

15/00

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur
et de la recherche scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

Mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention du
Diplôme d'Ingénieur d'État en Génie Mécanique

THEME

**INFLUENCE DE L'EMPILEMENT DES COUCHES
SUR LE COMPORTEMENT MECANIQUE DES
STRATIFIES**

Présenté par

Promoteur

Monsieur HADJ-A. DJOUDER

M^{elle} N. AMOR

Membres du jury

Pr S. RECHAK (président)

Mr BELKACIMI (examineur)

M^{elle} N. AMOR

Promotion : 2000

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur
et de la recherche scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



الجامعة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

Mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention du
Diplôme d'Ingénieur d'État en Génie Mécanique

THEME

**INFLUENCE DE L'EMPILEMENT DES COUCHES
SUR LE COMPORTEMENT MECANIQUE DES
STRATIFIES**

Présenté par

Monsieur HADJ-A. DJOUDER

Promoteur

M^{elle} N. AMOR

Membres du jury

Pr S. RECHAK (président)

Mr BELKACEMI (examineur)

M^{elle} N. AMOR

Promotion : 2000

اهدف من هذه الدراسة يتلخص في مرحلة اولى في دراسة تاثير اتجاه الالياف على الخصائص الميكانيكية للمواد المركبة أحادية الطبقة مع التركيز على النظرية الكلاسيكية. في المرحلة الثانية، نفس الدراسة طبقت على مواد مركبة متكونة من عدة طبقات. أخيرا إستخلصنا ما هي المواد الأكثر مقاومة بعد إستعمالنا لمبدأ الإنقسام.

Résumé :

L'objet primaire de ce travail consiste à étudier l'influence de l'orientation des fibres sur les propriétés mécaniques d'un matériau composite constitué d'une seule couche, c'est à dire un monocouche, en se basant sur la théorie classique des stratifiés. Dans une seconde étape, une variété de stratifiés constitués de plusieurs couches et soumis à un effort de traction à été considérée afin de voir quel est le stratifié le plus résistant en utilisant le critère de repture adéquat.

Mot clés :

monocouche, multicouche, orthotrope, traction, rupture.

Abstract :

The first object of this work consists to study the influence of the fibre orientation on the mechanical proprieties of a composite materials constituted of one layer, relaying on the laminae classical theory.

At an second stage, a variety of laminae containing many layers and subjected to a tensile effort has been considered in order to predict which is the stronger laminate using an appropriate rupture criterion.

Dédicaces

*À mes très chers parents, mes frères et sœurs qui ont été
toujours à mes côtés.*

*Et à tous mes amis sur tout la promotion 2000
Je dédie ce modeste travail*

Hadj-amar

REMERCIEMENT

Je remercie ma promotrice M^{elle} N.AMOR pour son aide et son suivi.

Je remercie également Mr F.BELBLIDIA ainsi que Mr H.FERDJANI de l'université de Blida pour leurs aides.

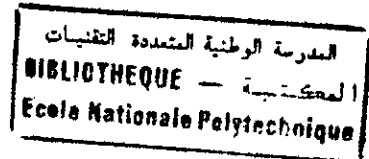
Tout mes remerciement à tous se qui ont contribués de près ou de loin à réaliser se travail, plus spécialement Hakim, Karim et Rachid.

SOMMAIRE

NOTATION.....	i
LISTE DES FIGURE.....	ii
LISTE DES TABLEAUX.....	ii
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I GENERALITE SUR LES STRATIFIÉS	
1 INTRODUCTION.....	2
2 CONVENTION DE SIGNE ET DIFINITION.....	2
3 CHAMP DES DÉPLACEMENTS.....	4
3.1 Expressions générales.....	4
3.2 Déformation d'une normale.....	5
3.3 Schémas du premier degré.....	6
4 CHAMPS DES DÉFORMATIONS.....	8
4.1 Expressions générales.....	8
4.2 Schémas du premier degré.....	9
5 CHAMP DES CONTRAINTES.....	9
5.1 Expression généralē.....	9
5.2 théories simplifiées des plaques.....	10
6 RÉSULTANTES ET MOMENTS.....	11
6.1 Résultante en membrane.....	11
6.2 résultant en flexion.....	12
CHAPITRE II COMPORTEMENT ELASTIQUE D'UN MATRIAU COMPOSITE ORTHOTROPE	
1. LOI DE HOOKE POUR UN COMPOSITE ORTHOTROPE.....	14
1.1 Composite orthotrope.....	14
1.2 Matrices de rigidité et de souplesse.....	14
2 MODULES DE L'INGÉNIEUR.....	16
Conclusion.....	16
3 EXPRESSION DES CONSTANTES DE RIGIDITÉ ET DE SOUPLESSE EN FONCTION DES MODULES DE L'INGÉNIEUR.....	16
3.1 Constantes de souplesse.....	16
3.2 Constantes de rigidité.....	17
3.3 Restriction sur les coefficients d'élasticité.....	17
4. COMPORTEMENT ANISOTROPE À DEUX DIMENSIONS.....	19
4.1 Plaque orthotrope rapportée à ses axes principaux.....	19
4.2 Plaque orthotrope non rapportée à ses axes principaux.....	20
4.2.1 Variation des modules technologiques en fonction de l'angle.....	23
CHAPITRE III THEORIES CLASSIQUES DES STRATIFIÉS	
1 CHAMP DES DÉFORMATIONS.....	24
1.1Hypothèses de la théorie classique des stratifiés.....	25
1.2 Expression du champ des déformations.....	25
2 CHAMP DES CONTRAINTES.....	27
2.1 Forme du champ des contraintes.....	27
2.2 Expression des contraintes.....	28
3 EXPRESSION DES RÉSULTANTES ET MOMENTS.....	28
3.1 Résultantes en membrane.....	28
3.2 Résultantes en flexion.....	30
3.3 Équation constitutive.....	30
CHAPITRE IV ETUDE DE QUELQUES FORMES DE LA MATRICE DE RIGIDITÉ	
1 CAS D'UN MONOCOUCHE.....	32

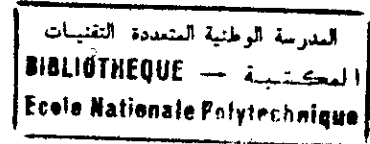
1.1 Couche orthotrope rapportée à ses axes principaux.....	32
1.2 Couche orthotrope non rapportée à ses axes principaux.....	33
2 CAS D'UN STRATIFIÉ OU MULTICOUCHE.....	34
2.1 Multicouche équilibré, symétrique.....	34
2.2 Multicouche non équilibré, symétrique.....	35
2.3 Multicouche équilibré, non symétrique (antisymétrique).....	36
2.4 Multicouche non équilibré et non symétrique.....	37
2.5 Forme générale de la matrice de rigidité.....	38
CHAPITRE V CRITÈRE DE RUPTURE	
1 GÉNÉRALITÉ.....	40
2 DÉFINITION DES CRITÈRES DE RUPTURE.....	40
3 CRITÈRE DE LA CONTRAINTE MAXIMALE.....	40
4 CRITÈRE DE LA DÉFORMATION MAXIMALE.....	41
5 CRITÈRES INTERACTIFS.....	41
5.1 Critère de Hill.....	42
5.2 Critère de Tsai-Hill.....	43
5.3 Critère de Hoffman.....	43
CHAPITRE VI RÉSULTATS ET COMMENTAIRES	
1 EXEMPLES TRAITÉS.....	44
1.1 Exemple N°1.....	44
1.2 Exemple N°2.....	45
1.3 Exemple N°3.....	45
2 INTERPRÉTATION DES RESULTATS.....	48
2.1 Exemple N°1.....	48
2.2 Exemple N°2.....	48
2.3 Exemple N°3.....	49
3 CONCLUSION GÉNÉRALE.....	50
ANNEXE A.....	59
ANNEXE B.....	66
ANNEXE C.....	68
BIBLIOGRAPHIE.....	

NOTATIONS



- [A] sous-matrice 3x3 relative à la loi de comportement des multicouches : (A,B,B,D)
- [B] sous-matrice 3x3 relative à la loi du comportement des multicouches (A,B,B,C)
- [D] sous-matrice 3x3 relative à la loi du comportement des multicouches (A,B,B,D)
- E module de Young en traction
- e épaisseur
- G module de cisaillement
- h hauteur
- k n° de la couche
- $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ courbures de la surface moyenne géométrique
- M_x, M_y élément de réduction, moment de flexion
- M_{xy} élément de réduction, moment de torsion
- n nombre total des couches
- N_x, N_y élément de réduction, charges normale
- N_{xy} élément de réduction, charges de cisaillement
- [Q] matrice de rigidité en configuration tridimensionnelle, du monocouche suivant les axes d'orthotropie
- $[\bar{Q}]$ matrice de rigidité du monocouche hors axes d'orthotropie
- S_{ij} coefficient de souplesse
- C_{ij} coefficient de rigidité
- S contrainte à rupture de cisaillement
- [T_σ] matrice de passage relative aux contraintes
- [T_ε] matrice de passage relative aux déformations
- u déplacement suivant l'axe des x
- u_0 déplacement du plan moyen géométrique suivant l'axe des x
- v déplacement suivant l'axe des y
- v_0 déplacement du plan moyen géométrique suivant l'axe des y
- w déplacement suivant l'axe des z
- X_t contrainte à rupture en traction du monocouche suivant l'axe L
- X_c contrainte à rupture en compression du monocouche suivant l'axe L
- Y_t contrainte à rupture en traction du monocouche suivant l'axe T
- Y_c contrainte à rupture en compression du monocouche suivant l'axe T
- z_i ordonnée : par rapport au plan moyen géométrique de la plaque
- α, β, θ angles formés par l'inclinaison de la direction L du monocouche avec l'axe des x
- $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{ll}, \epsilon_{ll}$ déformations normales
- $\epsilon_{xx}^0, \epsilon_{yy}^0$ déformations normales du plan moyen géométrique
- $\epsilon_{xy}, \epsilon_{ll}$ déformations angulaires ou de cisaillement
- ϵ_{xy}^0 déformation angulaire ou de cisaillement du plan moyen géométrique
- ν coefficient Poisson

LISTE DES FIGURES



- Fig. I.1 : Stratifié à quatre couches
Fig. I.2 : Élément de stratifié
Fig. I.3.a : Repérage du plan moyen géométrique
Fig. I.3.b : Repérage des couches
Fig. I.4 : Déformation d'une norme AB au plan moyen avec gauchissement
Fig. I.5 : Déformation dans le cas d'un schéma du premier degré, sans le cisaillement transverse
Fig. I.6 : Caractérisation de la déformée en un point, en absence de cisaillement transverse
Fig. I.7 : Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié
Fig. I.8 : Schématisation des moments de flexion et de torsion
Fig. II.1 : Matériaux composite orthotrope
Fig. II.2 : Rotation des axes de référence par rapport aux axes principaux
Fig. IV.1 : Stratifié équilibré-symétrique
Fig. IV.2 : Stratifié non équilibré-symétrique
Fig. IV.3 : Stratifié équilibré-non symétrique
Fig. IV.4 : Stratifié non équilibré-non symétrique
Fig. VI.1 : Stratifié particulier
Fig. VI.2 : Déformations hors axes principaux (exemple 1)
Fig. VI.3 : Déformations suivant les axes principaux (exemple 1)
Fig. VI.4 : Contraintes hors axes principaux (exemple 1)
Fig. VI.5 : Contraintes suivant les axes principaux (exemple 1)
Fig. VI.6 : Déformations hors axes principaux (exemple 2)
Fig. VI.7 : Déformations suivant les axes principaux (exemple 2)
Fig. VI.8 : Contraintes hors axes principaux (exemple 2)
Fig. VI.9 : Contraintes suivant les axes principaux (exemple 2)

LISTE DES TABLEAUX

- Tableau 1 : Déformations et contraintes (exemple 1)
Tableau 2 : Déformations et contraintes (exemple 2)
Tableau 3 : Tableau récapitulatif de la résistance des stratifiés (exemple 3)

Introduction

INTRODUCTION

Dans un sens large, le mot « composite » signifie « constitué de deux ou plusieurs parties différentes ». En fait, l'appellation *matériau composite* ou composite est utilisé dans un sens plus restrictif. Nous en donnons la définition générale suivante :

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément.

Suivant leur architecture, on peut distinguer deux types importants de composites : les stratifiés et les sandwichs.

Les stratifiés qui sont l'objet de notre étude sont constitués de couches successives (appelées parfois plis).

Une terminologie particulière s'est révélée nécessaire afin d'éviter un certain nombre de confusions : ainsi monocouche désigne une couche unique (isotrope ou orthotrope) renforcée de façon unidirectionnelle et possédant, de ce fait deux axes de symétrie perpendiculaires dont l'un a la même direction que le renfort. Un multicouche est constitué de plusieurs monocouches supposées parfaitement liés les uns aux autres et orientés de façon quelconque.

L'orientation des couches influe sur le comportement mécanique des stratifiés, cette influence sera l'objet de ce travail.

Définitions :

Matériau orthotrope :

« Matériau élastique présentant en tout point deux symétries de comportement mécanique chacune par rapport à un plan, les deux plans étant orthogonaux. »

Matériau anisotrope :

« Matériau dont la relation du comportement dépend de la direction envisagée »

Matériau hétérogène :

« Matériau dont la relation du comportement dépend du point étudié. »

chapitre I

GENERALITE SUR LES
STRATIFIES

1. INTRODUCTION :

Ce chapitre est consacré entièrement à l'étude du comportement élastique du multicouche. Une définition assez générale consisterait à énoncer qu'un multicouche ou un stratifié est constitué d'un nombre quelconque, supérieur à un, de couches ayant un comportement (isotrope ou anisotrope) et des caractéristiques élastiques différentes. Le stratifié considéré est constitué de quatre couches comme indiqué sur Fig.I.1 est un exemple type.

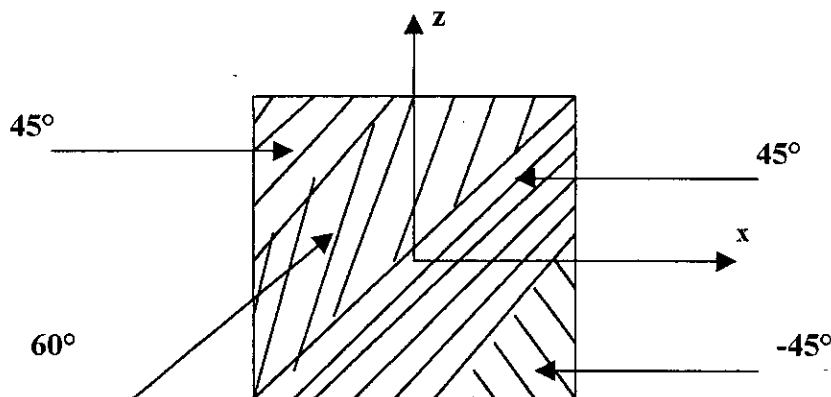


Fig.I.1 stratifié à quatre couches

Le multicouche ainsi obtenu, doit être considéré comme une plaque anisotrope et hétérogène et l'étude de son comportement devient beaucoup plus, un problème de calcul de structure qu'un problème d'étude du comportement d'un matériau [5].

2. CONVENTION DE SIGNE ET DÉFINITION :

L'élément de dimension dx , dy et dz sera repéré par rapport au trièdre de référence Ox, Oy, Oz comme mentionné à la figure I.2

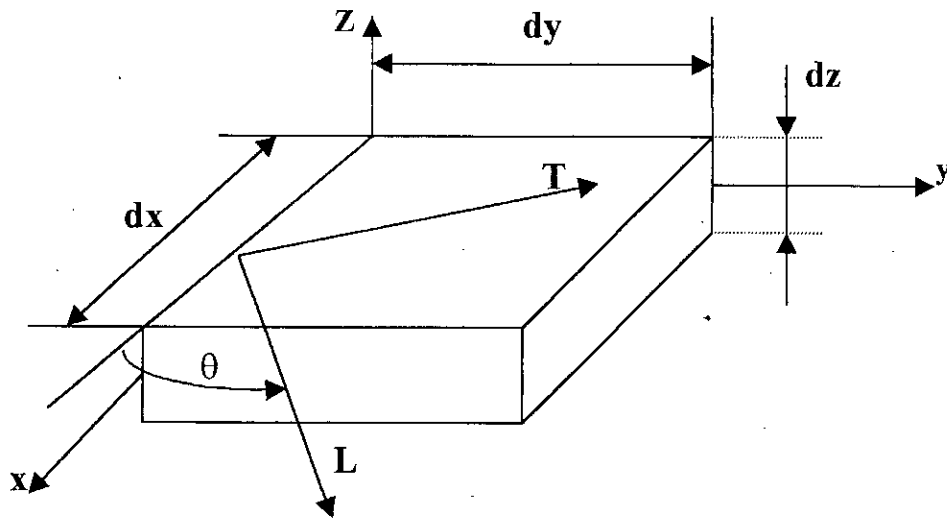


Fig.I.2 élément de stratifié

De plus, il est nécessaire de repérer la position des couches de constitution les unes par rapport aux autres ; en fait, ce repérage est effectué par rapport au plan xOy , plan de symétrie de la plaque suivant son épaisseur.

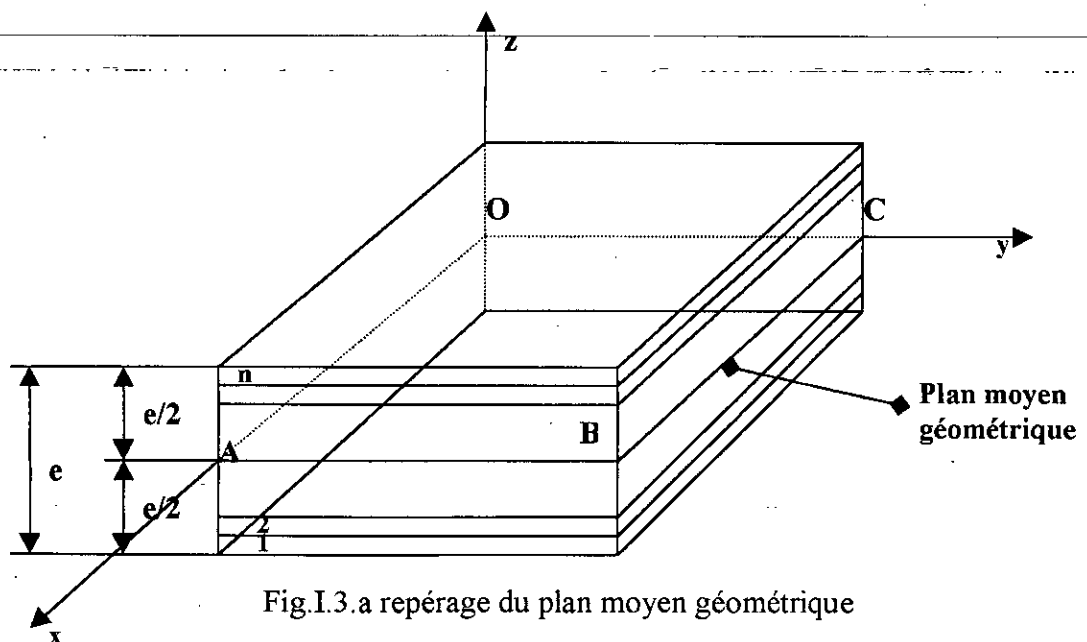


Fig.I.3.a repérage du plan moyen géométrique

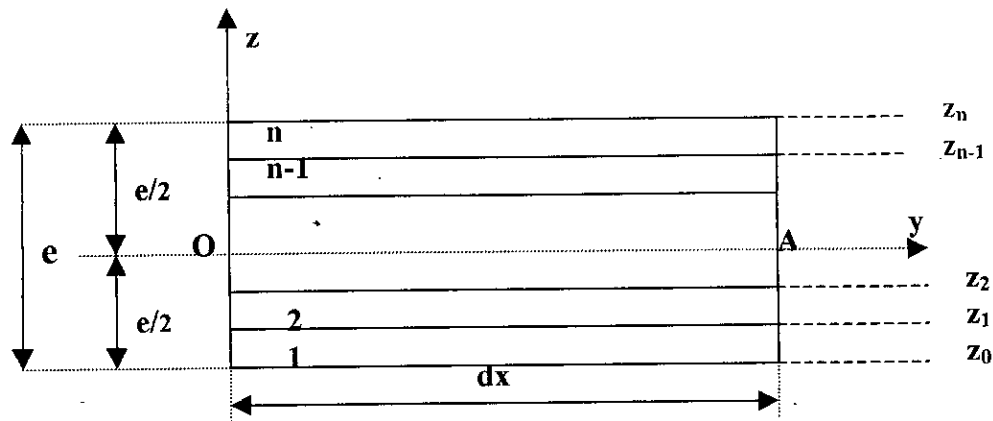


Fig.I.3.b repérage des couches

Ce plan médian, dénommé plan moyen géométrique(P.M.G) est illustré en I.3.a par OABC. La figure I.3.b montre comment est effectué le repérage des couches :

- leur numérotation s'effectue du bas vers le haut, c'est à dire dans le sens des z croissant.

- les intercouches sont numérotés à partir de la face inférieure dans le même sens $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n$, l'ordonnée de la partie inférieure de chaque couche étant comptée algébriquement à partir du plan xOy confondu avec le PMG.

Il s'ensuit que l'épaisseur de la couche k, est obtenue en effectuant la différence

$e_k = z_k - z_{k-1}$, bien entendu, les coordonnées z_k prennent des valeurs négatives pour des plans situés en dessous du plan xOy.

3. CHAMP DES DÉPLACEMENTS :

3.1 Expressions générales :

L'hypothèse de base de la théorie générale des plaques réside dans l'expression des déplacements en tout point M d'une plaque, de coordonnées (x, y, z) .

Celle ci est représentée sous forme de polynômes d'ordre 3 en z dont les coefficients dépendent de (x, y) : [2]

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u(x,y,0) + z \varphi_x(x,y) + z^2 \psi_x(x,y) + z^3 \phi_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= v(x,y,0) + z \varphi_y(x,y) + z^2 \psi_y(x,y) + z^3 \phi_y(x,y) \\ w(x,y,z) &= w(x,y,0) + z \varphi_z(x,y) + z^2 \psi_z(x,y) \end{aligned} \quad (I.1)$$

Cette forme permet de prendre en compte le gauchissement de la section droite des plaques, lors de la déformation. Dans le cas de problèmes de dynamique, le facteur temps doit être introduit dans les relations précédentes.

