

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Ecole Nationale Polytechnique
Département de Génie Mécanique



ÉTUDE DES PROBLÈMES DE CONDUCTION DE LA CHALEUR DANS LES CORPS CYLINDRIQUES

RÉSOLUTION ANALYTIQUE PLUS SOLUTION NUMÉRIQUE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Projet de Fin d'Etude

Présenté en vue de l'Obtention du Diplôme

d'Ingénieur d'état en Génie Mécanique

Etudié par :

M. Matmat K.

Dirigé par :

M. Kebli B.

M^{elle}. Amor N.

10 Avenue Hassen Badi, EL-Harrach, Alger 16200, Algérie

Promotion
Juin 2000

Dédicace

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Je voudrai dédier le fruit de ce modeste travail

A mes très chers et bien-aimés parents.

A mes frères et sœurs.

A tous mes amis et à tous ceux qui m'aiment.

Kacim.

في هذه المذكرة نقوم بدراسة توزيع الحرارة بإيصال (توزيع درجة الحرارة) في الأجسام الأسطوانية في نظام دائم و إنتقالي.

في الجزء التحليلي، المسألة تسمى مسألة القيم المنتهية المعبر عليها بمعادلات المشتقات الجزئية أين نستعمل طريقة فصل المتغيرات و في الجزء العددي نستعمل طريقة العناصر المنتهية التعداد لإنجاز برنامج معلوماتي، نقوم بحساب درجات الحرارة بهذا الأخير ثم نقارنها بالنتائج المحصل عليها تحليليا و ذلك للتأكد من صحة نتائج البرنامج المعلوماتي.

الكلمات المفتاحية : العناصر المنتهية، إيصال ، توزيع درجة الحرارة، نظام : دائم، انتقالي ، أسطوانة : فارغة ، مملوءة ، حتمية ، غير حتمية .

Résumé :

Ce travail consiste à étudier la répartition de la chaleur par conduction « la distribution de la température » dans les corps cylindriques en régime permanent et transitoire ».

Dans la partie analytique le problème est dit de valeurs aux limites décrits en termes d'équations aux dérivées partielles où on utilise la méthode de séparation des variables et dans la partie numérique la méthode des éléments finis est utilisée pour l'élaboration d'un code de calcul. Les températures sont calculées avec celui-ci puis comparées aux résultats obtenus analytiquement pour pouvoir obtenir une corrélation générale afin de valider les résultats de ce code de calcul.

Mots clés : *éléments finis, conduction, la distribution de la température, régime : permanent, transitoire, cylindre : creux, plein, fini, infini.*

Abstract :

This work consists to study the distribution of the heat by conduction « the distribution of the temperature » in the cylindrical bodies for steady and transient state.

In the analytical part, the method of separation of variables is used to solve the boundary value problem described by partial differential equations. Whereas in the numerical part a code based on the finite elements method has been developed to solve the problem.

The temperatures are calculated with this one and then compared to the results obtained analytically in order to validate the elaborated code.

Key words: *finite elements, conduction, the distribution of the temperature, steady and transient state, cylinder: hollow, solid, finite, infinite.*

Remerciements

Je remercie Dieu qui m'a donné la volonté et le courage afin d'arriver à ce modeste travail. Et mes merveilleux parents qui m'ont offert le support dont j'avais besoin par tous les moyens possibles dans tous les aspects de ma vie sans oublier mes frères et sœurs .

Je tiens à exprimer vivement ma profonde gratitude à mes promoteurs Monsieur B. Kebli et Mademoiselle N. Amor pour leur confiance, encouragements et suivis qu'il on apporté pour l'achèvement de ce projet.

Je remercie également tous les enseignants qui ont contribués de près ou de loin à ma formation et l'ensemble des membres de jury qui m'ont fait l'honneur de juger mon travail.

Je voudrais remercier tout particulièrement le Professeur Mohand KESSAL du département Energétique - INHC Boumerdes - , mon frère Riad et mon ami Ferhat qui m'ont apporté leur précieuse aide durant ce dernier mois. Ainsi qu'à toute l'équipe de la bibliothèque pour leur entière disponibilité.

Enfin je remercie tous mes amis de la promotion 2000 de Génie Mécanique pour leur soutien : Karim, Radouane, Toufik, Yazid, Rachid, Abderrahmane, Naceri, Kheter, Nabil, Hakim, Hadj Amar, Djamel, Okba, Safia, Farida, Akacha ; à ceux de Polytechnique: Farid, Farouk, Khaled, Sofiane, Badereddine, Mokrane, Fateh, Rachid ; et tous mes autres amis que je n'ai pas cité et j'espère leur avoir apporté également le mien .

Sommaire

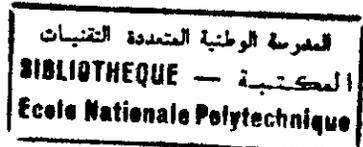
1 Introduction	1
1.1 Motivation et objectif de cette étude	1
1.2 Lignes directrices	3
2 La méthode de séparation des variables	4
2.1 Schéma général de la méthode de séparation des variables	4
2.2 Résolution des problèmes aux limites par la méthode de séparation des variables	6
2.3 Méthode de Frobenius	8
2.4 Fonctions de Bessel	10
2.5 Séries de Fourier	22
2.5.1 Développement suivant un système trigonométrique	22
2.5.2 Développement suivant un système orthogonal avec une fonction poids	23
2.6 Problème de Sturm - Liouville	24
3 Etablissement de l'équation de conduction thermique	25
3.1 Concepts fondamentaux	25
3.2 Equations de base	31
3.3 Equation différentielle gouvernant la conduction de chaleur dans un corps 3D	33
3.4 Equation différentielle de la conduction thermique en coordonnées cylindriques	35
3.5 Conditions initiales et aux limites	39
4 Résolution analytique	42
4.1 Cylindre plein et fini	42
4.1.1 Répartition stationnaire (régime permanent)	43
4.1.2 Répartition non stationnaire (régime transitoire)	48
4.2 Cylindre infini	54
4.2.1 Répartition stationnaire (régime permanent)	55
4.2.2 Répartition non stationnaire (régime transitoire)	57

5	La Méthode des Eléments Finis	61
5.1	Rappels sur les méthodes d'approximation.	62
5.2	Méthodes d'approximation universelles « méthodes des résidus pondérés »	64
5.3	Méthode de Galerkin et implémentation numérique.	65
5.3.1	Méthode de Galerkin.	65
5.3.2	discrétisation du problème.	70
5.3.3	Implémentation numérique.	79
6	Résultats et Interprétations	80
6.1	Cylindre plein et fini.	80
6.1.1	En régime stationnaire (permanent)	80
6.1.2	En régime non stationnaire (transitoire)	83
6.2	Cylindre de longueur infinie.	86
6.2.1	Cylindre creux en régime stationnaire (permanent).	86
6.2.2	Cylindre plein en régime non stationnaire (transitoire)	88
7	Conclusion	91
	Références	92
	Appendice : types de maillages utilisés dans le code de calcul	94

Liste des Figures

2.1	Les graphes des fonctions $J_n(x)$ et $Y_n(x)$ pour $n = 0$ et 1	16
3.1	Densité locale du flux thermique $\vec{\varphi}$	27
3.2	Loi de Fourier $\vec{\varphi} = -k \cdot \vec{\text{grad}} u$	29
3.3	Orthogonalité du gradient et de l'isotherme.	30
3.4	Un élément en coordonnées cartésiennes.	33
3.5	Un élément en coordonnées cylindriques.	38
5.1	Elément parabolique à 8 nœuds.	74
5.2	Positions des points d'intégration sur l'élément de référence.	77
a.	2×2 points d'intégration ($p = 2$).	77
b.	3×3 points d'intégration ($p = 3$).	77
5.3	Structure globale du programme.	79
6.1	Distribution de la température axiale ($r = 0$) dans un cylindre plein et fini	82
6.2	Distribution de la température le long de l'axe r dans le plan de symétrie horizontal pour différentes valeurs du temps t	84
6.3	Distribution de la température le long de l'axe vertical z pour différentes valeurs du temps t	79
6.4	Distribution de la température le long de l'axe horizontal r	87
6.5	Distribution de la température le long de l'axe horizontal r pour différentes valeurs du temps t	89

Liste des Tableaux



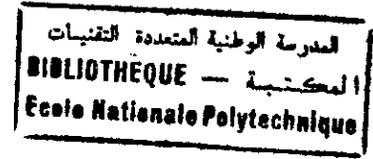
5.1	Les coordonnées et les poids des points d'intégration pour la formule de quadrature de Gauss à deux dimensions.....	78
6.1	Les températures analytiques et numériques pour $r = 0$ et $L/R = 1$	81
6.2	Les températures analytiques et numériques pour $r = 0$ et $L/R = 2$	81
6.3	Les températures analytiques et numériques pour $r = 0$ et $L/R = 4$	82
6.4	Les températures numériques et analytiques suivant l'axe horizontal r ($z = 0.5 dm$) pour différentes valeurs du temps t	84
6.5	Les températures numériques et analytiques suivant l'axe vertical z ($r = 0$) pour différentes valeurs du temps t	85
6.6	Les températures numériques et analytiques suivant l'axe horizontal r	87
6.7	Les températures numériques et analytiques suivant l'axe horizontal r pour différentes valeurs du temps t	89

Nomenclature



α	\equiv	diffusivité thermique
c	\equiv	chaleur spécifique du matériau
γ	\equiv	le facteur poids
dE_e/dt	\equiv	l'énergie entrée dans le système
dE_g/dt	\equiv	l'énergie générée à l'intérieur du système
dE_s/dt	\equiv	l'énergie sortie du système
dE_{ei}/dt	\equiv	Variation d'énergie interne du système
h	\equiv	coefficient de transfert thermique par convection
k	\equiv	conductivité thermique du matériau
φ	\equiv	densité de flux thermique [W/m^2]
dQ	\equiv	la quantité de chaleur échangée
$J_\nu(x)$	\equiv	fonction de Bessel de 1 ^{er} espèce d'ordre ν
Γ	\equiv	fonction gamma
λ	\equiv	constante de séparation
L_i	\equiv	opérateur
M_i	\equiv	opérateur
p	\equiv	le nombre de points d'intégration
q	\equiv	flux thermique [W]
\dot{q}	\equiv	intensité de la source de la chaleur [W/m^3]
t	\equiv	facteur temps
S_1	\equiv	frontière sur laquelle la valeur de la température est spécifiée comme u_0
S_2	\equiv	frontière sur laquelle le flux de chaleur q est spécifié
S_3	\equiv	frontière sur laquelle la chaleur perdue $h \cdot (u - u_\infty)$ par convection est spécifiée
T	\equiv	température [$^{\circ}C$] « dans le chapitre 5 »
u	\equiv	température [$^{\circ}C$]
u_∞	\equiv	température ambiante
V	\equiv	volume du corps
$Y_\nu(x)$	\equiv	fonction de Bessel de 2 ^{ème} espèce et d'ordre ν

Chapitre 1



1. Introduction

1.1 Motivation et objectif de cette étude

L'objectif principal des analyses du transfert thermique par conduction est de prédire l'évolution de la distribution de la température instantanée ou permanente dans un corps exposé à un environnement dont la température diffère de celui-ci. Une fois la température du corps déterminée, d'autres informations telles que le flux de chaleur et les contraintes thermiques peuvent être déduites.

La connaissance de la répartition de la température dans un matériau donné est une nécessité de premier degré pour la conception des structures qui fonctionnent à des niveaux de températures élevées durant leur service. Pour les structures non isolées (non calorifugées), les prédictions de la température sont importantes pour voir si la structure peut survivre thermiquement, et calculer l'écoulement à travers la structure aux éléments adjacents des équipements. Avec les composites, structures protégées thermiquement, les estimations de la température du matériau sont aussi primordiales afin de déterminer le degré de la protection thermique obtenue, pour estimer la dégradation des matériaux utilisés (oxydation, érosion, ablation) et pour prédire l'intégrité structurale au revêtement. Une variété de problèmes peuvent se présenter lors de la prédiction de la conduction de la chaleur dans les systèmes pratiques. Ceux-ci posent des problèmes de spécifications réalistes des conditions aux limites dues à l'environnement et du besoin du traitement d'une géométrie compliquée d'un corps donné.

Le problème le plus général de la conduction de la chaleur admet le temps comme variable indépendante. Ceci est vrai car les conditions dominantes qui causent le transfert de la chaleur dans la surface d'un corps doivent commencer à un certain point dans le temps. Pour cette raison, divers processus transitoires doivent être considérés à savoir le chauffage ou le refroidissement et le comportement transitoire résultant. Pour d'autres systèmes, l'environnement transitoire est spécifié indépendamment comme une condition aux limites dépendant du temps. Même lorsque l'environnement est permanent par rapport au temps, la température du corps est transitoire du fait de l'exposition brusque à l'environnement dont la température diffère de l'état initial de la température du solide. Après une exposition prolongée, la distribution de la température du corps devient alors permanente; ceci représente un cas spécial de la conduction de la chaleur à l'état stationnaire.

De nos jours, les calculs de la conduction de la chaleur s'effectuent au moyen d'ordinateurs puissants en appliquant des méthodes numériques telles que la méthode des différences finies ou la méthode des éléments finis. Une approche commune adaptée en pratique, est d'établir un programme pour résoudre les problèmes les plus compliqués de transfert de chaleur ; le programme résultant est appelé code. Dans certains cas, des solutions peuvent combiner des équations analytiques exactes avec des résultats numériques approximatifs. Le nombre de codes spécialisés disponibles est très important et croit de plus en plus.

Les avantages et les inconvénients des approches numériques dépendent du nombre de considérations pratiques. L'approche numérique est plus puissante dans l'étude des problèmes réels plutôt que les modélisations mathématiques qui peuvent donner une vague ressemblance aux caractéristiques réelles du problème considéré. Des corps de géométrie complexe, des propriétés variables, des conditions aux limites non linéaires et des effets couplés peuvent tous être traités par des méthodes numériques. Avec les ordinateurs modernes, des problèmes peuvent être rapidement formulés et résolus numériquement sans troncature sérieuse .

Ainsi on constate que la connaissance de la distribution de la température dans un corps est importante dans beaucoup de problèmes d'ingénierie. Cette information est utile pour calculer les contraintes thermiques qui influent sur la conception des appareils comme les chaudières, turbines à vapeur et moteurs à réaction etc.

Partant de ce principe cette étude s'intéresse à la répartition de la chaleur par conduction représentée par la distribution de la température dans les corps cylindriques.

1.2 Lignes directrices

Notre étude est structurée ainsi :

On a exposé dans le chapitre 2 une description assez détaillée de la méthode de séparation des variables où on a introduit la méthode de Frobenius, les fonctions de Bessel et les séries de Fourier avec leurs propriétés ainsi que le problème de Sturm - Liouville.

Dans le chapitre 3, on a présenté les concepts fondamentaux du transfert thermique, les équations générales régissant le problème de conduction thermique en coordonnées cartésiennes et cylindriques et enfin les conditions initiales et aux limites .

Le chapitre 4, introduit des exemples pratiques pour la résolution analytique où l'on cherche la solution analytique pour des cylindres finis et infinis en régime permanent et transitoire avec des conditions aux limites spécifiées.

Dans le chapitre 5, la méthode des éléments finis est présentée. Il contient des rappels sur les méthodes d'approximation, les méthodes des résidus pondérés, la méthode de Galerkin, les équations de discrétisation et la procédure numérique de la méthode.

Dans le chapitre 6 les exemples étudiés au chapitre 4 sont traités et discutés par des solutions approchées et exécutés avec le code de calcul élaboré par la méthode des éléments finis où on compare les résultats obtenus.

Finalement, une conclusion de cette étude est résumée dans le chapitre 7 avec une recommandation pour de futures études.

Chapitre 2

La méthode de séparation des variables

Certains problèmes de valeurs aux limites décrits en termes d'équations aux dérivées partielles peuvent être résolus analytiquement par de nombreuses méthodes. Parmi celles-ci la méthode de séparation des variables est d'une importance capitale.

Cette méthode consiste, à ramener le problème à un ensemble d'équations différentielles ordinaires et à déterminer les solutions particulières des problèmes de Sturm – Liouville ‘ solutions propres et valeurs propres ’. La recherche de la solution générale du problème s'obtient par le principe de superposition.

Dans cette méthode, simple mais très efficace, on suppose que la solution peut être exprimée comme le produit de fonctions inconnues et dépendant d'une seule variable. L'intérêt de cette méthode réside en ce qu'il est possible d'écrire l'équation résultante sous une forme telle que l'un de ses membres ne dépende que d'une variable tandis que l'autre contient toutes les variables restantes, d'où l'on peut déduire que chaque côté de l'équation doit être constant. Ce processus étant répété, on arrive à déterminer la solution recherchée du problème posé.

2.1 Schéma général de la méthode de séparation des variables

La méthode de séparation des variables est appliquée lorsqu'il s'agit de chercher des solutions particulières d'une équation du type

$$Lu=0 \quad (2.1)$$

où l'opérateur L peut s'écrire

$$L=L_1L_2+M_1M_2 \quad (2.2)$$

Les opérateurs L_1, M_1 n'agissent que sur un certain groupe de variables dont dépend la fonction u , tandis que l'action des opérateurs L_2, M_2 s'étend sur les variables qui restent. Le produit des opérateurs est le résultat de leur mise en œuvre consécutive. Tous les opérateurs L_i, M_i ($i=1, 2$) sont supposés linéaires, i.e.

$$L_i (C_1 u + C_2 v) = C_1 L_i u + C_2 L_i v$$

$$M_i (C_1 u + C_2 v) = C_1 M_i u + C_2 M_i v$$

(C_1, C_2 sont des constantes).

Pour les opérateurs du type (2.2), on cherche la solution particulière de (2.1) sous la forme $u = u_1 u_2$, où la fonction u_1 ne dépend que du premier groupe de variables, et u_2 dépend des variables qui restent. Puisque

$$L_1 L_2 (u_1 u_2) = L_1 u_1 \cdot L_2 u_2$$

$$M_1 M_2 (u_1 u_2) = M_1 u_1 \cdot M_2 u_2$$

l'équation $Lu=0$ peut s'écrire aussi comme suit :

$$\frac{L_1 u_1}{M_1 u_1} = -\frac{M_2 u_2}{L_2 u_2}$$

Les fonctions $\frac{L_1 u_1}{M_1 u_1}$ et $\frac{M_2 u_2}{L_2 u_2}$ étant indépendantes l'une des variables du second groupe et

l'autre des variables du premier groupe, il vient

$$\frac{L_1 u_1}{M_1 u_1} = -\frac{M_2 u_2}{L_2 u_2} = \lambda$$

où λ est une constante. On obtient ainsi deux équations dont chacune comprend des fonctions qui ne dépendent que d'une partie des variables initiales :

$$L_1 u_1 = \lambda M_1 u_1, \quad M_2 u_2 = -\lambda L_2 u_2 \quad (2.3)$$

Puisque l'opérateur L est linéaire, la combinaison linéaire des solutions

$$u = \sum_i C_i u_{1i} u_{2i} \quad (C_i \text{ étant des constantes})$$

qui correspondent aux différentes valeurs possibles de $\lambda = \lambda_i$ est solution de l'équation (2.1).

Nous venons de considérer les traits généraux de la méthode de séparation des variables appliquée aux équations du type $Lu=0$ dans lesquelles L est un opérateur linéaire. Dans des problèmes concrets liés à la recherche d'une solution de l'équation $Lu=0$ vérifiant certaines conditions aux limites, la méthode de séparation des variables s'avère très efficace si les variables se séparent non seulement dans l'équation mais aussi dans les conditions aux limites. Pour en arriver, on utilise souvent, au lieu des coordonnées cartésiennes, d'autres variables indépendantes, susceptibles de mettre à profit la symétrie du problème. On doit choisir des nouvelles coordonnées de telle façon que ce passage rende possible la séparation des variables dans l'équation [15].

2.2 Résolution des problèmes aux limites par la méthode de séparation des variables

La résolution d'équation différentielles aux dérivées partielles par la méthode de séparation des variables exposée dans le § 2.1 se réduit à celle d'équations différentielles ordinaires. Les solutions de ces équations se laissent exprimer à l'aide de fonctions spéciales. Si l'on veut obtenir par cette méthode la solution d'une équation aux dérivées partielles dans le contexte d'un problème concret, on doit imposer aux solutions de l'équation considérée certaines restrictions visant à assurer l'unicité de la solution du problème. Ces restrictions en amènent d'autres, imposées aux solutions des équations différentielles ordinaires correspondantes, si bien qu'on se trouve finalement devant un problème dit aux limites.

Les équations différentielles aux dérivées partielles qui se rencontrent en physique mathématique sont de la forme :

$$\rho(x, y, z) \left[A(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B(t) \frac{\partial u}{\partial t} \right] = Lu \quad (2.4)$$

où

$$Lu = \text{div} [k(x, y, z) \text{grad } u] - q(x, y, z) u$$

Si $A(t)=0$ et $B(t)=1$, l'équation (2.4) décrit des processus de transfert, tels que la propagation de la chaleur ou la diffusion de particules dans un milieu.

Des conditions supplémentaires s'imposent donc si l'on veut définir sans ambiguïté une solution de l'équation aux dérivées partielles qui traduit un processus physique concret.

Les conditions supplémentaires les plus caractéristiques sont les conditions initiales et les conditions aux limites. Pour l'équation (2.4), donner les conditions initiales c'est donner les

fonctions $u(x, y, z, t)$ et $\frac{\partial}{\partial t}u(x, y, z, t)$ pour $t=0$.

(Si $A(t)=0$, il suffit de donner la fonction $u(x, y, z, t)|_{t=0}$.)

Les conditions aux limites les plus simples s'écrivent

$$\left[\alpha(x, y, z)u + \beta(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial n} \right]_S = 0 \quad (2.5)$$

Ici $\alpha(x, y, z)$ et $\beta(x, y, z)$ sont des fonctions ; S est la surface limitant le domaine dans lequel on cherche la solution de (2.4) ; $\partial u / \partial n$ est la dérivée suivant la normale extérieure à S .

