

9/99

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
Département de génie mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

MEMOIRE

Pour l'obtention du Diplôme d'Ingénieur d'état en Génie Mécanique

Thème

*Simulation numérique d'un
écoulement sur une paroi
poreuse*

Présenté par :

Mrs. M. F. TOUNSI
M. M. ZEDEK

Proposé et dirigé par :

Mr. S. LARBI
Mr. H. BELHANECHÉ

Membre de jury :

Mr. M. BOUDJEMA
Mr. M. BENBRAÏKA
Mr. S. LARBI
Mr. H. BELHANECHÉ
Mr. M. OUKACHA (Invité)

PROMOTION
JUN 1999



Remerciements

Nous tenons a remercier nos promoteur Mr. S. Larbi pour son sérieux et son suivi tout au long de l'année ainsi que Mr. H. Belhaneche et tous les enseignants du département génie mécanique avec qui nous avons eu l'honneur et le plaisir de travailler. Je remercie aussi M^{lle}. Amor pour sa très grande disponibilité et gentillesse.

Nous remercions aussi tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la concrétisation de ce travail. Sans oublier tous nos amis (es) qui nous ont soutenus et encouragé durant notre travail (NB pour Seddou).

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents pour leurs éducations et leurs suivis

A mes deux grands-mères Mamie et Mamanie,

A ma petite sœur Dalila pour sa gentillesse,

A ma sœur et frères aînés Salim et Doudja,

A mon beau-frère Djaffar,

A ma première petite nièce Imene.

Mohamed El-Mehdi

Ce modeste travail est dédié à :

A mes très chers grands parents,

A mes très chers parents pour tout ce qu'ils m'ont apporté,

A mes très chères sœurs Nassima et Meriem, et ma très chère amie

Kenza, pour leur soutien,

Ainsi qu'à toute ma famille et mes amis.

Mourad Fethi



إن هذه الدراسة تعالج تظاهر عددي لسيلان مائع فوق صفيحة منثورة، تتضمن حل معادلات كل من الطبقة الحدودية الديناميكية، الحرارية والكتلية وذلك في النظام الدائم والمروري. إن هدف هذه الدراسة هو الوصل بين معادلات السيلان الخارجي مع معادلات التبادل في الوسط المنثور.

Résumé:

La présente étude porte sur la simulation numérique d'un écoulement sur une paroi poreuse; celle-ci comporte une résolution des équations de couches limites dynamique, thermique et massique en régime permanent et transitoire. Le but de cette étude est de faire par la suite un raccordement avec les équations de transfert en milieu poreux

Summary:

The present work concerns a numerical simulation of a flow past a porous flat plate. It is based on the resolution of the steady and unsteady velocity, thermal and concentration boundary layers equations. The aim of this study is to make after a link with the transfert equations in a porous media.

Mots clé :

ADI, algorithme, aspiration, couche limite dynamique, couche limite massique, couche limite thermique, échange, écoulement, équations, EDP, épaisseur, interface, isothermes, isoconcentrations, lignes de courant, numérique, paroi, permanent, poreux, pores, résolution, Runge-Kutta, simulation, tir (méthode du...), transitoire.

Sommaire

Introduction

-1-

Chapitre I : Contrôle de la couche limite en aérodynamique

I.1- Introduction	-4-
I.2- Concept de la couche limite	-4-
I.2.1- Estimation de l'épaisseur de la couche limite	-6-
I.2.2- Définition d'autres épaisseurs caractérisant la couche limite	-8-
I.2.3- Point de séparation	-9-
I.2.4- Etude de la transition	-11-
I.3- Méthodes de contrôle de la couche limite	-15-
I.3.1- Mouvement de la paroi	-16-
I.3.2- Accélération de la couche limite	-17-
I.3.3- L'aspiration	-18-
I.3.4- Forme aérodynamique	-20-
I.3.5- Injection d'un gaz différent	-21-
I.3.6- Refroidissement de la paroi	-21-

Chapitre II : Equations des couches limites dynamique, thermique et massique

II.1- Introduction	-23-
II.2- Etablissement des équations de la mécanique des fluides	-23-
II.2.1- Equation de continuité	-24-
II.2.2- Equations de Navier et Stokes	-25-
II.2.3- Equation de conservation de l'énergie	-26-
II.2.4- Forme adimensionnelle des équations	-32-

II.3- Equations des couches limites	-34-
II.3.1- Couche limite dynamique	-34-
II.3.2- Couche limite thermique	-39-
II.3.3- Couche limite massique	-41-
II.4- Séparation de la couche limite	-44-
II.5- Etude de l'aspiration	-46-
II.6- Equations des couches limites en régime transitoire	-51-
II.7- Raccordement des équations de couche limite avec les équations de transfert en milieu poreux	-54-

Chapitre III : Résolution numérique des équations de la couche limite

III.1- Introduction	-58-
III.2- Régime permanent	-58-
III.2.1- Position du problème	-59-
III.2.1.1- Méthode du tir	-60-
III.2.1.2- Couche limite dynamique	-61-
III.2.1.3- Couche limite thermique	-62-
III.2.1.4- Couche limite massique	-63-
III.2.2- Méthode de Runge-Kutta	-64-
III.3- Régime transitoire	-68-
III.3.1- Classification des EDP	-68-
III.3.1.1- Classification physique	-68-
a/ Problème d'équilibre	-68-
b/ Problème de propagation	-68-
III.3.1.2- Classification mathématique	-69-
III.3.2- Le problème numérique	-69-
III.3.3- Les conditions aux limites	-71-
III.3.4- Discretisation	-71-

III.3.4.1- Méthode des différences finis	-71-
III.3.4.2- Consistance	-73-
III.3.4.3- Stabilité	-74-
III.3.5- Résolution d'une équation hyperbolique et parabolique à deux dimensions	-75-
III.3.5.1- Schémas explicite pour l'équation advection-diffusion	-75-
III.3.5.2- Méthode ADI	-76-
a/ Stabilité	-77-
b/ Conditions aux limites	-78-

Chapitre IV : Résultats et discussions

IV.1- Introduction	-85-
IV.2- Régime permanent	-85-
IV.2.1- Couche limite dynamique	-85-
IV.2.1.1- Représentation des résultats	-85-
IV.2.1.2- Interprétation et discussion	-87-
IV.2.2- Couche limite thermique	-87-
IV.2.2.1- Représentation des résultats	-87-
IV.2.2.2- Interprétation et discussion	-90-
IV.2.3- Couche limite massique	-90-
IV.2.3.1- Représentation des résultats	-90-
IV.2.3.2- Interprétation et discussion	-92-
IV.2.4- Conclusion	-93-
IV.3- Régime transitoire	-94-
IV.3.1- Représentation des résultats	-94-
IV.3.2- Interprétation et discussion	-101-
<u>Conclusion</u>	-104-

NOMENCLATURE**Lettres majuscules :**

A : surface de la plaque	m^2
C_f : Coefficient de frottement	SD
C_s : concentration de la vapeur d'eau à l'interface	Kmole/Kg
C_∞ : concentration de la vapeur d'eau dans l'écoulement externe	Kmole/Kg
D : Coefficient de diffusion binaire	m^2/s
E_c : Nombre d'Eckert	SD
E_i : Energie interne du système	J
E_c : Energie cinétique	J
E_p : Energie potentielle	J
E_T : Energie totale du système	J
J_q : Densité de flux de chaleur dans le milieu poreux	$W/m^2.s^{-1}$
J_m : Densité de flux massique dans le milieu poreux	$Kg/m^2.s^{-1}$
P : la pression	N/m^2
Pr : Nombre de Prandtl	SD
Q : Quantité de chaleur	J
Q_v : Quantité de fluide aspiré	m^3/s
Re : Nombre de Reynolds	SD
Sc : Nombre de Schmidt	SD
Sh : Nombre de Sherwood	SD
T : température	$^{\circ}C$
T_p : température de la plaque	$^{\circ}C$
T_s : Température de l'écoulement à l'interface	$^{\circ}C$
T_∞ : température du fluide loin de la plaque	$^{\circ}C$
U_∞ : vitesse de l'écoulement loin de la plaque	m^2/s
W : Travail fourni	J

Lettres minuscules :

b : Largeur de la plaque	m
c_D : Coefficient de volume	SD
e : densité de flux massique de l'écoulement externe	$\text{Kg/m}^2.\text{s}$
h_c : Coefficient de transfert de chaleur	$\text{W/m}^2.\text{K}$
h_m : Coefficient de transfert de masse	$\text{Kg/m}^2.\text{s.Pa}$
l : longueur de la plaque	m
v_0 : Vitesse d'aspiration	m/s

Lettres grecques :

β : Facteur de dilatation volumique	K^{-1}
δ_d : Epaisseur de la couche limite dynamique	m
δ^*_d : Epaisseur adimensionnelle de la couche limite dynamique	SD
δ_1 : Epaisseur de déplacement	m
δ_2 : Epaisseur de la quantité de mouvement	m
δ_T : Epaisseur de la couche limite thermique	m
δ^*_T : Epaisseur adimensionnelle de la couche limite thermique	SD
δ_m : Epaisseur de la couche limite massique	m
δ^*_m : Epaisseur adimensionnelle de la couche limite massique	SD
μ : Viscosité dynamique	Kg./m.s
ν : Viscosité cinématique	m^2/s
Ψ : Fonction de courant	SD
ρ : la masse volumique	Kg/m^3
τ_p : Contrainte à la paroi	N/m^2

المدسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION

INTRODUCTION

L'aérodynamique, dont l'étymologie évoque immédiatement l'action de l'air en mouvement, est la science qui étudie les différents aspects de cette action, notamment les forces, les pressions et les moments qui résultent du déplacement des corps dans l'atmosphère. L'aérodynamique intervient essentiellement dans la conception des avions et des missiles, dont elle définit les formes optimales, mais joue également un rôle important dans l'architecture navale, l'industrie automobile, les véhicules à coussins d'air, ainsi que dans la construction d'ouvrages fixes comme les ponts, les tours et les grands immeubles dont elle détermine la réaction au vent. [1]

Sa naissance comme science, peut être située au XVIII^e siècle, en Europe où furent développées les théories (B. Bernoulli, 1738 ; L. Euler, 1755) qui faisaient suite à un empirisme séculaire.

Ce n'est qu'un siècle plus tard que les lois fondamentales tenant compte des contraintes intérieures d'un milieu continu ont été formulées (M. Navier, 1827 ; S.D. Poisson, 1831 ; D. De Saint Venant, 1843 ; G.G. Stokes, 1845). Devant l'impossibilité de résoudre ces équations extrêmement compliquées, les connaissances aérodynamiques n'ont pu se développer que grâce à l'introduction d'hypothèses simplificatrices, appuyées par des données expérimentales. Les étapes les plus importantes de ces travaux théoriques et expérimentaux sont marquées, entre autre, par l'introduction des coefficients de similitudes (E. Mach, 1889 ; O. Reynolds, 1883), du concept de la couche limite (L. Prandtl, 1904).

L'étude de la couche limite est primordiale compte tenu des effets de viscosité qui apparaissent proches des parois. Elle concerne notamment les moyens de son contrôle. On sait que la traînée d'un avion vient en partie des frottements de l'air provoqués par la couche limite qui se forme sur les surfaces du fuselage et de la voilure. Le long d'une surface exposée au vent relatif, cette couche tend en effet à s'épaissir jusqu'à développer de la turbulence, et donc de la traînée. Une diminution de l'épaisseur de la couche limite entraînera donc une diminution de la consommation en carburant.

Depuis les essais américains sur le jet-stream [2], les ingénieurs s'accordent pour dire que le meilleur moyen de stabiliser cette couche est le concept de laminarité hybride : l'adoption d'un profil laminaire (système passif) et l'aspiration de la couche limite par microperforation (système actif). Aujourd'hui le système passif est bien connu, le concept de laminarité hybride est encore mal maîtrisé ; pour cela AIRBUS [2] réalise en ce moment des essais sur des A-320 en utilisant une section poreuse sur 20% de la corde de dérive en bord d'attaque, là où la turbulence se crée habituellement.

Parmi les applications nécessitant une maîtrise des connaissances des phénomènes de transfert en couche limite, on peut citer : les phénomènes de séchage et les problèmes liés aux processus d'échange sol atmosphère.

Néanmoins, l'étude d'un problème incluant un écoulement externe et un milieu poreux, passe par la connaissance des paramètres de l'écoulement externe et ceux relatifs aux phénomènes de transfert dans le milieu poreux. Pour cela il faut élaborer un code de calcul pour la détermination des paramètres qui caractérisent l'écoulement externe, et un autre code de calcul concernant les phénomènes de transfert dans le milieu poreux.

Le but de notre travail est d'étudier l'écoulement externe en régime laminaire par la résolution des équations de couches limites dynamique, thermique et massique en régimes permanent et transitoire, en considérant le cas d'une plaque plane perméable. Notons que la détermination des coefficients d'échange de chaleur et de masse au niveau de l'interface écoulement externe – paroi poreuse passe par la connaissance des paramètres caractérisants le milieu poreux.

Notre travail est divisé en quatre chapitres principaux. Dans le chapitre I, nous nous sommes intéressés au concept de la couche limite et des moyens de son contrôle. Au chapitre II, nous avons donné les équations des couches limites dynamique, thermique et massique à partir des équations de la mécanique des fluides, ainsi que les conditions initiales et aux limites correspondantes. Le chapitre III concerne les méthodes de résolutions de ces équations en régime permanent (méthode de Runge-Kutta), et en régime transitoire (méthode ADI). Finalement les résultats obtenus ainsi que leurs interprétations sont données dans le chapitre IV. Enfin une conclusion pour terminer notre étude.

Chapitre I :

Contrôle de la couche limite en aérodynamique

I.1- Introduction

I.2- Concept de la couche limite

I.2.1- Estimation de l'épaisseur de la couche limite

I.2.2- Définition d'autres épaisseurs caractérisant la couche limite

I.2.3- Point de séparation

I.2.4- Etude de la transition

I.3- Méthodes de contrôle de la couche limite

I.3.1- Mouvement de la paroi

I.3.2- Accélération de la couche limite

I.3.3- L'aspiration

I.3.4- Forme aérodynamique

I.3.5- Injection d'un gaz différent

I.3.6- Refroidissement de la paroi

I.1- Introduction :

Dans ce chapitre, nous nous proposons de mettre en évidence les caractéristiques générales d'un écoulement visqueux pour introduire ensuite le concept de la couche limite. En d'autres termes, on citera les grandeurs physiques qui vont influencer d'une manière ou d'une autre sur le développement de la couche limite. On citera ensuite toutes les grandeurs qui la caractérisent afin d'expliquer tous les phénomènes qui peuvent apparaître dans un écoulement comme le point de séparation, la transition ou bien la turbulence.

Compte tenu du fait que la couche limite se développe dans tout écoulement autour d'un obstacle quelconque, il est intéressant de citer les différentes méthodes pour le contrôle de celle-ci, c'est-à-dire les méthodes adéquates à utiliser dans un cas bien précis d'écoulement afin de retarder ou si c'est possible d'empêcher le décollement de l'écoulement sur la paroi pour minimiser les pertes d'énergie.

I.2- Concept de la couche limite :

Dans le cas d'un mouvement de fluide où la distribution des pressions déterminée expérimentalement est en accord avec la théorie des fluides parfaits, l'influence de la viscosité pour des nombres de Reynolds élevés est plus appréciable dans une couche très mince, c'est à dire que l'influence de la viscosité n'est pas d'une grande importance à partir d'une certaine distance de la paroi. Si la condition de non-glissement n'est pas satisfaite dans un fluide réel, alors il n'y aura pas une grande différence entre le champ d'écoulement d'un fluide parfait et celui d'un fluide réel.

En réalité, à cause de la viscosité du fluide, les particules fluides vont adhérer à la paroi, celles-ci vont retarder dans leurs mouvements les particules qui sont encore au-dessus, qui elles-mêmes vont retarder celles qui sont encore au-dessus, jusqu'à atteindre une certaine distance de la paroi où l'effet des frottements devient nul. La couche ainsi délimitée est appelée couche limite, le concept de la couche limite qui fut introduit par L. Prandtl en 1904 [3].

Dans cette couche, la vitesse du fluide est de zéro au niveau de la plaque et va en augmentant jusqu'à atteindre sa valeur maximum qui correspond à la vitesse de l'écoulement sans frottement. On remarque aussi que l'épaisseur de cette couche croît le long de la plaque dans la direction de l'écoulement.

La figure (I-a) montre la distribution des vitesses dans la couche limite dans le cas d'un écoulement sur une plaque plane.

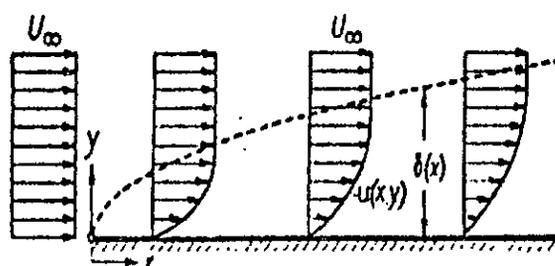


Figure I-a : Distribution des vitesses dans la couche limite

Donc on déduit que le gradient de vitesse est important dans la couche limite, ce qui entraîne des contraintes de cisaillement pour les fluides de faibles viscosités, mais ce phénomène devient pratiquement nul à l'extérieur de la couche limite.

Cet aspect physique suggère que l'écoulement d'un fluide avec une faible viscosité peut être divisé en deux régions pour l'analyse mathématique ; la première région est celle où les frottements sont pris en considération donc dans la couche limite mince près de la paroi, et la deuxième est celle où les frottements peuvent être négligés et où la théorie des fluides parfaits peut être appliquée avec une bonne approximation. Une telle suggestion nous permet de simplifier considérablement les équations qui gouvernent l'écoulement.

Cependant, dans certains cas, la décélération des particules fluides dans la couche limite n'arrive pas nécessairement le long de la paroi, ce qui entraîne une augmentation considérable de l'épaisseur de la couche limite donc un renversement de l'écoulement. Les particules fluides seront alors dirigées vers l'extérieur. Ce phénomène est appelé décollement de la couche limite et il est toujours accompagné de formation de tourbillons et de grande perte d'énergie.

I.2.1- Estimation de l'épaisseur de la couche limite :

L'épaisseur de la couche limite qui ne subit pas de séparation, c'est à dire dans le cas laminaire, peut être estimée en négligeant les effets de viscosité à l'extérieur de la couche limite, donc les forces de frottement peuvent être négligées par rapport aux forces d'inertie.

Dans ce qui suit, on va rappeler quelques résultats. Les forces d'inertie par unité de volume sont données par $\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$, le gradient $\frac{\partial u}{\partial x}$ est proportionnel à $\frac{U}{l}$ pour une plaque de longueur l (U est la vitesse de l'écoulement loin de la paroi), donc les forces d'inertie sont proportionnelles à $\frac{\rho U^2}{l}$.

D'autre part, les forces de frottement par unité de volume sont données par $\frac{\partial \tau}{\partial y}$ donc égale à $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ et le gradient de vitesse $\frac{\partial u}{\partial y}$ dans une direction perpendiculaire à la paroi est de l'ordre de $\frac{U}{\delta}$ (δ représente l'épaisseur de la couche limite laminaire), donc les forces de frottement par unité de volume sont proportionnelles à $\mu \frac{U}{\delta^2}$.

A partir de la condition d'égalité entre les forces de frottement et les forces d'inertie, on obtient :

$$\mu \frac{U}{\delta^2} \sim \frac{\rho U^2}{l}$$

Donc l'épaisseur de la couche limite est tel que :

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\mu l}{\rho U}} = \sqrt{\frac{\nu l}{U}} \quad (I.1)$$

Selon Blasius [23], le facteur de proportionnalité est égal à 5 approximativement (on le déterminera ultérieurement). Donc pour un écoulement laminaire, on a :

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu l}{U}} \quad (I.2)$$

Pour une plaque plane de longueur l , l'épaisseur adimensionnelle de la couche limite dynamique est donnée par :

$$\delta^* = \frac{\delta}{l} = 5 \sqrt{\frac{\nu}{Ul}} = \frac{5}{\sqrt{Re_l}} \quad (I.3)$$

Où Re_l représente le nombre de Reynolds relatif à toute la plaque. L'équation (I.1) montre que δ est proportionnelle à $\sqrt{\nu}$ et à \sqrt{l} , donc en remplaçant l par x , on remarque que l'épaisseur de la couche limite croît effectivement le long de la plaque.

D'autre part, l'épaisseur adimensionnelle de la couche limite (ou le nombre de Reynolds apparaît bien) décroît avec le nombre de Reynolds, c'est à dire pour un Re très grand (ν pratiquement nul) δ^* tend vers zéro et on retombe dans le cas d'un fluide parfait.

On peut maintenant estimer la contrainte de cisaillement τ_0 au niveau de la paroi et donc l'effort de frottement global. D'après ce qu'on a vu précédemment, on a :

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

On a vu aussi que $\frac{\partial u}{\partial y}$ était proportionnel à $\frac{U}{\delta}$ donc τ_0 est proportionnelle à $\mu \frac{U}{\delta}$. En se servant de l'équation (I.1), on obtient :

$$\tau_0 \sim \mu U \sqrt{\frac{\rho U}{\mu l}} = \sqrt{\frac{\mu \rho U^3}{l}} \quad (I.4)$$

On voit bien que τ_0 est proportionnelle à $U^{3/2}$. On obtient alors la contrainte adimensionnelle de cisaillement par rapport à ρU^2 :

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U l}} = \frac{1}{\sqrt{Re_l}} \quad (I.5)$$

L'effort total de frottement D est égale à $b\tau_0$ où b représente la largeur de la plaque, on utilisant l'équation (I.4), on aura :

$$D \sim b \sqrt{\mu \rho U^3 l}$$

De cette dernière expression, on voit que l'effet de frottement global est proportionnel à $U^{3/2}$ et $l^{1/2}$. La proportionnalité avec $l^{1/2}$ signifie que si on double la longueur l de la plaque, l'effort de frottement ne va pas doubler. Ce phénomène peut être expliqué par le fait qu'il y a moins de frottement en s'éloignant de la paroi car dans ce cas l'épaisseur de la couche limite va en augmentant.

Le coefficient de frottement adimensionnel est donné par l'expression suivante :

$$C_D \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U l}} = \frac{1}{\sqrt{Re_l}} \quad (I.6)$$

D'après les résultats de Blasius, le facteur de proportionnalité est de l'ordre de 1,328, donc le coefficient de frottement adimensionnel s'écrit :

$$C_D = \frac{1,328}{\sqrt{Re_l}} \quad (I.7)$$

I.2.2- Définition d'autres épaisseurs caractérisant la couche limite :

La définition de l'épaisseur de la couche limite est d'une certaine manière arbitraire, parce que la transition de la vitesse de l'intérieur vers l'extérieur de la couche limite se fait d'une manière asymptotique [5]. Ceci est sans importance pratique car la vitesse dans la couche limite atteint une valeur proche de celle loin de la paroi à partir d'une très petite distance de celle-ci. Cette distance sera définie pour une valeur $\frac{u}{U} = 0,99$.

On définit également l'épaisseur de déplacement δ_1 qui est utilisée parfois (Figure I-b), elle est définie par :

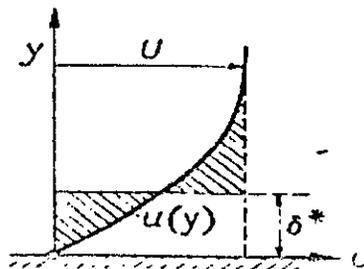


Figure I-b : Epaisseur de déplacement

$$\delta_1 = \delta^* = \int_{y=0}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (I.8)$$

Cette épaisseur indique la distance à laquelle les lignes de courant sont déviées à cause de la formation de la couche limite.

On définit aussi l'épaisseur de la quantité de mouvement δ_2 par :

$$\delta_2 = \int_{y=0}^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

Cette épaisseur mesure la perte de quantité de mouvement due à la couche limite relativement à l'écoulement extérieur.

I.2.3- Point de séparation :

Pour expliquer le phénomène très important de séparation de la couche limite, considérons le cas d'un écoulement autour d'un cylindre (Figure I-c)

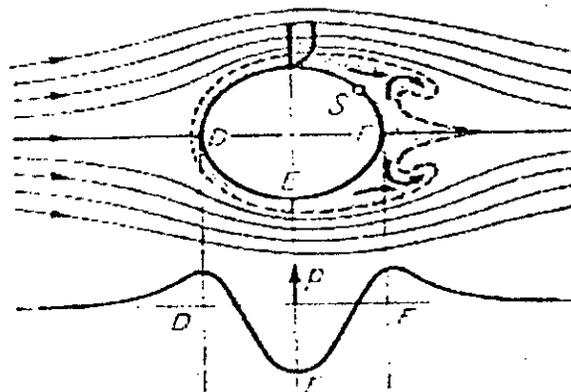


Figure I-c : Ecoulement autour d'un cylindre

Dans ce cas d'écoulement, les particules fluides sont accélérées dans la demi-portion DE et elles sont décélérées dans la portion EF. De la même manière, il y a diminution de pression sur la portion DE et augmentation de pression sur la portion EF. Au début du mouvement, l'écoulement se rapproche d'un écoulement sans frottement d'où le fait que la couche limite qui se forme a une épaisseur très mince.

A l'extérieur de la couche limite, il y a une transformation de pression en énergie cinétique sur la portion DE et le contraire se produit sur la portion EF pour qu'une particule arrive en F avec la même vitesse qu'elle avait en D. Une particule fluide qui se trouve à l'intérieur de la couche limite sera soumise au même phénomène parce que le gradient de pression agit également à l'intérieur de la couche limite.

A cause des forces de frottement, les particules se trouvant à l'intérieur de la couche limite consomment presque toute leur énergie cinétique sur la portion DE, ce qui les empêche de surmonter l'augmentation de pression sur la portion EF. De ce fait, les particules au contact de la paroi auront tendance à s'arrêter et influencer les couches suivantes. Ce phénomène engendre un mouvement opposé au mouvement externe et qui aura tendance à faire décoller l'écoulement de la paroi.

Pour le cas d'un écoulement sur une plaque plane, le même phénomène se produit. Les couches de frottement retardées qui se forment à l'intérieur de la couche limite donnent souvent naissance à la formation de tourbillons. La formation des tourbillons est intimement liée avec le gradient de pression, c'est à dire que lorsqu'on a une chute de pression dans la direction de l'écoulement, celui-ci devient accéléré. Ce qui entraîne en même temps l'accélération des particules fluides se trouvant à l'intérieur de la couche limite et l'écoulement restera laminaire.

Par contre si la chute de pression se produit dans le sens opposé de l'écoulement, celui-ci sera retardé et les particules fluides de la couche limite seront encore plus retardées.

Après entière consommation de leur énergie cinétique, les particules se trouvant à l'intérieur de la couche limite auront tendance à se retourner d'où la formation d'un écoulement en retour au voisinage immédiat de la paroi.

Ce phénomène s'amplifiera graduellement et entraînera le décollement de l'écoulement extérieur de la paroi.

La figure (I-d) montre la distribution des vitesses lors du décollement de la couche limite.

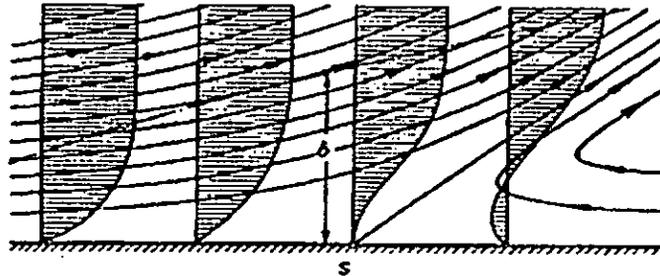


Figure I-d : Distribution des vitesses lors du décollement

Le point S représente le point de séparation, c'est le point où l'écoulement extérieur se décolle de la paroi. Ce point est déterminé par la condition suivante :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

La détermination du point de séparation peut se faire avec des calculs exacts c'est à dire par intégration des équations de la couche limite.

Dans le paragraphe (I.3), on essaiera de citer et d'expliquer les méthodes utilisées pour prévenir le phénomène de décollement de la couche limite.

I.2.4- Etude de la transition :

Pour l'étude de la transition, on se limitera au cas d'un écoulement sur une plaque plane. Le processus de transition sur une plaque plane horizontale a d'abord été étudié par J.M Burgers [6], Van Der Hegge Zijnen [7] et plus tard par M Hansen [8] et plus en détail par H.L Dryden [9]. Nous savons que l'épaisseur de la couche limite croît proportionnellement à \sqrt{x} .

Près du bord d'attaque la couche limite est toujours laminaire (sauf dans le cas d'une plaque avec une épaisseur finie, où il y a séparation au niveau du bord d'attaque si aucune précaution n'est prise pour l'éviter), pour devenir turbulente à partir d'une certaine distance.

La transition entraîne aussi un changement notable de la forme des courbes des distributions des vitesses. On peut voir ce changement sur la figure (I-e) qui a été tracée à partir de mesures effectuées par G.B Schubauer et P.S Klebanoff [10] dans un écoulement de très faible intensité de turbulence, et on remarque que la zone de transition s'étend sur une région allant de $3 \cdot 10^6$ à $4 \cdot 10^6$ pour le nombre de Reynolds.

Dans cette zone le profil de la couche limite passe de celui d'un écoulement laminaire entièrement développé à celui d'un écoulement turbulent entièrement développé.

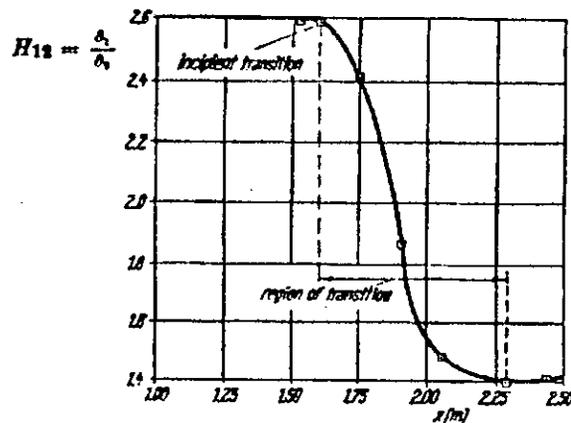


Figure I-f : Variation du facteur de forme en fonction de $x(m)$

Le processus de transition entraîne une grande diminution du facteur de forme $H_{12} = \delta_1 / \delta_2$ (figure I-f) [4] avec δ_1 : épaisseur de déplacement et δ_2 : épaisseur de la quantité de mouvement.

Dans le cas de la plaque plane, le facteur de forme décroît de $H_{12} \approx 2,6$ en régime laminaire à $H_{12} \approx 1,4$ en régime turbulent [4].

Le changement de profil de vitesses dans la zone de transition peut être utilisé pour la détermination du point de transition, ou plutôt la zone de transition. Ce principe peut être expliqué à l'aide de la figure (I-g) [4].

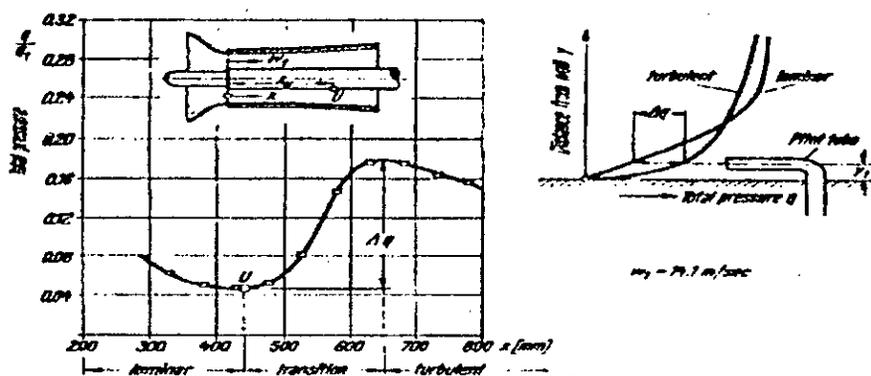


Figure I-g : Principe de détermination du point de transition

Un tube de Pitot est déplacé parallèlement à la paroi à une distance qui correspond à la différence maximum entre les vitesses en régime laminaire et turbulent. Lors du mouvement du tube à travers la zone de transition, dans le sens de l'écoulement, il est enregistré une soudaine augmentation de la pression totale. La transition sur une plaque plane entraîne un changement remarquable sur la résistance à l'écoulement ; le coefficient de frottement.

Dans un écoulement laminaire, le coefficient de frottement est proportionnel à 1,5 la puissance de la vitesse [4], alors qu'en régime turbulent cette proportion croît à 1,85. D'autres travaux effectués par H.W Emmons [11] et G.B Schubauer et P.S Klebanoff [10], ont montré que dans le cas d'une plaque plane le processus de transition est intermittent et consiste en une séquence de zones laminaires et turbulentes.

Le gradient de pression le long d'une paroi exerce une grande influence sur la position du point de transition dans la couche limite. Lorsque nous avons une diminution de pression (l'écoulement est accéléré), la couche limite reste généralement laminaire. Néanmoins une faible augmentation de la pression engendrera toujours le phénomène de transition. En tenant compte de ce fait, il est toujours possible de réduire le coefficient de frottement sur des corps dits minces (ailes) en déplaçant aussi loin que possible le point de transition. Ceci peut être réalisé en faisant un choix convenable et judicieux de la forme ou du profil et de la distribution de pression correspondante.

