

6/99

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

المركز الوطني للبحوث العلمية  
المكتبة — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT  
DE  
GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

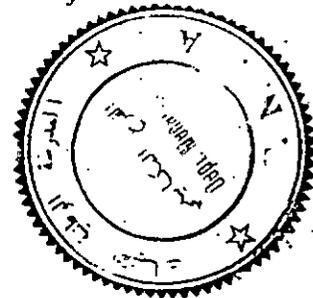
SIMULATION NUMERIQUE DES ECHANGES  
THERMIQUES ASSOCIES  
A UN ECOULEMENT EN CONDUITES  
PERIODIQUES

Proposé et dirigé par :

M. A. BILEK  
M. H. BENNOUR

Etudié par :

M. Mohamed Sofiane KHELLADI



Promotion  
Juin 1999

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA

RECHERCHE SCIENTIFIQUE

المكتبة - المكتبة  
BIBLIOTHEQUE - المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT  
DE  
GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SIMULATION NUMERIQUE DES ECHANGES  
THERMIQUES ASSOCIES  
A UN ECOULEMENT EN CONDUITES  
PERIODIQUES

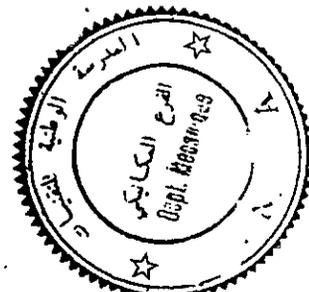
Proposé et dirigé par :

M. A. BILEK  
M. H. BENNOUR

Etudié par :

M. Mohamed Sofiane KHELLADI

Promotion  
Juin 1999



**SIMULATION NUMERIQUE DES ECHANGES THERMIQUES  
ASSOCIES A UN ECOULEMENT  
EN CONDUITES PERIODIQUES**

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
المكتبة - BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

**Proposé et dirigé par :**

Mr. H. BENNOUR

Mr. A. BILEK

**Etudié par :**

Mr. M. S. KHELLADI

**Mots Clefs :** *Equation de continuité, équations de Navier-Stokes, équation de la chaleur, conduites périodiques, conduites à angle vif, conduites à angle arrondi, schéma aux différences finies, méthode de compressibilité artificielle, méthode de sous relaxation.*

**ملخص**

من خلال هذا العمل ، قمنا بدراسة الإنسيابات الإنزلاقية بين صفائح متموجة دورية . تم استعمال تحويل غير عمودي لتهيئة معادلات نافي-ستوكس و معادلة الحرارة ، للهندسة الدورية للمنظومة و ذلك لتسهيل تطبيق الشروط الحدية . تم الحصول على: حقول ، السرعة ، الضغط و درجة الحرارة بالإضافة الى المميزات الحرارية بحل معادلات نافي-ستوكس ومعادلة الحرارة سويا مع طريقة الإنضغاط الإسطناعي ، وحل معادلات نافي-ستوكس و طريقة الإرخاء التحتي لحل معادلة الحرارة .

**RESUME**

Nous avons analysé les écoulements laminaires entre plaques ondulées périodiques, ainsi que les échanges thermiques associés dans le cas d'une température de paroi constante. Une transformation non orthogonale est utilisée pour adapter les équations de Navier-Stokes et l'équation de la chaleur à la géométrie périodique du système nous facilitant ainsi l'application des conditions aux limites. Les champs de vitesses, de pression et de température ainsi que les performances thermiques du système sont obtenus par l'utilisation d'un schéma aux différences finies conjointement avec la méthode de "compressibilité artificielle" pour la résolution des équations de Navier-Stokes et la méthode de "sous relaxation" pour la résolution de l'équation de la chaleur.

**SUMMARY**

We analysed laminar flow and heat transfer characteristics in a corrugated duct in the case of a constant wall temperature. A non orthogonal transformation is used to adapt Navier-Stokes equations and heat transfer equation to the periodic geometry of the system facilitating so the application of boundary conditions . Fields of velocity, pressure and temperature as well as the thermal performances of the system are acquired by the use of a finite difference scheme together with the "artificial compressibility" method for the resolution of Navier-Stokes equations and the "under relaxation" method for the resolution of the heat transfer equation.

**Promotion : juin 1999**

A MES PARENTS

MON FRERE

MES SŒURS

ET A TOUS CEUX QUI ME SONT CHERS



## REMERCIEMENTS

Je remercie vivement M. H. BENNOUR et M. A. BILEK qui ont bien voulu accepter de diriger ce travail. Je leur exprime ma profonde reconnaissance pour leurs précieux conseils et leurs encouragements qui m'ont aidé à mener à terme cette étude.

Je remercie par la même occasion tous les enseignants qui ont marqué mon passage à l'Ecole Nationale Polytechnique et tout particulièrement ceux du département de génie mécanique pour l'enseignement que j'ai eu. Je leur exprime le témoignage de ma sincère gratitude.

*Mohamed Sofiane KHELLADI.*

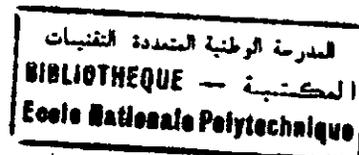
# SOMMAIRE

المركز الوطني للتعدد التقني  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

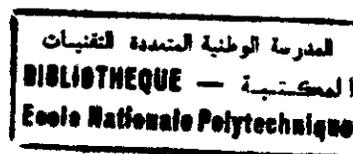
NOMENCLATURE	iii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I : Equations fondamentales	3
Equation de continuité	4
Théorème de la quantité de mouvement (Equation de Navier-Stokes)	6
Equation de l'énergie	10
CHAPITRE II : Présentation du modèle à étudier et position du problème	16
II -1/ Modèle géométrique	16
II -1-1/ Modèle à étudier	17
II -1-2/ Détermination de la fonction $\varepsilon(x)$	18
a) Conduites à angle vif	18
b) Conduites à angle arrondi	20
II -2/ Modèle mathématique	22
II -2 -1/ Hypothèses de base	22
II -2 -2/ Equations	25
II -2 -3/ Changement de repère	28
II -2 -4/ Conditions aux limites	34
II -3 -5/ Conditions de périodicité	35
II -3 -6/ Conditions concernant l'équation de la chaleur	35
CHAPITRE III : Détermination du nombre de Nusselt et du débit de chaleur transféré entre le fluide et la paroi	36
CHAPITRE IV : Modèle numérique pour la résolution des équations de Navier-Stokes	42
IV-1/ Choix du maillage	42
IV-2/ Choix de la méthode de résolution	43
IV-2-1/ Méthode de compressibilité artificielle	44
• Equations de Navier-Stokes	45
• Equation de continuité	45
IV-3/ Discrétisation des équations	45
IV-3-1/ Méthode générale de discrétisation	45
IV-3-2/ Discrétisation des équations de continuité et de Navier Stokes	48
IV-4/ Algorithme de résolution	53

<b>CHAPITRE V : Modèle numérique pour la résolution de l'équation de la chaleur</b>	60
V-1/ Discrétisation de l'équation de la chaleur	60
V-2/ Choix de la méthode de résolution	61
V-3/ Algorithme de résolution	64
<b>CHAPITRE VI : Résultats et interprétation</b>	67
VI-1/ Présentation des résultats et discussion	67
VI -1-1/ Les profils de vitesses et de température, les lignes de courant	68
VI -1-2/ Pression	69
VI -1-3/ Performances thermiques	76
<b>CONCLUSION</b>	84
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	86
<b>ANNEXE I : Description analytique des profils des conduites ondulées</b>	I
<b>ANNEXE II : Détermination des rapports (<math>m_v/m_d</math>), (<math>B_v/B_d</math>) et (<math>Q_v/Q_d</math>)</b>	IV

## NOMENCLATURE



$A_w$	surface d'échange par unité de profondeur [m].
B	chute de pression adimensionnelle périodique.
b	chute de pression par unité de longueur [Pa/m].
C	coefficient de compressibilité artificielle.
$C_p$	chaleur spécifique (supposée constante).
$D_h$	diamètre hydraulique.
$\vec{e}_x, \vec{e}_y$	vecteurs directeurs dans les directions x, y.
$\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta$	vecteurs directeurs dans les directions $\xi, \eta$ .
H	distance perpendiculaire aux deux parois [m].
H'	distance verticale entre les deux parois [m].
$\overline{H}$	enthalpie.
h	coefficient d'échange thermique [W/m <sup>2</sup> K].
k	conductivité thermique [W/mK].
L	longueur de la conduite (période) [m].
l	demi-longueur de l'arc aux arêtes vives de la conduite [m].
$\dot{m}$	débit massique par unité de profondeur [kg/ms].
$\vec{n}$	vecteur normal à la surface.
P	pression adimensionnelle.
$\overline{P}$	pression adimensionnelle périodique.
p	pression [Pa].
$\overline{p}$	pression périodique [Pa].
$\Delta p$	différence de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite (période) [Pa].
per	périmètre mouillé.
Pr	nombre de Prandtl.
Q	flux de chaleur échangée par unité de profondeur [W/m].
$\dot{q}$	taux volumique d'énergie thermique générée au sein du système [W/m <sup>3</sup> ].
Re	nombre de Reynolds.
S	section transversale de l'écoulement.
T	température adimensionnelle.
t	température [K].
$t_m$	température moyenne (de référence) pondérée [K].
$t_w$	température des parois [K].
$\frac{t_m - t_w}{L}$	différence de température moyenne logarithmique sur une période.
U, V	composantes adimensionnelles du vecteur vitesse dans le repère $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ .
$U_\xi, U_\eta$	composantes adimensionnelles du vecteur vitesse dans le repère $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta$ .
u, v	composantes du vecteur vitesse dans le repère $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ [m/s].
$u_m$	vitesse moyenne [m/s].
$\sqrt{\overline{V^2}} = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}$	module de la vitesse du fluide.
$\overline{U}$	énergie interne.
X = x/L	abscisse adimensionnelle.
x	abscisse [m].
Y = y/L	ordonnée adimensionnelle.



$y$	ordonnée [m].
$\alpha = 1+\beta^2$	} fonctions géométriques.
$\beta = \partial\delta/\partial\xi$	
$\beta' = \partial\beta/\partial\xi$	
$\Gamma$	frontière du domaine de résolution.
$\delta(X)$	équation adimensionnelle caractéristique de la paroi (distance par rapport à l'axe X)
$\varepsilon(x)$	équation caractéristique de la paroi (distance par rapport à l'axe x) [m]
$\theta$	angle d'ondulation [°]
$\Lambda$	taux volumique de travail des forces de viscosité.
$\lambda$	variation relative de la différence de température moyenne pondérée par rapport à l'axe des (x)
$\mu$	viscosité dynamique [Pa . s].
$\nu$	viscosité cinématique [m <sup>2</sup> /s].
$\rho$	masse volumique [kg/m <sup>3</sup> ].
$\sigma$	contrainte de traction/compression [Pa].
$\Phi$	variable (peut prendre la valeur de u, v, t, p ou $\lambda$ ).
$\phi$	fonction de dissipation (équation de la chaleur).
$\Omega(X)$	fonction utilisée lors du processus de résolution de l'équation de la chaleur (tend vers 1 lorsque la convergence est atteinte).
$\tau$	contrainte de cisaillement [Pa].
$\mathfrak{T}_c$	tenseur de contraintes.
$\omega$	coefficient de sous relaxation.

#### Indices :

a	relatif à une conduite à angle arrondi.
d	relatif à une conduite droite.
v	relatif à une conduite à angle vif.
i, j	position d'un point du maillage.
k	k-ième étape de résolution de l'équation de la chaleur.
n	incrément du temps.
x, y, z	indices relatifs aux directions x, y et z, respectivement.
$\xi, \eta$	indices relatifs aux directions $\xi$ et $\eta$ , respectivement.

# INTRODUCTION



Les problèmes liés au transfert thermique dans l'industrie peuvent être classés en deux catégories :

1. Les problèmes d'isolation thermique.
2. Les problèmes concernant l'intensification du phénomène de transfert de chaleur lui-même.

Dans les problèmes de la première catégorie, l'objectif est de minimiser les pertes thermiques d'un milieu de température ( $T_1$ ) vers un milieu de température ( $T_2 < T_1$ ), en augmentant la résistance thermique séparant les deux milieux.

Ici la différence de température ( $\Delta T = T_1 - T_2$ ) est fixée par la nature du problème, tandis que le flux de chaleur  $\dot{Q}$  doit être minimisé.

Dans le deuxième type de problèmes en revanche, le flux de chaleur  $\dot{Q}$  est habituellement fixé, alors l'objectif est de minimiser la différence de température à travers laquelle les échanges ont lieu, en augmentant le contact thermique, c'est à dire, en minimisant la résistance thermique associée à cette différence de température.

Dans ce dernier cas, deux approches différentes sont encore envisageables. Une approche visant l'optimisation des phénomènes de transfert grâce à des techniques adéquates, telles que l'utilisation d'ailettes, l'utilisation des promoteurs de turbulence (rugosité, sablage, obstacles périodiques, ...). Une approche basée sur une analyse globale des échangeurs de chaleur [1, 2].

Les techniques utilisées pour l'optimisation des phénomènes de transfert permettent en modifiant la surface d'échange, d'augmenter les performances thermiques par amélioration du coefficient de transfert par rapport à la surface initiale. Cependant, ceci ne saurait être obtenu sans augmenter les pertes de charges associées. L'objectif précis dans ce cas, reste de réaliser une augmentation des performances thermiques sans enregistrer une croissance importante de la puissance de pompage.

Des méthodes d'analyse basées sur les concepts de la thermodynamique combinés avec ceux du transfert de chaleur, peuvent être utilisées pour résoudre un tel dilemme [2]. En effet, il est à présent bien connu que le transfert de chaleur et le frottement (associé aux pertes de charge) sont deux phénomènes irréversibles antagonistes. Le problème pour ces méthodes consiste à trouver un compromis entre ces deux types d'irréversibilités en minimisant, par exemple, la production d'entropie totale.

L'analyse proposée ici concerne l'amélioration des performances thermiques d'une surface d'échange par son ondulation.

On sait que la technique utilisant les ailettes vise à augmenter la surface d'échange pour donner des échangeurs compacts, notamment lorsque les deux fluides d'échange sont de nature différente (gaz - liquide par exemple). Ici l'augmentation des performances thermiques est directement liée à l'augmentation de la surface d'échange. En ondulant ces ailettes, on obtient, d'une part, des échangeurs plus compacts en plaçant une surface plus importante dans un même volume d'échange. Et d'autre part, on intensifie le phénomène de transfert de chaleur (meilleur contact thermique fluide - paroi), en obligeant le fluide à suivre un chemin sinueux.

Ici, l'augmentation des performances thermiques sera liée à la fois à l'augmentation de la surface d'échange et à l'amélioration du contact thermique fluide - paroi.

La méthode utilisée consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes et l'équation de la chaleur dans le cas d'une paroi isotherme, ce qui va nous permettre de calculer les performances thermiques d'une plaque ondulée à profil périodique par rapport à une plaque droite. Ces performances sont, le nombre de Nusselt, qui est directement proportionnel au coefficient de transfert de chaleur et le rapport du flux de chaleur correspondant à la configuration ondulée sur le flux de chaleur associé à la configuration droite correspondante ; ce rapport sera calculé pour une même puissance de pompage.

## CHAPITRE I : Equations fondamentales

La description analytique de l'écoulement d'un fluide s'appuie sur la traduction des lois physiques relatives à l'écoulement dans une forme mathématique adéquate. Il existe trois lois (principes) physiques fondamentales qui, à l'exception des phénomènes relativistes et nucléaires, s'appliquent à n'importe quel écoulement, indépendamment de la nature du fluide considéré. Ces lois sont :

- a/ Le principe de conservation de la masse, dont l'équation mathématique est dite "*équation de continuité*" ;
- b/ La loi fondamentale de la dynamique, appelée aussi seconde loi de Newton, dont l'équation mathématique traduit le théorème de la quantité de mouvement .
- c/ Le premier principe de la thermodynamique, dont l'équation mathématique est dite "*équation de l'énergie*".

Ces équations de conservation peuvent s'exprimer aussi bien sous forme intégrale, lorsqu'elles sont appliquées à un volume de contrôle macroscopique, ou sous forme différentielle, quand le volume de contrôle est une particule fluide élémentaire.

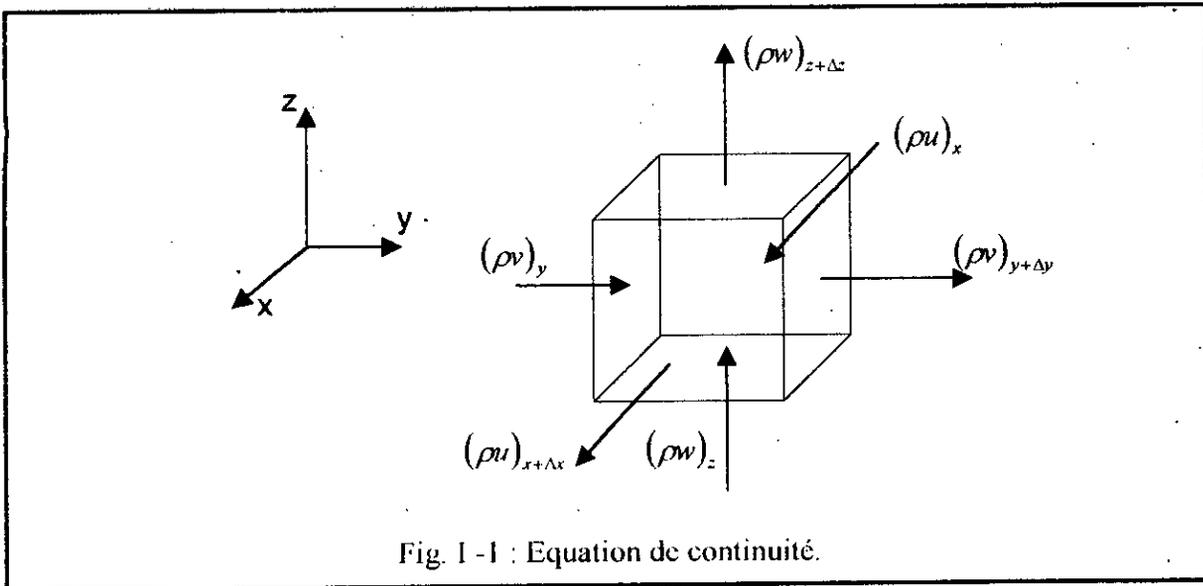
Dans le premier cas, l'analyse s'intéresse uniquement aux quantités globales de matière, de quantité de mouvement et d'énergie transitant par la surface de contrôle et aux variations totales de ces quantités au sein du volume de contrôle. Ce type d'analyse est surtout utilisé en thermodynamique.

Dans le deuxième cas, l'analyse permet d'obtenir des informations sur les propriétés du fluide en chaque point du domaine d'écoulement, permettant ainsi une meilleure compréhension des mécanismes de transfert au sein du fluide. Une telle analyse permet par exemple, d'établir les distributions des vitesses, des pressions et des températures à travers un domaine quelconque du champ d'écoulement. Nous allons donc, dans ce qui suit, présenter les équations de conservation dans leur forme différentielle.

### Equation de continuité

Considérons le volume de contrôle  $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$  (I - 1)

représenté ci-dessous :



Le principe de conservation de la masse stipule que:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Le débit massique} \\ \text{net sortant du volume} \\ \text{de contrôle } \Delta V \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{le taux de matière} \\ \text{accumulé au sein du} \\ \text{volume de contrôle} \end{array} \right] = 0 \quad (I - 2)$$

Le flux de matière  $\rho(\vec{V} \cdot \vec{n})$  au niveau de chacune des surfaces du volume élémentaire, est représenté sur la figure ci-dessus.

La masse contenue dans le volume de contrôle est  $(\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)$ , et par conséquent le taux de matière accumulée dans le volume ( $\Delta V$ ) sera :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z) \quad (I - 3)$$

Le débit net quittant le volume de contrôle dans chacune des trois directions sera :

- dans la direction (x) :  $[\rho u]_{x+\Delta x} - \rho u|_x \Delta y \cdot \Delta z$  (I - 4)

- dans la direction (y) :  $[\rho v]_{y+\Delta y} - \rho v|_y \Delta x \cdot \Delta z$  (I - 5)

- dans la direction (z) :  $[\rho w]_{z+\Delta z} - \rho w|_z \Delta x \cdot \Delta y$  (I - 6)

La somme de ces trois termes donne le débit net sortant du volume de contrôle.

L'équation de conservation de la masse s'écrit donc pour le volume élémentaire  $\Delta V$  :

$$\begin{aligned} & \left[ \rho u \right]_{x+\Delta x} - \left[ \rho u \right]_x \Delta y \cdot \Delta z + \left[ \rho v \right]_{y+\Delta y} - \left[ \rho v \right]_y \Delta x \cdot \Delta z + \left[ \rho w \right]_{z+\Delta z} - \left[ \rho w \right]_z \Delta x \cdot \Delta y + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z) = 0 \end{aligned} \quad (I-7)$$

Le volume  $\Delta V$  ne varie pas avec le temps, on peut donc diviser les deux membres de cette équation par  $(\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)$ , et en passant à la limite lorsque  $\Delta x, \Delta y$  et  $\Delta z$  tendent vers zéro, on obtient l'équation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (I-8)$$

En remarquant que les trois premiers termes de cette équation représentent la divergence du vecteur flux  $(\rho \vec{V})$ , on peut la mettre sous la forme plus compacte suivante :

$$\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (I-9)$$

En faisant usage de la dérivée particulaire  $\left( \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right)$ , on vérifie aisément que l'équation de continuité peut aussi se mettre sous la forme :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (I-10)$$

*Cas particuliers :*

- Régime permanent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} = 0 \quad (I-11)$$

- Ecoulement incompressible :

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (I-12)$$

### Théorème de la quantité de mouvement (Equations de Navier-Stokes)

Considérons toujours le volume élémentaire de la figure (I - 1).

Le théorème de la quantité de mouvement stipule que :

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{l} \text{Somme des forces} \\ \text{extérieures agissant} \\ \text{sur le VC} \end{array} \right]} = \underbrace{\left[ \begin{array}{l} \text{Débit net de} \\ \text{quantité de mouve-} \\ \text{ment sortant du VC} \end{array} \right]}_A + \underbrace{\left[ \begin{array}{l} \text{Le taux de variation} \\ \text{par rapport au temps} \\ \text{de la quantité de mouve-} \\ \text{ment du VC} \end{array} \right]}_B \quad (I - 13)$$

Dans ce qui suit, nous allons évaluer chacun de ces trois termes séparément. Pour simplifier le développement mathématique de ces termes, convenons de diviser chacun par le volume ( $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ ) et passons à la limite lorsque  $\Delta x, \Delta y$  et  $\Delta z$  tendent vers zéro.

1- *Somme des forces extérieures* : Les différentes contraintes agissant sur le volume de contrôle sont représentées sur les projections de ce volume dans les plans (x, y); (y, z) et (z, x) ci-dessous :

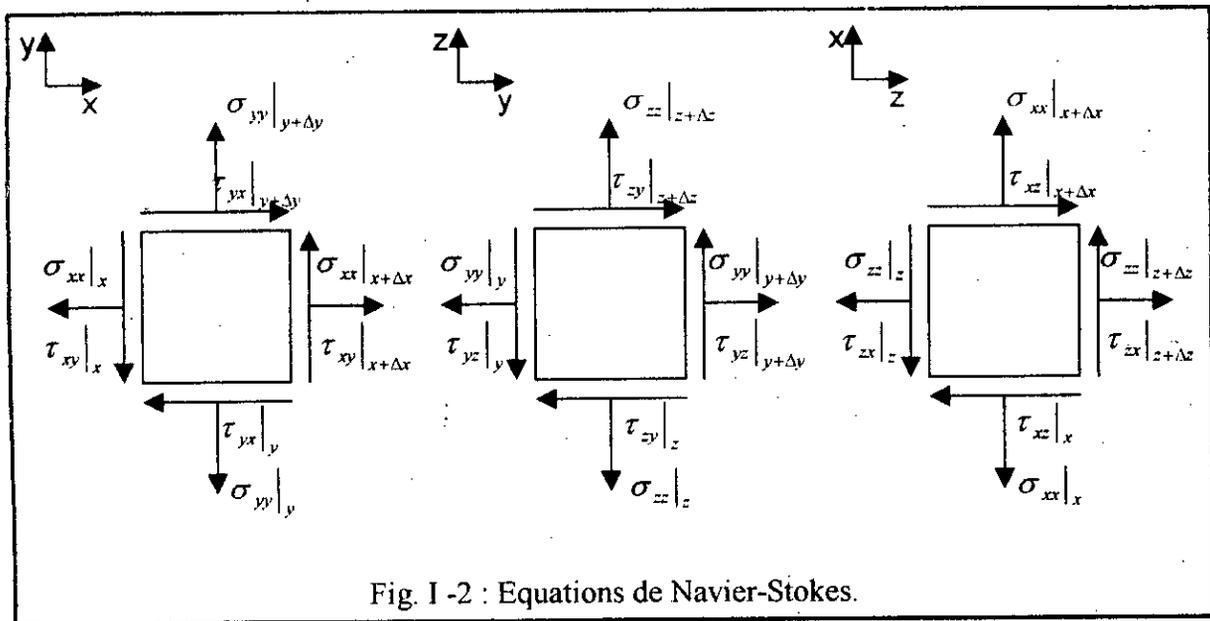


Fig. I -2 : Equations de Navier-Stokes.

Dans la direction (x) :

$$\sum F_x = (\sigma_{xx}|_{x+\Delta x} - \sigma_{xx}|_x) \Delta x \cdot \Delta z + (\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y) \Delta x \cdot \Delta z + (\tau_{zx}|_{z+\Delta z} - \tau_{zx}|_z) \Delta x \cdot \Delta y + g_x \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (I-14)$$

d'où

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\sum F_x}{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho \cdot g_x \quad (I-15)$$

En procédant de la même manière pour les directions (y) et (z), on arrive finalement à la relation :

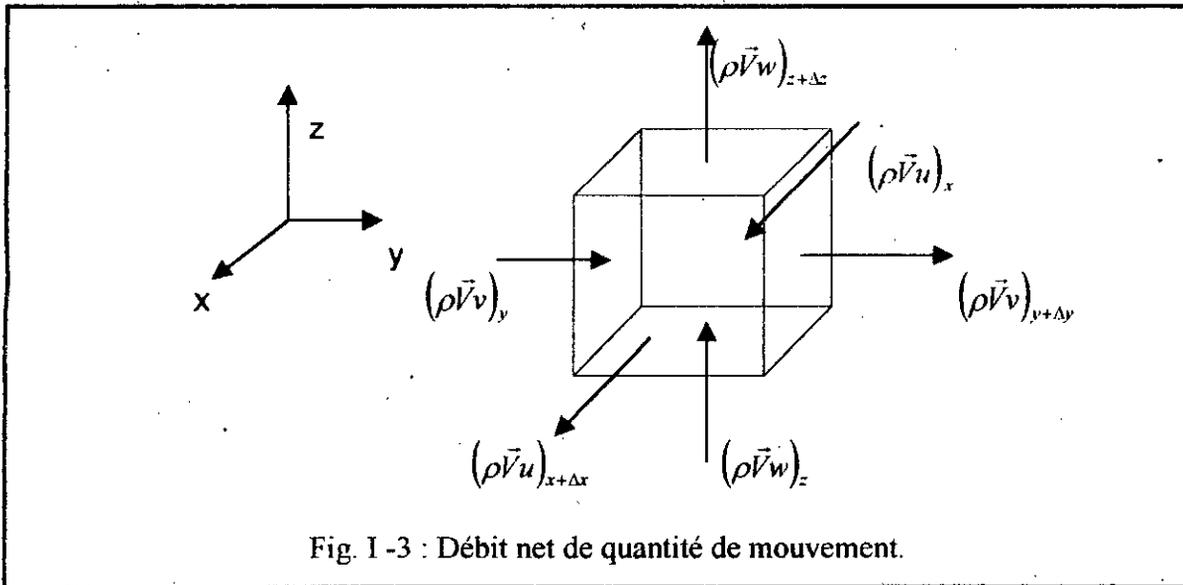
$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{F}}{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z} = \rho \cdot \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \mathfrak{I}_C \quad (I-16)$$

où  $\mathfrak{I}_C = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$  est le tenseur des contraintes. (I-17)

## 2- Débit net de quantité de mouvement sortant du volume de contrôle :

D'après la figure ci-dessous, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{A}{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z} &= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \left[ \frac{(\rho \vec{v}_u|_{x+\Delta x} - \rho \vec{v}_u|_x) \Delta y \cdot \Delta z}{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z} + \frac{(\rho \vec{v}_v|_{y+\Delta y} - \rho \vec{v}_v|_y) \Delta x \cdot \Delta z}{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z} + \right. \\ &\left. + \frac{(\rho \vec{v}_w|_{z+\Delta z} - \rho \vec{v}_w|_z) \Delta x \cdot \Delta y}{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z} \right] = \frac{\partial}{\partial x} (\rho \vec{v}_u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \vec{v}_v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \vec{v}_w) \\ &= \vec{v} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \right] + \rho \left[ u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right] \quad (I-18) \end{aligned}$$



En utilisant l'équation de continuité, le terme ci-dessus devient :

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{A}{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z} = -\vec{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left[ u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right] \quad (1 - 19)$$

3- Taux de variation par rapport au temps de la quantité de mouvement du volume de contrôle :

Ce terme peut être évalué directement, comme suit :

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{B}{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z} = \frac{\partial / \partial t (\rho \vec{V} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)}{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) = \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1 - 20)$$

Ainsi le théorème de la quantité de mouvement donne :

$$\rho \cdot \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{I}}_c = -\cancel{\vec{V} \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \rho \left[ u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right] + \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \cancel{\vec{V} \frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad (1 - 21)$$

soit

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \cdot \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{I}}_c \quad (1 - 22)$$

En coordonnées cartésiennes, cette équation se projette comme suit :

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \rho \cdot g_x + \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (I - 23)$$

$$\rho \frac{DV}{Dt} = \rho \cdot g_y + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \quad (I - 24)$$

$$\rho \frac{DW}{Dt} = \rho \cdot g_z + \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \quad (I - 25)$$

Ces équations s'appliquent à n'importe quel type de fluide.

