



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

Département de Génie Mécanique

PROJET DE FIN D'ETUDE

En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état
en génie mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

THEME

**ETUDE ET DIMENSIONNEMENT D'UN
ETAGE DE TURBOMACHINE PAR LA
METHODE DES SINGULARITES**

Etudié par :

BENTERKIA YOUNES

Proposé et dirigé par :

M^{cr} BOUDJEMAA . MOHAMED

Promotion 1998

ENP 10, Avenue Hassen Badi, 16200 EL-HARRACH, ALGER



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique
Département de Génie Mécanique

PROJET DE FIN D'ETUDE

En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état
en génie mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

THEME

***ETUDE ET DIMENSIONNEMENT D'UN
ETAGE DE TURBOMACHINE PAR LA
METHODE DES SINGULARITES***

Etudié par :

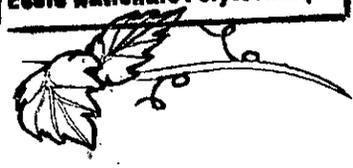
BENTERKIA YOUNES

Proposé et dirigé par :

M^{re} BOUDJEMAA . MOHAMED

Promotion 1998
ENP 10, Avenue Hassen Badi, 16200 EL-HARRACH, ALGER

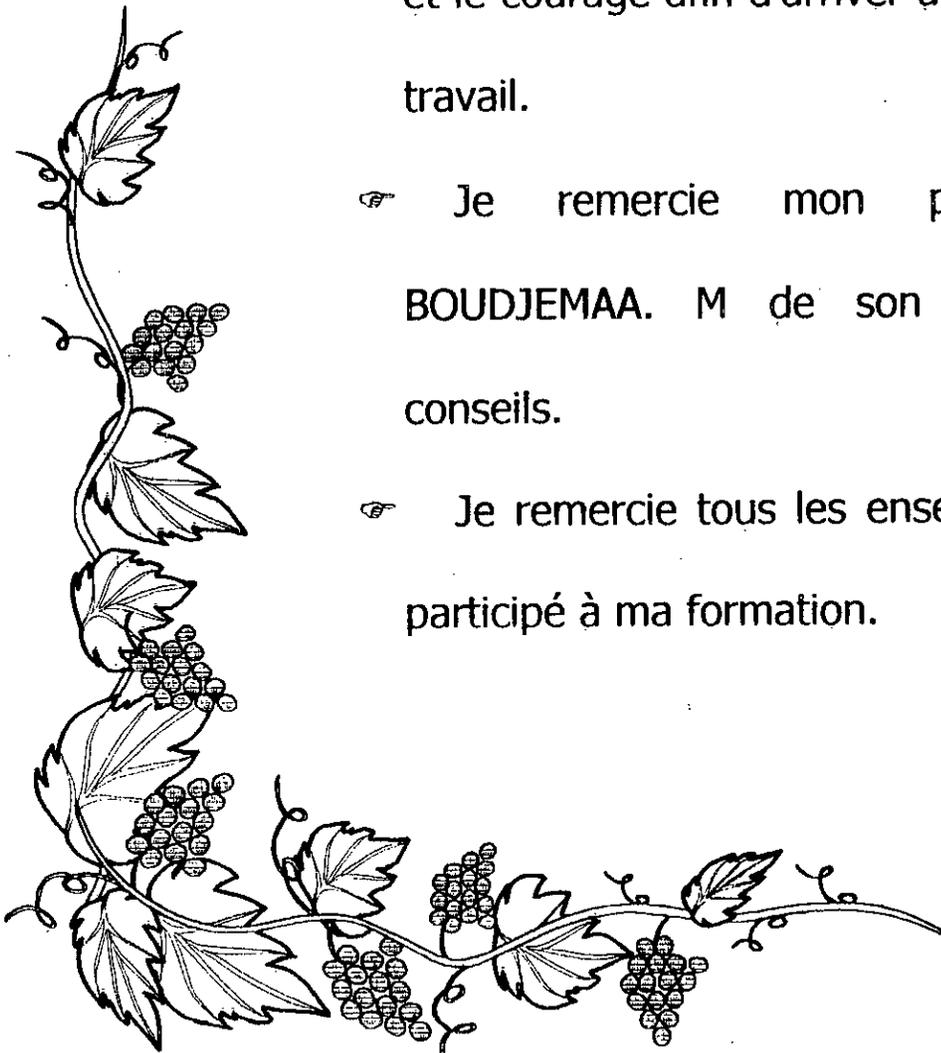
REMERCIEMENTS



☞ Je remercie Dieu qui m'a donné la volonté et le courage afin d'arriver à la finalité de ce travail.

☞ Je remercie mon promoteur M^{er} BOUDJEMAA. M de son suivie et ses conseils.

☞ Je remercie tous les enseignants qui ont participé à ma formation.





المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique



DEDICACE

Je dédie ce travail :

- ❖ A ce qui ont été la cause de mon existence
mes chères parents.
- ❖ A mes frères et sœurs.
- ❖ A mon promoteur
- ❖ A tous mes amis.