Considérons le schéma de résolution du problème aux limites par séparation des variables. La solution particulière de (2.4) répondant à la condition aux limites (2.5) peut être obtenue par séparation des variables, à condition de mettre la solution générale sous la forme

$$u(x, y, z, t) = T(t) v(x, y, z)$$

On obtient ainsi les équations suivantes :

$$A(t) T'' + B(t) T' + \lambda T = 0 \quad (2.6)$$

$$L v + \lambda \rho v = 0 \quad (2.7)$$

où λ est une constante. L'équation (2.6) est une équation différentielle ordinaire. En ce qui concerne l'équation (2.7), on aura recours à une condition aux limites consécutive à la condition (2.5) :

$$\left[\alpha(x, y, z)v + \beta(x, y, z) \frac{\partial v}{\partial n} \right]_S = 0 \quad (2.8)$$

Il s'agit donc finalement de chercher une solution non triviale de l'équation (2.7) pour la condition aux limites (2.8). La valeur de λ pour laquelle le problème posé admet une solution non triviale (i.e. $v(x, y, z) \neq 0$) est appelée *valeur propre*, et la fonction correspondante $v(x, y, z)$, *fonction propre*.

Soit $v_n(x, y, z)$ la fonction propre correspondant à la valeur propre $\lambda = \lambda_n$ ($n=0, 1, \dots$). Etant donnée l'équation (2.4), la condition aux limites (2.5) et les conditions initiales correspondantes, nous chercherons la solution sous la forme

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cdot v_n(x, y, z)$$

où la fonction $T_n(t)$ est solution de (2.6) pour $\lambda = \lambda_n$. Pour que les conditions initiales soient satisfaites, il convient de choisir les valeurs des fonctions $T_n(t)$ et $T'_n(t)$ pour $t=0$ de façon à vérifier les égalités

$$u(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0) \cdot v_n(x, y, z)$$

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} T'_n(0) \cdot v_n(x, y, z)$$

Ainsi donc, pour résoudre le problème aux limites, il faut que, quelle que soit la fonction $u(x, y, z)$ « en l'occurrence $u|_{t=0}$ et $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0}$ », elle se laisse développer en série suivant les fonctions propres $v_n(x, y, z)$ [15].

2.3 Méthode de Frobenius

La méthode de Frobenius est une méthode importante dans la recherche des solutions d'équations différentielles du type de l'équation de Bessel. Elle suppose des solutions de la forme :

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{2.9}$$

où $c_0 \neq 0$ et $r \in \mathbb{R}$.

En substituant l'expression (2.9) dans l'équation différentielle donnée, on obtient une équation pour la constante r (appelée équation *déterminante* 'indiciaire') et des équations qui permettent de déterminer les constantes c_n .

Considérons maintenant la question de résoudre l'équation générale linéaire du deuxième ordre :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \quad (2.10)$$

au voisinage du point singulier régulier $x = 0$,

on a : « $p(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)/x$ et $q(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n)/x^2$ avec $0 < |x| < R$ » et tel que a_0, b_0 ne sont pas simultanément nuls.

L'équation (2.10) admet donc des solutions sous forme de séries entières généralisées (2.9).

Si les constantes $r_{1,2}$ sont racines de l'équation *déterminante* (indiciaire) $r(r-1) + a_0 r + b_0 = 0$,

le système fondamentale $\{y_1, y_2\}$ s'obtient donc par :

a) $r_1 - r_2 \notin \mathbb{N}; (r_1 > r_2)$

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (c_0 \neq 0), \quad y_2(x) = |x|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* x^n \quad (c_0^* \neq 0)$$

b) $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (c_0 \neq 0), \quad y_2(x) = |x|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* x^n + \alpha y_1(x) \cdot \ln|x| \quad (c_0^* \neq 0)$$

tel que :

$$0 < |x| < R \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de l'équation (2.10) est donc :

$$y(x) = \lambda y_1(x) + \mu y_2(x)$$

où λ et μ sont des constantes arbitraires [1] et [10].

2.4 Fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel jouent un rôle important en mathématiques appliquées et en physique mathématique. Elles interviennent aussi bien dans des problèmes de conduction de la chaleur que dans les problèmes de diffraction, acoustique, ou électromagnétisme.

Elles apparaissent souvent dans l'étude d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites relatives à des frontières cylindriques. Ces fonctions possèdent certaines analogies avec les fonctions trigonométriques : comportement à l'infini, zéros, développement en série.

2.4.1 L'équation de Bessel

Dans les problèmes de valeurs aux limites qui impliquent le Laplacien $\nabla^2 u$ exprimée en coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) , la méthode de séparation des variables produit souvent une équation de la forme

$$r^2 \frac{d^2 y}{dr^2} + r \frac{dy}{dr} + (\lambda^2 r^2 - \nu^2) y = 0 \quad (2.11)$$

où y est une fonction de r . Dans de tels problèmes, le paramètre λ^2 est la constante de séparation dont les valeurs sont les valeurs propres associées à l'équation (2.11)

Le paramètre ν est un nombre réel déterminé par d'autres aspects du problème de valeurs aux limites ; il est le plus communément zéro ou un nombre entier positif.

Au lieu de r , on introduit une nouvelle variable indépendante $x = \lambda r$.

Ainsi l'équation (2.11) prend une forme indépendante du paramètre λ :

$$x^2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + x \frac{dy(x)}{dx} - (x^2 - \nu^2) y(x) = 0 \quad (2.12)$$

Cette équation différentielle linéaire et homogène est l'équation de Bessel.

Ses solutions sont appelées *fonctions de Bessel* ou, quelquefois, *fonctions cylindriques*[4].

2.4.2 Fonctions de Bessel de première et seconde espèce

Appliquons la méthode de Frobenius pour l'obtention de la solution générale de l'équation (2.12). Puisque l'équation (2.12) admet comme point singulier régulier le point $x=0$, alors la

solution particulière peut être déterminée sous forme d'une série entière généralisée de la forme (2.9).

$$y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (a_0 \neq 0) \quad (2.13)$$

et cherchons ses dérivées :

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k) a_k x^{r+k-1} ;$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1) a_k x^{r+k-2}.$$

Substituons l'équation (2.13) et ses dérivées dans l'équation (2.12), on obtient :

$$(r^2 - \nu^2) a_0 x^r + \left\{ (r+1)^2 - \nu^2 \right\} a_1 x^{r+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ [(r+1)^2 - \nu^2] a_k + a_{k-2} \right\} x^{r+k} = 0 \quad (2.14)$$

En annulant les coefficients de différentes puissances de x , on aura

$$r^2 - \nu^2 = 0 \quad (2.15)$$

$$[(r+1)^2 - \nu^2] a_1 = 0 \quad (2.16)$$

$$[(r+k)^2 - \nu^2] a_k + a_{k-2} = 0 \quad (2.17)$$

De l'équation (2.15), on trouve 2 valeurs pour r :

$$r_1 = \nu \quad \text{et} \quad r_2 = -\nu$$

Si on prend la 1^{ère} racine $r_1 = \nu$, alors les formules (2.16) et (2.17) donnent :

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2\nu+k)} \quad (k=2,3,4,\dots)$$

D'où on déduit que

$$a_{2k+1} = 0 \quad (k=0,1,2,3,\dots)$$

et les coefficients à indices paires sont donnés, d'une manière évidente par les formules :

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(\nu+1).1!}, \quad a_3 = \frac{a_0}{2^4(\nu+1)(\nu+2).2!} \dots \text{etc.}$$

l'expression générale des coefficients a_{2k} est la suivante :

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k}(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)k!} \quad (k=1,2,3,\dots)$$

En ce qui concerne le coefficient a_0 , qui est jusqu'à maintenant totalement arbitraire, on peut le choisir ainsi :

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \quad (2.18)$$

où $\Gamma(\nu)$ est la fonction gamma, qui est définie pour toutes les valeurs positives de ν (et même pour toutes les valeurs complexes à partie réelle positive) comme suit :

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\nu-1} dx \quad (2.19)$$

Pour un tel choix de a_0 le coefficient a_{2k} peut s'écrire à l'aide de la formule suivante :

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+n} k! (\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)\Gamma(\nu+1)} \quad (2.20)$$

Cette expression peut être simplifiée si on utilise l'une des propriétés fondamentales de la fonction gamma. Pour cela, intégrons par partie le membre droit de l'égalité (2.19) ;

On aura la formule fondamentale suivante :

$$\Gamma(\nu+1) = \nu \Gamma(\nu) \quad (2.21)$$

Remarquons que la formule (2.21) donne la possibilité de définir la fonction gamma pour des valeurs négatives ν ainsi pour toutes les valeurs complexes.

Soit $k \in \mathbb{N}$, en appliquant plusieurs fois la formule (2.21), on obtient :

$$\Gamma(\nu+k+1) = (\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)\Gamma(\nu+1) \quad (2.22)$$

En posant dans cette formule $\nu = 0$, on trouve de l'égalité $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$.

Une autre propriété importante de la fonctions gamma,

$$\Gamma(k+1) = k! \quad (2.23)$$

A l'aide de la formule (2.22), l'expression (2.20) pour le coefficient a_{2k} admet la forme :

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(\nu+k+1)} \quad (2.24)$$

En remplaçant les valeurs des coefficients a_{2k+1} et a_{2k} dans la série (2.13), on trouve la solution particulière de l'équation (2.12). Cette solution s'appelle fonction de Bessel de 1^{er} espèce d'ordre ν est indiquée par $J_\nu(x)$.

Ainsi :

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad (2.25)$$

La série (2.25) converge pour toute valeur x (critère de d'Alembert).

pour $\nu = 0$ on a :

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad (2.26)$$

En utilisant la 2^{ème} racine $r_2 = -\nu$, on peut construire la 2^{ème} solution particulière de l'équation (2.12). Elle peut être obtenue, évidemment, de la solution (2.25) avec le changement simple de ν par $-\nu$; puisque l'équation (2.12) contient uniquement ν^2 et ne change pas en prenant $-\nu$ à la place de ν :

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} \quad (2.27)$$

Si ν est différent d'un nombre entier alors les solutions particulières $J_\nu(x)$ et $J_{-\nu}(x)$ de l'équation de Bessel (2.12) seront linéairements indépendantes, puisque les développements des membres droits des formules (2.25) et (2.27) commencent par différentes puissances de x .

Mais si $\nu = n \in \mathbb{N}$, alors il est facile de remarquer la dépendance linéaire des solutions $J_n(x)$ et $J_{-n}(x)$. En effet, pour ν entier ($= n$) et $k=0, 1, 2, \dots, n-1$, la valeur de $(-\nu + k + 1)$ est négative ou nulle et $\Gamma(-\nu + k + 1) = \infty$.

Cette dernière formule se déduit de
$$\Gamma(m) = \frac{\Gamma(m+1)}{m}.$$

Par suite, les premiers n termes du développement (2.27) tendent vers zéro et on obtient :

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}$$

ou bien, en posant $k = n+l$, on aura

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma(n+l+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2l}$$

c'est-à-dire :
$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (n : \text{entier}) \quad (2.28)$$

D'ici on déduit que les fonctions $J_n(x)$ et $J_{-n}(x)$ sont linéairement dépendants.

Pour trouver une solution générale de l'équation (2.12) quand $\nu = n$ (entier), il est nécessaire de trouver une 2^{ème} solution particulière et linéairement indépendante de $J_\nu(x)$.

Pour cela introduisons une nouvelle fonction $Y_\nu(x)$, en posant :

$$Y_\nu = \frac{J_\nu(x) \cdot \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad (2.29)$$

Il est évident que cette fonction est aussi solution de l'équation (2.12), puisqu'elle représente une combinaison linéaire des solutions particulières $J_\nu(x)$ et $J_{-\nu}(x)$ de cette équation.

Ensuite il n'est pas difficile d'admettre, sur la base de la relation (2.28), que pour $\nu = n$ (entier) le membre droit de l'égalité (2.29) prendra une forme d'indétermination du type $\frac{0}{0}$. Pour cela, en appliquant la règle de L'Hospital, on obtient la représentation suivante de la fonction $Y_n(x)$ pour n entier positif.

$$\begin{aligned}
 Y_n(x) = & \frac{2}{\pi} J_n(x) \log \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} \\
 & - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \left[\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)} \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.30}$$

Dans le cas particulier, pour $n = 0$, la fonction $Y_0(x)$ est donnée par :

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[J_0(x) \cdot \log \frac{x}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \left(\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} \right) \right]
 \tag{2.31}$$

La fonction $Y_\nu(x)$ est appelée fonction de Bessel de 2^{ème} espèce d'ordre ν ou bien fonction de Weber.

La fonction de Weber $Y_\nu(x)$ est solution de l'équation de Bessel même dans le cas où ν - entier.

Les fonctions $J_\nu(x)$ et $Y_\nu(x)$ sont évidemment linéairement indépendantes. Par conséquent, pour ν - fraction ou entier, ces fonctions forment un système fondamental de solutions. D'où il découle que la solution générale de l'équation (2.12) peut être représentée par :

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)
 \tag{2.32}$$

où C_1, C_2 sont des constantes arbitraires [1] et [10].

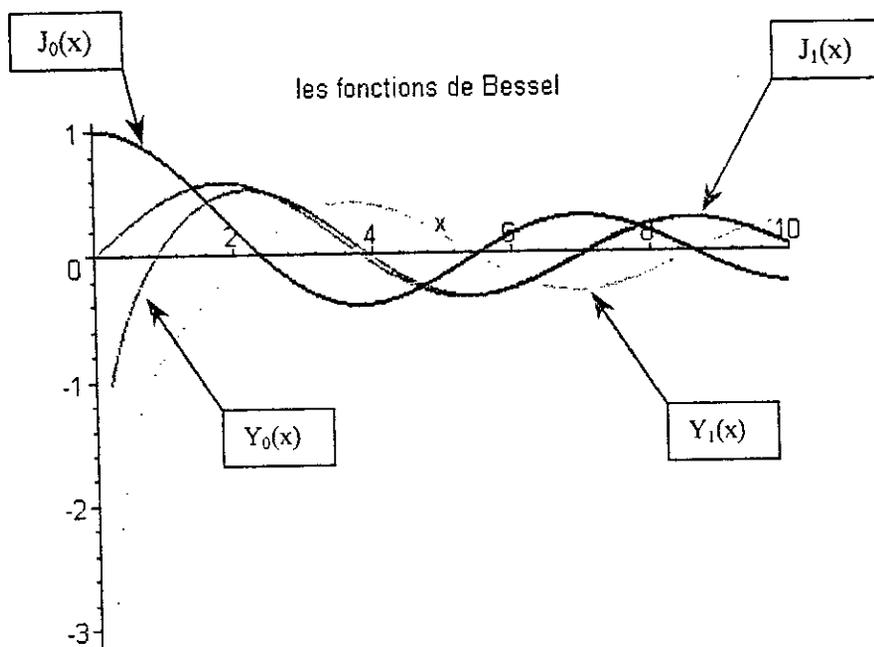
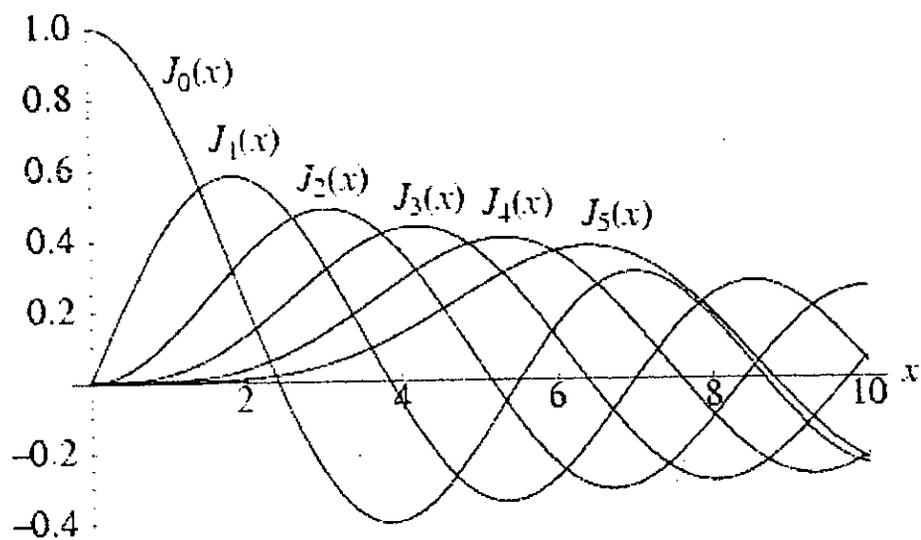


Figure (2.1) : Les graphes des fonctions $J_n(x)$ et $Y_n(x)$ pour $n = 0$ et 1.

2.4.3 Propriétés des fonctions

À partir des développements en séries, on obtient les formules de récurrence : entre les fonctions de Bessel et leurs dérivées.

La fonction $Y_\nu(x)$ satisfait aux mêmes formules où $Y_\nu(x)$ remplace $J_\nu(x)$.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x) & (a) \\ \frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) & (b) \end{cases} \quad (2.33)$$

$$\begin{cases} J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) & (a) \\ J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x) & (b) \end{cases} \quad (2.34)$$

$$J'_\nu(x) = -\frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x) \quad (2.35)$$

Les formules (2.33), (2.34) et (2.35) peuvent être vérifiés immédiatement par différentiation des séries de la fonction de Bessel.

Démontrons les formules (2.33) :

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] &= \frac{d}{dx} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2\nu+2r}}{2^{\nu+2r} r! \Gamma(\nu+r+1)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2\nu+2r-1}}{2^{\nu+2r-1} r! \Gamma(\nu+r)} \\ &= x^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{(\nu-1)+2r}}{2^{(\nu-1)+2r} r! \Gamma[(\nu-1)+r+1]} = x^\nu J_{\nu-1}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] &= \frac{d}{dx} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2r}}{2^{\nu+2r} r! \Gamma(\nu+r+1)} = x^{-\nu} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{\nu+2r-1}}{2^{\nu+2r-1} (r-1)! \Gamma(\nu+r+1)} \\ &= x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{\nu+2k+1}}{2^{\nu+2k+1} k! \Gamma(\nu+k+2)} = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \end{aligned}$$

démontrons les formules (2.34) :

D'après (2.33) (a) : $x^\nu J'_\nu(x) + \nu x^{\nu-1} J_\nu(x) = x^\nu J_{\nu-1}(x)$

$$\text{où} \quad x J'_\nu(x) + \nu J_\nu(x) = x J_{\nu-1}(x) \quad (2.36)$$

D'après (2.33) (b) : $x^{-\nu} J'_\nu(x) - \nu x^{-\nu-1} J_\nu(x) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$

$$\text{ou} \quad x J'_\nu(x) - \nu J_\nu(x) = -x J_{\nu+1}(x) \quad (2.37)$$

(a) En soustrayant (2.37) de (2.36) et en divisant par x , il vient :

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

(b) En additionnant (2.36) et (2.37) et en divisant par $2x$, on aboutit à :

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x)$$

Démontrons les formules (2.35) : En divisant les équations (2.36) et (2.37) par x , il vient

$$J'_\nu(x) = -\frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x)$$

Dans les problèmes de conduction de la chaleur exprimés en coordonnées cylindriques les solutions sont souvent exprimées en terme de fonctions de Bessel. Pour exprimer une fonction arbitraire comme des séries infinies de telles fonctions, il sera nécessaire de montrer leur orthogonalité.

Orthogonalité des fonctions de Bessel

Etudions l'équation (2.11), qui est l'équation de Bessel. Par conséquent, la fonction $y = J_\nu(\lambda x)$ sera solution de l'équation :

$$x^2 \frac{d^2 J_\nu(\lambda x)}{dx^2} + x \frac{d J_\nu(\lambda x)}{dx} + (\lambda^2 x^2 - \nu^2) J_\nu(\lambda x) = 0 \quad (2.38)$$

divisée par x , cette équation peut avoir la forme suivante :

$$\frac{d}{dx} \left[x \cdot \frac{d J_\nu(\lambda \cdot x)}{dx} \right] + \left(\lambda^2 \cdot x - \frac{\nu^2}{x} \right) \cdot J_\nu(\lambda \cdot x) = 0 \quad (2.39)$$

Prenons deux valeurs différentes de λ et recopions les équations différentielles correspondantes :

$$\frac{d}{dx} \left[x \cdot \frac{d J_\nu(\lambda_1 \cdot x)}{dx} \right] + \left(\lambda_1^2 \cdot x - \frac{\nu^2}{x} \right) \cdot J_\nu(\lambda_1 \cdot x) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left[x \cdot \frac{d J_\nu(\lambda_2 \cdot x)}{dx} \right] + \left(\lambda_2^2 \cdot x - \frac{\nu^2}{x} \right) \cdot J_\nu(\lambda_2 \cdot x) = 0$$

En multipliant la 1^{ère} de ces égalités par $J_\nu(\lambda_2 \cdot x)$, la 2^{ème} par $J_\nu(\lambda_1 \cdot x)$ et en soustrayant l'une de l'autre, après des transformations non difficiles on trouve :

$$(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) x \cdot J_\nu(\lambda_1 \cdot x) \cdot J_\nu(\lambda_2 \cdot x) = \frac{d}{dx} \left[x \cdot J_\nu(\lambda_2 \cdot x) \cdot \frac{d J_\nu(\lambda_1 \cdot x)}{dx} - x \cdot J_\nu(\lambda_1 \cdot x) \cdot \frac{d J_\nu(\lambda_2 \cdot x)}{dx} \right] \quad (2.40)$$

Si on utilise maintenant la formule (2.25), alors il n'est pas difficile d'admettre que l'expression entre crochets peut être développée en puissances de x et telle que la puissance minimale de x est $x^{2(\nu+1)}$. Par conséquent, cette expression tendra vers zéro pour $x = 0$, si $\nu > -1$.

