

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique



Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

Projet de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état
en Génie mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Thème

**Etude des écoulements en Turbomachines par la
méthode des singularités**

- Application à un cylindre tournant au bord d'attaque d'un profil
aérodynamique

Proposé et dirigé par :
Mr : M. Boudjema

Etudié par :
Bermad Fateh

Promotion : juin 1999

E.N.P.10, Avenue Hassen-Badi, 16200 EL-HARRACH, ALGER.

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique



Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

Projet de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état
en Génie mécanique

Thème

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

**Etude des écoulements en Turbomachines par la
méthode des singularités**

- Application à un cylindre tournant au bord d'attaque d'un profil
aérodynamique

Proposé et dirigé par :
Mr : M. Boudjema

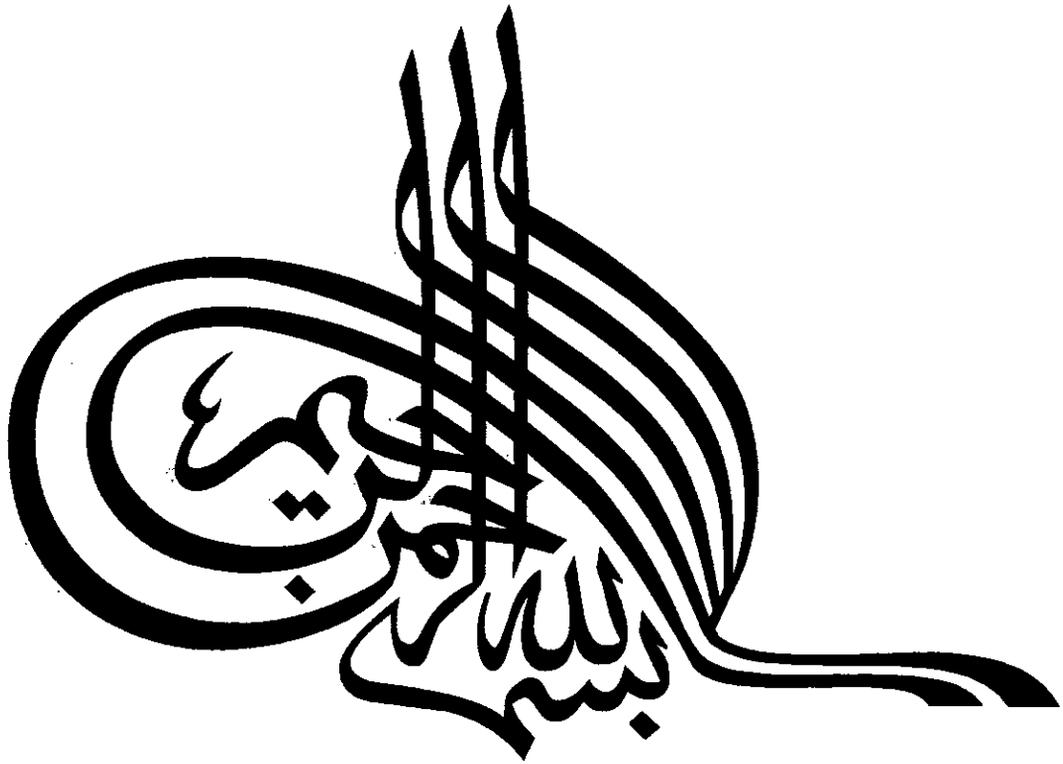
Etudié par :
Bermad Fateh

Promotion : juin 1999

E.N.P.10, Avenue Hassen-Badi, 16200 EL-HARRACH, ALGER.



الدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique





Dédicace

Je dédie ce modeste travail,

*Aux êtres les plus tendres à mes yeux et les plus
chers à mon cœur, à qui je dois énormément
et que je ne remercierai jamais assez :*

Mes parents.

A mes frères et sœurs, en particulier Walid.

A Toute la famille BERMAD.

A tous mes amis de Bouraoui, l'ENP et Taber.

Fateh.

REMERCIEMENTS



Je remercie dieu de m'avoir donné la volonté et le courage afin d'arriver à la finalité de ce modeste travail.

Je tiens à remercier en premier lieu mon promoteur M^{er} :M. Boudjemaa pour ses encouragements, son suivi, et pour les conseils qu'il a apporté pour l'achèvement de ce projet.

Je tiens également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de siéger à ma soutenance, ainsi que l'ensemble des enseignants qui ont contribué à notre formation, sans oublier tout le personnel de la bibliothèque, en particulier KRIMO.

Nos remerciements vont également à nos collègues et amis de la promotion.

ملخص:

قمنا في هذه الدراسة، بتطبيق طريقة الأحاديات تناسباً مع الصعوبة (على حاجز معزول، مجموعة من الحواجز الثابتة والمتحركة، طابق محرك توربيني مع الأخذ بعين الاعتبار عدم استقرار الانسياب)، كذلك توسيع مجال تطبيق الطريقة لدراسة أسطوانة متحركة في موضع جبهتي للانسياب، متوضعة في الموضع الجبهي للجنيحة، والتي من أجلها استعملنا جنيحة من نوع N.A.C.A 4412 .

الكلمات المفتاح: الأحاديات، حاجز معزول، مجموعة من الحواجز، طابق محرك، دالة الكمون المعقدة، السرعة المرافقة، جنيحة من نوع N.A.C.A 4412.

Résumé:

Dans cette présente étude, on a appliqué la méthode des singularités par ordre de complexité (profil isolé, Grille rectiligne fixe et mobile, Etage d'une turbomachine tout en prenant en considération l'instationnarité de l'écoulement), ainsi on a élargi l'application de la méthode pour l'étude d'un cylindre tournant au bord d'attaque d'un profil aérodynamique, dans lequel on a utilisé un profil de type N.A.C.A 4412.

Mots clés: Singularités, profil isolé, grille rectiligne, étage de turbomachine, fonction potentielle complexe, vitesse conjuguée, profil de type N.A.C.A 4412.

Abstract:

the purpose of this work, is to present a singularity method by complexety order (isolated profile, a set of steady and movable obstacles, turbomachine floor by taking into account the instationnarity of the flow), as well as broadening the application of the method for a rotating cylinder in leading edge, in which we use a profile of the type N.A.C.A 4412.

Key words: Singularities, isolated profile, set of obstacles, turbomachine floor, complex potential function, conjugated velocity, profile of the type N.A.C.A 4412.

Sommaire



Introduction générale 1

CHAPITRE I - Généralités sur la mécanique des fluides

I-1- la forme différentielle de l'équation de continuité	3
I-2- la fonction de courant	3
I-3- Définition de la ligne de courant	4
I-4- Ecoulement irrotationnel et fonction potentielle	4
I-5- Notion de la circulation	5
I-6- Notion du potentiel complexe	5
I-7- propriétés de la fonction potentielle complexe	6
I-8- Singularités élémentaires.....	7
I-8-1- Ecoulement parallèle uniforme	8
I-8-2- Ecoulement tourbillonnaire	9
I-8-3- Ecoulement de type source ou puits	10
I-9- principe de superposition d'écoulements élémentaires	11

CHAPITRE II- Application de la méthode des singularités à un profil isolé et un cylindre

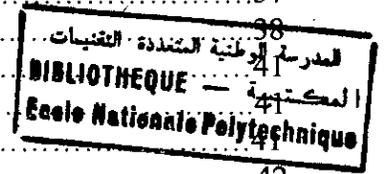
Isolé.

II- Présentation de la méthode des singularités	14
II-1- Introduction	14
II-2- Application à un profil isolé.....	14
II-2-1- Procédure de Discrétisation	14
II-2-2- Choix de la distribution	15
II-2-3- Calcul du champ de vitesse autour du profil	15
II-2-4- Conditions aux limites	17
II-2-4-1- Condition de glissement	17
II-2-4-2- Etablissement des fonctions d'influence	18
II-2-4-3- Condition de KUTTA-JOUKOWSKI	18
II-2-5- Calcul des caractéristiques de l'écoulement	19
II-2-5-1- Calcul de la vitesse tangentielle	19
II-2-5-1- Calcul des coefficients de pression	19
II-2-6- Présentation des résultats pour les coefficients de pression	20
II-3- Application à un cylindre isolé	22
II-3-1- Cylindre fixe	22
II-3-2- Cylindre tournant	23
II-3-3- Champ des vitesses	26
II-3-4- Expression de la vitesse tangentielle	26
II-3-5- Calcul des coefficients de pression	27
II-3-6- Présentation des résultats	28

Chapitre III- Application de la méthode des singularités à une grille rectiligne

III- Application à une grille rectiligne	36
III-1- Définition d'une grille d'aube	36
III-2- Définition géométrique des profils en grille	36

III-3- Application de la méthode des singularités à une grille rectiligne	37
III-4- Conditions aux limites	37
III-4-1- Condition de glissement	37
III-4-2- Etablissement des fonctions d'influence	38
III-4-3- Condition de KUTTA-JOUKOWSKI	41
III-5- Calcul des caractéristiques de l'écoulement en Grille	41
III-5-1- Calcul de la vitesse tangentielle	41
III-5-2- Présentation des résultats	42



Chapitre IV- Application de la méthode des singularités à un étage de Turbomachine.

IV-1- Définition d'un étage de turbomachines	46
IV-2- Description des obstacles... ..	46
IV-3- Champs de vitesse dans l'étage	46
IV-4- Condition de glissement	49
IV-5- Condition de KUTTA-JOUKOWSKI	51
IV-6- Expression de la vitesse tangentielle	53
IV-7- Calcul des coefficients de pression en régime instationnaire	55
IV-8- Présentation des résultats	56

Chapitre V- Etude d'un cylindre tournant au bord d'attaque

V- Etude d'un cylindre tournant au bord d'attaque	61
V-1- Principe de la modélisation	61
V-2- Présentation des résultats	66

Plan général du programme

Plan du programme Etage

Conclusion Générale

Annexes

Annexe-A	72
Annexe-B	73
Annexe-C	74

Notations



Chapitre I

- C : Vitesse complexe.
- C' : Vitesse complexe conjuguée.
- α : Direction de l'écoulement supposé uniforme.
- $F(z)$: Potentielle complexe.
- Z : Affixe d'un point quelconque du plan.
- r : Module de z.
- θ : Argument de z.
- u : Composante de la vitesse suivant ox .
- v : Composante de la vitesse suivant oy .
- ϕ : Potentiel des vitesses.
- ψ : fonction de courant.
- Γ : Circulation du vecteur vitesse.
- Q_v : Débit d'une source.

Chapitre II

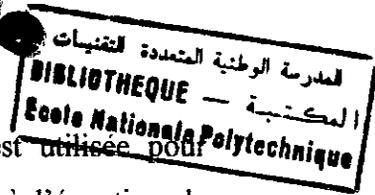
- [A] : Matrice d'influence.
- [B] : Second membre du système linéaire.
- $G(i,j), F(i,j), W(i,j), H(i,j)$: Fonctions d'influence.
- C : Vitesse absolue de l'écoulement en un point du plan (x,y)
- C' : Vitesse conjuguée.
- C_0 : Vitesse de l'écoulement à l'infini amont.
- $F(z)$: Potentiel complexe de l'écoulement
- n : Nombre total de panneaux.
- L_j : longueur du panneau j.
- S_j : Abscisse curviligne.
- u, v : Composantes axiale et tangentielle de la vitesse
- $Z = x + iy$: Affixe d'un point quelconque du plan.
- $Z_j = x_j + ix_j$: Affixe d'un tourbillon (ou vortex) quelconque
- Γ : Intensité du tourbillon (ou vortex).
- α : Direction de l'écoulement supposé uniforme.
- δ : Inclinaison du segment porteur de tourbillon (ou vortex).
- $\gamma(s)$: Distribution de vorticités.
- $\gamma_s(j)$: Vortacité au sommet j.
- P : Pression.
- X(i) : Abscisse du point de contrôle i.
- Y(i) : Ordonnée du point de contrôle i.
- $X_s(j)$: Abscisse du point de sommet j.
- $Y_s(j)$: Ordonnée du point de sommet j.
- C_p : Coefficient de pression.
- r : Rayon du cylindre
- U_c : Vitesse de rotation du cylindre.

Chapitre-III , IV et V

- γ : Angle de calage des profils de la grille (ou étage).
I : L'angle d'incidence.
[A] : Matrice d'influence.
[B] : Second membre du système linéaire.
G(i,j), F(i,j) : Fonctions d'influence.
C' : Vitesse conjuguée.
C_m : vitesse moyenne du fluide.
F(z) : Potentiel complexe de l'écoulement.
 Γ : Intensité du tourbillon (ou vortex).
 α : Direction de l'écoulement supposé uniforme.
 δ : Inclinaison du segment porteur de tourbillon (ou vortex).
L_j : longueur du panneau j.
 $\gamma(s)$: Distribution de vorticités.
 $\gamma_s(j)$: Vorticité au sommet j.
X(i) : Abscisse du point de contrôle i.
Y(i) : Ordonnée du point de contrôle i.
 γ_r : Angle de calage du rotor.
 γ_s : Angle de calage du stator.
C_p : Coefficient de pression.
U : Vitesse de rotation du rotor.
 σ : Serrage du profil.
h : Pas du stator.
t : Pas du rotor.
W : Vitesse relative.
U_c : Vitesse de rotation du cylindre.
C_L : Coefficient de portance.



Introduction générale



La Méthode des singularités introduite par Martensen en 1959, est utilisée pour analyser l'écoulement. elle permet de déterminer une solution particulière à l'équation de Laplace satisfaisant à des conditions aux limites imposées. La portée de la Méthode est très grande et sa souplesse permet, une fois les programmes de calculs établis, d'étudier l'écoulement autour des formes les plus complexes par la superposition d'écoulements élémentaires correspondant respectivement :

- à l'écoulement uniforme de base.
- A des sources, des puits ou des tourbillons, centrés en des points convenablement choisis du champ de l'écoulement (à la surface des aubages en particulier).

Notre but est donc d'appliquer la méthode par ordre de complexité (profil isolé, grille rectiligne, étage de turbomachine), ainsi d'élargir l'application de cette dernière pour l'étude d'un cylindre tournant en position frontale d'un écoulement, disposé à l'avant de l'aube dans lequel on va utiliser un profil de type N.A.C.A 4412. pour cela, une structure informatique a été utilisée à partir d'un langage de programmation (FORTRAN).

Dans ce but on propose de cheminer notre mode de travail suivant l'analyse suivante :

Chapitre .I

Dans lequel on va étudié toutes les notions dont on a besoin pour la méthode des singularités.

Chapitre .II

On va appliquer la méthode des singularités pour un profil isolé et un cylindre isolé.

Chapitre .III

On va élargir le domaine d'application à une grille rectiligne, en introduisant la notion des obstacles mobiles.

Chapitre .IV

On va traiter un étage de turbomachine en faisant introduire la notion d'instationnarité de l'écoulement.

Chapitre .V

On va élargir l'application de la méthode par l'étude d'un cylindre tournant en position frontale d'un écoulement, disposé à l'avant de l'aube.

Chapitre I

CHAPITRE I : Généralités sur la mécanique des fluides

Dans ce chapitre on va étudier quelques notions de la mécanique des fluides (équation de continuité, fonction de courant, lignes de courant, fonction potentielle complexe, singularités élémentaires, etc....) indispensables pour l'application de la méthode des singularités.

I-1- La forme différentielle de l'équation de continuité :

l'équation de continuité est l'une des équations fondamentales de la mécanique des fluides[1], la notation vectorielle peut être écrite comme suit [4] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0 \quad \text{[I-1]}$$

deux cas spéciaux nous intéressent particulièrement :

- pour un fluide compressible en écoulement stationnaire :

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} = 0 \quad \text{[I-2]}$$

$$\text{donc : } \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

- pour un fluide incompressible, la densité du fluide ρ est constante dans le champ fluide, donc [I-1] devient :

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad \text{[I-3]}$$

$$\text{D'où : } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Cette équation est appliquée pour un fluide incompressible en écoulement stationnaire.

I-2-La fonction de courant :

Les écoulements stables, incompressibles, bidimensionnelles représentent un des types simples d'écoulement ayant une importance pratique[6].

Pour un écoulement plan, l'équation de continuité [I-1], se réduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{[I-4]}$$

cette équation suggère que si on définit une fonction $\Psi(x,y)$, appelé fonction de courant, donnée comme suit:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{[I-5]}$$

I-3-Définition de la ligne de courant :

La ligne de courant est une courbe tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse [6] ; elle est définie par l'égalité suivante :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad \text{[I-6]}$$

Où u, v, w sont les composantes de la vitesse \vec{C} .

I-4-Ecoulement irrotationnel et fonction potentielle :

On dit qu'un écoulement est à potentiel de vitesses si le champ des vitesses dérive d'un potentiel. C'est à dire si :

$$\vec{C} = \overline{\text{grad}}\phi \quad \text{où } \phi : \text{potentiel des vitesses.}$$

Donc :

$$\text{En coordonnées cartésiennes : } \vec{C} = \begin{pmatrix} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{[I-7]}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ r\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{[I-8]}$$

l'écoulement à potentiel de vitesses vérifie la relation :

$$\text{Rot}(\vec{C}) = \nabla \wedge C = 0 \quad \text{[I-9]}$$

$$\text{Donc : } \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{L'écoulement est irrotationnel.}$$

I-5-Notion de la circulation :

La circulation Γ d'un vecteur vitesse \vec{C} le long d'une courbe (L) est donnée par la relation :

$$\Gamma = \int_L \vec{C} \cdot \vec{ds} = \int_L C \cdot \cos \alpha \cdot ds \quad [\text{I-10}]$$

$$\text{Avec : } \vec{ds} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Le produit $\vec{C} \cdot \vec{ds}$ permet de calculer Γ :

$$\Gamma = \int_L u dx + v dy + w dz$$

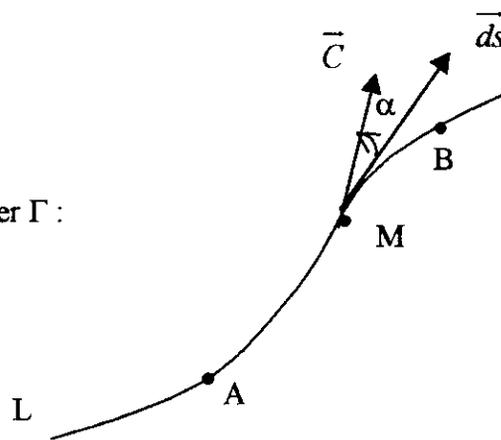


Fig. I-1 Circulation

I-6-Notion du potentiel complexe :

L'étude des écoulements plans à potentiel de vitesses est facilitée par l'introduction des fonctions complexes [10].

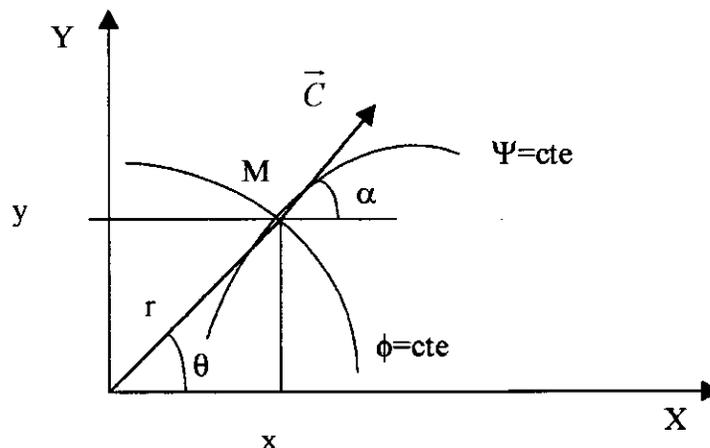


Fig I-2 représentation dans le plan complexe

Au point M de coordonnées (x,y), représenté sur la figure ci-avant, on fait correspondre une affixe complexe z telle que :

$$Z = x + iy = r(\cos\theta + i \sin\theta) = r \exp(i\theta) \quad [\text{I-11}]$$

Avec :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{module de } z)$$

$$\theta = \arctan(y/x) \quad (\text{argument de } z)$$

De même, La vitesse \overline{C} au point M de composantes (u, v) peut être écrite sous forme vectorielle complexe :

$$\overline{C} = u + iv = C \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) = C \cdot \exp(i\alpha) \quad [\text{I-12}]$$

Dans le cadre de l'étude analytique, on introduit ϕ et ψ par l'intermédiaire de la fonction potentiel complexe F(z) [2].

$$F(z) = \phi + i\psi$$

I-7-Propriétés de la fonction potentielle complexe :

La fonction potentiel complexe possède une dérivée unique en un point quelconque M.

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv \quad [\text{I-13-a}]$$

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{i \partial y} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = u - iv \quad [\text{I-13-b}]$$

donc la dérivée de F par rapport à z est une vitesse complexe $\overline{C'}$ appelée vitesse conjuguée de la vitesse \overline{C} .

$$C' = \frac{dF}{dz} = u - iv \quad [\text{I-13-c}]$$

I-8-Singularités élémentaires :

Nous allons maintenant étudier quelques écoulements élémentaires : l'écoulement uniforme, source, tourbillon, et vortex. Nous analyserons ensuite comment les champs de vitesse de ces écoulements simples peuvent être combinés pour résoudre des problèmes plus complexes.

I-8-1-Ecoulement parallèle uniforme :

Le potentiel complexe de l'écoulement uniforme est défini par :

$$F(z)=C_0 z =C_0 (x+ i.y) \quad \text{[I-14]}$$

On sait que : $F(z)=\phi+i.\Psi$

Par identification, on aura :

$$\phi= C_0 .x \quad \text{et} \quad \Psi= C_0 .y$$

donc les composantes de la vitesse \bar{C} peuvent être calculées à partir des relations suivantes :

$$\bar{C} \begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = C_0 \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \text{[I-15]}$$

On remarque bien que les lignes de courant sont des lignes droites horizontales ($y=\text{const}$), et les lignes potentielles sont verticales ($x=\text{const}$), donc orthogonales aux lignes de courant (voir fig.I-3).

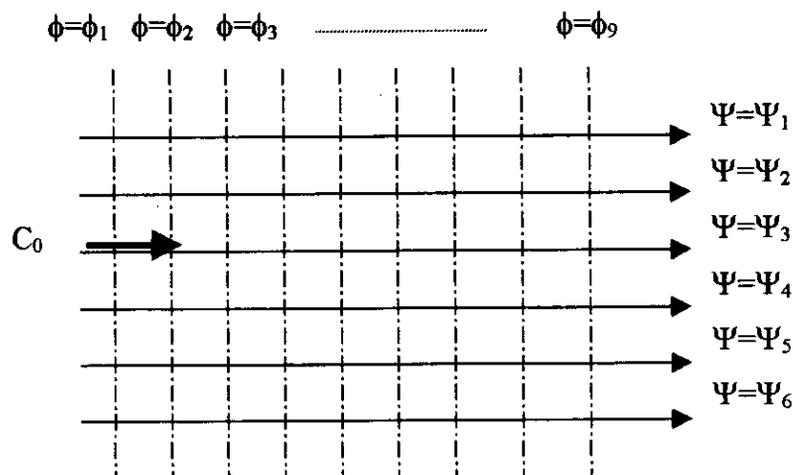


Fig. (I-3) : Ecoulement uniforme

◆ **Remarque :**

si l'écoulement forme un angle α avec l'axe ox (fig. I-4), le potentiel complexe est donné par :

$$F(z)=C_0 .z .\exp(-i\alpha)=C_0 r \exp(i\theta) \exp(-i\alpha)$$

$$F(z)=C_0 [(x \cos\alpha+ y \sin\alpha)+i(-x \sin\alpha + y \cos\alpha)]$$

Donc :

$$\begin{cases} \phi = C_0(x \cos \alpha + y \sin \alpha) \\ \psi = C_0(y \cos \alpha - x \sin \alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = C_0 \cos \alpha \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = C_0 \sin \alpha \end{cases}$$

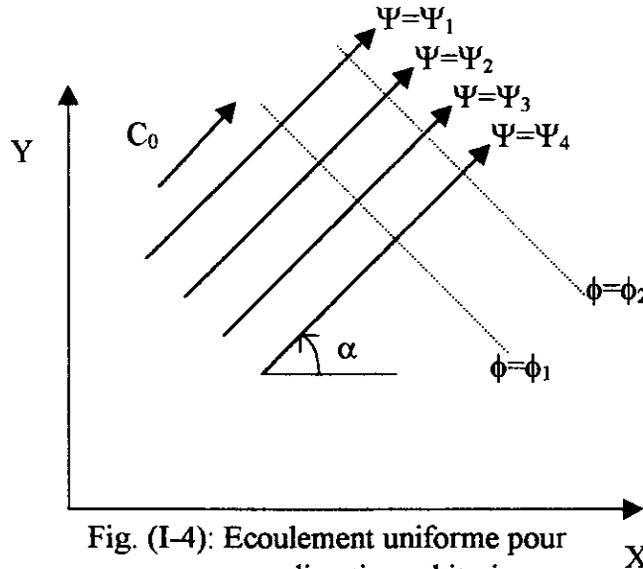


Fig. (I-4): Ecoulement uniforme pour une direction arbitraire, α

I-8-2-Ecoulement tourbillonnaire :

Le potentiel complexe de l'écoulement tourbillonnaire est défini par :

$$F(z) = \pm i C_0 \ln z \quad \text{[I-16]}$$

Traitons le cas positif, et en remplaçant $Z = r \exp(i\theta)$ dans (1) on aboutit à :

$$F(z) = i C_0 \ln r - C_0 \theta$$

D'où :

$$\phi = -C_0 \cdot \theta = -C_0 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad \text{[I-17-a]}$$

$$\Psi = C_0 \cdot \ln r = C_0 \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{[I-17-b]}$$

les lignes de courant sont cette fois-ci des cercles concentriques, tandis que les équipotentiels forment un faisceau de droites centrés sur l'origine (Fig. I-5).

l'écoulement tourbillonnaire est caractérisé par la circulation du vecteur vitesse :

$$\Gamma = \int_{\gamma} \vec{C} \cdot ds \quad \text{[I-18]}$$

avec des abscisses curvilignes : $ds = -r d\theta$

$$C = C_u = -\frac{C_0}{r}$$

$$\Gamma = \int_{\psi} \frac{C_0}{r} \cdot r d\theta = 2\pi C_0 \quad [\text{I-19}]$$

donc, la circulation est une constante, quelque soit le cercle retenu.

D'où l'expression de la vitesse \vec{C} : $C = C_u = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \quad [\text{I-20}]$

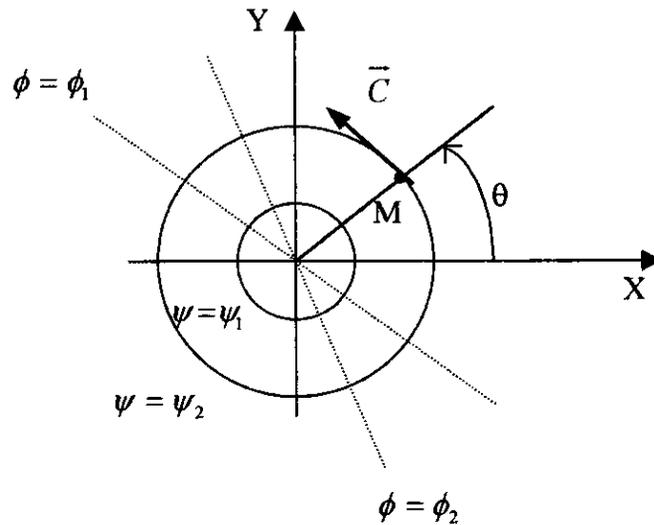


Fig. (I-5) : Lignes de courant et lignes équipotentielles dans un écoulement plan tourbillonnaire autour d'un axe

• **Calcul de la vitesse locale :**

$$\vec{C} = \begin{cases} C_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \\ C_u = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{C_0}{r} \end{cases} \quad [\text{I-21}]$$

la vitesse radiale est nulle, la vitesse circonférentielle est inversement proportionnelle à r . il s'agit de l'écoulement tourbillonnaire centré en O désigné par vortex libre.

