

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

9/93

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT GENIE ELECTRIQUE
OPTION/: AUTOMATIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

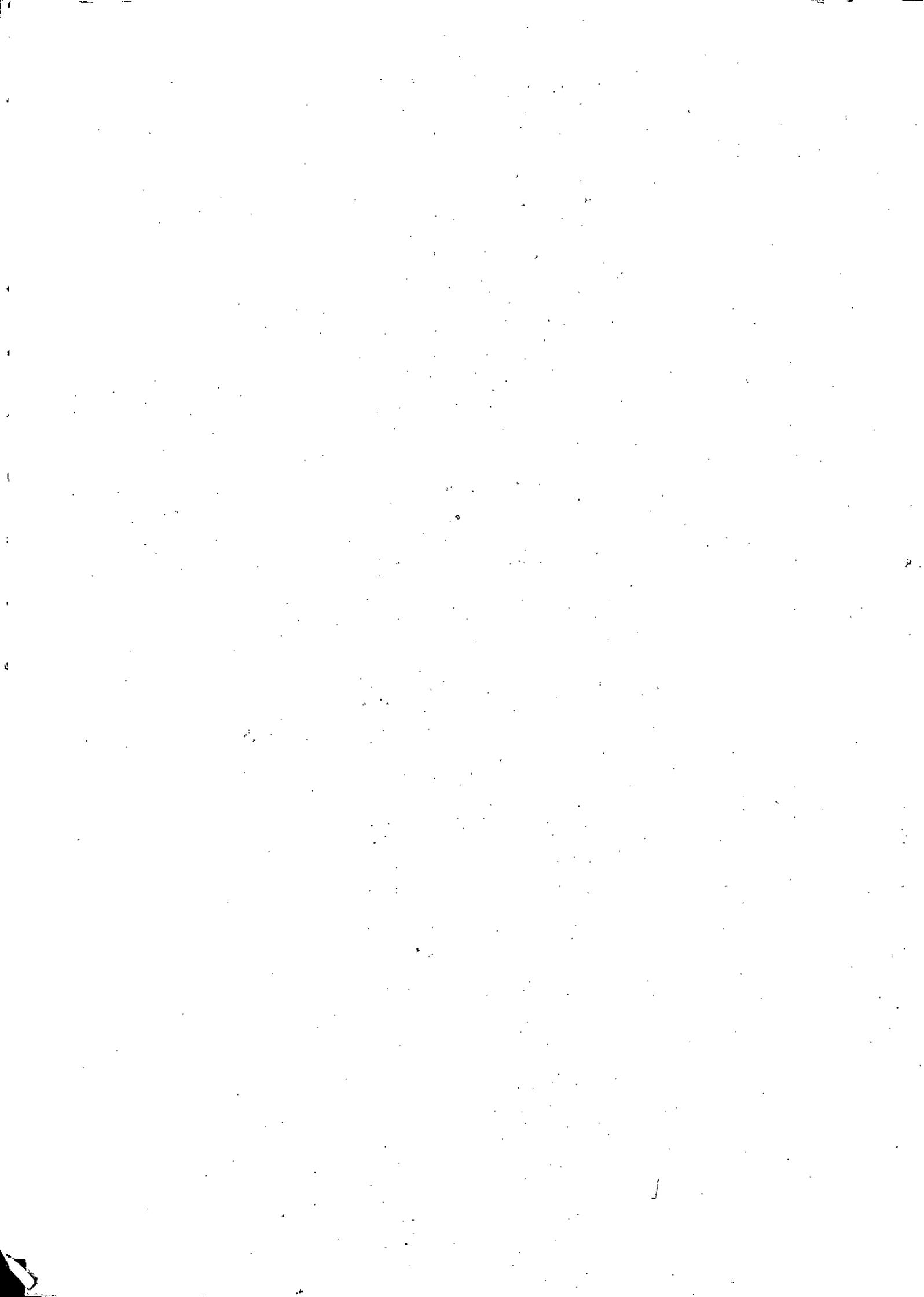
COMMANDE ADAPTATIVE PAR
MODELE DE REFERENCE
APPLICATION: SYSTEMES SISO
MIMO: BRAS DE ROBOTS

Proposé par : M.C. SOUAMI

Etudié par : E. CHERIFI

Dirigé par M.C. SOUAMI

PROMOTION *Juillet 93*



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT GENIE ELECTRIQUE
OPTION/ : AUTOMATIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

COMMANDE ADAPTATIVE PAR
MODELE DE REFERENCE
APPLICATION: SYSTEMES SISO
MIMO: BRAS DE ROBOTS

Proposé par : M.C.SOUAMI

Etudié par : E.CHERIFI

Dirigé par M.C.SOUAMI

PROMOTION *Juillet 93*

DEDICACE

==*==*==*

Je dédie ce travail à :

- *- Mamaya
- *- Mon Père
- *- Ma Mère
- *- Mes soeurs
- *- Mes frères
- *- A tous mes amis.

TABLE DES MATIERES

- *- Dédicace
- *- Remerciment
- *- Résumé

* CHAPITRE I:

I. INTRODUCTION A LA COMMANDE ADAPTATIVE PAR MODELE DE REFERENCE:

1- Introduction	1
2- Pourquoi utiliser la commande adaptative	1
3- Commande adaptative des systèmes	3
4- Définition	4
5- Commande adaptative par modèle de référence	4
6- Conclusion	11
Références	12

* CHAPITRE II:

II. Le problème du design de la commande adaptative par modèle de référence.

1- Introduction	13
2- Description mathématique de la commande adaptative par modèle de référence.	13
3- Hypothèses du design du M.R.A.C.	18
4- Représentation équivalente du M.R.A.C. comme un système non linéaire et variable dans le temps.	19
5- Conclusion	23
Références	24

*** CHAPITRE III:**

III. Méthodes de base pour la résolution du problème de la commande adaptative par modèle de référence.

1- Introduction	25
2- M. T. T Rule	25
3- Synthèse de systèmes de commande adaptative basés sur la stabilité au sens de Lyapounov.	27
4- Synthèse de système de commande adaptative basés sur les concepts de positivité et d'hyperstabilité	32
5- Conclusion	41
Références	43

*** CHAPITRE IV:**

IV. Commande adaptative par poursuite d'un modèle:

1- Introduction	44
2- Commande linéaire par poursuite d'un modèle	44
3- Commande adaptative par poursuite d'un modèle décrit par les équations d'états.	48
4- Conclusion.	53
Référence	55

*** CHAPITRE V:**

V. Application aux systèmes monovariabiles:

1- Introduction	56
2- Commande d'un système du premier ordre	56
3- Commande en position d'un moteur à courant continu	57
4- Application numérique	59
5- Commande en vitesse d'un moteur à courant continu	61
6- Conclusion	66

*** CHAPITRE VI:**

VI. COMMANDE ADAPTATIVE DES ROBOTS MANIPULATEURS:

1- Introduction	84
2- Commande adaptative du Robot classe 4	84
3- Modèle mathématique du Robot classe 4	87
4- Application numérique	87
5- Commande adaptative avec poursuite du modèle	89
6- Commande adaptative du robot classe 1	89
7- Modèle mathématique	97
8- Application numérique	98
9- Commande par poursuite parfaite du modèle	104
10-Conclusion	105
Références	106
VII. CONCLUSION GENERALE	106

CHAPITRE I: INTRODUCTION A LA COMMANDE ADAPTATIVE PAR MODELE DE REFERENCE

1.1 INTRODUCTION:

la commande adaptative occupe un domaine très important de la commande moderne qui traite les systèmes en présence d'imprévisions, de perturbations et des variations de l'environnement.

Le développement de la micro-électronique et la facilité d'implémentation des contrôleurs adaptatifs ont conduit à une variété d'applications industrielles qui auparavant étaient très difficilement réalisables.

Ces dernières années la commande adaptative a fait l'objet d'un intérêt particulier, diverses techniques ont été ainsi mises au point permettant la commande avec succès de systèmes extrêmement complexes, en présence des variations des paramètres et de ses entrées.

1.2 POURQUOI UTILISER LA COMMANDE ADAPTATIVE ?

Dans ses premiers pas, la théorie de commande a été développée à travers les équations différentielles linéaires invariables dans le temps dans un environnement déterministe. Une seconde étape fût franchie par l'introduction de la commande optimale représentée sous forme d'état pour des systèmes même variable dans le temps.

Pour introduire brièvement, la notion de commande optimale, notons que si la fonction transfert à commander est décrite par l'équation d'état suivante :

$$\dot{\underline{X}} = \underline{AX} + \underline{BU}$$

il est possible sous certaines conditions de trouver la commande optimale U qui minimise l'index de performance suivant:

$$J = \int_0^t (\underline{X}^T \underline{Q} \underline{X} + \underline{U}^T \underline{R} \underline{U}) dt$$

où Q et R sont des matrices définies positives qui nous spécifient les performances désirées, x le vecteur d'état et u la commande.

Cette formulation conduit aux constatations suivantes :

- Les paramètres variables des matrices A et B sont rarement mesurables directement.
- Les paramètres du système ne sont pas toujours connus.
- Dans la plus part des situations pratiques des variations larges et imprévisibles des paramètres du système surviennent.
- La construction de la commande optimale nécessite l'accès à toutes les variables d'états du système, ce qui est généralement pas le cas dans plusieurs problèmes.

Ces cas peuvent être illustrés par les exemples réels suivants:

COMMANDE D'AVION:

La dynamique d'un avion dépend de son altitude, de sa vitesse, de sa configuration, le coefficient de variation de certains paramètres varie entre 10 et 50%.

COMMANDE D'UN MISSILE:

Dans un missile la masse et le centre de gravité varient avec la combustion du carburant.

MOTEUR:

La dynamique d'un moteur change avec le changement du moment d'inertie et avec la charge [1].

COMMANDE DES PROCESSUS CHIMIQUES:

La fonction de transfert des processus chimiques change de paramètres avec le changement de la température ambiante [2].

Donc sous toutes ces contraintes, la commande optimale reste incapable de pallier aux difficultés rencontrées en pratique.

Pour se faire on doit établir une commande qui s'adapte à toutes ces contraintes afin de maintenir les performances désirées du système, d'où l'introduction de cette nouvelle théorie qu'est:

LA COMMANDE ADAPTATIVE

1-3 COMMANDE ADAPTATIVE DES SYSTEMES:

La commande adaptative [3] a été introduite afin de pallier à la dégradation des performances dynamiques des systèmes de commandes quand les variations de l'environnement surviennent. Elle a pour but essentiel d'éliminer l'effet des perturbations de la structure interne des systèmes et cela soit:

- 1) par l'établissement d'une commande insensible aux variations des paramètres ou,
- 2) par la mesure en temps réel (et sans retard) des paramètres du système et ainsi modifier les paramètres de la loi de commande u .

La première approche est seulement utilisée quand de petites variations du système apparaissent. Le retard dû à l'estimation des paramètres rend la deuxième approche limitée puisque la loi de commande devient lente.

La dernière approche où l'index de performance est spécifié par un modèle de référence [4], permet d'élucider le sens de la commande adaptative, en fait c'est un système bouclé (fig1-1) avec une boucle qui agit sur les états et une deuxième boucle qui agit sur les paramètres du système réel afin qu'il réponde de la même manière que le modèle de référence.

Ce système régule non seulement l'erreur $e = X_m - X$ entre les variables d'états du système et du modèle, mais modifie aussi les paramètres de la loi de commande en générant un signal de commande auxiliaire quand les paramètres du système subissent des variations.

1.4 Définition

Un système de commande adaptative, mesure un index de performance défini par les entrées, les états et les sorties du système ajustable. La comparaison avec l'index de performance désiré donné par le modèle à suivre, permet au mécanisme d'adaptation de modifier les paramètres du système ajustable ou de générer une entrée auxiliaire dans le but de maintenir l'index de performance du système égale à celui désiré.

Cette définition est illustrée par la fig 1-2.

1.5 COMMANDE ADAPTATIVE PAR MODELE DE REFERENCE :

La commande adaptative par modèle de référence a été développée par WHITAKER et ses collègues à M.I.T en 1958 [6]. Ces dernières années elle est devenue un moyen très efficace pour la commande des systèmes à paramètres inconnus ou partiellement connus. Le principe de tels systèmes est de décrire par un modèle de référence les performances désirées et de les comparer à chaque instant avec ceux du système ajustable. L'erreur ainsi déterminée permet au mécanisme d'adaptation de réajuster les paramètres ajustables, de telle manière que l'erreur entre le modèle de référence et le système ajustable tende asymptotiquement vers zéro.

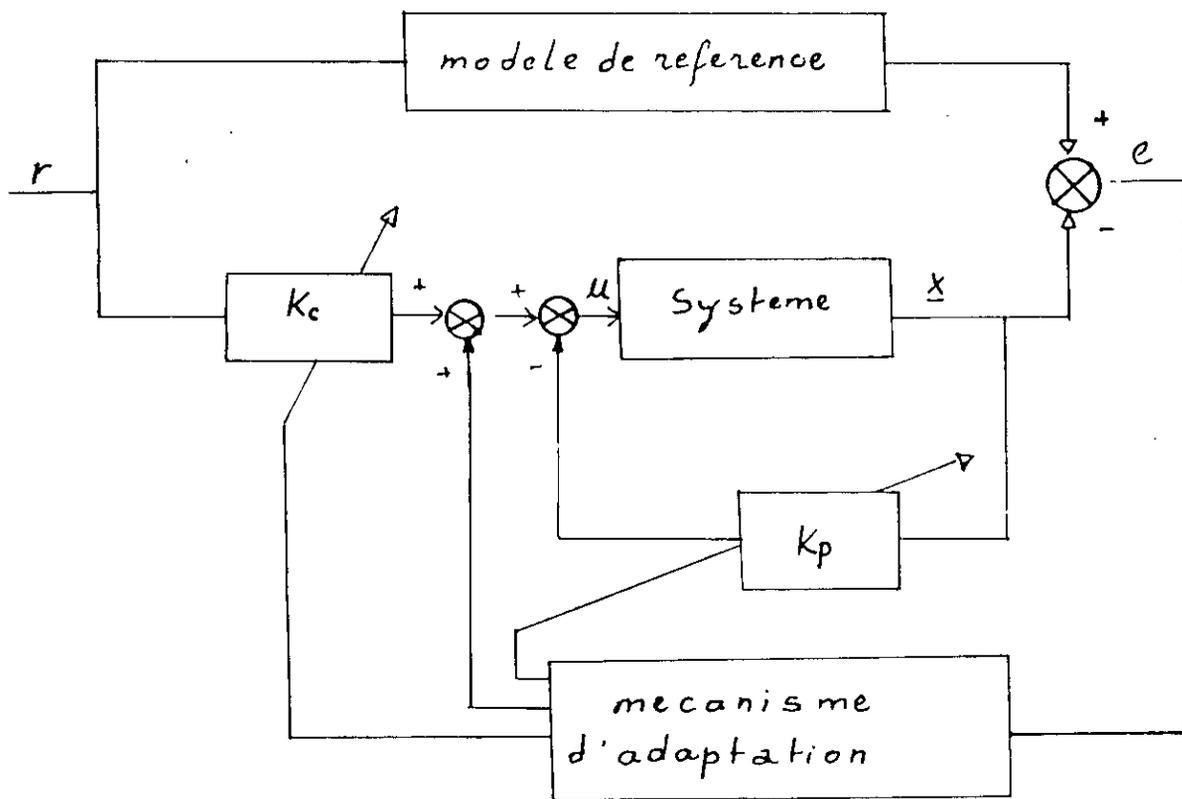


fig 1-1 Commande adaptative des systèmes par modèle de référence

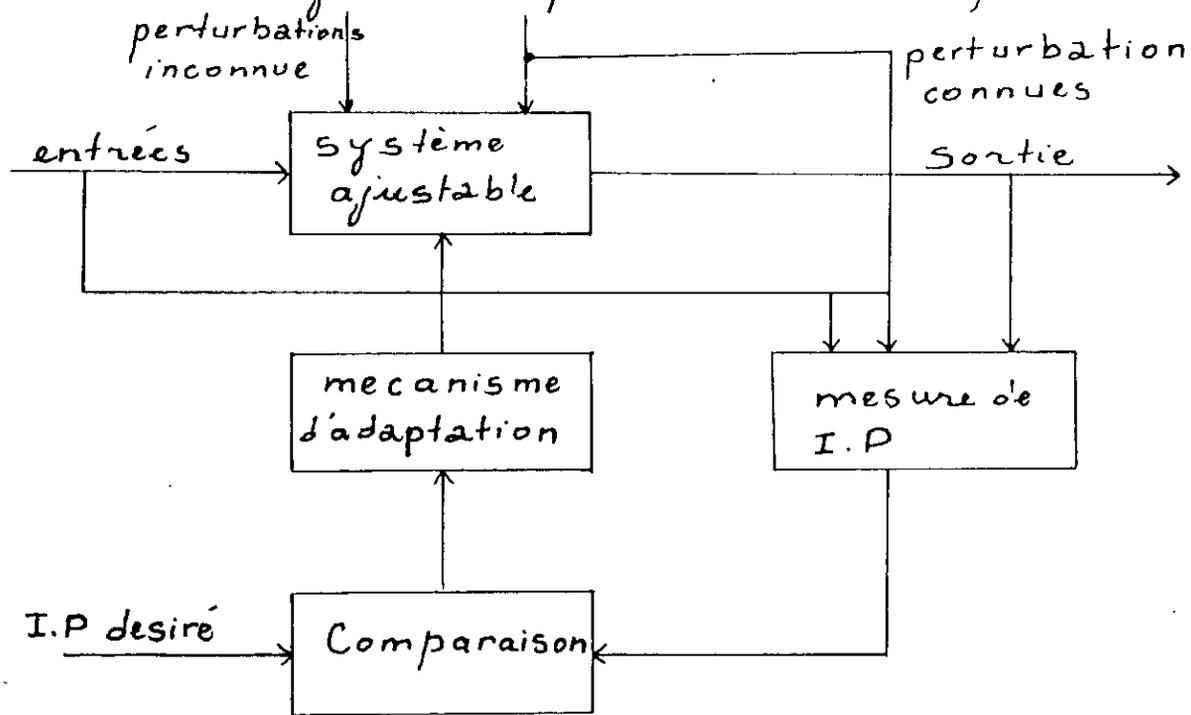


fig 1.2 Configuration de base des systèmes adaptatifs

Le mécanisme d'adaptation est utilisé soit:

- pour modifier les paramètres du système ajustable appelé adaptation des paramètres [7] , soit :
- par la génération d'un signal auxiliaire à l'entrée appelé adaptation par signal de synthèse [7,8], (signal synthésis adaptation).

Le schéma de base de la commande adaptative par modèle de référence est illustré par la figure 1-3.

1.5.1.DIFFERENTES CONFIGURATIONS DE LA COMMANDE ADAPTATIVE PAR MODELE DE REFERENCE:

Les configurations de base de la commande adaptative par modèle de référence [5,7] sont:

a) Commande par poursuite linéaire d'un modèle (LINEAR MODEL FOLLOWING CONTROL):

Elle est très utile quand les paramètres du système sont connus fig (1-4). Une simple identification avec le modèle de référence permet de déterminer le régulateur.

b) Commande adaptative par poursuite d'un modèle (ADAPTATIVE MODEL FOLLOWING CONTROL):

La commande adaptative par poursuite d'un modèle est utilisée quand les paramètres du système sont inconnus ou de très grandes variations apparaissent (fig1-5). Le mécanisme d'adaptation modifie les paramètres K_p et K_c pour assurer une bonne poursuite du modèle.

c) Commande adaptative par modèle de référence avec synthèse d'un signal.

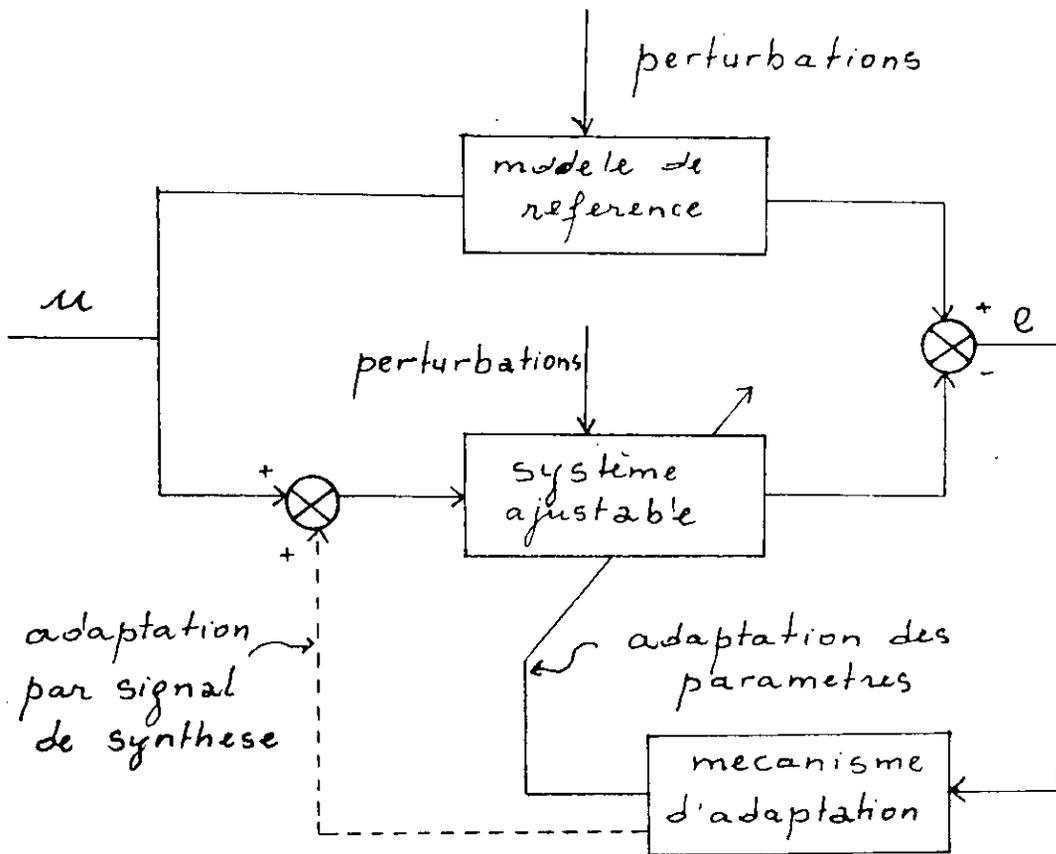


fig 1.3 Configuration de base de l'M.R.A.C

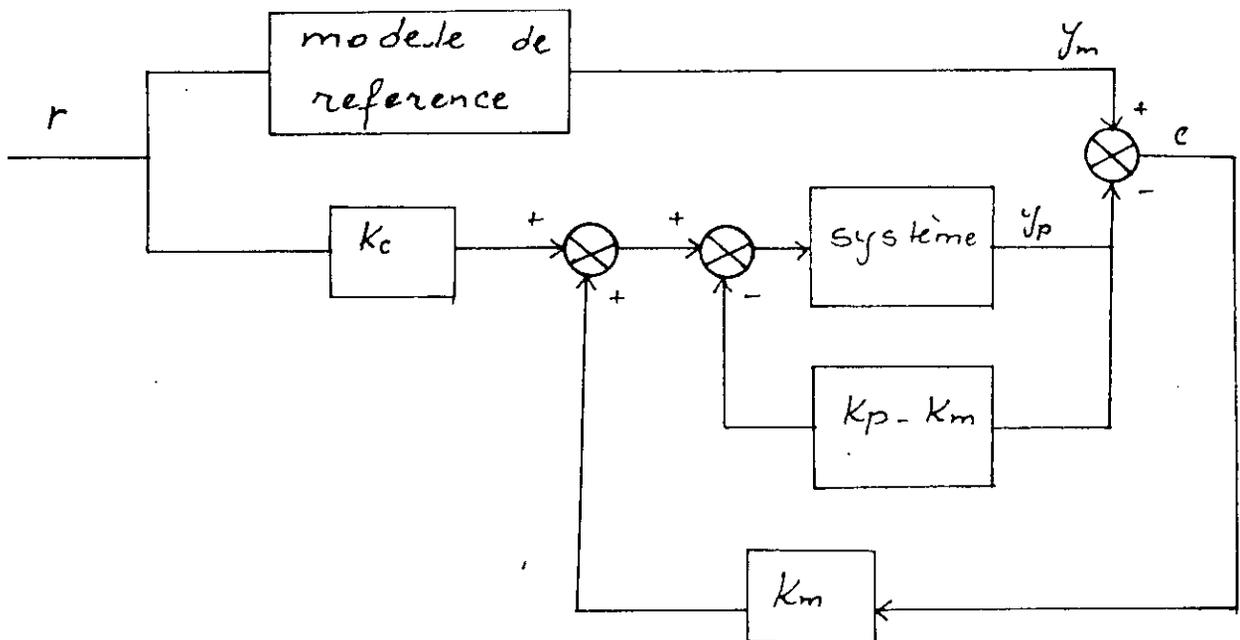


fig 1-4

Dans ce type de configuration (fig 1-6), les paramètres k_c et K_p sont déterminés de tel sorte que le système suit le modèle de référence, ou retombe sur le cas étudié en a).

Quand les paramètres du système varient, le mécanisme d'adaptation synthétise un signal auxiliaire à l'entrée pour que le système réponde exactement comme le modèle de référence. Ce type de configuration est utilisé seulement quand une partie des paramètres du système fait l'objet de variations.

1.5.2 DIFFERENTES STRUCTURES DE LA COMMANDE ADAPTATIVE PAR MODELE DE REFERENCE (M.R.A.C.).

Les principales structures du M.R.A.C [7] sont:

- structure parallèle.
- structure série-parallèle.
- structure série.

a) Structure Parallèle:

C'est la structure la plus utilisée (fig 1.7) en identification, elle est plus connue sous le nom de l'erreur de sortie.

b) Structure série parallèle:

Dans cette structure on considère deux cas:

- Le modèle de référence est placé d'une part en série avec le système ajustables d'autre part en parallèle avec celui-ci (fig 1-8).
- Le système ajustable est placé d'une part en série avec le modèle de référence d'autre part, en parallèle avec celui-ci (fig 1-9).

