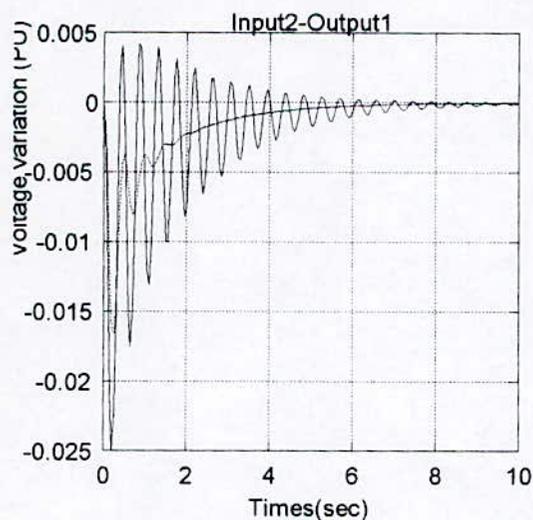


Fig a

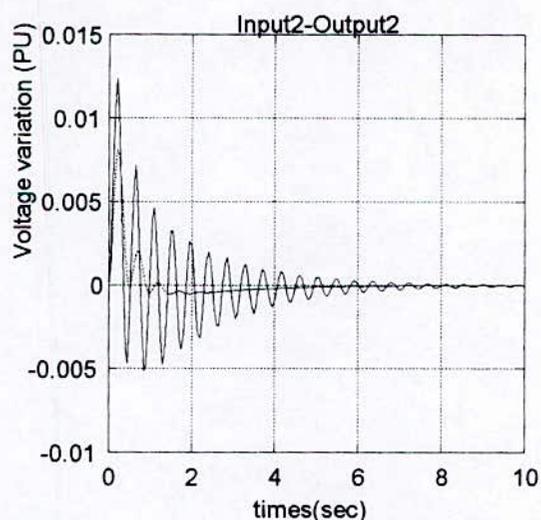


Fig b

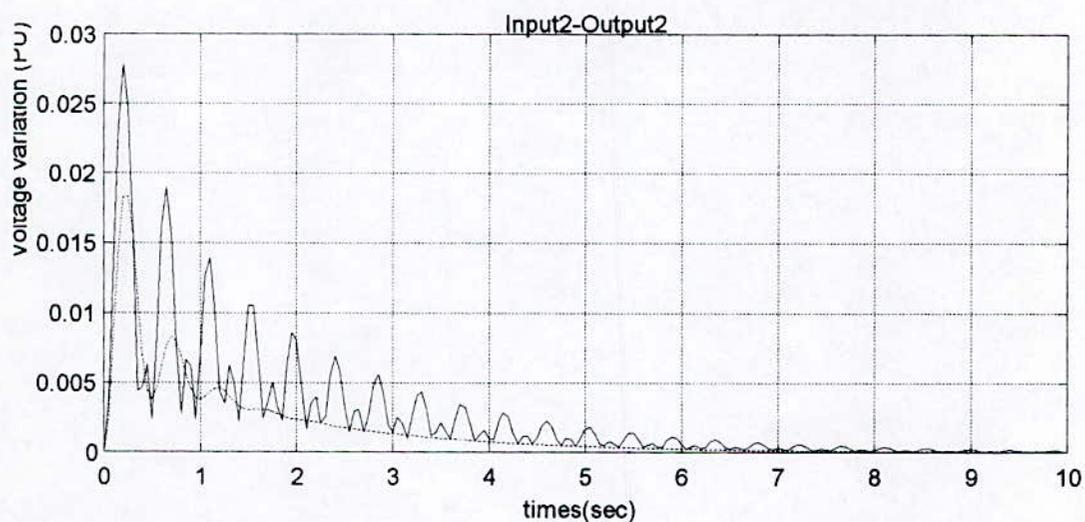


Fig c

Fig (V.3) Variation de la tension au niveau de la seconde charge pour une entrée impulsionnelle sur le deuxième générateur

- a : est la variation selon l'axe D
- b : est la variation selon l'axe Q
- c : est la variation de la tension