◆ **Remarque :**

en tenant compte de la relation (1), l'écoulement tourbillonnaire sera représenté par :

$$F(z) = i \cdot \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \quad [\text{I-22}]$$

avec :

$$\begin{cases} \phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \end{cases} \quad [\text{I-23}]$$

Pour un tourbillon, décentré par rapport au centre du repère de l'affixe z_0 , on écrira :

$$F(z) = i \cdot \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad [\text{I-24}]$$

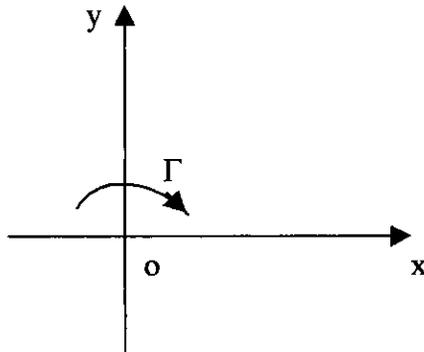


Fig. I-6 : Tourbillon centré en O

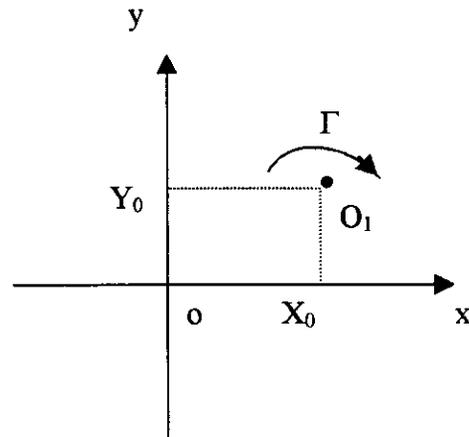


Fig. I-6 : Tourbillon décentré à O₁

I-8-3-Ecoulement de type source ou puits :

Le potentiel complexe créé par une source de débit Q_v en un point M d'affixe z est [6]:

$$F(z) = \pm \frac{Q_v}{2\pi} \ln z \quad [\text{I-25}]$$

Traisons le cas positif, et en remplaçant en coordonnées polaires l'expression de z comme précédemment [6] :

$$F(z) = \frac{Q_v}{2\pi} \ln[r \exp(i\theta)] \quad [\text{I-26-a}]$$

et $F(z) = \phi + i\psi \quad [\text{I-26-b}]$

Après identification on aboutit à :

$$\begin{cases} \phi = \frac{Q_v}{2\pi} \ln r = \frac{Q_v}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \\ \psi = \frac{Q_v}{2\pi} \theta = \frac{Q_v}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{cases} \quad [\text{I-27}]$$

Les équipotentiels sont des cercles centrés sur la source ($r = \text{cte}$) et les lignes de courant des droites passant par l'origine ($y/x = \text{cte}$).

Champ des vitesses :

La vitesse locale \vec{C} induite en un point quelconque :

$$\vec{C} = \begin{cases} C_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{C_0}{r} \\ C_u = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad [\text{I-28}]$$

Remarque :

Pour une source (ou un puits), décentrée par rapport au centre du repère de l'affixe Z_0 , on écrira :

$$F(z) = \pm C_0 \ln(z - z_0)$$

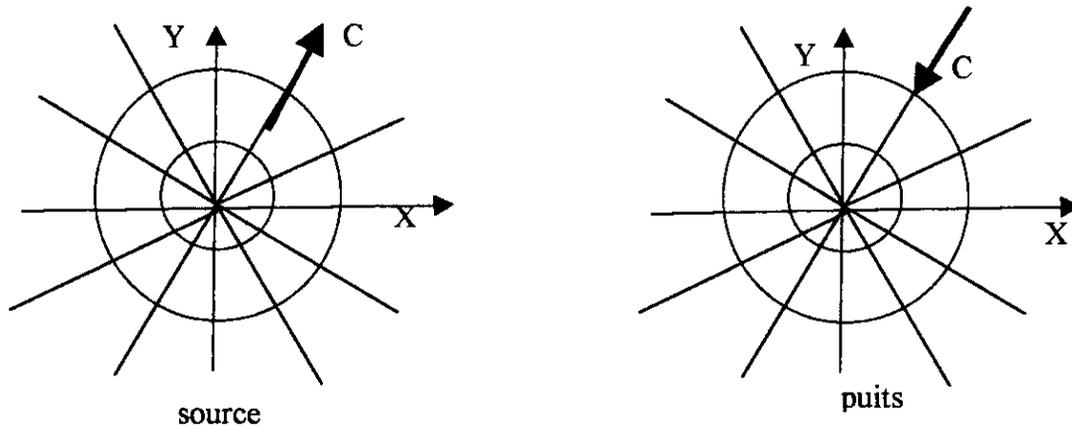


Fig I-7 : Source et puits de même débit

I-9-Principe de superposition d'écoulements élémentaires :

Le principe de superposition des écoulements se traduit par l'addition des fonctions potentiels complexes et par conséquent par l'addition des fonctions de courant ψ et des fonctions potentiels ϕ [10].

Pour deux écoulements distincts :

$$F_1(z) = \phi_1 + i\psi_1 \quad \text{et} \quad F_2(z) = \phi_2 + i\psi_2$$

La superposition de ces deux écoulements élémentaires a pour potentiel complexe :

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) = \phi + i\psi$$

$$\text{Où} \quad \begin{cases} \phi = \phi_1 + \phi_2 \\ \psi = \psi_1 + \psi_2 \end{cases}$$

Ainsi, on peut démontrer que les vitesses s'additionnent vectoriellement :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial(\phi_1 + \phi_2)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = u_1 + u_2 \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial(\phi_1 + \phi_2)}{\partial y} = \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = v_1 + v_2 \end{cases} \quad \text{[I-29]}$$

exemple : superposition d'une source et un puits de même débit Q_v :

Considérons une source $+Q_v/2\pi$ au point $(x,y)=(-a,0)$, combinée à un puits de même débit Q_v , placé au point $(x,y)=(+a,0)$, la fonction de courant résultante est la somme des deux fonctions de courant élémentaires.

Comme on a montré précédemment la fonction de courant de la source est :

$$\psi = \frac{Q_v}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad \text{[I-30]}$$

donc, la fonction de courant résultante [6] :

$$\psi = \psi_{\text{source}} + \psi_{\text{puits}} = \frac{Q_v}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x+a} \right) - \frac{Q_v}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x-a} \right) \quad \text{[I-31]}$$

de même, la fonction potentielle résultante est [6] :

$$\phi = \phi_{\text{source}} + \phi_{\text{puits}} = \frac{Q_v}{2\pi} \ln \left[(x+a)^2 + y^2 \right] - \frac{Q_v}{2\pi} \ln \left[(x-a)^2 + y^2 \right] \quad \text{[I-32]}$$

En utilisant les identités logarithmiques et trigonométriques, on aboutira finalement à :

$$\psi = -\frac{Q_v}{2\pi} a \operatorname{tang} \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right) \quad \text{[I-33-a]}$$

$$\phi = \frac{Q_v}{2\pi} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \quad \text{[I-33-b]}$$

ces lignes sont dessinés dans la figure ci-dessous, qui sont deux familles de cercles orthogonales, avec des lignes de courant passant à travers la source et la puits et les lignes potentielles qui les encerclent.

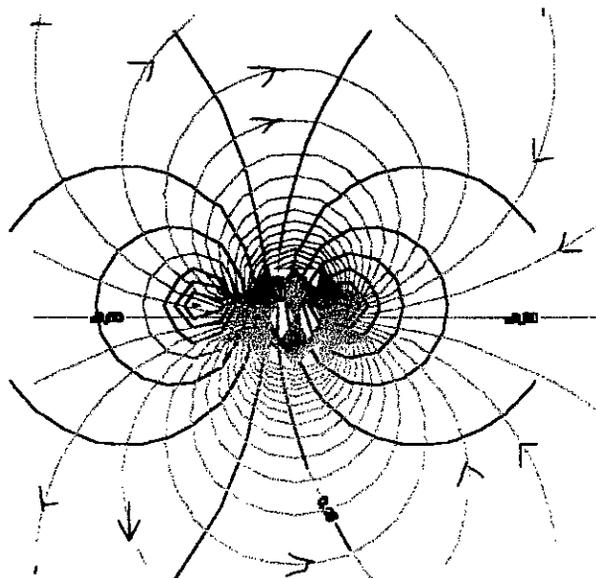


Fig. 1-8: Superposition d'une source et d'un puits

Chapitre II

CHAPITRE II- Application de la méthode des singularités à un profil isolé et un cylindre isolé

ce chapitre traite essentiellement la méthode des singularités pour un profil isolé pour la détermination des caractéristiques de l'écoulement, et cela après avoir appliqué les conditions aux limites (condition de glissement, condition de KUTTA-JOUKOWSKI) et résoudre un système d'équations linéaires.

II- Présentation de la méthode des singularités :

II-1-introduction :

La méthode des singularités est intéressante pour analyser l'écoulement autour d'un profil aérodynamique. Elle permet de trouver une solution particulière à l'équation de Laplace [6].

Pour cela, on dispose dans le plan d'étude d'une succession de singularités : sources, puits, tourbillons, tous centrés en des points convenablement choisis (à la surface des aubages Notamment) que l'on superpose à un écoulement uniforme de module et de direction données à l'infini Amont[7].

II-2- application à un profil isolé :

II-2-1- procédure de discrétisation [10] :

on fait une discrétisation du profil en (n) sommets de façon à former un polygone de n cotés (Fig. II-1), les sommets sont reliés entre eux par des segments appelés " panneaux" , au milieu de chaque panneau on place un point de contrôle (x(i),y(i)) tel que :

$$\begin{aligned} x(i) &= \frac{x_s(i) + x_s(i-1)}{2} \\ y(i) &= \frac{y_s(i) + y_s(i-1)}{2} \end{aligned} \quad \text{[II-1]}$$

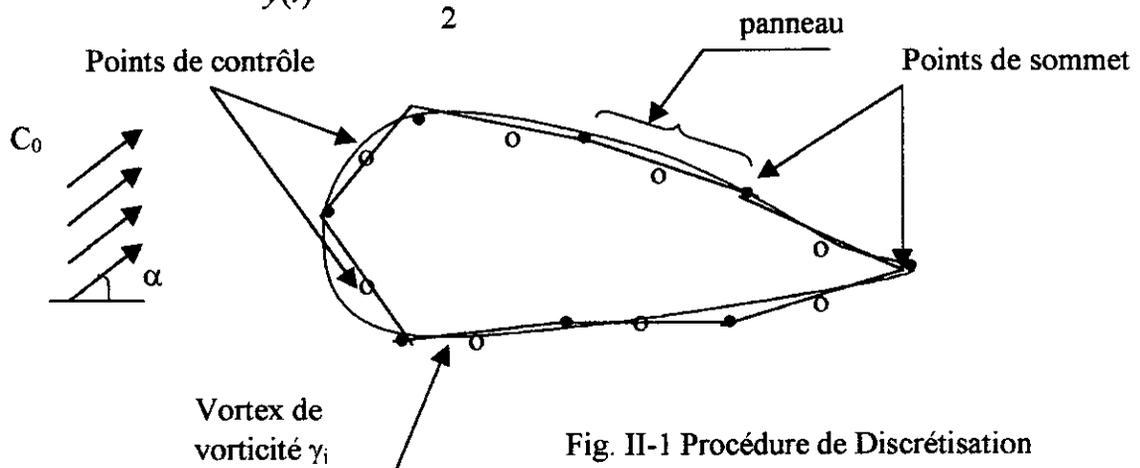


Fig. II-1 Procédure de Discrétisation

A chaque panneau j , on associe un axe de coordonnées curvilignes S_j tel que : pour le point $(x_s(j-1), y_s(j-1))$ $S_j=0$ et pour le point $(x_s(j), y_s(j))$ $S_j=l_j$ (l_j est la longueur du panneau j).

Les coordonnées $(x(j), y(j))$ d'un point appartenant au panneau j deviennent :

$$X(j) = X_s(j-1) + S_j \cos(\delta_j)$$

$$Y(j) = Y_s(j-1) + S_j \sin(\delta_j)$$

Où : δ_j représente l'angle d'inclinaison du panneau (j).

II-2-2- Choix de la distribution :

On répartit le long de chaque panneau une charge constituée d'une distribution linéaire de vortex (Fig. II-2).

$$\gamma(i) = \gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} S_j \quad \text{[II-2]}$$

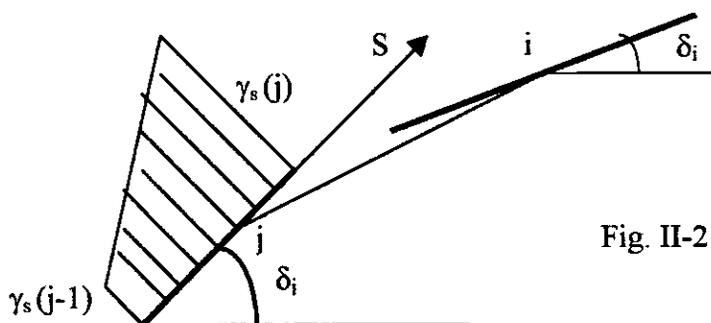


Fig. II-2 Discretisation du profil

II-2-3- Calcul du champ de vitesse autour du profil :

Le potentiel complexe induit par un point du panneau "j", d'affixe Z_j , en un point quelconque d'affixe Z est :

$$F(z) = \frac{-i}{2\pi} \gamma_j \ln(z - z_j) \quad \text{[II-3]}$$

En notant que les affixes z et z_j s'écrivent respectivement :

$$z = x + iy \quad ; \quad z_j = x_j + i y_j$$

l'intégration le long du panneau, nous donne l'effet total de cette distribution :

$$F(z) = \frac{-i}{2\pi} \int_{l_j} \gamma(j) \ln(z - z_j) ds_j \quad \text{[II-4]}$$

d'où on accède à la vitesse conjuguée C' par la relation classique :

$$C' = \frac{dF}{dz} = \frac{-i}{2\pi} \int_{l_j} \gamma(j) \frac{1}{z - z_j} ds_j \quad \text{[II-5-a]}$$

$$C' = -\frac{i}{2\pi} \int_{j_j} \gamma(j) \frac{(x-x_j) - i(y-y_j)}{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2} ds_j$$

$$C' = -\frac{1}{2\pi} \left(\int_{j_j} \gamma(j) \frac{(y-y_j)}{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2} ds_j + i \int_{j_j} \gamma(j) \frac{(x-x_j)}{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2} ds_j \right) \quad [\text{II-5-b}]$$

Pour le profil on dispose de (n panneaux), donc la vitesse conjuguée est donnée par les influences de tous les panneaux :

$$C' = -\frac{1}{2\pi} \left(\sum_{j=1}^n \int_{j_j} \gamma(j) \frac{(y-y_j)}{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2} ds_j + i \sum_{j=1}^n \int_{j_j} \gamma(j) \frac{(x-x_j)}{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2} ds_j \right) \quad [\text{II-5-c}]$$

Après superposition à ces vortex d'un écoulement uniforme, la vitesse conjuguée en un point (x,y) de l'écoulement devient :

$$C' = C_0 \cos \alpha - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{j_j} \gamma(j) \frac{(y-y_j)}{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2} ds_j - i \left(C_0 \sin \alpha + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{j_j} \gamma(j) \frac{(x-x_j)}{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2} ds_j \right)$$

D'où le vecteur vitesse :

$$\vec{C} = \left\{ \begin{array}{l} u = C_0 \cos \alpha - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{j_j} \gamma(j) \frac{(y-y_j)}{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2} ds_j \\ v = C_0 \sin \alpha + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{j_j} \gamma(j) \frac{(x-x_j)}{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2} ds_j \end{array} \right\} \quad [\text{II-6}]$$

donc le vecteur de vitesse au point de contrôle (x_i,y_i)

tel que :

$$x(i) = \frac{xs(i) + xs(i-1)}{2}$$

$$y(i) = \frac{ys(i) + ys(i-1)}{2}$$

est :

$$\vec{C}_i = \left\{ \begin{array}{l} u_i = C_0 \cos(\alpha) - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{j_j} \gamma(j) \frac{(y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} ds_j - \underbrace{\frac{\gamma_m \cos(\delta_i)}{2}}_{i=j} \\ v_i = C_0 \sin(\alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{j_j} \gamma(j) \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} ds_j - \underbrace{\frac{\gamma_m \sin(\delta_i)}{2}}_{i=j} \end{array} \right. \quad [\text{II-7}]$$

où $\frac{\gamma_m}{2}$ représente l'influence du panneau sur lui-même.

$$\frac{\gamma_m}{2} = \frac{\gamma_s(j) + \gamma_s(j-1)}{4}$$

II-2-4- Conditions aux limites :

la distribution des vorticités γ_s doit répondre à certaines conditions aux limites traduisant la réalité physique de l'écoulement. parmi eux, on peut citer la condition de glissement, et la condition de KUTTA-JOUKOWSKI.

II-2-4-1- Condition de glissement :

La distribution de vorticité $\gamma(s)$ doit répondre aux conditions aux limites traduisant le glissement du fluide à la surface du profil, Cette condition est nécessaire Pour traduire l'imperméabilité du profil.

Donc :

$$\frac{v_i}{u_i} = \operatorname{tg} \delta_i \Rightarrow v_i \cos \delta_i = u_i \sin \delta_i \quad \text{[II-8]}$$

$$\Rightarrow C_0 \sin(\alpha) \cos(\delta_i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \gamma(j) \frac{(x_i - x_j) \cos(\delta_i)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_i) \cos(\delta_i) =$$

$$C_0 \cos(\alpha) \sin(\delta_i) - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \gamma(j) \frac{(y_i - y_j) \sin(\delta_i)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_i) \sin(\delta_i)$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \gamma_j \left(\frac{(x_i - x_j) \cos(\delta_i) + (y_i - y_j) \sin(\delta_i)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right) ds_j = C_0 (\cos \alpha \sin \delta_i - \sin \alpha \cos \delta_i) \quad \text{[II-9]}$$

On a :

$$\gamma_s(j) = \gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} S_j$$

Donc :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \left(\gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} S_j \right) \left[\frac{(x_i - x_j) \cos \delta_i + (y_i - y_j) \sin \delta_i}{2\pi [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]} \right] ds_j = C_0 \sin(\delta_i - \alpha)$$

[II-10]

II-2-4-2- Etablissement des fonctions d'influence :

Les fonctions d'influence (G,F) représentent les caractéristiques géométriques de l'obstacle, elles sont données par les relations suivantes :

$$\begin{cases} G(i,j) = \int_{l_j} \left(\frac{(x_i - x_j) \cos \delta_i + (y_i - y_j) \sin \delta_i}{((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)} \right) ds_j \\ F(i,j) = \int_{l_j} \left(\frac{(x_i - x_j) \cos \delta_i + (y_i - y_j) \sin \delta_i}{((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)} \right) S_j ds_j \end{cases}$$

d'où :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[G(i,j) \gamma_s(j-1) + F(i,j) \cdot \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} \right] = 2\pi C_0 \sin(\delta_i - \alpha) \quad \text{[II-11]}$$

On remarque que l'intensité des singularités pour $j=1$ n'est pas définie, donc on fait la sommation de $j=2$ jusqu'à $j= n+1$ et on confond le point $j=n+1$ avec $j=1$.

On aura donc :

$$G(i,n+1)=G(i,1)$$

$$F(i,n+1)=F(i,1)$$

II-2-4-3- Condition de KUTTA-JOUKOWSKI :

Puisque on a n équations pour $n+1$ inconnues, on a besoin d'une équation indépendante traduite par la condition de KUTTA-JOUKOWSKI qui s'écrit de la façon suivante :

- Au niveau du bord de fuite la vitesse à l'extrados et la vitesse à l'intrados ont la même valeur finie, ce qui conduit à :

$$\gamma_s(n+1) + \gamma_s(1) = 0.$$

Où : $\gamma(j)$ représente la valeur de la vorticité au point j .

On aboutit finalement à un système d'équations :

$$[A]\{\gamma_s\}=\{B\} \quad \text{[II-12]}$$

$$\text{où : } B(i)=2\pi C_0 \sin(\delta_i - \alpha)$$

$$\text{et : } A(i,j) = \begin{cases} A(i,1) = G(i,2) - \frac{F(i,2)}{l_2} - \frac{F(i,1)}{l_1} \\ A(i,j) = G(i,j+1) - \frac{F(i,j+1)}{l_{j+1}} + \frac{F(i,j)}{l_j} \\ A(i,n) = G(i,1) + \frac{F(i,n)}{l_n} - \frac{F(i,1)}{l_1} \end{cases}$$

La résolution du système linéaire [II-12] nous permet de déterminer les vorticités $(\gamma_s(j), j = 1, n)$. par la suite, on peut facilement calculer les paramètres de l'écoulement (vitesses, coefficients de pression, etc.).

II-2-5- Calcul des caractéristiques de l'écoulement :

II-2-5-1- calcul de la vitesse tangentielle :

après avoir déterminé les vorticités γ_s on les injectent pour calculer les C_i où :

$$C_i = -(u_i \cos \delta_i + v_i \sin \delta_i)$$

en remplaçant u_i, v_i dans l'équation (II-3) on aboutit finalement à :

$$C_i = -C_0 \cos(\alpha - \delta_i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \frac{((y_i - y_j) \cos \delta_j - (x_i - x_j) \sin \delta_j) ds_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} + \frac{\gamma_m}{2}$$

on aboutira finalement à l'expression finale de la vitesse :

$$C_i = -C_0 \cos(\alpha - \delta_i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[G(i, j) \gamma_s(j-1) + F(i, j) \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} \right] + \frac{\gamma_s(j) + \gamma_s(j-1)}{4}$$

[II-13]

où :

$$G(i, j) = \frac{1}{2\pi} \int_{l_j} \left(\frac{(y_i - y_j) \cos \delta_i - (x_i - x_j) \sin \delta_i}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right) ds_j$$

$$F(i, j) = \frac{1}{2\pi} \int_{l_j} \left(\frac{(y_i - y_j) \cos \delta_i - (x_i - x_j) \sin \delta_i}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right) S_j ds_j$$

les valeurs de G et F pour $i=j$ sont :

$$\begin{cases} G(i, j) = \pi \\ F(i, j) = \frac{\pi l_j}{2} \end{cases}$$

et enfin la matrice d'influence :

$$\begin{cases} A(i, 1) = G(i, 2) - \frac{F(i, 2)}{l_2} - \frac{F(i, 1)}{l_1} \\ A(i, j) = G(i, j+1) - \frac{F(i, j+1)}{l_{j+1}} + \frac{F(i, j)}{l_j} \\ A(i, n) = G(i, 1) - \frac{F(i, 1)}{l_1} + \frac{F(i, n)}{l_n} \end{cases}$$

II-2-5-2- calcul des coefficients de pression :

l'application de l'équation de Bernoulli entre deux points, le premier à l'infini amont et le deuxième, sur l'obstacle i nous donne :

$$P_\infty + \frac{1}{2} \rho C_0^2 = P_i + \frac{1}{2} \rho C_i^2$$

$$\Rightarrow p_i - p_\infty = \frac{1}{2} \rho C_0^2 \left(1 - \left(\frac{C_i}{C_0} \right)^2 \right)$$

le coefficient de pression est défini par :
$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho C_0^2} = 1 - \left(\frac{C_i}{C_0} \right)^2 \quad \text{[II-14]}$$

II-2-6- présentation des résultats pour les coefficients de pression :

Durant cette étude on a utilisé la série N.A.C.A 65 adaptée pour les turbomachines. L'interpolation polynomiale du profil donne des résultats plus précises [12].

On a utilisé le profil NACA 65-173 pour nos calculs (fig. II-3).

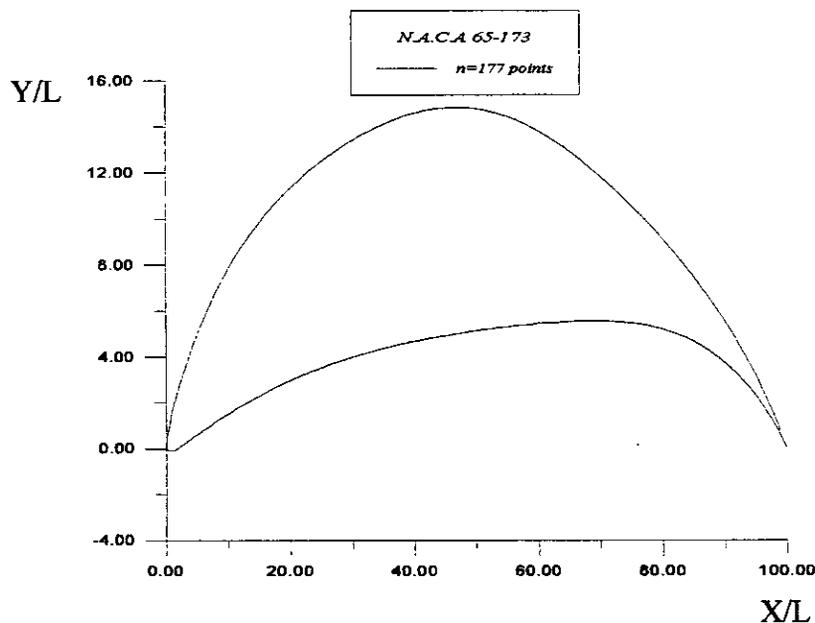


Fig. II-3 Profil N.A.C.A 65-173

- Pour $\alpha=2^\circ$ et $\alpha=4^\circ$ on remarque que le bord d'attaque est un point de stagnation, et on a une dépression sur la partie extrados qui diminue en s'approchant du bord de fuite. mais sur la partie intrados on a une variation uniforme des coefficients de pression (Fig.II-4-1, FigII-4-2).
- Pour $\alpha=8^\circ$, ainsi que pour $\alpha=16^\circ$ on remarque qu'il y a un déplacement du point de stagnation sur l'intrados (Fig. II-4-3, Fig. II-4-4).

Remarque :

- Le bord de fuite vérifie d'une manière très claire la condition de KUTTA-JOUKOWSKI.
- La différence de la dépression sur l'extrados et celle de l'intrados génère la portance.