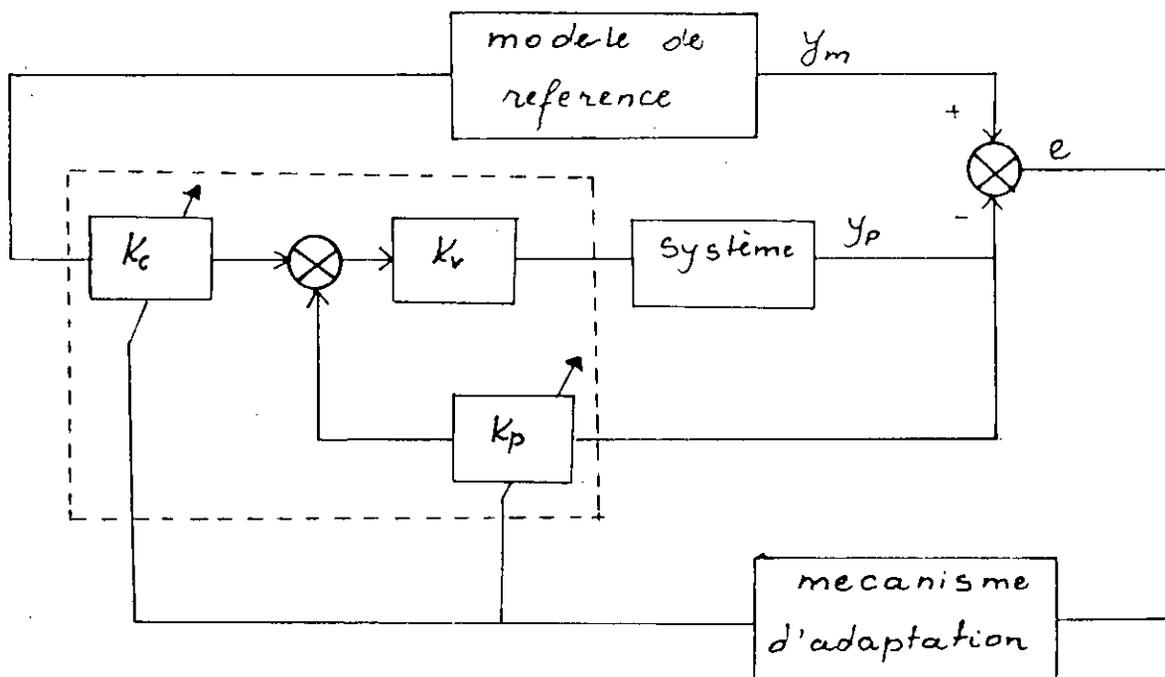


fig 1-5

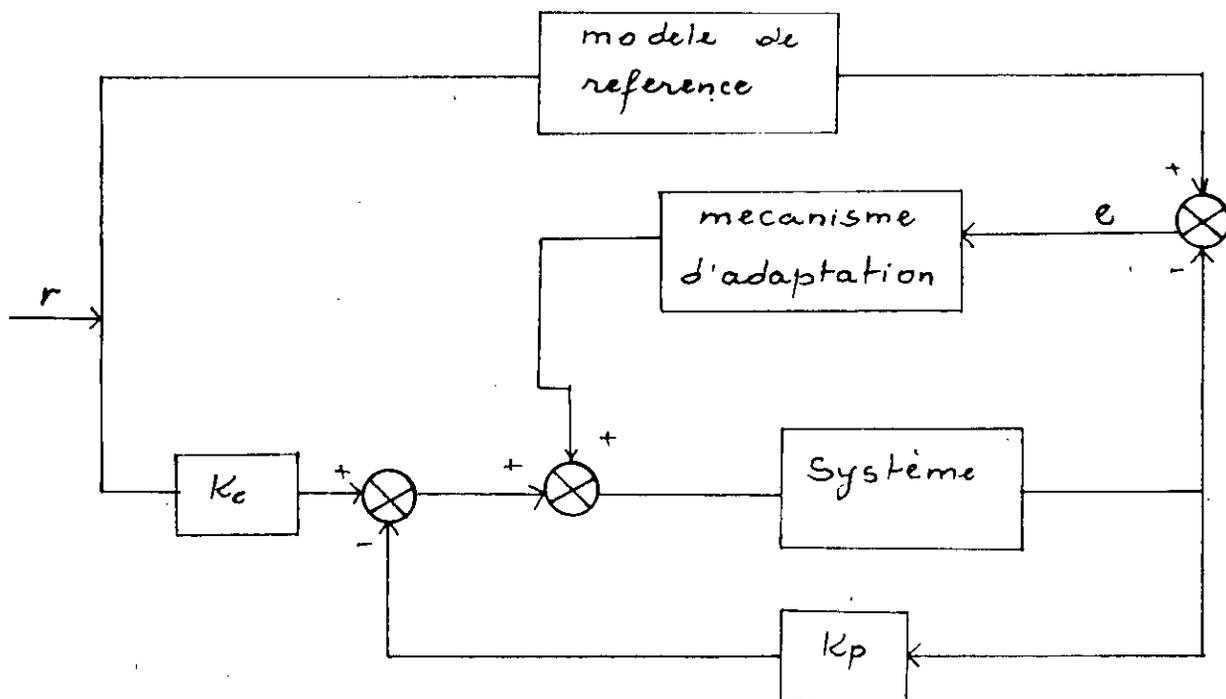


fig 1-6

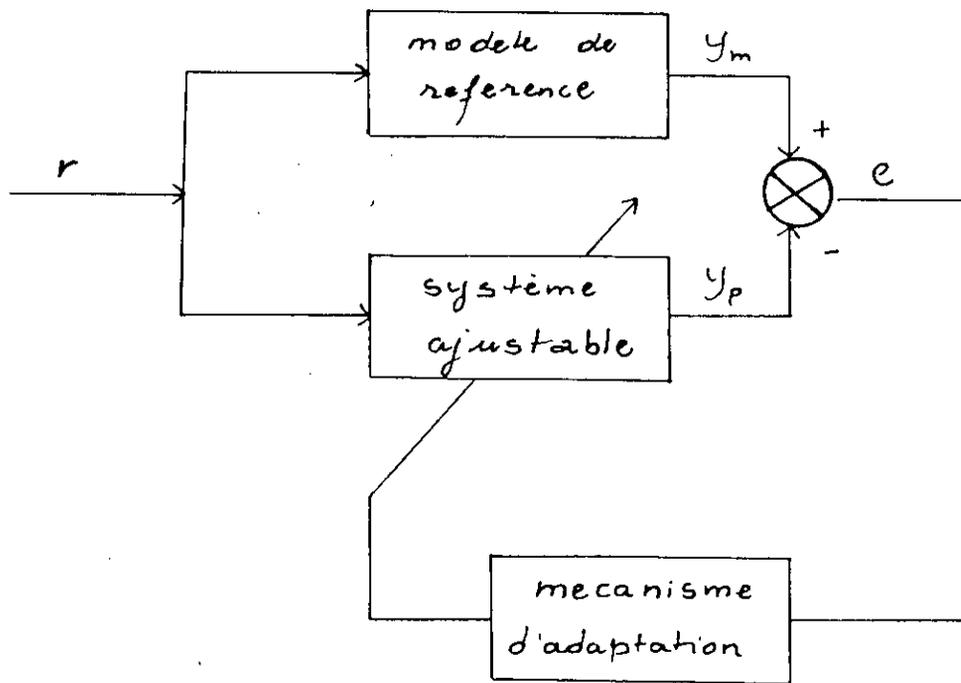


fig 1-7 structure parallele

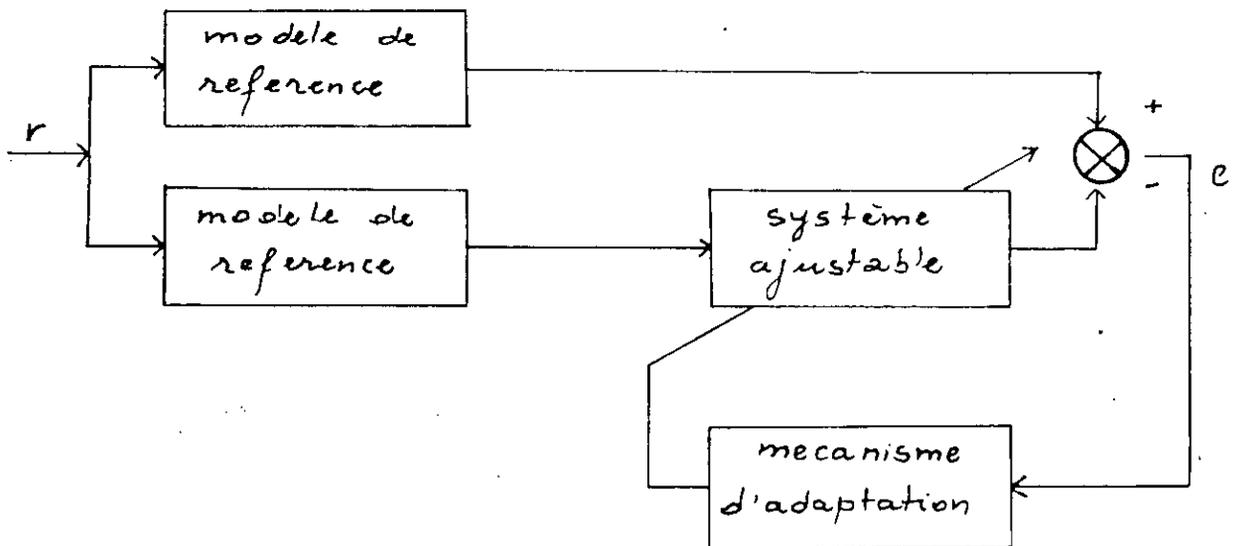


fig 1-8 Structure Serie - parallele

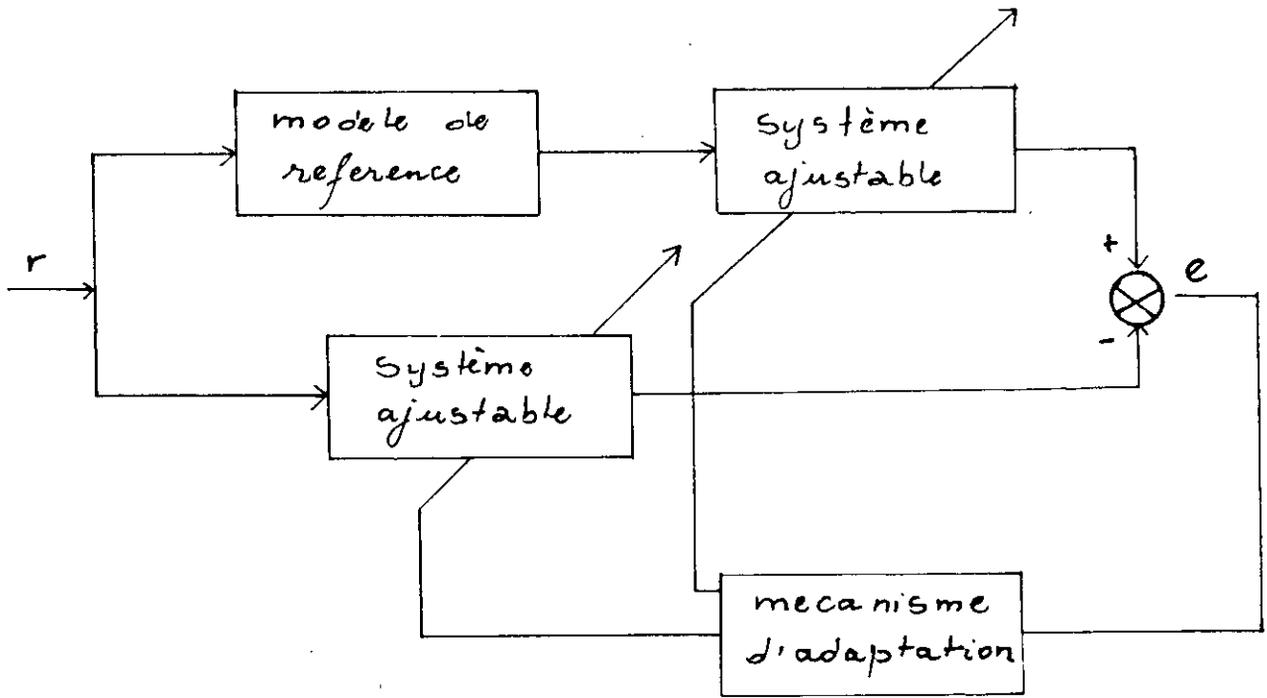


fig 1-9 structure Serie - parallele

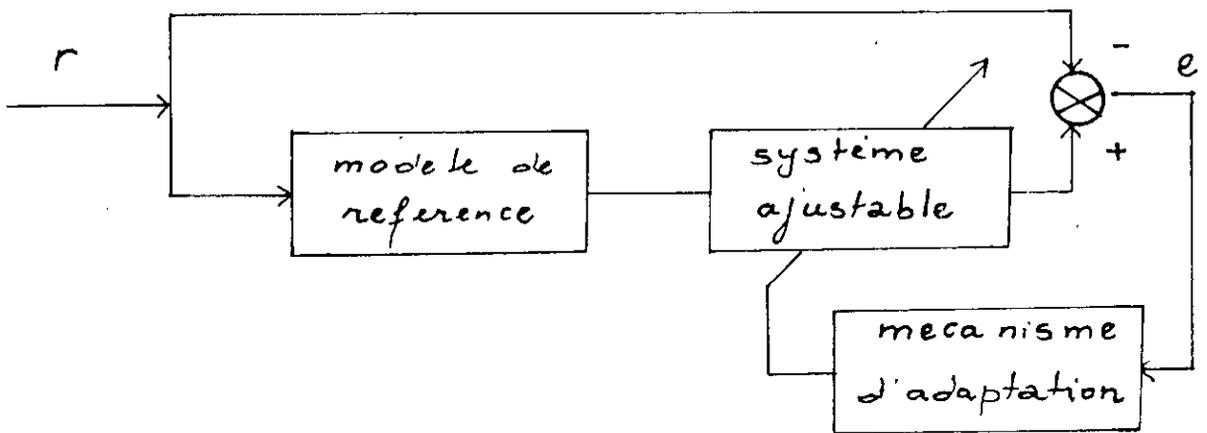


fig 1-10 structure serie

C) Structure série:

Dans ce cas le modèle de référence et le système ajustable sont en série (fig 1-10), cette structure est souvent connue par la méthode de l'erreur d'entrée [9].

Pour ces trois structures, une approche générale pour l'analyse et la synthèse peut être déterminée [10], de plus le M.R.A.C peut être classé selon le type de la réalisation, en continu, en discret ou en hybride.

1.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre un aspect générale de la commande adaptative notamment la commande adaptative par modèle de référence à été présenté ainsi que quelques motivations, définitions, classifications, et configurations de base de ces systèmes. Dans le chapitre suivant le problème de la commande adaptative par modèle de référence sera étudié avec plus de détails.

REFERENCES:

1. S. Negoesco, B. Covrsioul et C.Francon, application de la commande adaptative à la fabrication des guides d'ondes hélicoidaux, *Automatisme* 23,7,14 (Janvier 1978).
2. Kidd, P.T, comments ou "self tuning and stable adaptive control of a batch polymerisation reactor" *Automatica*, 20: 481-482 (1984).
3. IDLANDAU, commande adaptative, aspects pratiques et théoriques.
4. I.D LANDAU, analyse et synthèse des commandes adaptative à l'aide d'un modèle par des méthodes d'hyperstabilite, *Automatisme*, 14,301-309 (1969).
5. I.D.LANDAU, a survey of model référence adaptive techniques. Theory and applications, *Automatica*, 10, no 3,353-379 (July 1974).
6. WHITAKER, H.P, YAMRON, J., and KEZER,A., Design of model reference adaptative control systems for aircraft, report no. R 164, Instrumentation lab., M.I.T. (1958).
7. I.D.LANDAU Adaptive control, the model reference approach, MARCEL DEKKER, New York, 1979.
8. Raju, G.V.S, and RIAD, K.A., signal synthesis M.R.A.C systems, proceedings IEEE.INT. conf ou systems, MAN and cybernetics, New Delhi, India, PP.934-939 (1983).
9. k.j. Astrom and P. Eykoff, system identification. A survey *Automatica*, 7, 123-162 (1971).
10. I.D.LANDAU, Design of discrete model reference adaptive systems using the positivity concept, in proceedings of the third IFAC symposium on sensitivity, adaptivity and optimality, ISCHIA, 1973, PP.307-314.

CHAPITRE II: LE PROBLEME DU DESIGN DE LA COMMANDE ADAPTATIVE PAR MODELE DE REFERENCE.

2.1 Introduction:

Dans ce chapitre nous allons présenter une description mathématique du M.R.A.C, la structure utilisée est la plus fréquente celle du parallèle-parallèle M.R.A.C, mais les résultats présentés peuvent être facilement étendus aux structures série et série-parallèle [1].

Nous allons procéder à l'examen du problème du design et montrer que cette procédure est directement liée à un problème de stabilité. Nous allons montrer que le M.R.A.C. peut être mis sous une représentation équivalente à un système non linéaire et variable dans le temps et ainsi on pourrait appliquer les résultats de la stabilité pour ce type de système et donc déterminer le mécanisme d'adaptation.

2.2 Description mathématique de la commande adaptative par modèle de référence:

Deux descriptions du modèle de référence fig 1.1 (chapitre 1) existe:

Les équations à variables d'états, l'équation liant l'entrée à la sortie.

2.2.1 Description par les variables d'états:

Le modèle de référence est choisi linéaire et invariable dans le temps de la forme:

$$\dot{X} = A_m X + B_m U \quad X(0) = x_0 \quad (2-1)$$

où:

X: Vecteur d'état du modèle de dimension $n \times 1$

U: Vecteur d'entrée de dimension $m \times 1$

A_m et B_m : sont des matrices constantes de dimension respective $n \times n$ et $n \times m$.

Le modèle de référence est choisi stable et entièrement commandable.

Le système ajustable peut être à paramètres ajustables ou à une entrée auxiliaire.

Dans le cas où le système est à paramètres ajustables la représentation suivante est utilisée : [1]

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_s(e, t) + B_s(e, t) U \\ y(0) &= y_0, A_s(0) = A_{s0}, B_s(0) = B_{s0} \end{aligned} \quad (2-2)$$

où:

y: vecteur d'état de dimension $n \times 1$

A_s et B_s : matrices variables dans le temps de dimension $n \times n$ et $n \times m$ respectivement.

Ces matrices dépendent au moins du vecteur erreur d'état e à travers la loi d'adaptation (car elles peuvent dépendre aussi d'autres variables comme décrit dans la section suivante):

Dans le cas où l'adaptation se fait par une entrée auxiliaire (signal synthesis adaptation) [1], la représentation suivante est utilisée [2].

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= A_s Y + B_s U + U_a(e, t) \\ \dot{Y}(0) &= \underline{Y}_0, U_a(0) = \underline{U}_0 \end{aligned} \quad (2-3)$$

où:

A_s et B_s sont des matrices constantes et peuvent être inconnues.

U_a : signal d'adaptation qui dépend au moins de l'erreur e à travers la loi d'adaptation.

Le vecteur e est défini par:

$$e = X - Y \quad (2-4)$$

Dans le cas de la représentation paramétrique, l'objectif est de trouver une loi d'adaptation qui modifie les paramètres des matrices $A_s(e, t)$ et $B_s(e, t)$ de sorte que l'erreur tende vers zéro quelque soit l'entrée appliquée.

De plus on veut que le mécanisme d'adaptation ait de la mémoire (c.a.d qu'il mémorise les bonnes valeurs des paramètres dernièrement trouvés), ce qui conduit à l'introduction dans le mécanisme d'adaptation d'un intégrateur qui aura pour effet de rendre les paramètres du système ajustable à l'instant t dépendant non seulement de $e(t)$ mais aussi de $e(\tau)$ avec $\tau < t$ la loi adaptation sera défini par [1].

$$A_s(e, t) = F(e, \tau, t) + A_s(0) \quad 0 < \tau < t \quad (2-6)$$

$$B_s(e, t) = G(e, \tau, t) + B_s(0) \quad 0 < \tau < t \quad (2-5)$$

ou F et G déterminent la relation entre A_s et B_s et le vecteur e dans l'intervalle $0 < \tau < t$.

Dans le cas de l'adaptation par un signal auxiliaire, la loi d'adaptation est définie par [1].

$$\underline{U}_a(e, t) = \underline{U}(e, \tau, t) + \underline{U}_a(0) \quad 0 < \tau < t \quad (2-7)$$

où \underline{U} est une fonction qui lie $\underline{U}_a(e, t)$ et les valeurs de e dans l'intervalle $0 < \tau < t$.

2.2.2: Description par l'entrée-sortie:

Le modèle de référence [2] est décrit par :

$$N(p) \theta_m = M(p) \rho \quad (2-8)$$

où p représente l'opérateur de Laplace

$$N(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^i \quad (2-9)$$

$$M(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^i \quad (2-10)$$

ρ : entrée scalaire

θ_m : Sortie scalaire du modèle

a_i, b_i : coefficients constants

Le système ajustable dans le cas d'une adaptation paramétrique est décrit par:

$$N(T, P) \theta_s = M(T, P) \rho \quad (2-11)$$

où

$$N(t, p) = \sum_{i=0}^n a_i(\epsilon, t) p^i \quad (2-12)$$

$$M(t, p) = \sum_{i=0}^m b_i(\epsilon, t) p^i \quad (2-13)$$

θ_s : sortie du système ajustable

a_i, b_i : Coefficients variables dans le temps

L'erreur de sortie est définie par:

$$\epsilon = \theta_m - \theta_s \quad (2-14)$$

Les coefficients $a_i(\epsilon, t)$ et $b_i(\epsilon, t)$ sont les paramètres ajustables du système qui dépendent de l'erreur ϵ à travers le mécanisme d'adaptation.

Comme dans le cas des variables d'états, on veut que notre mécanisme d'adaptation ait de la mémoire, donc la loi d'adaptation prend la forme suivante :

$$a_i(\epsilon, t) = f_i(\epsilon, \tau, t) + a_i(0) \quad , \tau \leq t \quad (2-15)$$

$$b_i(\epsilon, t) = g_i(\epsilon, \tau, t) + b_i(0) \quad , \tau \leq t \quad (2-16)$$

Dans le cas de l'adaptation par un signal auxiliaire, le système ajustable est décrit par:

$$N(p)\theta_s = M(p) [\rho + \mu(\epsilon, t)] \quad (2-17)$$

où

$$N(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^i \quad (2-18)$$

$$M(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^i \quad (2-19)$$

$$\mu(\epsilon, t) = \mu(\epsilon, \tau, t) + \mu(0) \quad \tau \leq t \quad (2-20)$$

ou μ représente la commande auxiliaire générée par le mécanisme d'adaptation.

2.3.Hypothèses du désign du M.R.A.C.

Pour faire le désign de la commande adaptative par modèle de référence, les conditions suivantes doivent être satisfaites:

- 1- Le modèle de référence doit être un système linéaire invariable dans le temps.
- 2- Le modèle et le système ajustable ont la même dimension .
- 3- Tous les paramètres du système ajustable sont accessibles pour l'adaptation (dans le cas de l'adaptation paramétrique).
- 4- Durant le processus d'adaptation, les paramètres du système ajustable dépendent seulement du mécanisme d'adaptation.
- 5- Excépté le vecteur d'entrée u , il n'ya pas d'autres signaux agissant sur le système.
- 6- La différence initiale entre les paramètres du modèle et ceux du système est inconnue.
- 7- Le vecteur erreur d'état et le vecteur erreur de sortie sont mesurables.

Cet ensemble d'hypothèse est appelé le cas idéal et permet un traitement analytique direct du M.R.A.C., néaumoins dans les situations réelles, certaines de ces conditions ne sont pas toujours satisfaites, ces situations peuvent se résumer comme suit:

- 1- Le modèle de référence est un système non linéaire variable dans le temps.
- 2- Le système ajustable contient des non linéarités.
- 3- Le modèle de référence et le système ajustable n'ont pas la même dimension.
- 4- Les paramètres du système ajustable ne sont pas tous accessible pour l'adaptation.
- 5- Durant le processus d'adaptations, les paramètres du système

ajustable ne dépendent pas seulement du mécanisme d'adaptation, ils sont aussi l'objet d'autres perturbations paramétriques.

6- Les perturbations sont appliquées à différentes parties du système .

7- La mesure du vecteur erreur est toujours affectée par un bruit.

Cet ensemble d'hypothèses est appelé le cas réel ou le cas général. Dans ce cas le problème du désign du M.R.A.C. est plus difficile et malgré certains résultats récents, cela reste toujours un domaine de recherche.

2.4 Représentation équivalente du M.R.A.C comme un système non linéaire et variable dans le temps.

Comme présenté précédemment, l'erreur $e = x - y$ est la principale source qui détermine l'algorithme d'adaptation, pour cela on est amené à établir une équation différentielle qui caractérise la dynamique de l'erreur e .

Prenons le cas du M.R.A.C. parallèle- parallèle décrit par les équations (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) et (2.6), en soustrayant l'équation (2.2) de (2.1) on obtient:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{y} = A_m x + [B_m - B_s(e, t)]u - A_s(e, t)y \quad (2-21)$$

ajoutant et soustrayant $A_m y$ à (2.2) et en utilisant les équations (2.4), (2.5) et (2.6) on obtient:

$$\dot{e} = A_m e + [A_m - A_s(0) - F(e, \tau, t)]y + [B_m - B_s(0) - G(e, \tau, t)]u \quad (2-22)$$

Cette équation décrit le système adaptatif par modèle de référence représenté par une représentation équivalente à la figure (2.1).

L'objectif de la commande adaptative par modèle de référence est que l'erreur e de l'équation (2-22) tende vers zéro quand t tend vers l'infini quelques soient les entrées et les conditions initiales.

Pour se faire des conditions qui déterminent l'algorithme d'adaptation doivent être établies [1] (pour plus de détails voir chapitre 3).

Le problème peut se formuler ainsi:

Déterminer $F(e, \tau, t)$, $G(e, \tau, t)$ de telle sorte que la représentation équivalente définie par (2-21) soit globalement asymptotiquement stable pour n'importe quelles valeurs $e(0)$,

$[A_m - A_r(0)]$ et $[B_m - B_r(0)]$.

Les résultats des systèmes non linéaires variables dans le temps qui peuvent être décomposés en une partie linéaire et invariable dans le temps et en une partie dans la chaîne de retour non linéaire et variable dans le temps, montre que la stabilité du système est déterminée seulement par les caractéristiques de la partie linéaire si la partie non linéaire et variable dans le temps satisfasse certaines conditions .

Puisque la matrice A_m est prédéterminée, pour vérifier les conditions que doit satisfaire la partie linéaire pour assurer la stabilité du système, on utilise pour l'adaptation non pas le vecteur e directement mais un autre vecteur v obtenu en multipliant e par une matrice D appelé matrice de compensation linéaire.

$$V = De \quad (2-23)$$

Ce compensateur D est choisi de tel sorte que la condition du bloc linéaire soit assurée.

avec cette nouvelle formulation les matrices ajustables $A_r(e, t)$

et $B_s(e, t)$ peuvent être réécrite comme suit:

$$A_s(e, t) = A_s(y, t) = \int_0^t \phi_1(y, t, \tau) d\tau + \phi_2(y, t) + A_s(0) \quad (2-24)$$

$$B_s(e, t) = B_s(y, t) = \int_0^t \psi_1(y, t, \tau) d\tau + \psi_2(y, t) + B_s(0) \quad (2-25)$$

les premiers termes des équations (2.24) et (2.25) assurent la mémorisation du mécanisme d'adaptation et le second terme qui est fonction seulement de l'erreur devient nul quand $v = 0$ donc $e = 0$ (ces des termes transitoires qui disparaissent à l'équilibre).

ϕ_1 et ϕ_2 sont des matrices de dimension $n \times n$.

ψ_1 et ψ_2 sont des matrices de dimension $m \times n$.

Les équations (2-23), (2-24) et (2-25) définissent le mécanisme d'adaptation.

En remplaçant A_s et B_s par leurs expressions données par (2-24) et (2-25) dans l'équation (2-22).

Les équations de base qui décrivent le M.R.A.C. sont obtenus:

$$\dot{e} = A_m e + I W_1 \quad (2-26)$$

$$y = D e \quad (2-27)$$

$$W = -W_1 = \left[\int_0^t \phi_1(y, t, \tau) d\tau + \phi_2(y, t) + A_s(0) - A_m \right] y + \left[\int_0^t \psi_1(y, t, \tau) d\tau + \psi_2(y, t) + B_s(0) - B_m \right] u \quad (2-28)$$

à partir de ces équations la représentation équivalente de la commande adaptative par modèle de référence parallèle-parallèle (fig 2-2) est déduite:

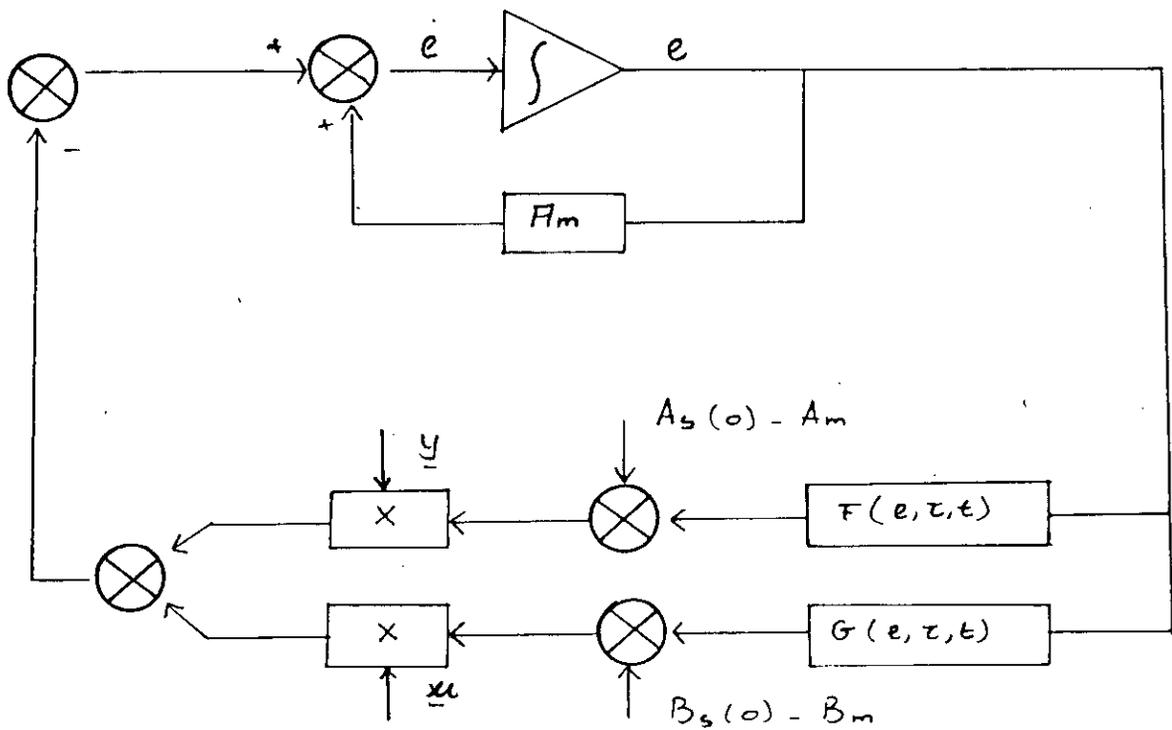


fig 2-1 representation equivalente de l'equation 2-22

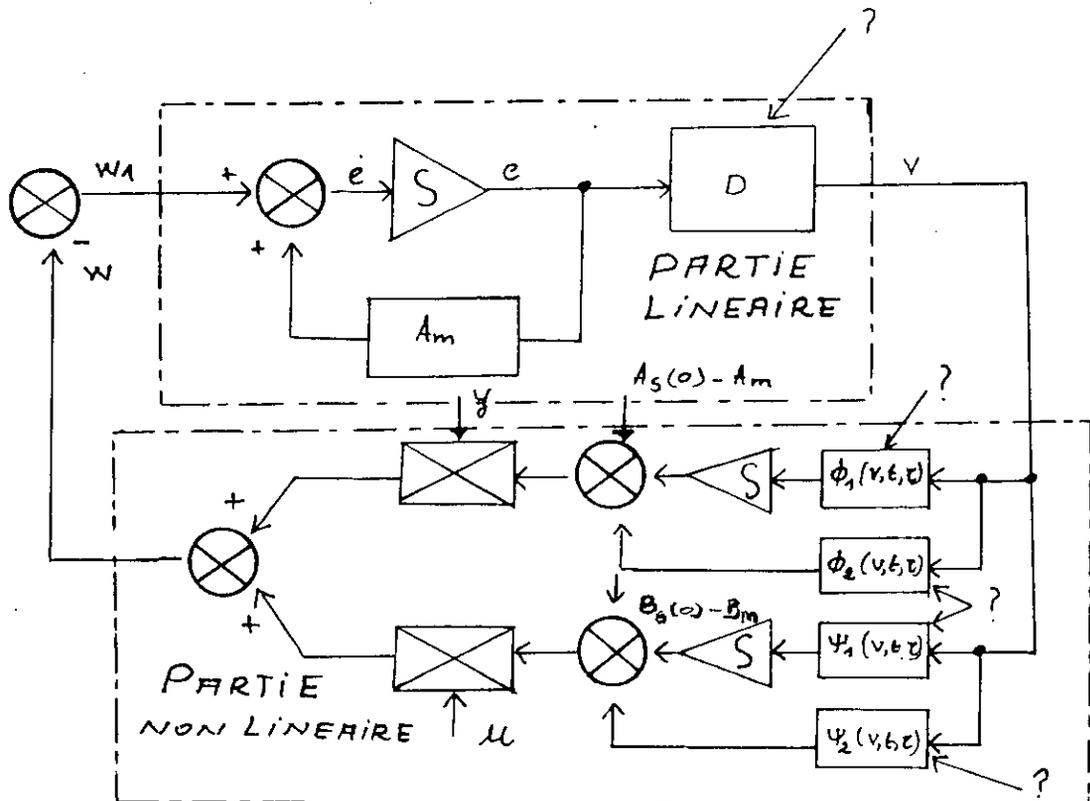


fig 2-2

Conclusion:

Dans ce chapitre nous avons présenté le désign du M.R.A.C, les hypothèses nécessaires pour établir de tel systèmes, la description mathématique, la représentation équivalente par un montage à contre réaction avec une chaine directe linéaire et invariable dans le temps et une chaine de retour non linéaire et variable dans le temps, le concept de stabilité pour de telle représentation.

Dans le chapitre suivant nous allons présenter des concepts nouveaux pour l'étude de la stabilité de tel systèmes, basés sur les théories de Lyapounov et d'hyperstabilité de Popov à partir desquelles on établit les conditions nécessaire et suffisantes pour la construction des régulateurs adaptatifs.

References:

1- Y.D. LANDAU, Adaptative Control, the model référence approche.

2- V.V.CHALAM, Adaptative Control : techniques and application, MARCEL DEKKER, Inc . New York and Basel.

**CHAPITRE III: Méthodes de base pour la résolution
du problème de la commande adaptative
par modèle de référence**

3.1 Introduction:

Dans les chapitres précédents les aspects générales du M.R.A.C, ainsi que la description mathématiques et les différentes configurations et structures ont été présenté.

Nous avons montré que le problème était lié à celui de la stabilité asymptotique de l'erreur.

Dans ce chapitre les différents techniques permettant de déterminer la structure du controlleur qui garantisse la stabilité asymptotique de l'erreur sont présenté.

Ces techniques sont: la technique dite M.I.T.rule la technique basée sur les fonctions de Lyapounov.

La technique la plus utilisée actuellement et la plus répandue basée sur le concept d'hyperstabilité et de positivité.

3.2 M.I.T rule:

C'est la première technique utilisée pour le M.R.A.C. construite à partir de l'algorithme du gradient, elle a été proposé par WHITAKER a M.I.T [1] en 1958 dans le but de développer l'adaptation des systèmes du pilotage automatique.

Cette technique est basée sur la minimisation de l'index de performance donné par l'équation (3.1).

$$J=1/2 \int_0^T |\theta_m(t) - \theta_s(t)|^2 dt \quad (3-1)$$

et nécessite la vérification des hypothèses suivantes [2].

- La vitesse d'adaptation des paramètres doit être faible.

6-3-2 Commande par poursuite parfaite du modele

Determinons d'abord la commande lineaire qui garantit la poursuite parfaite du modele de reference.

Le modele de reference est donné par:

$$A_m = \text{diag}[A_{m1} | A_{m2} | A_{m3}] \quad \text{et} \quad B_m = \text{diag}[B_{m1} | B_{m2} | B_{m3}]$$

où

$$A_{m_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -8 \end{bmatrix} \quad B_{m_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$i=1,2,3$$

Les matrices K_p et K_u du signal de commande lineaire sont calculées à partir des equations (4-9) et (4-10).