Le coefficient de frottement de corps possédant une importante longueur initiale ou l'écoulement est laminaire peut être réduit de moitié ou plus. La position du point de transition et donc l'ordre de grandeur du coefficient de frottement peuvent être modifiés par d'autres moyens qu'on verra dans le paragraphe suivant.

I.3- Méthodes de contrôle de la couche limite :

Le contrôle de la couche limite consiste à prévoir et prévenir l'apparition du phénomène de séparation et la formation des tourbillons. Le problème de contrôle de la couche limite est devenu très important récemment, en particulier dans le domaine de l'aéronautique.

Dans un écoulement autour d'un obstacle quelconque, la séparation est un phénomène indésirable car il est accompagné d'une forte perte d'énergie, c'est pour cette raison que plusieurs méthodes ont été élaborées et étudiées pour prévenir la séparation.

A première vue et comme nous l'avons vu au paragraphe de la turbulence, la méthode la plus simple et la plus évidente est celle qui consiste à animer la paroi d'un mouvement de même sens que le sens de l'écoulement pour réduire la différence entre la vitesse des particules fluides et la paroi, mais cette méthode a montré ses limites lors de son application pour des cas pratiques.

Plusieurs méthodes de contrôle de la couche limite ont été développées expérimentalement et aussi sur la base de considérations théoriques. Nous citons ainsi :

- Accélération de la couche limite
- Aspiration de la couche limite
- Conception de forme convenable du solide (aérodynamique)
- Injection d'un gaz différent
- Refroidissement de la paroi

Dans ce qui suit, nous nous proposons de détailler chaque méthode et de tirer une conclusion sur le domaine d'application de chacune d'elles.

I.3.1- Mouvement de la paroi :

On a vu que l'apparition de la séparation est due en grande partie à la différence entre la vitesse du fluide et la vitesse de la paroi, donc la méthode la plus évidente pour prévenir la séparation consiste à éliminer cette différence c'est à dire à animer la paroi avec une certaine vitesse de même direction que celle de l'écoulement.

Prandtl fut le premier à mettre en évidence ce principe et il a constaté que cette méthode donnait des résultats satisfaisants lorsqu'il a mis un cylindre circulaire en rotation dans un courant fluide.

La figure (I-h) [4], montre un cylindre en rotation placé dans un courant fluide dont la direction forme un angle droit avec l'axe du cylindre.

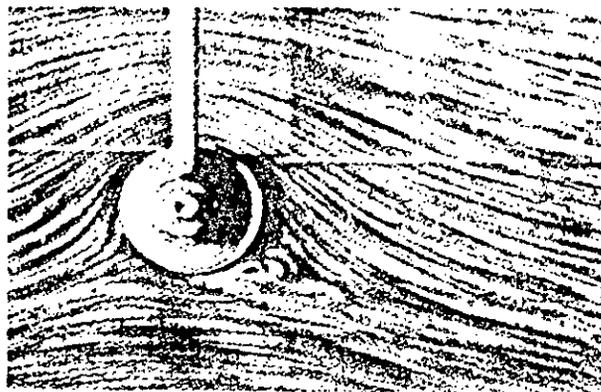


Figure I-h : Écoulement autour d'un cylindre en rotation

On remarque que sur le côté supérieur où le fluide et la paroi du cylindre ont la même direction, que la séparation est complètement éliminée. Par contre sur le côté inférieur où le fluide a une direction opposée à celle de la paroi du cylindre, la séparation se développe mais d'une manière incomplète.

L'idée de déplacer la paroi dans le même sens que l'écoulement a montré ces limites lors de son utilisation dans des domaines pratiques du fait que son application est plus ou moins compliquée pour d'autres formes que celle de la forme cylindrique.

C'est pour cette raison que cette méthode n'a pas été développée et fut remplacée par d'autres méthodes plus avantageuses.

I.3.2- Accélération de la couche limite :

Une autre alternative fut établie pour prévenir la séparation et qui consiste à fournir une certaine énergie aux particules fluides qui ont tendance à être retardées dans la couche limite. Cette énergie peut être fournie à l'aide d'une pompe spéciale placée à l'intérieur de la paroi ou bien en déviant l'énergie exigée à partir de l'écoulement principal. Cette dernière solution peut être obtenue en reliant la région retardée avec une région à haute pression à l'aide d'un obstacle placé à l'amont de la paroi.

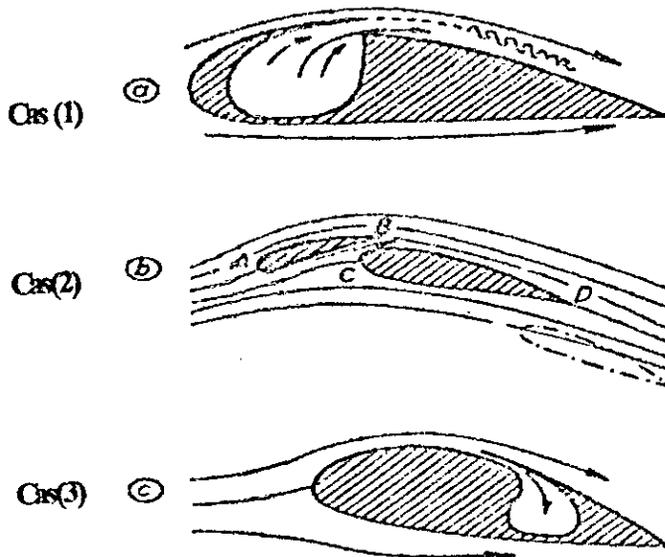


Figure I-1 : Contrôle de la couche limite par refoulement (1), déviation (2) et aspiration (3)

La figure (I-i) [4], montre le cas de l'accélération de la couche limite par refoulement à l'aide d'une fente (cas 1) faite sur la paroi, mais dans ce cas il est obligatoire de faire attention à la forme de la fente afin d'éviter la formation des tourbillons après la section de sortie.

Dans le cas (2), une déviation de l'écoulement principal est réalisée à l'aide d'un obstacle. Une première couche limite se forme sur la partie A-B mais elle est portée dans l'écoulement principal avant l'apparition de la séparation. A partir du point C, une autre couche limite se forme qui n'aura à surmonter qu'une partie de l'accroissement de pression et c'est ainsi qu'on atteindra le point D sans l'apparition du point de séparation.

Le cas (3) montre l'effet d'une aspiration à l'aide de trou réalisé sur la paroi, mais on étudiera ce cas dans ce qui suit avec plus de détails.

I.3.3- L'aspiration :

Cette méthode consiste à aspirer du fluide de l'intérieur de la paroi à l'aide de pores placés à des endroits judicieux. Par ce moyen on empêche l'accumulation de fluide retardé et on diminue la pression dans la partie entourant la fente et c'est ainsi que le décollement est empêché. Néanmoins cette méthode ne nous permet pas d'économiser de résistance.

On peut voir l'effet de l'aspiration sur la figure (I-j) [3], où un cylindre est placé dans un écoulement et l'aspiration est appliquée sur un seul côté.

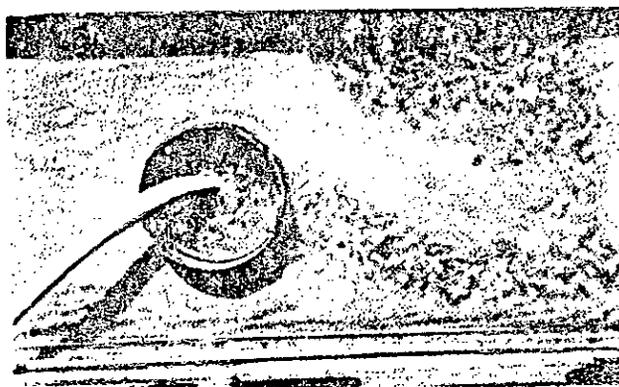


Figure I-j : Écoulement autour d'un cylindre avec aspiration

On voit bien que sur le côté où est appliquée l'aspiration, l'écoulement adhère à la paroi et la séparation est évitée. Par contre sur le côté où il n'y a pas d'aspiration, l'apparition du décollement est inévitable. Par l'aspiration on réduit sensiblement la traînée.

L'application d'une aspiration aura pour effet de stabiliser la couche limite de la même manière que dans le cas d'un gradient de pression. La diminution de la traînée est due à l'empêchement de la transition d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent. Une analyse plus détaillée révèle que l'influence de l'aspiration est due à deux effets [4]

Premièrement, l'aspiration réduit l'épaisseur de la couche limite, et dans une couche plus mince l'apparition du point de séparation est sensiblement réduite. Deuxièmement, l'aspiration crée un profil laminaire des vitesses qui possède une limite supérieure de stabilité (nombre de Reynolds critique) par rapport au cas imperméable.

Dans le cas où nous avons une plaque perméable, il est important d'estimer la quantité de fluide aspiré. Il est possible d'obtenir une diminution de l'épaisseur de la couche limite et donc avoir un nombre de Reynolds en dessous de la limite de stabilité, tant que suffisamment de fluide est aspiré. Néanmoins, l'aspiration d'un volume élevé n'est pas économique car une grande proportion de l'énergie économisée sous l'effet de la diminution de la traînée est utilisée par la pompe d'aspiration. Il est par contre important de déterminer le volume minimum aspiré pour garder un écoulement laminaire.

Le maintien de la traînée obtenue par l'aspiration est le plus important quand cette valeur minimum est utilisée car n'importe quelle valeur supérieure de volume aspiré engendrera une couche limite plus mince et une augmentation de la contrainte de cisaillement près de la paroi.

Dans le cas du régime permanent avec aspiration uniforme, la solution des équations de couche limite est particulièrement simple. Le profil des vitesses et donc l'épaisseur de la couche limite deviennent indépendants des coordonnées à partir d'une certaine distance du bord d'attaque (Figure I-k) [4].

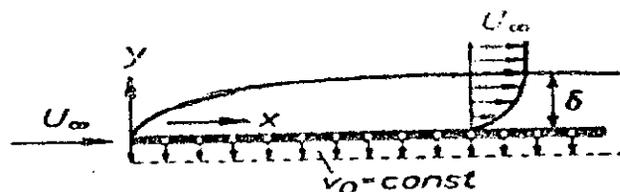


Figure I-k : Écoulement sur une plaque perméable

L'épaisseur de déplacement ainsi que l'épaisseur de la quantité de mouvement de ce profil asymptotique d'aspiration sont données par :

$$\delta_1 = \frac{\nu}{-v_0} \quad \text{et} \quad \delta_2 = \frac{1}{2} \frac{\nu}{-v_0}$$

Le profil des vitesses est donné par [28]:

$$u(y) = U \left[1 - \exp\left(\frac{v_0 y}{\nu}\right) \right]$$

Donc le nombre de Reynolds critique est : $\left(\frac{U\delta_1}{\nu}\right)_{crit} = 70.000$

Donc le nombre de Reynolds critique du profil asymptotique est 100 fois supérieur à celui de la plaque imperméable. Cette valeur montre la grande influence qu'exerce l'aspiration sur la stabilisation de la couche limite.

On peut dire que l'aspiration permet de maintenir un écoulement laminaire non seulement à cause de la diminution de l'épaisseur de la couche, mais aussi et en particulier à cause des limites de stabilité des profils de vitesses qui sont repoussés de manière considérable.

I.3.4- Forme aérodynamique :

La transition d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent peut être retardée en utilisant des parois convenablement étudiées. Comme dans le cas de l'aspiration, l'objet de l'utilisation de formes convenables est de réduire la traînée en déplaçant le point de séparation le plus en aval.

Comme il a été établi précédemment, l'apparition du point de séparation dans la couche limite est influencée par le gradient de pression. Donc avec une baisse de pression, on atteint des nombres de Reynolds beaucoup plus élevés qu'avec une augmentation de pression. Partant de ce principe, le résultat désiré est atteint en déplaçant la section d'épaisseur maximum loin derrière. De cette manière une grande portion de la paroi reste sous l'influence d'une pression qui diminue en aval et la couche limite reste laminaire.

I.3.5- Injection d'un gaz différent :

Le fait d'injecter un gaz léger et différent de celui de l'écoulement externe à travers une paroi poreuse dans la couche limite a pour effet de réduire l'échange de chaleur entre la paroi et l'écoulement. C'est le seul effet important notable réalisé par cette méthode et qui est souvent utilisé pour le cas de vitesses supersoniques.

L'injection de gaz crée un mélange gazeux dans la couche limite et au phénomène de variation de la quantité de mouvement et de transfert de chaleur s'ajoute le phénomène de transfert de masse par diffusion.

I.3.6- Refroidissement de la paroi :

Dans le cas des écoulements supersoniques et pour un intervalle bien déterminé du nombre de Mach, la couche limite peut être stabilisée par simple refroidissement de la paroi.

Par le refroidissement on peut aussi réduire l'épaisseur de la couche limite et cette possibilité devient plus importante lorsqu'on a par exemple un gaz de densité très faible qui s'écoule dans une soufflerie, car une épaisseur trop importante donnerait des résultats erronés.

I.3.5- Injection d'un gaz différent :

Le fait d'injecter un gaz léger et différent de celui de l'écoulement externe à travers une paroi poreuse dans la couche limite a pour effet de réduire l'échange de chaleur entre la paroi et l'écoulement. C'est le seul effet important notable réalisé par cette méthode et qui est souvent utilisé pour le cas de vitesses supersoniques.

L'injection de gaz crée un mélange gazeux dans la couche limite et au phénomène de variation de la quantité de mouvement et de transfert de chaleur s'ajoute le phénomène de transfert de masse par diffusion.

I.3.6- Refroidissement de la paroi :

Dans le cas des écoulements supersoniques et pour un intervalle bien déterminé du nombre de Mach, la couche limite peut être stabilisée par simple refroidissement de la paroi.

Par le refroidissement on peut aussi réduire l'épaisseur de la couche limite et cette possibilité devient plus importante lorsqu'on a par exemple un gaz de densité très faible qui s'écoule dans une soufflerie, car une épaisseur trop importante donnerait des résultats erronés.

Chapitre II :

Equations des couches limites dynamique, thermique et massique

II.1- Introduction

II.2- Etablissement des équations de la mécanique des fluides

II.2.1- Equation de continuité

II.2.2- Equations de Navier et Stokes

II.2.3- Equation de conservation de l'énergie

II.2.4- Forme adimensionnelle des équations

II.3- Equation de la couche limite

II.3.1- Couche limite dynamique

II.3.2- Couche limite thermique

II.3.3- Couche limite massique

II.4- Séparation de la couche limite

II.5- Etude de l'aspiration

II.6- Equation de la couche limite en régime transitoire

II.7- Raccordement des équations de couche limite avec les équations en milieu poreux

II.1- Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons établir les équations de la couche limite en passant par les équations de la mécanique des fluides. On peut dire que pour résoudre un problème de mécanique des fluides, on doit résoudre les cinq équations qui découlent des trois principes de conservation : de la masse (1 équation), de la quantité de mouvement (3 équations) et de l'énergie (1 équation).

En premier lieu, nous allons établir ces équations pour le cas général et puis les simplifier pour le cas qui nous intéresse c'est à dire le cas d'un écoulement bidimensionnel sur une plaque plane. On donnera ensuite les équations de la couche limite qu'on résoudra dans le chapitre suivant.

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la meilleure méthode pour le contrôle de la couche limite est l'aspiration, donc il est intéressant d'établir les équations qui régissent le phénomène d'aspiration.

II.2- Etablissement des équations de la mécanique des fluides:

Dans ce paragraphe, nous allons considérer le mouvement d'un fluide Newtonien dans le cas général c'est à dire le cas d'un écoulement tridimensionnel. L'écoulement est caractérisé par le vecteur vitesse dont les composantes suivant O_x , O_y et O_z sont respectivement u , v et w . Pour connaître le mouvement d'une particule fluide, on doit connaître les sept grandeurs suivantes :

- u , v et w : les trois composantes du vecteur vitesse.
- P : la pression.
- ρ : la masse volumique.
- μ : la viscosité dynamique.
- T : la température.

Or nous n'avons que cinq équations pour sept inconnues, donc il faut ajouter l'équation d'état pour un gaz parfait ($P=\rho rT$) et une équation qui exprime la variation de la viscosité dynamique μ en fonction de la température T .

II.2.1- Equation de continuité :

Considérons un élément fluide de dimensions infinitésimales dx, dy, dz (figure II.a) et écrivons le bilan massique en supposant que le système ne génère aucune masse.

On aura :

$$\dot{m}_e - \dot{m}_s = \dot{m}_{acc}$$

avec : \dot{m}_e : masse entrante

\dot{m}_s : masse sortante

\dot{m}_{acc} : masse accumulée

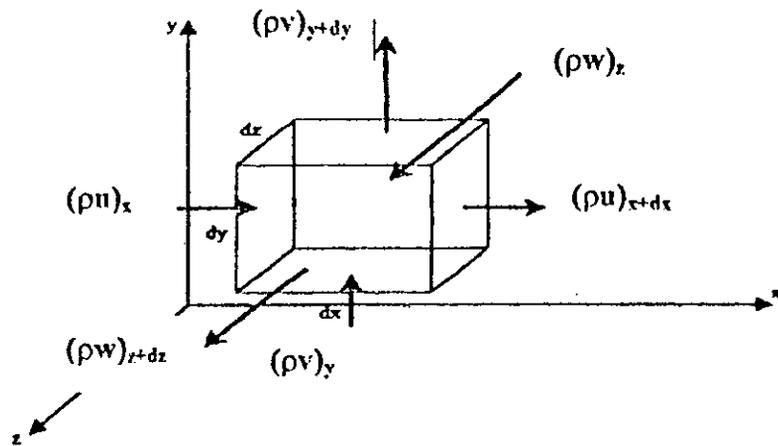


Figure II-a : Elément fluide de dimensions dx, dy, dz

D'après la figure, on a :

$$[(\rho u)_x - (\rho u)_{x+dx}] dy dz + [(\rho v)_y - (\rho v)_{y+dy}] dx dz + [(\rho w)_z - (\rho w)_{z+dz}] dx dy = dx dy dz \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

En faisant un développement d'ordre 1, on obtient :

$$\begin{cases} (\rho u)_{x+dx} = (\rho u)_x + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \\ (\rho v)_{y+dy} = (\rho v)_y + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \\ (\rho w)_{z+dz} = (\rho w)_z + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz \end{cases}$$

Donc l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

Sous forme vectorielle, elle s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{II.1})$$

Pour un écoulement permanent (c'est à dire $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) et pour un fluide incompressible (c'est à dire $\rho = \text{cst}$), l'équation de continuité se réduit à :

$$\text{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.2})$$

II.2.2- Equations de Navier et Stokes :

Les équations de Navier et Stokes expriment la conservation de la quantité de mouvement, elles sont déduites de la seconde loi de Newton qui stipule que la somme des forces extérieures est égale à l'accélération multipliée par la masse.

Dans le cas du mouvement d'un fluide, on doit considérer les deux types de forces : les forces volumiques et les forces surfaciques.

Les forces volumiques sont dues essentiellement à l'effet de la pesanteur alors que les forces surfaciques sont dues aux contraintes.

Donc on peut exprimer les forces extérieures par [4]:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F} + \vec{P} \quad \text{où} \quad \vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} : \text{représente les forces surfaciques}$$

$$\vec{P} = P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z\vec{k} : \text{représente les forces volumiques}$$

La deuxième loi de Newton s'écrit alors :

$$\vec{F} + \vec{P} = m\vec{\gamma} = \rho \frac{DV}{Dt}$$

Essayons maintenant de déterminer les forces surfaciques qui agissent sur un élément fluide de dimensions infinitésimales dx, dy, dz (Figure II.b).

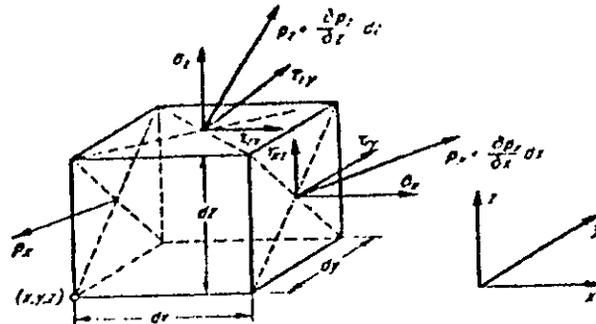


Figure II-b : Forces surfaciques agissant sur un élément fluide

Sur les deux surfaces de dimensions $dy \cdot dz$ qui sont perpendiculaires à l'axe x , il existe deux contraintes : P_x et $P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} dx$

De la même manière, on obtient les contraintes qui agissent sur les surfaces de dimensions $dx \cdot dy$ et $dx \cdot dz$ qui sont perpendiculaires à l'axe des z et l'axe des y respectivement. La résultante des forces de surface s'écrit alors :

$$P = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}$$

Considérons les contraintes qui agissent dans chaque direction, on aura :

- Suivant Ox :

$$[(\sigma_{xx})_{x+dx} - (\sigma_{xx})_x] dy dz + [(\tau_{yx})_{y+dy} - (\tau_{yx})_y] dx dz + [(\tau_{zx})_{z+dz} - (\tau_{zx})_z] dx dy = dP_x$$

- Suivant Oy :

$$[(\tau_{xy})_{x+dx} - (\tau_{xy})_x] dy dz + [(\sigma_{yy})_{y+dy} - (\sigma_{yy})_y] dx dz + [(\tau_{zy})_{z+dz} - (\tau_{zy})_z] dx dy = dP_y$$

- Suivant Oz :

$$[(\tau_{xz})_{x+dx} - (\tau_{xz})_x] dy dz + [(\tau_{yz})_{y+dy} - (\tau_{yz})_y] dx dz + [(\sigma_{zz})_{z+dz} - (\sigma_{zz})_z] dx dy = dP_z$$

En faisant un développement d'ordre 1, on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} dP_x &= \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz & (II.4.a) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} dP_y &= \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz & (II.4.b) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} dP_z &= \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz & (II.4.c) \end{aligned} \right.$$

En injectant les équations (II.4.a), (II.4.b) et (II.4.c) dans l'équation (II.3), on obtient les équations suivant chaque direction :

$$\rightarrow \text{Suivant } Ox : \rho \frac{Du}{Dt} = \rho \bar{g}_x + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (II.5.a)$$

$$\rightarrow \text{Suivant } Oy : \rho \frac{Dv}{Dt} = \rho \bar{g}_y + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \quad (II.5.b)$$

$$\rightarrow \text{Suivant } Oz : \rho \frac{Dw}{Dt} = \rho \bar{g}_z + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \quad (II.5.c)$$

On peut écrire les équations sous forme vectorielle et on aura :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \sigma_{ij}$$

Pour les fluides Newtoniens, des résultats expérimentaux ont montré qu'il existe une relation entre les contraintes (tangentielle et normales) et les déformations.

Ces relations sont données par :

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad ; \quad \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

En introduisant ces relations dans les équations (II.5.a), (II.5.b) et (II.5.c), on aboutit aux équations de Navier et Stokes suivantes :

$$\begin{cases} \rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{cases}$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, l'équation de continuité nous donne : $\text{div} \vec{V} = 0$, donc les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\begin{cases} \rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) & \text{(II.6.a)} \\ \rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) & \text{(II.6.b)} \\ \rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) & \text{(II.6.c)} \end{cases}$$

II.2.3- Equation de conservation de l'énergie :

L'équation de conservation de l'énergie se déduit à partir du premier principe de la thermodynamique selon lequel la variation de l'énergie totale d'un système quelconque est égale à la différence entre la chaleur échangée avec le milieu extérieur et le travail fourni au système. Ce premier principe de la thermodynamique peut être exprimé par [11]:

$$dE_T = dQ - dW \quad \text{(II.7)}$$

avec :

- dE_T : variation d'énergie totale du système
- dQ : variation de la chaleur
- dW : variation du travail

Dans ce qui suit, on va essayer d'évaluer chacun des termes précédents pour aboutir à l'équation de conservation de l'énergie :

- Evaluation de dE_T :

$$dE_T = dE_i + dE_c + dE_p = d \left[\rho dx dy dz \cdot e + \rho dx dy dz \cdot \frac{1}{2} V^2 - \rho dx dy dz \cdot \vec{g} \cdot \vec{r} \right]$$

avec : dE_i : variation de l'énergie interne du système

dE_c : variation de l'énergie cinétique

dE_p : variation de l'énergie potentielle

Donc la variation de l'énergie totale du système s'écrit :

$$dE_T = \rho dx dy dz \cdot d \left[e + \frac{1}{2} V^2 - \vec{g} \cdot \vec{r} \right] \quad (II.8)$$

- Evaluation de dQ :

En considérant un volume de contrôle $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ (Figure II.c), la variation de la chaleur s'écrit :

$$dQ = [(q_x - q_{x+dx}) dy dz + (q_y - q_{y+dy}) dx dz + (q_z - q_{z+dz}) dx dy] dt$$

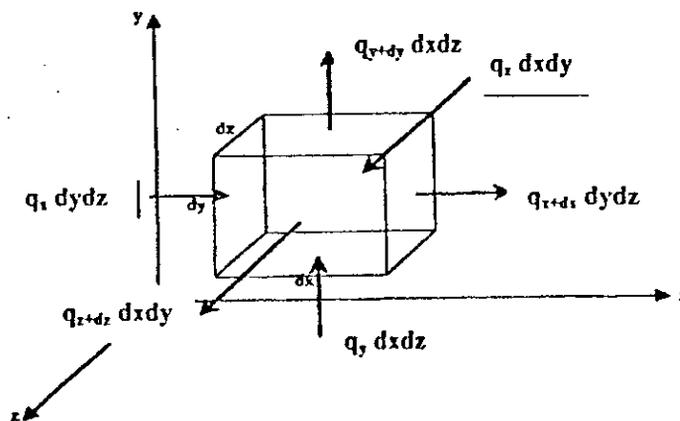


Figure II-c : Variation de la chaleur dans un élément fluide

Par développement, on obtient :

$$dQ = -\text{div} \vec{q} \cdot dx dy dz \cdot dt \quad (II.9)$$

Evaluation de dW :

La variation du travail est égale au produit des forces surfaciques par le déplacement, on écrit :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = d\vec{P} \cdot \vec{V} \cdot dt$$

Comme pour les équations de Navier-Stokes, considérons les forces surfaciques suivant chaque direction :

→ Suivant Ox :

$$\begin{cases} W_x = (\sigma_{xx}u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w)_x dydzdt \\ W_{x+dx} = (\sigma_{xx}u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w)_{x+dx} dydzdt \end{cases}$$

$$dW_x = - \left(\frac{\partial(\sigma_{xx}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy}v)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xz}w)}{\partial x} \right) dx dy dz dt$$

$$\begin{cases} W_y = (\tau_{xy}u + \sigma_{yy}v + \tau_{yz}w)_y dx dz dt \\ W_{y+dy} = (\tau_{xy}u + \sigma_{yy}v + \tau_{yz}w)_{y+dy} dx dz dt \end{cases}$$

$$dW_y = - \left(\frac{\partial(\tau_{xy}u)}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_{yy}v)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yz}w)}{\partial y} \right) dx dy dz dt$$

$$\begin{cases} W_z = (\tau_{xz}u + \tau_{yz}v + \sigma_{zz}w)_z dx dy dt \\ W_{z+dz} = (\tau_{xz}u + \tau_{yz}v + \sigma_{zz}w)_{z+dz} dx dy dt \end{cases}$$

$$dW_z = - \left(\frac{\partial(\tau_{xz}u)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{yz}v)}{\partial z} + \frac{\partial(\sigma_{zz}w)}{\partial z} \right) dx dy dz dt$$

La résultante est la somme des variations de travail suivant chaque direction, donc :

$$dW = dW_x + dW_y + dW_z = -\vec{\nabla}(\vec{V} \cdot \sigma_{ij}) dx dy dz dt \quad (II.10)$$

En injectant les équations (II.8), (II.9) et (II.10) dans l'équation (II.7), on obtient :

$$\rho dx dy dz \cdot d \left[e + \frac{1}{2} V^2 - \vec{g} \cdot \vec{r} \right] = -div \vec{q} \cdot dx dy dz dt + \vec{\nabla}(\vec{V} \cdot \sigma_{ij}) dx dy dz dt$$

La relation ci-dessus peut s'exprimer par :

$$\rho \frac{De}{Dt} + \rho V \frac{DV}{Dt} - \rho \bar{g} \cdot \bar{V} = -div \bar{q} + \bar{\nabla}(\bar{V} \cdot \sigma_{ij}) \quad (II.11)$$

Avec :

$$\begin{cases} \bar{\nabla}(\bar{V} \cdot \sigma_{ij}) = \bar{V}(\bar{\nabla} \sigma_{ij}) + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ \rho \frac{DV}{Dt} = \rho \bar{g} + \bar{\nabla} \sigma_{ij} \end{cases}$$

La relation (II.11) devient alors :

$$\begin{cases} \rho \frac{De}{Dt} = -div \bar{q} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -div \bar{q} - P div \bar{V} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ \bar{q} = -\lambda \bar{\nabla} T \\ \sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda div \bar{V} \end{cases}$$

on aura :

$$\rho \frac{De}{Dt} + P div \bar{V} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \mu \Phi \right) = div(\lambda \bar{\nabla} T) + \mu \Phi$$

Sous forme vectorielle :

$$\rho \frac{De}{Dt} + P div \bar{V} = div(\lambda \bar{\nabla} T) + \mu \Phi \quad (II.12)$$

avec :

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \frac{2}{3} (div \bar{V})^2$$

D'autre part, l'équation de continuité donne :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \bar{V}) = 0 \Rightarrow div \bar{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \Rightarrow P div \bar{V} = -\frac{P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

Donc :

$$\rho \frac{De}{Dt} - \frac{P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \text{div}(\lambda \vec{\nabla} T) + \mu \Phi$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{DP}{Dt} + \text{div}(\lambda \vec{\nabla} T) + \mu \Phi \quad \text{avec} \quad c + \frac{P}{\rho} = h$$

$$dh = C_p dT + \frac{1}{\rho} (1 - T\beta) dP \quad \text{avec} \quad \beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \text{ facteur de dilatation volumique}$$

L'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = T \cdot \beta \cdot \frac{DP}{Dt} + \vec{\nabla}(\lambda \vec{\nabla} T) + \mu \Phi$$

Dans le cas d'un fluide incompressible $\beta=0$, donc l'équation de conservation de l'énergie se simplifie en :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla}(\lambda \vec{\nabla} T) + \mu \Phi$$

II.2.4- Forme adimensionnelle des Equations :

Dans le paragraphe précédent, nous avons établi les équations de la mécanique des fluides ainsi que l'équation de conservation de l'énergie dans le cas général c'est à dire pour le cas d'un écoulement tridimensionnel. Maintenant nous allons considérer le cas qui nous intéresse c'est à dire le cas d'un écoulement bidimensionnel en régime permanent sur une plaque plane à incidence nulle.

On a vu que les équations de Navier-Stokes étaient compliquées, donc pour essayer de les résoudre, on procédera à certaines simplifications en utilisant les hypothèses suivantes :

→ Ecoulement bidimensionnel : $\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$

→ Fluide incompressible : $\rho = \text{cst}$

→ Régime permanent : $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$

En utilisant ces hypothèses, l'équation de continuité, les équations de Navier-Stokes et l'équation de l'énergie se réduisent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.13.a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{array} \right. \quad (\text{II.13.b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{array} \right. \quad (\text{II.13.c})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \Phi \end{array} \right. \quad (\text{II.13.d})$$

Il est intéressant maintenant d'introduire les paramètres qui caractérisent l'écoulement pour écrire les équations ci-dessus sous une forme adimensionnelle :

$$x^* = \frac{x}{L}; y^* = \frac{y}{L}; u^* = \frac{u}{U_\infty}; v^* = \frac{v}{U_\infty}; P^* = \frac{P}{\rho U_\infty^2}; \theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty}; \theta = T - T_\infty; \theta_0 = T_p - T_\infty$$

- Avec :
- L : longueur de la plaque
 - U_∞ : vitesse de l'écoulement (loin de la plaque)
 - T_p : température du fluide près de la plaque
 - T_∞ : température du fluide loin de la plaque

Les équations sous forme adimensionnelles s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.14.a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \end{array} \right. \quad (\text{II.14.b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \end{array} \right. \quad (\text{II.14.c})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(u^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right) = \frac{1}{Re \cdot Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^{*2}} \right) + \frac{Ec}{Re} \Phi^* \end{array} \right. \quad (\text{II.14.d})$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{ll} Re = \frac{\rho U_{\infty} L}{\mu} & \text{Nombre de Reynolds} \\ Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} & \text{Nombre de Prandtl} \\ Ec = \frac{U_{\infty}^2}{C_p \theta_0} & \text{Nombre d'Eckert} \end{array} \right.$$

II.3- Equations des couches limites :

Nous allons établir dans ce qui suit les équations de la couche limite dynamique, thermique et massique à partir des équations précédentes. La résolution des équations des couches limites trouve son importance dans la détermination du coefficient de frottement pour la couche limite dynamique, le coefficient de transfert de chaleur pour la couche limite thermique et le coefficient de transfert de masse pour la couche limite massique.

