

12/00

République Algérienne Démocratique et Populaire

*Ecole Nationale Polytechnique*

Département de Génie Mécanique



## PROJET DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en  
Génie Mécanique

Thème



REGIME PERMANENT DANS UNE SERRE TUNNEL  
CHAUFFEE PAR LE BAS

Dirigé par :

*M<sup>elle</sup> N. AMOR*

Etudié par :

*BENKARA M<sup>ed</sup> Yazid*

*Promotion : Septembre 2000*

DEDICACES

المسرة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

*Je dédie ce modeste travail à :*

*Ma très chère mère;*

*Mon très cher père;*

*Toutes mes sœurs;*

*Tous mes frères;*

*Toute ma famille;*

*Tous mes amis, surtout : Abderrahim,*

*Ammar, Khaled, Abdelmadjid, Radouane,*

*Ahmed, Belkacem, Brahim, Samir, Salim, M'hamed, .....*

*A la mémoire de Zine El-Abidine et Salah;*

*Et à vous*

*Mohammed Yazid BEN K.A.R.A.*

## Remerciements

*Ce travail a été effectué sous la direction de M<sup>elle</sup> N.AMOR, qu'elle trouve ici ma profonde gratitude et mes sincères remerciement pour l'aide efficace et les conseils précieux quelle n'a cesse de me prodiguer, ainsi que le soutien et l'encouragement qu'elle m'a apporté tout au long de ce travail.*

*Je tiens également à remercier très vivement tout les enseignants qui ont contribué à ma formation, depuis la première classe de primaire jusqu'à aujourd'hui, et en particulier ceux du département de génie mécanique de l'ENP d'Alger.*

*Je remercie très vivement les membre de jury, qui ont accepté d'examiner ce travail. J'exprime ma gratitude à monsieur F. NAIT BOUDA, pour son aide efficace et son soutien moral pendant toute la durée de l'achèvement de ce travail.*

*Mes vifs remerciements vont aussi à monsieur R. GHARBI, pour son soutien moral et matériel.*

*Mes remerciement vont aussi à monsieur B. SAID et B. HAMDADOU et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'achèvement de ce travail.*

*Que tout les agents de la bibliothèque de l'ENP d'Alger, reçoivent ma gratitude et en particulier Ammi Salah et Ammi Mahmoud.*

*Enfin, mes remerciement à tous mes amis chacun son nom.*

**Mohammed Yazid Benkara**

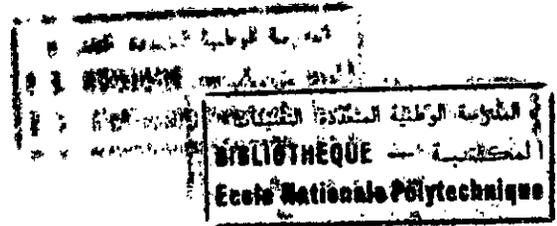
ملخص  
في هذا العمل قمنا باستعمال طريقة الحجم المنتهية لدراسة انتقال الحرارة بالحمل في النظام الصفحي داخل الصوبات المحمية مسخنة من اسفلها، واعتمدنا في حل معادلة انخفاض الكتلة وكمية الحركة ومعادلة الطاقة في المستوي واهمال البعد الثالث على برنامج حاسوب يدعى سمبلر (SIMPLER) وقد اعطينا النتائج على شكل بيانات لخطوط التيار و الخطوط المتساوية الحرارة و عدد نيسلت .

### Résumé :

Dans ce travail nous avons utilisé la méthode de volumes finis pour étudier la convection naturelle en régime laminaire à l'intérieur d'une serre tunnel chauffée par le bas. Une simulation numérique bidimensionnel basée sur l'algorithme SIMPLER a été faite pour la résolution des équations de continuité, de quantité de mouvement et de la chaleur. Les résultats obtenus sont représentés sous forme de graphes indiquant les distributions des isothermes, des lignes de courant et de nombre du Nüsselt.

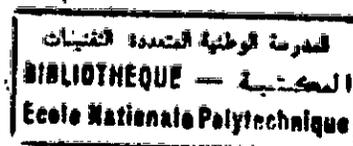
### Abstract :

In this work we have used the finite volume mehode to study the natural convection in laminar regime inside the tunnel greenhowse heated bellow. A two dimentionall numericall simulation based on SIMPLER algorithm for résolution the continuity, the momentum and the energy equation. The results given in to forme of isothermes, stream line and the Nüsselt number.



**Mots clés :** Serre agricole ; Convection naturelle ; Méthode des volumes finis ; Les isothermes ;  
Les lignes de courant

# SOMMAIRE



## NOMENCLATURE

INTRODUCTION GENERALE.....	01
----------------------------	----

## Chapitre I : Généralités sur les serres et formulation mathématique

I-1 DEFINITION DE LA SERRE .....	03
I-2 DIFFERENTS TYPES DE SERRES .....	03
I-3 LE CLIMAT EDE LA SERRE .....	05
I-3-1 Climat spontané de la serre.....	06
a- Rayonnement solaire .....	06
b- Effet de serre.....	08
I-3-2 Le climat modifié de la serre .....	08
I-4 FORMULATION MATHEMATIQUE .....	10
I-4-1 Convection .....	11
I-4-2 Les hypothèses simplificatrices .....	11
I-4-3 Les équations de base .....	12
a- Equation de continuité .....	12
b- Equation de la quantité de mouvement.....	12
c- Equation de l'énergie .....	14
I-4-4 Les conditions aux limites .....	14
I-4-5 Equations de transfert adimensionnelles .....	15
a- Equation de continuité .....	16
b- Equation de quantité de mouvement .....	16
c- Equation de l'énergie .....	16
I-4-6 Les conditions aux limites adimensionnelles.....	18

## Chapitre II : Méthode des volumes finis

II-1 INTRODUCTION .....	19
II-2 MODELE MATHEMATIQUE .....	19
II-2-1 Equations différentielles gouvernant l'écoulement de fluide.....	19
II-2-2 Coefficient de diffusion .....	20
II-2-3 Terme source .....	20
II-2-4 Equation de continuité .....	21
II-3 METHODE NUMERIQUE.....	21
II-3-1 Grille et volume de contrôle.....	21
II-3-2 Equation de conservation pour le volume de contrôle.....	22
II-3-3 Flux de convection et flux de diffusion .....	23
II-3-4 Simplification de l'expression du flux.....	24
II-3-5 Linearisation du terme source.....	25

II-3-6 Equation finale de discrétisation.....	25
II-3-7 Les quarts règles de base.....	26
II-3-8 Condition aux limites.....	27
II-3-9 Non-linearité.....	28
II-4 SOUS-RELAXATION.....	29
II-5 SOLUTION DES EQUATION ALGEBRIQUES .....	29
II-5-1 Technique ligne par ligne.....	30
II-5-2 Procédure de correction par bloc.....	30

### Chapitre III : Etude du champ dynamique

III-1 DIFFICULTE PRINCIPALE.....	33
III-2 MAILLAGE DECALE.....	33
III-3 EQUATION DE DISCRETISATION POUR L'ECOULEMENT DE FLUIDE.....	34
a- Equation de mouvement.....	34
b- Equation de correction de pression.....	35
III-4 ALGORITHME SIMPLE.....	36
III-5 DISCUSSION DU SIMPLE.....	37
III-6 EQUATION DE PRESSION.....	38
III-7 ALGORITHME SIMPLER.....	38
III-8 DISCUSSION.....	40

### Chpitre IV : Présentation du programme et des résultats

IV-1 LE MAILLAGE.....	43
IV-2 PRESENTATION DES RESULTATS .....	44
IV-3 INTERPRETATION DES RESULTATS.....	50

<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>51</b>
---------------------------------	-----------

<b>Annexe A.....</b>	<b>53</b>
<b>Annexe B.....</b>	<b>59</b>
<b>Annexe C.....</b>	<b>63</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>	<b>69</b>

# LISTE DES FIGURES

## CHAPITRE I

- FIG (I-1) : Serre dôme sphérique.  
FIG (I-2) : Serre paraboloid hyperbolique.  
FIG (I-3) : Serre tunnel.  
FIG (I-3) : Serre elliptique.  
FIG (I-4) : Serre chapelle.  
FIG (I-5) : Représentation schématique de l'effet de serre.  
FIG (I-6) : Système de chauffage par Des tuyaux enterrés  
FIG (I-5-1) : Schémas d'une serre tunnel nue chauffée par des tuyaux enterrés  
FIG (I-5-2) : Forces s'exerçant sur une particule fluide en convection naturelle.  
FIG (I-5-3) : Représentation schématique du modèle : serre tunnel

## CHAPITRE II

- FIG (II-1) : Grille et volume de contrôle  
FIG (II-2) : Volume de contrôle

## CHAPITRE III

- FIG (III-1) : Le maillage décalé  
FIG (III-2) : Volume de contrôle pour la quantité de mouvement.

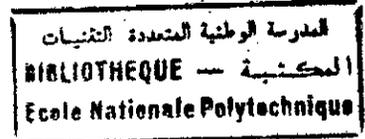
## CHAPITRE IV

- FIG (IV-1<sup>0</sup>) : Le maillage en coordonnées polaires  
FIG (IV-1) : Les lignes de courants et les isothermes pour  $Ra=10^4$   
FIG (IV-1-a) : Les lignes de courants pour  $Ra=10^4$   
FIG (IV-1-b) : Les isothermes pour  $Ra=10^4$   
FIG (IV-1-c) : La température en 3D  
FIG (IV-2) : Les lignes de courants et les isothermes pour  $Ra=10^5$   
FIG (IV-2-a) : Les lignes de courants pour  $Ra=10^5$   
FIG (IV-2-b) : Les isothermes pour  $Ra=10^5$   
FIG (IV-3) : Les lignes de courants et les isothermes pour  $Ra=10^6$   
FIG (IV-3-a) : Les lignes de courants pour  $Ra=10^6$   
FIG (IV-3-b) : Les isothermes pour  $Ra=10^6$   
FIG (IV-3-c) : La température en 3D  
FIG (IV-4) : Les lignes de courants et les isothermes pour  $Ra=10^7$   
FIG (IV-4-a) : Les lignes de courants pour  $Ra=10^7$   
FIG (IV-4-b) : Les isothermes pour  $Ra=10^7$   
FIG (IV-5) : Evolution du nombre du Nusselt local pour différents nombres de Ra  
FIG (IV-6) : Profil vertical de la température à la mi-largeur de la serre pour  $Ra=10^6$   
FIG (IV-7) : Profil vertical de la pression à la mi-largeur de la serre pour  $Ra=10^6$

## ANNEXE B

- FIG (B-1) : Volume de contrôle

## NOMENCLATURE



- $a$ : coefficient de discrétisation
- $A$ : surface de la face de volume de contrôle
- $b$ : le terme constant dans l'équation de discrétisation
- $d$ : coefficient de pression
- $D$ : conductance de diffusion
- $F$ : quantité d'écoulement
- $J$ : flux total (convection plus diffusion)
- $p$ : pression
- $p^*$ : pression estimé
- $p'$ : correction de pression
- $P$ : nombre de Peclet
- $S$ : terme source
- $S_C$ : constant de linéarisation du terme source
- $S_p$ : coefficient de  $\phi_p$  dans le terme source
- $\bar{S}$ : valeur moyenne de terme source sur le volume du contrôle
- $u_i$ : composante de vitesse dans la direction  $i$
- $u, v$ : composantes des vitesses en  $x - y$  direction
- $u^*, v^*$ : les vitesses a la base de  $p^*$
- $u', v'$ : correction des vitesses
- $\hat{u}, \hat{v}$ : pseudo-vitesses
- $x_i$ : coordonnée en direction  $i$
- $x, y$ : coordonnées cartésiennes
- $\alpha$ : facteur de sous-relaxation
- $\alpha_p$ : facteur de sous-relaxation de la pression
- $\Gamma$ : coefficient de diffusion
- $(\delta x)_{e^+}, (\delta x)_{e^-}$ : distance
- $\Delta V$ : volume de volume de contrôle
- $\rho$ : la densité

- $\phi$ : la variable dépendante générale
- $\phi^*$ : la valeur de  $\phi$  a partir de l'itération préalable
- $\bar{\phi}_i$ : correction de  $\phi$  par bloc  $i$  le long de la ligne  $i$
- $e, n, s, w$ : faces de volume de contrôle
- $E, N, P, S, W$ : points de la grille
- $nb$ : les points de la grille voisins de point P
- $\rho_0$ : la densité à  $T_0$
- $\beta$ : coefficient de d'expansion
- $T$ : température
- $T_0$ : température de référence
- $T_c$ : température chaude
- $T_f$ : température froide
- $g$ : accélération de pesanteur
- $r, \theta$ : coordonnées polaires
- $v_r, v_\theta$ : vitesses suivant  $r, \theta$
- $\mu$ : viscosité dynamique
- $\nu$ : viscosité cinématique
- $c_p$ : chaleur spécifique
- $k$ : conductivité thermique
- $R$ : rayon dimensionnel
- $R_0$ : rayon de la serre
- $V_R, V_\theta$ : vitesses adimensionnelles
- $\alpha$ : diffusivité thermique du fluide
- $\Theta$ : température adimensionnelles
- $h$ : enthalpie spécifique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# INTRODUCTION

## INTRODUCTION GENERALE

La fonction essentielle de la serre agricole est de créer un microclimat favorable aux exigences de la plante à partir des conditions extérieures locales ou régionales. Elle est définie par son ossature (forme et structure), par son enveloppe (matériau des parois), et par ses moyens techniques de chauffage, d'humidification et de ventilation.

La serre tunnel conventionnelle est largement utilisée dans le MAGHREB. Cependant, du fait de la formation du gel, surtout en hiver, le climat de cette région constitue un grand inconvénient pour l'utilisation de la serre et ceci est dû aussi au refroidissement nocturne intense, quand la température extérieure diminue, la chaleur se transmet de l'intérieur de la serre vers l'extérieur.

Pour cette raison, les chercheurs se sont orientés vers la recherche d'une solution optimale pour résoudre ce problème. Les recherches ont abouti à l'idée du chauffage de la serre.

Cette idée s'est développée particulièrement en EUROPE où plusieurs études ont été menées dans ce domaine concernant la recherche de l'énergie nécessaire pour le chauffage et de la diversification de cette énergie ainsi que son influence sur la production.

Plusieurs méthodes de chauffage sont alors parus comme le chauffage par le gaz, les puits chauds, l'exploitation des rejets industriels, les pompes à chaleur, ainsi que le stockage de l'énergie solaire pendant le jour afin de l'utiliser pour la nuit.

Etant donné que le but du chauffage est de créer un climat qui favorise la croissance des plantes, il est nécessaire de connaître la distribution de la chaleur dans la serre et d'étudier ses différents échanges thermiques pour éviter les pertes d'énergie ou son insuffisance. Cette étude est très complexe à cause des couplages existant entre les différents échanges de chaleur d'une part et l'évaporation du sol et des plantes ainsi que les autres équipements de la serre d'autre part. Pour simplifier l'étude les chercheurs ont introduit des hypothèses simplificatrices. Par exemple, l'hypothèse qui consiste à étudier chaque élément indépendamment des autres en est une [2].

Dans notre travail, on s'est basé sur cette hypothèse pour étudier la convection naturelle dans une serre chauffée par le sol (tubes enterrés).

Pour présenter cette étude nous avons divisé notre travail en plusieurs chapitres :

- 1- Dans le premier chapitre : nous avons rappelé des notions générales sur les serres, les différents échanges thermiques dans celles ci et nous avons aussi exprimé sous forme d'équations le phénomène de la convection naturelle.
- 2- Dans le deuxième chapitre nous avons présenté la méthode des volumes finis dans le cas bidimensionnel.
- 3- Le troisième chapitre est consacré à l'application de la méthode des volumes finis pour l'étude d'un écoulement de fluide dans le cas de la convection.
- 4- Dans le dernier chapitre nous avons présenté le programme et les résultats obtenus ainsi que les interprétations de ceux-ci.

Enfin, nous terminons ce travail par une conclusion générale.