En prenant en compte cette remarque, et en intégrant l'égalité (2.40) sur un intervalle fini $[0, l]$ on trouve :

$$(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \int_0^l x \cdot J_\nu(\lambda_1 \cdot x) \cdot J_\nu(\lambda_2 \cdot x) \cdot dx = l \left[\lambda_1 \cdot J'_\nu(\lambda_1 \cdot l) \cdot J_\nu(\lambda_2 \cdot l) - \lambda_2 \cdot J'_\nu(\lambda_2 \cdot l) \cdot J_\nu(\lambda_1 \cdot l) \right] \quad (2.41)$$

où (') présente, la différentiation par rapport à l'argument. Pour $l = 1$, cette formule devient :

$$(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \int_0^l x J_\nu(\lambda_1 x) J_\nu(\lambda_2 x) dx = \lambda_1 J'_\nu(\lambda_1 l) J_\nu(\lambda_2 l) - \lambda_2 J'_\nu(\lambda_2 l) J_\nu(\lambda_1 l) \quad (2.42)$$

Soient $\lambda_1 = \frac{\mu_i}{l}$, $\lambda_2 = \frac{\mu_j}{l}$, où μ_i, μ_j - 2 racines différentes positives de l'équation :

$$J_\nu(x) = 0 \quad (2.43)$$

Alors la formule (2.41) donne immédiatement la propriété suivante d'orthogonalité des fonctions de Bessel :

$$\int_0^l x J_\nu(\mu_i \frac{x}{l}) J_\nu(\mu_j \frac{x}{l}) dx = 0 \quad (i \neq j) \quad (2.44)$$

soit maintenant $\lambda = \frac{\mu}{l}$, où μ racine positive de l'équation (2.43). Prenons la formule (2.42) dans laquelle on pose $\lambda_1 = \lambda$, λ_2 nous la considérons comme variable tendant vers λ , ainsi on trouve :

$$\int_0^l x J_\nu(\lambda x) J_\nu(\lambda_2 x) dx = \frac{l \lambda J'_\nu(\lambda l) J_\nu(\lambda_2 l)}{\lambda_2^2 - \lambda^2}$$

Pour $\lambda_2 \rightarrow \lambda$ le membre droit prendra une forme d'indétermination $\frac{0}{0}$. De la règle de

L'Hospital on trouve :

$$\int_0^l x J_\nu^2(\mu \frac{x}{l}) dx = \frac{l^2}{2} [J'_\nu(\mu)]^2 \quad (2.45)$$

En posant dans la formule (2.35) $x = \mu$ et en tenant en compte que μ est racine de l'équation (2.43), on obtient :

$$J'_\nu(\mu) = -J_{\nu+1}(\mu)$$

et la forme (2.45) peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\int_0^l x J_\nu^2(\mu \frac{x}{l}) dx = \frac{l^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu) \quad (2.46)$$

Ainsi, nous avons :

$$\int_0^l x J_\nu(\mu_i \frac{x}{l}) J_\nu(\mu_j \frac{x}{l}) dx = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \frac{l^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_i) = \frac{l^2}{2} J_{\nu-1}^2(\mu_i) & (i = j) \end{cases} \quad (2.47)$$

où ($\nu > -1$), μ_i et μ_j les racines positives d l'équation $J_\nu(x) = 0$, [10].

2.4.4 Développement d'une fonction en série de fonctions de Bessel

Soit une fonction $f(x)$ donnée sous la forme d'une série :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_\nu(\mu_i \frac{x}{l}) \quad (\nu > -1) \quad (2.48)$$

où μ_1, μ_2, \dots - racines positives de l'équation $J_\nu(x) = 0$, données dans l'ordre de croissance.

Pour définir les coefficients a_i , multiplions les deux membres des développements (2.48) par $x J_\nu(\mu_i \frac{x}{l})$ et intégrons par parties sur $[0, l]$. En prenant en considération la formule (2.47), on trouve :

$$a_i = \frac{2}{l^2 J_{\nu+1}^2(\mu_i)} \int_0^l x f(x) J_\nu(\mu_i \frac{x}{l}) dx \quad (2.49)$$

Le développement (2.48) dans lequel les coefficients a_i sont donnés par la formule (2.49) est appelé développement de $f(x)$ en série de Fourier - Bessel [10].

2.5 Séries de Fourier

2.5.1 Développement suivant un système trigonométrique

Pour résoudre un problème de valeurs aux limites il est nécessaire de savoir développer une fonction en série trigonométrique.

Soit $f(x)$ une fonction définie sur l'intervalle $(-L, L)$ et en dehors de cet intervalle par $f(x+2L)=f(x)$, c'est-à-dire que $f(x)$ est périodique de période $2L$. La *série de Fourier* ou le *développement de Fourier* correspondant à $f(x)$ est donnée par

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (2.50)$$

où les coefficients de Fourier a_n et b_n sont

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{cases} \quad n=0,1,2,\dots \quad (2.51)$$

Si $f(x)$ a la période $2L$, les coefficients a_n et b_n peuvent être déterminés de manière équivalente par :

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{cases} \quad n=0,1,2,\dots \quad (2.52)$$

où c est n'importe quel nombre réel. Dans le cas particulier où $c=-L$, (2.52) devient (2.51).

L'idée du développement en série de Fourier d'une fonction dépendant d'une variable peut être étendue au cas des fonctions de deux variables x et y , c'est-à-dire $f(x, y)$. Nous pouvons, par exemple, développer $f(x, y)$ en une double série de Fourier en sinus :

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L_1} \sin \frac{n\pi y}{L_2} \quad (2.53)$$

où

$$B_{mn} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{L_1} \sin \frac{n\pi y}{L_2} dx dy \quad (2.54)$$

Des résultats identiques peuvent être obtenus dans le cas de développements en cosinus ou en série contenant à la fois des termes en sinus et en cosinus [19].

2.5.2 Développement suivant un système orthogonal avec une fonction poids

Soit un ensemble de fonctions $\{\psi_k(x)\}, k=1, 2, 3, \dots$, présentant la propriété

$$\int_a^b w(x) \psi_m(x) \psi_n(x) dx = \delta_{mn} \quad \text{où} \quad w(x) \geq 0 \quad (2.55)$$

δ_{mn} est le symbole de Kronecker, dont la valeur est : $\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$

chacune des fonctions de cet ensemble est orthogonale à toutes les autres fonctions de l'ensemble et est également normalisée. Un tel ensemble de fonction est dit orthonormal par rapport à la *fonction de densité* ou *fonction poids* $w(x)$. Dans ce cas, on dira que la famille $\{\psi_m\}$ est orthonormale sur l'intervalle $[a, b]$.

Le développement d'une fonction f en série de Fourier suivant le système orthonormal $\{\psi_m\}$ est :

$$f = \sum a_n \psi_n \quad \text{où} \quad a_n = \int_a^b w(x) f(x) \psi_n(x) dx \quad (2.56)$$

2.6 Problème de Sturm - Liouville

Dans la résolution des problèmes de valeurs aux limites par la méthode de séparations des variables, nous arrivons souvent à des équations de Sturm-Liouville de la forme :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda r(x)] y = 0 & a \leq x \leq b \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, & \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$: sont des constantes données,

$p(x), q(x), r(x)$: représentent des fonctions données et dérivables,

λ : est un paramètre non spécifié, indépendant de x .

Une solution non-triviale du problème (2.57) (c'est à dire, une solution qui ne soit pas identiquement nulle) n'existe, en général, que pour un ensemble particulier de valeurs du paramètre λ «la constante de séparation». Ces valeurs sont dites *caractéristiques* ou plus souvent, valeurs propres du système. En général, à chaque valeur propre correspond une fonction propre, mais il peut y avoir des exceptions.

Si $p(x)$ et $q(x)$ sont réelles, les valeurs propres sont réelles. De plus les fonctions propres forment un ensemble orthogonal par rapport à la fonction densité $r(x)$, ($r(x) \geq 0$) dans $a \leq x \leq b$.

c'est à dire, si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont des fonctions propres correspondant à λ_1 et λ_2 , on a le résultat

suisant :

$$\int_a^b y_1(x) \cdot y_2(x) \cdot r(x) \cdot dx = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

[19].

Chapitre 3

Etablissement de l'équation de conduction thermique

Une connaissance de la distribution de la température dans un corps est importante dans beaucoup de problèmes d'ingénierie. Cette information sera utile pour calculer la chaleur à ajouter ou à enlever du corps. Si un corps chauffé ne diffuse pas librement dans toutes les directions, des contraintes seront développées à l'intérieur de ce corps. Ces contraintes thermiques influenceront négativement sur la conception des appareils comme les chaudières, turbines à vapeur et moteurs à réaction. La première étape pour calculer les contraintes thermiques est de déterminer la distribution de la température dans le corps, après avoir défini le modèle mathématique correspondant.

3.1. Concepts fondamentaux

Pour d'autres détails voir les références [6] et [18].

3.1.1. Champ de température et surfaces isothermes

- Un *champ de température* est défini mathématiquement par l'équation :

$$u = f(x, y, z, t) \quad (3.1)$$

En chaque point $M(x, y, z)$ d'un milieu, on définit ainsi une température, fonction *scalaire* des coordonnées du point et du temps.

On distinguera des champs *instationnaires* (ou *variables*) d'une part, et des champs *stationnaires* (ou *permanents*) d'autre part, selon que la température dépende ou non du temps t .

- On appelle *surface isotherme* le lieu des points ayant, à chaque instant, la même température. En régime instationnaire, les surfaces isothermes sont donc essentiellement mobiles et déformables. En régime stationnaire, elles sont invariantes.

Une surface isotherme, en un instant t_1 , satisfait à une équation :

$$f(x, y, z, t_1) = u_1 \quad (3.2)$$

où u_1 est la température commune à tous les points de la surface isotherme.

Dans chaque corps il existe, à chaque instant, une famille de surfaces isothermes.

La géométrie nous enseigne que la normale (\vec{n}), à l'une de ces surfaces, a pour coefficients coordonnés :

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \quad (3.3)$$

Les cosinus directeurs s'obtiennent en divisant ces trois quantités par :

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

Comme chacun des points d'un milieu ne peut avoir qu'une seule température, il s'ensuit que les surfaces isothermes ne peuvent se couper. Soit elles se terminent aux frontières du corps étudié, ou bien elles forment des surfaces fermées à l'intérieur de ce corps.

Si on coupe une série de *surfaces* isothermes par un plan, on obtient une famille de *courbes* isothermes de ce plan. Ces courbes isothermes jouissent des mêmes propriétés que les surfaces isothermes : elles ne se coupent pas, ne présentent pas de discontinuité (tout au moins au sein du milieu étudié), aboutissent à la surface du milieu ou autrement forment des courbes fermées au sein du milieu.

3.1.2. Quantité de chaleur, flux et densité de flux thermiques

Considérons un plancher chauffé de manière uniforme sur toute sa surface S .

Soit dQ la quantité de chaleur échangée entre ce plancher chauffant et l'air ambiant pendant le temps dt . On appelle :

- *flux thermique* : la puissance échangée par la surface S du plancher

$$q = \frac{dQ}{dt} \quad (3.4)$$

- *densité de flux thermique* : la puissance échangée par une *surface unité* de plancher

$$\varphi = \frac{dQ}{S \cdot dt} = \frac{q}{S} \quad (3.5)$$

D'une façon plus générale, pour un élément de surface dS orienté par sa normale unitaire \vec{n} « figure (3.1) » le flux élémentaire dq peut être considéré comme le flux d'un vecteur $\vec{\varphi}$ à travers dS , d'où :

$$dq = \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot dS = |\varphi| \cdot \cos \alpha \cdot dS \quad (3.6)$$

α étant l'angle du vecteur $\vec{\varphi}$ avec la normale \vec{n} .

Le vecteur $\vec{\varphi}$ représente la *densité locale du flux thermique au point M*. Il caractérise, en chaque point du milieu, la direction, le sens et l'intensité du flux de chaleur.

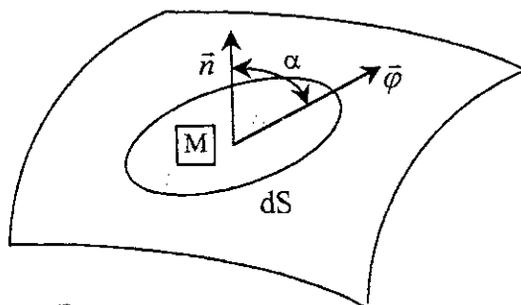


Figure (3.1) : Densité locale du flux thermique $\vec{\varphi}$

L'ensemble des vecteurs $\vec{\varphi}$ constitue un champ de vecteurs analogue à ceux rencontrés dans d'autres domaines de la physique (champs électriques, champs de forces, de vitesses...).

Dans les relations précédentes :

Q : représente une énergie et s'exprime en [Joule].

q : représente une énergie par unité de temps, c'est-à-dire une puissance [Watt].

$|\vec{\varphi}|$: densité de flux thermique, représente une puissance par unité de surface [Watt/m²].

3.1.3. Lignes et tube de courant

Connaissant les vecteurs densité de flux $\vec{\varphi}$, on peut tracer, à chaque instant t , les courbes tangentes à ces vecteurs. Ce sont les lignes de force du champ de vecteurs, à cet instant, appelées *lignes de courant* ; l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé constitue un *tube de courant*.

3.1.4. Loi de Fourier

Il existe une relation linéaire entre la densité de flux thermique et le gradient de température : *en tout point d'un milieu isotrope, la densité de flux thermique instantanée est proportionnelle à la conductivité thermique k du milieu et au gradient de températures :*

$$\vec{\varphi} = -k \cdot \overrightarrow{\text{grad } u} \quad (3.7)$$

Pour un milieu isotrope, la conductivité thermique k est une grandeur scalaire positive, caractéristique du milieu, fonction en général de M et de u . Pour un milieu isotrope et homogène, k ne dépend que de u . Dans de nombreux cas pratiques, lorsque les écarts de température ne sont pas trop élevés, on peut considérer, avec une précision suffisante, k comme une constante pour un milieu donné.

Par convention, $\vec{\varphi}$ est compté positivement dans le sens d'écoulement de la chaleur, c'est-à-dire vers les températures décroissantes ; $\vec{\text{grad}} u$ est un vecteur porté par le même axe, mais de sens contraire à $\vec{\varphi}$, d'où le signe moins de la loi de Fourier « figure (3.2) ».

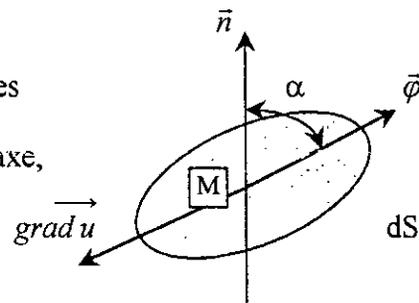


Figure (3.2) : Loi de Fourier $\vec{\varphi} = -k \cdot \vec{\text{grad}} u$

3.1.5. Orthogonalité du gradient et de l'isotherme

En un point M quelconque du milieu, on a, à tout instant :

$$du = \vec{\text{grad}} u \cdot \vec{dM}$$

Si l'on considère un déplacement élémentaire dM sur l'isotherme passant par M on a :

$$\vec{\text{grad}} u \cdot \vec{dM} = 0$$

On en conclut que le gradient de température en chaque point est normal à la surface isotherme passant par ce point « figure (3.3) ». Du point de vue physique, le gradient de température représente le taux de variation de la température suivant la direction normale à l'isotherme, ou dérivée normale à l'isotherme : $\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\text{surf. isoth.}}$

Il s'ensuit que les lignes de courant sont normales en chaque point aux isothermes correspondantes. Pratiquement, cette propriété, associée à la géométrie du corps et aux données physiques du problème étudié, permet de tracer les réseaux d'isothermes et de lignes de courant. Les parois d'un tube de courant étant normales aux isothermes, aucun flux ne les traverse : ces parois sont donc *adiabatiques*. Ainsi, en régime permanent, le flux thermique est conservatif dans un tube de courant.

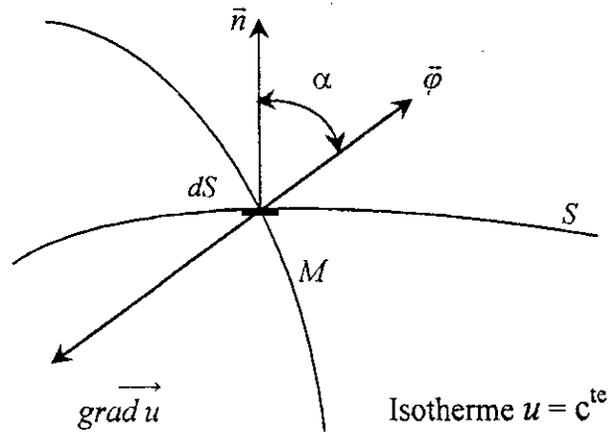


Figure (3.3) : Orthogonalité du gradient et de l'isotherme

Enfin, récapitulons quelques propriétés du gradient de température, des lignes de courant et des isothermes.

1. Le gradient de température en chaque point est normal à la surface isotherme passant par ce point.
2. Le gradient de température exprime la variation de température par unité de longueur, selon la direction normale à la surface isotherme.
3. La projection du gradient, sur une direction quelconque r , représente la variation de température par unité de longueur, selon cette direction r .
4. Le vecteur densité de flux est, en chaque point d'un champ, tangent aux lignes de courant. L'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé constitue un *tube de courant*.
5. Les lignes de courant sont en chaque point normales aux isothermes correspondantes. Elles forment un réseau orthogonal aux isothermes.
6. Comme les parois d'un tube de courant sont normales aux isothermes, elles ne sont traversées par aucun flux : ce sont des parois adiabatiques.

3.2. Equations de base

3.2.1. Conservation de l'énergie

Dans l'analyse du transfert thermique de n'importe quel système, l'équation suivante traduisant la conservation de l'énergie doit être satisfaite :

$$\frac{dE_e}{dt} + \frac{dE_g}{dt} = \frac{dE_s}{dt} + \frac{dE_{ei}}{dt} \quad (3.8)$$

où

$$\frac{dE_e}{dt} = \text{L'énergie entrée dans le système}$$

$$\frac{dE_g}{dt} = \text{L'énergie générée à l'intérieur du système}$$

$$\frac{dE_s}{dt} = \text{L'énergie sortie du système}$$

$$\frac{dE_{ei}}{dt} = \text{Variation d'énergie interne du système}$$

3.2.2. La conduction

C'est le phénomène de transfert de chaleur mis en jeu dans les solides sans transport de matière.

le flux de chaleur transférée par conduction dans la direction x est donné par :

$$q = -k \cdot A \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.9)$$

où

k : conductivité thermique du matériau.

A : aire normale à la direction x à travers laquelle la chaleur diffuse.

u : température.

3.2.3. Energie générale dans un solide

L'énergie peut être générée dans un solide à chaque fois que d'autres formes d'énergie telles que l'énergie chimique, nucléaire ou électrique soient converties en énergie thermique.

La quantité de chaleur générée ($\frac{dE_g}{dt}$) est gouvernée par l'équation :

$$\frac{dE_g}{dt} = \dot{q}V \quad (3.10)$$

où

\dot{q} : intensité de la source de la chaleur (quantité de chaleur générée par unité de volume par unité de temps) [w/m^3].

V : Volume du corps.

3.2.4. Energie stockée dans un solide

A chaque fois que la température d'un corps solide augmente, l'énergie thermique peut être stockée dans celui-ci. L'équation décrivant ce phénomène est donnée par :

$$\frac{dE_{st}}{dt} = \rho \cdot c \cdot V \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.11)$$

où

$\frac{dE_{st}}{dt}$: quantité de l'énergie stockée dans le corps.

ρ : densité du matériau.

c : chaleur spécifique du matériau.

V : volume du corps.

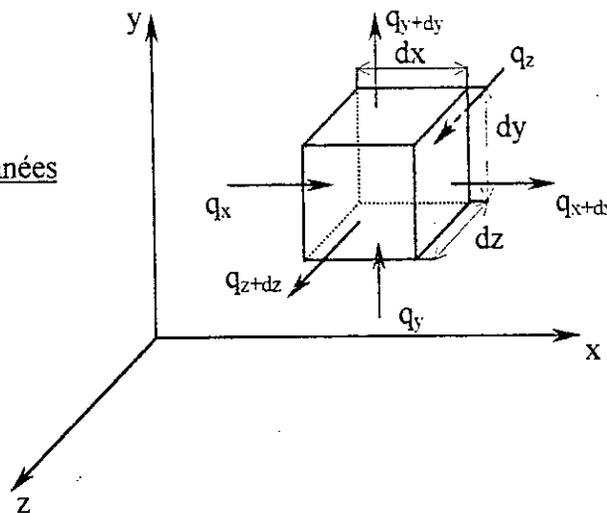
u : température du corps.

t : facteur temps.

3.3. Equation différentielle gouvernant la conduction de chaleur dans un corps tridimensionnel

Considérons un élément rectangulaire parallépipédique voir « fig.(3.4) » dont les côtés sont dx, dy, dz . L'équation du bilan d'énergie (3.8) peut être exprimée ainsi:

Figure (3.4) : un élément en coordonnées cartésiennes



$$(q_x + q_y + q_z)dt + (\dot{q} \cdot dx \cdot dy \cdot dz) dt = (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz})dt + \rho \cdot c \cdot du \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (3.12)$$

où

$$q_x = -k_x \cdot A_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -k_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dy \cdot dz \quad (3.13)$$

=(quantité de chaleur entrée dans la surface située à x)

$$\begin{aligned} q_{x+dx} &= q|_{x+dx} \approx q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \\ &= -k_x \cdot A_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \cdot A_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \\ &= -k_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dy \cdot dz - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \cdot dy \cdot dz \quad (3.14) \\ &= (\text{quantité de chaleur sortie de la surface située à } x+dx) \end{aligned}$$

où

k_x : conductivité thermique du matériau dans la direction x.

En substituant les équations (3.13) et (3.14) et les expressions similaires pour q_y , q_{y+dy} , q_z et q_{z+dz} dans Eq. (3.12) et en divisant chaque terme par $dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt$, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_z \cdot \frac{\partial u}{\partial z}) + \dot{q} = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.15)$$

L'équation (3.15) est l'équation différentielle gouvernant la conduction de la chaleur dans un corps solide orthotropique (où les surfaces frontières du corps étudié sont perpendiculaires aux axes principaux de conductivité). Si les conductivités thermique dans les directions x, y et z sont supposées être les mêmes $k_x = k_y = k_z = k$, l'équation (3.15) devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.16)$$

où la constante $\alpha = \frac{k}{\rho \cdot c}$ est appelé diffusivité thermique.