II.3.1- Couche limite dynamique :

Nous avons vu au chapitre (I) que l'épaisseur de la couche limite δ_d diminuait avec la viscosité du fluide ou bien lorsque le nombre de Reynolds augmente. D'autre part, δ_d est proportionnelle à la racine carrée de la viscosité cinématique. L'épaisseur de la couche limite est très petite devant la longueur L de la plaque ($\delta_d \ll L$) [12].

La figure (II-d) montre la formation de la couche limite sur une plaque plane où U_{∞} est la vitesse de l'écoulement loin de la paroi

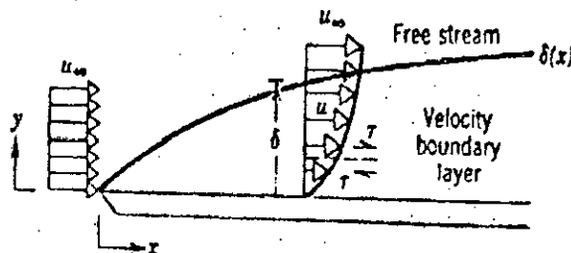


Figure II-d : Couche limite dynamique

Pour établir l'équation de la couche limite dynamique, utilisons les équations (II.14.a), (II.14.b) et (II.14.c) et essayons de déterminer les termes qui sont négligeables devant les autres.

Les trois équations adimensionnelles s'écrivent :

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \\ u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \\ u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \end{cases}$$

Le fait de considérer les équations adimensionnelles et en utilisant les méthodes d'approximation, on déduit que la dérivée adimensionnelle $\frac{\partial u^*}{\partial x^*}$ sera toujours inférieure à l'unité et à partir de l'équation de continuité, on peut dire de même de la dérivée $\frac{\partial v^*}{\partial y^*}$ [4].

D'autre part, dans la couche limite, v est d'ordre δ ainsi que $\frac{\partial v^*}{\partial x^*}$ et $\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}}$. Alors que $\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$ est d'ordre 1. Les termes $\frac{\partial u^*}{\partial y^*}$ et $\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$ sont d'ordre $\frac{1}{\delta}$ et $\frac{1}{\delta^2}$ respectivement car u augmente de zéro au niveau de la paroi jusqu'à l'unité à partir d'une épaisseur δ [4]. A partir de ces estimations, on peut négliger les termes d'ordre δ et d'écrire les équations précédentes sous forme simplifiée.

Le système (1) devient alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \\ u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \end{cases}$$

Ou bien :

$$(2) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & \text{(II.15.a)} \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \text{(II.15.b)} \end{cases}$$

Ce nouveau système s'appelle système d'équations de Prandtl.

Pour un écoulement sur une plaque plane et en considérant la condition de non-glissement entre le fluide et la plaque, les conditions aux limites donnent :

- Pour $y=0$; $u=v=0$
- Pour $y \rightarrow \infty$; $u=U_\infty(x)$

En considérant que la vitesse de l'écoulement U_∞ est fonction de x , l'équation (II.15.b) nous donne :

$$U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{(II.16)}$$

le système (2) devient alors :

$$(3) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

Pour pouvoir intégrer l'équation de la couche limite, il est plus judicieux d'introduire la fonction de courant $\psi(x, y)$ qui est définie par :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Le système (3) s'écrit alors :

$$(4) \begin{cases} \psi_{xy} - \psi_{yx} = 0 \\ \psi_y \cdot \psi_{xy} - \psi_x \cdot \psi_{y^2} = U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + \nu \psi_{y^3} \end{cases}$$

avec :

$$\psi_y = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \psi_{xy} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} ; \psi_{y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} ; \psi_{y^3} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} ; \psi_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x} ; \psi_{xy} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}$$

En considérant les conditions aux limites précédentes, on aura :

- $y=0 ; \psi_x = \psi_y = 0$
- $y \rightarrow \infty ; \psi_y = U_\infty(x)$

Dans le cas où le gradient de pression est nul, l'équation (II.16) nous donne :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \Rightarrow U_\infty(x) = U_\infty = \text{constante}$$

Le système (4) devient alors :

$$(5) \begin{cases} \psi_{xy} - \psi_{yx} = 0 \\ \psi_y \cdot \psi_{xy} - \psi_x \cdot \psi_{y^2} = \nu \psi_{y^3} \end{cases} \quad (II.17)$$

Pour simplifier notre étude, nous nous intéresserons au cas d'un écoulement sans gradient de pression. Afin de résoudre les équations du système (5), essayons de transformer les équations aux dérivées partielles en équations ordinaires. Pour cela, on doit introduire d'autres fonctions adimensionnelles.

On pose [12]:

$$\psi = g_1(x) \cdot f(\eta)$$

La méthode de similarité nous permet de trouver que :

$$\psi(x, y) = f(\eta) \sqrt{U_\infty \nu x} \quad \text{avec : } \eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$$

En utilisant la dernière formule de la fonction de courant, on peut calculer tous les termes du système (5). Après calcul et simplification, l'équation (II.17) donne une équation différentielle normale de la forme :

$$\boxed{2f''' + ff'' = 0} \quad \text{Equation de Blasius} \quad \text{(II.18)}$$

Les conditions aux limites s'écriront en fonction de η de la manière suivante :

- $\eta=0$; $f'(0) = f(0) = 0$
- $\eta \rightarrow \infty$; $f'(\eta) = 1$

L'équation (II.18) est l'équation de la couche limite dynamique qu'on va essayer de résoudre au chapitre (III) en utilisant la méthode de Runge-Kutta.

Le but de la résolution de l'équation (II.18) est de déterminer le coefficient de frottement, qui est donné par :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \quad \text{(II.19.a)}$$

Avec : $\tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$ représente la contrainte à la paroi

En remplaçant $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$ par sa relation en fonction de $f(\eta)$, on trouve :

$$\tau_p = \mu U_\infty \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{1/2} f''(0)$$

Et en injectant cette formule dans l'équation (II.19.a), on aboutit à :

$$C_{f,x} = 2 \cdot f''(0) Re_x^{-1/2} \quad \text{(II.19.b)}$$

A partir de cette dernière formule, on voit que le coefficient de frottement local est fonction du nombre de Reynolds local et qu'il est obtenu en intégrant l'équation de la couche limite dynamique.

II.3.2- Couche limite thermique :

La couche limite thermique apparaît dans un écoulement si et seulement si la température entre l'écoulement et le corps solide diffère, la résolution de l'équation de la couche limite nous permet de déterminer le coefficient d'échange convectif.

La figure (II-e) montre la distribution des températures dans le cas d'un écoulement sur une plaque plane.

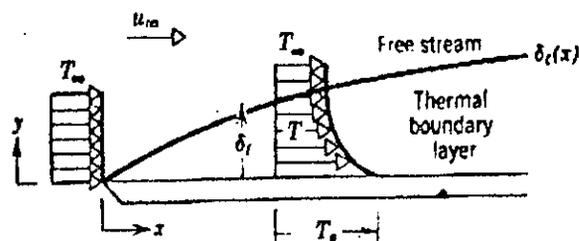


Figure II-e : Couche limite thermique

La couche limite thermique se développe de la même manière que la couche limite dynamique c'est à dire que la différence de température engendre un gradient de température dans une zone seulement et cette zone est définie comme étant la couche limite thermique.

On note par δ_T l'épaisseur de la couche limite thermique qui est très petite devant la longueur de la plaque L ($\delta_T \ll L$) [12].

Pour la détermination de l'équation de la couche limite thermique, considérons l'équation (II.14.d) de la conservation de l'énergie :

$$\left(u^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right) = \frac{1}{Re \cdot Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^{*2}} \right) + \frac{Ec}{Re} \Phi^*$$

En faisant certaine simplification, on obtient l'équation suivante :

$$\left(u^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right) = \frac{1}{Re \cdot Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^{*2}} \right) + \frac{Ec}{Re} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)$$

Ou bien :

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (\text{II.20})$$

En considérant que la paroi est à température constante T_p et que la température du fluide loin de la paroi est T_∞ , alors les conditions aux limites s'écrivent :

- $y=0$; $u = v = 0$ et $T = T_p$
- $y \rightarrow \infty$; $u = U_\infty$ et $T = T_\infty$

Comme pour le cas de la couche limite dynamique, on introduit la fonction de courant dans l'équation (II.19) et on obtient :

$$\psi_y \cdot \theta_x - \psi_x \cdot \theta_y = a \theta_y$$

Les conditions aux limites deviennent alors :

- $y=0$; $\psi_x = \psi_y = 0$ et $\theta = \theta_0 = T_p - T_\infty = \text{constante}$
- $y \rightarrow \infty$; $\psi_y = U_\infty$ et $\theta = 0$

On pose [11] :

$$G(\eta) = \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} \text{ et } \psi = f(\eta) \sqrt{U_\infty \nu x} \text{ avec } \eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$$

En utilisant la méthode de similarité, on obtient l'équation de la couche limite thermique suivante :

$$\boxed{G'' + \frac{Pr}{2} f G' = 0} \quad (\text{II.21})$$

Et les conditions aux limites sont :

- $\eta=0 ; G(0)=0$
- $\eta \rightarrow \infty ; G(\eta)=1$

On définit le nombre de Nusselt par :

$$Nu_x = \frac{h_c x}{\lambda} = - \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \cdot \frac{x}{T_p - T_\infty}$$

$$Nu_x = -Re_x^{1/2} \cdot G'(0)$$

De cette dernière équation, on voit que le nombre de Nusselt local est fonction du nombre de Reynolds local et du nombre de Prandtl et en résolvant l'équation de la couche limite thermique, on peut déterminer le coefficient d'échange convectif moyennant le nombre de Nusselt.

II.3.3- Couche limite massique :

Comme pour la couche limite thermique, si la concentration entre le fluide et la paroi ne diffère pas, la couche limite massique n'apparaît pas. La différence entre les concentrations engendre un gradient de concentration dans une zone seulement qui est la couche limite massique d'épaisseur δ_m . La couche limite massique nous permet de déterminer le coefficient de transfert de masse.

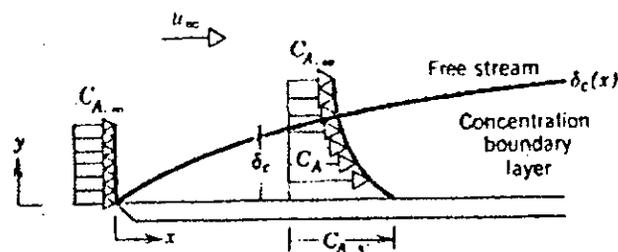


Figure II-f : Couche limite massique

La figure (II-f) montre la couche limite massique où C_∞ représente la concentration du fluide loin de la paroi et C_s la concentration près de la paroi. Pour établir l'équation de la couche limite massique, considérons un volume de contrôle $dx.dy.1$ (Figure II-g).

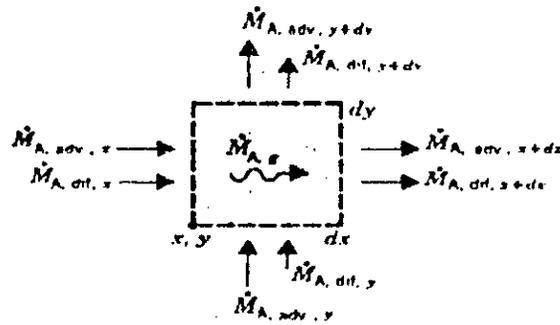


Figure II-g: Echange massique autour d'un volume de contrôle

L'échange massique se fait par advection (transport de masse par écoulement) et par diffusion dans chaque direction.

Le bilan massique nous donne [12]:

$$(\dot{M}_{adv,x} - \dot{M}_{adv,x+dx}) + (\dot{M}_{adv,y} - \dot{M}_{adv,y+dy}) + (\dot{M}_{dif,x} - \dot{M}_{dif,x+dx}) + (\dot{M}_{dif,y} - \dot{M}_{dif,y+dy}) + \dot{M}_g = 0$$

Les termes du bilan dus à l'échange par advection sont donnés par [11]:

$$\dot{M}_{adv,x} - \dot{M}_{adv,x+dx} = (\rho u) dy - \left[(\rho u) + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right] dy = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy$$

$$\dot{M}_{adv,y} - \dot{M}_{adv,y+dy} = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy$$

En ce qui concerne l'échange massique par diffusion, on sait que la loi de Fick qui exprime la relation du flux molaire associé au transfert par diffusion nous donne [12]:

$$N^* = -D \frac{\partial C}{\partial y} \text{ ou } D \text{ est le coefficient de diffusion binaire.}$$

Le flux massique du à la diffusion s'écrit alors [12]:

$$n^* = -D \frac{\partial \rho}{\partial y}$$

Les termes du bilan dus à l'échange par diffusion sont donnés par [12]:

$$\dot{M}_{df,x} - \dot{M}_{df,x+\Delta x} = \left(-D \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) dy - \left[\left(-D \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-D \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) dx \right] dy = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) dx dy$$

$$\dot{M}_{df,y} - \dot{M}_{df,y+\Delta y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) dx dy$$

En remplaçant ces formules dans le bilan massique, on trouve :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \dot{m} \quad (\text{II.22})$$

On suppose que le système ne-génère pas de masse (pas de réaction chimique), l'équation (II.22) se réduit à :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \quad (\text{II.23})$$

En termes de concentration, l'équation (II.23) s'écrit :

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} \right) \quad (\text{II.24})$$

Les conditions aux limites pour la couche limite massique sont les suivantes :

- $y=0$; $u=v=0$ et $C=C_s$
- $y \rightarrow \infty$; $u=U_\infty$ et $C=C_\infty$

On introduit la grandeur adimensionnelle suivante [12] :

$$C^* = \frac{C - C_s}{C_\infty - C_s}$$

L'équation (II.24) devient sous une forme adimensionnelle :

$$u^* \frac{\partial C^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial C^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re.Sc} \left(\frac{\partial^2 C^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad \text{avec} \quad Sc = \frac{\nu}{D} : \text{nombre de Schmidt}$$

On pose :

$$H(\eta) = \frac{C_s - C_\infty}{C_s - C_\infty}$$

En utilisant la méthode de similarité et avec les mêmes paramètres que pour la couche limite thermique, on aboutit à l'équation de la couche limite massique suivante :

$$\boxed{H'' + \frac{Sc}{2} f H' = 0} \quad (11.25)$$

Et les conditions aux limites associées à cette équation sont :

- $\eta=0$; $H(0)=0$
- $\eta \rightarrow \infty$; $H(\eta)=1$

Le coefficient de transfert de masse h_m est donné moyennant le nombre de Sherwood qui est exprimé par la relation suivante :

$$Sh_x = \frac{h_m \cdot x}{D} = \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_{y=0} \cdot \frac{x}{C_s - C_\infty}$$

$$Sh_x = -Re_x^{1/2} \cdot H'(0)$$

De cette équation, on voit que le nombre de Sherwood local est fonction du nombre de Reynolds local et du nombre de Schmidt et le coefficient de transfert de masse est déduit par intégration de l'équation de la couche limite massique.

II.4- Séparation de la couche limite:

Après avoir établi les équations de la couche limite, il est intéressant d'étudier la séparation, en d'autres termes, connaître le moment de l'apparition du point de séparation.

On a vu au chapitre précédent que l'apparition du point de séparation dépend en grande partie du gradient de pression et que ce point est défini par la condition [4]:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

En général, pour connaître l'endroit de la formation du point de séparation, on doit résoudre les équations de la couche limite dynamique pour les exemples simples car ils sont seulement valables loin du point de séparation. En aval du point de séparation, les suppositions faites pour l'intégration des équations de la couche limite ne sont plus appliquées du fait que celle-ci devient épaisse.

Pour le cas des écoulements compliqués, la détermination du point de séparation se fait expérimentalement (comme on l'a vu au chapitre (I), paragraphe (I.3.4) car l'écoulement externe dépend du phénomène de séparation.

L'apparition de la séparation est plus probable dans le cas d'un écoulement retardé ($\frac{dp}{dx} > 0$).

A partir des équations de la couche limite, on peut établir une relation entre le gradient de pression et la distribution des vitesses $u(y)$ qui en considérant la condition à la limite pour $y=0$ ($u=v=0$) s'écrit :

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{dp}{dx} \quad (II.26)$$

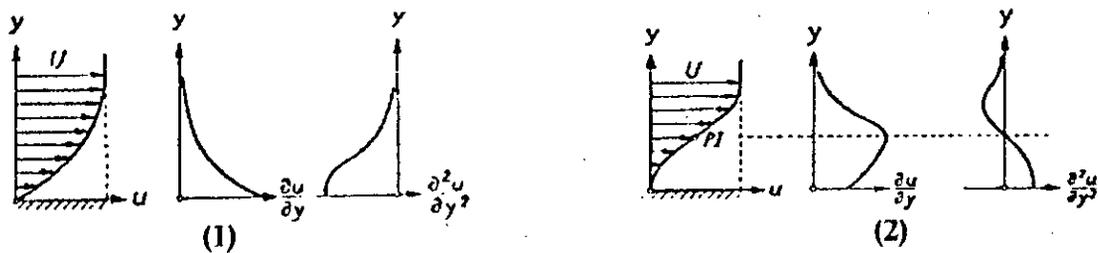


Figure II-h : Profil des vitesses pour un écoulement accéléré (1), et retardé (2)

Dans le cas d'un écoulement accéléré ($\frac{dp}{dx} < 0$), nous avons de l'équation (II.26)

$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} < 0$ (Figure II-h(1)) [4] et pour un écoulement retardé ($\frac{dp}{dx} > 0$), nous avons

$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} > 0$; or loin de la paroi nous avons toujours $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$, donc il existe un point où

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Ce point est le point d'inflexion du profil des vitesses (Figure II-h(2)) [4].

On peut dire que le point d'inflexion se forme pour un écoulement retardé seulement et c'est ce point qui engendre le point de séparation.

II.5- Etude de l'aspiration :

Rappelons que dans le chapitre (I) (paragraphe I.4.3), on a mis en évidence l'importance de l'aspiration dans l'apparition du point de séparation. Dans ce qui suit voyons quelques équations qui régissent cette méthode.

On va considérer le cas d'une aspiration uniforme le long d'une plaque plane (Figure I.m), dans ce cas la vitesse v au niveau de la plaque ne sera plus nulle mais positive (refoulement) ou négative (aspiration). Il est clair que la quantité de fluide aspirée à l'intérieur de la plaque est tellement petite que seules les particules en contact immédiat de la paroi sont touchées par ce phénomène. La première conséquence qui découle de ce fait est que la vitesse d'aspiration v_0 est très petite devant U_∞ ($\frac{v_0}{U_\infty} = 10^{-4} \div 10^{-2}$) [5].

La quantité de fluide à aspirer Q_v peut être exprimée en fonction d'un coefficient de volume c_Q tel que [5] :

$$Q_v = c_Q \cdot A U_\infty \quad \text{avec :} \quad A = b l : \text{ surface de la plaque}$$

$$\text{Pour une plaque plane :} \quad Q_v = b \int_0^l [-v_0(x)] dx$$

Donc :

$$c_Q = \frac{1}{l U_\infty} \int_0^l [-v_0(x)] dx$$

Pour une vitesse d'aspiration constante, on a :

$$c_Q = -\frac{v_0}{U_\infty}$$

Les équations de la couche limite restent les mêmes pour le cas de l'aspiration mais les conditions aux limites deviennent :

- $y=0$; $u=0$ et $v=v_0$
- $y \rightarrow \infty$; $u=U_\infty$

En considérant la condition à la limite pour $y=0$, l'équation (II.15.b) du système (2) nous donne :

$$v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + v_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

En comparant cette équation avec l'équation (II.26), on voit que pour le cas d'un écoulement retardé ($\frac{dp}{dx} > 0$) l'aspiration a pour effet de réduire la courbure du profil des vitesses et donc de retarder l'apparition du point de séparation (§ II.4).

Pour un écoulement avec une aspiration, une solution simple peut être obtenue dans le cas d'une plaque plane. Le système d'équation (3) s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

En considérant qu'au niveau de la paroi, la vitesse v est égale à la vitesse d'aspiration qui est constante. Donc à partir de l'équation de continuité on voit que la vitesse u est indépendante de x ($\frac{\partial u}{\partial x} = 0$).

La deuxième équation du système aura pour solution la relation suivante [4]

$$u(y) = U_\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{v_0 y}{\nu}\right) \right] \quad (\text{II.27})$$

$$\text{Avec : } \delta_1 = \frac{\nu}{-v_0} \quad (\text{II.28.a})$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2} \frac{\nu}{-v_0} \quad (\text{II.28.b})$$

Mais il est clair que cette solution est une solution exacte des équations complètes de Navier et Stokes. La distribution des vitesses est représentée sur la figure (II.i) [5].

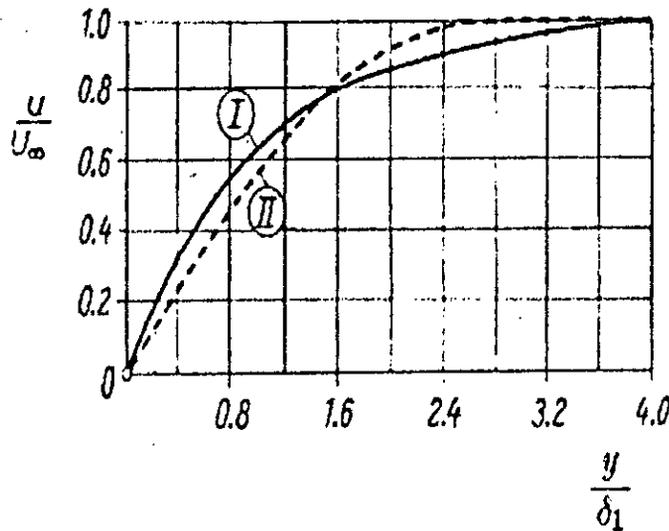


Figure II-i : Profil des vitesses pour un écoulement sans aspiration (I), avec aspiration (II)

La courbe (I) représente le profil de Blasius (sans aspiration) et la courbe (II) le profil asymptotique de l'aspiration (aspiration uniforme). On voit que l'épaisseur de la couche limite augmente de zéro au niveau du bord d'attaque et tend asymptotiquement vers la valeur donnée par l'équation (II.28.a) et que le profil de vitesse atteint le profil donné par l'équation (II.27) qu'après une certaine distance du bord d'attaque.

Un autre point particulièrement intéressant consiste à connaître l'influence de l'aspiration sur le coefficient de frottement.

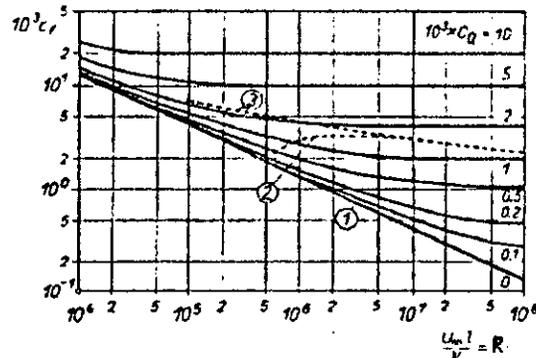


Figure II-j : Variation du coefficient de frottement en fonction de Re

A partir de la figure (II-j) [4], nous voyons que pour des nombres de Reynolds élevés, le profil de vitesse est asymptotique et le coefficient de frottement local est donné par l'équation (II.27)

$$C_{f,\infty} = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = 2c_Q$$

Ce coefficient théorique est obtenu dans le cas d'un écoulement sans viscosité (fluide parfait) de vitesse U_∞ avec aspiration d'une quantité Q du fluide.

Le coefficient de frottement pour la couche limite turbulente est représenté sur la figure précédente (courbe 3).

On remarque que pour des nombres de Reynolds élevés, le coefficient de frottement turbulent est plus important que celui de l'écoulement laminaire. La courbe (2) montre la variation de celui-ci lorsque la transition a lieu (transition de l'écoulement laminaire vers l'écoulement turbulent) d'où l'importance d'essayer de garder toujours l'écoulement laminaire en appliquant une aspiration.

D'autre part, on remarque que le volume de fluide aspiré influe sensiblement sur le coefficient de frottement du moment que celui-ci augmente lorsque c_Q est de plus en plus important. Donc nous pouvons peut dire que l'aspiration nous permet de préserver l'écoulement laminaire et donc de minimiser les pertes d'énergie par rapport au turbulent mais tout en aspirant une quantité de fluide nécessaire pour cela, sans plus.

En résumé, on dira que l'étude de la couche limite dynamique, thermique et massique passe par la résolution des équations suivantes avec les conditions aux limites correspondantes :

- Couche limite dynamique :

$$2f'' + ff'' = 0$$

- $\eta=0$; $f'(0) = f(0) = 0$
- $\eta \rightarrow \infty$; $f'(\eta) = 1$

Le coefficient de frottement est donné moyennant le nombre de Reynolds :

$$C_{f,x} = 2f''(0)Re_x^{-1/2} \text{ avec : } Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu}$$

- Couche limite thermique :

$$G'' + \frac{Pr}{2} fG' = 0$$

- $\eta=0$; $G(0) = 0$
- $\eta \rightarrow \infty$; $G(\eta) = 1$

Le coefficient d'échange convectif est donné moyennant le nombre de Nusselt :

$$Nu_x = -Re_x^{1/2} \cdot G'(0)$$

- Couche limite massique :

$$H'' + \frac{Sc}{2} fH' = 0$$

- $\eta=0$; $H(0) = 0$
- $\eta \rightarrow \infty$; $H(\eta) = 1$

Le coefficient de transfert de masse est donné moyennant le nombre de Sherwood :

$$Sh_x = -Re_x^{1/2} \cdot H'(0)$$

II.6- Equations des couches limites en régime transitoire :

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré les équations de la mécanique des fluides en régime permanent seulement. Or en réalité, avant que le régime d'écoulement soit établi, ses propriétés varient en espace et en temps, il varie avec le temps en plus des grandeurs physiques x et y .

Dans ce chapitre, nous allons considérer le régime transitoire, c'est à dire que les dérivées par rapport au temps des grandeurs u , v , T et C ne seront plus négligées. Les équations de conservation : de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie s'écriront alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.29.a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{array} \right. \quad (\text{II.29.b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{array} \right. \quad (\text{II.29.c})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \Phi \end{array} \right. \quad (\text{II.29.d})$$

En considérant que le fluide est incompressible ($\rho = \text{cst}$), on aura $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. En introduisant les simplifications nécessaires (déjà expliquées précédemment), nous allons aboutir aux équations des couches limites dynamique, thermique et massique en régime transitoire.

- Couche limite dynamique :

Les équations de la couche limite dynamique sont déduites à partir des équations (II.29.a) et (II.29.b) et elles s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.30.a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (\text{II.30.b})$$

En considérant que la vitesse de l'écoulement U_∞ est fonction de x et de t , l'équation (II.30.b) nous donne :

$$\frac{\partial U_\infty}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{II.31})$$

Mais le cas qui nous intéresse est celui où la vitesse U_∞ est constante, c'est à dire que le gradient de pression est nul, nous aurons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.32.a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (\text{II.32.b})$$

Sous une forme adimensionnelle, les équations précédentes s'écrivent sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.32.c})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \end{array} \right. \quad (\text{II.32.d})$$

Les conditions aux limites correspondantes s'écrivent alors :

- Pour $y=0$; $u^*(x,t) = 0$; $v^*(x,t) = V_0$ (condition d'adhérence)
- Pour $y \rightarrow \infty$; $u^*(x,t) = 1$

Les conditions aux initiales s'écrivent :

- $t^* \leq 0$; $u^*(x,y) = 0$

- **Couche limite thermique :**

L'équation de la couche limite thermique se déduit à partir de l'équation (II.29.d), qui s'écrit :

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.33.a})$$

Sous une forme adimensionnelle, l'équation précédente s'écrit :

$$\left(\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right) = \frac{1}{Re \cdot Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (\text{II.33.b})$$

Les conditions aux limites correspondantes s'écrivent alors :

- $y=0$; $\theta^*(x,t) = 0$ (paroi isotherme)
- $y \rightarrow \infty$; $\theta^*(x,t) = 1$

Les conditions initiales s'écrivent :

- $t^* \leq 0$; $\theta^*(x,y) = 0$

- Couche limite massique :

L'équation de la couche limite massique s'écrit :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} \right) \quad (\text{II.34.a})$$

Sous une forme adimensionnelle cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial C^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial C^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial C^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re \cdot Sc} \left(\frac{\partial^2 C^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (\text{II.34.b})$$

Les conditions aux limites s'écrivent alors :

- $y=0$; $C^*(x,t) = 0$
- $y \rightarrow \infty$; $C^*(x,t) = 1$

Les conditions initiales s'écrivent :

- $t^* \leq 0$; $C^*(x,y) = 0$

Au chapitre (III) nous allons exposer les méthodes de résolution des équations des couches limites dynamique, thermique et massique en régime transitoire.

II.7- Raccordement des équations de couche limite avec les équations de transfert en milieu poreux :

L'étude des phénomènes de transfert en milieu poreux se fait en utilisant les équations de conservation de la masse, de l'énergie et de la quantité de mouvement.

La modélisation des phénomènes de transfert au moyen des équations de transport macroscopiques, c'est à dire en assimilant le milieu poreux à un milieu continu a été étudié par plusieurs auteurs [13],[14],[15]. Néanmoins, rien ne permet d'affirmer que les équations macroscopiques et les relations empiriques sur les coefficients d'échanges (transfert de masse et d'énergie) sont valables à l'interface écoulement externe, paroi poreuse [16]. D'après PRAT [17], il est possible de considérer que les équations macroscopiques sont valables au niveau de l'interface si ce dernier est considéré tel que son épaisseur est très faible par rapport aux autres dimensions.

Les bilans de masse et d'énergie entre un écoulement externe et une paroi poreuse donnent respectivement les relations suivantes :

- Bilan d'énergie :

$$j_q = h_c(T_s - T_\infty) + L.h_m(C_s - C_\infty) \quad (II.35)$$

Avec :

J_q : Densité de flux de chaleur dans le milieu poreux

h_c : Coefficient de transfert de chaleur

h_m : Coefficient de transfert de masse

T_s : Température de l'écoulement à l'interface

L : chaleur latente de vaporisation

- Conservation de la masse :

$$J_m + e = 0 \quad (\text{II.36})$$

Avec :

$$e = h_m (C_s - C_\infty)$$

Où :

J_m : Densité de flux massique dans le milieu poreux,

e : densité de flux massique de l'écoulement externe au niveau de l'interface.

C_s : concentration de la vapeur d'eau à l'interface,

C_∞ : concentration de la vapeur d'eau dans l'écoulement externe.

La détermination de J_q et J_m passe par une étude détaillée de l'écoulement à travers le milieu poreux, donc une résolution des équations de transfert dans le milieu poreux.

Il est évident qu'une étude approfondie permettant de déterminer les propriétés d'écoulement à l'interface c'est à dire h_m et h_c passe par la connaissance de J_m et J_q , c'est à dire la résolution des équations de transfert à travers le milieu poreux.

Notre contribution consiste simplement dans la résolution des équations des couches limites dynamique, thermique et massique régissant l'écoulement externe dans le cas permanent et transitoire.

Chapitre III :

Résolution numérique des équations des couches limites

III.1- Introduction

III.2- Régime permanent

III.2.1- Position du problème

III.2.1.1- Méthode du tir

III.2.1.2- Couche limite dynamique

III.2.1.3- Couche limite thermique

III.2.1.4- Couche limite massique

III.2.2- Méthode de Runge-Kutta

III.3- Régime transitoire

III.3.1- Classification des EDP

III.3.1.1- Classification physique

a/ Problème d'équilibre

b/ Problème de propagation

III.3.1.2- Classification mathématique

III.3.2- Le problème numérique

III.3.3- Les conditions aux limites

III.3.4- Discretisation

III.3.4.1- Méthode des différences finis

III.3.4.2- Consistance

III.3.4.3- Stabilité

III.3.5- Résolution d'une équation hyperbolique et parabolique à deux dimensions

III.3.5.1- Schéma explicite pour l'équation advection-diffusion

III.3.5.2- Méthode ADI

a/ Stabilité

b/ Conditions aux limites

III.1- Introduction :

Dans le chapitre précédent, nous avons établi les équations des couches limites dynamique, thermique et massique. En utilisant la méthode de similarité, nous avons transformé ces équations qui étaient des équations aux dérivées partielles en équations différentielles ordinaires.

Dans ce chapitre, nous tenterons de résoudre ces équations en introduisant d'autres fonctions afin d'utiliser la méthode de Runge-Kutta [18] (pour le régime permanent), Ensuite nous considérerons le cas du régime transitoire (c'est à dire que les dérivées par rapport au temps ne sont plus négligées) et nous choisirons la méthode adéquate pour résoudre ce problème (méthode explicite ou bien méthode implicite), nous donnerons ensuite les résultats obtenus dans le chapitre suivant.