Profil isolé : Graphes $C_p = f(x/l)$

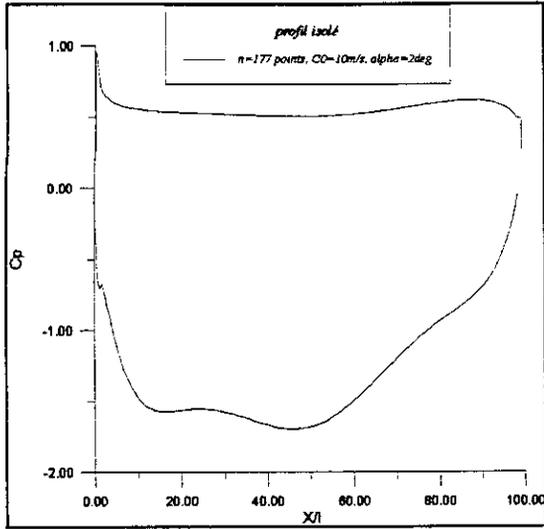


Fig. II-4-1 : $C_0=10\text{ m/s}$, $\alpha=2^\circ$

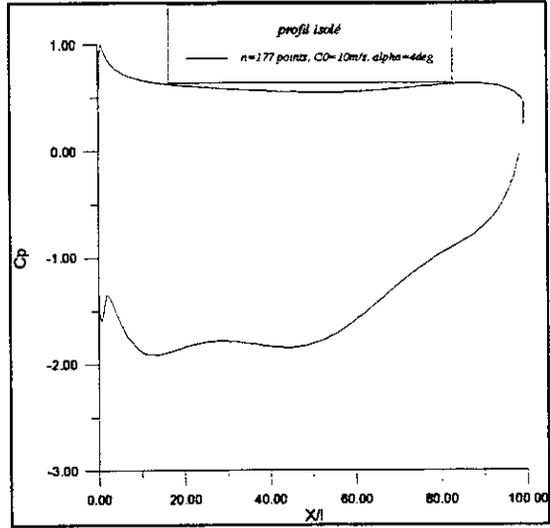


Fig. II-4-2 : $C_0=10\text{m/s}$, $\alpha=4^\circ$

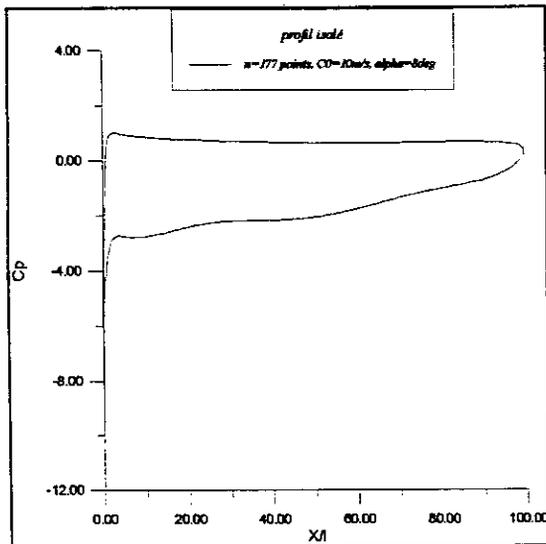


Fig. II-4-3 : $C_0=10\text{m/s}$, $\alpha=8^\circ$

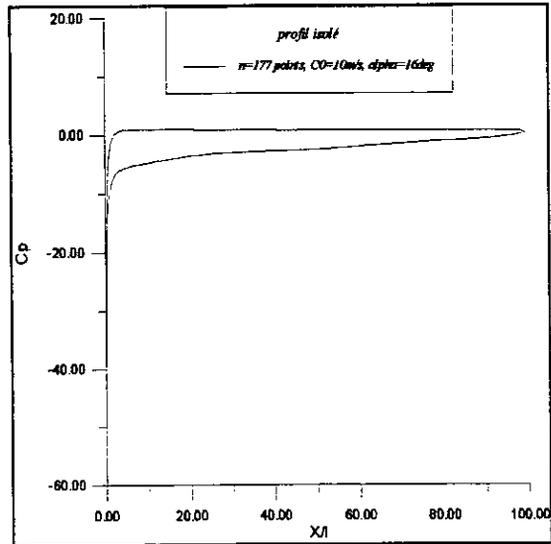


Fig. II-4-4 : $C_0=10\text{m/s}$, $\alpha=16^\circ$

II-3- Application à un cylindre isolé:

II-3-1- Cylindre fixe :

Considérons un cylindre centré et fixe de rayon r , le calcul des coordonnées des sommets se fait par une localisation angulaire en fixant le nombre de panneaux N désiré (Fig. II.5).

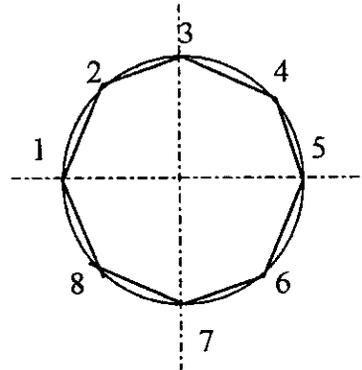


Fig. II-5

Discrétisation d'un cylindre en 8 panneaux

Les angles θ_i sont données par la relation suivante [9] :

$$\theta_i = \pi - \frac{2\pi}{N}(i-1) \quad \text{avec } i=1,N \quad \text{[II-15]}$$

où N représente le nombre de panneaux .

Les coordonnées des sommets sont égales à :

$$Xs(i) = r \cos \theta_i \quad \text{et} \quad Ys(i) = r \sin \theta_i \quad \text{[II-16]}$$

II-3-2- cylindre tournant :

Dans le cas d'un cylindre tournant, les angles θ_i sont données par la relation suivante [9]:

$$\theta_i = \pi - \left(\frac{2\pi}{N}(i-1) + \lambda_1 \right) \quad \text{avec } i=1,N \quad \text{[II-17]}$$

$$\text{avec} \quad \lambda_1 = \arcsin \left(-\frac{\Gamma}{4\pi Ur} \right)$$

et λ_1 est le premier point d'arrêt.

le deuxième point d'arrêt sera déduit automatiquement :

$$\lambda_2 = \pi - \lambda_1$$

En considérant un écoulement autour d'un cylindre de longueur infinie. Tout en superposant le potentiel de vitesses ϕ_1 d'un écoulement uniforme et le potentiel de vitesses ϕ_2 d'un vortex de circulation Γ , [13] ; on obtient :

$$\phi_1 = qr \cos(\theta - \alpha) \quad \text{et} \quad \phi_2 = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

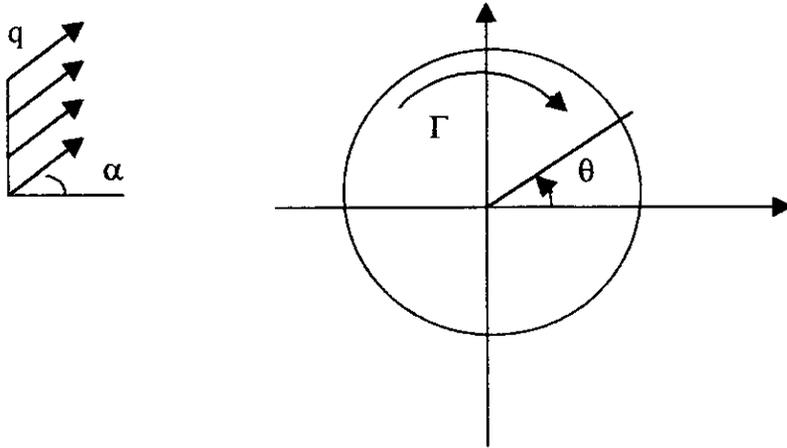


Fig. II-6 : Ecoulement uniforme et vortex autour d'un cylindre en rotation

La vitesse sur le cylindre, qui est tangente au cylindre, a pour expression [13]:

$$U_\theta = -\left(2q \sin(\theta - \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi r}\right)$$

le signe négatif provient du sens de rotation du cylindre. Pour une circulation nulle, deux points de stagnation apparaissent à :

$$\theta_1 = \alpha \quad \text{et} \quad \theta_2 = \pi + \alpha$$

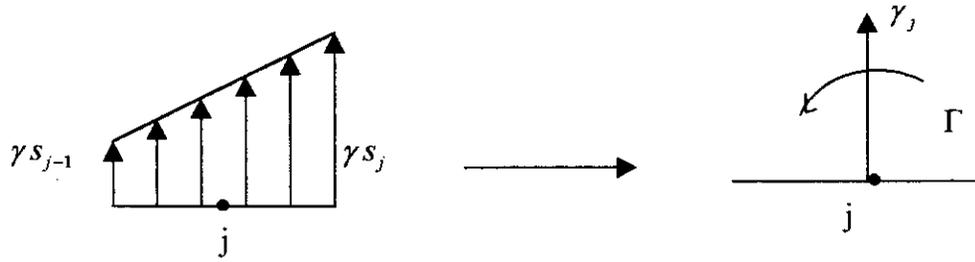
En faisant augmenter la circulation, les deux points d'arrêt se déplacent le long de la surface du cylindre tel que [13] :

$$\theta_1 = \alpha + \arcsin\left(-\frac{\Gamma}{4\pi q r}\right) \quad \text{et} \quad \theta_2 = \pi + \alpha - \theta_1$$

pour une valeur singulière de Γ , les deux points de stagnation coïncideront de sorte que :

$$\theta = \alpha - \frac{\pi}{2} \quad \text{avec} \quad \Gamma = -4\pi q r$$

on choisit une distribution linéaire de vortex qui donne un meilleur résultat[10].



tel que : $\gamma(j) = \gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} S_j$

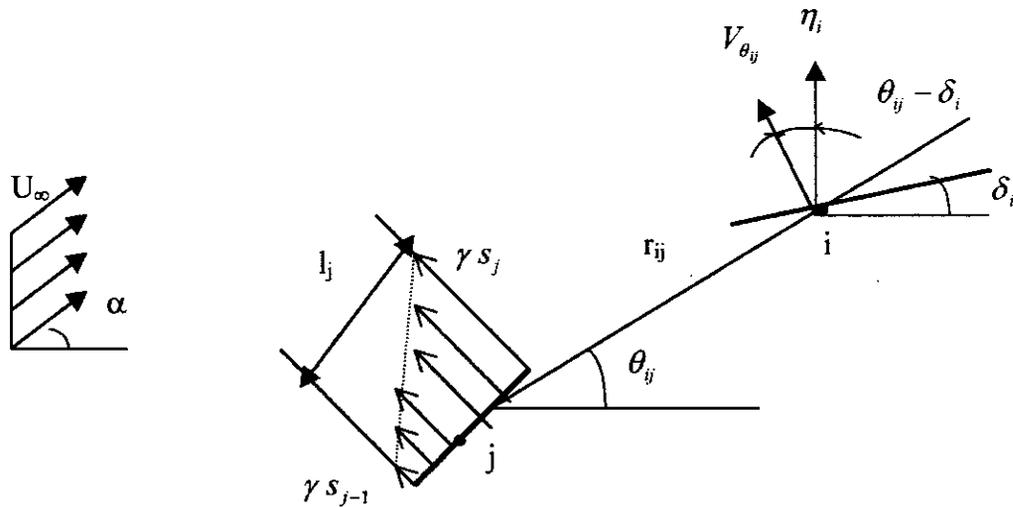


Fig. II-7 Influence du panneau j chargé linéairement de vortex sur un point de contrôle i

L'expression de la vitesse normale globale sera [13]:

$$V_{n_i} = -U_\infty \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \int_{l_j} \left(\gamma s(j-1) + \frac{\gamma s(j) - \gamma s(j-1)}{l_j} S_j \right) \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} ds_j \quad \text{[II-18]}$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} r_{ij} &= \sqrt{(x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2} \\ \sin \theta_{ij} &= \frac{y(i) - y(j)}{r_{ij}} \\ \cos \theta_{ij} &= \frac{x(i) - x(j)}{r_{ij}} \end{aligned} \right\} \theta_{ij} = \arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}$$

qu'on peut la mettre sous la forme :

$$V_{n_\theta} = -U_\infty \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \left(\gamma s(j-1) \int_{l_j} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} ds_j + \frac{\gamma s(j) - \gamma s(j-1)}{l_j} \int_{l_j} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} S_j ds_j \right) \quad \text{[II-19]}$$

En posant :

$$W(i, j) = \int_{l_j} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} ds_j \quad \text{et} \quad H(i, j) = \int_{l_j} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} S_j ds_j$$

l'équation peut s'écrire sous la forme finale :

$$V_m = -U_\infty \sin(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[\left(W(i, j) - \frac{H(i, j)}{l_j} \right) \gamma_s(j-1) + \frac{H(i, j)}{l_j} \gamma_s(j) \right]$$

La condition de glissement impose $V_m = 0$ qu'on peut l'écrire sous la forme matricielle :

$$[A](\gamma_s) = [B]$$

On fait la sommation de $j=1$ à $j=N+1$, pour éviter la double sommation de la distribution du premier panneau, le point $N+1$ est confondu avec le point 1 donc :

$$W(i, N+1) = W(i, 1)$$

$$H(i, N+1) = H(i, 1)$$

$$l_{N+1} = l_1$$

On arrive à un système de N équations et $N+1$ inconnues, donc il faut une autre condition aux limites qui est la condition de *KUTTA- JOUKOWSKI* :

$$\gamma_s(N+1) = -\gamma_s(1)$$

L'intégrale w nous donne le résultat suivant les termes $(I_4^2 - I_3^2)$:

- Si $I_4^2 - I_3^2 = 0$

$$W(i, j) = I_1 \ln \left(\frac{|l_j - I_3|}{|-I_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left(\frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right)$$

- $I_4^2 - I_3^2 > 0$

$$W(i, j) = \frac{I_1}{2} \ln \left(\frac{|(l_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2|}{I_4^2} \right) + \frac{(I_3 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right)$$

L'intégrale H nous donne le résultat suivant les termes $(I_4^2 - I_3^2)$:

- $I_4^2 - I_3^2 = 0$

$$H(i, j) = I_1 l_j - (I_1 I_3^2 + I_2 I_3) \left(\frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + (I_2 + 2I_1 I_3) \ln \left(1 - \frac{l_j}{I_3} \right)$$

$$\bullet I_4^2 - I_3^2 > 0$$

$$H(i, j) = I_1 l_j + \left(I_1 I_3 + \frac{1}{2} I_2 \right) \ln \left(\frac{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2}{I_4^2} \right) + \frac{(2I_1 I_3^2 + I_2 I_3 - I_1 I_4^2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right)$$

les coefficients $I_1, I_2, I_3, I_4^2, I_4^2 - I_3^2$ sont données par :

$$I_1 = -\cos \delta_i \cos \delta_j - \sin \delta_j \sin \delta_i$$

$$I_2 = (y(i) - y_s(j-1)) \sin \delta_i + (x(i) - x_s(j-1)) \cos \delta_i$$

$$I_3 = (x(i) - x_s(j-1)) \cos \delta_j + (y(i) - y_s(j-1)) \sin \delta_j$$

$$I_4^2 = (y(i) - y_s(j-1))^2 + (x(i) - x_s(j-1))^2$$

$$I_4^2 - I_3^2 = ((x(i) - x_s(j-1)) \sin \delta_j - (y(i) - y_s(j-1)) \cos \delta_i)^2$$

II-3-3- champ des vitesses :

Après avoir appliqué la condition de glissement ($V_m = 0$), et la condition de KUTTA-JOUKOWSKI on aboutira à un système d'équations tel que :

$$\sum_{j=1}^N A(i, j) \gamma s(j) = 2\pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(i, 1) = W(i, 2) - \frac{H(i, 2)}{l_2} - \frac{H(i, 1)}{l_1} \\ A(i, n) = W(i, 1) - \frac{H(i, 1)}{l_1} + \frac{H(i, N)}{l_N} \\ A(i, j) = W(i, j+1) - \frac{H(i, j+1)}{l_{j+1}} + \frac{H(i, j)}{l_j} \\ A(i, j) = W(i, i+1) - \frac{H(i, i+1)}{l_{i+1}} + \frac{H(i, i)}{l_i} \end{array} \right.$$

$$B(i) = 2\pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)$$

II-3-4- Expression de la vitesse tangentielle :

On a :

$$V_{\vec{n}} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \int_{l_j} \left(\gamma s(j-1) + \frac{\gamma s(j) - \gamma s(j-1)}{l_j} S_j \right) \frac{\sin(\theta_{\vec{y}} - \delta_i)}{2\pi r_{\vec{y}}} ds_j$$

$$V_n = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N A(i, j) \gamma s(j)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(i,1) = W(i,2) - \frac{H(i,2)}{l_2} - \frac{H(i,1)}{l_1} \\ A(i,N) = W(i,1) - \frac{H(i,1)}{l_1} + \frac{H(i,N)}{l_N} \\ A(i,j) = W(i,j+1) - \frac{H(i,j+1)}{l_{j+1}} + \frac{H(i,j)}{l_j} \\ A(i,i) = W(i,i+1) - \frac{H(i,i+1)}{l_{i+1}} + \frac{H(i,i)}{l_i} \end{array} \right.$$

les coefficients I_1, I_2 sont définies par :

$$I_1 = \sin \delta_i \cos \delta_j - \sin \delta_j \cos \delta_i$$

$$I_2 = (y(i) - ys(j-1)) \cos \delta_i - (x(i) - xs(j-1)) \sin \delta_i$$

I_4^2 et $I_4^2 - I_3^2$ sont les mêmes que précédemment.

II-3-5- Calcul des coefficients de pression :

Pour un cylindre en rotation l'expression de la vitesse selon r, θ est [9] :

$$\begin{aligned} V_r &= U_\infty \cos(\theta - \alpha) \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \\ V_\theta &= U_\infty \sin(\theta - \alpha) \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned} \quad \text{[II-20]}$$

à la surface du cylindre $r=R$, d'où :

$$\begin{aligned} V_r &= 0 \\ V_\theta &= -2U_\infty \sin(\theta - \alpha) - \frac{\Gamma}{2\pi R} \end{aligned}$$

donc le coefficient de pression est donnée par :

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = 1 - \left(2 \sin(\theta - \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi R U_\infty} \right)^2 \quad \text{[II-21]}$$

avec : $\Gamma = 2\pi R U_c$

où U_c est la vitesse de rotation du cylindre.

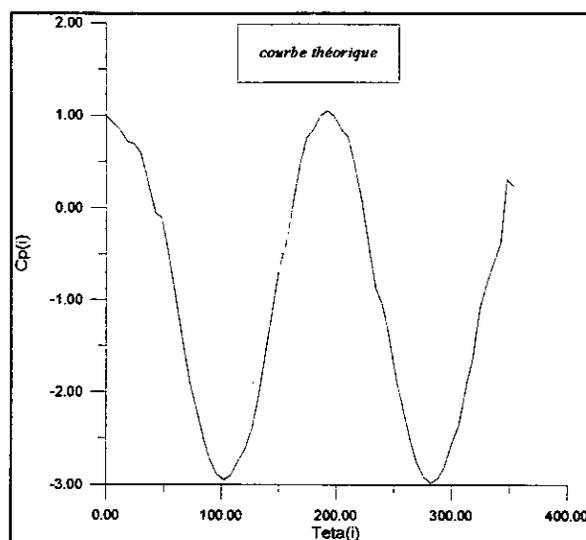
$$\text{On aboutit finalement à : } C_p = 1 - \left(2 \sin(\theta - \alpha) + \frac{U_c}{U_\infty} \right)^2 \quad \text{[II-22]}$$

II-3-6- Présentation des résultats :

II-3-6-1-Graphes de $C_p = f(\theta)$:

- Si la vitesse de rotation du cylindre (w) est nulle, la courbe obtenue par la méthode des singularités est symétrique, et les points de stagnation sont parfaitement déterminés à $\theta=0^\circ$ et $\theta=180^\circ$ ($C_p=1$).

L'augmentation du nombre de panneaux nous donne une convergence de la méthode des singularités vers la solution analytique.



- En faisant une augmentation de la vitesse de rotation du cylindre de 10 m/s ($w = C_0$), les courbes ne gardent plus la symétrie. Mais en augmentant la valeur de la vitesse de rotation de 10 en 10 on a remarqué qu'il présente une certaine symétrie.

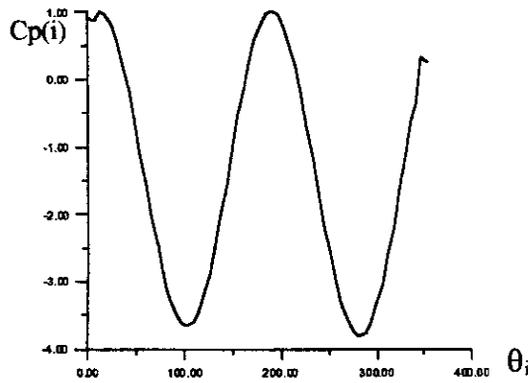
II-3-6-2- Graphes de $C_p = f(x/l)$:

- On remarque bien que dans le cas d'un cylindre fixe ($w=0$), les différentes courbes obtenus pour chaque valeur de α ($2^\circ, 4^\circ, 8^\circ, 16^\circ$) gardent une symétrie, ce qui conduit à une portance nulle.
- Mais, pour un cylindre tournant ($W \neq 0$) on observe que l'augmentation de la vitesse de rotation du cylindre nous conduit à une augmentation de la portance.

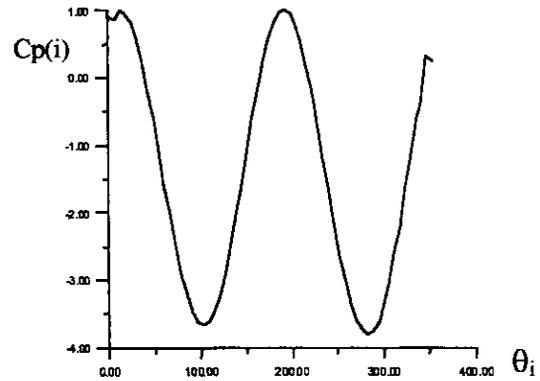
Les résultats obtenues sont présentés dans les graphes suivants :

Graphes "cylindre fixe et tournant"