Le déplacement d'un point quelconque $M(x,y,z)$ est donc développé, suivant (I.1), en série de la variable z à coefficient en (x,y) , à partir du point de référence $M_0(x,y,0)$ du plan moyen (O,x,y) .

Le champ de déplacement du point M_0 sera noté par la suite suivant la notation :

$$\begin{aligned} u_0 &= u(x,y,0) = u_0(x,y) \\ v_0 &= v(x,y,0) = v_0(x,y) \\ w_0 &= w(x,y,0) = w_0(x,y) \end{aligned} \quad (I.2)$$

3.2 Déformation d'une normale :

Cherchons la déformée d'une normale A au plan de la plaque, définie par $(x = a, y = b)$ (Fig.I.4). Tout point M appartenant à la normale AB a pour coordonnées (a,b,z) et son déplacement s'écrit d'après (I.1) :

$$\begin{aligned} u(a,b,z) &= u(a,b,0) + z \varphi_x(a,b) + z^2 \psi_x(a,b) + z^3 \phi_x(a,b) \\ v(a,b,z) &= v(a,b,0) + z \varphi_y(a,b) + z^2 \psi_y(a,b) + z^3 \phi_y(a,b) \\ w(a,b,z) &= w(a,b,0) + z \varphi_z(a,b) + z^2 \psi_z(a,b) \end{aligned} \quad (I.3)$$

L'équation de la déformée de la normale AB s'écrit donc, avec des notations évidentes, sous la forme polynomiale en z :

$$\begin{aligned} u(a,b,z) &= A_u + B_u z + C_u z^2 + D_u z^3 \\ v(a,b,z) &= A_v + B_v z + C_v z^2 + D_v z^3 \\ w(a,b,z) &= A_w + B_w z + C_w z^2 \end{aligned} \quad (I.4)$$

Lors de la déformation de la plaque, la normale AB subit donc :

- ◆ une translation sans déformation suivant $A'B'$, composé d'une translation $[A_u = u(a,b,0), A_v = v(a,b,0)]$ dans le plan (O,x,y) et d'une translation $[A_w = w(a,b,0)]$ suivant l'axe \vec{Oz} ;
- ◆ puis une déformation suivant $A''B''$, exprimée par les termes en z et dont la forme dépend du degré z . Dans le cas général, la courbe obtenue est une courbe gauche.

Le champ des déplacements (I.1) prend donc en compte un gauchissement éventuel des normales lors de la déformation de la plaque [4].

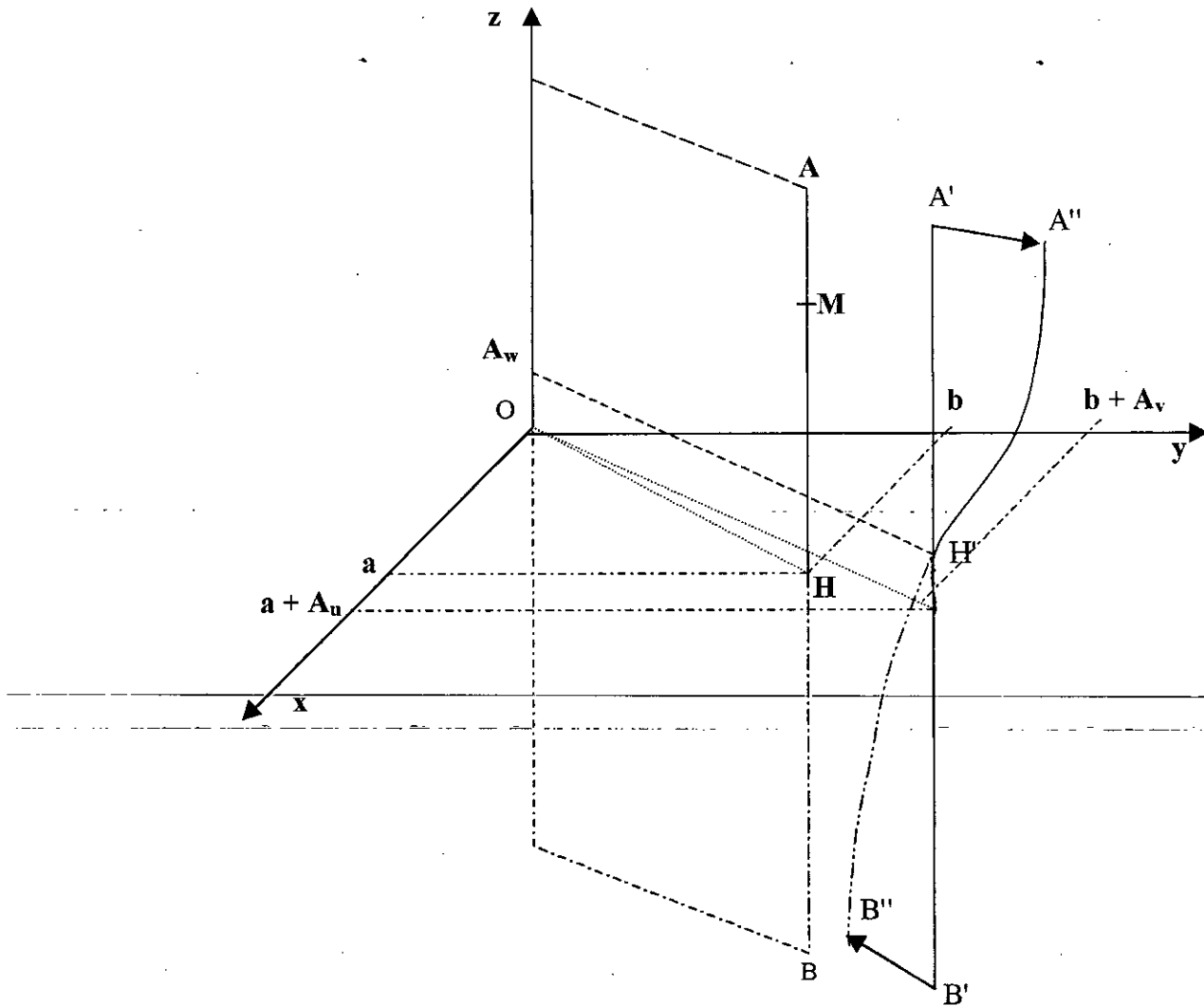


Fig.I.4 Déformée d'une normale AB au plan moyen avec gauchissement

3.3 Schéma du premier degré :

Les relations de (I.1) se réduisent au schéma du premier degré sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 u(x,y,z) &= u(x,y,0) + z \varphi_x(x,y) \\
 v(x,y,z) &= v(x,y,0) + z \varphi_y(x,y) \\
 w(x,y,z) &= w(x,y,0)
 \end{aligned}
 \tag{I.5}$$

Dans un schéma du premier degré, la déformée d'une normale AB, est donnée par :

$$\begin{aligned} u(a,b,z) &= A_u + B_u z \\ v(a,b,z) &= A_v + B_v z \\ w(a,b,z) &= A_w \end{aligned} \quad (I.6)$$

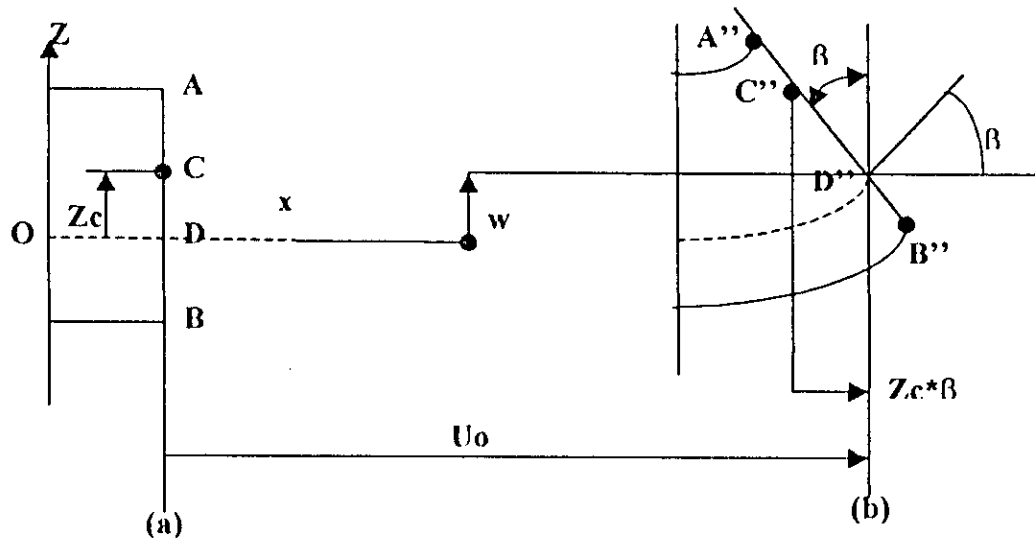


Fig.I.5 Déformation dans le cas d'un schéma du premier degré, sans le cisaillement transverse

La déformée A''B'' reste un segment de droite. D'où la propriété :

Les points situés sur une normale au plan moyen (Oxy) avant déformation, restent sur un segment de droite au cours de la déformation.

Dans le cas où il n'a pas de cisaillement transverse [4], les angles ne changent pas lors de la déformation et la déformée de AB reste normale à la déformée du plan moyen (Fig.I.6). Dans ce cas, la déformée en H, pourra être caractérisée par :

- ♦ les déplacements du point H : déplacement dans le plan (Oxy) :
 $[u(a,b,0) = A_u , v(a,b,0) = A_v]$ et déplacement transverse : $[w(a,b,0) = A_w]$;
- ♦ les rotations θ_x et θ_y autour des directions \vec{i} et \vec{j} .

Dans la pratique, il est plus usuel de caractériser la rotation par les angles β_x et β_y (fig I.4) reliés à θ_x et θ_y par :

$$\beta_x = \theta_y \quad \text{et} \quad \beta_y = -\theta_x \quad (I.7)$$

Dans le cas où un schéma du premier degré ne permettrait pas d'approcher convenablement un problème donné, il sera alors nécessaire de passer au 2^{ème} ordre ou encore au 3^{ème} ordre.

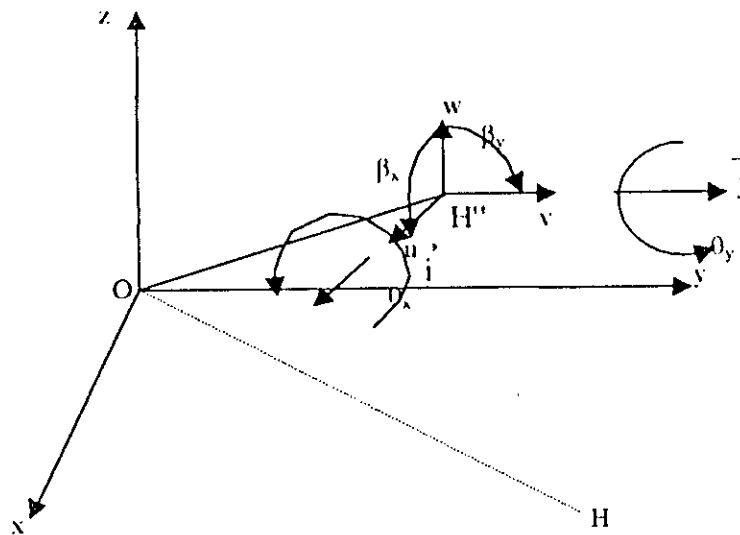


Fig.1.6 Caractérisation de la déformée en un point en absence de cisaillement transverse

4. CHAMPS DES DÉFORMATIONS :

4.1 Expressions générales :

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements (I.1), soit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + z^2 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + z^3 \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + z^2 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + z^3 \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \varphi_z(x,y) + 2z\psi_z(x,y) \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) + z^2 \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + z^3 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (I.8)$$

les déformations transversales de telle sorte que :

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} = 2 \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \varphi_x \right) + z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + 2 \psi_x \right) + z^2 \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + 3 \phi_x \right)\end{aligned}\quad (I.9)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{yz} = 2 \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \varphi_y \right) + z \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + 2 \psi_y \right) + z^2 \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + 3 \phi_y \right)\end{aligned}$$

Ces expressions montrent que la troncature utilisée dans les expressions (I.1) du déplacement est consistante, dans le sens que les déformations en cisaillement transverse résultant des déplacements dans le plan sont du même ordre en z que les déformations déterminées par le déplacement transverse w .

4.2 Schéma du premier degré :

Dans le cas d'un schéma du premier degré, le champ des déformations se déduit simplement des relations suivantes :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} = 2 \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} = 2 \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \\ \gamma_{yz} = 2 \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y\end{aligned}\quad (I.10)$$

5. CHAMP DES CONTRAINTES :

5.1 Expression générale :

L'état des contraintes en un point M du stratifié s'exprime en fonction du champ des déformations par la relation (I.10). Si le point M appartient à la couche k du stratifié, le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (I.11)$$

où C_{ij} sont les coefficients de rigidité de la couche k .

Dans le cas général, le champ des déformations est donné par les expressions (I.9). La théorie des plaques a pour objectif de simplifier le problème à trois dimensions (x,y,z) en un problème à deux dimensions (x,y) . La réduction du problème est obtenue par intégration des contraintes suivant l'épaisseur. Cette intégration conduit à introduire les résultantes et moments qui seront calculer par la suite [5].

5.2 Théorie simplifiée des plaques :

La théorie élémentaire des plaques fait l'hypothèse que les contraintes normales σ_{zz} sont négligeables dans le volume de la plaque par rapport aux autres composantes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} . Cette hypothèse est étendue à la théorie des stratifiés, soit :

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (I.12)$$

Avec l'hypothèse précédente, la relation (I.12) contraintes-déformations s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (I.13)$$

Cette relation peut être réécrite en séparant les contraintes et déformations de cisaillement transverse suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{16} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{26} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{36} & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{66} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (I.14)$$

L'état des contraintes σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} et des déformations ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} , γ_{xy} correspond à l'état de contraintes planes. Les contraintes dans une couche k s'expriment à l'aide des coefficients de rigidité Q_{ij} suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (I.15)$$

avec :

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{1}{C_{33}} (C_{13} \varepsilon_{xx} + C_{23} \varepsilon_{yy} + C_{36} \gamma_{xy})$$

Les coefficients Q_{ij} de la matrice de rigidité réduite de la couche k seront introduits après. Par la suite, ils seront notés suivant des notations Q_{ij}^k . La discontinuité de la matrice de rigidité, d'une couche à l'autre implique la discontinuité des contraintes, au passage d'une couche à l'autre [4].

6. RÉSULTANTES ET MOMENTS :

6.1 Résultante en membrane :

Le champ des résultantes en membrane, noté $N(x,y)$, est défini par :

$$N(x,y) = \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_k(M) dz \quad (I.16)$$

où $\sigma_k(M)$ est la matrice des contraintes en membrane σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} dans la couche k , soit :

$$N(x,y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-b/2}^{b/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (I.17)$$

N_x , N_y et N_{xy} sont les résultantes, par unité de longueur, respectivement des contraintes normales (suivant x et suivant y) et des contraintes de cisaillement, dans le plan (x,y) . Elles sont schématisées symboliquement sur la figure (I.7).

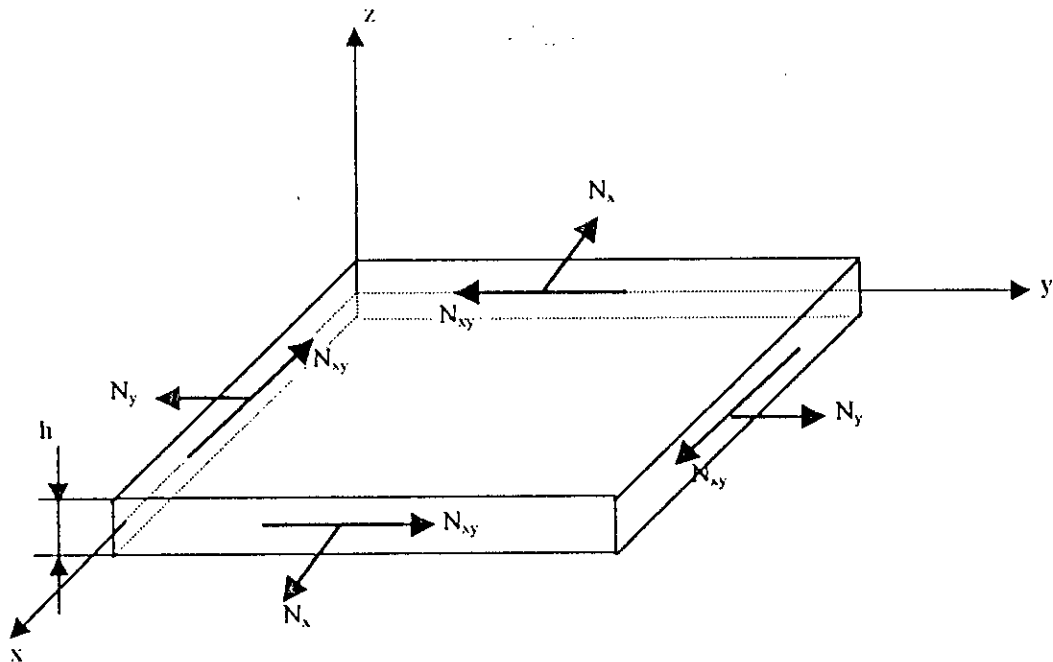


Fig.I.7 Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié

Il faut bien noter que ces résultantes sont relatives à l'unité de longueur de section droite du stratifié. Ceci signifie que, par exemple, la résultante de l'action exercée sur un élément de surface normal à la direction \hat{i} et de longueur dy (Fig. I.7) est la superposition de :

- La résultante normale $dR_x = N_x dy$
- La résultante de cisaillement $dR_{xy} = N_{xy} dy$

$$(I.18)$$

La discontinuité des contraintes en passant d'une couche à l'autre conduit à réécrire la relation (I.17) sous la forme :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (I.19)$$

6.2 Résultant en flexion :

Le champ des Moments de flexion et de torsion noté $M_f(x, y)$ est définis par :

$$M(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\kappa} (M) z dz \quad (I.20)$$

où $\sigma_{\kappa} (M)$ est la matrice des contraintes en membrane $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ dans la couche k , soit :

$$M_f(x,y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^k z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (I.21)$$

M_x et M_y sont les moments de flexion et M_{xy} représente le moment de torsion. Ils sont schématisés sur la figure suivante :

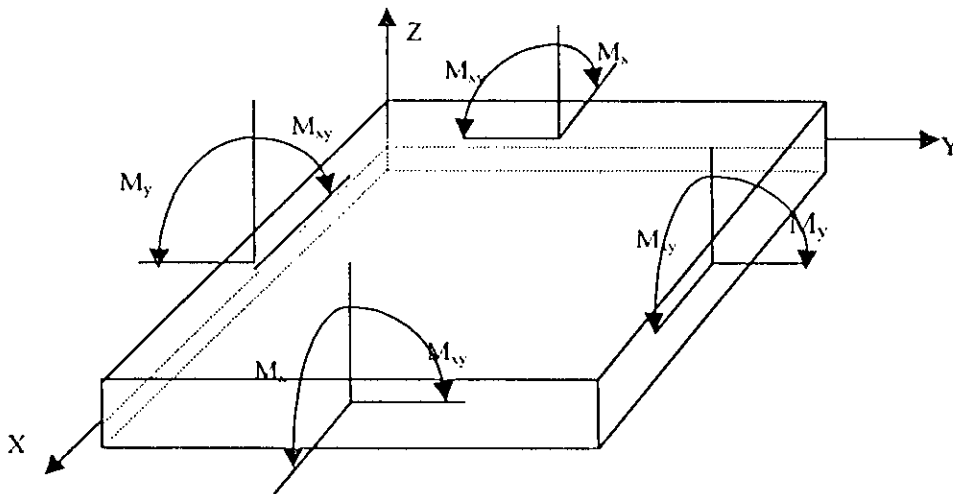


Fig.I.8 Schématisation des moments de flexion et de torsion

Chapitre II

LE COMPORTEMENT ELASTIQUE
D'UN MATERIAU COMPOSITE
ORTHOTROPE

1. LOI DE HOOKE POUR UN COMPOSITE ORTHOTROPE :

1.1 Composite orthotrope :

Les stratifiés sont constitués de couches de matériaux composites unidirectionnels ou de composite à base de tissu. Ces couches possèdent trois plans de symétrie orthogonaux deux à deux, et se comportent de point de vue élastique comme un matériau orthotrope. La direction parallèle aux fibres sera notée par 1 (ou L), c'est la direction chaîne et celle perpendiculaire aux fibres (direction trame) est notée par 2 (ou T).

La direction orthogonale au plan de la couche sera également notée par 3 (ou T').