III.2- Régime permanent :

En premier lieu, nous considérerons le cas du régime permanent . Les équations des couches limites respectivement dynamique, thermique et massique obtenues avec les conditions correspondantes sont :

$$2f'' + ff'' = 0 \quad (III.1)$$

$$- \eta=0 ; f'(0) = f(0) = 0$$

$$- \eta \rightarrow \infty ; f'(\eta) = 1$$

$$G'' + \frac{Pr}{2} fG' = 0 \quad (III.2)$$

$$- \eta=0 ; G(0) = 0$$

$$- \eta \rightarrow \infty ; G(\eta) = 1$$

$$H'' + \frac{Sc}{2} fH' = 0 \quad (III.3)$$

$$- \eta=0 ; H(0) = 0$$

$$- \eta \rightarrow \infty ; H(\eta) = 1$$

III.2.1- Position du problème :

Les problèmes de résolution des équations différentielles ordinaires peuvent toujours être réduits à l'étude d'un système d'équations différentielles de premier ordre. A titre d'exemple l'équation différentielle du second ordre [19]:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x) \frac{dy}{dx} = r(x)$$

peut être réécrite en deux équations de premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z(x) \\ \frac{dz}{dx} = r(x) \end{cases} \quad \text{ou } z \text{ est une nouvelle variable de } x$$

Le choix des nouvelles variables est tel qu'elles sont des dérivées les une des autres et de la variable originale. Occasionnellement, il est usuel d'introduire dans leurs définitions d'autres facteurs ou bien des puissances de la variable indépendante dans le but d'éviter un comportement singulier qui pourrait engendrer des dépassements de capacité ou une augmentation des arrondis des erreurs [19].

La résolution des équations différentielles ordinaires est donc réduite à l'étude d'un système à N équations dépendantes du premier ordre des fonctions y_i ($i = 1, 2, \dots, N$), ils ont la forme suivante :

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_N) \quad \text{ou les fonctions } f_i \text{ du second membre sont connues.}$$

D'autre part, un problème invoquant une équation différentielle ordinaire n'est pas complètement spécifié par ses équations. Il est d'autant plus crucial de savoir comment résoudre le problème numériquement que la nature des conditions aux limites du problème.

III.2.1.1- Méthode du tir :

La résolution d'un problème d'équations différentielles ordinaires par les méthodes numériques nécessite la connaissance des conditions initiales. Or dans quelques problèmes, les conditions données sont des conditions aux limites plutôt que les conditions initiales.

Considérons, par exemple, l'équation différentielle du second ordre donnée sous la forme suivante :

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \quad \text{(III.4)}$$

Avec les conditions $y(a)=\alpha$ et $y(b)=\beta$, la résolution numérique de ce problème est généralement beaucoup plus compliquée que la résolution du problème de la valeur initiale correspondante.

La méthode du tir [8] réduit la résolution d'un problème aux valeurs aux limites à un problème itératif aux valeurs initiales. Le point initial est choisi tel qu'il a les conditions aux limites les plus connues et toute autre condition initiale non connue sera supposée, le problème aux conditions initiales est résolu en utilisant une méthode de pas à pas.

A moins que la solution calculée concorde avec les conditions aux limites (improbable sur le premier essai), les conditions initiales sont modifiées lors du deuxième essai et ainsi de suite jusqu'à atteindre une solution qui concorde avec les conditions aux limites [8].

Dans la figure (III-a), la valeur initiale manquante $\frac{dy(a)}{dx}$ est supposée égale à c_1 (par exemple) et l'intégration de a vers b est déterminée en utilisant des procédures standards pour les problèmes aux valeurs initiales.

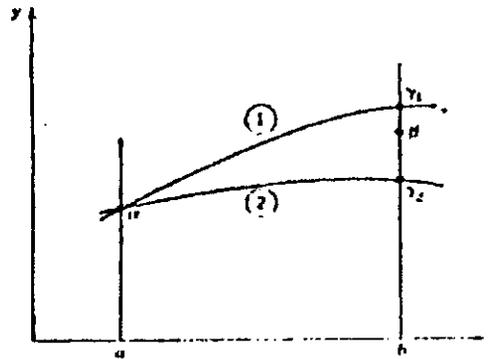


Figure III-a : Méthode du tir

Soit γ_1 la solution pour $x=b$, la procédure est répétée en utilisant d'autres valeurs de la condition initiale, par exemple, $\frac{dy(a)}{dx} = c_2$ (soit γ_2 la solution pour $x=b$). Si la valeur désirée $y(b)=\beta$ se trouve entre les deux limites γ_1 et γ_2 et si l'équation (II.4) se comporte bien alors une nouvelle valeur pour la condition initiale c_3 peut être calculée par l'interpolation linéaire suivante :

$$c_3 = c_1 + \frac{(c_2 - c_1)(\gamma_1 - \beta)}{(\gamma_1 - \gamma_2)}$$

Cette procédure d'interpolation est précise lorsqu'elle est appliquée aux équations linéaires mais pour des équations non linéaires, les résultats obtenus par cette interpolation sont peu satisfaisants [3].

III.2.1.2- Couche limite dynamique :

L'équation de la couche limite dynamique (III.1) est une équation différentielle ordinaire de troisième ordre. Donc en introduisant d'autres fonctions, on peut obtenir un système de trois équations différentielles de premier ordre.

On pose :

$$g_1 = f, \quad g_2 = f', \quad g_3 = f''$$

Où g_1, g_2 et g_3 sont de nouvelles fonctions de la variable η , le système obtenu est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{dg_1}{d\eta} = g_2 \\ \frac{dg_2}{d\eta} = g_3 \\ \frac{dg_3}{d\eta} = -\frac{1}{2}g_1g_3 \end{cases}$$

Les conditions aux limites deviennent alors :

- $\eta=0 : g_1 = g_3 = 0$
- $\eta \rightarrow \infty : g_2 = 1$

III.2.1.3- Couche limite thermique :

L'équation de la couche limite thermique (III.2) est une équation différentielle ordinaire du second ordre. On peut obtenir un système de deux équations différentielles du premier ordre en introduisant les fonctions g_4 et g_5 de la variable η , tel que :

$$g_4 = G, \quad g_5 = G'$$

Le système équivalent est :

$$\begin{cases} \frac{dg_4}{d\eta} = g_5 \\ \frac{dg_5}{d\eta} = -\frac{\text{Pr}}{2}g_1g_5 \end{cases}$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

- $\eta=0 : g_4 = 0$
- $\eta \rightarrow \infty : g_4 = 1$

III.2.1.4- Couche limite massique :

Comme pour le cas précédent, l'équation de la couche limite massique (III.3) peut être transformé en un système de deux équations différentielles de premier ordre en introduisant les fonctions suivantes :

$$g_6 = H \quad , \quad g_7 = H'$$

Le système équivalent s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{dg_6}{d\eta} = g_7 \\ \frac{dg_7}{d\eta} = -\frac{Sc}{2} g_1 g_7 \end{cases}$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

- $\eta=0 : g_6 = 0$
- $\eta \rightarrow \infty : g_6 = 1$

On remarque que pour les trois équations, les conditions aux limites correspondantes sont données pour $\eta=0$ et pour $\eta \rightarrow \infty$ et elles ne concernent que g_1 , g_2 , g_4 et g_6 . Mais pour g_3 , g_5 et g_7 il n'existe aucune valeur au limite.

Pour l'équation de la couche limite dynamique, cherchons une valeur de g_3 pour $\eta=0$ qui nous donnera lors de la résolution la valeur $g_2=1$ pour $\eta \rightarrow \infty$. Pour atteindre ce but utilisons la méthode dite méthode du tir (voir § III.2.1.1).

On utilisera la même méthode pour la résolution de l'équation de la couche limite thermique et massique (c'est à dire pour g_5 et g_7).

Considérons la résolution de l'équation de la couche limite dynamique, la condition sur g_3 peut être obtenue en commençant par deux limites g_{3L} et g_{3R} entre lesquelles la condition initiale g_{30} existe. A chaque itération, on pose $g_{30} = (g_{3L} + g_{3R})/2$ où les limites g_{3L} et g_{3R} du premier intervalle (première itération) sont choisies d'après la méthode du demi-intervalle.

Ensuite le critère de choix de l'intervalle est lié avec la valeur calculée de g_2 pour η_{\max} . c'est à dire que si $g_2(\eta_{\max}) > 1$ pour la première itération alors on pose $g_{3R} = g_{30}$ et g_{3L} reste inchangée pour l'itération suivante, ou bien si $g_2(\eta_{\max}) \leq 1$ alors on pose $g_{3L} = g_{30}$ et g_{3R} reste inchangée.

La même démarche est suivie pour déterminer les conditions aux limites manquantes pour le cas de la couche limite thermique et massique (c'est à dire pour g_5 et g_7).

III.2.2- Méthode de Runge-Kutta :

La formule de la méthode d'Euler est donnée par :

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (III.5)$$

Cette formule donne une résolution de x_1 à $x_{n+1} \equiv x_n + h$, la formule est unisymétrique : la solution est donnée à travers un intervalle h , en connaissant la dérivée seulement au début de l'intervalle, l'erreur sur un pas est de l'ordre $h^{(1)}$ (figure III-b)

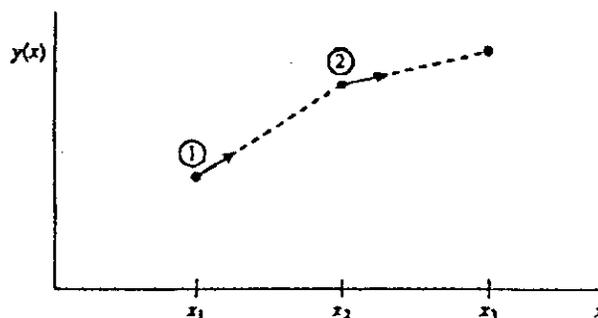


Figure III-b : Méthode d'Euler

Mais cette méthode n'est pas toujours recommandée pour différentes raisons. D'une part elle n'est pas très précise par rapport aux autres méthodes et d'autre part car elle n'est pas stable.

On pourrait utiliser l'équation (III.5) pour une étape dite d'essai au niveau du milieu de l'intervalle. Ensuite on utilise les valeurs de x et y pour calculer la valeur réelle le long de tout l'intervalle, la figure (III-c) illustre cela.

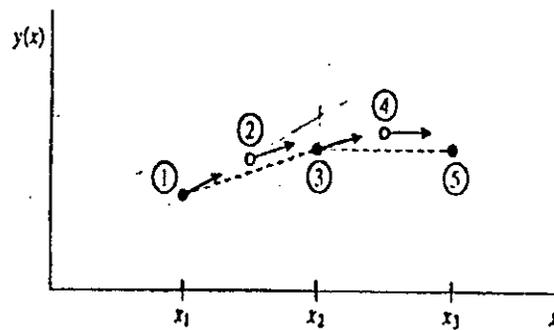


Figure III-c

Dans les équations :

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ y_{n+1} = y_n + k_2 + O(h^3) \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Comme indiqué dans le terme de l'erreur, cette symétrisation annule le terme de l'erreur du premier ordre et la méthode devient une méthode de deuxième ordre (conventionnellement, une méthode est dite d'ordre n si le terme de l'erreur est $O(h^{n+1})$ [19]). En réalité, l'équation (III.6) est appelée la méthode de Runge-Kutta de second ordre (voir figure III-c).

L'idée principale de la méthode de Runge-Kutta est la combinaison de termes tel que k_1 qui possède une erreur de premier ordre et k_2 qui possède une erreur de second ordre permet d'éliminer l'erreur de premier ordre.

Le plus généralement, on utilise la méthode Runge-Kutta de quatrième ordre, qui est donnée part :

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(h^5)$$

Cette méthode nécessite quatre évaluations de f pour un pas donné h (voir figure III-d)

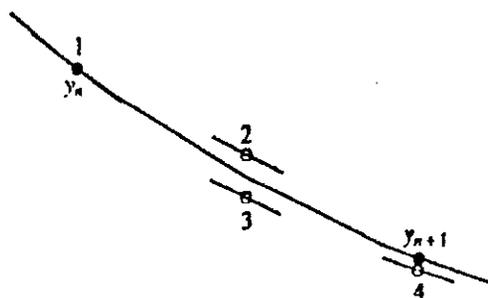


Figure III-d : Méthode de Runge-Kutta du 4^e ordre

L'organigramme de résolution et d'utilisation de cette méthode est donnée à la page suivante :

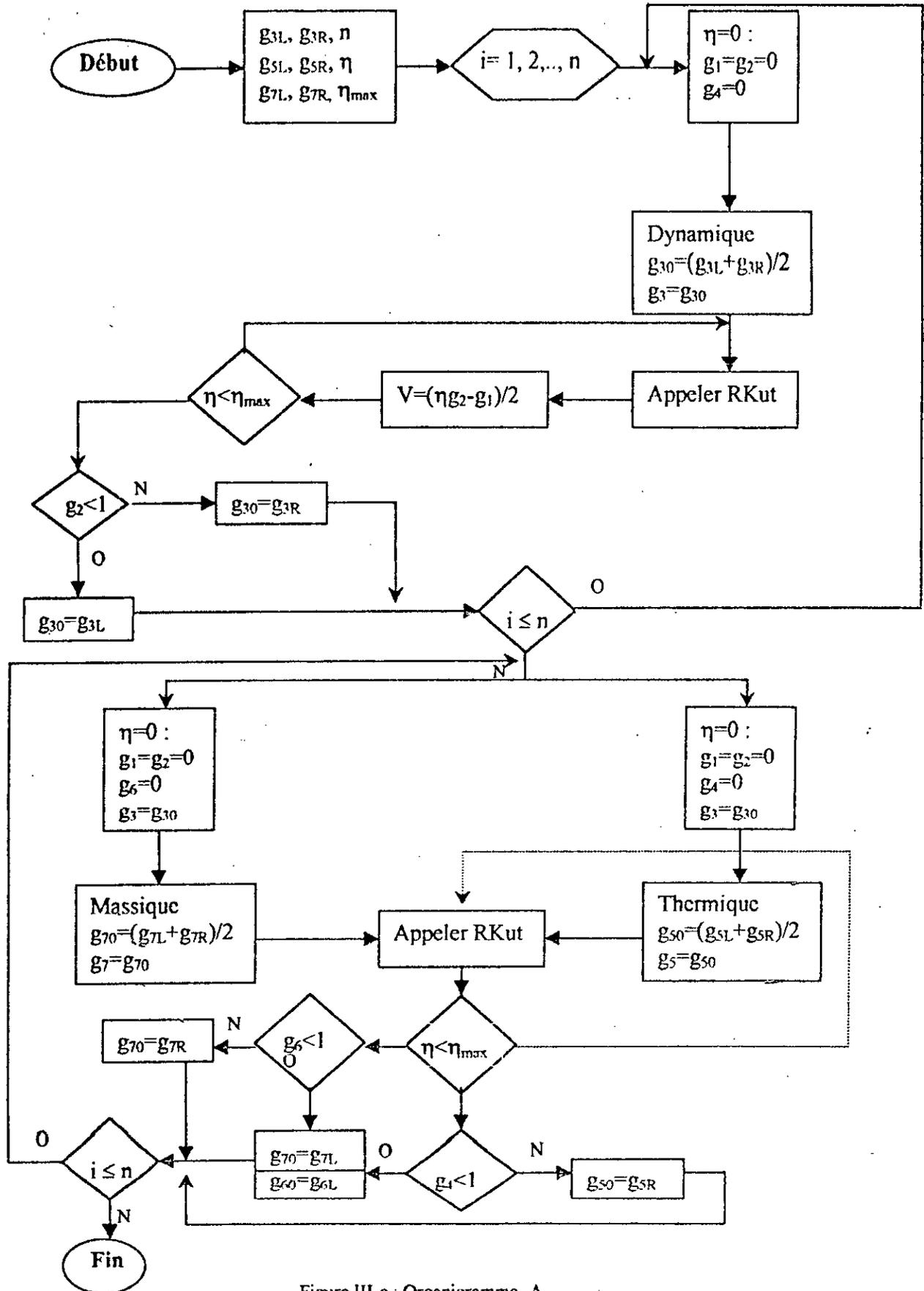


Figure III-e : Organigramme -A-

II.3- Régime transitoire :

III.3.1- Classification des EDP :

III.3.1.1- Classification physique :

a/ Problème d'équilibre : Les problèmes d'équilibre sont des problèmes où la solution d'une équation différentielle aux dérivées partielles (EDP) donnée est confinée dans un domaine clos délimité par les conditions aux limites [16]

Les problèmes d'équilibre sont des problèmes aux conditions aux limites. On peut citer par exemple la distribution de température en régime permanent. Mathématiquement, les problèmes d'équilibre sont gouvernés par des EDP elliptiques.

b/ Problème de propagation : Les problèmes de propagation sont du type transitoire, dans lesquels la solution de l'EDP est recherchée sur un domaine ouvert qui est sujet à un ensemble de conditions initiales et de conditions aux limites [16] La figure (III-f) [20] illustre un tel domaine avec la direction d'avancement.

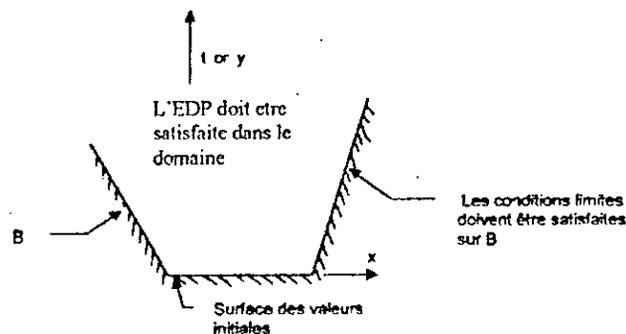


Figure III-f : Domaine pour un problème d'avancement

De tels problèmes sont des problèmes aux conditions initiales ou bien conditions aux limites initiales. La solution est calculée en s'éloignant de la surface des conditions initiales tout en respectant les conditions aux limites. Mathématiquement de tels problèmes sont gouvernés soit par des EDP hyperboliques soit par des EDP paraboliques.

III.3.1.2- Classification mathématique:

Une EDP générale de deuxième ordre est le modèle standard utilisé pour présenter la classification mathématique des EDP, telle que [10]

$$a\Phi_{xx} + b\Phi_{yy} + c\Phi_{xy} + d\Phi_x + e\Phi_y + f\Phi = g(x, y) \quad (III.7)$$

Où a, b, c, d, e et f sont des fonctions de x et y c'est à dire nous considérons des équations linéaires. On peut parler aussi d'équations quasi linéaires ou a, b, c pourrait dépendre de x, y, Φ , Φ_x , Φ_y ; ces équations sont linéaires par rapport à la plus grande dérivée.

Il existe trois types d'EDP qui sont représentés par l'équation (III.7), le type d'une EDP dépendra de la valeur du discriminant : $b^2 - 4ac$. On aura alors [10] :

- $b^2 - 4ac < 0$: l'équation est elliptique
- $b^2 - 4ac = 0$: l'équation est parabolique
- $b^2 - 4ac > 0$: l'équation est hyperbolique

Cette dénomination a été donnée par analogie aux sections coniques de la géométrie analytique. On pourra donc dire que par exemple :

- l'équation de Laplace : $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$ est elliptique
- l'équation de la chaleur : $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$ est parabolique
- l'équation d'onde : $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$ est hyperbolique

III.3.2- Le problème numérique :

Dans le paragraphe précédent nous avons parlé du caractère mathématique des EDP. Pour les équations hyperboliques, on ne peut pas obtenir de solution unique si les conditions initiales sont données sur la ligne caractéristique qui est la frontière du domaine d'influence de la solution.

On dira qu'un problème entraînant la résolution d'une EDP est bien posé lorsqu'une solution existe et que celle-ci est unique. Aussi la solution doit dépendre continuellement des conditions initiales ou des conditions aux limites. Hadamard (1952) [21] a construit un exemple simple qui démontre la dépendance des valeurs aux limites; soit l'équation de Laplace :

$$u_{xx} + y_{yy} = 0 \quad -\infty < x < \infty, y \geq 0$$

Avec pour condition aux limites : $y=0 \rightarrow u(x,0)=0$ $u_y(x,0) = \frac{1}{n} \sin(nx) \quad x > 0$

En utilisant la méthode de séparation de variable, la solution est :

$$u = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \cdot \sinh(ny)$$

Pour $n \gg 1$ cette solution tend vers e^{ny}/n^2 et u va indéfiniment croître. Pour n très grand, même pour de très petites valeurs de y , or $u(x,0)=0$, donc nous avons un problème de discontinuité avec les conditions initiales du problème. Dans ce cas on dira que le problème est 'mal' posé.

Dans le cas présent ceci est dû à ce que l'équation de Laplace est une équation elliptique, la solution doit dépendre des conditions sur tout le domaine fermé or il y a des conditions uniquement pour la ligne $y=0$.

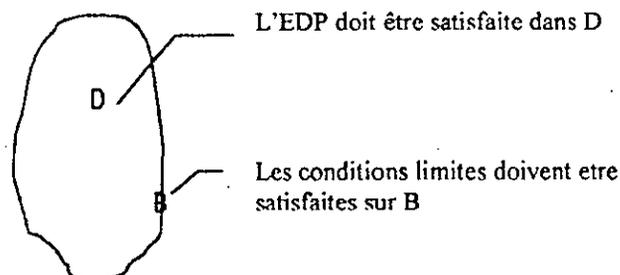


Figure III-g : Domaine pour un problème d'équilibre

III.3.3- Les conditions aux limites :

D'une manière générale pour l'EDP, il existe trois types de conditions aux limites [20] :

- Conditions aux limites de Dirichlet : $u = f(s)$ sur B
ou s représente l'arc curviligne
- Condition aux limites de Neumann : $\frac{\partial u}{\partial n} = g(s)$ sur B
- Conditions aux limites de Robin : $a_1(s) \frac{\partial u}{\partial n} + a_2(s) \cdot u = h(s)$

III.3.4- Discretisation (Méthode des différences finis) :

Le schéma aux différences finis est utilisé pour résoudre les différents types de problèmes de mécanique des fluides et de transfert thermique. Cette méthode est puissante et joue un grand rôle dans la détermination des solutions.

Dans l'approche en différences finis, le domaine continu dans lequel nous cherchons des solutions est discretisé de telle façon que nos variables ne sont connues qu'en des points discrets. Les dérivées sont approximées par des différences qui résulteront en une représentation algébrique de l'EDP. Donc un problème qui doit engendrer des calculs numériques sera transformé en un problème algébrique.

III.3.4.1- Méthode des différences finis :

L'une des premières étapes à prendre en compte pour établir une procédure en différences finis est de remplacer le domaine continu en un domaine discret appelé « grille ». Soit une fonction f définie sur le domaine $[a,b]$, cet intervalle peut être discretisé en considérant l'ensemble $x_0 = a, x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+1} = b$. La représentation discrète de f sera l'ensemble $\{f_1, \dots, f_n, \dots, f_{n+1}\}$

La dérivée d'ordre m de f au point x_i est approximée par [22]:

$$\frac{d^m f(x_i)}{dx^m} = \sum_{j=-J_1}^{J_2} \alpha_j f_{i+j}$$

Où α_j sont déterminés par le développement en série de Taylor de f_{i+j} et J_1, J_2 sont des entiers qui dépendent de l'ordre m et aussi du degré de précision de l'approximation. Si $m=1$, on considère une approximation en utilisant trois valeurs de f_i c'est à dire $J_1+J_2=2$, et nous prendrons $J_1=J_2=1$.

On peut écrire l'expression générale :

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \frac{(1-\alpha)f_{i+1} + 2\alpha f_i - (1+\alpha)f_{i-1}}{2\Delta x} \text{ ou } \alpha \text{ est une constante arbitraire.}$$

L'erreur d'une telle approximation est :

$$-\frac{\alpha\Delta x}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{\Delta x^2}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} + O(\Delta x^3)$$

En spécifiant la valeur de α on obtient les différences standards [22]:

- Différences centrées : $\alpha=0$

$$\frac{df(x_i)}{dx} \cong \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \equiv \Delta_x^0 f_i \quad \text{l'erreur} = O(\Delta x^2)$$

- Différences décentrées (arrière) : $\alpha=1$

$$\frac{df(x_i)}{dx} \cong \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \equiv \Delta_x^- f_i \quad \text{l'erreur} = O(\Delta x)$$

- Différences décentrées (avant) : $\alpha=-1$

$$\frac{df(x_i)}{dx} \cong \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \equiv \Delta_x^+ f_i \quad \text{l'erreur} = O(\Delta x)$$

Si nous prenons $J_1=0$ et $J_2=2$, on obtient une approximation du second ordre [22]:

$$\frac{df(x_i)}{dx} \cong \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2\Delta x}$$

Pour une approximation du quatrième ordre [22]: $J_1=J_2=2$

$$\frac{df(x_i)}{dx} \cong \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12\Delta x}$$

De la même façon nous pouvons définir des approximations pour toutes les dérivées, par exemple [22]:

$$\frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} \cong \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} \cong \Delta_{xx} f_i \text{ la précision est de l'ordre de } O(\Delta x^2)$$

L'utilisation des opérateurs de différences $\Delta_x^0, \Delta_x^+, \Delta_{xx}$ est très utile et nous pouvons aussi vérifier les relations suivantes :

$$\frac{1}{2}(\Delta_x^+ + \Delta_x^-) = \Delta_x^0$$

$$\Delta_x^+ - \Delta_x^- = \Delta_x \Delta_{xx}$$

$$\Delta_x^+ \Delta_x^- = \Delta_{xx}$$

III.3.4.2- Consistance :

La consistance concerne l'étendue avec laquelle les équations aux différences finis peuvent approximer les EDP. La différence entre l'EDP et son approximation en différences finis a déjà été définie comme étant une erreur de troncature.

Une représentation en différences finis est dite consistante si on peut montrer que la différence entre l'EDP et sa représentation tend vers zéro en même temps que le raffinement de la maille, c'est à dire :

$$\lim_{\text{maille} \rightarrow 0} (EDP - EDF) = \lim_{\text{maille} \rightarrow 0} (\text{Erreur de troncature}) = 0$$

Ceci devrait toujours avoir lieu si l'ordre de l'erreur de troncation s'annule lorsque la grille est raffinée [c'est à dire $O(\Delta t)$, $O(\Delta x)$,...] [2D]

III.3.4.3- Stabilité :

Un schéma Numérique est dit stable lorsque les erreurs (arrondi, troncation,... etc.) ne croissent pas en passant d'une étape de calcul à une autre (Critère de stabilité de Van Newman) [22] :

Soit l'équation a traité sous la forme :

$$C_1 u_h^{n+1} + C_0 u_h^n + C_{-1} u_h^{n-1} = 0 \quad (\text{III.8})$$

Où C_1 , C_0 et C_{-1} sont des opérateurs de différence finie, $u_h^n \equiv u(X_h, n\Delta t)$ avec $u = (u_1, \dots, u_m)$ et $X = (x_1, \dots, x_d)$ tel que x_h réfère à une discrétisation dans l'espace : $x_h = (\gamma_1 \Delta x_1, \dots, \gamma_d \Delta x_d)$, $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ sont des entiers ; l'indexe n réfère à une discrétisation temporelle $t_n = n \cdot \Delta t$ ($n =$ entiers)

La stabilité de l'équation (III.8) est examiné en considérant une analyse de Fourier de la solution, On supposera que :

$$u_h^n = U^n(k) \exp(ik \cdot X_h) \quad (\text{III.9})$$

Où $i^2 = -1$ et k est le vecteur du nombre d'ondes $k = (k_1, \dots, k_d)$ en injectant (III.9) dans (III.8) et en divisant par le facteur commun $\exp(ik \cdot x_h)$ on obtient l'équation :

$$G_1 U^{n+1} + G_0 U^n + G_{-1} U^{n-1} = 0 \quad (\text{III.10})$$

Cette équation peut être écrite sous la forme :

$$\Phi^{n+1} = G\Phi^n$$

Où $\phi = (U, V)$ est un vecteur à $2m$ éléments, G est une matrice de dimension $2m \times 2m$ déduite de l'équation (III.8).

La stabilité du schéma (condition stricte de Van Newman) requiert que le rayon spectral de la matrice d'amplification est inférieur à 1, c'est à dire :

$$\rho(G) = \text{Max}|\lambda_j| \leq 1, \quad 0 \leq k_j \Delta x_j \leq 2\pi, \quad j = 1, \dots, d \quad (\text{III.11})$$

Où λ_j sont les valeurs propre de G. Ces valeurs propres sont des racines de l'équation :

$$\text{Det}(G - \lambda I) = 0$$

Où I est la matrice identité, ou bien d'une manière équivalente se sont les zéros d'un polynôme de degrés q (q = 2m) :

$$f(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_q \lambda^q = \sum_{j=0}^q a_j \lambda^j \quad \text{où les coefficients peuvent être des complexes}$$

Si le schéma est un schéma à deux niveaux ($C_1 \equiv 0$) et si u est un scalaire, la matrice G se réduit à un scalaire g (appeler facteur d'amplification telle que la condition (III.11) se réduit à :

$$|g| \leq 1, \quad 0 \leq k_j \Delta x_j \leq 2\pi, \quad j = 1, \dots, d$$

Une étude des zéros de f (λ) est simplifiée en utilisant les résultats obtenus par Miller [23] concernant les zéros des polynômes.

III.3.5- Résolution d'une équation hyperbolique et parabolique à deux dimensions :

III.3.5.1- Schémas explicites pour l'équation advection-diffusion :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial y} - \nu \nabla^2 f = 0$$

Le schéma explicite de cette équation est écrit sous la forme :

$$\frac{1}{\Delta t} (f_{ij}^{n+1} - f_{ij}^n) + A \Delta_x^0 f_{ij}^n + B D_y^0 f_{ij}^n - \nu (\Delta_{xx} + \Delta_{yy}) f_{ij}^n = 0 \quad (\text{III.12})$$

Avec :

$$f_{ij}^n \equiv f(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t) \quad \text{où } i, j \text{ et } n \text{ sont des entiers}$$

$$\Delta_x^0 f_{i,j} = \frac{1}{2\Delta x} (f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) \quad \Delta_{xx} f_{i,j} = \frac{1}{\Delta x^2} (f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j})$$

$$\Delta_y^0 f_{i,j} = \frac{1}{2\Delta y} (f_{i,j+1} - f_{i,j-1}) \quad \Delta_{yy} f_{i,j} = \frac{1}{\Delta y^2} (f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1})$$

Le schéma de l'équation (III.12) est d'une précision de premier ordre par rapport au temps et de second ordre par rapport à l'espace.

Les conditions de stabilité (Hindmarsh et al. [24]), sont :

$$(A^2 + B^2)\Delta t \leq 2\nu \quad \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{4} \quad \text{où} \quad \Delta y = \Delta x$$

On peut aussi utiliser un schéma « upwind » qui peut être écrit sous la forme [22]:

$$\frac{1}{\Delta t} (f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n) + \frac{A}{2} [(1 - \varepsilon_A)\Delta_x^+ f_{i,j}^n + (1 + \varepsilon_A)\Delta_x^- f_{i,j}^n] + \frac{B}{2} [(1 - \varepsilon_B)\Delta_y^+ f_{i,j}^n - (1 + \varepsilon_B)\Delta_y^- f_{i,j}^n] - \nu(\Delta_{xx} + \Delta_{yy})f_{i,j}^n = 0$$

Avec : $\varepsilon_A = \text{sign}(A)$ et $\varepsilon_B = \text{sign}(B)$

$$\Delta_x^+ f_{i,j} = \frac{1}{\Delta x} (f_{i+1,j} - f_{i,j}) \quad \Delta_x^- f_{i,j} = \frac{1}{\Delta x} (f_{i,j} - f_{i-1,j})$$

$$\Delta_y^+ f_{i,j} = \frac{1}{\Delta y} (f_{i,j+1} - f_{i,j}) \quad \Delta_y^- f_{i,j} = \frac{1}{\Delta y} (f_{i,j} - f_{i,j-1})$$

Le critère de stabilité est (pour $\Delta x = \Delta y$) [22]:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{4\nu + (|A| + |B|)\Delta x}$$

III.3.5.2- Méthode ADI :

Dans le cas où nous préférons résoudre un problème d'EDP en utilisant une méthode implicite à cause de sa stabilité, il est toutefois recommandé d'utiliser celles pour lesquelles nous aurons à résoudre un système d'équations algébriques tridiagonales.

La méthode ADI (Alternating Direction Implicite) qui a été introduite par Peaceman et Rachford [25], nous permet de construire des schémas implicites très efficaces. Plusieurs travaux ont été publiés sur ce sujet : Douglas et Gunn [26], Yanenko [27], Mitchell [28].