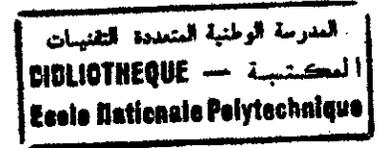


LISTE DES SYMBOLES UTILISES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

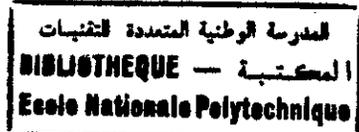
γ_s	intensité des singularités
l_j	longueur du panneau
δ_j	angle d'orientation du panneau par rapport à l'axe horizontal
$F(z)$	potentiel complexe
C	vitesse conjuguée
α	direction de l'écoulement uniforme par rapport à l'axe horizontal
C_0	la vitesse de l'écoulement uniforme
$G(i,j), F(i,j)$	fonctions d'influence
$A(i,j)$	matrice d'influence
$B(i)$	vecteur du système linéaire
W	vitesse relative
C	vitesse absolue
U	vitesse d'entraînement
α_m	angle moyen du stator
B_m	angle moyen du rotor
t	pas du rotor
h	pas du stator
γ	angle de calage du profil
C_p	coefficient de pression
ρ	masse volumique du fluide
R_i	rayon intérieur
R_e	rayon extérieur
\bar{R}	rayon moyen
$\bar{\alpha}_m$	angle moyen du stator au niveau de \bar{R}
$\bar{\beta}_m$	angle moyen du rotor au niveau de \bar{R}
Ω	vitesse spécifique
Λ	rayon spécifique
ω	vitesse angulaire
N	vitesse de rotation
T	rapport des rayons
H	hauteur locale
q	débit volumique
η_h	rendement hydraulique
W_1	bruit hydraulique
P_v	pression de vapeur
D	facteur de diffusion

BIBLIOGRAPHIE



- [1] R. COMOLET
Mécanique Expérimentale des fluides
Masson 1985 - 1986
- [2] M. BOUMHRAT
Méthodes Numérique Appliquées
- [3] R. REY
R. NOGUERA
Cours et dimensionnement des turbomachines T1 , T2
ENSAM Paris 1995
- [4] P. RUBUFFET
Aérodynamique Expérimentale
Paris Dunode , 1966 , 1969
- [5] R. RABIAA
N. NOUIOUA
Étude Comparative de la Méthode des Singularités
autour d'Obstacles
ENP Alger 1995
- [6] A. LAAROU
L. MANSOUR OUAHCHIA
Application de la méthode des singularités pour des
écoulements en turbomachine
PFE 1997

SOMMAIRE



Introduction	1
I. Presentation de la methode des singularités	3
I.1)- Discrétisation du profil :	3
I.2)- Le potentiel complexe	4
I.3)- Condition de glissement :	6
I.4)- Etablissement des fonctions d'influence :	7
I.5)- Condition de KUTTA-JOUKOWSKI :	8
II- Application de la méthode aux formes aerodynamiques	9
II.1)- Aube isolé	9
II.1.1)- Représentation des résultats :	9
II.2)- Grille rectiligne :	10
II.3)- Présentation des résultats :	12
II.4) Comportement de la grille en aube isolée :	12
III. Application de la méthode à un étage de turbomachine	14
III.1)- Description des obstacles	14
III.2)- Champs de vitesse dans l'étage	15
III.3)- Condition de glissement	18
III.4)- Condition de Kutta	20
III.5)- Expression de la vitesse tangentielle	22
III.6)- Coefficients de pression	25
III.7)- Résolution numérique du modèle	27
III.7.1)- Problème posé par cubic-spline	27
III.7.2)- Solution polynomiale	28
III.8)- Experimentation numérique	29
III.8.1)- En régime stationnaire	29
III.8.2)- Régime instationnaire	31
IV- dimensionnement d'une machine a compression axial	37
IV.1)- Etude générale d'un étage de compression formé de deux grilles planes	37
IV.2)- Expression de la hauteur locale	38
IV.3)- Equation du rotor	39
IV.4)- Equation du stator	40
IV.5)- Expression du rendement local :	41
IV.6)- Dimensionnement global	42
IV.7)- rendement hydraulique :	45
IV.8)- Déflexion locale des grilles rotoriques et statoriques	46



IV.9)- Degré de réaction :	47
IV.10)- Bruit hydraulique	48
IV.11)- Capacité d'aspiration (NPSH)	50
a)- mécanisme de la cavitation :	50
b)- NPSH requis :	53
IV.12)- Application numérique :	56
IV.13)- Choix optimal du couple (α_m, β_m)	57
CONCLUSION :	60
ANNEXES :	61
Définition géométrique :	61
différents types de loi génératrice	62
facteur de diffusion	63

INTRODUCTION

Au cours des dernières années, le développement des moyens informatiques accompagnée par la réduction du temps de calcul et des coûts, ont permis de mieux connaître la structure des écoulements en turbomachine et d'approché de façon plus approfondie les processus physiques qui gouvernent leurs fonctionnements et d'analysé, avec une précision accrue, les phénomènes internes.

la méthode des singularités est une méthode très performante qui permet de calculer l'écoulement dans les turbomachines à fluide incompressible.

Dans ce projet de fin d'étude, on essayera d'étendre l'application de la méthode des singularités aux écoulements instationnaires dans les étages des turbomachines.

Il y'a lieu de préciser qu'une première approche établie l'année dernière, n'a pas permis de trouver une solution stable de la répartition de pression, appliqué aux écoulements dans les étages des turbomachines.

Un expertise préalable de la solution à parfaire laisse apparaître la non adaptation de la solution numérique, (cubic-spline) à la formulation mathématique du modèle, donc on essayera de trouver d'une façon adaptée la modélisation numérique, qui devrait nous permettre d'avoir une solution stable en écoulement instationnaire dans les étage des turbomachines

On s'est intéressé également dans ce travail, a utilisé cette méthode dans le dimensionnement, pour cela, on propose d'approcher notre mode de travail suivant l'analyse suivante :

Dans le chapitre I :

On donne une Présentation de la méthode des singularités.