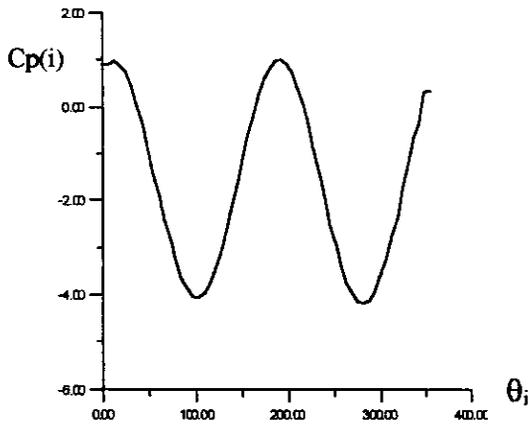
$$C_p = f(\theta_i)$$



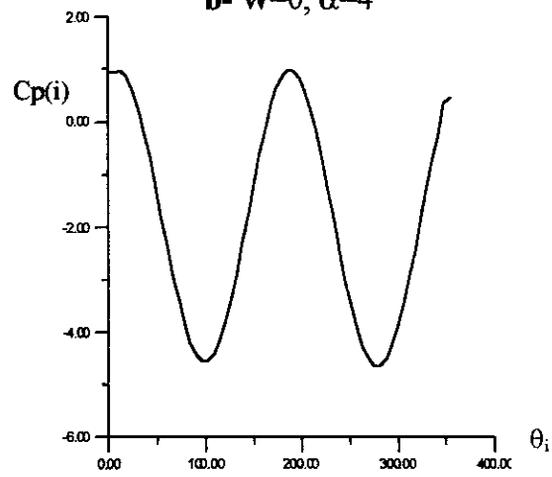
a- $W=0, \alpha=2^\circ$



b- $W=0, \alpha=4^\circ$

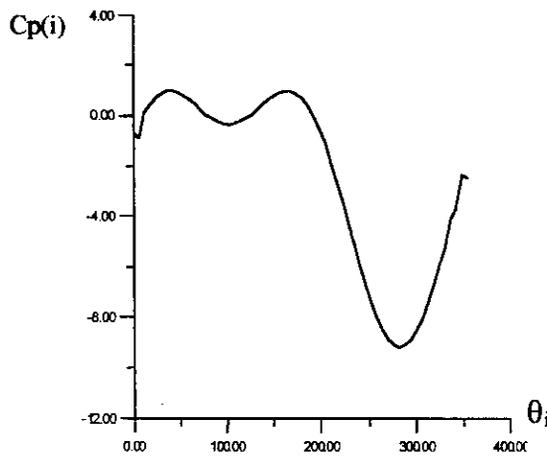


c- $W=0, \alpha=8^\circ$

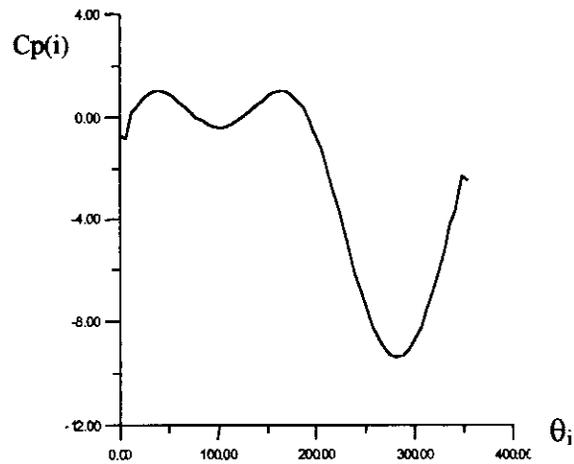


d- $W=0, \alpha=16^\circ$

Fig. II-8 Cylindre fixe ; $w=0\text{m/s}$



a- $W=10\text{ m/s}, \alpha=2^\circ$



b- $W=10\text{m/s}, \alpha=4^\circ$

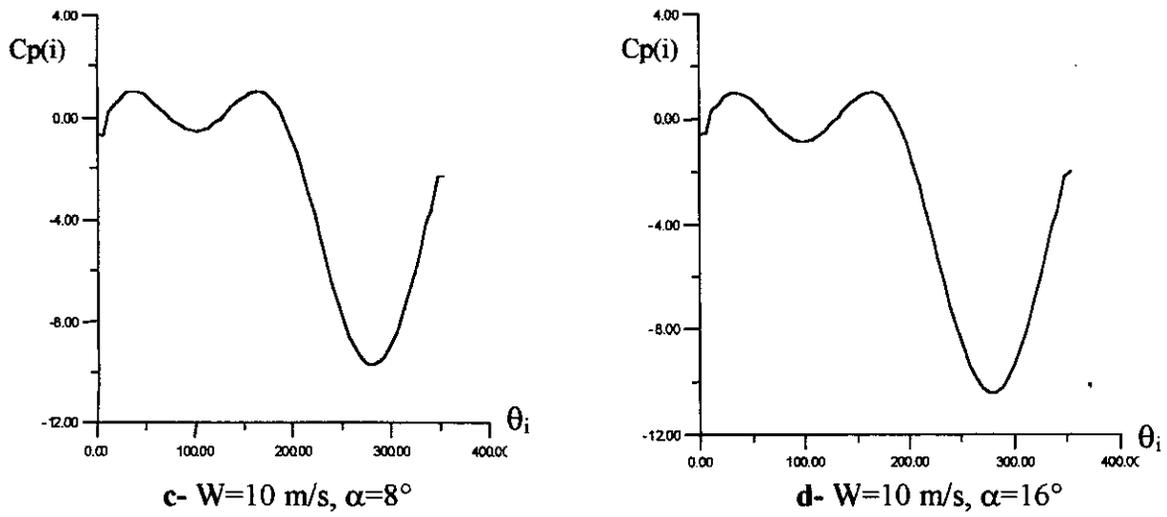


Fig. II-9 : Cylindre tournant ; $W=10\text{m/s}$

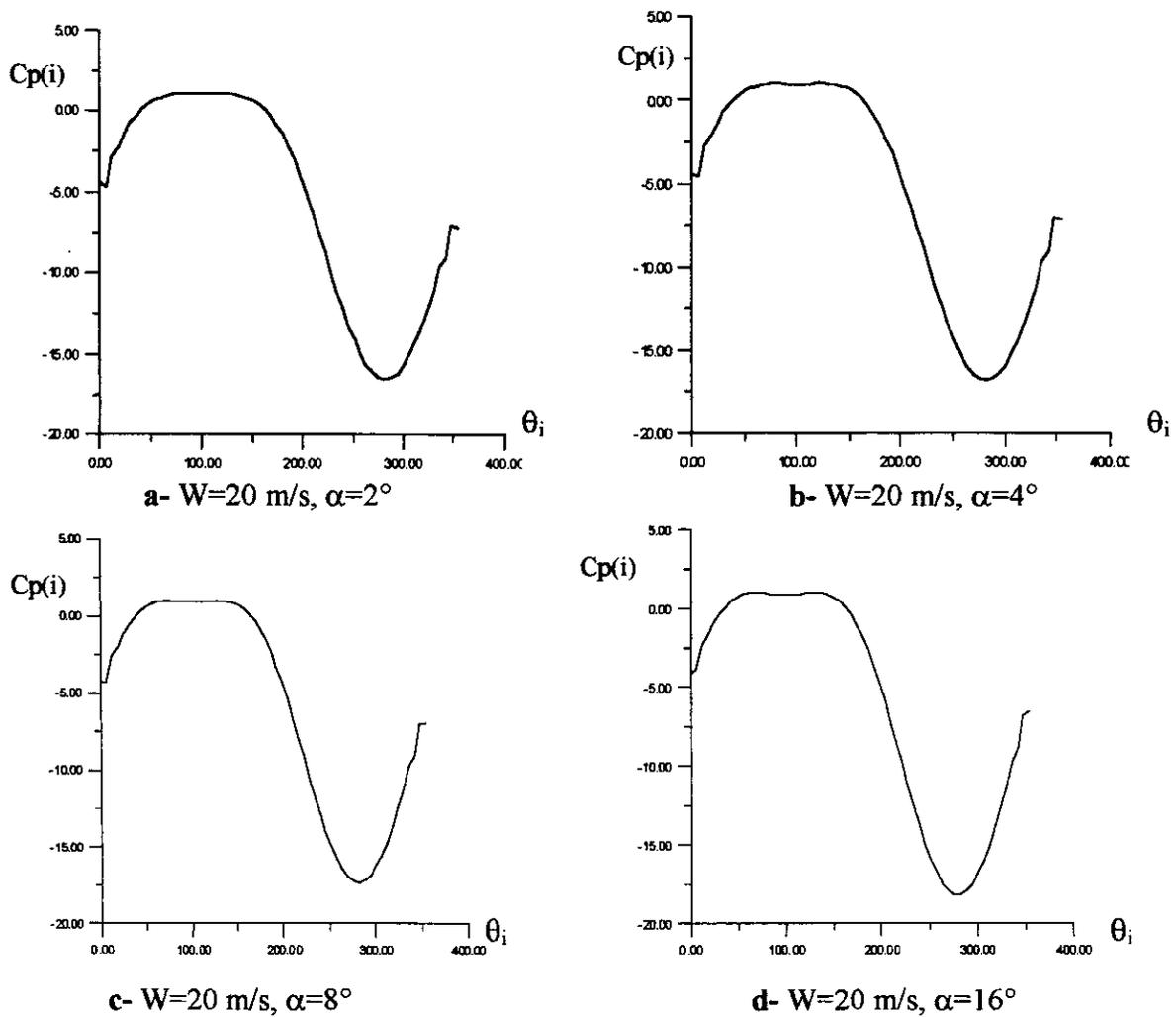


Fig. II-10 : Cylindre tournant ; $W=20\text{m/s}$

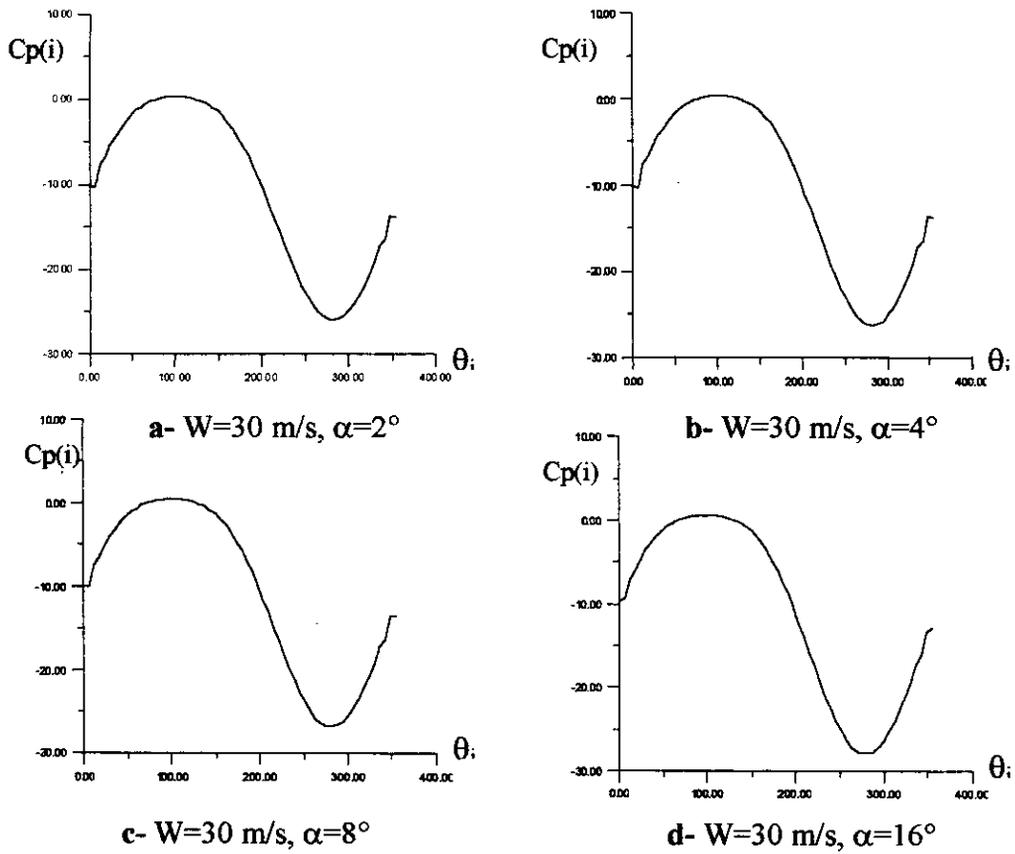


Fig. II-11 : cylindre tournant ; $W = 30 \text{ m/s}$

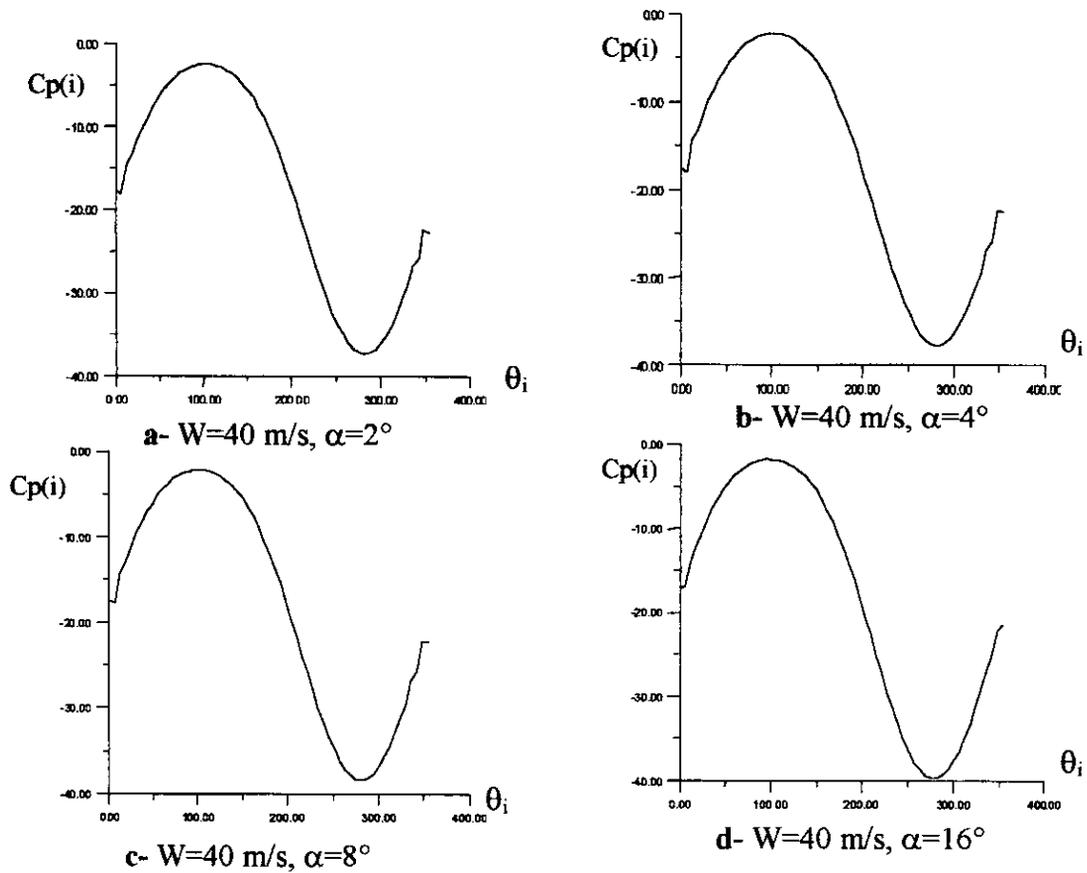


Fig. II-12 : cylindre tournant ; $W = 40 \text{ m/s}$

Graphes "cylindre fixe et tournant" $C_p = f(X/l)$

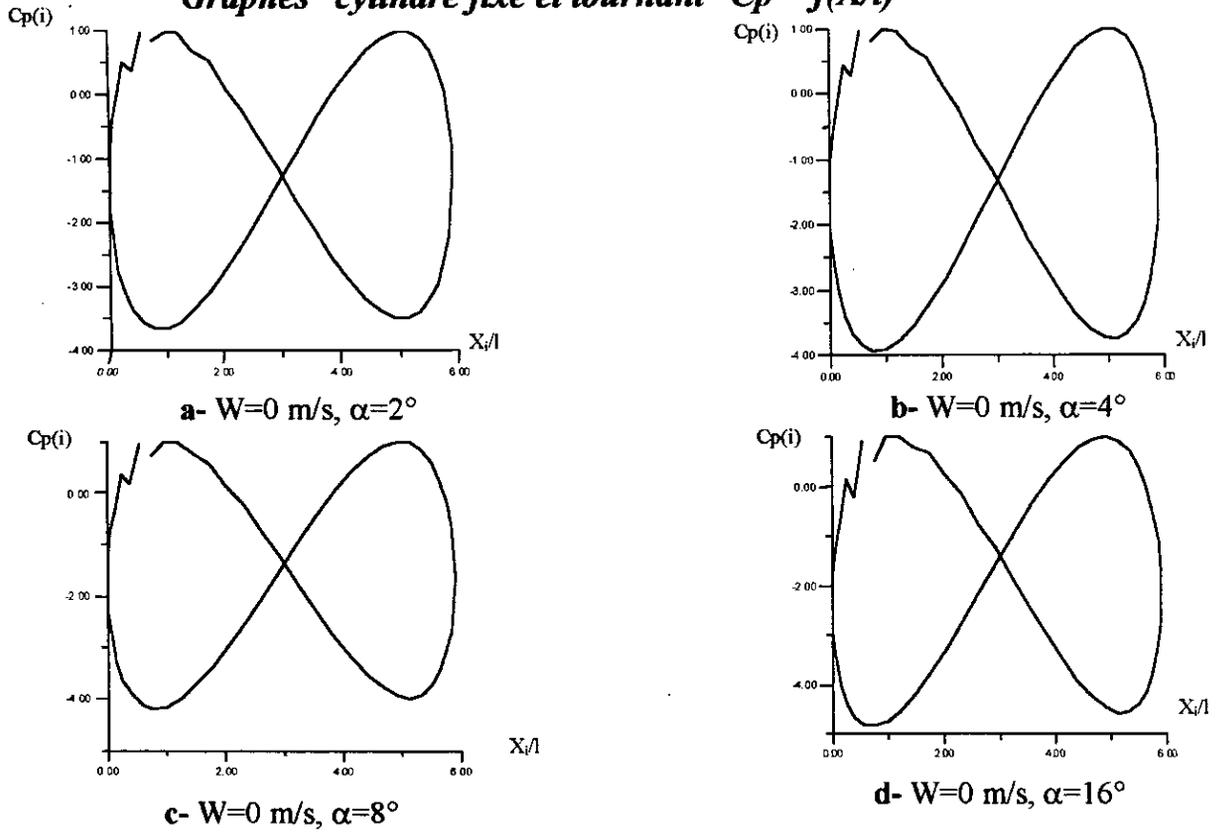


Fig. II-13 : Cylindre fixe ; $W=0$ m/s

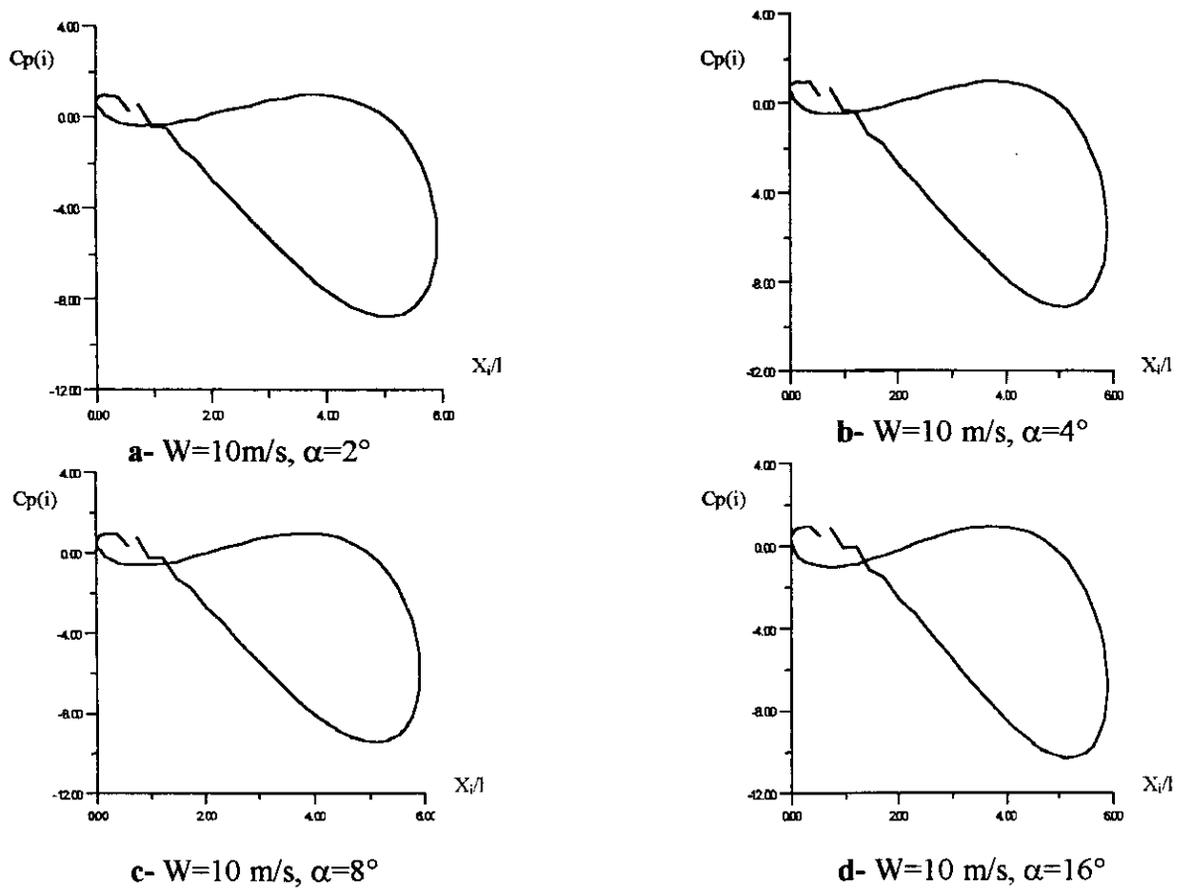


Fig. II-14 : Cylindre tournant ; $W=10$ m/s

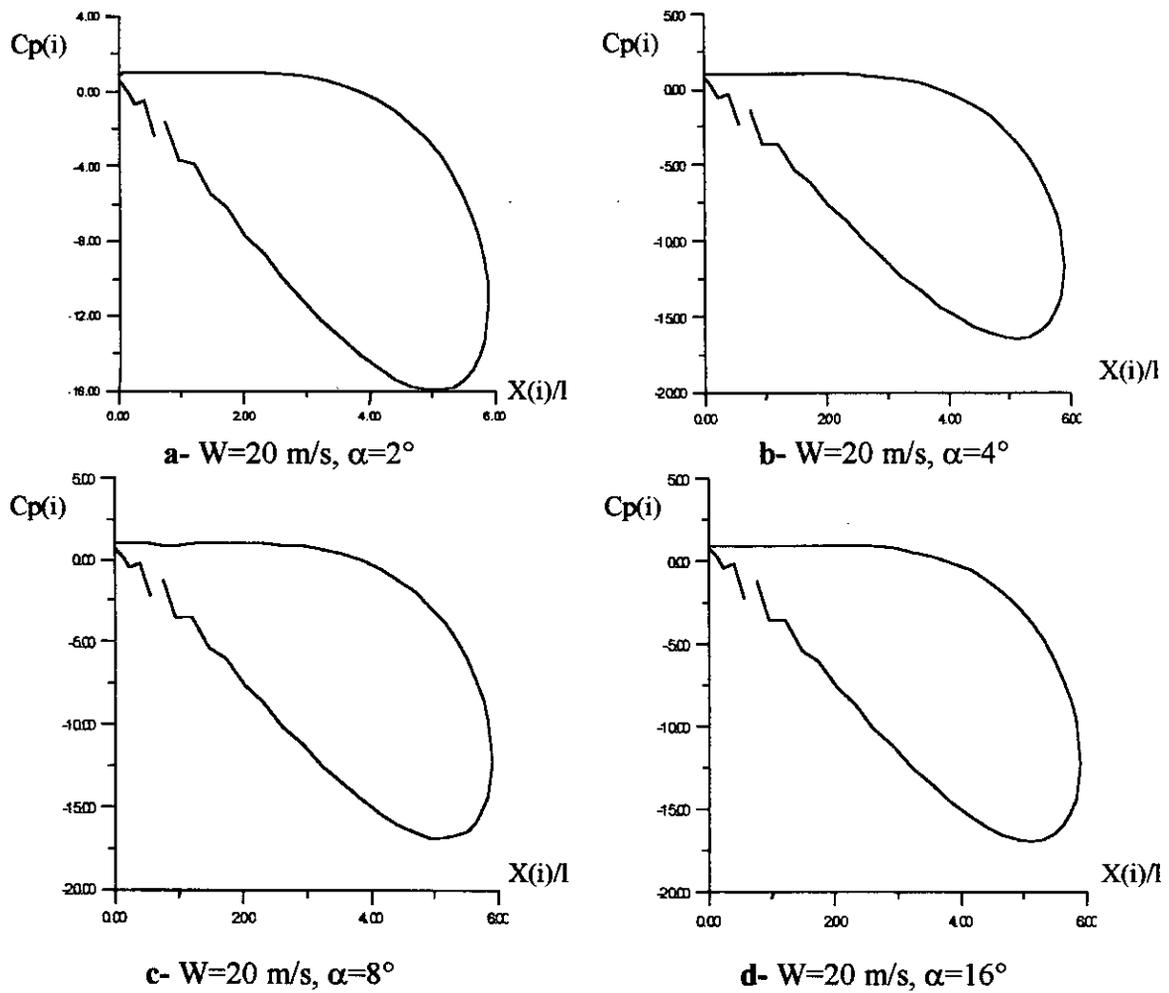
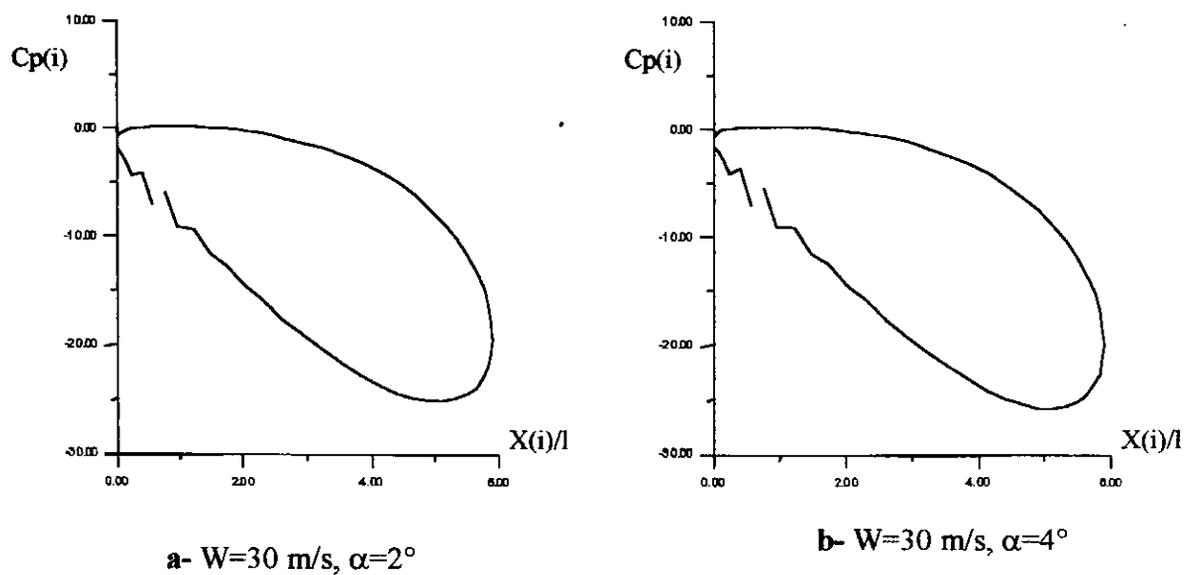
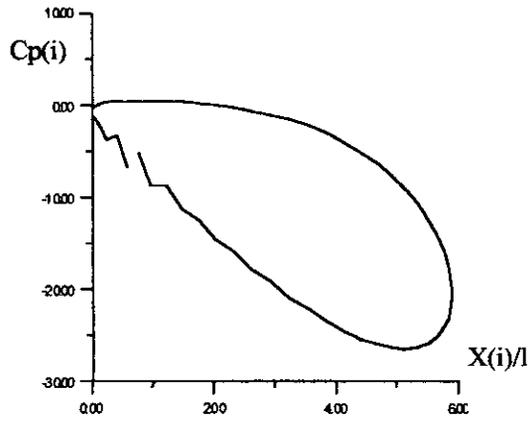
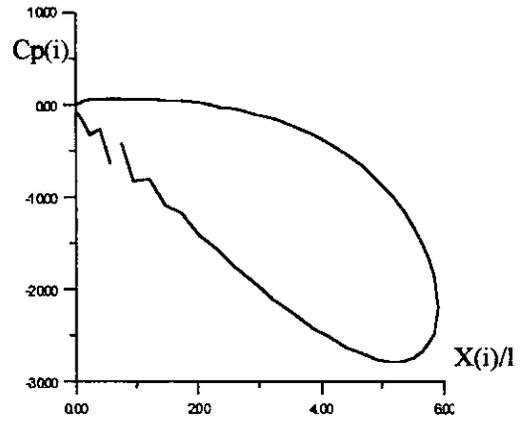


Fig. II-15 : Cylindre tournant ; $W=20$ m/s



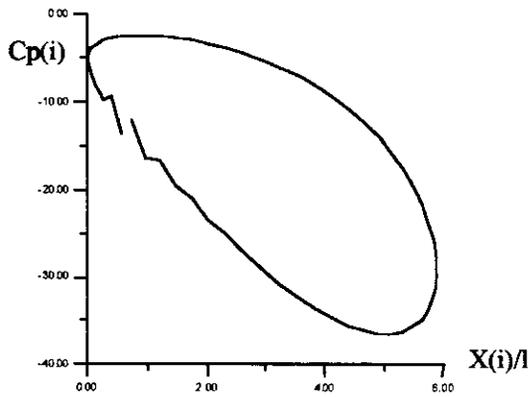


c- $W=30 \text{ m/s}, \alpha=8^\circ$

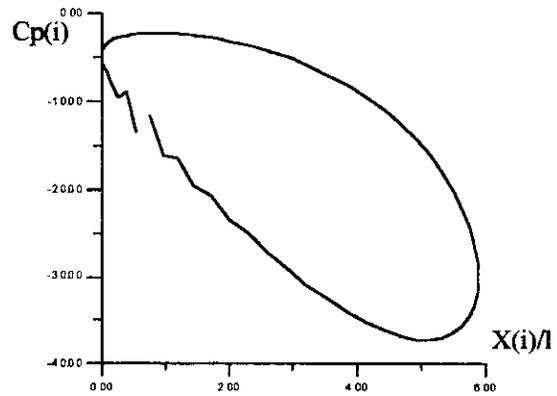


d- $W=30 \text{ m/s}, \alpha=16^\circ$

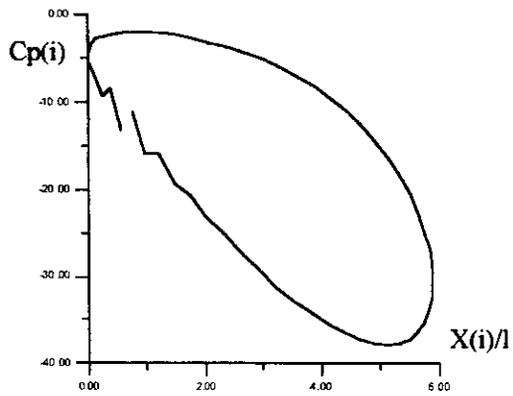
Fig. II-16 : Cylindre tournant ; $W=30\text{m/s}$



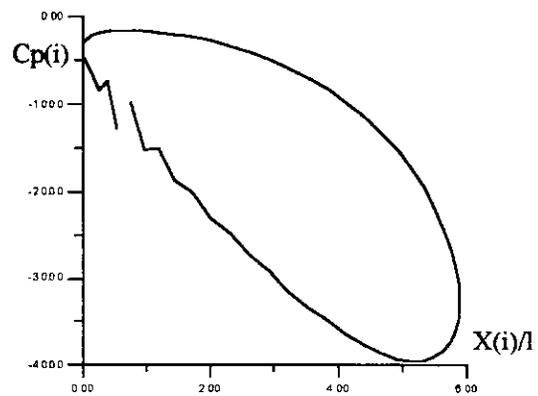
a- $W=40 \text{ m/s}, \alpha=2^\circ$



b- $W=40 \text{ m/s}, \alpha=4^\circ$



c- $W=40 \text{ m/s}, \alpha=8^\circ$



d- $W=40 \text{ m/s}, \alpha=16^\circ$

Fig. II-17 : Cylindre tournant ; $W=40\text{m/s}$

Chapitre III

CHAPITRE III- application de la méthode des singularités à une grille rectiligne

Dans ce chapitre on va élargir le domaine de l'application de la méthode des singularités à une grille rectiligne en déterminant comme précédemment les coefficients de pression en faisant varier les valeurs de α .