# **CHAPITRE I**

**GENERALITES SUR LES SERRES**

**ET**

**FORMULATION MATHÉMATIQUE**

## I-1 DEFINITION DE LA SERRE :

La serre est une construction destinée à abriter des cultures de plantes ornementales, légumières ou fruitières, et parfois (dans un but expérimental ou didactique) de toutes autres plantes dans des conditions plus favorables ou plus sûres qu'en plein air. Ceci implique :

- une enveloppe transparente aux radiations nécessaires pour la vie des plantes, d'où résulte un climat modifié par rapport au climat extérieur ;
- des dimensions appropriées aux cultures envisagées, allant des «palmarium» aux serres basses ;
- un substrat naturel ou artificiel et une alimentation en eau ;
- des dispositifs permettant des échanges d'air avec l'extérieur ;
- éventuellement des dispositifs pour limiter les variations de paramètres comme la température ou l'humidité dans la serre ou pour contrôler plus précisément le climat ;

En France, la norme AFNOR/U 57001 indique : les serres de production peuvent se définir comme «enceintes destinées à la culture et à la protection des plantes en exploitant le rayonnement solaire et dont les dimensions permettent à un homme de travail aisément à l'intérieur»[1].

## I-2- DIFFERENTS TYPES DE SERRES :

La conception et la réalisation des serres résultent de compromis entre les contingences climatiques (la perméabilité aux rayonnement solaire, le site où trouve la serre ...) et la disponibilité des matériaux de charpente et de couverture, comme par exemple la résistance au vent, aux surcharges externes (neige, grêle) ou internes (poids des équipements de chauffage, irrigation ect...) et de considération économiques (prix de revient, longévité). Il existe plusieurs formes géométriques de serres :

**1- Serre dôme sphérique :**

Ce type de serre n'est utilisé qu'aux régions où la lumière solaire est très faible dans la plupart des jours de l'année. Cette forme géométrique permet le passage d'une plus grande quantité des rayons solaires.

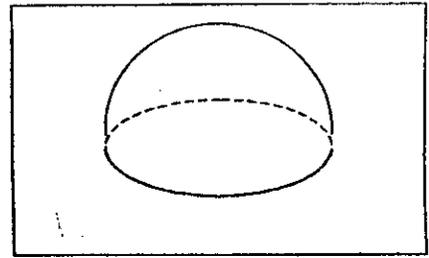
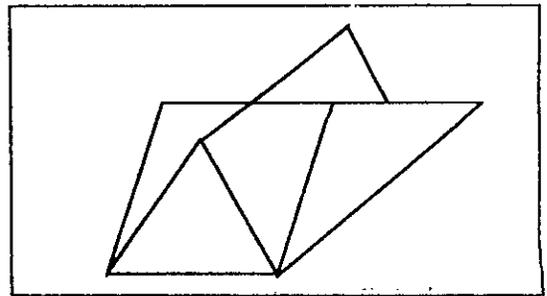


Fig (I-1) : serre dôme sphérique

**2- La serre parabolôïde hyperbolique :**

Comme la précédente, cette forme permet le passage en grand pourcentage des rayons solaires au long de la journée.

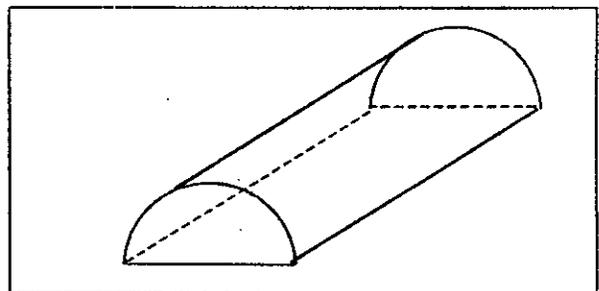
Elle est utilisée particulièrement dans les régions où l'intensité de la lumière diminue beaucoup.



Fig(I-2) : Serre parabolôïde hyperbolique

**3- La serre tunnel :**

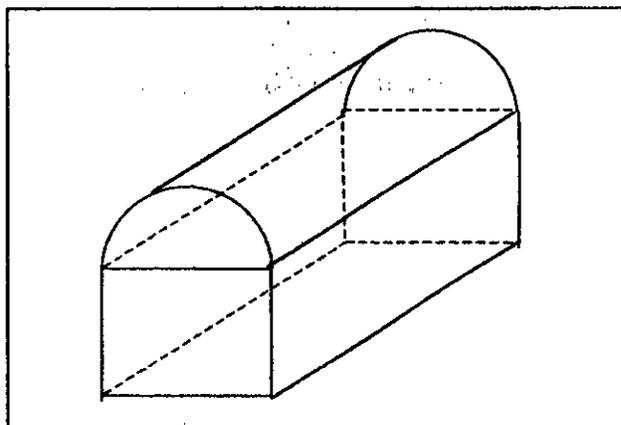
On l'utilise comme les précédentes seulement dans la serre autonome, elle permet le passage d'une grande partie de rayonnement solaire pendant la journée, et c'est la forme la plus utilisée dans les serres autonomes.



Fig(I-3) : Serre tunnel

#### 4 - La serre elliptique :

Cette forme similaire à la serre tunnel avec une petite modification, elle est très utilisée sous forme des serres regroupées.

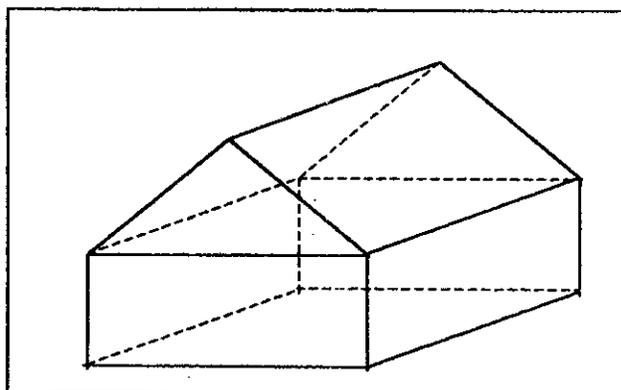


Fig(I-3) : Serre elliptique

#### 5 - la serre chapelle :

Cette forme est très utilisée pour les serres en verre.

Il existe d'autres types de serres ; chacune d'elles est utilisée pour un site et un climat bien précis.



Fig(I-4) : serre chapelle

### I-3 LE CLIMET DE SERRE :

Le climat intérieur de la serre dépend de plusieurs facteurs : de la forme, des dimensions et de l'orientation de la serre, de la ventilation, du couvert végétal présent, des possibilités d'évaporation du sol et du couvert, de la nature de la couverture et du fait que la serre soit plus ou moins perméable aux radiations, plus ou moins perméable à l'air.

Le climat de la serre n'est pas uniforme et varié dans l'espace libre; du centre au bord de la serre, du sol à la toiture, des limites du couvert végétal à l'intérieur.

On peut distinguer deux climats de la serre :

1- Le climat spontané.

2- Le climat modifié.

### I-3-1 CLIMAT SPONTANE DE LA SERRE :

On appelle "climat spontané de la serre ." celui qui se réaliserait dans une serre sans intervention humaine et énergétique importante (les interventions de chauffage, de ventilation forcée...) [1]. Ce climat dépend de plusieurs paramètres climatiques et géométriques (effet de serre, rayonnement solaire, la température extérieure et intérieure, l'orientation de la serre, la vitesse de vent, l'évaporation des plantes, du sol, la teneur en  $CO_2$ ... ). On s'intéresse dans ce qui suit aux paramètres qui ont une relation directe avec l'aspect thermique du climat de la serre.

#### a- Le rayonnement solaire :

Le rayonnement solaire reçu par une surface donnée horizontale est l'éclairement énergétique d'origine solaire de cette surface ou encore l'irradiation par celle-ci.

La source de ce rayonnement, le soleil, considéré comme un corps noir (émetteur et récepteur parfait) a une température de surface voisine de  $5540^{\circ} \text{K}$  [5]. Le rayonnement reçu en un point de la terre a deux composantes :

- Rayonnement direct : ce rayonnement vient du soleil à une direction précise.
- Rayonnement diffus : est constitué par le rayonnement direct absorbé et diffusé par l'atmosphère, en particulier les nuages, ou bien réfléchi par le sol et l'environnement.

Ce type de rayonnement n'a pas donc de direction vraiment privilégiée (isotrope) mais peut avoir une direction dominante.

On distingue trois catégories de radiation de rayonnement solaire :

- le rayonnement ultraviolet(U.V) son limite de l'onde de propagation est située dans l'intervalle  $[0.1 \mu, 0.4 \mu]$ .
- le rayonnement visible :  $[0.4 \mu, 0.80 \mu]$ .

- le rayonnement infra-rouge :  $[0.8 \mu, 100 \mu]$ .

L'intensité du rayonnement solaire qui arrive en un point à la terre dépend des plusieurs facteurs :

1. la position relative de ce point par rapport à la terre (l'altitude et longitude);
2. la position terre par rapport au soleil (date et heure) : la terre est animée d'un double mouvement de rotation :

- Rotation quotidienne sur elle-même (jour et nuit)
- Rotation annuelle autour du soleil.

L'inclinaison de son axe de rotation par rapport au plan de révolution varie de  $+23.5^{\circ}$  au solstice d'été à  $-23.5^{\circ}$  au solstice d'hiver, et s'annule aux équinoxes ; c'est la variation de cet angle –appelé déclinaison– qui est l'origine des saisons ; elle détermine les variations de la course apparente du soleil dans le ciel.

Le décalage entre les courses du 21 juin et du 21 décembre est d'autant plus grand qu'on se rapproche des pôles.

3. Ainsi l'intensité du rayonnement dépend de la direction du levés et du coucher du soleil.

-- Il existe d'autres paramètres climatiques qui ont une relation directe avec l'aspect thermique de la serre :

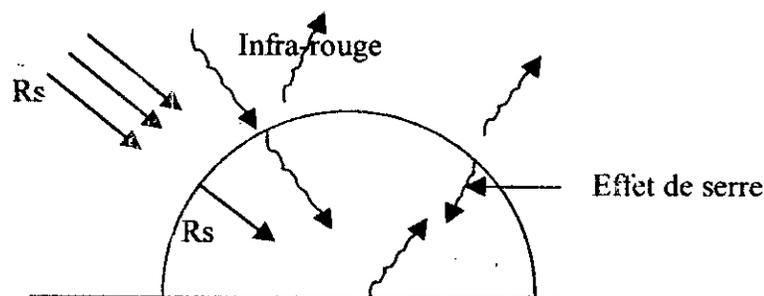
- température de l'air extérieure ou intérieure de la serre
- température du sol.
- température de la plante.
- l'aération des serres.

**b-Effet de serre :**

Il résulte de deux phénomènes distincts :

1. Un « effet d'abri » ou de confinement lié à la réduction des échanges d'air avec l'atmosphère libre, et qui est perceptible même dans des abris apparemment très perméables à l'air.
2. Un « effet de serre » vrai, lié à la présence au-dessus de l'observateur ou du capteur de température d'un écran peu transparent aux rayonnements infra-rouges longs dans la gamme de 10 à 15  $\mu$  émis par le sol, la végétation et tous les éléments constitutifs de la serre exposée au rayonnement solaire (visible et infra-rouge court) pour lequel cet écran est très transparent Fig(I-5) alors que l'atmosphère laisse passer ce rayonnement de 10 à 15  $\mu$ .

Ces deux phénomènes entraînent une élévation de la température par rapport à l'extérieur très nette pendant la journée. Cet effet est variable, d'une part selon la porosité à l'air et l'aération appliquée, et d'autre part selon les propriétés de transmission et d'absorption par la paroi (du rayonnement solaire) et du rayonnement terrestre.



Fig(I-5) : Représentation schématique de l'effet de serre

**I-3-2 LE CLIMAT MODIFIÉ DE LA SERRE :**

Le fait que le climat de la serre est influencé par les conditions climatiques extérieures comme (la température, le rayonnement solaire...), ces paramètres climatiques varient pendant le jour ainsi que pendant l'année. Par conséquent, pour conserver le climat qui favorise la

croissance des plantes dans de meilleures conditions, les serristes introduisent des équipements pour ce but. Parmi ces équipements les appareils de chauffage pour conserver la meilleure température pour la vie des plantes. Il existe différents modes de chauffage :

- Chauffage par écran thermique.
- Chauffage par air pulsé.
- Chauffage par pompe à chaleur.
- Chauffage par les gaines radiantés.
- Chauffage par l'utilisation de l'eau de la géothermie.
- Chauffage du sol par des tuyaux enterrés et circulation d'eau tiède et c'est le cas qu'on a considéré Fig(I-6).

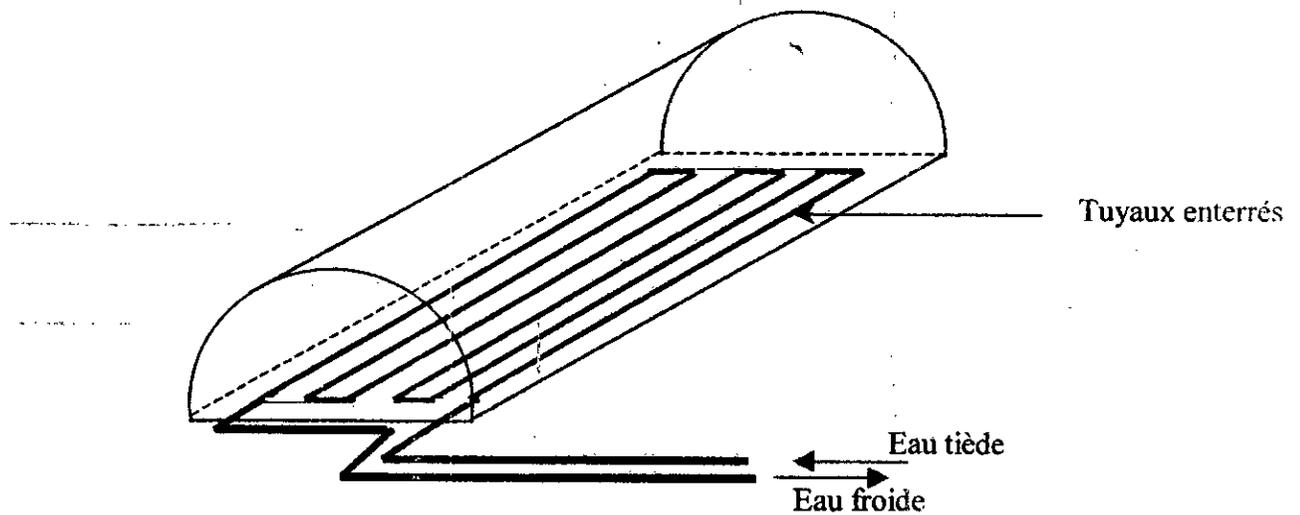
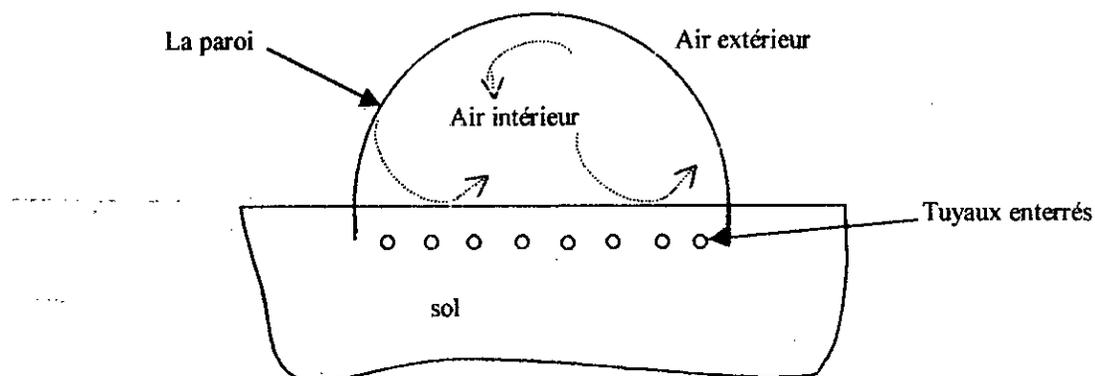


Fig (I-6) : système de chauffage par des tuyaux enterrés

## I-5 FORMULATION MATHÉMATIQUE :

La serre est à la fois un système physique et biologique fort complexe où les différents modes de transfert de chaleur (rayonnement, conduction, convection et renouvellement d'air) et de masse (vapeur d'eau et  $CO_2$ ) interagissent et où notamment la plante et les échanges convectifs jouent un rôle prépondérant. Dans la serre c'est le mode de convection qui régit les échanges de chaleur entre l'air intérieur et toutes les autres surfaces solides : le sol, les parois la culture et les divers systèmes de climatisation, d'après ce constat, les auteurs s'intéressent à l'étude des écoulements d'air d'un milieu confiné, en l'occurrence une serre tunnel fermée, où les échanges par convection naturelle prédominent, ils considèrent le cas où la serre non cultivée et par conséquent le transfert de masse à l'intérieur de la serre n'est pas pris en compte.

fig(I-5.1).