On trouve:

$$K_p = \begin{bmatrix} 6.4 & 1.325 & 1.2 & 0.6 & 0 & 0 \\ 2.4 & 1.2 & 2.4 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.175 \end{bmatrix}$$

$$K_u = \begin{bmatrix} 6.4 & 1.2 & 0 \\ 2.4 & 2.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Calculons le compensateur lineaire d:

$$D = B^T P$$

P: solution de l'equation de lyapounov

Q: étant choisie diagonale : $Q = \text{diag}[Q_1, Q_2, Q_3]$ AVEC:

$$Q_i = \text{diag}[9, 1] \quad i=1,2,3$$

MRAC

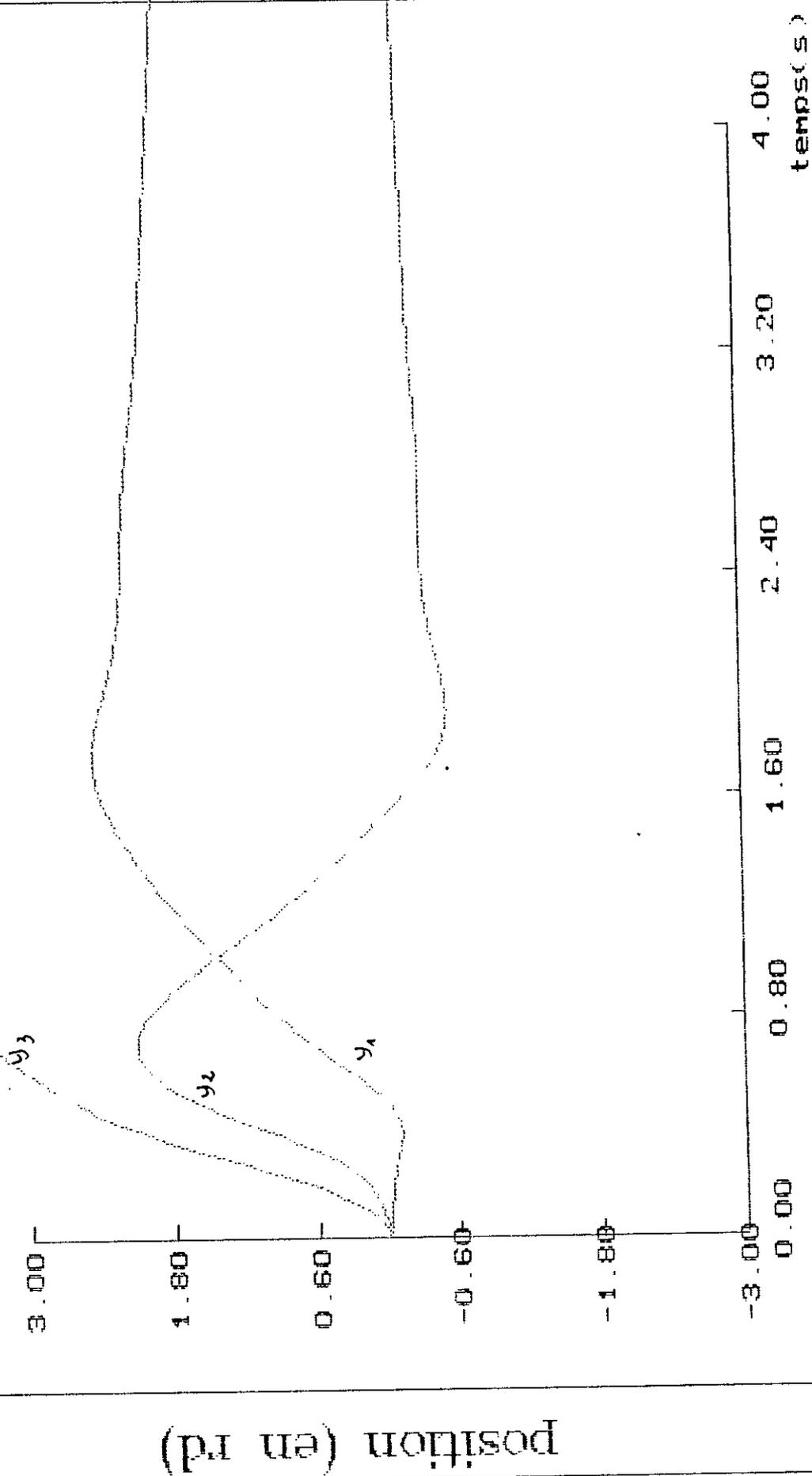


fig 6-8 robot en B.O

MRAC

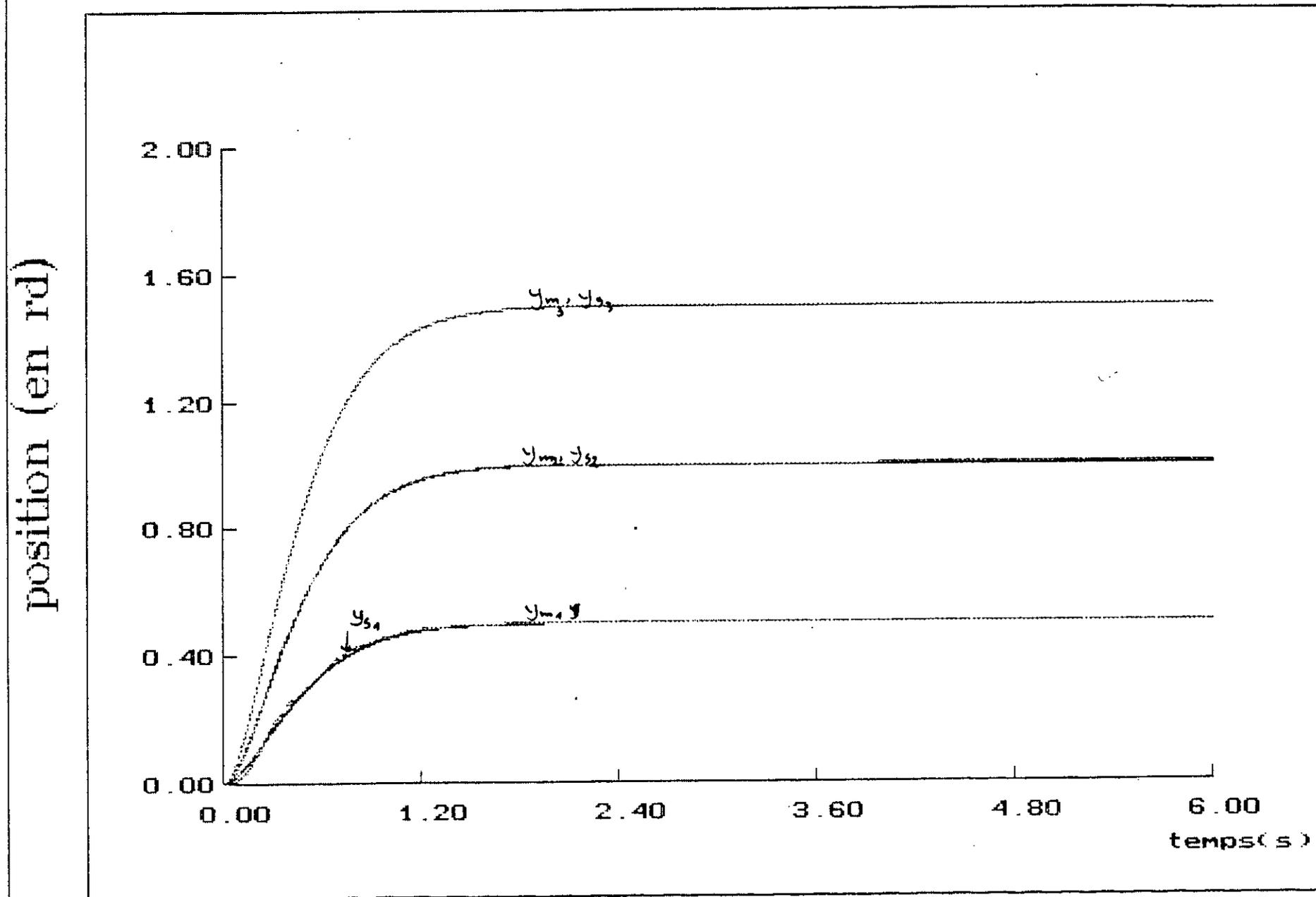


fig 6-8 robot sous AMFC

evolution des commandes (en volt)

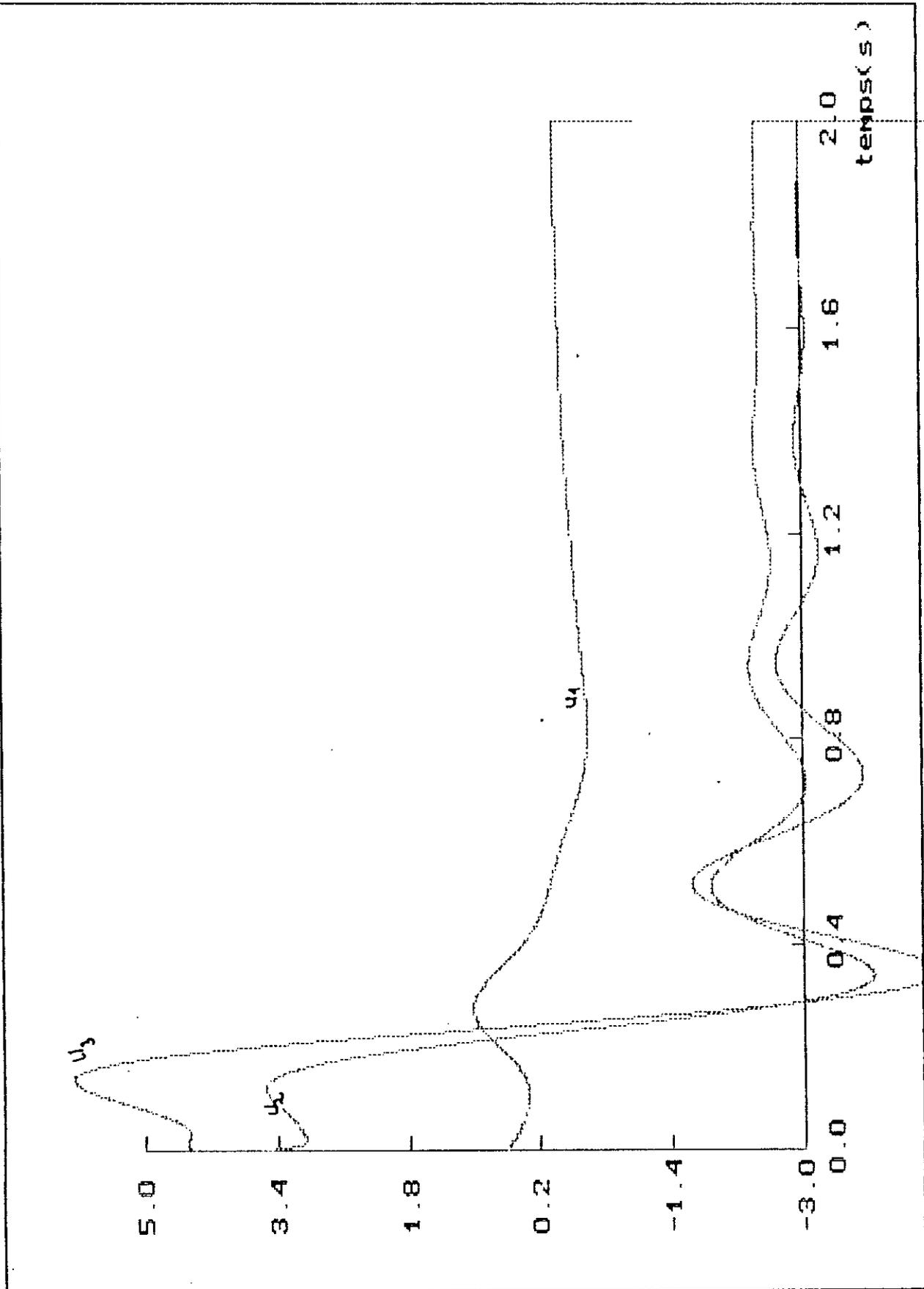


fig 6-10 commande du robot 1

MRAC

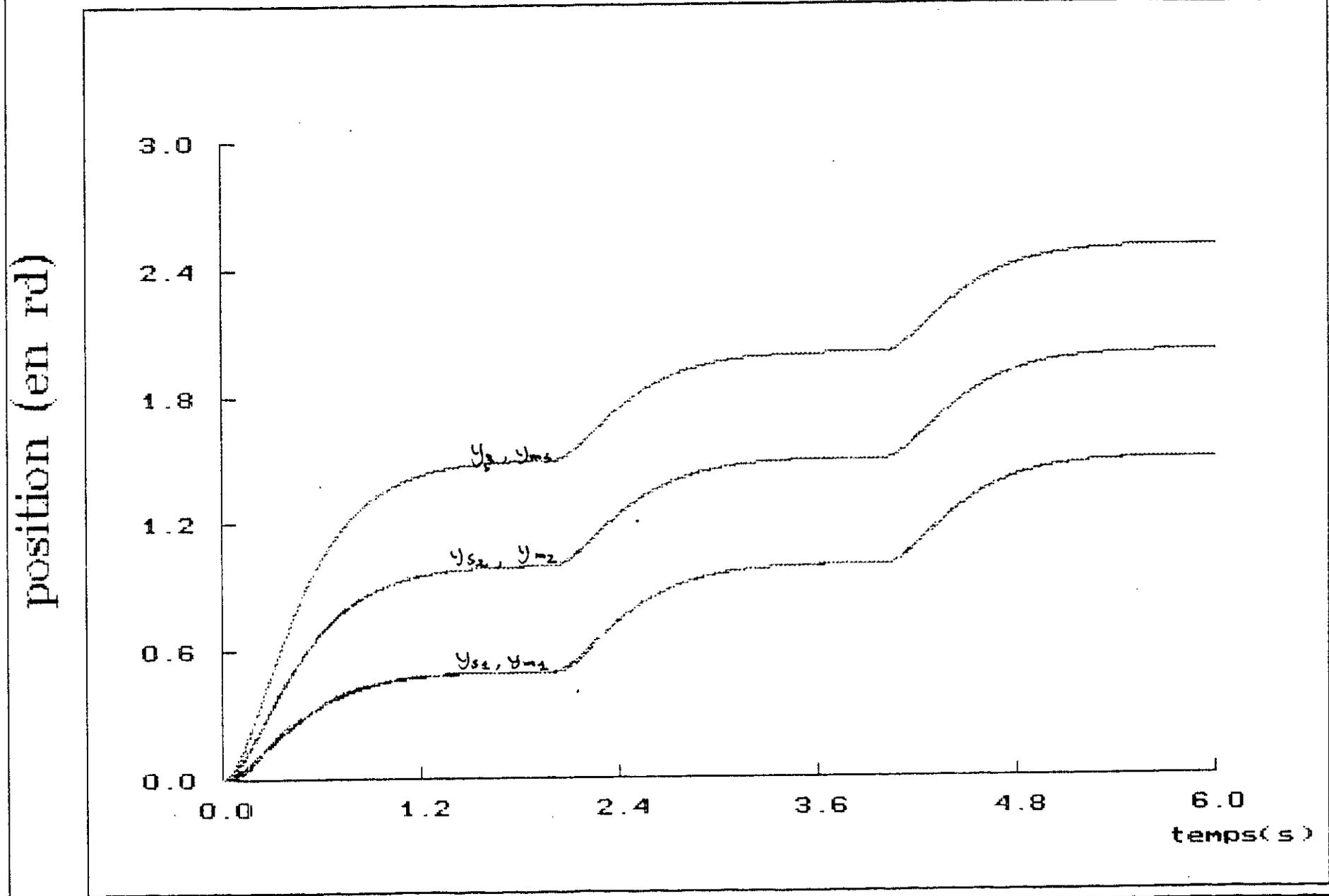


fig 6-11 robot sous differentes consignes

MRAC

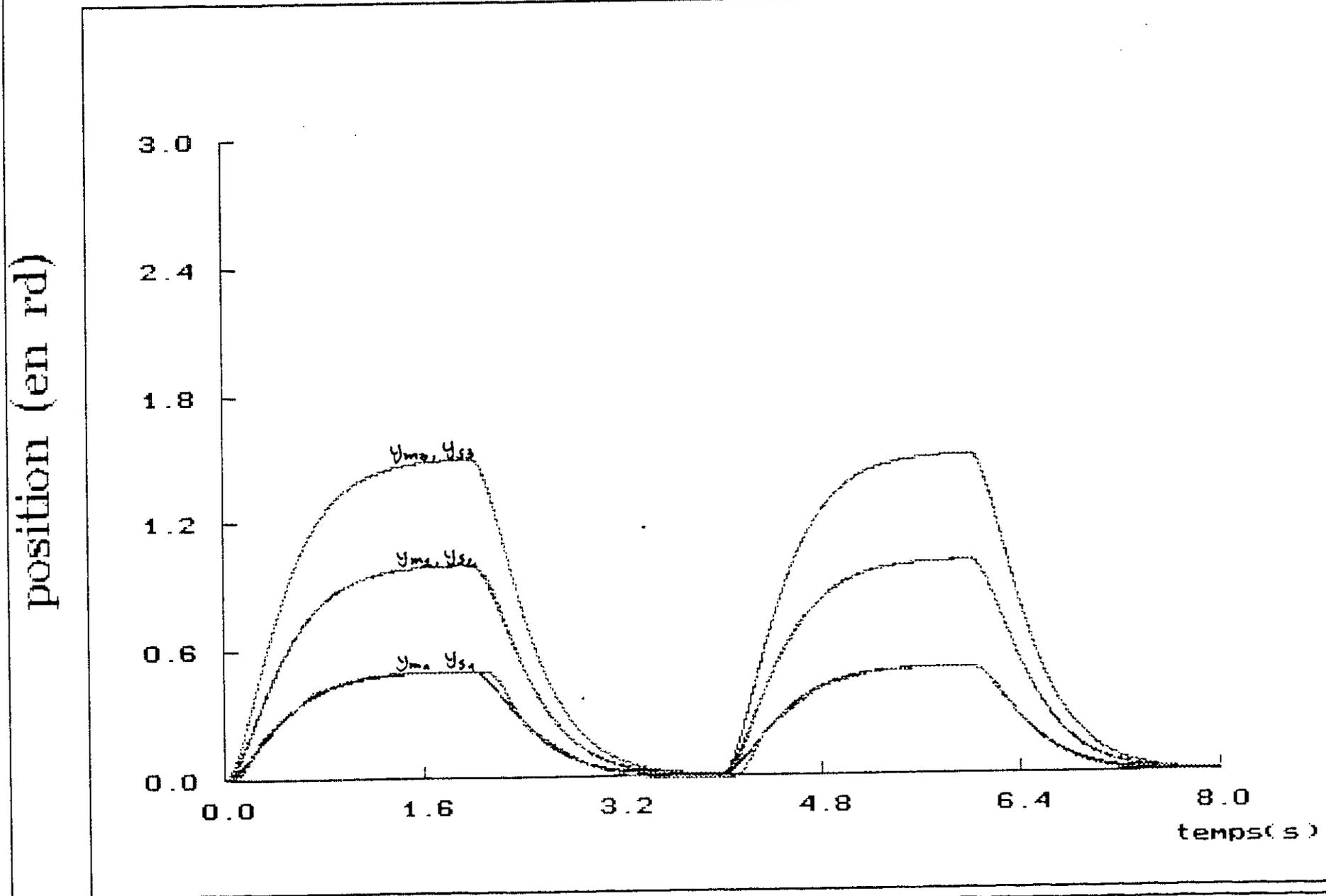


fig 6-12 test de repitabilite

La solution de l'équation de Lyapunov P est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} 3.8125 & 0.2813 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2813 & 0.0977 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.8125 & 0.2813 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2813 & 0.0977 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.2125 & 0.2813 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2813 & 0.0977 \end{bmatrix}$$

Par conséquent la matrice D sera :

$$D = \begin{bmatrix} 0.8654 & 0.3005 & -0.8654 & -0.3005 & 0 & 0 \\ -0.4327 & -0.1502 & 2.3077 & 0.8013 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11.2500 & 3.9063 \end{bmatrix}$$

Les matrices de pondérations $F_a = F_b = \text{diag}[200]$ et $G_a = G_b = \text{diag}[16]$ sont choisies par expérience.

La figure (6-9) montre une fois encore les excellents résultats donnés par MRAC. pour différentes consignes 0.5, 1 et 1.5 rd le robot suit très bien le modèle de référence.

La figure (6-10) montre l'évolution des commandes qui est dans les normes, à la figure (6-11) on observe les réponses du robot pour différentes consignes on voit qu'il suit très bien de telle sorte qu'on ne le distingue même pas du modèle de référence. à la figure (6-12) on fait un test de répétabilité, le robot ne cumule pas d'erreur.

6-4 CONCLUSION

A travers ce chapitre on aura montré l'excellence de la commande adaptative par modèle de référence basée sur la théorie d'hyperstabilité et de positivité.

Les excellents résultats obtenus par un système fortement non linéaire et couplé comme le manipulateur classe 1 prouvent l'aptitude de cette technique à commander des systèmes complexes.

REFERENCES

1.D.P.STOTEN,Generalised manipulator dynamics with regard to model reference adaptive control.int.j.control,1989,vol 50, no.6,2249-2268

2.D.P.STOTEN and H.BENCHOUBANE ,Empirical studies of an MRAC algorithm with minimal controller synthesis.int .j.control,1990,vol 51,no.4,823-849

CONCLUSION GENERALE:

La Commande adaptative avec modèle de référence a connu maintes applications industrielles et a prouvé son efficacité dans beaucoup de situations complexes et surtout dans le domaine de l'aéronautique.

En effet l'étude de la convergence de ces différents algorithmes peut être ramenée à l'analyse de la stabilité d'une équation différentielle ordinaire.

La convergence de tels algorithmes est liée à une condition de positivité concernant soit une matrice, soit une fonction de transfert. Le choix des matrices de pondérations joue un rôle très important pour une poursuite optimale du modèle. En effet la simulation montre que le mauvais choix de ces matrices de pondérations peuvent faire diverger le système. Les algorithmes d'adaptations présentés garantissent la stabilité asymptotique pour des systèmes linéaires donnés sous la forme d'équations d'états à coefficients variables ou non variables dans le temps, mais on a aussi montré que cette technique s'adapte même aux systèmes non linéaires comme illustré par les bras de robots. Ce travail a permis de présenter une technique de commande sous forme algorithmique simplifiant ainsi la synthèse du contrôleur. L'application de cette technique à d'autres systèmes et sa comparaison à d'autres techniques sont à envisager particulièrement pour des systèmes complexes, tels que sous-marins, aéronefs, raffineries etc...

ANNEXE A: STABILITE

Dans cet annexe, nous présentons quelques définitions sur la stabilité des systèmes. Ces définitions sont nécessaires pour comprendre le travail fait à travers ce livre. Considerons le système libre décrit par l'équation différentielle suivante:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad -\infty < t < \infty \quad (a-1)$$

où x est un vecteur d'état à n dimensions.

Considerons la fonction vectorielle $\Phi(t, x_0, t_0)$ solution du système (a-1).

L'équation (a-1) est différentiable si pour tout x_0, t_0 elle satisfait les équations :

$$\Phi(t_0, x_0, t_0) = x_0 \quad (a-2)$$

$$\dot{\Phi}(t, x_0, t_0) = f(\Phi(t, x_0, t_0), t) \quad (a-3)$$

L'état x_e du système décrit par l'équation (a-1) est dit état d'équilibre si:

$$f(x_e, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \quad (a-4)$$

Definition a-1 (stabilité)

L'état d'équilibre x_e du système décrit par l'équation (a-1) est stable si pour tout ϵ réel positif il existe un nombre réel $\delta(\epsilon, t_0) > 0$ tel que:

$$\|x_0 - x_e\| < \delta(\epsilon, t_0) \Rightarrow \|\Phi(t, x_0, t_0) - x_e\| < \epsilon \quad \text{pour tout } t > t_0 \quad (a-5)$$

Definition a-2 (stabilité asymptotique)

L'état d'équilibre x_e du système donné par l'équation (a-1) est asymptotiquement stable si:

1- x_e est stable

2- il existe un nombre réel $\delta(t_0) > 0$ tel que:

$$\|x_0 - x_e\| < \delta(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t, x_0, t_0) - x_e\| = 0$$

Definition A-3 (stabilité asymptotique globale)

L'état d'équilibre x_e du système d'équation (a-1) est globalement asymptotiquement stable si pour tout $x_e \in \mathbb{R}^n$

1- x_e est stable

2- $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t, x_0, t_0) - x_e\| = 0$

ANNEXE B: POSITIVITE DES SYSTEMES

b-1 Fonctions réelles positives à variables complexes:

Définition B.1.1:

La fonction rationnelle $h(s)$ de la variable complexe:

$S = \sigma + j\omega$ est réelle positive si:

- 1- $h(s)$ est réelle pour tout s réel.
- 2- $\operatorname{Re} [h(s)] > 0$ pour tout $\operatorname{Re} [s] > 0$.

Définition B.1.2:

La fonction rationnelle $h(s)$ de la variable complexe

$S = \sigma + j\omega$ est strictement réelle positive si :

- 1- $h(s)$ est réelle pour tout s réel.
- 2- Les poles de $F(s)$ n'appartiennent pas au demi plan $\operatorname{Re}(s) > 0$.
- 3- $\operatorname{Re} \{F(j\omega)\} > 0, \quad -\infty < \omega < +\infty$

Propriétés des fonctions positives réelles:

Lemme B-1-1:

Si $h(s) = M(s)/N(s)$ est une fonction positive réelle alors:

- 1- $M(s)$ et $N(s)$ ont des coefficients réels
- 2- $1/h(s)$ est aussi une fonction réelle positive.
- 3- $M(s)$ et $N(s)$ sont des polynomes d'HURWITZ.
- 4- L'ordre de $N(s)$ ne diffèrent pas de celui de $M(s)$ de plus ou moins 1.

Définition B.1.3:

La matrice $H(s)$ de la variable complexe $s = \sigma + j\omega$ est une matrice hermitienne si:

$$H(s) = H^*(s^*)$$

ou $*$ = signifie le conjugué.

Définition B.1.4:

La matrice de transfert $m \times m$ $H(s)$ est positive réel si:

1- Tous les éléments de $H(s)$ sont analytiques dans le demi plan droit $\text{Re}[H(s)] > 0$.

2- Les poles éventuels des éléments de $H(s)$ sur l'axe $\text{Re}(s)=0$ sont distincts et la matrice résiduelle associée à $H(s)$ est hermitienne positive semi définie.

3- La matrice $H(j\omega) + H'(-j\omega)$ est une matrice hermitienne semi définie positive pour tout ω réel qui ne sont pas des poles pour tout élément de $H(s)$.

B-2 Positivité des systèmes linéaires in variable dans le temps:

Lemme B-2-1:

Le système linéaire invariable dans le temps:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A}\underline{x} + \underline{B}u \\ v &= \underline{C}\underline{x} \end{aligned} \quad (\text{B-1})$$

est positive, et la matrice de transfert,

$$H(s) = \underline{C}' (sI - \underline{A})^{-1} \underline{B} \quad (\text{B-2})$$

est une matrice de transfert positive réelle si et seulement si il existe une matrice \underline{P} symétrique définie positive et une matrice \underline{Q} symétrique semi définie positive telque:

$$\underline{P}\underline{A} + \underline{A}'\underline{P} = -\underline{Q} \quad (\text{B-3})$$

$$\underline{C} = \underline{B}'\underline{P}$$

Lemme B-2-2:

La matrice de transfert $H(s)$ est donnée par l'équation (b-2) est strictement réelle positive s'il existe une matrice \underline{P} symétrique définie positive et une matrice \underline{Q} symétrique définie positive telque le système donné par l'équation (B-3) soit vérifié.

ANNEXE C: HYPERSTABILITE

Considérons le système suivant:

$$\underline{x} = A\underline{x} + B\underline{u} = A\underline{x} - B\underline{w} \quad (c-1)$$

$$\underline{v} = C\underline{x} + j\underline{u} = C\underline{x} - j\underline{w} \quad (c-2)$$

$$W = f(v, t, \tau), \tau < t \quad (c-3)$$

Définition c-1:

Le système donné par les équations (c-1), (c-2) et (c-3) est hyperstable s'il existe une constante positive $\delta > 0$ et une constante $\delta_0 > 0$ telle que toutes les solutions $\underline{x}[\underline{x}(0), t]$ des équations (c-1) et (c-2) satisfassent l'inégalité:

$$\|\underline{x}(t)\| < \delta [\|\underline{x}(0)\| + \delta_0] \text{ quelque soit } t > 0$$

et pour tout bloc $\underline{W} = f(\underline{v}, t, \tau)$ satisfaisant l'inégalité:

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \underline{W}^T \underline{V} dt > -\delta_0^2 \text{ pour tout } t_1 > t_0 \quad (c-4)$$

Theorème c-1:

Une condition nécessaire et suffisante pour que le système décrit par les équations (c-1), (c-2), (c-3) et (c-4) soit hyperstable est que: la matrice de transfert:

$$H(s) = j + C(sI - A)^{-1}B \quad (c-5)$$

soit positive réelle.

Theorème c-2:

Une condition nécessaire et suffisante pour que le système décrit par les équations (c-1), (c-2), (c-3) et (c-4) soit asymptotiquement hyperstable est que:

La matrice de transfert (c-5) soit strictement positive réelle.

Propriétés des blocs hyperstables:

- 1- L'hyperstabilité implique la stabilité au sens large.
- 2- Un système hyperstable possède la propriété d'entrée-bornée- sortie bornée.
- 3- Le montage en parallèle de deux blocs hyperstables est hyperstable.
- 4- Le montage en contre réaction de deux blocs hyperstables est hyperstable.
- 5- La positivité entraîne l'hyperstabilité et réciproquement.

- Les conditions initiales entre le modèle et le système sont voisines.

Considérons le cas général des systèmes siso, le modèle de référence est donné par:

$$\left(\sum_{i=0}^m a_i p^i\right) \theta_m = \left(\sum_{i=0}^m b_i p^i\right) \rho \quad (3-2)$$

le système ajustable est donné par:

$$\sum_{i=0}^n (a_i(\epsilon, t) p^i) \theta_s = \left(\sum_{i=0}^m b_i(\epsilon, t) p^i\right) \rho \quad (3-3)$$

en utilisant la méthode du gradient [2] on a:

$$\dot{a}_i(\epsilon, t) = -K_i^a \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial j}{\partial a_i} \right) \quad (3-4)$$

$$\dot{b}_i(\epsilon, t) = -K_i^b \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial j}{\partial b_i} \right) \quad (3-5)$$

En supposant que l'adaptation est lente, donc la variation de j en fonction de a_i et b_i est petite à chaque instant, on peut commuter l'ordre de différentiation, on aura:

$$\dot{a}_i = -k_i^a \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{\partial j}{\partial t} \right) = -k_i^a \epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial a_i} \quad (3-6)$$

$$\dot{b}_i = -k_i^b \frac{\partial}{\partial b_i} \left(\frac{\partial j}{\partial t} \right) = -k_i^b \epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial b_i} \quad (3-7)$$

ou k_i^a, k_i^b sont des constantes positives arbitraires et ϵ est donné par : $\epsilon = \theta_m - \theta_s$

on a aussi:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial a_i} = \frac{\partial \theta_m}{\partial a_i} - \frac{\partial \theta_s}{\partial a_i} = -\frac{\partial \theta_s}{\partial a_i} \quad (3-8)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial a_i} = \frac{\partial \theta_m}{\partial a_i} - \frac{\partial \theta_s}{\partial a_i} = -\frac{\partial \theta_s}{\partial a_i} \quad (3-9)$$

En remplaçant (3.8) et (3.9) par leur expression dans (3.6) et (3.7) on obtient l'algorithme d'adaptation suivant:

$$\dot{a}_i = k_i^a \epsilon \frac{\partial \theta_s}{\partial a_i} \quad (3-10)$$

$$\dot{b}_i = k_i^b \epsilon \frac{\partial \theta_s}{\partial b_i} \quad (3-11)$$

Cette méthode est très populaire vu la simplicité de son implémentation néanmoins elle est de moins en moins utilisée car la stabilité n'est pas garantie surtout pour les systèmes complexes et pour des signaux d'entrées très variables et aussi à cause de la disponibilité, d'autres techniques beaucoup plus performants comme les fonctions de Lyapounov et le concept d'hyperstabilité.

3.3. Synthèse de systèmes de commande adaptative basée sur la stabilité au sens de Lyapounov:

3.3.1 Introduction:

La stabilité est un facteur très important et doit être pris en considération pour le désign du M.R.A.C, notamment pour les systèmes non linéaires et variable dans le temps.