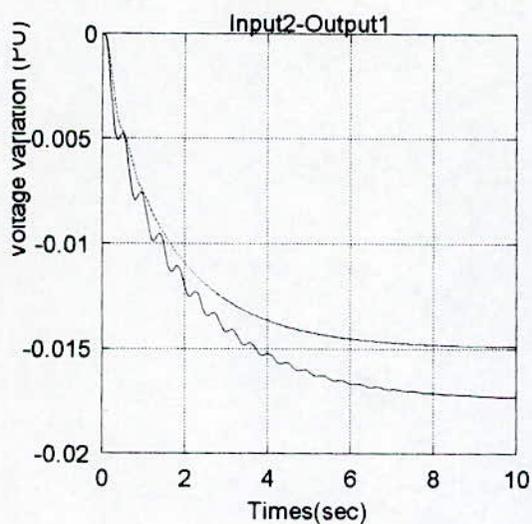


Fig a

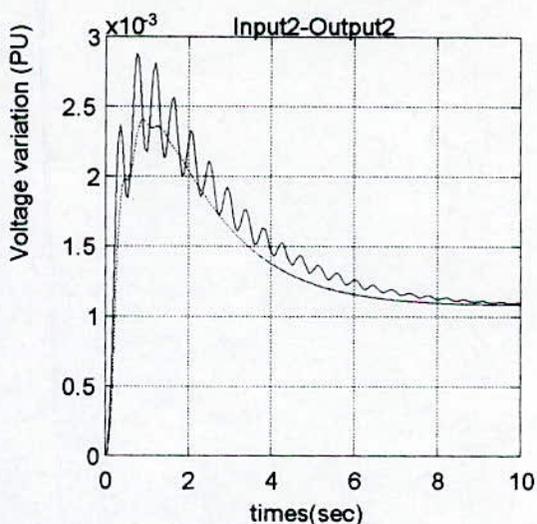


Fig b

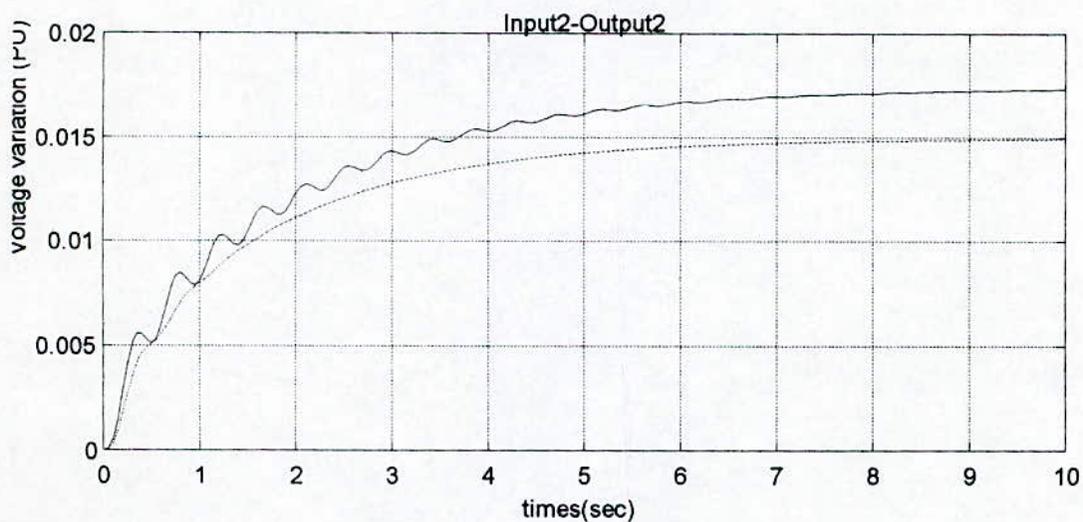


Fig c

Fig (V.4) Variation de la tension au niveau de la seconde charge pour une entrée indicielle sur le deuxième générateur

- a : est la variation selon l'axe D
- b : est la variation selon l'axe Q
- c : est la variation de la tension