Dans le chapitre II :

On abordera l'application de la méthode aux formes aérodynamiques, qui représente un récapitulatif des travaux antérieurs.

Dans le chapitre III :

On s'intéresse aux Applications de la méthode à un étage de turbomachine introduisant l'instationnarité de l'écoulement, à travers une nouvelle modélisation numérique.

Dans le chapitre IV :

On formulera une nouvelle approche du dimensionnement d'un étage de machine à compression axiale.

CHAPITRE I

I. PRESENTATION DE LA METHODE DES SINGULARITES

I.1)- Discretisation du profil :

On discrétise le profil en un nombre finis de points (sommets) de coordonnées $X_s(j), Y_s(j)$, reliés entre eux par des segments droits (panneaux), on place au milieu de chaque panneau un point (point de contrôle), de coordonnées $X(i), Y(i)$.

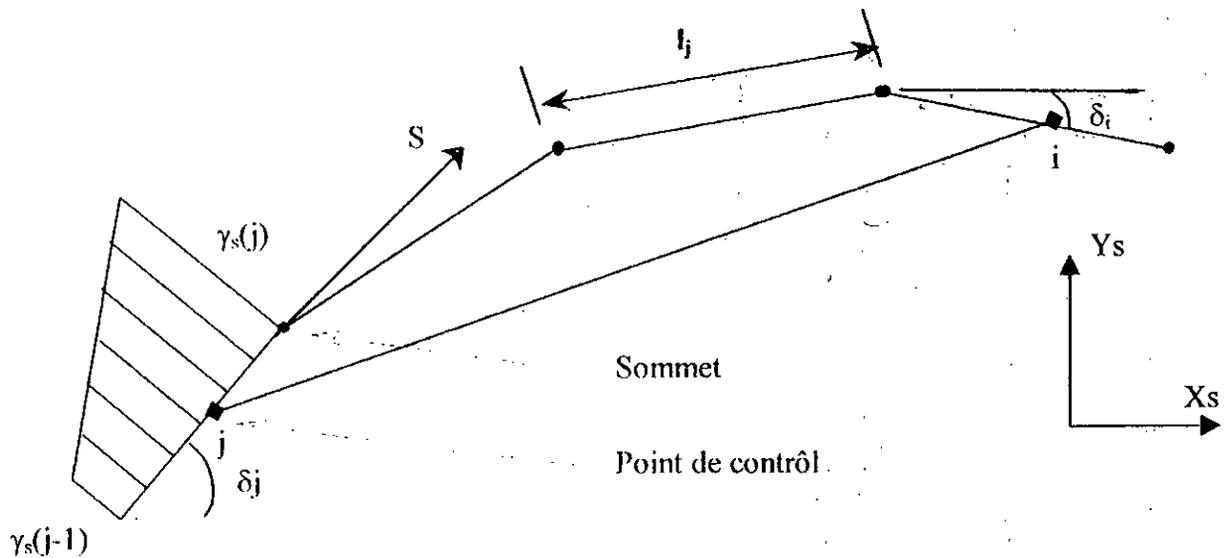


Fig [I.1] *discrétisation du profil*

Pour chaque panneau j , on associe un axe de coordonnées curvilignes S_j tel que, pour le point $(X_s(j-1), Y_s(j-1))$ $S_j=0$, et pour le point $(X_s(j), Y_s(j))$ $S_j=l_j$, donc :

$$X(j) = X_s(j-1) + S_j \cos(\delta_j)$$

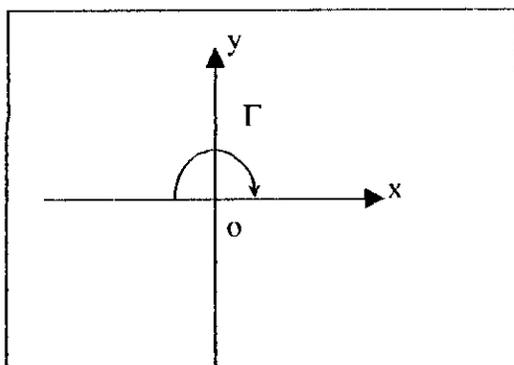
$$Y(j) = Y_s(j-1) + S_j \sin(\delta_j)$$

On choisit la distribution linéaire d'intensité des singularités tel que :

$$\gamma_s(j) = \gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} S_j$$

I.2)- Le potentiel complexe

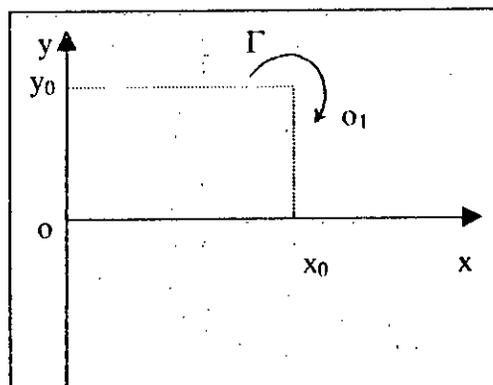
Si on dispose au centre du repère d'un vortex d'intensité Γ , le potentiel complexe $F(z)$ et la vitesse complexe conjuguée C' sont accessible par les relations suivantes :



Vortex centré en O

$$F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z)$$

$$C' = \frac{dF}{Dz} = u - iv = -\frac{i\Gamma}{2\pi z}$$



Vortex centré en O_1

$$F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0)$$

$$C' = \frac{dF}{dz} = u + iv = \frac{-i\Gamma}{2\pi(z - z_0)}$$

Lorsque le vortex est décentré en O_1 , les relations correspondantes sont également connues. En écoulement plan, on peut créer une nappe tourbillonnaire en distribuant de manière discrète une succession de vortex sur une courbe quelconque (C).