Donc il est plus convenant de ramener le problème du désign à un problème de stabilité et faire ressortir une loi d'adaptation qui satisfasse les exigences de celle-ci.

L'introduction des fonctions de Lyapounov est un moyen très efficace pour tester la stabilité des systèmes, car basé sur le

concept d'énergie totale, en effet la variation de l'énergie d'un système isolé est négative pour tout état sauf pour l'état d'équilibre où elle prend sa valeur minimale.

Avant d'aborder le désign du M.R.A.C. basé sur les fonctions de Lyapounov on va énoncé quelques définitions et théoremes sur la stabilité au sens de Lyapounov.

Soit le système non force décrit par l'équation différentielle

$$\dot{x}=f(x,t) \quad -\infty < t < \infty \quad (3-12)$$

3.3.2 Fonction de Lyapounov [3] (voir appendix A).

Une fonction scalaire dérivable $V(t,x)$ est dite fonction de Lyapounov si elle est positive au sens précis suivant:

$$V(t,0) = 0$$

$$\alpha(\|x\|) < v(t,x) < \beta(\|x\|)$$

où $\alpha(\cdot)$ et $\beta(\cdot)$ sont des fonctions de classe K, c'est à dire continue, monotones, non décroissante, nulle à l'origine et positive ailleurs, augmentant indéfiniment avec leur argument.

Théorème de Lyapounov (1) [2]:

On considère le système décrit par l'équation (3-12) avec

$$f(0,t)=0$$

s'il existe une fonction scalaire réelle $V(x,t)$ de classe c telque:

- 1- $v(0,t)=0$, $-\infty < t < +\infty$
- 2- $v(x,t) > \alpha(\|x\|) > 0$ pour tout $x \neq 0, x \in \mathbf{R}^n$ et pour tout t
- 3- $v(x,t) \rightarrow \infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$ pour tout t
- 4- $\dot{v} < -\gamma(\|x\|) < 0$ pour tout $x \neq 0, x \in \mathbf{R}^n$

Alors :

l'état d'équilibre $X_e = 0$ est globalement asymptotiquement stable et $V(x,t)$ est une fonction de Lyapounov pour le système décrit par l'équation (3-12)

Théorème de Lyapounov (2) [2]:

L'état d'équilibre $X_e = 0$ du système linéaire invariable dans le temps.

$$\dot{X} = AX \quad (3 - 13)$$

est globalement asymptotiquement stable si et seulement si pour n'importe quel matrice Q définie positive, il existe une matrice unique symétrique définie positive solution de l'équation de Lyapounov suivante:

$$A^T P + P A = -Q$$

et $v = x^T P x$ est une fonction de Lyapounov pour le système (3-13)

3.3.3. Algorithme d'adaptation basés sur la théorie de Lyapounov [3].

Considérons le modèle de référence décrit par l'équation d'état ci-dessous:

$$\dot{X}_m = A_m X_m + B_m U \quad (3-14)$$

où:

X_m : Vecteur d'état de dimension n

U : Vecteur de commande de dimension M

B_m : Matrice de dimension $n \times m$.

A_m : Matrice d'Hurwitz de dimension $n \times n$.

Le système ajustable (le processus et les organes de commandes) étant décrit par:

$$\dot{X}_a = AX_a(t) + Ba(t)u \quad (3-15)$$

Les matrices $A_a(t)$ et $B_a(t)$ contiennent les paramètres des contrôleurs qui doivent être adaptés de façon à ce que le système ajustable se comporte comme le modèle de référence c'est à dire que l'écart $e = X_m - X_a$ tende vers zéro.

La dynamique de l'erreur :

$$e = X_m - X_a \quad (3-16)$$

est régit par l'équation d'état suivante:

$$\dot{e} = A_m e + (A_m - A(t)) X_a + (B_m - b_a(t)) u \quad (3-17)$$

La méthode de synthèse d'algorithme de commande adaptative basée sur la notion de stabilité au sens de Lyapounov, consiste à choisir une forme quadratique des paramètres variables [4] soit:

$$v = e^t p e + tr(A_m - A_a(t))^t Q^{-1} (A_m - A_a(t)) + tr(B_m - B_a(t))^t R^{-1} (B_m - B_a(t)) \quad (3-18)$$

Les matrices P , Q^{-1} et R^{-1} étant définies positives, leur choix déterminera l'algorithme d'adaptation.

V est une fonction de Lyapounov sa dérivée s'écrit :

$$\dot{v} = e^t (A_m^T P + P A_m) e + 2 tr(A_m - A_a(t))^t (P e X_a - Q^{-1} \dot{A}_a(t)) + 2 tr(B_m - B_a(t))^t (P e u - R^{-1} \dot{B}_a(t)) \quad (3-19)$$

la matrice A_m étant une matrice d'Hurwitz, il vient

$$A_m^T P + P A_m = -Q$$

ou Q est une matrice arbitraire définie positive, l'équation (3-19) s'écrira alors:

$$\dot{v} = -e^t Q e + 2 \operatorname{tr} (A_m - A_a(t))^t (P e X_a^t - Q^{-1} \dot{A}_a(t)) + 2 \operatorname{tr} (B_m - B_a(t))^t (P e u^t - R^{-1} \dot{B}_a(t)) \quad (3-20)$$

Le premier terme de l'équation (3-20) est négatif pour tout $e=0$, le deuxième et troisième termes seront nuls si l'on choisit des lois d'adaptations des matrices $A_a(t)$ et $B_a(t)$ telles que:

$$\dot{A}_a(t) = Q P e X_a^t \quad (3-21)$$

$$\dot{B}_a(t) = R P e u^t \quad (3-22)$$

par intégration des équations (3-21) et (3-22) on obtient:

$$A_a = \int_0^t Q P e X_a^t + A_a(0) \quad (5-23)$$

$$B_b(t) = \int_0^t R P e u^t + B_a(0) \quad (3-24)$$

Il y'aura stabilité asymptotique pour toute matrice de gain Q et R définie positive et pour toute fonction vectorielle U continue par morceau.

Conclusion:

Les résultats obtenus par l'approche de Lyapounov sont très satisfaisants et n'ont pas de restriction sur l'adaptation des gains comme M.I.T rule ou sur la forme du signal d'entrée. Le principal désavantage de la méthode est du au fait qu'il n'existe pas une règle générale pour trouver une bonne fonction de Lyapounov, rendant ainsi la résolution des problèmes de stabilité impossible. D'autre part il existe plusieurs fonctions de Lyapounov possible pour un système donné, et on ne peut pas affirmer que ayant trouvé une telle fonction elle impose le

minimum de restriction sur la structure du système et les valeurs des paramètres, le problème peut être surmonter en utilisant une famille plus large des lois d'adaptation assurant la stabilité de M.R.A.C. par l'introduction du concept d'hyperstabilité et de positivité des systèmes.

3-4 Synthèse de systèmes de commande adaptative basés sur les concepts de positivité et d'hyperstabilité:

3.4.1 Introduction:

Le concept d'hyperstabilité est la méthode la plus efficace pour la synthèse de la commande adaptative par modèle de référence.

Elle s'applique aux systèmes pouvant être divisé en 2 parties, une partie se trouvant dans la chaîne directe et une autre partie se trouvant dans la chaîne de retour, pour que ces systèmes soient hyperstables il suffit que les 2 blocs satisfassent des conditions qu'on va détailler par la suite de ce chapitre.

3-4-2 Bloc hyperstable (voir annexe B)

Definition: [3]

Une fonction $F(Z)$ de la variable complexe $Z = a + jw$ est dite réelle positive ($F(Z) \in \{P,R\}$) si :

1/ $f(a)$ est réelle

2/ $\text{Re}\{f(z)\} > 0$ pour tout z tel que $\text{Re}\{z\} > 0$

Avant de détailler, illustrant l'hyperstabilité à travers l'exemple simple suivant[3]:

Considérons le système mono-entrée, mono-sortie du 1^{er} ordre à contre réaction non linéaire, son état est gouverné par l'équation [5]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= FX + Gu \\ Y &= HX \\ u(t) &= -\Psi(y(t), t) \end{aligned} \quad (3-25)$$

x , y et u sont scalaire, $\Psi(\dots)$ est un opérateur statique assujetti à la contrainte:

$$v\Psi(v, t) > 0 \quad (3-26)$$

Déterminons les conditions assurant la stabilité du système régi par l'équation (3-25) dont le schéma bloc est consigné à la figure 3-1.

Considérons la fonction de Lyapounov suivante:

$$v(X) = PX^2 \quad , P > 0 \quad (3-27)$$

La dérivée $V(x)$:

$$\dot{v}(X) = 2FPX^2 - 2PGX\Psi(HX, t) \quad (3-28)$$

supposons que le système linéaire est réel positif on aura:

$$F < 0$$

$$HG > 0$$

L'équation (3-28) s'écrit alors

$$\dot{v}(X) = 2FPX^2 - 2\frac{PGH}{H}X\Psi(HX, t) \quad (3-29)$$

Compte tenu de la contrainte (3-26) cette dérivée est non positive. Le système (3-25) est donc stable.

Nous venons de caractériser à travers un exemple simple la notion

d'hyperstabilité.

3.4.3. Approche d'hyperstabilité:

Le concept d'hyperstabilité [2,6,7] est appliqué aux systèmes M.R.A.C pouvant être divisé en deux parties comme illustré à la figure (3-2). Une partie linéaire invariable dans le temps et une partie non linéaire et variable dans le temps satisfaisant l'inégalité de Popov [8]:

$$\eta(0, t_1) = \int_0^{t_1} \underline{y}^T W dt \geq -\gamma_0^2 \quad (3-30)$$

pour tout $t_1 \geq 0$

ou: V: Vecteur d'entrée du système non linéaire

W: Vecteur sortie du système non linéaire

γ_0^2 : Constante positive indépendante de t_1 .

Le théorème suivant permet d'affirmer la stabilité asymptotique.

Théorème:

Si le bloc linéaire est hyperstable et le bloc non linéaire satisfait l'inégalité de Popov alors le système représenté à la figure (3-2) est globalement asymptotiquement stable.

Le problème d'hyperstabilité des systèmes linéaires peut être exprimé en terme des propriétés de positivité.

Par exemple dans le cas des systèmes SISO linéaires invariables dans le temps. La condition d'hyperstabilité donnée par une fonction de transfert réelle positive.

Les principaux résultats concernant l'hyperstabilité sont données aux annexes B et C.

Pour résoudre le problème de stabilité en utilisant l'approche d'hyperstabilité, on doit mettre le problème sous forme de deux parties, une partie dans la chaîne directe et une partie dans la

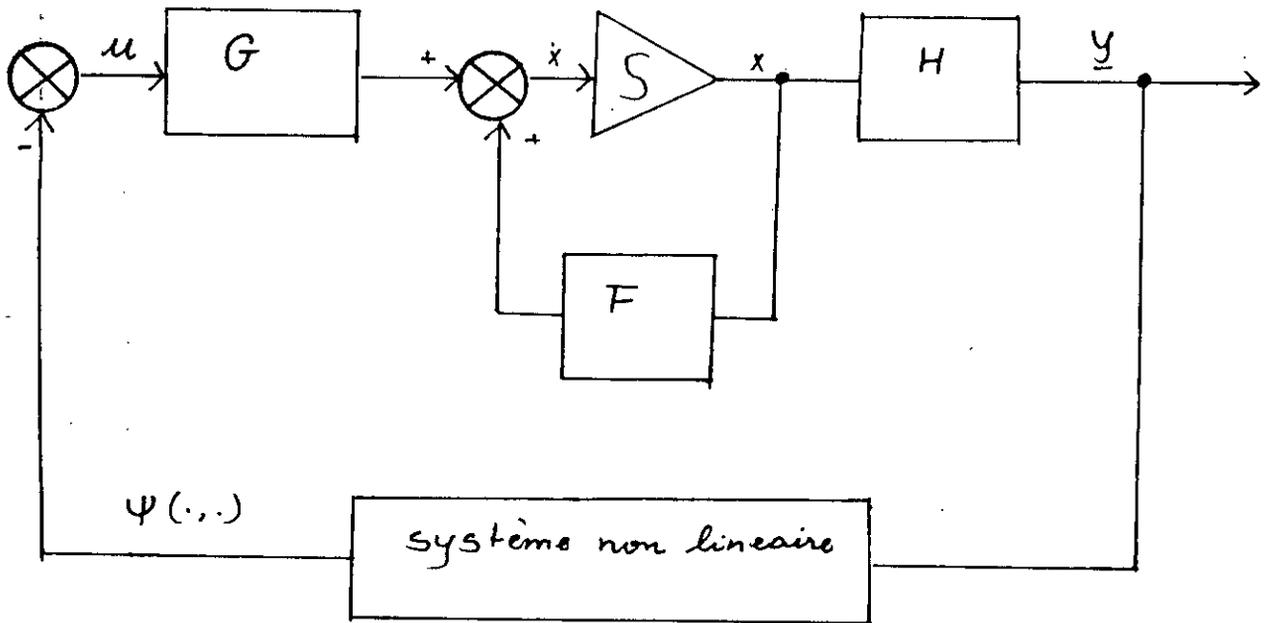


fig 3-1

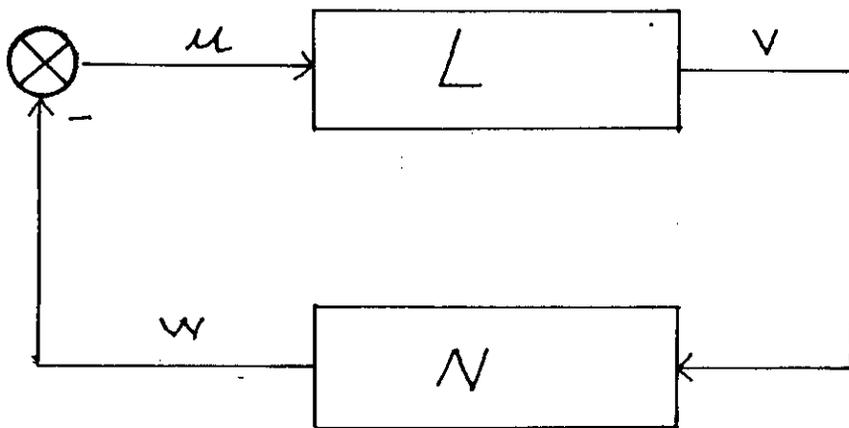


fig 3-2 Représentation standard des systèmes divisés en deux blocs

chaîne de retour.

L'application de l'hyperstabilité pour le design du M.R.A.C, est basée sur les étapes suivantes [2]:

ETAPE 1:

Mettre le M.R.A.C. sous la forme d'un système équivalent composé deux blocs, un bloc dans la chaîne directe et un bloc dans la chaîne de retour.

ETAPE 2:

Trouver les solutions des lois d'adaptations qui apparaissent dans la chaîne de retour (feedback) de tel sorte que l'inégalité de Popov soit satisfaite.

ETAPE 3:

Trouver les solutions du reste de la loi d'adaptation qui apparaissent dans la chaîne directe (feedforward) de telle sorte que le bloc soit hyperstable (ce qui garantit l'hyperstabilité donc la stabilité globale de tout le système).

ETAPE 4:

Revenir au système original pour expliciter la loi d'adaptation c'est à dire la structure du mécanisme d'adaptation.

Ces quatre étapes sont les étapes de base pour le design du M.R.A.C, nous allons les appliquer pour établir le mécanisme d'adaptation pour les systèmes M.R.A.C, décrit par les équations d'états.

3.4.4. Conception des systèmes adaptatifs par modèle de référence décrit par les équations d'états. [2].

Dans ce paragraphe, nous allons procéder à la conception du M.R.A.C parallèle décrit par les équations d'état.

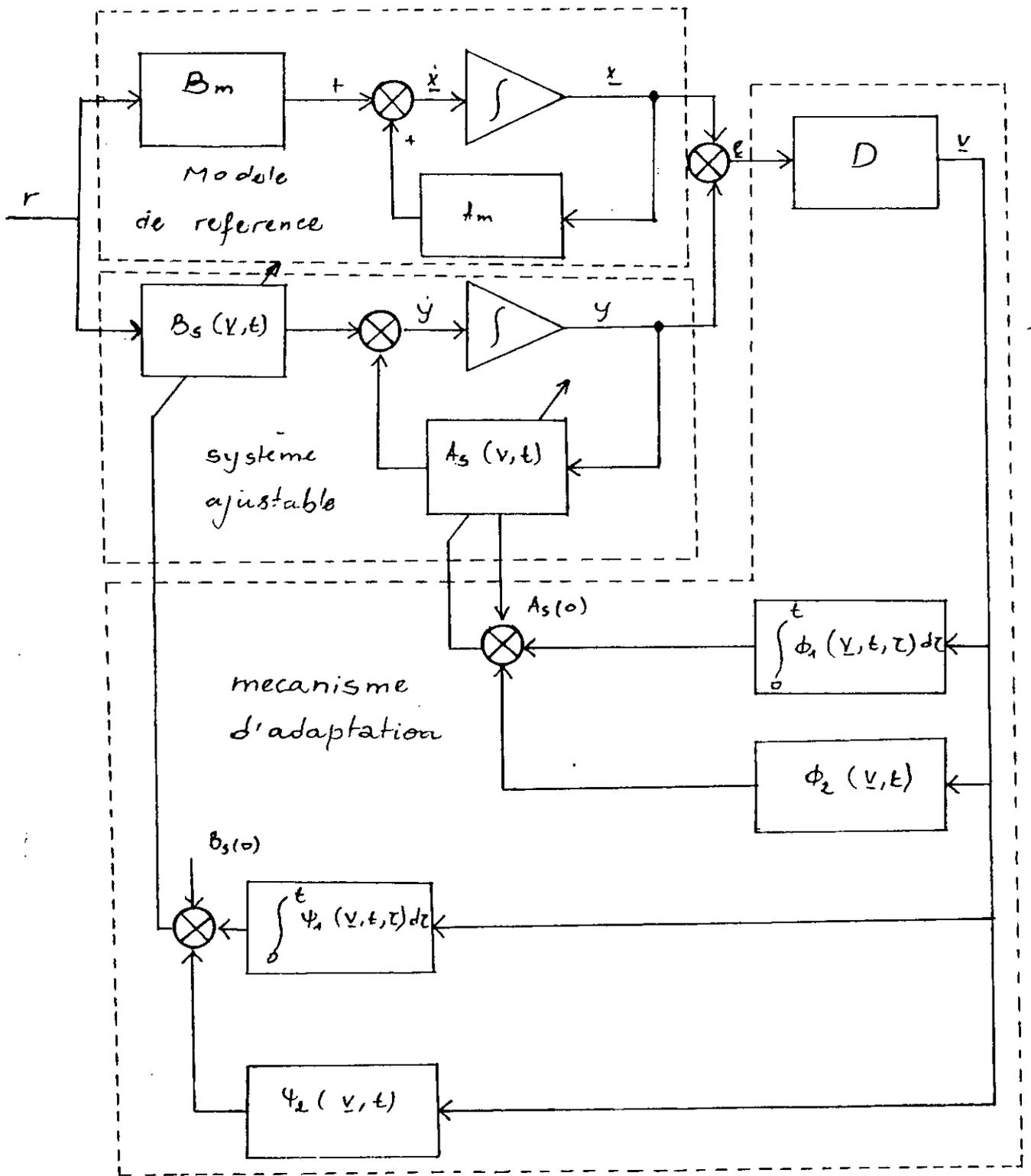


fig 3-3 Représentation parallèle du MRAC dans l'espace d'état

Appliquons les etapes données par [2]:

Etape 1:

Cette etape consiste a la representation equivalente du M.R.A.C, elle a ete deja faite dans le chapitre precedent, elle est decrite par les equations (2-26), (2-27) et (2-28).

Etape 2:

Trouver les solutions $\phi_1, \phi_2, \Psi_1, \Psi_2$, de telle sorte que le bloc de la chaine de retour (feedback) satisfasse l'inegalite de Popov donnee par l'inegalite (3-30).

En utilisant l'expression de W donnee par l'equation (2-28) L'inegalite (3-30) devient:

$$\eta(0, t_1) = \int_0^{t_1} \underline{Y}^T \left[\int_0^t \phi_1(v, \tau, t) d\tau + \phi_2(v, t) + A_0 \right] Y dt + \int_0^{t_1} \underline{U}^T \left[\int_0^t \Psi_1(y, \tau, t) d\tau + \psi_2(y, t) + B_0 \right] U dt \geq \gamma_0^2 \quad (3-37)$$

où $A_0 = A_s(0) - A_m$ et $B_0 = B_s(0) - B_m$

La solution de cette inegalite est donnee par [2]

$$\phi_1(y, t, \tau) = Fa(t-\tau) y(\tau) [Gay(\tau)]^T, \tau \leq t \quad (3-38)$$

$$\phi_2(y, t, \tau) = Fa(t) y(t) [Ga(t)y(t)]^t \quad (3-39)$$

$$\Psi_1(y, t, \tau) = Fb(t-\tau) y(\tau) [GbU(\tau)]^t, \tau \leq t \quad (3-40)$$

$$\Psi_2(y, t) = Fb(t) y(t) [Gb(t)U(t)]^t \quad (3-41)$$

ou $Fa(t-\tau)$ et $Fb(t-\tau)$ sont des matrices definies positive dont les transformees de laplace sont des matrices de transfert positives reelles possedant un pole $s = 0$.

Ga et Gb sont des matrices constantes definies positives

Fa(t), Fb(t), Ga(t) et Gb(t) sont des matrices definies positives variables dans le temps pour tout $t > 0$.

Etape 3:

Application de l'hyperstabilité de Popov (Annexe c) [7]

Après avoir trouvé les conditions verifiant l'inegalité de Popov, il reste à determiner les conditions que doit satisfaire le bloc lineaire de la chaine directe de telle sorte que le systeme devient asymptotiquement hyperstable, ce qui implique $e(t) = 0$ quand t tend vers l'infini.

Appliquons le theoreme c-2 (annexe C), on trouve que la matrice de transfert du bloc de la chaine directe:

$$H(S) = D(sI - A_m)^{-1} \quad (3-42)$$

doit etre strictement positive reelle.

en utilisant le lemme B-2-3(annexe B) pour une matrice A_m donnée on peut trouver la matrice D appropriée (appelée compensateur lineaire).

on trouve $D = P$ (3-43)

ou P et une matrice definie positive, solution de l'equation de Lyapounov suivante:

$$A_m^T P + P A_m = -Q \quad (3-44)$$

ou Q est une matrice definie positive.

La matrice P est solution de l'equation (3-44) si et seulement si le modele de reference est asymptotiquement stable (theoreme a-2 Annexe A).

Après avoir trouvé le compensateur linéaire D , l'hyperstabilité du bloc est assurée.

Etape 4:

Dans ce cas, cette étape est implicitement accomplie car les lois d'adaptations sont directement spécifiées par les solutions $\phi_1, \phi_2, \Psi_1, \Psi_2$ et la matrice D .

Annonçons le théorème donné par [2]:

Theoreme:

Le M.R.A.C. parallèle décrit par les équations (3-31) à (3-36) est globalement asymptotiquement stable si:

1- $\phi_1(v, t, \tau), \phi_2(v, t), \Psi_1(v, t, \tau)$ et $\Psi_2(v, t)$ sont données par les équations (3-38) à (3-42).

2- La matrice de transfert $H(s)$ donnée par l'équation (3-46) est strictement réelle positive.

Ce théorème donné par LANDAU est l'outil de base utilisé par la réalisation des correcteurs adaptatifs par modèle de référence.

3-5 Conclusion:

Dans ce chapitre nous avons présenté trois techniques pour la commande adaptative par modèle de référence. La méthode du gradient reste inefficace malgré la simplicité d'implémentation. Les fonctions de Lyapounov ont prouvé leur efficacité, mais ne pouvant pas être appliquées pour un cas général car pour chaque cas, on doit trouver la fonction de Lyapounov appropriée.

Le concept d'hyperstabilité est utilisé pour des cas plus généraux, les contrôleurs adaptatifs basés sur celui-ci sont très efficaces, leur commande est robuste que ce soit en présence de perturbation, de variations des paramètres et de non

linearités dans le système. Ils sont très utilisés actuellement.

Dans le chapitre suivant, nous allons utiliser le concept d'hyperstabilité pour les systèmes inconnus et même partiellement variable dans le temps.

REFERENCES

1. Whitaker, H.P., Yamron, J., and Kezer, design of model reference adaptive control systems for aircraft, report No, R-164, Instrumentation Lab., MIT (1956).
2. D.Landau, adaptive control , the model reference approach, Marcel Dekker, New York, 1979
3. K.Nadjim , Commande adaptative des processus industriels, Masson
4. D.Lindorff. and .R.Carrol, survey of adaptive control using Lyapunov design, international journal of control 18, p.897-914, 1973.
- 5 P.Faure, operateurs rationnels positifs, Dunod 1979.
6. Anderson, B,D,O., A simplified viewpoint of hyperstabilite IEEE tras.auto.cont., AC 13, 292-555 (1969).
7. Landau , A hyperstability criterion for model reference adaptive control systems, IEEE Trans. Auto.control. A-C 14; 552-555.
8. V.M Popov, l'hyperstabilite des systemes automatiques, dunod 1973.

CHAPITRE IV:COMMANDE ADAPTATIVE PAR POURSUITE D'UN MODELE

4.1 Introduction:

Dans le chapitre 1, nous avons presenté le cas où les paramètres du système sont inconnues et invariables dans le temps. Pour de tels systèmes on utilise la commande lineaire par poursuite d'un modele (LINEAR MODEL FOLLOWING CONTROL).

Cette technique est developpee dans ce chapitre et comme on le verra n'est qu'une extension de l'M.R.A.C.

4-2 Commande lineaire par poursuite d'un modele [2].

Considerons le système représenté à la figure 4-1, le système est décrit par :[1].

Le modele de reference

$$\dot{X} = A_m X + B_m u \quad (4-1)$$

Le système a controller

$$\dot{Y} = A_p Y + B_p U_p \quad (4-2)$$

La commande:

$$U_p = -K_p Y + K_u U_m \quad (4-3)$$

ou,

- X: Vecteur d'etat du modele dimension n.
- Y: Vecteur d'etat du système dimension n.
- U_m: Vecteur entree du modele dimension m.
- U_p: Vecteur entree du système dimensions m.

A_m, B_m, A_p, B_p, K_m, K_p et K_u sont des matrices constantes avec les dimensions appropriées.

A_m: matrice d'Hurwitz.

On definit l'erreur d'etat :

$$e = X - Y \quad (4-4)$$

sostrayant l'équation (4-2) de (4-1) et en utilisant (4-3), on obtient l'équation differentielle suivante:

$$\dot{e} = A_m e + [A_m - A_p] + B_p K_p] y + (B_m - B_p K_u) U_m \quad (4-5)$$

pour avoir une poursuite du modele, on doit assurer pour $e(0)=0$ et pour tout $U_m \in \mathbb{C}$:

$$e(t) = 0 \quad \text{et } e(t) = X - Y = 0$$

et cela quelque soit t

pour cela on doit avoir :

$$[A_m - A_p + B_p K_p] y + [B_m - B_p K_u] U_m = 0 \quad (4-6)$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ et $U_m \in \mathbb{C}$
 et $\dot{e} = A_m e$ doit etre asymptotiquement stable donc A_m une matrice d'Hurwitz.

Pourque l'equation (4-6) soit verifiee pour tout y et pour tout U_m on doit avoir:

$$A_m - A_p + B_p K_p = 0$$

$$B_m - B_p K_u = 0$$

ou

$$-B_p K_p = A_m - A_p \quad (4-7)$$

$$B_p K_u = B_m \quad (4-8)$$

Les détermnations des conditions qui assurent l'existence des solutions K_p , K_u pour les equations (4-7) et (4-8). C'est un probleme qui n'est pas simple car dans la plupart des cas la matrice B_p est singuliere et non carrée.

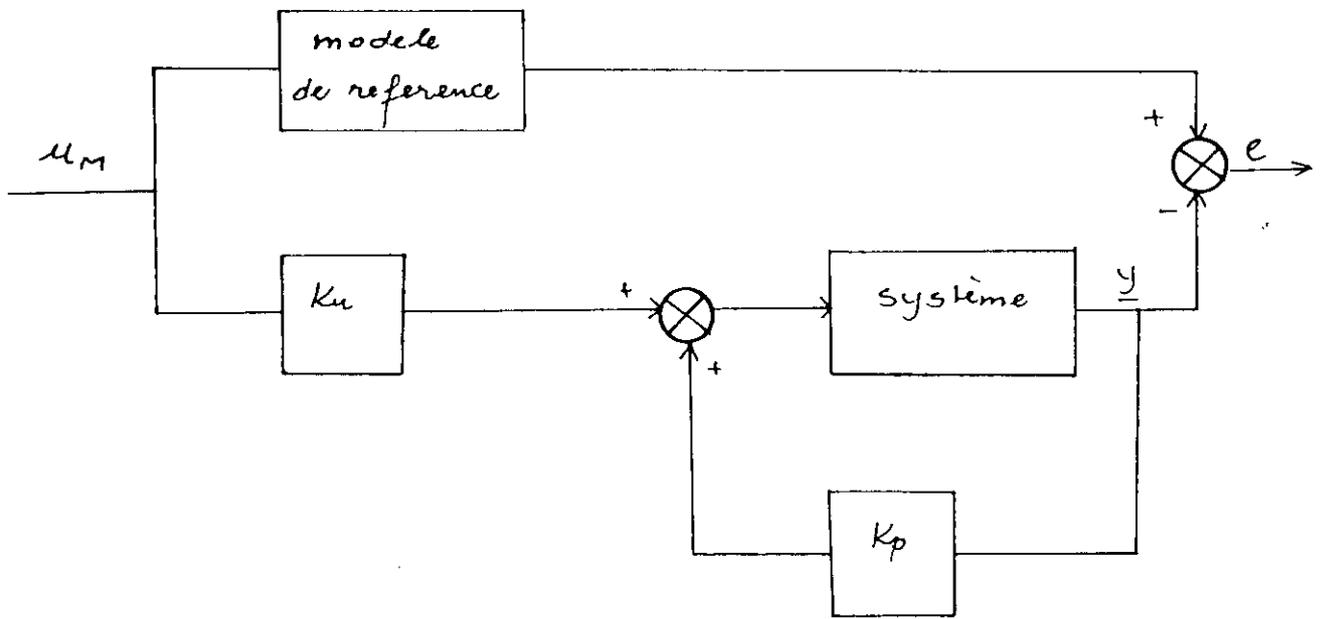


fig 4-1 Commande lineaire par poursuite d'un modele

Utilisons les resultats concernant l'existence de la solutions de l'equation matricielle:

$$MX = N$$

La solution x existe si et seulement si [3]
rang [M] = rang [M,n]

On deduit des equations (4-7) et (4-8) que la poursuite parfaite est obtenue si [4]:

$$\text{rang } [B_p] = \text{rang } [B_p, A_m - A_p] = \text{rang } [B_p, B_m]$$

on peut calculer les solutions en utilisant la matrice pseudo-inverse $B_p^{(*)}$.

$$(*) \quad B_p^{(*)} = (B_p^T B_p)^{-1} B_p^T$$

multiplions les equations (4-7) et (4-8) par B_p

On obtient :

$$-B_p B_p^T K_p = B_p^T (A_m - A_p)$$

donc

$$-K_p = (B_p B_p^T)^{-1} B_p^T (A_m - A_p)$$

ou

$$-K_p = B_p^T (A_m - A_p) \quad (4-9)$$

$$B_p B_p^T K_u = B_p^T B_m \quad \Leftrightarrow K_u = (B_p B_p^T)^{-1} B_p^T B_m$$

ou

$$K_u = B_p^T B_m \quad (4-10)$$

Introduisons les equations (4-7) et (4-8) dans (4-9) et (4-10)
on obtient:

$$(I - B_p B_p^T) (A_m - A_p) = 0 \quad (4-11)$$

$$(I - B_p B_p^+) B_m = 0 \quad (4-12)$$

Introduisons les equations (4-7) et (4-8) dans (4-9) et (4-10) on obtient :

$$(I - B_p B_p)(A_m - A_p) = 0 \quad (4-11)$$

$$(I - B_p B_p) B_m = 0 \quad (4-12)$$

Ces conditions sont connues sous le nom des conditions d'ERZBERGER.