L'équation (3.16) est l'équation de la conduction thermique qui gouverne la distribution de la température et la conduction du flux de chaleur dans un solide ayant des propriétés uniformes (du matériau) " corps isotrope : c'est-à-dire dont les propriétés ne varient pas selon n'importe quelle direction ".

• Si les sources de chaleur sont absentes dans le corps, l'équation (3.16) se réduit à l'équation de Fourier:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.17)$$

• Si le corps est dans un état permanent en présence de sources de chaleur, l'équation (3.16) devient l'équation de Poisson:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (3.18)$$

• Si le corps est dans un état stationnaire et sans sources de chaleur, l'équation (3.16) se réduit à l'équation de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3.19)$$

3.4. Equation différentielle de la conduction thermique en coordonnées cylindriques

Le choix d'un système de coordonnées, qui dépend de la nature du problème envisagé, peut être important dans la recherche de la solution.

Par exemple, si le problème présente une symétrie cylindrique, il est souvent commode d'utiliser le système des coordonnées cylindriques, « figure (3.5) ».

Par conséquent, nous présentons une brève démonstration de la transformation du système de coordonnées rectangulaire à un système de coordonnées orthogonal.

Considérons un système de coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) et un système orthogonal de coordonnées curvilignes (v_1, v_2, v_3) . La longueur différentielle ds dans un système de coordonnées cartésiennes est donné comme

$$(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \quad (3.20)$$

soi le rapport fonctionnel entre les deux systèmes

$$x_i = x_i(v_1, v_2, v_3) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.21)$$

La longueur différentielle dx_i le long de l'axe x_i est liée aux coordonnées (v_1, v_2, v_3) par

$$dx_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial v_k} dv_k \quad (3.22)$$

En substituant l'équation (3.22) dans l'équation (3.20), et en notant que les produits scalaires doivent disparaître quand v_1 , v_2 , et v_3 sont mutuellement orthogonales, d'où

$$(ds)^2 = a_1^2 (dv_1)^2 + a_2^2 (dv_2)^2 + a_3^2 (dv_3)^2 \quad (3.23)$$

où

$$a_k = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial v_k} \right)^2 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (3.24)$$

Les coefficients a_k sont appelés les facteurs d'échelle; ils peuvent être constants ou en fonction des coordonnées. Quand le rapport fonctionnel entre les coordonnées cartésiennes et le système orthogonal de coordonnées curviligne est donné, les facteurs d'échelle a_k sont évalués de l'équation (3.24). Une fois les facteurs d'échelle connus, la transformation de l'opérateur linéaire ∇^2 « Laplacien » est donnée par :

$$\nabla^2 = \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial v_k} \left[\frac{a_1 a_2 a_3}{a_k^2} \frac{\partial}{\partial v_k} \right] \quad (3.25)$$

Nous considérons maintenant la transformation de l'opérateur Laplacien ∇^2 du système de coordonnées rectangulaires (x, y, z) au système de coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) montré dans la « figure (3.5) ».

Les relations entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques sont:

$$x = r \cdot \cos \phi, \quad y = r \cdot \sin \phi, \quad z = z \quad (3.26)$$

$$\text{où } r \geq 0, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Soient a_r, a_θ, a_z les facteurs d'échelle pour le système (r, ϕ, z) . Ils sont évalués en utilisant l'équation (3.24) comme suit:

$$a_r^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi + 0 = 1$$

$$a_\theta^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = (-r \cdot \sin \phi)^2 + (r \cdot \cos \phi)^2 + 0 = r^2$$

$$a_z^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 = 0 + 0 + 1 = 1$$

D'où les facteurs d'échelle pour le système de coordonnées cylindriques sont :

$$a_r = 1 \quad a_\theta = r \quad a_z = 1 \quad (3.27)$$

De l'équation (3.25) on peut écrire le Laplacien dans le système de coordonnées cylindriques :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.28)$$

Ainsi l'équation (3.16) devient:

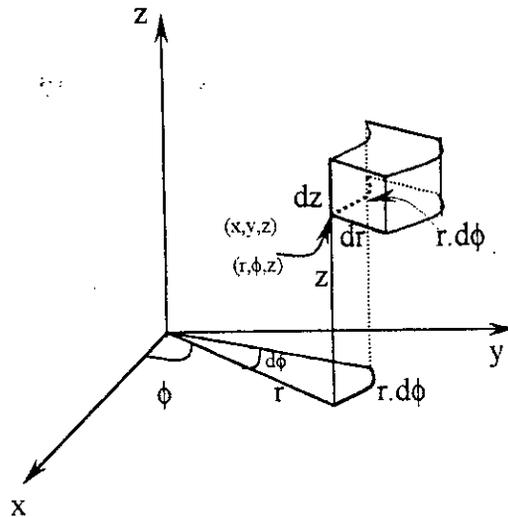
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.29)$$

Si de plus, l'axe des z est un axe de symétrie pour le champ des températures, c'est-à-dire si

$$\frac{\partial u}{\partial \phi} = 0, \text{ on a :}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.30)$$

Figure (3.5): un élément en coordonnées cylindriques



[13] et [16].

3.5. Conditions initiales et aux limites

L'équation générale de la chaleur (3.15) ou (3.16) traduite, par une relation entre les variables x, y, z, t et la température u , le mécanisme du phénomène conductif, en tout point de coordonnées x, y, z et à tout instant t .

Cette équation aux dérivées partielles, linéaire, du deuxième ordre (en coordonnées spatiales), admet en principe une infinité de solutions, faisant intervenir des constantes ou des fonctions arbitraires. Mais cette *équation phénoménologique* n'a de sens physique que pour des conditions définies (deux conditions aux limites doivent être spécifiées) appliquées à un domaine d'espace-temps également défini. Ces conditions sont les *causes qui déterminent l'évolution* du phénomène. En effet, l'équation de la chaleur décrivant un phénomène irréversible implique que le milieu considéré a été soumis, à un instant initial, à une rupture de son équilibre thermique. Il est alors nécessaire de connaître la répartition initiale des températures en tout point du milieu et aussi la loi de variation de la fonction u et / ou de sa dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n}$ (en effet $-k \frac{\partial u}{\partial n}$) sur la surface frontière.

3.5.1. Conditions initiales

Elles expriment, dans les problèmes en régime non permanent, la distribution spatiale des températures à un instant donné, le plus souvent pris comme origine des temps .

On remarque que l'équation (3.15) ou (3.16), est du 1^{er} ordre dans le temps t et ainsi elle exige une condition initiale. La condition initiale la plus utilisée est :

$$u(x, y, z, t = 0) = u_0(x, y, z) \quad \text{dans } V \quad (3.31)$$

où V est le domaine (ou volume) du corps solide, et u_0 représente la distribution de la température spécifiée au temps $t = 0$.

3.5.2. Conditions aux limites

Elles expriment comment, à partir de l'instant zéro, varient sur les frontières du corps étudié, la température ou sa dérivée, ou encore une combinaison des deux.

Les conditions les plus fréquemment rencontrées [6] et [18] sont les suivantes:

a) Condition de DIRICHLET ou du premier type :

La distribution de la température u_0 à la surface frontière considérée est donnée en fonction du temps et pour tous les points de la surface :

$$u(x, y, z, t) = u_0 \text{ pour } t > 0 \text{ sur } S_1 \quad (3.32)$$

S_1 : frontière sur laquelle la valeur de la température est spécifiée comme u_0 .

b) Condition de NEUMANN ou du deuxième type :

On impose le flux de chaleur q à la surface, pour tous les points de la surface et en fonction du temps :

$$-k \cdot \frac{\partial u}{\partial n} = q \text{ pour } t > 0 \text{ sur } S_2 \quad (3.33)$$

S_2 : frontière sur laquelle le flux de chaleur q est spécifié.

$\frac{\partial}{\partial n}$: désigne la dérivée effectuée le long de la normale extérieure n à la surface limite, définie

par :

$$\frac{\partial}{\partial n} = l_x \frac{\partial}{\partial x} + l_y \frac{\partial}{\partial y} + l_z \frac{\partial}{\partial z}$$

avec : l_x, l_y , et l_z sont les cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface.

$$(l_x = \cos(\bar{n}, \bar{ox}), l_y = \cos(\bar{n}, \bar{oy}), l_z = \cos(\bar{n}, \bar{oz}))$$

c) Condition de FOURIER ou du troisième type :

On impose au fluide ambiant une température u_{∞} au large et en outre un coefficient de convection h pour l'échange entre la paroi et le fluide.

La forme la plus générale de la condition de Fourier s'écrit :

$$-k \cdot \frac{\partial u}{\partial n} = h \cdot (u - u_{\infty}) \quad \text{pour } t > 0 \text{ sur } S_3 \quad (3.34)$$

ou encore
$$u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = f(x, y, z, t) \quad \text{avec } \beta = \frac{k}{h}$$

S_3 : frontière sur laquelle la chaleur perdue $h \cdot (u - u_{\infty})$ par convection est spécifiée.

h : coefficient de transfert thermique par convection.

u_{∞} : température ambiante.

où $\frac{\partial T}{\partial n}$ est la dérivée effectuée le long de la normale extérieure à la surface.

Donc le problème consistant à déterminer la distribution de la température à l'intérieur d'un corps solide implique la solution de l'équation (3.15) ou (3.16) soumis à la satisfaction de la condition initiale d'équation (3.31) et des conditions aux limites données par les équations (3.32), (3.33) et (3.34).

Chapitre 4

Résolution analytique

Dans ce chapitre, nous allons traiter des exemples et cela en utilisant la méthode de séparation des variables étudiée au chapitre 2.

4.1 Cylindre plein et fini

Considérons un cylindre plein de rayon R et de longueur L et définissons le système de coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) tel que z coïncide avec l'axe du cylindre comme le montre la figure (4.1).

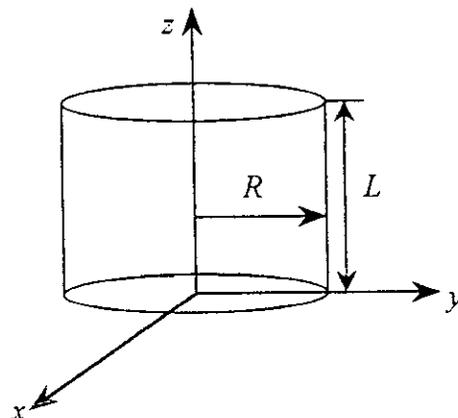


figure (4.1)

D'après la symétrie cylindrique du problème et si les sources de chaleur sont négligées dans le corps cylindrique, alors l'équation (3.30) se réduit à l'équation de Fourier:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4.1)$$

où $u = u(r, z, t)$ est la température indépendante de ϕ (symétrie axiale).

Les conditions aux limites seront données dans les paragraphes § 4.1.1 et 4.1.2 suivant les cas appropriés.

4.1.1 Répartition stationnaire (régime permanent)

Dans ce paragraphe on va étudier le problème de conduction de la chaleur dans un cylindre plein et fini comme il a été mentionné dans le paragraphe § 4.1 mais en régime permanent c'est-à-dire indépendamment du paramètre temps. La solution analytique similaire à cet exemple est donnée par les références [2] et [3].

Notre problème consiste à déterminer la température en tout point de ce cylindre « voir figure (4.2) ». D'après la symétrie cylindrique du problème et puisque la température u à l'intérieur du cylindre satisfait l'équation de Laplace « il n'y a pas de sources de chaleur », alors le flux de chaleur est gouverné par l'équation différentielle donnée par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (4.2)$$

où $u = u(r, z)$ est la température indépendante de ϕ .

En introduisant une nouvelle variable : $\theta = u - u_c$ l'équation (4.2) devient :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad (4.3)$$

Pour les conditions aux limites elles sont données par les équations suivantes :

$$u(r,0) = u_c \quad \text{or} \quad \theta|_{z=0} = 0 \quad (a)$$

$$u(r,L) = f(r) \quad \text{or} \quad \theta|_{z=L} = f(r) - u_c \quad (b) \quad (4.4)$$

$$u(R,z) = u_c \quad \text{or} \quad \theta|_{r=R} = 0 \quad (c)$$

où $\theta = u - u_c$, $0 \leq r \leq R$, $0 \leq z \leq L$

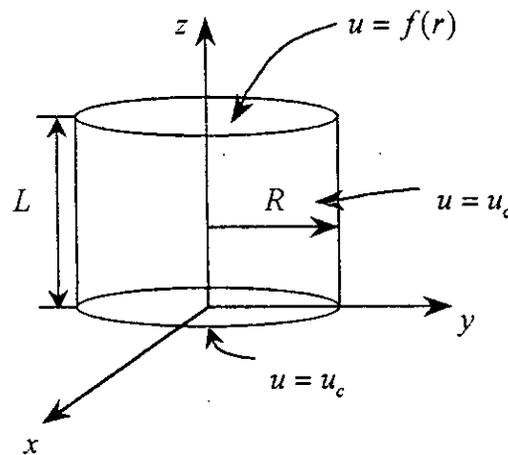


figure (4.2)

Pour résoudre le problème on utilise la méthode de séparation des variables (voir Chapitre 2) soit en posant :

$$\theta(r,z) = R(r) \cdot Z(z) \quad (4.5)$$

Substituons (4.5) dans (4.3) pour obtenir :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} \cdot Z + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} \cdot Z + R \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (4.6)$$

En divisant, alors, par RZ il vient :

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dr} = -\frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} \quad (4.7)$$

Puisque le membre de droite ne dépend que de z , tandis que le membre de gauche ne dépend que de r , il en résulte que chacun des membres doit être égal à une constante, soit $-\lambda^2$. Ce qui donne deux équations différentielles ordinaires à la place de l'équation (4.7) :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} + \lambda^2 \cdot R = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \lambda^2 Z = 0 \quad (4.9)$$

Si nous multiplions, maintenant, les deux membres de (4.8) par r^2 on obtient :

$$r^2 \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} + r \cdot \frac{dR}{dr} + (\lambda^2 \cdot r^2) \cdot R = 0 \quad (4.10)$$

Cette équation différentielle linéaire et homogène est l'équation de Bessel d'ordre 0 dont la solution générale (chapitre 2 , équations (2.11) et (2.32)) est :

$$R = C_1 \cdot J_0(\lambda \cdot r) + C_2 \cdot Y_0(\lambda \cdot r) \quad (4.11)$$

La solution générale de l'équation (4.9) est donnée par :

$$Z = C_3 \cdot \sinh(\lambda \cdot z) + C_4 \cdot \cosh(\lambda \cdot z) \quad (4.12)$$

D'où en substituant les équations (4.11) et (4.12) dans (4.5), on trouve la solution de l'équation différentielle (4.3) :

$$\theta = [C_1.J_0(\lambda.r) + C_2.Y_0(\lambda.r)].[C_3.\sinh(\lambda.z) + C_4.\cosh(\lambda.z)] \quad (4.13)$$

Comme les fonctions de Bessel de 2^{ème} espèce ne sont pas bornées à l'origine (Figure (2.1)), on déduit que $C_2 = 0$. Appliquons maintenant les conditions aux limites (4.4) à l'équation (4.13) pour définir les constantes C_1, C_3 et C_4 .

La condition (4.4a), $\theta(r, z = 0) = 0$, nous donne $C_4 = 0$

En remplaçant les deux constantes C_2, C_4 dans l'équation (4.13) on trouve :

$$\theta = C.\sinh(\lambda.z).J_0(\lambda.r) \quad (4.14)$$

où $C = C_1.C_3$.

Appliquons maintenant la condition (4.4c), $\theta(r = R, z) = 0$, où on obtient :

$$C.\sinh(\lambda.z).J_0(\lambda.R) = 0$$

cette condition est satisfaite pour toutes valeurs de z entre 0 et L telle que :

$$J_0(\lambda.R) = 0 \quad (4.15)$$

D'après le graphe de la Figure (2.1) , on constate qu'il y a une infinité de valeurs caractéristiques adimensionnelle $\lambda_n.R$ ($n = 1, 2, \dots$) qui satisfont l'équation (4.15).

Ainsi, la solution générale est la somme de toutes les solutions qui correspondent à chaque $\lambda_n.R$

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n.\sinh(\lambda_n.z)).J_0(\lambda_n.r) \quad (4.16)$$

Finalement, l'application de la condition (4.4b), $\theta(r, z = L) = f(r) - u_c$, détermine les inconnues C_n d'où elle donne :

$$f(r) - u_c = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cdot \sinh(\lambda_n L)) J_0(\lambda_n r) \quad (4.17)$$

et avec la propriété d'orthogonalité de la fonction de Bessel J_0 exprimée par l'intégrale

$$\int_0^R r J_0(\lambda_n r) J_0(\lambda_m r) dr = 0 \quad \text{si } m \neq n \quad (4.18)$$

Cependant, les coefficients C_n peuvent être déterminées en multipliant les deux côtés de l'équation (4.16) par $r J_0(\lambda_m r)$ et en intégrant de $r = 0$ à $r = R$.

D'où on trouve les coefficients constants $(C_n \cdot \sinh(\lambda_n L))$ donnés par :

$$C_n \cdot \sinh(\lambda_n L) = \frac{\int_0^R r [f(r) - u_c] J_0(\lambda_n r) dr}{\frac{R^2}{2} J_1^2(\lambda_n R)} \quad (4.19)$$

Finalement, la solution du problème de distribution de la température à travers ce cylindre est :

$$\theta = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(\lambda_n z) J_0(\lambda_n r)}{\sinh(\lambda_n L) J_1^2(\lambda_n R)} \int_0^R r [f(r) - u_c] J_0(\lambda_n r) dr \quad (4.20)$$

Cas particulier :

Pour ce cas spécial où $f(r) = u_0$, où u_0 est une constante et si le cylindre est maintenu à la température zéro ($u_c = 0$) pour toutes les surfaces sauf pour un côté où la température est u_0 (voir *figure (4.2)*), et en utilisant la relation suivante

$$\int_0^R r.J_0(\lambda_n r).dr = \frac{R}{\lambda_n}.J_1(\lambda_n R)$$

la solution se réduit ainsi à :

$$\frac{u - u_c}{u_0 - u_c} = \frac{\theta}{u_0 - u_c} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(\lambda_n z) \cdot J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n \cdot R \cdot \sinh(\lambda_n L) \cdot J_1(\lambda_n R)} \quad (4.21)$$

4.1.2 Répartition non stationnaire (régime transitoire)

On se propose d'étudier le problème suivant. Soit un solide conducteur, de hauteur et de rayon unité et dont le coefficient de diffusion est $\alpha = \frac{k}{\rho \times c}$, est initialement à la température

$f(r, z)$, (voir *figure (4.3)*).

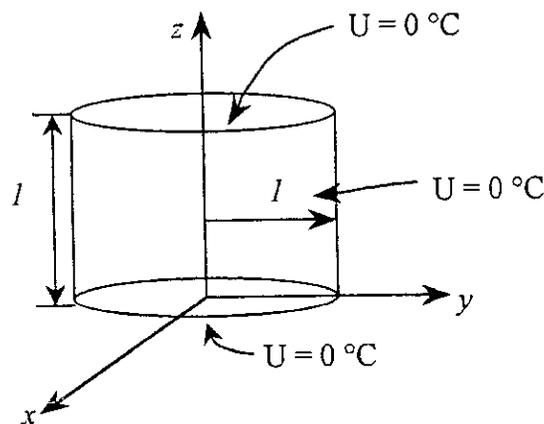


figure (4.3)

La surface de ce cylindre est brusquement refroidie à la température zéro. Notre but est de trouver la température en tout point de ce cylindre à tout temps ultérieur. La solution analytique similaire à cet exemple est donnée par les références [14],[19].

En utilisant l'équation (4.1) avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} u(r, z, 0) &= f(r, z) \\ u(r, 0, t) &= 0 \\ u(r, l, t) &= 0 \\ u(1, z, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

où $0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq l, t > 0$

Pour résoudre ce problème, posons $U = R.Z.T = R(r).Z(z).T(t)$ dans l'équation (4.1) pour obtenir :

$$R.Z. \frac{dT}{dt} = \alpha \left(\frac{d^2 R}{dr^2} . Z.T + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} . Z.T + R. \frac{d^2 Z}{dz^2} . T \right)$$

En divisant, alors, par $\alpha.R.Z.T$ il vient :

$$\frac{(dT/dt)}{\alpha T} = \frac{(d^2 R/dr^2)}{R} + \frac{1}{r} \cdot \frac{(dR/dr)}{R} + \frac{(d^2 Z/dz^2)}{Z}$$

Comme le premier membre de cette équation ne dépend que de t , tandis que celui de droite ne dépend que de r et de z , chaque côté doit être constant, et égal à $-\lambda^2$. D'où

$$\left(\frac{dT}{dt} \right) + \alpha \lambda^2 T = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{(d^2 R/dr^2)}{R} + \frac{1}{r} \cdot \frac{(dR/dr)}{R} + \frac{(d^2 Z/dz^2)}{Z} = -\lambda^2$$

La dernière équation peut être écrite comme suit :

$$\frac{(dR^2/dr^2)}{R} + \frac{1}{r} \cdot \frac{(dR/dr)}{R} = -\lambda^2 - \frac{(dZ^2/dz^2)}{Z}$$

ou comme précédemment, nous poserons chaque membre égal à la constante $-\mu^2$, ce qui nous conduit aux deux équations suivantes :

$$r \cdot \left(\frac{dR^2}{dr^2} \right) + \left(\frac{dR}{dr} \right) + \mu^2 \cdot r \cdot R = 0 \tag{4.24}$$

$$\left(\frac{dZ^2}{dz^2} \right) - \nu^2 \cdot Z = 0 \tag{4.25}$$

où nous avons posé

$$\nu^2 = \mu^2 - \lambda^2 \tag{4.26}$$

Les solutions de (4.23), (4.24) et (4.25) sont données par

$$T = c_1 \cdot e^{-\alpha \cdot \lambda^2 \cdot t}, \quad R = c_2 \cdot J_0(\mu \cdot r) + c_3 \cdot Y_0(\mu \cdot r), \quad Z = c_4 \cdot e^{\nu \cdot z} + c_5 \cdot e^{-\nu \cdot z}$$

et une solution de (4.1) est donnée par leur produit, c'est-à-dire

$$u(r, z, t) = [c_1 \cdot e^{-\alpha \cdot \lambda^2 \cdot t}] [c_2 \cdot J_0(\mu \cdot r) + c_3 \cdot Y_0(\mu \cdot r)] [c_4 \cdot e^{\nu \cdot z} + c_5 \cdot e^{-\nu \cdot z}]$$

La condition aux limites $r = 0$, entraîne $c_3 = 0$, et la solution devient,

$$u(r, z, t) = e^{-\alpha \cdot \lambda^2 \cdot t} \cdot J_0(\mu \cdot r) [A \cdot e^{\nu \cdot z} + B \cdot e^{-\nu \cdot z}] \tag{4.27}$$

La deuxième condition de l'équation (4.22) nous donne :

$$u(r, 0, t) = e^{-\alpha \cdot \lambda^2 \cdot t} \cdot J_0(\mu \cdot r) [A + B] = 0$$

et nous devons avoir, $A + B = 0$ ou $A = -B$, et l'équation (4.27) devient

$$u(r, z, t) = A.e^{-\alpha.\lambda^2.t}.J_0(\mu.r) \left[e^{v.z} - e^{-v.z} \right]$$

La troisième condition donne

$$u(r, 1, t) = A.e^{-\alpha.\lambda^2.t}.J_0(\mu.r) \left[e^v - e^{-v} \right] = 0$$

qui ne peut être satisfaite que si $e^v - e^{-v} = 0$ or

$$e^{2v} = 1 = e^{2k.\pi.i} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Il en résulte qu'il faut que $2.v = 2.k.\pi.i$ ou

$$v = k.\pi.i \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.28)$$

En utilisant ce résultat, l'équation (4.27) devient :

$$u(r, z, t) = C.e^{-\alpha.\lambda^2.t}.J_0(\mu.r).\sin k.\pi.z$$

où C est une nouvelle constante.