Ces vortex d'intensité différentes a priori, sont ici en nombre fini et sont centrés aux point, $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$, d'affixes $z_{01}, z_{02}, z_{03}, \dots, z_{0n}$.

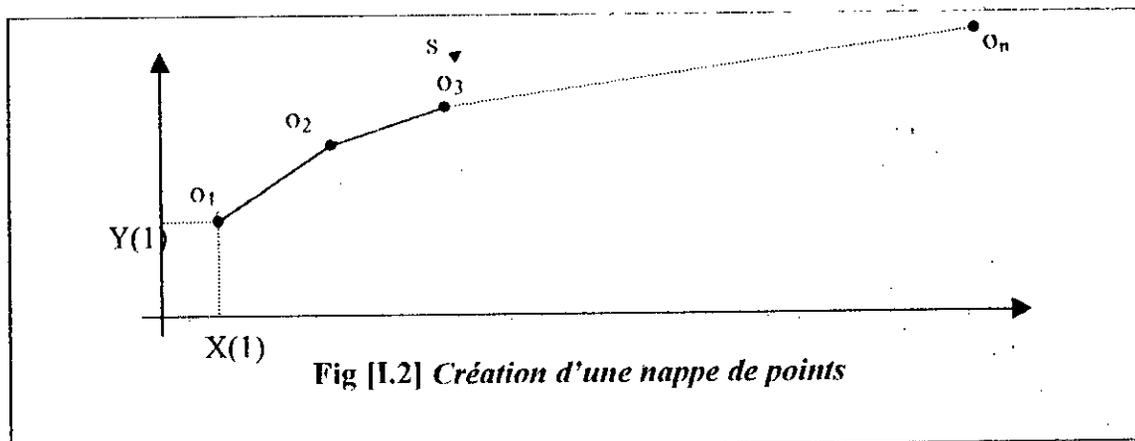


Fig [I.2] Création d'une nappe de points

Le potentiel complexe associe tout le long du panneau est :

$$F(z) = -\frac{i}{2\pi} \int_{l_j} \gamma(j) \ln(z - z_j) ds_j$$

Donc le potentiel complexe est égal à la somme du potentiel en tout point.

$$F(z) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma(j) \ln(z - z_j) ds_j$$

D'où :

$$C^z = \frac{dF}{dz} = u - iv = -\frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma(j) \frac{ds_j}{z - z_j}$$

Tel que :

$$z = x + iy \quad ; \quad z_j = x_j + iy_j$$

Alors :

$$C^z = \frac{-i}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma(j) \frac{(x - x_j) - i(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} ds_j$$

En séparant la partie réelle de la partie imaginaire on trouve :

$$C^z = -\frac{1}{2\pi} \left(\sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma(j) \frac{(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} ds_j + i \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma(j) \frac{(x - x_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} ds_j \right)$$

En superposant à ces vortex un écoulement uniforme, on trouve :

$$\vec{C}_i = \begin{cases} u_i = C_0 \cos(\alpha) - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma(j) \frac{(y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_i) \\ v_i = C_0 \sin(\alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma(j) \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_i) \end{cases} \quad [I.1]$$

$i = j$

tel que :

C_0 : représente la vitesse d'entrée d'écoulement et α son angle d'orientation par rapport à l'axe horizontale.

$$\gamma_m = \frac{\gamma(j) + \gamma(j-1)}{2} \quad \text{c'est l'influence du panneau sur lui même c.a.d } i=j$$

1.3)- Condition de glissement :

Pour traduire l'imperméabilité du profil on pose une condition aux limites appelée condition de glissement, qui impose que la vitesse sur la surface du profil, soit tangente à ce dernier, donc la vitesse en chaque point de contrôle est tangente au panneau.

D'où

$$\frac{v_t}{u_t} = \operatorname{tg}(\delta_i) \Rightarrow v_t \cos(\delta_i) = u_t \sin(\delta_i) \quad [1.2]$$

Nous obtenons alors

$$C_0 \sin(\alpha) \cos(\delta_i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{j_i} \gamma(j) \frac{(x_i - x_j) \cos(\delta_i)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_i) \cos(\delta_i) -$$

$$C_0 \cos(\alpha) \sin(\delta_i) - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{j_i} \gamma(j) \frac{(y_i - y_j) \sin(\delta_i)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_i) \sin(\delta_i)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{j_i} \gamma(j) \left(\frac{(x_i - x_j) \cos(\delta_i) + (y_i - y_j) \sin(\delta_i)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right) ds_j = C_0 (\cos \alpha \sin \delta_i - \sin \alpha \cos \delta_i) \quad [1.3]$$

On a :

$$\begin{aligned} X_j &= X_s(j-1) + S_j \cos \delta_j \\ Y_j &= Y_s(j-1) + S_j \sin \delta_j \end{aligned} \quad \text{et } \gamma_s(j) = \gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} S_j$$

En remplaçant dans l'équation [I.3], on trouve :