Si ces conditions sont verifiees, on peut calculer directement les matrices K_p et K_u de telle sorte que les matrices de transferts du modele de reference et celle du systeme soient identiques.

Cela fait, le systeme suivra parfaitement le modele de reference de $t = 0$ jusqu'a l'infini.

Dans le cas où les parametres du systeme sont inconnus ou variables dans le temps, la commande adaptative par poursuite d'un modele est utilisée.

4-3 Commande adaptative par poursuite d'un modele decrit par les equations d'etat [5].

4.3.1 Introduction:

Comme on l'a mentionne au paragraphe precedent, la commande lineaire par poursuite d'un modele ne réglant pas le probleme quand les parametres du systeme sont inconnus ou variables dans le temps, pour cela on utilise la commande adaptative par poursuite d'un modele est utilisé.

L'avantage de cette methode est qu'elle ne necessite pas l'identification des parametres du systeme et aussi la resolution en temps reel des equations lineaires ou non lineaires

compliquées. On peut considérer deux approches [1],

1) Adaptation paramétrique (fig 4-2).

2) Adaptation par signal de synthèse (fig 4-3)

Ces deux configurations sont équivalentes.

Dans le cas de l'adaptation paramétrique, l'entrée du système est exprimée par [1]:

$$U_p = -K_p(e, t)Y + K_u(e, t)U_m \quad (4-14)$$

ou $K_p(e, t) = K_p - \delta K_p(e, t)$ peuvent être exprimés par:

$$K_p(e, t) = K_p - \delta K_p(e, t) \quad (4-14)$$

$$K_u(e, t) = K_u + \delta K_u(e, t) \quad (4-15)$$

ou K_u et K_p sont des matrices constantes. avec cette décomposition on peut écrire:

$$U_p = U_{p1} + U_{p2} \quad (4-16)$$

ou
$$U_{p1} = -K_p Y + K_u U_m \quad (4-17)$$

$$U_{p2} = \delta K_p(e, t)Y + \delta K_u(e, t)U_m \quad (4-18)$$

L'entrée du système U_{p1} représente la commande linéaire, l'entrée du système U_{p2} est la contribution à la commande adaptative (fig 4-3). Cette technique est connue sous le nom de l'adaptation par signal de synthèse. On voit bien que ces deux techniques sont équivalentes.

4.3.2 Commande adaptative par poursuite d'un modèle parallèle-parallèle

elle est utilisée pour la poursuite. utilisons l'adaptation par la synthèse d'un signal [1]:

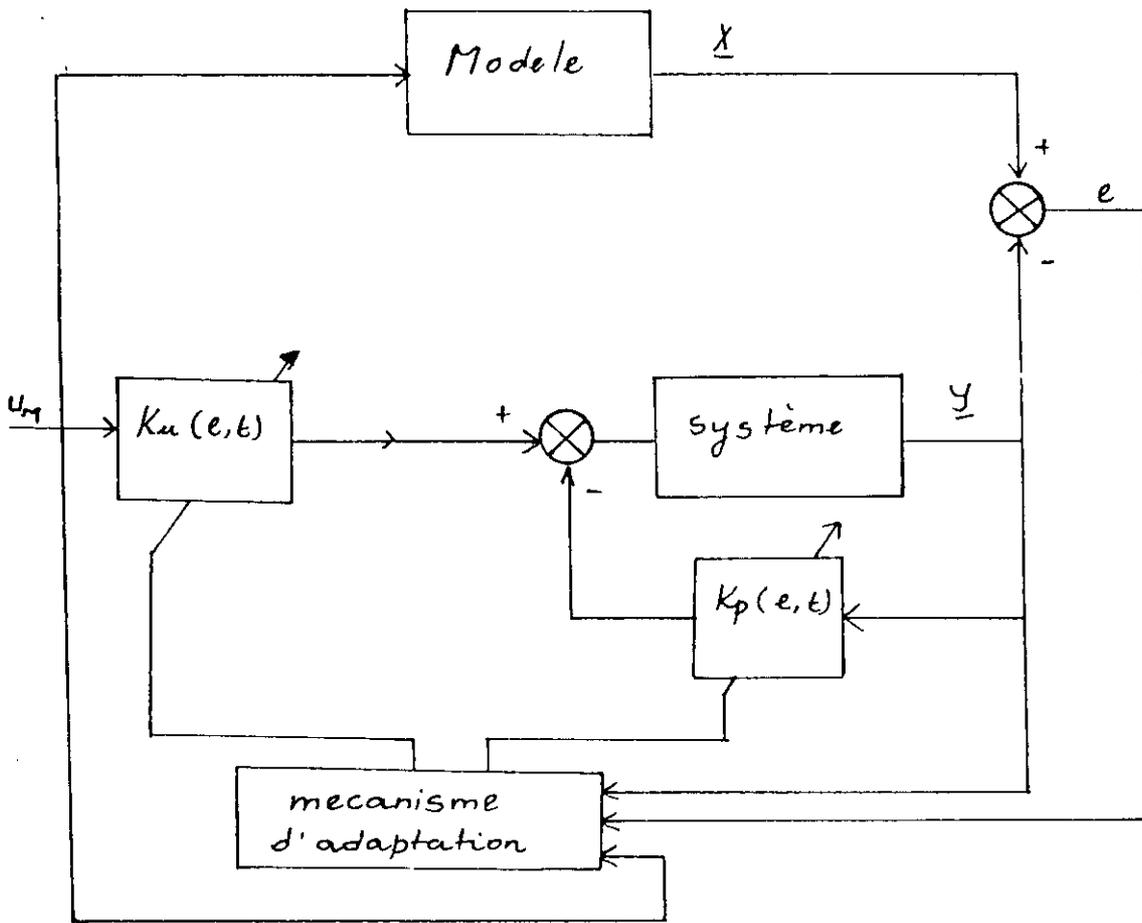


fig 4-2 AMFC parallele avec l'adaptation parametrique

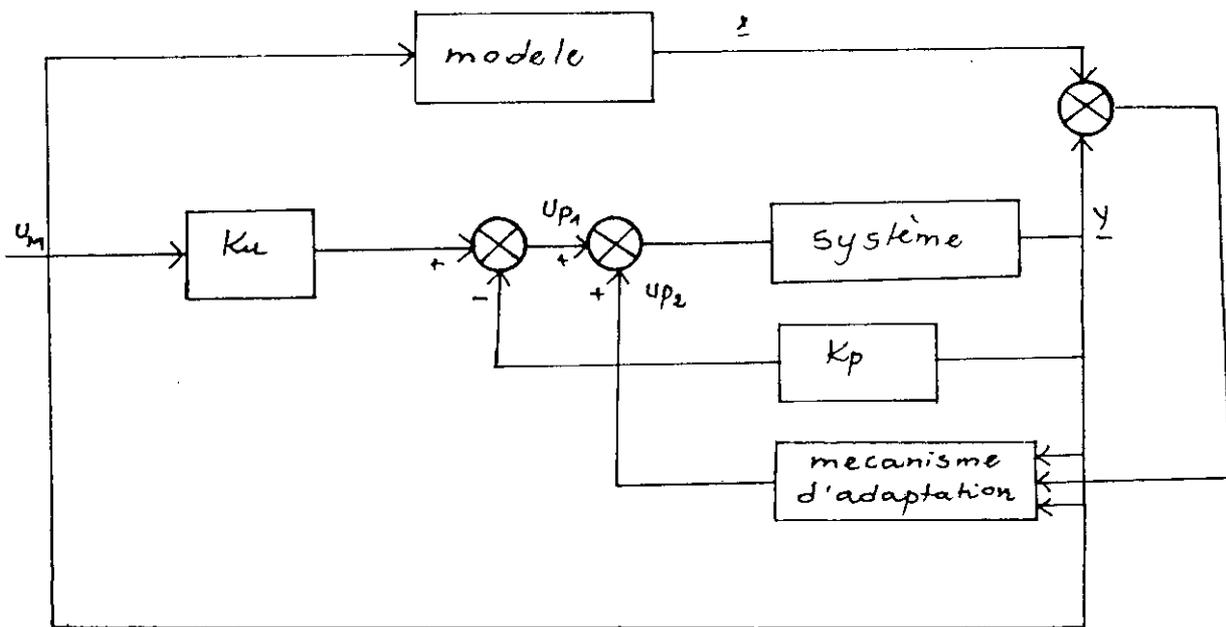


fig 4-3 AMFC parallele avec l'adaptation par signal de synthese

Le modele de reference est decrit par

$$X = A_m X + B_m U \quad (4-19)$$

Le systeme a controller

$$Y = A_p Y + B_p u_{p1} + B_p u_{p2} \quad (4-20)$$

$$l'erreur e = X - Y \quad (4-21)$$

Le signal lineaire:

$$U_{p1} = -K_p Y + K_u U_m \quad (4-22)$$

Le signal d'adaptation:

$$U_{p2} = \delta K_p(e, t) Y + \delta K_u(e, t) U_m \quad (4-23)$$

L'objectif du mecanisme d'adaptation est de generer les matrices variables dans le temps $\delta K_p(e, t)$ et $\delta K_u(e, t)$ de telle sorte que $e(t)$ tend vers zero.

La commande adaptative par poursuite d'un modele est un cas particulier du M.R.A.C. si dans l'equation (4-19) on remplace U_m par U et on reecrit l'equation (4-20) en utilisant (4-22) et (4-23), on obtient:

$$\dot{Y} = [A_p - B_p K_p + B_p \delta K_p(e, t)] Y + B_p [K_u + \delta K_u(e, t)] U \quad (4-24)$$

En comparant l'equation (4-24) avec l'equation (3-32), on obtient par identification

$$A_p - B_p K_p + B_p \delta K_p(e, t) = A_s(v, t) \quad (4-25)$$

$$B_p [K_u + \delta K_u(e, t)] = B_s(v, t) \quad (4-26)$$

Le mecanisme d'adaptation est similaire a celui utilise dans le chapitre precedent:

$$V = D e \quad (4-27)$$

et

$$\begin{aligned} As(v, t) &= Bp \left[\int_0^t \phi_1(v, t, \tau) d\tau + \phi_2(v, t) \right] + As(0) \\ &= \int_0^t \phi_1(v, t, \tau) d\tau + \phi_2(v, t) + As(0) \end{aligned} \quad (4-28)$$

$$\begin{aligned} Bs(v, t) &= Bp \left[\int_0^t \phi_1(v, t, \tau) d\tau + \phi_2(v, t) \right] + Bs(0) \\ &= \int_0^t \phi_1(v, t, \tau) d\tau + \phi_2(v, t) + Bs(0) \end{aligned} \quad (4-29)$$

ou
$$As(0) = Ap + Bp[-Kp + \delta kP(0)] \quad (4-30)$$

$$Bs(0) = Bp[Ku + \delta Ku] \quad (4-31)$$

Introduisons les equations (4-28) et (4-29) dans les equations (4-25) et (4-26) on obtient :

$$\delta Kp(e, t) = \delta Kp(v, t) = \int_0^t \phi_1(v, t, \tau) d\tau + \phi_2(v, t) + \delta Kp(0) \quad (4-32)$$

$$\delta Ku(e, t) = \delta Ku(v, t) = \int_0^t \phi_1(v, t, \tau) d\tau + \phi_2(v, t) + \delta Ku(0) \quad (4-33)$$

Les expressions de $\phi_1, \phi_2, \Psi_1, \Psi_2$ sont donnees au chapitre III (equation (3-42) a (3-45)).

Ce sont ces deux matrices qui determinent la commande adaptative. La poursuite parfaite par modèle de reference, impose des conditions (A_m, B_m, A_p et B_p) tel que K_p et K_u existent. On suppose aussi que A_p et B_p constantes.

L'algorithme developpe ci-dessus assure la stabilite asymptotiquement de l'erreur quelques soient les conditions initiales $X(0)$, $Y(0)$, $K_n + D_{ku}(0)$ et K_p et $D_{kp}(0)$.

Remarque:

Si on choisi $K_u = K_p = 0$ on obtient ce qu'on appelle le MCS (minimal controler synthesis) [6].

Discussion des résultats:

1) Dans cet algorithme la stabilite asymptotique de l'erreur est assuree quelque soit K_p , K_u , $D_{ku}(0)$ et $D_{kp}(0)$. Si K_p et K_u verifient les conditions d'ERZBERGER, alors on garantit la poursuite.

2) Le choix de la matrice Q a une grande influence. Les resultats experimentaux ont montre que le choix de Q diagonale ameliore l'erreur e .

3) Cet algorithme s'applique pour des systemes inconnus, or le calcul du compensateur D necessite la connaissance de la matrice B , on peut prendre $B_p = B_p^0 R$ ou B_p^0 est une matrice connue et R une matrice definie positive.

Si B_p et B_p^0 ont la meme structure, on peut prendre $B_p = B_m$.

4) Dans le cas ou le systeme est non lineaire, on peut mettre le systeme sous la forme $\dot{X} = AX + Bu + d(t)$ ou $d(t)$ comporte toute les non linearites. on peut traiter le probleme en considerant $d(t)$ comme une perturbation.

CONCLUSION:

Ce chapitre clot la theorie de la commande adaptative par modele de reference basé sur l'hyperstabilite. La structure retenue est celle du parallele-parallele.

L'algorithme sera utilise avec l'adaptation parametrique pour les

systemes siso discret et l'adaptation par la synthese d'un signal
pour les systemes multivariables.

REFERENCES:

1. Y.D.LANDAU, ADAPTATIVE CONTROL: the model reference approach, New York 1979.
2. J.M. DION and I.D.LANDAU, aperçu des methodes algebriques utilisees pour l'etude de la commande des systemes lineaires, Part 1, Rev.RAIRO JAUNE, NO.2, 125-160 (1977).
3. H.SCHNEIDER and G.P. BARNER, Matrices and LINEAR ALGEBRA, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968.
4. Y.T.Chen, perfect model following with a real model, in proceedings of the JACC, paper 10-5, 1973.
5. I.D.LANDAU and B.courtiol, design of multivariable adaptative model following control systems, automatica, 10, 483-494 (1974).
6. D.P.Stolen and H.Benchoubane, Impirical studies of an M.R.A.C. algorithm with minimal controller synthesis .INT. J.control .1990 vol 51, NO 4,823-84

CHAPITRE 5: APPLICATION AUX SYSTEMES MONOVARIABLE:

5-1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre , nous allons valider la theorie decrite dans les chapitres precedents par la simulation de quelques exemples de systemes monovariabiles.

Deux programmes de simulation ont ete developpé. Le premier pour les systemes discrets en utilisant la methode de l'adaptation des parametres, le second pour les systemes mono ou multivariabiles developpé par la méthode de synthese d'un signal auxiliaire.

Cette methode utilisé pour la resolution des systemes d'equations différentielles la méthode de range kutta 4^o ordre développée avec le compilateur turbo pascal 5.5.

Ce chapitre est organisé comme suit:

on commencera par un exemple simple du premier ordre, ensuite la commande en position d'un moteur à courant continu et enfin la commande en vitesse de ce même moteur.

5-2 COMMANDE D'UN SYSTEME DU PREMIER ORDRE

Soit le système instable décrit par l'equation aux differences suivante:

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) \quad (5-1)$$

où :

U(k): l'entrée du systeme.

Y(k): la sortie du système.

$A(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$.

$B(q^{-1}) = 1$.

Choisissons le modele de référence suivant:

$$y(k) = 0.9y(k-1) + 0.1u(k) \quad (5-2)$$

L'algorithme d'adaptation permet de varier les éléments ajustables $A(q-1)$ et $B(q-1)$ de telle sorte que le système suit le modèle de référence.

Le résultat de la simulation est donné à la figure 5-1. On voit bien que malgré le fait que le système est divergent, la commande adaptative parvient à le stabiliser.

5-3 COMMANDE EN POSITION D'UN MOTEUR A COURANT CONTINU

Soit le moteur donné par l'équation d'état en grandeurs relatives (en négligeant l'inductance) [1]:

$$\begin{pmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/T_m & K_m/T_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} U$$

avec

$$K_m = (K_c/R) / (F_t + (K_c \cdot K_e)/R)$$

$$T_m = J_t / (F_t + (K_c \cdot K_e)/R)$$

où

Y_1 : représente la position du moteur

Y_2 : représente la vitesse

R : résistance du moteur

J_t : moment d'inertie

F_t : force de frottement

Application numérique

$$R = 4 \Omega$$

$$K_c = 0.049 \text{ MKSA}$$

$$K_e = 0.06 \text{ MKSA}$$

$$J_t = 140.7 \times 10^{-6} \text{ MKSA}$$

$$F_t = 267.6 \times 10^{-6} \text{ MKSA}$$

Le modèle de référence choisi étant donné par:

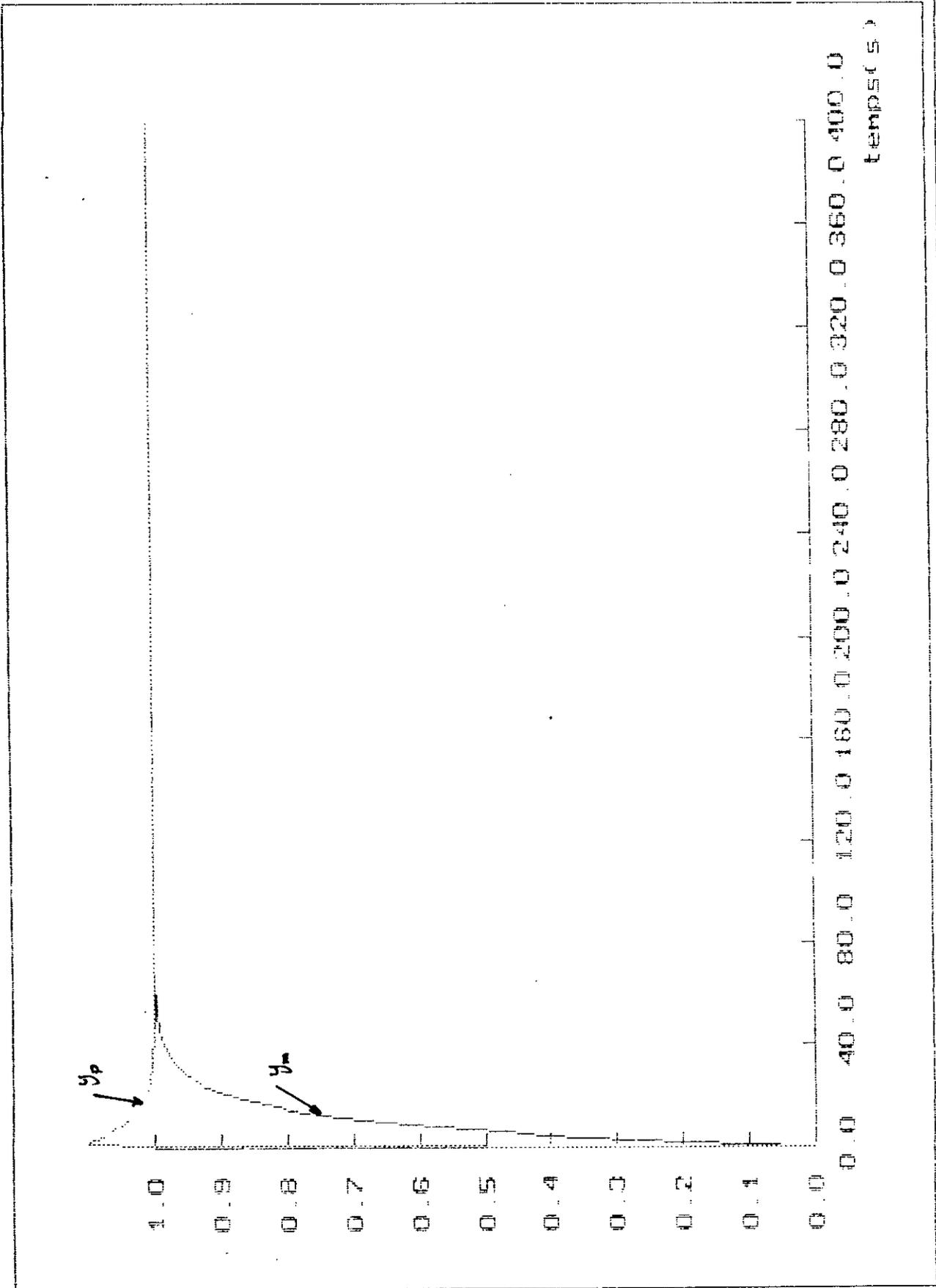


fig 5-1 système du premier ordre

L'algorithme d'adaptation permet de varier les éléments ajustables $A(q-1)$ et $B(q-1)$ de telle sorte que le système suit le modèle de référence.

Le résultat de la simulation est donné à la figure 5-1. On voit bien que malgré le système est divergent la commande adaptative parvient à le stabiliser.

5-3 COMMANDE EN POSITION D'UN MOTEUR A COURANT CONTINU

Soit le moteur donné par l'équation d'état en grandeurs relatives (en négligeant l'inductance) [1]:

$$\begin{pmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/T_m & K_m/T_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} u$$

avec

$$K_m = (K_c/R) / (F_t + (K_c \cdot K_e)/R)$$

$$T_m = J_t / (F_t + (K_c \cdot K_e)/R)$$

où

Y_1 : représente la position du moteur

Y_2 : représente la vitesse

R : résistance du moteur

J_t : moment d'inertie

F_t : force de frottement

Application numérique

$$R = 4 \Omega$$

$$K_c = 0.049 \text{ MKSA}$$

$$K_e = 0.06 \text{ MKSA}$$

$$J_t = 140.7 \cdot 10^{-6} \text{ MKSA}$$

$$F_t = 267.6 \cdot 10^{-6} \text{ MKSA}$$

Le modèle de référence choisie étant donné par:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1024 & -64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (5-4)$$

La méthode d'adaptation par la synthèse d'un signal pour générer la commande adaptative u est appliquée dans ce cas.

Pour ceci on doit calculer d'abord le compensateur D qui garantit la stabilité du bloc de la chaîne directe.

$$D = B^T P$$

où P est une matrice définie positive vérifiant l'équation de Lyapounov:

$$A_m^T P + P A_m - Q \quad (5-5)$$

La matrice Q étant choisie diagonale de la forme:

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5-6)$$

P est une matrice symétrique ayant la forme:

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{pmatrix} \quad (5-7)$$

La résolution de l'équation de Lyapounov donne:

$$P_1 = 8.51, \quad P_2 = 0.008, \quad P_3 = 0.005$$

$$D=B^T P=(1 \ 87.28) \begin{pmatrix} 8.51 & 0.005 \\ 0.005 & 0.008 \end{pmatrix} \quad (5-8)$$

On trouve

$$D=(8.95 \ 0.7)$$

les matrices de ponderations adéquates trouvées par experimentation sont:

$$F_a=F_b=\text{diag}[10]$$

$$G_a=G_b=\text{diag}[0.5]$$

Les resultats de simulation du calcul en position sont données figure 5-2. On voit que le système suit très bien le modèle de référence.

L'évolution de la commande est illustrée 5-3 dans les normes. Les résultats de simulation de la même commande en position avec bruitage sont donnés figure 5-4, 5-5, ces figures montrent qu'il existe un léger dépassement entre la réponse du système et le modèle.

Néanmoins cette variation ne dépasse pas 2.5% pour un bruit blanc de 5%.

En conclusion on peut dire que le moteur répond très bien avec un temps de réponse de l'ordre de 0.2 seconde et suit tres bien le modele de référence.

5-4 COMMANDE EN VITESSE D'UN MOTEUR A COURANT CONTINU

Le même moteur que celui précédent ,mais cette fois avec inductance plus importante est utilisé dans ce qui suit.

L'equation d'état en grandeur relative est:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R/L & -6/L \\ 0.01Kc & -Ft/Jt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10/L \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (5-9)$$

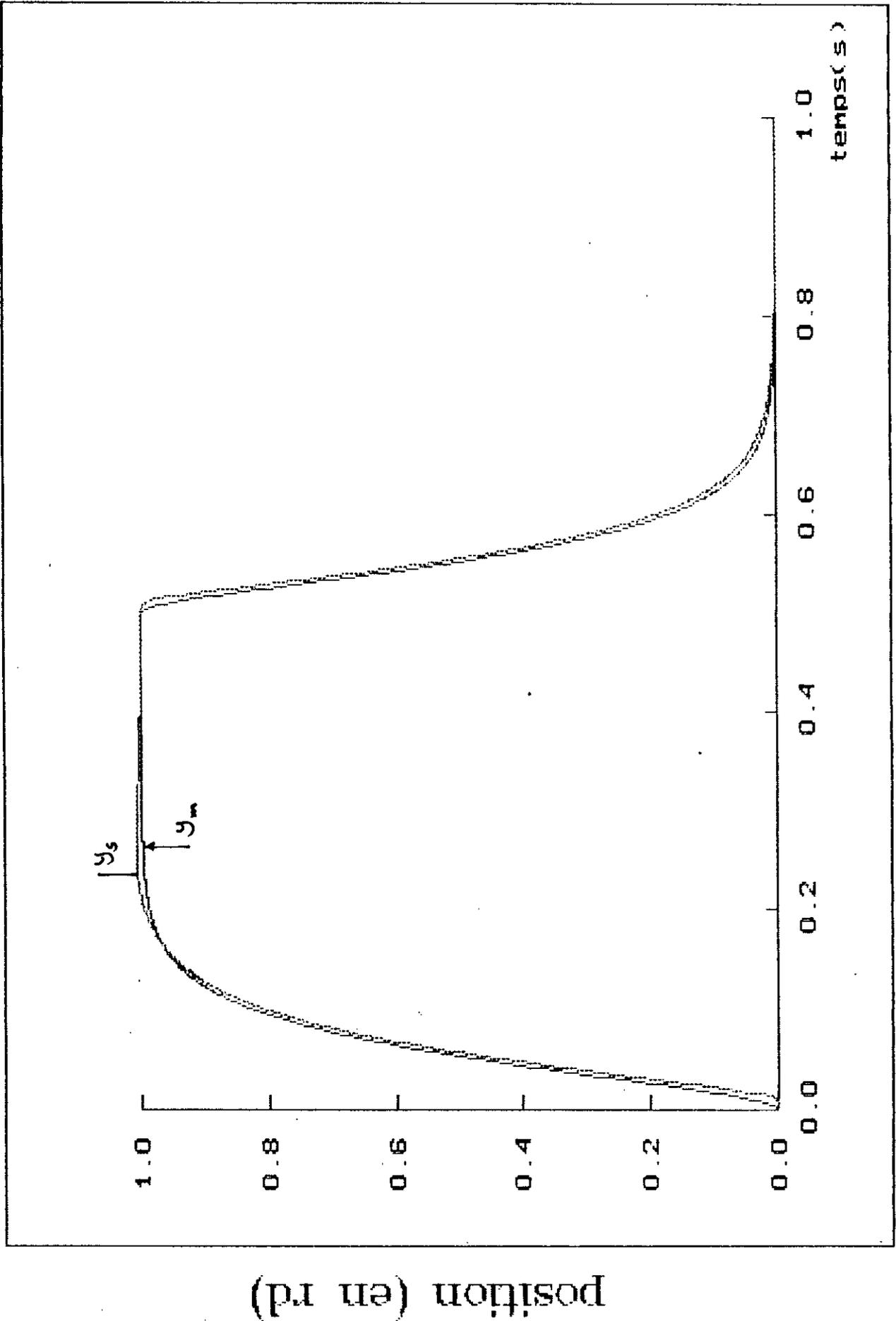


fig 5-2 commande en position

evolution de la commande (en volt)

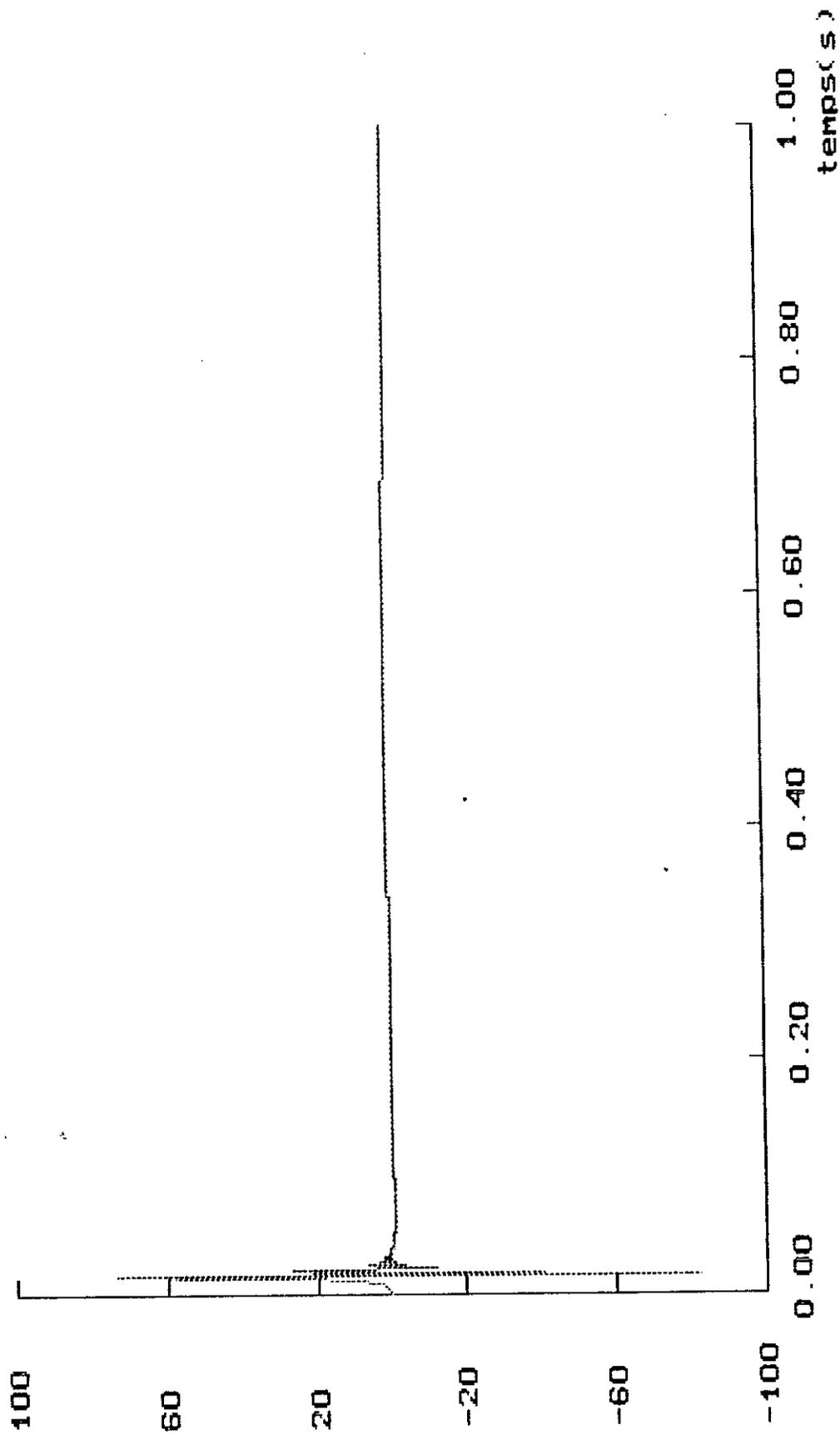


fig 5-3 commande en position

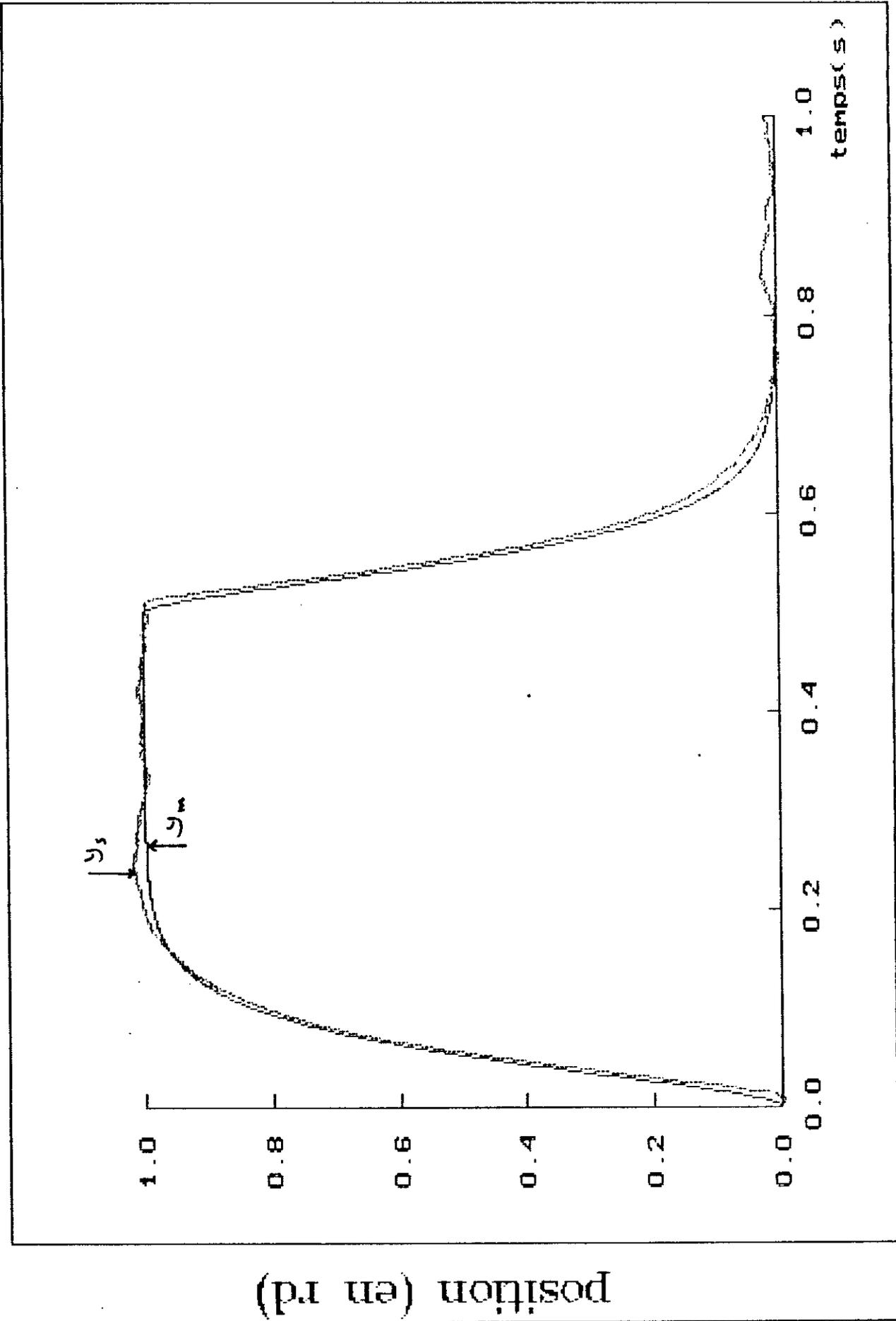


fig 5-4 commande en position avec bruit

evolution de la commande (en volt)