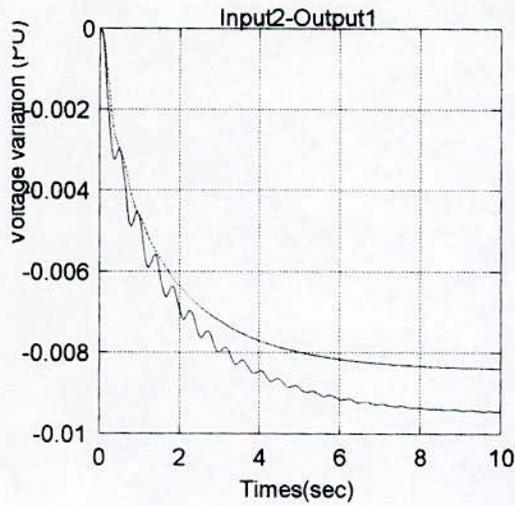


Fig a

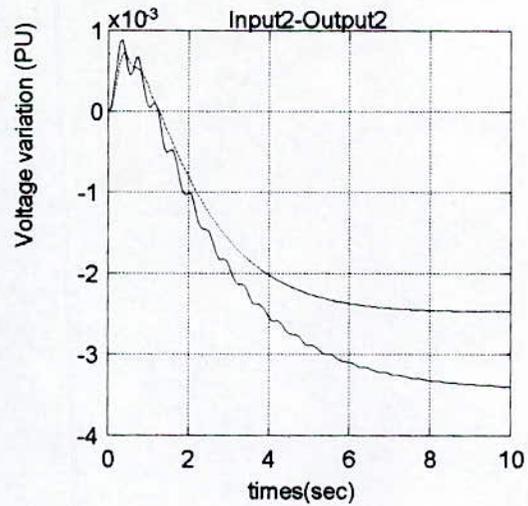


Fig b

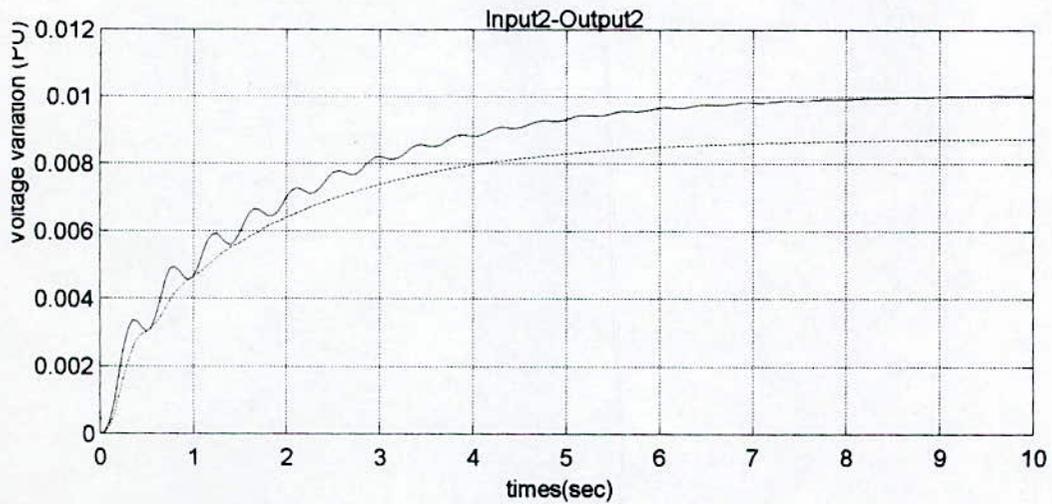


Fig c

Fig (V5) Variation de la tension au niveau du premier générateur pour une entrée indicielle sur le deuxième générateur

- a : est la variation selon l'axe D
- b : est la variation selon l'axe Q
- c : est la variation de la tension