Considérons que les coefficients A et B de l'équation (III-12) ne sont pas constants et qu'ils dépendent de la variable f. La méthode ADI est une méthode à deux étapes, qui peut être mise sous la forme [29]:

$$\begin{cases} \frac{2}{\Delta t} (\tilde{f}_{i,j} - f_{i,j}^n) + (A_1 \Delta_x^0 - \nu \Delta_{xx}) \tilde{f}_{i,j} + (B_1 \Delta_y^0 - \nu \Delta_{yy}) f_{i,j}^n = 0 & \text{(III.13.a)} \\ \frac{2}{\Delta t} (f_{i,j}^{n+1} - \tilde{f}_{i,j}) + (A_2 \Delta_x^0 - \nu \Delta_{xx}) \tilde{f}_{i,j} + (B_2 \Delta_y^0 - \nu \Delta_{yy}) f_{i,j}^{n+1} = 0 & \text{(III.13.b)} \end{cases}$$

Où A_1 , A_2 , B_1 et B_2 sont des approximations de A et B. La valeur $\tilde{f}_{i,j}$ est une valeur approximative de la solution exacte à l'étape $(n+1/2) \Delta t$ si A_1 , A_2 , B_1 et B_2 sont de bonnes approximations.

Par exemple si l'on requiert seulement une précision de premier ordre sur le temps, on peut avoir :

$$A_1 = A_2 = A_{i,j}^n$$

$$B_1 = B_2 = B_{i,j}^n$$

a/ Stabilité : Dans le cas où A et B sont constants, le schéma ADI précédent est inconditionnellement stable. Mais il est à rappeler qu'une étude de la stabilité ne tient pas compte des conditions aux limites, et leur présence pourrait annuler cette stabilité inconditionnelle. A chaque étape nous devons résoudre des systèmes tridiagonaux des équations (III.13.a) et (III.13.b); il est possible d'utiliser la méthode de factorisation, dans notre cas nous utiliserons l'algorithme de Thomas [29].

Dans ce cas, les conditions de stricte dominance de la diagonale est satisfaite si $|A_1| \frac{\Delta x}{\nu} \leq 2$ et $|B_2| \frac{\Delta y}{\nu} \leq 2$. Si ces conditions ne sont pas satisfaites, on devra limiter le pas temporel par [17]:

$$\Delta t < \frac{2 \Delta x^2}{|A_1| \Delta x - 2\nu} \quad \text{et} \quad \Delta t < \frac{2 \Delta y^2}{|B_2| \Delta y - 2\nu} \quad (\text{III.14})$$

b/ Conditions aux limites: Supposons que notre solution est déterminée dans un domaine rectangulaire délimité par $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (Γ_1 et Γ_2 sont les parties de Γ parallèles à l'axe y et l'axe x respectivement) avec des conditions aux limites de Dirichlet $f(x, y, t)|_{\Gamma} = \Phi(x, y, t)$.

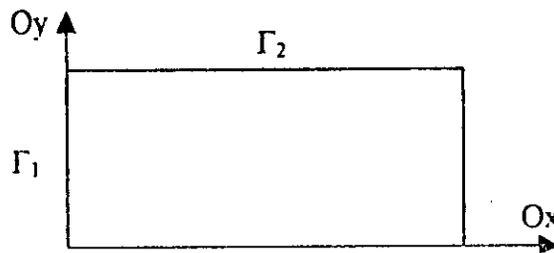


Figure III-h : Domaine de définition

La solution du système algébrique (III.13.a) nécessite la connaissance de $\tilde{f}_{i,j}$ sur Γ_1 . Puisque $\tilde{f}_{i,j}$ peut être considérée comme une approximation de la solution, l'utilisation de la condition limite $\tilde{f}_{i,j}|_{\Gamma_1} = \Phi \left[x, y, \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right]$ entraîne une grande erreur de troncature près de la limite du domaine ; lorsque ϕ est effectivement dépendante du temps.

Le meilleur moyen, d'éviter cette difficulté est de définir une valeur limite, telle que la combinaison des deux étapes de temps donne une précision du second ordre pour les points adjacents à la limite.

Ceci peut être accompli si la valeur $\tilde{f}_{i,j}|_{\Gamma_1}$ est déduite des équations aux différences finis elles-mêmes. Donc en assumant que $A_1 = A_2$ dans le système précédent, la soustraction de (III.13.b) de (III.13.a) donne [22] :

$$\tilde{f}_{i,j} = \frac{1}{2}(f_{i,j}^{n+1} + f_{i,j}^n) + \frac{1}{4}\Delta t [(B_2 \Delta_y^0 - \nu \Delta_{yy})f_{i,j}^{n+1} - (B_1 \Delta_y^0 - \nu \Delta_{yy})f_{i,j}^n]$$

Cette équation fournit la valeur de $\tilde{f}_{i,j}$ sur Γ_1 car $f_{i,j}^n$ et $f_{i,j}^{n+1}$ sont connus sur cette limite. La limitation sur le pas temporel introduite par les conditions (III.14), qui ne sont néanmoins pas très restrictives, peut être évitée si une approximation « upwind » non centrée des dérivées de premier ordre (selon le signe de A_1 et B_2) est utilisée à la place d'approximations aux différences centrées.

Dans ce cas la précision de second ordre est perdue. Il est par ailleurs possible de retrouver cette précision de second ordre à l'étape $n+1$ en alternant le sens des différences centrées à chaque étape.

Le schéma correspondant est [22]:

$$\begin{cases} \frac{2}{\Delta t}(\tilde{f}_{i,j} - f_{i,j}^n) + (A_{i,j}^n \Delta_x^* - \nu \Delta_{xx})\tilde{f}_{i,j} + (B_{i,j}^n \Delta_y^{**} - \nu \Delta_{yy})f_{i,j}^n = 0 \\ \frac{2}{\Delta t}(f_{i,j}^{n+1} - \tilde{f}_{i,j}) + (A_{i,j}^n \Delta_x^{**} - \nu \Delta_{xx})\tilde{f}_{i,j} + (B_{i,j}^n \Delta_y^* - \nu \Delta_{yy})f_{i,j}^{n+1} = 0 \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} \Delta_x^* = \frac{1}{2}[(1 - \varepsilon_A)\Delta_x^+ + (1 + \varepsilon_A)\Delta_x^-] & \text{ou} & \varepsilon_A = \text{sign}(A_{i,j}^n) \\ \Delta_x^{**} = \frac{1}{2}[(1 + \varepsilon_A)\Delta_x^+ + (1 - \varepsilon_A)\Delta_x^-] \\ \Delta_y^* = \frac{1}{2}[(1 - \varepsilon_B)\Delta_y^+ + (1 + \varepsilon_B)\Delta_y^-] & \text{ou} & \varepsilon_B = \text{sign}(B_{i,j}^n) \\ \Delta_y^{**} = \frac{1}{2}[(1 + \varepsilon_B)\Delta_y^+ + (1 - \varepsilon_B)\Delta_y^-] \end{cases}$$

Durant l'étape intermédiaire, le schéma n'est que d'une précision de premier ordre par rapport au temps. A l'étape finale l'erreur de troncation est $O(\Delta t, \Delta x, \Delta t \Delta y, \Delta x^2, \dots)$ [22]. Il est à noter que la stabilité inconditionnelle est préservée. Une telle technique peut être appliquée pour la résolution des équations de couche limite en terme des variables primitives (u, v, T, C) ou bien en utilisant l'approche de la fonction de courant et la vorticité.

III.3.6- Résolution des équations de couches limites :

Pour la résolution des équations des couches limites dynamique, thermique et massique, nous avons opté pour une méthode implicite en l'occurrence la méthode ADI présentée dans le paragraphe précédent.

- Couche limite dynamique :

L'équation de la couche limite dynamique en régime transitoire établie dans le chapitre (II) s'écrit sous une forme discrétisée de la manière suivante :

$$\frac{2}{\Delta t} (\tilde{u}_{i,j}^* - u_{i,j}^{**}) + (u_{i,j}^{**} \Delta_x^*) \tilde{u}_{i,j}^* + \left(v_{i,j}^{**} \Delta_y^{**} - \frac{1}{Re} \Delta_{yy} \right) u_{i,j}^{**} = 0$$

$$\frac{2}{\Delta t} (u_{i,j}^{**+1} - \tilde{u}_{i,j}^*) + (u_{i,j}^{**} \Delta_x^{**}) \tilde{u}_{i,j}^* + \left(v_{i,j}^{**} \Delta_y^* - \frac{1}{Re} \Delta_{yy} \right) u_{i,j}^{**+1} = 0$$

Les conditions aux limites correspondantes s'écrivent alors :

- Pour $y^* = 0$; $u^*(x,t) = v^*(x,t) = 0$
- Pour $y^* \rightarrow 1$; $u^*(x,t) = 1$

Les conditions aux initiales s'écrivent :

- $t^* \leq 0$; $u^*(x,y) = v^*(x,y) = 0$

- Couche limite thermique :

L'équation de la couche limite thermique en régime transitoire établie dans le chapitre (II) s'écrit sous une forme discretisée de la manière suivante :

$$\frac{2}{\Delta t} (\tilde{\theta}_{i,j}^* - \theta_{i,j}^{*n}) + (u_{i,j}^{*n} \Delta_x^*) \tilde{\theta}_{i,j}^* + \left(v_{i,j}^{*n} \Delta_y^{**} - \frac{1}{Re} \Delta_{yy} \right) \theta_{i,j}^{*n} = 0$$

$$\frac{2}{\Delta t} (\theta_{i,j}^{*n+1} - \tilde{\theta}_{i,j}^*) + (u_{i,j}^{*n} \Delta_x^{**}) \tilde{\theta}_{i,j}^* + \left(v_{i,j}^{*n} \Delta_y^* - \frac{1}{Re} \Delta_{yy} \right) \theta_{i,j}^{*n+1} = 0$$

Les conditions aux limites correspondantes s'écrivent alors :

- $y^* = 0 ; \theta^*(x,t) = 0$
- $y^* \rightarrow 1 ; \theta^*(x,t) = 1$

Les conditions initiales s'écrivent :

- $t^* \leq 0 ; \theta^*(x,y) = 0$

- Couche limite massique :

L'équation de la couche limite massique en régime transitoire établie dans le chapitre (II) s'écrit sous une forme discretisée de la manière suivante :

$$\frac{2}{\Delta t} (\tilde{C}_{i,j}^* - C_{i,j}^{*n}) + (u_{i,j}^{*n} \Delta_x^*) \tilde{C}_{i,j}^* + \left(v_{i,j}^{*n} \Delta_y^{**} - \frac{1}{Re} \Delta_{yy} \right) C_{i,j}^{*n} = 0$$

$$\frac{2}{\Delta t} (C_{i,j}^{*n+1} - \tilde{C}_{i,j}^*) + (u_{i,j}^{*n} \Delta_x^{**}) \tilde{C}_{i,j}^* + \left(v_{i,j}^{*n} \Delta_y^* - \frac{1}{Re} \Delta_{yy} \right) C_{i,j}^{*n+1} = 0$$

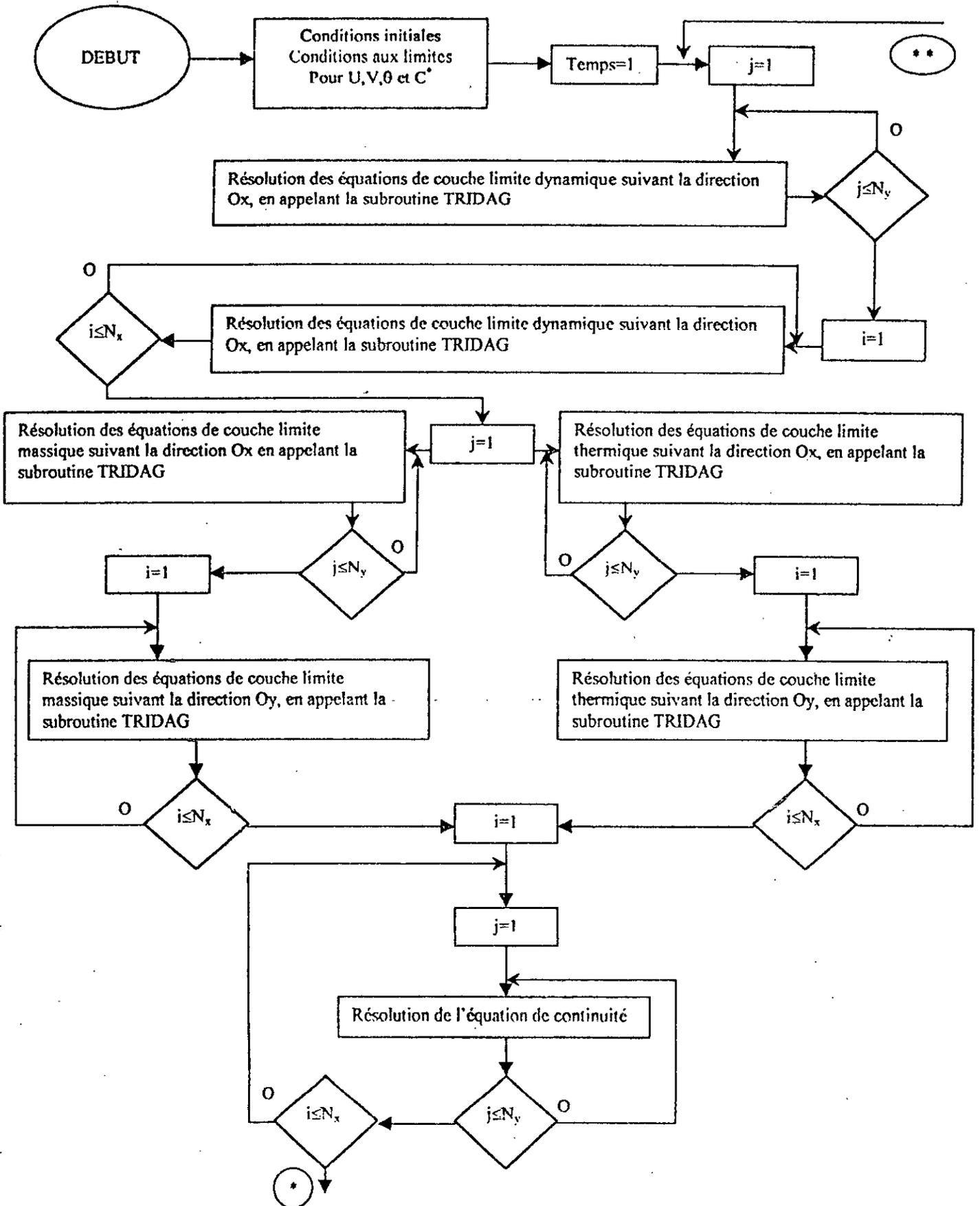
Les conditions aux limites s'écrivent alors :

- $y^* = 0 ; C^*(x,t) = 0$
- $y^* \rightarrow 1 ; C^*(x,t) = 1$

Les conditions initiales s'écrivent :

- $t^* \leq 0 ; C^*(x,y) = 0$

L'organigramme correspondant à ce schéma est donné à la page suivante :



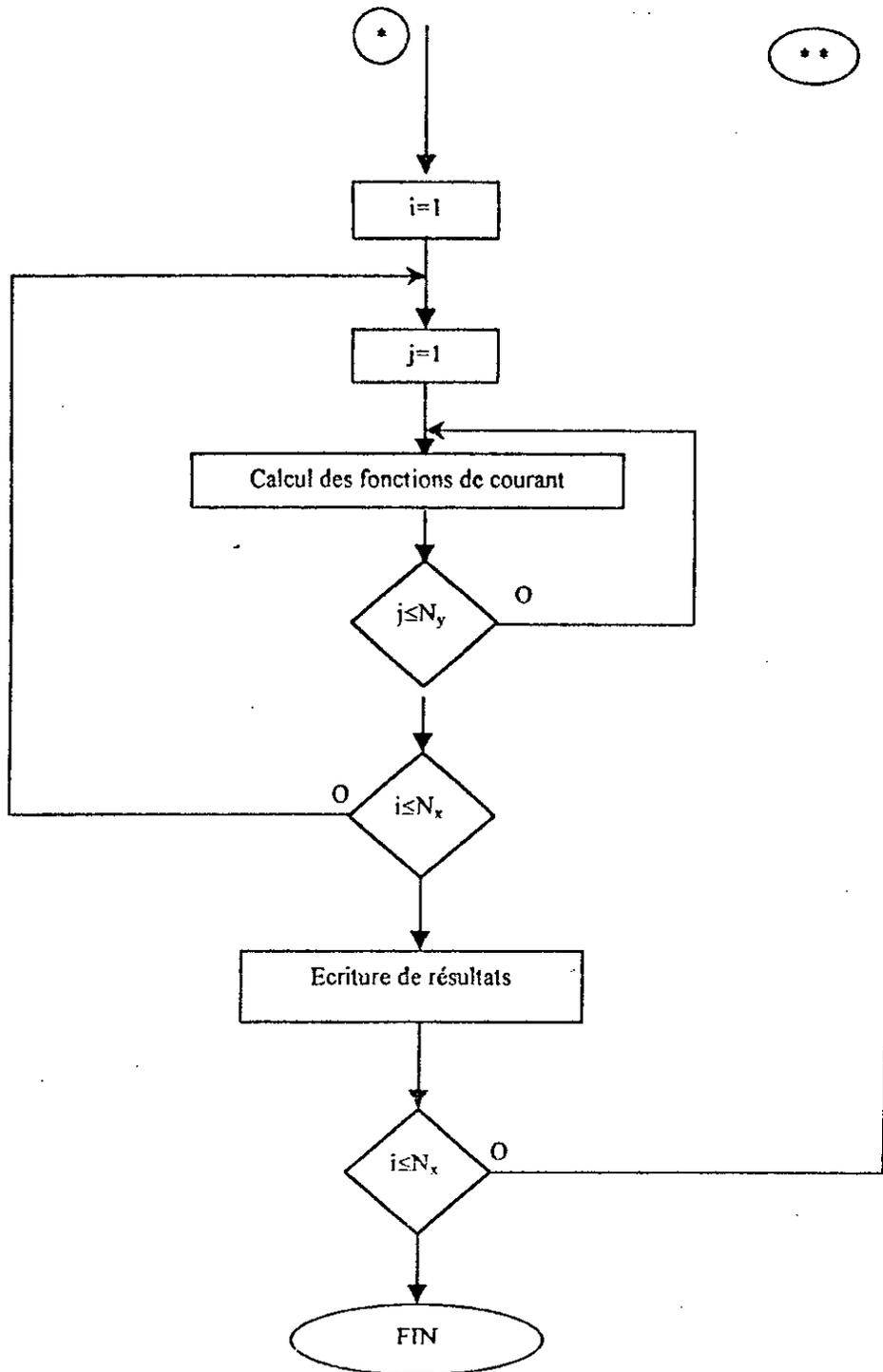


Figure III-e : Organigramme -B-

N.B.: Concernant les programmes de résolution relatifs aux deux organigrammes précédents cf- Annexe A et B

Chapitre IV :

Résultats et discussions

IV.1- Introduction

IV.2- Régime permanent

IV.2.1- Couche limite dynamique

IV.2.1.1- Représentation des résultats

IV.2.1.2- Interprétation et discussion

IV.2.2- Couche limite thermique

IV.2.2.1- Représentation des résultats

IV.2.2.2- Interprétation et discussion

IV.2.3- Couche limite massique

IV.2.3.1- Représentation des résultats

IV.2.3.2- Interprétation et discussion

IV.2.4- Conclusion

IV.3- Régime transitoire

IV.3.1- Représentation des résultats

IV.3.2- Interprétation et discussion

IV.1- Introduction :

Lors des chapitres précédents nous avons établi les équations des couches limites dynamique, thermique et massique (en régime permanent et transitoire) pour le cas de la plaque plane. Nous avons aussi abordé les méthodes de résolution pour le cas permanent (méthode de Runge-Kutta) et le cas transitoire (méthode ADI).

Dans ce chapitre, nous allons présenter et interpréter les résultats obtenus après résolution.

IV.2- Régime permanent :

IV.2.1- Couche limite dynamique :

L'intérêt de la résolution de l'équation de la couche limite dynamique réside dans la détermination du coefficient de frottement. Nous nous sommes intéressés aux deux cas : plaque plane imperméable et plaque plane perméable avec plusieurs vitesses d'aspiration.

IV.2.1.1- Représentation des résultats :

Les résultats obtenus sont représentés par les figures ci-dessous :

- Figure (IV-a.1) : représente la variation du profil des vitesses en fonction de η
- Figure (IV-a.2) : représente la variation de l'épaisseur de la couche limite dynamique en fonction de x/L
- Figure (IV-a.3) : représente la variation du coefficient de frottement moyen sur toute la plaque en fonction du nombre de Reynolds pour différentes vitesses d'aspirations
- Figure (IV-a.4) : représente la variation du coefficient de frottement moyen sur toute la plaque pour de très grands nombres de Reynolds

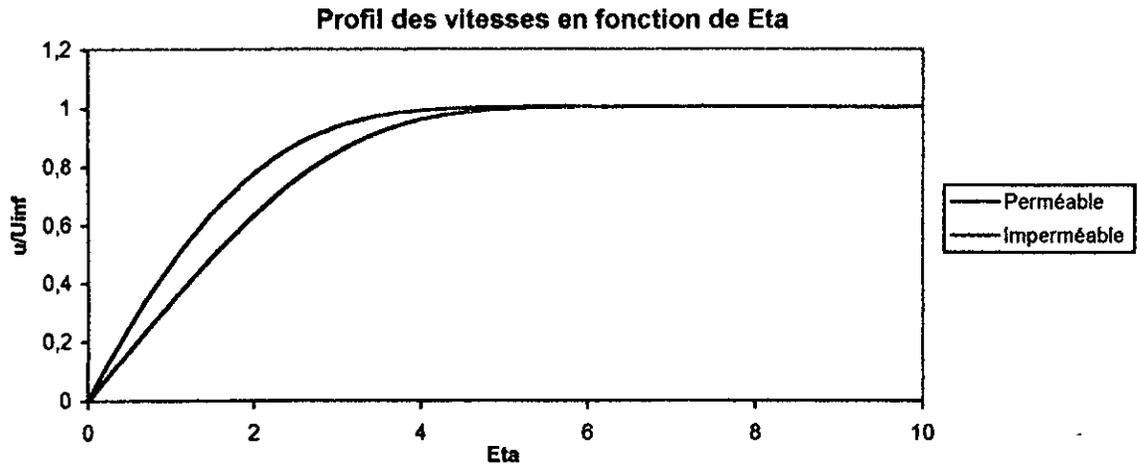


Figure IV-a.1

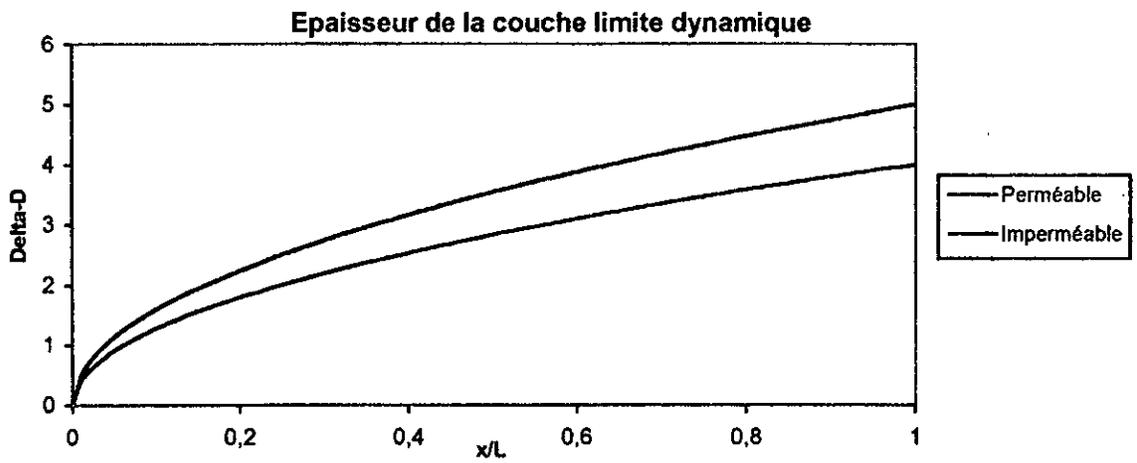


Figure IV-a.2

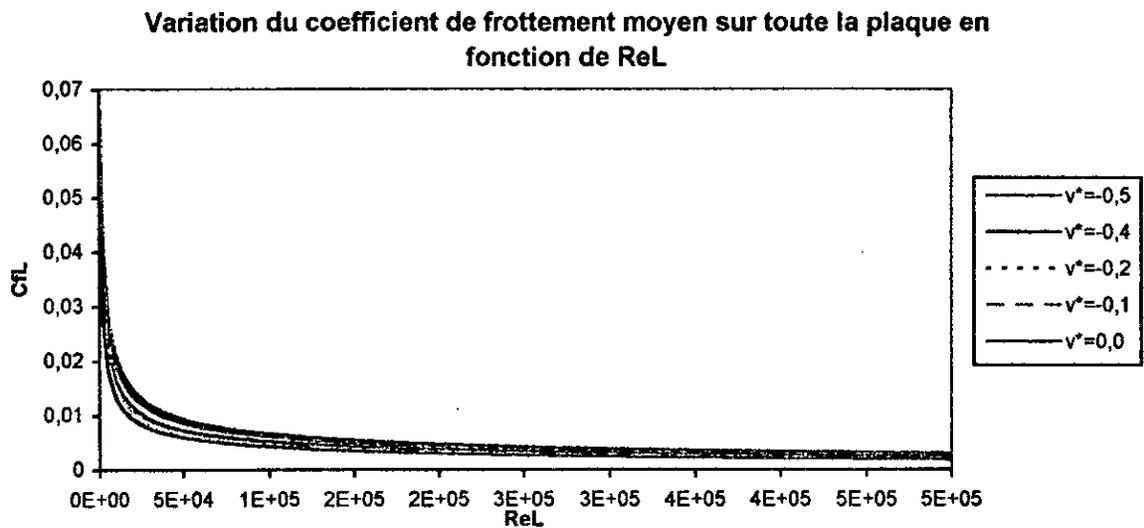


Figure IV-a.3

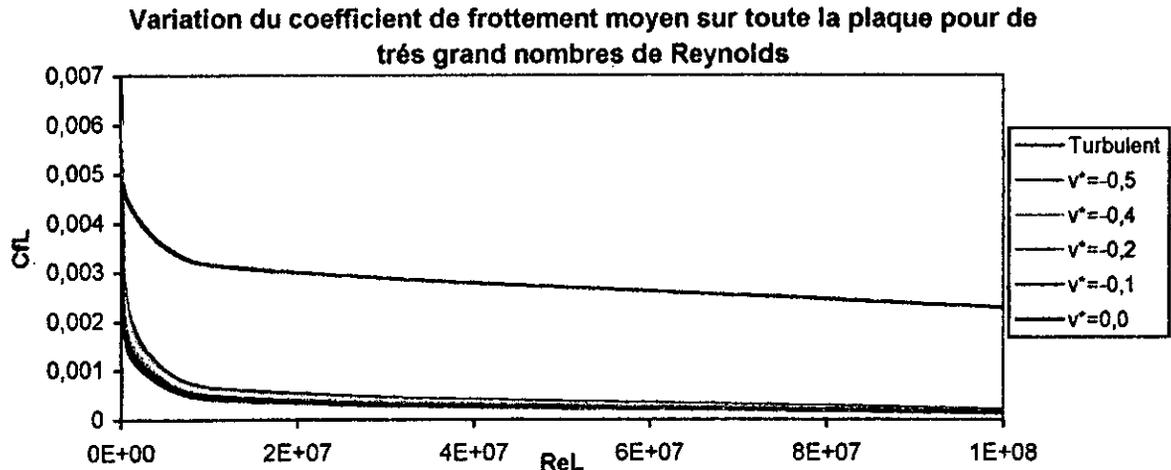


Figure IV-a.4

IV.2.1.2- Interprétation et discussion :

Nous constatons que l'épaisseur de la couche limite dynamique (définie par $u = 99\%U_\infty$) est atteinte pour une plus petite valeur de η dans le cas perméable (Figure IV-a.1) est plus faible dans le cas perméable (Figure IV-a.2).

Sur la figure (IV-a.3), nous remarquons que le coefficient de frottement moyen est plus faible dans le cas imperméable ; et il augmente avec l'augmentation de la vitesse d'aspiration. Néanmoins, il est inférieur au coefficient de frottement moyen en régime turbulent. Ceci découle du fait que l'application d'une aspiration permet de préserver un écoulement laminaire sur une plus grande longueur en repoussent le point de transition. Toutefois, il ne faut pas dépasser une certaine vitesse d'aspiration, car dans ce cas, il est possible de dépasser la valeur du coefficient de frottement moyen turbulent.

IV.2.2- Couche limite thermique :

L'intérêt de la résolution de l'équation de la couche limite thermique réside dans la détermination du coefficient d'échange convectif moyennant le nombre de Nusselt.