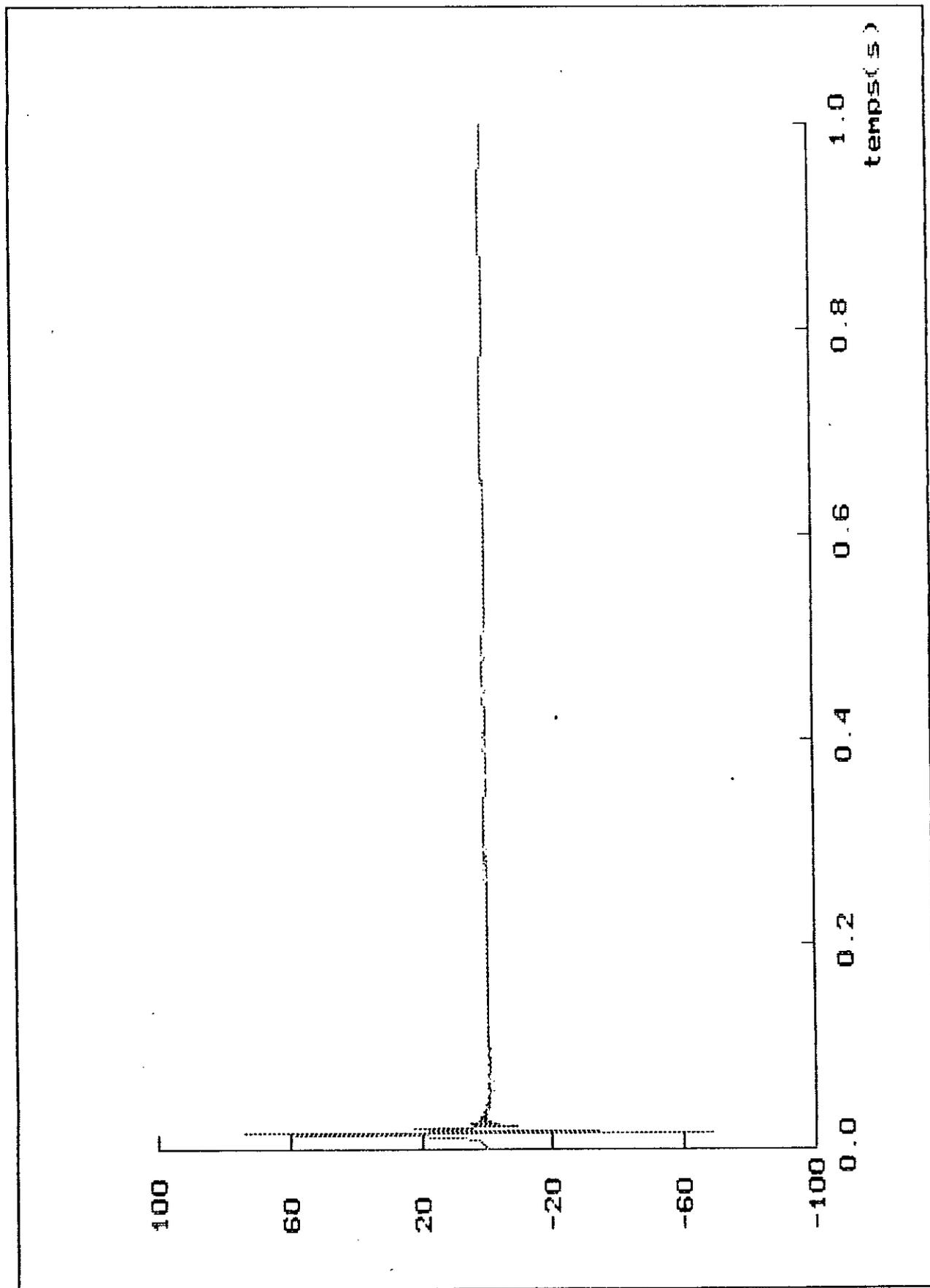


fig 5-5 commande en position avec bruit

L: inductance du moteur

Y1: courant

Y2: vitesse

Application numerique

L:=2.1e-2 H

On garde les même valeurs que précédement pour les autres paramètres

Le modele de référence étant choisi:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} r \quad (5-10)$$

avec $x_1(0)=0.55$ et $x_2(0)=0$

Le compensateur D qui garantit la stabilité du bloc lineaire est:

$$d := b^T p$$

où P solution de la matrice de lyapounov

On choisit Q diagonale :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \quad (5-11)$$

On pondère plus la vitesse car c'est ce qu'on veut commander

La matrice P est donnée par l'équation (8)

La résolution de l'équation de lyapounov donne:

$P_3=0$, $P_2=0.3$, P_1 quelconque

Le compensateur D est donné par:

$$D = b'p$$

Dans cette exemple on suppose que le système est inconnu donc B n'est pas connu ,mais comme on l'a vu au chapitre précédent on peut prendre $Bp=Bm$.

on aura :

$$D=(0 \ 10) \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} = (0 \ 3) \quad (5-12)$$

Ce compensateur garantit la stabilité du bloc lineaire, utilisé dans l'algorithme d'adaptation pour garantir l'hyperstabilité du MRAC.

la simulation de la commande en vitesse est donné à la figure 5-6, on observe un retard qu'on ne peut éviter car imposé par les valeurs admissibles et réalisable du courant.

À la figure 5-9 une variation de la résistance de 25% est introduite. On constate un décalage par rapport au modèle en fait le système est plus long que le modèle.

A la figure 5-12 on introduit une variation du coefficient de frottement et à la figure 5-15 une variation du moment d'inertie Jt . On voit bien que la commande adaptative s'adapte aux différentes variations.

CONCLUSION

Ce chapitre montre l'effet de la commande adaptative par modèle de référence sur des exemples assez simple. Le signal de commande généré par l'algorithme d'adaptation fait en sorte que le système suive le modèle malgré les perturbations , les variations des

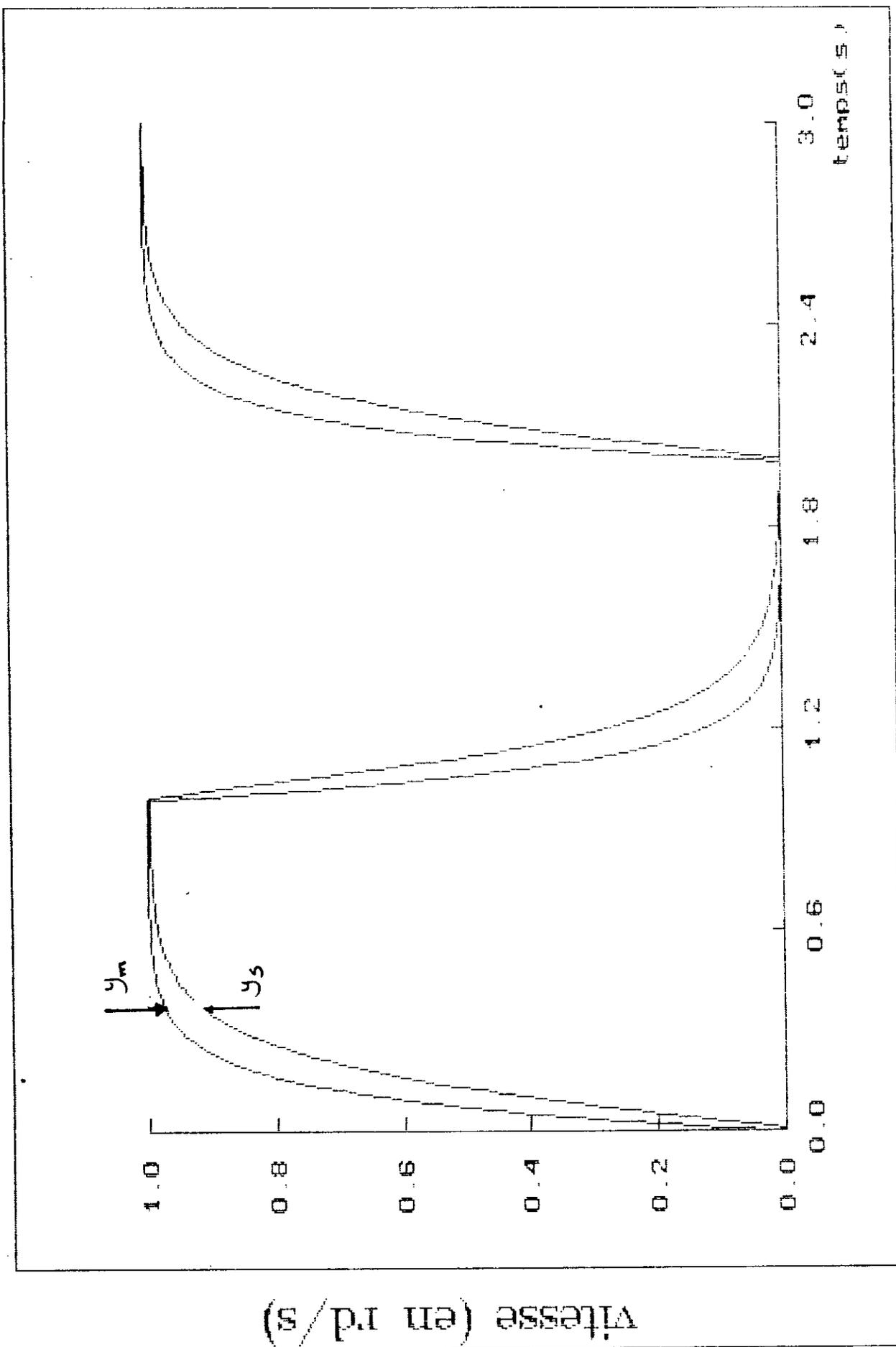


fig 5-6 commande en vitesse

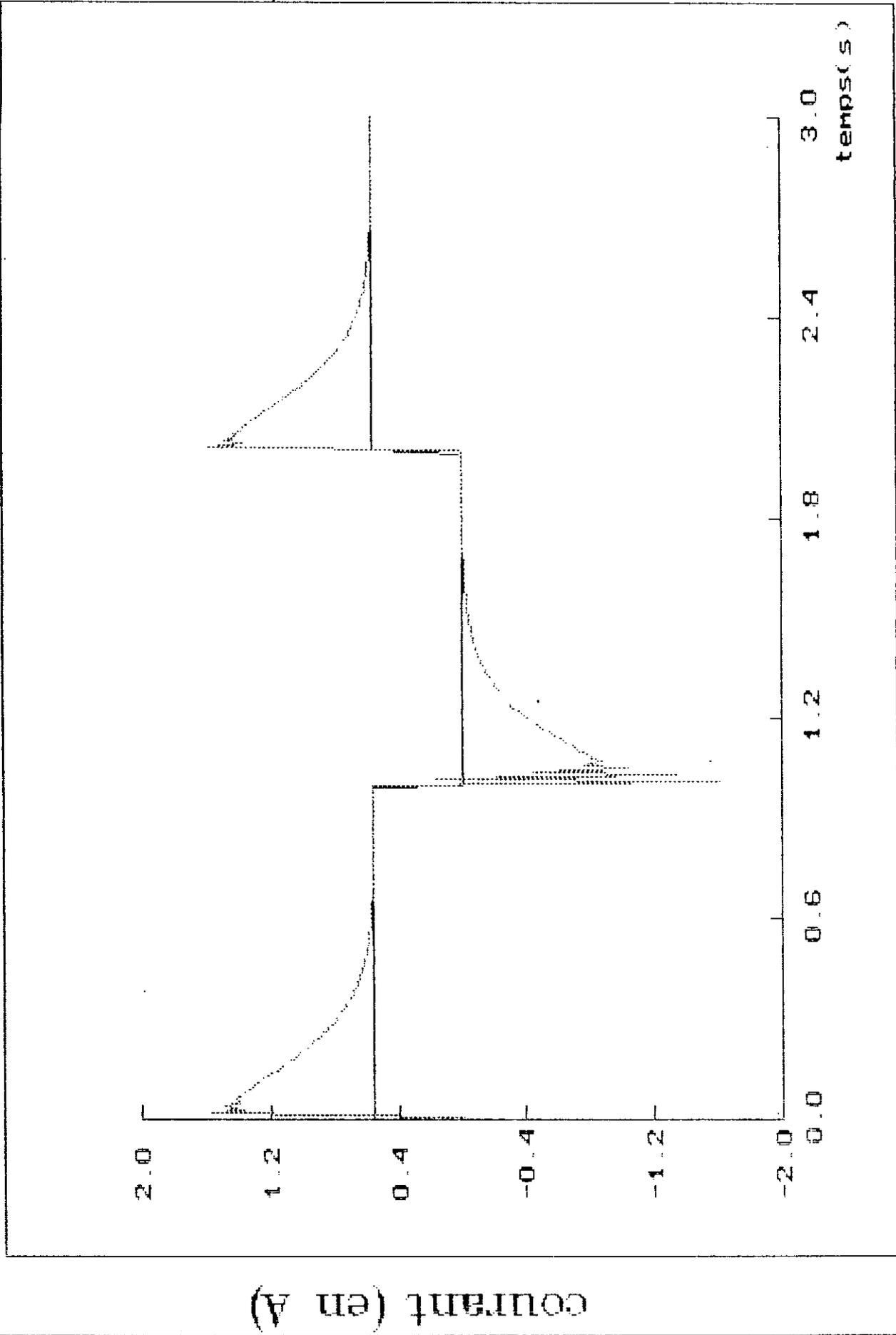


fig 5-7 commande en vitesse

MRAC

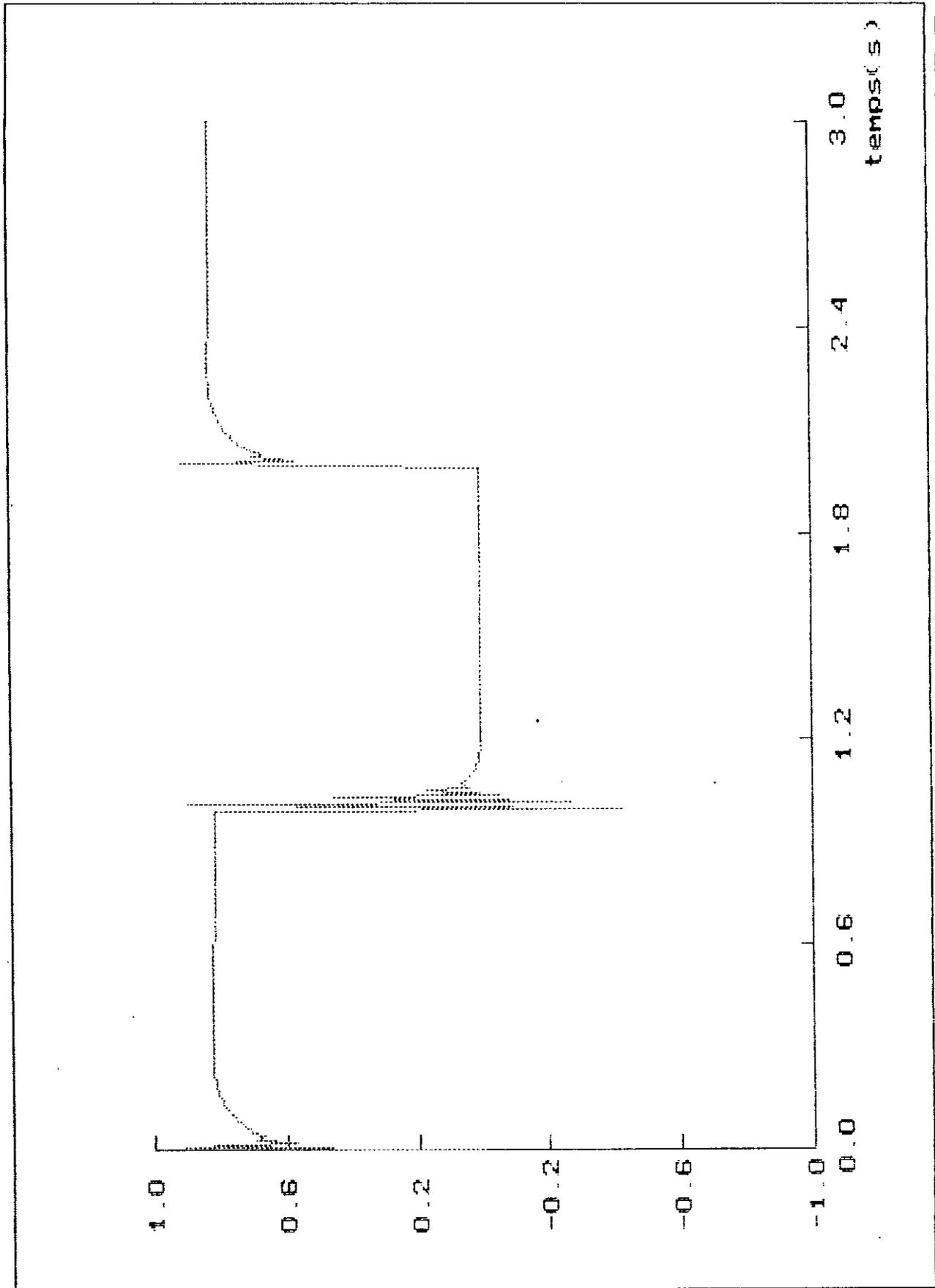


fig 5-8 commande en vitesse

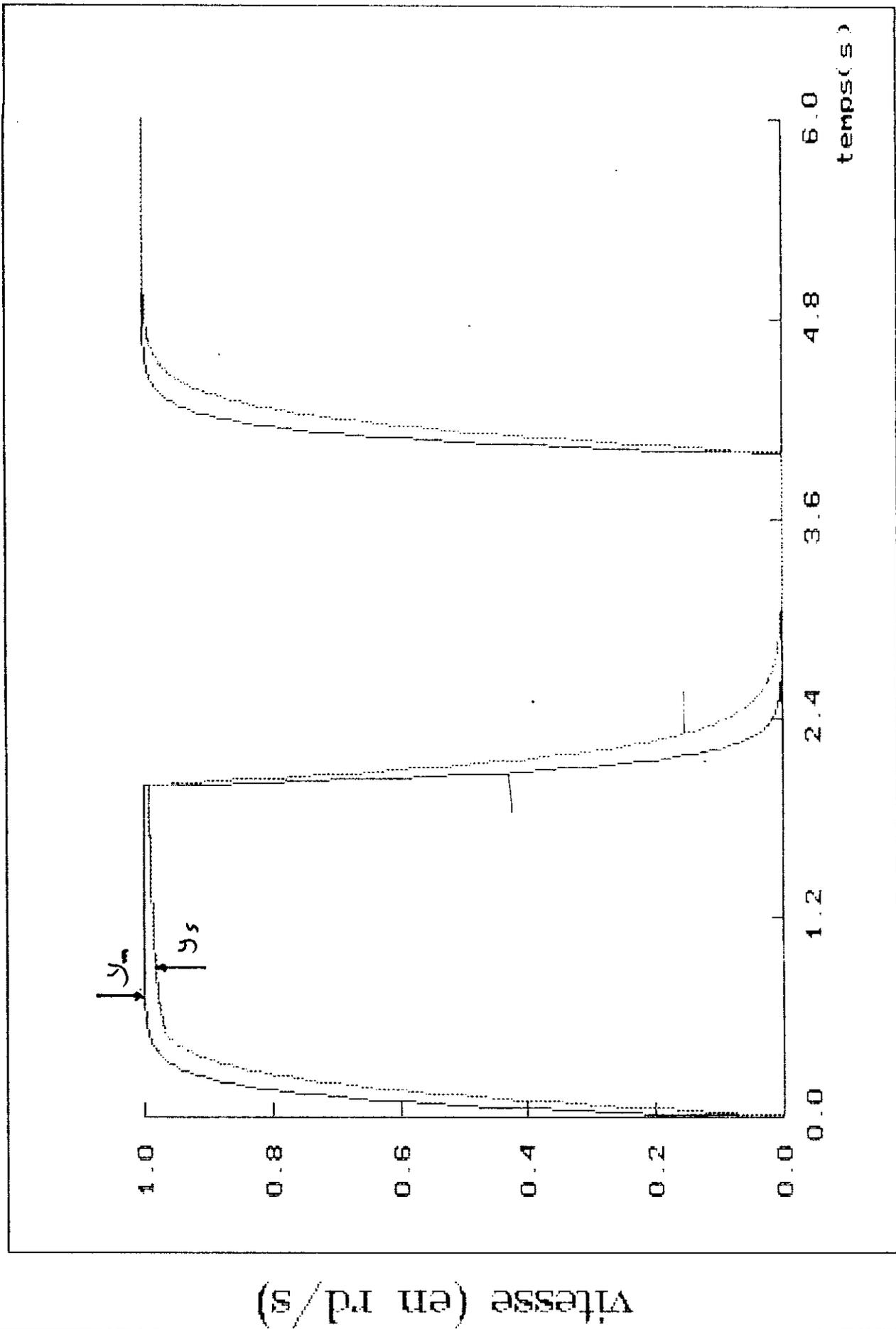


fig 5-9 commande en vitesse : variation de R

MRAC

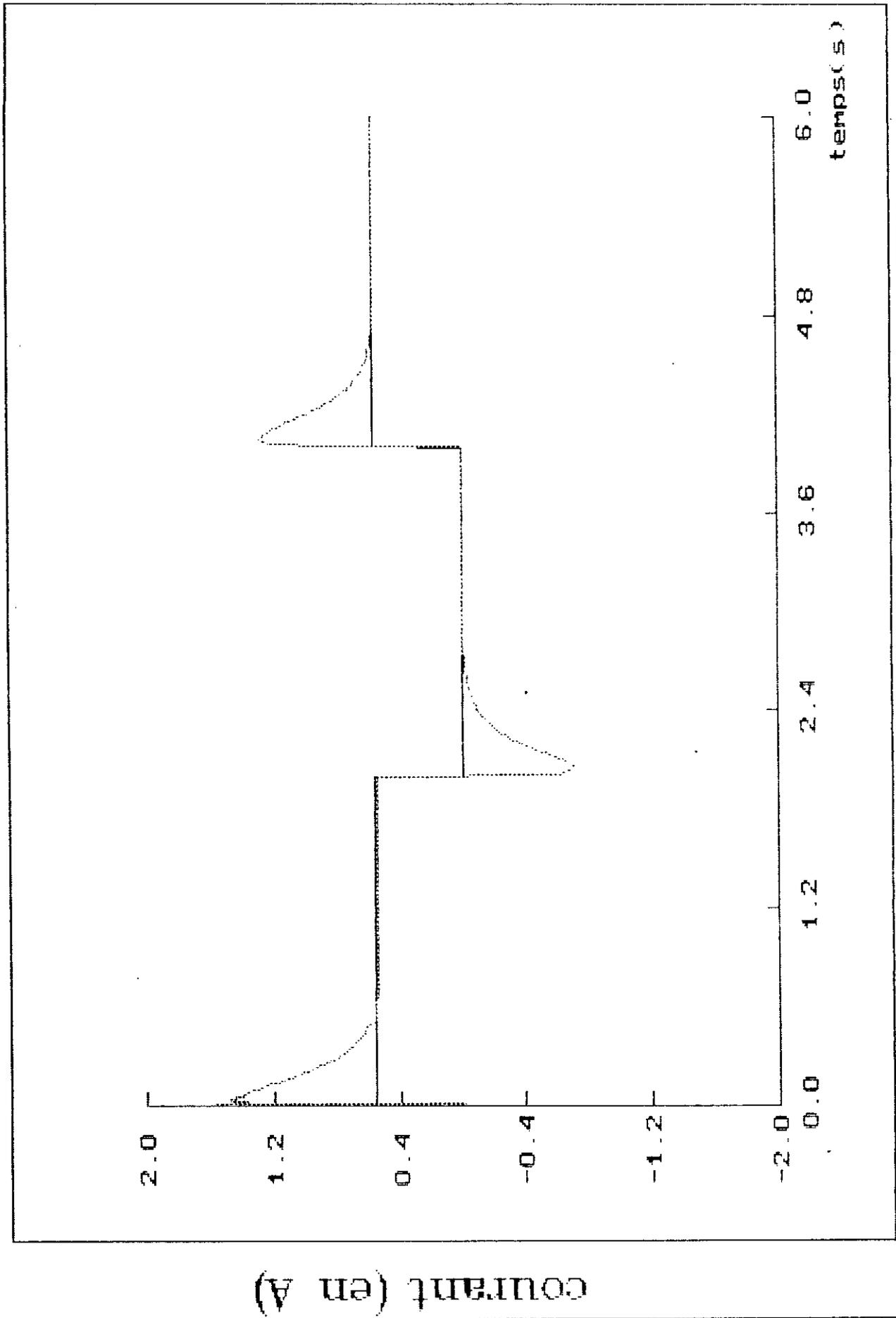


fig 5-10 commande en vitesse : variation de R

evolution de la commande (en volt)