Fig(I-5.1) : Schémas d'une serre tunnel nue chauffée par des tuyaux enterrés

L'étude de la convection naturelle dans les enceintes fournit une description détaillée et riche en information du comportement du fluide confiné, c'est pour ces raisons que ces dernières décennies et avec le développement de l'outil informatique, a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche couronnés par de nombreuses publications et ceci dans tous les domaines (habitat, agronomique, industrie...).[3]

Ce travail est une contribution à la connaissance des écoulements dans une serre tunnel chauffée par des tuyaux enterrés est dont le toit est maintenu à une température constante. Avant d'entamer notre étude on va essayer de donner des notions sur la convection.

### I-5-1 CONVECTION :

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de la l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important du transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz.

Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules fluides adjacentes. L'énergie transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules fluides. Ensuite les particules fluides vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie. Dans ce cas l'écoulement concerne le fluide et l'énergie. L'énergie est à présent emmagasiné dans les particules fluides et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement.

La transmission de la chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection libre et convection forcée ; lorsque l'écoulement se produit au sein du fluide des courants dus simplement aux différences de densité résultant des gradients de température, on dit que la convection est naturelle ou libre. Par contre si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe telle qu'une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé convection forcée.

L'efficacité de la transmission de chaleur par convection dépend largement du mouvement du fluide, c'est pourquoi l'étude du transfert de chaleur par convection est fondée sur la connaissance des caractéristiques de l'écoulement du fluide [5].

### I-5-2 LES SYPOTHESES SIMPLIFICATRICES :

Il est impossible de décrire parfaitement un phénomène physique, et quelques approximations sont nécessaires pour mettre un problème sous forme d'équations pouvant être résolues. L'étude de la convection naturelle comme dans les autres branches techniques

nécessite des hypothèses concernant soit le fluide (l'air) ou les autres équipements. Dans notre cas, on considère les hypothèses suivantes :

1. La serre est infiniment longue peut être considérée comme linéairement homogène dans le sens de sa longueur. L'étude porte donc sur une représentation en deux dimensions de la serre qui correspond à une coupe transversale de celle-ci.
2. L'écoulement est laminaire.
3. La dissipation visqueuse est négligée.
4. Le régime est permanent.
5. Les propriétés physiques de l'air à l'intérieur de la serre sont supposées constantes, hormis sa masse volumique  $\rho$  dont la variation en fonction de la température est à l'origine de la convection naturelle en admettant les hypothèses de Boussinesq c-a-d la masse volumique  $\rho$  peut être considérée comme constante sauf dans le terme de force de volume son expression en fonction de la température est donnée par l'équation suivante :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (I-1)$$

où :  $T_0$  : est la température de référence pour notre cas et c'est la température du toit.

### I-5-3 LES EQUATIONS DE BASE :

Les équations régissant le phénomène de la convection naturelle dans la serre, sont celles qui traduisant la conservation des différentes propriétés physico-chimiques mises en jeu. En vertu des hypothèses simplificatrices, ces équations s'écrivent :

**a- équation de continuité :**

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (I-2)$$

**b- équation de quantité de mouvement :**

Dans le cas de la convection naturelle ce sont les différences de masse volumique dans le fluide qui sont à l'origine de son mouvement. Si l'on note  $\rho_0$  la masse volumique loin des parois chaudes, une particule fluide de masse volumique  $\rho$  et de volume  $\Delta V$ , située au

voisinage d'une paroi d'échange sera soumise à son poids  $\rho g \Delta V$  et à la poussée Archimede  $\rho_0 g \Delta V$  fig(I-5.2).

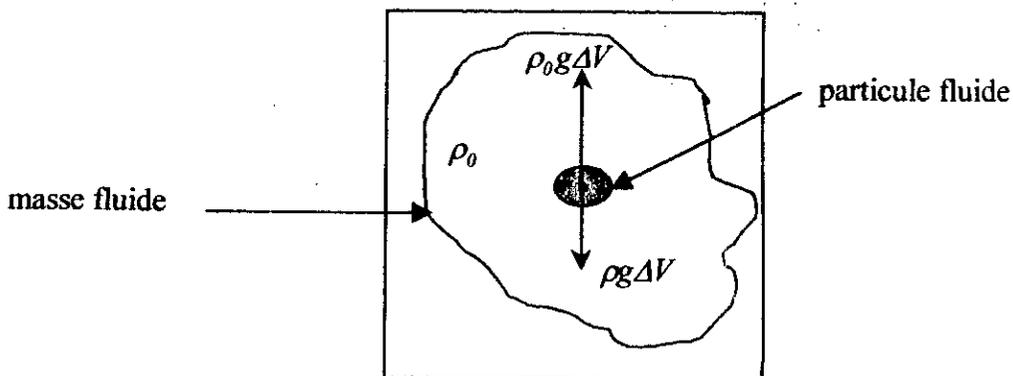


Fig (I-5.2) : Forces s'exerçant sur une particule fluide en convection naturelle.

On admet que la densité du fluide qui entoure la particule de densité  $\rho$  est partout constante et égale à  $\rho_0$ .

La résultante des forces s'exerçant sur la particule fluide sera donc :

$$\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_\theta \tag{I-3}$$

où :

$$F_r = (\rho_0 - \rho) g \Delta V \sin \theta \tag{I-4}$$

$$F_\theta = (\rho_0 - \rho) g \Delta V \cos \theta \tag{I-5}$$

les équations de la quantité de mouvement seront donc :

suivant  $r$  :

$$\rho_0 \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + f_r \tag{I-6}$$

suivant  $\theta$  :

$$\rho_0 \left( v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + f_\theta \tag{I-7}$$

avec:

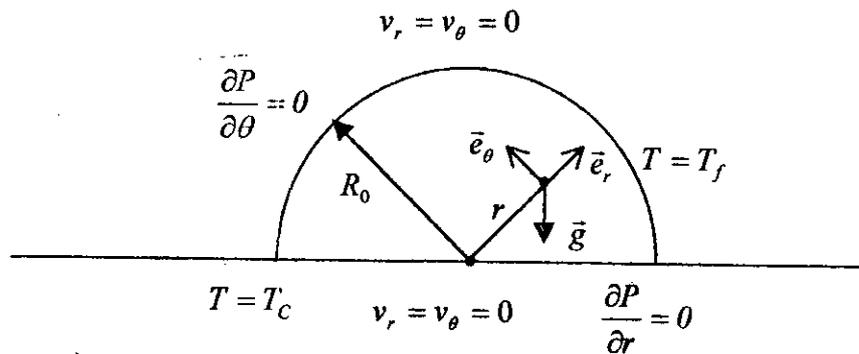
$$f_r = \frac{F_r}{\Delta V} = (\rho_0 - \rho)g \sin \theta = \rho_0(T - T_0)g \sin \theta \quad (I-8)$$

$$f_\theta = \frac{F_\theta}{\Delta V} = (\rho_0 - \rho)g \cos \theta = \rho_0(T - T_0)g \cos \theta \quad (I-9)$$

c- équation de l'énergie :

$$\rho c_p (v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}) = k (\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \theta^2}) \quad (I-10)$$

I-5-3 LES CONDITIONS AUX LIMITES :



Fig(I-5.3) : représentation schématique du modèle :serre tunnel

Au sol :

- $\theta = 0$  et  $\theta = \pi \Rightarrow v_r = v_\theta = 0, T = T_f, \frac{\partial P}{\partial r} = 0$

- $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$

Sur la paroi:

- $r = R_0 \Rightarrow v_r = v_\theta = 0, T = T_f, \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$ .

$$\bullet \quad r = \xi \quad \Rightarrow \quad v_r = v_\theta = 0, \quad T = T_f, \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0.$$

Le point  $r = 0$  est un point singulier. Pour éviter la division par zéro on considère que la serre est un demi anneau de petit rayon  $r = \xi$

#### I-5-4 EQUATIONS DE TRANSFERT ADIMENSIONNELLES :

Par le choix de grandeurs de références, la réécriture du système d'équations fait apparaître des nombres adimensionnels régissant l'écoulement de manière intrinsèque. L'analyse de grandeurs de ces nombres permet de comparer l'influence et le poids respectif des différents termes de l'équation en fonction de la nature de l'écoulement.

Plusieurs cas de mise sous forme adimensionnelle sont envisageables selon le problème traité - par exemple - dans le cas de la convection naturelle, la vitesse de référence peut être la vitesse de diffusion  $V_0 = \frac{a}{L}$  qui est intéressante pour des problèmes à nombre de Rayleigh modéré.

Lorsque le nombre de Rayleigh devient important, il est préférable d'utiliser pour vitesse de référence une vitesse caractéristique du mouvement convectif, c'est la vitesse ascensionnelle  $V_0 = \sqrt{g\beta\Delta TR_0}$ .

Les grandeurs de référence sont définies de la façon suivante :

- $R_0$  : le rayon de la serre.
- $\Delta T = T_C - T_f$  : l'écart de température de référence.

où :  $T_C$  représente la température du sol chaud et  $T_f$  la température de la paroi froide.

La vitesse et la pression sont données respectivement par :

$$V_0 = \sqrt{g\beta\Delta TR_0}$$

$$P_0 = \rho V_0^2 = \rho g\beta\Delta TR_0$$

Cette adimensionnalisation fait apparaître les variables adimensionnelles suivantes :

$$R = \frac{r}{R_0} \quad ; \quad V_r = \frac{v_r}{V_0} \quad ; \quad V_\theta = \frac{v_\theta}{V_0} \quad ; \quad P = \frac{P}{P_0} \quad ; \quad \Theta = \frac{T - T_f}{T_c - T_f}$$

Par suite, les équations réduites à partir du changement de variables définies ci-dessus s'écrivent :

**a- équation de continuité :**

$$\frac{\partial V_r}{\partial R} + \frac{V_r}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (I-11)$$

**b- équation de quantité de mouvement :**

suivant  $R$  :

$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial R} + \frac{V_r}{R} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{R} = -\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_r}{\partial R} - \frac{V_r}{R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) + \Theta \sin \theta \quad (I-12)$$

suivant  $\theta$  :

$$V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_\theta V_r}{R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left( \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_\theta}{\partial R} - \frac{V_\theta}{R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) + \Theta \cos \theta \quad (I-13)$$

**c- équation de l'énergie :**

$$\left( V_r \frac{\partial \Theta}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{\sqrt{Pr Ra}} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta^2} \right] \quad (I-14)$$

Ces équations font apparaître les nombres sans dimensions suivants :

$Gr$  : le nombre de Grashof défini par :

$$Gr = \frac{g \beta \Delta T R_0^3}{\nu^2} = \frac{\text{force ascensionnelle} * \text{force d'inertie}}{(\text{force de viscosité})^2} \quad (I-15)$$

Le nombre de Grashof remplace le nombre de Reynolds en convection naturelle

$Pr$  : le nombre de Prandtl donné par :

$$Pr = \frac{v}{a} = \frac{\text{Diffusivité matière}}{\text{Diffusivité thermique}} \quad / \quad a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (I-16)$$

Le nombre de Prandtl caractérise la distribution des vitesses par rapport à la distribution de la température

$Ra$  : le nombre de Rayleigh

$$Ra = \frac{g\beta\Delta T R_0^3}{\nu a} = \frac{\text{La force de poussé}}{\text{Traîné visqueuse x taux de diffusion de la chaleur}} \quad (I-17)$$

Taux de diffusion : est un nombre égal au temps pour qu'une goutte de fluide monte dans une cellule de convection par exemple.

Le nombre de Rayleigh exprime la relation entre les effets de la force de poussé et les effets dissipatifs de la traîné et de la diffusion de la chaleur ; le gradient de température n'est pas suffisant pour assurer l'établissement d'un écoulement convectif seulement si la poussée résultant de ce gradient dépasse les effets dissipatifs de la traîné visqueuse et de la diffusion de la chaleur, en d'autres termes on dit que la convection démarre lorsque le nombre de Rayleigh dépasse une valeur critique.

On utilise dans la présentation des résultats le nombre de Nüsselt défini par :

$$Nu = h_c \frac{L}{k_f} \quad (I-18)$$

où  $k_f$  : la conductivité thermique de fluide et  $L$  la longueur de la surface d'échange.

Le nombre de Nüsselt peut être interprété physiquement comme étant le rapport du gradient de température dans le fluide en contact immédiat avec la surface au gradient de température de référence  $(T_s - T_0) / L$  [5].

En pratique le nombre de Nusselt est une mesure commode du coefficient d'échange de chaleur par convection car une fois sa valeur est connue, on peut calculer le coefficient d'échange de chaleur par convection d'après la relation :

$$\bar{h}_c = Nu \frac{k_f}{L} \quad (I-19)$$

### I-5 3 LES CONDITIONS AUX LIMITES ADIMENTIONNELLES:

Au sol :

- $\theta = 0$  et  $\theta = \pi \Rightarrow V_r = V_\theta = 0, \Theta = 1, \frac{\partial P}{\partial R} = 0$

- $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} = 0$

Sur la paroi :

- $R = 1 \Rightarrow V_r = V_\theta = 0, \Theta = 0, \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$

- $R = \frac{\xi}{R_0} \Rightarrow V_r = V_\theta = 0, \Theta = 0, \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$

# CHAPITRE II

METHODE

DES

METHODE  
VOLUMES FINIS

## II-1- INTRODUCTION :

De nos jours, de nombreuses méthodes numériques utilisant différents schémas de discrétisation ont été développées pour l'étude de la convection naturelle décrite, bien entendu, par un système d'équations aux dérivées partielles. Parmi ces schémas, on peut citer:

- 1- la méthode de différences finies : cette méthode peut être adaptée de façon à prendre en considération la forme géométrique rectangulaire.
- 2- la méthode des éléments finis : elle permet par sa souplesse de générer des maillages qui épousent la forme de la géométrie quelle que soit sa complexité.
- 3- la méthode des volumes finis : cette méthode peut être soit à base de la méthode des différences finies, soit à base de la méthode des éléments finis.

Cette dernière méthode, en raison des avantages qu'elle offre, est devenue fréquemment utilisée.

Dans notre étude, nous avons opté pour la procédure des volumes finis développée par S.V.Patankar [5] car :

- Elle est simple à comprendre et conduit à une interprétation physique directe.
- La solution recherchée représente à la fois les valeurs aux nœuds ainsi que les fonctions d'interpolation (les profils). Alors que pour la méthode des différences finies c'est uniquement les valeurs aux nœuds qui constituent la solution sans précision explicite aucune sur la variation de la variable entre les nœuds.
- Elle permet aussi la réduction des instabilités numériques pour des sollicitations élevées [5].

## II-2- MODELE MATHEMATIQUE :

### II-2-Equations différentielles gouvernant l'écoulement de fluide :

Des problèmes pratiques introduisant l'écoulement de fluide et le transfert de chaleur et de masse sont gouvernés par les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie, ect. Ces principes se traduisent par des équations aux dérivées partielles. Pour une formulation numérique, il est important de savoir que ces équations gouvernant ces problèmes possèdent une forme commune; ce qui est nécessaire pour

construire une méthode numérique permettant la résolution de ces équations [9]. Si la variable dépendante est notée par  $(\phi)$ , la forme de l'équation différentielle générale correspondant à l'état permanent se traduit par:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + S \quad (\text{II-1})$$

où la notation du tenseur cartésien a été utilisée. Le symbole  $u_i$  indique la composante de la vitesse dans la direction  $x_i$  et  $\rho$  la densité. Le terme du membre gauche de l'équation (II-1) est appelé le terme de convection, représentant le flux de  $\phi$  par la quantité d'écoulement de masse  $\rho u_i$ . Les termes du second membre de l'équation (II-1) sont connus respectivement sous le terme de diffusion et le terme source. Le premier terme figurant dans l'équation (II-1) joue souvent un rôle important [4] en présence de  $\phi$ . Quant au second terme, i.e.  $S$ , il est en principe introduit pour représenter les mécanismes de la génération (ou de perte) de  $\phi$ . La variable indépendante  $\phi$  peut remplacer une variété de quantités physiques. Elle peut, par exemple, représenter les composantes de la vitesse, l'enthalpie (ou la température), fractions massiques, paramètres de turbulence, flux de radiation, etc... (voir annexe A). Chaque signification de  $\phi$  est accompagnée d'expressions appropriées de  $\Gamma$  et  $S$  suivies de conditions aux limites adéquates.