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \left(\gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} S_j \right) \underbrace{\left(\frac{(x_i - x_j) \cos \delta_j + (y_i - y_j) \sin \delta_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right)}_{(\diamond)} ds_j = C_0 \sin(\delta_i - \alpha)$$

1.4)- Etablissement des fonctions d'influence :

Les fonctions d'influence $\{G, F\}$, qui représentent les caractéristiques géométriques de l'obstacle, peuvent être écrites comme suit :

$G(i, j)$: c'est la quantité (\diamond)

$F(i, j)$: c'est la quantité $(\diamond) * S$

$$\begin{cases} G(i, j) = \int_{l_j} \left(\frac{(x_i - x_j) \cos \delta_j + (y_i - y_j) \sin \delta_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right) ds_j \\ F(i, j) = \int_{l_j} \left(\frac{(x_i - x_j) \cos \delta_j + (y_i - y_j) \sin \delta_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right) S_j ds_j \end{cases} \quad [I.4]$$

D'où :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[G(i, j) \gamma_s(j-1) + F(i, j) \cdot \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} \right] = 2\pi C_0 \sin(\delta_i - \alpha) \quad [I.5]$$

On remarque que l'intensité de singularité pour $j=1$ n'est pas définie, donc on fait la sommation de $j=2$ jusqu'à $j= n+1$ et on confond le point $j=n+1$ avec $j=1$.

1.5)- Condition de KUTTA-JOUKOWSKI :

Puisque on a n équations pour n+1 inconnues, on a besoin d'une équation indépendante traduite par la condition de KUTTA qui s'écrit de la façon suivante :

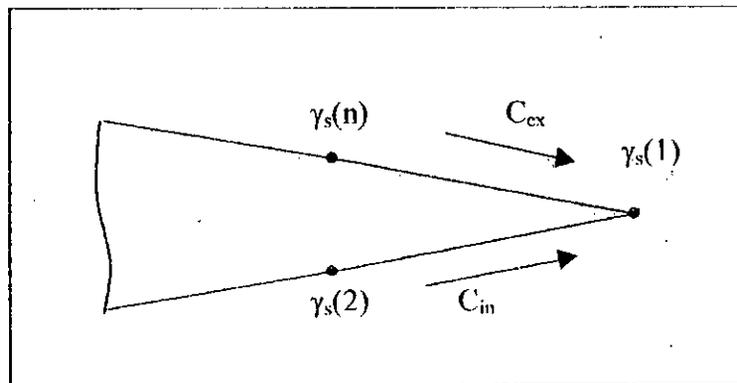


Fig [I.3] Condition de kutta au bord de fuite

- Au niveau du bord de fuite la vitesse à l'extrados et la vitesse à l'intrados ont la même valeur finie ce qui conduit à $(\gamma_s(n+1) + \gamma_s(1) = 0)$.

Ou : $\gamma(j)$ représente la valeur du vorticité au point j

De cette condition on a n équations et n inconnues. $[A]\{\gamma_s\}=\{B\}$.

$$B(i)=2\pi C_0 \sin (\delta_i - \alpha)$$

$$A(i,j) = \begin{cases} A(i,1) = G(i,2) - \frac{F(i,2)}{l_2} - \frac{F(i,1)}{l_1} \\ A(i,j) = G(i,j+1) - \frac{F(i,j+1)}{l_{j+1}} + \frac{F(i,j)}{l_j} \\ A(i,n) = G(i,1) + \frac{F(i,n)}{l_n} - \frac{F(i,1)}{l_1} \end{cases} \quad [I.6]$$

La résolution de ce système nous permet de connaître les valeurs de la vorticité $\gamma_s(j)$, on peut alors connaître les différents paramètres de l'écoulement tel que les coefficients de pression, les vitesses, les ligne de courant...).

CHAPITRE II

II- APPLICATION DE LA METHODE AUX FORMES AERODYNAMIQUES

II.1)- Aube isolé

La relation [I.6] est applicable à une aube isolé, les résultats obtenus pour des différents angles d'incidence sont représentés aux figures suivantes.

II.1.1)- Représentation des résultats :

Les coefficients de pression :

Pour $\alpha = 2^\circ$: On voit bien que le bord d'attaque est un point de stagnation, alors qu'on observe la création d'une dépression assez importante sur l'extrados qui s'éteint en s'approchant du bord de fuite, sur l'intrados la variation des coefficients de pression est très uniforme.

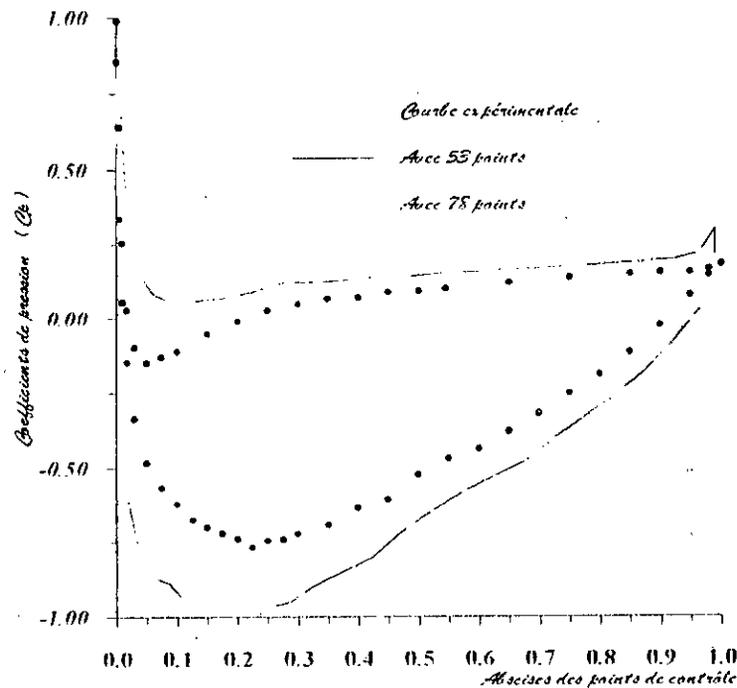


Fig. (II.1) : Les coefficients de pression pour $\alpha = 2^\circ$

• L'écart entre l'expérience et la méthode des singularités est essentiellement dû à l'effet de la couche limite.