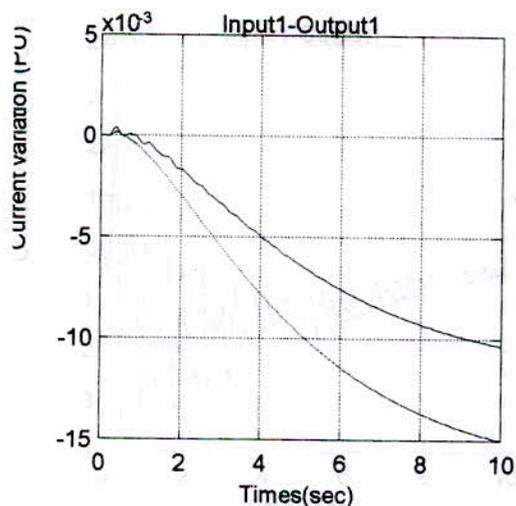


Fig a

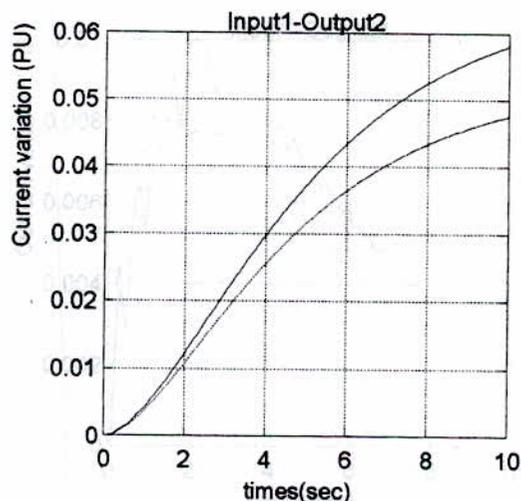


Fig b

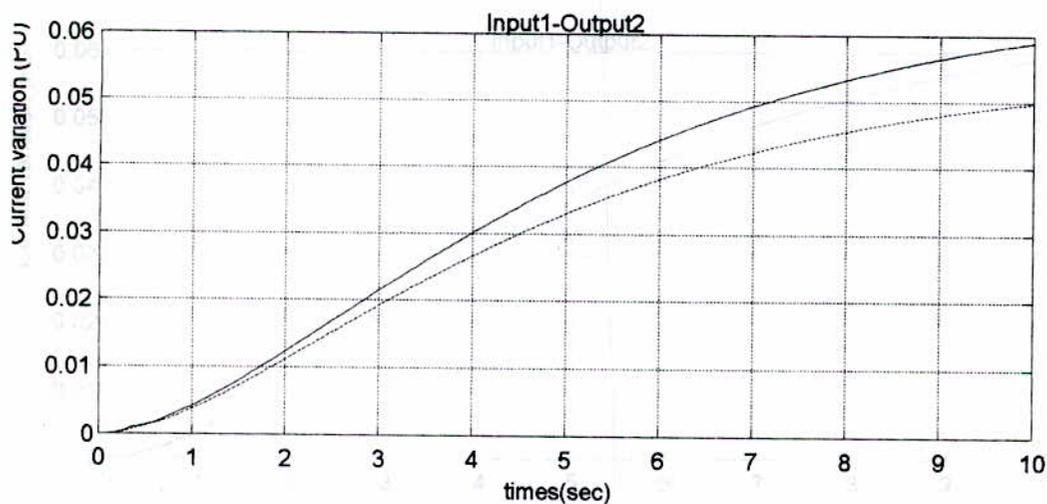


Fig c

Fig (V6) Variation du courant au niveau du second générateur pour une entrée indicielle sur le premier générateur

- a : est la variation selon l'axe D
- b : est la variation selon l'axe Q
- c : est la variation du courant

### **2.3. Interpretation des résultats**

D'après les résultats des simulations obtenus, remarques suivantes sont faites :

- Les réponses obtenues en appliquant une commande décentralisée sont généralement proches de celles d'une commande centralisée.
- L'erreur en régime permanent est dans la plus part des cas faibles et comprise entre 0.1% et 1%.
- en régime transitoire, les réponses sont plus oscillatoires dans le cas décentralisé que dans le cas centralisé.
- Le temps de réponse est presque identique dans les deux cas.

### **2.4. Conclusion**

A partir des résultats obtenus, on constate que la méthode utilisée en décentralisé donne des résultats satisfaisants, et que dans la majorité des cas la décentralisation pose des problèmes de stabilisation et de synthèse.