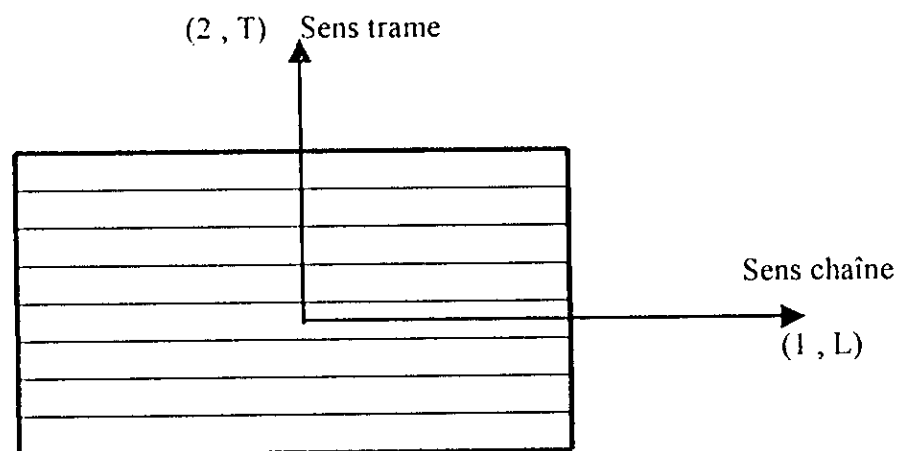


Fig. II.1 matériau composite orthotrope

1.2 Matrices de rigidité et de souplesse :

Les matrices de rigidité C_{ij} et de souplesse S_{ij} décrivent le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope. La loi de Hooke s'écrit suivant l'une des formes matricielles :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

ou

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (II.2)$$

Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope est donc caractérisé par 9 coefficients indépendants :

$C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{22}, C_{23}, C_{33}, C_{44}, C_{55}, C_{66}$ ou $S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{22}, S_{23}, S_{33}, S_{44}, S_{55}, S_{66}$

Les matrices de rigidité et de souplesse étant inverses l'une de l'autre, nous avons :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{22} S_{23} - S_{23}^2}{\Delta S} & C_{12} &= \frac{S_{13} S_{23} - S_{12} S_{33}}{\Delta S} \\ C_{22} &= \frac{S_{33} S_{11} - S_{13}^2}{\Delta S} & C_{13} &= \frac{S_{12} S_{23} - S_{13} S_{22}}{\Delta S} \\ C_{33} &= \frac{S_{11} S_{22} - S_{12}^2}{\Delta S} & C_{23} &= \frac{S_{12} S_{13} - S_{23} S_{11}}{\Delta S} \\ C_{44} &= \frac{1}{S_{44}} & C_{55} &= \frac{1}{S_{55}} & C_{66} &= \frac{1}{S_{66}} \end{aligned} \quad (II.3)$$

avec :

$$\Delta S = S_{11} S_{22} S_{33} - S_{11} S_{23}^2 - S_{22} S_{13}^2 - S_{33} S_{12}^2 + 2 S_{12} S_{23} S_{13}$$

Les relations inverses donnant les coefficients de souplesse, en fonction des coefficients de rigidité sont obtenus en intervertissant les rôles de C_{ij} et S_{ij} .

Le composite unidirectionnel est un cas particulier de matériau orthotrope dit *orthotrope de révolution*, pour lequel :

$$\begin{aligned} \{ C_{13} = C_{12} ; C_{44} = \frac{1}{2} (C_{22} - C_{23}) ; C_{33} = C_{22} ; C_{55} = C_{66} \} \\ \{ S_{13} = S_{12} ; S_{44} = 2 (S_{22} - S_{23}) ; S_{33} = S_{22} ; S_{55} = S_{66} \} \end{aligned} \quad (II.4)$$

2 Modules de l'ingénieur :

Les modules usuels de l'ingénieur (module d'Young, coefficients de Poisson, modules de cisaillement) s'expriment simplement en fonction des coefficients de souplesse.

le calcul des modules de l'ingénieur est représenté dans l'annexe B

Conclusion :

La relation d'élasticité (II.2) s'écrit, en introduisant les modules de l'ingénieur, sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope peut être décrit par les 9 modules indépendants :

- 3 modules de Young : E_1, E_2, E_3 (E_L, E_T, E_T).
- 3 coefficients de Poisson : $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ ($\nu_{LT}, \nu_{LT}, \nu_{TT}$).
- 3 modules de cisaillement : G_{12}, G_{13}, G_{23} (G_{LT}, G_{LT}, G_{TT}).

Les trois autres coefficients de Poisson sont déterminés à l'aide de la relation (B.12) (voir annexe B).

3. Expression des constantes de rigidité et de souplesse en fonction des modules de l'ingénieur :

3.1 Constantes de souplesse :

Les expressions des constantes de souplesse s'obtiennent à partir des expressions établies précédemment, soit :

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{1}{E_1} & S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} & S_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \\
 S_{22} &= \frac{1}{E_2} & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2} & S_{33} &= \frac{1}{E_3} \\
 S_{44} &= \frac{1}{G_{23}} & S_{55} &= \frac{1}{G_{13}} & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}}
 \end{aligned} \tag{II.6}$$

3.2 Constantes de rigidité :

Les expressions des constantes de rigidité, en fonction des modules de l'ingénieur s'obtiennent à partir des relations (II.3) et (B.10) (voir annexe B), soit :

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23} \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31} \nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32} \nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta} \\
 C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21} \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} & C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13} \nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \\
 C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12} \nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21} \nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} & C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\
 C_{44} &= G_{23} & C_{55} &= G_{13} & C_{66} &= G_{12}
 \end{aligned} \tag{II.7}$$

avec :

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2 \nu_{21} \nu_{32} \nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

3.3 Restriction sur les coefficients d'élasticité :

Si une seule contrainte, suivant un axe principal, est appliquée au matériau, la déformation suivant cette direction est de même signe que la contrainte. Il en résulte que :

$$S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{44}, S_{55}, S_{66} > 0 \tag{II.8}$$

ou en terme des modules de l'ingénieur :

$$E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{13}, G_{12} > 0 \tag{II.9}$$

De même, si on impose au matériau une seule déformation suivant un axe principal, la contrainte qui en résulte dans cette direction a le même signe que la déformation imposée. Il en résulte que :

$$C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{44}, C_{55}, C_{66} > 0 \quad (\text{II.10})$$

compte tenu de (II.9) :

$$1 - \nu_{23} \nu_{32}, 1 - \nu_{13} \nu_{31}, 1 - \nu_{12} \nu_{21} > 0 \quad (\text{II.11})$$

et

$$1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2 \nu_{21} \nu_{32} \nu_{13} > 0 \quad (\text{II.12})$$

Puisque la matrice S est définie positivement (déterminant positif), le travail thermodynamique étant positif. Cette même propriété associée aux relations (B.13), (voir annexe B) implique également :

$$\begin{aligned} |S_{23}| &< \sqrt{S_{22} S_{33}} \\ |S_{13}| &< \sqrt{S_{11} S_{33}} \\ |S_{12}| &< \sqrt{S_{11} S_{22}} \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

En utilisant les relations de symétrie (B.12), (voir annexe B), les conditions (II.11) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} |\nu_{21}| &< \sqrt{E_2/E_1} & |\nu_{12}| &< \sqrt{E_1/E_2} \\ |\nu_{32}| &< \sqrt{E_3/E_2} & |\nu_{23}| &< \sqrt{E_2/E_3} \\ |\nu_{13}| &< \sqrt{E_1/E_3} & |\nu_{31}| &< \sqrt{E_3/E_1} \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

En reportant les relations de symétrie dans la condition (II.12), nous obtenons :

$$2 \nu_{21} \nu_{32} \nu_{13} < 1 - \nu_{21}^2 \frac{E_1}{E_2} - \nu_{32}^2 \frac{E_2}{E_3} - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1} < 1 \quad (\text{II.15})$$

Les deux dernières conditions peuvent être regroupées pour obtenir :

$$\left(1 - \nu_{32}^2 \frac{E_2}{E_3}\right) \left(1 - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1}\right) - \left(\nu_{21} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} + \nu_{32} \nu_{13} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}\right)^2 > 0 \quad (II.16)$$

la condition précédente peut être réarrangée de manière à obtenir des bornes sur le coefficient de Poisson ν_{21} :

$$-\left[\nu_{32} \nu_{13} \frac{E_2}{E_1} + \left(1 - \nu_{32}^2 \frac{E_2}{E_3}\right)^{1/2} \left(1 - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}\right]$$

$$-\left[\nu_{32} \nu_{13} \frac{E_2}{E_1} - \left(1 - \nu_{32}^2 \frac{E_2}{E_3}\right)^{1/2} \left(1 - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}\right] \quad (II.17)$$

4. COMPORTEMENT ANISOTROPE À DEUX DIMENSIONS :

4.1 Plaque orthotrope rapportée à ses axes principaux :

Pour une plaque orthotrope d'épaisseur e dont les axes principaux (L,T) sont confondus avec les axes de référence (x,y), la matrice de rigidité réduite s'écrit :

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

avec :

$$Q_{11} = \frac{E_L}{\left(1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}\right)} ; \quad Q_{12} = \frac{\nu_{LT} E_T}{\left(1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}\right)} \quad (II.18)$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} ; \quad Q_{66} = G_{LT}$$

où les coefficients de rigidité sont données par:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= Q_{11} e & D_{11} &= Q_{11} \frac{e^3}{12} \\
 A_{12} &= Q_{12} e & D_{12} &= Q_{12} \frac{e^3}{12} \\
 A_{22} &= Q_{22} e & D_{22} &= Q_{22} \frac{e^3}{12} \\
 B_{ij} &= 0 \\
 A_{16} &= A_{26} = 0 & D_{16} &= D_{26} = 0 \\
 A_{66} &= Q_{66} e & D_{66} &= Q_{66} \frac{e^3}{12}
 \end{aligned}$$

Avec :

$$D_{ij} = A_{ij} \frac{e^2}{12}$$

L'équation constitutive de la plaque s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

Comme dans le cas d'un matériau isotrope, les résultantes en membrane ne dépendent que des déformations en membrane et les moments ne dépendent que des courbures.

4.2 Plaque orthotrope non rapportée à ses axes principaux :

Dans le cas où les axes principaux de la couche orthotrope ne coïncideraient pas avec les axes de référence des contraintes (voir Fig II.2), la matrice de rigidité réduite s'écrit :

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

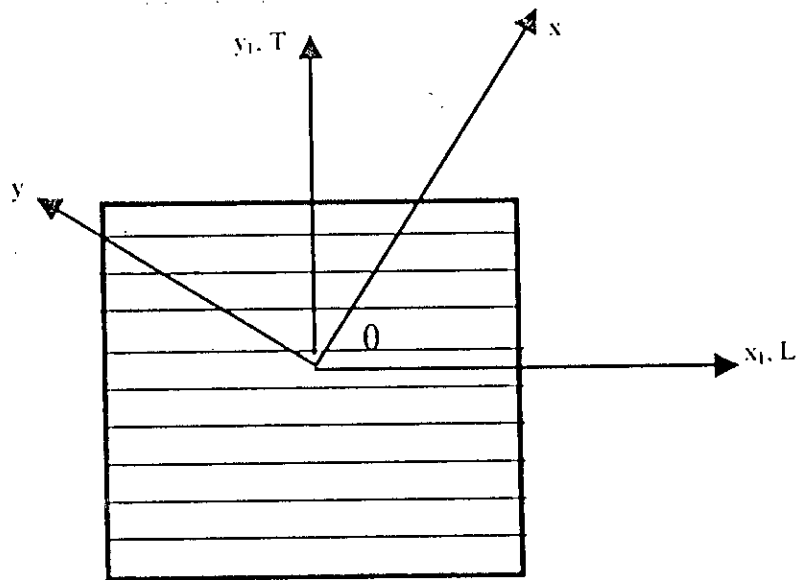


Fig.II.2 Rotation des axes de référence par rapport aux axes principaux

Déterminons les relations reliant les coefficients \bar{Q}_{ij} aux coefficients Q_{ij} . Adoptons comme notation des axes principaux (x_1, y_1) au lieu de (L, T) pour faciliter l'écriture matricielle, on aura :

$$[\sigma_1] = [Q][\epsilon_1] \quad (\text{II.21})$$

On exprime les relations contraintes-déformations dans un système d'axes (x, y) faisant un angle θ avec les axes principaux (x_1, y_1) de la manière suivante :

$$[\sigma_x] = [\bar{Q}][\epsilon_x] \quad (\text{II.22})$$

avec :

$$[\sigma_x] = [T_\sigma]^{-1}[\sigma_1] \quad (\text{II.23})$$

où :

$[T_\sigma]$ est la matrice de passage du repère (x_1, y_1, z_1) au repère (x, y, z_1) . Elle est définie comme suit :

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

avec :

$$\begin{cases} c = \cos(\theta) \\ s = \sin(\theta) \end{cases}$$

comme :

$$[\sigma_1] = [Q] [\varepsilon_1] \tag{II.25}$$

on aura :

$$[\sigma_x] = [T_\sigma]^{-1} [Q] [\varepsilon_1] \tag{II.26}$$

et puisque :

$$[\varepsilon_1] = [T_\sigma] [\varepsilon_x] \tag{II.27}$$

on obtiendra :

$$[\sigma_x] = [T_\sigma]^{-1} [Q] [T_\sigma] [\varepsilon_x] \tag{II.28}$$

Par identification entre (II.28) et (II.26) on aura :

$$[\bar{Q}] = [T_\sigma]^{-1} [Q] [T_\sigma] \tag{II.29}$$

Finalemment :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} c^4 + 2(Q_{12} + Q_{66}) s^2 c^2 + Q_{22} s^4 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} + 4Q_{66}) s^2 c^2 + Q_{12} (s^4 + c^4) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) s^2 c^2 + Q_{22} c^4 \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) s c^3 + (Q_{12} + Q_{22} + 2Q_{66}) s^3 c \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) s^3 c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) s c^3 \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) s^2 c^2 + Q_{66} (s^4 + c^4) \end{aligned} \tag{II.30}$$

Cas particuliers :

$$\text{Pour } \theta = 0^\circ \quad [\bar{Q}] = [Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.31})$$

$$\text{Pour } \theta = 90^\circ \quad [\bar{Q}] = \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

4.2.1 Variation des modules technologiques en fonction de l'angle θ :

Les modules technologiques sont les constantes pratiques qu'utilise usuellement un ingénieur pour décrire le comportement mécanique d'un matériau. Ces modules sont déterminés dans des essais particuliers ; ils varient suivant l'angle θ . Leurs nouvelles expressions sont données par :

$$\begin{aligned} E_x(\theta) &= 1 / \left(\frac{c^4}{E_L} + \frac{s^4}{E_T} + c^2 s^2 \left(\frac{1}{G_{LT}} - 2 \frac{\nu_{LT}}{E_T} \right) \right) \\ E_y(\theta) &= 1 / \left(\frac{s^4}{E_L} + \frac{c^4}{E_T} + c^2 s^2 \left(\frac{1}{G_{LT}} - 2 \frac{\nu_{LT}}{E_T} \right) \right) \\ G_{xy}(\theta) &= 1 / \left(4c^2 s^2 \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} + 2 \frac{\nu_{LT}}{E_T} \right) + \frac{(c^2 - s^2)^2}{G_{LT}} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

$$\frac{\nu_{yx}(\theta)}{E_y} = \frac{\nu_{TL}}{E_T} (c^4 + s^4) - c^2 s^2 \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}} \right)$$

Cas particuliers :

$$\text{Pour } \theta = 0^\circ \quad \begin{cases} E_x = E_L \\ E_y = E_T \\ G_{xy} = G_{LT} \\ \frac{\nu_{yx}}{E_y} = \frac{\nu_{TL}}{E_T} \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

$$\text{Pour } \theta = 90^\circ \quad \begin{cases} E_x = E_t \\ E_y = E_l \\ G_{xy} = G_{lr} \\ \frac{\nu_{yx}}{E_y} = \frac{\nu_{tl}}{E_t} \end{cases} \quad (II.35)$$

Les formulations des modules technologiques en fonction de l'angle θ permettent une programmation plus lucide que l'utilisation de la matrice $[\bar{Q}]$.

Chapitre III

THEORIES CLASSIQUES
DES STRATIFIÉS

1 CHAMP DES DÉFORMATIONS :

1.1 Hypothèses de la théorie classique des stratifiés :

La théorie classique des stratifiés utilise un schéma de déplacement du premier degré. Elle fait ensuite une hypothèse supplémentaire qui consiste à négliger le cisaillement transverse. Dans ce schéma, les déformations en cisaillement transverse sont nulles, soit :

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = 0 \quad (\text{III.1})$$

Cette hypothèse implique d'après (1.9) :

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \varphi_y(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Le champ des déplacements s'écrit alors:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

La déformée de la normale au plan moyen (Oxy) est alors un segment de droite à la déformée du plan moyen (paragraphe 1.1.2 et Fig.1.2)

1.2 Expression du champ des déformations :

Le champ des déformations s'écrit, d'après (1.9) en tenant compte de (III.2) :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \epsilon_{zz} &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{xz} &= 0 \\ \gamma_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Le tenseur des déformations en un point M est :

$$\epsilon(M) = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.5})$$

et la matrice des déformations se réduit à trois composantes non nulles :

$$\epsilon(M) = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.6})$$

Le champ des déformations est la superposition :

♦ des déformations en membrane :

$$\epsilon_m(M) = \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon_{xx} \\ 0 \\ \epsilon_{yy} \\ 0 \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{c}u_0}{\hat{c}x} \\ \frac{\hat{c}v_0}{\hat{c}y} \\ \frac{\hat{c}u_0}{\hat{c}y} + \frac{\hat{c}v_0}{\hat{c}x} \end{bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

♦ des déformations en flexion :

$$\epsilon_f(M) = \begin{bmatrix} f \\ \epsilon_{xx} \\ f \\ \epsilon_{yy} \\ f \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

Les déformations en flexion et torsion s'expriment suivant la relation :

$$\epsilon_f(m) = z \kappa(x,y) \quad (\text{III.9})$$

En posant :

$$\kappa(x,y) = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

La matrice $\kappa(x,y)$ est appelée **matrice des courbures** de la plaque sollicitée en flexion.

Les angles de rotation de la déformée du plan moyen au point H(x,y,0) s'expriment en fonction du déplacement transversal $w_0(x,y)$ de ce point par :

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{\partial v_0}{\partial y} \quad \text{suivant la direction } \vec{i} \\ \theta_y &= \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \text{suivant la direction } \vec{j} \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Le champ de déplacement, s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) - z \theta_y \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) - z \theta_x \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

en fin, le champ des déformations s'écrit :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_m(M) + \varepsilon_f(M) \quad (\text{III.13})$$

ou :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \varepsilon^0_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon^0_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x}(x,y) & \varepsilon^0_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y}(x,y) & \gamma^0_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x,y) & \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x,y) & \kappa_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}(x,y) \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Sous forme abrégée, le champ des déformations s'écrit donc :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon(x,y,z) = \varepsilon_m(x,y) + z \kappa(x,y) \quad (\text{III.16})$$

Les fonctions $\varepsilon_m(x,y)$ et $\kappa(x,y)$ ne dépendent que des coordonnées (x,y) du point H du plan moyen du stratifié.

2 CHAMP DES CONTRAINTES :

2.1 Forme du champ des contraintes :

Le champ des contraintes est obtenu à l'aide de la relation (I.15). Nous obtenons, pour la couche k :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= Q_{11} \varepsilon_{xx} + Q_{12} \varepsilon_{yy} + Q_{16} \gamma_{xy} \\ \sigma_{yy} &= Q_{12} \varepsilon_{xx} + Q_{22} \varepsilon_{yy} + Q_{26} \gamma_{xy} \\ \sigma_{xy} &= Q_{16} \varepsilon_{xx} + Q_{26} \varepsilon_{yy} + Q_{66} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

$$\sigma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{xy} = 0$$

Le tenseur de contrainte en M est donc de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

Le champ des contraintes se réduit aux seules contraintes en membrane : σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} .

2.2 Expression des contraintes :

Les relations (III.17) montrent que les contraintes dans la couche k s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = [Q_k] \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

Avec :

$$[Q_k] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}$$

Où $[Q_k]$ est la matrice de rigidité réduite de la couche K et dont les termes sont exprimés en fonction des modules par les relation (II.18). En tenant compte de (III.14), les contraintes dans la couche k s'expriment par:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \epsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

ou

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x,y,z) = \sigma_k \epsilon_m(x,y) + z Q_k K(x,y) \quad (\text{III.21})$$

$\sigma_k(M)$ représente la matrice des contraintes dans la couche k : $h_{k-1} \leq z \leq h_k$. La matrice de rigidité réduite Q_k varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes entre les couches successive.

3 EXPRESSION DES RÉSULTANTES ET MOMENTS :

3.1 Résultantes en membrane :

L'expression (I.17) associée à la relation (III.20) ou (III.21) conduit à l'expression des résultantes en membrane, Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 N(x, y) &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q_k \epsilon_m(x, y) + z Q_k \kappa(x, y)] dz \\
 N(x, y) &= \sum_{k=1}^n \left[Q_k \epsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] + \sum_{k=1}^n \left[Q_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \\
 N(x, y) &= \left[\sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q_k \right] \epsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q_k \right] \kappa(x, y)
 \end{aligned}$$

Soit:

$$N(x, y) = A \epsilon_m(x, y) + B \kappa(x, y) \quad (\text{III.22})$$

En introduisant les matrices :

$$[A] = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) [Q_k] \quad (\text{III.23})$$

avec :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (Q_{ij})_k$$

$$[B] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) [Q_k] \quad (\text{III.24})$$

avec :

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (Q_{ij})_k$$

L'expression développée des résultantes s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \epsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Ces équations montre que dans le cas d'un stratifié, les résultantes en membrane (N_x , N_y et N_{xy}) ne sont pas seulement fonction des déformations en membrane, (comme dans le cas des plaques homogènes), mais sont également fonctions des courbures en flexion et en torsion (κ_x , κ_y , κ_{xy}).

$(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy})$.

3.2 Résultantes en flexion :

Les moments de flexion et de torsion s'obtiennent en introduisant l'expression (III.21) dans l'expression (I.21) :

$$\begin{aligned} M_f(x, y) &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [z Q_k \varepsilon_m(x, y) + z^2 Q_k \kappa(x, y)] dz \\ M_f(x, y) &= \sum_{k=1}^n \left[z Q_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] + \sum_{k=1}^n \left[Q_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right] \\ M_f(x, y) &= \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q_k \right] \kappa(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

soit :

$$M(x, y) = [B] \varepsilon_m(x, y) + [D] \kappa(x, y) \quad (\text{III.27})$$

avec :

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q_{ij})_k \quad (\text{III.28})$$

L'expression développée des moments s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.29})$$

Les moment de flexion et de torsion sont donc fonction des courbures en flexion et en torsion, mais sont aussi fonction des déformation en membrane.

3.3 Équation constitutive :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{26} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

d'une manière simplifiée :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (\text{III.31})$$

$[A]$ est la matrice de rigidité en membrane

$[D]$ est la matrice de rigidité en flexion

$[B]$ est la matrice de couplage membrane-flexion

Divers couplage peuvent être observés et mis en évidence.