La quatrième condition portée dans l'équation (4.22) donne

$$u(1, z, t) = C.e^{-\alpha.\lambda^2.t}.J_0(\mu).\sin k.\pi.z = 0$$

qui ne peut être satisfaite que si : $J_0(\mu) = 0$ et

$$\mu = \rho_1, \rho_2, \dots \quad (4.29)$$

où ρ_m ($m = 1, 2, \dots$) est la $m^{\text{ème}}$ racine positive de $J_0(x) = 0$. Maintenant il résulte des équations (4.26), (4.28) et (4.29) que

$$\lambda^2 = \mu^2 - \nu^2 = \rho_m^2 + k^2 \cdot \pi^2$$

et nous obtenons une solution qui satisfait à toutes les conditions (4.22), sauf la première :

$$u(r, z, t) = C \cdot e^{-\alpha(\rho_m^2 + k^2 \cdot \pi^2)t} \cdot J_0(\rho_m r) \cdot \sin k \cdot \pi \cdot z \quad (4.30)$$

où

$k = 1, 2, 3, \dots$, $m = 1, 2, 3, \dots$. En remplaçant C par C_{km} , en sommant sur k et m et en appliquant le principe de superposition, nous obtenons la solution :

$$u(r, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{km} \cdot e^{-\alpha(\rho_m^2 + k^2 \cdot \pi^2)t} \cdot J_0(\rho_m r) \cdot \sin k \cdot \pi \cdot z \quad (4.31)$$

la première condition portée dans l'équation (4.22) donne maintenant :

$$f(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{km} \cdot J_0(\rho_m r) \cdot \sin k \cdot \pi \cdot z$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$f(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} C_{km} \cdot J_0(\rho_m r) \right\} \cdot \sin k \cdot \pi \cdot z = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin k \cdot \pi \cdot z$$

où

$$b_k(r) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{km} \cdot J_0(\rho_m r) \quad (4.32)$$

Il en résulte que les b_k sont les coefficients de Fourier du développement de $f(r, z)$ en série de sinus (dans ce cas, r étant considéré comme constant), et par les équations (2.50) et (2.51) :

$$b_k = \frac{2}{1} \int_0^1 f(r, z) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot z) \cdot dz \quad (4.33)$$

Il faut maintenant déterminer les C_{km} à partir du développement (4.32). Puisque les b_k dépendent de r , cette détermination est simplement le développement de b_k en une série de Bessel (voir les équations (2.48) et (2.49)). Nous obtenons :

$$C_{km} = \frac{2}{J_1^2(\rho_m)} \int_0^1 r b_k J_0(\rho_m r) dr \quad (4.34)$$

Qui devient, d'après (4.33)

$$C_{km} = \frac{4}{J_1^2(\rho_m)} \int_0^1 \int_0^1 r f(r, z) J_0(\rho_m r) \sin k\pi z dr dz \quad (4.35)$$

La solution cherchée est alors donnée par l'équation (4.31) avec les coefficients (4.35).

Cas particulier :

Si $f(r, z) = u_0$, où u_0 est une constante, dans ce cas d'après l'équation (4.35) on a :

$$\begin{aligned} C_{km} &= \frac{4.u_0}{J_1^2(\rho_m)} \int_0^1 \int_0^1 r J_0(\rho_m r) \sin k\pi z dr dz \\ &= \frac{4.u_0}{J_1^2(\rho_m)} \left\{ \int_0^1 r J_0(\rho_m r) dr \right\} \left\{ \int_0^1 \sin k\pi z dz \right\} \end{aligned}$$

De la propriété (2.33a) on trouve :

$$\begin{aligned} C_{km} &= \frac{4.u_0}{J_1^2(\rho_m)} \left\{ \frac{J_1(\rho_m)}{\rho_m} \right\} \left\{ \frac{1 - \cos k\pi}{k\pi} \right\} \\ &= \frac{4.u_0.(1 - \cos k\pi)}{k.\pi.\rho_m.J_1(\rho_m)} \end{aligned}$$

En substituant C_{km} dans l'équation (4.31). La solution cherchée est alors

$$u(r, z, t) = \frac{4.u_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - \cos k\pi}{k.\rho_m.J_1(\rho_m)} e^{-\alpha.(\rho_m^2 + k^2.\pi^2)t} J_0(\rho_m r) \sin k\pi z \quad (4.36)$$

4.2 Cylindre infini

Dans cette section on se propose d'étudier en premier lieu dans le paragraphe « 4.2.1 » la distribution de la température en régime permanent dans un cylindre creux supposé infiniment long et de rayon intérieur et extérieur r_1 et r_2 respectivement (voir *figure (4.4)*), et dans le paragraphe « 4.2.2 » on va étudier un cylindre plein infiniment long de rayon R en régime transitoire (voir *figure (4.5)*). Les solutions analytiques similaires à ces exemples sont données par les références [2], [14] et [10].

Définissons pour cela le système de coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) tel que z coïncide avec l'axe du cylindre étudié. D'après la symétrie cylindrique du problème et puisque les deux cylindres sont supposés infiniment longs, la température est indépendante de ϕ et de z . De plus si les sources de chaleur sont absentes dans le corps cylindrique, alors l'équation (4.1) se réduit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4.37)$$

où $u = u(r, t)$ est la température indépendante de ϕ et de z .

Les conditions aux limites seront données dans les paragraphes § 4.2.1 et 4.2.2 suivant les cas appropriés.

4.2.1 Répartition stationnaire (régime permanent)

Notre problème consiste à déterminer la température en tout point d'un cylindre circulaire creux de longueur infinie, de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2 (voir *figure(4.4)*) et comme il à été mentionné dans le paragraphe 4.2 en régime permanent c'est-à-dire indépendamment du paramètre temps. L'équation différentielle qui gouverne la distribution de la température dans ce cylindre et donnée par l'équation (4.37) mais en posant $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ « régime permanent » :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (4.38)$$

où $u = u(r)$ est la température à la distance r de l'axe.

Nous admettrons que les conditions aux limites sont uniformes sur les deux faces du cylindre. Les surfaces isothermes sont alors des cylindres coaxiaux.

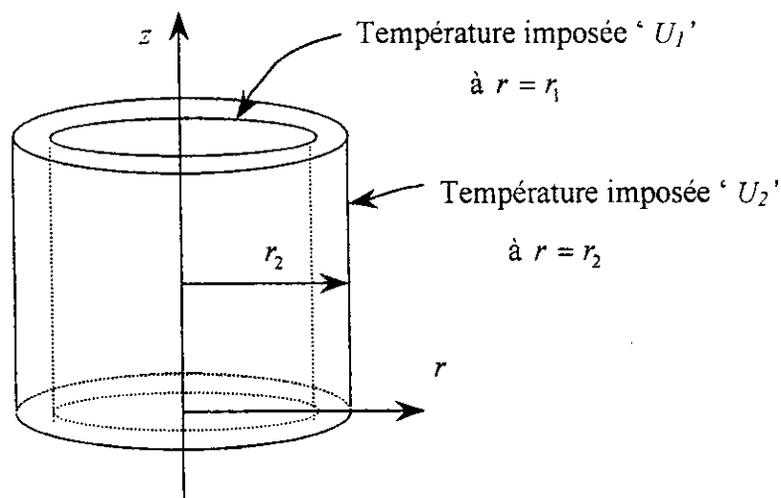


figure (4.4)

En utilisant l'équation (4.38) avec les conditions aux limites suivantes :

$$u = u_1 \quad \text{si } r = r_1 \quad (\text{a}) \quad (4.39)$$

$$u = u_2 \quad \text{si } r = r_2 \quad (\text{b})$$

Pour résoudre ce problème simple, on procède de la manière suivante :

En multipliant les 2 membres de l'égalité précédente (4.38) par r ; on obtient :

$$r \cdot \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = 0$$

En remarquant que le 1^{er} membre est la dérivée de $r \cdot \frac{du}{dr}$ on a $\frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{du}{dr} \right) = 0$ d'où :

$$r \cdot \frac{du}{dr} = A \quad (4.40)$$

où A est une constante d'intégration

De l'équation (4.40) on a :

$$\frac{du}{dr} = \frac{A}{r}$$

et par conséquent :

$$u = A \cdot \ln r + B \quad (4.41)$$

Telle est la solution mathématique au problème. Les deux constantes A et B doivent être déterminées par les conditions aux limites données par (4.39).

En appliquant les conditions aux limites (4.39) à l'équation (4.41) on obtient :

$$u_1 = A \cdot \ln r_1 + B$$

$$u_2 = A \cdot \ln r_2 + B$$

d'où :

$$A = \frac{u_2 - u_1}{\ln r_2 - \ln r_1} = \frac{u_2 - u_1}{\ln (r_2 / r_1)} \quad \text{et} \quad B = \frac{u_1 \cdot \ln r_2 - u_2 \cdot \ln r_1}{\ln (r_2 / r_1)}$$

ainsi la solution cherchée est donnée par :

$$u = \frac{u_2 - u_1}{\ln (r_2 / r_1)} \cdot \ln r + \frac{u_1 \cdot \ln r_2 - u_2 \cdot \ln r_1}{\ln (r_2 / r_1)}$$

que l'on peut écrire aussi comme suit :

$$u = \frac{u_1 \cdot \ln (r_2 / r) + u_2 \cdot \ln (r / r_1)}{\ln (r_2 / r_1)} \quad (4.41)$$

4.2.2 Répartition non stationnaire (régime transitoire)

Considérons le problème de répartition de la chaleur dans un cylindre plein infini de rayon R . Supposons que sa température initiale soit $f(r)$ et son bord soit maintenu à la température zéro (voir *figure (4.5)*). Notre objectif est de trouver la température du cylindre à un temps quelconque.

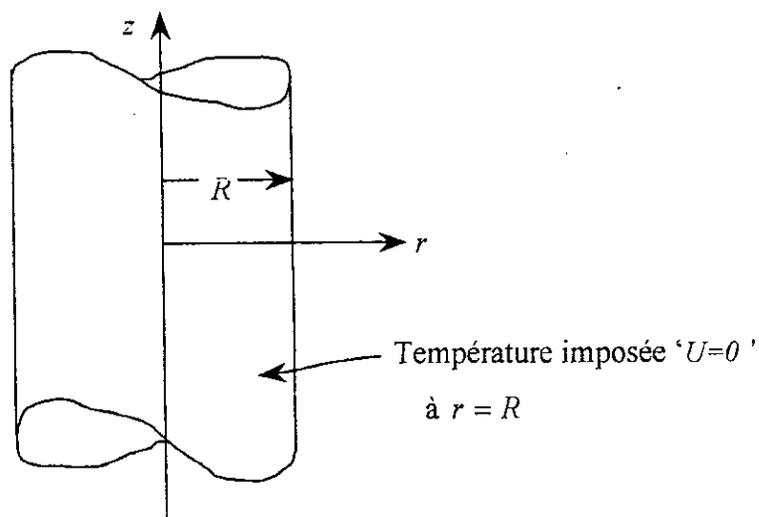


figure (4.5)

Puisque la température est indépendante de ϕ , le problème de valeurs aux limites pour la détermination de $u(r, t)$ est donné par l'équation (4.37) d'où on a le modèle mathématique suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (4.42)$$

$$u(R, t) = 0 \quad (4.43)$$

$$u(r, 0) = f(r) \quad (4.44)$$

où $0 \leq r \leq R, t > 0$

Par le principe de Fourier on cherchera les solutions particulières sous la forme :

$$u(r, t) = R(r) \cdot T(t) \quad (4.45)$$

en substituant l'équation (4.45) dans (4.42). Il vient :

$$R \cdot \frac{dT}{dt} = \alpha \cdot \left(\frac{d^2 R}{dr^2} \cdot T + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \cdot T \right)$$

ou en divisant par $\alpha \cdot R \cdot T$, on obtient :

$$\frac{(dT/dt)}{\alpha T} = \frac{(d^2 R/dr^2)}{R} + \frac{1}{r} \frac{(dR/dr)}{R} = -\lambda^2$$

λ^2 : constante de séparation non nulle.

$$\text{D'où :} \quad \left(\frac{dT}{dt} \right) + \alpha \lambda^2 T = 0 \quad (4.46)$$

$$\frac{dR^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0 \quad (4.47)$$

Les solutions générales de (4.46), (4.47) sont données par :

$$T = c_1 e^{-\alpha \lambda^2 t}, \quad R = A_1 J_0(\lambda r) + B_1 Y_0(\lambda r)$$

Puisque la température $u = RT$ est bornée à l'origine ($r=0$), alors $B_1 = 0$. D'où

$$u(r, t) = A e^{-\alpha \lambda^2 t} J_0(\lambda r)$$

où $A = A_1 c_1$

D'après la condition aux limites (4.43),

$$u(R, t) = A e^{-\alpha \lambda^2 t} J_0(\lambda R) = 0$$

d'où $J_0(\lambda R) = 0$ donc $\lambda_n = \frac{\mu_n}{R}$ où μ_n sont les racines positives de $J_0(x) = 0$

et $u(r, t) = A e^{-\alpha \frac{\mu_n^2}{R^2} t} J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) \quad n=1, 2, 3, \dots$ est une solution.

Par superposition, la solution générale du problème est donc :

$$u_n(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha \frac{\mu_n^2}{R^2} t} J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) \quad (4.48)$$

D'après la condition initiale (4.44) on peut déterminer les coefficients A_n :

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) = f(r) \quad (4.49)$$

Et d'après le chapitre 2 les coefficients A_n sont donnés par la formule (2.49) « développement de $f(r)$ en série de Fourier – Bessel ». Ainsi on a :

$$A_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r f(r) J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) dr \quad (4.50)$$

donc en portant l'expression (4.50) dans la série (4.48) on trouve la solution du problème sous la forme :

$$u(r, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R} \cdot r\right)}{J_1^2(\mu_n)} \cdot e^{-\alpha \frac{\mu_n^2}{R^2} t} \cdot \int_0^R r \cdot f(r) \cdot J_0\left(\frac{\mu_n}{R} \cdot r\right) \cdot dr \right\} \quad (4.51)$$

Cas particulier :

Si $f(r) = u_0$, où u_0 est une constante.

Dans ce cas d'après l'équation (4.50) on a :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{R^2 \cdot J_1^2(\mu_n)} \cdot \int_0^R r \cdot f(r) \cdot J_0\left(\frac{\mu_n}{R} \cdot r\right) \cdot dr \\ &= \frac{2 \cdot u_0}{R^2 \cdot J_1^2(\mu_n)} \cdot \int_0^R r \cdot J_0\left(\frac{\mu_n}{R} \cdot r\right) \cdot dr \\ &= \frac{2 \cdot u_0}{R^2 \cdot \frac{\mu_n^2}{R^2} \cdot J_1^2(\mu_n)} \cdot \int_0^R \left(\frac{\mu_n}{R} \cdot r\right) \cdot J_0\left(\frac{\mu_n}{R} \cdot r\right) \cdot d\left(\frac{\mu_n}{R} \cdot r\right) \end{aligned}$$

En tenant compte de la relation (2.33a), on aura :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2 \cdot u_0}{\mu_n^2 \cdot J_1^2(\mu_n)} \cdot \left[\left(\frac{\mu_n}{R} \cdot r\right) \cdot J_1\left(\frac{\mu_n}{R} \cdot r\right) \right]_0^R \\ &= \frac{2 \cdot u_0}{\mu_n^2 \cdot J_1^2(\mu_n)} \cdot (\mu_n) \cdot J_1(\mu_n) \\ &= \frac{2 \cdot u_0}{\mu_n \cdot J_1(\mu_n)} \end{aligned}$$

en substituant A_n dans (4.48) . La solution cherchée est alors

$$u(r, t) = 2 \cdot u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R} \cdot r\right)}{\mu_n \cdot J_1(\mu_n)} \cdot e^{-\alpha \frac{\mu_n^2}{R^2} t} \quad (4.52)$$

Chapitre 5

La méthode des éléments finis

Dans notre étude on a affaire à un problème de milieu continu pour lequel les méthodes matricielles traditionnelles ne permettent pas de l'analyser. Dans ce cas, il faut avoir recours à des techniques numériques basées sur des méthodes d'approximation adéquates pour discrétiser ces continua. La méthode des éléments finis en est une et est la plus utilisée. Elle représente l'une des méthodes adaptées à la résolution numérique des équations aux dérivées partielles et s'applique aux problèmes stationnaires «permanents» ou dépendant du temps «transitoires», linéaires ou non, à une, deux ou trois variables d'espace indépendantes.

Le principe de cette méthode, pour la résolution d'une équation aux dérivées partielles, dans un domaine \mathbb{D} , consiste à transformer cette équation en une forme intégrale W discrétisée. Le domaine \mathbb{D} est décomposé en éléments \mathbb{D}_e , où l'intégrale W_e , discrétisée, est exprimée sous forme matricielle. Ces formes élémentaires sont ensuite assemblées en une matrice globale qui donne un système qu'on résout en tenant compte des conditions aux limites.

Avant d'exposer cette méthode en détail, il est nécessaire de rappeler les principes des méthodes d'approximation sur lesquelles elle est fondée.

5.1 Rappels sur les méthodes d'approximation

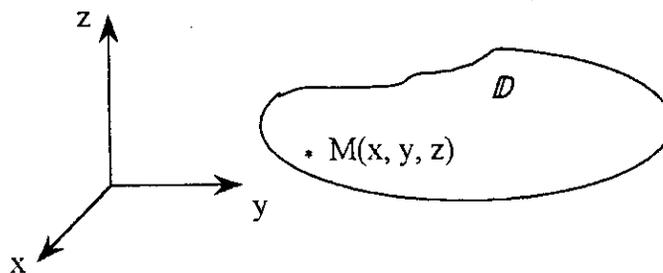
Le problème général de l'approximation consiste à chercher la meilleure approximation d'une fonction $u(M)$ dont le domaine de définition est \mathcal{D} de manière à satisfaire au mieux les lois physiques auxquelles elle obéit. Pour cela, on définit une approximation \tilde{u} en posant :

$$\tilde{u}(M) = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(M) \quad \forall M(x, y, z) \quad (5.1)$$

$\phi_i(x, y, z)$ sont des fonctions choisies 'à priori' et constituent une base fonctionnelle.

Les coefficients inconnus a_i sont appelés coordonnées généralisées.

On appelle $\tilde{u}(M)$, une approximation de u dans la base fonctionnelle ϕ_i .



En utilisant la notation matricielle l'équation (5.1) devient :

$$\tilde{u} = [\phi]^T [a] \quad (5.2)$$

Les fonctions de base de l'approximation doivent satisfaire certaines conditions :

Continuité, conditions aux limites et complétude.

Définition :

Une base fonctionnelle est dite complète si elle permet de représenter n'importe quelle fonction arbitraire, $u(M)$ dans \mathcal{D} , en augmentant le nombre de coordonnées généralisées, soit :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon = \lim_{N \rightarrow \infty} [u(M) - \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(M)] = 0$$

Les fonctions polynomiales, trigonométriques, les polynômes de Tchebyshev sont des exemples de bases fonctionnelles complètes.

Le principe des méthodes d'approximation consiste à remplacer la résolution d'un problème continu à un nombre infini d'inconnues par celle d'un problème à un nombre fini d'inconnues : les coordonnées généralisées a_i . On détermine les coefficients inconnus a_i définissant la 'meilleure' approximation au moyen d'un critère de minimisation, soit une énergie potentielle, soit un critère d'erreur, ou encore en exprimant les conditions d'orthogonalité de l'erreur avec des fonctions de pondération données.

Les méthodes d'approximation peuvent se classer en deux catégories principales suivant la formulation du problème. En effet, les lois physiques peuvent s'exprimer des deux manières suivantes :

- *sous forme locale* c'est-à-dire sous forme d'équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites associées.
- *sous forme globale* ou variationnelle 'énergétique' c'est-à-dire sous forme de conditions de stationnarité de fonctionnelles 'ou énergie potentielle'.

Les méthodes d'approximation se classent donc en :

- *méthodes universelles* utilisables dans le cas d'une formulation locale du problème « méthodes de Galerkin, moindres carrés, collocation, etc. . . ».
- *méthodes variationnelles* utilisables dans le cas d'une formulation variationnelle du problème « méthode de Ritz, Kantorovitch, Trefftz... ».

On se propose dans ce qui suit de développer la première méthode « *méthodes universelles* » qui fera l'objet de l'approche adoptée, utilisée dans le paragraphe 5.3 pour la discrétisation du problème traité (pour une description plus détaillée voir référence [9]).