Dans le cas des fluides newtoniens, pour lesquels les contraintes sont proportionnelles aux taux de déformation, Stokes obtient des relations qui permettent d'exprimer les contraintes en fonction des propriétés du fluide [3,4].

L'utilisation de ces relations permet de transformer les équations ci-dessus comme suit :

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \rho \cdot g_x - \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2}{3} \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left( \mu \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \right) + \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\nabla} U) \quad (I - 26)$$

$$\rho \frac{DV}{Dt} = \rho \cdot g_y - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{2}{3} \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left( \mu \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \right) + \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\nabla} V) \quad (I - 27)$$

$$\rho \frac{DW}{Dt} = \rho \cdot g_z - \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{2}{3} \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left( \mu \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right) + \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\nabla} W) \quad (I - 28)$$

où  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide.

Ces équations sont dites "équations de Navier-Stokes".

*Cas particuliers :*

- Ecoulement incompressible d'un fluide à viscosité constante :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \cdot \vec{g} - \vec{\nabla}P + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (I-29)$$

- Ecoulement non visqueux :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \cdot \vec{g} - \vec{\nabla}P \quad (I-30)$$

Cette dernière équation est dite "équation d'Euler".

### Equation de l'énergie

Considérons comme précédemment un volume de contrôle  $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ .

En thermodynamique, le premier principe pour un volume de contrôle (VC) s'exprime comme suit :

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta w_T}{dt} - \frac{\delta w_F}{dt} = \iint_{sc} \left( e + \frac{P}{\rho} \right) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) \cdot dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} e \cdot \rho \cdot dv \quad (I-31)$$

Les différents termes qui apparaissent dans cette expression sont traités individuellement ci-après :

- $\frac{\delta Q}{dt}$  : Quantité de chaleur reçue par le volume de contrôle par unité de temps. Ce terme comprend tous les transferts de chaleur qui transitent par la surface de contrôle, l'énergie thermique générée au sein du volume de contrôle lui-même, due à une réaction chimique, à la dissipation d'une énergie électrique ou nucléaire.

En appliquant la loi de Fourier, on a pour ce terme :

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{dt} = & \left[ k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x \right] \Delta y \cdot \Delta z + \left[ k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y+\Delta y} - k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_y \right] \Delta x \cdot \Delta z \\ & + \left[ k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z+\Delta z} - k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_z \right] \Delta x \cdot \Delta y + \dot{q} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \end{aligned} \quad (I-32)$$

où (k) est la conductivité thermique du fluide et  $\dot{q}$  représente le taux volumique de génération d'énergie thermique au sein du fluide; il est exprimé en (w/m<sup>3</sup>).

- $\frac{\delta w_T}{dt}$  : Ce terme est lié au travail technique échangé par le volume de contrôle avec le milieu extérieur, il implique l'entraînement d'un mécanisme quelconque. Il est évident dans notre cas que ce terme sera nul :  $\frac{\delta w_T}{dt} = 0$  (I-33)

- $\frac{\delta w_F}{dt}$  : Ce terme est lié à l'énergie dégradée par les forces de frottement du fluide contre les parois.

Rigoureusement, l'évaluation de ce terme se fait par intégration du produit scalaire de la tension visqueuse par la vitesse sur toute la surface de contrôle. Cependant, comme une telle opération est complexe, le travail des forces de viscosité est généralement exprimé de la manière suivante [3]:

$$\frac{\delta w_F}{dt} = -\Lambda \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (I-34)$$

où  $\Lambda$  est le taux volumique du travail des forces de viscosité.

- $\iint_{sc} \left( e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) \cdot dA$  : Ce terme comprend tous les transferts d'énergie associés aux débits de fluide à travers la surface de contrôle.

Il s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \left( e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) \cdot dA &= \left[ \rho u \left( \bar{U} + \frac{\bar{V}^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right)_{x+\Delta x} - \rho u \left( \bar{U} + \frac{\bar{V}^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right)_x \right] \Delta y \cdot \Delta z \\ &+ \left[ \rho v \left( \bar{U} + \frac{\bar{V}^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right)_{y+\Delta y} - \rho v \left( \bar{U} + \frac{\bar{V}^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right)_y \right] \Delta x \cdot \Delta z \\ &+ \left[ \rho w \left( \bar{U} + \frac{\bar{V}^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right)_{z+\Delta z} - \rho w \left( \bar{U} + \frac{\bar{V}^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right)_z \right] \Delta x \cdot \Delta y \end{aligned} \quad (I-35)$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Sigma} e \cdot \rho \cdot dv = \frac{\partial}{\partial t} \{ e \cdot \rho \} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

et comme  $e = \bar{U} + \frac{\bar{V}^2}{2} + gz$  (I-36)

$\bar{U}$  : énergie interne ;

alors 
$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Sigma} \left( e + \frac{p}{\rho} \right) \rho \cdot dv = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[ \bar{U} + \frac{\bar{V}^2}{2} + gz \right] \rho \right\} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (I-37)$$

En remplaçant les différents termes de l'équation (I - 31) par leurs expressions (équations (I - 32), (I - 33), (I - 34), (I - 35) et (I - 37)) puis en divisant les deux membres de l'équation par  $(\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)$  et en passant à la limite lorsque  $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ , on trouve :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} + \Lambda \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho u \left( \bar{H} + \frac{\bar{V}^2}{2} + gz \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \rho v \left( \bar{H} + \frac{\bar{V}^2}{2} + gz \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \rho w \left( \bar{H} + \frac{\bar{V}^2}{2} + gz \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \bar{U} + \frac{\bar{V}^2}{2} + gz \right) \right] \end{aligned} \quad (I-38)$$

En faisant appel à la dérivée particulaire, on peut écrire cette équation sous la forme:

$$\vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla} T + \dot{q} + \Lambda = \vec{\nabla} \cdot (p \vec{V}) + \left( \bar{U} + \frac{\bar{V}^2}{2} + gz \right) \cdot \left( \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \frac{\rho}{2} \frac{D\bar{V}^2}{Dt} + \rho \frac{D\bar{U}}{Dt} + \rho \frac{D(gz)}{Dt} \quad (\text{I-39})$$

$$\text{mais } \bar{U} = \bar{H} - \frac{p}{\rho} \text{ donc } \frac{D\bar{U}}{Dt} = \frac{D\bar{H}}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}$$

En remplaçant cette dernière équation dans (I-39), on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla} T + \dot{q} + \Lambda = \vec{\nabla} \cdot (p \vec{V}) + \left( \bar{U} + \frac{\bar{V}^2}{2} + gz \right) \cdot \left( \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \frac{\rho}{2} \frac{D\bar{V}^2}{Dt} + \rho \frac{D\bar{H}}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{D(gz)}{Dt} \quad (\text{I-40})$$

En utilisant les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible, à viscosité constante et en régime d'écoulement laminaire (I-29), le second terme figurant dans le second membre de l'équation ci-dessus pourrait se mettre sous la forme :

$$\frac{\rho}{2} \frac{D\bar{V}^2}{Dt} = -\vec{V} \cdot \vec{\nabla} p + \vec{V} \cdot \rho \vec{g} + \vec{V} \cdot \mu \vec{\nabla}^2 \vec{V} \quad (\text{I-41})$$

De plus, on a :

$$\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{\nabla} p + p \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \quad (\text{I-42})$$

on obtient alors :

$$\vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla} T + \dot{q} + \Lambda = \vec{V} \cdot \vec{\nabla} p + p \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \left( \bar{U} + \frac{\bar{V}^2}{2} + gz \right) \cdot \left( \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) - \vec{V} \cdot \vec{\nabla} p + \vec{V} \cdot \rho \vec{g} + \vec{V} \cdot \mu \vec{\nabla}^2 \vec{V} + \rho \frac{D\bar{H}}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{D(gz)}{Dt} \quad (\text{I-43})$$

A présent, dans le cas d'un écoulement laminaire d'un fluide newtonien à viscosité constante, et en utilisant l'équation de continuité (1 - 10), l'équation de l'énergie peut se mettre sous la forme :

$$\bar{V} \cdot k \bar{\nabla} T + \dot{q} + \Lambda = \bar{V} \cdot \rho \bar{g} + \bar{V} \cdot \mu \bar{\nabla}^2 \bar{V} + \rho \frac{D\bar{H}}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \rho \frac{D(gz)}{Dt} \quad (1 - 44)$$

On peut encore simplifier cette équation, en remarquant que :

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{D(gz)}{Dt} &= \rho g w \\ \bar{V} \cdot \rho \bar{g} &= \rho \bar{V} \cdot \bar{g} = -\rho g w \end{aligned} \right\} \quad (1 - 45)$$

On a finalement :

$$\bar{V} \cdot k \bar{\nabla} T + \dot{q} + \Lambda = \bar{V} \cdot \mu \bar{\nabla}^2 \bar{V} + \rho \frac{D\bar{H}}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} \quad (1 - 46)$$

Cette équation est la forme la plus générale de l'équation de l'énergie.

On peut encore simplifier cette équation en remarquant que :

$$\frac{D\bar{H}}{Dt} = \left( \frac{\partial \bar{H}}{\partial T} \right)_p \frac{DT}{Dt} + \left( \frac{\partial \bar{H}}{\partial p} \right)_T \frac{Dp}{Dt} \quad (1 - 47)$$

La thermodynamique nous fournit :  $\left( \frac{\partial \bar{H}}{\partial T} \right)_p = C_p$  et  $\left( \frac{\partial \bar{H}}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} (1 - T\bar{\beta})$

où  $\bar{\beta} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$  : coefficient d'expansion thermique.

On obtient finalement :

$$\bar{V} \cdot k \bar{\nabla} T + \dot{q} + \Lambda = \bar{V} \cdot \mu \bar{\nabla}^2 \bar{V} + \rho \cdot C_p \frac{DT}{Dt} - T\bar{\beta} \frac{Dp}{Dt}$$

On pourrait aussi exprimer  $\Lambda$  dans le cas d'un écoulement incompressible de la manière suivante [3,5] :

$$\Lambda = \vec{V} \cdot \mu \vec{\nabla}^2 \vec{V} + \phi \quad (I - 48)$$

où  $\phi$ , appelée fonction de dissipation, est donnée par :

$$\phi = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (I - 49)$$

On a enfin pour l'équation d'énergie :

$$\vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla} T + \dot{q} + \phi + T \bar{\beta} \frac{Dp}{Dt} = \rho C_p \frac{DT}{Dt} \quad (I - 50)$$

La fonction de dissipation  $\phi$  est fonction de la viscosité et des taux de déformation, et elle est toujours positive.

La dissipation a toujours pour effet d'accroître l'énergie interne aux dépens de l'énergie potentielle ou de la pression de stagnation (d'arrêt). La fonction de dissipation sera négligeable dans tous les cas que nous allons considérer; son effet prend de l'importance dans les couches limites supersoniques.

*Cas particulier:*

Fluide incompressible avec une conductivité thermique ( $k$ ) constante, en écoulement sans génération interne d'énergie :

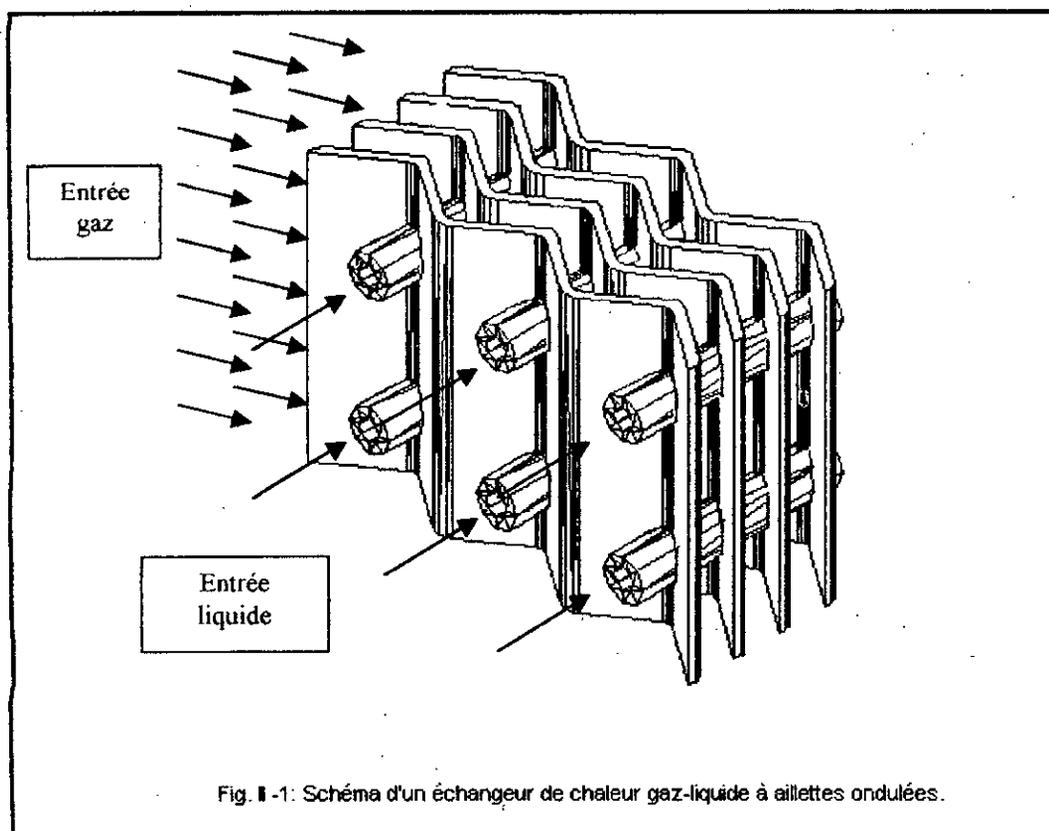
$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = k \vec{\nabla}^2 T \quad (I - 51)$$

## CHAPITRE II :

### Présentation du modèle à étudier et position du problème

#### II-1/ Modèle géométrique

On rencontre les conduites périodiques dans les échangeurs compacts gaz - liquide (radiateurs d'automobile, radiateurs d'huile d'avions, réfrigérants de turbines à gaz, batteries de traitement d'air, etc. ...). Le coefficient d'échange étant moins bon du côté gaz, les surfaces d'échange sont souvent des batteries de tubes à ailettes ondulées, le liquide circule dans les tubes et le gaz sur les ailettes, c'est justement ces ailettes qui constituent ce que nous allons appeler par la suite "*conduites non cylindriques à motif périodique*". Le terme périodique découle du fait que ces conduites ont une allure ondulatoire (Fig. II -1).



L'objectif de la présente étude, est d'isoler une partie de la conduite (une période), et d'étudier les mécanismes du transfert thermique en tenant compte des différents paramètres géométriques (longueur de la période, distance entre plaques, angle d'ondulation ...).

On rencontre généralement, deux grandes classes de conduites périodiques :

- Conduites de type convergent - divergent ; les parois ne sont pas parallèles (Fig. II - 2a) ;
- Conduites curvilignes à parois parallèles (Fig. II -2b).

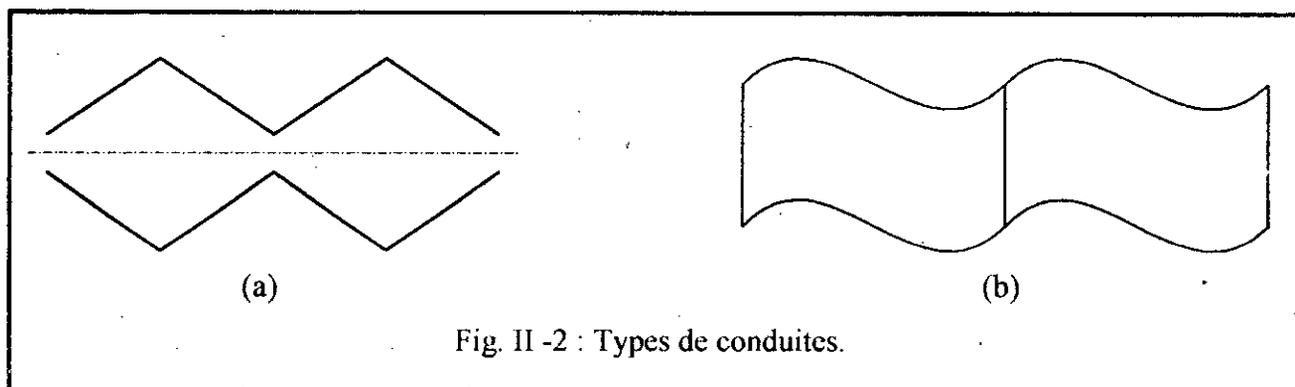


Fig. II -2 : Types de conduites.

Dans chacune de ces catégories, on trouve des conduites en dents de scie (sommets à angle saillant), et d'autres à sommets arrondis.

### II-1-1/ Modèle à étudier

Notre étude sera limitée aux conduites curvilignes à parois parallèles.

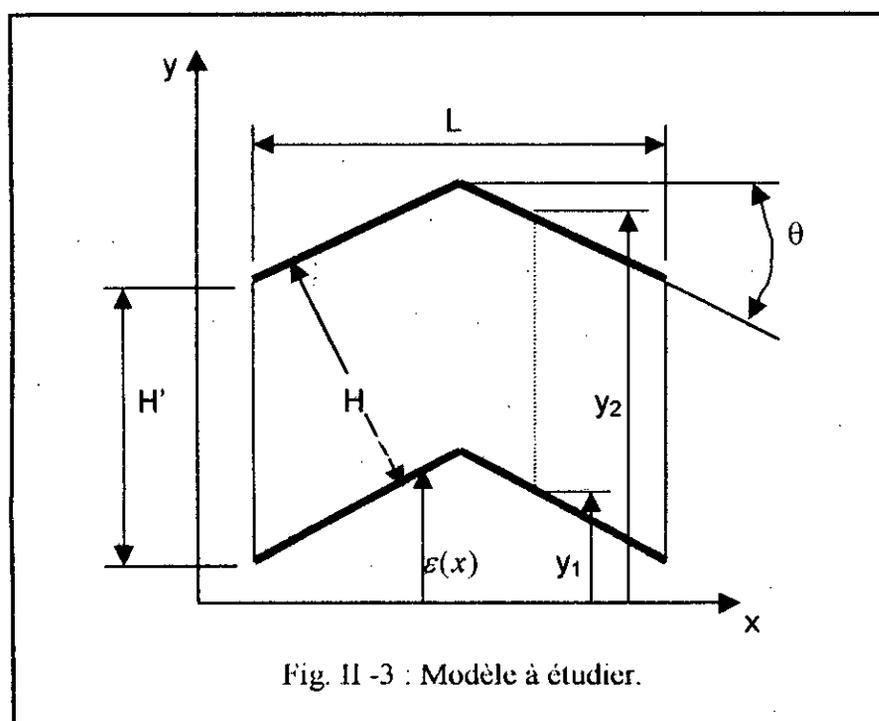


Fig. II -3 : Modèle à étudier.

Comme le montre la figure (II - 3), la distance ( $H'$  ou  $H$ ) qui sépare deux plaques adjacentes, est constante, et l'ordonnée ( $y$ ) du profil de la paroi varie en fonction de  $x$  ; soit  $y = \varepsilon(x)$ . ( $L$ ) représente la longueur de la période et ( $\theta$ ) l'angle d'ondulation.

Nous allons étudier plusieurs configurations définies par des rapports ( $H'/L$ ) et des angles ( $\theta$ ) différents, pour des fluides divers.

### II-1-2/ Détermination de la fonction $\varepsilon(x)$

Pour définir le profil de la paroi, nous allons opter, dans le cas des conduites à angle vif, pour une combinaison de fonctions linéaires et paraboliques, et dans le cas des conduites à angle arrondi pour une fonction sinusoïdale.

#### a) Conduites à angle vif

Outre le fait qu'il est quasiment impossible, d'un point de vue technologique, d'obtenir un angle vif par "pliage" d'une tôle, il est impératif de simuler le profil de la paroi par une fonction continue de manière à éviter d'éventuels problèmes de stabilité lors de la programmation. La paroi sera donc représentée par des fonctions paraboliques au voisinage des sommets et par des fonctions linéaires pour le reste. Voir (Fig. II - 4) ci-après.

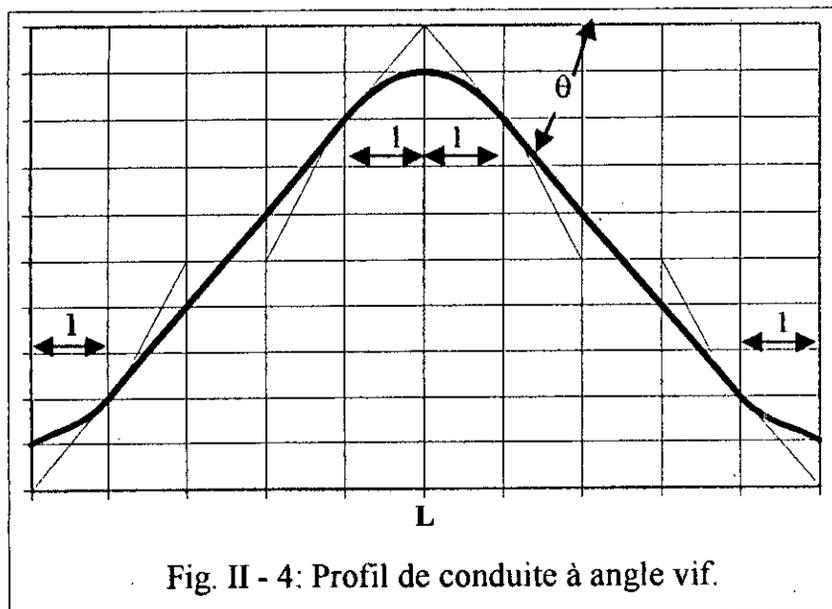


Fig. II - 4: Profil de conduite à angle vif.

Ainsi, dans ce cas, le profil sera défini comme suit :

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} A_1 x^2 + B_1 x + C_1 & x \in [0, l[ \\ A_2 x + B_2 & x \in \left[ l, \frac{L}{2} - l \right] \\ A_3 x^2 + B_3 x + C_3 & x \in \left] \frac{L}{2} - l, \frac{L}{2} + l \right[ \\ A_4 x + B_4 & x \in \left[ \frac{L}{2} + l, L - l \right] \\ A_5 x^2 + B_5 x + C_5 & x \in ]L - l, L] \end{cases} \quad (\text{II - 1})$$

Après détermination des constantes  $A_i$ ,  $B_i$  et  $C_i$  (voir Annexe I), on obtient :

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{lg\theta}{2l} [x^2 + l^2] & x \in [0, l[ \\ lg\theta \cdot x & x \in \left[ l, \frac{L}{2} - l \right] \\ -\frac{lg\theta}{2l} \left( x^2 - Lx + \left( \frac{L}{2} - l \right)^2 \right) & x \in \left] \frac{L}{2} - l, \frac{L}{2} + l \right[ \\ -lg\theta(x - L) & x \in \left[ \frac{L}{2} + l, L - l \right] \\ \frac{lg\theta}{2l} [(x - L)^2 + l^2] & x \in ]L - l, L] \end{cases} \quad (\text{II - 2})$$

En écriture adimensionnelle, avec  $\delta(X) = \frac{\varepsilon(x)}{l}$  et  $X = \frac{x}{L}$ , on a :

$$\delta(X) = \begin{cases} \frac{lg\theta}{2l/L} \left[ X^2 + \left( \frac{l}{L} \right)^2 \right] & X \in \left[ 0, \frac{l}{L} \right[ \\ lg\theta \cdot X & X \in \left[ \frac{l}{L}, \frac{1}{2} - \frac{l}{L} \right] \\ -\frac{lg\theta}{2l/L} \left( X^2 - X + \left( \frac{1}{2} - \frac{l}{L} \right)^2 \right) & X \in \left] \frac{1}{2} - \frac{l}{L}, \frac{1}{2} + \frac{l}{L} \right[ \\ -lg\theta(X - 1) & X \in \left[ \frac{1}{2} + \frac{l}{L}, 1 - \frac{l}{L} \right] \\ \frac{lg\theta}{2l/L} \left[ (X - 1)^2 + \left( \frac{l}{L} \right)^2 \right] & X \in \left] 1 - \frac{l}{L}, 1 \right] \end{cases} \quad (\text{II - 3})$$

Les développements mathématiques qui vont suivre gagneraient en simplification si l'on introduit la fonction  $\beta = \frac{\partial \delta(X)}{\partial X}$  [6].

Il vient alors à partir de (II - 3) :

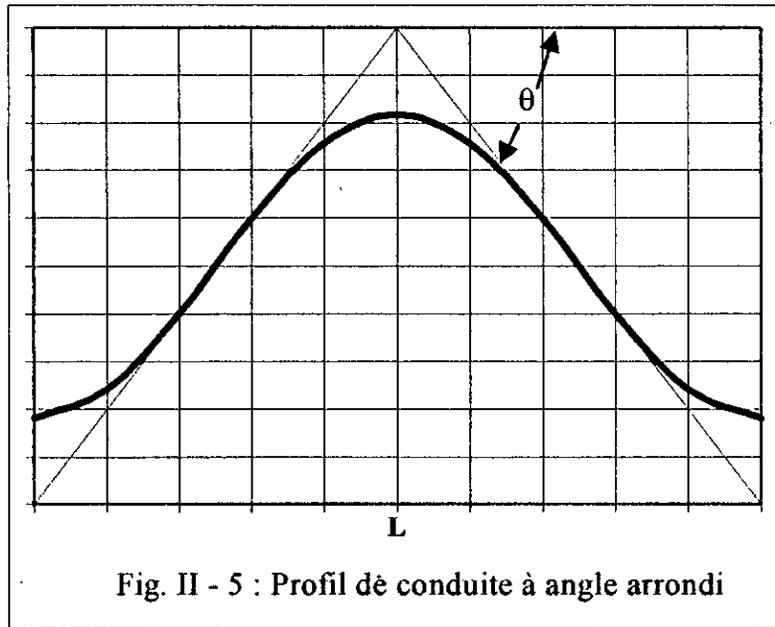
$$\left. \begin{aligned}
 \beta &= \frac{lg\theta}{l/L} X, \quad \frac{\partial \beta}{\partial X} = \frac{lg\theta}{l/L}, \quad \frac{\partial^2 \beta}{\partial X^2} = 0 & X &\in \left[ 0, \frac{l}{L} \right[ \\
 \beta &= lg\theta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial X} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial X^2} = 0 & X &\in \left[ \frac{l}{L}, \frac{1}{2} - \frac{l}{L} \right] \\
 \beta &= -\frac{lg\theta}{l/L} (2X - 1), \quad \frac{\partial \beta}{\partial X} = -\frac{lg\theta}{l/L}, \quad \frac{\partial^2 \beta}{\partial X^2} = 0 & X &\in \left] \frac{1}{2} - \frac{l}{L}, \frac{1}{2} + \frac{l}{L} \right[ \\
 \beta &= -lg\theta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial X} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial X^2} = 0 & X &\in \left] \frac{1}{2} + \frac{l}{L}, 1 - \frac{l}{L} \right[ \\
 \beta &= \frac{lg\theta}{l/L} (X - 1), \quad \frac{\partial \beta}{\partial X} = \frac{lg\theta}{l/L}, \quad \frac{\partial^2 \beta}{\partial X^2} = 0 & X &\in \left] 1 - \frac{l}{L}, 1 \right[
 \end{aligned} \right\} \quad (II - 4)$$

**Remarque :**

Ici, il convient d'insister sur le fait que les arrondis aux sommets sont une contrainte imposée par le procédé de fabrication et nécessaire pour éviter les discontinuités du profil. C'est pourquoi, ces parties doivent être aussi petites que possible ( $l \ll L$ ).