- ♦ Le couplage traction cisaillement résulte des termes A_{16}, A_{26}
- ♦ Le couplage membrane flexion résulte des termes B_{11}, B_{12} et B_{22}
- ♦ Le couplage membrane torsion résulte des termes B_{16}, B_{26}
- ♦ Le couplage flexion torsion résulte des termes D_{16}, D_{26} .

Ces couplages peuvent être simplifiés ou encore éliminés suivant la nature de l'empilement des couches du stratifié, ces simplifications seront l'objet du chapitre suivant

Chapitre IV

ÉTUDE DE QUELQUES FORMES
DE LA MATRICE
DE RIGIDITÉ

L'empilement des couches (nature des couches, orientation, séquence d'empilement) conditionnent la structure de la matrice de rigidité. Ce chapitre sera consacré à l'étude de cas particuliers de stratifiés pour lesquels la matrice de rigidité a une forme simplifiée. L'étude sera ensuite effectuée en suivant un nombre croissant de complexité. La réalisation des stratifiés est faite à partir des couches qui ont les mêmes caractéristiques, (même constituants, même configuration géométrique, même épaisseurs), Mais des orientations différentes, de leurs axes principaux par rapport aux axes de référence du stratifié. Une attention particulière sera donc porter sur ce type de matériau.

Dans ce chapitre nous allons présenter les matrices de rigidité, pour différents types de stratifiés.

1 CAS D'UN MONOCOUCHE :

1.1 Couche orthotrope rapportée à ses axes principaux :

Étant donnée une couche orthotrope, d'épaisseur e et dont les axes principaux sont confondus avec les axes de référence. La matrice de rigidité s'écrit :

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, Q_{22} = \frac{E_T}{E_T} Q_{11}, Q_{12} = \nu_{LT} Q_{22}, Q_{66} = G_{LT} \quad (\text{IV.1})$$

ou :

E_L : le module de Young longitudinal ;

E_T : le module de Young transversal ;

ν_{LT} : le coefficient de Poisson ;

G_{LT} : le module de cisaillement.

$$[A] = [Q] e \quad [D] = [Q] \frac{e^3}{12} \quad [B] = [0]$$

L'équation constitutive de la plaque s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

I.2 Couche orthotrope non rapportée à ses axes principaux :

la matrice de rigidité réduite s'écrit :

$$[Q'] = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.3})$$

où :

$$[Q'] = [T_\sigma]^{-1} [Q] [T_\sigma]$$

avec :

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & -\sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (\text{IV.4})$$

$$A_y = Q'_y e \quad B_y = 0 \quad D_y = Q'_y \frac{e^3}{12} \quad (\text{IV.5})$$

L'équation constitutive de la plaque s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{22} \\ 0 & 0 & 0 & D_{26} & D_{22} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

nous constatons l'absence de couplage membrane-flexion/torsion,

nous observons l'existence de couplage traction-cisaillement, ainsi couplage flexion-torsion.

2 CAS D'UN STRATIFIÉ OU MULTICOUCHE:

On montre dans cette partie que dans la plupart des problèmes traités analytiquement, les termes de la matrice de rigidité deviennent les coefficients d'équation différentielle aux dérivées partielles. L'ordre et la forme de ces équations sont en partie liés au nombre d'éléments non nuls de cette matrice. Il est donc particulièrement instructif de montrer comment, et dans quelles limites, par une disposition intelligente des couches on peut annuler le plus grand nombre de ces éléments.

Un stratifié est dit symétrique si le plan moyen est plan de symétrie

Deux couches symétriques ont :

- la même épaisseur ;
- la même matrice de rigidité réduite ;
- de cotes opposées.

Il en résulte que les coefficients B_{ij} sont nuls.

Un stratifié est dit équilibré s'il comporte autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de couches orientées suivant la direction $-\theta$.

2.1 Multicouche équilibré, symétrique :

Un stratifié équilibré-symétrique est caractérisé par un nombre pair de, de même nature, ayant la même épaisseur et les couches de cotes opposées de même orientation.

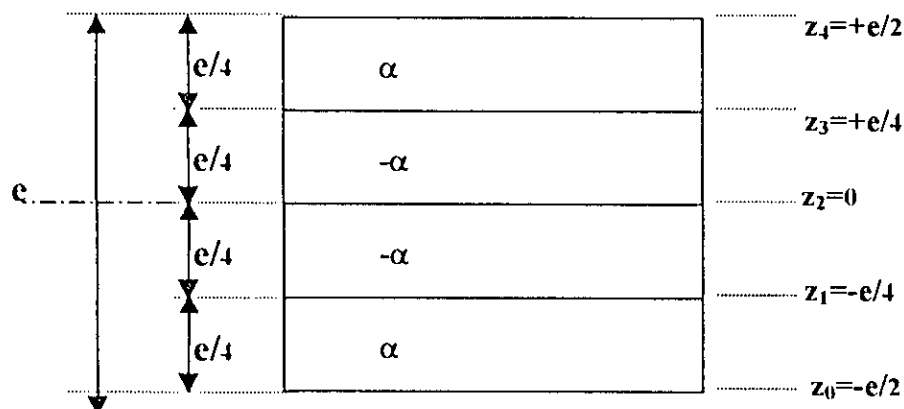


Fig.IV.1 stratifié équilibré-symétrique

La matrice de rigidité est de la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (IV.7)$$

On remarque qu'il n'y a que le couplage flexion-torsion.

2.2 Multicouche non équilibré, symétrique :

Il est caractérisé par un nombre impair de couches de même nature, même épaisseur et les couches de cotes opposée de même orientation.

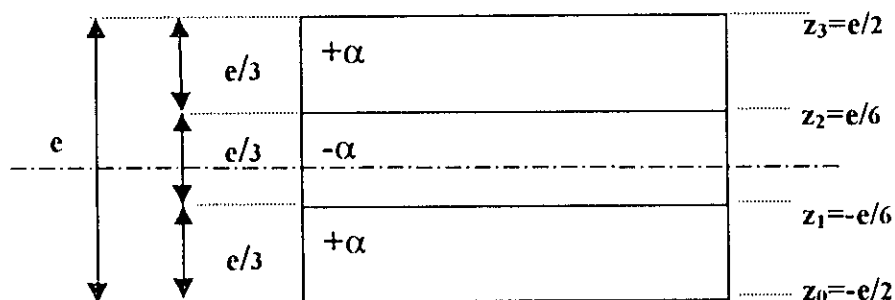


Fig.IV.2 stratifié non équilibré-symétrique

La matrice de rigidité est de la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ A_{26} & A_{22} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{22} \\ 0 & 0 & 0 & D_{26} & D_{22} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (IV.8)$$

Il existe deux couplages : traction-cisaillement et flexion-torsion.

2.3 Multicouche équilibré, non symétrique (antisymétrique):

Les stratifiés symétriques sont utilisés afin d'éliminer le couplage entre membrane et flexion, par contre, certaines applications nécessitent l'utilisation de stratifiés non symétriques. Par exemple, le couplage membrane-flexion est nécessaire dans la conception de turbine à ailettes ayant un profil gauche. Également, dans le cas où une meilleure rigidité en cisaillement est recherchée, il est nécessaire d'avoir des couches possédant différentes orientations.

Un stratifié antisymétrique est constitué de couches en nombre pair dont la répartition des épaisseurs est symétrique et celle des orientations des axes antisymétriques par rapport au plan moyen. Deux couches de cotes symétriques ont donc :

- ◆ des cotes opposées ;
- ◆ la même épaisseur ;
- ◆ des orientations θ et $-\theta$ par rapport aux axes de référence du stratifié.

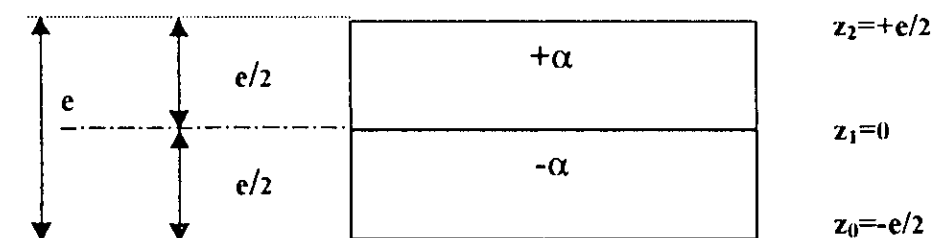


Fig. IV.3 stratifié équilibré-non symétrique

La matrice de rigidité est de la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & 0 \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

On remarque qu'il existe uniquement le couplage membrane-torsion.

2.4 Multicouche non équilibré et non symétrique :

Les couches de nombre impair sont de même nature et ont la même épaisseur. Deux couches symétriques ont des orientations différentes.

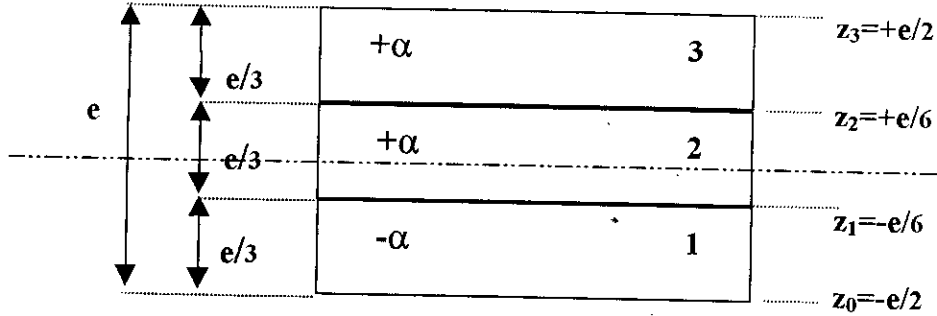


Fig.IV.4 stratifié non équilibré-non symétrique

La matrice de rigidité est de la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & -B_{16} & B_{26} & 0 \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

on remarque l'absence du couplage membrane-flexion et flexion-torsion

Ces divers cas présentés sont basés sur des configurations de multicouche très simple permettant de comprendre l'influence de la position des couches les unes par rapport aux autres sur la forme de la matrice de rigidité, ainsi que sur le comportement élastique du matériau.

Malheureusement ces exemples représentent des cas particuliers où certains termes de la matrice de rigidité deviennent nuls, alors qu'une configuration plus générale du multicouche ayant la même dénomination ne conduit pas à des valeurs nulles pour ces mêmes termes.

C'est le cas du multicouche non équilibré non symétrique où pour le cas particulier les termes $B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{33}$ sont nuls, alors qu'ils peuvent prendre des valeurs quelconques dans le cas général.

2.5 Forme générale de la matrice de rigidité :

Multicouche équilibré, symétrique

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

Multicouche non équilibré, symétrique :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ A_{26} & A_{22} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{22} \\ 0 & 0 & 0 & D_{26} & D_{22} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

Multicouche équilibré, non symétrique :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{26} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

Multicouche non équilibré, non symétrique :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{26} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

Multicouche orthogonal, symétrique :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

Multicouche orthogonal, non symétrique :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

Chapitre V

CRITERES DE RUPTURE

1 GÉNÉRALITÉS :

les chapitres précédents ont pour objectif d'établir des relations entre déformations et contraintes pour des multicouches constitués par un empilement quelconque de couches.

L'étape suivante consiste à déterminer la résistance mécanique du multicouche dans son ensemble. Cette évaluation passe obligatoirement par une connaissance la plus précise possible du comportement à la rupture du monocouche. Il apparaît important de bien distinguer l'état de contrainte limite de la limite de fissuration dont les publications récentes font de plus en plus souvent état.

La définition de l'état de contrainte limite donné par Feodosiev [3], est à retenir :
« état tel qu'il y a variation qualitative des propriétés du matériau, passage d'un état mécanique à un autre ».

Pour le monocouche, un tel état correspond à la rupture réelle du matériau.

La définition de la limite de fissuration est plus délicate car elle ne correspond pas à un état physique facilement décelable :

« la limite de fissuration est l'état de contrainte créant des dégradations irréversible, telles que fissuration de la matrice ou décohésion fibre/matrice, restant localisées et ne modifiant pas le comportement statique à tout terme ultérieur du matériau . »

Tous les développements qui vont suivre s'appliquent à l'état de contrainte limite.

L'objet de ce chapitre consiste donc à exposer les méthodes de calcul permettant la détermination de cet état de contrainte limite et de préciser les éléments nécessaires au calcul, c'est à dire contrainte à la rupture du monocouche suivant les axes d'orthotropie. Ces développements sont désignés sous le nom de critère de rupture...

2 DÉFINITION DES CRITÈRES DE RUPTURE : [6]

Connaissant un état de contrainte σ (resp. ε), on cherche à réaliser une condition du type :

$$f(\sigma) \text{ (resp. } g(\varepsilon)) \leq 1$$

$f(\sigma)$: fonction scalaire du tenseur des contraintes.

Il existe, cependant, de nombreuses expressions de cette fonction, les plus connues étant celle de Hill, Tsai-wu, Hoffman, contrainte maximale.

Remarque : le critère de Hill est une généralisation de Von Mises réservé aux matériaux homogènes et isotropes.

Les critères de rupture ont pour objectif de permettre au concepteur d'avoir une évaluation de la résistance mécanique des stratifiés. En général, la résistance mécanique d'un matériau correspond à une dégradation irréversible : soit à la rupture réelle des matériaux, soit à la limite du domaine d'élasticité.

3 CRITÈRE DE LA CONTRAINTE MAXIMALE :

Le critère de la contrainte maximale fait intervenir :

- X_t, X_c : les contraintes à la rupture suivant l'axe longitudinal respectivement en traction et en compression,
- Y_t, Y_c : les contraintes à la rupture suivant l'axe transversal respectivement en traction et en compression,

S : la contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche où les axes longitudinal

et transversal sont les axes principaux de la couche.

Dans le cas d'une couche soumise à un état de contraintes planes ($\sigma_l, \sigma_t, \sigma_{lt}$) dans les axes principaux, le critère de la contrainte maximale stipule que :

la résistance mécanique de la couche est atteinte lorsque l'une des trois contraintes auxquelles la couche est soumise atteint la valeur de la contrainte à la rupture correspondante.

Le critère de la contrainte maximale s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} X_c < \sigma_{ll} < X_t \\ Y_c < \sigma_{tt} < Y_t \\ -S < \sigma_{lt} < S \end{aligned} \quad (V.1)$$

Si les six inéquations sont vérifiées, l'état de contraintes limite n'est pas atteint : la rupture de la couche ne se produit pas. Par contre si l'une quelconque des inéquations n'est plus vérifiée, l'état limite est atteint : la rupture se produit suivant le mécanisme correspondant à la contrainte de l'inéquation non vérifiée.

4 CRITÈRE DE LA DÉFORMATION MAXIMALE :

Le critère de la déformation maximale fait introduire :

X_{ec}, X_{et} : la déformation à la rupture respectivement en compression et en traction suivant l'axe longitudinal,

Y_{ec}, Y_{et} : la déformation à la rupture respectivement en compression et en traction suivant l'axe transversal,

S_e : la déformation à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche.

Ce critère s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} X_{ec} < \varepsilon_l < X_{et} \\ Y_{ec} < \varepsilon_t < Y_{et} \\ -S_e < \varepsilon_{lt} < S_e \end{aligned} \quad (V.2)$$

soit :

$$X_{ec} = X_c / E_l, \quad X_{et} = X_t / E_l, \quad Y_{ec} = Y_c / E_t, \quad Y_{et} = Y_t / E_t, \quad S_e = S / G_{lt} \quad (V.3)$$

5 CRITÈRES INTERACTIFS :

Les critères de la contrainte maximale et de la déformation maximale ne permettent pas de rendre compte des résultats expérimentaux. D'autre part, ces critères excluent l'existence d'interaction entre les contraintes et déformations principales: les mécanismes de rupture longitudinale, transversale ou en cisaillement sont supposés se produire indépendamment.

Des critères interactifs ont été alors recherchés en étendant aux matériaux orthotropes le critère de Von Mises utilisé pour les matériaux isotropes et homogènes. Le critère de Von Mises est relié à l'énergie de déformation emmagasinée par unité de volume du matériau déformé. C'est la raison pour laquelle ces critères interactifs sont appelés critères

énergétiques. Toutefois, dans le cas de matériaux orthotropes, ces critères ne sont plus reliés exclusivement à l'énergie de déformation.

5.1 Critère de Hill :

Ce critère est appliqué aux matériaux anisotropes et peut être formulé en disant que l'état limite de contrainte d'un matériau anisotrope n'est pas atteint tant que l'inégalité suivante est vérifiée :

$$F(\sigma_i - \sigma_j)^2 + G(\sigma_r - \sigma_l)^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2L\sigma_{ii}^2 + 2M\sigma_{ii'}^2 + 2N\sigma_{ii''}^2 < 1 \quad (V.4)$$

Cette inégalité constitue le critère de Hill rapporté aux axes principaux (L, T, T') du matériau. Il peut également être écrit sous la forme suivante :

$$F(\sigma_r - \sigma_l)^2 + G(\sigma_r - \sigma_l)^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2L\sigma_{ii}^2 + 2M\sigma_{ii'}^2 + 2M\sigma_{ii''}^2 < 1 \quad (V.5)$$

La rupture du matériau se produit donc lorsque les deux membres de cette inégalité sont égaux.

Dans le cas d'un essai de traction ou de compression dans la direction L, le critère de Hill se réduit à :

$$\begin{aligned} G + H &= \frac{1}{X^2} \\ F + H &= \frac{1}{Y^2} \\ F + G &= \frac{1}{Z^2} \\ 2N &= \frac{1}{S_{LT}^2} \\ 2M &= \frac{1}{S_{LT'}^2} \\ 2L &= \frac{1}{S_{ii}^2} \end{aligned} \quad (V.6)$$

avec :

- X : la contrainte à la rupture en traction (ou compression) dans la direction L
- Y, Z : sont les contraintes à la rupture en traction (ou compression) dans les direction T et T' respectivement ;
- S_{ii} : la contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan (L, T),
- $S_{ii'}$: la contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan (L, T'),
- $S_{ii''}$: la contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan (T, T').

On a aussi pour un état de contraintes planes dans le plan (L, T) de la couche.

$$\sigma_i = \sigma_{ii'} = \sigma_{ii''} = 0 \quad (V.7)$$

ainsi le critère de Hill se réduit à :

$$\left(\frac{\sigma_t}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_c}{Y}\right)^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_t\sigma_c + \left(\frac{\sigma_{tt}}{S_{tt}}\right) = 1 \quad (\text{V.8})$$

5.2 Critère de Tsai-Hill :

Le critère de rupture précédent a été simplifié dans le cas d'un matériau composite unidimensionnel par V.D. Azzi et S.W. Tsai [8]. En effet, dans le cas : $Z=Y$, il devient :

$$\left(\frac{\sigma_t}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_c}{Y}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_t\sigma_c}{X^2}\right) + \left(\frac{\sigma_{tt}}{S_{tt}}\right)^2 = 1 \quad (\text{V.9})$$

5.3 Critère de Hoffman :

Une généralisation du critère de Hill, tenant compte de la différence du comportement des matériaux en traction et en compression, a été formulée par O. Hoffman [7]. ce critère admet que la rupture du matériau se produit lorsque l'égalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} C_1(\sigma_t - \sigma_c)^2 + C_2(\sigma_c - \sigma_t)^2 + C_3(\sigma_t - \sigma_c)^2 + \\ C_4\sigma_t + C_5\sigma_c + C_6\sigma_c^2 + C_7\sigma_{tt}^2 + C_8\sigma_{tt}^2 + C_9\sigma_{tt}^2 = 1 \end{aligned} \quad (\text{V.10})$$

les constantes $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9$ sont les caractéristiques du matériau et sont reliées aux contraintes à la rupture du matériau par les équations :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Y_t Y_c} + \frac{1}{Z_t Z_c} - \frac{1}{X_t X_c} \right) \\ C_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Z_t Z_c} - \frac{1}{Y_t Y_c} + \frac{1}{X_t X_c} \right) \\ C_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Y_t Y_c} + \frac{1}{X_t X_c} - \frac{1}{Z_t Z_c} \right) \\ C_4 &= \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} & C_7 &= \frac{1}{S_{tt}^2} \\ C_5 &= \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} & C_8 &= \frac{1}{S_{tt}^2} \\ C_6 &= \frac{1}{Z_t} - \frac{1}{Z_c} & C_9 &= \frac{1}{S_{tt}^2} \end{aligned} \quad (\text{V.11})$$

Dans le cas d'un état de contrainte planes dans le plan (L,T), le critère se réduit à :

$$\frac{\sigma_t^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_c^2}{Y_t Y_c} - \frac{\sigma_t \sigma_c}{X_t X_c} + \frac{X_c - X_t}{X_t X_c} \sigma_t + \frac{Y_c - Y_t}{Y_t Y_c} \sigma_c + \frac{\sigma_{tt}^2}{S_{tt}^2} < 1 \quad (\text{V.12})$$

Dans notre étude nous avons utilisé ce dernier critère.

Chapitre VI

RESULTATS ET
COMMENTAIRES

Les différents stratifiés indiqués dans les chapitres précédents ont été étudiés. Les résultats obtenus au moyen d'un programme élaboré (voir annexe c- organigramme) présentés et sont interprétés dans ce chapitre.