### II-2-2 Coefficient de diffusion :

Le coefficient de diffusion  $\Gamma$  permet une représentation générale des propriétés du fluide telles que la viscosité, la conductivité, qui dépendant du gradient de la variable en question, mène au flux de diffusion (par exemple une contrainte visqueuse ou un flux de chaleur). Si le flux de diffusion pour un  $\phi$  donné n'est pas conduit par le gradient de  $\phi$  alors  $\Gamma$  pourra être mise égale à zéro et le flux de diffusion s'exprimera comme une partie de  $S$  [4]. En général le coefficient de diffusion  $\Gamma$  peut être non uniforme ; il peut dépendre de la position, comme dans un matériau composite, ou des quantités telles que la vitesse locale, la température, la densité, etc... [5].

### II-2-3 Terme source :

La génération de la chaleur interne dans un fluide (production ou destruction d'espèces chimiques dans une réaction chimique par exemple), la force de volume agissant sur un

écoulement de fluide, représentent des exemples communs du terme source  $S$  figurant dans les équations pour des variables spécifiées.

Dans l'équation du mouvement pour les composantes des vitesses  $u_i$ , le terme source inclue le gradient de pression ( $-\frac{\partial p}{\partial x_i}$ ), les forces de volume dans la direction  $i$ , et une contribution des termes de contraintes visqueuses qui ne peuvent pas être contenues dans le terme de diffusion (voir annexe A).

#### II-2-4 Equation de continuité :

Quoique le comportement de n'importe quelle variable dépendante  $\phi$  soit gouverné par l'équation (II-1), la quantité de l'écoulement de masse  $\rho u_i$ , qui y figure doit satisfaire une équation additionnelle : C'est l'équation de continuité. Celle-ci peut être écrite, pour l'écoulement permanent, comme :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \quad (\text{II-2})$$

Le degré de liberté additionnel qui peut être invoqué pour satisfaire cette équation est le champ de pression, qui entre dans le terme source des équations de mouvement et qui doit être rajouté pour que le champ de vitesses résultant puisse satisfaire l'équation de continuité. Ce couplage entre le champ de vitesse et de pression est utilisé pour construire la procédure de calcul pour l'écoulement de fluide.

### II-3 METHODE NUMERIQUE :

#### II-3-1 Grille et volume de contrôle :

Dans la méthode numérique décrite ici, l'objet est de calculer les valeurs des variables dépendantes en question en un système de points choisis appelés " points de la grille ". Les équations algébriques pour ces valeurs (appelées aussi équations de discrétisation ) sont obtenues en intégrant les équations différentielles gouvernant l'écoulement de fluide sur un sous- domaine entourant chaque point de la grille. Ces sous domaines sont appelés volumes de contrôle.

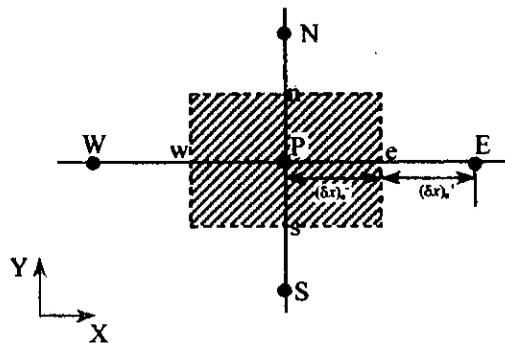
Pour une grille donnée, les volumes de contrôles peuvent être définis de différentes façons. La technique utilisée ici est illustrée dans Fig.II-1. Dans cette pratique, il est convenable de choisir d'abord les limites des volumes de contrôle et de placer ensuite les points de la grille.

Comme montré sur Fig.II-1, le domaine de calcul est divisé en volumes de contrôle; les lignes en pointillées représentent les limites des volumes de contrôle. Les points de la grille sont alors placés aux centres géométriques des volumes de contrôle. Les lignes continues dans Fig.II-2, sont les lignes de la grille et les points représentés en gras sur Fig.II-2 indiquent les points de la grille. Pour le cas bidimensionnel représenté (même figure), un point donné de la grille communique avec les quatre points voisins de la grille à travers les quatre faces du volume de contrôle. Le cas d'un volume de contrôle proche de la limite (frontière) est un peu différent ; c'est le cas du volume de contrôle hachuré indiqué sur fig.II-2. Ici, une face du volume de contrôle coïncide avec la limite du domaine de calcul, et un point limite de la grille est placé au centre de la face du volume de contrôle (une manière de voir cette situation est d'imaginer un volume de contrôle d'épaisseur infinitésimal situé à la frontière). Cet arrangement permet de traiter facilement les conditions aux limites.

Le volume de contrôle hachuré peut accepter avec facilité une valeur donnée de  $\phi$  à la frontière ou un flux donné à travers la surface limite  $\Gamma$ .

### II-3-2 Equation de conservation pour le volume de contrôle :

L'équation différentielle (II-1) donnée sous forme générale peut maintenant être intégrée sur le volume de contrôle montré dans Fig.II-1.



Fig(II-2) volume de contrôle

Le volume de contrôle est construit autour du point P de la grille, les autres points E, W, N, S de la grille indiquent les points voisins de P situés respectivement à l'Est, à l'Ouest, au Nord et au Sud du point P. Les faces correspondantes du volume de contrôle sont dénotées par e, w, n et s.

Il est convenable de combiner le flux de convection et de diffusion qui apparaissent dans l'équation (II-1). Soit  $J_i$  le flux total dans la direction  $i$  (convection plus diffusion). Ainsi,

$$J_i = \rho u_i \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (\text{II-3})$$

L'équation différentielle résultante est :

$$\frac{\partial J_i}{\partial x_i} = S \quad (\text{II-4})$$

L'intégration de cette équation sur le volume de contrôle montré dans Fig(II-1), mène à :

$$J_w A_w - J_e A_e + J_s A_s - J_n A_n + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (\text{II-5})$$

où  $J$  représente les flux totaux relativement aux faces du volume de contrôle,  $\bar{S}$  est le terme source moyen sur le volume de contrôle et  $\Delta V$  est le volume du volume de contrôle. Quoique pour les coordonnées cartésiennes, les aires  $A_w$  et  $A_e$  soient égales, des symboles différents ont été utilisés pour généraliser.

### II-3-3 Flux de convection et flux de diffusion :

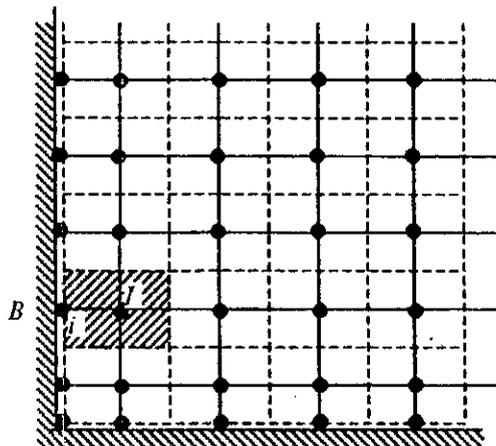


Fig.II-1 Grille et volume de contrôle

Considérons la région entre les points P et E de la grille (voir Fig (II-2)). Si un problème de convection-diffusion unidimensionnel est résolu entre les points P et E, un profil exponentiel de  $\phi$  [4] est obtenu comme une solution exacte. La solution exponentielle mène à :

$$J_e = F_e \left( \phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\exp P_e - 1} \right) \quad (\text{II-6})$$

où  $P_e$  et le nombre de Peclet est donné par :

$$P_e = \frac{F_e}{D_e} \quad (\text{II-7})$$

Ici  $F_e$  est la quantité d'écoulement  $\rho u_e A_e$  et  $D_e$  est la conductance de diffusion. Si le coefficient de diffusion  $\Gamma$  est supposé uniforme sur chaque volume de contrôle, une expression convenable de  $D_e$  est obtenue :

$$D_e = A_e \left[ \frac{(\partial x)_{e^-}}{\Gamma_P} + \frac{(\partial x)_{e^+}}{\Gamma_E} \right]^{-1} \quad (\text{II-8})$$

Où les distances  $(\partial x)_{e^-}$  et  $(\partial x)_{e^+}$  sont indiquées dans Fig.II-2. L'expression de  $D_e$  donnée de cette manière présente plusieurs avantages [10].

### II-3-4 Simplification de l'expression du flux :

Puisque la fonction exponentielle apparaissant dans l'équation (II-6) consomme un temps de calcul, des approximations ont été introduites à l'expression du flux. L'une de ces approximations est le schéma hybride (voir annexe B). Une meilleure approximation à l'équation (II-6) est donnée par l'expression suivante :

$$J_e = F_e \phi_P + \left\{ D_e A_e \left( |P_e| + \left\| -F_e, 0 \right\| \right) \right\} (\phi_P - \phi_E) \quad (\text{II-9})$$

où

$$A(|P|) = \left\| 0, (1 - 0.1|P|)^5 \right\| \quad (\text{II-10})$$

Ici le symbole  $\|a, b\|$  est utilisé pour noter le maximum de  $a$  et  $b$ . Du fait de la présence de la puissance 5 dans l'équation (II-10), le schéma de discrétisation résultant de l'utilisation des équations (II-9) et (II-10) est appelée schéma de la règle de puissance. Il peut être montré que la fonction  $A$  de l'équation (II-10) est plus facile à calculer que la fonction exponentielle et que les équations (II-9) et (II-10) donnent une approximation extrêmement bonne à l'expression exacte [10] donnée par l'équation (II-6).

### II-3-5 Linéarisation du terme source :

Si le terme source  $\bar{S}$  dans l'équation (II-5) est connu, aucune difficulté ne se présentera. Mais souvent, le terme source dépend de la variable  $\phi$  elle-même. Afin que l'équation de discrétisation résultant reste linéaire (au moins nominalement), le terme source  $\bar{S}$  est exprimé comme une fonction linéaire de  $\phi_p$ . Ainsi, la formule de linéarisation peut être écrite comme :

$$\bar{S} = S_C + S_p \phi_p \quad (\text{II-11})$$

où  $S_p$  est le coefficient de  $\phi_p$  et  $S_C$  est la partie de  $\bar{S}$  qui ne peut pas dépendre explicitement de  $\phi_p$ .

Les meilleures expressions de  $S_C$  et  $S_p$  dépendent de la formule réelle de  $S$ .

Plusieurs formulations alternatives sont possibles. Ici il est peut être suffisant de noter deux points primordiaux [5].

- Premièrement, la linéarisation du terme source est souvent une opération cruciale, elle permet d'assurer un succès dans le calcul dans plusieurs situations complexes.
- Deuxièmement, il est préférable que la linéarisation engendre un signe négatif de  $S_p$ , car un signe positif de  $S_p$  peut conduire à une divergence.

### II-3-6 Equation finale de discrétisation :

Une substitution des relations déterminées dans les deux derniers paragraphes dans l'équation (II-5) mène à l'équation de discrétisation finale. Celle-ci peut être écrite comme :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (\text{II-12})$$

$$\text{où:} \quad a_E = D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\| \quad (\text{II-13})$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + \|-F_w, 0\| \quad (\text{II-14})$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + \|-F_n, 0\| \quad (\text{II-15})$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + \|-F_s, 0\| \quad (\text{II-16})$$

$$b = S_C \Delta V \quad (\text{II-17})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \Delta V \quad (\text{II-18})$$

Ici  $F_e, F_w, F_n$  et  $F_s$  représentent les quantités d'écoulement à travers les faces respectives du volume de contrôle. Les nombre Peclet  $P_e, P_w, P_n$  et  $P_s$  sont définis selon l'équation (II-7), et les conductances de diffusion correspondantes sont obtenues à partir de l'équation (II-8). La fonction A est définie par l'équation (II-10). L'expression de  $a_P$  comme donnée par l'équation (II-18) résulte de la superposition des quantités d'écoulement  $F_e, F_w, F_n$  et  $F_s$  qui satisfont l'équation de continuité pour le volume de contrôle.

Il est préférable d'écrire maintenant l'équation (II-12) sous une forme généralisée :

$$a_P \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (\text{II-19})$$

Où l'indice  $nb$  désigne les points de la grille voisins de P, la sommation tient compte de tous les voisins. Pour le cas bidimensionnel, pour lequel l'équation (II-12) était obtenue, quatre voisins sont présents alors que six voisins doivent être considérés pour le problème tridimensionnel.

### I-3-7 Les quatre règles de base :

#### Règle 1 : consistance aux faces des volumes de contrôle (continuité)

Lorsqu'une face est commune à deux volumes de contrôle adjacents, le flux qui la traverse doit être représenté par la même expression dans les

équations discrétisées pour chacun des deux volumes de contrôle.

**Règle 2 : coefficients positifs**

Pour la plupart des situations intéressantes la valeur de la variable  $\phi$  en un point donné est influencée par ses valeurs aux nœuds voisins seulement à travers les processus de convection et de diffusion. Il s'ensuit qu'une augmentation de la valeur de  $\phi$  en un nœud engendre une augmentation (non une diminution) pour les valeurs aux nœuds voisins, les autres conditions étant fixées. Pour cela, les coefficients  $a_p$  et  $a_{nb}$  doivent avoir tous le même signe (on convient de prendre le signe positif).

**Règle 3 : pente négative pour le terme source linéarisé**

D'après la règle 2, les coefficients  $a_p$  et  $a_{nb}$  de l'équation (II-18) sont positifs, mais  $a_p$  peut éventuellement négatif à cause du terme  $S_p$ , entraînant ainsi une possibilité d'instabilité numérique. C'est pourquoi il faut que  $S_p$  soit toujours inférieur ou égal à zéro.

**Règle 4 : somme des coefficients voisins**

En général, les équations différentielles gouvernant l'écoulement de fluide contiennent uniquement les dérivées de la variable dépendante  $\phi$ . Par conséquent, si la fonction  $\phi$  vérifie les équations différentielles,  $\phi + c$  (ou  $c$  est une constante arbitraire) vérifie aussi ces équations. Cette propriété doit apparaître dans les équations discrétisées c.a.d que l'équation (II-12) doit être toujours vérifiée lorsque  $\phi_p$  et  $\phi_{nb}$  sont augmentées de  $c$ ; Ce qui explique que  $a_p$  est la somme des coefficients voisins.

Une autre façon de voir cette règle est qu'en absence du terme source et les températures (par exemple) voisins  $T_{nb}$  sont égales, la température centrale  $T_p$  doit leur être égale. Dans ces conditions, il n'y a qu'une mauvaise formulation qui peut prédire le contraire.

**II-3-8 Condition aux limites :**

En se référant à Fig.II-1, il peut être remarqué que, puisqu'un volume de contrôle existe autour de chaque point interne de la grille, il lui correspondra alors une équation de discrétisation telle que l'équation (II-12). Dans ce système d'équations, les valeurs de  $\phi$  aux points limites apparaîtront. Si ces valeurs (comme  $\phi_B$ ) sont connues, la solution des équations sera obtenue directement. Si, au contraire, une certaine information sur le flux limite est

donnée, il est nécessaire d'écrire une équation similaire à l'équation (II-6) pour le flux limite en fonction de  $\phi_B$  et  $\phi_I$ . L'utilisation de cette équation peut entraîner l'élimination de la valeur inconnue de  $\phi_B$  à partir de l'équation du volume de contrôle pour le point  $I$  de la grille.

### II-3-9 Non-linéarité :

D'après ce qui a été dit précédemment (conditions aux limites), il peut être conclu que l'équation (II-12) représente un système d'équations suffisant pour l'évaluation des valeurs de  $\phi$  aux points de la grille. Si les équations étaient vraiment linéaires, une solution pourrait être obtenue directement. Cependant, ces équations sont nominalement linéaires. Les coefficients dans l'équation (II-12) peuvent eux même dépendre des valeurs de  $\phi$ . De plus, puisque  $\phi$  peut représenter un nombre de quantités physiques, les coefficients pour un  $\phi$  spécifié peuvent être influencés par d'autres  $\phi$ . Autrement dit, lorsque  $\phi$  représente la température, ses coefficients de discrétisation peuvent dépendre de la vitesse, des paramètres de turbulence, de la concentration et ainsi de suite.

Du fait de ces liens entre les  $\phi$  et les non-linéarités, la solution finale doit être obtenue par itération. A n'importe quelle étape, les coefficients de discrétisation peuvent être calculés à partir des estimations courantes de toutes les valeurs de  $\phi$ .