**b) Conduites à angle arrondi**

Dans ce cas, le choix d'une seule fonction pour représenter le profil, nous permet d'éviter tout problème de discontinuité. Nous optons donc pour un profil sinusoïdal qui nous donne la possibilité de faire varier l'angle d'ondulation ( $\theta$ ). Le profil en question est représenté par la figure (II - 5) ci-après.



D'après cette figure, on a dans ce cas, pour tout l'intervalle  $[0, L]$  (voir Annexe I) :

$$\varepsilon(x) = \frac{L}{4} \operatorname{tg} \theta \cdot \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \right] \tag{II - 5}$$

En écriture adimensionnelle :

$$\delta(X) = \frac{\varepsilon(x)}{L} = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \theta \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \cos(2\pi \cdot X) \right] \tag{II - 6}$$

On a aussi

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{\partial \delta(X)}{\partial X} = \operatorname{tg} \theta \cdot \sin(2\pi \cdot X) \\ \frac{\partial \beta}{\partial X} &= 2\pi \cdot \operatorname{tg} \theta \cos(2\pi \cdot X) \\ \frac{\partial^2 \beta}{\partial X^2} &= -(2\pi)^2 \operatorname{tg} \theta \sin(2\pi \cdot X) \end{aligned} \right\} \tag{II - 7}$$

## II-2/ Modèle mathématique

### II-2-1/ Hypothèses de base

- L'écoulement est bidimensionnel (les plaques sont supposées de profondeur infinie) ;  
 $w = 0$  ;
- Les parois sont isothermes ( $t_w = \text{cte.}$ ) ;
- L'écoulement est permanent, laminaire et incompressible ( $\rho = \text{cte.}$ ) ;
- La viscosité ( $\mu$ ) et la conductivité thermique ( $k$ ) sont constantes ;
- L'énergie dissipée par frottement est négligeable ( $\phi = 0$ ) ;
- Définition d'un régime établi pour l'écoulement en conduite périodique :

Dans le cas des écoulements conventionnels en conduites droites, le régime sera établi à une distance ( $x$ ) de la zone d'entrée où l'épaisseur de la couche limite devient constante. Dans ce cas, le champ des vitesses sera régi par les deux conditions :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ v = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{II - 8})$$

le champ des températures par :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (\text{II - 9})$$

où  $T = \frac{t - t_w}{t_{bx} - t_w}$

avec

$$t_{bx} - t_w = \frac{\int_{y1}^{y2} (t - t_w) \cdot u \cdot dy}{\int_{y1}^{y2} u \cdot dy} \quad (\text{II - 10})$$

représentant la différence de température moyenne pondérée du fluide suivant une section ;

et le champ de pression par :

$$\frac{dp}{dx} = cte. \quad (\text{II} - 11)$$

Ces conditions ne sauraient définir le régime établi dans le cas des conduites périodiques, étant donné que l'écoulement subira dans ce cas des perturbations entretenues par les changements de direction qui reviennent périodiquement.

Par conséquent, dans le cas des conduites périodiques, on pourrait plutôt parler d'un régime établi généralisé qui signifie, qu'au-delà d'une distance suffisamment éloignée de la zone d'entrée, les mêmes perturbations se répètent de période en période, ce qui justifie le fait que notre étude soit limitée à une seule période.

A présent, on peut faire les hypothèses suivantes concernant les champs de pression, de vitesse et de température dans le cas d'une conduite périodique.

• *Pression :*

On admet que la pression décroît globalement de façon linéaire avec (x), et que par conséquent on peut la définir par l'expression suivante [6, 7, 8]:

$$p(x, y) = -b \cdot x + \bar{p}(x, y) \quad (\text{II} - 12)$$

où

$$b = \frac{p(x, y) - p(x + L, y)}{L} \quad (\text{II} - 13)$$

est la chute globale de pression par période, exprimée en  $[Pa/m]$ , et  $\bar{p}(x, y)$ , un terme qui varie d'une façon périodique avec (x).

Autrement dit, la pression du fluide vérifie la condition de périodicité suivante :

$$p(x, y) - p(x + L, y) = p(x + L, y) - p(x + 2L, y) = \dots \quad (\text{II - 14})$$

• *Vitesse :*

La vitesse satisfait aux conditions :

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= u(x + L, y) = \dots \\ v(x, y) &= v(x + L, y) = \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{II - 15})$$

• *Température :*

Dans ce cas, la température adimensionnelle  $T(x, y)$  sera définie par l'expression suivante [7]:

$$T(x, y) = \frac{t(x, y) - t_w}{t_m - t_w} \quad (\text{II - 16})$$

avec

$$t_m - t_w = \frac{\int_{y^2}^{y^2} (t(x, y) - t_w) \cdot |u| \cdot dy}{\int_{y^2}^{y^2} |u| \cdot dy} \quad (\text{II - 17})$$

représentant la différence de température moyenne pondérée, tenant compte des éventuelles zones de recirculation caractérisées par des vitesses ( $u$ ) négatives.

En l'absence de zones de recirculation ( $u$  sera toujours  $\geq 0$ ), on retrouve la relation (II - 10) relative au cas des conduites conventionnelles, définie précédemment.

La température ainsi définie, sera soumise à la condition de périodicité suivante:

$$T(x, y) = T(x + L, y) = \dots \quad (\text{II - 18})$$

g) Enfin, les effets du champ de gravitation seront négligés.

## II-2-2/ Equations

Sur la base des hypothèses développées dans le paragraphe précédent, les équations régissant le problème s'obtiennent à partir des équations fondamentales du Chapitre I, de la manière suivante :

- *Equation de continuité* : C'est l'équation (I - 12) écrite pour un écoulement bidimensionnel, soit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II - 19})$$

- *Equations de Navier-Stokes* : Elles s'obtiennent à partir de l'équation (I - 29) où le terme relatif aux forces de champ ( $\vec{g}$ ) est négligé.

On obtient ainsi en coordonnées Cartésiennes :

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II - 20})$$

- *Equation de la chaleur* : Elle s'obtient à partir de l'équation (I - 51) :

$$\rho \cdot C_p \cdot \left( u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II - 21})$$

Pour conférer à notre étude un caractère général, nous allons recourir à l'écriture des équations (II - 19), (II - 20) et (II - 21) en grandeurs adimensionnelles.

Choisissons pour ces grandeurs les définitions suivantes [6, 8]:

$$\left. \begin{aligned} X &= x/L \\ Y &= y/L \\ U &= u/(v/L) \\ V &= v/(v/L) \\ P &= p/\rho(v/L)^2 \\ \bar{P} &= \bar{p}/\rho(v/L)^2 \\ B &= bL/\rho(v/L)^2 \\ T &= (t - t_w)/(t_m - t_w) \end{aligned} \right\} \quad \text{(II - 22)}$$

- L'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad \text{(II - 23)}$$

- et les équations de Navier-Stokes deviennent :

$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= -\frac{\partial P}{\partial X} + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \\ U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} &= -\frac{\partial P}{\partial Y} + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad \text{(II - 24)}$$

mais comme :

$$P(X, Y) = -B \cdot X + \bar{P}(X, Y) \quad \text{(II - 25)}$$

ces deux équations donnent :

$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial X} + B + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \\ U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial Y} + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II - 26})$$

- l'équation de la chaleur (II - 21), s'écrira à son tour :

$$\begin{aligned} U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} &= \frac{k}{Cp \cdot \mu} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right) + \frac{d(t_m - t_w)}{dX} \frac{1}{(t_m - t_w)} \left( 2 \frac{k}{Cp \cdot \mu} \frac{\partial T}{\partial X} - UT \right) + \\ &\frac{k}{Cp \cdot \mu} \frac{d^2(t_m - t_w)}{dX^2} \frac{1}{(t_m - t_w)} T \end{aligned} \quad (\text{II - 27})$$

en introduisant :  $Pr = \frac{\mu \cdot Cp}{k}$  (II - 28)

et le paramètre de la variation relative de la différence de température moyenne par rapport à (x) :

$$\lambda = \frac{d(t_m - t_w)}{dX} \frac{1}{(t_m - t_w)} \quad (\text{II - 29})$$

et

$$\frac{d\lambda}{dX} = \frac{d^2(t_m - t_w)}{dX^2} \frac{1}{(t_m - t_w)} - \lambda^2 \Rightarrow \frac{d^2(t_m - t_w)}{dX^2} \frac{1}{(t_m - t_w)} = \frac{d\lambda}{dX} + \lambda^2 \quad (\text{II - 30})$$

l'équation (II - 27) devient :

$$U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} - \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right) = \frac{1}{Pr} \left( \lambda \cdot \left( 2 \frac{\partial T}{\partial X} - Pr UT \right) + \left( \frac{d\lambda}{dX} + \lambda^2 \right) \cdot T \right) \quad (\text{II - 31})$$

L'observation de cette équation où U, V et T vérifient les conditions de périodicité (II - 15) et (II - 18), montre que  $(\lambda)$  doit à son tour vérifier la condition :

$$\lambda(x) = \lambda(x + L) = \dots \quad (\text{II - 32})$$

### II-2-3/ Changement de repère

Dans le but de rendre plus facile la résolution du problème, il est commode d'opérer le changement de référentiel représenté sur la figure (II - 6) ci-dessous.

Les relations entre les nouvelles coordonnées  $(\xi, \eta)$  et les anciennes coordonnées  $(X, Y)$  sont les suivantes :

$$\eta = Y - \delta(X) \quad (\text{II - 33})$$

et

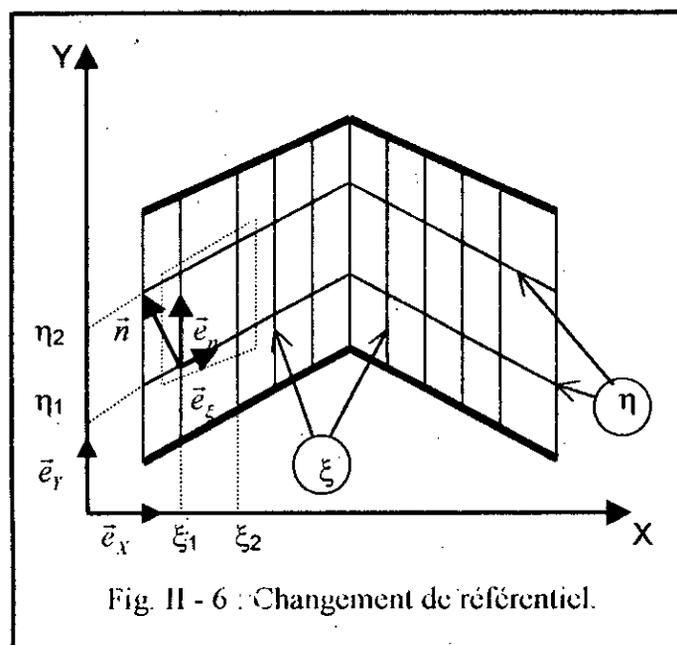
$$\xi = X \quad (\text{II - 34})$$

le domaine de résolution est donc défini par :

$$0 < \eta < H/L \text{ et } 0 < \xi < 1. \quad (\text{II - 35})$$

Les lignes d'iso- $\eta$  et d'iso- $\xi$  sont représentées sur la figure (II - 6). On voit très bien que les lignes  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\xi_1$  et  $\xi_2$  définissent un contour curviligne représentant la surface de contrôle du volume élémentaire entouré par les pointillés.

L'angle formé par les vecteurs directeurs  $(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\xi)$ , varie d'un point à un autre ; autrement dit, notre nouveau repère est un repère local.



Soit  $\bar{n}$  un vecteur normal aux lignes d'iso- $\eta$  tel que :

$$\bar{n} = \frac{\bar{\nabla}\eta}{|\bar{\nabla}\eta|} \quad (\text{II - 36})$$

soit dans l'ancien repère :

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial Y}\right)^2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial\eta}{\partial X} \\ \frac{\partial\eta}{\partial Y} \end{pmatrix} \quad (\text{II - 37})$$

Mais  $\eta = Y - \delta(X)$  d'où  $\frac{\partial\eta}{\partial X} = -\frac{\partial\delta(X)}{\partial X}$  et  $\frac{\partial\eta}{\partial Y} = 1$ .

D'autre part, en se rappelant qu'on a déjà posé  $\beta = \frac{\partial\delta(X)}{\partial X}$  et en posant :

$$\alpha = \beta^2 + 1 \quad (\text{II - 38})$$

On pourrait finalement, après quelques réarrangements mettre l'équation (II - 37) sous la forme :

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} (-\beta \bar{e}_x + \bar{e}_y) \quad (\text{II - 39})$$

Posons :

$$\bar{e}_z = a \cdot \bar{e}_x + b \cdot \bar{e}_y \quad (\text{II - 40})$$

On aura donc :

$$\bar{n} \cdot \bar{e}_z = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \begin{pmatrix} -\beta \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{II - 41})$$

d'où  $-a \cdot \beta + b = 0$

Et comme  $|\bar{e}_x|^2 = 1$ , c'est à dire  $a^2 + b^2 = 1$  ;

on aura

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \\ b &= \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II - 42})$$

L'équation (II - 40) devient :

$$\bar{e}_x = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} (\bar{e}_x + \beta \bar{e}_y) \quad (\text{II - 43})$$

D'un autre côté, on a :

$$\bar{e}_\eta = \bar{e}_y \quad (\text{II - 44})$$

En résolvant ces deux équations en  $\bar{e}_x$  et  $\bar{e}_y$ , on aura :

$$\left. \begin{aligned} \bar{e}_x &= \sqrt{\alpha} \cdot \bar{e}_x - \beta \cdot \bar{e}_\eta \\ \bar{e}_y &= \bar{e}_\eta \end{aligned} \right\} \quad (\text{II - 45})$$

Soit un vecteur quelconque  $\Phi$ , défini dans le repère  $(\bar{e}_x, \bar{e}_y)$  par les composantes  $(\Phi_x, \Phi_y)$  et dans le repère  $(\bar{e}_\eta, \bar{e}_\xi)$  par les composantes  $(\Phi_\eta, \Phi_\xi)$ .

On établit entre ses composantes les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\xi} &= \Phi_x \sqrt{\alpha} \\ \Phi_{\eta} &= \Phi_y - \beta \cdot \Phi_x \end{aligned} \right\} \quad (\text{II - 46})$$

Sur la base des développements ci-dessus, les équations de Navier-Stokes, de continuité et de la chaleur, écrites précédemment dans le repère  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  (équations (II - 23), (II - 26) et (II - 31)) s'écrivent dans le repère  $(\vec{e}_{\eta}, \vec{e}_{\xi})$  :

$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= - \left( \frac{\partial \bar{P}}{\partial X} - B \right) + \Delta U \\ \left( U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) - \beta \left( U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) &= - \left( \frac{\partial \bar{P}}{\partial Y} - \beta \left( \frac{\partial \bar{P}}{\partial X} - B \right) \right) + (\Delta V - \beta \cdot \Delta U) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II - 47})$$

Notons que la composante de la vitesse suivant  $\vec{e}_{\eta}$  est donnée par :

$$U_{\eta} = V - \beta U \quad (\text{II - 48})$$

Avec  $\beta = \frac{\partial \delta(X)}{\partial X} = f(X)$  donc  $\frac{\partial \beta}{\partial Y} = 0$  et  $\frac{\partial^2 \beta}{\partial Y^2} = 0$ .

On peut à présent éliminer la composante de la vitesse ( $V$ ) des équations (II - 47) ci-dessus, ce qui nous conduit à les écrire après quelques manipulations comme suit :

$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial X} + (U_{\eta} + \beta \cdot U) \frac{\partial U}{\partial Y} &= - \left( \frac{\partial \bar{P}}{\partial X} - B \right) + \Delta U \\ U \frac{\partial U_{\eta}}{\partial X} + (U_{\eta} + \beta \cdot U) \frac{\partial U_{\eta}}{\partial Y} &= - \left( \frac{\partial \bar{P}}{\partial Y} - \beta \left( \frac{\partial \bar{P}}{\partial X} - B \right) \right) + \Delta U_{\eta} + 2 \frac{\partial \beta}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial X} + U \frac{\partial^2 \beta}{\partial X^2} - U^2 \frac{\partial \beta}{\partial X} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II - 49})$$

Ensuite, en éliminant les variables ( $X$ ) et ( $Y$ ) à l'aide des transformations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial X}$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial X} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial X} \frac{\partial \eta}{\partial X} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial X} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial Y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial Y^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial Y} \frac{\partial \eta}{\partial Y} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial Y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial Y^2}$$

(II - 50)

qu'on peut simplifier en remarquant que :

$$\frac{\partial \xi}{\partial X} = 1$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial X^2} = 0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial Y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial Y^2} = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial X} = -\beta$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} = -\frac{\partial \beta}{\partial X} = -\beta'$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial Y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial Y^2} = 0$$

(II - 51)

pour aboutir aux équations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2}{\partial X^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \beta' \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2}{\partial Y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \end{aligned} \right\} \quad (II - 52)$$

Les équations (II - 49) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial \xi} + (U_n + \beta') \frac{\partial U}{\partial \eta} &= - \left( \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} - B \right) + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \beta^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right) \\ U \frac{\partial U_n}{\partial \xi} + (U_n + \beta) \frac{\partial U_n}{\partial \eta} &= - \left( \alpha \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi} + \beta \cdot B \right) + \left( \frac{\partial^2 U_n}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 U_n}{\partial \xi \partial \eta} + \beta^2 \frac{\partial^2 U_n}{\partial \eta^2} \right) + \\ 2 \left( \frac{\partial \beta}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) &+ U \left( \frac{\partial^2 \beta}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 \beta}{\partial \xi \partial \eta} + \beta^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial \eta^2} - \beta' \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \right) - U^2 \left( \frac{\partial \beta}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (II - 53)$$

Mais puisque  $\beta$  est fonction de  $(X)$  seulement, donc fonction de  $\xi$  seulement ; dans le nouveau repère, on a  $\frac{\partial \beta}{\partial \eta} = 0$  et  $\frac{\partial^2 \beta}{\partial \eta^2} = 0$ , et les équations de Navier-Stokes (II - 53)

s'écrivent finalement dans le repère local :

$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial \xi} + (U_n + \beta') \frac{\partial U}{\partial \eta} &= - \left( \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} - B \right) + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \beta^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right) \\ U \frac{\partial U_n}{\partial \xi} + (U_n + \beta) \frac{\partial U_n}{\partial \eta} &= - \left( \alpha \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi} + \beta \cdot B \right) + \left( \frac{\partial^2 U_n}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 U_n}{\partial \xi \partial \eta} + \beta^2 \frac{\partial^2 U_n}{\partial \eta^2} \right) + \\ 2 \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) &+ U \frac{\partial^2 \beta}{\partial \xi^2} - U^2 \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \end{aligned} \right\} \quad (II - 54)$$

L'équation de continuité (II - 23) et l'équation de la chaleur (II - 31) se transforment à leur tour aisément pour donner en fonction des nouvelles variables, respectivement :

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{II - 55})$$

et

$$U \frac{\partial T}{\partial \xi} + \left( U_\eta + \frac{\beta'}{\text{Pr}} \right) \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{1}{\text{Pr}} \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 T}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \right) = \frac{1}{\text{Pr}} \left( \left( 2 \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) - \text{Pr} UT \right) \lambda + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} + \lambda^2 \right) T \right) \quad (\text{II - 56})$$

Notons que dans l'équation de la chaleur le terme ( $\lambda$ ) ne dépend que de  $\xi$ .

## II-2-4/ Conditions aux limites

### • Vitesse

Au niveau des parois, le vecteur vitesse est nul,  $\vec{V}_w = \vec{0}$  ;

$$\left. \begin{array}{l} U_w = 0 \\ V_w = 0 \end{array} \right\} \text{Donc } U_{\eta w} = 0 \text{ à la paroi.} \quad (\text{II - 57})$$

### • Température

On a déjà posé comme hypothèse que la paroi est isotherme,  $t_w = \text{cte}$ , ce qui nous donne une température adimensionnelle nulle à la paroi :

$$T_w = 0 \quad (\text{II - 58})$$

### • Pression

Le problème de la condition limite concernant la pression, sera traité plus loin dans la partie *modélisation numérique*.

**II-3-5/ Conditions de périodicité**

Elles ont déjà été établies dans le paragraphe (II - 2 - 1) concernant les hypothèses.

Elles sont simplement reprises ci-dessous :

$$\left. \begin{aligned} U(\xi, \eta) &= U(\xi + 1, \eta) = \dots \\ V(\xi, \eta) &= V(\xi + 1, \eta) = \dots \\ P(\xi, \eta) - P(\xi + 1, \eta) &= P(\xi + 1, \eta) - P(\xi + 2, \eta) = \dots \\ T(\xi, \eta) &= T(\xi + 1, \eta) = \dots \\ \lambda(\xi) &= \lambda(\xi + 1) = \dots \end{aligned} \right\} \text{ donc } U_\eta(\xi, \eta) = U_\eta(\xi + 1, \eta) = \dots \quad (\text{II - 59})$$

**II-3-6/ Conditions concernant l'équation de la chaleur**

Pour résoudre l'équation de la chaleur, qui est à deux degrés de liberté ( $T$ ,  $\lambda$ ), il est nécessaire de trouver une autre équation. Pour ce faire, considérons de nouveau l'équation (II - 17) et divisons par  $(t_m - t_w)$  pour obtenir :

$$1 = \frac{\int_{y_1}^{y_2} \frac{t - t_w}{t_m - t_w} \cdot |U| dY}{\int_{y_1}^{y_2} |U| dY} = \frac{\int_{y_1}^{y_2} T \cdot |U| dY}{\int_{y_1}^{y_2} |U| dY} \quad (\text{II - 60})$$

soit,

$$\int_{y_1}^{y_2} T \cdot |U| dY = \int_{y_1}^{y_2} |U| dY \quad (\text{II - 61})$$

## CHAPITRE III :

### Détermination du nombre de Nusselt et du débit de chaleur transféré entre le fluide et la paroi

Le nombre de Nusselt moyen est défini comme suit :

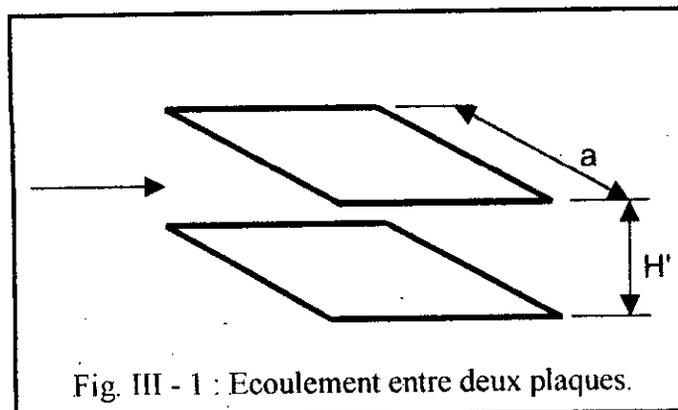
$$Nu = \frac{h \cdot D_h}{k} \quad (\text{III - 1})$$

$h$  et  $k$  sont respectivement, le coefficient de convection moyen et la conductivité thermique du fluide,  $D_h$  le diamètre hydraulique qui dans ce cas (voir Fig. III - 1) sera donné par l'expression :

$$D_h = \frac{4S}{per} = \frac{4H'a}{2a} = 2H' \quad (\text{III - 2})$$

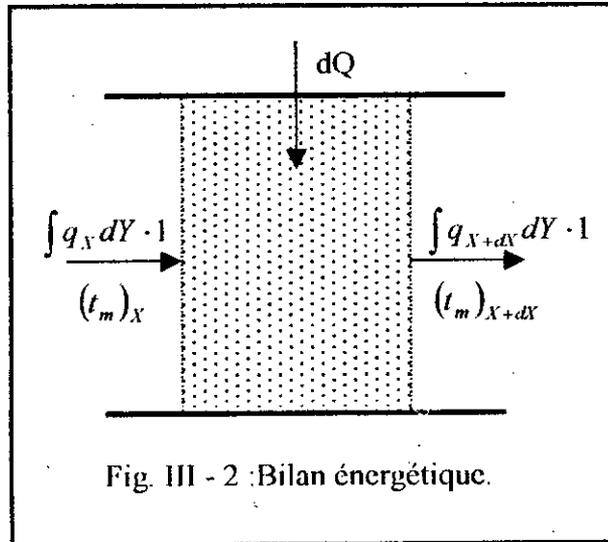
Ce qui conduit à :

$$Nu = \frac{h \cdot 2H'}{k} \quad (\text{III - 3})$$



Pour évaluer (Nu), il convient de l'exprimer en fonction des paramètres qui figurent dans les équations de notre modèle mathématique qui fait l'objet du Chapitre II.

Pour ce faire, considérons le volume élémentaire de fluide représenté sur la figure (III - 2) ci-dessous et appliquons à cet élément le principe de conservation de l'énergie (II - 31).



On obtient :

$$dQ - \left[ \int \frac{\partial q_x}{\partial X} dY \right] \cdot dX - \dot{m} \cdot Cp \cdot dt_m = 0 \quad (\text{III - 4})$$

la densité de flux  $q_x$  est donnée par la relation de Fourier :

$$q_x = -k \frac{\partial t}{\partial X} \quad (\text{III - 5})$$

En portant cette expression dans (III - 4), on obtient :

$$dQ + \left[ k \int \frac{\partial^2 t}{\partial X^2} dY \right] \cdot dX - \dot{m} \cdot Cp \cdot dt_m = 0 \quad (\text{III - 6})$$

A présent, intégrons entre ( $X = 0$ ) et ( $X = 1$ ) :

$$\int_{(X=0)}^{(X=1)} dQ + k \int_0^1 \left[ \int_0^1 \frac{\partial^2 t}{\partial X^2} dY \right] \cdot dX - \dot{m} \cdot Cp \cdot \int_{(X=0)}^{(X=1)} dt_m = 0 \quad (\text{III - 7})$$

la température de paroi étant constante, on peut écrire  $dt_m = d(t_m - t_w)$ ; ensuite en remarquant que :

$$\int_{(X=0)}^{(X=1)} dQ = -h \cdot A_w \cdot \overline{t_m - t_w} \quad (\text{III - 8})$$

$A_w \cong \frac{2L}{\cos \theta}$  étant une approximation de la surface d'échange par période et  $\overline{t_m - t_w}$  la différence de température moyenne logarithmique sur une période.