IV.2.2.1- Représentation des résultats :

Les résultats obtenus sont donnés par les figures ci-dessous :

- Figure (IV-b.1) : représente la variation du profil des températures adimensionnelles en fonction de η pour différents nombres de Prandtl
- Figure (IV-b.2) : représente la variation de l'épaisseur de la couche limite thermique en fonction de x/L pour différents nombres de Prandtl

- Figure (IV-b.3) : représente la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds pour différents nombres de Prandtl
- Figure (IV-b.4) et (IV-b.5) : représente la variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Reynolds pour différentes vitesses d'aspirations pour $Pr=0,1$ et $Pr=10,0$ respectivement

Profil des températures en fonction de Eta pour différents nombres de Prandtl

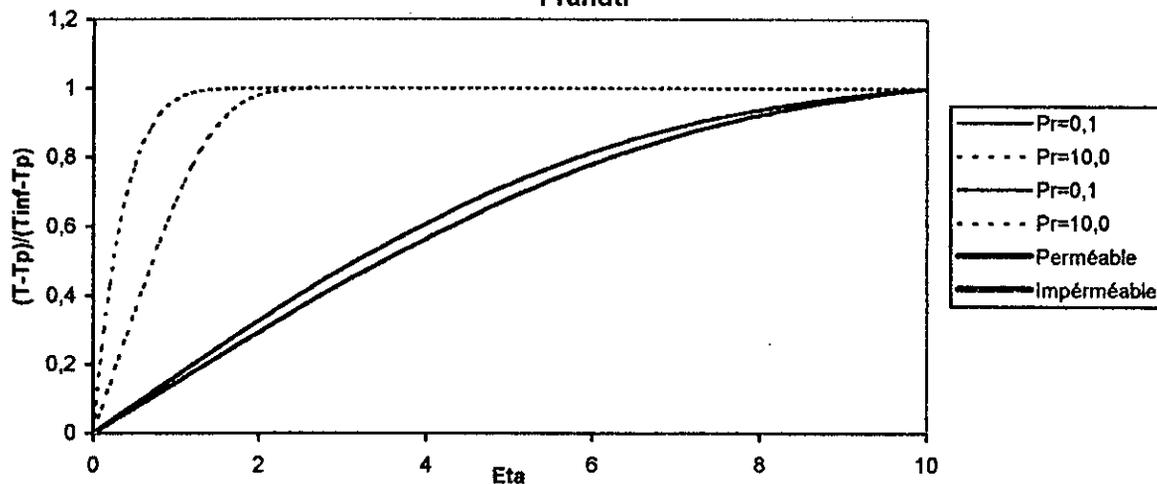


Figure IV-b.1

Epaisseur de la couche limite thermique

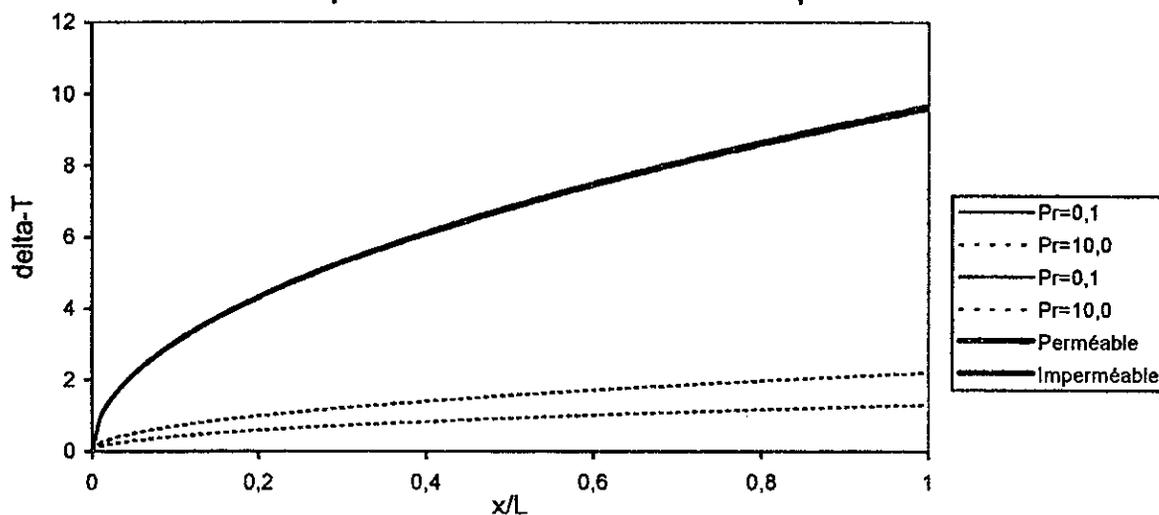


Figure IV-b.2

Variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Reynolds pour différents nombres de Prandtl

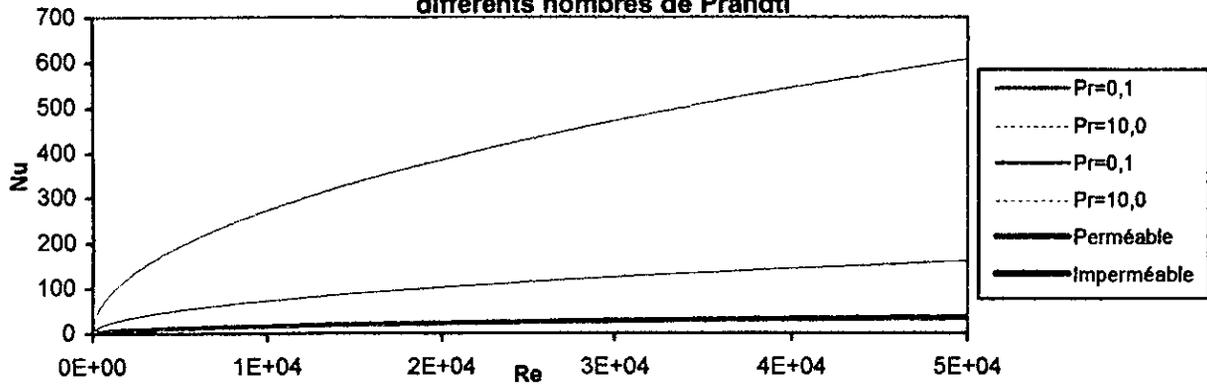


Figure IV-b.3

Variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Reynolds pour Pr=0.1 et pour différentes vitesses d'aspiration

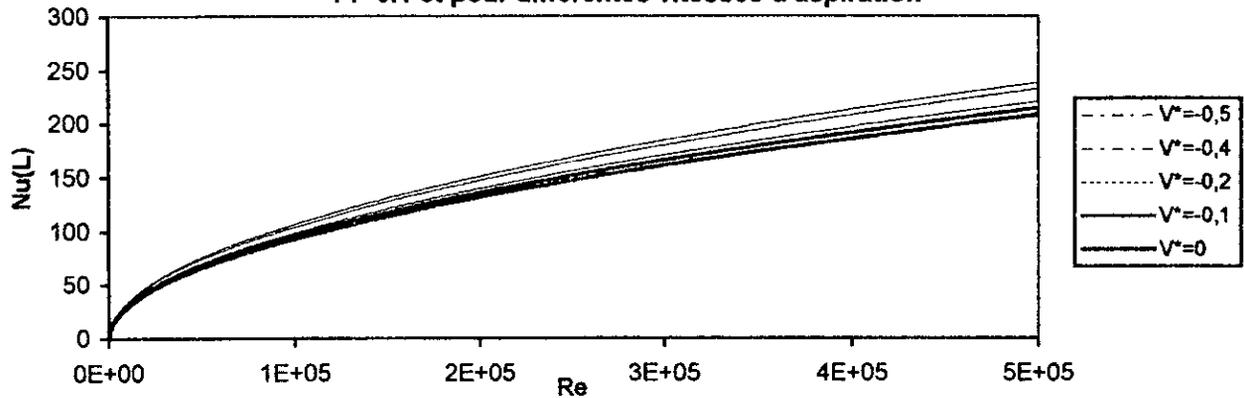


Figure IV-b.4

Variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Reynolds pour Pr=10.0 et pour différentes vitesses d'aspirations

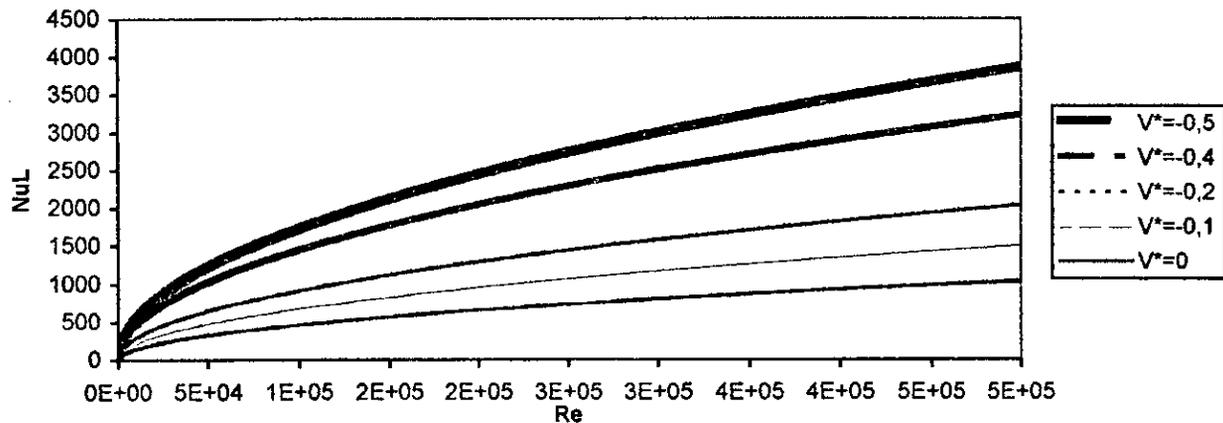


Figure IV-b.5

IV.2.2.2- Interprétation et discussion :

Nous remarquons sur IV-b.1 que l'épaisseur de la couche limite thermique qui est définie par la valeur 99% $\frac{T - T_p}{T_\infty - T_p}$ est atteinte pour une plus petite valeur de η dans le cas perméable (figure IV-b.1). Cette valeur est d'autant plus petite que le nombre de Prandtl augmente, ceci est dû au fait que le nombre de Prandtl est défini comme étant le rapport entre la viscosité cinématique et la diffusivité thermique et que le rapport entre δ_T et δ_d est de l'ordre de $1/\sqrt{Pr}$ [24]. Nous remarquons aussi que l'épaisseur de la couche limite thermique est plus faible dans le cas perméable (figure IV-b.2). Néanmoins la différence entre les cas perméable et imperméable n'est perceptible que pour les grands nombres de Prandtl.

Le nombre de Nusselt en fonction du nombre de Reynolds est plus grand dans le cas perméable (figure IV-b.3), mais cette différence est perceptible que pour les grands nombres de Prandtl.

Il est aussi est plus grand lorsque la vitesse d'aspiration augmente (figure IV-b.4 et IV-b.5), son augmentation est beaucoup plus importante pour les grands nombres de Prandtl.

IV.2.3- Couche limite massique :

L'intérêt de la résolution de l'équation de la couche limite massique réside dans la détermination du coefficient d'échange massique moyennant le nombre de Sherwood.

IV.2.3.1- Représentation des résultats :

Les résultats obtenus sont donnés par les figures ci-dessous :

- Figure (IV-c.1) : représente la variation du profil des concentrations adimensionnelles en fonction de η pour différents nombres de Schmidt
- Figure (IV-c.2) : représente la variation de l'épaisseur de la couche limite massique en fonction de x/L pour différents nombres de Schmidt

- Figure (IV-c.3) : représente la variation du nombre de Sherwood moyen en fonction du nombre de Reynolds pour différents nombres de Schmidt
- Figure (IV-c.4) et (IV-c.5) : représente la variation du nombre de Sherwood en fonction du nombre de Reynolds pour différentes vitesses d'aspirations pour $Sc=0,1$ et $Sc=10,0$ respectivement

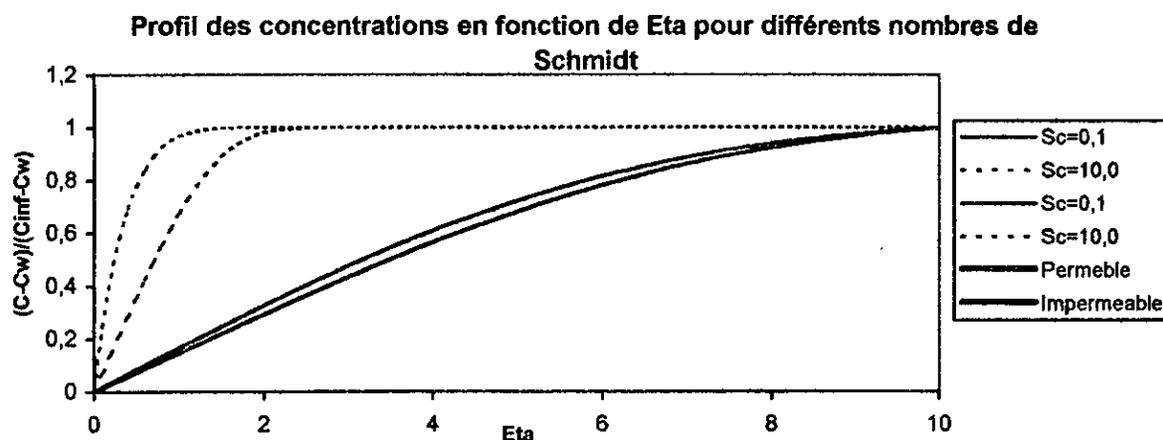


Figure IV-c.1

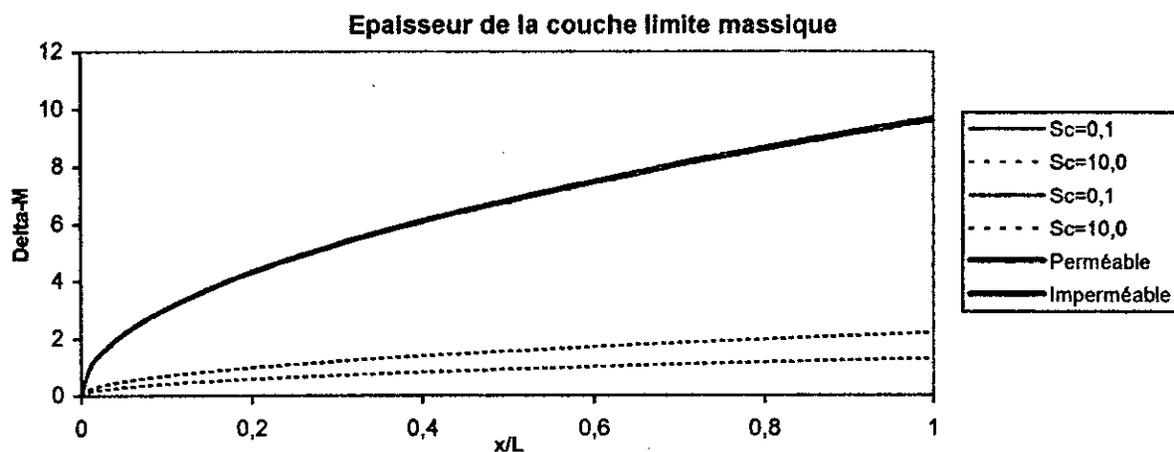


Figure IV-c.2

Variation du nombre de Sherwood en fonction du nombre de Reynolds pour différents nombres de Schmidt

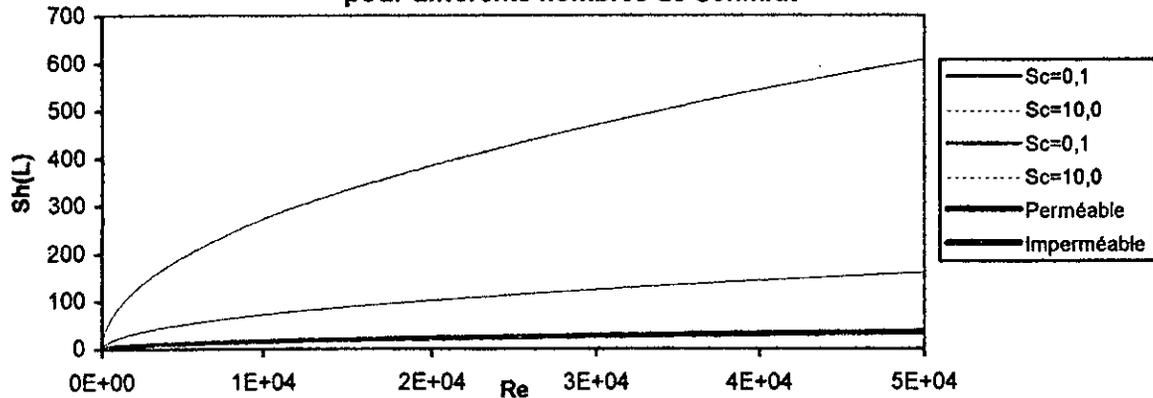


Figure IV-c.3

Variation du nombre de Sherwood moyen sur toute la plaque en fonction de ReL pour $Sc=0.1$ et différentes vitesses d'aspiration

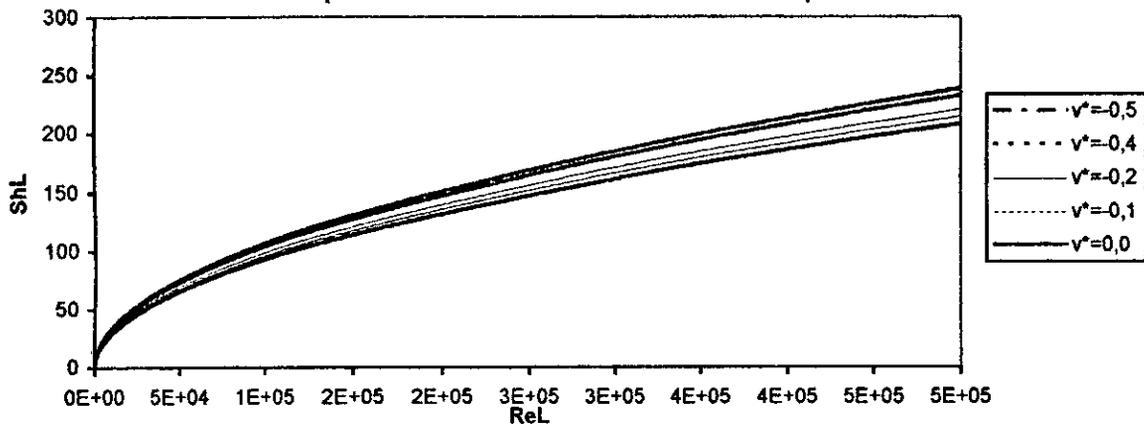


Figure IV-c.4

Variation du nombre de Sherwood moyen sur toute la plaque en fonction de ReL pour $Sc=10$ et différentes vitesses d'aspiration

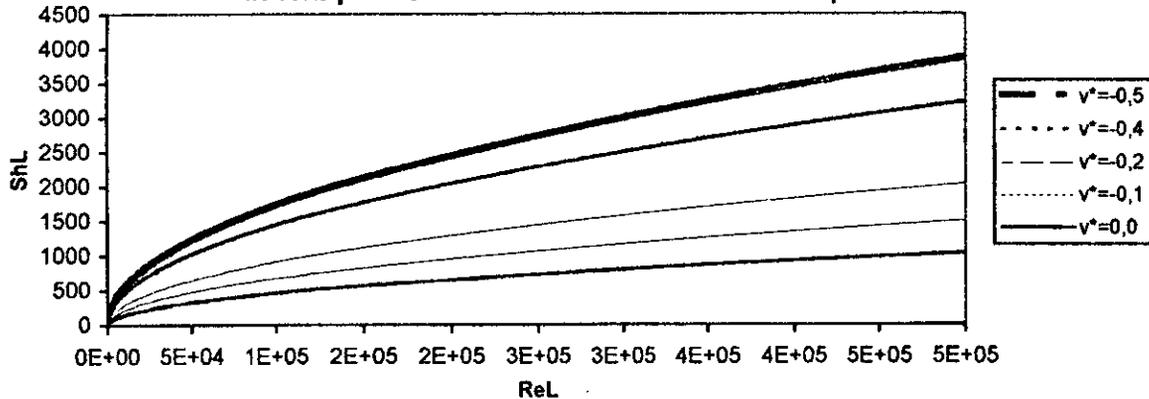


Figure IV-c.5

IV.2.3.2- Interprétation et discussion :

L'épaisseur de la couche limite massique définie par la valeur :

$99\% \frac{C - C_s}{C_\infty - C_s}$ est atteinte pour une plus petite valeur de η dans le cas perméable (figure IV-

c.1). Cette valeur est d'autant plus petite que le nombre de Schmidt augmente ceci peut être expliqué par analogie au résultat concernant la couche limite thermique. Nous remarquons aussi que l'épaisseur de la couche limite massique est plus faible dans le cas perméable (figure IV-c.2). Néanmoins la différence entre les cas perméable et imperméable n'est perceptible que pour les grands nombres de Schmidt.

Le nombre de Sherwood en fonction du nombre de Reynolds est plus grand dans le cas perméable (figure IV-c.3), mais cette différence est perceptible que pour les grands nombres de Schmidt.

Il est plus grand lorsque la vitesse d'aspiration augmente (figure IV-c.4 et IV-c.5), son augmentation est beaucoup plus importante pour les grands nombres de Schmidt.

IV.2.4- Conclusion :

D'après les résultats obtenus, on peut dire que le fait d'avoir une plaque poreuse aura pour effet d'augmenter (dans le cas laminaire) :

- Le coefficient de frottement
- Le flux de chaleur
- Le flux massique.

Pour les deux dernières grandeurs cette augmentation est très faible pour des nombres de Prandtl et de Schmidt faibles et beaucoup plus importante dans le cas contraire.

Par contre pour de très grands nombres de Reynolds il y a une diminution du coefficient de frottement moyen sur toute la plaque dans le cas perméable. Aussi dans ce cas l'écoulement laminaire est préservé sur une plus grande longueur, car l'aspiration a pour effet de retarder sur la plaque l'apparition du régime turbulent, d'où l'intérêt d'utiliser en aéronautique (où les nombres de Reynolds sont très importants $\sim 10^7$) des profils poreux sur la voilure.

IV.3- Régime transitoire :

IV.3.1-Présentation des résultats :

Les résultats concernant le régime transitoire sont donnés pour les variations des lignes de courant, des lignes isothermes, des lignes isoconcentration et l'épaisseur de la couche limite δ_d , par les figures suivantes :

- figure (IV-a) : lignes de courant pour $t^*=0.01, 0.20, 0.40$ respectivement pour une vitesse d'aspiration $v^* = -0.03$,
- figure (IV-b) : lignes de courant pour $t^*=0.60, 2.00, 2.50$, respectivement pour une vitesse d'aspiration $v^* = -0.03$,
- figure (IV-c) : lignes de courant pour $t^*=3.00, 3.50, 4.00$, respectivement pour une vitesse d'aspiration $v^* = -0.03$,
- figure (IV-d) : lignes de courant pour $t^*=0.01, 1.00, 2.00$, respectivement pour une vitesse d'aspiration $v^* = -0.3$,
- figure (IV-e) : lignes isothermes pour $t^*=1, 5.50$, respectivement pour une vitesse d'aspiration $v^* = 0, Pr=0.72$,
- figure (IV-f) : lignes isothermes pour $t^*=1, 1.60, 2.80, 3.00$ respectivement pour une vitesse d'aspiration $v^* = -0.03, Pr=0.72$,
- figure (IV-g) : lignes isoconcentrations pour $t^*=0.01, 5.50$, respectivement avec $v^* = 0$ et pour $Sc=0.72$,
- figure (IV-h) : lignes isoconcentrations pour $t=1, 1.6, 2.8, 3.0$ respectivement avec $v^* = -0.03$ et pour $Sc=0.72$,
- figure (IV-i.1), (IV-i.2) et (IV-i.3) : variations de δ_d en fonction du temps pour $v^*=0, v^*=-0.03$ et pour une vitesse d'aspiration v^* fonction de x .
- figure (IV-j) : variation de δ_T en fonction du temps pour $v^*=-0.03$

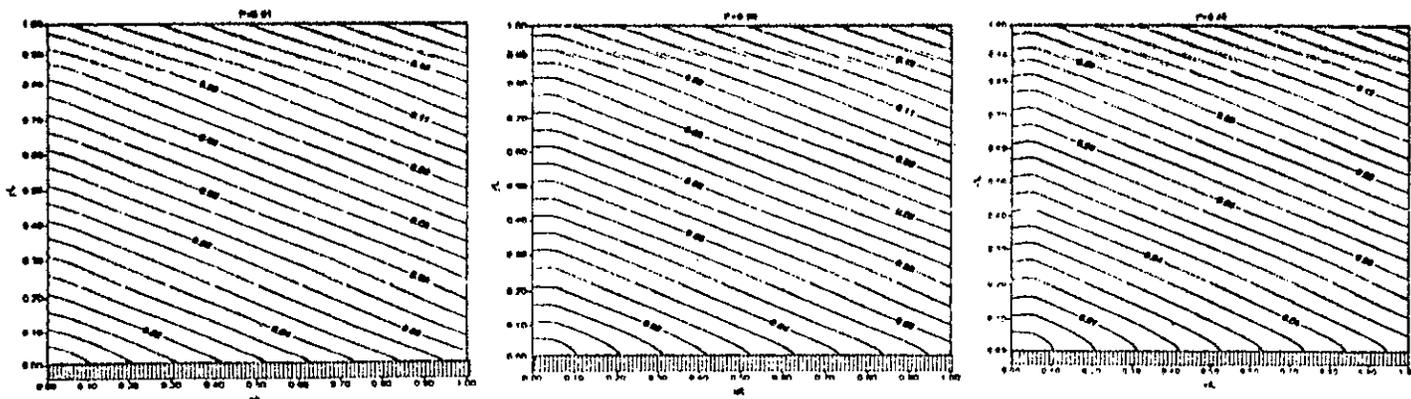


Figure IV-a: lignes de courant ($v^* = -0.03$)

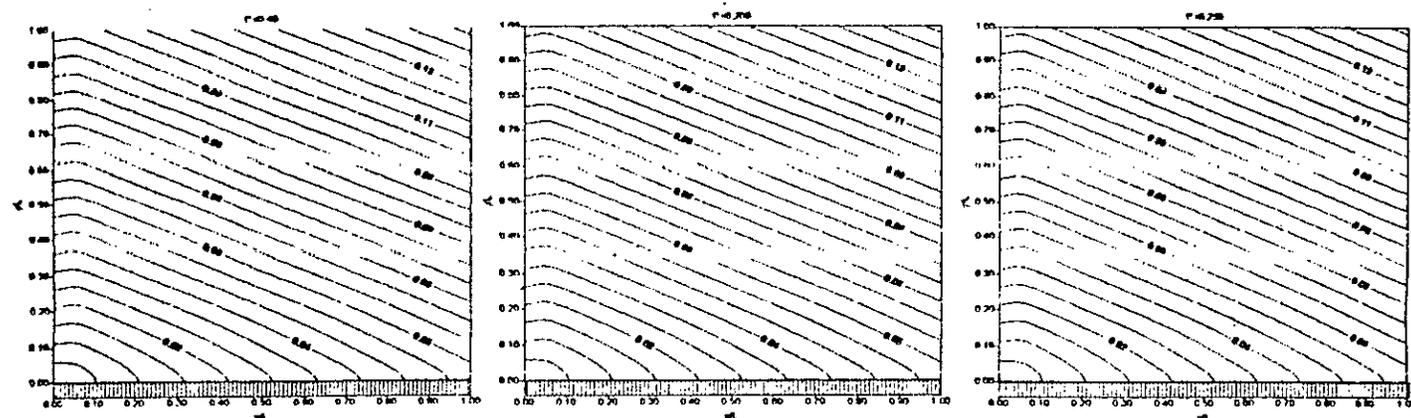


Figure IV-b: lignes de courant ($v^* = -0.03$)

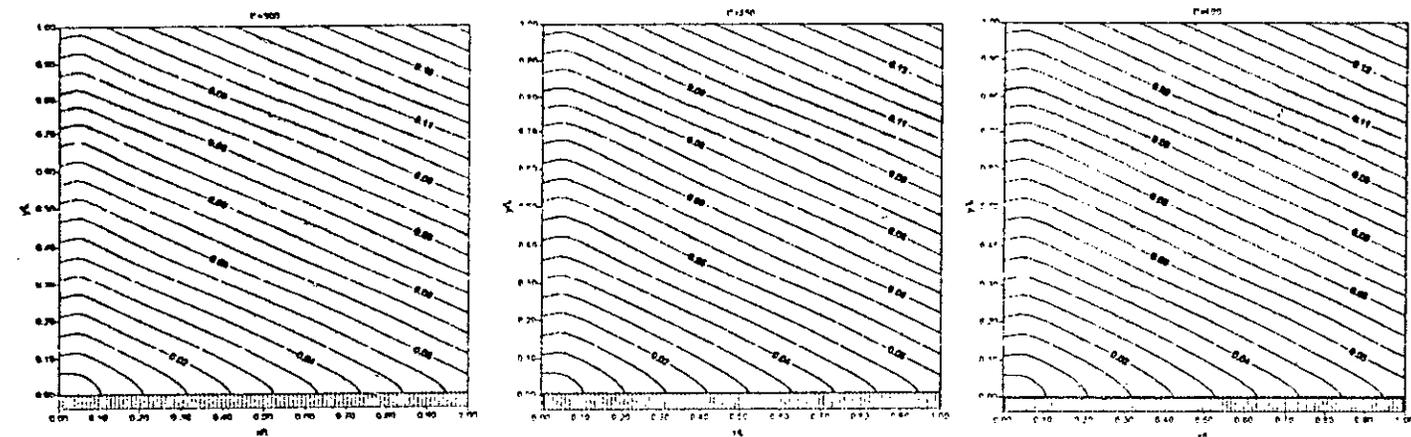


Figure IV-c: lignes de courant ($v^* = -0.03$)

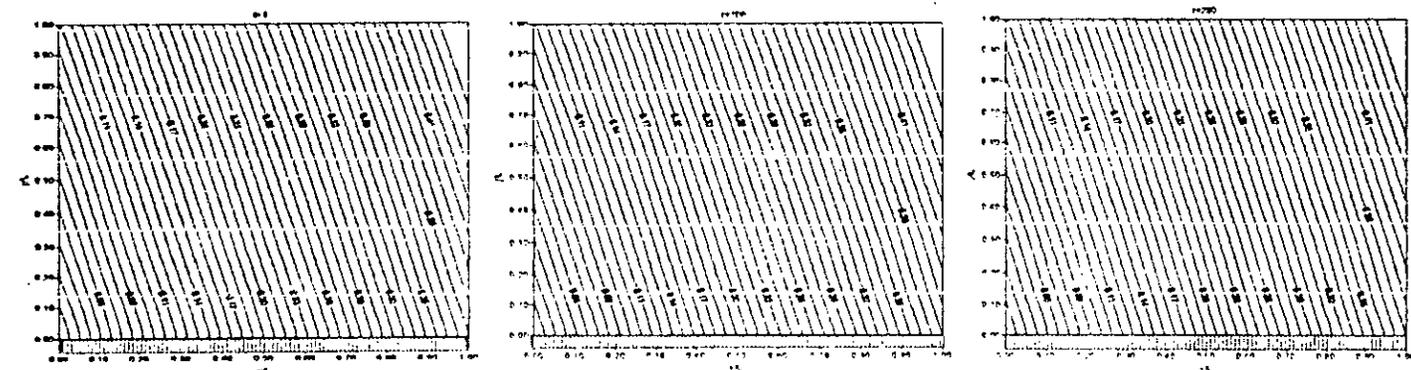


Figure IV-d: lignes de courant ($v^* = 0.3$)

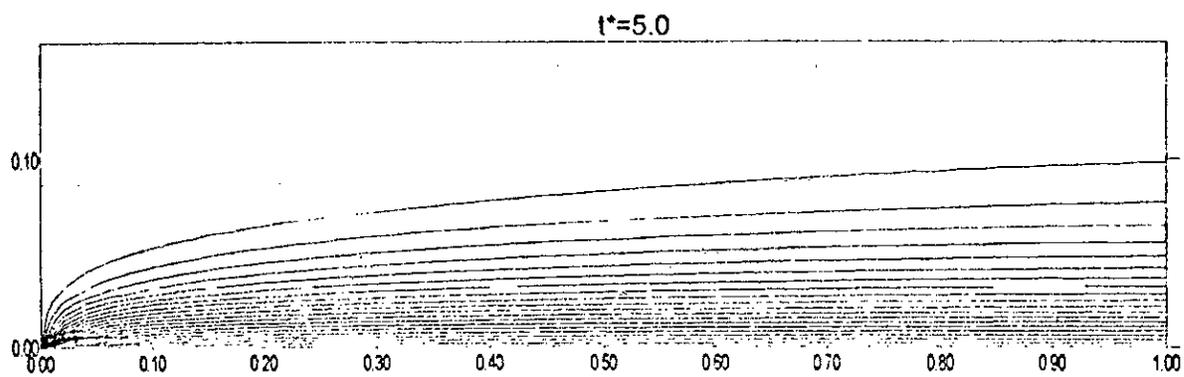
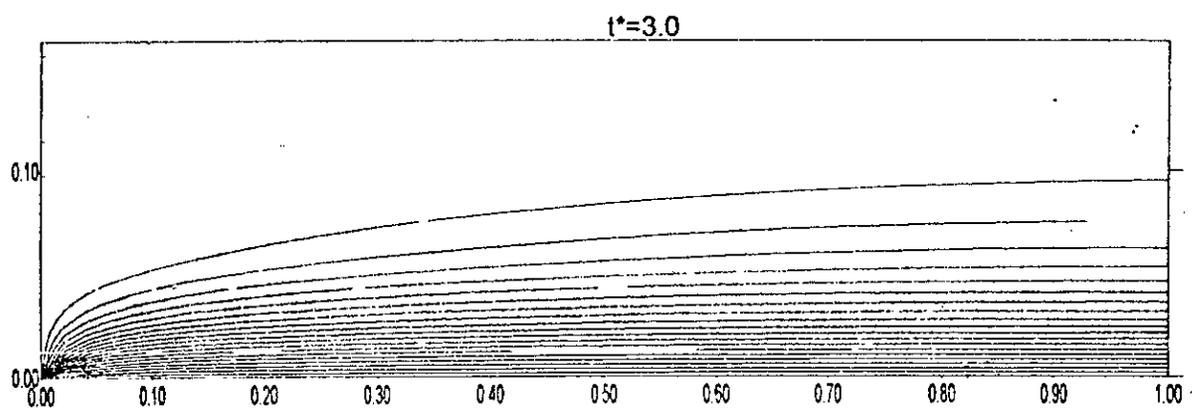
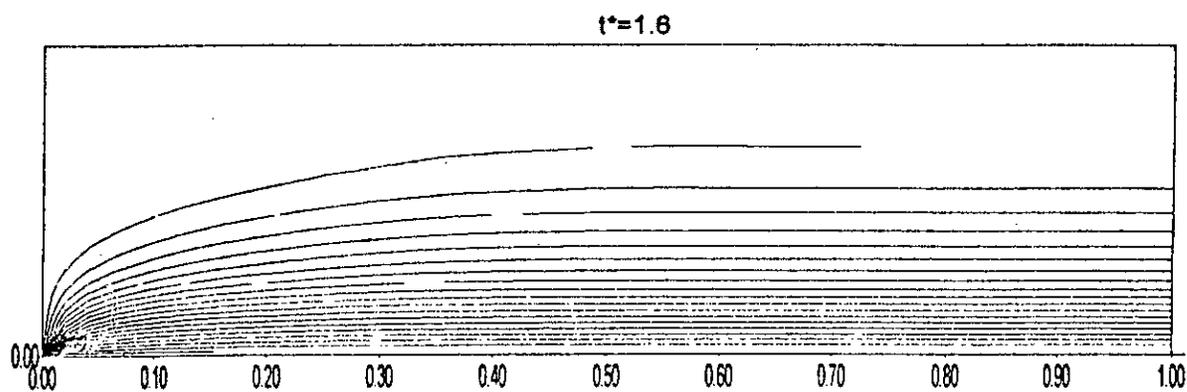
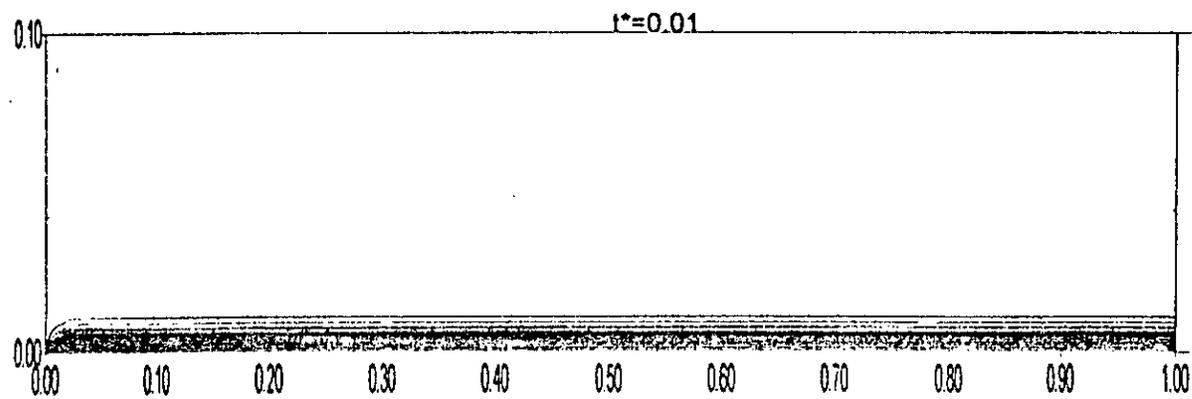