III- Application à une grille rectiligne :

III-1- Définition d'une grille d'aube :

On appelle *grille d'aubes* un ensemble fixe ou mobile d'obstacles généralement profilés (fig. III-1), déduits les uns des autres par un déplacement géométrique périodique, utilisés pour guider l'écoulement du fluide et pour échanger avec lui des efforts mécaniques [11].

III-2- Définition géométrique des profils en grille :

L'angle d'incidence de l'écoulement est toujours repéré entre la corde des profils et la vitesse incidente (repère lié au profil)[11].

La grille est définie par 3 paramètres géométriques principaux :

- γ : c'est l'angle de calage, qui a pour expression :

$$\gamma = \alpha_1 - i$$

- σ : serrage des profils (rapport entre la corde et le pas)

$$\sigma = \frac{l}{t}$$

- C_{z00} : cambrure des profils.

Sous l'effet de ces paramètres géométriques, l'écoulement subit une déflexion ou déviation :

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 .$$

- **Remarque :**

A partir des triangles des vitesses, on peut définir un angle moyen α_m et une vitesse

$$\text{moyenne } C_m \text{ tel que : } \begin{cases} \overline{C}_m = \frac{\overline{C}_1 + \overline{C}_2}{2} \\ \text{tg}(\alpha_m) = \frac{\text{tg}(\alpha_1) + \text{tg}(\alpha_2)}{2} \end{cases}$$

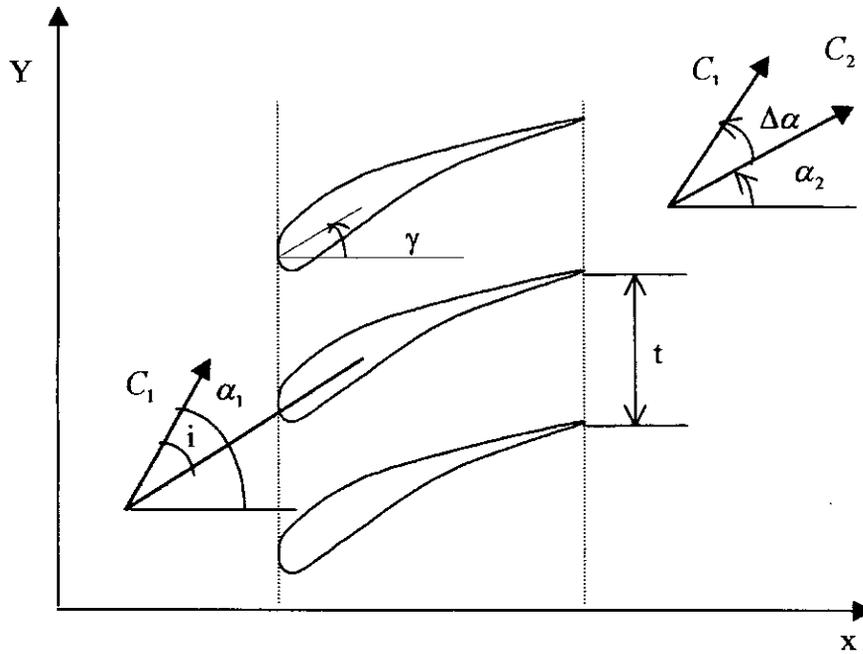


Fig. III-1 Définition d'une grille rectiligne

III-3- Application de la méthode des singularités à une grille rectiligne :

On fait la même démarche qu'on a fait pour le cas d'un profil isolé.

Mais, comme on a un nombre infini de profil dans une grille, donc l'influence de la grille en chaque point de l'écoulement est donnée par la superposition des influences créées par tous les panneaux de chaque profil, alors le potentiel complexe induit en un point (x,y) après sommation de $-\infty$ à $+\infty$ est :

$$F(z) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \ln(z - z_j) ds_j \tag{III-1}$$

En dérivant le potentiel complexe $F(z)$ par rapport à l'affixe z , on obtient la vitesse conjuguée :

$$C' = \frac{dF(z)}{dz} = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \frac{ds_j}{z - z_j} \tag{III-2}$$

En notant que les affixes z et z_j s'écrivent respectivement :

$$z_j = x_j + i(y_j - kt)$$

$$z = x + iy$$

Donc, l'expression de la vitesse conjuguée devient :

$$C' = \frac{dF(z)}{dz} = -\frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{ds_j}{(x-x_j) + i(y-y_j) + ikt}$$

$$C' = -\frac{i}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{ds_j}{\frac{\pi}{t} [(x-x_j) + i(y-y_j)] + ik\pi}$$

Cette expression est sous forme d'une série, et on remarque que le terme :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{t} [(x-x_j) + i(y-y_j)] + ik\pi} \quad \text{est un développement limité de}$$

$$\text{la fonction : } \coth \left[\frac{\pi}{t} \{ (x-x_j) + i(y-y_j) \} \right]$$

Donc la vitesse conjuguée induite par toutes les singularités distribuées sur toutes les aubes de la grille s'écrit :

$$C' = -\frac{i}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \coth \left[\frac{\pi}{t} ((x-x_j) + i(y-y_j)) \right] ds_j \quad \text{[III-3]}$$

Dans un point de contrôle (x_i, y_i) , la vitesse complexe devient :

$$C'_i = -\frac{i}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \coth \left[\frac{\pi}{t} ((x_i - x_j) + i(y_i - y_j)) \right] ds_j - \underbrace{\frac{\gamma_m \exp(-i\delta_i)}{2}}_{\text{pour } i=j} \quad \text{[III-4]}$$

En effectuant le changement de variable suivant :

$$X_{ij} = \frac{\pi}{t} (x_i - x_j)$$

$$\text{et } Y_{ij} = \frac{\pi}{t} (y_i - y_j)$$

Et en tenant compte de l'égalité suivante :

$$i \coth(z_{ij}) = \frac{\sin(2Y_{ij}) + ish(2X_{ij})}{ch(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \quad \text{[III-5]}$$

Ce changement de variable a pour but la séparation des parties imaginaire et réelle.

Donc, la vitesse complexe devient finalement :

$$C'_i = -\frac{1}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \frac{\sin(2Y_{ij}) + ish(2X_{ij})}{ch(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \exp(-i\delta_i)$$

La modélisation de l'écoulement dans la grille est obtenue par la superposition de toutes les singularités avec l'écoulement uniforme de direction α_m et de module C_m .

Le vecteur vitesse de la grille (grille fixe) est donné par :

$$\begin{cases} u_i = C_m \cos(\alpha_m) - \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \frac{\sin(2Y_{ij})}{ch(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_i) \\ v_i = C_m \sin(\alpha_m) + \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \frac{sh(2X_{ij})}{ch(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_i) \end{cases} \quad \text{[III-6]}$$

Pour une grille mobile, on sait qu'elle se déplace à la vitesse d'entraînement U (parallèlement à (oy) et de sens inverse), ayant pour composantes :

$$\bar{U} = \begin{cases} 0 \\ -U \end{cases}$$

En mouvement relatif :

$$\bar{C} = \bar{U} + \bar{W} \Rightarrow \bar{W} = \bar{C} - \bar{U}$$

d'où les composantes de la vitesse relative W :

$$\bar{W} = \begin{cases} u \\ v + U \end{cases}$$

On déduit alors le vecteur vitesse relatif au niveau des points de contrôle :

$$\begin{cases} u_i = C_m \cos(\alpha_m) - \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \frac{\sin(2Y_{ij})}{ch(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_i) \\ v_i = U + C_m \sin(\alpha_m) + \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \frac{sh(2X_{ij})}{ch(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_i) \end{cases} \quad \text{[III-7]}$$

III-4- conditions au limites :

III-4-1- condition de glissement :

Elle correspond au glissement des couches fluides sur la surface de chaque aube de la grille, c'est à dire que la vitesse est tangente en tout point à cette surface :

$$tg(\delta_i) = \frac{v_i + \lambda U}{U_i} \quad \begin{cases} \lambda = 1 \Rightarrow \text{grille mobile} \\ \lambda = 0 \Rightarrow \text{grille fixe} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}(\delta_i) = \frac{C_m \sin(\alpha_m) + \lambda U + \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \frac{\operatorname{sh}(2X_{ij})}{\operatorname{ch}(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_i)}{C_m \cos(\alpha_m) - \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \frac{\sin(2Y_{ij})}{\operatorname{ch}(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_i)}$$

$$\Rightarrow C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i) = \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \left[\frac{\sin(2Y_{ij}) \sin(\delta_i)}{\operatorname{ch}(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} + \frac{\operatorname{sh}(2X_{ij}) \cos(\delta_i)}{\operatorname{ch}(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \right] \gamma_j(s) ds_j$$

III-4-2- Etablissement des fonctions d'influence :

Les fonctions d'influence sont obtenues en faisant un changement de variable :

$$\begin{cases} f_x = \frac{\sin(2Y_{ij})}{\operatorname{ch}(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \\ f_y = \frac{\operatorname{sh}(2X_{ij})}{\operatorname{ch}(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_m \cos(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i) = \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j [f_x \cdot \sin(\delta_i) + f_y \cdot \cos(\delta_i)] ds_j \quad \text{[III-8]}$$

si $f = f_x \cdot \sin(\delta_i) + f_y \cdot \cos(\delta_i)$

En remplaçant l'expression de γ_j :

$$\gamma_j = \gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} s_j$$

On aboutit finalement à :

$$C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i) = \frac{1}{2t} \left[\sum_{j=1}^n G(i, j) \gamma_s(j-1) + \sum_{j=1}^n F(i, j) \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} \right] \quad \text{[III-9]}$$

avec :

$$\begin{cases} G = \int_{l_j} f ds_j \\ F = \int_{l_j} f s ds_j \end{cases}$$

On remarque bien que l'intensité de la singularité au niveau $j=1$ n'est pas définie. Donc, on doit incrémenter de $j=2$ à $j=n+1$, et on confondra le point $n+1$ avec le point 1, ce qui rajoute la condition suivante :

$$G(i, n+1) = G(i, 1)$$

$$F(i, n+1) = F(i, 1)$$

On obtient ainsi, un système d'équations linéaires à n équations et $n+1$ inconnues. Donc, il nous faut une autre condition supplémentaire, c'est la condition de KUTTA-JOUKOWSKI.

III-4-3- Condition de KUTTA-JOUKOWSKI :

Elle se caractérise par l'égalité du module de la vitesse coté intrados et coté extrados au niveau du bord de fuite. Et pour garantir cette égalité, on imposera la condition suivante :

$$\gamma_s(n+1) = -\gamma_s(1)$$

Enfin, on aboutira à un système d'équations linéaire (n équations, n inconnues).

$$[A](\gamma_s) = (B)$$

où

(B) : représente les caractéristiques de l'écoulement libre et sa direction par rapport à chaque panneau.

[A] : représente les caractéristiques géométriques du profil.

$$\left\{ \begin{array}{l} B(i) = C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i) \\ A(i,1) = \frac{1}{2t} \left(G(i,2) - \frac{F(i,2)}{l_2} - \frac{F(i,1)}{l_1} \right) \\ A(i,j) = \frac{1}{2t} \left(G(i,j+1) - \frac{F(i,j+1)}{l_{j+1}} + \frac{F(i,j)}{l_j} \right) \\ A(i,n) = \frac{1}{2t} \left(G(i,1) - \frac{F(i,1)}{l_1} + \frac{F(i,n)}{l_n} \right) \end{array} \right.$$

III-5- calcul des caractéristiques de l'écoulement en Grille :

III-5-1- calcul de la vitesse tangentielle :

On sait que :

$$C_i = -(u_i \cos(\delta_i) + v_i \sin(\delta_i))$$

En remplaçant les valeurs de u_i et v_i de l'équation (II) dans C_i :

$$\begin{aligned} \Rightarrow C_i &= - \left(C_m \cos(\alpha_m) \cos(\delta_i) - \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} f_x \cos(\delta_i) \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos^2(\delta_i) \right. \\ &\quad \left. + C_m \sin(\alpha_m) \sin(\delta_i) + \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} f_y \sin(\delta_i) \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin^2(\delta_i) \right) \\ \Rightarrow C_i &= - \left(C_m \cos(\alpha_m - \delta_i) + \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} (-f_x \cos(\delta_i) + f_y \sin(\delta_i)) \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \right) \quad \text{[III-10]} \end{aligned}$$

Après introduction des fonctions d'influence $G(i,j)$ et $F(i,j)$ définies par :

$$G(i,j) = \int_{l_j} (f_x \cos(\delta_i) - f_y \sin(\delta_i)) ds_j$$

$$F(i,j) = \int_{l_j} (f_x \cos(\delta_i) - f_y \sin(\delta_i)) s_j ds_j$$

On aboutira à la vitesse tangentielle :

$$C_i = -C_m \cos(\alpha_m - \delta_i) + \frac{1}{2t} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n G(i,j) \gamma_s(j-1) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F(i,j) \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} \right) + \frac{\gamma_m}{2} \quad \text{[III-11]}$$

$$\begin{cases} G(i,i) = t \\ F(i,i) = \frac{tl_j}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A(i,1) = \frac{1}{2t} \left(G(i,2) - \frac{F(i,2)}{l_2} - \frac{F(i,1)}{l_1} \right) \\ A(i,j) = \frac{1}{2t} \left(G(i,j+1) - \frac{F(i,j+1)}{l_{j+1}} + \frac{F(i,j)}{l_j} \right) \\ A(i,n) = \frac{1}{2t} \left(G(i,1) - \frac{F(i,1)}{l_1} + \frac{F(i,n)}{l_n} \right) \end{cases}$$

d'où l'expression finale de la vitesse tangentielle au points de contrôle :

$$C_i = -C_m \cos(\alpha_m - \delta_i) + \sum_{j=1}^n A(i,j) \gamma_s(j) \quad \text{[III-12]}$$

III-5-2- présentation des résultats :

Dans cette présente étude, on a utilisé comme précédemment une rangée de profils de type :

N.A.C.A 65-18-10 interpolé par une interpolation polynomiale (voir figure III-4).

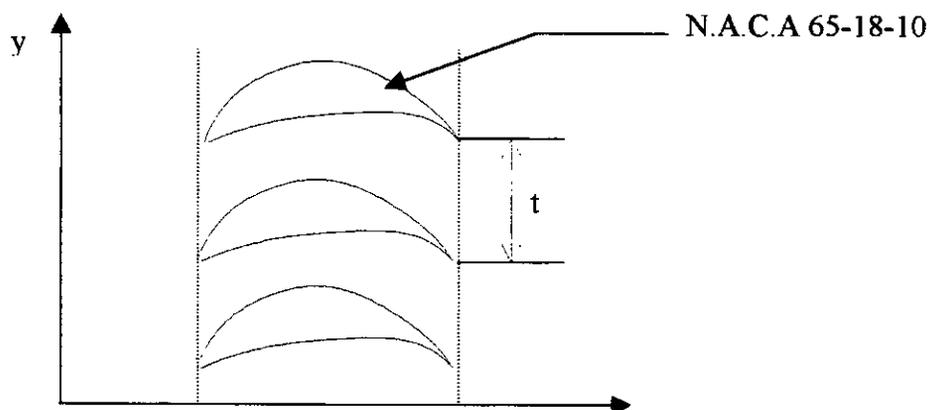


Figure III-4

Les résultats obtenus sont représentés sur les courbes suivantes :

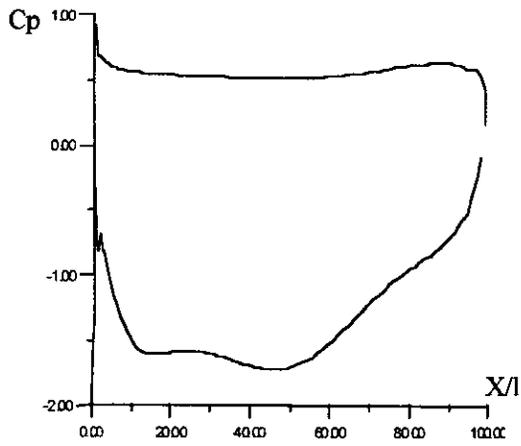


Fig. III-5 : Grille rectiligne
 $U=0 \text{ m/s}, \alpha=2^\circ$

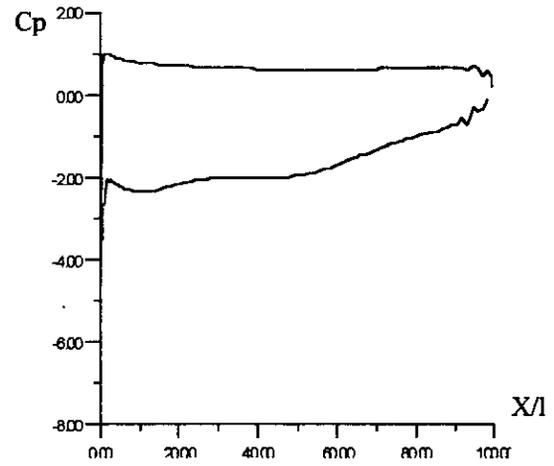


Fig. III-6 : Grille rectiligne
 $U=0 \text{ m/s}, \alpha=4^\circ$

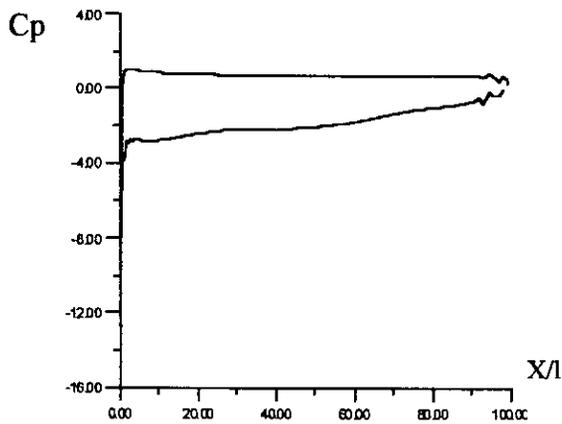


Fig. III-7 : Grille rectiligne
 $U=0 \text{ m/s}, \alpha=8^\circ$

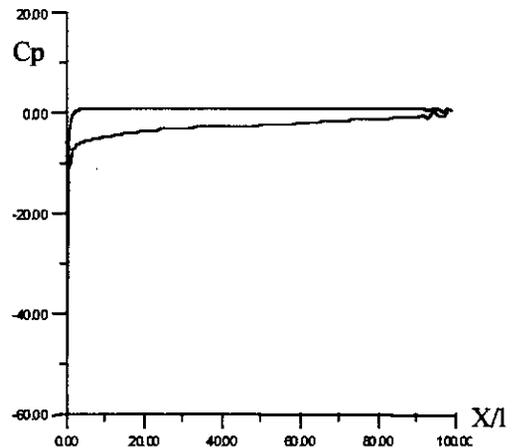


Fig. III-8 : Grille rectiligne
 $U=0 \text{ m/s}, \alpha=16^\circ$

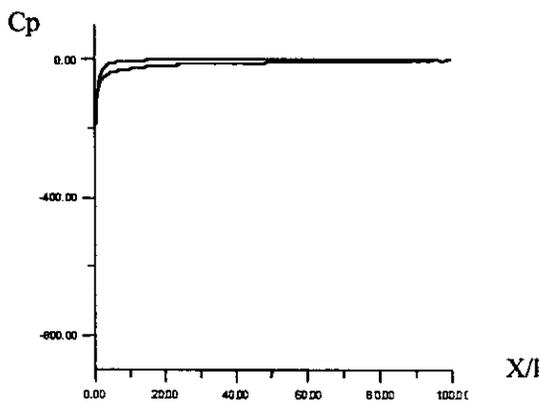


Fig. III-9 : Grille rectiligne
 $U=10 \text{ m/s}, \alpha=2^\circ$

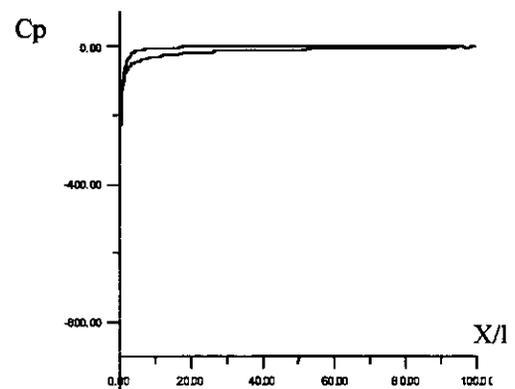


Fig. III-10 : Grille rectiligne
 $U=10 \text{ m/s}, \alpha=4^\circ$

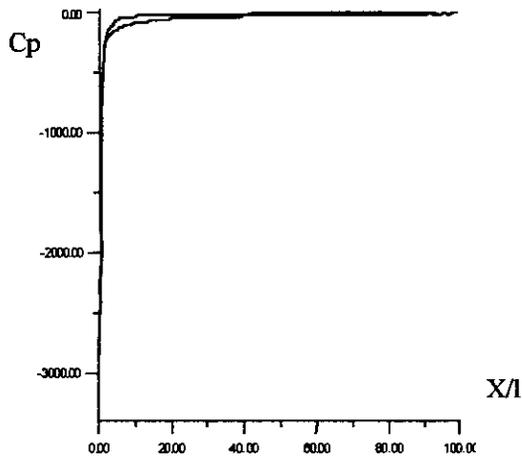


Fig. III-11 : Grille rectiligne
 $U=10$ m/s, $\alpha=8^\circ$

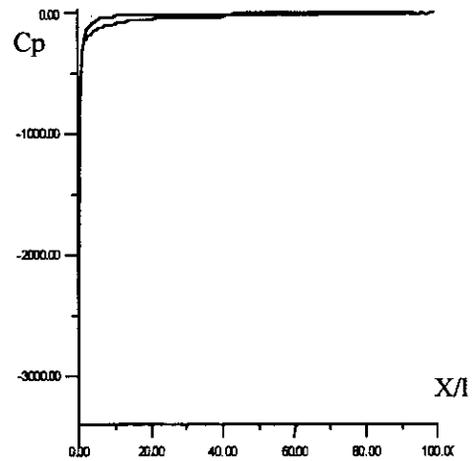


Fig. III-12 : Grille rectiligne
 $U=10$ m/s, $\alpha=16^\circ$

Interprétation des résultats :

- pour une vitesse $U=0$ on observe pour les différentes valeurs de α , une stabilité des courbes, ainsi qu'une petite dépression au niveau du bord d'attaque.
- mais si on augmente la vitesse de rotation, on observe une forte dépression surtout au niveau du bord d'attaque.

Chapitre IV

Chapitre IV- Application de la méthode des singularités à un étage de turbomachines

Dans ce chapitre on traitera la méthode des singularités dans le cas d'un étage de turbomachines, en introduisant la notion d'instationnarité de l'écoulement.

IV-I- Définition d'un étage de turbomachines :

On appelle un étage de turbomachines un ensemble de grilles d'aubes permettant d'échanger du travail mécanique avec le fluide, et constitué par une grille mobile (rotor) et une grille fixe (stator) [11](fig. IV-1).

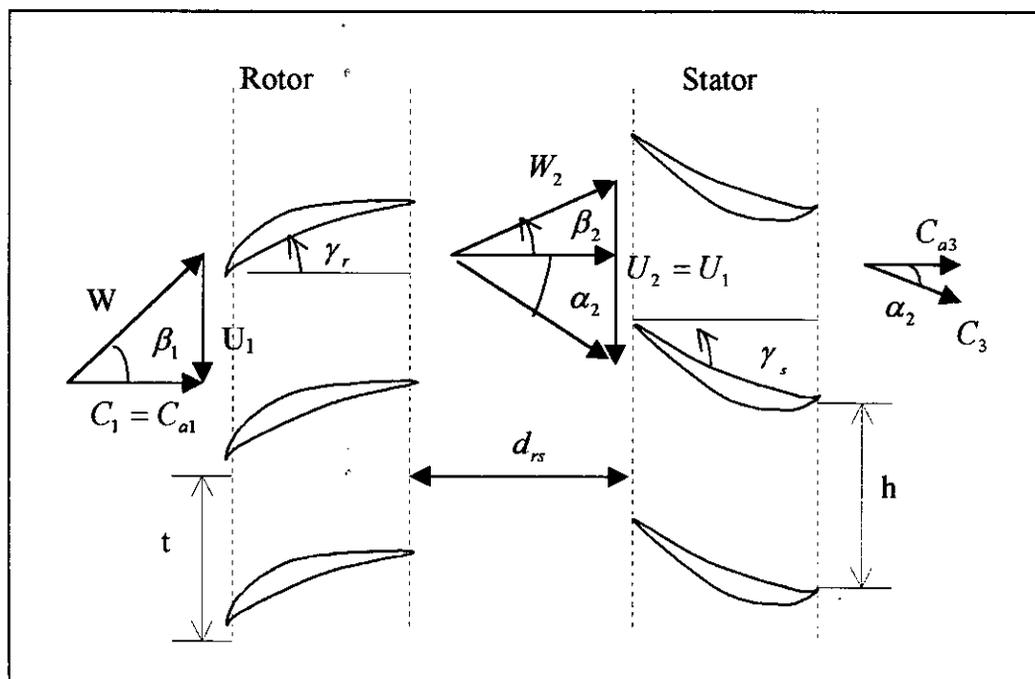


Fig. IV-1 : Etage de turbomachine

IV-2- Description des obstacles :

Les coordonnées du rotor seront $X_s(i)$, $Y_s(i)$ tel que :

$$\text{Les coordonnées du stator seront : } \begin{cases} X_s(i) = x_s(i) + l \cos(\gamma_s) + d \\ Y_s(i) = -Y_s(i) \end{cases}$$

IV-3- Champs de vitesse dans l'étage :

La superposition des potentiels complexes induits par le rotor et ceux induits par le stator, nous donne :

$$F(z) = F_r(z) + F_s(z)$$

La vitesse complexe C' induite par la distribution des singularités sera :

$$C' = \frac{dF}{dZ} = \frac{dF_r}{dZ} + \frac{dF_s}{dZ} \quad \text{[IV.1]}$$

$F_r(z)$: est le potentiel complexe induit par la présence du rotor.