On peut écrire l'équation (III - 7) comme suit :

$$-hA_w \overline{t_m - t_w} = \dot{m} \cdot Cp \cdot \int_{(t_m - t_w)_{X=0}}^{(t_m - t_w)_{X=1}} d(t_m - t_w) - k \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 t}{\partial X^2} dXdY \quad (\text{III - 9})$$

Soit encore :

$$-hA_w \overline{t_m - t_w} = \dot{m} \cdot Cp \cdot [(t_m - t_w)_{X=1} - (t_m - t_w)_{X=0}] - k \int_0^1 \left[ \frac{\partial t}{\partial X} \Big|_{X=1} - \frac{\partial t}{\partial X} \Big|_{X=0} \right] dY \quad (\text{III - 10})$$

Notons que :

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{t - t_w}{t_m - t_w} \right) = \frac{\partial t}{\partial X} \frac{1}{t_m - t_w} - \frac{d(t_m - t_w)}{dX} \frac{1}{(t_m - t_w)} \left( \frac{t - t_w}{t_m - t_w} \right) = \frac{\partial t}{\partial X} \frac{1}{(t_m - t_w)} - \lambda t \quad (\text{III - 11})$$

D'où :

$$\frac{\partial t}{\partial X} = (t_m - t_w) \cdot \left[ \frac{\partial T}{\partial X} + \lambda T \right] \quad (\text{III - 12})$$

En portant cette expression dans l'équation (III - 10), cette dernière devient :

$$-hA_w \overline{t_m - t_w} = \dot{m} \cdot Cp \cdot [(t_m - t_w)_{X=L} - (t_m - t_w)_{X=0}] - k \int_0^{H/L} \left[ (t_m - t_w) \cdot \left[ \frac{\partial T}{\partial X} + \lambda T \right] \right]_{X=L} - \left[ (t_m - t_w) \cdot \left[ \frac{\partial T}{\partial X} + \lambda T \right] \right]_{X=0} dY \quad (\text{III - 13})$$

vu les conditions de périodicité, on a :

$$\left[ \frac{\partial T}{\partial X} + \lambda T \right]_{X=L} = \left[ \frac{\partial T}{\partial X} + \lambda T \right]_{X=0} \quad (\text{III - 14})$$

et l'équation (III - 13) devient :

$$-hA_w \overline{t_m - t_w} = k \cdot [(t_m - t_w)_{X=L} - (t_m - t_w)_{X=0}] \cdot \left( \frac{\dot{m} \cdot Cp}{k} - \int_0^{H/L} \left[ \frac{\partial T}{\partial X} + \lambda T \right]_{X=0} dY \right) \quad (\text{III - 15})$$

A présent, exprimons le groupe  $\frac{\dot{m} \cdot Cp}{k}$  (où  $\dot{m}$  est le débit par unité de profondeur) en fonction du nombre de Reynolds (Re) et du nombre de Prandtl (Pr).

Mais tout d'abord, rappelons qu'à partir des définitions on a :

$$Re = \frac{\rho \cdot u_m \cdot D_h}{\mu} = \frac{\rho \cdot u_m \cdot 2H'}{\mu} = \frac{2 \cdot (\rho \cdot u_m \cdot H')}{\mu} = \frac{2\dot{m}}{\mu} \quad (\text{III - 16})$$

et

$$Pr = \frac{\mu \cdot Cp}{k} \quad (\text{III - 17})$$

il vient donc :

$$\frac{\dot{m} \cdot Cp}{k} = \frac{Re \cdot Pr}{2} \quad (\text{III - 18})$$

D'un autre côté, on a :

$$\lambda \cdot dX = \frac{d(t_m - t_w)}{(t_m - t_w)} \quad (\text{III - 19})$$

Intégrons entre l'entrée et la sortie de la conduite, on obtient :

$$\ln \left( \frac{(t_m - t_w)_{X=L}}{(t_m - t_w)_{X=0}} \right) = \int_0^L \lambda \cdot dX \quad (\text{III - 20})$$

Donc, on peut écrire :

$$a/ \quad (t_m - t_w)_{X=L} = (t_m - t_w)_{X=0} \cdot \text{Exp} \left( \int_0^L \lambda \cdot dX \right) \quad (\text{III - 21})$$

et par suite,

$$b/ \quad \frac{1}{t_m - t_w} = \frac{(t_m - t_w)_{X=L} - (t_m - t_w)_{X=0}}{\ln \left( \frac{(t_m - t_w)_{X=L}}{(t_m - t_w)_{X=0}} \right)} = -(t_m - t_w)_{X=0} \left( 1 - \text{Exp} \left( \int_0^L \lambda \cdot dX \right) \right) \frac{1}{\int_0^L \lambda \cdot dX} \quad (\text{III - 22})$$

Finalement l'équation (III - 15) s'écrira :

$$hA_w (t_m - t_w)_{X=0} \left[ 1 - \text{Exp} \left( \int_0^L \lambda \cdot dX \right) \right] \frac{1}{\int_0^L \lambda \cdot dX} = -k \cdot (t_m - t_w)_{X=0} \quad (\text{III - 23})$$

$$\times \left[ 1 - \text{Exp} \left( \int_0^L \lambda \cdot dX \right) \right] \cdot \left( \frac{Re \cdot Pr}{2} - \int_0^L \left[ \frac{\partial T}{\partial X} + \lambda T \right]_{X=0} dY \right)$$

En simplifiant et en multipliant par  $(2H')$ , on aboutit après quelques réarrangements à l'expression :

$$\frac{h \cdot 2H'}{k} = -\frac{H' \cdot 2L}{L \cdot A_w} \left( \frac{Re \cdot Pr}{2} - \int_0^{H'/L} \left[ \frac{\partial T}{\partial X} + \lambda T \right]_{X=0} dY \right) \cdot \int_0^1 \lambda \cdot dX \quad (\text{III - 24})$$

Finalement, en multipliant et en divisant par  $(L)$  le membre droit de cette équation, le nombre de Nusselt sera donné par :

$$Nu = -\left( \frac{H'}{L} \right) \frac{2L}{A_w} \left( \frac{Re \cdot Pr}{2} - \int_0^{H'/L} \left[ \frac{\partial T}{\partial X} + \lambda T \right]_{X=0} dY \right) \cdot \int_0^1 \lambda \cdot dX \quad (\text{III - 25})$$

Il vient alors que le débit de chaleur transféré entre le fluide et la paroi sera :

$$Q = -k \cdot (t_m - t_w)_{X=0} \cdot \left[ 1 - \text{Exp} \left( \int_0^1 \lambda \cdot dX \right) \right] \cdot \left( \frac{Re \cdot Pr}{2} - \int_0^{H'/L} \left[ \frac{\partial T}{\partial X} + \lambda T \right]_{X=0} dY \right) \quad (\text{III - 26})$$

Soit, en introduisant  $(Nu)$  :

$$Q = \left( \frac{Nu \cdot k \cdot A_w}{2H'} \right) \cdot (t_m - t_w)_{X=0} \cdot \frac{\left[ 1 - \text{Exp} \left( \int_0^1 \lambda \cdot dX \right) \right]}{\left( \int_0^1 \lambda \cdot dX \right)} \quad (\text{III - 27})$$

## **CHAPITRE IV :**

### **Modèle numérique pour la résolution des équations de Navier-Stokes**

Le modèle mathématique qui a fait l'objet du Chapitre II, pose les équations qui permettent une description complète de notre problème, dans le cadre défini par les hypothèses et les conditions aux limites que nous y avons spécifiées.

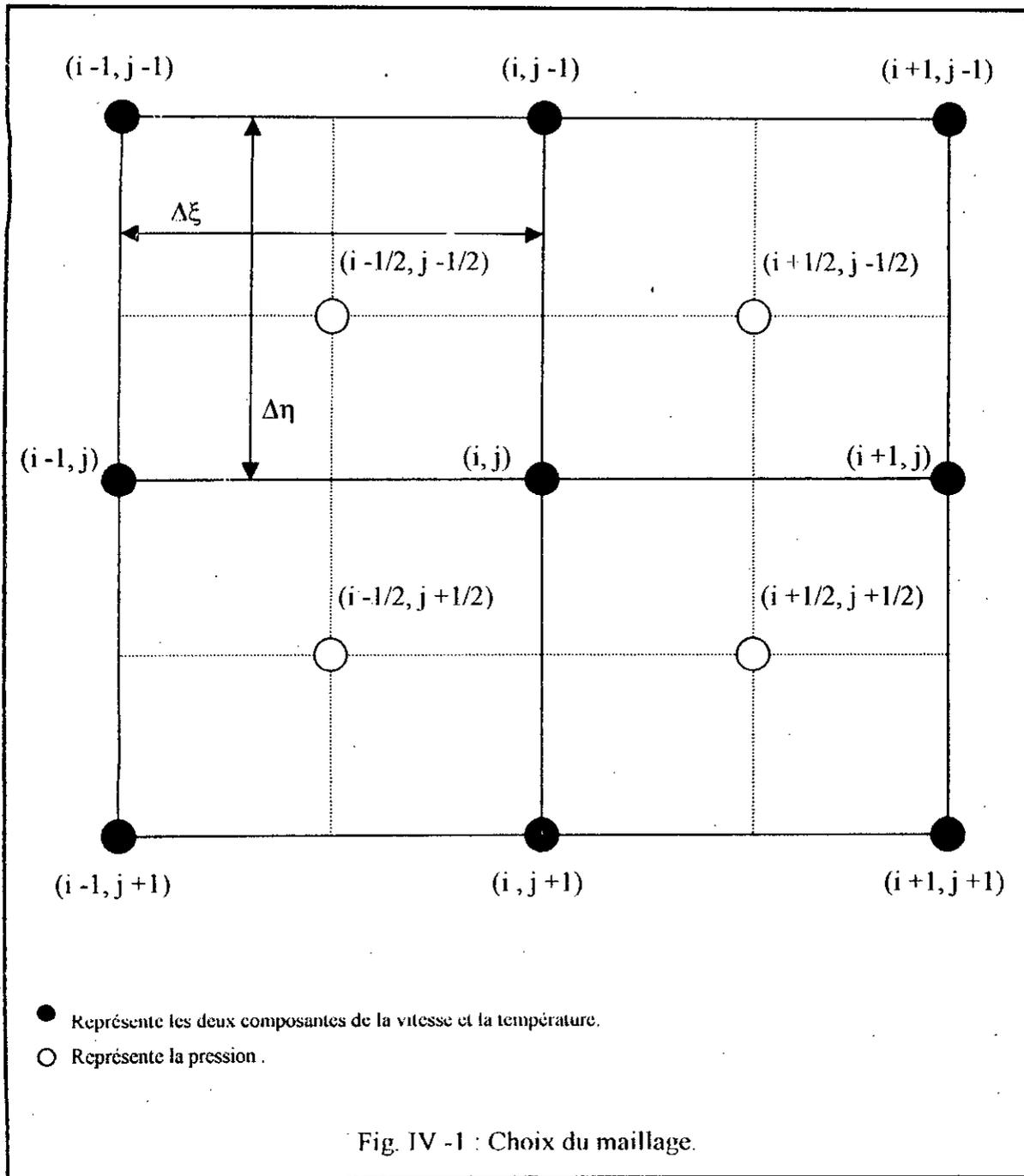
A présent, nous allons nous intéresser à la résolution des équations de Navier-Stokes, puisque comme il a été noté précédemment, le fait que notre écoulement soit incompressible nous autorise à décomposer le problème en deux volets et à ne considérer le problème du transfert de chaleur qu'une fois le champ de vitesse connu.

La méthode des différences finies est très utilisée dans les domaines de la mécanique des fluides et du transfert thermique, pour la simplicité de sa mise en œuvre et parce qu'elle donne de bons résultats.

#### **IV-1/ Choix du maillage :**

Le maillage a une importance capitale dans la méthode de discrétisation des dérivées partielles d'une part, et dans l'application des conditions aux limites d'autre part.

Etant donné que la pression n'est pas connue sur les parois de la conduite, on choisit un schéma dont les vitesses et la température sont représentées sur les nœuds des mailles, et la pression au centre des mailles, de manière à éviter de faire intervenir la pression sur la paroi (voir (Fig. IV -1) ci-dessous) [9].



#### IV-2/ Choix de la méthode de résolution

Notre problème comporte deux difficultés particulières dont il faut tenir compte lorsqu'on s'apprête à choisir une méthode de résolution :

- L'équation de continuité ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ ) doit être satisfaite à tout instant, ce qui rend impossible l'utilisation d'un schéma simple.
- L'absence de conditions aux limites concernant la pression, rend indispensable la recherche d'une méthode en mesure de nous permettre de contourner cette contrainte.

La méthode dite de "*compressibilité artificielle*" semble s'accomoder de ces deux contraintes [9], c'est pourquoi nous avons opté pour elle.

#### IV-2-1/ Méthode de compressibilité artificielle

La particularité de la méthode de compressibilité artificielle réside dans le fait que l'équation de continuité est transformée de la manière suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + C^2 \vec{V} \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{IV - 1})$$

On pourrait regarder cette équation comme l'équation de continuité pour un fluide dont l'équation d'état serait de la forme :

$$P = C^2 \rho \quad \text{où } C = \text{cte} .$$

Il est évident que lorsque ( $t \rightarrow \infty$ ), le régime devient permanent et l'équation (IV - 1) tendra vers l'équation de continuité ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ ) que nous cherchons à satisfaire.

Il convient de noter donc que l'équation (IV - 1) n'a de sens physique que lorsque le régime devient permanent à (t) infini.

L'artifice utilisé par la méthode considérée ici, consiste à joindre l'équation (IV - 1) aux équations de Navier-Stokes et à résoudre le système ainsi obtenu qui comporte dans ce cas la variable (t). Cependant, cette variable n'a pas de sens physique comme on vient de le voir ; il n'en demeure pas moins que lors de la résolution du régime "*pseudo-transitoire*" ainsi généré, notre système évolue vers le régime permanent en suivant normalement les schémas standards classiques, ce qui nous permet d'éviter la contrainte posée par la pression.

En examinant l'équation (IV - 1), on voit immédiatement qu'elle converge vers l'équation (I - 12), indépendamment du terme  $\frac{\partial p}{\partial t}$  si  $C^{-2} \rightarrow 0$ . On en déduit qu'il faut prendre (C) très grand pour que l'équation (IV - 1) puisse représenter approximativement notre équation de continuité dans la régime "*pseudo-transitoire*".

Cependant, des instabilités ont été observées dans le processus de calcul pour de très grandes valeurs de (C) [9]. Il y a donc une limite à ne pas dépasser pour cette constante. Cette limite sera définie par les conditions de stabilité en relation avec d'autres paramètres impliqués dans ce processus de calcul.

On aura donc à résoudre avec la méthode de compressibilité artificielle les équations ci-dessous obtenues à partir des équations (II - 54) en introduisant les termes :  $\frac{\partial U}{\partial t}$  et  $\frac{\partial U_\eta}{\partial t}$  et

l'équation (IV - 1) :

• **Equations de Navier-Stokes**

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial \xi} + (U_\eta + \beta) \frac{\partial U}{\partial \eta} &= - \left( \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} - B \right) + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2 \cdot \beta \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right) \\ \frac{\partial U_\eta}{\partial t} + U \frac{\partial U_\eta}{\partial \xi} + (U_\eta + \beta) \frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} &= - \left( \alpha \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi} + \beta \cdot B \right) + \left( \frac{\partial^2 U_\eta}{\partial \xi^2} - 2 \cdot \beta \frac{\partial^2 U_\eta}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha \frac{\partial^2 U_\eta}{\partial \eta^2} \right) + \\ 2 \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + U \frac{\partial^2 \beta}{\partial \xi^2} - U^2 \frac{\partial \beta}{\partial \xi} & \end{aligned} \right\} \quad (IV - 2)$$

• **Equation de continuité**

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + C^2 \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (IV - 3)$$

**IV-3/ Discrétisation des équations**

**IV-3-1/ Méthode générale de discrétisation**

Soit  $\phi$  une grandeur quelconque (qui peut être u, v, p ou t). En effectuant le développement limité sur  $\phi$  dans la direction (x) au voisinage d'un point (x, y), on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \phi(x + \Delta x, y) &= \phi(x, y) + \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} \cdot (\Delta x)^2 + \dots \\ \phi(x - \Delta x, y) &= \phi(x, y) - \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} \cdot (\Delta x)^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (IV - 4)$$

Si on suppose que  $\phi(x, y)$  est définie au point (M) (fig. IV - 2) tel que :

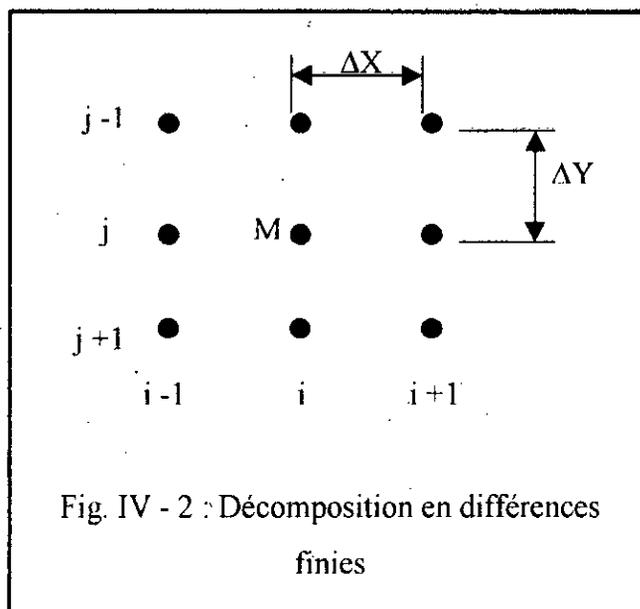
$$\phi(x, y) \Big|_M = \phi_{i,j}(x, y) \quad (IV - 5)$$

donc

$$\phi(x + \Delta x, y) = \phi_{i+1,j}(x, y) \tag{IV - 6}$$

et

$$\phi(x - \Delta x, y) = \phi_{i-1,j}(x, y) \tag{IV - 7}$$



On peut alors écrire (IV - 4) comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \phi_{i+1,j}(x, y) &= \phi_{i,j}(x, y) + \left. \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \right|_M \Delta x + \left. \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} \right|_M (\Delta x)^2 + \dots \quad (a) \\ \phi_{i-1,j}(x, y) &= \phi_{i,j}(x, y) - \left. \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \right|_M \Delta x + \left. \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} \right|_M (\Delta x)^2 + \dots \quad (b) \end{aligned} \right\} \tag{IV - 8}$$

• En soustrayant (b) de (a) on obtient :

$$\phi_{i+1,j}(x, y) - \phi_{i-1,j}(x, y) = 2 \underbrace{\left. \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \right|_M}_{(*)} \Delta x + E_1 \tag{IV - 9}$$

$E_1$ , regroupe les termes du 3<sup>ème</sup> ordre et plus qui peuvent être négligés devant (\*) (l'erreur varie dans ce cas linéairement avec  $\Delta x^2$ ) on aura finalement :

$$\left. \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \right|_{i,j} \cong \frac{\phi_{i+1,j}(x, y) - \phi_{i-1,j}(x, y)}{2\Delta x} \quad (\text{IV - 10})$$

on fait de même pour  $\phi(x, y)$  dans la direction (y), on obtient :

$$\left. \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} \right|_{i,j} \cong \frac{\phi_{i,j+1}(x, y) - \phi_{i,j-1}(x, y)}{2\Delta y} \quad (\text{IV - 11})$$

Il faut noter que (IV - 10) et (IV - 11) sont d'autant plus justes que  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$

• En sommant (a) et (b) on obtient :

$$\phi_{i+1,j}(x, y) + \phi_{i-1,j}(x, y) = \underbrace{2\phi_{i,j}(x, y) + \left. \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} \right|_{i,j}}_{(**)} (\Delta x)^2 + E_2 \quad (\text{IV - 12})$$

En négligeant comme ci-dessus  $E_2$  devant (\*\*), on aura :

$$\left. \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} \right|_{i,j} \cong \frac{\phi_{i+1,j}(x, y) + \phi_{i-1,j}(x, y) - 2\phi_{i,j}(x, y)}{\Delta x^2} \quad (\text{IV - 13})$$

et, de même :

$$\left. \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} \right|_{i,j} \cong \frac{\phi_{i,j+1}(x, y) + \phi_{i,j-1}(x, y) - 2\phi_{i,j}(x, y)}{\Delta y^2} \quad (\text{IV - 14})$$

• En dérivant (IV - 11) par rapport à (x), on a :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \cdot \partial y} \Big|_{i,j} \cong \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{i,j+1} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{i,j-1}}{2\Delta y} \cong \frac{\frac{\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1}}{2\Delta x} - \frac{\phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j-1}}{2\Delta x}}{2\Delta y} \quad (\text{IV - 15})$$

donc

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \cdot \partial y} \Big|_{i,j} \cong \frac{[\phi_{i+1,j+1}(x,y) - \phi_{i-1,j+1}(x,y)] - [\phi_{i+1,j-1}(x,y) - \phi_{i-1,j-1}(x,y)]}{4\Delta x \cdot \Delta y} \quad (\text{IV - 16})$$

### IV-3-2/ Discrétisation des équations de continuité et de Navier Stokes

En se référant à la figure (IV - 1) et aux relations (IV - 10), (IV - 11), (IV - 13), (IV - 14), et (IV - 16), les dérivées partielles apparaissant dans les équations (IV - 2) et (IV - 3), seront discrétisées de la manière suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} \cong \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\Delta \xi}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} \cong \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2\Delta \eta}$$

$$\frac{\partial U_\eta}{\partial \xi} \cong \frac{U_{\eta_{i+1,j}} - U_{\eta_{i-1,j}}}{2\Delta \xi}$$

$$\frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} \cong \frac{U_{\eta_{i,j+1}} - U_{\eta_{i,j-1}}}{2\Delta \eta}$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi} \cong \frac{\bar{P}_{i+\frac{1}{2},j} - \bar{P}_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta \xi}$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} \cong \frac{\bar{P}_{i,j+\frac{1}{2}} - \bar{P}_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta \eta}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cong \frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j} - 2 \cdot U_{i,j}}{\Delta \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cong \frac{U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 2 \cdot U_{i,j}}{\Delta \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 U_\eta}{\partial \xi^2} \cong \frac{U_{\eta_{i+1,j}} + U_{\eta_{i-1,j}} - 2 \cdot U_{\eta_{i,j}}}{\Delta \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 U_\eta}{\partial \eta^2} \cong \frac{U_{\eta_{i,j+1}} + U_{\eta_{i,j-1}} - 2 \cdot U_{\eta_{i,j}}}{\Delta \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cong \frac{(U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1}) - (U_{i+1,j-1} - U_{i-1,j-1})}{4\Delta \xi \Delta \eta}$$

$$\frac{\partial^2 U_\eta}{\partial \xi \partial \eta} \cong \frac{(U_{\eta_{i+1,j+1}} - U_{\eta_{i-1,j+1}}) - (U_{\eta_{i+1,j-1}} - U_{\eta_{i-1,j-1}})}{4\Delta \xi \Delta \eta}$$

Finalement, la discrétisation des termes en  $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$  se fera en négligeant les termes du 2<sup>ème</sup> ordre et plus dans les développements limités de la vitesse et de la pression par rapport à (t) ; et on aura dans ce cas :

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} ; \quad \frac{\partial U_{\eta}}{\partial t} \cong \frac{U_{\eta,i,j}^{n+1} - U_{\eta,i,j}^n}{\Delta t} ; \quad \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} \cong \frac{\bar{P}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - \bar{P}_{i+1/2,j+1/2}^n}{\Delta t}$$

A présent le système résultant de la discrétisation est :

• **Equations de Navier-Stokes**

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{n+1} = & U_{i,j}^n - \Delta t \left[ U_{i,j}^n \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2\Delta\xi} + (U_{\eta,j}^n + \beta') \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} \right] \\ & - \Delta t \left[ \frac{\bar{P}_{i+1/2,j}^n - \bar{P}_{i-1/2,j}^n}{\Delta\xi} - \beta \frac{\bar{P}_{i,j+1/2}^n - \bar{P}_{i,j-1/2}^n}{\Delta\eta} - B \right] + \Delta t \left[ \frac{U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n}{\Delta\xi^2} \right. \\ & \left. - 2\beta \frac{(U_{i+1,j+1}^n - U_{i+1,j-1}^n) - (U_{i-1,j+1}^n - U_{i-1,j-1}^n)}{4\Delta\xi \cdot \Delta\eta} + \alpha \frac{U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n}{\Delta\eta^2} \right] ; \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} U_{\eta,j}^{n+1} = & U_{\eta,j}^n - \Delta t \left[ U_{i,j}^n \frac{U_{\eta,i,j}^{n+1} - U_{\eta,i,j}^{n-1}}{2\Delta\xi} + (U_{\eta,j}^n + \beta') \frac{U_{\eta,i,j+1}^n - U_{\eta,i,j-1}^n}{2\Delta\eta} \right] \\ & - \Delta t \left[ \alpha \frac{\bar{P}_{i,j+1/2}^{n+1} - \bar{P}_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta\eta} - \beta \frac{\bar{P}_{i+1/2,j}^{n+1} - \bar{P}_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta\xi} + \beta \cdot B \right] + \Delta t \left[ \frac{U_{\eta,i,j+1}^n + U_{\eta,i,j-1}^n - 2U_{\eta,i,j}^n}{\Delta\xi^2} \right. \\ & \left. - 2\beta \frac{(U_{\eta,i+1,j+1}^n - U_{\eta,i+1,j-1}^n) - (U_{\eta,i-1,j+1}^n - U_{\eta,i-1,j-1}^n)}{4\Delta\xi \cdot \Delta\eta} + \alpha \frac{U_{\eta,i,j+1}^n + U_{\eta,i,j-1}^n - 2U_{\eta,i,j}^n}{\Delta\eta} \right] \\ & + \Delta t \cdot 2 \frac{\partial\beta}{\partial\xi} \left( \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2\Delta\xi} - \beta \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} \right) + \Delta t \left[ U_{i,j}^n \left( \frac{\partial^2\beta}{\partial\xi^2} \right) - (U_{i,j}^n)^2 \frac{\partial\beta}{\partial\xi} \right] \end{aligned}$$

(IV - 17)

- **Equation de continuité**

$$\bar{P}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \bar{P}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - \Delta t C^2 \left[ \frac{U_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - U_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta \xi} + \frac{U_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n+1} - U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}}{\Delta \eta} \right] \quad (\text{IV} - 18)$$

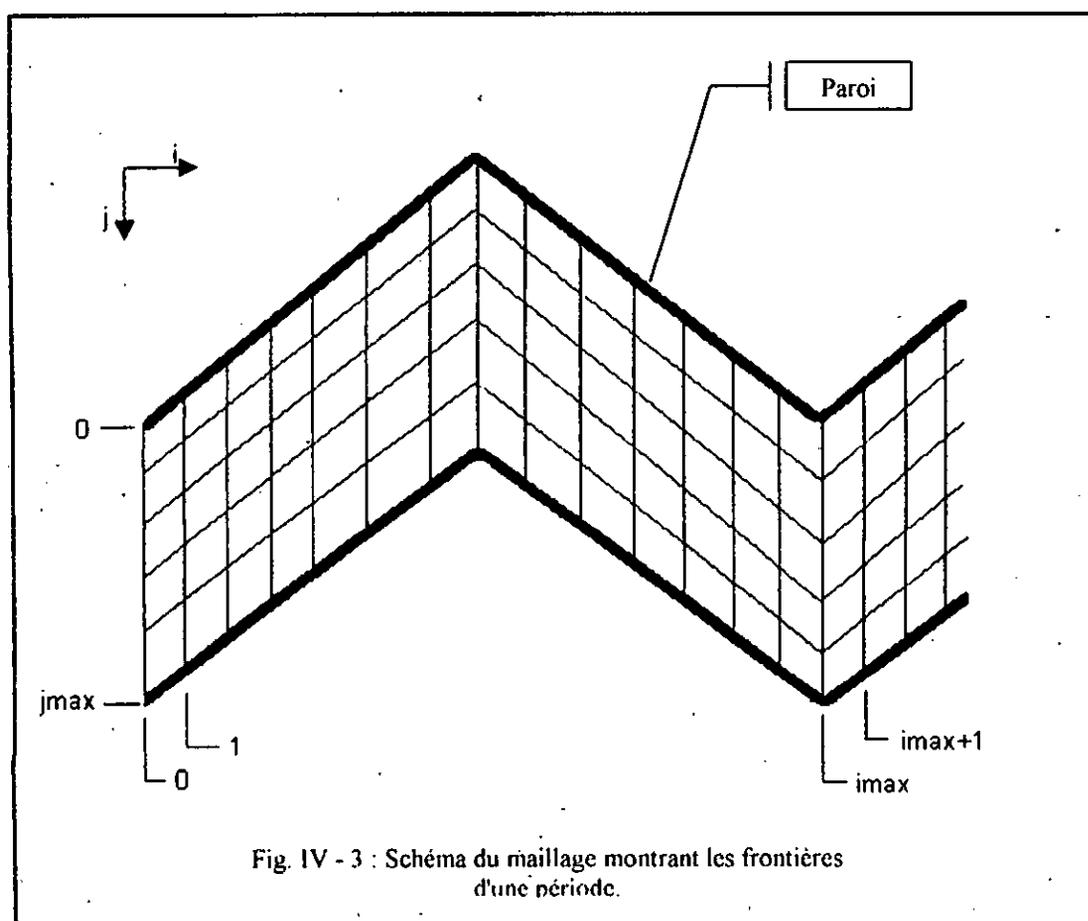
Précisons que dans ces équations :

$i \in [1, i_{\max}]$  est un compteur dans la direction  $\xi$  ;

$j \in [1, j_{\max}-1]$  est un compteur dans la direction  $\eta$  ;

et

$n$  : un compteur pour  $(t)$ .