• Pour $\alpha = 16^\circ$: Le point de stagnation s'est déplacé sur l'intrados, a cause du changement de l'angle d'attaque

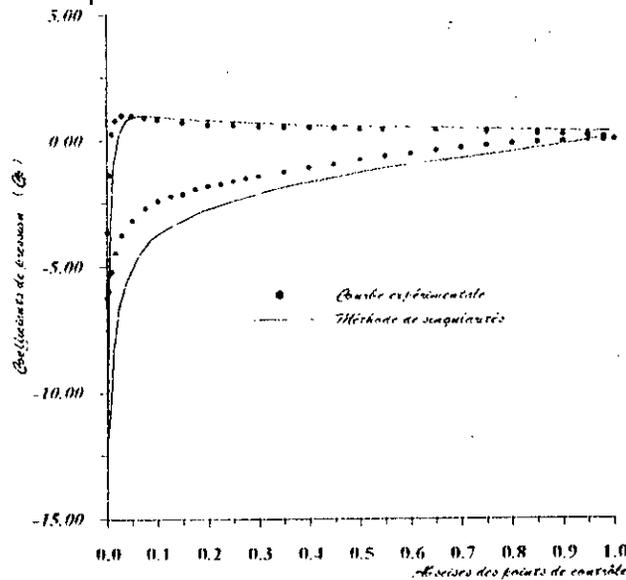


Fig. (II. 2) : Les coefficients de pression pour $\alpha = 16^\circ$

II.2)- Grille rectiligne :

Champ de vitesse dans la grille :

Le potentiel complexe s'écrit : $F(z) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \ln(z_0 - z_j) ds_j$

$$\vec{C}_i \left\{ \begin{array}{l} u_i = C_m \cos(\alpha_m) - \frac{1}{2l} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \frac{\sin(2Y_{ij})}{\cosh(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_i) \\ v_i = C_m \sin(\alpha_m) + \frac{1}{2l} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \frac{\sinh(2X_{ij})}{\cosh(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_i) \end{array} \right. \quad [II.1]$$

\vec{C}_i : le vecteur vitesse absolue d'une grille fixe, dans le cas d'une grille mobile, on calcul le vecteur \vec{W} représentant la vitesse relative.

• Grille mobile :

l'expression finale du vecteur vitesse créé par la grille mobile au niveau des points de contrôles est :

$$\dot{W} \begin{cases} u - C_m \cos(\alpha_m) - \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \frac{\sin(2Y_{ij})}{\operatorname{ch}(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_i) \\ v - U + C_m \sin(\alpha_m) + \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \frac{\operatorname{sh}(2X_{ij})}{\operatorname{ch}(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_i) \end{cases} \quad [II.2]$$

Mise en équation :

Condition de glissement :

$$\psi(\delta_i) = \frac{\varpi + \lambda \cdot Y}{v_i} \quad \begin{array}{l} \lambda = 1 \rightarrow \text{Grille mobile} \\ \lambda = 0 \rightarrow \text{Grille fixe} \end{array}$$

Etablissement des fonctions d'influence :

$$C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i) = \frac{1}{2t} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n G(i, j) \gamma_s(j-1) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F(i, j) \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} \right]$$

Condition de K U T T A J O U K O U W S K I :

La condition de Kutta se traduit par l'égalité du module de la vitesse côté intrados et côté extrados au niveau du bord de fuite. Pour garantir cette égalité, on imposera la condition suivante :

$$\gamma_s(n+1) = -\gamma_s(1)$$

En fin, on aboutira à un système linéaire de **n** équations et **n** inconnues.

$$\begin{cases} B(i) = C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i) \\ A(i,1) = \frac{1}{2t} \left[G(i,2) - \frac{F(i,2)}{l_2} - \frac{F(i,1)}{l_1} \right] \\ A(i,j) = \frac{1}{2t} \left[G(i,j+1) - \frac{F(i,j+1)}{l_{j+1}} + \frac{F(i,j)}{l_j} \right] \\ A(i,n) = \frac{1}{2t} \left[G(i,1) + \frac{F(i,n)}{l_n} - \frac{F(i,1)}{l_1} \right] \end{cases} \quad [II.3]$$

II.3)- Présentation des résultats :

Les coefficients de pression :

Pour $\alpha_m = 2^\circ$: On observe bien, que les deux courbes ont la même allure, mais la présence des autres aubes, dans le cas de la grille, diminue la section de passage entre les canaux, ce qui augmente la vitesse, d'où la diminution des coefficients de pression.

♦ la diminution de l'écart entre les coefficients de pression intrados et extrados, fait diminuer la portance par profil.

Pour $\alpha_m = 16^\circ$: Les coefficients de pression de l'intrados et de l'extrados se sont rapprochés (diminution de la portance).