$F_s(z)$: est le potentiel complexe induit par la présence du stator.

$$F(z) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \gamma_j(s) \ln(z_0 - z_j) ds_j - \frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=n+1}^{2n} \gamma_j(s) \ln(z_0 - z_j) ds_j \quad \text{[IV.2]}$$

L'expression de la vitesse conjuguée induite devient alors, compte tenu de (IV.1) :

$$C' = C'_r + C'_s$$

$$C' = \frac{dF(z)}{dz} = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \gamma_j(s) \frac{ds_j}{z_0 - z_j} - \frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=n+1}^{2n} \gamma_j(s) \frac{ds_j}{z_0 - z_j}$$

Notons que les affixes z_0 et z_j s'écrivent sous la forme :

Pour le rotor $j=1, n$ $z_j = x_j + i(y_j + kt)$ k varie de $-\infty$ à $+\infty$

Pour le stator $j= n+1, 2n$ $z_j = x_j + i(y_j + kh)$ $z_0 = x_0 + iy_0$

D'où l'expression de la vitesse conjuguée :

$$C' = -\frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds_j}{(x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j) + ikt} - \frac{i}{2\pi} \sum_{j=n+1}^{2n} \int_{l_j} \gamma_j(s) \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds_j}{(x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j) + ikh}$$

On écrit l'équation précédente sous forme d'une série, en faisant ressortir les termes t et h des deux sommations, et en faisant insérer π , on trouve alors :

$$C' = -\frac{i}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \coth\left(\frac{\pi}{t} \{(x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j)\}\right) ds_j \\ - \frac{i}{2h} \sum_{j=n+1}^{2n} \int_{l_j} \gamma_j(s) \coth\left(\frac{\pi}{ht} \{(x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j)\}\right) ds_j$$

La vitesse de l'écoulement dans le point de contrôle de coordonnées (x_i, y_i) est :

$$C' = -\frac{i}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \coth\left(\frac{\pi}{t} \{(x_i - x_j) + i(y_i - y_j)\}\right) ds_j$$

$$-\frac{i}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} \gamma_j(s) \coth\left(\frac{\pi}{ht} \{(x_i - x_j) + i(y_i - y_j)\}\right) ds_j$$

En faisant le changement de variable :

$$\left. \begin{aligned} X_{sij} &= \frac{\pi}{h} (x_i - x_j) \\ Y_{sij} &= \frac{\pi}{h} (y_i - y_j) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Z_{sij} = X_{sij} + i Y_{sij}$$

$$\left. \begin{aligned} X_{rij} &= \frac{\pi}{t} (x_i - x_j) \\ Y_{rij} &= \frac{\pi}{t} (y_i - y_j) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Z_{rij} = X_{rij} + i Y_{rij}$$

et en tenant compte de la relation suivante :

$$i \coth(Z_{ij}) = \frac{\sin(2Y_{ij}) + ish(2X_{ij})}{ch(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})}$$

Ce changement de variable adéquat nous permet de séparer les deux parties imaginaire, et réelle de la vitesse conjuguée.

$$C^2 = -\frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \frac{\sin(2Y_{rij}) + ish(2X_{rij})}{ch(2X_{rij}) - \cos(2Y_{rij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} \frac{\sin(2Y_{sij}) + ish(2X_{sij})}{ch(2X_{sij}) - \cos(2Y_{sij})} \gamma_j(s) ds_j$$

$$-\frac{\gamma_m}{2} \exp(-i\delta_i) \quad \text{[IV.3]}$$

En posant :

$$\text{Pour le stator : } f_{sx} = \frac{\sin(2Y_{sij})}{ch(2X_{sij}) - \cos(2Y_{sij})}$$

$$f_{sy} = \frac{sh(2X_{sij})}{ch(2X_{sij}) - \cos(2Y_{sij})}$$

$$\text{Pour le rotor : } f_{rx} = \frac{\sin(2Y_{rij})}{ch(2X_{rij}) - \cos(2Y_{rij})}$$

$$f_{ry} = \frac{sh(2X_{rij})}{ch(2X_{rij}) - \cos(2Y_{rij})}$$

On obtient la forme finale de la vitesse induite par l'étage:

$$\bar{C}_i \begin{cases} \text{Re}(C'_i) = -\frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_{rx} \gamma_j(s) ds_j - \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} f_{sx} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_i) \\ -\text{Im}(C'_i) = \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_{ry} \gamma_j(s) ds_j + \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} f_{sy} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_i) \end{cases} \quad \text{[IV-4]}$$

Après avoir superposé l'ensemble des singularités induites par l'étage et un écoulement uniforme de module C_m et de direction α_m on aboutit à :

$$\bar{C}_i \begin{cases} u_i = C_m \cos(\alpha_m) - \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_{rx} \gamma_j(s) ds_j - \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} f_{sx} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_i) \\ v_i = C_m \sin(\alpha_m) + \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_{ry} \gamma_j(s) ds_j + \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} f_{sy} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_i) \end{cases} \quad \text{[IV-5]}$$

C'est l'expression générale de la vitesse dans un point quelconque de l'étage.

IV-4- Condition de glissement :

$$\text{- sur le rotor : } \quad \text{tg}(\delta_i) = \frac{v_i + U}{u_i} \quad i = 1, n$$

$$\text{- sur le stator : } \quad \text{tg}(\delta_i) = \frac{v_i}{u_i} \quad i = n+1, 2n$$

Après simplification on aboutit à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} (f_{ry} \cos(\delta_i) + f_{rx} \sin(\delta_i)) \gamma_j ds_j + \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} (f_{sy} \cos(\delta_i) + f_{sx} \sin(\delta_i)) \gamma_j ds_j \\ = C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i) \end{aligned}$$

avec $\lambda = 1$ pour $j < n$

$\lambda = 0$ pour $j > n$

Si on propose le changement de variable : $f_r = \{f_{rx} \sin(\delta_i) + f_{ry} \cos(\delta_i)\}$
 $f_s = \{f_{sx} \sin(\delta_i) + f_{sy} \cos(\delta_i)\}$

Alors :

$$\frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_r \gamma_j(s) ds_j + \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} f_s \gamma_j(s) ds_j = C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i)$$

De l'expression de γ_j , on obtient :

$$\frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \left(\gamma(j-1) + \frac{\gamma(j) - \gamma(j-1)}{l_j} s_j \right) f_r ds_j + \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} \left(\gamma(j-1) + \frac{\gamma(j) - \gamma(j-1)}{l_j} s_j \right) f_s ds_j$$

$$= C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i)$$

Avec :

- Pour le rotor : $G_r(i,j) = \int_{l_j} f_r ds_j$; $F_r(i,j) = \int_{l_j} f_r s_j ds_j$

- Pour le stator : $G_s(i,j) = \int_{l_j} f_s ds_j$; $G_s(i,j) = \int_{l_j} f_s s_j ds_j$

Donc :

$$\frac{1}{2t} \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n G_r(i,j) \gamma(j-1) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F_r(i,j) \frac{\gamma(j) - \gamma(j-1)}{l_j} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2h} \left\{ \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} G_s(i,j) \gamma(j-1) + \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} F_s(i,j) \frac{\gamma(j) - \gamma(j-1)}{l_j} \right\}$$

$$= C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i) \quad \text{[IV.6]}$$

Pour $i=1$ l'équation n'est pas définie, on commence de $i=2$ à $i=n+1$, puis on confond la distribution $(n+1)$ avec celle de 1, de façon similaire pour le rotor et le stator. On obtient alors :

$$\begin{aligned} G_r(i,n+1) &= G_r(i,1) & ; & & G_s(i,2n+1) &= G_s(i,n+1) \\ F_r(i,n+1) &= F_r(i,1) & , & & G_s(i,2n+1) &= G_s(i,n+1) \end{aligned}$$

Ce qui conduit à un système linéaire à $2n$ équation et $2n+2$ inconnues. donc, on doit imposer les deux conditions de KUTTA. l'un pour le rotor et l'autre pour le stator.

IV.5- Condition de K U T T A-JOUKOWSKI :

- ❖ *sur rotor* : identité de la vitesse relative.
- ❖ *sur stator* : identité de la vitesse absolue.

Pour satisfaire cette condition, on impose :

- ❖ *sur rotor* $\gamma(n+1) = -\gamma(1)$
- ❖ *sur stator* $\gamma(2n+1) = -\gamma(n+1)$

Enfin, on aboutira à un système linéaire de $2n$ équations à $2n$ inconnues.

Soit finalement une matrice d'influence globale :

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline A_{rr} & A_{sr} \\ \hline A_{rs} & A_{ss} \\ \hline \end{array} \qquad B = \begin{array}{|c|} \hline B_r \\ \hline B_s \\ \hline \end{array}$$

Avec :

- A_{rr} : représente l'influence du rotor sur lui-même.
- A_{sr} : représente l'influence du stator sur le rotor.
- A_{rs} : représente l'influence du rotor sur le stator.
- A_{ss} : représente l'influence du stator sur lui-même.

$$B_r(i) = C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - U \cos(\delta_i)$$

$$J = 1, n$$

$$A_{rr} = \begin{array}{|l} \left. \begin{array}{l} A(i,1) = \frac{1}{2t} \left[G_r(i,2) - \frac{Fr(i,2)}{l_r(2)} - \frac{Fr(i,1)}{l_r(1)} \right] \\ A(i,j) = \frac{1}{2t} \left[Gr(i,j+1) - \frac{Fr(i,j+1)}{l_r(j+1)} + \frac{Fr(i,j)}{l_r(j)} \right] \\ A(i,n) = \frac{1}{2t} \left[Gr(i,1) + \frac{Fr(i,n)}{l_r(n)} - \frac{Fr(i,1)}{l_r(1)} \right] \end{array} \right\} \end{array}$$

$J=n+1, 2n$

$$A_{sr} = \begin{cases} A(i, n+1) = \frac{1}{2h} \left[Gs(i, n+2) - \frac{Fs(i, n+2)}{l_s(n+2)} - \frac{Fs(i, n+1)}{l_s(n+1)} \right] \\ A(i, j) = \frac{1}{2h} \left[Gs(i, j+1) - \frac{Fs(i, j+1)}{l_s(j+1)} + \frac{Fs(i, j)}{l_s(j)} \right] \\ A(i, 2n) = \frac{1}{2h} \left[Gs(i, n+1) + \frac{Fs(i, 2n)}{l_s(2n)} - \frac{Fs(i, n+1)}{l_s(n+1)} \right] \end{cases}$$

Pour $i= n+1, 2n$

$$B_s(i) = C_m \sin(\delta_i - \alpha_m)$$

$J=1, n$

$$A_{rs} = \begin{cases} A(i, 1) = \frac{1}{2t} \left[G_r(i, 2) - \frac{Fr(i, n+2)}{l_r(n+2)} - \frac{Fr(i, n+1)}{l_r(n+1)} \right] \\ A(i, j) = \frac{1}{2t} \left[Gr(i, j+1) - \frac{Fr(i, j+1)}{l_r(j+1)} + \frac{Fr(i, j)}{l_r(j)} \right] \\ A(i, n) = \frac{1}{2t} \left[Gr(i, 1) + \frac{Fr(i, n)}{l_r(n)} - \frac{Fr(i, 1)}{l_r(1)} \right] \end{cases}$$

$J=n+1, 2n$

$A_{ss} =$

$$\begin{cases} A(i, n+1) = \frac{1}{2h} \left[Gs(i, n+2) - \frac{Fs(i, n+2)}{l_s(n+2)} - \frac{Fs(i, n+1)}{l_s(n+1)} \right] \\ A(i, j) = \frac{1}{2h} \left[Gs(i, j+1) - \frac{Fs(i, j+1)}{l_s(j+1)} + \frac{Fs(i, j)}{l_s(j)} \right] \\ A(i, 2n) = \frac{1}{2h} \left[Gs(i, n+1) + \frac{Fs(i, 2n)}{l_s(2n)} - \frac{Fs(i, n+1)}{l_s(n+1)} \right] \end{cases}$$

La résolution de ce système, nous permet de calculer les vorticités $\gamma_s(j)$, $j = 1, 2n$. qui nous permettent de calculer les différents paramètres de l'écoulement (vitesses, coefficients de pression, etc.).

IV-6- Expression de la vitesse tangentielle :

$$C_i = - \left[C_m \cos(\alpha_m) \cos(\delta_i) - \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_{rx} \cos(\delta_i) \gamma_j(s) ds_j - \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} f_{sx} \cos(\delta_i) \gamma_j(s) ds_j \right. \\ \left. + C_m \sin(\alpha_m) \sin(\delta_i) + \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_{ry} \sin(\delta_i) \gamma_j(s) ds_j + \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} f_{sy} \sin(\delta_i) \gamma_j(s) ds_j \right. \\ \left. - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_i) \cos(\delta_i) - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_i) \sin(\delta_i) \right] \quad \text{[IV.7]}$$

$$C_i = - \left[\frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} (f_{ry} \sin(\delta_i) + f_{rx} \cos(\delta_i)) \gamma_j ds_j - \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} (f_{sy} \sin(\delta_i) + f_{sx} \cos(\delta_i)) \gamma_j ds_j \right. \\ \left. - \frac{\gamma_m}{2} + C_m \cos(\alpha_m - \delta_i) \right]$$

Si on propose le changement de variable suivant :

$$f_r = f_{ry} \sin(\delta_i) + f_{rx} \cos(\delta_i)$$

$$f_s = f_{sy} \sin(\delta_i) + f_{sx} \cos(\delta_i)$$

On obtient :

$$C_i = -C_m \cos(\alpha_m - \delta_i) \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_r \gamma_j ds_j + \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} f_s \gamma_j ds_j + \frac{\gamma_m}{2} \quad \text{[IV.8]}$$

On remplace γ_j par sa valeur on obtient alors :

$J=1, n$

$$A_{\pi} = \begin{cases} A(i,1) = \frac{1}{2t} \left[G_r(i,2) - \frac{Fr(i,2)}{l_r(2)} - \frac{Fr(i,1)}{l_r(1)} \right] \\ A(i,j) = \frac{1}{2t} \left[Gr(i,j+1) - \frac{Fr(i,j+1)}{l_r(j+1)} + \frac{Fr(i,j)}{l_r(j)} \right] \\ A(i,n) = \frac{1}{2t} \left[Gr(i,1) + \frac{Fr(i,n)}{l_r(n)} - \frac{Fr(i,1)}{l_r(1)} \right] \end{cases}$$

$$J=n+1, 2n$$

$$A_{sr} = \begin{cases} A(i, n+1) = \frac{1}{2h} \left[Gs(i, n+2) - \frac{Fs(i, n+2)}{l_s(n+2)} - \frac{Fs(i, n+1)}{l_s(n+1)} \right] \\ A(i, j) = \frac{1}{2h} \left[Gs(i, j+1) - \frac{Fs(i, j+1)}{l_s(j+1)} + \frac{Fs(i, j)}{l_s(j)} \right] \\ A(i, 2n) = \frac{1}{2h} \left[Gs(i, n+1) + \frac{Fs(i, 2n)}{l_s(2n)} - \frac{Fs(i, n+1)}{l_s(n+1)} \right] \end{cases}$$

$$\text{Pour } i= n+1, 2n$$

$$J=1, n$$

$$A_{rs} = \begin{cases} A(i, 1) = \frac{1}{2t} \left[G_r(i, 2) - \frac{Fr(i, n+2)}{l_r(n+2)} - \frac{Fr(i, n+1)}{l_r(n+1)} \right] \\ A(i, j) = \frac{1}{2t} \left[Gr(i, j+1) - \frac{Fr(i, j+1)}{l_r(j+1)} + \frac{Fr(i, j)}{l_r(j)} \right] \\ A(i, n) = \frac{1}{2t} \left[Gr(i, 1) + \frac{Fr(i, n)}{l_r(n)} - \frac{Fr(i, 1)}{l_r(1)} \right] \end{cases}$$

$$J=n+1, 2n$$

$$A_{ss} = \begin{cases} A(i, n+1) = \frac{1}{2h} \left[Gs(i, n+2) - \frac{Fs(i, n+2)}{l_s(n+2)} - \frac{Fs(i, n+1)}{l_s(n+1)} \right] \\ A(i, j) = \frac{1}{2h} \left[Gs(i, j+1) - \frac{Fs(i, j+1)}{l_s(j+1)} + \frac{Fs(i, j)}{l_s(j)} \right] \\ A(i, 2n) = \frac{1}{2h} \left[Gs(i, n+1) + \frac{Fs(i, 2n)}{l_s(2n)} - \frac{Fs(i, n+1)}{l_s(n+1)} \right] \end{cases}$$

A_{rr} : représente l'influence du rotor sur lui-même.

A_{sr} : représente l'influence du stator sur le rotor.

A_{rs} : représente l'influence du rotor sur le stator.

A_{ss} : représente l'influence du stator sur lui-même.

Pour $i = j$

$$\begin{cases} G(i,i) = k \\ F(i,i) = \frac{K.I(j)}{2} \end{cases}$$

Avec :

❖ $k = t$ pour $i=1, n$

❖ $K = h$ pour $i=n+1, 2n$

IV-7- Calcul des coefficients de pression en régime instationnaire :

On a l'expression générale de la pression d'un fluide parfait et incompressible qui s'écrit :

$$\frac{p}{\rho} + \frac{C^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = cte(t). \quad [IV.9]$$

Pour le cas stationnaire $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

tel que :

- $Cte(t)$: représente la constante caractérisant l'écoulement à l'instant (t). Généralement prise égale à la pression totale du fluide à l'instant (t).
- ϕ : représente le potentiel des vitesses

Ce qui nous permet d'avoir l'expression de la pression :

$$p = p_0 + \frac{\rho}{2}(C_0^2 - C^2) - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

d'où :

$$\frac{p - p_0}{\rho C_0^2} = 1 - \left(\frac{C}{C_0}\right)^2 - \frac{2}{\rho C_0^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\underbrace{\frac{2}{\rho C_0^2}}_{c_p}$$

Donc :

$$C_p = 1 - \left(\frac{W}{C_0}\right)^2 + \left(\frac{U}{C_0}\right)^2 - \frac{2}{\rho C_0^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{C_j l_j}{\Delta t}$$

C_j : est la vitesse du point j.

l_j : est la longueur du panneau j.

$$U = \frac{t}{n \Delta t}$$

t : le pas du profil du rotor.

U : la vitesse de rotation du rotor.

n : le nombre de position prise par le rotor.

D'où

D'où l'expression générale du C_p :

$$\frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{nU}{t} C_j l_j$$

$$C_p = 1 - \left(\frac{W}{C_0} \right)^2 + \left(\frac{U}{C_0} \right)^2 - \frac{2}{\rho C_0^2} \frac{nU}{t} C_j l_j \quad [\text{IV-10}]$$

IV-8- présentation des résultats :

Dans ce cas (étude d'un étage ,Fig.IV-2) on a utilisé 3 types de profils :

N.A.C.A 4412, N.A.C.A 3916, N.A.C.A 65-18-10 en faisant varier les angles d'inclinaison du rotor et du stator, Et on observe que la perturbation se manifeste au niveau du bord d'attaque et du bord de fuite, surtout pour des vitesses de rotation importantes.

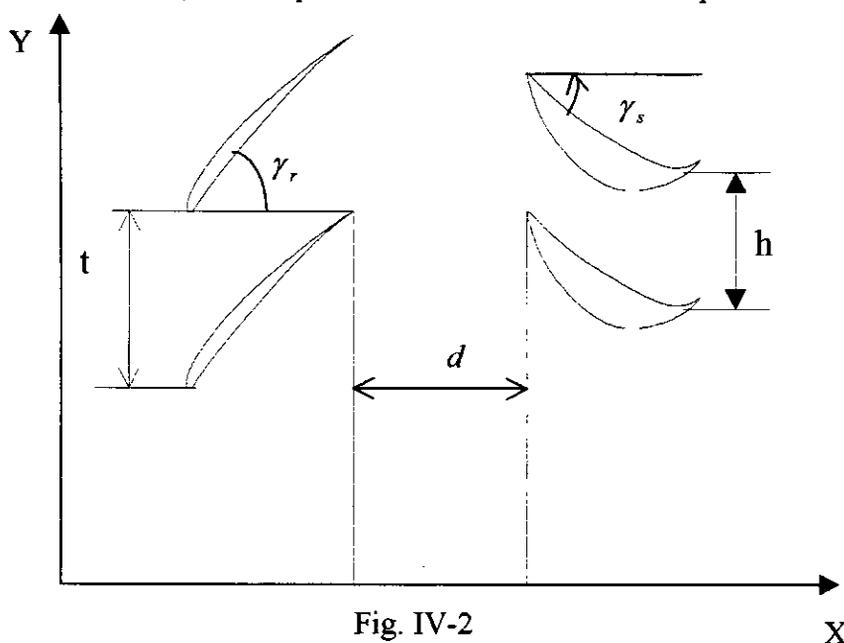
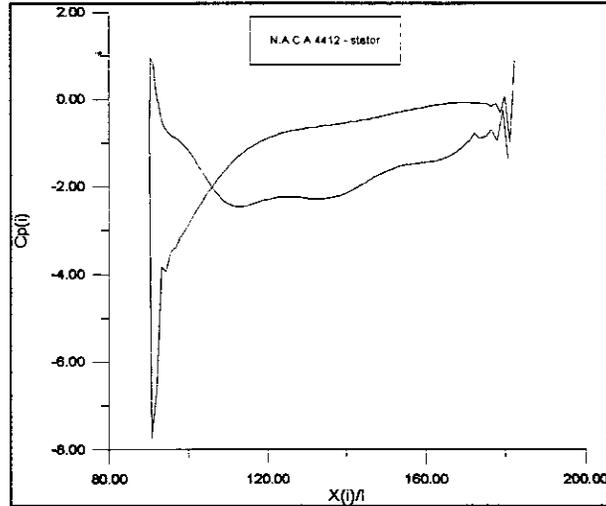
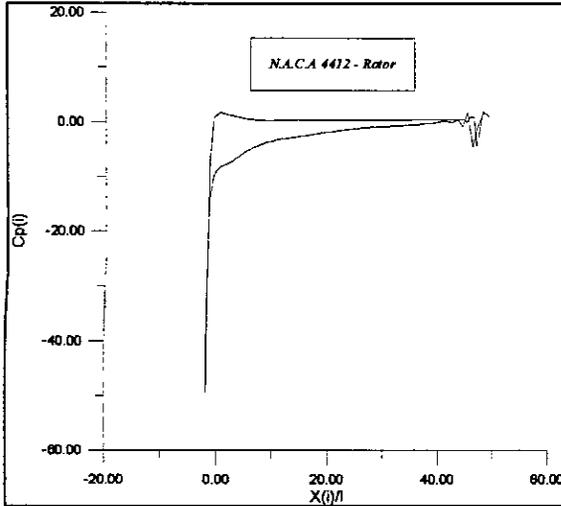
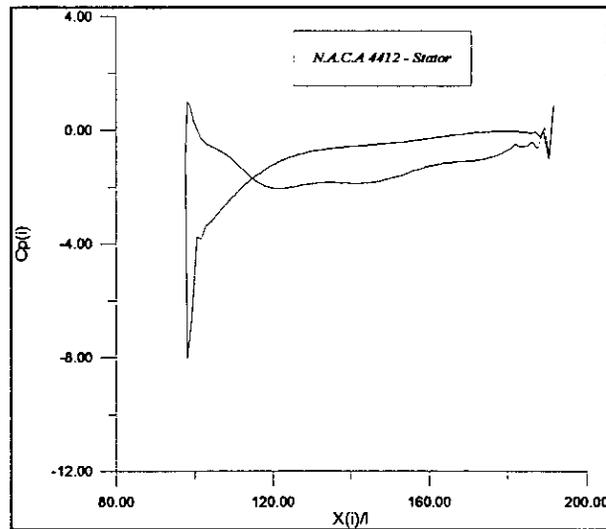
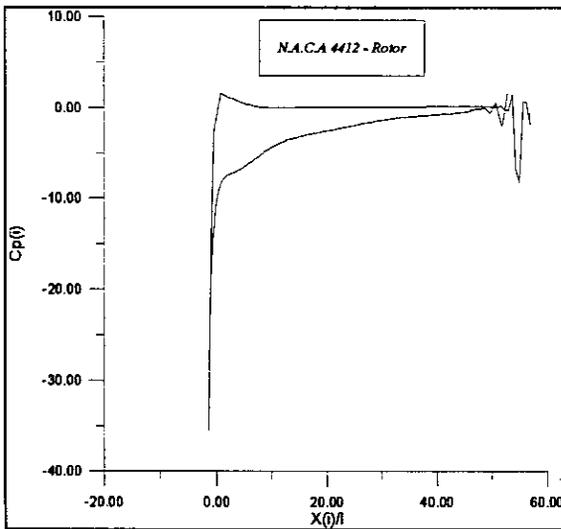


Fig. IV-2

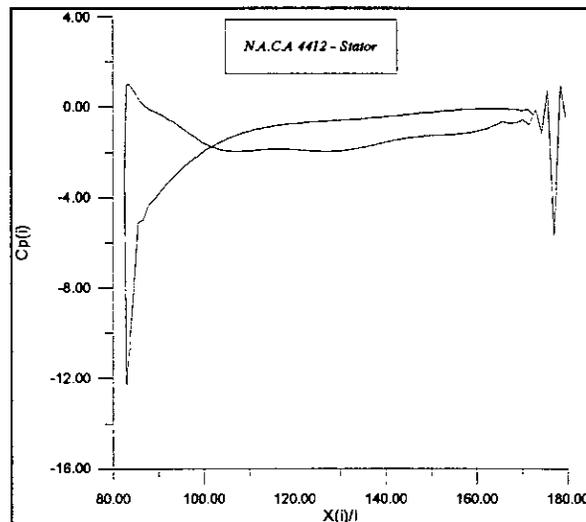
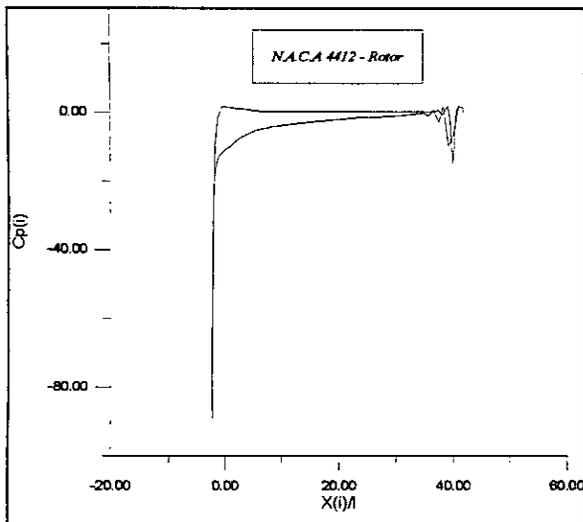
Les résultats obtenues pour les différentes N.A.C.A sont les suivants :



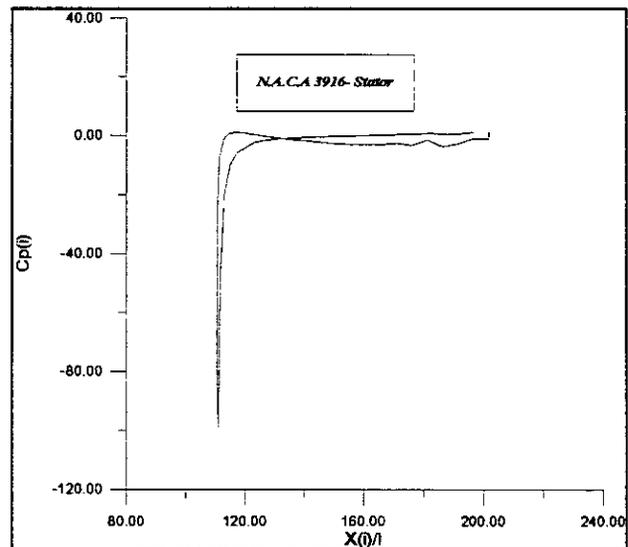
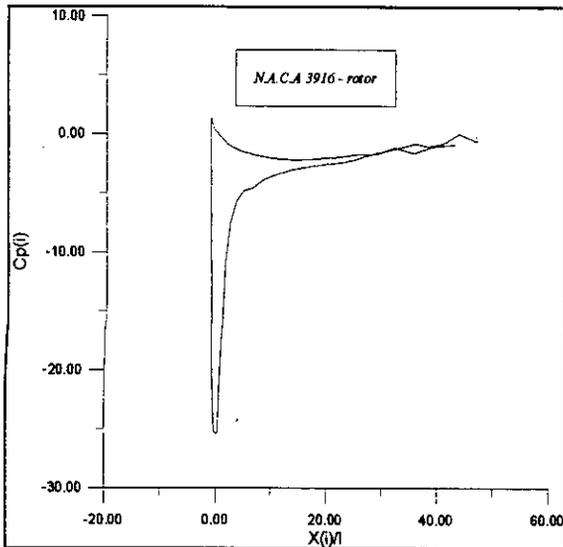
$$U = 10 \text{ m/s}, C_0 = 10 \text{ m/s}, \gamma_r = 60^\circ, \gamma_s = 15^\circ, \alpha = 4^\circ$$