### **3. Commande par placement de pôles**

Lors de l'application de la commande décentralisée par placement de pôles dans l'exemple du réseau nous avons été confronté à des problèmes liés à la complexité du modèle ce qui à engendrer des problèmes numériques à cause du mal conditionnement des matrices. Ces problèmes s'interprètent par la divergence de l'algorithme utilisé.



**Conclusion générale**

## Conclusion générale

Dans ce mémoire, la commande décentralisée appliquée à un réseau électrique a été étudiée.

Avant de commencer l'étude de la commande décentralisée nous avons jugé nécessaire de donner quelques notions sur les systèmes complexes et les problèmes qui leur sont liés. Parmi ces derniers, on peut citer.

Problèmes de décomposition:

Cette décomposition peut avoir deux origines

- Décomposition évidente qui est due à la structure physique du système, ainsi décomposer, des problèmes de stabilisation décentralisée peuvent se poser (mode fixe).
- Décomposition arbitraire, qui peut être effectuée à notre choix, dans le but de simplifier la synthèse de la commande. Dans ce cas la stabilisation décentralisée peut être assurée en faisant une bonne décomposition.

La partie principale de notre travail est l'étude des différents algorithmes de synthèse décentralisée appliqués à un réseau électrique interconnecté.

Les résultats obtenus par simulation dans le cas d'une commande décentralisée optimale montrent la grande capacité de cette méthode pour assurer la stabilité du système en boucle fermée. Les performances obtenues nous semblent, très satisfaisantes.

La méthode basée sur l'algorithme du placement de pôles, a été testée sur des exemples numériques simples. Les résultats obtenus sont identiques à ceux de la commande centralisée, ce qui constitue un pas important dans la théorie de commande des systèmes complexes.

En fin, notre travail pourra être complété par l'application de l'algorithme de placement de pôles à d'autres types de réseaux électriques et en robotique. La commande décentralisée avec observateurs décentralisée pourra aussi constituer la suite de notre travail.



**Annexes**

## Annexe 1

- Les éléments des matrices  $R_i, W_i', \bar{R}_i$  et  $\bar{W}_i$

$$R_i(1,1) = -\left(\frac{1}{x_{qi}} - \frac{1}{x'_{di}}\right) \sin \delta_i \cos \delta_i$$

$$R_i(1,2) = -\left(\frac{\sin^2 \delta_i}{x_{qi}} + \frac{\cos^2 \delta_i}{x'_{di}}\right)$$

$$R_i(2,1) = \left(\frac{\cos^2 \delta_i}{x_{qi}} + \frac{\sin^2 \delta_i}{x'_{di}}\right)$$

$$R_i(2,2) = -R_i(1,1)$$

$$W_i'(1,2) = W_i'(2,2) = 0$$

$$W_i'(1,1) = -\left[\left(i_{di} + \frac{v_{qi}}{x_{qi}}\right) \sin \delta_i + \left(i_{qi} - \frac{v_{di}}{x'_{di}}\right) \cos \delta_i\right]$$

$$W_i'(1,3) = \frac{x_{di} - x'_{di}}{x_{mdi} x'_{di}} \cos \delta_i$$

$$W_i'(2,1) = \left[\left(i_{di} + \frac{v_{qi}}{x_{qi}}\right) \cos \delta_i - \left(i_{qi} - \frac{v_{di}}{x'_{di}}\right) \sin \delta_i\right]$$

$$W_i'(2,3) = \frac{x_{di} - x'_{di}}{x_{mdi} x'_{di}} \sin \delta_i$$

$$\bar{R}_i(1,1) = \frac{x_{di} - x'_{di}}{x_{mdi} x'_{di}} \sin \delta_i$$

$$\bar{R}_i(1,2) = -\frac{x_{di} - x'_{di}}{x_{mdi} x'_{di}} \cos \delta_i$$

$$\bar{W}_i(1,1) = \frac{x_{di} - x'_{di}}{x_{mdi} x'_{di}} v_{di}$$

$$\bar{W}_i(1,2) = 0$$

$$\bar{W}_i(1,3) = \frac{x_{di} - x'_{di}}{x_{mdi}^2 x'_{di}} x_{di}$$

- Les éléments des matrices  $A'_i, B'_i$  et  $C'_i$

$$A'_i(1,1) = A'_i(1,3) = A'_i(3,2) = 0$$

$$A'_i(1,2) = 1$$

$$A'_i(2,1) = -\frac{1}{M_i} \left( v_{qi} i_{di} - v_{di} i_{qi} + \frac{v_{qi}^2}{x_{qi}} + \frac{v_{di}^2}{x'_{di}} \right)$$