Les termes de vitesse ou de pression qui apparaissent dans les équations ci-dessus et qui ne sont pas représentés sur la figure (IV - 1), sont obtenus par interpolation linéaire.

Soit :

$$\left. \begin{aligned} U_{i+1,j+1/2} &= \frac{1}{2}(U_{i+1,j+1} + U_{i+1,j}) \\ U_{i,j+1/2} &= \frac{1}{2}(U_{i,j+1} + U_{i,j}) \\ U_{\eta_{i+1/2},j+1} &= \frac{1}{2}(U_{i+1,j+1} + U_{i,j}) \\ U_{\eta_{i+1/2},j} &= \frac{1}{2}(U_{i+1,j} + U_{i,j}) \end{aligned} \right\} \quad \text{(IV - 19)}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_{i+1/2,j} &= \frac{1}{2}(\bar{P}_{i+1/2,j+1/2} + \bar{P}_{i+1/2,j-1/2}) \\ \bar{P}_{i-1/2,j} &= \frac{1}{2}(\bar{P}_{i-1/2,j+1/2} + \bar{P}_{i-1/2,j-1/2}) \\ \bar{P}_{i,j+1/2} &= \frac{1}{2}(\bar{P}_{i+1/2,j+1/2} + \bar{P}_{i-1/2,j+1/2}) \\ \bar{P}_{i,j-1/2} &= \frac{1}{2}(\bar{P}_{i+1/2,j-1/2} + \bar{P}_{i-1/2,j-1/2}) \end{aligned} \right\} \quad \text{(IV - 20)}$$

En joignant aux équations (IV - 17) et (IV - 18) :

- les conditions aux limites :

$\forall t$ , les composantes de la vitesse sont nulles aux parois :

$$\left. \begin{aligned} U_{i,0} &= 0 \\ U_{\eta,0} &= 0 \\ U_{i,j_{\max}} &= 0 \\ U_{\eta,j_{\max}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{(IV - 21)}$$

- les conditions initiales :

A  $t=t_0$ ,  $\forall i, j$  on a :

$$\left. \begin{aligned} U_{i,j}^0 &= U_0 \\ U_{\eta_{i,j}}^0 &= U_{\eta_0} \\ \bar{P}_{i+1/2,j+1/2}^0 &= \bar{P}_0 \end{aligned} \right\} \quad \text{(IV - 22)}$$

- les conditions de périodicité :

$$\left. \begin{aligned} U_{0,j} &= U_{i_{\max},j} \\ U_{\eta 0,j} &= U_{\eta i_{\max},j} \\ U_{i_{\max}+1,j} &= U_{1,j} \\ U_{\eta i_{\max}+1,j} &= U_{\eta 1,j} \\ \bar{P}_{1/2,j+1/2} &= \bar{P}_{i_{\max}+1/2,j+1/2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV - 23})$$

- et les conditions de stabilité [9] :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2)\Delta t &\leq 1 \\ 2\Delta t \left( \frac{1}{\Delta X^2} + \frac{1}{\Delta Y^2} \right) \left( 1 + \frac{\Delta t C^2}{2} \right) &\leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV - 24})$$

notre modèle numérique devient prêt pour la résolution.

Cependant, on doit insérer dans le processus de calcul un test qui nous permet de vérifier s'il est convergent.

A cet effet, deux tests peuvent être utilisés :

- Le premier consiste à tester les paramètres entre deux itérations successives [9] ; on doit vérifier par exemple que :

$$\max \left( \frac{1}{\Delta t} |U^{n+1} - U^n|, \frac{1}{\Delta t} |U_{\eta}^{n+1} - U_{\eta}^n|, \frac{1}{\Delta t \times C^2} |\bar{P}^{n+1} - \bar{P}^n| \right) \leq \varepsilon \quad (\text{IV - 25})$$

où  $\varepsilon$  est un infiniment petit.

- Le second consiste à vérifier tout simplement que le débit devient constant lorsque ( $t \rightarrow \infty$ ) ; le test sera dans ce cas :

$$|\dot{m}^{n+1} - \dot{m}^n| \leq \varepsilon \quad (\text{IV - 26})$$

Nous avons adopté ce second test pour sa simplicité.

L'algorithme ci-dessous présente dans l'ordre les différentes étapes du processus de calcul.

**IV-4/ Algorithme de résolution**

**Début :**

**1/ Introduction des données nécessaires à la résolution :**

$namx, imax, jmax, \Delta t, \varepsilon, U_0, U_{\eta_0}, \bar{P}_0, B, \theta, \delta(X), H/L$  ;

**1-1/ Evaluation de:**  $\Delta \xi = 1/imax, \Delta \eta = H/L/jmax, C$  (à partir des conditions de stabilité (VI - 24));

**2/ Conditions initiales :**

Pour  $i = 0$  à  $imax$

<p><b>Pour <math>j = 0</math> à <math>jmax</math></b></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 5px 0;"> <math display="block">U_{i,j}^0 = U_0;</math> <math display="block">U_{\eta,i,j}^0 = U_{\eta_0};</math> <math display="block">\bar{P}_{i+1/2,j+1/2}^0 = \bar{P}_0;</math> </div>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**3/ Conditions aux limites :**

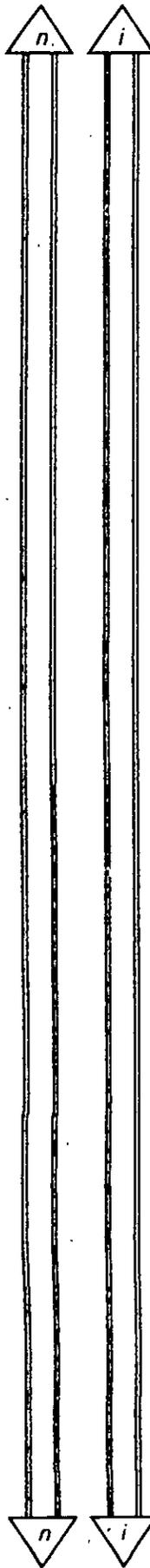
Pour  $i = 0$  à  $imax$

$U_{i,0} = 0;$ $U_{\eta,0} = 0;$ $U_{i,jmax} = 0;$ $U_{\eta,jmax} = 0;$
-------------------------------------------------------------------------

**4/ Résolution des équations de conservation :**

(A) Pour  $n = 0$  à  $nmax$

<p><b>Pour <math>i = 1</math> à <math>imax</math> (déplacement de section en section)</b></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 5px 0;"> <math display="block">\beta = \frac{\partial \delta(X)}{\partial X};</math> <math display="block">\beta' = \frac{\partial \beta}{\partial X} = \frac{\partial^2 \delta(X)}{\partial X^2};</math> <math display="block">\frac{\partial^2 \beta}{\partial X^2} = \frac{\partial^3 \delta(X)}{\partial X^3};</math> <math display="block">a = 1 + \beta^2;</math> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;">  <p><math>n</math></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><math>i</math></p> </div> </div>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------



$$\left. \begin{aligned}
 U_{i+1/2} &= \frac{1}{2}(U_{i+1} + U_{i,0}) \\
 U_{i-1/2} &= \frac{1}{2}(U_{i,1} + U_{i,0}) \\
 U_{\eta+1/2} &= \frac{1}{2}(U_{\eta+1} + U_{\eta}) \\
 U_{\eta-1/2} &= \frac{1}{2}(U_{\eta,0} + U_{\eta,1})
 \end{aligned} \right\} \text{Interpolation linéaire (voir fig. IV-1)}$$

$$\bar{P}_{i+1/2}^{n+1} = \bar{P}_{i+1/2}^n - \Delta t C^2 \left[ \frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^{n+1}}{\Delta \xi} + \frac{U_{\eta+1/2}^{n+1} - U_{\eta+1/2}^{n+1}}{\Delta \eta} \right] \quad ; \quad (IV - 18)$$

Pour  $j = 1$  à  $j_{max} - 1$  (déplacement d'un point un autre au sein d'une même section)

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{P}_{i+1/2,j} &= \frac{1}{2}(\bar{P}_{i+1/2,j+1/2} + \bar{P}_{i+1/2,j-1/2}) \\
 \bar{P}_{i-1/2,j} &= \frac{1}{2}(\bar{P}_{i-1/2,j+1/2} + \bar{P}_{i-1/2,j-1/2}) \\
 \bar{P}_{\eta+1/2} &= \frac{1}{2}(\bar{P}_{\eta+1/2,j+1/2} + \bar{P}_{\eta+1/2,j-1/2}) \\
 \bar{P}_{\eta-1/2} &= \frac{1}{2}(\bar{P}_{\eta-1/2,j+1/2} + \bar{P}_{\eta-1/2,j-1/2})
 \end{aligned} \right\} \text{Interpolation linéaire (voir fig. IV-1)}$$

$$\left. \begin{aligned}
 U_{i,j}^{n+1} &= U_{i,j}^n - \Delta t \left[ U_{i,j}^n \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2\Delta \xi} + (U_{\eta,j}^n + \beta^n) \frac{U_{\eta,j+1}^n - U_{\eta,j-1}^n}{2\Delta \eta} \right] \\
 &- \Delta t \left[ \frac{\bar{P}_{i+1/2,j}^n - \bar{P}_{i-1/2,j}^n}{\Delta \xi} - \beta \frac{\bar{P}_{i+1/2,j}^n - \bar{P}_{i-1/2,j}^n}{\Delta \eta} - B \right] + \Delta t \left[ \frac{U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n}{\Delta \xi^2} \right. \\
 &- 2\beta \frac{(U_{i+1,j+1}^n - U_{i+1,j-1}^n) - (U_{i-1,j+1}^n - U_{i-1,j-1}^n)}{4\Delta \xi \cdot \Delta \eta} + \alpha \frac{U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n}{\Delta \eta^2} \left. \right] \\
 U_{\eta,j}^{n+1} &= U_{\eta,j}^n - \Delta t \left[ U_{\eta,j}^n \frac{U_{\eta+1,j}^n - U_{\eta-1,j}^n}{2\Delta \xi} + (U_{\eta,j}^n + \beta^n) \frac{U_{\eta,j+1}^n - U_{\eta,j-1}^n}{2\Delta \eta} \right] \\
 &- \Delta t \left[ \alpha \frac{\bar{P}_{\eta+1/2,j}^n - \bar{P}_{\eta-1/2,j}^n}{\Delta \eta} - \beta \frac{\bar{P}_{i+1/2,j}^n - \bar{P}_{i-1/2,j}^n}{\Delta \xi} + \beta \cdot B \right] + \Delta t \left[ \frac{U_{\eta,j+1}^n + U_{\eta,j-1}^n - 2U_{\eta,j}^n}{\Delta \xi^2} \right. \\
 &- 2\beta \frac{(U_{\eta+1,j+1}^n - U_{\eta+1,j-1}^n) - (U_{\eta-1,j+1}^n - U_{\eta-1,j-1}^n)}{4\Delta \xi \cdot \Delta \eta} + \alpha \frac{U_{\eta,j+1}^n + U_{\eta,j-1}^n - 2U_{\eta,j}^n}{\Delta \eta} \left. \right] \\
 &+ \Delta t \cdot 2 \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \left( \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2\Delta \xi} - \beta \frac{U_{\eta+1,j}^n - U_{\eta-1,j}^n}{2\Delta \eta} \right) + \Delta t \left[ U_{i,j}^n \left( \frac{\partial^2 \beta}{\partial \xi^2} \right) - (U_{i,j}^n)^2 \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \right] \\
 U_{i+1,j+1/2} &= \frac{1}{2}(U_{i+1,j+1} + U_{i+1,j}) \\
 U_{i,j+1/2} &= \frac{1}{2}(U_{i,j+1} + U_{i,j}) \\
 U_{\eta+1/2,j+1} &= \frac{1}{2}(U_{\eta+1,j+1} + U_{\eta,j+1}) \\
 U_{\eta+1/2,j} &= \frac{1}{2}(U_{\eta+1,j} + U_{\eta,j})
 \end{aligned} \right\} \text{Interpolation linéaire (voir fig. IV-1)}$$

(IV - 17)



nombre de Reynolds élevés lorsqu'on passe d'une itération à une autre. Pour y remédier, on pourrait réduire l'incrément ( $\Delta t$ ) qui sépare deux itérations successives, mais ceci conduirait à un nombre d'itérations beaucoup plus grand et par conséquent à un processus de convergence très lent et donc à un coût en temps machine onéreux. Il existe cependant d'autres alternatives [9] dont la plus courante est la méthode "Upwind" qui, appliquée à la discrétisation des termes convectifs, permet de rendre les conditions de stabilité moins sévères. La méthode se contente toutefois d'une approximation dont la précision est du premier ordre.

2. Les deux composantes de la vitesse et la pression se répètent de manière antisymétrique lorsqu'on passe d'une demi-période à l'autre. Cette propriété pourrait être utilisée pour réduire le temps de convergence.

Nous allons à présent modifier notre processus de calcul sur la base des deux remarques ci-dessus.

Appliquons la méthode "Upwind" pour discrétiser les termes convectifs des équations de Navier-Stokes (IV - 2). Si l'on prend par exemple le terme  $\left( U \frac{\partial U}{\partial \xi} \right)$ , la discrétisation se fera de la manière suivante:

$$\left( U \frac{\partial U}{\partial \xi} \right)_{i,j} \cong \frac{U_{i,j}}{2\Delta\xi} \left[ (1 - \varepsilon_{i,j}) \cdot U_{i+1,j} + 2 \cdot \varepsilon_{i,j} \cdot U_{i,j} - (1 + \varepsilon_{i,j}) \cdot U_{i-1,j} \right] \quad (\text{IV - 27})$$

où

$$\varepsilon_{i,j} = \text{sign}(U_{i,j}) = \begin{cases} 1 & \text{pour } U_{i,j} > 0 \\ -1 & \text{pour } U_{i,j} < 0 \end{cases} \quad (\text{IV - 28})$$

En procédant de même pour les autres termes convectifs et en gardant les autres termes comme dans les équations (IV - 2), notre modèle numérique devient pour les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned}
 U_{i,j}^{n+1} = & U_{i,j}^n - \Delta t \left[ U_{i,j}^n \frac{(1 - \varepsilon_{1i,j}) \cdot U_{i+1,j}^n + 2 \cdot \varepsilon_{1i,j} U_{i,j}^n - (1 + \varepsilon_{1i,j}) \cdot U_{i-1,j}^n}{2\Delta\xi} + \right. \\
 & \left. (U_{\eta,j}^n + \beta') \frac{(1 - \varepsilon_{2i,j}) \cdot U_{i,j+1}^n + 2 \cdot \varepsilon_{2i,j} U_{i,j}^n - (1 + \varepsilon_{2i,j}) \cdot U_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} \right] \\
 & - \Delta t \left[ \frac{\bar{P}_{i+\frac{1}{2},j}^n - \bar{P}_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta\xi} - \beta \frac{\bar{P}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \bar{P}_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta\eta} - B \right] + \Delta t \left[ \frac{U_{i+1,i}^n + U_{i-1,i}^n - 2U_{i,j}^n}{\Delta\xi^2} \right. \\
 & \left. - 2\beta \frac{(U_{i+1,j+1}^n - U_{i+1,j-1}^n) - (U_{i-1,j+1}^n - U_{i-1,j-1}^n)}{4\Delta\xi \cdot \Delta\eta} + \alpha \frac{U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n}{\Delta\eta^2} \right]
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 U_{\eta,j}^{n+1} = & U_{\eta,j}^n - \Delta t \left[ U_{i,j}^n \frac{(1 - \varepsilon_{1i,j}) \cdot U_{\eta+1,j}^n + 2 \cdot \varepsilon_{1i,j} U_{\eta,j}^n - (1 + \varepsilon_{1i,j}) \cdot U_{\eta-1,j}^n}{2\Delta\xi} + \right. \\
 & \left. (U_{\eta,j}^n + \beta') \frac{(1 - \varepsilon_{2i,j}) \cdot U_{\eta,j+1}^n + 2 \cdot \varepsilon_{2i,j} U_{\eta,j}^n - (1 + \varepsilon_{2i,j}) \cdot U_{\eta,j-1}^n}{2\Delta\eta} \right] \\
 & - \Delta t \left[ \alpha \frac{\bar{P}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \bar{P}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta\eta} - \beta \frac{\bar{P}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \bar{P}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}}{\Delta\xi} + \beta \cdot B \right] + \Delta t \left[ \frac{U_{\eta+1,j}^n + U_{\eta-1,j}^n - 2U_{\eta,j}^n}{\Delta\xi^2} \right. \\
 & \left. - 2\beta \frac{(U_{\eta+1,j+1}^n - U_{\eta+1,j-1}^n) - (U_{\eta-1,j+1}^n - U_{\eta-1,j-1}^n)}{4\Delta\xi \cdot \Delta\eta} + \alpha \frac{U_{\eta,j+1}^n + U_{\eta,j-1}^n - 2U_{\eta,j}^n}{\Delta\eta} \right] \\
 & + \Delta t \cdot 2 \frac{\partial\beta}{\partial\xi} \left( \frac{U_{i\frac{1}{2},j}^n - U_{i-1,j}^n}{2\Delta\xi} - \beta \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} \right) + \Delta t \left[ U_{i,j}^n \left( \frac{\partial^2\beta}{\partial\xi^2} \right) - (U_{i,j}^n)^2 \frac{\partial\beta}{\partial\xi} \right]
 \end{aligned}$$

(IV - 29)

Avec

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{1i,j} &= \text{sign}(U_{i,j}^n) \\
 \text{et} \\
 \varepsilon_{2i,j} &= \text{sign}(U_{\eta,j}^n + \beta')
 \end{aligned} \right\}$$

(IV - 30)

Les conditions d'antisymétrie, s'écrivent comme suit :

$$\left. \begin{aligned}
 U_{0,j} &= U_{i_{\max}+2, j_{\max}-j} \\
 U_{i_{\max}+2+1, j_{\max}-j} &= U_{1,j} \\
 U_{\eta 0, j} &= -U_{\eta_{\max}+2, j_{\max}-j} \\
 U_{\eta_{\max}+2+1, j_{\max}-j} &= -U_{\eta 1, j} \\
 \bar{P}_{1/2, j+1/2} &= \bar{P}_{i_{\max}+2+1/2, j_{\max}-j/2-1}
 \end{aligned} \right\}$$

(IV - 31)

Avec  $i=1,imax/2$  ( $imax$  doit être paire), et  $j=1,jmax-1$ ;

Algorithme tenant compte des nouvelles conditions :

**Début :**

**1/ Introduction des données nécessaires à la résolution :** (même chose que l'algorithme ci-dessus)

**2/ Conditions initiales :** (même chose que l'algorithme ci-dessus)

**3/ Conditions aux limites :** (même chose que l'algorithme ci-dessus)

**4/ Résolution des équations de conservation :**

**(A) Pour  $n = 0$  à  $nmax$**

**Pour  $i = 1$  à  $imax/2$**

(même chose que l'algorithme ci-dessus)

**Pour  $j = 1$  à  $jmax - 1$**

(même chose que l'algorithme ci-dessus)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1,j} &= \text{sign}(U_{i,j}^n); \\ \varepsilon_{2,j} &= \text{sign}(U_{\eta i,j}^n + \beta^i); \end{aligned} \right\} \quad (IV - 30)$$

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \Delta t \left[ U_{i,j}^n \frac{(1 - \varepsilon_{1,j}) \cdot U_{i+1,j}^n + 2 \cdot \varepsilon_{1,j} U_{i,j}^n - (1 + \varepsilon_{1,j}) \cdot U_{i-1,j}^n}{2 \Delta \xi} \right. \\ \left. (U_{\eta i,j}^n + \beta^i) \frac{(1 - \varepsilon_{2,j}) \cdot U_{i,j+1}^n + 2 \cdot \varepsilon_{2,j} U_{i,j}^n - (1 + \varepsilon_{2,j}) \cdot U_{i,j-1}^n}{2 \Delta \eta} \right] \\ - \Delta t \left[ \frac{\bar{P}_{i,j+1/2}^n - \bar{P}_{i,j-1/2}^n}{\Delta \xi} - \beta \frac{\bar{P}_{i,j+1/2}^n - \bar{P}_{i,j-1/2}^n}{\Delta \eta} - B \right] + \Delta t \left[ \frac{U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n}{\Delta \xi^2} \right. \\ \left. - 2\beta \frac{(U_{i+1,j+1}^n - U_{i+1,j-1}^n) - (U_{i-1,j+1}^n - U_{i-1,j-1}^n)}{4 \Delta \xi \cdot \Delta \eta} + \alpha \frac{U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n}{\Delta \eta^2} \right] \quad (IV - 29)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1,j} &= \text{sign}(U_{i,j}^n) \\ \varepsilon_{2,j} &= \text{sign}(U_{\eta i,j}^n + \beta^i) \end{aligned} \right\} \quad (IV - 30)$$

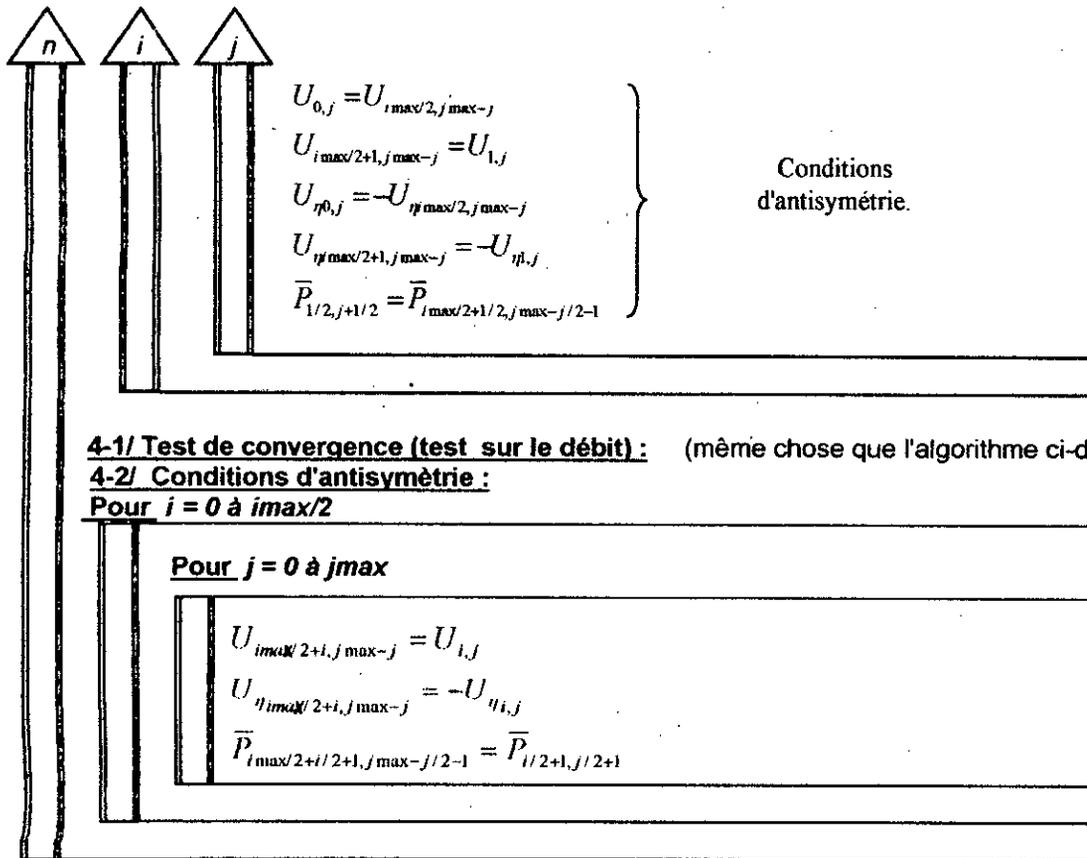
$$U_{\eta i,j}^{n+1} = U_{\eta i,j}^n - \Delta t \left[ U_{\eta i,j}^n \frac{(1 - \varepsilon_{1,j}) \cdot U_{\eta i+1,j}^n + 2 \cdot \varepsilon_{1,j} U_{\eta i,j}^n - (1 + \varepsilon_{1,j}) \cdot U_{\eta i-1,j}^n}{2 \Delta \xi} \right. \\ \left. (U_{\eta i,j}^n + \beta^i) \frac{(1 - \varepsilon_{2,j}) \cdot U_{\eta i,j+1}^n + 2 \cdot \varepsilon_{2,j} U_{\eta i,j}^n - (1 + \varepsilon_{2,j}) \cdot U_{\eta i,j-1}^n}{2 \Delta \eta} \right] \\ - \Delta t \left[ \alpha \frac{\bar{P}_{i,j+1/2}^{n+1} - \bar{P}_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta \eta} - \beta \frac{\bar{P}_{i,j+1/2}^{n+1} - \bar{P}_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta \xi} + \beta \cdot B \right] + \Delta t \left[ \frac{U_{\eta i+1,j}^n + U_{\eta i-1,j}^n - 2U_{\eta i,j}^n}{\Delta \xi^2} \right. \\ \left. - 2\beta \frac{(U_{\eta i+1,j+1}^n - U_{\eta i+1,j-1}^n) - (U_{\eta i-1,j+1}^n - U_{\eta i-1,j-1}^n)}{4 \Delta \xi \cdot \Delta \eta} + \alpha \frac{U_{\eta i,j+1}^n + U_{\eta i,j-1}^n - 2U_{\eta i,j}^n}{\Delta \eta} \right] \\ + \Delta t \cdot 2 \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \left( \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2 \Delta \xi} - \beta \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2 \Delta \eta} \right) + \Delta t \left[ U_{i,j}^n \left( \frac{\partial^2 \beta}{\partial \xi^2} \right) - (U_{i,j}^n)^2 \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \right]$$

(même chose que l'algorithme ci-dessus)

$\downarrow$   
 $n$

$\downarrow$   
 $i$

$\downarrow$   
 $j$



**Fin .**

## CHAPITRE V : Modèle numérique pour la résolution de l'équation de la chaleur

### V-1/ Discrétisation de l'équation de la chaleur

En se référant à la figure (IV -1), la discrétisation des termes aux dérivées partielles présents dans l'équation de la chaleur donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \xi} &\cong \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta\xi} & \frac{\partial T}{\partial \eta} &\cong \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} &\cong \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2 \cdot T_{i,j}}{\Delta\xi^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} &\cong \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2 \cdot T_{i,j}}{\Delta\eta^2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \xi \partial \eta} &\cong \frac{(T_{i+1,j+1} - T_{i-1,j+1}) - (T_{i+1,j-1} - T_{i-1,j-1})}{4\Delta\xi\Delta\eta} \end{aligned}$$

En portant ces équations dans l'équation de la chaleur (II - 56), on obtient :

$$\begin{aligned} U_{i,j} \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta\xi} + \left( U_{i,j} + \frac{\beta}{Pr} \right) \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\Delta\eta} - \frac{1}{Pr} \left[ \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}}{\Delta\xi^2} + \alpha \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}}{\Delta\eta^2} \right. \\ \left. - \frac{\beta}{2} \frac{(T_{i+1,j+1} - T_{i+1,j-1}) - (T_{i-1,j+1} - T_{i-1,j-1})}{\Delta\eta \cdot \Delta\xi} \right] = \frac{1}{Pr} \left[ \left( 2 \left( \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta\xi} - \beta \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \right) + Pr U_{i,j} \cdot T_{i,j} \right) \lambda_y + \right. \\ \left. \left( \frac{\lambda_{y+1} - \lambda_{y-1}}{2\Delta\xi} + \lambda_y^2 \right) T_{i,j} \right] \quad (V - 1) \end{aligned}$$

Les conditions aux limites et les conditions de périodicité s'écrivent respectivement :

$$\left. \begin{aligned} T_{i,0} &= 0 \\ T_{i,j_{\max}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (V - 2)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{0,j} &= T_{i_{\max},j} \\ T_{i_{\max}+1,j} &= T_{1,j} \\ \lambda_0 &= \lambda_{i_{\max}} \\ \lambda_{i_{\max}+1} &= \lambda_1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{V-3})$$

Comme pour les vitesses et la pression, le profil des températures est antisymétrique et on a :

$$T_{i_{\max}/2+i, j_{\max}-j} = T_{i,j} \quad (\text{V-4})$$

Avec  $i=0, i_{\max}/2$  ( $i_{\max}$  doit être paire), et  $j=0, j_{\max}$  ;

## V-2/ Choix de la méthode de résolution

La méthode la plus simple utilisée dans ce cas est la "méthode de sous-relaxation" [9].