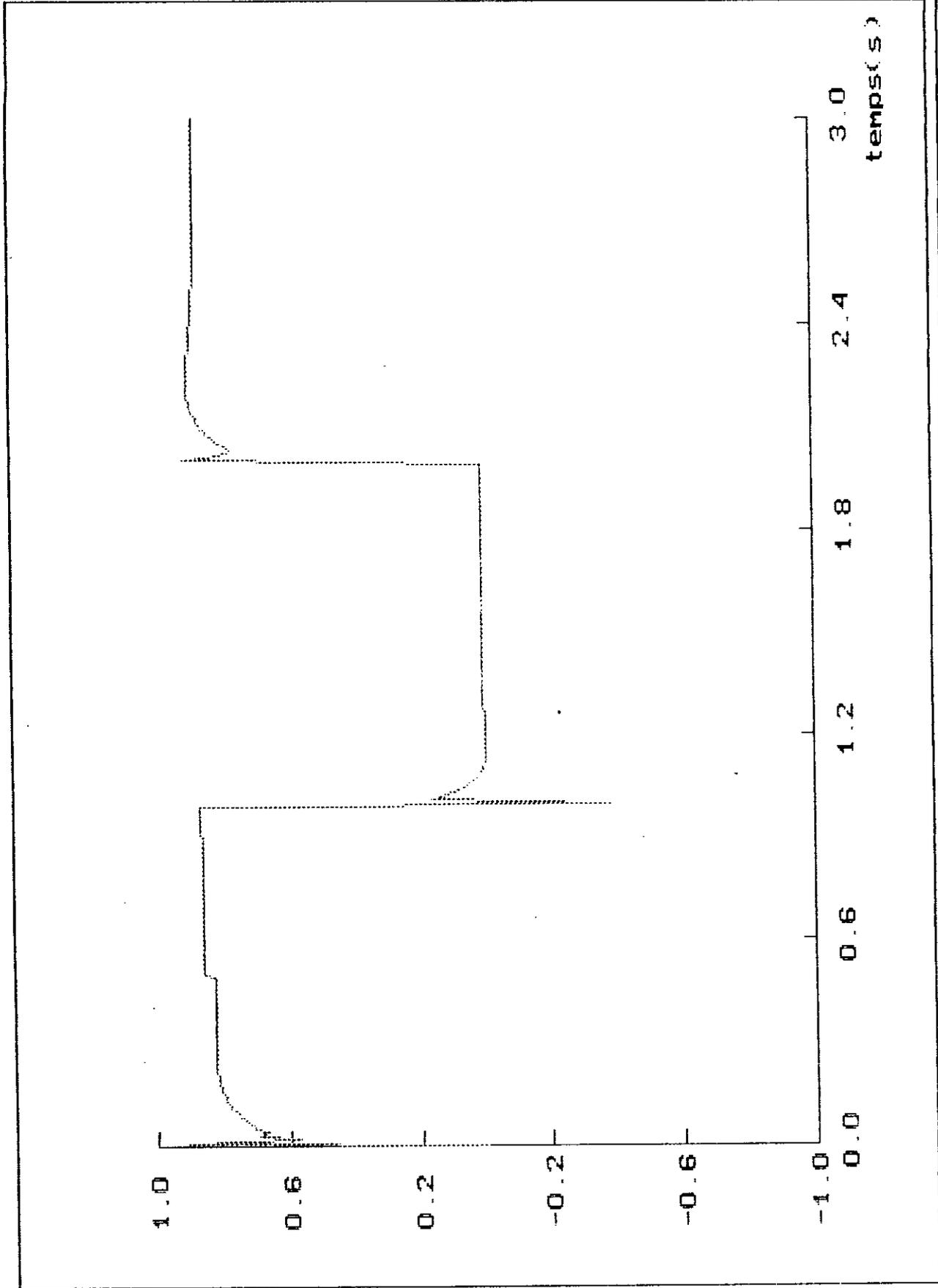


fig 5-11 commande en vitesse :variation de R

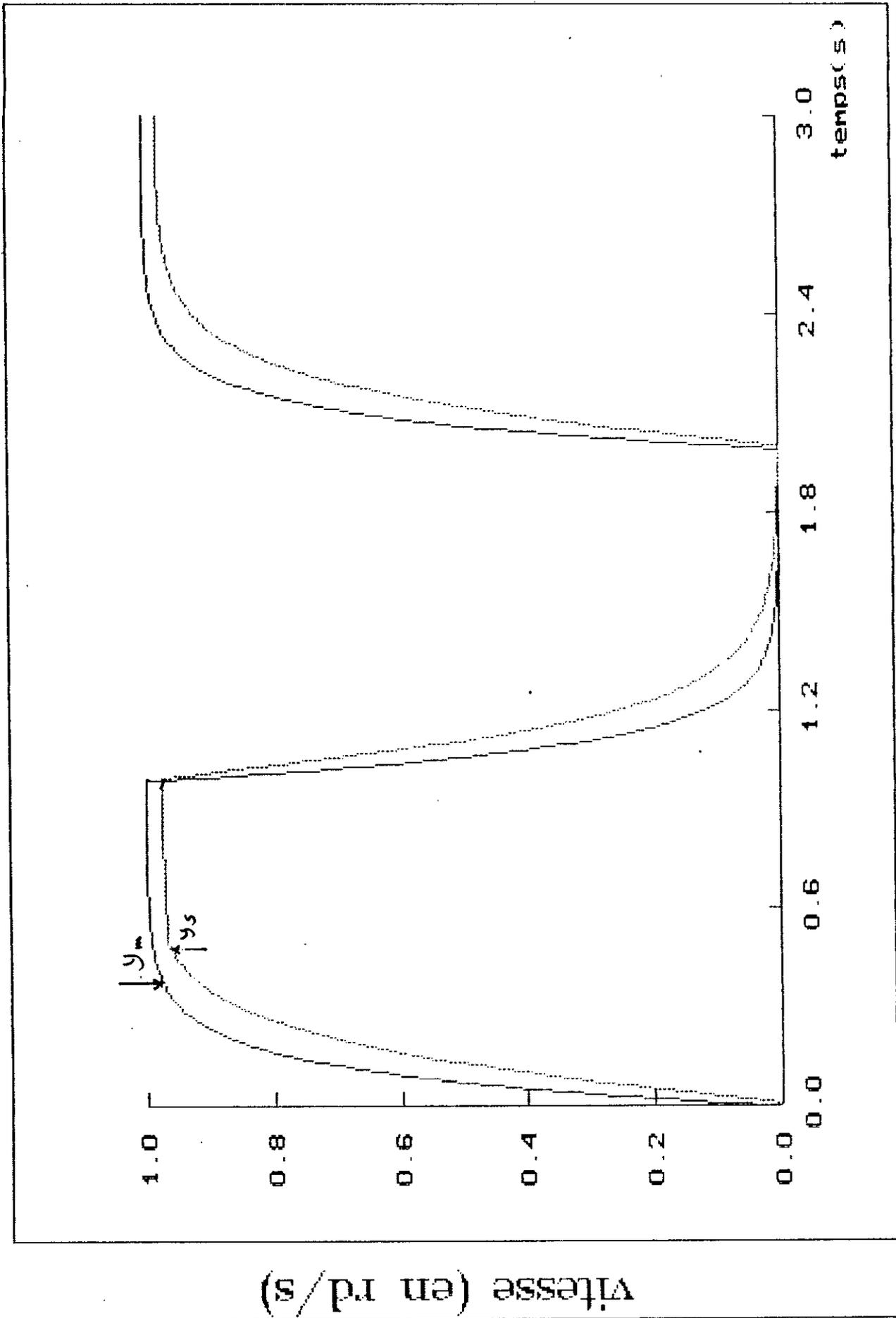


fig 5-12 commande en vitesse : variation de Ft

MRAC

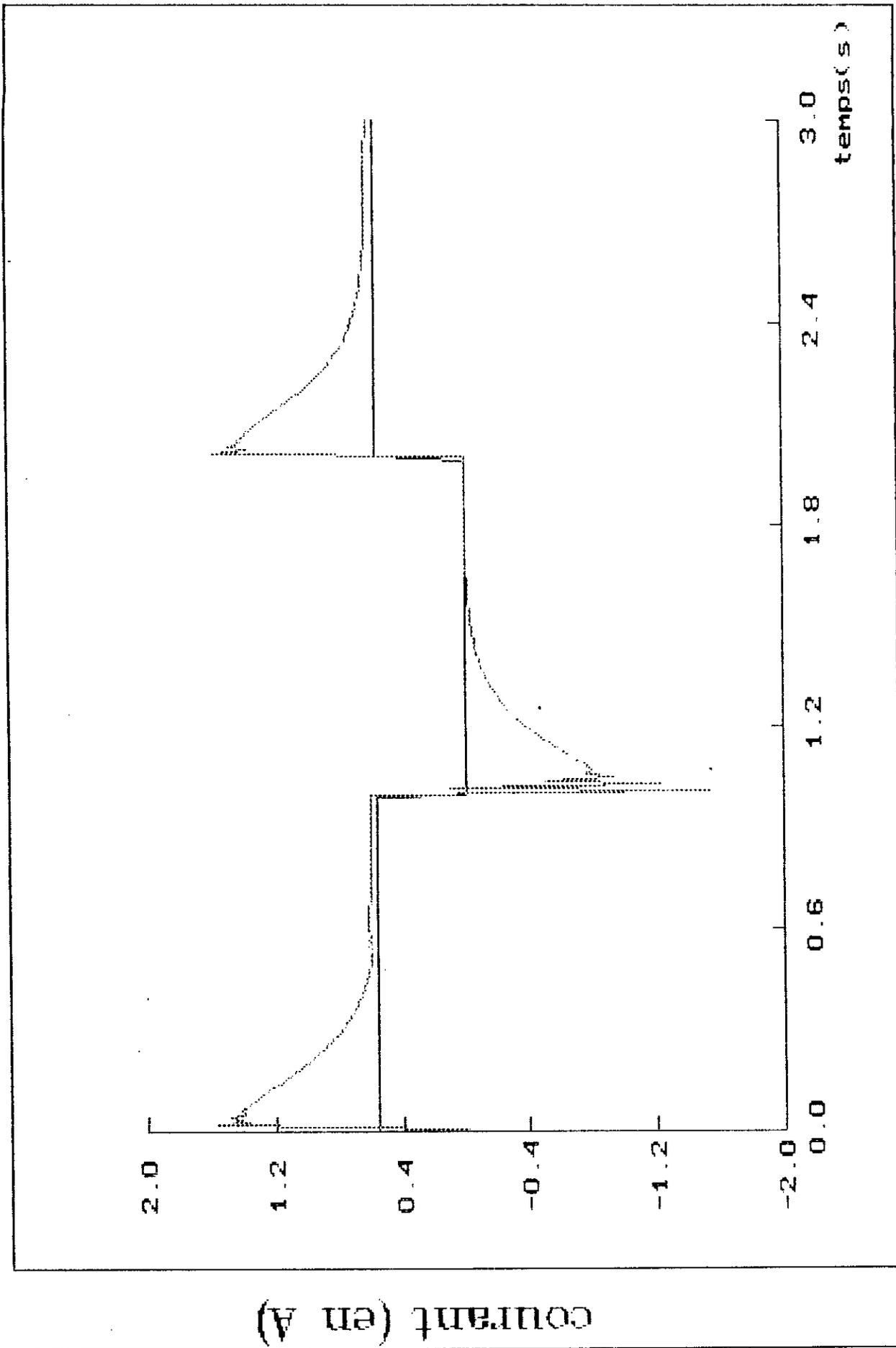


fig 5-13 commande en vitesse : variation de Ft

evolution de la commande (en rd/s)

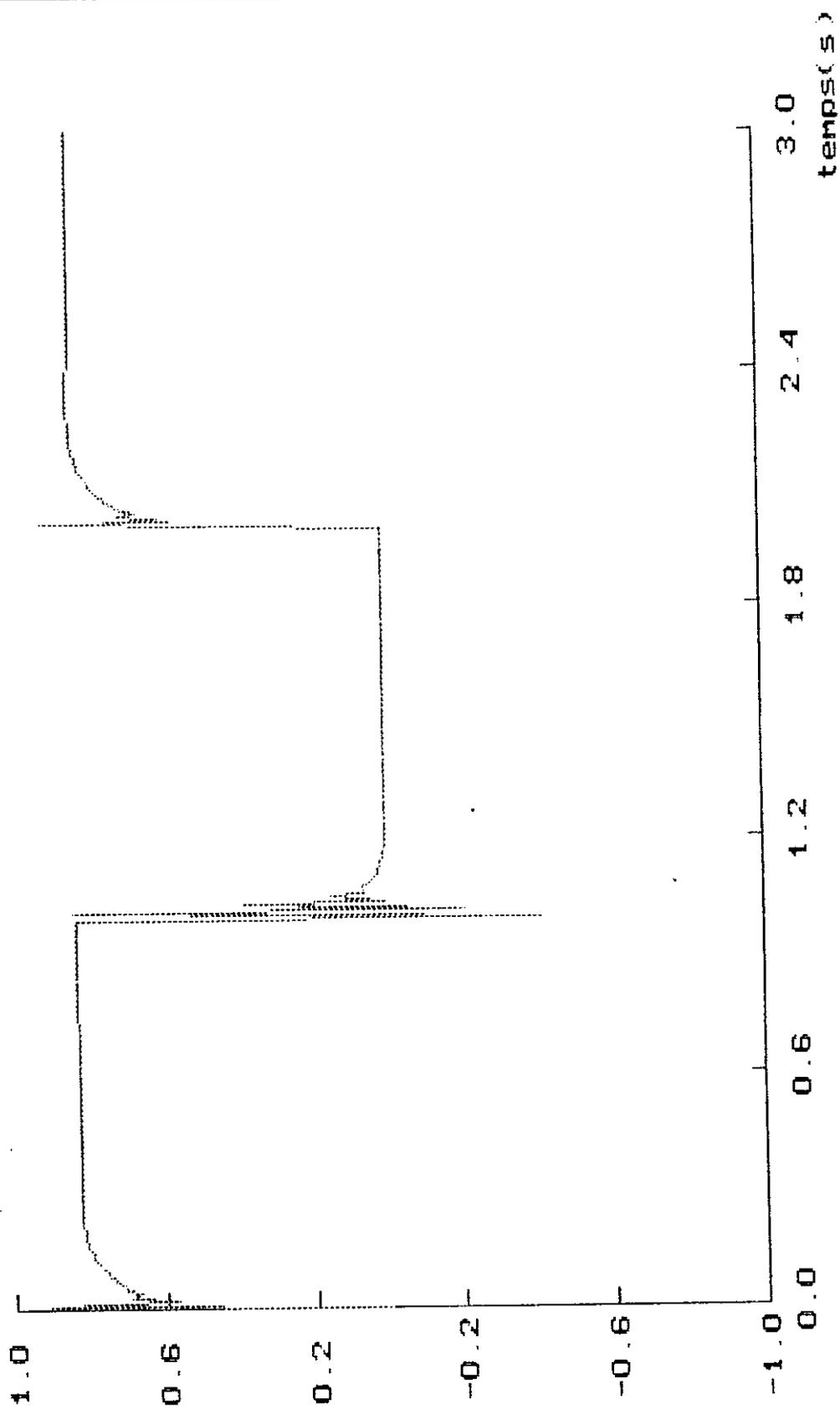


fig 5-14 commande en vitesse :variation de Ft

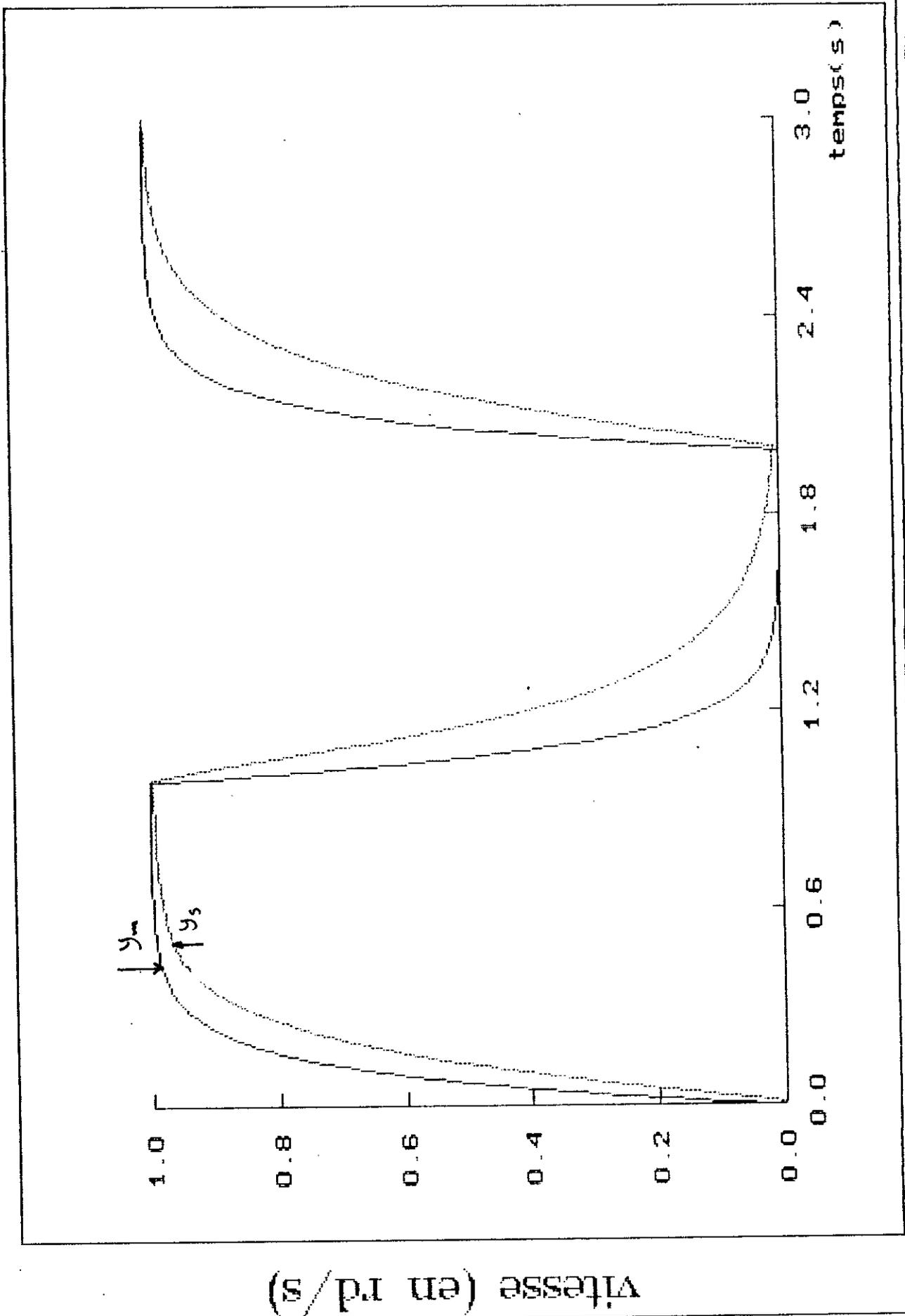


fig 5-15 commande en vitesse : variation de J_t

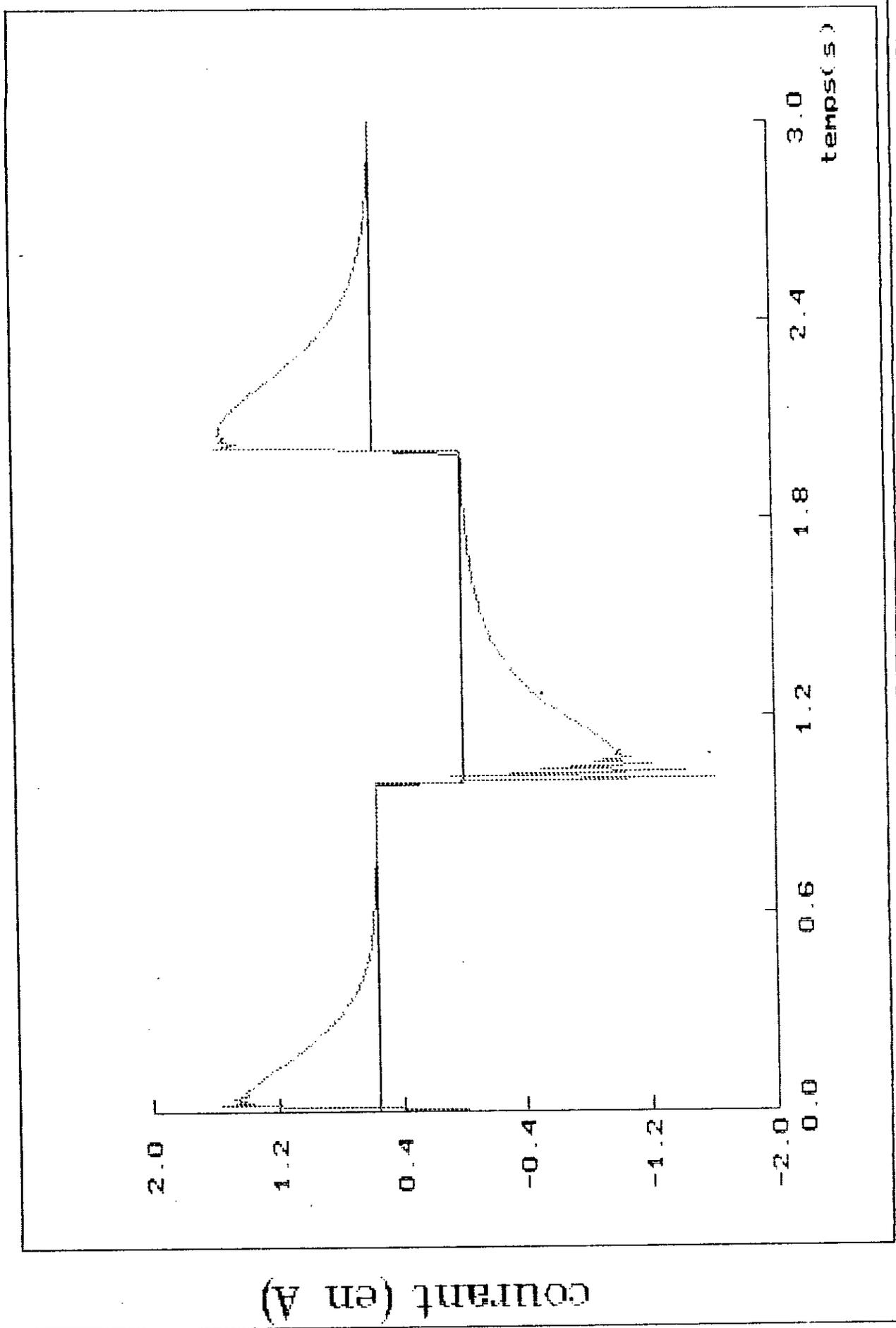


fig 5-16 commande en vitesse : variation de Jt

MRAC

evolution de la commande (en volt)

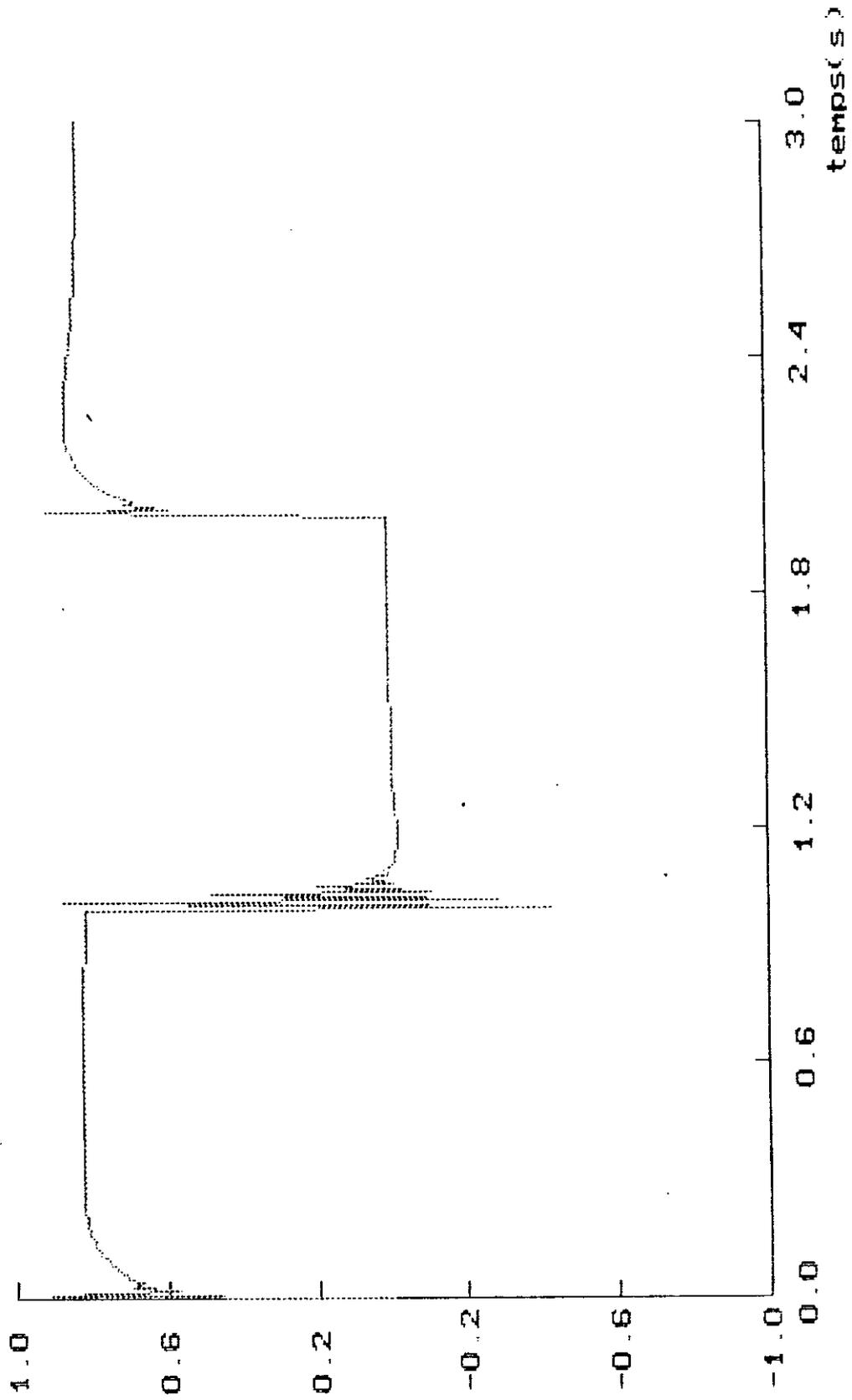


fig 5-17 commande en vitesse :variation de Jt

MRAC

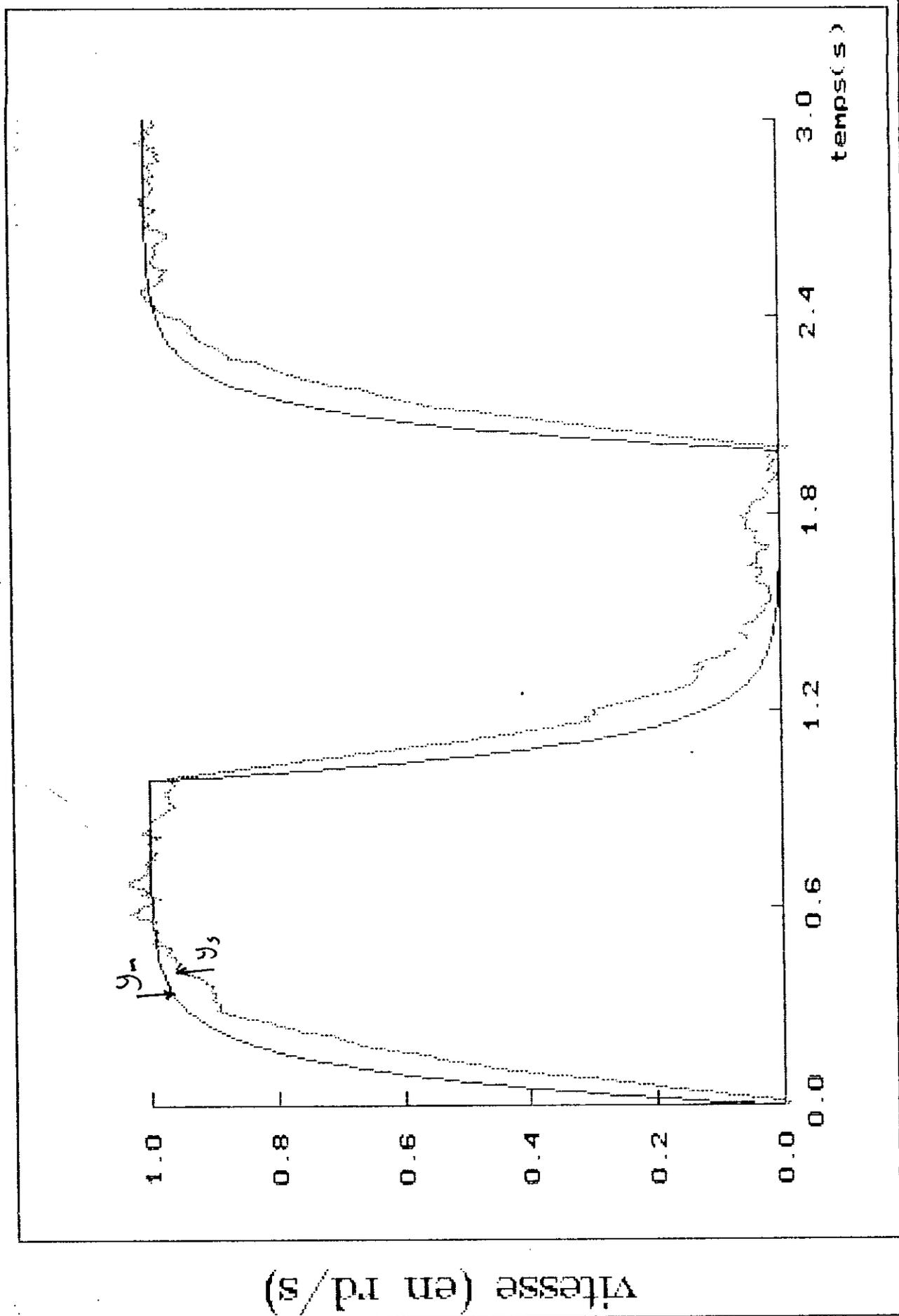


fig 5-18 commande en vitesse avec bruit

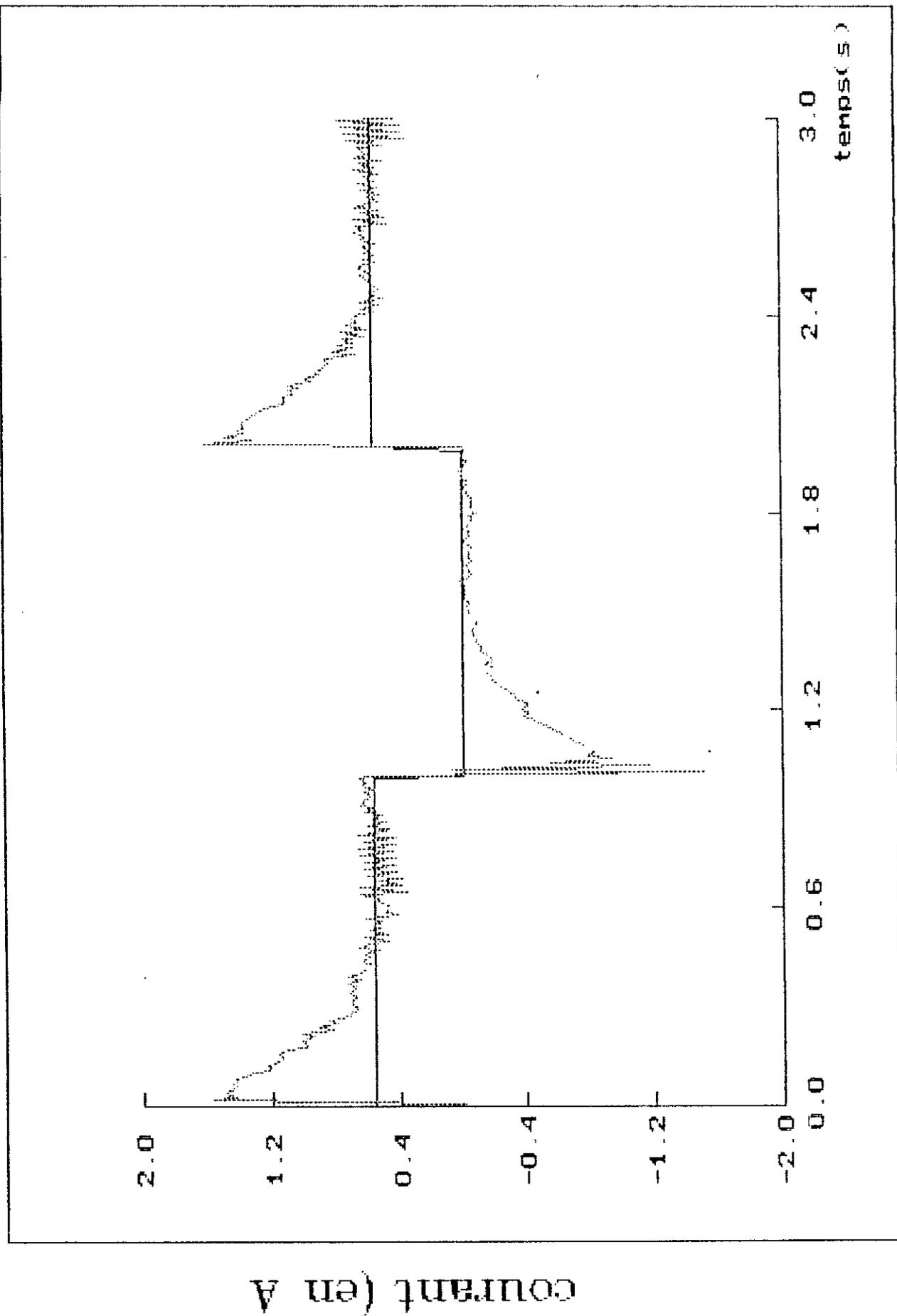


fig 5-19 commande en vitesse avec bruit

MRAC

evolution de la commande (en volt)

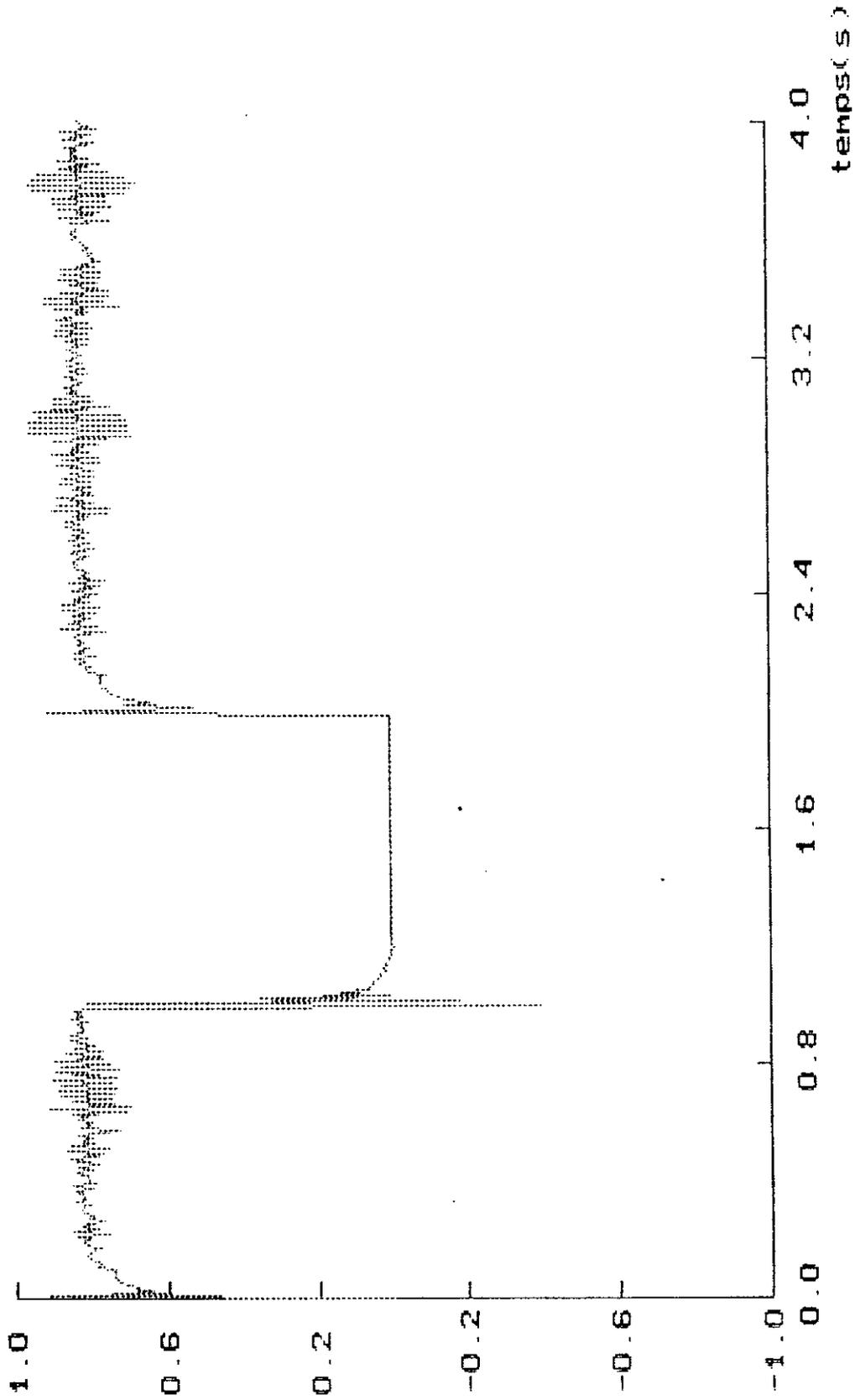


fig 5-20 commande en vitesse avec bruit

parametres et même quand le système est inconnu(cas de la commande en vitesse).