La solution des équations, comme (II-12), donne alors une estimation améliorée. Lorsque, après plusieurs répétitions de ce processus, toutes les valeurs de  $\phi$  cessent de changer, la convergence vers la solution finale est atteinte. Ainsi, la solution d'un système non linéaire et des équations couplées peut être obtenue par plusieurs solutions intermédiaires données par des équations algébriques découplées et nominalement linéaires.

Il ne s'en suit pas toujours que des itérations successives pourraient mener à une solution convergente. Parfois, les valeurs de  $\phi$  oscillent ou divergent. Une telle divergence du processus d'itération doit être évitée.

Une variété de techniques traitant des équations de discrétisation à été développée afin de minimiser les chances de divergence. De plus, il est préférable de « ralentir » (diminuer) les changements dans les coefficients d'une itération à une autre. Ceci peut être accompli en contrôlant les changements dans les valeurs de  $\phi$  par une technique appelée « sous-relaxation » qui sera discutée dans le paragraphe suivant.

## II-4 SOUS-RELAXATION :

L'équation (II-19) peut être réécrite comme

$$\phi_p = \phi_p^* + \left[ \frac{\sum a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} - \phi_p^* \right] \quad (\text{II-20})$$

où  $\phi_p^*$  indique la valeur de  $\phi_p$  à partir de l'itération précédente. L'expression mise entre crochets, Eq.(II-20) peut être interprétée comme le changement de  $\phi_p$  dans l'itération courante. Pour réduire ce changement, un facteur  $\alpha$  de « sous- relaxation » ( $0 < \alpha < 1$ ) peut être introduit :

$$\phi_p = \phi_p^* + \alpha \left[ \frac{\sum a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} - \phi_p^* \right] \quad (\text{II-21})$$

Lorsque la convergence est atteinte ( $\phi_p = \phi_p^*$ ), la satisfaction de l'équation(II-21) garantie alors celle de l'équation (II-19). L'équation (II-21) peut être réécrite autrement :

$$\frac{a_p}{\alpha} \phi_p = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b + \frac{(1-\alpha)a_p \phi_p^*}{\alpha} \quad (\text{II-22})$$

L'utilisation de l'équation (II-22) avec une valeur appropriée de  $\alpha$  entraîne la " sous-relaxation " voulue dans le système. Si  $\alpha$  s'approche de zéro, les valeurs de  $\phi$  changent très lentement. Lorsque  $\alpha=1$ , aucune " sous-relaxation " n'est effectuée. Si, au contraire  $\alpha$  est  $>1$ , les valeurs de  $\phi$  changent plus rapidement. Ce comportement est connu sous le nom de " sur-relaxation ".

## II-5 SOLUTION DES EQUATIONS ALGEBRIQUE :

La procédure de résolution décrite jusqu'ici consiste à supposer que le système d'équations algébriques nominalement linéaires peut être résolu par une méthode convenable.. Les méthodes directes qui sont disponibles exigent un temps de calcul et une place de mémoire excessifs. De plus, puisque le système d'équations nominalement linéaires doit être résolu à chaque itération, les dépenses de la solution directe semblent alors inacceptables. Par conséquent une méthode itérative pour la résolution des équations algébriques est employée, la méthode proposée se compose de deux parties :

- 1- La technique ligne par ligne.
- 2- La procédure de correction par block.

### II-5-1 Technique ligne par ligne :

La méthode utilisée la TDMA comme son élément de base. Dans un problème 2D, les équations pour toutes les valeurs de  $\phi$  suivant la ligne de la grille sont considérées simultanément. Les équations, bien entendu, contiennent aussi les valeurs de  $\phi$  suivant les 2 lignes de la grille voisines. Si les valeurs de  $\phi$  de la ligne voisines sont substituées de la meilleure évaluation disponible, alors les équations suivantes choisie ont la même apparence que les équations en 1D et peuvent être résolue simultanément par la TDMA( voir annexe C). Lorsque toutes les lignes sont consultées de cette façon, une itération de la technique ligne par ligne est complète.

### II-5-2 Procédure de correction par block :

La vitesse de convergence de la technique ligne par ligne peut être augmentée en lui rajoutant une méthode de correction additive, qui appelée ici procédure de correction par block.

Les détails relatifs au présent problème seront donnés ici :

Les équations de discrétisation (II-12) peuvent être exprimées par :

$$a_y \phi_y = b_y \phi_{i+1,j} + c_y \phi_{i-1,j} + d_y \phi_{i,j+1} + e_y \phi_{i,j-1} + f_y \quad (\text{II-23})$$

où les indices  $i$  et  $j$  représentent les positions des points de la grille dans les directions  $x$  et  $y$ , respectivement. L'équation telle que (II-23) peut être écrite pour tous les points internes de la grille pour lesquels :

$$i=2,M \qquad j=2,N$$

Supposons que les valeurs limites  $\phi_{1,j}$ ,  $\phi_{M+1,j}$ ,  $\phi_{i,1}$  et  $\phi_{i,N+1}$  aient été soit éliminées de l'équation (II-23) en utilisant la condition à la limite du flux ou, si elles sont connues, substituées et contenues dans les  $f_y$  pour le volume de contrôle proche de la limite. Il vient que :

$$\begin{aligned}
 b_{M,j} &= 0 \\
 c_{1,j} &= 0 \\
 d_{i,N} &= 0 \\
 e_{i,1} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{II-24}$$

L'idée de base de la procédure de correction par block est qu'un champ non convergent  $\phi_{ij}^*$  obtenu à partir des itérations antérieures est corrigé en rajoutant des corrections  $\bar{\phi}_i$  suivant les lignes correspondant à  $i$  constante, ainsi :

$$\phi_{ij} = \phi_{ij}^* + \bar{\phi}_i
 \tag{II-25}$$

Les corrections  $\bar{\phi}_i$  sont choisies telle que la conservation de l'intégrale sur les blocs de volume de contrôle définis par chaque ligne correspondant à  $i$  constante est exactement satisfaite.

L'équation déterminant  $\bar{\phi}_i$  est obtenue en substituant l'équation (II-25) dans l'équation (II-23) et en rajoutant de telles équations pour toutes les valeurs de  $j$ . Le résultat est:

$$A_i \bar{\phi}_i = B_i \bar{\phi}_{i+1} + C_i \bar{\phi}_{i-1} + D_i
 \tag{II-26}$$

où:

$$A_i = \sum (a_{ij} - d_{ij} - e_{ij})
 \tag{II-27}$$

$$B_i = \sum b_{ij}
 \tag{II-28}$$

$$C_i = \sum c_{ij}
 \tag{II-29}$$

$$D_i = \sum (b_{ij} \phi_{i+1,j}^* + c_{ij} \phi_{i-1,j}^* + d_{ij} \phi_{i,j+1}^* + e_{ij} \phi_{i,j-1}^* + f_{ij} - a_{ij} \phi_{ij}^*)
 \tag{II-30}$$

Les sommations dans les expressions sont prises sur  $j = 2, N$ . L'équation (II-26) peut être écrite pour  $i = 2, M$  et le système peut alors être résolu convenablement par la TDMA.

Puisque l'équation (II-24) implique que  $B_M$  et  $C_1$  deviennent nuls, les valeurs de  $\bar{\phi}_1$  et  $\bar{\phi}_{M+1}$  à la limite ne sont pas nécessaires.

Il est intéressant de noter que  $D_i$  est l'intégrale résiduelle dans le  $i^{\text{ème}}$  bloc impliqué par le champ  $\phi^*$ . Les corrections  $\bar{\phi}_i$  pourraient réduire les intégrales résiduelles à zéro.

Une procédure similaire peut être effectuée pour la correction par bloc suivant les lignes correspondant à  $j$  constante. La procédure complète pour la résolution des équations de discrétisation comprend les corrections par blocs dans les directions  $i$  et  $j$  et la TDMA ligne par ligne à travers les deux directions.

# CHAPITRE II

ETUDE

DE

CHAMP DYNAMIQUE

L'équation différentielle générale (II-1) a été modifiée et mise sous la forme discrétisée où le champ d'écoulement  $\rho u_i$ , ainsi que  $\Gamma$  et  $S$  sont connus. La densité  $\rho$  est liée algébriquement à d'autres variables telles que la concentration et la température. Les composantes de la vitesse  $u_i$  sont gouvernées par les équations de mouvement. Les champs de  $u_i$  sont aussi obtenus en interprétant simplement la variable dépendante  $\phi$  générale comme la vitesse  $u_i$ . Dans ce sens une procédure de calcul du champ d'écoulement a été déjà décrite. Les coefficients de discrétisation dépendent du champ d'écoulement et cela représente un cas de non-linéarité qui peut être traité par itération.

### III-1 DIFFICULTE PRINCIPALE :

En réalité, les composantes de la vitesse  $u_i$  ne s'obtiennent pas directement en résolvant les équations de la quantité mouvement. Celles-ci contiennent le gradient de pression ( $-\frac{\partial P}{\partial x_i}$ ) comme un terme-source important qui ne s'exprime pas par une fonction de  $u_i$  ou d'autre  $\phi$ . C'est l'équation de continuité qui détermine indirectement le champ de pression (Eq.II-2). Cette spécification indirecte n'est pas convenable comme une procédure de calcul, une méthode directe pour la détermination du champ de pression doit être alors trouvée.

Il existe d'autres difficultés concernant le traitement des équations de mouvement et de continuité. Il peut être montré que, si les composantes de la vitesse et de la pression sont calculées pour les mêmes points de la grille, certains champs physiquement peu réalistes se présentent comme solution. Pour remédier à ceci, le maillage décalé (*staggered grid*) décrit ci-après, a été utilisé.

### III-2 MAILLAGE DECALE :

La figure (III-1) montre une portion du maillage en 2D. Les positions pour lesquelles les composantes de la vitesse sont calculées sont indiquées par des flèches courtes. Dans cette grille, les composantes de la vitesse sont calculées pour les points se trouvant sur les faces du volume de contrôle. Toutes les autres variables incluant la pression sont calculées aux points de la grille indiquées par des points représentés en gras sur cette figure. Une conséquence de cet arrangement est que les composantes de la vitesse normale sont directement disponibles aux faces du volume de contrôle, où elles sont nécessaires pour les calculs des quantités de

écoulement de masse. De plus, la différence de pression entre deux points de la grille peut être utilisée pour donner la composante de la vitesse située entre eux.

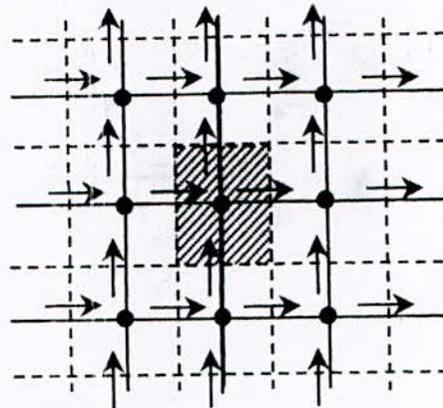


Fig (III-1) : Le maillage décalé

### III-3 EQUATION DE DISCRETISATION POUR L'ECOULEMENT DE FLUIDE :

#### a- équations de mouvement :

Les positions du maillage décalé pour les composantes de la vitesse déterminent les volumes de contrôle correspondant telles que leurs faces normales à la direction de la composante passent par les points de la grille. Les volumes de contrôles appropriés pour  $u$  et  $v$  sont indiqués sur la figure (III.2).

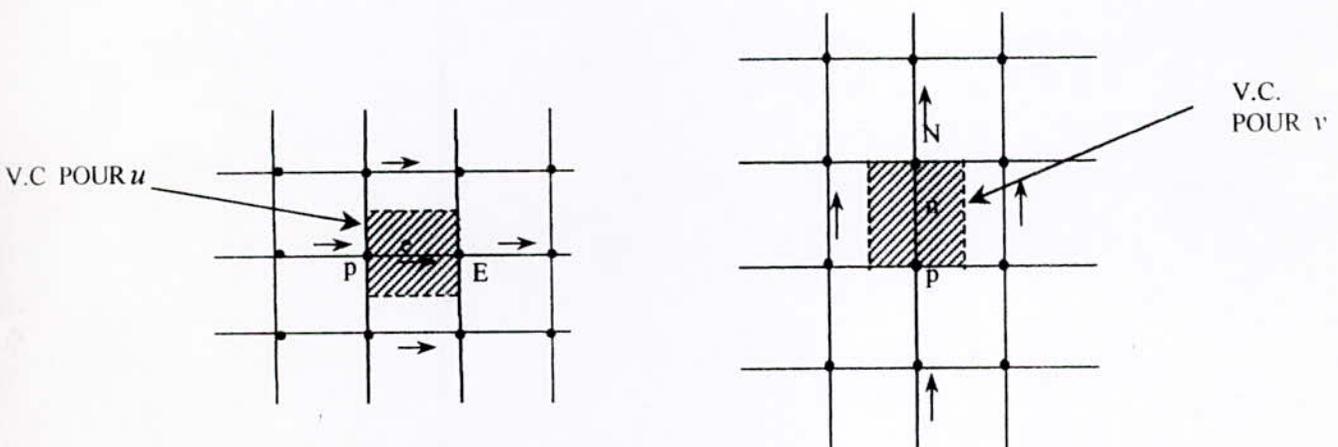


Fig.(III-2) :volume de contrôle pour la quantité de mouvement

Les deux faces du volume de contrôle autour de la vitesse  $u_e$  passent aussi par les points P et E de la grille. Les équations de mouvement correspondant peuvent être écrites comme :

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + A_e (p_P - p_E) \quad (\text{III-1})$$

où le terme  $b$  tient compte des termes sources autres que le gradient de pression et  $A_e$  est l'aire sur laquelle la force de pression agit. Les expressions des coefficients  $a_{nb}$ ,  $a_e$  et  $b$  sont identiques à celle données par l'équation (II-13) et (II-18), excepté que la géométrie du volume de contrôle doit être prise en considération pour déterminer les conductances de diffusion  $D$  et les quantités d'écoulement  $F$ .

Il est possible de résoudre les équations de mouvement pour un champ de pression donné. Soit  $u^*$  le champ de vitesse basé sur un champ de pression estimé  $p^*$ . (En général, les vitesses telles que  $u^*$  ne satisfont pas l'équation de continuité). Ceci implique :

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + A_e (p_P^* - p_E^*) \quad (\text{III-2})$$

#### b- équation de correction de pression :

Pour que le champ de vitesse satisfasse l'équation de continuité, les vitesses 'starred'  $u^*$  et  $v^*$  doivent être corrigées comme une conséquence d'une correction de pression  $p'$  appliquée à la pression estimée  $p^*$ . Ainsi,

$$p = p^* + p' \quad (\text{III-3})$$

$$\text{et} \quad u = u^* + u' \quad (\text{III-4})$$

Les équations (III-1)-(III-4) peuvent être combinées pour obtenir une formule de correction de la vitesse. Cette formule peut être simplifiée si le terme  $\sum a_{nb} u_{nb}'$  est supposé négligeable. Le résultat final est :

$$u_e = u_e^* + d_e (p_P' - p_E') \quad (\text{III-5})$$

$$\text{où } d = \frac{A_e}{a_e} \quad (\text{III-6})$$

L'équation de continuité pour le volume de contrôle montré sur Fig.III-2 peut être écrite comme :

$$(\rho u A)_w - (\rho u A)_e + (\rho v A)_s - (\rho v A)_n = 0 \quad (\text{III-7})$$

où  $u$  et  $v$  représentent les composantes de la vitesse respectivement dans les directions  $x$  et  $y$ .

Si  $u_e, u_w, v_n$  et  $v_s$  sont exprimées par les équations (III-5), une équation de discrétisation pour la correction de la pression peut être obtenue et mise dans la forme :

$$a_p p'_p = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b \quad (\text{III-8})$$

$$\text{où } a_E = (\rho d A)_e \quad (\text{III-9})$$

$$a_W = (\rho d A)_w \quad (\text{III-10})$$

$$a_N = (\rho d A)_n \quad (\text{III-11})$$

$$a_S = (\rho d A)_s \quad (\text{III-12})$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (\text{III-13})$$

$$b = (\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e + (\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n \quad (\text{III-14})$$

Il peut être noté que la dernière expression, évaluant  $b$ , implique que  $b$  est la "source de masse" présente dans le champ de vitesse. Le but de cette correction de la pression est d'éliminer (ou de réduire au maximum) cette source de masse.