Pour $\gamma \neq 0^\circ$: Ce cas, est le cas qu'on désire étudier .

- la courbe de NACA 4412 comparée à celle obtenue pour angle de calage nulle et $\alpha_m = 2^\circ$ ne présente pas de grande différence sauf qu'au début de l'intrados, il y a une dépression plus grande.
- le profil NACA 3916 plus avantageux que l'autre profil, de point de vue que les coefficients de pression sont plus uniformes et, la portance est plus importante.

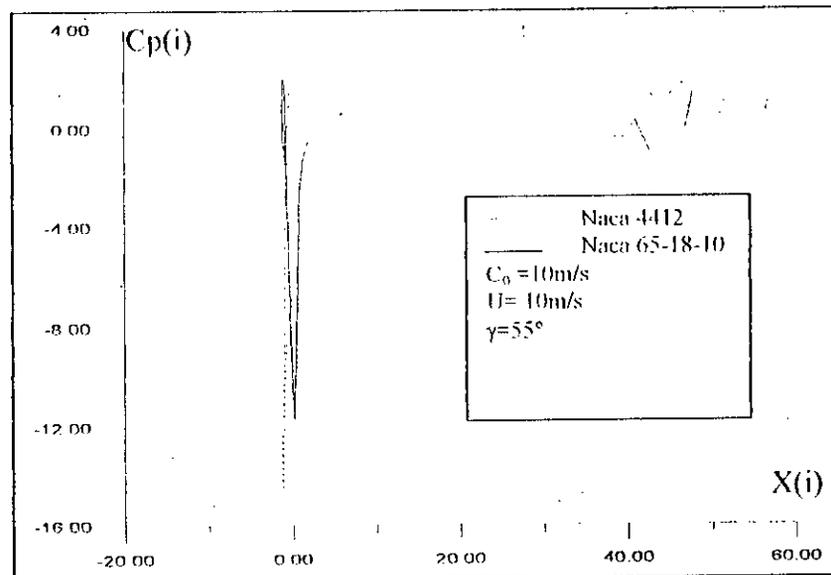


Fig. (II.3) Distribution des coefficients de pression

II.4) Comportement de la grille en aube isolée :

Dans la grille, l'influence de la présence des autres aubes sur une d'elles, dépend essentiellement du serrage. Cette influence sera négligée après une certaine limite, qui est présentée dans la figure ci après.

On a estimé la limite de ($t = 3,7 \times \text{Corde}$), une augmentation au dessus de cette limite, n'entraîne aucune variation remarquable.

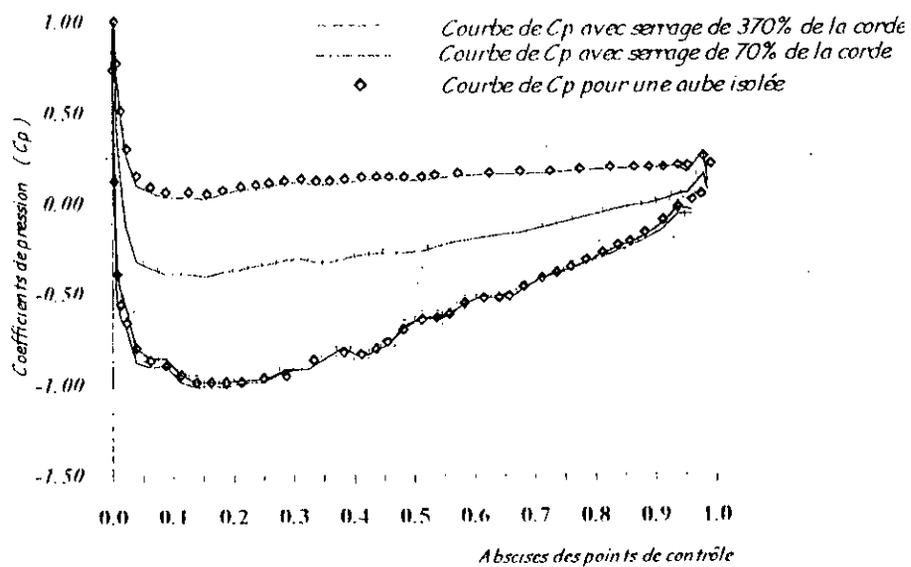


Fig. (II.4) Comportement en aube isolée

CHAPITRE III

III. APPLICATION DE LA METHODE A UN ETAGE DE TURBOMACHINES.

Ce chapitre mis en œuvre la méthode des singularités dans le cas d'un étage de turbomachine, en s'approchant de l'écoulement réel par l'introduction de la notion d'instationnarité.