5.2 Méthodes d'approximation universelles

« méthodes des résidus pondérés »

Soit à résoudre le problème aux limites gouverné par l'équation aux dérivées partielles $L(u)=0$ dans \mathcal{D} avec les conditions aux limites associées.

Soit $\tilde{u}(M)$, l'approximation de u dans la base fonctionnelle $\phi_i(M)$:

$$\tilde{u}(M) = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(M) \quad \forall M(x, y, z)$$

Les fonctions ϕ_i devront constituer une base complète et satisfaire toutes les conditions aux limites :

On définit une fonction erreur dans \mathcal{D} par la relation :

$$\mathcal{E}(M) = L[\tilde{u}(M)]$$

Cette fonction erreur est évidemment une fonction non nulle. Dans ce cas, le problème d'approximation consiste à chercher les coordonnées généralisées *les plus satisfaisantes* selon un certain critère :

- soit sous forme de minimum d'une norme,
- soit sous forme de conditions d'orthogonalité de la fonction erreur avec certaines fonctions de pondération données $W_i(M)$.

Ainsi, les différentes méthodes d'approximation appartenant à cette catégorie peuvent être considérées comme des variantes de la méthode de pondération des erreurs :

$$[\mathcal{E}, W_i] = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{E}(M) W_i(M) dv \quad i=1 \dots N \quad (5.3)$$

Les différentes méthodes se distinguent par des choix particuliers des fonctions de pondération. On peut citer :

Méthodes de Galerkin :

$$W_i(M) = \phi_i(M) \rightarrow \int_{\mathcal{D}} \mathcal{E}(M) \phi_i(M) dv \quad i=1 \dots N \quad (5.4)$$

Ces N conditions d'orthogonalité conduisent à un système linéaire si l'opérateur L est linéaire, le système linéaire est symétrique si L est auto-adjoint.

Méthodes de Miklin « moindres carrés » :

$$W_i(M) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_i}$$

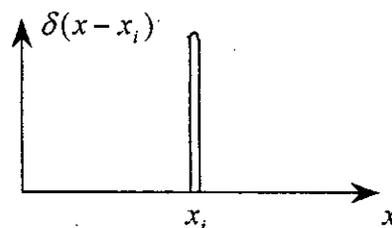
$$\int_D \varepsilon(M) \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_i} dv = 0 \quad i=1 \dots N \tag{5.5}$$

Ce qui revient à rendre minimale la norme $\|\varepsilon\|_2 = \int_D \varepsilon^2(M) dv$

Méthode de collocation par point :

Dans le cas d'un problème à une dimension, on a :

$W_i = \delta(x - x_i)$ « fonction impulsion de Dirac »



$$\int_D \varepsilon(x) \cdot \delta(x - x_i) dx = \varepsilon(x_i) = 0 \quad i=1 \dots N \tag{5.6}$$

Parmi toutes ces méthodes, la méthode de Galerkin semble la plus intéressante de par sa plus grande facilité de mise en œuvre. Dans ce travail, on optera pour la méthode de Galerkin, qui est d'ailleurs la plus répandue, et qu'on se propose de détailler dans ce qui suit.

5.3 Méthode de Galerkin et implémentation numérique

5.3.1 Méthode de Galerkin

La procédure de l'élément fini utilisant la méthode de Galerkin pour le problème de transfert de chaleur par conduction peut être décrite par les étapes suivantes :

➤ *Etape 1 :*

Divisons le domaine V en E éléments finis ayant chacun un nombre de nœuds égale à p .

➤ Etape 2 :

Supposons que la variation de T ait une forme convenable dans chaque élément et exprimons $T^{(e)}(x, y, z)$ dans l'élément e comme :

$$T^{(e)}(x, y, z, t) = [N(x, y, z)] \cdot \bar{T}^{(e)} \quad (5.7)$$

où $[N(x, y, z)] = [N_1(x, y, z) \quad N_2(x, y, z) \dots N_p(x, y, z)]$

et

$$\bar{T}^{(e)} = \begin{Bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ \vdots \\ T_p(t) \end{Bmatrix}^{(e)}$$

avec $T_i(t)$: température au nœud i

$N_i(x, y, z)$: la fonction d'interpolation correspondant au nœud i de l'élément e .

➤ Etape 3 :

Dans la méthode de Galerkin, l'intégrale du résidu pondéré sur le domaine de l'élément est égal à zéro en prenant les poids identique à la fonction d'interpolation N_i . Mais la solution de l'équation (5.7) n'est pas exacte, la substitution de l'équation (5.7) dans l'équation différentielle (3.15), donne une valeur non nulle au lieu de zéro. Cette valeur non nulle représente le résidu.

D'où le critère qui doit être satisfait à tout instant est :

$$\iiint_{V^{(e)}} N_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T^{(e)}}{\partial z} \right) + \dot{q} - \rho.c. \frac{\partial T^{(e)}}{\partial t} \right] dV = 0 \quad (5.8)$$

tel que : $i = 1, 2, \dots, p$

En notant que le premier terme de l'intégrale de l'équation (5.8) peut être écrit comme

$$\iiint_{V^{(e)}} N_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \right) \right] dV = - \iiint_{V^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial x} k_x \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} dV + \iint_{S^{(e)}} N_i k_x \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} l_x dS \quad (5.9)$$

où l_x est le cosinus directeur suivant la direction x de la normale extérieure à la surface.

Avec des expressions similaires pour le deuxième et le troisième terme de l'intégrale, l'équation (5.8) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & - \iiint_{V^{(e)}} \left[k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} + k_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial T^{(e)}}{\partial z} \right] dV \\
 & + \iint_{S^{(e)}} N_i \left[k_x \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} l_x + k_y \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} l_y + k_z \frac{\partial T^{(e)}}{\partial z} l_z \right] dS \\
 & + \iiint_{V^{(e)}} N_i \left(\dot{q} - \rho.c. \frac{\partial T^{(e)}}{\partial t} \right) dV = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

la frontière de l'élément $S^{(e)}$ est composée de $S_1^{(e)}$, $S_2^{(e)}$ et $S_3^{(e)}$, L'intégrale de surface de l'équation (5.10) sur $S_1^{(e)}$ serait zéro (cependant $T^{(e)}$ est prescrit pour être une constante T_0 sur $S_1^{(e)}$, les dérivés de $T^{(e)}$ par rapport à x , y et z seraient égales à zéro). Sur les surfaces $S_2^{(e)}$ et $S_3^{(e)}$, les conditions aux limites données par les équations (3.33) et (3.34) seront satisfaites. Ainsi, l'intégrale de surface dans l'équation (5.10) sur $S_2^{(e)}$ et $S_3^{(e)}$ sera écrite sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
 & \iint_{S_2^{(e)} + S_3^{(e)}} N_i \left[k_x \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} l_x + k_y \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} l_y + k_z \frac{\partial T^{(e)}}{\partial z} l_z \right] dS \\
 & = - \iint_{S_2^{(e)}} N_i q dS_2 - \iint_{S_3^{(e)}} h (T^{(e)} - T_\infty) dS_3
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

De l'équation (5.7) on a :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} &= \left[\frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \quad \dots \quad \frac{\partial N_p}{\partial x} \right] \\
 \frac{\partial}{\partial T_i} \left(\frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \right) &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \\
 \frac{\partial T^{(e)}}{\partial T_i} &= N_i \\
 \frac{\partial T^{(e)}}{\partial t} &= [N] \dot{T}^{(e)}
 \end{aligned} \right. \tag{5.12}$$

$$\text{où ; } \dot{T}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \partial T_1 / \partial t \\ \vdots \\ \partial T_p / \partial t \end{Bmatrix}$$

En utilisant les équations (5.11) et (5.12), l'équation (5.10) peut être exprimée sous forme matricielle comme :

$$[K_1^{(e)}] \cdot \vec{T}^{(e)} + [K_2^{(e)}] \cdot \vec{T}^{(e)} + [K_3^{(e)}] \cdot \vec{T}^{(e)} - \vec{P}^{(e)} = \vec{0} \quad (5.13)$$

où les éléments des matrices $[K_1^{(e)}]$, $[K_2^{(e)}]$, $[K_3^{(e)}]$ et $\vec{P}^{(e)}$ sont donnés par :

$$K_{1 \quad ij}^{(e)} = \iiint_{V^{(e)}} \left(k_x \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} + k_z \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dV \quad (5.14a)$$

$$K_{2 \quad ij}^{(e)} = \iint_{S_3^{(e)}} h \cdot N_i \cdot N_j \cdot dS_3 \quad (5.15a)$$

$$K_{3 \quad ij}^{(e)} = \iiint_{V^{(e)}} \rho \cdot c \cdot N_i \cdot N_j \cdot dV \quad (5.16a)$$

$$\text{et} \quad P_i^{(e)} = \iiint_{V^{(e)}} \dot{q} \cdot N_i \cdot dV - \iint_{S_2^{(e)}} q \cdot N_i \cdot dS_2 + \iint_{S_3^{(e)}} h \cdot T_\infty \cdot N_i \cdot dS_3 \quad (5.17a)$$

Notations :

Les expressions de $[K_1^{(e)}]$, $[K_2^{(e)}]$, $[K_3^{(e)}]$ et $\vec{P}^{(e)}$ peuvent être données sous forme matricielle :

$$[K_1^{(e)}] = \iiint_{V^{(e)}} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV \quad (5.14b)$$

$$[K_2^{(e)}] = \iint_{S_3^{(e)}} h \cdot [N]^T [N] \cdot dS_3 \quad (5.15b)$$

$$[K_3^{(e)}] = \iiint_{V^{(e)}} \rho \cdot c \cdot [N]^T [N] \cdot dV \quad (5.16b)$$

$$\vec{P}^{(e)} = \vec{P}_1^{(e)} - \vec{P}_2^{(e)} + \vec{P}_3^{(e)} \quad (5.17b)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_1^{(e)} &= \iiint_{V^{(e)}} \dot{q} [N]^T dV \\ \text{où : } \bar{P}_2^{(e)} &= \iint_{S_2^{(e)}} q [N]^T dS_2 \quad ; \quad [D] = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad ; \quad [B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_p}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_p}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_p}{\partial z} \end{bmatrix} \\ \bar{P}_3^{(e)} &= \iint_{S_3^{(e)}} h T_\infty [N]^T dS_3 \end{aligned}$$

➤ Etape 4 :

En utilisant la technique d'assemblage, l'équation (5.13) peut être exprimée comme :

$$[K_3] \vec{T} + [K] \vec{T} = \vec{P} \quad (5.18)$$

où : $\vec{T} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$ = vecteur des températures nodales inconnues du système

$$[K_3] = \sum_{e=1}^E [K_3^{(e)}] \quad (5.19)$$

$$[K] = \sum_{e=1}^E [[K_1^{(e)}] + [K_2^{(e)}]] \quad (5.20)$$

et

$$\vec{P} = \sum_{e=1}^E \vec{P}^{(e)} \quad (5.21)$$

➤ Etape 5 :

Les équations (5.18) représentent les équations qui doivent être résolues après l'introduction des conditions aux limites spécifiées sur S_1 « équation (3.32) » et la condition initiale indiquée par l'équation (3.31).

[16].

5.3.2 Discrétisation du problème

Dans la section précédente « 5.3.1 », on a choisi un système de coordonnées cartésiennes pour simplifier et afin d'expliquer la procédure des éléments finis qui utilise la méthode de Galerkin pour le problème de transfert de chaleur par conduction.

Mais les équations gouvernantes et la formulation des éléments fini peuvent être aussi exprimées en fonction des coordonnées curvilignes. Dans notre étude, on utilise les coordonnées cylindriques pour mieux discrétiser notre problème « problème tridimensionnel axisymétrique où l'axe des z est un axe de symétrie pour le champ des températures, c'est-à-dire $\frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$ ». Cependant l'équation gouvernant la conduction de la chaleur en coordonnées cylindriques (3.30) ainsi que les conditions aux limites, c'est-à-dire des équations (3.32), (3.33) et (3.34), peuvent s'écrire sous la forme suivantes :

$$\rho \cdot c \cdot r \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(k_r \cdot r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \cdot r \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] - \dot{q} \cdot r = 0 \quad (5.22)$$

les conditions aux limites associées au problème sont :

$$\triangleright \quad T(r, z, t) = T_0 \text{ pour } t > 0 \text{ sur } S_1 \quad (5.23)$$

S_1 : frontière sur laquelle la valeur de la température est spécifiée comme T_0 .

$$\triangleright \quad -k \cdot r \cdot \frac{\partial T}{\partial n} = q \cdot r \text{ pour } t > 0 \text{ sur } S_2 \quad (5.24)$$

S_2 : frontière sur laquelle le flux de chaleur q est spécifié.

$$\triangleright \quad -k \cdot r \cdot \frac{\partial T}{\partial n} = h \cdot r \cdot (T - T_\infty) \text{ pour } t > 0 \text{ sur } S_3 \quad (5.25)$$

S_3 : frontière sur laquelle la chaleur $h \cdot (T - T_\infty)$ par convection est spécifiée.

Remarque : On voit bien que ces équations sont obtenues en multipliant simplement les deux membres des équations (3.30), (3.32), (3.33) et (3.34) par r .

De la même manière la formulation des éléments finis pour le problème tridimensionnel axisymétrique peut être obtenue immédiatement de la formulation déjà établie au paragraphe « 5.3.1 » en multipliant par r les équations établie, et en adoptant quelques changements sur les coordonnées .

De cette manière la discrétisation suivante donnée sous forme matricielle est obtenue :

$$[K_3].\dot{\vec{T}} + [K].\vec{T} = \vec{P} \quad (5.26)$$

tel que :
$$\vec{T} = \begin{Bmatrix} \partial T_1 / \partial t \\ \vdots \\ \partial T_p / \partial t \end{Bmatrix}$$

où les éléments des matrices $[K_3]$, $[K]$ et \vec{P} sont donnés par :

$$[K_3] = \sum_{e=1}^E [K_3^{(e)}] \quad (5.27)$$

$$[K] = \sum_{e=1}^E [[K_1^{(e)}] + [K_2^{(e)}]] \quad (5.28)$$

et
$$\vec{P} = \sum_{e=1}^E \vec{P}^{(e)} \quad (5.29)$$

tel que :
$$K_1^{(e)}{}_{ij} = \int_{V^{(e)}} \left(k_r.r.\frac{\partial N_i}{\partial r}.\frac{\partial N_j}{\partial r} + k_z.r.\frac{\partial N_i}{\partial z}.\frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dV \quad (5.30)$$

$$K_2^{(e)}{}_{ij} = \int_{S_3^{(e)}} h.r.N_i.N_j.dS_3 \quad (5.31)$$

$$K_3^{(e)}{}_{ij} = \int_{V^{(e)}} \rho.c.r.N_i.N_j.dV \quad (5.32)$$

$$et \quad P_i^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \dot{q}.r.N_i dV - \int_{S_2^{(e)}} q.r.N_i.dS_2 + \int_{S_3^{(e)}} h.r.T_\infty.N_i.dS_3 \quad (5.33)$$

[5].

♦ *L'intégration directe du temps :*

Nous venons jusqu'à maintenant de faire une discrétisation partielle de notre problème. Dans un tel cas une procédure additionnelle doit être établie pour l'intégration directe du temps.

Il existe une variété de méthodes générales pour intégrer les systèmes non stationnaires. La plus utilisée et appropriée à notre cas, est l'application des techniques standards des différences finies.

Soit à résoudre le système (5.26), il faut trouver un ensemble de fonctions $\{T(t)\}$ qui satisfont (5.26) à tout instant t ainsi que les conditions initiales imposées à $t = t_0$. Les méthodes d'intégration directes consistent à construire numériquement, à partir de $\{T_0\}$, une suite de valeurs de la solution aux instants successifs $t_0 + \Delta t, t_0 + 2.\Delta t, \dots, t_0 + n.\Delta t, \dots$

$$\{T(t_0)\} \rightarrow \{T(t_0 + \Delta t)\} \rightarrow \{T(t_0 + 2.\Delta t)\} \rightarrow \dots \rightarrow \{T(t_0 + n.\Delta t)\} \quad (5.34)$$

En supposant que $[K_3]$, $[K]$ et \bar{P} sont des constantes, l'intégration directe du temps pour l'équation (5.26) est facile à établir. Par conséquent, l'équation différentielle (5.26) peut être discrétisée dans le temps comme suit :

$$[K_3] \cdot \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} + \gamma \cdot [K] \cdot T^{n+1} + (1-\gamma) \cdot [K] \cdot T^n = [P] \quad (5.35)$$

où T^n et T^{n+1} sont les vecteurs des températures nodales inconnues respectivement dans le temps $n.\Delta t$ et $(n+1).\Delta t$, et γ représente le facteur poids tel que $\gamma \in [0, 1]$. Dans l'équation (5.35) nous avons utilisé l'approximation standard pour la dérivée du temps

$$\dot{T} \cong \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} \quad (5.36)$$

L'équation discrétisée (5.35) peut être écrite comme :

$$\left(\frac{1}{\Delta t} [K_3] + \gamma [K] \right) T^{n+1} = \left[\frac{1}{\Delta t} [K_3] - (1-\gamma) [K] \right] T^n + [P] \quad (5.37)$$

et enfin on obtient la forme définitive générale suivante :

$$[H].T^{n+1} = [f^n] \quad (5.38)$$

avec
$$[H] = \frac{1}{\Delta t} [K_3] + \gamma [K] \quad \text{et} \quad [f^n] = \left[\frac{1}{\Delta t} [K_3] - (1-\gamma) [K] \right] T^n + [P]$$

Les équations (5.37), (5.38) donnent une famille générale d'algorithmes d'intégration du temps qui diffèrent seulement du choix de la valeur γ .

Pour $\gamma = 0$:

Les équations (5.37), (5.38) représentent la méthode d'Euler *explicite*, elle est appelée ainsi par ce que le terme $[K]\bar{T}$ dans l'équation (5.26) est évalué au début de l'intervalle du temps Δt .

Pour $\gamma = 1$:

Les équations (5.37), (5.38) donnent la méthode 'complètement' *implicite*, où le terme $[K]T$ dans l'équation (5.26) est évalué à la fin de l'intervalle du temps Δt .

Pour $\gamma = \frac{1}{2}$:

Nous obtenons l'algorithme le plus utilisé de Crank-Nicholson et qui appartient à la famille générale des algorithmes implicites [8], [5].

♦ Géométrie et propriétés de l'élément

L'élément choisi dans le cadre de ce travail est l'élément quadratique à huit nœuds comme l'indique la figure (5.1).

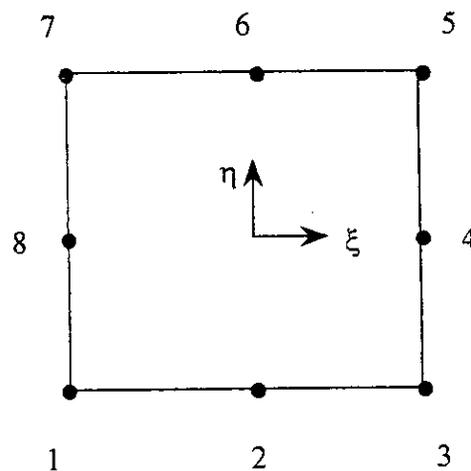


figure (5.1) : élément parabolique à 8 nœuds

Cet élément est de classe C^0 (fonction continue) et conforme c'est-à-dire qu'il assure la convergence de l'approximation 'éléments finis' vers la solution réelle pour le problème associé.

♦ Intégration numérique

La mise en œuvre effective de la méthode des éléments finis décrite précédemment nécessite l'évaluation des intégrales qui sont apparues dans la discrétisation du problème. Pour cela, on utilise les méthodes d'intégration numérique qui permettent de construire les matrices et les vecteurs élémentaires par intégration sur l'élément de référence. Dans ce cas on a affaire à des intégrales à une ou deux dimensions, définies sur l'élément réel de la manière suivante :

$$I_1 = \int_{S^{(e)}} f(x, y) \cdot dS = \int_{-1}^1 f[x(\xi), y(\xi)] \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \cdot d\xi$$

$$I_2 = \int_{V^{(e)}} F(x, y) \cdot dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] \cdot \det J \cdot d\xi \cdot d\eta$$

Les dérivées et le Jacobien, au côté droit de I_1 et I_2 , peuvent être exprimés en fonction des coordonnées locales ξ et ξ, η . Par conséquent, les intégrales I_1 et I_2 peuvent s'écrire sous la forme générale suivantes :

$$I_1 = \int_{-1}^1 g(\xi) \cdot d\xi \quad (5.39)$$

et

$$I_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.40)$$

où

$$g(\xi) = f[x(\xi), y(\xi)] \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}$$

$$G(\xi, \eta) = F[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] \cdot \det J$$

Dans la méthode des éléments finis, la technique d'intégration numérique qui convient le plus est la quadrature de Gauss où l'intégration peut être exprimée sous forme de sommes.

La formule de quadrature de Gauss à une dimension s'écrit :

$$I_1 = \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^p g(\xi_i) \cdot w_i \quad (5.41)$$

où

p : est le nombre de points d'intégration.

w_i : sont les coefficients de pondération (ou poids) correspondants.

ξ_i : sont les coordonnées locale des p points d'intégration

La formule de quadrature de Gauss à deux dimensions s présente comme :

$$I_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p G(\xi_i, \eta_j) \cdot w_i \cdot w_j \quad (5.42)$$

La double sommation peut être aussi interprétée comme une seule sommation sur p^2 points

$$I_2 = \sum_{k=1}^{p^2} G(\xi_{i(k)}, \eta_{j(k)}) \cdot w_{i(k)} \cdot w_{j(k)} = \sum_{k=1}^{p^2} G(\xi_k, \eta_k) \cdot w_k \quad (5.43)$$

où

les positions des points d'intégration sur l'élément de référence « voir figure (5.1) » sont présentées dans la figure (5.2)

p^2	k	ξ_k	η_k	w_k
4	1	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1
	2	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1
	3	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1
	4	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1
9	1	$-\sqrt{3/5}$	$-\sqrt{3/5}$	25/81
	2	$-\sqrt{3/5}$	0	40/81
	3	$-\sqrt{3/5}$	$\sqrt{3/5}$	25/81
	4	0	$-\sqrt{3/5}$	40/81
	5	0	0	64/81
	6	0	$\sqrt{3/5}$	40/81
	7	$\sqrt{3/5}$	$-\sqrt{3/5}$	25/81
	8	$\sqrt{3/5}$	0	40/81
	9	$\sqrt{3/5}$	$\sqrt{3/5}$	25/81

Tableau (5.1) : les coordonnées et les poids des points d'intégration pour la formule de quadrature de Gauss à deux dimensions.