### III-4 ALGORITHME SIMPLE :

Maintenant que les éléments exigés pour le calcul du champ d'écoulement ont été assemblés, la technique de résolution peut être décrite en citant les étapes de calcul de l'algorithme SIMPLE développé par Patankar [5] :

- 1- Estimer le champ de pression  $p^*$ .

- 2- Résoudre les équations de mouvement comme l'équation (III-2) pour obtenir  $u^*$  et  $v^*$ .
- 3- Obtenir ainsi la source de masse  $b$  à partir de l'équation (III-14) et résoudre l'équation (III-8) de correction de la pression.
- 4- Corriger le champ de pression et le champ de vitesse en utilisant des équations (III-3) et (III-4).
- 5- Résoudre les équations de discrétisation pour d'autre  $\phi$  si elles influencent l'écoulement de fluide à travers la densité, la viscosité ou les termes de source.
- 6- Considérer le champ de pression corrigé comme un nouvel estimé  $p^*$ , retourner à l'étape 2 et répéter la procédure jusqu'à la convergence.

### III-5 DISCUSSION DU SIMPLE :

A présent, le terme  $\sum a_{nb} u'_{nb}$  peut être omis dans la détermination de l'équation de correction de la pression. Dans la procédure du calcul itératif, cette omission n'influe pas sur l'exactitude de la solution finale, car, lorsque les sources de masse sont nulles, la correction de la pression  $p'$  devient nulle. Par conséquent, la solution atteinte satisfait exactement les équations de mouvement et ainsi l'équation de continuité (comme les sources de masses sont nulles).

Le taux de convergence vers la solution finale est, cependant, influencée par cette omission. L'équation approximative de  $p'$  tend à surestimer les valeurs de  $p'$ , quoique les corrections de la vitesse résultante soient raisonnables. En effet, la procédure SIMPLE a tendance à diverger à moins qu'une certaine sous-relaxation ait été utilisée. Une pratique commune consiste à employer un facteur de sous-relaxation dont la valeur se situe autour de 0.5 tout en résolvant les équations de mouvement et de remplacer l'équation (III-3) par:

$$p = p^* + \alpha_p p \quad (\text{III-15})$$

où  $\alpha_p$  est autour de 0.8. Il est clair que ces facteurs de relaxation ne sont pas nécessairement les seuls optimums et des problèmes différents peuvent exiger un système différent de valeurs.

Comme a été mentionné précédemment, bien que la procédure SIMPLE ait été utilisée avec succès pour un grand nombre de problèmes, son taux de convergence n'a pas été toujours satisfaisant. Une revue appelée SIMPLER a été formulée. Dans SIMPLER l'équation ( $p'$ ) est utilisée pour le seul but d'obtenir les corrections de la vitesse, alors qu'une équation séparée est utilisée pour évaluer la pression.

### III-6 EQUATION DE PRESSION :

L'équation (III-1) peut être écrite comme :

$$u_e = \hat{u}_e + d_e(p_P - p_E) \quad (\text{III-16})$$

où la pseudovitesse  $\hat{u}_e$  est donnée par :

$$\hat{u}_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b}{a_e} \quad (\text{III-17})$$

Il doit être noté que  $\hat{u}_e$  ne dépend pas du champ de pression mais est défini en fonction des vitesses voisines  $u_{nb}$ . La similarité entre l'équation (III-5) et (III-16) est évidente. Si les formules comme l'équation (III-16) pour  $u$  et  $v$  sont substituées dans l'équation (III-7), une équation pour la pression  $p$  peut être déduite. Celle-ci est similaire à l'équation de la correction de la pression et peut être écrite comme suit:

$$a_P p_P = a_E p_E + a_W p_W + a_N p_N + a_S p_S + b \quad (\text{III-18})$$

où les coefficients  $a_E, a_W, a_N, a_S$  et  $a_P$  sont donnés par les équations (III-9) et (III-13), et est défini par :

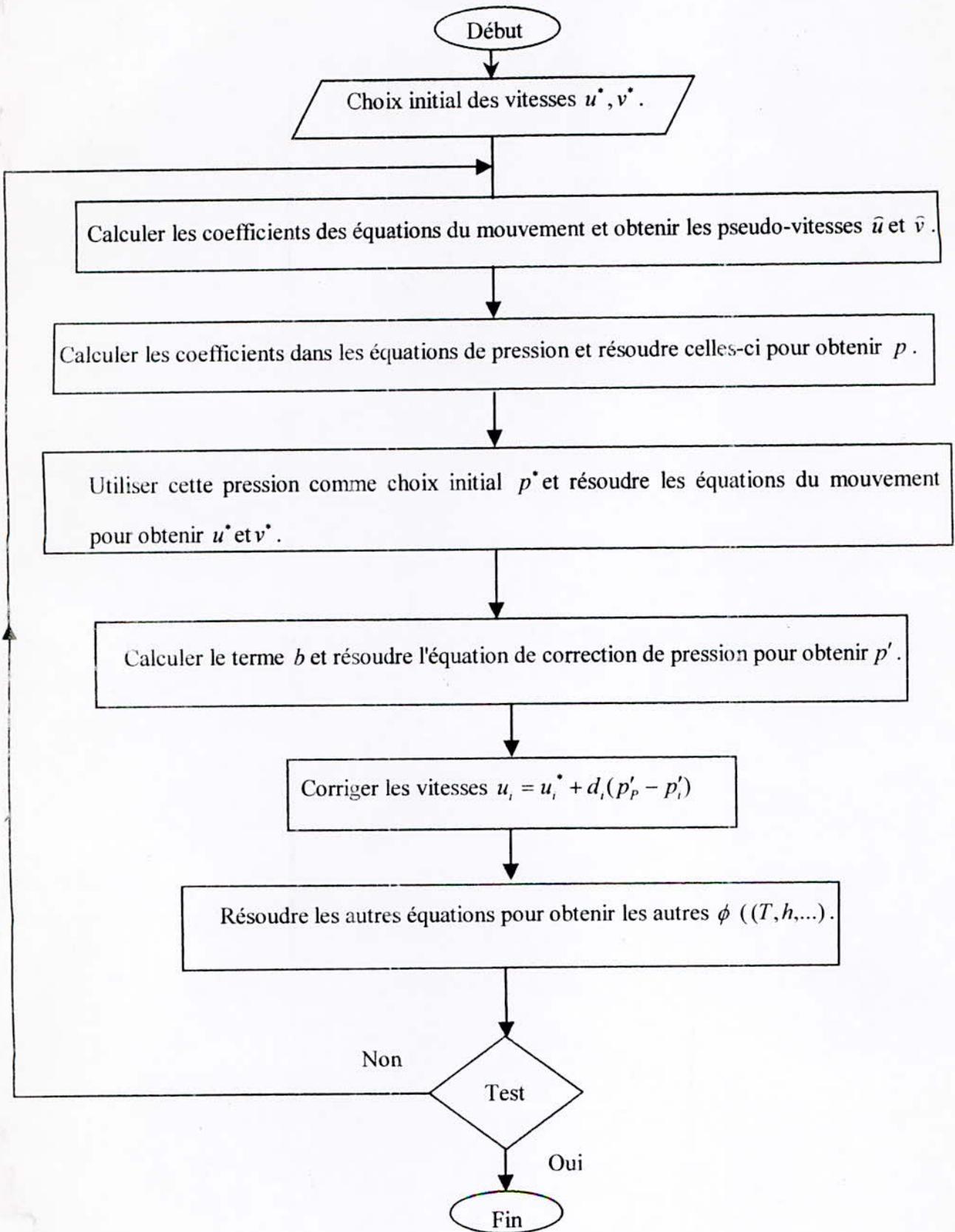
$$b = (\rho \hat{u} A)_w - (\rho \hat{u} A)_e + (\rho \hat{v} A)_s - (\rho \hat{v} A)_n \quad (\text{III-19})$$

De nouveau, le terme  $b$  peut être considéré ici comme une "source de masse" impliqué par le champ de pseudovitesse  $\hat{u}$  et  $\hat{v}$ .

### III-7 ALGORITHME SIMPLER :

La procédure révisée sera maintenant exposée selon la séquence de l'algorithme suivant :

### Algorithme SIMPLER



**III-8 DISCUSSION :**

1. Aucun terme n'a été négligé dans l'équation de  $p$ .
2. La pression n'est pas choisie arbitrairement donc il n'y a pas nécessité de la corriger.
3. On une seule itération, SIMPLER effectue plus d'opérations mais nécessite moins d'itérations pour converger.

# **CHAPITRE IV**

## **PRESENTATION DU PROGRAMME ET**

## **PRESENTATION DU PROGRAMME RESULTATS**

#### IV-1 MAILLAGE :

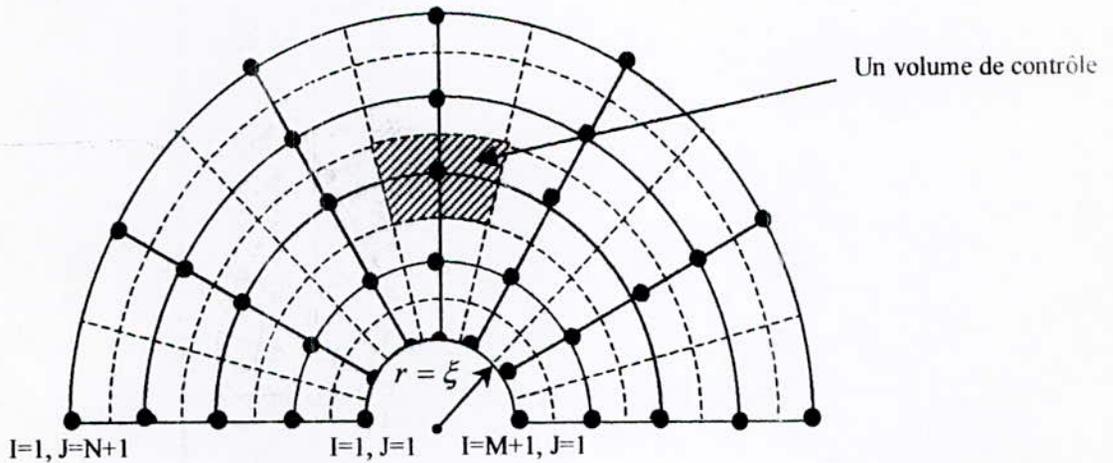
L'exemple traité dans ce travail comme a été signalé auparavant concerne le cas d'une serre tunnel, par conséquence le maillage utilisé est illustré en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ .

Pour éviter la division par zéro on a considérée la serre comme une demi-anneau de petit rayon  $r = \xi$  Fig (IV-1).

Les équation discrétisées par la méthode des volume finis ont été résolues au moyen de l'algorithme SIMPLER.

Pour le maillage deux grilles distinctes ont été utilisées  $81 \times 81$  et  $41 \times 41$  afin de voir si nos résultats dépendent du maillage.

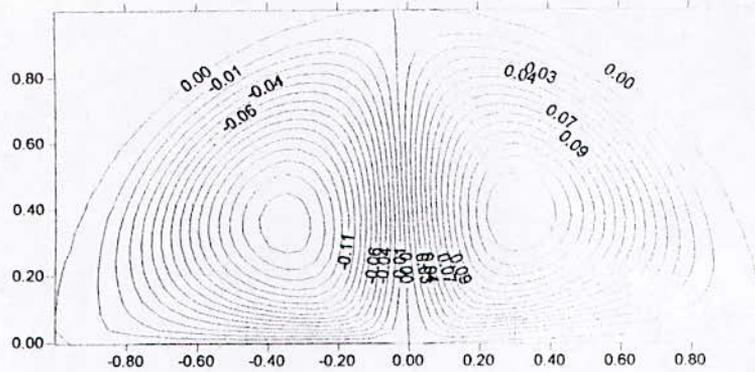
Les résultats obtenus ont été exploités, représentés sur les graphes pour différents nombres de Rayleigh et interprétés ci après.



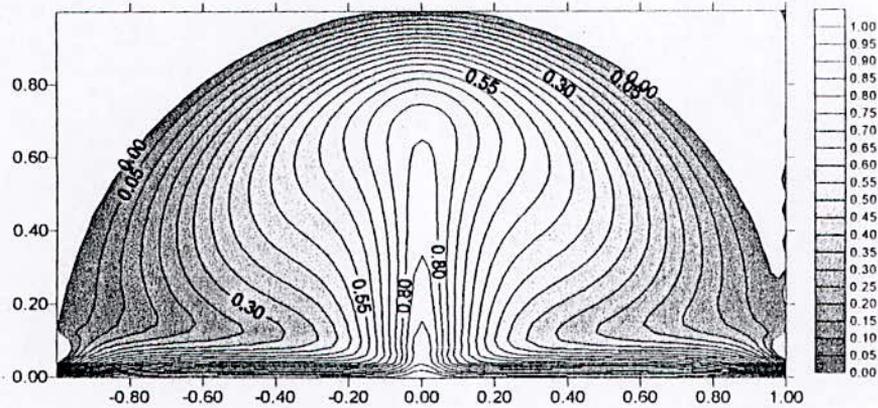
Fig(IV-1) : LE MAILLAGE

**IV-3 PRESENTATION DES RESULTATS:**

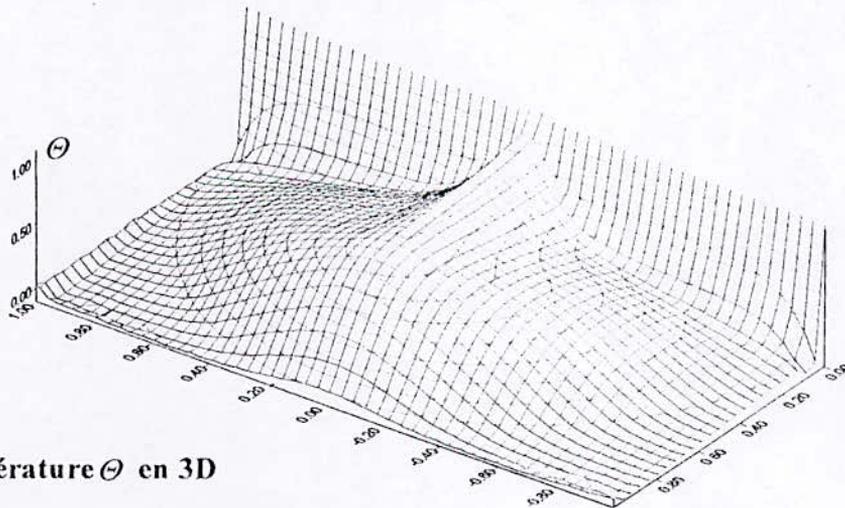
**IV-3-1 Présentation des lignes de courant et des isothermes :**