On a d'une façon générale :

$$\Phi_i^{k+1} = (1 - \omega) \cdot \Phi_i^k + \omega \cdot \hat{\Phi}_i^k \quad \text{avec} \quad 0 < \omega < 1 \quad (\text{V-5})$$

$\omega$  est appelé, coefficient de sous-relaxation.

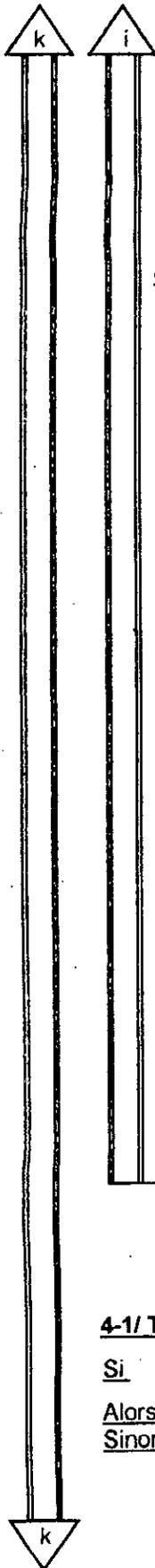
$\Phi_i^{k+1}$  : est la valeur de  $\Phi_i$  à l'étape  $k+1$  ;

$\Phi_i^k$  : est la valeur de  $\Phi_i$  à l'étape  $k$  ;

$\hat{\Phi}_i^{k+1}$  : est l'expression de  $\Phi_i^{k+1}$ .

Le processus s'accompagne du test de convergence suivant :

$$|\Phi_i^{k+1} - \Phi_i^k| \leq \varepsilon \quad (\text{V-6})$$



$$\Omega_i(X) = \frac{\int_0^{H/L} |U_{i,j}| \cdot d\eta}{\int_0^{H/L} T_{i,j} \cdot |U_{i,j}| \cdot d\eta}; \tag{V-7}$$

**4-1/ Calcul des coefficients :**

$D; A_i; B_i; C_i;$  (V - 10) et (V - 12) respectivement

Pour  $j = 1$  à  $j_{max} - 1$

$$T_{i,j}^{k+1} = (1-\omega) \cdot T_{i,j}^k + \omega/D \left[ \frac{U_{i,j}}{2\Delta\xi} (T_{i,j+1}^k - T_{i,j}^k) + \frac{(U_{i,j} + \frac{\beta}{Pr})}{2\Delta\eta} (T_{i,j+1}^k - T_{i,j}^k) \right] + \frac{1}{Pr} \left[ \frac{T_{i+1,j}^k + T_{i-1,j}^k}{\Delta\xi^2} + \frac{\alpha}{\Delta\eta} (T_{i,j+1}^k + T_{i,j}^k) - \frac{\beta}{2\Delta\xi\Delta\eta} (T_{i+1,j+1}^k - T_{i,j+1}^k - T_{i+1,j-1}^k + T_{i,j-1}^k) \right] + \frac{1}{Pr} \left[ 2 \cdot \left( \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i-1,j}^k}{2\Delta\xi} - \frac{\beta}{2\Delta\eta} (T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k) \right) + Pr U_{i,j} T_{i,j}^k \right] \lambda_i^k + \left( \frac{\lambda_{i+1}^k - \lambda_{i-1}^k}{2\Delta\xi} + \lambda_i^k \right) \cdot T_{i,j}^k \tag{V-9}$$

$$T_{i,j}^{k+1} = \Omega_i(x) \cdot T_{i,j}^{k+1} \tag{V-8}$$

$$\lambda_i^{k+1} = \frac{1}{A_i^k} \left\{ B_i^k - \frac{C_i^k}{2Pr\Delta\xi} (\lambda_{i+1}^k - \lambda_{i-1}^k) \right\} \tag{V-13}$$

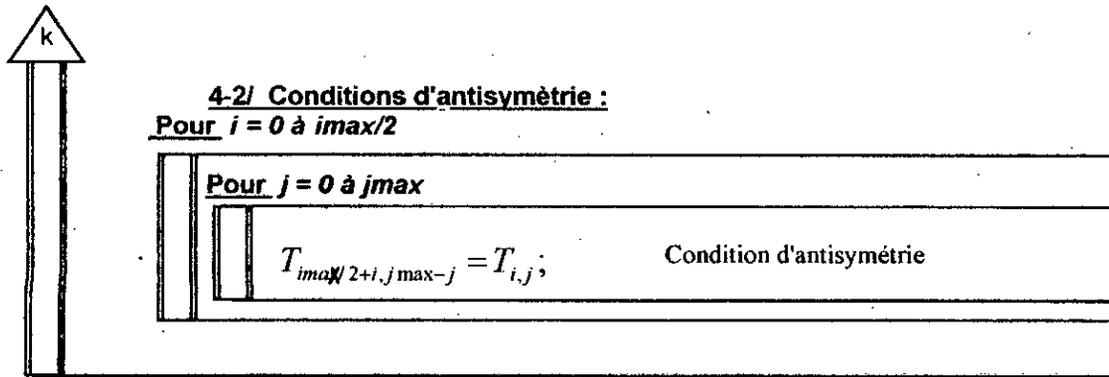
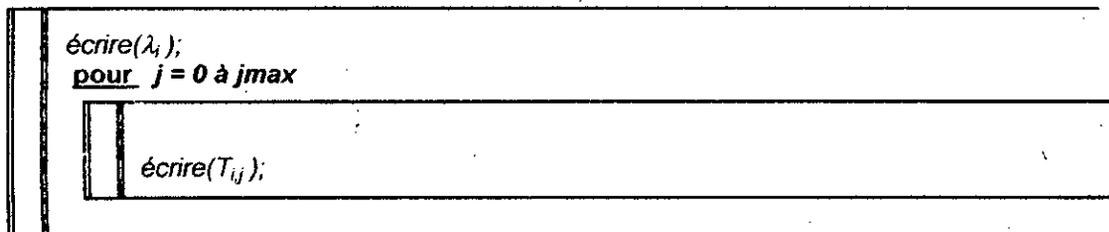
$$\left. \begin{aligned} T_{0,j} &= T_{i_{max},j}; \\ T_{i_{max}+1,j} &= T_{1,j}; \\ \lambda_0 &= \lambda_{i_{max}}; \\ \lambda_{i_{max}+1} &= \lambda_1; \end{aligned} \right\} \text{Conditions de périodicité}$$

**4-1/ Test de convergence (test sur les coefficients) :**

Si  $|T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k| \leq \epsilon$  (V-14)

Alors sortir de la boucle;

Sinon retour au début de boucle (A);

**5/ Impression des résultats :****pour  $i = 0$  à  $imax$** **Fin .**

## CHAPITRE VI :

### Résultats et interprétation

Avant de présenter les résultats de notre étude, il convient de relever les observations suivantes concernant l'exécution du programme.

Le choix du nombre de nœuds du maillage utilisé est conditionné par la valeur du paramètre géométrique ( $H'/L$ ) et par celle du nombre de Reynolds ( $Re$ ).

En effet, le maillage doit être d'autant plus fin que ( $H'/L$ ) et ( $Re$ ) sont élevés. Ainsi, par exemple, pour  $H'/L = 0,25$ , on pourrait se contenter d'un maillage de  $(40 \times 60)$  même pour des nombres de Reynolds élevés ( $Re > 500$ ). Un tel maillage n'est efficace que pour de faibles nombres de Reynolds ( $Re < 200$ ), lorsque  $H'/L = 0,5$ . Par conséquent, si l'on veut, dans ce cas, balayer toute la plage des nombres de Reynolds, il devient nécessaire d'opter pour un maillage plus fin ;  $(80 \times 60)$  par exemple.

Une fois le maillage choisi, ( $\Delta\xi$ ) et ( $\Delta\eta$ ) seront fixés. Le choix de ( $\Delta t$ ) nous permettra alors de calculer à partir de la condition de stabilité (IV - 24), la valeur limite de la constante de compressibilité artificielle ( $C$ ) à ne pas dépasser.

Le coefficient de sous relaxation ( $\omega$ ), introduit avec la méthode de résolution de l'équation de la chaleur, doit être choisi de sorte à favoriser la convergence.

- Pour  $Re > 500$ ,  $H'/L > 1/3$ ,  $Pr > 1$  et  $\theta < 60^\circ$  ; le processus converge pour  $\omega = 0,5$ .
- Pour  $\theta \geq 60^\circ$  ; le processus converge pour  $\omega < 0,1$ .

#### VI-1/ Présentation des résultats et discussion

Les résultats de l'étude sont représentés graphiquement sur les figures (VI - 1) à (VI - 16) ci-après.

### VI-1-1/ Les profils de vitesses et de température, les lignes de courant

Sur la figure (VI - 1), on voit le champ des vitesses représenté sur une période pour un angle vif de  $30^\circ$  et un nombre de Reynolds de 229,81. On voit nettement que l'écoulement est très dense dans la zone du milieu tandis qu'on aperçoit déjà de petites zones de recirculation au voisinage des sommets.

Sur la figure (VI - 2), on a représenté les profils des vitesses (U) et (V) et de la température (T) pour cinq abscisses correspondant respectivement à l'entrée, au quart, à la moitié, au trois quarts et à la sortie d'une période. On observe le mouvement de périodicité que subissent ces profils le long de l'écoulement. Ainsi par exemple, la vitesse (U) présente un maximum localisé au milieu de la moitié supérieure de la section à l'entrée, et à la sortie (qui est en fait l'entrée d'une nouvelle période), au milieu de la moitié inférieure de la section au milieu de la période. Ce maximum se localise au milieu de la section au quart et au trois quarts de la période. Par ailleurs, à l'entrée de la période, à sa moitié et à sa sortie, des vitesses négatives caractérisent les zones de recirculation constatées ci-dessus (Fig. VI - 1) au voisinage des sommets. La vitesse (V) est quasiment nulle dans les zones de recirculation.

Le profil de température suit celui de la vitesse (U), présentant des différences de température locales plus faibles au niveau des zones de recirculation. Il est évident que ces mouvements incessants des profils de la vitesse et de la température, résultant de l'ondulation de la conduite vont permettre un meilleur brassage des parois et un meilleur contact thermique conduisant à une amélioration des échanges de chaleur fluide - paroi. En bas de figure (VI - 2), nous avons regroupé les profils des vitesses et de la température obtenus pour plusieurs abscisses allant de l'entrée jusqu'à la sortie de la période afin de visualiser la propriété d'antisymétrie caractérisant ces profils.

La figure (VI - 3) nous montre comment évolue la configuration de l'écoulement avec le nombre de Reynolds. Dans le cas d'un angle vif aux sommets, il y a d'abord apparition de petites zones de recirculation du côté extérieur des sommets à des nombres de Reynolds relativement faibles ; puis à mesure que le nombre de Reynolds augmente, les zones de recirculation déjà apparues s'étendent et d'autres zones de recirculation prennent naissance au voisinage de la paroi interne en aval du sommet ( voir pour  $Re = 580$ ). Si le nombre de Reynolds augmente davantage les deux zones de recirculation s'étendent jusqu'à se rejoindre pour donner la configuration de l'écoulement correspondant à  $Re = 1077$ .

Dans le cas d'un angle arrondi aux sommets, il n'y a qu'une seule zone de recirculation au sommet, qui s'étend le long de la paroi à mesure que le nombre de Reynolds augmente. L'existence de zones de recirculation peut s'expliquer par l'impossibilité de changer

subitement de direction dans laquelle se trouve le fluide au niveau des sommets et de suivre le mouvement dans la direction de l'écoulement, il se trouve ainsi piégé dans une petite zone voisine du sommet. Toutefois, cette zone de recirculation dont le fluide est renouvelé constamment, facilite l'écoulement principal en amortissant en quelque sorte les changements de direction brusques.

Sur la figure (VI - 4), on a représenté l'écoulement le long de trois périodes successives, tandis que sur la figure (VI - 5), on a représenté la situation lorsqu'un certain nombre de plaques sont empilées de la manière dont elles pourraient se présenter dans un échangeur.

### VI-1-2/ Pression

La figure (VI - 6), nous donne l'évolution de la pression dans la direction de l'écoulement pour trois ordonnés, respectivement : au voisinage des parois (supérieure et inférieure) et au milieu de la section. On remarque que les chutes de pression sont quasiment localisées au voisinage des arêtes de la conduite, mais que la chute de pression globale correspondant à une période est égale à (B).

Sur la figure (VI - 7), on a porté le rapport de la chute de pression correspondant à une période de la configuration à angle vif sur la chute de pression équivalente correspondant à une configuration droite, pour deux angles d'ondulation ( $\theta = 30^\circ$  et  $\theta = 45^\circ$ ) et pour plusieurs valeurs du paramètre géométrique ( $H/L$ ). On y a représenté aussi le rapport des débits qui est obtenu en fait simplement en inversant le rapport des chutes de pression ci-dessus (voir Annexe II). On relève que le rapport des chutes de pression croît dans le même sens que ( $\theta$ ) et ( $Re$ ) et qu'il passe par un maximum au voisinage de  $H/L = 0,5$ .

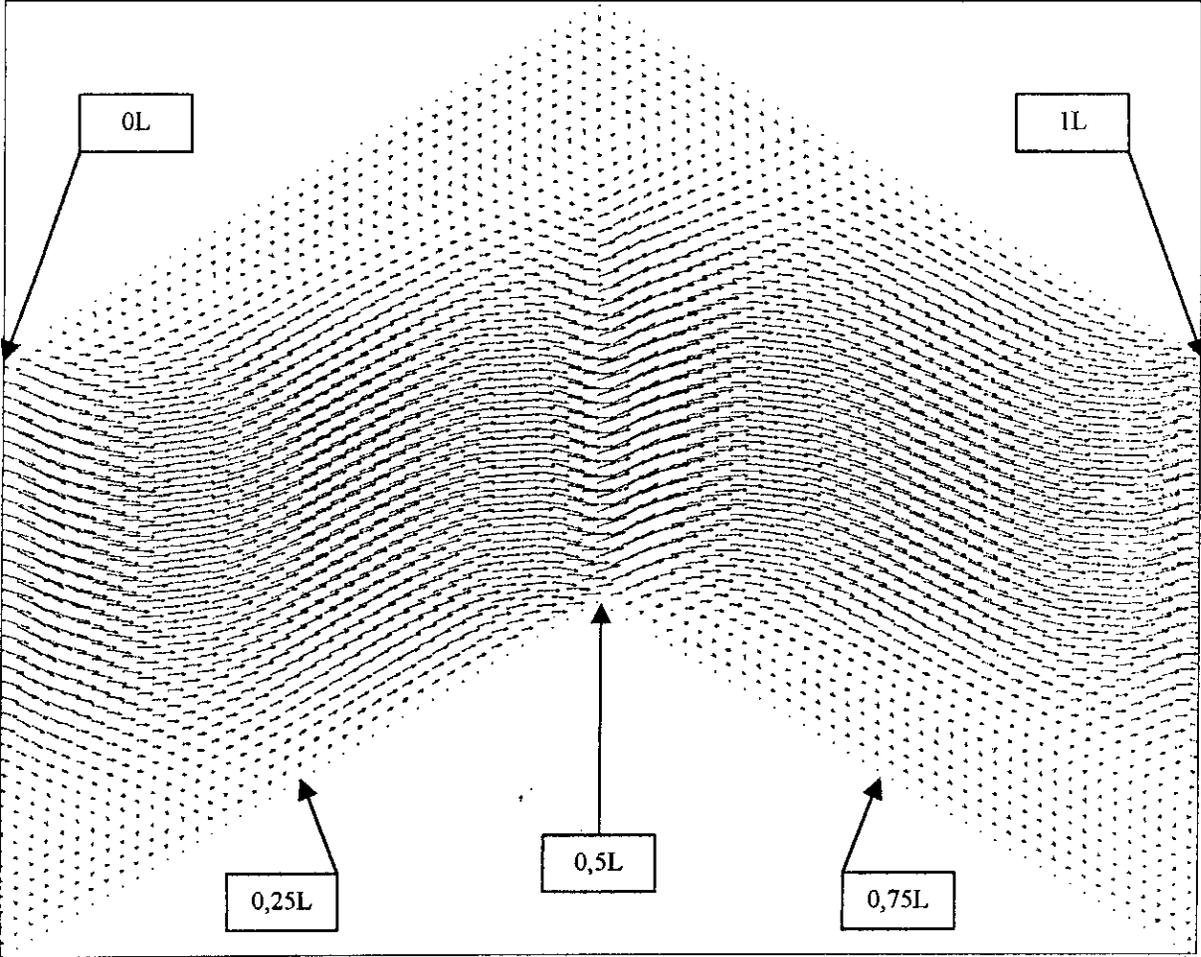


Fig. VI - 1 : Champ des vitesses pour  $\theta = 30^\circ$  et  $H/L = 0,5$   
(Angle vif :  $Re = 229,81$ ).

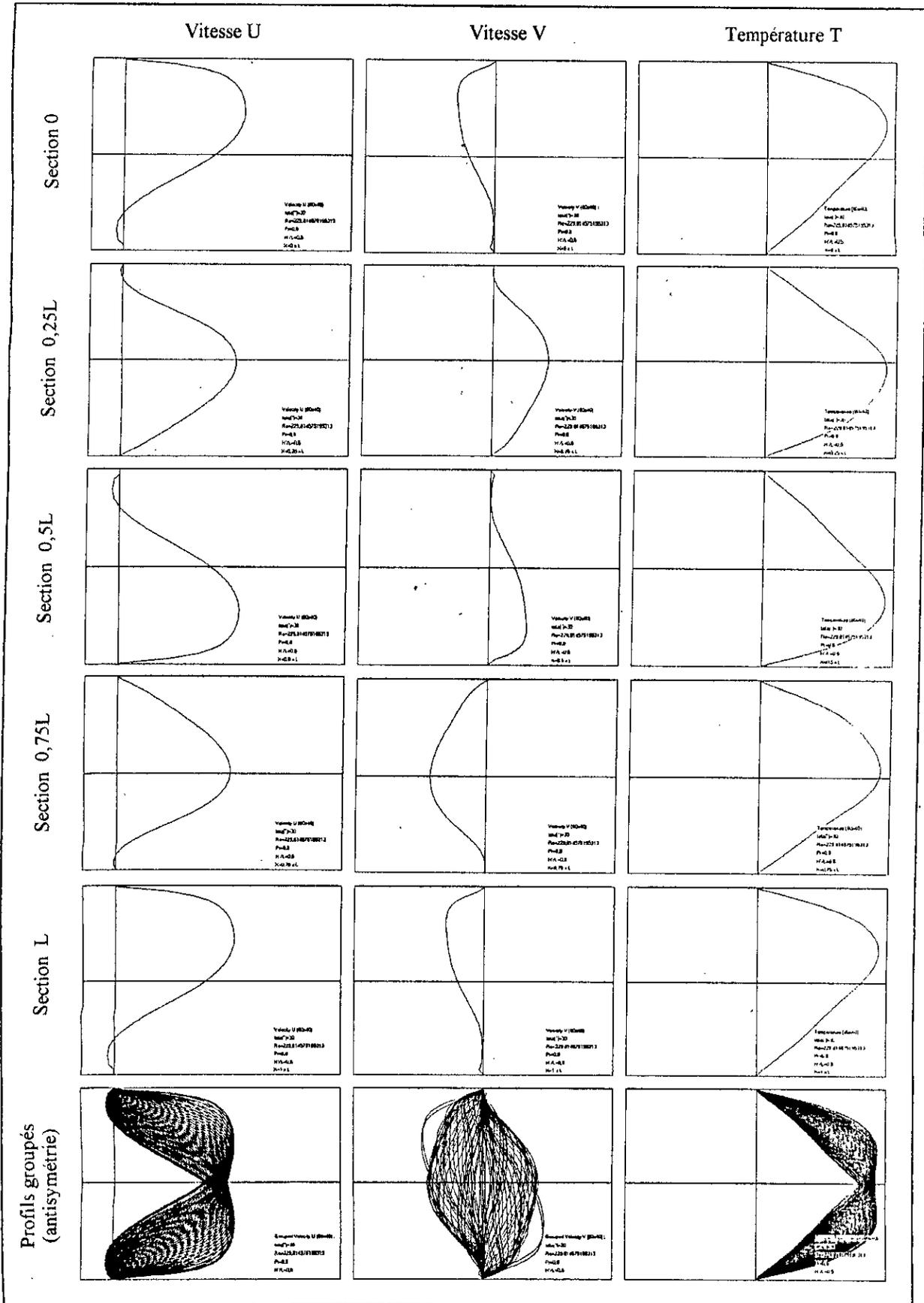
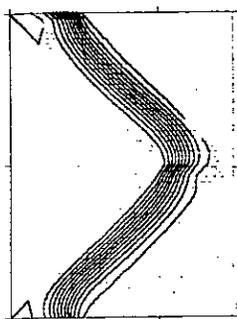
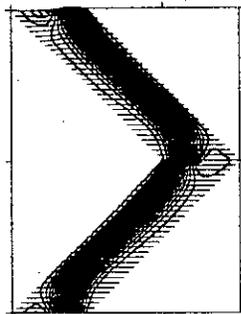


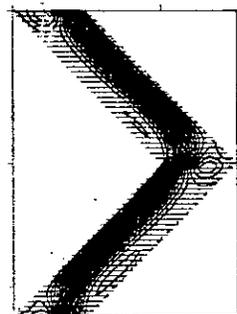
Fig. VI - 2 : Profils des vitesses et des températures dans différentes sections (Angle vif :  $\theta = 30^\circ$  ;  $Re = 229,81$ ).



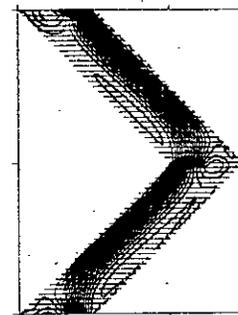
Re=110



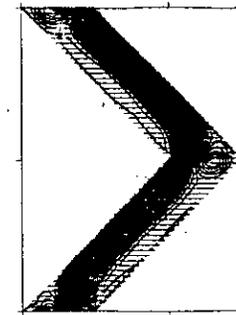
Re=330



Re=580

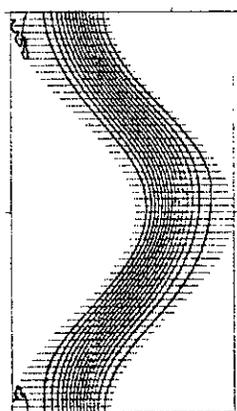


Re=813

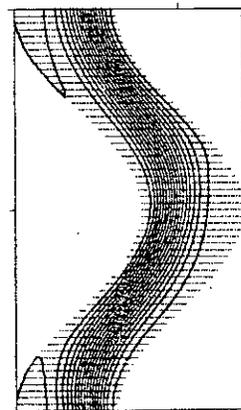


Re=1077

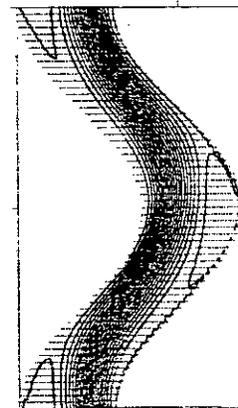
a/ Angle vif .



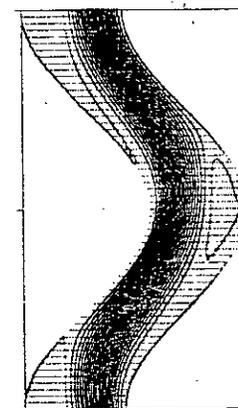
Re=150



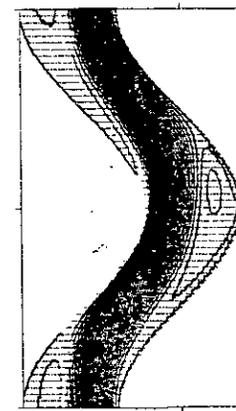
Re=345



Re=540



Re=740



Re=1009

b/ Angle arrondi.

Fig. VI - 3 : Evolution de la configuration de l'écoulement en fonction du nombre de Reynolds. ( $\theta=45^\circ$  ;  $H'/L=0,25$ )

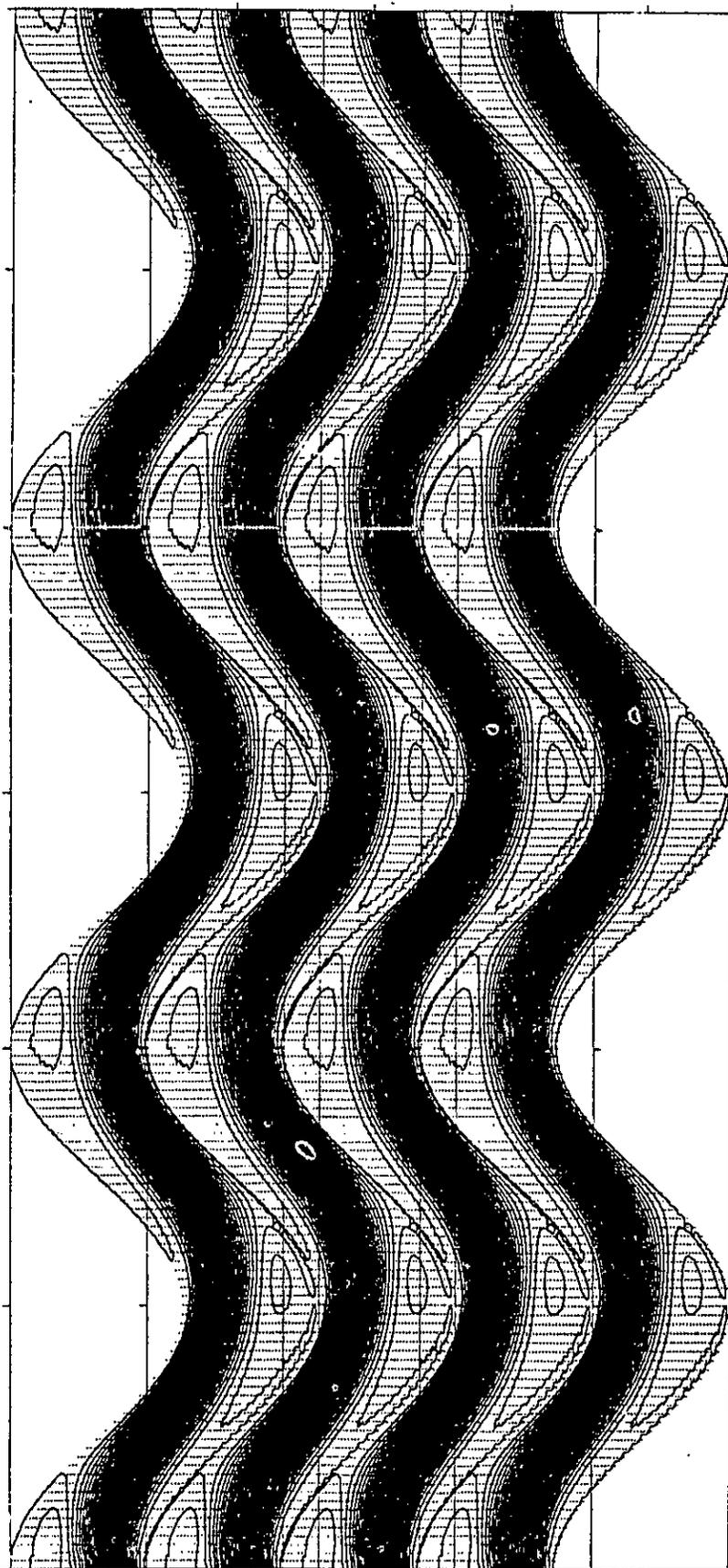


Fig. VI - 5 : Configuration de l'écoulement entre plusieurs plaques ondulées ( $Re = 1009$  ;  $\theta = 45^\circ$  ;  $H/L = 0,25$ ).