Dans le chapitre suivant nous allons prouver la robustesse du MRAC par l'application aux systèmes multivariables fortement non linéaires et couplés comme les robots.

REFERENCES

1. Travaux pratiques 4 eme annee : regulation des processus industriels .

CHAPITRE VI COMMANDE ADAPTATIVE DE ROBOTS
MANIPULATEURS

6-1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre , nous allons appliqué la commande adaptative par modele de reference à des systèmes multivariables qui sont les robots.

Nous allons appliqué la technique de l'adaptation par signal de synthese(signal synthesis adaptation) pour deux robots à trois degrés de liberté. Le premier est de classe 4, le second de classe 1. ce sont les plus utilisés dans l'industrie [1].

6-2 COMMANDE ADAPTATIVE DU ROBOT CLASSE 4

6-2-1 Modele mathematique du robot classe 4

Le manipulateur classe 4 est un robot à trois degrés de liberté composé de deux translations et d'une rotation .

le schema de ce manipulateur est donné à la figure 6-1 [1].

Les coordonnées généralisés sont x_{11}, x_{21} pour le mouvement de translation et x_{31} pour le mouvement de rotation.

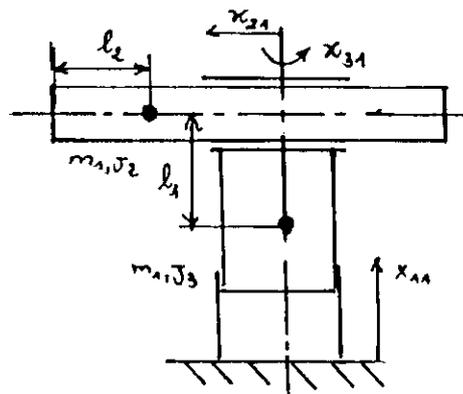


fig 6-1

$\dot{x}_{12}, \dot{x}_{22}$ et \dot{x}_{32} represente les vitesses succesives de x_{11}, x_{21} et x_{31} .

Les equation du manipulateur sont devellpées par la methode de lagrange euler:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{i2}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_{i1}} = q_i \quad (6-1)$$

où L: represente le lagrangien

q_i : force generalisées

les equations qui en résultent sont non lineaires et peuvent etre mises sous la forme d'etat ci-dessous [1].

Notons que tous les termes non lineaires sont regroupés dans le vecteur perturbation $d(t)$:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + d(t) \quad (6-2)$$

$$\text{où } x(t) = [x_{11} \ x_{12} \ x_{21} \ x_{22} \ x_{31} \ x_{32}]^T$$

$$U(t) = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T : \text{vecteur de commande}$$

Les matrices A, B, d sont données par [1]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1/m^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_2/m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_3/j^* \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k_3/m^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2/m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3/j^* \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ d1 \\ 0 \\ d2 \\ 0 \\ d3 \end{bmatrix}$$

avec $d1 = -g$

$$d2 = (x_{21} - l_2) x_{32}^2$$

$$d3 = [-m_2 x_{21} (x_{21} - l_2) x_{32} - 2m_2 (x_{21} - l_2) x_{22} x_{32}] / j^*$$

où g : gravité

C_i : coefficients de viscosité par friction aux coordonnées

x_{i1}

K_i : le gain du moteur

m_1 : masse du link 1

m_2 : masse du link 2

$$m^* = m_1 + m_2$$

$$j^* = j_2 + j_3$$

j_i : moment d'inertie des link i ($i=2,3$)

La résolution de ce système est faite par la méthode de Runge-Kutta 4^{ème} ordre, ce qui nous impose de mettre le système sous la forme

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

on obtient les équations suivantes:

$$\dot{x}_{11} = x_{12}$$

$$\dot{x}_{12} = -c_1/m^* x_{12} + (k_1/m^*) u_1 + d_1$$

$$\dot{x}_{21} = x_{22}$$

$$\dot{x}_{22} = -(c_2/m_2) x_{22} + (k_2/m_2) u_2 + d_2$$

$$\dot{x}_{31} = x_{32}$$

$$\dot{x}_{32} = \frac{[(-c_3/j^*) x_{32} - (2m_2(x_{21}-l_2) x_{22} x_{32}) / j^* + (k_3/j^*) u_3]}{1 + [m_2 x_{21} (x_{21} - 2l_2)] / j^*}$$

application numerique

Les parametres suivants sont reels:

$$L_2 = 0.75\text{m} \quad m_1 = 20\text{kg} \quad m_2 = 10\text{kg} \quad j_2 = 0.2\text{kgm}^2 \quad j_3 = 2\text{kgm}^2$$

$$c_1 = 30\text{Nm}^{-1}\text{s} \quad c_2 = 20\text{Nm}^{-1}\text{s} \quad c_3 = 7.825\text{Nm}^{-1}\text{s} \quad k_1 = 100\text{Nv}^{-1}$$

$$k_2 = 10\text{Nv}^{-1} \quad k_3 = 10\text{Nv}^{-1} \quad g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$$

Les resultats de simulation en boucle ouverte montrent que le robot est instable fig 6-2

Comme le montrent les équations, ce robot est non lineaire et difficile à controller avec la commande classique. Pour cela nous allons utiliser la commande adaptative avec poursuite parfaite du modèle (développée au chapitre 4)

6-2-2 COMMANDE ADAPTATIVE AVEC POURSUITE PARFAITE DU MODELE

En premier on commence par déterminer, la commande linéaire qui garantit la poursuite parfaite du modèle de référence.

Le modèle de référence est donné par:

$$A_m = \text{diag}[A_{m1} | A_{m2} | A_{m3}] \quad \text{et} \quad B_m = \text{diag}[B_{m1} | B_{m2} | B_{m3}]$$

où

$$Am_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -64 & -16 \end{bmatrix} \quad Em_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 64 \end{bmatrix}$$

Le signal de commande linéaire est donné par :

$$up1 = -Kpy + KuUm$$

Les matrices Kp et Ku sont calculées à partir des équations (4-9) et (4-10)

on trouve :

$$Kp = \begin{bmatrix} 19.2 & 4.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 64 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 11.73 \end{bmatrix}$$

$$Ku = \begin{bmatrix} 19.2 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

Calculons maintenant la matrice D de compensation utilisée dans la boucle d'adaptation.

$$D = B^T P$$

P étant la solution de l'équation de Lyapunov

Q étant choisie : $Q = \text{diag}[Q_1, Q_2, Q_3]$

où $Q_i = \text{diag}[q_{i1}, q_{i2}] = \text{diag}[20, 1]$

La solution de l'équation de Lyapunov est donnée par:

$$P = \begin{bmatrix} 5.12 & 0.16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.16 & 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.12 & 0.16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.16 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.12 & 0.16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.16 & 0.04 \end{bmatrix}$$

par consequent la matrice D sera:

$$D = \begin{bmatrix} 0.53 & 0.13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.16 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.05 \end{bmatrix}$$

Ainsi toutes les conditions sont déterminées on peut passer à la simulation.

Le pas d'intégration étant choisit égale à 1 ms est-ce pour éviter les problèmes de divergences. Les matrices de pondérations adéquates sont trouvées par experimentation et sont égales à:

$$F_a = F_b = \text{diag}[25000] \quad \text{et} \quad G_a = G_b = \text{diag}[16].$$

la figure (6-3) illustre les excellentes réponses données par le MRAC. Les réponses du modèle ne distinguent plus de celle du système malgré les non linéarités.

La figure (6-4) montre l' évolution des commandes pour les trois degrés. On peut remarquer une croissance rapide de la commande au début du cycle qui finit par se stabiliser à la fin rapide de la commande du au départ mais finit par se stabiliser.

La figure 6-5 montre les résultats des variations de consigne pour les 3 degrés de liberté. On constate que le robot suit bien le modèle.

Le test de répétabilité illustré à la figure 6-6 montre que la commande ne cumule pas d'erreur.

En conclusion les résultats obtenus montre la performance du contrôleur pour la commande du robot classe 4.

6-3 COMMANDE ADAPTATIVE DU ROBOT CLASSE 1

6-3-1 Modèle mathématique

Le manipulateur classe 1 est à trois degrés de liberté composé de trois rotations. Le schéma du manipulateur est donné à la

MIRAC

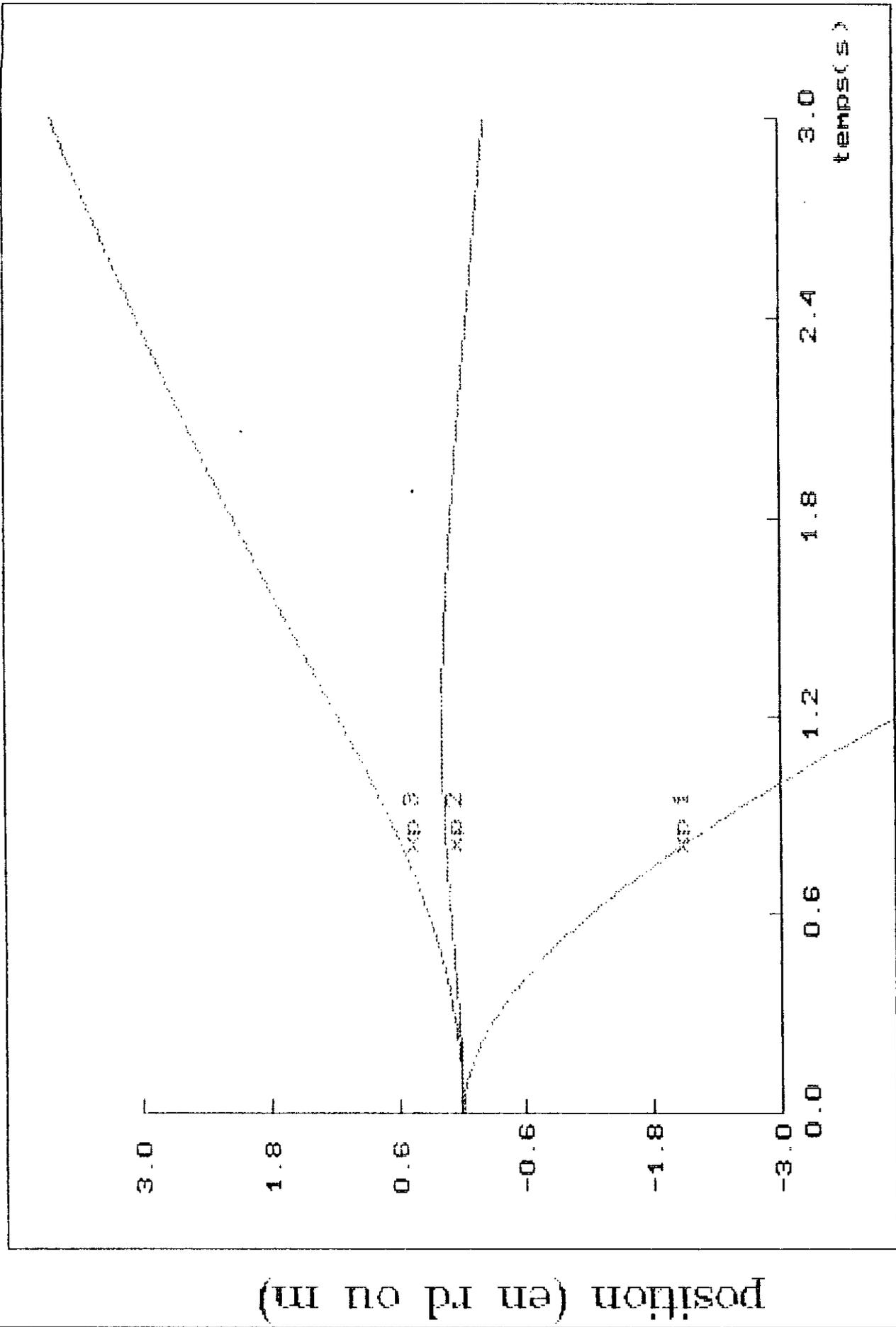


fig 6-2 evolution du robot en B.0

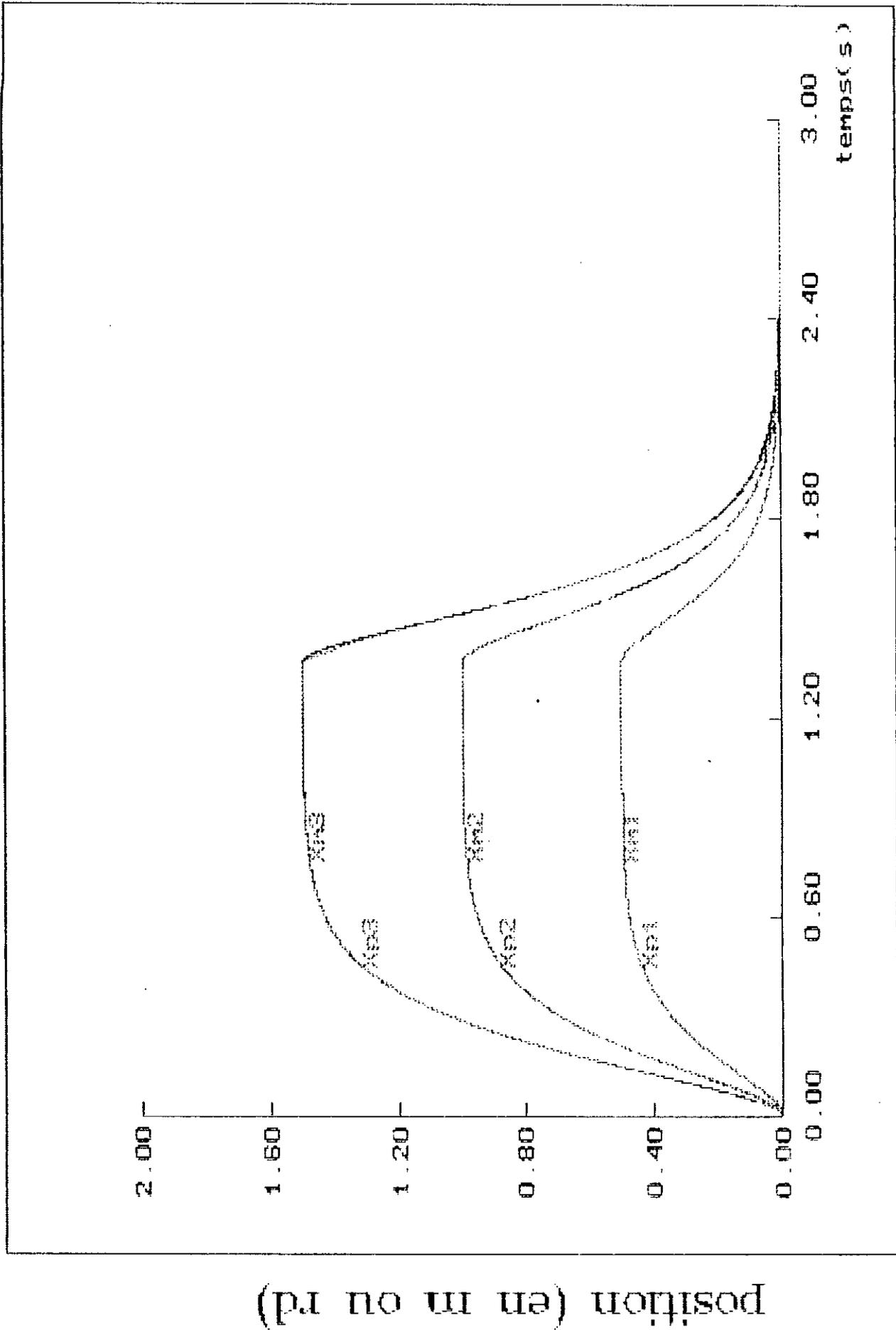


fig 6-3 commande du robot sous AMFC

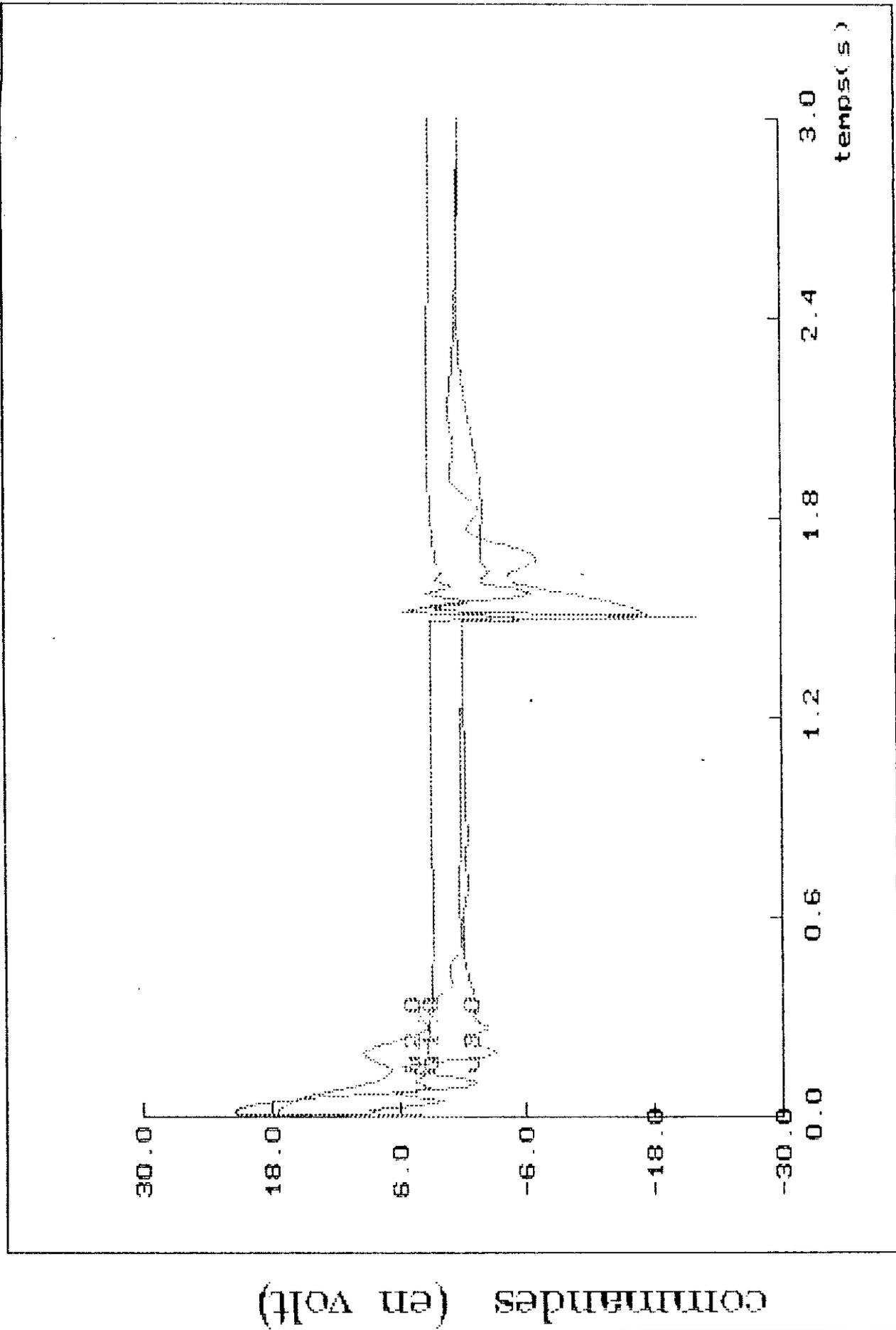


fig 6-4 evolutions des commandes

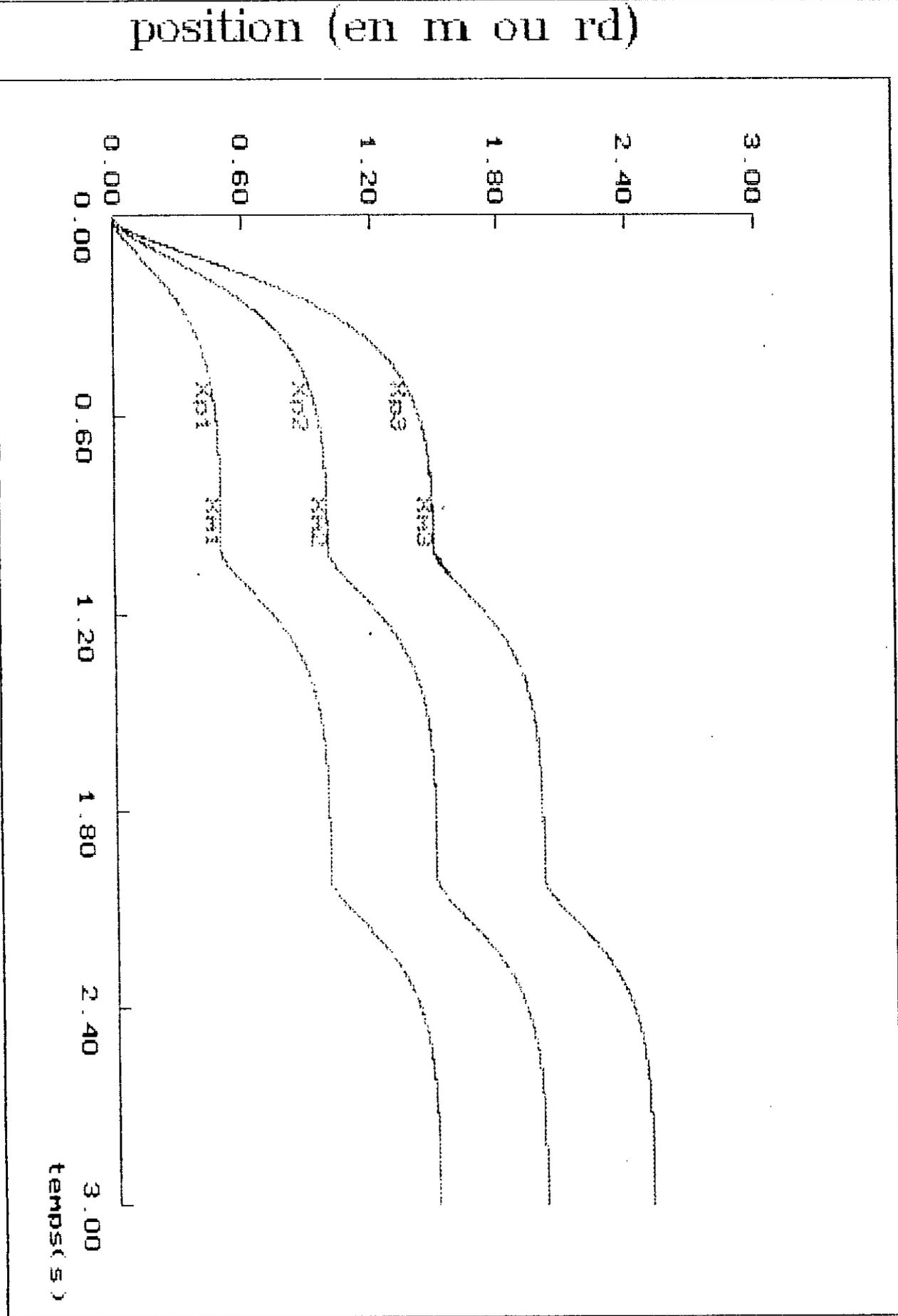


fig 6-5 commande du robot pour differentes consignes

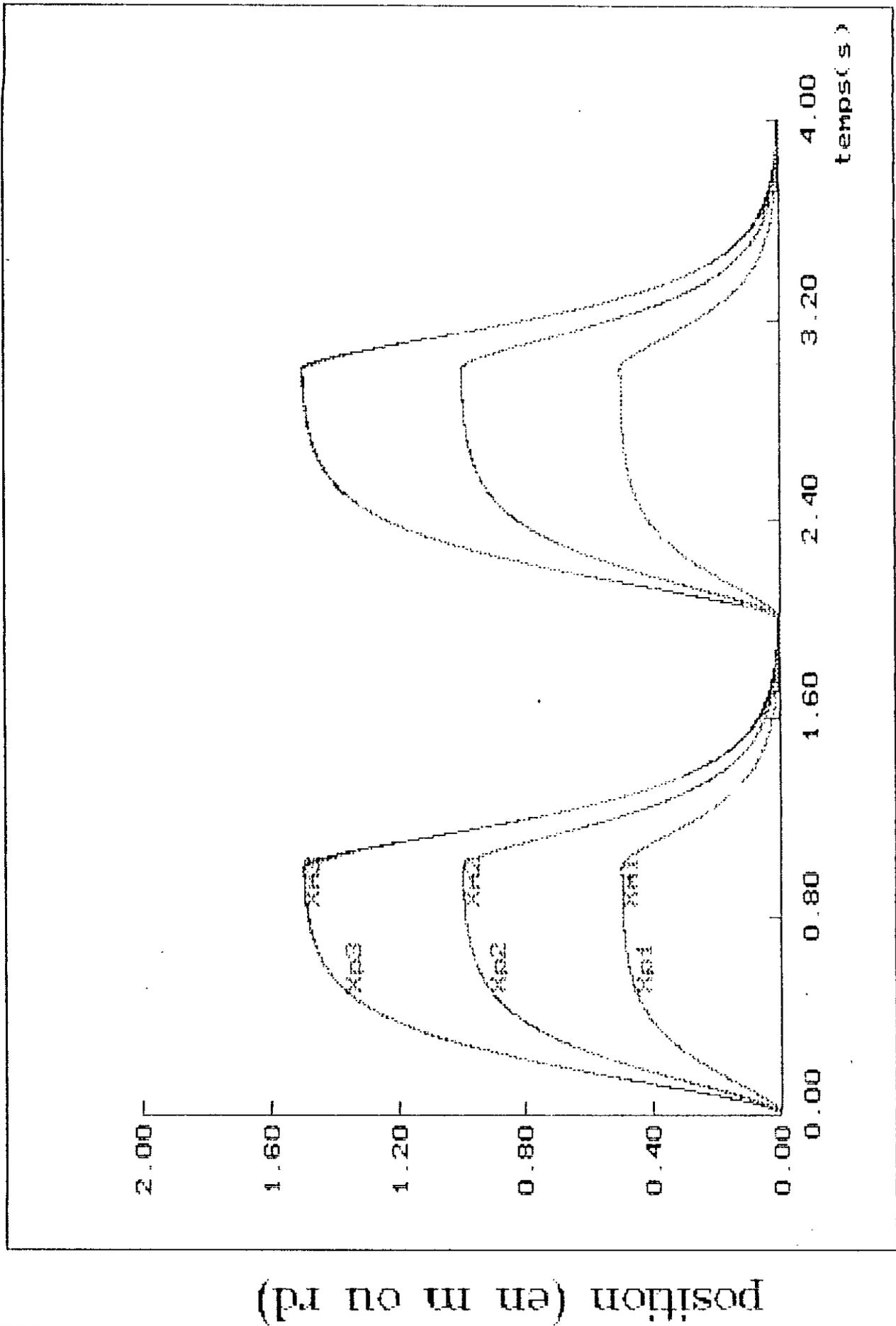


fig 6-6 test de repetabilite

figure (6-7).

Les coordonnées généralisées sont:

$$X1=[X11 \ X21 \ X31]^T \text{ :vecteur position}$$

$$\dot{X}1=[\dot{X}11 \ \dot{X}21 \ \dot{X}31]^T \text{ : vecteur vitesse}$$

$$\ddot{X}L=[\ddot{X}12 \ \ddot{X}22 \ \ddot{X}32]^T \text{ :vecteur acceleration}$$

$$\overset{\cdot}{X}L=[\overset{\cdot}{X}12 \ \overset{\cdot}{X}22 \ \overset{\cdot}{X}32]^T \text{ :vecteur centrifuge}$$

$$\dot{X}.\overset{\cdot}{X}L=[X12.X22 \ X12.X32 \ X22.X32]^T \text{ :vecteur de coriolis}$$

$$U=[u1 \ u2 \ u3]^T \text{ :vecteur de commande}$$

Les equations de lagrange mises sous formes d'etats sont données par[1,2]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + d(t)$$

où :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c1/j1^* & 0 & c2/j1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c1/j1 & 0 & -c2(1/j1^* + 1/j_{x2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c3/j3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k1/j1^* & -k2/j1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k1/j1^* & k2(1/j1^* + 1/j_{x2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k3/j3 \end{bmatrix}$$

$$d(t)=[0 \ d1 \ 0 \ d2 \ 0 \ d3]^T$$

$$d1=(f2-f1)/j1^*$$

$$d2=-d1-f2/j1^*$$

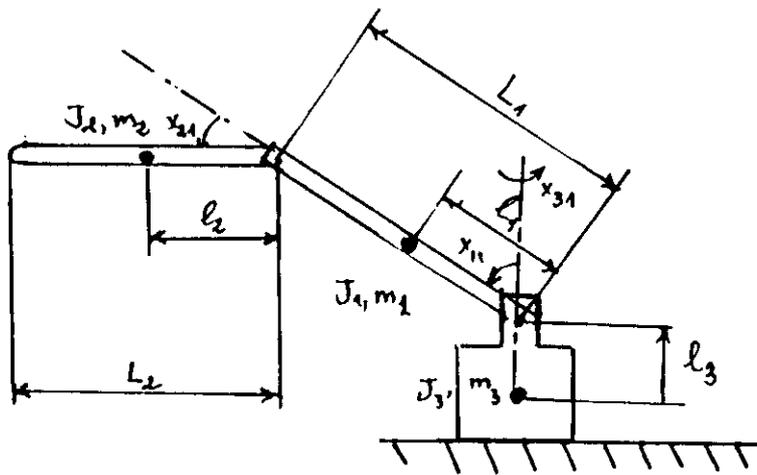


figure 6-7 manipulateur classe 1