**Fig(IV-1-a): Les lignes de courant  $Ra=10^4$**

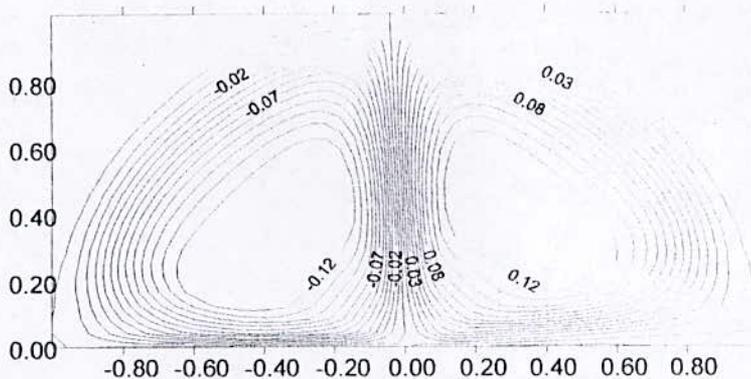


**Fig(IV-1-b): Les isothermes  $Ra=10^4$**

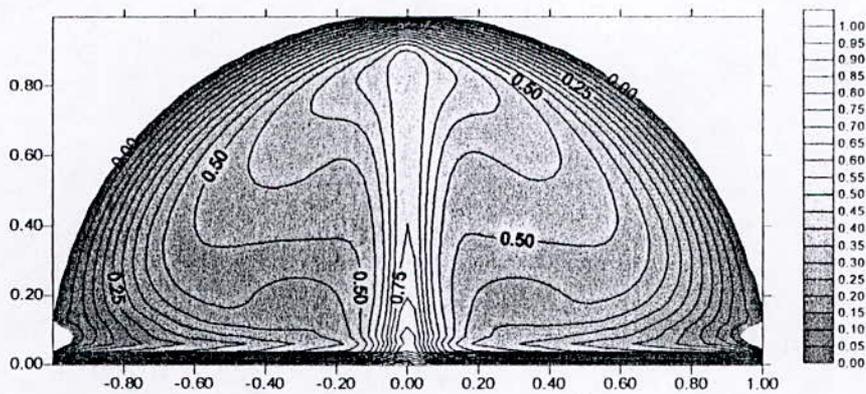


**(C) La température  $\theta$  en 3D**

**Fig(IV-1) : Les lignes de courant et les isothermes pour  $Ra=10^4$**

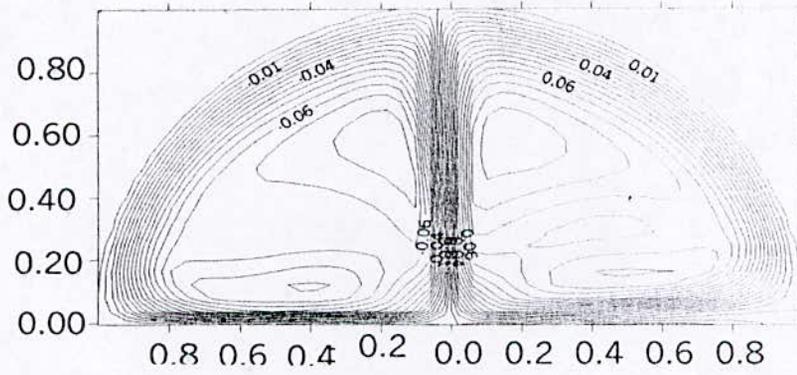


Fig(IV-2-a): Les lignes de courant  $Ra=10^5$

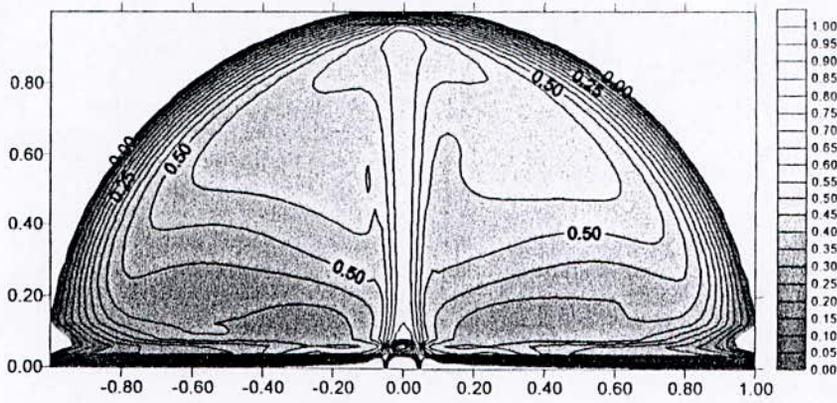


Fig(IV-2-b): Les isothermes  $Ra=10^5$

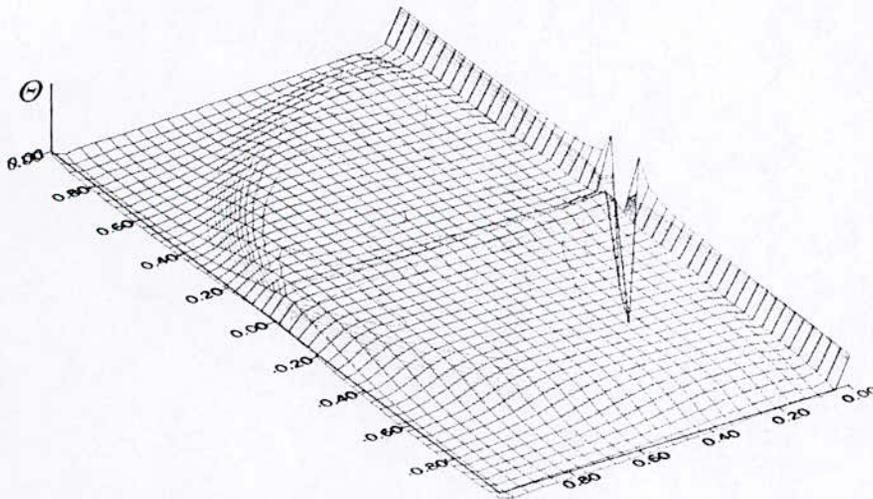
Fig(IV-2) : Les lignes de courant et les isothermes pour  $Ra=10^5$



Fig( IV-3-a): Les lignes de courant  $Ra=10^6$

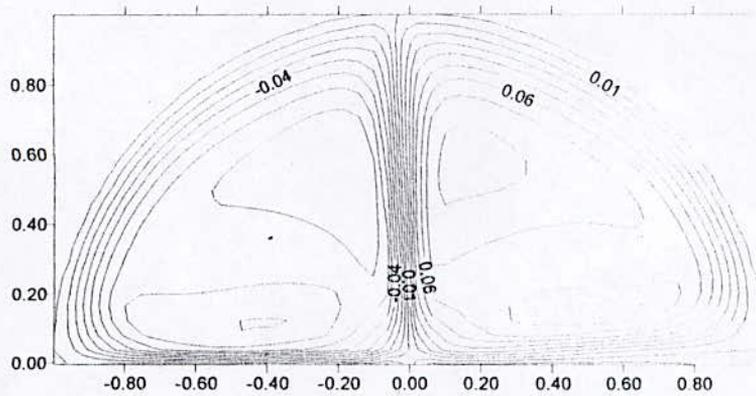


Fig(IV-3-b): Les isothermes  $Ra=10^6$

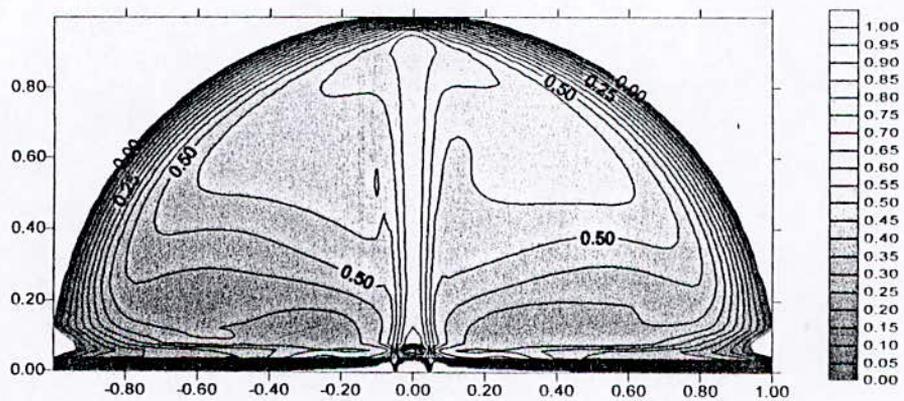


(C) La température  $\theta$  en 3D

Fig(IV-4) : Les lignes de courant et les isothermes pour  $Ra=10^6$

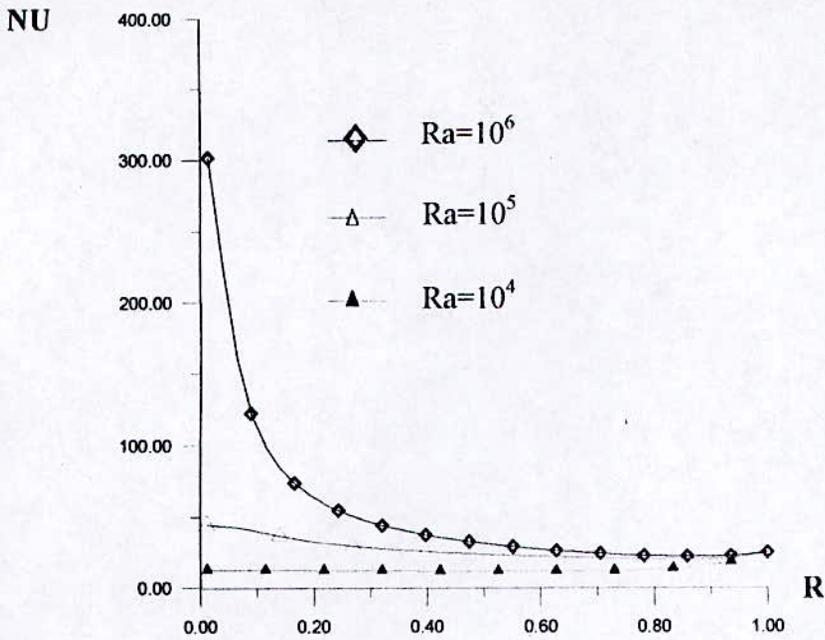


Fig(IV-4-a): Les lignes de courant  $Ra=10^7$

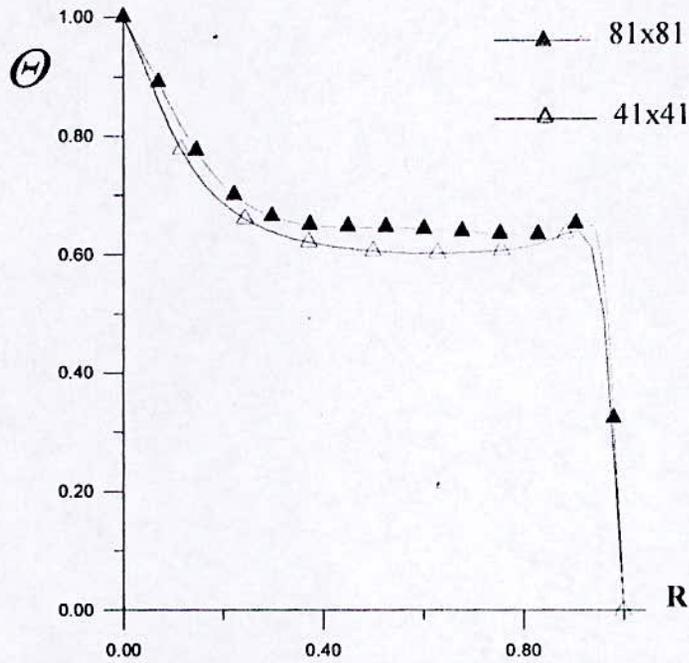


Fig(IV-4-b): Les isothermes  $Ra=10^7$

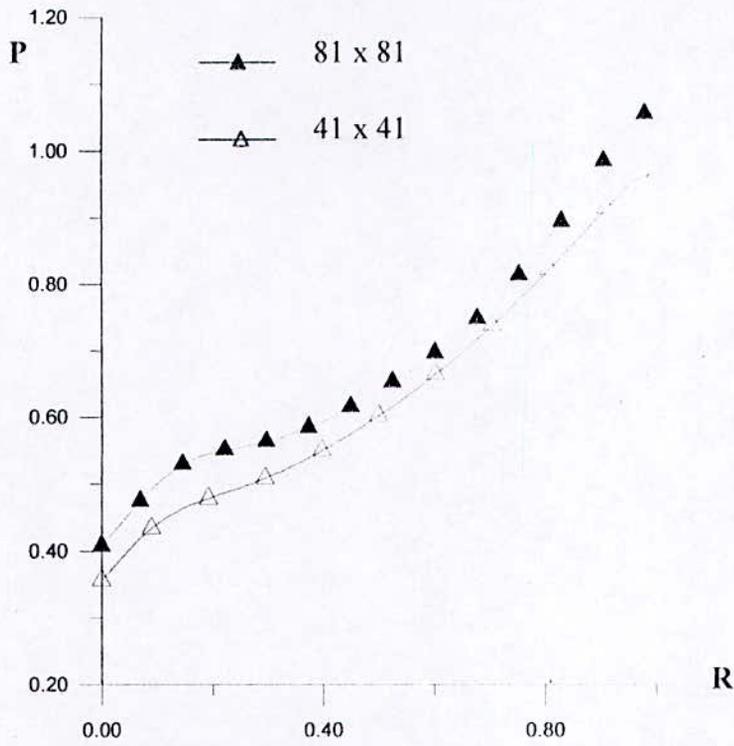
Fig(IV-4) : Les lignes de courant et les isothermes pour  $Ra=10^7$



Fig(IV-6) : Evolution de nombre de Nüsselt local pour différents nombres de Ra



Fig(IV-7) : Profil vertical de la température à la mi-largeur de la serre pour Ra=10<sup>6</sup>



Fig(IV-8) : Le profil vertical de la pression à la mi- largeur de la serre pour Ra=10<sup>6</sup>

#### IV-4 interprétation des résultats :

Pour étudier la sensibilité au maillage de nos résultats nous les avons représentés pour deux maillages différents 81x81 et 41x41. un raffinement du maillage n'influe presque pas. Donc, le choix d'un maillage 40x40 permet d'avoir un gain dans le temps de calcul.

- 1- Sur les figures (IV-1, IV-2, IV-3 et IV-4) nous avons représentés les lignes de courant et les isothermes pour différents nombres de Rayleigh. L'écoulement est caractérisé par deux cellules principales qui tournent dans deux sens différents et présentent une symétrie par rapport à  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Les figures indiquent également que l'écoulement est généré au-dessus de la région chauffée ce qui est complètement normal dans le cas d'une convection naturelle dans un fluide chauffé par le bas.
- 2- La figures ( IV-6) montrent l'évolution du nombre de Nusselt local pour différents nombres de Rayleigh. On remarque que le nombre de Nusselt local est presque constant suivant la surface chaude quel que soit le nombre de Rayleigh, ce qui signifie que le coefficient d'échange thermique est constant.
- 3- La figure (IV-7) montre la distribution de la température à la mi-largeur( suivant l'axe correspondant à  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ) de la serre pour  $Ra=10^6$  et pour des maillages différents 81x81 et 41x41. On observe que :  
  
La température diminue plus au moins rapidement à proximité du sol, et devient ensuite presque constante jusqu'au voisinage de la paroi où elle chute brusquement ceci est dû à la présence de la couche limite au contact immédiat de la paroi où le gradient de température est très élevé. Cette dernière est l'une des caractéristiques de la couche limite.
- 4- La figure (IV-8) montre l'évolution de la pression à la mi largeur de la serre on remarque que la pression augmente suivant  $r$  c'est à dire du sol vers la paroi.

**CONCLUSION**

**GENERALE**

## CONCLUSION :

Dans ce travail notre objectif était d'étudier le comportement de l'air à l'intérieur de la serre. Nous avons élaboré un modèle mathématique qui nous a permis de déterminer les distributions des lignes de courant , des isothermes et de la pression dans tout le domaine d'étude . Les résultats trouvés permettent la caractérisation de l'écoulement général de l'air dans la serre.

Nous avons aussi montré que pour des conditions de températures uniformes imposées au sol et pour des écarts de températures faibles maintenus entre le sol et le toit , la circulation de l'air est caractérisée par deux cellules de recirculation tournant en sens opposé .

Le fait que la pression de l'air à l'intérieur de la serre est importante près de la paroi, cela permet une bonne circulation de l'air dans la serre; d'où l'idée de mettre les ouvrants en haut (au niveau du toit) ce qui a pour effet d'évacuer ou bien de renouveler l'air de la serre.

L'étude réalisée est considérée comme une étape élémentaire à l'étude des phénomènes (échanges) thermiques à l'intérieur de la serre. On peut conclure que les résultats obtenus sont théoriquement acceptables et peuvent être utilisés avant la germination des plantes.

**ANNEXE A**

## PRINCIPE DE CONSERVATION :

Les équations différentielles partielles (E.D.P) utilisées dans les phénomènes de transport expriment un principe de conservation d'une certaine quantité physique  $\phi$  qui sera la variable dépendante.

Généralement  $\phi$  est une propriété spécifique (massique) qui peut représenter soit :

1. vitesse ( quantité de mouvement / unité de masse)
2. enthalpie spécifique massique.
3. fraction massique d'une espèce chimique
4. énergie cinétique turbulente massique
5. unité( masse / unité de masse)

### REMARQUE :

La température  $T$  qui est souvent utilisée comme variable  $\phi$  n'est pas une grandeur spécifique mais elle est utilisée à la place de l'enthalpie.

Pour les liquides et gaz parfaits, on écrit :

$$dh = c_p dT \quad (A-1)$$

Les termes utilisés dans l' E.D.P pour établir le bilan sont des grandeurs exprimées par unité de volume et par unité de temps.

$\phi$  : grandeur / unité de masse.

$\rho\phi$  : grandeur / unité de volume.