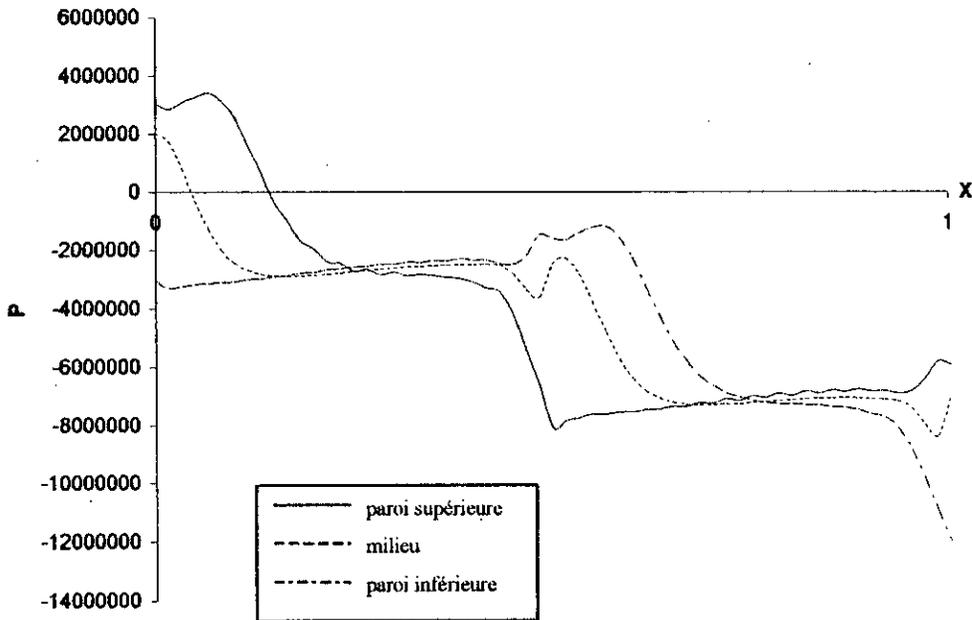


Fig. VI - 6 : Pression adimensionnelle aux parois et au milieu de la conduite (Angle vif :  $B = 9000000$  ;  $Re = 600$  ;  $\theta = 45^\circ$  ;  $H/L = 0,25$ ).

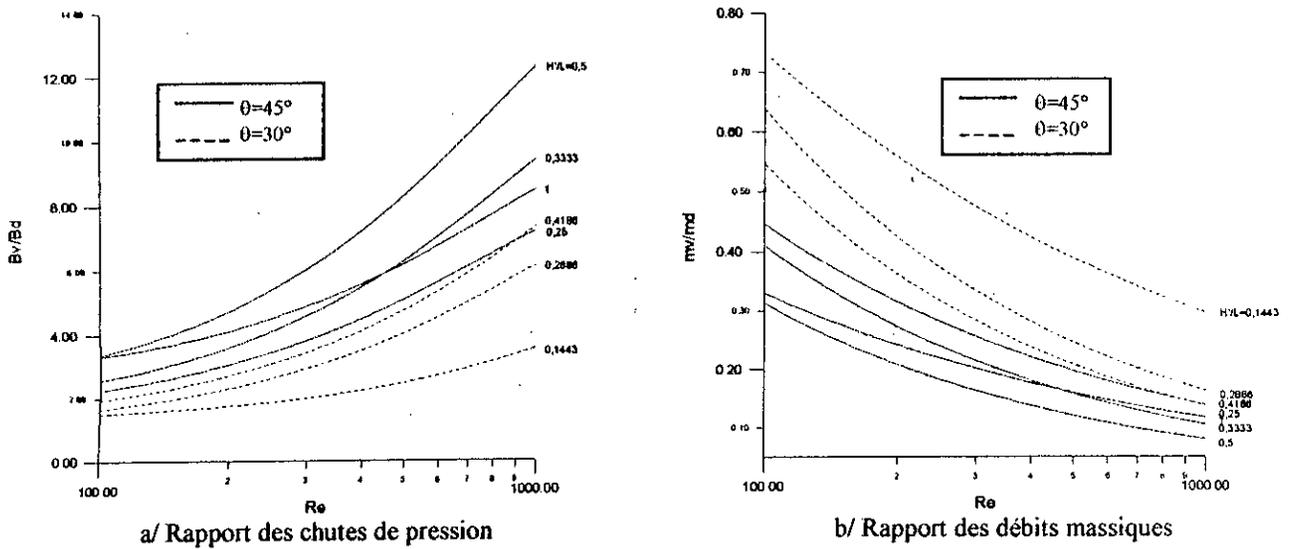


Fig. VI - 7 : Rapports des chutes de pression et des débits pour une même puissance de pompage en fonction du nombre de Reynolds (Angle vif :  $\theta = 45^\circ$  et  $30^\circ$ ).

### VI-1-3/ Performances thermiques

On a représenté sur les figures de (VI - 8) à (VI - 15), en fonction des paramètres ( $Pr$ ), ( $Re$ ), ( $\theta$ ) (angle vif et angle arrondi) et ( $H'/L$ ) ; le nombre de Nusselt ( $Nu$ ) et le rapport ( $Q_v/Q_d$ ) du flux de chaleur correspondant à une configuration ondulée sur le flux de chaleur correspondant à une configuration droite. Ce rapport a été calculé pour une même puissance de pompage (voir Annexe II). En pointillé, nous avons représenté ( $Nu \cos(\theta)$ ) et ( $Q_v/Q_d \cos(\theta)$ ) qui sont ainsi ramenés à une même surface d'échange. Sur toutes les figures, le rapport géométrique ( $H'/L$ ) a été utilisé comme paramètre. Chaque figure est dédoublée pour montrer l'influence de la nature de l'angle d'ondulation, vif ou arrondi.

Sur les figures (VI - 8) et (VI - 9), on a représenté le nombre de Nusselt ( $Nu$ ) et le rapport des flux de chaleur ( $Q_v/Q_d$ ) en fonction du nombre de Prandtl ( $Pr$ ) pour  $\theta = 45^\circ$  et  $Re = 600$  et pour trois valeurs du paramètre ( $H'/L$ ).

Excepté pour la zone correspondant à de très faibles nombres de Prandtl ( $Pr < 0,4$ ), on constate que ( $Nu$ ) et ( $Nu \cos(\theta)$ ) sont partout supérieurs à la valeur 7,54 qui caractérise la configuration droite et qu'ils augmentent avec ( $Pr$ ) et ( $H'/L$ ) et lorsqu'on passe d'une configuration à angle arrondi à une configuration à angle vif.

Les mêmes observations pourraient être faites en ce qui concerne les rapports des flux de chaleurs ( $Q_v/Q_d$ ) et ( $Q_v/Q_d \cos(\theta)$ ) qui sont partout supérieurs à l'unité.

Les figures (VI - 10) et (VI - 11) donnent respectivement, ( $Nu$ ) (et  $Nu \cos(\theta)$ ) et ( $Q_v/Q_d$ ) (et ( $Q_v/Q_d \cos(\theta)$ )) en fonction de ( $Re$ ) pour différentes valeurs du rapport ( $H'/L$ ) et pour  $Pr = 0,7$  et  $\theta = 45^\circ$ .

Pour de très faibles valeurs du nombre de Reynolds ( $Re < 150$ ), ( $Nu$ ) et ( $Nu \cos(\theta)$ ) croissent avec ( $Re$ ) mais décroissent avec ( $H'/L$ ), tandis qu'ils croissent aussi bien avec ( $Re$ ) qu'avec ( $H'/L$ ) pour  $Re > 150$ , l'utilisation d'un angle vif étant toujours plus avantageux que l'utilisation d'un angle arrondi.

Les rapports des flux de chaleur quant à eux croissent toujours avec ( $Re$ ) et ( $H'/L$ ) et lorsqu'on passe d'une configuration à arêtes vives à une configuration à arêtes arrondies.

Cependant, pour une même surface d'échange, les résultats obtenus avec une configuration droite reste plus intéressants à des nombres de Reynolds faibles et modérés ( $< 400$ ).

A titre de comparaison, nous avons rapporté sur les deux figures (VI - 10) et (VI - 11) les résultats obtenus par FAGHRI ([6], [8]). On voit que les résultats de notre étude sont en très bon accord avec ces résultats.

Les figures (VI - 12), (VI - 13), (VI - 14) et (VI - 15) montrent l'influence de l'angle ( $\theta$ ) sur ( $Nu$ ) et ( $Q_v/Q_d$ ) pour deux nombres de Reynolds :  $Re = 200$  pour les figures (VI - 12) et (VI - 13) et  $Re = 600$  pour (VI - 14) et (VI - 15).

D'abord pour  $Re = 200$ , ( $Nu$ ) prend une valeur à peu près égale à celle qui correspond à une configuration droite jusqu'à  $\theta \sim 15^\circ$ , puis il croît d'abord lentement avec ( $\theta$ ), ensuite très rapidement à partir de  $\theta \sim 40^\circ$ , l'influence de ( $H'/L$ ) ne se manifestant que très légèrement dans le cas d'un angle arrondi. En ce qui concerne ( $Nu \cos(\theta)$ ), il reste presque constant pour  $\theta < 60^\circ$  et les faibles valeurs du rapport ( $H'/L$ ) ; lorsque  $H'/L = 0,5$  la courbe ( $Nu \cos(\theta)$ ) passe par une valeur maximale voisine de (12) à  $\theta \sim 60^\circ$ .

Quand au rapport des flux de chaleur ( $Q_v/Q_d$ ), il ne commence à croître de manière sensible qu'à partir de  $\theta = 20^\circ$  environ ; il augmente alors avec le rapport ( $H'/L$ ). Le rapport ( $Q_v/Q_d$ )  $\cos(\theta)$ , croît très légèrement avec ( $\theta$ ) et passe par un maximum situé entre  $50^\circ$  et  $60^\circ$  dans le cas d'une configuration à arêtes vives ; tandis qu'il reste carrément au-dessous de l'unité dans le cas d'une configuration à arêtes arrondies.

Lorsqu'on considère les graphes correspondant à  $Re = 600$ , on voit que les ( $Nu$ ) et les rapports des flux de chaleur croissent avec ( $\theta$ ) pour des angles supérieurs à  $15^\circ$  environ. Par ailleurs, on relève que pour des angles inférieurs à une certaine valeur comprise, suivant le cas, entre  $25^\circ$  et  $35^\circ$ , les ( $Nu$ ) et les rapports des flux de chaleur présentent un maximum pour une valeur de ( $H'/L$ ) comprise entre  $1/3$  et  $1/2$ , alors que pour des angles supérieurs à cette valeur, les ( $Nu$ ) et les ( $Q_v/Q_d$ ) croissent d'une manière monotone avec le rapport ( $H'/L$ ).

Sur la figure (VI - 16), on a rapporté les données expérimentales obtenues par IZUMI, d'après AMANO [10], concernant le nombre de Nusselt moyen. En fait, ces données se situent pour la plus grande partie dans le domaine turbulent. On voit cependant que dans la région  $800 \leq Re \leq 1000$ , les résultats de notre étude sont en bon accord avec les résultats expérimentaux.

Par ailleurs, avec les résultats de la présente étude, on peut trouver des corrélations qui nous permettront de calculer le nombre de Nusselt moyen à l'intérieur des intervalles considérés pour les paramètres d'analyse. Ainsi, dans le cas d'une configuration à angle vif avec  $\theta \frac{1}{2} 45^\circ$ , on obtient la relation :

$$Nu = 0,90 \cdot (Pr)^{0,4} \cdot (Re)^{0,57} \cdot \left(\frac{H'}{L}\right)^{0,4}$$

$$\left[ \begin{array}{l} 0,1 \leq Pr \leq 10 \\ 100 \leq Re \leq 1000 \\ 0,25 \leq H'/L \leq 0,5 \end{array} \right]$$

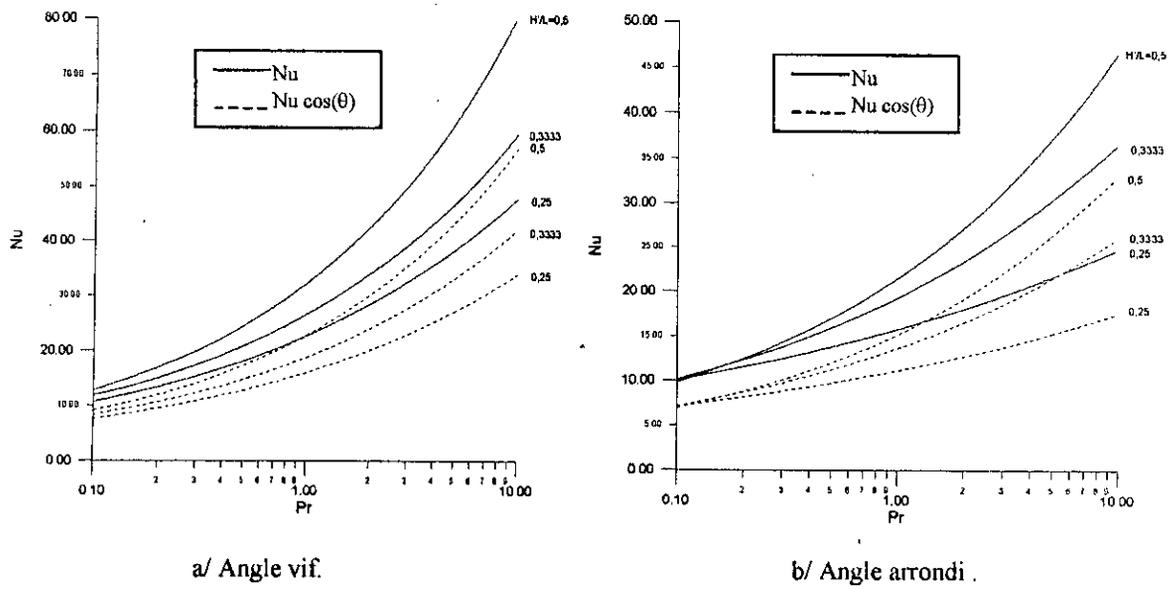


Fig. VI - 8 : Nusselt moyen en fonction du nombre de Prandtl ( $Re = 600 ; \theta = 45^\circ$ ).

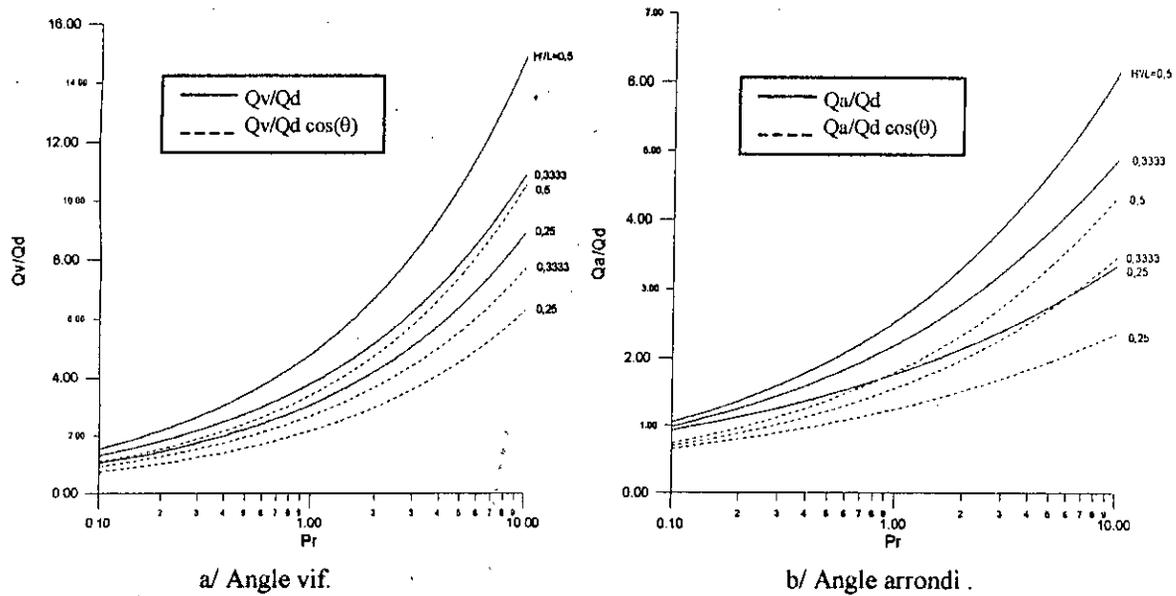
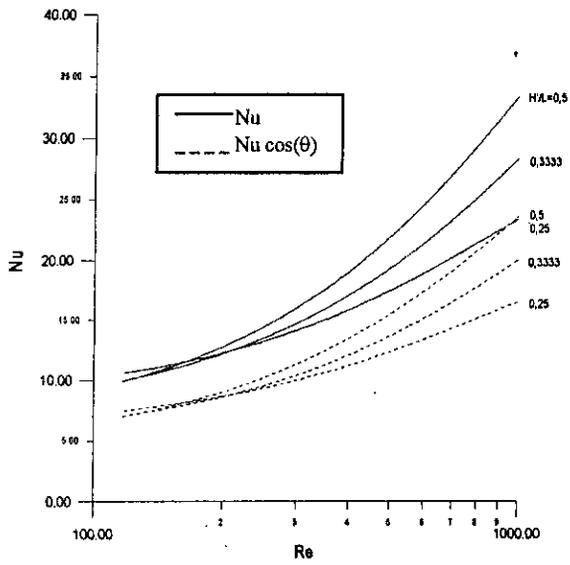
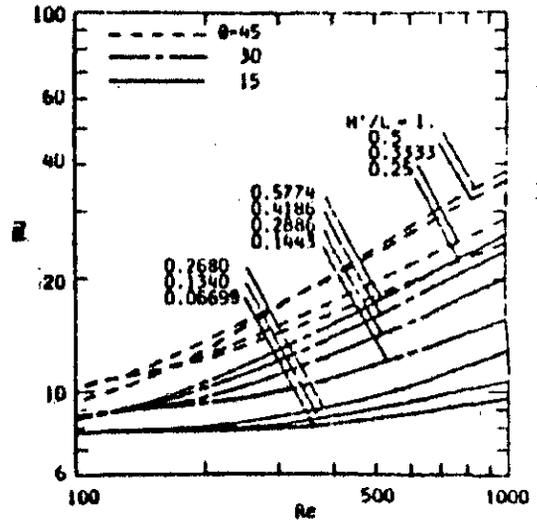


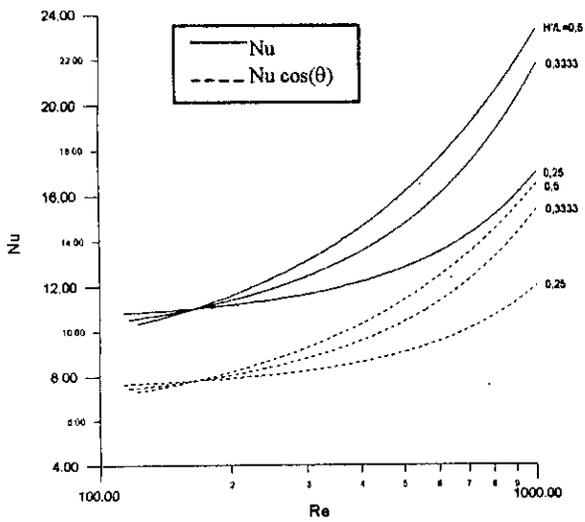
Fig. VI - 9 : Rapport des flux de chaleur pour une même puissance de pompage en fonction du nombre de Prandtl ( $Re = 600 ; \theta = 45^\circ$ ).



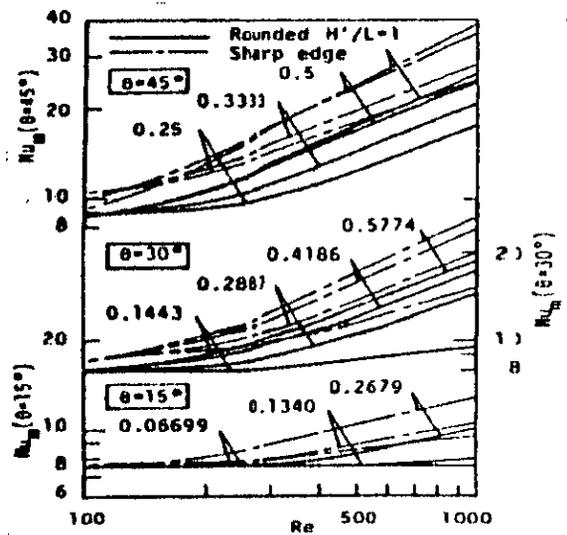
a/ Nusselt moyen d'après les résultats de l'étude (Angle vif)



Nusselt moyen d'après la référence [6].

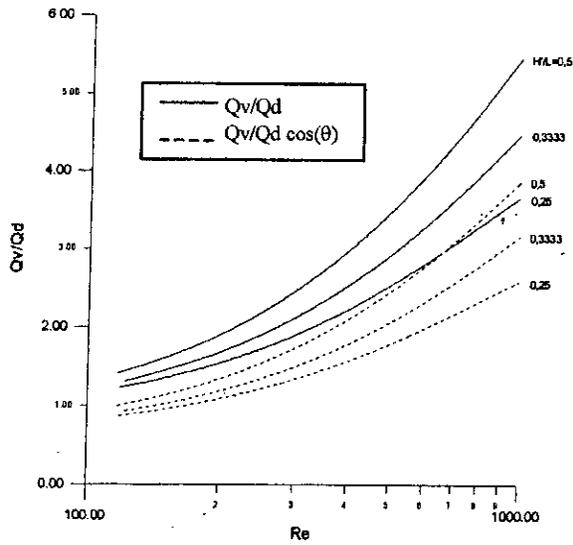


b/ Nusselt moyen d'après les résultats de l'étude (Angle arrondi)

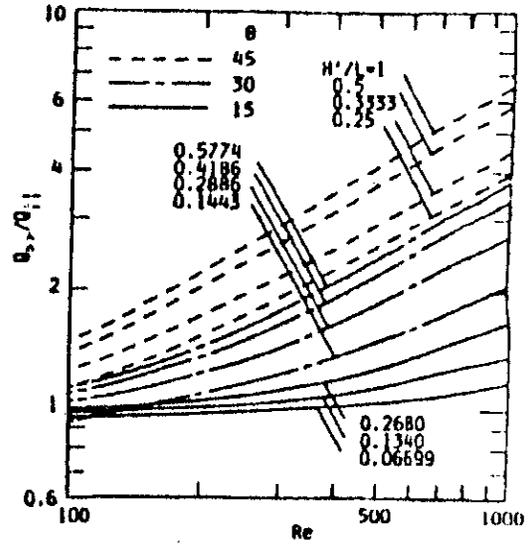


Nusselt moyen d'après la référence [8].

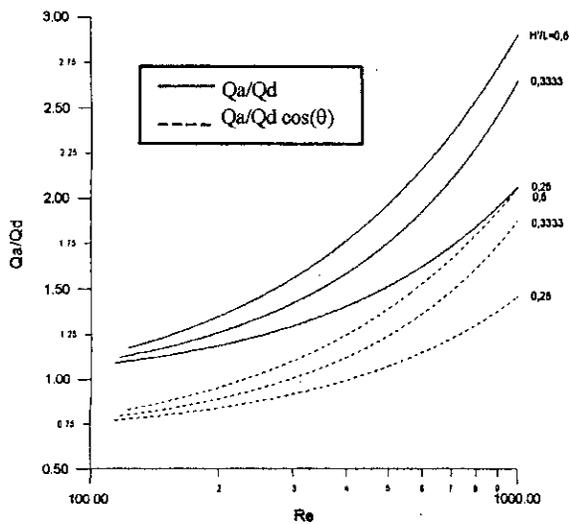
Fig. VI - 10 : Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds ( $Pr = 0,7$  ;  $\theta = 45^\circ$ ).



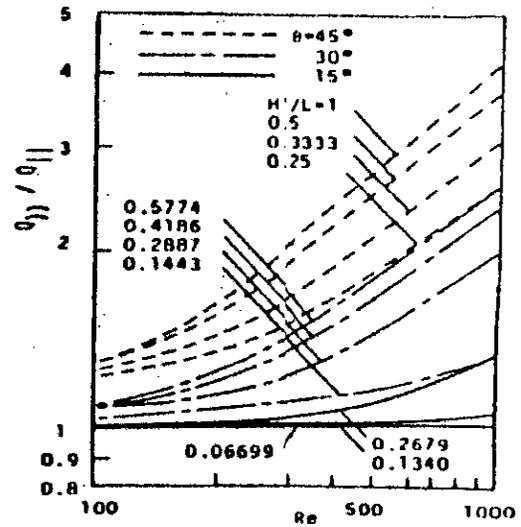
a/ Rapport des flux de chaleur d'après les résultats de l'étude (Angle vif)



Rapport des flux de chaleur d'après la référence [6].



b/ Rapport des flux de chaleur d'après les résultats de l'étude (Angle arrondi)



Rapport des flux de chaleur d'après la référence [8].

Fig. VI -11 : Rapport des flux de chaleur pour une même puissance de pompage en fonction du nombre de Reynolds ( $Pr = 0,7 ; \theta = 45^\circ$ ).

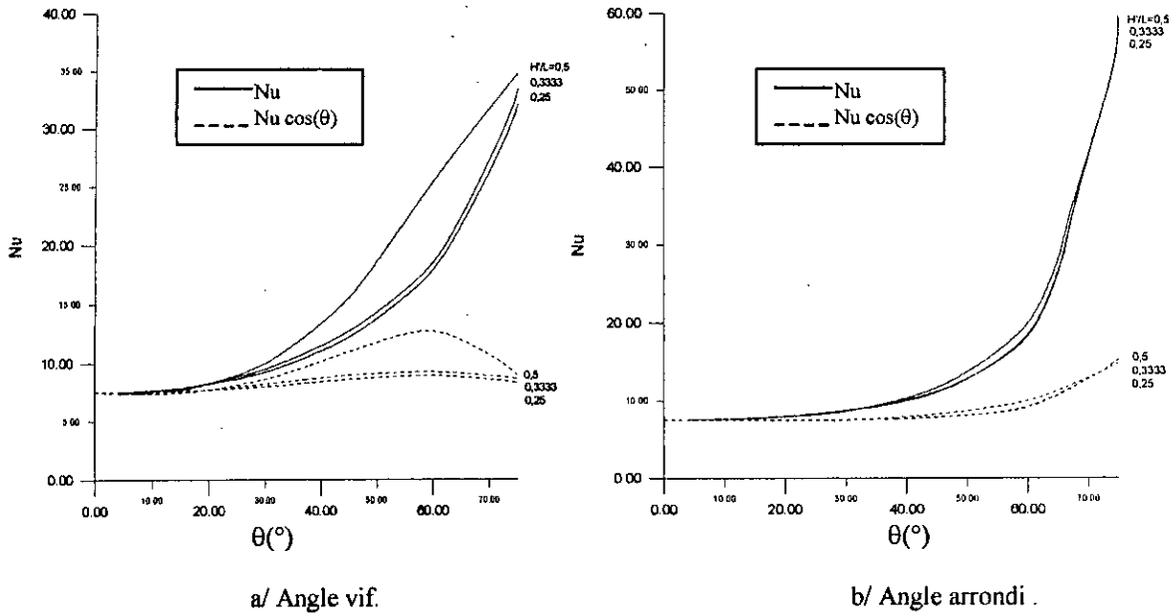


Fig. VI - 12 : Nusselt moyen en fonction de l'angle d'ondulation  $\theta$  ( $Re = 200$  ;  $Pr = 0,7$ ).

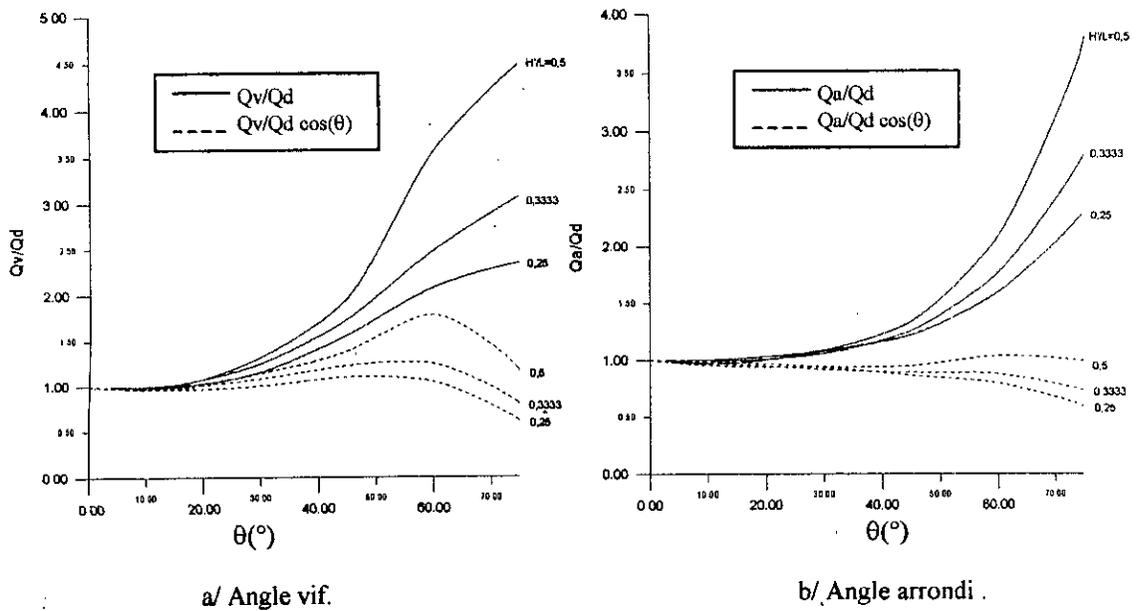


Fig. VI - 13 : Rapport des flux de chaleur pour une même puissance de pompage en fonction de l'angle d'ondulation  $\theta$  ( $Re = 200$  ;  $Pr = 0,7$ ).