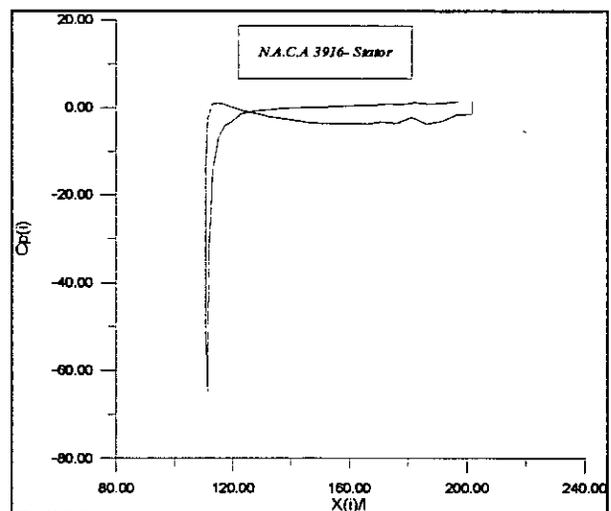
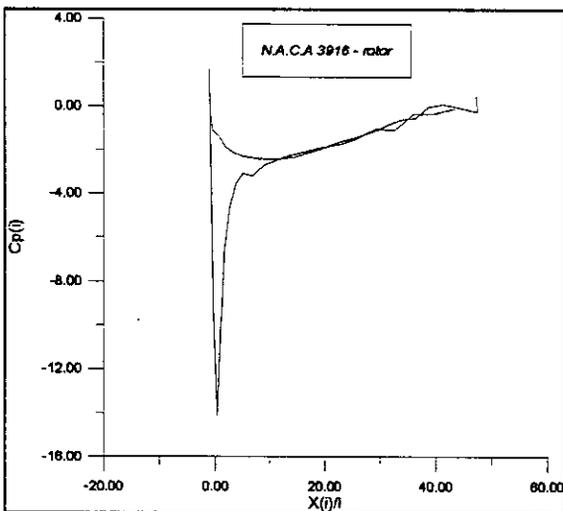
$$U = 8 \text{ m/s}, C_0 = 10 \text{ m/s}, \gamma_r = 55^\circ, \gamma_s = 15^\circ, \alpha = 10^\circ$$



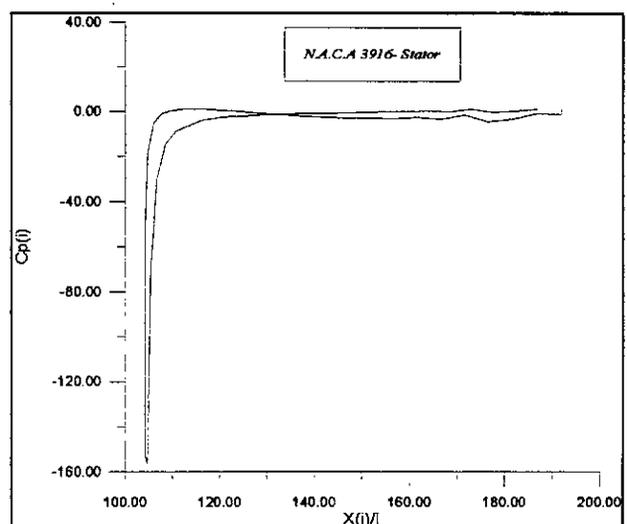
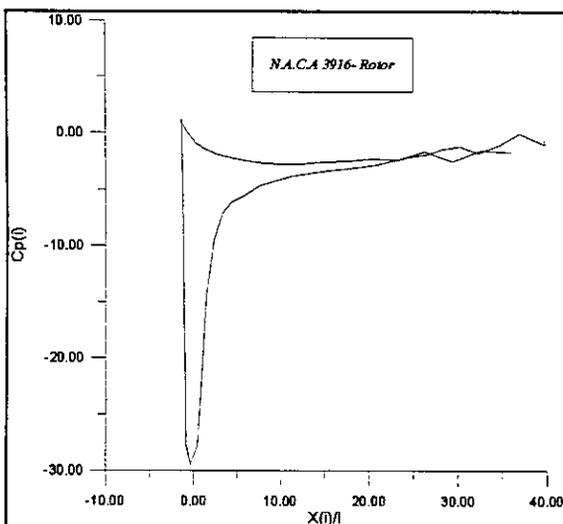
$$U = 9 \text{ m/s}, C_0 = 10 \text{ m/s}, \gamma_r = 65^\circ, \gamma_s = 12^\circ, \alpha = 10^\circ$$



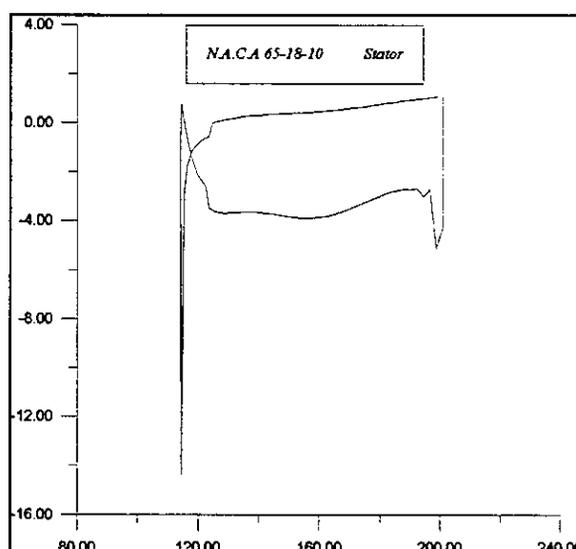
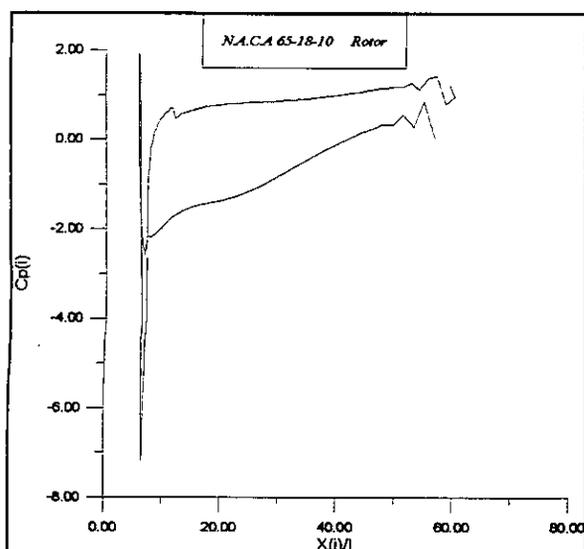
$U=6\text{m/s}, C_0=10\text{ m/s}, \gamma_r=45^\circ, \gamma_s=5^\circ, \alpha=4^\circ$



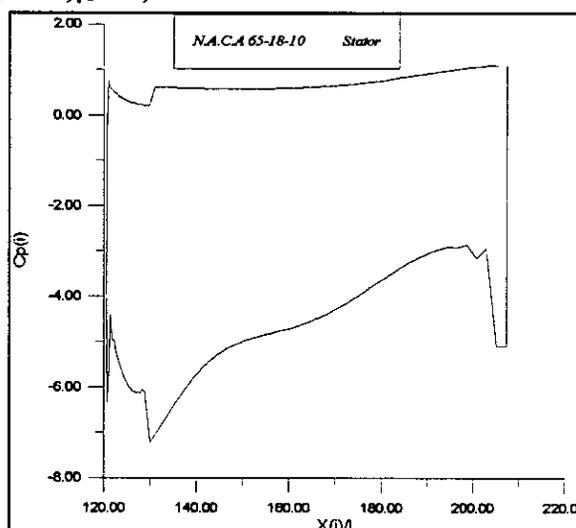
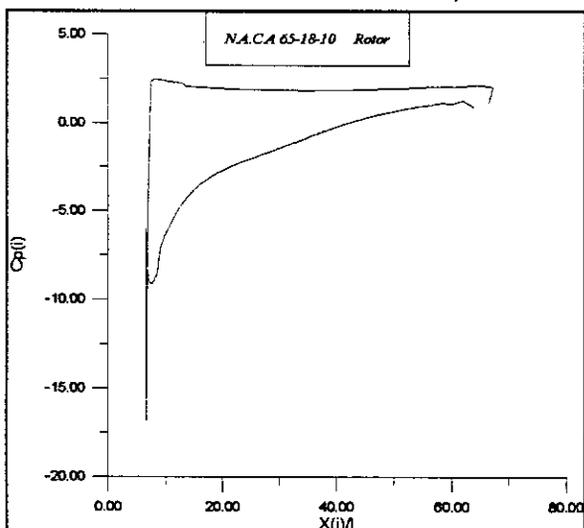
$U=8\text{ m/s}, C_0=10\text{ m/s}, \gamma_r=45^\circ, \gamma_s=5^\circ, \alpha=4^\circ$



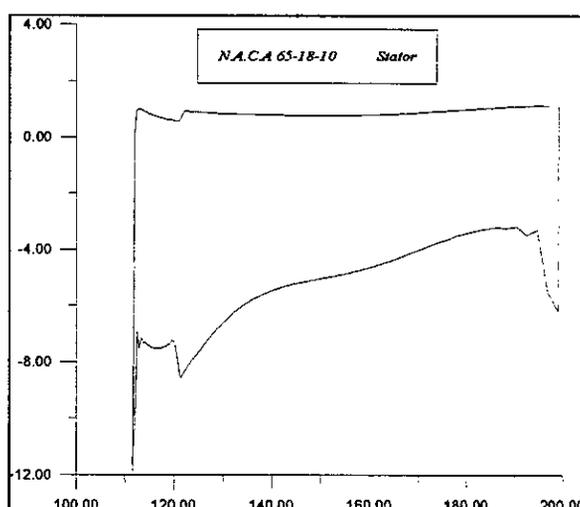
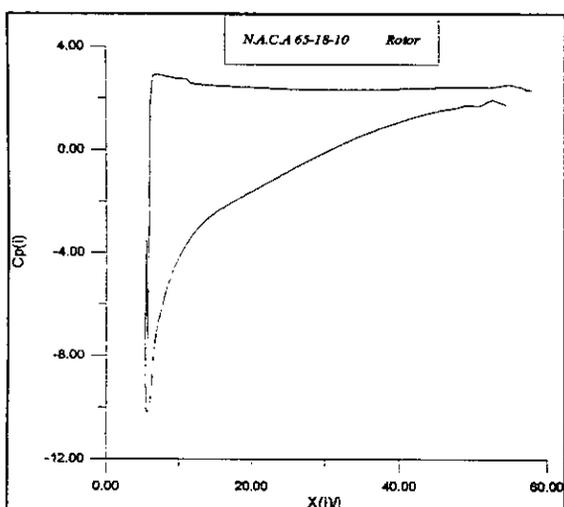
$U=5\text{m/s}, C_0=10\text{m/s}, \gamma_r=50^\circ, \gamma_s=5^\circ, \alpha=4^\circ$



$U=10\text{m/s}, C_0=10\text{m/s}, \gamma_r=50^\circ, \gamma_s=5^\circ, \alpha=4^\circ$



$U=12\text{m/s}, C_0=10\text{m/s}, \gamma_r=60^\circ, \gamma_s=15^\circ, \alpha=4^\circ$



$U=14\text{m/s}, C_0=10\text{m/s}, \gamma_r=52^\circ, \gamma_s=8^\circ, \alpha=4^\circ$

Chapitre V

Chapitre V- Etude d'un cylindre tournant au bord d'attaque d'un profil aérodynamique

Dans ce chapitre on va élargir l'application de la méthode des singularités pour l'étude d'un cylindre tournant au bord d'attaque d'un profil aérodynamique, en calculant les coefficients de pression et de portance.

V- modélisation :

V-1- principe de la modélisation :

Notre raisonnement est de faire une Discrétisation du profil (ici on a utilisé un profil N.A.C.A 4412) en N_1 points, et aussi une Discrétisation d'un cylindre tournant en N_2 points, puis on détermine les caractéristiques de l'écoulement de chaque obstacle séparément. Par la suite, on fait un calcul itératif qui nous permet de déterminer l'intersection des points de contrôle entre le demi-cylindre et le profil.

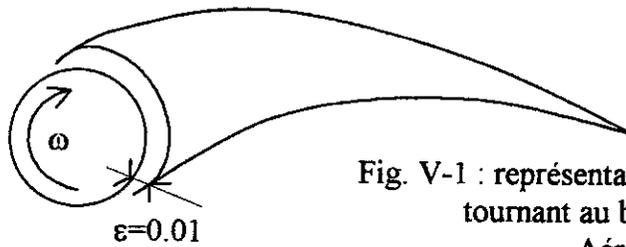


Fig. V-1 : représentation d'un cylindre tournant au bord d'attaque d'un profil Aérodynamique.

Après avoir déterminé l'intervalle commun des valeurs des $X(i)$ par un calcul itératif en donnant une valeur à $\varepsilon=0.01$, on impose une condition aux limites, aux extrémités du demi-cylindre et aux limites du profil tel que les valeurs des $C_p(i)$ sont proches.

puis on introduit les coefficients de pression du demi-cylindre et du profil jusqu'au limites définis, et enfin on prend les valeurs finales des coefficients de pression.

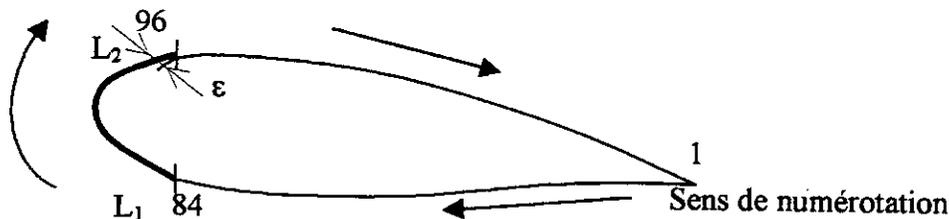


Fig. V-2 Représentation de la superposition du demi-cylindre et du profil

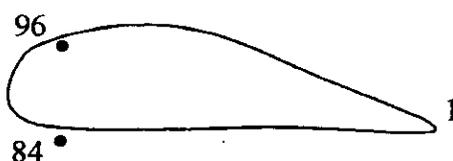


Fig. V-3-a : Représentation séparé du profil

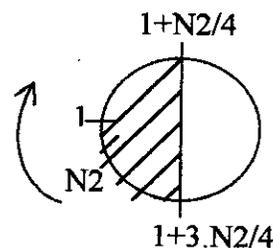
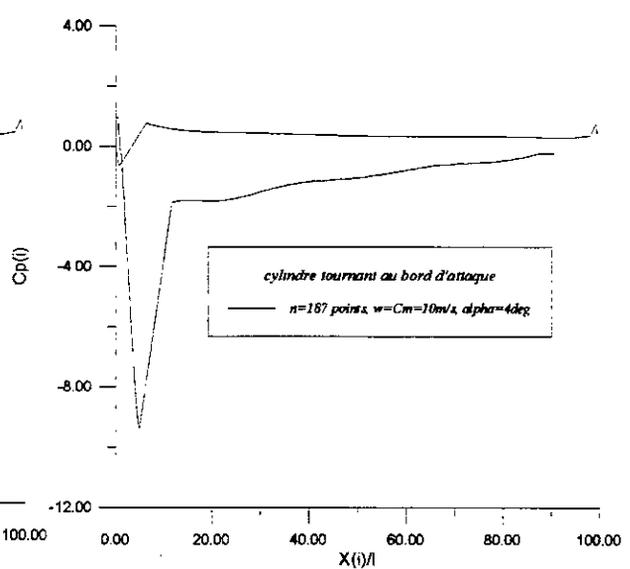
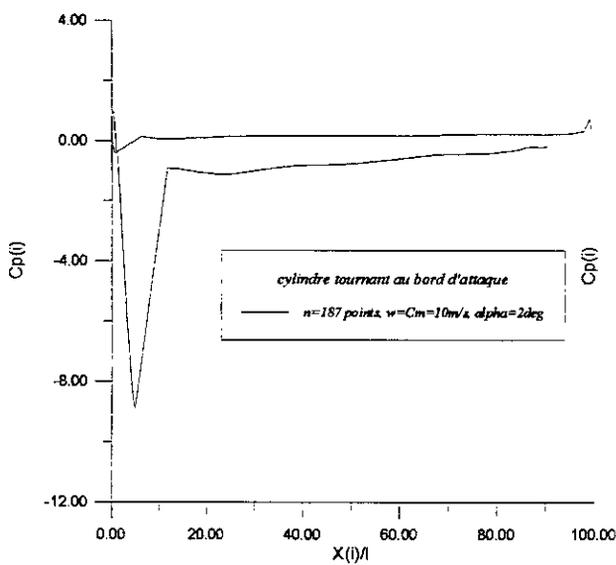
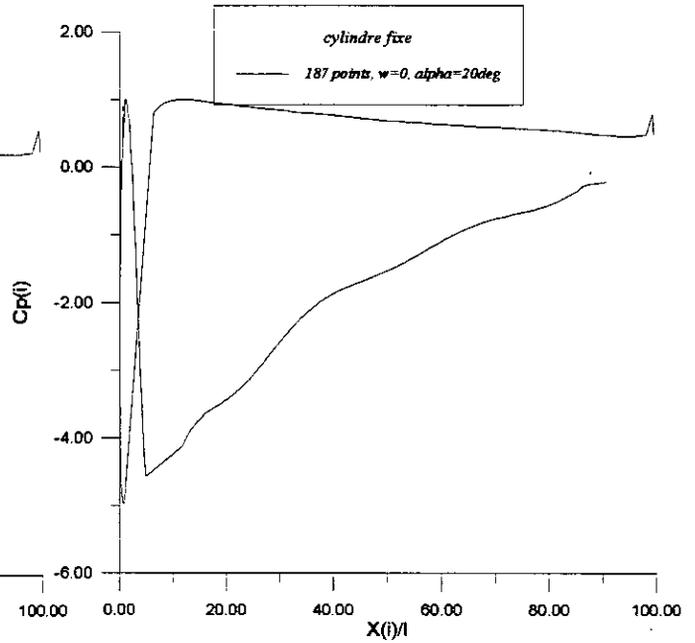
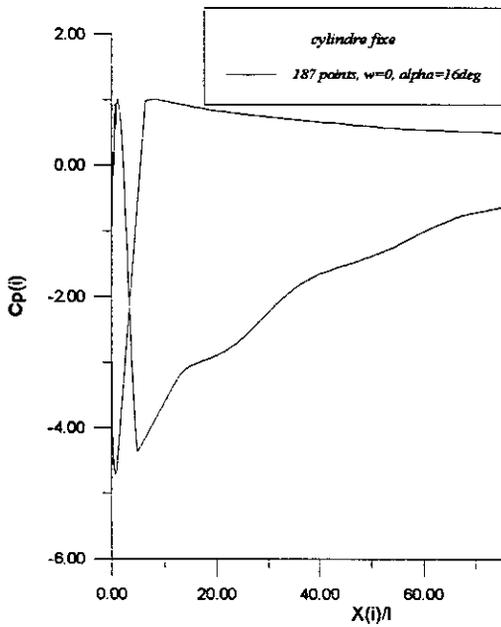
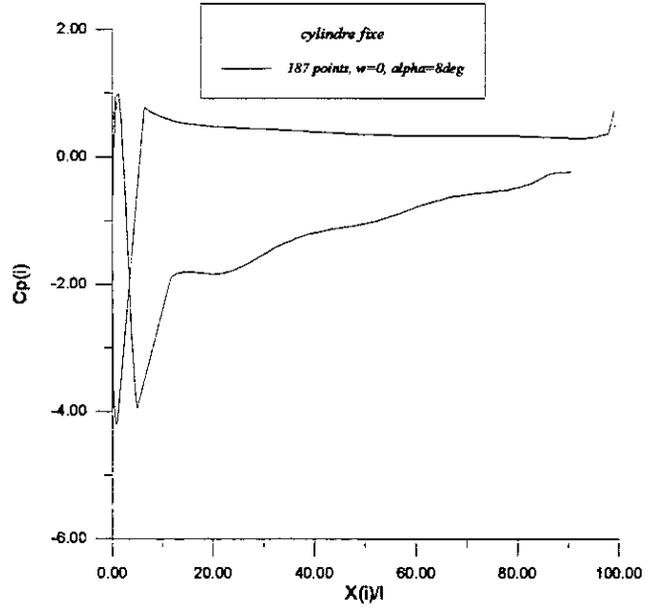
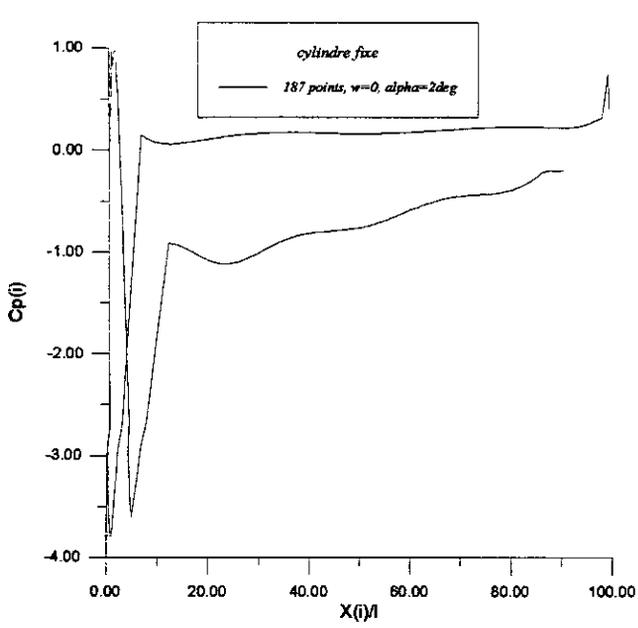
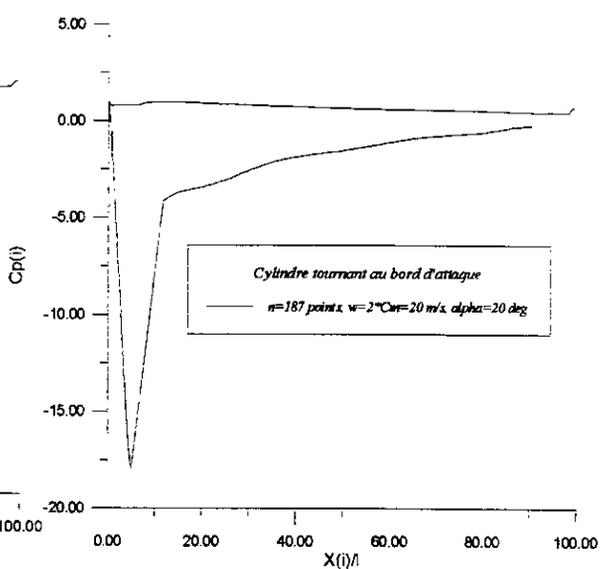
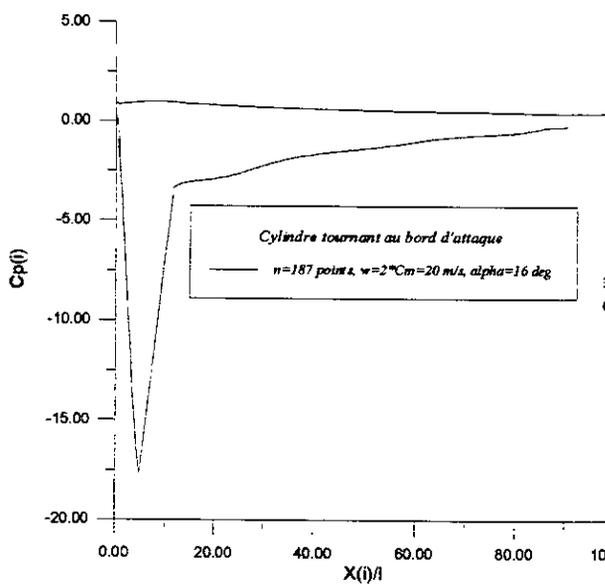
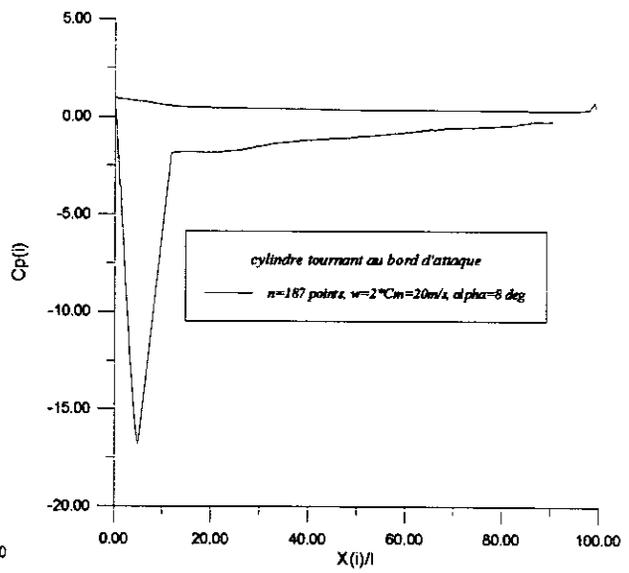
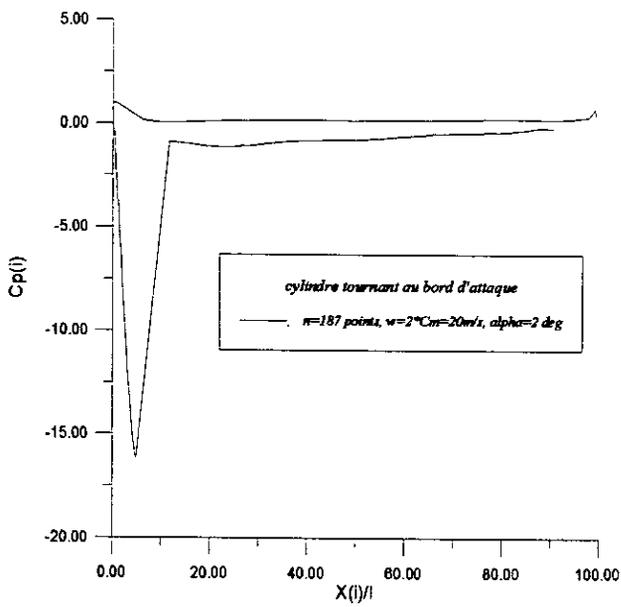
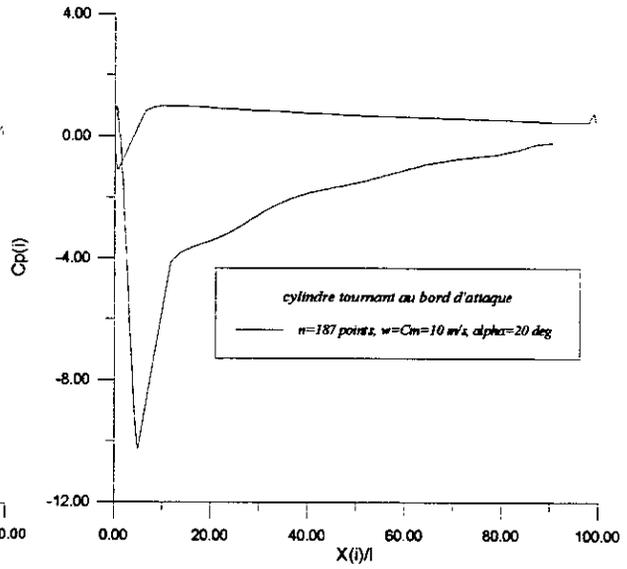
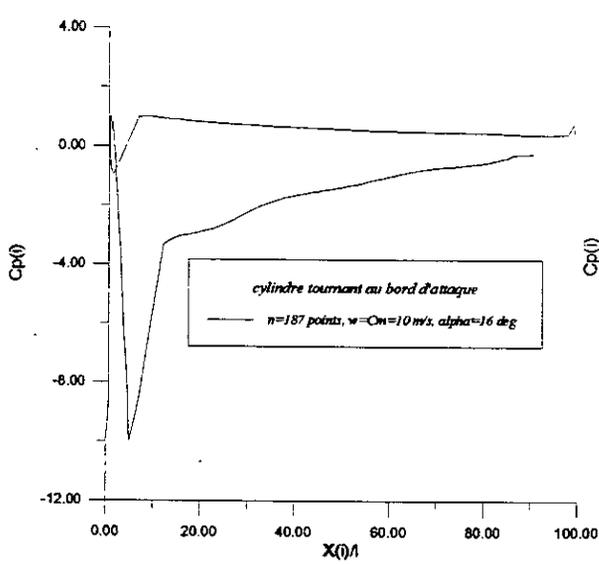
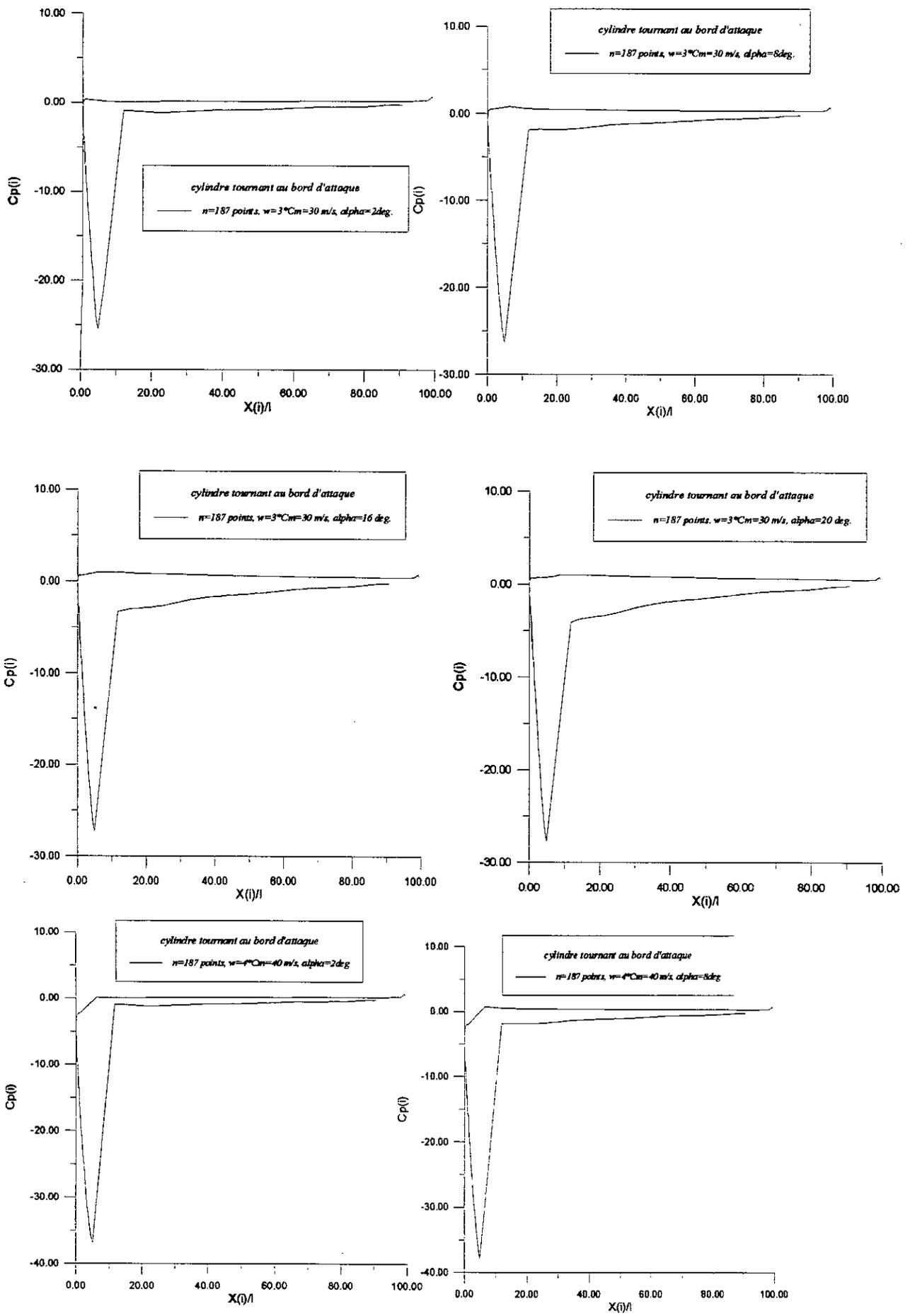