$$A'_i(2,2) = -\frac{D_i}{M_i}$$

$$A'_i(2,3) = -\frac{x_{di} - x'_{di}}{x_{mdi} x'_{di}} \frac{v_{di}}{M_i}$$

$$A'_i(3,1) = -\frac{x_{mdi} v_{di}}{x'_{di} T'_{do}}$$

$$A'_i(3,3) = -\frac{x_{di}}{x'_{di} T'_{do}}$$

$$B'_i(1,1) = B'_i(1,2) = B'_i(2,2) = B'_i(3,1) = 0$$

$$B'_i(2,1) = \frac{1}{M_i}$$

$$B'_i(3,2) = \frac{x_{mdi}}{(x_{di} - x'_{di}) T'_{do}}$$

$$C'_i(1,1) = C'_i(1,2) = 0$$

$$C'_i(2,1) = -\frac{1}{M_i} \left[ \left( i_{di} + \frac{v_{qi}}{x_{qi}} \right) \cos \delta_i - \left( i_{qi} - \frac{v_{di}}{x'_{di}} \right) \sin \delta_i \right]$$

$$C'_i(2,2) = -\frac{1}{M_i} \left[ \left( i_{di} + \frac{v_{qi}}{x_{qi}} \right) \sin \delta_i + \left( i_{qi} - \frac{v_{di}}{x'_{di}} \right) \cos \delta_i \right]$$

$$C'_i(3,1) = -\frac{x_{mdi}}{x'_{di} T'_{do}} \sin \delta_i$$

$$C'_i(3,2) = \frac{x_{mdi}}{x'_{di} T'_{do}} \cos \delta_i$$

- Les éléments des matrices  $A_{ei}, B_{ei}$

$$A_{ei}(1,3) = A_{ei}(2,1) = 0$$

$$A_a(1,1) = -\frac{K_{Ei}}{T_{Ei}}, \quad A_a(1,2) = \frac{1}{T_{Ei}}$$

$$A_a(2,2) = -\frac{1}{T_{Ai}}, \quad A_a(2,3) = -\frac{K_{Ai}}{T_{Ai}}$$

$$A_a(3,1) = -\frac{K_{Ei}K_{Fi}}{T_{Ei}T_{Fi}}$$

$$A_a(3,2) = -\frac{K_{Fi}}{T_{Ei}T_{Fi}}, \quad A_a(3,3) = -\frac{1}{T_{Fi}}$$

$$B_a(1,1) = B_a(3,1) = 0$$

$$B_a(2,1) = \frac{K_{Ai}}{T_{Ai}}$$

## Annexe 2

G N°	$\delta$	$\delta_i$	$M_i=H/\pi f_0$	$D_i=D_i^*/2\pi f_0$	kV
1	-0.8	0	0.01655	9.99E-3	16.5
2	-0.8	9.3	0.03023	12E-3	18
3	-0.8	4.7	0.02883	10.1E-3	13.8

G N°	$X_d$	$X_q$	$X_d'$	$X_{md}$	$T_{d0}'$	Type
1	0.146	0.096	0.068	0.036	8.96	hydro
2	0.895	0.864	0.119	0.052	6.00	steam
3	1.312	1.257	0.181	0.074	5.89	steam

Tableau 1  
Paramètres des génératrices

G N°	$K_{Ai}$	$T_{Ai}$	$K_{Ei}$	$T_{Ei}$	$K_{Fi}$	$T_{Fi}$
1	212	0.21	0.4	0.7	0.1	1.8
2	141	0.1	0.3	0.5	0.05	0.9
3	70	0.05	0.2	0.5	0.04	0.5