Figure IV-*e* : Lignes isothermes pour: $V^* = -0,03$, $Sc = 0,72$

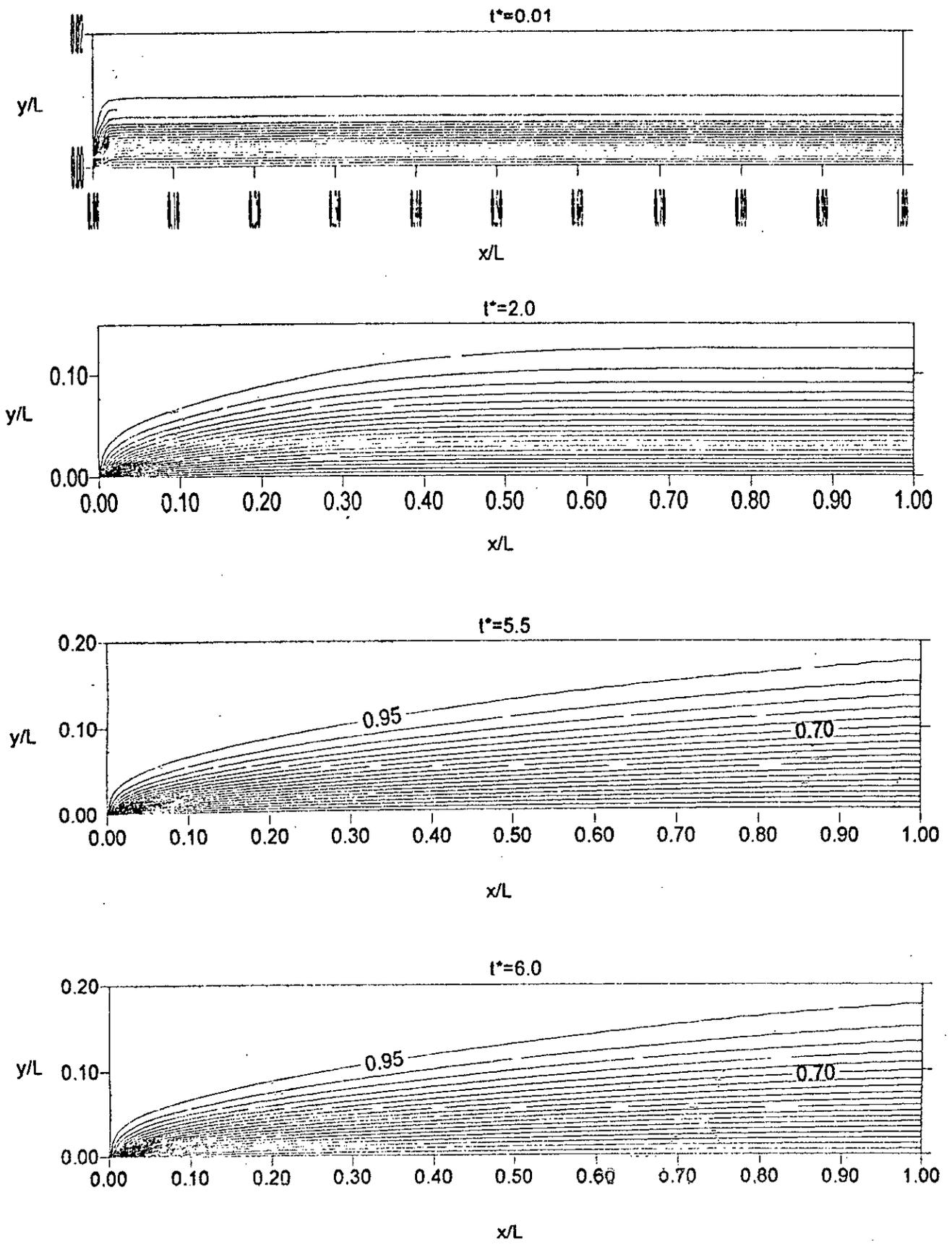


figure IV-8 : lignes isothermes pour $v^* = 0$ (impermeable), $Sc = 0,72$

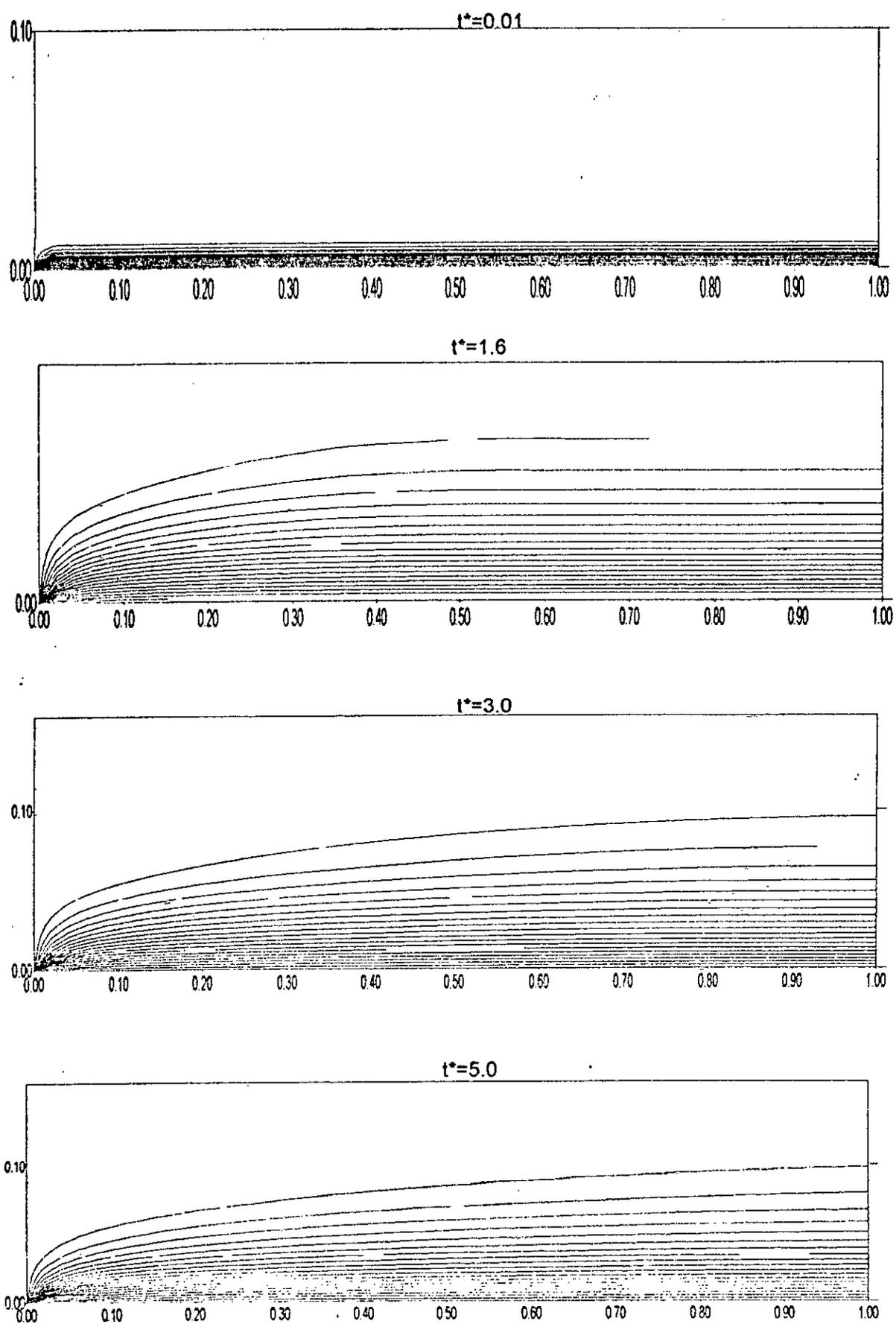


Figure IV-9 : Lignes isoconcentrations pour: $V^* = -0,03$, $Sc = 0.72$

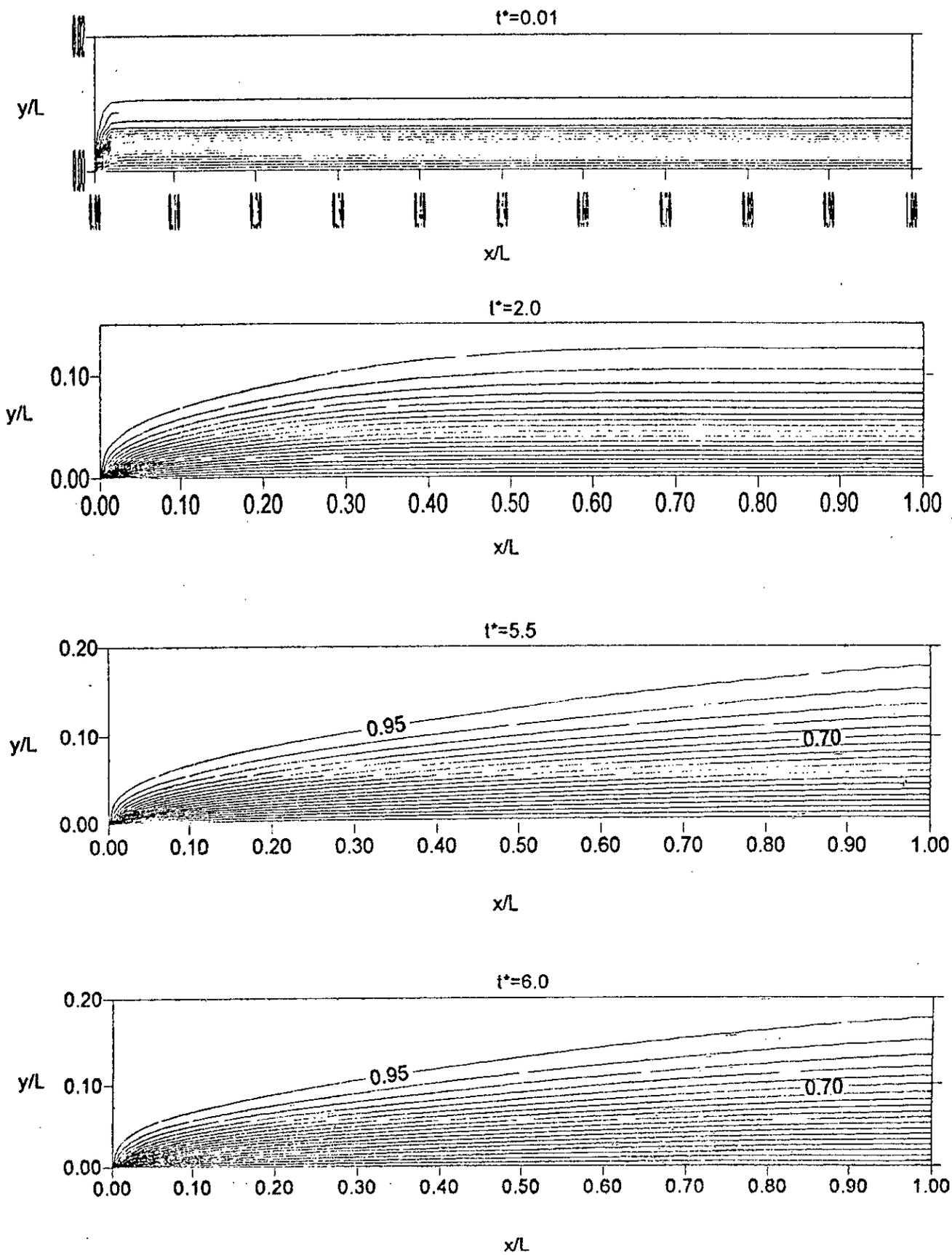


figure IV-**g** : lignes isoconcentrations pour $v^*=0$ (imperméable), $Sc=0,72$

variation de l'épaisseur de la couche limite dynamique en fonction du temps pour $v^* = 0$

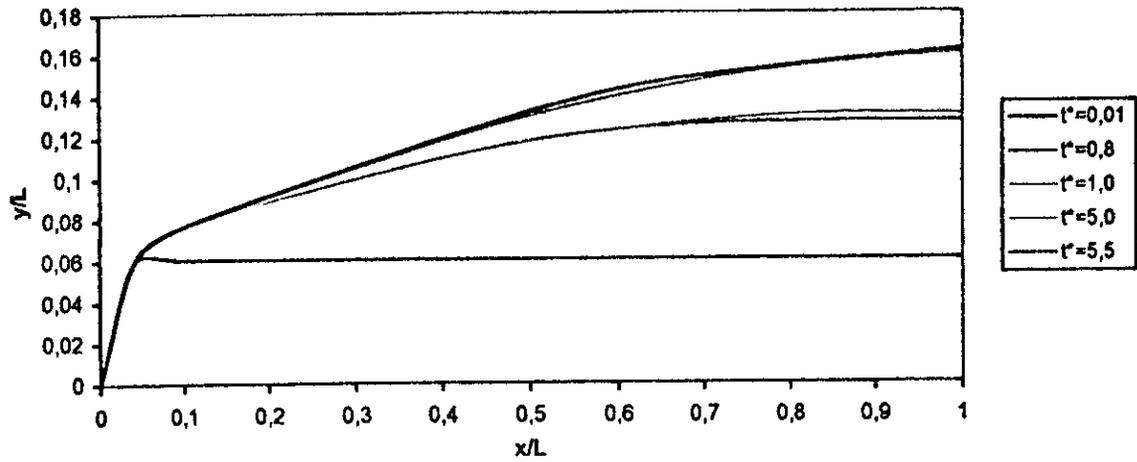


Figure IV-i.1

variation de l'épaisseur de la couche limite dynamique en fonction du temps pour $v^* = -0.03$

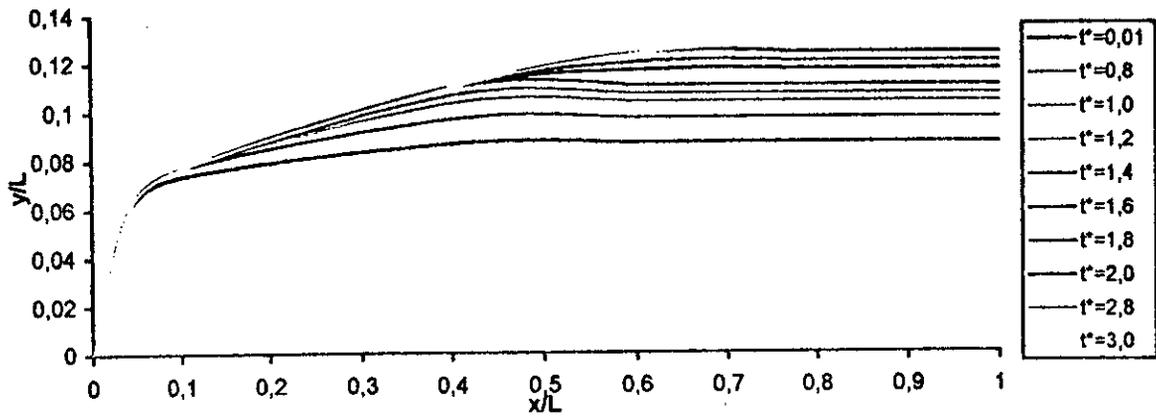


Figure IV-i.2

Variation de l'épaisseur de la couche limite dynamique en fonction du temps ($v^* = f(x)$)

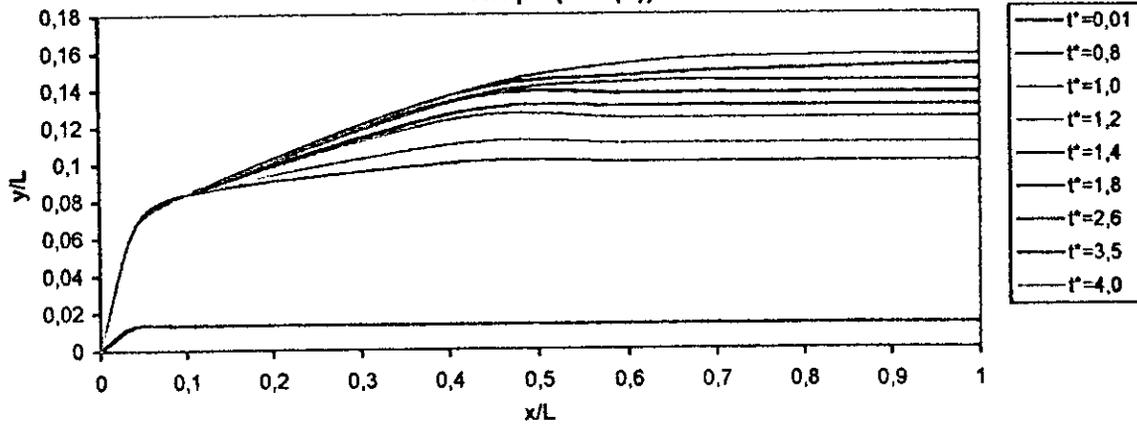


Figure IV-i.3

variation de la couche limite thermique en fonction du temps pour $v^* = -0.03$ et $Pr=0.72$

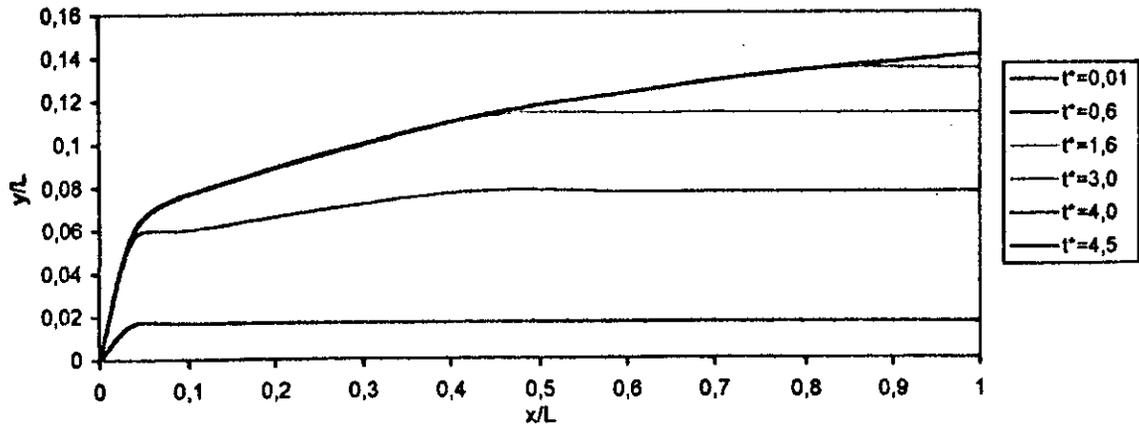


Figure IV-j

IV.3.2 Interprétation des résultats :

Pour la résolution des équations de couche limite en régime transitoire nous avons pris un nombre de Reynolds, $Re=10^3$, un nombre de Prandtl, $Pr=0.72$ et un nombre de Schmidt $Sc=0.72$. Concernant la vitesse d'aspiration uniforme nous avons pris un rapport : $v^* = \frac{v_w}{U_\infty} = -0.03$, ce rapport a été choisi de telle sorte à satisfaire la condition [24] :

$$v^* < \frac{1}{\sqrt{Re}},$$

qui nous permet de considérer que les effets de viscosité n'atteignent pas l'écoulement potentiel loin de la paroi.

Nous remarquons sur les figures (IV-a), (IV-b) et (IV-c) une variation du profil des lignes de courant en fonction du temps pour une vitesse d'aspiration uniforme $v^*=-0,03$, cette variation est très remarquable au début de la plaque où les effets de bord sont accentués. Nous voyons que cette variation se stabilise pour $t^*=3.00$; ceci est confirmé par les courbes de la figure (IV-i.2) sur laquelle nous voyons que pour δ_a le régime permanent est atteint pour $t^*=4,2$ avec une même vitesse d'aspiration $v^* = -0,03$.

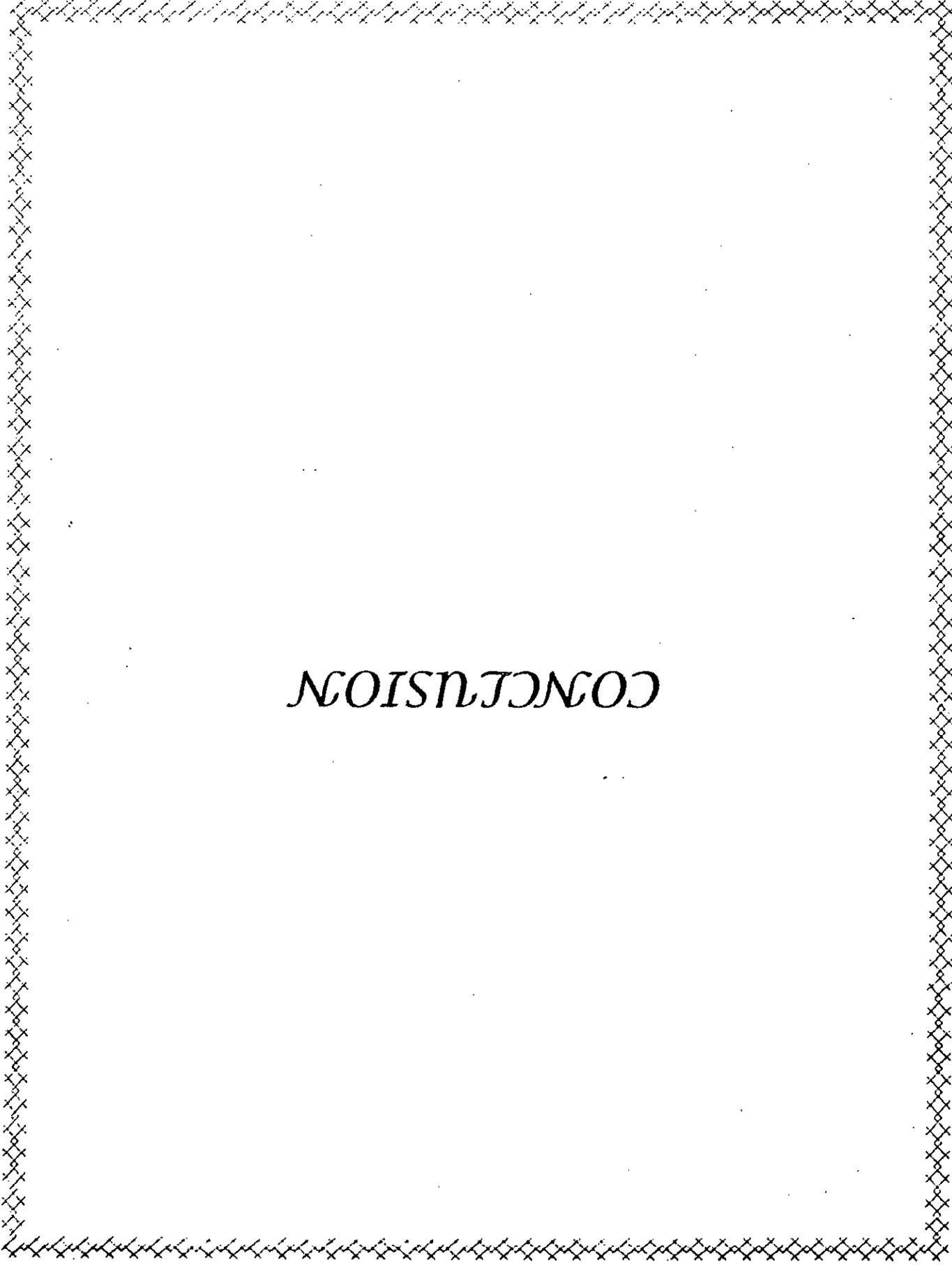
Aussi nous pouvons voir sur les figures (IV-i.1), (IV-i.2) et (IV-i.3) que le régime permanent est atteint plus rapidement dans le cas où l'aspiration est uniforme ($t^*=3.0$). D'autre part, nous remarquons que l'épaisseur de la couche limite dynamique devient constante à partir de $x^*=0.6$ en régime permanent. Ce qui est confirmé par [2].

Dans le cas d'une vitesse d'aspiration non uniforme, nous avons pris $v^* = \frac{v}{U_\infty} = f(1/\sqrt{x})$ pour concorder avec la vitesse utilisée pour la résolution à l'aide de Runge-Kutta en donnée par [5] :

$$v^* = \frac{v_x}{U_\infty} \sqrt{Re_x} = -f(0)$$

Concernant les figures (IV-e), (IV-f), (IV-g) et (IV-h) nous remarquons que les isothermes et les isoconcentrations évoluent en même temps que les épaisseurs des couches limite thermique et massique.

Sur la figure (IV-j), pour le cas d'une aspiration uniforme, nous remarquons que l'épaisseur de la couche limite thermique et par analogie massique est supérieure à l'épaisseur de la couche limite dynamique, ceci est dû au fait que les nombres de Prandtl et de Schmidt qui reflètent le rapport entre la viscosité cinématique et le coefficient de diffusivité thermique (Prandtl) et le coefficient de diffusion massique (Schmidt) est inférieur à l'unité. Nous voyons aussi que le régime permanent est atteint plus rapidement pour la couche limite dynamique, car dans notre cas (perméable), les vitesses de transfert de chaleur et de masse sont plus faibles par rapport à la vitesse à laquelle se diffuse les effets de la viscosité à cause du terme $1/Re.Pr$ et $1/Re.Sc$ dans les équations de couches limites thermique et massique.



CONCLUSION

CONCLUSION

Notre étude a porté sur la résolution des équations de couches limites dynamique, thermique et massique en régime permanent, en utilisant la technique de similarité pour pouvoir écrire les équations de couches limites sous une forme linéaire et la méthode de Runge-Kutta pour la résolution, puis en régime transitoire à l'aide d'une discrétisation des équations de couches limites en régime transitoire, avec un schéma « UPWIND » et une résolution avec la méthode ADI pour laquelle nous avons utilisé l'algorithme de Thomas pour résoudre les systèmes tridiagonaux.

Après avoir résolu l'équation de couche limite dynamique en régime permanent, nous pouvons dire que :

- la détermination du coefficient de frottements nous montre qu'il augmente dans le cas perméable (en régime laminaire), mais qu'il possède une valeur inférieure à celui du cas d'un écoulement à très grand nombre de Reynolds,
- l'épaisseur de la couche limite dynamique diminue à cause de l'aspiration.

Nous en déduisons que l'aspiration est avantageuse pour les écoulements à grand nombre de Reynolds ; car elle permet de repousser le point de transition (retarder l'apparition de la turbulence), et donc d'avoir un plus faible coefficient de frottement et plus faible épaisseur de la couche limite dynamique ; d'où l'intérêt de l'utiliser en aéronautique.

Aussi la résolution des équations de couches limites thermique et massique, nous a montré :

- l'existence d'une analogie entre les couches limites thermique et massique,
- l'augmentation des coefficients de transfert de chaleur et de masse dans le cas perméable, moyennant les deux nombres de Nusselt et de Sherwood,
- l'avantage de l'aspiration pour des nombres de Prandtl et de Schmidt croissants.

En régime transitoire, nous avons vu que le régime permanent est atteint plus rapidement pour une aspiration uniforme, car l'aspiration a tendance à diminuer les effets de la viscosité.

Conclusion

En comparant les couches limites thermique et dynamique, nous voyons que cette dernière a une épaisseur plus faible et qu'elle atteint le régime permanent plus rapidement à cause du nombre de Prandtl, $Pr=0.72 < 1$

Finalement, nous recommandons pour l'étude d'un problème constitué d'un milieu poreux de faire une étude complète qui passe par la résolution des équations régissant l'écoulement externe, donc par la connaissance des paramètres qui le régissent, et l'étude du milieu poreux par le biais des équations de transfert, pour ensuite faire un raccordement entre les deux

Annexe - A -

```

C *****
C P.F.E : Simulation numérique d'un écoulement sur une paroi poreuse
C Présenté par : M. F. TOUNSI et M. M. ZEDEK
C Proposé par : S. LARBI ; H. BELHANECHÉ ; M. OUKACHA
C Programme pour la résolution des équations de couche limite
C dynamique, thermique et massique en régime permanent
C *****
    
```

```

dimension y1(5),dyl(5),x(20),o(20)
real*8 h,eta0,etamax,yzero,z1,z2,tzero,w1,w2,pr,u,ul,v,Cflam,cftur
$,Nulam,Nutur,Re,X2
integer n,k,j,l,m,mm
open (50,file='mourad.Res')
open (71,file='Nu-Re.Res')
open (72,file='Cf-Re.Res')
open (73,file='Cf-Rel.Res')
m=1
29 h=.1
   etamax=10.
   n=20
   goto (10,11,12,13,14,15),m
10 x2=-.5
   goto 31
11 x2=-.4
   goto 31
12 x2=-.3
   goto 31
13 x2=-.2
   goto 31
14 x2=-.1
   goto 31
15 x2=0.
31 write(50,155) x2
   print*, 'v*=',x2
   z1=0.
   z2=5.
   do 3 k=1,n
   eta0=0.
   y1(1)=-x2
   y1(2)=0.
   yzero=(z2+z1)/2.
   y1(3)=yzero
   x(k)=y1(3)
   ul=0.
   v=x2
   if (k.lt.n) goto 2
   write (70,150) k
   write (70,200)
   write (70,101) eta0,y1(1),y1(2),y1(3),ul,v
   print*, x(n)
2 call RK(y1,dyl,h,eta0,k,n)
   if(eta0.lt.etamax-h/2.) goto 2
   if(y1(2).lt.1.) goto 35
   z2=yzero
   goto 3
35 z1=yzero
3 continue
   write (72,155) x2
   mm=1
23 goto (18,19,20,21),mm
18 re=100000.
    
```



```
      goto 22
19 re=1000000.
   goto 22
20 re=10000000.
   goto 22
21 re=100000000.
22 Cflam=2.*x(20)/sqrt(re)
   Cftur=0.0315*(re)**(-1./7.)
   write (73,102) Re,cflam,cftur
   mm=mm+1
   if (mm.le.4) goto 23
   do40 re=1e3,5e5,1e3
   Cflam=2.*x(20)/sqrt(re)
   write (73,102) Re,cflam,cftur
40 continue
   j=1
60 goto (61,65,68),j
61 Pr=0.10
   w2=1.
   goto69
65 Pr=1.0
   w2=1.8
   goto 69
68 Pr=10.
   w2=5.
69 write(50,151) Pr
   print*, 'Pr=', pr
   w1=-1.
   do 4 l=1,n
   eta0=0.
   y1(1)=-x2
   y1(2)=0.
   y1(3)=x(n)
   y1(4)=0.
   tzero=(w1+w2)/2.
   y1(5)=tzero
   o(l)=y1(5)
   ul=y1(2)
   v=x2
   if (l.lt.n) goto 5
   write (50,150) l
   write (50,200)
   write (50,101) eta0,y1(1),y1(2),y1(3),y1(4),y1(5),ul,v
   print*, o(n)
5 call RK1(y1,dyl,h,eta0,Pr,l,n)
   if(eta0.lt.etamax-h/2.) goto 5
   if(y1(4).lt.1.) goto 36
   w2=tzero
   goto 4
36 w1=tzero
4 continue
   write (71,155) x2
   write (71,151) pr
   do 30 re=0.,1e7,1e4
   Nulam=2.*o(20)*sqrt(re)
   Nutur=0.0296*5./9.*(re)**(4./5.)*(pr)**(1./3.)
   write (71,103) Re,nulam,nutur
30 continue
   j=j+1
   if (j.le.3) goto 60
   m=m+1
```

```

C *****
C P.F.E : Simulation numérique d'un écoulement sur une paroi poreuse
C Présenté par : M. F. TOUNSI et M. M. ZEDEK
C Proposé par : S. LARBI ; H. BELHANECHÉ ; M. OUKACHA
C Programme pour la résolution des équations de couche limite
C dynamique, thermique et massique en régime transitoire
C *****

```

```

common/zone1/U(50,800),V(50,800),Uk1(50,800),Uk2(50,800),
$ Psi(50,800),T(50,800),Tk1(50,800),Tk2(50,800)

```

```

common/zone2/A(800),B(800),C(800),D(800),
$ At(800),Bt(800),Ct(800),Dt(800),X(800),Y(800)

```

```

common/zone3/deltaX,deltaY,deltaT,RE,V0, Temps, LTemps, Nx, Ny, Pr
integer temps, LTemps, om

```

```
real*8 Limitetemps
```

```

open (1, file='Profil-1.Res')
open (2, file='Profil-2.Res')
open (3, file='Profil-3.Res')
open (4, file='Profil-4.Res')
open (5, file='Profil-5.Res')
open (6, file='Profil-6.Res')
open (7, file='Profil-7.Res')
open (8, file='Profil-8.Res')
open (9, file='Profil-9.Res')
open (10, file='Profil-10.Res')
open (11, file='Profil-11.Res')

```

```

open (12, file='Psi-temp1.Res')
open (13, file='Psi-temp2.Res')
open (14, file='Psi-temp3.Res')
open (15, file='Psi-temp4.Res')
open (16, file='Psi-temp5.Res')
open (17, file='Psi-temp6.Res')
open (18, file='Psi-temp7.Res')
open (19, file='Psi-temp8.Res')
open (20, file='Psi-temp9.Res')
open (21, file='Psi-temp10.Res')
open (22, file='Psi-temp11.Res')