1 EXEMPLES TRAITÉS

1.1 Exemple N°1 :

Le premier exemple que nous avons considéré est un stratifié à quatre couche comme indiqué sur la figure ci dessous :

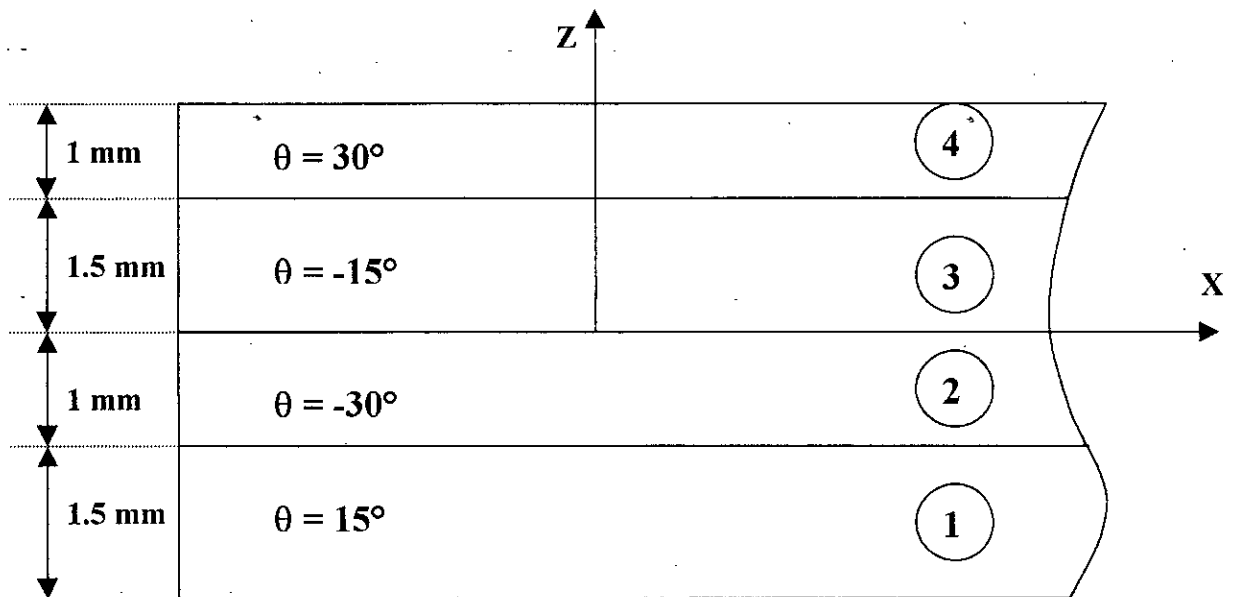


Fig VI.1 stratifié particulier

◆ les constantes élastiques du matériau composite sont :

$$E_L = 38 \text{ Gpa}$$

$$E_T = 9 \text{ Gpa}$$

$$G_{LT} = 3.6 \text{ Gpa}$$

$$\nu_{LT} = .32$$

◆ les charges appliquées :

$$N_{xx} = 1 \text{ Mpa}$$

$$N_{yy} = 0.5 \text{ Mpa}$$

$$N_{xy} = 0.25 \text{ Mpa}$$

Nous avons réussi à avoir les résultats qui sont indiqués sur le tableau 1 et représentés graphiquement sur les figures VI.2, VI.3, VI.4 et VI.5.

Notons que ces résultats sont conformes à ceux de la référence 4

1.2 Exemple N° 2 :

Dans cet exemple nous prenons un monocouche unidimensionnel puis nous faisons varier l'angle d'orientation des fibres.

Le type de stratifié utilisé est un époxyde de verre.

- ◆ les constantes élastiques du matériau composite sont :

$$E_l = 46Gpa$$

$$E_t = 10Gpa$$

$$G_{lt} = 4.6Gpa$$

$$\nu_{lt} = .31$$

- ◆ les charges appliquées :

$$N_{xx} = 1Mpa$$

Les résultats obtenus sont mentionnés sur le tableau 2 et leurs représentation graphique indiquées sur les figures VI.6,VI.7,VI.8,VI.9.

1.3 Exemple N°3 :

Dans cet exemple on fait une comparaison entre les différents cas de stratifiés en étudiant leur résistance à la rupture. Pour cela nous prenons les exemples V.1., V.2., V.3. et V.4. et en faisant varier la charge nous cherchons le stratifié qui atteint la rupture le premier.

Chaque stratifié ses couche ont :

la même épaisseur

la même nature

des angles d'orientations différentes mais la même valeur absolue

$$\alpha = 45^\circ$$

épaisseur de la plaque $e=6mm$.

Le multicouche utilisé est un époxyde de verres dont les caractéristiques élastiques sont :

$$E_l = 46 Gpa$$

$$E_t = 10 Gpa$$

$$G_{lt} = 4.6 Gpa$$

$$\nu_{lt} = .31$$

les contraintes à la rupture :

$$X_t = 1400 MPa$$

$$X_c = 910 MPa$$

$$Y_t = 35 MPa$$

$$Y_c = 110 \text{ MPa}$$

$$S = 70 \text{ MPa}$$

Après analyse des résultats obtenues nous avons observé certaines remarques que nous avons indiquées au tableau 3.

Cote (mm)	$\varepsilon_{//}$ 10^{-3}	$\varepsilon_{//}$ 10^{-3}	$\varepsilon_{//}$ 10^{-3}	ε_{xx} 10^{-3}	ε_{yy} 10^{-3}	ε_{xy} 10^{-3}
-2.5	6.783	6.294	12.54	3.614	9.463	11.10
-1	7.00	5.407	9.639	4.514	5.791	9.126
-1	1.384	11.023	1.593	4.514	5.791	9.126
0	2.129	9.831	2.33	5.114	6.765	7.826
0	3.227	8.732	5.869	5.114	6.765	7.826
1.5	4.426	6.863	5.374	6.014	8.226	5.876
1.5	8.331	2.958	2.437	6.014	8.226	5.876
2.5	7.943	2.899	0.391	6.613	4.330	4.563
Cote (mm)	$\sigma_{//}$ (10^2 Mpa)	$\sigma_{//}$ (10^2 Mpa)	$\sigma_{//}$ (10^2 Mpa)	σ_{xx} (10^2 Mpa)	σ_{yy} (10^2 Mpa)	σ_{xy} (10^2 Mpa)
-2.5	2.4644	1.143	0.903	2.827	0.7808	0.4516
-1	2.566	1.025	0.8456	2.886	0.70533	0.347
-1	0.9623	0.9596	0.1123	0.8643	1.057	0.05736
0	1.154	0.9344	0.0228	1.119	0.9696	0.08389
0	1.1579	0.8362	0.295	1.5146	0.9007	0.2113
1.5	1.945	0.7448	-0.1231	1.926	0.7637	0.1934
1.5	2.552	1.298	1.2621	3.332	0.5187	0.08773
2.5	2.4975	1.183	1.166	3.179	0.502	0.01408

Tableau 1 déformations et contraintes (exemple 1)

Angle (degré)	ε_{xx} 10^{-3}	ε_{yy} 10^{-3}	ε_{xy} 10^{-3}	$\varepsilon_{//}$ 10^{-3}	$\varepsilon_{//}$ 10^{-3}	$\varepsilon_{//}$ 10^{-3}
0	3,623	-1,1231	0	3,623	-1,1231	0
5	3,825	-1,2264	-2,303	3,587	-0,988	-3,146
10	4,417	-1,5237	-4,4314	3,48	-0,586	-6,196
15	5,3529	-1,979	-6,226	3,305	0,0068	-9,058
20	6,5636	-2,538	-7,5639	3,068	0,958	-11,644
25	7,961	-3,132	-8,3674	2,775	2,054	-13,877
30	9,449	-3,69	-8,613	2,435	3,324	-15,69
35	10,934	-4,145	-8,33	2,0617	4,729	-17,02
40	12,329	-4,44	-7,596	1,662	6,225	-17,84
45	13,564	-4,574	-6,526	1,25	7,772	-18,12
50	14,594	-4,44	-5,527	0,838	9,316	-17,84
55	15,395	-4,145	-3,934	0,4383	10,814	-17,023
60	15,97	-3,69	-2,68	0,00634	12,22	-15,69
65	16,344	-3,136	-1,63	-0,25	13,49	-13,877
70	16,554	-2,542	-1,21	-0,568	14,585	-11,644
75	16,648	-1,98	-1,01	-0,8052	15,47	-9,058
80	16,674	-1,52	-0,5	-0,98	16,13	-6,196
85	16,671	-1,226	-0,032	-1,087	16,53	-3,146
90	16,666	-1,1231	0	-1,123	16,666	0
Angle (degré)	σ_{xx} (10^2 Mpa)	σ_{yy} (10^2 Mpa)	σ_{xy} (10^2 Mpa)	$\sigma_{//}$ (10^2 Mpa)	$\sigma_{//}$ (10^2 Mpa)	$\sigma_{//}$ (10^2 Mpa)
0	1,66	0	0	1,66	0	0
5	1,66	0	0	1,654	0,01266	-0,1447
10	1,66	0	0	1,61	0,05026	-0,285
15	1,657	0	0	1,555	0,1116	-0,41666
20	1,66	0	0	1,472	0,195	-0,535
25	1,66	0	0	1,369	0,2976	-0,6638
30	1,66	0	0	1,25	0,4166	-0,7217
35	1,657	0	0	1,118	0,548	-0,783
40	1,66	0	0	0,978	0,688	-0,8206
45	1,66	0	0	0,8333	0,8333	-0,8333
50	1,66	0	0	0,6886	0,978	-0,8207
55	1,66	0	0	0,5483	1,118	-0,783
60	1,66	0	0	0,4166	1,25	-0,721
65	1,66	0	0	0,2976	1,369	-0,6384
70	1,66	0	0	0,1949	1,472	-0,5356
75	1,66	0	0	0,1116	1,555	-0,41666
80	1,66	0	0	0,0502	1,616	-0,285
85	1,66	0	0	0,01266	1,654	-0,1447
90	1,66	0	0	0	1,66	0

Tableau 2 déformations et contraintes (exemple 2)

La charge (Mpa)	Type de stratifié			
	symétrique, Équilibré	symétrique, non Équilibré	non symétrique, équilibré	non symétrique, non équilibré
0.30	résiste	résiste	résiste	résiste
0.40	résiste	résiste	résiste	Ne résiste pas
0.45	résiste	résiste	Ne résiste pas	Ne résiste pas
0.48	résiste	Ne résiste pas	Ne résiste pas	Ne résiste pas
0.50	Ne résiste pas	Ne résiste pas	Ne résiste pas	Ne résiste pas

Tableau 3 tableau récapitulatif de la résistance des stratifiés (exemple 3)

2 INTERPRETATION DES RESULTATS :

2.1 Exemple N°1 :

En examinant les figures VI.2, VI.3, VI.4 et VI.5, nous remarquons qu'il y a une discontinuité des contraintes due à la discontinuité des couches.

2.2 Exemple N°2 :

Les déformations et les contraintes en fonction de l'orientation des fibres sont interprétées comme suit:

1) Déformations hors axes principaux : (Fig.VI.6)

À partir des graphes nous remarquons que :

ϵ_{xx} : augment progressivement avec l'augmentation de l'angle, allant de 0° à 50° . Au delà, de cette valeur le changement n'est pas vraiment important c'est à dire que dans cette plage ϵ_{xx} est presque constante.

ε_{yy} : décroît jusqu'à une valeur minimale à 45° puis croit. Nous remarquons que :

$\varepsilon_{yy}(\theta) = \varepsilon_{yy}(90^\circ - \theta)$, ce qui implique la présence d'une symétrie.

ε_{xy} : diminue jusqu'à une valeur minimale à 30° , augmente progressivement puis tend vers une valeur nulle à 90° .

Nous remarquons que les déformations sont importantes pour un monocouche orienté d'un angle de 30° .

2) Déformations suivant les axes principaux : (Fig.VI.7)

ε_{II} : diminue avec l'augmentation de l'angle.

ε_{III} : augmente avec l'augmentation de l'angle et atteint une valeur maximale à 90° .

ε_{II} : diminue jusqu'à 45° où elle atteint sa valeur minimale puis augmente vers une valeur nulle à 90° .

2) Contraintes hors axes principaux : (Fig.VI.8)

D'autre part :

σ_{xx} est toujours constante, σ_{yy} et σ_{xy} sont nulles car il n'y a ni sollicitation suivant l'axe Y ni un effort de cisaillement ce qui explique qu'une traction ou une compression suivant un axe n'influe ni sur les contraintes suivant l'autre axe orthogonal ni sur les contraintes de cisaillement.

3) Contraintes suivant les axes principaux : (Fig.VI.9)

Nous notons que :

σ_{II} : diminue sa valeur maximale est atteinte à 0° alors que la valeur minimale l'est à 90° en passant par un point d'inflexion à 45° .

σ_{III} : augmente graduellement quand σ_{II} diminue avec la même valeur, c'est à dire :

$$\sigma_{III}(\theta) = \sigma_{II}(0^\circ) - \sigma_{II}(\theta).$$

σ_{II} : $\sigma_{II}(\theta) = \sigma_{II}(90^\circ - \theta)$, ce que indique une symétrie.

Nous pouvons dire que les propriétés d'un monocouche orienté d'un angle θ sont les mêmes que celle d'un monocouche orienté d'un angle de $(90^\circ - \theta)$.

Conclusion :

En examinant les graphes des déformations nous constatons que pour une traction, les déformations soit hors axe ou suivant les axes principaux sont moins faibles à 0° qu'à 90° , où elles sont importantes.

Nous pouvons dire donc que : pour une traction suivant le sens chaîne (ou la direction des fibres), les déformations sont moins importantes que pour une traction suivant le sens trame (ou direction orthogonale aux fibres), c'est à dire qu'un monocouche résiste plus à une traction longitudinale qu'à une traction transversale.

2.3 Exemple N°3 :

À partir du tableau 3 nous pourrions dire qu'en augmentant la charge, nous remarquons que :

Un multicouche (symétrique, équilibré) résiste plus qu'un multicouche (symétrique, non équilibré) qui est de même plus résistant qu'un multicouche (non symétrique, équilibré), ce dernier qui est plus résistant qu'un multicouche (non symétrique, non équilibré).

3 CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVE :

Cette étude nous a permis, au moyen d'un programme élaboré, de voir :

Premièrement: comment se comporte un monocouche en faisant varier uniquement l'angle d'orientation des fibres, c'est à dire l'évolution des contraintes et des déformations en fonction de l'angle θ .

Deuxièmement la forme de la matrice de rigidité pour différents types de stratifié considérés :

A partir de ces différents multicouches cités et au moyen d'un critère de rupture approprié « critère de Hoffman », nous avons pu déduire quel est le stratifié le plus résistant.

Nous rappelons que dans cette étude nous avons traité des plaques en traction. Cette étude pourrait être étendue en perspective pour l'étude de la flexion,.....

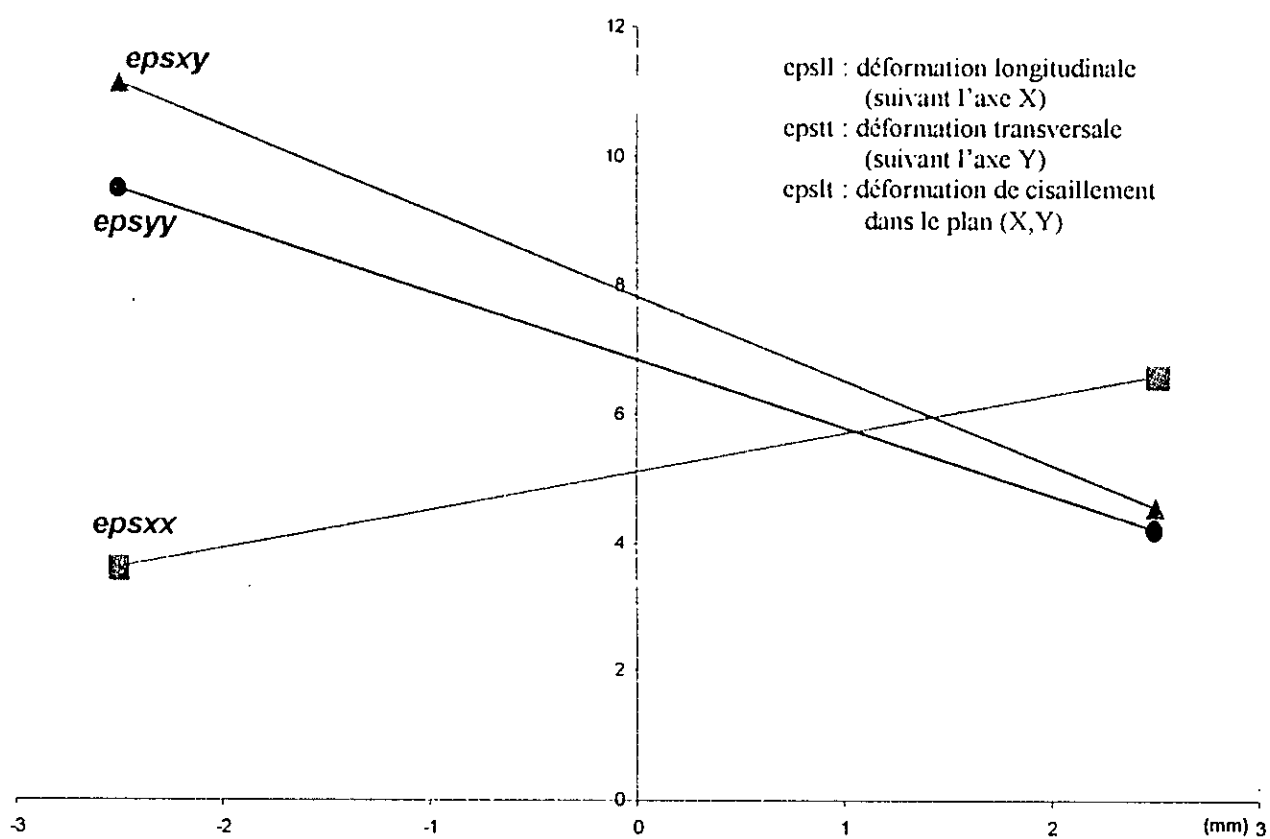


Fig.VI.2 déformations hors axes principaux (exemple1)

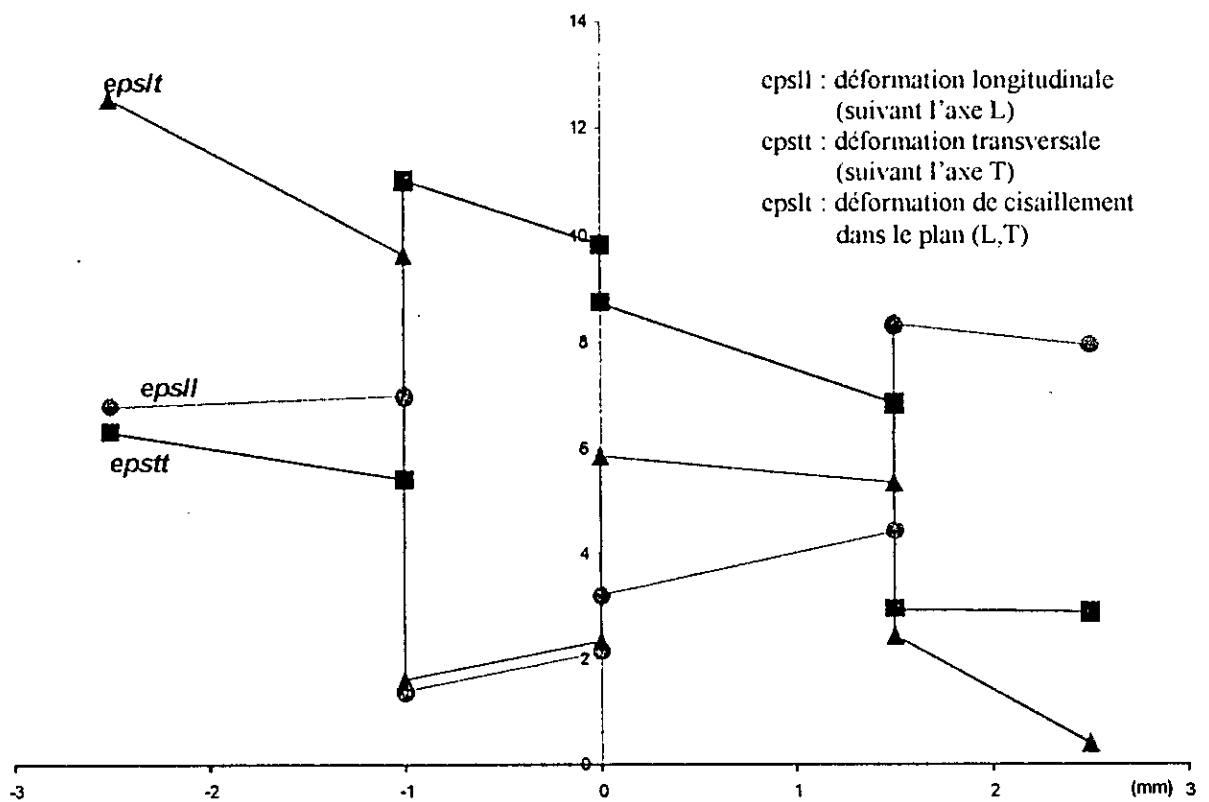


Fig.VI.3 déformations suivant les axes principaux (exemple1)