$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)$  : taux de variation de la quantité  $\phi$  par unité de volume / unité de temps.

Flux : la quantité  $\phi$  qui traverse une surface / unité de temps .

Densité de flux  $J$  : Flux / unité de surface.

Le principe de conservation de la quantité  $\phi$  s'exprime alors, pour un élément de

volume de la manière suivante :

Variation de la quantité  $\phi$  = production de la quantité  $\phi$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial J_i}{\partial x_i} = S \quad (\text{A-2})$$

Où :

$$\frac{\partial J_i}{\partial x_i} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \quad (\text{A-3})$$

Le flux (ou la densité de flux)  $J$  dans une direction donnée est constitué du flux convectif ( $\rho u_i \phi$ ) et du flux par diffusion ( $-\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ ) c'est à dire :

$$J_i = \rho u_i \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (\text{A-4})$$

Le principe de conservation s'écrira donc :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}) + S \quad (\text{A-5})$$

Où encore ( en notation vectorielle) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \text{div}(\rho \vec{u} \phi) = \text{div}(\Gamma \overline{\text{grad} \phi}) + S \quad (\text{A-6})$$

## ANALYSE VECTORIELLE :

Soit un scalaire  $\phi$  et un vecteur  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$  dans une base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$   
 $x_1, x_2$  et  $x_3$  : les variables indépendantes.

D'une manière générale, le gradient du scalaire  $\phi$  et la divergence du vecteur  $\vec{a}$  s'écrivent :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\phi = \nabla\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \vec{e}_3 \quad (\text{A-7})$$

$$\text{div}\vec{a} = \nabla\vec{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 a_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 a_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 a_3) \right] \quad (\text{A-8})$$

En coordonnées cartésiennes :

$$x_1 = x \qquad x_2 = y \qquad x_3 = z$$

$$h_1 = 1 \qquad h_2 = 1 \qquad h_3 = 1$$

En coordonnées cylindriques :

$$x_1 = r \qquad x_2 = \theta \qquad x_3 = z$$

$$h_1 = 1 \qquad h_2 = r \qquad h_3 = 1$$

Avec :

$$x = r \cos\theta$$

$$y = r \sin\theta$$

$$z = z$$

En coordonnées polaires :

$$x_1 = r \qquad x_2 = \theta \qquad x_3 = 0$$

$$h_1 = 1 \qquad h_2 = r \qquad h_3 = 1$$

Avec :  $x = r \cos\theta \qquad y = r \sin\theta$

En coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} x_1 &= r & x_2 &= \theta & x_3 &= \omega \\ h_1 &= 1 & h_2 &= r & h_3 &= r \sin \theta \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \cos \omega \\ z &= r \sin \theta \sin \omega \end{aligned}$$

### EQUATION DE CONTINUITÉ :

Dans le cas de l'équation de continuité (Conservation de masse) la variable dépendante prend la valeur suivante :

$$\phi = 1$$

notation vectorielle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (\text{A-9})$$

En régime permanent :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (\text{A-10})$$

Dans le cas d'un fluide incompressible :

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = 0 \quad (\text{A-11})$$

### EQUATION DE QUANTITE DE MOUVEMENT :

par contre dans le cas de conservation de la quantité de mouvement la variable dépendante devient :

$$\phi = u_i \quad u_i : (u, v \text{ ou } w)$$

En notation vectorielle :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \text{div}(\rho \vec{u} u_i) = \text{div} \vec{F}_i + b_i \quad (\text{A-12})$$

où :

$\vec{F}_i$  : Force de surface (pression et efforts visqueux) appliquée / unité de surface, dans la direction  $i$ .

$b_i$  : Force de volume / unité de volume dans la direction  $i$ .

$$\vec{F}_i = -\dot{i} p + \vec{\tau}_i \quad (\text{A-13})$$

$\dot{i}$  : vecteur unitaire dans la direction  $i$

En combinant l'équation de continuité et l'équation du mouvement, cette dernière peut s'écrire :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad} u_i = \frac{1}{\rho} (\text{div} \vec{F}_i + b_i) \quad (\text{A-14})$$

### EQUATION D'ENERGIE :

Conservation de l'énergie.

$$\phi = h$$

$h$  : enthalpie spécifique massique.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \text{div}(\rho \vec{u} h) = \text{div}(\Gamma_h \text{grad} h) + S_h \quad (\text{A-15})$$

$\Gamma_h = \frac{k}{c_p}$  : rapport de la conductivité thermique sur la chaleur spécifique massique.

$S_h$  : génération de chaleur / unité de volume qui inclut la génération due au rayonnement, effet de Joule, effet de dissipation, enthalpie de formation, ...).

Pour les gaz parfaits, solides et liquides, on peut écrire :

$$\text{grad} h = c_p \text{grad} T \quad (\text{A-16})$$

Lorsque  $c_p$  est constant, l'équation d'énergie s'écrit :

$$c_p \frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + c_p \text{div}(\rho \vec{u} T) = \text{div}(\Gamma_h c_p \text{grad} T) + S_h \quad (\text{A-17})$$

où :

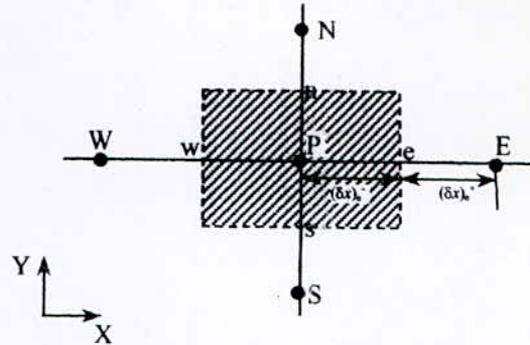
$$\frac{\partial}{\partial t}(c_p \rho T) + c_p \operatorname{div}(\rho c_p \vec{u} T) = \operatorname{div}(k \overrightarrow{\operatorname{grad}} T) + S_h \quad (\text{A-18})$$

**ANNEXE B**

## LES DIFFERENTS SCHEMAS DE DISCRETISATION DU TERME CONVECTION-DIFFUSION :

### 1- schéma centré :

On considère le problème de convection-diffusion unidimensionnel, en intégrant l'équation suivante le long du volume de contrôle définit dans la figure(B-1):



Fig(B-1) volume de contrôle

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}(\Gamma \frac{d\phi}{dx}) \quad (\text{B-1})$$

après l'intégration on obtient :

$$(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w = (\Gamma \frac{d\phi}{dx})_e - (\Gamma \frac{d\phi}{dx})_w \quad (\text{B-2})$$

Pour le terme diffusion  $(\Gamma \frac{d\phi}{dx})$  on va comment le

représenter avec un profil linéaire de  $\phi$ .

En choisissant la même profil pour le terme convectif on obtient :

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_w) \quad (\text{B-3})$$

et

$$\phi_w = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) \quad (\text{B-4})$$

Le facteur  $\frac{1}{2}$  est relatif au choix de la localisation des interfaces et ainsi l'équation (B-2) se ramènera à :

$$\frac{1}{2}(\rho u)_e(\phi_E + \phi_P) + \frac{1}{2}(\rho u)_w(\phi_P + \phi_W) = \frac{\Gamma_e(\phi_E - \phi_P)}{(\delta x)_e} - \frac{\Gamma_w(\phi_P - \phi_W)}{(\delta x)_w} \quad (\text{B-5})$$

Avec :

$\Gamma_e$  et  $\Gamma_w$  valeurs de  $\Gamma$  au interfaces.

En vue de compacter l'écriture, on introduit les deux symboles suivants pour avoir une écriture compacte:

$$F = \rho u \quad \text{et} \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x} \quad (\text{B-6})$$

L'équation discrétisée devient :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (\text{B-7})$$

Avec :

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \quad (\text{B-8})$$

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2} \quad (\text{B-9})$$

$$a_P = D_e + \frac{F_e}{2} + D_w - \frac{F_w}{2} = a_E + a_W + (F_e - F_w) \quad (\text{B-10})$$

comme par continuité, on a  $F_e = F_w$  alors  $a_P = a_E + a_W$ .

## 2- schéma "upwind" :

Ce schéma a été introduit pour la première fois, par Issacson et Rees (1952) [10]. Par rapport au schéma précédent, les termes de diffusion sont les mêmes, seuls les termes de convection changent, ils sont calculés en considérant l'hypothèse suivante :

-La valeur de  $\phi$  à l'interface est égale à la valeur de  $\phi$  au côté amont "upwind side", seule le nœud amont de l'interface contribue au calcul du flux convectif. Ainsi on a pour  $\phi_e$

:

$$\phi_e = \phi_p \quad \text{si} \quad F_e > 0 \quad (\text{B-11})$$

et

$$\phi_e = \phi_E \quad \text{si} \quad F_e < 0 \quad (\text{B-12})$$

En utilisant l'opérateur  $\|A, B\|$ , qui désigne le maximum de A et B, cette formulation conditionnée peut s'écrire d'une façon compacte comme :

$$F_e \phi_e = \phi_p \|F_e, 0\| - \phi_E \|-F_e, 0\| \quad (\text{B-13})$$

En suivant la même procédure qu'aux paragraphes précédents nous aboutissons à l'équation (B-5) avec :

$$a_E = D_e + \|-F_e, 0\| \quad (\text{B-11})$$

$$a_W = D_w + \|F_w, 0\| \quad (\text{B-12})$$

$$a_p = D_e + \|F_e, 0\| + D_w + \|-F_w, 0\| = a_E + a_W + (F_e - F_w) \quad (\text{B-13})$$

### 3-schéma hybride :

Ce schéma est défini comme suit en approchant la solution exacte (profil des coefficients) par des tangentes :

$$\text{Pour} \quad P_e < -2 \quad \frac{a_E}{D_e} = -P_e \quad (\text{B-14})$$

$$\text{Pour} \quad -2 \leq P_e \leq 2 \quad \frac{a_E}{D_e} = 1 - \frac{P_e}{2} \quad (\text{B-15})$$

$$\text{Pour} \quad P_e > 2 \quad \frac{a_E}{D_e} = 0 \quad (\text{B-16})$$

Ce qui peut être traduit par l'écriture compacte suivante :

$$a_E = \left\| -P_e, 1 - \frac{P_e}{2}, 0 \right\| \quad (\text{B-17})$$

$$a_E = \left\| -F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0 \right\| \quad (\text{B-18})$$

De même on obtient :

$$a_E = \left\| F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0 \right\| \quad (\text{B-19})$$

et

$$a_p = a_E + a_w + (F_e - F_w) \quad (\text{B-20})$$

**Remarque :**

Ce schéma est identique au schéma aux différences centrées pour  $-2 \leq P_e \leq 2$  et se réduit au schéma "upwind" en dehors de ce domaine.

# **ANNEXE C**

## Résolution d'un système à matrice tridiagonale(méthode de THOMAS (TDMA)) :

Quand un système linéaire :

$$AX = Y \quad (C-1)$$

est à matrice tridiagonale, alors l'algorithme de GAUSS peut être simplifiée, en tenant compte de la structure particulière de A.

Ce cas particulier est important. Car on obtient très souvent un tel système lors de la résolution numérique de certaines équation différentielles

adoptons pour les éléments non nuls de A la notation suivante :

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_i & b_i & c_i & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{n-1} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n & b_n \end{bmatrix} \quad (C-2)$$

Ce qui signifie que l'on peut ne mémoriser que les  $(3n-2)$  termes non nuls de A dans trois vecteurs a, b et c. ayant respectivement  $(n-1)$  et  $(n)$  et  $(n-1)$  éléments, plutôt que de mémoriser et traiter tous les termes de A dont  $(n^2-3n+2)$  sont nuls.

L'algorithme de THOMAS est le suivant :

1- Normalisons la première ligne du système :

$$\begin{bmatrix}
 1 & \frac{c_1}{b_{11}} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots \\
 0 & \dots & \dots & a_i & b_i & c_i & 0 & \dots & \dots \\
 0 & \dots \\
 0 & \dots & c_{n-1} \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n & b_n & \dots
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 X_1 \\
 X_2 \\
 X_3 \\
 X_4 \\
 \dots \\
 X_i \\
 \dots \\
 X_{n-1} \\
 X_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \frac{Y_1}{b_1} \\
 Y_2 \\
 Y_3 \\
 Y_4 \\
 \dots \\
 Y_i \\
 \dots \\
 Y_{n-1} \\
 Y_n
 \end{bmatrix}
 \quad (C-3)$$

2- Puis, réduisons la seconde en lui soustrayant  $a_2$  fois la première :

$$\begin{bmatrix}
 1 & \frac{c_1}{b_{11}} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 0 & \left( b_2 - a_2 \frac{c_1}{b_1} \right) & c_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots \\
 0 & \dots & \dots & a_i & b_i & c_i & 0 & \dots & \dots \\
 0 & \dots \\
 0 & \dots & c_{n-1} \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n & b_n & \dots
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 X_1 \\
 X_2 \\
 X_3 \\
 X_4 \\
 \dots \\
 X_i \\
 \dots \\
 X_{n-1} \\
 X_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \frac{Y_1}{b_1} \\
 Y_2 - a_2 \frac{Y_1}{b_1} \\
 Y_3 \\
 Y_4 \\
 \dots \\
 Y_i \\
 \dots \\
 Y_{n-1} \\
 Y_n
 \end{bmatrix}
 \quad (C-4)$$

3- Normalisons la seconde ligne :

$$\begin{bmatrix}
 1 & \frac{c_1}{b_{11}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 1 & \frac{c_2}{\left(b_2 - a_2 \frac{c_1}{b_1}\right)} & 0 & \dots & 0 \\
 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots \\
 0 & \dots & \dots & a_i & b_i & c_i & 0 & \dots & \dots \\
 0 & \dots \\
 0 & \dots & c_{n-1} \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n & b_n
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 X_1 \\
 X_2 \\
 \\
 X_3 \\
 X_4 \\
 \\
 \dots \\
 X_i \\
 \\
 \\
 \\
 X_{n-1} \\
 X_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \frac{Y_1}{b_1} \\
 \frac{Y_2 - a_2 \frac{Y_1}{b_1}}{b_2 - a_2 \frac{c_1}{b_1}} \\
 Y_3 \\
 Y_4 \\
 \dots \\
 Y_i \\
 \dots \\
 Y_{n-1} \\
 Y_n
 \end{bmatrix}$$





**Algorithme de THOMAS pour la résolution d'un système linéaire  $AX=0$  a matrice tridiagonale :**

Soit la matrice  $A=(a, b, c)$  définie par (C-1).

- **triangularisation(matrice tridiagonale devient bidiagonale) :**

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{b_1}$$

$$\alpha_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \alpha_{i-1}} \quad i = 2, n-1$$

$$\beta_1 = \frac{Y_1}{b_1} \quad (C-6)$$

$$\beta_i = \frac{Y_i - a_i \beta_{i-1}}{b_i - a_i \alpha_{i-1}} \quad i = 2, n-1$$

- **Résolution de système à matrice bidiagonale(cas particulier d'un système matrice tridiagonale supérieure) :**

$$X_n = \beta_n$$

$$X_i = \beta_i - \alpha_i X_{i+1} \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. Berninger, Cultures florales de serre en zone méditerranéenne française, Paris, édition INRA, Revue horticole, 1989
- [2] Yves. Cormary, La thermique des serres, Paris, Edition Eyrolles 1985.
- [3] I. Hurpy, Effet de serre, Paris, Edition Alternatives, 1980.
- [4] Suhas.V. Patankar, A calculation procedure for two dimensional elliptic situation, Numerical heat transfer. Vol 4.pp.409-425, 1981.
- [5] Suhas.V. Patankar, Numerical heat transfer and fluid flow, New York, Hemisphere publishing corporation, 1981.
- [6] Donald Watson, Le livre des serres, Paris, Edisud/pyc-edition, 1982.
- [7] F. Kreith, Transmission de la chaleur et thermodynamique, Paris, Masson, 1967.
- [8] J.F. Sacadura, Initiation au transfert thermique, Paris, Edition Technique et Documentation, 1982.
- [9] A. Léontiev, Théorie des échanges de chaleur et de masse, Moscou, Edition Mir, 1985.
- [10] Adian Bejan, Convection heat transfer, USA, A Wiley-Interscience Publication, 1984.
- [11] Javad Mostaghimi, Computation of heat transfer and fluid flow, University of Sherbrooke, Québec, 1981.
- [12] M. Boumahrat, Méthodes numériques appliquées, Algérie, OPU, 1991.