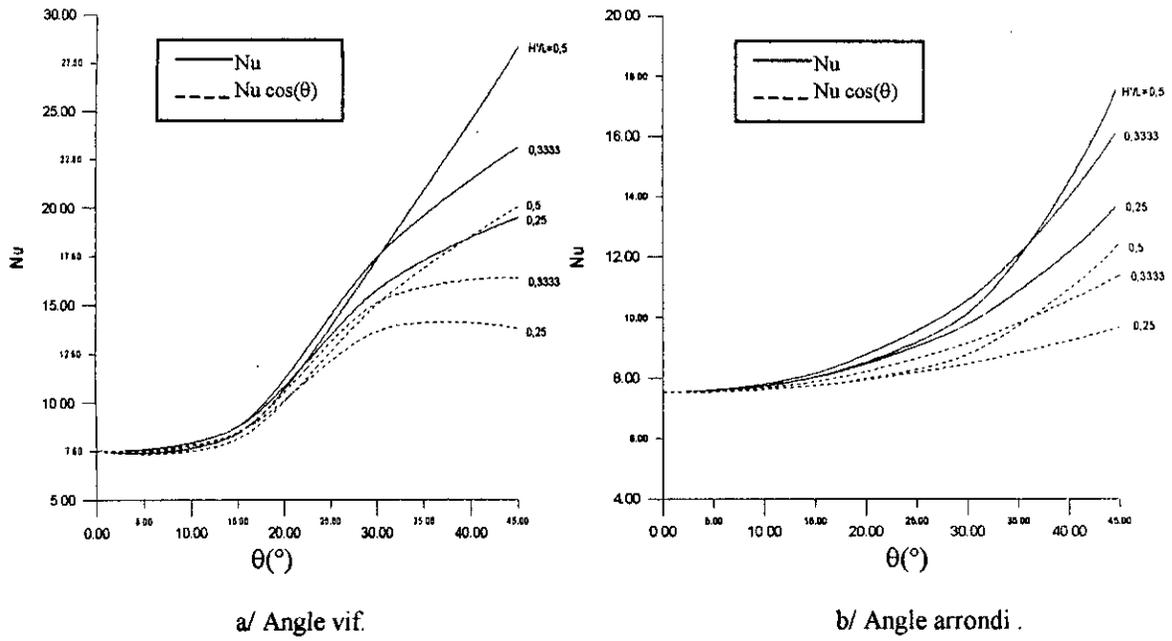


Fig. VI - 14 : Nusselt moyen en fonction de l'angle d'ondulation  $\theta$  ( $Re = 600$  ;  $Pr = 0,7$ ).

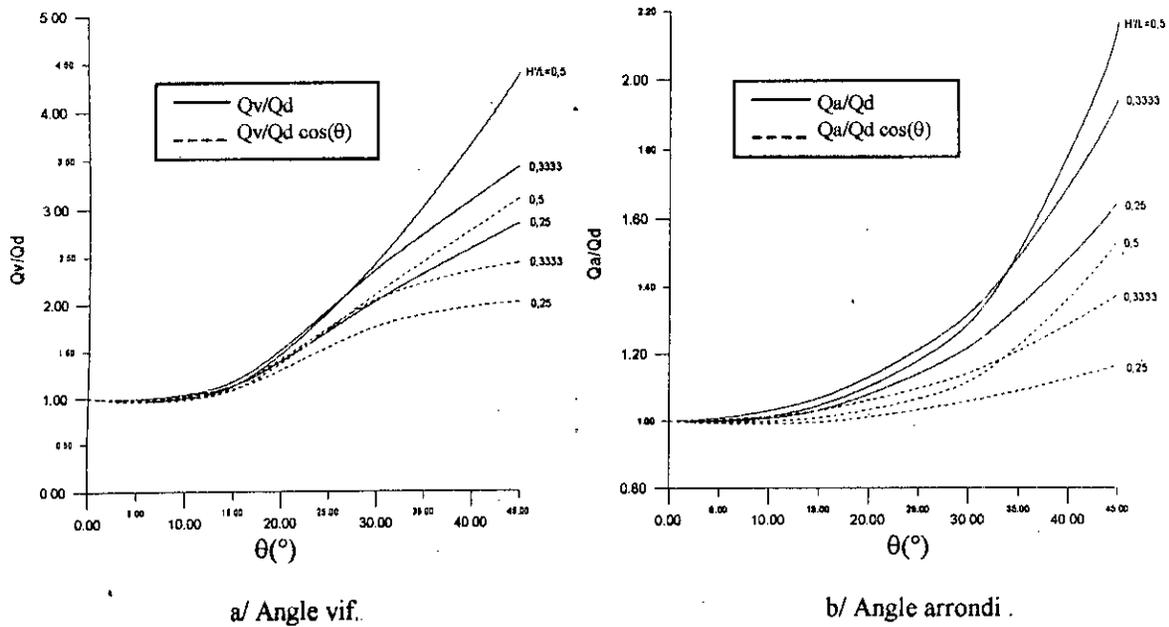


Fig. VI - 15 : Rapport des flux de chaleur pour une même puissance de pompage en fonction de l'angle d'ondulation  $\theta$  ( $Re = 600$  ;  $Pr = 0,7$ ).

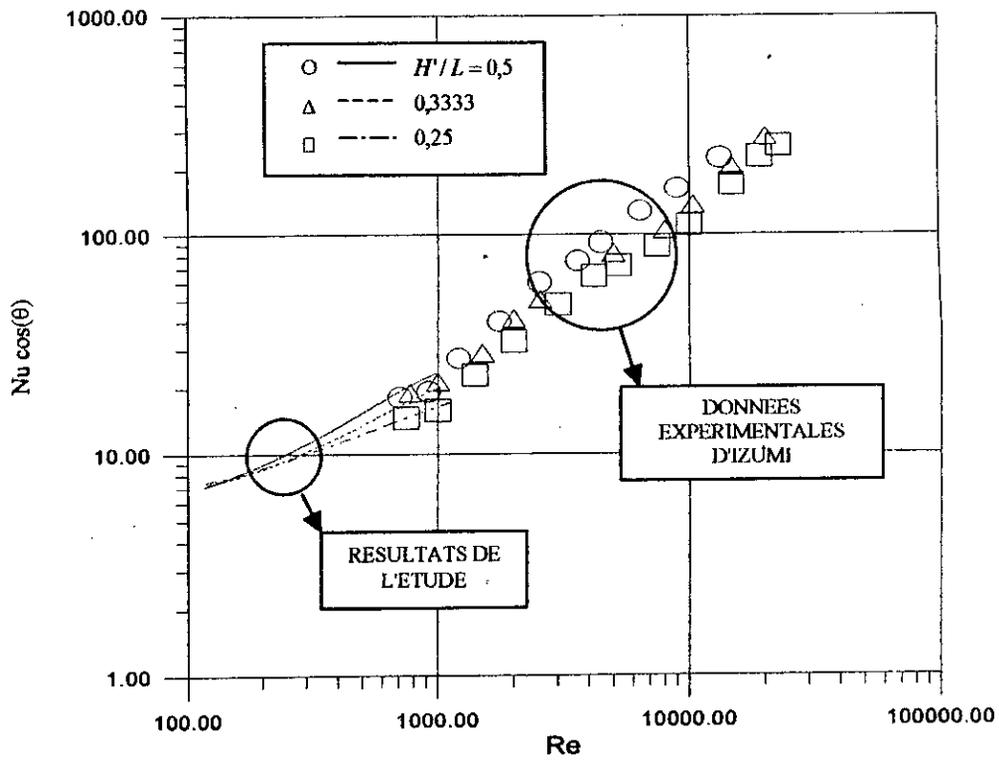


Fig. VI - 16 : Nusselt moyen comparé aux données expérimentales d'IZUMI et al [10].  
 (Angle vif :  $\theta = 45^\circ$  ;  $Pr = 0,7$ )

## CONCLUSION

Nous avons analysé les écoulements entre plaques ondulées périodiques, ainsi que les échanges thermiques associés dans le cas d'une température de paroi constante.

Pour adapter les équations de Navier-Stokes et l'équation de la chaleur à la géométrie périodique du système, nous avons utilisé une transformation non orthogonale du système de coordonnées cartésiennes, nous facilitant ainsi la traduction analytique des conditions aux limites. L'utilisation d'un schéma de discrétisation aux différences finies conjointement avec la méthode dite de "*compressibilité artificielle*" pour résoudre les équations de Navier-Stokes et la méthode dite de "*sous - relaxation*" pour résoudre l'équation de la chaleur, nous a permis d'établir les champs de vitesses, de pression et de température, et par la suite de calculer les performances thermiques de la configuration ondulée et de les comparer avec les performances correspondantes de la configuration droite.

La comparaison des résultats de l'étude avec ceux obtenus par d'autres auteurs ayant utilisé d'autres méthodes d'une part, et avec ceux que donne l'expérience d'autre part, nous conforte quant à la validité du modèle mathématique utilisé et des résultats obtenus.

On retiendra en substance de ces résultats, que l'amélioration des performances thermiques de la configuration ondulée relativement à la configuration droite, peut atteindre parfois des proportions inespérées. A titre indicatif, le flux de chaleur pourrait être multiplié par 5 en adoptant une configuration à angle vif avec  $\theta = 45^\circ$ , un nombre de Reynolds d'environ 1000 et un rapport (H/L) de 0,5, et ce dans le cas d'un fluide caractérisé par un nombre de Prandtl  $Pr = 0,7$  (l'air par exemple) (voir Fig. VI - 11a). Ces performances augmentant avec le nombre de Prandtl (voir Fig. VI - 9), le chiffre 5 ci-dessus est appelé à augmenter d'une façon significative pour un fluide caractérisé par un nombre de Prandtl élevé.

D'une façon tout à fait générale, les performances thermiques augmentent avec le nombre de Prandtl ( $Pr$ ), le nombre de Reynolds ( $Re$ ), le rapport ( $H'/L$ ), alors que pour l'angle d'ondulation il semblerait que les angles qui donnent les meilleurs résultats sont compris entre  $40^\circ$  et  $60^\circ$ , la configuration à arêtes vives étant plus intéressante que la configuration à arêtes arrondies.

Cette étude gagnerait à être étendue en considérant d'autres configurations, d'autres conditions aux limites, en introduisant la turbulence et en complétant le système d'équations par le bilan d'entropie basée sur le second principe de la thermodynamique.

Enfin, des essais expérimentaux sont indispensables pour évaluer le degré de précision de ces analyses théoriques.

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] M. Feidt  
" Thermodynamique et optimisation énergétique des systèmes et procédés "  
Technique et Documentation (Lavoisier). (1987)
- [2] A. Bejan  
" Advanced engineering thermodynamics "  
John Wiley & Sons, INC. (1988)
- [3] J.D. Parker, J.H. Boggs, E.F. Blick  
" introduction to fluid mechanics and heat transfer "  
Third Printing  
Addison-Wesley publishing company, INC. (1974)
- [4] R. W. Fox, A. T. McDonald  
" Introduction to fluid mechanics "  
Fourth edition  
SI version  
John Wiley & Sons, INC. (1994)
- [5] F. P. Incropera, D. P. DeWitt  
" Fundamentals of heat and mass transfer "  
Second Edition  
John Wiley & Sons, INC. (1985)
- [6] M. Faghri, Y. Asako  
" Finite-volume solutions for laminar flow and heat transfer in corrugated duct "  
Journal of heat transfer, AUGUST 1987, Vol. 109 pp 627-634.
- [7] S.V. Patankar, C.H. Liu, E.M. Sparrow  
" Fully developed flow and heat transfer in duct having streamwise-periodic variations of cross-sectional area "  
Journal of heat transfer, Vol. 99, MAY 1977.
- [8] M. Faghri, Y. Asako, H. Nakamura  
" Heat transfer and pressure drop characteristics in a corrugated duct with rounded corners "  
International journal of heat and mass transfer, Vol. 31 No. 6 pp1237-1245 (1988)

- [9] R. Peyret  
" Computational methods for fluid flow "  
Springer Verlag. (1990)
- [10] R.S. Amano  
" A numerical study of laminar and turbulent heat transfer in a periodically corrugated wall channel "  
Journal of heat transfer, Vol. 107, AUGUST 1985.
- [11] White  
" Viscous fluid flow "  
McGraw-Hill series in Mechanical Engineering
- [12] W.Y. Soh, S.A. Berger  
" Fully developed flow in curved pipe of arbitrary curvature ratio "  
International journal for numerical methods in fluids, Vol. 7, 733 - 755 (1987)
- [13] V.M. Theodossiou, A.C. Sousa  
" An efficient algorithm for solving the incompressible fluid flow equations "  
International journal for numerical methods in fluids, Vol. 6, 557 - 572 (1986)
- [14] G.J. Rowley, S.V. Patankar  
" Analysis of laminar flow and heat transfer in tubes with internal circumferential fins "  
International journal of heat and mass transfer, Vol. 27 No. 4 pp 553-560 (1984)
- [15] P.M. Gresho, R.L. Sani  
" On pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations "  
International journal for numerical methods in fluids, Vol. 7, 1111 - 1145 (1987)
- [16] C. Qianshun  
" Use of the splitting scheme and multigrid method to compute flow separation "  
International journal for numerical methods in fluids, Vol. 7, 719 - 731 (1987)
- [17] P.F. Galpin, G.D. Raithby  
" Treatment of non - linearities in the numerical solution of the incompressible Navier-Stokes equations "  
International journal for numerical methods in fluids, Vol. 6, 409 - 426 (1986)
- [18] F. Montigny-Rannou, Y. Morchoisne  
" A spectral method with stagged grid for incompressible Navier-Stokes equations "  
International journal for numerical methods in fluids, Vol. 7, 175 - 189 (1987)

## ANNEXE I :

Description analytique des profils  
des conduites ondulées

## 1- Conduite à angle vif

Détermination des constantes  $A_i$ ,  $B_i$  et  $C_i$  :Equations des droites :

- Détermination de  $\varepsilon_2(x)$ :

$$\text{en } x=0 \Rightarrow \varepsilon_2(x)=0 \Rightarrow A_2 \cdot 0 + B_2 = 0 \Rightarrow B_2 = 0$$

$$\text{en } x = \frac{L}{2} \Rightarrow \varepsilon_2(x) = \frac{L}{2} \operatorname{tg} \theta \Rightarrow A_2 \frac{L}{2} = \frac{L}{2} \operatorname{tg} \theta \Rightarrow A_2 = \operatorname{tg} \theta$$

$$\text{donc : } \varepsilon_2(x) = \operatorname{tg} \theta \cdot x$$

- Détermination de  $\varepsilon_4(x)$ :

$$\text{en } x = \frac{L}{2} \Rightarrow \varepsilon_4(x) = \frac{L}{2} \operatorname{tg} \theta$$

$$\text{en } x = L \Rightarrow \varepsilon_4(x) = 0$$

Donc :

$$x = \frac{L}{2} \Rightarrow A_4 \frac{L}{2} + B_4 = \frac{L}{2} \operatorname{tg} \theta$$

$$x = L \Rightarrow A_4 L + B_4 = 0$$

donc

$$A_4 = -\operatorname{tg} \theta \text{ et } B_4 = -A_4 L$$

d'où

$$\varepsilon_4(x) = -\operatorname{tg} \theta (x - L)$$

Equations des paraboles :

- Détermination de  $\varepsilon_1(x)$ :

La parabole coupe la droite  $\varepsilon_2(x)$  en  $x = l$ .

$$\text{en } x=l, \varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x)$$

$$\text{d'où } A_1 l^2 + B_1 l + C_1 = l \cdot \operatorname{tg} \theta$$

$$\text{en } x=0 \Rightarrow \left. \frac{\partial \varepsilon_1(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow 2A_1 \cdot 0 + B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = 0$$

donc

$$A_1 l^2 + C_1 = l \cdot \operatorname{tg} \theta \Rightarrow C_1 = -A_1 l^2 + l \cdot \operatorname{tg} \theta$$

en  $x=l$ , la droite  $\varepsilon_2(x) = \operatorname{tg} \theta \cdot x$  est tangente à  $\varepsilon_1(x)$ 

$$\text{soit } \left. \frac{\partial \varepsilon_1(x)}{\partial x} \right|_{x=l} = \left. \frac{\partial \varepsilon_2(x)}{\partial x} \right|_{x=l} = \operatorname{tg} \theta \Rightarrow 2A_1 l = \operatorname{tg} \theta \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2l} \operatorname{tg} \theta$$

$$\text{donc } C_1 = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta l + l \cdot \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta$$

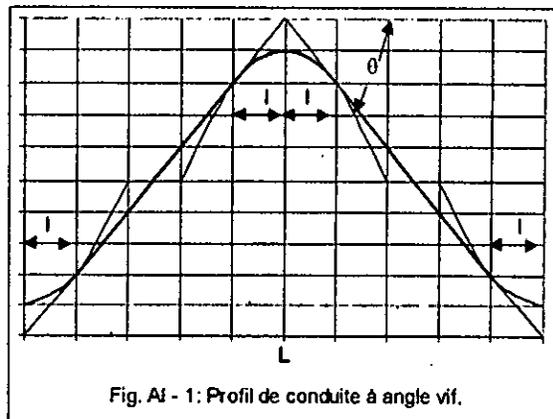


Fig. A1 - 1: Profil de conduite à angle vif.

d'où  $\varepsilon_1(x) = \frac{tg\theta}{2l} [x^2 + l^2]$

• Détermination de  $\varepsilon_3(x)$ :

En  $x = \frac{L}{2} \Rightarrow \left. \frac{\partial \varepsilon_3(x)}{\partial x} \right|_{x=\frac{L}{2}} = 0$

mais  $\frac{\partial \varepsilon_3(x)}{\partial x} = 2A_3x + B_3 \Rightarrow 2A_3 \frac{L}{2} + B_3 = 0 \Rightarrow B_3 = -A_3L$

$\Rightarrow \varepsilon_3(x) = A_3x^2 - A_3Lx + C_3$

en  $x = \frac{L}{2} - l \Rightarrow \varepsilon_3(x) = \varepsilon_2(x)$

donc  $C_3 = \left( \frac{L}{2} - l \right) \left[ tg\theta + A_3 \left( \frac{L}{2} + l \right) \right]$

en  $x = \frac{L}{2} - l$  et  $x = \frac{L}{2} + l$ , les droites  $\varepsilon_2(x) = tg\theta \cdot x$  et  $\varepsilon_4(x) = -tg\theta(x - L)$  respectivement sont tangents à  $\varepsilon_3(x)$

donc pour  $x = \frac{L}{2} - l$ :

$\left. \frac{\partial \varepsilon_3(x)}{\partial x} \right|_{x=\frac{L}{2}-l} = \left. \frac{\partial \varepsilon_2(x)}{\partial x} \right|_{x=\frac{L}{2}-l} = tg\theta \Rightarrow 2A_3 \left( \frac{L}{2} - l \right) + B_3 = 2A_3 \left( \frac{L}{2} - l \right) - A_3L = tg\theta \Rightarrow A_3 = -\frac{tg\theta}{2l}$

donc  $B_3 = \frac{L}{2l} tg\theta$

et

$C_3 = \left( \frac{L}{2} - l \right) \left[ tg\theta - \frac{tg\theta}{2l} \left( \frac{L}{2} + l \right) \right] = -\frac{tg\theta}{2l} \left( \frac{L}{2} - l \right)^2$

d'où

$\varepsilon_3(x) = -\frac{tg\theta}{2l} \left( x^2 - Lx + \left( \frac{L}{2} - l \right)^2 \right)$

• Détermination de  $\varepsilon_5(x)$ :

Si on fait une translation de l'axe des y avec un pas de L, c'est à dire, on remplace x par L - x dans  $\varepsilon_2(x)$ , on obtient :

$\varepsilon_5(x) = \varepsilon_1(L - x) = \frac{tg\theta}{2l} [(x - L)^2 + l^2]$

## 2- Conduites à angle arrondi

Détermination des constantes A, B et C :

$\varepsilon(x) = A + B \cos(Cx)$

L est la période, donc  $C = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{L}$

$\varepsilon(x) = A + B \cos\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x\right)$

en  $x = \frac{L}{4}$  la courbe est tangente à la droite représentée par  $x \cdot tg\theta$

donc

$$\varepsilon\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{L}{4} \operatorname{tg} \theta$$

c'est à dire

$$A + B \cos\left(\frac{2\pi}{L} \times \frac{L}{4}\right) = \frac{L}{4} \operatorname{tg} \theta \Rightarrow A + B \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{L}{4} \operatorname{tg} \theta$$

$$\Rightarrow A = \frac{L}{4} \operatorname{tg} \theta$$

L'équation de la tangente:

$$y = y_0 + \left. \frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

avec  $y_0 = \varepsilon(x_0)$

dans notre cas on a:

$$x_0 = \frac{L}{4}$$

$$y_0 = \frac{L}{4} \operatorname{tg} \theta + B \cos\left(\frac{2\pi}{L} \times \frac{L}{4}\right) = \frac{L}{4} \operatorname{tg} \theta$$

$$\left. \frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial x} \right|_{x=\frac{L}{4}} = -B \frac{2\pi}{L} \sin\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x\right)$$

donc  $\left. \frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial x} \right|_{x=\frac{L}{4}} = -\frac{2\pi}{L} B$

donc:

$$y = \frac{L}{4} \operatorname{tg} \theta - \frac{2\pi}{L} B \left(x - \frac{L}{4}\right)$$

$$y = \left(\frac{L}{4} \operatorname{tg} \theta + \frac{\pi}{2} B\right) - \left[\frac{2\pi}{L} B\right] \cdot x$$

mais l'équation de la droite est  $y = \operatorname{tg} \theta \cdot x$

par identification on a :

$$-\frac{2\pi}{L} B = \operatorname{tg} \theta \Rightarrow B = -\frac{L}{2\pi} \operatorname{tg} \theta$$

d'où  $\varepsilon(x) = \frac{L}{4} \operatorname{tg} \theta \cdot \left[1 - \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right)\right]$

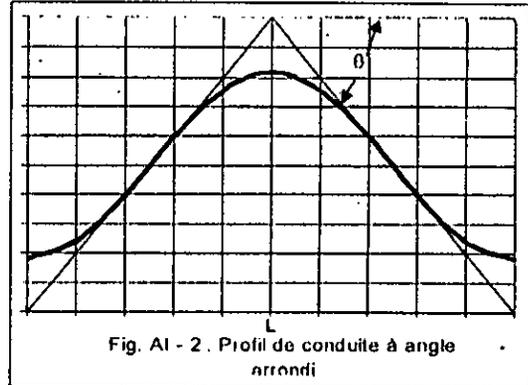


Fig. A1 - 2. Profil de conduite à angle arrondi

## ANNEXE II :

### Détermination des rapports $(m_v/m_d)$ , $(B_v/B_d)$ et $(Q_v/Q_d)$

#### 1. Résolution des équations de Navier-Stokes pour un écoulement entre deux plaques parallèles (conduite droite) :

Pour un écoulement entre deux plaques on a :

$$V = 0 \text{ donc } \frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = 0$$

les équations de continuité et de Navier-Stokes (II - 23) et (II - 24) respectivement deviennent :

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0 \Rightarrow U = U(X)$$

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \Rightarrow P = P(X)$$

$$-\frac{dP}{dX} + \frac{d^2U}{dY^2} = 0$$

et comme  $P(X) = -B \cdot X + \bar{P}$  avec  $\bar{P} = cte$ ,  
donc

$$\frac{d^2U}{dY^2} = -B = \frac{dP}{dX}$$

En appliquant les conditions aux limites, soit :

$U = 0$  en  $Y = 0$  et  $Y = H'/L$ ,

on obtient

$$U(Y) = -\frac{B}{2} Y(Y - H'/L)$$

Et comme  $Re = \frac{2\dot{m}}{\mu}$  et  $\dot{m} = \mu \int_0^{H'/L} U dY$  nombre de Reynolds pour une conduite droite est donné par:

$$Re_d = \frac{B_d}{6} \left( \frac{H'}{L} \right)^3 \quad (\text{AII - 1})$$

et la chute de pression est donnée par :

$$B_d = \frac{6Re_d}{\left( \frac{H'}{L} \right)^3} \quad (\text{AII - 2})$$

**2. Calcul des rapports des flux de chaleur, des chutes de pression et des débits massiques pour une même puissance de pompage :**

Une même puissance de pompage (PP) implique, pour une conduite à angle vif par exemple :

$$PP_v = PP_d \Rightarrow \dot{m}_v B_v = \dot{m}_d B_d \Rightarrow \frac{\dot{m}_v}{\dot{m}_d} = \frac{B_d}{B_v} = \frac{Re_v}{Re_d} \tag{AII -3}$$

D'après (AII -2) et (AII -3)  $Re_d$  sera donné par la relation suivante :

$$Re_d = \left[ Re_v \frac{B_v}{6} \left( \frac{H'}{L} \right)^3 \right]^{1/2} \tag{AII -4}$$

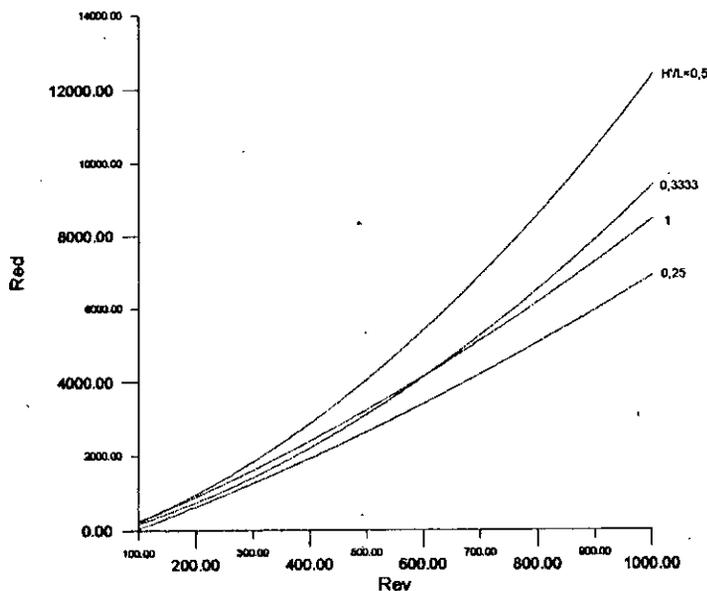


Fig. AII - 1 : Variation du nombre de Reynolds de la conduite droite en fonction du nombre de Reynolds de la conduite à angle vif ( $\theta = 45^\circ$ ).

donc  
le rapport des débits s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{\dot{m}_v}{\dot{m}_d} = \left[ \frac{6 Re_v}{B_v \left( \frac{H'}{L} \right)^3} \right]^{1/2} \tag{AII -5}$$

et le rapport des chutes de pression :

$$\frac{B_v}{B_d} = \left[ \frac{B_v \left( \frac{H'}{L} \right)^3}{6 Re_v} \right]^{1/2} \tag{AII -6}$$

Concernant le rapport des flux de chaleur, la relation (III - 26) nous permet d'écrire après avoir négligé le terme

$$\int_0^{H/L} \left[ \frac{\partial T}{\partial X} + \lambda T \right]_{X=0} dY \text{ devant } \frac{\text{Pr Re}}{2} :$$

$$\frac{Q_v}{Q_d} = \frac{-k(t_m - t_w)_{X=0} \left[ 1 - \exp\left(\int_0^1 \lambda dX\right) \right]_v \left( \frac{\text{Pr Re}_v}{2} \right)}{-k(t_m - t_w)_{X=0} \left[ 1 - \exp\left(\int_0^1 \lambda dX\right) \right]_d \left( \frac{\text{Pr Re}_d}{2} \right)}$$

et comme la différence de température ( $t_m - t_w$ ) est supposée la même à l'entrée de la conduite on obtient :

$$\frac{Q_v}{Q_d} = \frac{\left[ 1 - \exp\left(\int_0^1 \lambda dX\right) \right]_v Re_v}{\left[ 1 - \exp\left(\int_0^1 \lambda dX\right) \right]_d Re_d} \quad (\text{AII - 7})$$

**Remarque :**

Toutes ces relations sont applicables dans le cas des conduites à angle arrondi.