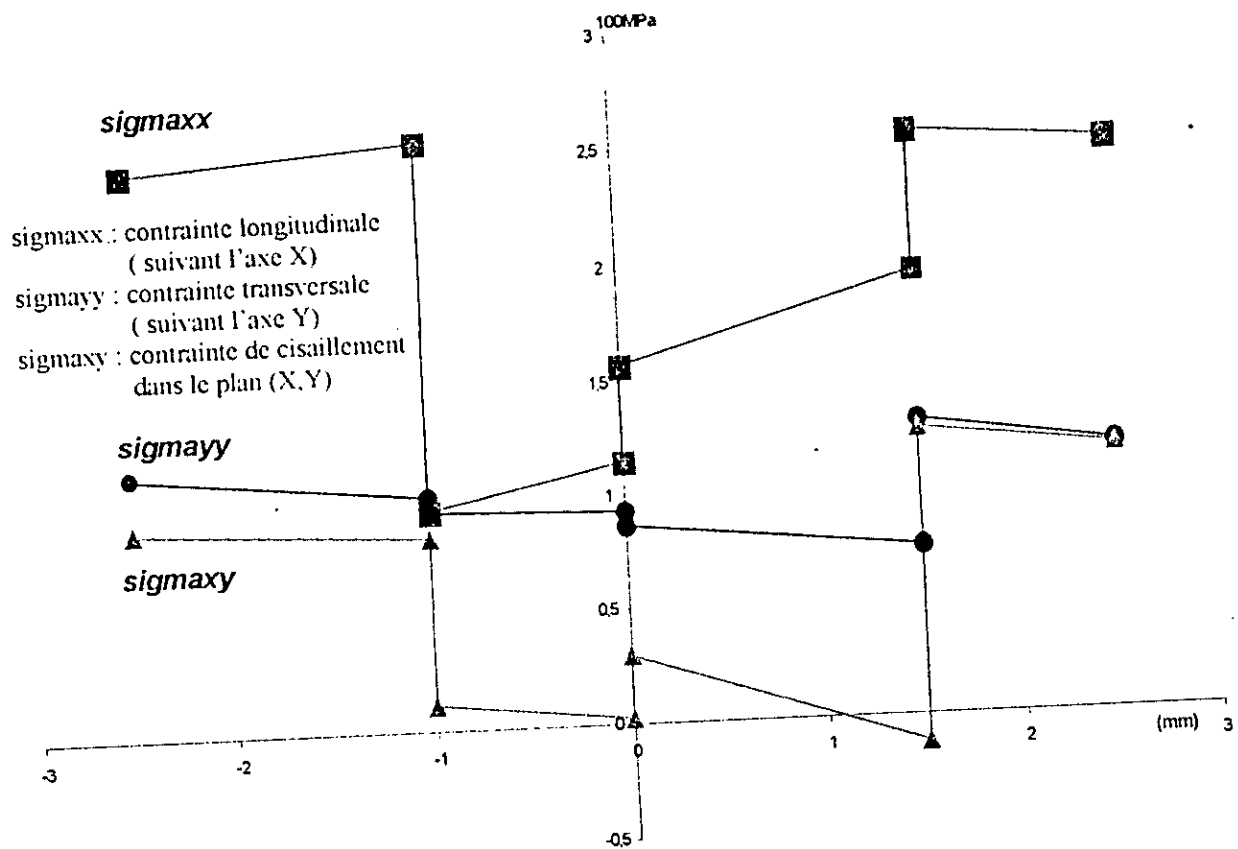


Fig.VI.4 contraintes hors axes principaux (exemple1)

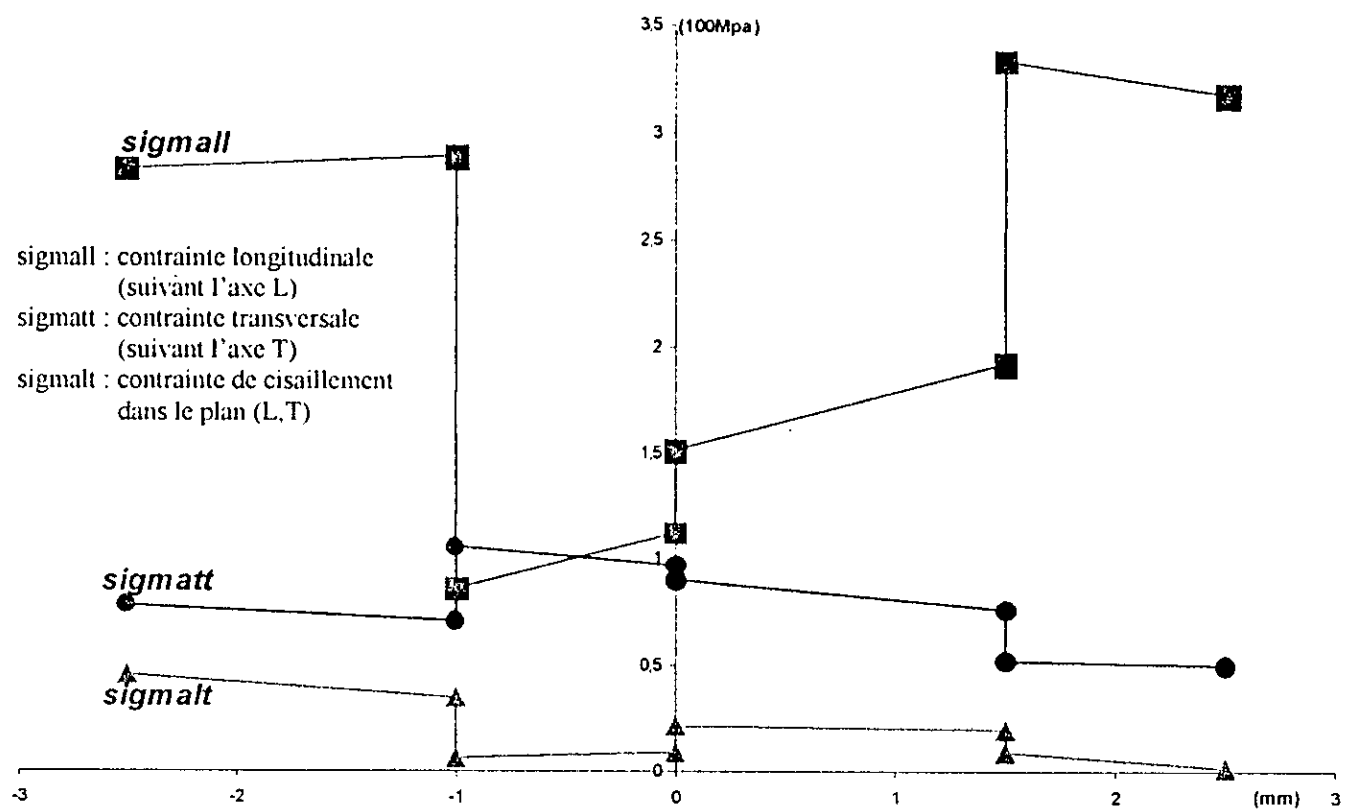


Fig .VI.5 contraintes suivant les axes principaux (exemple1)

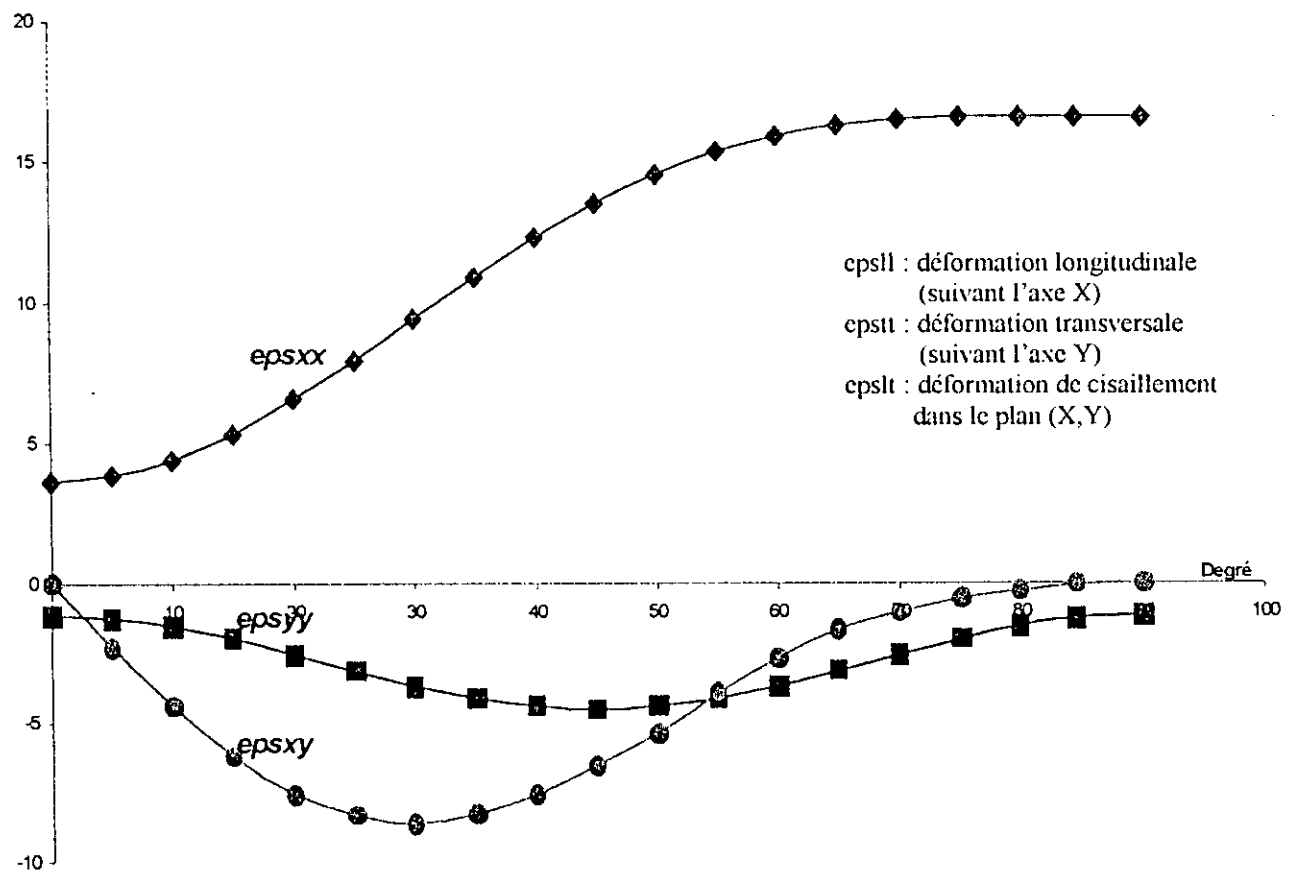


Fig. VI.6 déformations hors axes principaux (exemple 2)

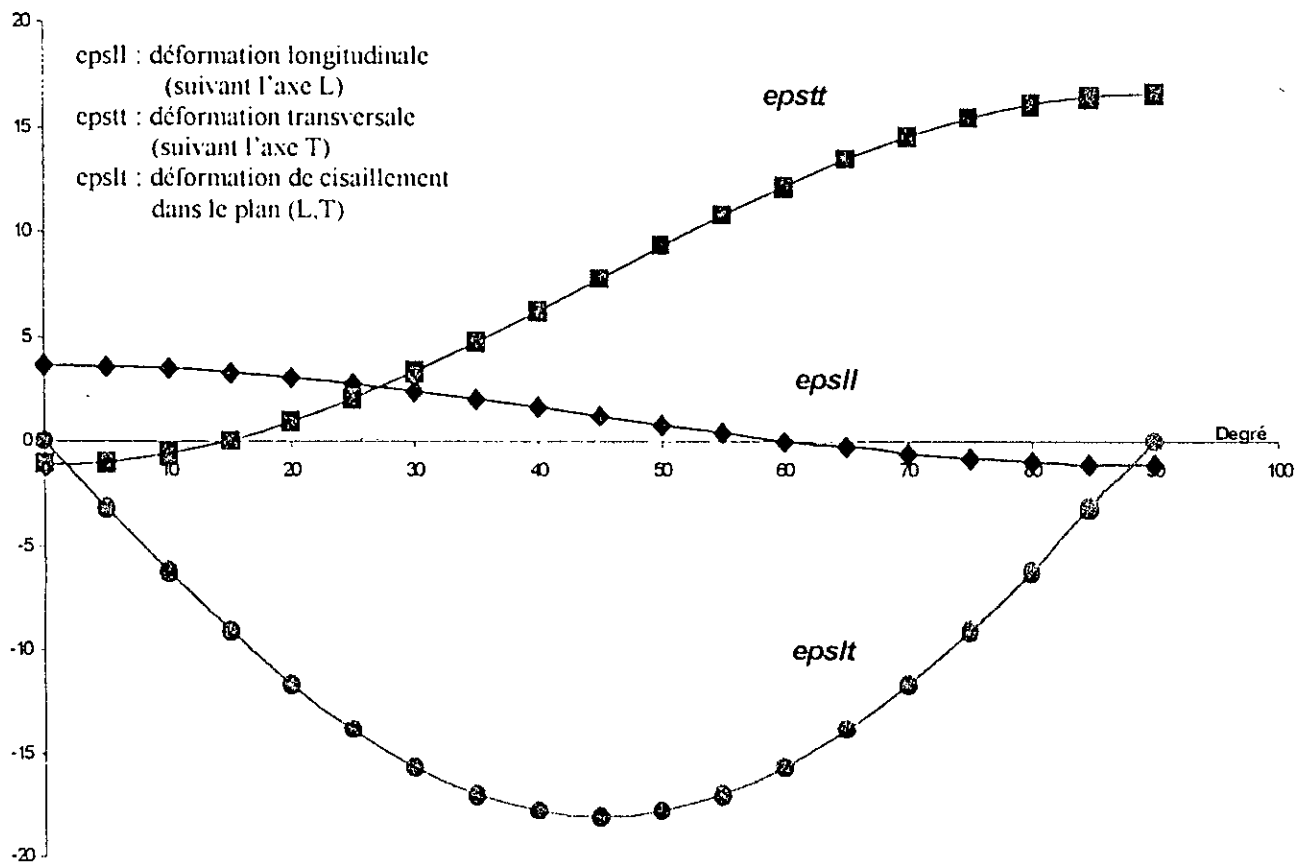


Fig. VI.7 déformation suivant les axes principaux (exemple 2)

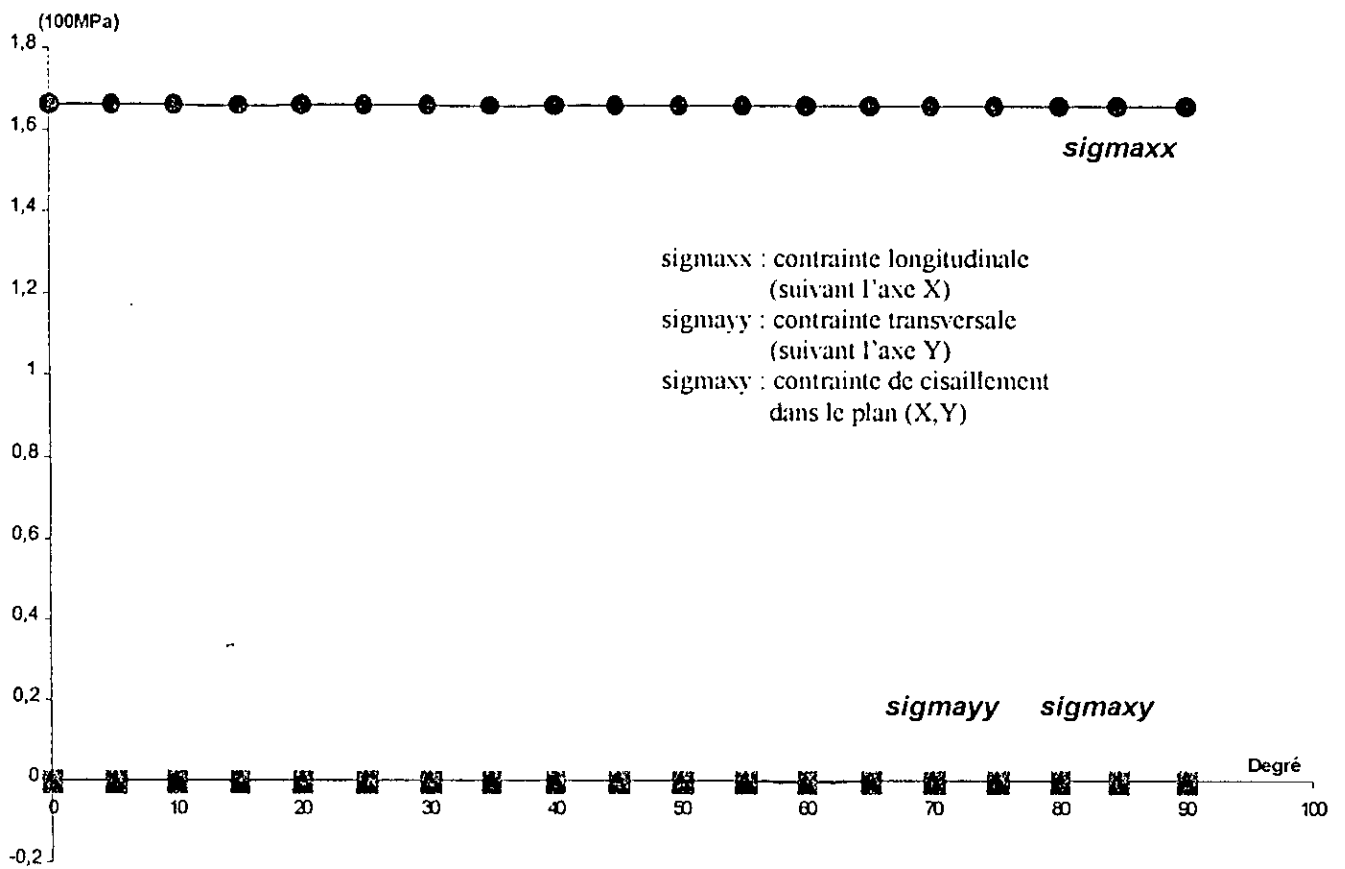


Fig.VI.8 contraintes hors axes principaux (exemple 2)

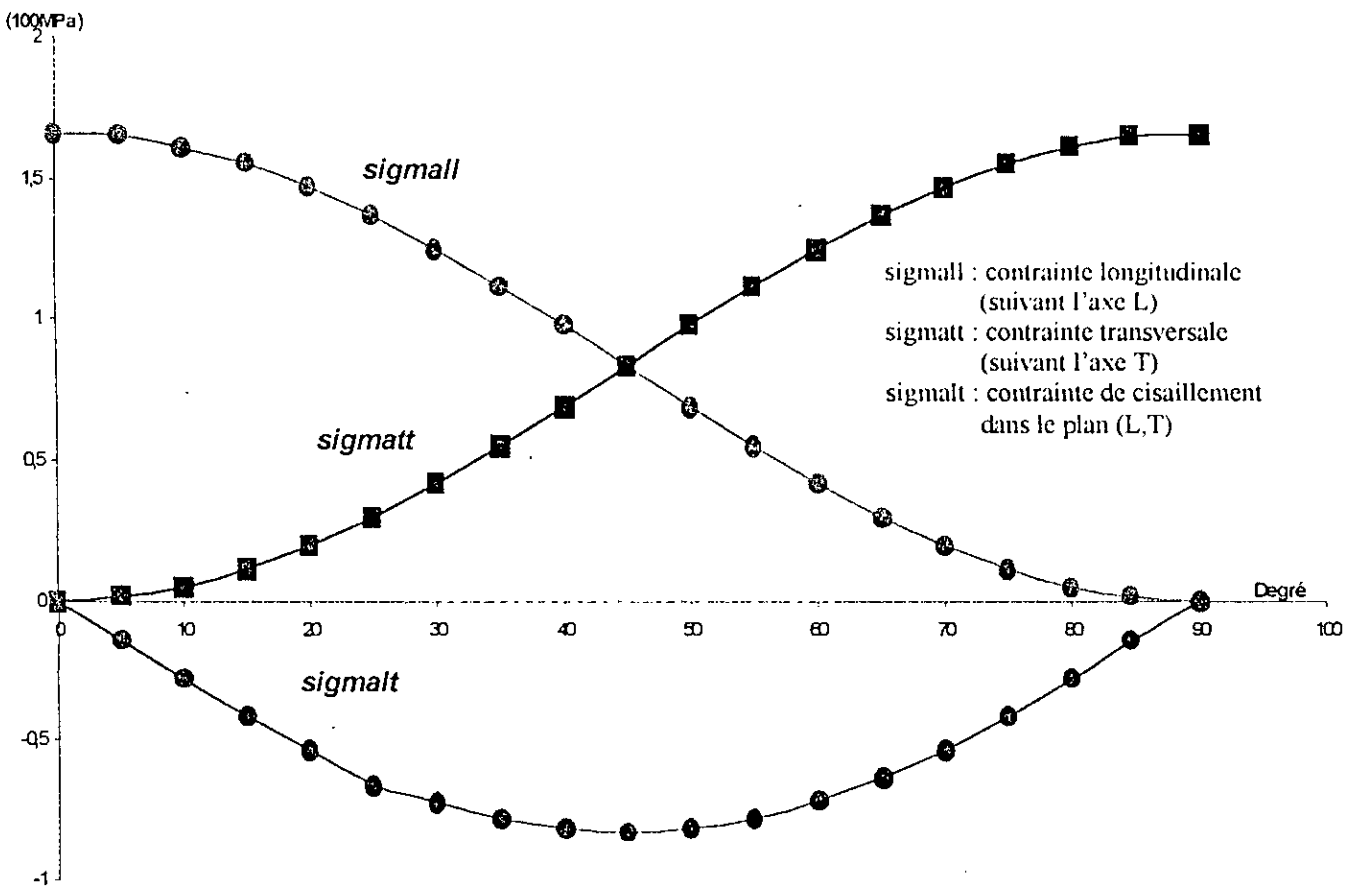


Fig.VI.9 : contraintes suivant les axes principaux (exemple 2)

Annexe A

RELATIONS FONDAMENTALES DES PLAQUES DANS LE CAS D'UN

SCHEMA DU PREMIER DEGRÉ :

1 Relations fondamentales de la mécanique des matériaux :

Les relations fondamentales des plaques tirées de la relation fondamentale pour un problème en dynamique sont sous la forme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz} + f_x &= \rho a_x \\ \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} + f_y &= \rho a_y \\ \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yz} + f_z &= \rho a_z \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

où f_x , f_y , f_z sont les composantes des forces volumiques exercées au point M du matériau.

a_x , a_y , a_z sont les composantes du vecteur accélération du point M, et ρ est la masse volumique au point M.