Tableau 2  
Paramètres des circuits d'excitations

Charge N°	$\delta$	$P_{Lh}^\circ$	$Q_{Lh}^\circ$	$K_D$	$K_G$
1	-0.069	0.99	-0.07	2.5	2.5
2	-0.064	1.01	-0.065	2.5	2.5
3	0.012	1.00	-0.012	2.5	2.5

Tableau 3  
Paramètres des charges

## Bibliographie

- [1] A. TITLI et AL "Analyse et commande des systemes complexes "  
*Cepadues Edition* 1972
- [2] D.D. SILJAK et M.B. VUCKVIC "Decentralisation, stabilisation and estimation of large scale linear systems " *IEEE Transaction on automatic* juin 1976.
- [3] S H WANG et H J DAVISON "On stabilisation of decentralized control systems"  
*IEEE Transaction on automatic* octobre 1973
- [4] D. BOUKHETALA "Commande décentralisée des systemes structurés "  
These de magister E.N.P juin 1993
- [5] T.C. YANG, N. MUNRO et A. BRANLLER " Improved condition for the optimality of decentralized control for large scale systems " *IEEE Proceedings* janvier 1989
- [6] J.C. JEROMEL et J. BERNUSSOU " An algorithm for optimal decentralized regulation of linear quadratic interconnected systems " *Automatica* vol 15, 1979
- [7] M. TAROKH " Approach for pole assignement by centralized and decentralized feedback " *IEEE Proceedings* mars 1989
- [8] M. BRUCOLI, M. TROVATO et F. TORELLI "State space representation of interconnected power systems for dynamic interaction studies " *Electric power systems research* 5 , 1982
- [9] CORFMAT et MORSE " Decentralized control of linear multivariable systems " *Automatica* 1976
- [10] ANDERSON " Times delays in large scale systems " *Prog 18th IEEE* 1979
- [11] H. KIMURA " Pole assignement by gain output feedback " *IEEE Transaction on automatic* avril 1975
- [12] WANG et DAVISON " On pole assignement in linear multivariable systems using output control " *IBID* 1975
- [13] P.M. ANDERSON et A.A. FOUAD "Power system control and stability " *IWNA State university press* U.S.A

## ملخص :

في هذا العمل طرحنا مشكلة التحكم اللامركزي في الأنظمة المعقدة . حيث درسنا كيفية استخلاص هذا التحكم بطريقتين مختلفتين :  
- طريقة استخلاص التحكم الأمثل بإستعمال معيار ربايعي عن طريق خوارزمية التناقص .

- طريقة الإستخلاص بفرض الأقطاب

في كلتا الطريقتين وُضعت بعض الأمثلة العددية لإثبات صحة الخوارزميات .  
وفي الأخير أخذنا مثال مستخلص من شبكة كهربائية وطبقنا عليه طريقة التحكم اللامركزي الأمثل حيث اعطى نتائج ناجحة عن طريق المحاكاة .  
**الكلمات المفاتيح :** التحكم اللامركزي - التحكم الأمثل - شبكة كهربائية - فرض الأقطاب .

### Abstract

In this work the problem of decentralised control is abored . The synthesis methods of this control are studied by tow approaches.

-Optimal synthesis by using a quadratic criteria, with a gradient algorithm.

-Decentralised pole assignment approach.

In these approaches numerical examples are used in order to valid these algorithms.

The decentralised optimal control method is applied to an electrical network and simulation results are obtained

### Keywords

Decentralised control-Optimal control-electrical network-poles assignment

### Résumé

Dans ce travail ,le problème de la commande décentralisé des systèmes complexes est abordé.

Les méthodes de synthèse de cette commande ont été étudiés par deux approches .

-Synthèse optimale par l'utilisation d'un critère quadratique en utilisant l'algorithme du gradient.

-Approche par placement de pôles décentralisé

Dans les deux approches des exemples numériques ont été utilisés pour valider les algorithmes

La méthode de la commande optimale est appliquée à un réseau électrique et des résultats de simulation sont obtenus

### Mots clés

Commande décentralisée- commande optimal- réseau électrique- placement de pôles