```

```
Re=10000.
```

```
PR=1.2
```

```
V0=-0.05
```

```
LimiteTemps=2.
```

```
Nx=20
```

```
Ny=300
```

```
deltaT=.01
```

```
deltaX=1./20.
```

```
deltaY=1./1000.
```

```
LTemps=limiteTemps/deltaT+1
```

```

C -----
C Les conditions initiales
C -----

```

```

U(1,1)=0.
T(1,1)=0.
V(1,1)=0.
do 13 i=2,Nx

```

```

C -----
C Les conditions sur la plaque
C -----

```

```

U(i,1)=0.
V(i,1)=V0

```

Annexe - B -

```

T(i,1)=0.
do 13 j=2,Ny
C -----
C           Les conditions à l'intérieur du domaine
C -----
U(1,j)=1.
V(1,j)=0.
T(1,j)=1.
U(i,j)=1.
V(i,j)=0.
T(i,j)=1.
13 Continue
C -----
C           Début de la boucle temps
C -----
do 500 Temps=1,LTemps
write (*,*) 'temps=',temps
write (*,*) 'temp=',temps*(Re*1.4e-5)
C -----
C           Début de l'ADI
C           Première direction
C           Conditions limites Uk1 pour j=1
C -----
do 1 iL1=1,Nx
1 Uk1(iL1,1)=U(iL1,1)
C           Condition limite à l'entrée pour Uk1
do 99 m=1,Ny
99 Uk1(1,m)=U(1,m)
C           Début de la boucle de la première direction
do 100 j=2,Ny-1
C           Détermination des coefficients ai, bi, ci
do 10 ia=3,Nx-2
if (u(ia,j).lt.0.) then
a(ia-1)=-u(ia,j)/(4.*deltaX)
goto 10
else
a(ia-1)=-u(ia-1,j)/(4.*deltaX)
endif
10 continue
do 20 ib=2,Nx-1
if (u(ib,j).lt.0.) then
b(ib-1)=2./deltaT+1./(4.*deltaX)*(u(ib+1,j)-u(ib,j))
goto 20
else
b(ib-1)=2./deltaT+1./(4.*deltaX)*(u(ib,j)-u(ib-1,j))
endif
20 continue
do 30 ic=2,Nx-2
if (u(ic,j).lt.0.) then
c(ic-1)=u(ic+1,j)/(4.*deltax)
goto 30
else
c(ic-1)=u(ic,j)/(4.*deltaX)
endif
30 continue
if (u(Nx-1,j).lt.0.) then
a(Nx-2)=-(-u(Nx-1,j)+u(Nx,j))/(4.*deltaX)
goto 31
else
a(Nx-2)={-u(Nx-2,j)+u(Nx-1,j)}/(4.*deltaX)
goto 31

```

```

endif
C Détermination des seconds membres
31 if (u(2,j).lt.0..and.v(2,j).lt.0.) then
    D(1)=-1./(4.*deltaY)*(v(2,j+1)*(u(2,j+1)+u(2,j))-v(2,j)
    *(u(2,j)+u(2,j-1)))+1./(re*deltay**2.)
    *(u(2,j+1)-2.*u(2,j)+u(2,j-1))+2.*u(2,j)/deltat
    $+u(2,j)/(4.*deltaX)*uk1(1,j)
    goto 41
    else if (u(2,j).ge.0..and.v(2,j).lt.0.) then
    D(1)=-1./(4.*deltaY)*(v(2,j+1)*(u(2,j+1)+u(2,j))-v(2,j)
    *(u(2,j)+u(2,j-1)))+1./(re*deltay**2.)
    *(u(2,j+1)-2.*u(2,j)+u(2,j-1))+2.*u(2,j)/deltat
    $+u(1,j)/(4.*deltaX)*uk1(1,j)
    goto 41
    else if (u(2,j).lt.0..and.v(2,j).ge.0.) then
    D(1)=-1./(4.*deltaY)*(v(2,j)*(u(2,j+1)+u(2,j))-v(2,j-1)
    *(u(2,j)+u(2,j-1)))+1./(re*deltay**2.)
    *(u(2,j+1)-2.*u(2,j)+u(2,j-1))+2.*u(2,j)/deltat
    $+u(2,j)/(4.*deltaX)*uk1(1,j)
    goto 41
    else
    if (u(2,j).ge.0..and.v(2,j).ge.0.) then
    D(1)=-1./(4.*deltaY)*(v(2,j)*(u(2,j+1)+u(2,j))-v(2,j-1)
    *(u(2,j)+u(2,j-1)))+1./(re*deltay**2.)
    *(u(2,j+1)-2.*u(2,j)+u(2,j-1))+2.*u(2,j)/deltat
    $+u(1,j)/(4.*deltaX)*uk1(1,j)
    endif
    endif
41 do 40 id=3,Nx-1
    if (v(id,j).lt.0.) then
    D(id-1)=-1./(4.*deltaY)*(v(id,j+1)*(u(id,j+1)+u(id,j))-v(id,j)
    *(u(id,j)+u(id,j-1)))+1./(re*deltay**2.)*(u(id,j+1)-2.*u(id,j)
    $+u(id,j-1))+2.*u(id,j)/deltat
    goto 40
    else
    D(id-1)=-1./(4.*deltaY)*(v(id,j)*(u(id,j+1)+u(id,j))-v(id,j-1)
    *(u(id,j)+u(id,j-1)))+1./(re*deltay**2.)*(u(id,j+1)-2.*u(id,j)
    $+u(id,j-1))+2.*u(id,j)/deltat
    endif
40 continue
C -----
C Résolution par l'algorithme de Thomas
C -----
42 call tridag(a,b,c,d,X,Nx-2)
C Injection des résultats dans Ui à l'étape k+1/2
do 50 ix=2,Nx-1
50 Uk1(ix,j)=X(ix-1)
C Conditions aux limites à la sortie pour Uk1
do 98 mm=1,Ny
98 Uk1(Nx,mm)=Uk1(Nx-1,mm)
100 continue
C Fin de la première direction
C -----
C Début de la deuxième direction
C Conditions limites sur Uk2 pour i=1
C -----
do 3 jL1=2,Ny
3 Uk2(1,jL1)=U(1,jL1)
C Condition limite pour Uk2 sur la plaque
do 97 l=1,Nx
97 Uk2(1,l)=U(1,l)

```

```

C      Début de la boucle sur i
do 200 i=2,Nx-1
C      Détermination des coefficients aj,bj,cj
do 210 ja=3,Ny-2
if (v(i,ja).lt.0.) then
a(ja-1)=-v(i,ja)/(4.*deltay)-1./(Re*deltaY**2.)
goto 210
else
a(ja-1)=-v(i,ja-1)/(4.*deltay)-1./(Re*deltaY**2.)
endif
210  continue
do 220 jb=2,Ny-1
if (v(i,jb).lt.0.) then
b(jb-1)=2./deltaT+2./(re*deltay**2.)+1./(4.*deltaY)*(v(i,jb+1)
$-v(i,jb))
goto 220
else
b(jb-1)=2./deltaT+2./(re*deltay**2.)+1./(4.*deltaY)*(v(i,jb)
$-v(i,jb-1))
endif
220  continue
do 230 jc=2,Ny-2
if (v(i,jc).lt.0.) then
c(jc-1)=v(i,jc+1)/(4.*deltay)-1./(re*deltay**2.)
goto 230
else
c(jc-1)=v(i,jc)/(4.*deltay)-1./(re*deltay**2.)
endif
230  continue
if(v(i,Ny-1).lt.0.) then
a(Ny-2)-(-v(i,Ny-1)+v(i,Ny))/(4.*deltaY)-2./(Re*deltaY**2.)
goto 32
else
a(Ny-2)=(-v(i,Ny-2)+v(i,Ny-1))/(4.*deltaY)-2./(Re*deltaY**2.)
goto 32
endif
C      Détermination des seconds membres
32  if (u(i,2).lt.0..and.v(i,2).lt.0.) then
D(1)=-1./(4.*deltaX)*(u(i+1,2)*(uk1(i+1,2)+uk1(i,2))-u(i,2)
$*(uk1(i,2)+uk1(i-1,2)))+2.*uk1(i,2)/deltat
$-Uk2(i,1)*(-v(i,2)/(4.*deltaY)-1./(Re*deltaY**2.))
goto 43
else if (u(i,2).ge.0..and.v(i,2).lt.0.) then
D(1)=-1./(4.*deltaX)*(u(i,2)*(uk1(i+1,2)+uk1(i,2))-u(i-1,2)
$*(uk1(i,2)+uk1(i-1,2)))+2.*uk1(i,2)/deltat
$-uk2(i,1)*(-v(i,2)/(4.*deltaY)-1./(Re*deltaY**2.))
goto 43
else if (u(i,2).lt.0..and.v(i,2).ge.0.) then
D(1)=-1./(4.*deltaX)*(u(i+1,2)*(uk1(i+1,2)+uk1(i,2))-u(i,2)
$*(uk1(i,2)+uk1(i-1,2)))+2.*uk1(i,2)/deltat
$-uk2(i,1)*(-v(i,1)/(4.*deltaY)-1./(Re*deltaY**2.))
goto 43
else if (u(i,2).ge.0..and.v(i,2).ge.0.) then
D(1)=-1./(4.*deltaX)*(u(i,2)*(uk1(i+1,2)+uk1(i,2))-u(i-1,2)
$*(uk1(i,2)+uk1(i-1,2)))+2.*uk1(i,2)/deltat
$-uk2(i,1)*(-v(i,1)/(4.*deltaY)-1./(Re*deltaY**2.))
endif
43  do 240 jd=3,Ny-1
if (u(i,jd).lt.0.) then
D(jd-1)=2.*Uk1(i,jd)/deltaT-(u(i+1,jd)*(Uk1(i+1,jd)+Uk1(i,jd))

```

Annexe - B -

```

$-u(i
$,jd)*(Uk1(i,jd)+Uk1(i-1,jd))/(4.*deltaX)
  goto 240
  else
    D(jd-1)=2.*Uk1(i,jd)/deltaT-(u(i,jd)*(Uk1(i+1,jd)+Uk1(i,jd))
$-u(i-1
$,jd)*(Uk1(i,jd)+Uk1(i-1,jd))/(4.*deltaX)
  endif
240  continue
C -----
C      résolution par l'algorithme de Thomas
C -----
44  call tridag(a,b,c,d,X,Ny-2)
C      Injection des résultats dans Uk2
do 250 jx=2,Ny-1
250  Uk2(i,jx)=X(jx-1)
C      Fin de la deuxième boucle sur i
200  continue
C      Conditions aux limites pour i=Nx
do 4 jLNx=1,Ny-1
4    Uk2(Nx,jLNx)=Uk2(Nx-1,jLNx)
C      Conditions aux limites pour j=Ny
do 111 jj=2,Nx
111  Uk2(jj,Ny)=Uk2(jj,Ny-1)
C -----
C Résolution de l'équation de l'énergie ou de la conservation de la masse
C -----
C      Conditions limites Tkl pour jt=1
do 144 iLlt=1,Nx
144  Tkl(iLlt,1)=T(iLlt,1)
C      Conditions aux limites à l'entrée pour Ukl
do 9944 mt=1,Ny
9944 Tkl(1,mt)=T(1,mt)
C      Début de la boucle de la première direction
do 10044 jt=2,Ny-1
C      Détermination des coefficients ait, bit, cit
do 1044 iat=3,Nx-2
  if (u(iat,jt).lt.0.) then
    aT(iat-1)=-u(iat,jt)/(4.*deltaX)
    goto 1044
  else
    aT(iat-1)=-u(iat-1,jt)/(4.*deltaX)
  endif
1044 continue
do 2044 ibt=2,Nx-1
  if (u(ibt,jt).lt.0.) then
    bT(ibt-1)=2./deltaT+1./(4.*deltaX)*(u(ibt+1,jt)-u(ibt,jt))
    goto 2044
  else
    bT(ibt-1)=2./deltaT+1./(4.*deltaX)*(u(ibt,jt)-u(ibt-1,jt))
  endif
2044 continue
do 3044 ict=2,Nx-2
  if (u(ict,jt).lt.0.) then
    cT(ict-1)=u(ict+1,jt)/(4.*deltax)
    goto 3044
  else
    cT(ict-1)=u(ict,jt)/(4.*deltaX)
  endif
3044 continue

```

Annexe - B -

```

    if (u(Nx-1,jt).lt.0.) then
    aT(Nx-2)=(-u(Nx-1,jt)+u(Nx,jt))/(4.*deltaX)
    goto 3144
    else
    aT(Nx-2)=(-u(Nx-2,jt)+u(Nx-1,jt))/(4.*deltaX)
    goto 3144
    endif
C      Détermination des seconds membres
3144  if (u(2,jt).lt.0..and.v(2,jt).lt.0.) then
    DT(1)=-1./(4.*deltaY)*(v(2,jt+1)*(u(2,jt+1)+u(2,jt))-v(2,jt)
    *(u(2,jt)+u(2,jt-1)))+1./(RE*Pr*deltay**2.)
    *(u(2,jt+1)-2.*u(2,jt)+u(2,jt-1))+2.*u(2,jt)/deltat
    $+u(2,jt)/(4.*deltaX)*Tk1(1,jt)
    goto 4144
    else if (u(2,jt).ge.0..and.v(2,jt).lt.0.) then
    DT(1)=-1./(4.*deltaY)*(v(2,jt+1)*(u(2,jt+1)+u(2,jt))-v(2,jt)
    *(u(2,jt)+u(2,jt-1)))+1./(RE*Pr*deltay**2.)
    *(u(2,jt+1)-2.*u(2,jt)+u(2,jt-1))+2.*u(2,jt)/deltat
    $+u(1,jt)/(4.*deltaX)*Tk1(1,jt)
    goto 4144
    else if (u(2,jt).lt.0..and.v(2,jt).ge.0.) then
    DT(1)=-1./(4.*deltaY)*(v(2,jt)*(u(2,jt+1)+u(2,jt))-v(2,jt-1)
    *(u(2,jt)+u(2,jt-1)))+1./(RE*Pr*deltay**2.)
    *(u(2,jt+1)-2.*u(2,jt)+u(2,jt-1))+2.*u(2,jt)/deltat
    $+u(2,jt)/(4.*deltaX)*Tk1(1,jt)
    goto 4144
    else if (u(2,jt).ge.0..and.v(2,jt).ge.0.) then
    DT(1)=-1./(4.*deltaY)*(v(2,jt)*(u(2,jt+1)+u(2,jt))-v(2,jt-1)
    *(u(2,jt)+u(2,jt-1)))+1./(RE*Pr*deltay**2.)
    *(u(2,jt+1)-2.*u(2,jt)+u(2,jt-1))+2.*u(2,jt)/deltat
    $+u(1,jt)/(4.*deltaX)*Tk1(1,jt)
    endif
4144  do 4044 idt=3,Nx-1
    if (v(idt,jt).lt.0.) then
    DT(idt-1)=-1./(4.*deltaY)*(v(idt,jt+1)*(u(idt,jt+1)+u(idt,jt))
    $-v(idt,jt)*(u(idt,jt)+u(idt,jt-1)))
    $+1./(RE*Pr*deltay**2.)*(u(idt,jt+1)-2.*u(idt,jt)+u(idt,jt-1))
    $+2.*u(idt,jt)/deltat
    goto 4044
    else
    DT(idt-1)=-1./(4.*deltaY)*(v(idt,jt)*(u(idt,jt+1)+u(idt,jt))
    $-v(idt,jt-1)*(u(idt,jt)+u(idt,jt-1)))
    $+1./(RE*Pr*deltay**2.)*(u(idt,jt+1)-2.*u(idt,jt)+u(idt,jt-1))
    $+2.*u(idt,jt)/deltat
    endif
4044  continue
C      -----
C      Résolution par l'algorithme de Thomas
C      -----
4244  call tridag(aT,bT,cT,dT,Y,Nx-2)
C      Injection des résultats dans Ti à l'étape k+1/2
do 5044 ixt=2,Nx-1
5044  Tk1(ixt,jt)=Y(ixt-1)
C      Conditions aux limites à la sortie pour Uk1
do 9844 mmt=1,Ny
9844  Tk1(Nx,mmt)=Tk1(Nx-1,mmt)
10044 continue
C      Fin première direction

```

Annexe - B -

```

C      Début deuxième direction
C      Conditions aux limites sur Tk2 pour i=1
do 344 jLlt=2,Ny
344  Tk2(1,jLlt)=T(1,jLlt)
C      Conditions aux limites pour Uk2 sur la plaque
do 9744 lt=1,Nx
9744 Tk2(lt,1)=T(lt,1)
C      Début de la boucle sur i
do 20044 it=2,Nx-1
C      Détermination des coefficients aTj,bTj,cTj
do 21044 jat=3,Ny-2
if (v(it,jat).lt.0.) then
aT(jat-1)=-v(it,jat)/(4.*deltay)-1./(Re*Pr*deltay**2.)
goto 21044
else
aT(jat-1)=-v(it,jat-1)/(4.*deltay)-1./(Re*Pr*deltay**2.)
endif
21044 continue
do 22044 jbt=2,Ny-1
if (v(it,jbt).lt.0.) then
bT(jbt-1)=2./deltaT+2./(Re*Pr*deltay**2.)
$+1./(4.*deltaY)*(v(it,jbt+1)-v(it,jbt))
goto 22044
else
bT(jbt-1)=2./deltaT+2./(Re*Pr*deltay**2.)
$+1./(4.*deltaY)*(v(it,jbt)-v(it,jbt-1))
endif
22044 continue
do 23044 jct=2,Ny-2
if (v(it,jct).lt.0.) then
cT(jct-1)=v(it,jct+1)/(4.*deltay)-1./(Re*Pr*deltay**2.)
goto 23044
else
cT(jct-1)=v(it,jct)/(4.*deltay)-1./(Re*Pr*deltay**2.)
endif
23044 continue
if(v(it,Ny-1).lt.0.) then
aT(Ny-2)=(-v(it,Ny-1)+v(it,Ny))/(4.*deltaY)-2./(Re*Pr*deltay**2.)
goto 3244
else
aT(Ny-2)=(-v(it,Ny-2)+v(it,Ny-1))/(4.*deltaY)-2./(Re*Pr*deltay**2.)
$)
goto 3244
endif
C      Détermination des seconds membres
3244 if (u(it,2).lt.0..and.v(it,2).lt.0.) then
DT(1)=-1./(4.*deltaX)*(u(it+1,2)*(Tk1(it+1,2)+Tk1(it,2))-u(it,2)
$(Tk1(it,2)+Tk1(it-1,2)))+2.*Tk1(it,2)/deltat
$-Tk2(it,1)*(-v(it,2)/(4.*deltaY)-1./(Re*Pr*deltay**2.))
goto 4344
else if (u(it,2).ge.0..and.v(it,2).lt.0.) then
DT(1)=-1./(4.*deltaX)*(u(it,2)*(Tk1(it+1,2)+Tk1(it,2))-u(it-1,2)
$(Tk1(it,2)+Tk1(it-1,2)))+2.*Tk1(it,2)/deltat
$-Tk2(it,1)*(-v(it,2)/(4.*deltaY)-1./(Re*Pr*deltay**2.))
goto 4344
else if (u(it,2).lt.0..and.v(it,2).ge.0.) then
DT(1)=-1./(4.*deltaX)*(u(it+1,2)*(Tk1(it+1,2)+Tk1(it,2))-u(it,2)
$(Tk1(it,2)+Tk1(it-1,2)))+2.*Tk1(it,2)/deltat
$-Tk2(it,1)*(-v(it,1)/(4.*deltaY)-1./(Re*Pr*deltay**2.))
goto 4344

```

Annexe - B -

```

else if (u(it,2).ge.0..and.v(it,2).ge.0.) then
DT(1)=-1./(4.*deltaX)*(u(it,2)*(Tk1(it+1,2)+Tk1(it,2))-u(it-1,2)
$(Tk1(it,2)+Tk1(it-1,2)))+2.*Tk1(it,2)/deltat
$-Tk2(it,1)*(-v(it,1)/(4.*deltaY)-1./(Re*Pr*deltaY**2.))
endif
4344 do 24044 jdt=3,Ny-1
if (u(it,jdt).lt.0.) then
DT(jdt-1)=2.*Tk1(it,jdt)/deltaT
$(u(it+1,jdt)*(Tk1(it+1,jdt)+Tk1(it,jdt))
$-u(it,jdt)*(Tk1(it,jdt)+Tk1(it-1,jdt)))/(4.*deltaX)
goto 24044
else
DT(jdt-1)=2.*Tk1(it,jdt)/deltaT
$(u(it,jdt)*(Tk1(it+1,jdt)+Tk1(it,jdt))
$-u(it-1,jdt)*(Tk1(it,jdt)+Tk1(it-1,jdt)))/(4.*deltaX)
endif
24044 continue
C -----
C Résolution par l'algorithme de Thomas
C -----
4444 call tridag(aT,bT,cT,dT,Y,Ny-2)
C Injection des résultats dans Tk2
do 25044 jxt=2,Ny-1
25044 Tk2(it,jxt)=Y(jxt-1)
C Fin de la deuxième boucle sur it
20044 continue
C Conditions aux limites pour it=Nx
do 444 jLNxt=1,Ny-1
444 Tk2(Nx,jLNxt)=Tk2(Nx-1,jLNxt)
C Conditions aux limites pour jt=Ny
do 11144 jjt=2,Nx
11144 Tk2(jjt,Ny)=Tk2(jjt,Ny-1)
C Injection des résultats de la deuxième direction dans U(i,j) et T(i,j)
do 300 ik2=1,Nx
do 300 jk2=1,Ny
U(ik2,jk2)=Uk2(ik2,jk2)
T(ik2,jk2)=Tk2(ik2,jk2)
300 continue
C -----
C Fin de l'ADI
C Résolution de la deuxième équation
C Conditions aux limites sur la plaque
C -----
do 350 iv0=1,Nx
350 v(iv0,1)=V0
do 400 iv=1,Nx-1
do 400 jv=2,Ny
v(iv+1,jv)=v(iv+1,jv-1)-deltay/(2.*deltax)*(u(iv+1,jv)-u(iv,jv)
$+u(iv+1,jv-1)-u(iv,jv-1))
400 continue
C Détermination de la fonction de courant
do 990 om=1,1000
w =0.4
Psi(1,1)=0.
do 405 ksj=1,Ny
Psi(1,ksj+1)-w*Psi(1,ksj+1)+(1-w)*(Psi(1,ksj)+U(1,ksj)*deltaY)
405 continue
do 407 ksi=1,Nx
Psi(ksi+1,1)=w*Psi(ksi+1,1)+(1-w)*(Psi(ksi,1)-V(ksi,1)*deltax)
407 continue

```

Annexe - B -

```

do 406 ksi=2,Nx
do 406 ksj=2,Ny
Psi(ksi,ksj)=w*Psi(ksi,ksj)+(1-w)*(0.5*(Psi(ksi-1,ksj)
$ +Psi(ksi,ksj-1)-V(ksi,ksj)*deltax+U(ksi,ksj)*deltay))
406 continue
990 continue
C
Fin de la boucle temps
if(temps.eq.1)then
do 561 i=1,Nx
do 551 j=1,Ny
write (1,999) (i-1.)/(Nx-1.), (j-1.)/(Ny-1.)
write (1,999) (i-1.)/(Nx-1.)+0.1*U(i,j), (j-1.)/(Ny-1.)
write (12,888) (i-1.)/(Nx-1.), (j-1.)/(Ny-1.),u(i,j),v(i,j)
$,Psi(i,j),T(i,j)
551 continue
561 continue
goto 500
else
if (temps.eq.30) then
do 562 i=1,Nx
do 552 j=1,Ny
write (2,999) (i-1.)/(Nx-1.), (j-1.)/(Ny-1.)
write (2,999) (i-1.)/(Nx-1.)+0.1*U(i,j), (j-1.)/(Ny-1.)
write (13,888) (i-1.)/(Nx-1.), (j-1.)/(Ny-1.),u(i,j),v(i,j),
$Psi(i,j),T(i,j)
552 continue
562 continue
goto 500
else
if (temps.eq.60) then
do 563 i=1,Nx
do 553 j=1,Ny
write (3,999) (i-1.)/(Nx-1.), (j-1.)/(Ny-1.)
write (3,999) (i-1.)/(Nx-1.)+0.1*U(i,j), (j-1.)/(Ny-1.)
write (14,888) (i-1.)/(Nx-1.), (j-1.)/(Ny-1.),u(i,j),v(i,j),
$Psi(i,j),T(i,j)
553 continue
563 continue
goto 500
else
if (temps.eq.90) then
do 564 i=1,Nx
do 554 j=1,Ny
write (4,999) (i-1.)/(Nx-1.), (j-1.)/(Ny-1.)
write (4,999) (i-1.)/(Nx-1.)+0.1*U(i,j), (j-1.)/(Ny-1.)
write (15,888) (i-1.)/(Nx-1.), (j-1.)/(Ny-1.),u(i,j),v(i,j),
$Psi(i,j),T(i,j)
554 continue
564 continue
goto 500
else
if(temps.eq.120) then
do 5499 i=1,Nx
do 5509 j=1,Ny
write (5,999) (i-1.)/(Nx-1.), (j-1.)/(Ny-1.)
write (5,999) (i-1.)/(Nx-1.)+0.1*U(i,j), (j-1.)/(Ny-1.)
write (16,888) (i-1.)/(Nx-1.), (j-1.)/(Ny-1.),u(i,j),v(i,j),
$Psi(i,j),T(i,j)
5509 continue
5499 continue
goto 500

```

Annexe - B -

```

else
  if (temps.eq.150) then
    do 565 i=1,Nx
    do 555 j=1,Ny
    write (6,999) (i-1.)/(Nx-1.), (j-1.)/(Ny-1.)
    write (6,999) (i-1.)/(Nx-1.)+0.1*U(i,j), (j-1.)/(Ny-1.)
    write (17,888) (i-1.)/(Nx-1.), (j-1.)/(Ny-1.),u(i,j),v(i,j),
$Psi(i,j),T(i,j)
555 continue
565 continue
    goto 500
  else
    if (temps.eq.180) then
      do 566 i=1,Nx
      do 556 j=1,Ny
      write (7,999) (i-1.)/(Nx-1.), (j-1.)/(Ny-1.)
      write (7,999) (i-1.)/(Nx-1.)+0.1*U(i,j), (j-1.)/(Ny-1.)
      write (18,888) (i-1.)/(Nx-1.), (j-1.)/(Ny-1.),u(i,j),v(i,j),
$Psi(i,j),T(i,j)
556 continue
566 continue
      goto 500
    else
      if (temps.eq.210) then
        do 567 i=1,Nx
        do 557 j=1,Ny
        write (8,999) (i-1.)/(Nx-1.), (j-1.)/(Ny-1.)
        write (8,999) (i-1.)/(Nx-1.)+0.1*U(i,j), (j-1.)/(Ny-1.)
        write (19,888) (i-1.)/(Nx-1.), (j-1.)/(Ny-1.),u(i,j),v(i,j),
$Psi(i,j),T(i,j)
557 continue
567 continue
        goto 500
      else
        if (temps.eq.240) then
          do 568 i=1,Nx
          do 558 j=1,Ny
          write (9,999) (i-1.)/(Nx-1.), (j-1.)/(Ny-1.)
          write (9,999) (i-1.)/(Nx-1.)+0.1*U(i,j), (j-1.)/(Ny-1.)
          write (20,888) (i-1.)/(Nx-1.), (j-1.)/(Ny-1.),u(i,j),v(i,j),
$Psi(i,j),T(i,j)
558 continue
568 continue
          goto 500
        else
          if (temps.eq.270) then
            do 569 i=1,Nx
            do 559 j=1,Ny
            write (10,999) (i-1.)/(Nx-1.), (j-1.)/(Ny-1.)
            write (10,999) (i-1.)/(Nx-1.)+0.1*U(i,j), (j-1.)/(Ny-1.)
            write (21,888) (i-1.)/(Nx-1.), (j-1.)/(Ny-1.),u(i,j),v(i,j),
$Psi(i,j),T(i,j)
559 continue
569 continue
            goto 500
          else
            if (temps.eq.300) then
              do 579 i=1,Nx
              do 589 j=1,Ny
              write (11,999) (i-1.)/(Nx-1.), (j-1.)/(Ny-1.)
              write (11,999) (i-1.)/(Nx-1.)+0.1*U(i,j), (j-1.)/(Ny-1.)

```

Annexe - B -

```
      write (22,888) (i-1.)/(Nx-1.), (j-1.)/(Ny-1.), u(i,j), v(i,j),
$Psi(i,j), T(i,j)
589   continue
579   continue
      goto 500
      else
      endif
500   continue
888   format(5x,6(F15.6))
999   format(3x,2(F15.6))
      stop
      end
      SUBROUTINE tridag(a,b,c,r,u,n)
      INTEGER n,NMAX
      REAL a(n),b(n),c(n),r(n),u(n)
      PARAMETER (NMAX=800)
      INTEGER j
      REAL bet,gam(NMAX)
      if(b(1).eq.0.)pause 'tridag: rewrite equations'
      bet=b(1)
      u(1)=r(1)/bet
      do 11 j=2,n
      gam(j)=c(j-1)/bet
      bet=b(j)-a(j)*gam(j)
      if(bet.eq.0.)pause 'tridag failed'
      u(j)=(r(j)-a(j)*u(j-1))/bet
11   continue
      do 12 j=n-1,1,-1
      u(j)=u(j)-gam(j+1)*u(j+1)
12   continue
      return
      END
```

BIBLIOGRAPHIE

- [1]- Encyclopédie *Universalis* (1994).
- [2]- M. Quiret, La laminarité hybride, *Revue air et cosmos*, P-15, Paris (1998).
- [3]- L. Prandtl, Guide à travers la mécanique des fluides, *Dunod* (1952).
- [4]- H. Schlichting, *Boundary layer theory*, McGraw-Hill (1979).
- [5] F.M.WHITE, *Viscous fluid flow*, Mc Graw Hill, Inc (1991).
- [6]- J. M. Burgers, *Proceedings of the first international congress for applied mechanics*, P-113, Delft (1924).
- [7]- Van der Hegge Zijnen, *Measurements of the velocity distribution in the boundary layer along a plane surface*, Thesis Delft (1924)
- [8]- M.Hansen, *Die geschwindigkeitsverteilung in der grenzschicht an der langesangeströmten ebenen platte*, *NACA TM* (1930).
- [9]- H. L. Dryden, *Recent investigation of the problem of transition*, *Zeitschrift für Flugwissenschaften* (1956).
- [10]- P. S. Klebanoff, G. B. Schubauer, *Contribution on the mechanics of boundary layer transition*, *NACA* (1956).
- [11]- H. W. Emmons, A. E. Bryson, *The laminar-turbulent transition in a boundary layer*, *Journal of the Aeronautical Sciences* (1951).
- [12]- F. P. Incropera, D. P. DeWitt, *Fundamentals of heat and mass transfer*, John Wiley & Sons (1985).
- [13]- K. Whitaker, *Simultaneous heat and mass transfer in porous media*, *Advances in drying*, Vol. 1, Hemisphere Publishing Corporation (1977).
- [14]- C. Marle, *Proc. Euromech, Balkema*, P-143, Rotterdam (1981).
- [15]- P. Crausse, G. Bacon, S. Bories, *Etude fondamentale des transferts couplés chaleur-masse en milieu poreux*, *Int. Journal of heat and mass transfer* (1981).
- [16]- S. M. Ross, *Theoretical model of the boundary condition at fluid porous interface*, *AICHEJ Volume 29* (1983).

- [17]- M.Prat, Heat and mass transfert predetermination between a drying material and an external flow, *Int. Drying symposium* Paris (1986).
- [18]- M. Carnahan, *Applied numerical methods*. J. Wiley and Sons (1969).
- [19]- Numerical recipes in fortran 77, *Cambridge Universty press* (1992),
Numerical Recipes Software (1992),<http://www.nr.com>.
- [20]- D. A. Anderson, J. C. Tannehill, R. H. Pletcher, *Computational fluid mechanics and heat transfer*, Hemisphere Publishing Corporation (1984).
- [21]- J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*, Dover (1952).
- [22]- R.Peyret, D.T.Taylor, *Computational Methods for Fluid Flow*, Springer-Verlag (1990).
- [23]- J. J. H. Miller, *J. Inst. Math. Appl*, Pp-397-406, (1971).
- [24]- A. C. Hindmarsh et al. *International journal of numerical methods for fluids*, Pp-853- 897, (1984).
- [25]- D.W Peaceman, H.H.Rachford, The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, *J. Soc. Ind. Appl. Math*,Pp-28-41, (1955).
- [26]- J. Douglas, J. E. Gunn, *Numerical mathematics*, Pp-428-453, (1964).
- [27]- N. N. Yanenko, *The method of fractional steps*, Springer-Verlag (1971).
- [28]- A. R. Mitchell, *Computational methods in partial differential equations*, Wiley (1969).
- [29]-L.H Thomas, *Elliptic problems in linear differential equations over a network*, Columbia,University (1949).