2 Relations fondamentales relatives aux résultantes de membrane :

L'intégration des relations (A.1), suivant l'épaisseur du stratifié, conduit aux relations fondamentales d'un élément de plaque, relatives aux résultantes. L'intégration des deux premières aboutit aux relations relatives aux résultantes de membrane. Par exemple, l'intégration de la première équation s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz \quad (\text{A.2})$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz = \frac{\partial N_x}{\partial x} \quad (\text{A.3})$$

De même :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz = \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \quad (\text{A.4})$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \sigma_{xz}\left(\frac{h}{2}\right) - \sigma_{xz}\left(-\frac{h}{2}\right)$$

où $\sigma_{xz}\left(\frac{h}{2}\right)$ et $\sigma_{xz}\left(-\frac{h}{2}\right)$ sont les contraintes éventuelles de cisaillement exercées sur les faces supérieure et inférieure du stratifié. Ces contraintes sont généralement nulles. Nous les noterons :

$$\tau_{1x} = \sigma_{xz}\left(\frac{h}{2}\right) \quad ; \quad \tau_{2x} = \sigma_{xz}\left(-\frac{h}{2}\right) \quad (\text{A.5})$$

D'où

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \tau_{1x} - \tau_{2x} \quad (\text{A.6})$$

Enfin, nous poserons :

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = F_x \quad (\text{A.7})$$

L'intégration du second membre nécessite les expressions des déplacements en fonction de x , y , z et du temps t . Dans un schéma du 1^{er} ordre, elles sont obtenues en introduisant le temps dans les expressions (1.5), soit :

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) + z \varphi_x(x,y,t) \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) + z \varphi_y(x,y,t) \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x,y,z) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \right) dz \\ &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz + \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Soit :

$$\int_{-h_2}^{h_2} \rho a_x dz = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (\text{A.10})$$

en posant :

$$\rho_s = \int_{-h_2}^{h_2} \rho dz \quad (\text{A.11})$$

La masse surfacique du stratifié au point (x,y) ;

$$R = \int_{-h_2}^{h_2} \rho z dz \quad (\text{A.12})$$

L'intégration de la première équation de (A.1) conduit donc finalement à :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (\text{A.13})$$

De même, l'intégration de la deuxième équation de (A.1) mène à :

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (\text{A.14})$$

où τ_{1y} et τ_{2y} tiennent compte des contraintes éventuelles de cisaillement exercées sur les faces :

$$\begin{aligned} \tau_{1y} &= \sigma_y \left(\frac{h}{2} \right) \\ \tau_{2y} &= \sigma_y \left(-\frac{h}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

et

$$F_y = \int_{-h_2}^{h_2} f_y dz \quad (\text{A.16})$$

3 Relations fondamentales relatives aux moments :

Les relations fondamentales relatives aux moments sont obtenues en multipliant par z les deux premières équations de (A.1), puis en intégrant suivant l'épaisseur, par exemple, la première conduit à :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{-h_2}^{h_2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h_2}^{h_2} z f_x dz = \int_{-h_2}^{h_2} \rho z a_x dz \quad (\text{A.17})$$

intégration par parties nous donne :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = [z \sigma_{xz}]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz = \frac{h}{2} \sigma_{xz}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} \sigma_{xz}\left(-\frac{h}{2}\right) - Q_x \quad (\text{A.18})$$

Soit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \frac{h}{2} (\tau_{1x} - \tau_{2x}) - Q_x \quad (\text{A.19})$$

Le second membre s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z a_z dz &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho z \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \right) dz \\ &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz + \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Soit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho z a_z dz = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (\text{A.21})$$

en posant :

$$I_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz \quad (\text{A.22})$$

I_{xy} est le moment d'inertie par rapport au plan moyen (Oxy) de l'élément de plaque.

La première relation des moments s'écrit donc :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (\text{A.23})$$

en posant :

$$P_x = \int_{-h/2}^{h/2} z f_x dz \quad (\text{A.24})$$

De même la deuxième équation de (A.1) conduit à :

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2}(\tau_{1y} + \tau_{2y}) + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (\text{A.25})$$

avec :

$$P_y = \int_{-h/2}^{h/2} z f_y dz$$

4 Résumé des relations fondamentales :

Les relations fondamentales des plaques sont donc constituées des expressions (A.13),

(A.14) (A.23) et (A.25). en les regroupant :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}$$

(A.26)

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2}(\tau_{1x} + \tau_{2x}) + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2}(\tau_{1y} + \tau_{2y}) + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}$$

avec :

$$\rho_s, R, I_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} (I, z, z^2) \rho dz \quad (\text{A.27})$$

Les trois dernières équations permettent d'obtenir une relation indépendante des résultantes de cisaillement suivant :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + R \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + I_{xy} \left(\frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y \partial t^2} \right) \quad (\text{A.28})$$

Les équations (A.26) et (A.28) constituent les équations de mouvement, de la théorie classique des plaques. Elles sont applicables aussi bien, à des plaques homogènes qu'à des plaques stratifiées. Les deux premières équations de (A.26), associées à (A.28), constituent les équations fondamentales des plaques en l'absence de cisaillement transverse, soit :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + R \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + I_{xy} \left(\frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y \partial t^2} \right)$$

Les grandeurs ρ_s , R , I_{xy} se calculent sans difficulté dans le cas où la plaque est constituée de n couches, la couche k ayant une masse volumique ρ_k . Nous avons :

$$\rho_s = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \, dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k \, dz \quad (\text{A.30})$$

soit :

$$\rho_s = \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k - h_{k-1}) \quad (\text{A.31})$$

de même :

$$R = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (\text{A.32})$$

$$I_{xy} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (\text{A.33})$$

Dans la plupart des cas, les termes d'inertie de rotation peuvent être négligés et, en l'absence de forces volumiques et de contraintes de cisaillement sur les faces, les équations des plaques se simplifient suivant :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0$$

Ces relations peuvent également être écrites en éliminant les résultantes de cisaillement, suivant une forme analogue à (1.48), soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

5.5 Problèmes de statique :

Dans le cas de problèmes de statique, les déplacements sont indépendants du temps et les relations fondamentales des plaques se réduisent à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

ou en éliminant les résultantes de cisaillement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

MODULE DE L'INGENIEUR

1 Traction dans le sens chaîne :

Dans un essai de traction dans le sens chaîne, toutes les contraintes sont nulles, excepté la contrainte σ_1 :

$$\{ \sigma_1 \neq 0 ; \sigma_i = 0 \quad i = 2 \dots 6 \} \quad (B.1)$$

En fonction des constantes de souplesse, les équations d'élasticité s'écrivent :

$$\{ \epsilon_1 = S_{11} \sigma_1 ; \epsilon_2 = S_{12} \sigma_1 ; \epsilon_3 = S_{13} \sigma_1 ; \epsilon_4 = \epsilon_5 = \epsilon_6 = 0 \} \quad (B.2)$$

soit :

$$\{ \sigma_1 = \frac{1}{S_{11}} \epsilon_1 ; \epsilon_2 = \frac{S_{12}}{S_{11}} \epsilon_1 ; \epsilon_3 = \frac{S_{13}}{S_{11}} \epsilon_1 \} \quad (B.3)$$

Nous en déduisant le module de Young et les coefficients de poisson, mesurés dans un essai de traction suivant le sens chaîne :

$$\{ E_{ch} = E_L = E_T = \frac{1}{S_{11}} ; \nu_{L,T} = \nu_{12} = -\frac{S_{12}}{S_{11}} ; \nu_{L,T} = \nu_{13} = -\frac{S_{13}}{S_{11}} \} \quad (B.4)$$

2 Traction dans le sens trame :

Dans un essai de traction dans le sens trame, seule la contrainte σ_2 n'est pas nulle :

$$\{ \sigma_2 \neq 0 ; \sigma_i = 0 \quad \text{si } i \neq 2 \} \quad (B.5)$$

Les équations d'élasticité s'écrivent :

$$\{ \epsilon_1 = S_{12} \sigma_2 ; \epsilon_2 = S_{22} \sigma_2 ; \epsilon_3 = S_{23} \sigma_2 ; \epsilon_4 = \epsilon_5 = \epsilon_6 = 0 \} \quad (B.6)$$

soit :

$$\{ \sigma_2 = \frac{1}{S_{22}} \epsilon_2 ; \epsilon_1 = \frac{S_{12}}{S_{22}} \epsilon_2 ; \epsilon_3 = \frac{S_{23}}{S_{22}} \epsilon_2 \} \quad (B.7)$$

Ainsi nous obtenons le module de Young et les coefficients de poisson.

$$\{ E_{tr} = E_T = E_2 = \frac{1}{S_{22}} ; \nu_{TL} = \nu_{21} = -\frac{S_{12}}{S_{22}} ; \nu_{TT} = \nu_{23} = -\frac{S_{23}}{S_{22}} \} \quad (B.8)$$

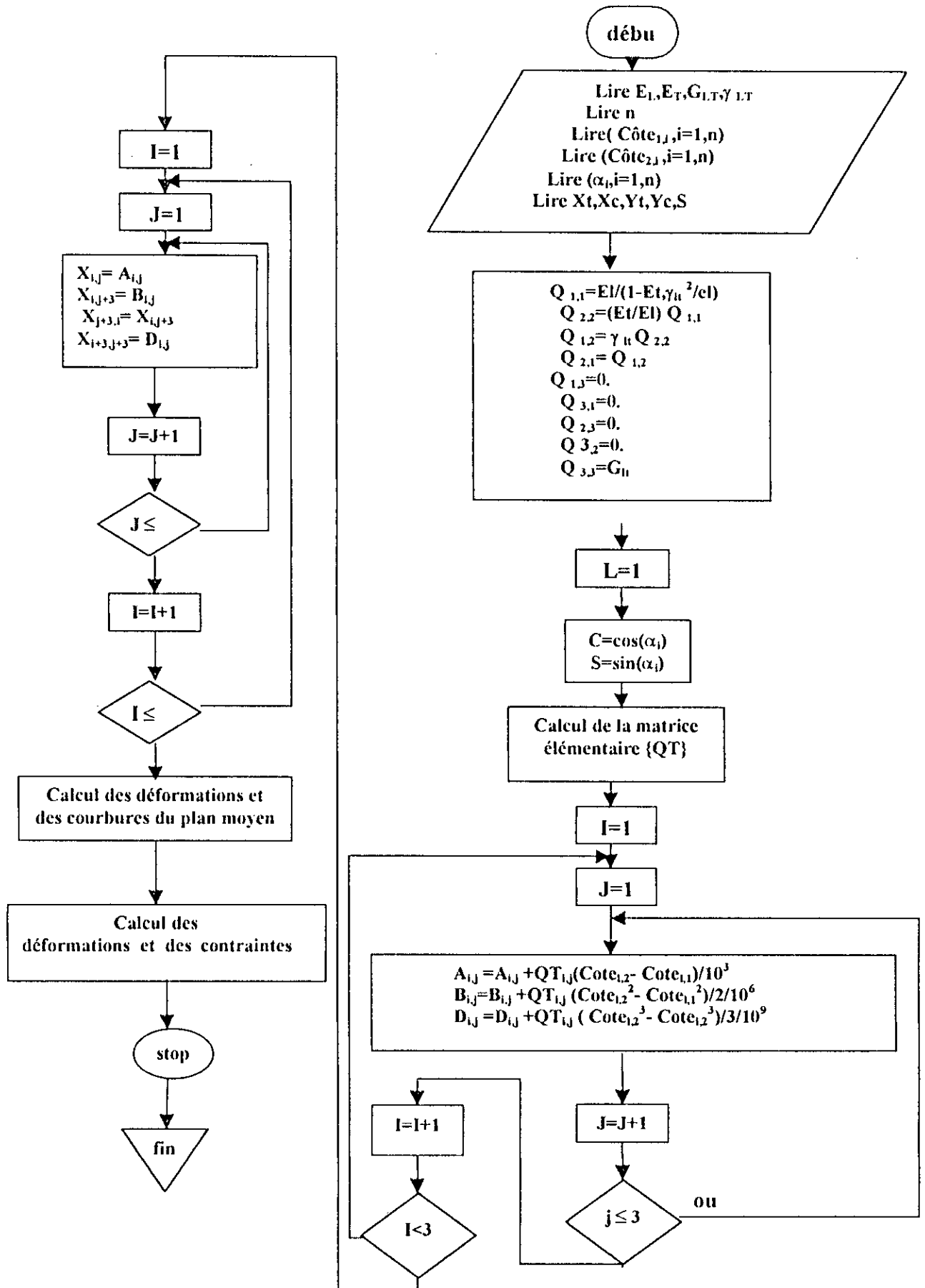
3 Traction transversale :

une traction transversale est une traction effectuée dans une direction normale au plan de la couche :

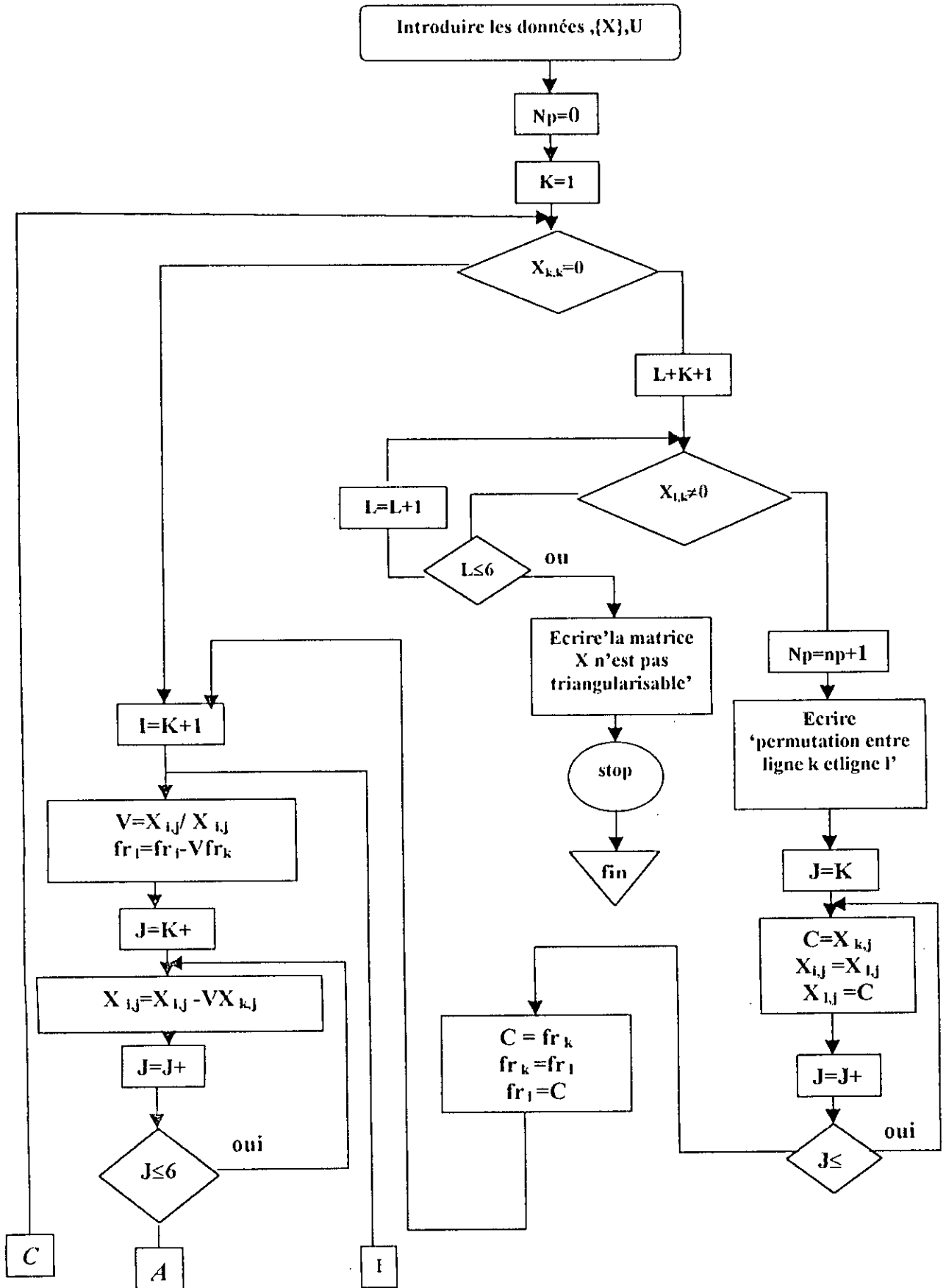
$$\{ \sigma_3 \neq 0 ; \sigma_i = 0 \quad \text{si } i \neq 3 \} \quad (B.9)$$

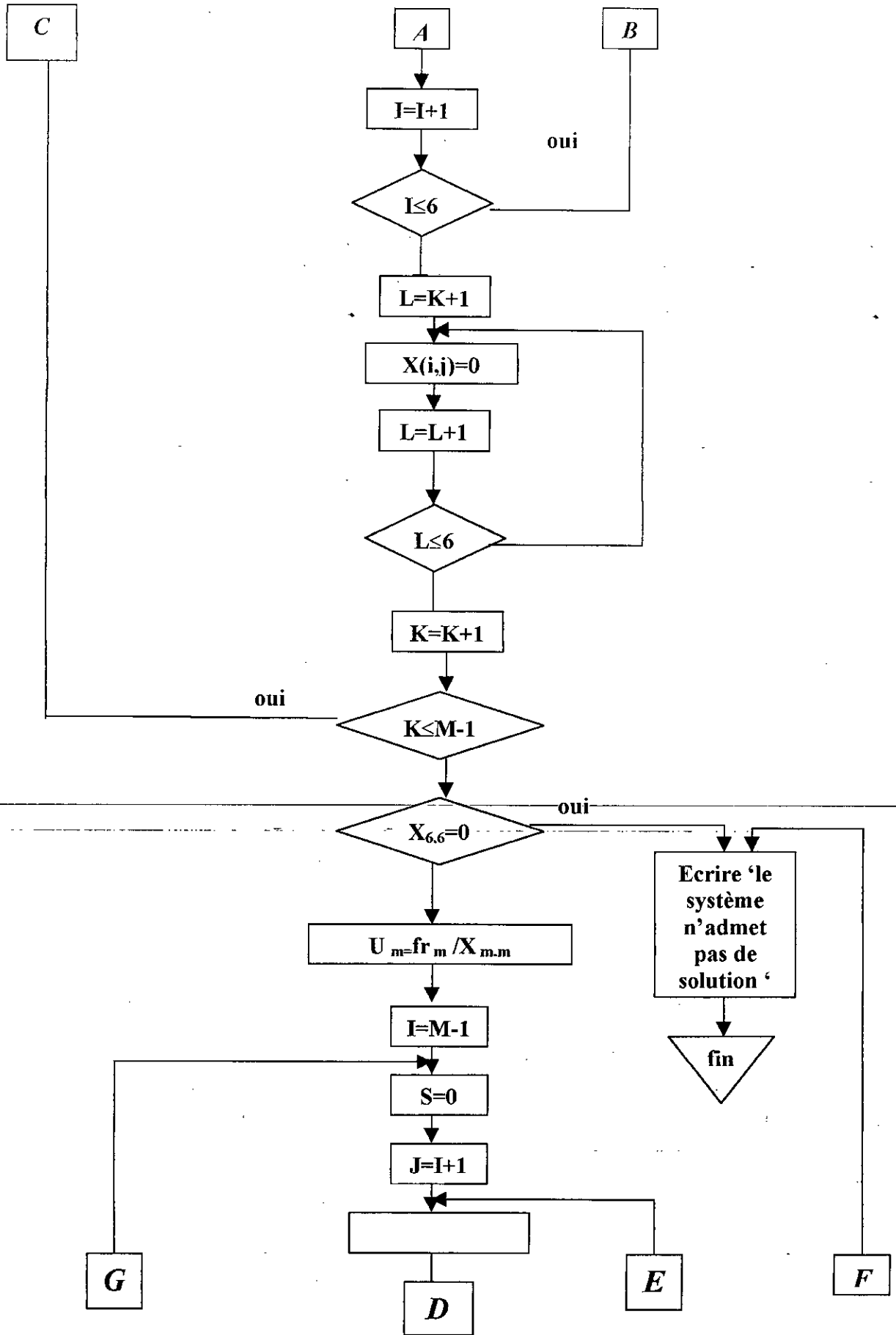
Nous obtenons ainsi le module de Young transversal et les coefficients de poisson correspondants :

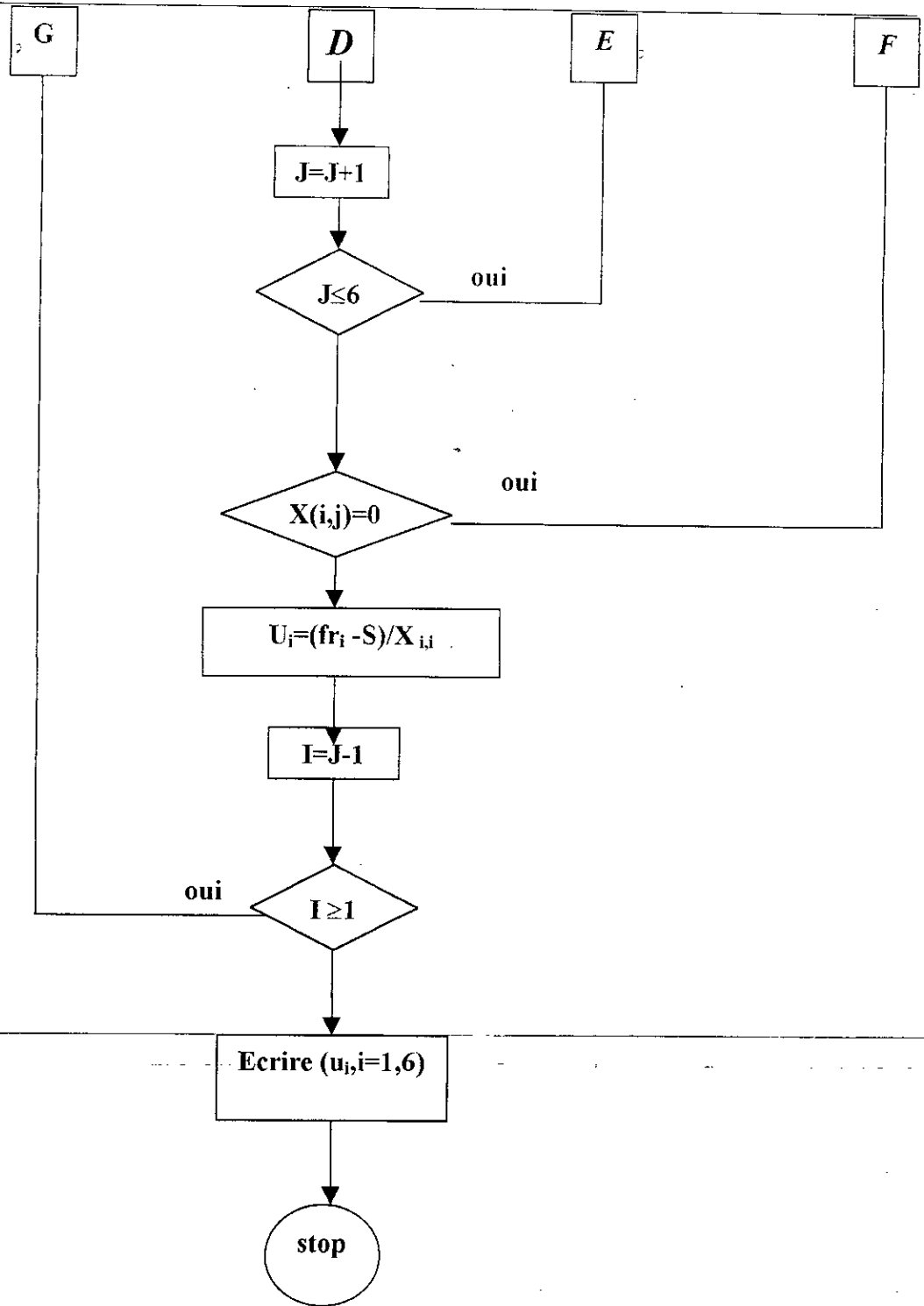
$$\{ E_T = E_3 = \frac{1}{S_{33}} ; \nu_{T'L} = \nu_{31} = -\frac{S_{13}}{S_{33}} ; \nu_{T'T} = \nu_{32} = -\frac{S_{32}}{S_{33}} \} \quad (B.10)$$