Remarque :

Dans notre code de calcul on a choisi 3×3 points d'intégration pour le calcul des matrices [5], [20] et [21].

5.3.3 Implémentation numérique

La programmation de la méthode des éléments finis n'est pas un but en soi, car de nos jours il existe des logiciels très performants traitant divers types d'éléments. Néanmoins, l'ingénieur doit connaître les grandes lignes de celle-ci pour qu'en cas de besoin, il puisse élaborer son propre programme.

Dans ce paragraphe on va présenter la structure globale de notre code de calcul « programme », il est conçu pour faciliter la solution numérique dans les problèmes tridimensionnels axisymétriques du transfert de la chaleur par conduction.

Notre code de calcul est constitué d'un programme principal « main » faisant appel à des sous-routines, où la lecture et l'écriture se fait à l'aide des fichiers selon le format imposé par les READ et WRITE du programme MAIN.

La structure globale du programme est présentée dans la figure (5.3) :

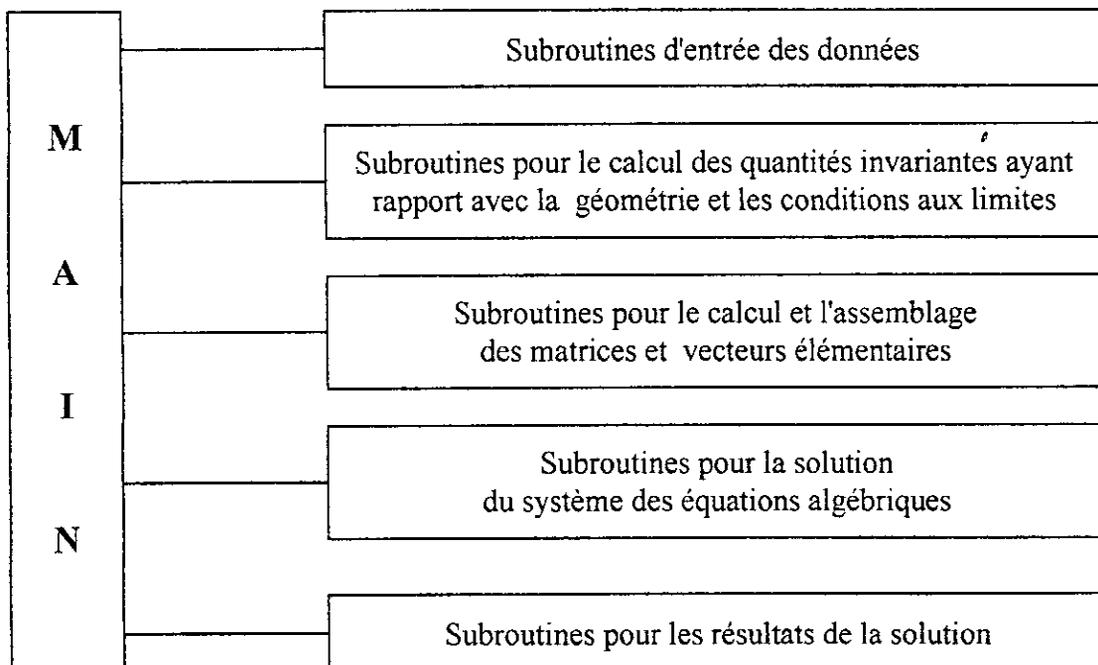


figure (5.3) : Structure globale du programme

Chapitre 6

Résultats et Interprétations

Dans ce chapitre, nous allons étudier les exemples cités au chapitre 4 et cela en utilisant notre code de calcul des éléments finis avec la résolution approchée des solutions analytiques obtenues précédemment, dans le but de valider notre code de calcul.

Les propriétés du matériau choisi « l'acier » sont :

- ◆ Conductivité k : 0.5200 [W / m.K]
- ◆ Densité ρ : 7854 [kg / m³]
- ◆ Chaleur spécifique c : 434.0 [J / kg.K]

Remarque : Les calculs approchés des solutions analytiques sont réalisés à l'aide des programmes écrits avec le logiciel « Maple V ».

6.1 Cylindre plein et fini

6.1.1 En régime stationnaire (régime permanent)

Dans cet exemple le cylindre est maintenu à la température zéro ($u_c = 0^\circ\text{C}$) pour toutes les surfaces sauf pour un côté où la température est ($u_0 = 100^\circ\text{C}$) « voir figure (4.2) ».

En choisissant $R = 0.1\text{ m}$ « 1 dm pour simplifier les calculs »,

la solution analytique de ce problème est donnée par l'équation (4.21):

$$\frac{u(r, z) - u_c}{u_0 - u_c} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(\lambda_n z) \cdot J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n R \cdot \sinh(\lambda_n L) \cdot J_1(\lambda_n R)}$$

tel que $\lambda_n = \frac{\mu_n}{R}$ où μ_n sont les racines positives de $J_0(x) = 0$

On cherche la distribution de la température suivant l'axe z , d'où ($r = 0$).

Donc après la substitution des données on obtient :

$$\frac{u(r=0, z) - 0}{100 - 0} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{20} \frac{\sinh(\mu_n \cdot z) \cdot 1}{\mu_n \cdot \sinh(\mu_n \cdot \frac{L}{R}) \cdot J_1(\mu_n)}$$

Remarque : En dépassant $n = 20$ on constate qu'il n'y a pas de changement pour les 5 chiffres de la partie fractionnaire.

Les résultats sont donnés par les tableaux suivants :

a)

nœuds	z[dm]	U _{numérique} [°C]	U _{analytique} [°C]
1	0	0	0
2	0.1	6.61352	6.61341
3	0.2	13.50168	13.50439
4	0.3	20.93970	20.94108
5	0.4	29.16088	29.16904
6	0.5	38.39165	38.39126
7	0.6	48.71166	48.74040
8	0.7	60.26503	60.24658
9	0.8	72.76868	72.80870
10	0.9	86.20066	86.15618
11	1.0	100	99.71132

Tableau 6.1 : les températures analytiques et numériques pour $r = 0$ et $L/R = 1$.

b)

nœuds	z[dm]	U _{numérique} [°C]	U _{analytique} [°C]
1	0	0	0
2	0.2	1.29689	1.30052
3	0.4	2.89961	2.90267
4	0.6	5.16010	5.17256
5	0.8	8.60944	8.61181
6	1.0	13.90512	13.93372
7	1.2	22.08813	22.11620
8	1.4	34.37677	34.34160
9	1.6	51.69875	51.64308
10	1.8	74.29836	74.10926
11	2.0	100	99.71132

Tableau 6.2 : les températures analytiques et numériques pour $r = 0$ et $L/R = 2$.

c)

nœuds	z[dm]	$U_{\text{numérique}} [^{\circ}\text{C}]$	$U_{\text{analytique}} [^{\circ}\text{C}]$
1	0	0	0
2	0.4	0.02856	0.02378
3	0.8	0.07813	0.07132
4	1.2	0.17356	0.19008
5	1.6	0.47391	0.49857
6	2.0	1.31524	1.30393
7	2.4	3.39621	3.40124
8	2.8	8.36448	8.80189
9	3.2	22.13249	22.18752
10	3.6	53.23369	51.66686
11	4.0	100	99.71132

Tableau 6.3 : les températures analytiques et numériques pour $r = 0$ et $L/R = 4$.

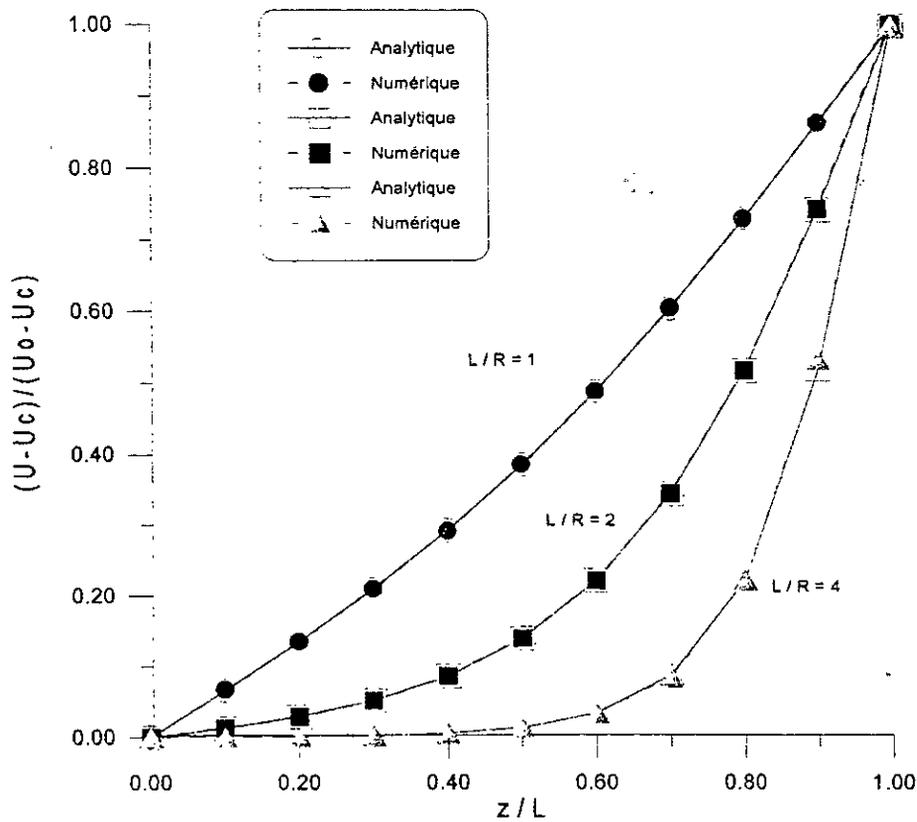


Figure (6.1) : Distribution de la température axiale ($r = 0$) dans un cylindre plein et fini.

Les résultats analytiques et numériques sont représentés sur la figure (6.1) qui reflète parfaitement la convergence de la solution numérique vers la solution analytique.

En analysant les résultats obtenus on constate que la longueur du cylindre influe de manière significative sur la diffusion de la chaleur, lorsque $L/R = 1$, $L/R = 2$ et $L/R = 4$.

6.1.2 En régime non stationnaire (régime transitoire)

Dans cet exemple (voir figure (4.3)) on considère que notre cylindre est initialement à la température ($u_0 = 100^\circ\text{C}$) puis brusquement refroidi à la température 0°C , de hauteur et de rayon unité ($L = R = 1\text{ dm}$) et dont le coefficient de diffusion est

$$\alpha = \frac{k}{\rho \times c} = 1.52554 * 10^{-5} [dm^2/s].$$

La solution analytique de ce problème est donnée par l'équation (4.36):

$$u(r, z, t) = \frac{4.u_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - \cos k\pi}{k \cdot \rho_m \cdot J_1(\rho_m)} \cdot e^{-\alpha \cdot (\rho_m^2 + k^2 \cdot \pi^2) \cdot t} \cdot J_0(\rho_m \cdot r) \cdot \sin k\pi z$$

On veut trouver la distribution de la température le long de l'axe r ($z = 0.5\text{ dm}$) et le long de l'axe verticale z ($r = 0$) pour des temps spécifiques.

Après la substitution des données, on trouve la solution approchée :

- ◆ Pour l'axe horizontal r ($z = 0.5\text{ dm}$) :

$$u(r, 0.5, t) = \frac{4.100}{\pi} \sum_{k=1}^{13} \sum_{m=1}^{13} \frac{1 - \cos k\pi}{k \cdot \rho_m \cdot J_1(\rho_m)} \cdot e^{-\alpha \cdot (\rho_m^2 + k^2 \cdot \pi^2) \cdot t} \cdot J_0(\rho_m \cdot r) \cdot \sin k \frac{\pi}{2}$$

- ◆ Pour l'axe vertical z ($r = 0$) :

$$u(0, z, t) = \frac{4.100}{\pi} \sum_{k=1}^{13} \sum_{m=1}^{13} \frac{1 - \cos k\pi}{k \cdot \rho_m \cdot J_1(\rho_m)} \cdot e^{-\alpha \cdot (\rho_m^2 + k^2 \cdot \pi^2) \cdot t} \cdot 1 \cdot \sin k\pi z$$

Remarque :

En dépassant 13 pour k et m , on constate qu'il n'y a pas de changement pour les 5 chiffres de la partie fractionnaire.

Les résultats sont donnés dans les tableaux suivants :

nœuds	r[dm]	t=600 [s]		t=3000 [s]		t=6000 [s]	
		U _{numérique} [°C]	U _{analytique} [°C]	U _{numérique} [°C]	U _{analytique} [°C]	U _{numérique} [°C]	U _{analytique} [°C]
1	0	99.89568	99.95610	79.57207	79.66541	45.45902	45.33656
12	0.1	99.89700	99.95610	79.41074	79.46228	45.01822	44.87958
18	0.2	99.89186	99.95610	78.69113	78.74197	43.63194	43.48695
29	0.3	99.88828	99.95607	77.16725	77.16212	41.26785	41.10348
35	0.4	99.85563	99.95464	74.18664	74.14292	37.83935	37.66845
46	0.5	99.69314	99.92495	69.05905	68.92309	33.33194	33.15532
52	0.6	99.09442	99.55303	60.93024	60.74040	27.77880	27.61388
63	0.7	96.76071	96.76913	49.37117	49.14221	21.34200	21.20241
69	0.8	85.06535	84.35110	34.53213	34.33073	14.30139	14.19902
80	0.9	52.08767	51.44769	17.46120	17.35782	7.03328	6.98485
86	1	0	0	0	0	0	0

Tableau 6.4 : les températures numériques et analytiques suivant l'axe horizontal r ($z = 0.5 \text{ dm}$) pour différentes valeurs du temps t .

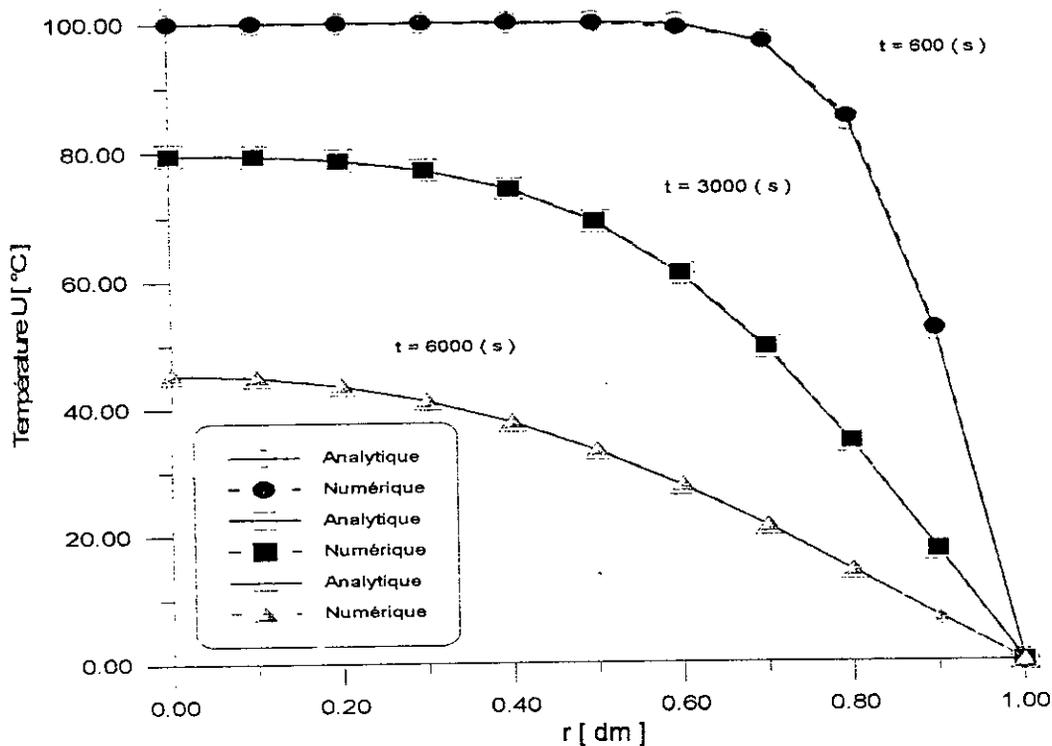


Figure (6.2) : Distribution de la température le long de l'axe r dans le plan de symétrie horizontal pour différentes valeurs du temps t .

nœuds	z[dm]	t=600 [s]		t=3000 [s]		t=6000 [s]	
		U _{numérique} [°C]	U _{analytique} [°C]	U _{numérique} [°C]	U _{analytique} [°C]	U _{numérique} [°C]	U _{analytique} [°C]
1	0.5	99.89568	99.95610	79.57207	79.66541	45.45902	45.33656
2	0.55	99.83155	99.90707	78.66936	78.75434	44.90580	44.77945
3	0.6	99.56548	99.68779	75.96055	76.02841	43.23880	43.12162
4	0.65	98.86340	99.03118	71.47330	71.51248	40.51851	40.40323
5	0.7	97.16830	97.33953	65.24712	65.25767	36.79164	36.69032
6	0.75	93.48449	93.53582	57.37032	57.35299	32.16648	32.07331
7	0.8	86.28635	86.06408	47.97232	47.93747	26.74014	26.66505
8	0.85	73.76630	73.24127	37.25126	37.20873	20.65911	20.59819
9	0.9	54.70033	54.01479	25.46237	25.42573	14.06214	14.02203
10	0.95	29.31608	28.82782	12.92489	12.90348	7.120118	7.09889
11	1	0	0	0	0	0	0

Tableau 6.5 : les températures numériques et analytiques suivant l'axe vertical z ($\tau = 0$) pour différentes valeurs du temps t .

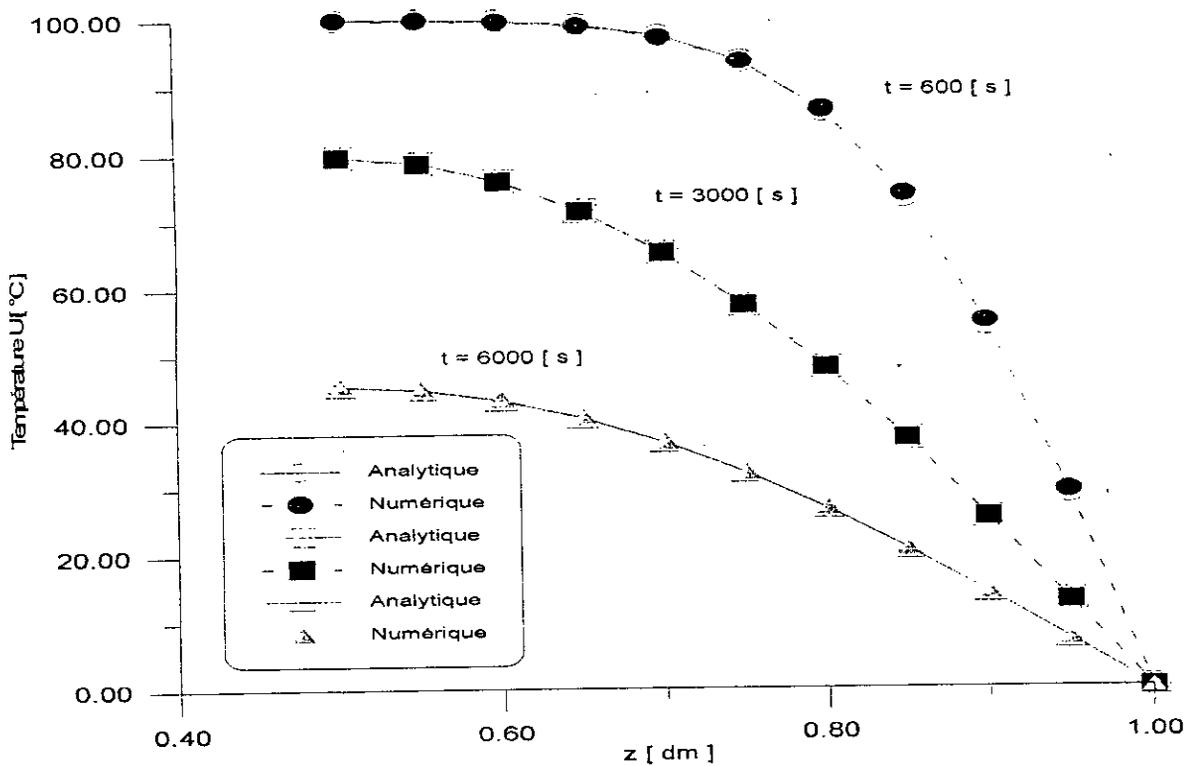


Figure (6.3) : Distribution de la température le long de l'axe vertical z pour différentes valeurs du temps t .

Les figures (6.2) et (6.3) montrent la variation de la température en fonction des temps spécifiés dans notre étude selon l'axe r dans le plan de symétrie horizontal et le long de l'axe vertical z .

On voit clairement que les résultats numériques obtenus par la méthode des éléments finis duplique parfaitement avec la solution analytique.

La solution numérique présente une erreur de l'ordre de 0.05 % à 1.7 % par rapport à la solution analytique, causé par l'intégration numérique avec la formule de quadrature de Gauss ainsi que le choix du facteur poids suivant l'algorithme d'intégration du temps.

6.2 Cylindre de longueur infinie

6.2.1 Cylindre creux en régime stationnaire (permanent)

Cet exemple consiste à déterminer la température en tous points d'un cylindre creux de longueur infinie, de rayon intérieur $r_1 = 1 \text{ dm}$ et de rayon extérieur $r_2 = 2 \text{ dm}$, voir figure(4.4).