Fig. V-3-b : Représentation séparé du cylindre







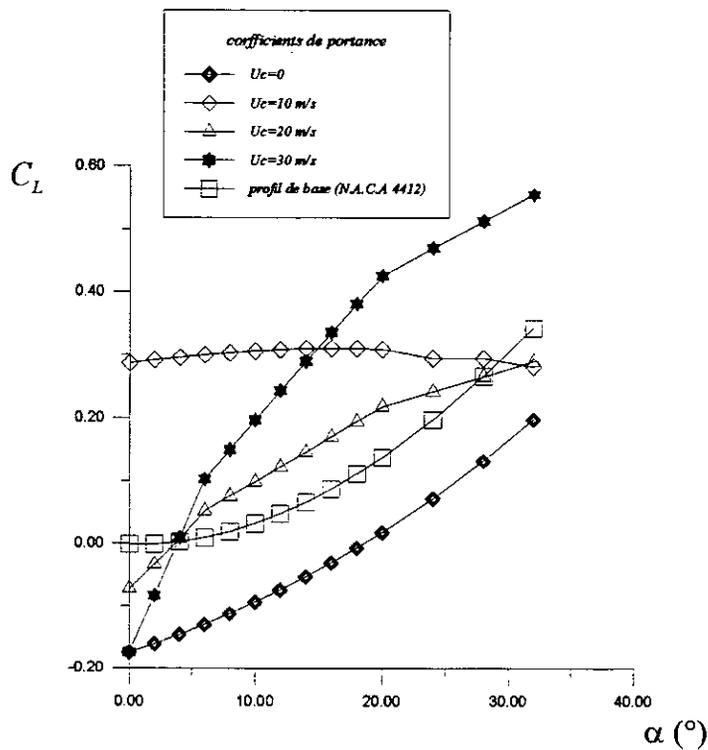
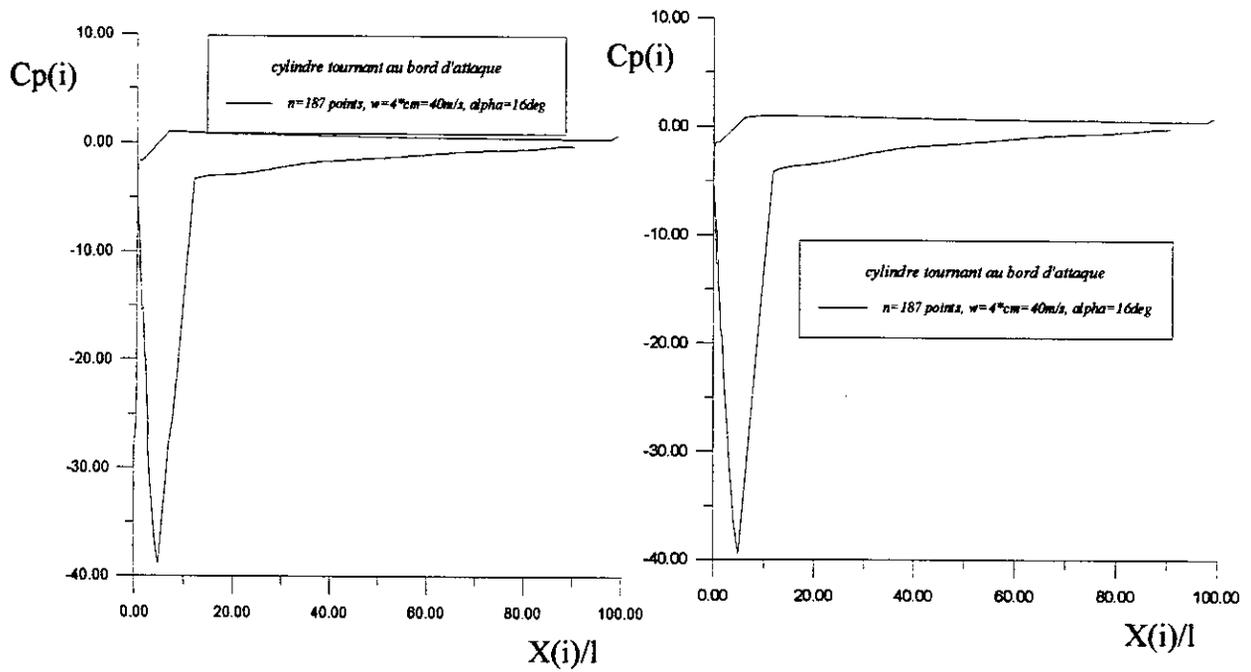


Fig.V-4 :Evolution des coefficients de portance en fonction de α° .

V-2- Présentation des résultats:

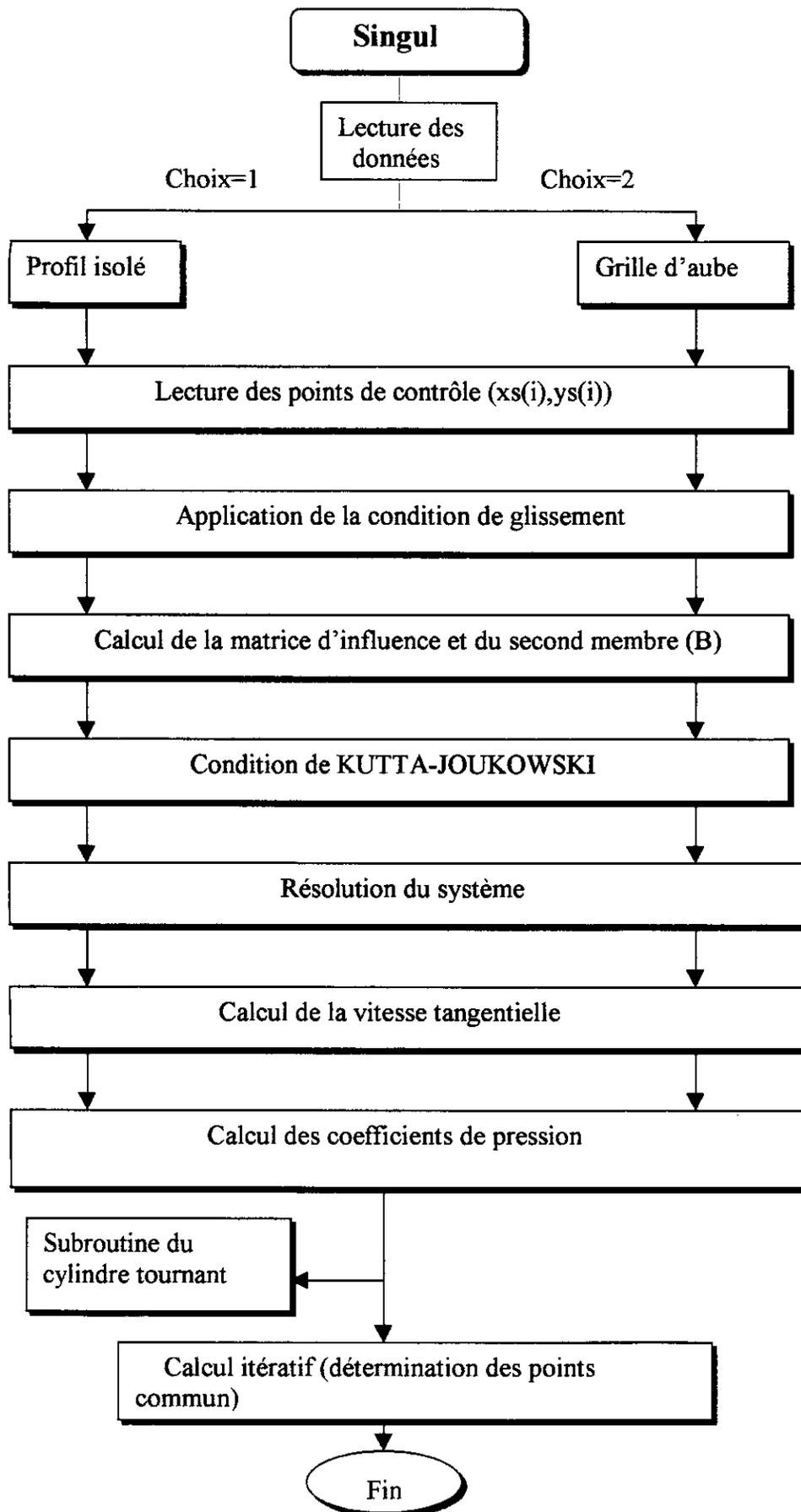
L'influence de l'augmentation de la vitesse de la paroi du cylindre au-delà de ($U_c/U=1$) d'un profil N.A.C.A 4412 avec un cylindre tournant au bord d'attaque nous donne des résultats légèrement petites Pour les différentes angles d'attaque α (de 0 à 32), on remarque que le coefficient de portance prend des valeurs acceptables pour ($U_c/U=3$).

Pour une valeur de la vitesse de rotation du cylindre $U_c=3.U$ tel que U est la vitesse de l'écoulement à l'infini amont on a une augmentation sensible de la portance par rapport au profil de base N.A.C.A 4412 (Fig. V-4).

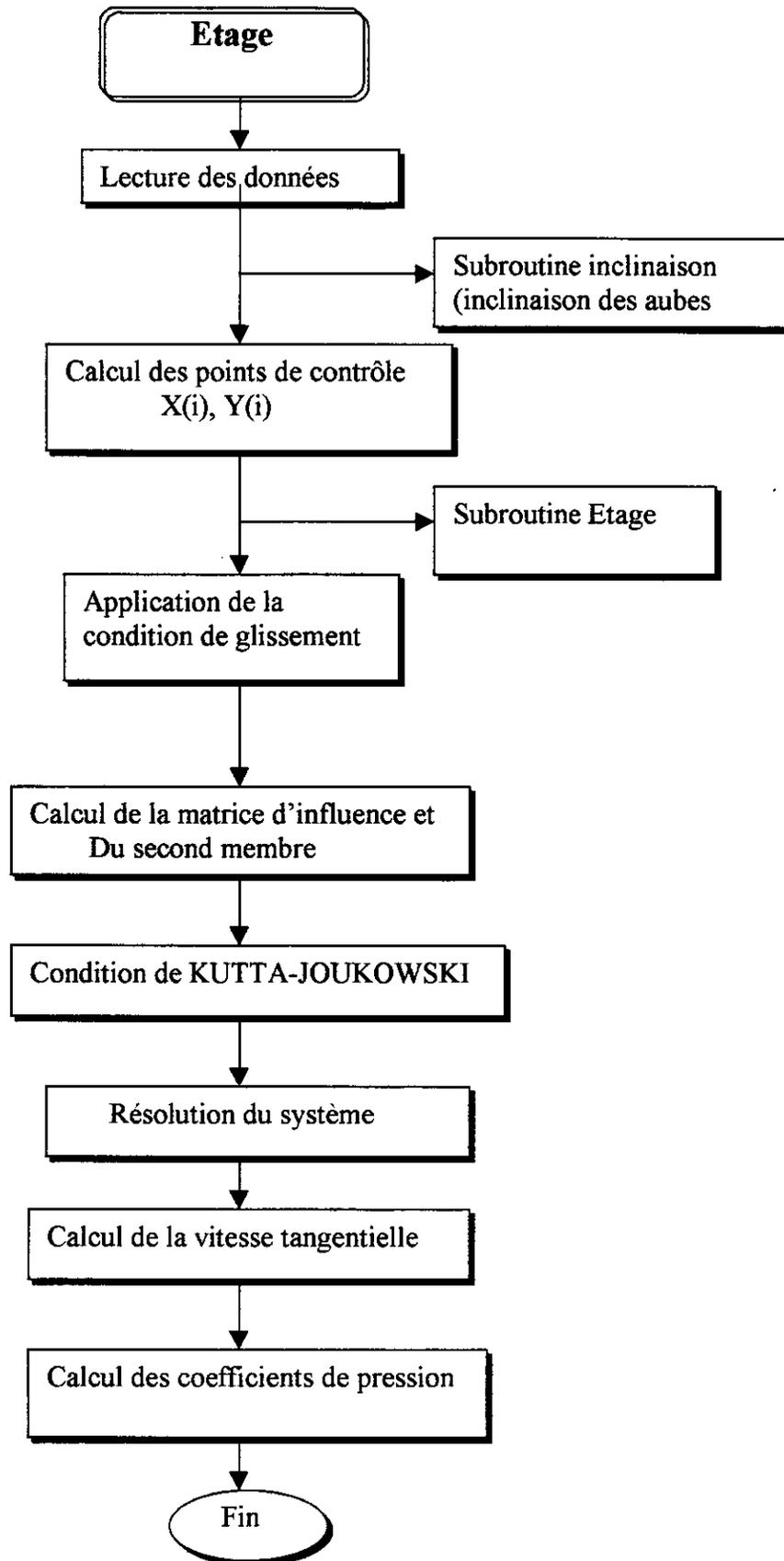
pour un profil de N.A.C.A 4412 en utilisant la rotation d'un cylindre au bord d'attaque met en évidence quelques points et informations intéressants :

- L'utilisation du cylindre au bord d'attaque fait augmenter légèrement la portance et par conséquent des coefficients de pression.
- L'écoulement sur l'extrados reste collé (c'est à dire on a un recollement de la couche limite), et qui peut être prouvé par une étude de la visualisation de l'écoulement (à développer dans une étude future).

Plan général du programme :



Plan du programme de l'étage



Conclusion générale

Conclusion

Générale

L'objectif de ce présent travail était d'exposer la façon dont la méthode des singularités peut être appliquée au calcul des écoulements stationnaires et instationnaires autour d'un profil isolé, d'une grille fixe ou mobile et d'un étage de turbomachine.

L'application de la méthode pour les différents cas cités ci-dessus donne des résultats meilleurs à chaque fois qu'on fait une interpolation du profil par une interpolation polynomiale.

Les hypothèses utilisées sont très restrictives puisque le calcul a été effectué pour les écoulements de fluide parfait incompressible dans un espace à deux dimensions.

Néanmoins l'étude menée jusqu'à maintenant nous a permis la maîtrise de la méthode du point de vue numérique et programmation en mettant en évidence les phénomènes d'instationnarité de l'écoulement au voisinage des profils.

L'application de la méthode en utilisant un cylindre tournant au bord d'attaque donne du point de vue des coefficients de pression des résultats intéressants (dépression au niveau du bord d'attaque, ainsi qu'une continuité de l'écoulement), mais du point de vue de la portance elle nous a donné des résultats sensiblement acceptables.

Enfin, il serait souhaitable, afin de rendre la méthode plus accessible, d'étudier la visualisation de l'écoulement.

Annexes

influence d'un segment porteur sur lui même

l'influence d'un segment porteur d'un tourbillon (ou d'un vortex) sur lui même ne peut évidemment pas être définie par l'expression analytique de la vitesse induite, car les intégrales n'ont pas de sens si le point z se trouve sur le segment porteur de tourbillon. La vitesse induite en un point de contrôle situé sur un segment porteur, peut se calculer par le théorème des résidus :

En effet la vitesse induite en un point z_c par un segment porteur d'un tourbillon d'intensité Γ , a pour expression (voir chapitre 1) :

$$C = \frac{i\Gamma}{2\pi} \int_{(c)z_c - z} \frac{dz}{z_c - z}$$

posons :

$$I = \int_{(c)z_c - z} \frac{dz}{z_c - z}$$

Cette intégrale peut être calculée par le théorème des résidus et on a :

$$I = -i\pi$$

L'expression (I) devient dans ce cas :

$$C = \frac{\Gamma}{2}$$

Coefficient de portance

Considérons un profil C (fig. 1. a), faisons un bilan des forces qui s'exercent sur un élément abcd de largeur dx.

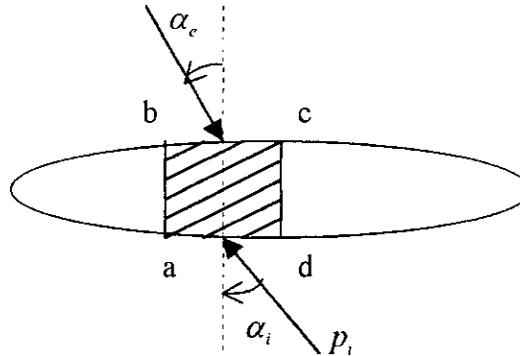


Fig.1.a

$$ds_e = bc$$

$$ds_i = ad$$

Par projection suivant la verticale :

$$dR = p_e ds_e \cos \alpha_e - p_i ds_i \cos \alpha_i$$

$$dR = (p_e - p_i) dx$$

$$\text{or } p_e - p_i = \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 (Cp_e - Cp_i)$$

$$\Rightarrow R = -\frac{1}{2} \rho u_\infty^2 \int_0^1 (Cp_i - Cp_e) dx$$

Avec Cp_e et Cp_i respectivement les coefficients de pression de la surface supérieure (extrados) et de la surface inférieure (intrados).

On définit alors le coefficient de portance C_L par :

$$C_L = \frac{1}{l} \int_0^1 (Cp_i - Cp_e) dx$$

Champ des pressions instationnaires

La loi fondamentale de la dynamique peut se résumer dans l'équation vectorielle suivante :

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overline{\text{grad}(C^2)} + \overline{\text{rot} \bar{C} \wedge \bar{C}} \right) = -\overline{\text{grad} p} + \rho \cdot \bar{F} + \nu \cdot \Delta \bar{C} + (\nu + \eta) \cdot \overline{\text{grad}(\text{div} \bar{C})} \quad (\text{I})$$

où \bar{C} : est la vitesse absolue de la particule fluide.

\bar{F} : le champ des forces extérieures .

p, ρ, ν, η : sont respectivement la pression, la masse volumique, la viscosité dynamique et le deuxième coefficient de viscosité.

Le vecteur $\Delta \bar{C}$ ayant pour expression :

$$\Delta \bar{C} = \overline{\text{grad}(\text{div} \bar{C})} - \overline{\text{rot}(\text{rot} \bar{C})} \quad (\text{II})$$

les hypothèses de fluide parfait et incompressible se traduisent par les deux relations :

$$\nu = 0 \quad \text{et} \quad \text{div} \bar{C} = 0$$

et conduisant à l'équation de helmoltz :

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \overline{\text{rot} \bar{C} \wedge \bar{C}} = -\overline{\text{grad} \left(H + \frac{p}{\rho} + \frac{C^2}{2} \right)} \quad (\text{III})$$

où :

H : est le potentiel dont dérivent les forces extérieures \bar{F}

Dans le cas qui nous intéresse l'écoulement est irrotationnel soit :

$$\overline{\text{rot} \bar{C}} = \bar{0} \quad \text{donc} \quad \bar{C} = \overline{\text{grad} \phi}$$

nous obtenons alors l'équation de Bernoulli :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{C^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{cte}(t) \quad (\text{IV})$$

l'application de la formule (IV) en un point fixe du repère absolu est simple, mais s'avère délicate pour un point entraîné dans le repère relatif ; nous allons donc la transformer pour en faciliter l'utilisation dans les axes mobiles :

si (F) est le repère fixe et (M) le repère relatif on a la relation :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_F = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_M - \overline{U} \cdot \overline{\text{grad} \phi} \quad (\text{V})$$

comme de plus on peut écrire :

$$C^2 = W^2 - U^2 + 2U \cdot \overline{\text{grad} \phi} \quad (\text{VI})$$

on obtient l'expression recherchée :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_M + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} + H = \text{cte}(t) \quad (\text{VII})$$

Bibliographie

- [1]- Etienne GUYON et Jean-Pierre HULIN et Luc PETIT, 1994 - hydrodynamique physique. Edition CNRS, paris.
- [2]- WALTER H.GRAF et M. S. ALTINAKAR, 1991 –hydrodynamique. EYROLLES, paris.
- [3]- ARMANDO LENCASTRE, 1995- hydraulique Générale – EYROLLES, paris.
- [4]- E. A BRUN, A. MARTINOT-LAGARDE, J. MATHIEU, 1968- Mécanique des fluides, tome2, Dunod.
- [5]- E. A BRUN, A. MARTINOT-LAGARDE, J. MATHIEU, 1970- Mécanique des fluides, tome3, (exemples de phénomènes instationnaires, couche limite et écoulements visqueux), Dunod.
- [6]- FRANK M. WHITE – Fluid mechanics, 1994. Third edition, Wiley, New York .
- [7]- BRUCE R. MUNSON, DONALD F. YOUNG, THEODORE H. OKIISHI,1994- Fundamentals of fluid Mechanics. Second edition, Wiley, New York.
- [8]- J. PERRIER- Mécanique des fluides appliquées, 1978. Dunod.
- [9]- R. RABIA et N. NOUIOUA, 1993 - Etude comparative de la méthode des singularités distribuées appliquée aux écoulements autour d'obstacles. PFE, ENP, Alger.
- [10]- A. LAARAOUI et L. MANSOUR OUAHCHIA, 1997 - Application de la méthode des singularités pour les écoulements en turbomachines. PFE, ENP, Alger.
- [11]- RENE BIDARD, JACQUES BONNIN, 1979- Energétique et turbomachines, Editions EYROLLES, paris.
- [12]- BENTERKIA YOUNES, 1998- Etude et dimensionnement d'un étage de turbomachine par la méthode des singularités. PFE, ENP, Alger.
- [13]- A. CHABBI, N. DEROUICHE, 1995- Etude comparative de chargement par la méthode des singularités sur des obstacles portants. PFE, ENP, Alger.
- [14]- A. GOURDIN, M. BOUMAH RAT, 1991- Méthodes numériques appliquées. O.P.U, Alger.
- [15]- V.J. Modi and F. Mokhtarian and T. Yokomiso, january 1990. Effect of moving surfaces on the airfoil boundary-layer control. Journal of Aircraft, Vol. 27, NO.1, pp. 42-50.