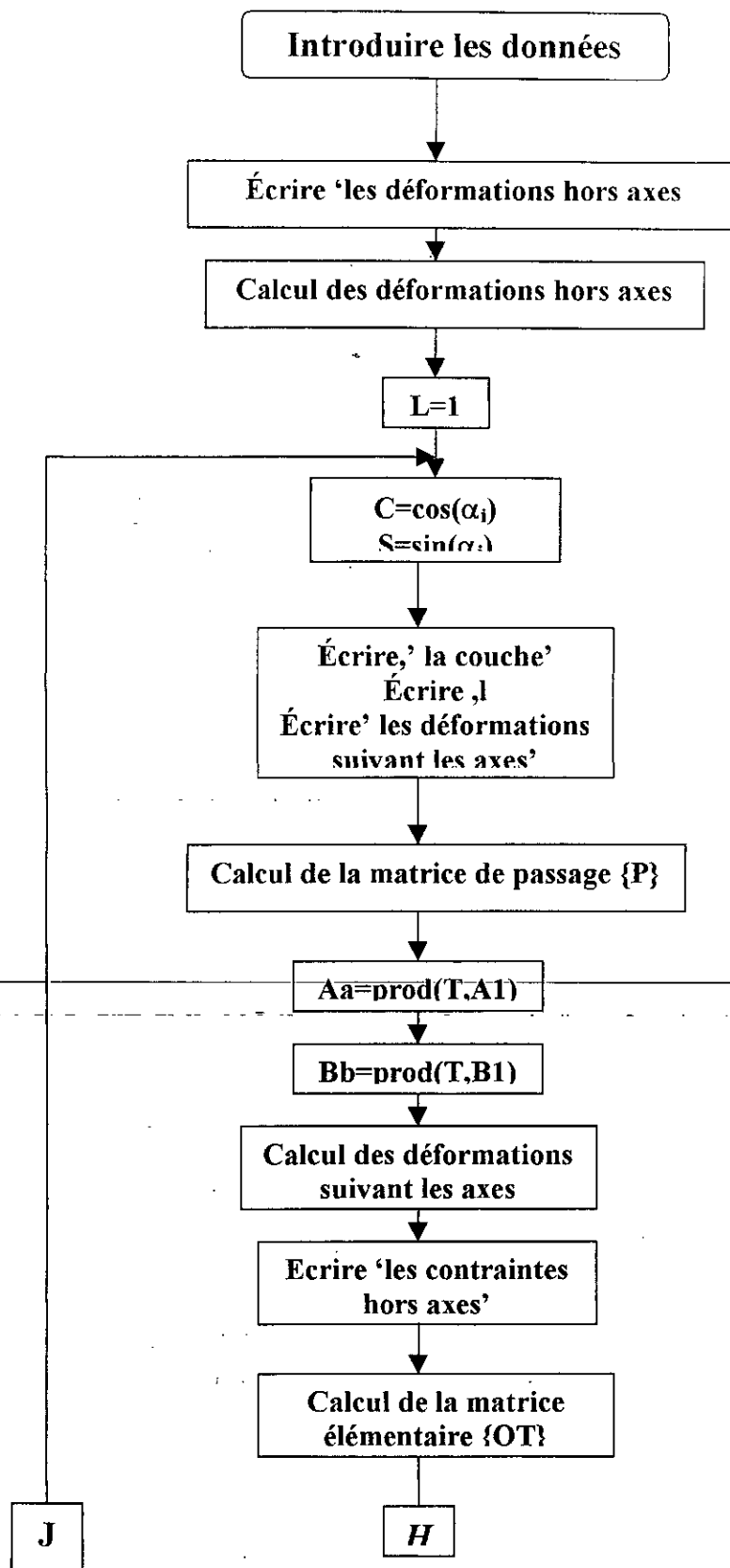


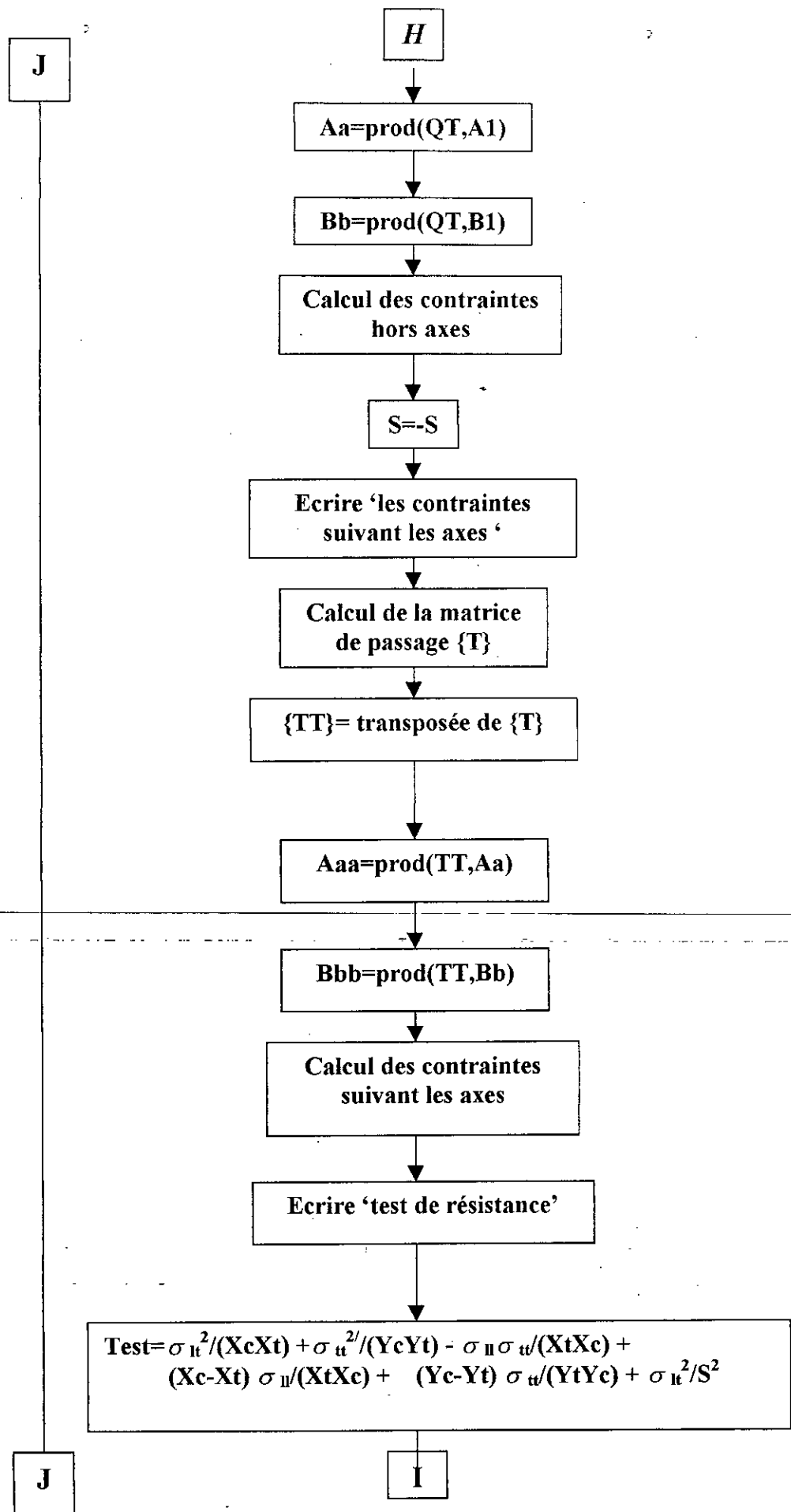
MÉTHODE DE GAUSS :

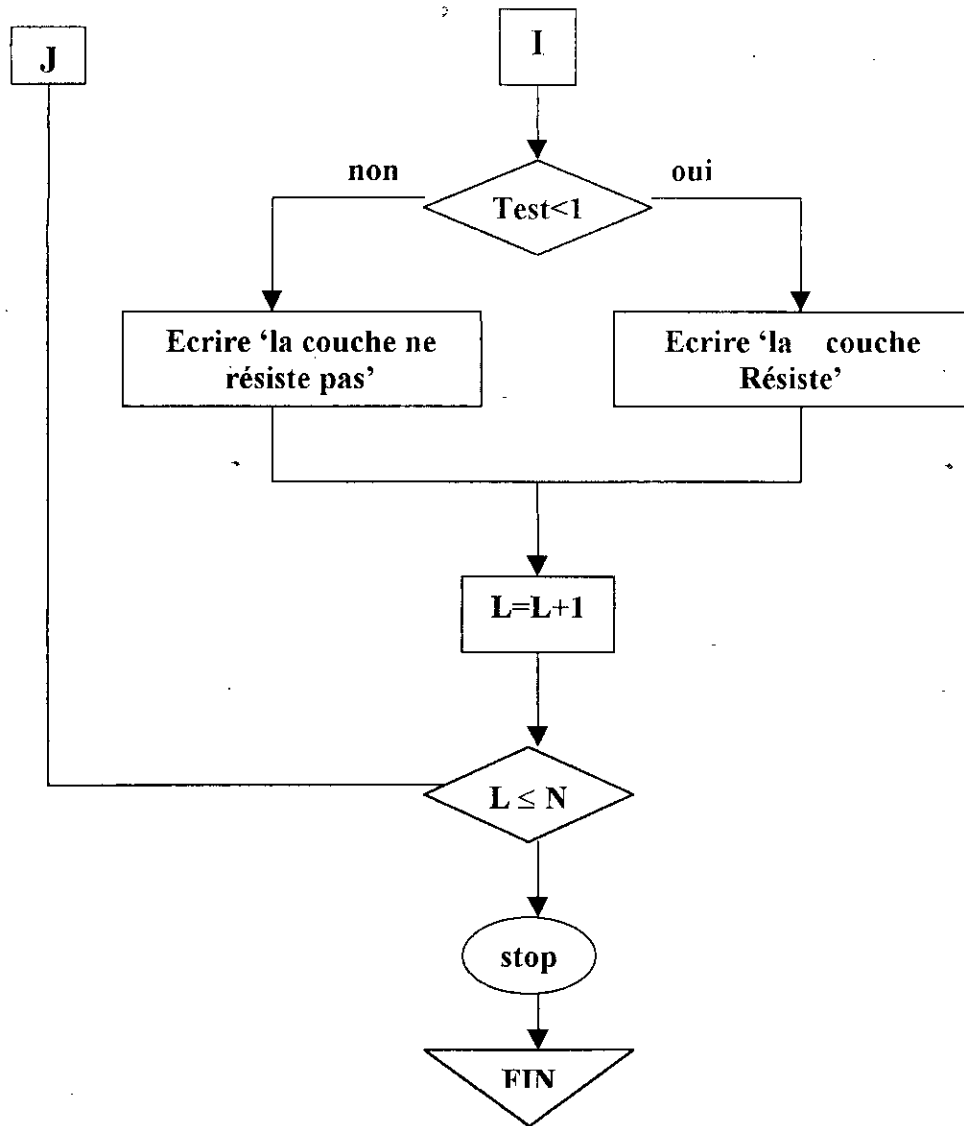






CALCUL DES CONTRAINTES ET DÉFORMATIONS ::





Calcul de la matrice de passage

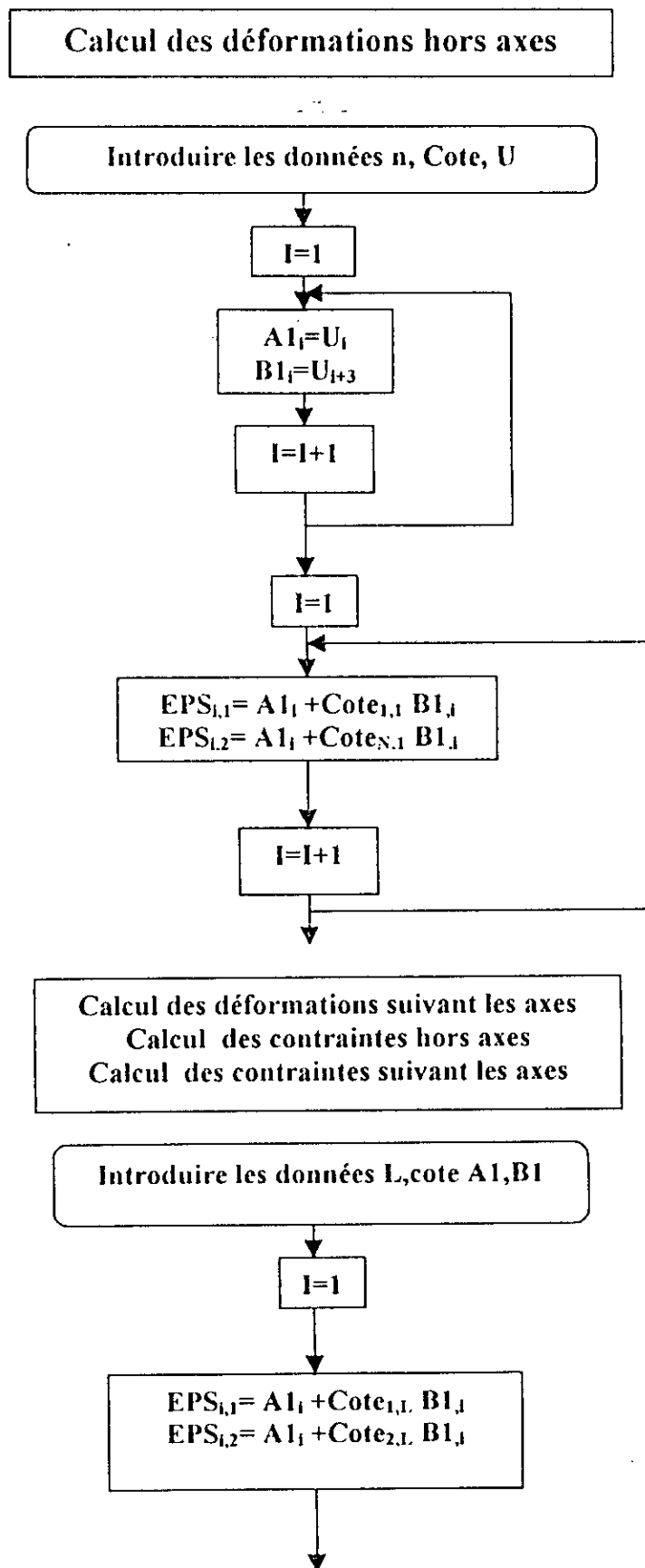
Introduire les données C.S

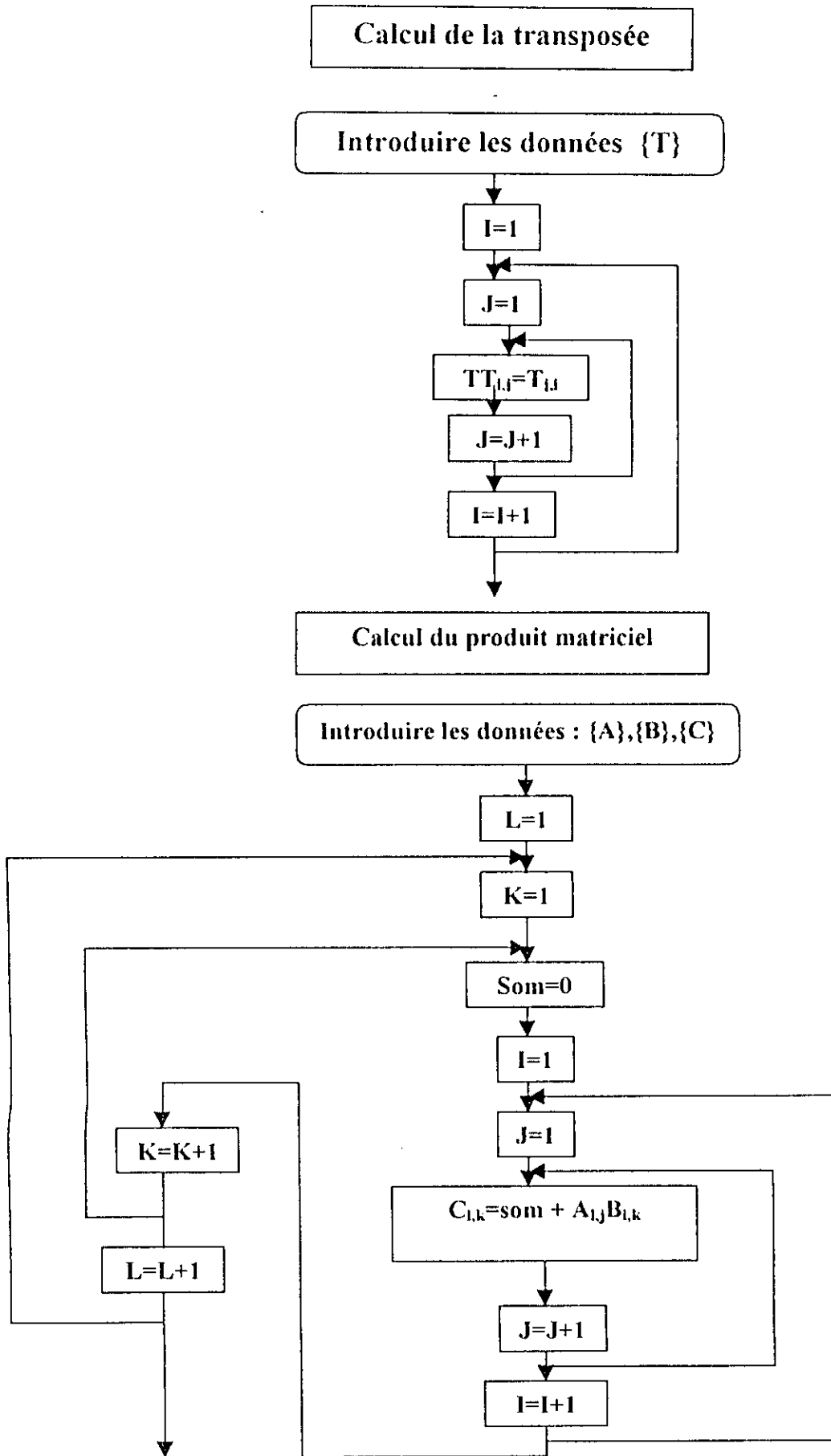
$$\begin{aligned} T_{1,1} &= C^2 \\ T_{2,2} &= C^2 \\ T_{2,1} &= S^2 \\ T_{1,2} &= S^2 \\ T_{1,3} &= CS \\ T_{3,1} &= -2SC \\ T_{2,3} &= -CS \\ T_{3,2} &= 2SC \\ T_{3,3} &= C^2 - S^2 \end{aligned}$$

Calcul de la matrice élémentaire

Introduire les données S.C.{O}

$$\begin{aligned} QT_{1,1} &= Q_{1,1}C^4 + Q_{2,2}S^4 + 2(Q_{1,2} + 2Q_{3,3})S^2C^2 \\ QT_{1,2} &= (Q_{1,1} + Q_{2,2} - 4Q_{3,3})S^2C^2 + Q_{1,2}(S^4 + C^4) \\ QT_{1,3} &= (Q_{1,1} - Q_{1,2} - 2Q_{3,3})SC^3 + (Q_{1,2} - Q_{2,2} + 2Q_{3,3})S^3C \\ QT_{2,2} &= Q_{1,1}S^4 + 2(Q_{1,2} + 2Q_{3,3})S^2C^2 + Q_{2,2}C^4 \\ QT_{2,3} &= (Q_{1,1} - Q_{1,2} - 2Q_{3,3})S^3C + (Q_{1,2} - Q_{2,2} + 2Q_{3,3})SC^3 \\ QT_{3,3} &= (QT_{1,1} + Q_{2,2} - 2(Q_{1,2} + Q_{3,3}))S^2C^2 + Q_{3,3}(S^4 + C^4) \\ QT_{3,1} &= QT_{1,3} \\ QT_{3,2} &= QT_{2,3} \\ QT_{2,1} &= QT_{1,2} \end{aligned}$$





BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DANIEL GAY, « Matériaux composites », 3^e Édition, Hermes 1991.
 - [2] EDWARD A. SADEK. « Some serendipity finite elements for the analysis of laminated plates », Computers and Structures 69, 1998, 37-51.
 - [3] V. FEODOSSIEV. « Résistance des matériaux », édition Mir, Moscou 1973.
 - [4] J.M. BERTHELOT. « Matériaux composite. Comportement mécanique et analyse des structures », édition Masson, 1992.
 - [5] M. MANERA. « Manuel de calcul des composite verre-resine », édition Pluralis, Paris, 1989.
 - [6] O. HOFMAN. « the brittle strength of orthotropic material », Journal of composite Material, vol. 1, pp 200-206, 1967.
 - [7] V.D. AZZIZ et S.W. TSAI. « Anisotropic strength of component », Experimental Mechanics, Vol. 5, pp 286-288, 1965.
-