Maintenu à la température $u_1 = 0^\circ\text{C}$ pour $r = r_1$ et à la température $u_2 = 100^\circ\text{C}$ pour $r = r_2$

La solution analytique de ce problème est donnée par l'équation (4.41):

$$u(r) = \frac{u_1 \cdot \ln(r_2/r) + u_2 \cdot \ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$$

On veut trouver la distribution de la température le long de l'axe horizontal r .

Après la substitution des données, on trouve la solution approchée :

$$u(r) = \frac{100 \cdot \ln(r)}{\ln(2)}$$

Les résultats sont donnés par le tableau suivant :

nœuds	r[dm]	$U_{\text{numérique}} [^{\circ}\text{C}]$	$U_{\text{analytique}} [^{\circ}\text{C}]$
1	1	0	0
4	1.1	13.74949	13.75035
6	1.2	26.30337	26.30345
9	1.3	37.85068	37.85117
11	1.4	48.54264	48.54268
14	1.5	58.49598	58.49625
16	1.6	67.80717	67.80718
19	1.7	76.55332	76.55348
21	1.8	84.79971	84.79969
24	1.9	92.59985	92.59940
26	2	100	100

Tableau 6.6 : les températures numériques et analytiques suivant l'axe horizontal r .

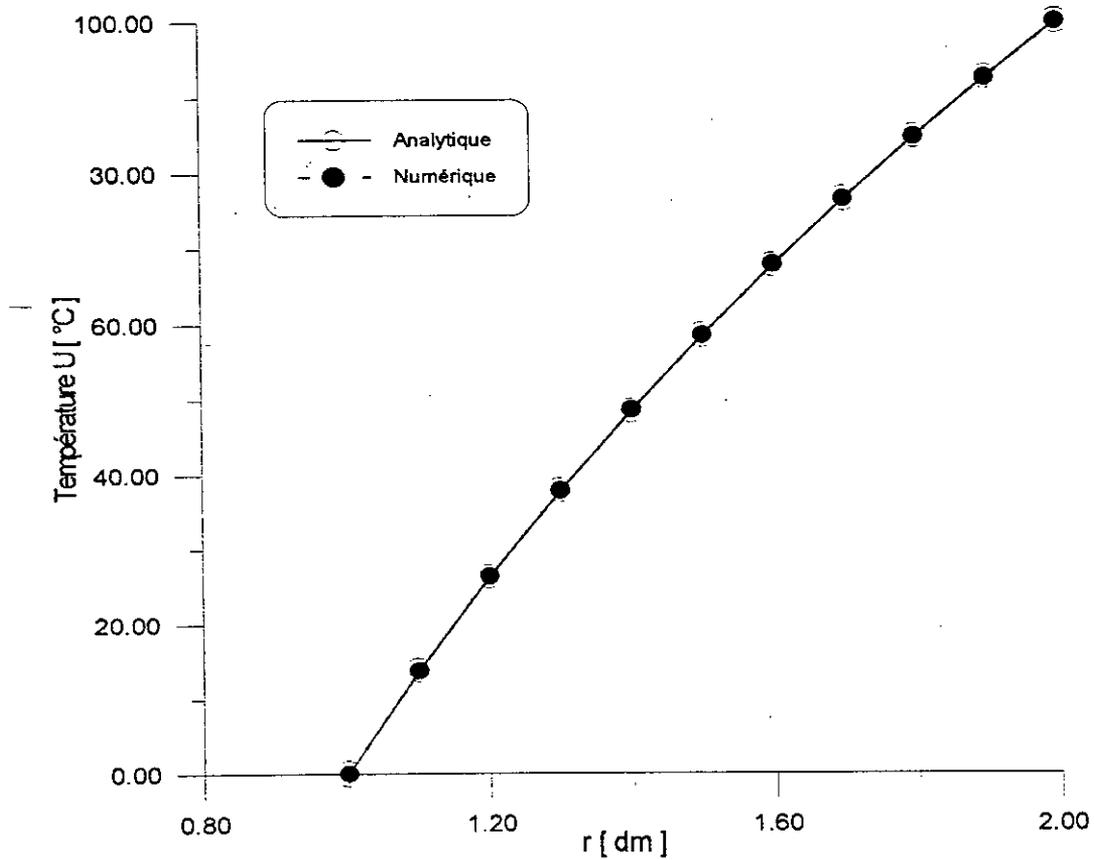


Figure (6.4) : Distribution de la température le long de l'axe horizontal r .

L'étude d'un cas simple d'un cylindre creux et infini en régime permanent a pour but de montrer que l'étude peut se faire par la méthode numérique car la méthode analytique est plus complexe pour les cylindres creux et finis.

Ce cas traite la distribution de la température selon l'axe r . Là aussi on remarque que les résultats numériques se rapprochent des résultats analytiques.

6.2.2 Cylindre plein en régime non stationnaire (transitoire)

Considérons l'exemple traité dans la page 57 où on suppose que notre cylindre soit initialement à la température ($u_0 = 100^\circ\text{C}$) puis brusquement refroidi à la température 0°C , de rayon $R = 1\text{ dm}$ (voir *figure (4.5)*) et dont le coefficient de diffusion est

$$\alpha = \frac{k}{\rho \times c} = 1.52554 * 10^{-5} [dm^2/s].$$

La solution analytique cherchée est donnée par l'équation (4.52) :

$$u(r, t) = 2.u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R}.r\right)}{\mu_n \cdot J_1(\mu_n)} e^{-\alpha \frac{\mu_n^2}{R^2} t}$$

On veut déterminer la distribution de la température le long de l'axe horizontal r pour des temps spécifiques.

Après la substitution des données on obtient la solution approchée :

$$u(r, t) = 2.100. \sum_{n=1}^{13} \frac{J_0(\mu_n.r)}{\mu_n \cdot J_1(\mu_n)} e^{-\alpha \mu_n^2 t}$$

Remarque :

En dépassant $n = 13$, on constate qu'il n'y a pas de changement pour les 5 chiffres de la partie fractionnaire.

Les résultats sont donnés par le tableau suivant :

nœuds	r[dm]	t=600 [s]		t=3000 [s]		t=6000 [s]	
		U _{numérique} [°C]	U _{analytique} [°C]	U _{numérique} [°C]	U _{analytique} [°C]	U _{numérique} [°C]	U _{analytique} [°C]
1	0	99.998220	100	99.028600	99.18498	87.837620	87.89812
4	0.1	99.999790	100	98.822640	98.93208	86.973370	87.01214
6	0.2	99.995220	100	97.920000	98.03528	84.290950	84.31210
9	0.3	99.991410	99.99996	96.000530	96.06838	79.700370	79.69106
11	0.4	99.958030	99.99854	92.275160	92.30936	73.069500	73.03124
14	0.5	99.795880	99.96882	85.854290	85.81058	64.340110	64.28126
16	0.6	99.197960	99.59670	75.732820	75.62298	53.613820	53.53754
19	0.7	96.858050	96.81164	61.324200	61.18298	41.174760	41.10704
21	0.8	85.148620	84.38814	42.887890	42.74242	27.587770	27.52892
24	0.9	52.131460	51.47028	21.679500	21.61082	13.567550	13.54216
26	1	0	0	0	0	0	0

Tableau 6.7 : les températures numériques et analytiques suivant l'axe horizontal r pour différentes valeurs du temps t .

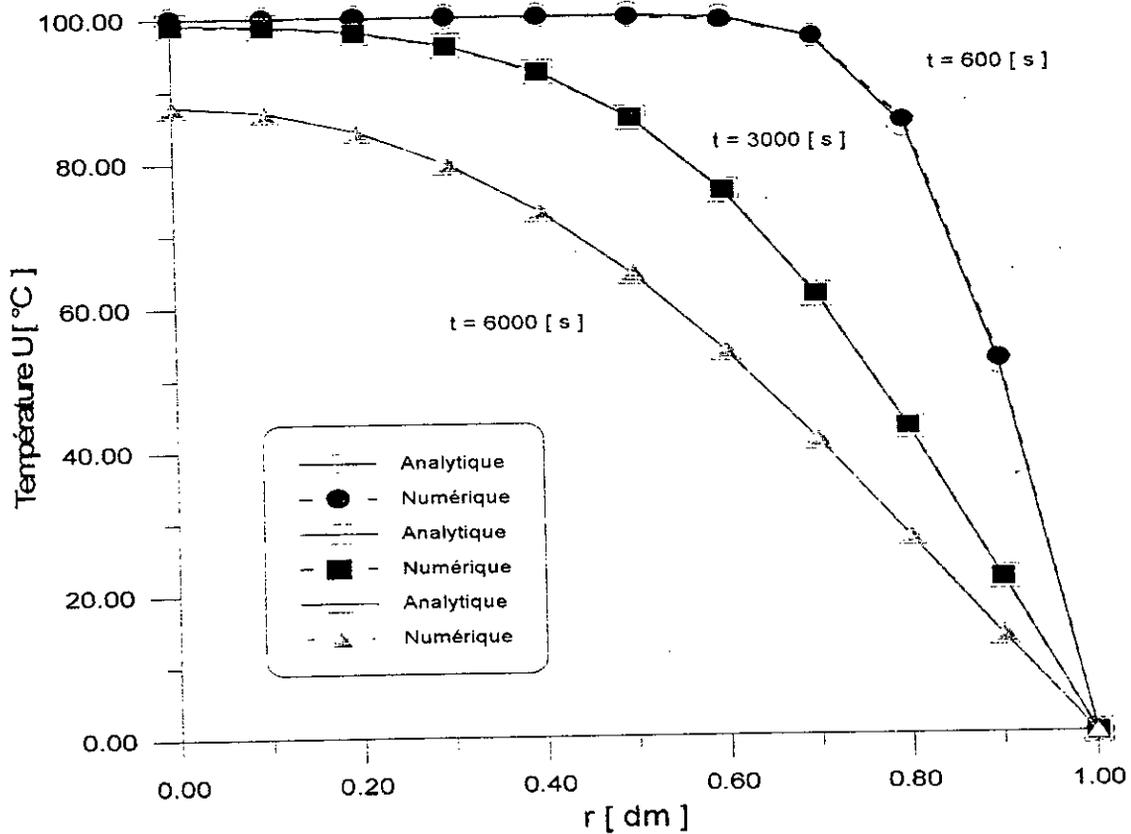


Figure (6.5) : Distribution de la température le long de l'axe horizontal r pour différentes valeurs du temps t .

Ce cas de figure (6.5) traite la conduction de la chaleur d'un cylindre plein et infiniment long en régime transitoire. Les résultats numériques obtenus sont similaires aux valeurs de la méthode analytique. En comparant les températures pour un même temps dans les figures (6.5) et (6.2), on constate que les températures du cylindre infiniment long restent élevées par rapport au cylindre fini car la matière est plus importante dans le premier cas.

Chapitre 7

Conclusion

Nous tenons à mettre en évidence que le présent travail nous a permis de faire un développement qui nous a conduit à discrétiser les équations de la conduction de la chaleur en coordonnées cylindriques par la méthode des éléments finis, présentant alors un outil numérique qui peut approcher tout modèle physique gouverné par l'équation de conduction de la chaleur en coordonnées cylindriques.

Dans l'approche analytique on a utilisé la méthode de séparation des variables, elle est simple à utiliser et efficace dans notre étude .

Le choix de la méthode des éléments finis a été retenu pour les raisons suivantes :

- Elle facilite la prise en compte des conditions aux limites portant sur les gradients de la fonction (conditions de Neumann ou de Cauchy) ce qui est nettement plus malaisé pour les autres méthodes « méthode des différences finies » .
- Le second avantage est la souplesse considérable dans le choix des maillage .

On peut choisir, de façon quasiment arbitraire, la position et le nombre de nœuds et donc le nombre, la forme, et la répartition des domaines élémentaires ainsi tout contour peut être approché. Enfin si l'on désire calculer la fonction en certains points bien particuliers du domaine cela est facilement réalisable il suffit de choisir des nœuds en ces points. L'inconvénient principale de cette méthode est la difficulté de sa programmation.

On retient que les résultats obtenus dans notre étude par la méthodes des éléments finis sont tout à fait fiables comparés au résultats analytiques.

Il est souhaitable et intéressant que les prochains travaux de recherche puissent se faire sur les sphères en utilisant les équations des polynômes de Legendre.

Références

- [1] Boyce, W. E., DiPrima, R. C., *Elementary Differential Equations*, 4th ed. , New York : John Wiley & Sons, 1986.
- [2] Carslaw H. S. and Jaeger J. C., *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed. ,Oxford : Clarendon Press, 1959, Reprinted 1971.
- [3] Chapman, Alan J., *Heat Transfer*, 4th ed. , New York : Macmillan Publishing Company, 1984.
- [4] Churchill, Ruel V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 2nd ed., New York : McGraw-Hill, 1963.
- [5] Comini, G., Del Giudice, S., Nonino, C., *Finite Element Analysis in Heat Transfer : Basic Formulation and Linear Problems*, Washington : Taylor & Francis, 1994.
- [6] De Vriendt, André B., *La Transmission de la Chaleur*, volume I, tome 1 et 2, Québec : Gaëtan Morin éditeur, 1982.
- [7] Delannoy, C., *Programmer en FORTRAN 90*, Paris : Éditions Eyrolles, 1993.
- [8] Dhatt, G., Touzot, G., *Une Présentation de la Méthode des Elément Finis*, 2^{ème} édition, Paris : Maloine S.A. Editeur, 1984.
- [9] Imbert J.-F., *Analyse des Structures par Eléments Finis*, 3e édition, Toulouse : Cépaduès-Éditions, 1995.
- [10] Kebli B., *Cours d'Analyse Mathématiques*, Alger : Ecole Nationale Polytechnique.
- [11] Kontinos, Dean A. , *Steady-State and Transient Boundary Element Methods for Coupled Heat Conduction*, NASA TM-110427, January 1997, pp. 55.
- [12] Lewis R. W., Morgan K., Thomas H. R., and Seetharamu K. N., *The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis*, Chichester, England : John Wiley & Sons, 1996.
- [13] Mikhailov M. D., ÖZİŞİK M. N., *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*, New York : John Wiley & Sons, 1984.
- [14] Myers, G. E., *Analytical Methods in Conduction Heat Transfer*, New York : McGraw-Hill, 1972.

- [15] Nikiforov A., Ouvarov V., *Fonctions spéciales de la physique mathématique*, Alger : Office des Publications Universitaires, 1983.
- [16] Rao, S. S., *The Finite Element Method in Engineering*, 2nd ed. , U.K. Oxford : Pergamon Press, 1989.
- [17] Rohsenow, W.M., Hartnett, J.P., Ganic, E.N., *Handbook of Heat Transfer Fundamentals*, second edition. , New York : McGraw-Hill, 1985.
- [18] Sacadura, J.F., *Initiation aux transferts thermiques*, 3^{ème} tirage revu, Paris : Technique et Documentation, 1982.
- [19] Spiegel, M.R., *Theory and problems of FOURIER ANALYSIS with applications to boundary value problems*, Traduction française JACOUD R., Paris : McGraw-Hill, 1980.
- [20] Yang, T. Y., *Finite Element Structural Analysis*, New Jersey : Prentice-Hall, Inc. , Englewood Cliffs, 1986.
- [21] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., *The Finite Element Method*, Fourth Edition, Volume 1 London : McGraw-Hill, 1989.

Appendice

Types de maillages utilisés dans le code de calcul

Nous allons présenter les types de maillages pour chaque exemples traiter au chapitre 6.

1. Cylindre plein et fini

a) En régime permanent

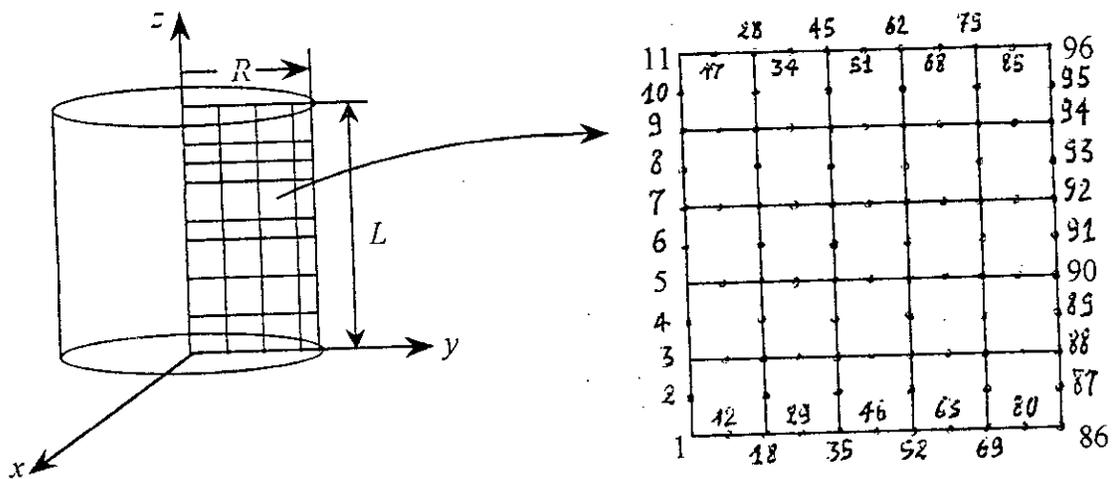


figure (4.2)

b) En régime transitoire

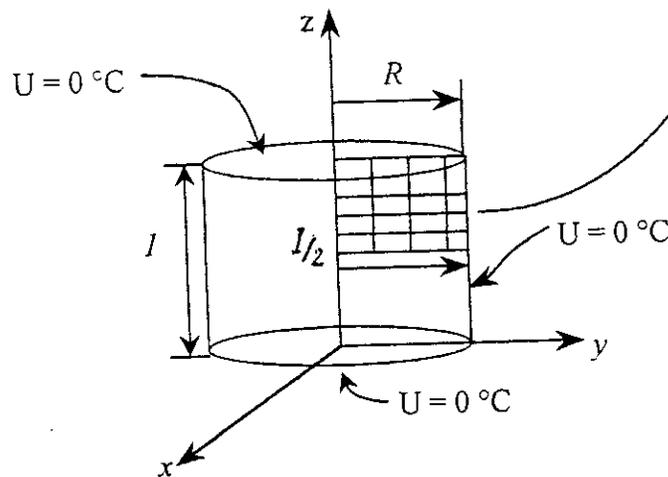


figure (4.3)

2. Cylindre infini

a) En régime permanent (creux)

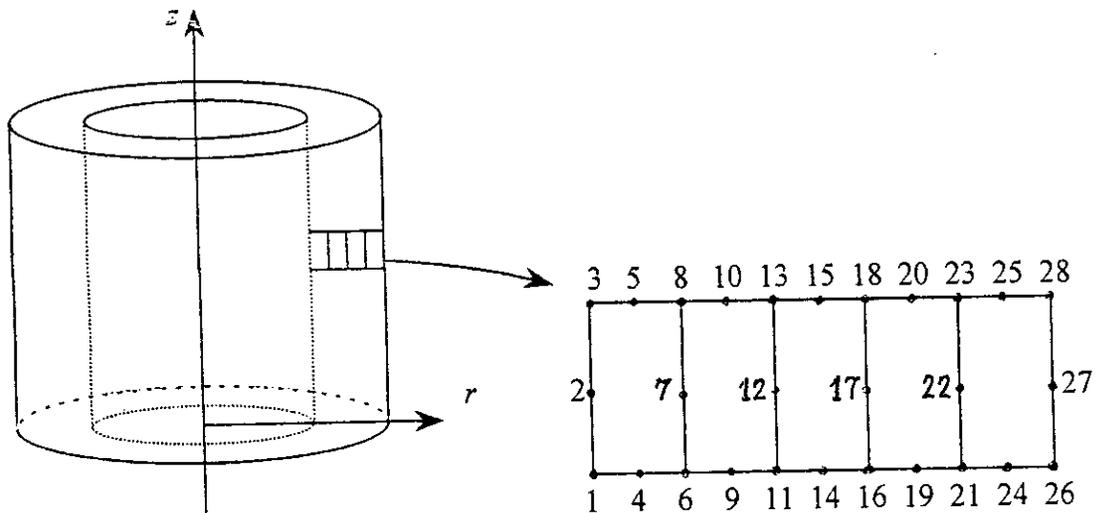


figure (4.4)

b) En régime transitoire (plein)

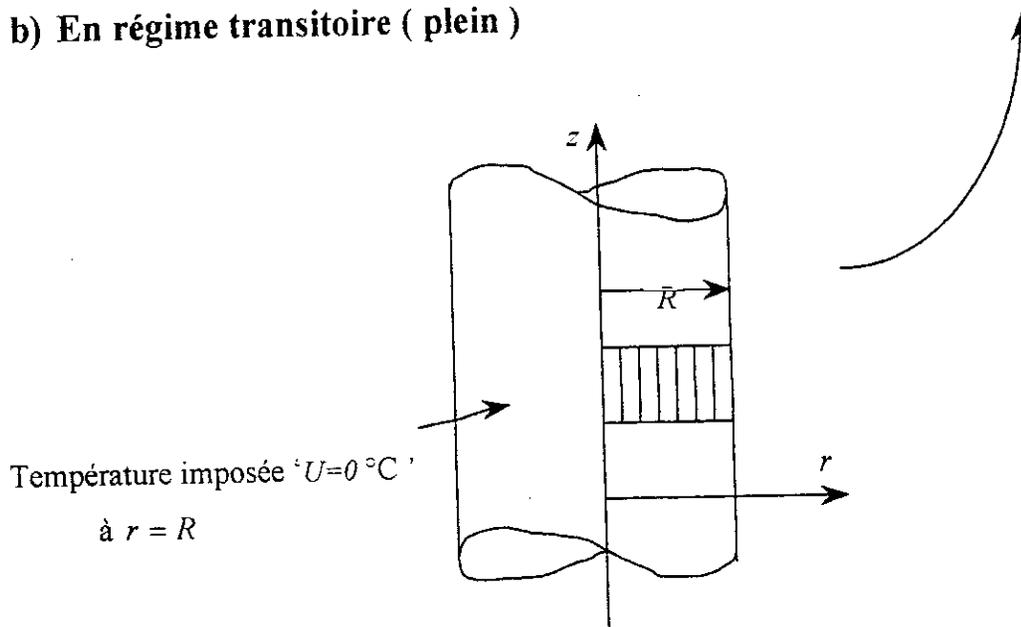


figure (4.5)