La figure ci-dessous montre la morphologie de l'étage, ses différents paramètres ainsi que les triangles des vitesses dans le rotor et le stator

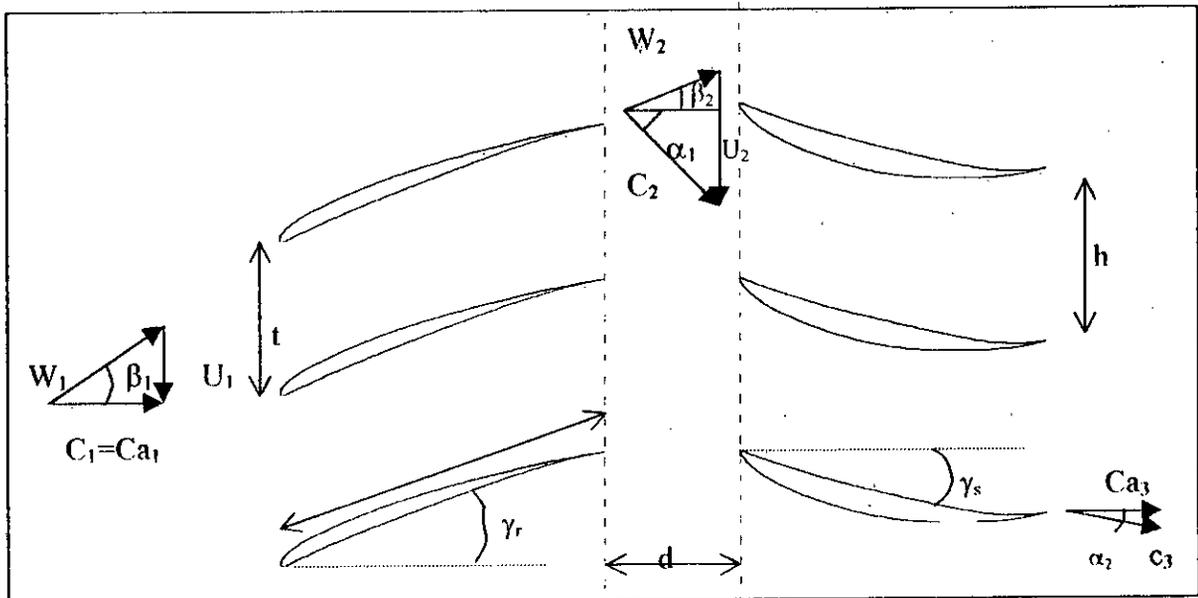


Fig [III.1] La morphologie de l'étage

$$\operatorname{tg}(\beta_m) = \frac{\operatorname{tg}(\beta_1) + \operatorname{tg}(\beta_2)}{2}$$

$$\operatorname{tg}(\beta_1) = \operatorname{tg}(\beta_2) + \operatorname{tg}(\alpha_2)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_m) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1) + \operatorname{tg}(\alpha_2)}{2}$$

$$\operatorname{tg}(\beta_1) = \operatorname{tg}(\beta_m) + \operatorname{tg}(\alpha_m)$$

III.1)- Description des obstacles :

La série NACA 65 est la plus répandue actuellement. Les différents paramètres de ce profil est cité à [l'annexeIII.1]

Les coordonnées du rotor seront $X_s(i), Y_s(i)$

Les coordonnées du stator seront :

$$\begin{cases} X_s(i) = x_s(i) + l \cos(\gamma_s) + d \\ Y_s(i) = -Y_s(i) \end{cases}$$

III.2)- Champs de vitesse dans l'étage :

La superposition des potentielles complexes induits par le rotor et ceux induits par le stator, nous donne :

$$F(z) = F_r(z) + F_s(z)$$

$$F(z) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \ln(z_0 - z_j) ds_j - \frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=n+1}^{2n} \int_{l_j} \gamma_j(s) \ln(z_0 - z_j) ds_j \quad [III.1]$$

La vitesse conjuguée sera :

$$C = \frac{dF'(z)}{dz} = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \frac{ds_j}{z_0 - z_j} - \frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=n+1}^{2n} \int_{l_j} \gamma_j(s) \frac{ds_j}{z_0 - z_j}$$

Notons que les affixes z_0 et z_j s'écrivent sous la forme :

Pour le rotor $j=1, n$ $z_j = x_j + i(y_j + kt)$ k varie de $-\infty$ à $+\infty$

Pour le stator $j= n+1, 2n$ $z_j = x_j + i(y_j + kh)$ $z_0 = x_0 + iy_0$

Donc l'expression de la vitesse conjuguée devient :

$$C = -\frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{ds_j}{(x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j) + ikt} - \frac{i}{2\pi} \sum_{j=n+1}^{2n} \int_{l_j} \gamma_j(s) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{ds_j}{(x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j) + ikh}$$

On écrit l'équation précédente sous forme d'une série, en faisant sortir les termes t et h des deux sommations, et en faisant rentrer π , on trouve :

$$C = -\frac{i}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \coth\left(\frac{\pi}{t} \{(x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j)\}\right) ds_j - \frac{i}{2h} \sum_{j=n+1}^{2n} \int_{l_j} \gamma_j(s) \coth\left(\frac{\pi}{ht} \{(x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j)\}\right) ds_j$$

La vitesse de l'écoulement dans le point de contrôle de coordonnées (x_i, y_i) est :

$$C_i = -\frac{i}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \coth\left(\frac{\pi}{t} \{(x_i - x_j) + i(y_i - y_j)\}\right) ds_j - \frac{i}{2h} \sum_{j=n+1}^{2n} \int_{l_j} \gamma_j(s) \coth\left(\frac{\pi}{ht} \{(x_i - x_j) + i(y_i - y_j)\}\right) ds_j$$

On propose les changements de variables suivants :

$$\left. \begin{aligned} X_{sij} &= \frac{\pi}{h} (x_i - x_j) \\ Y_{sij} &= \frac{\pi}{h} (y_i - y_j) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Z_{sij} = X_{sij} + i Y_{sij}$$

$$\left. \begin{aligned} X_{rij} &= \frac{\pi}{t} (x_i - x_j) \\ Y_{rij} &= \frac{\pi}{t} (y_i - y_j) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Z_{rij} = X_{rij} + i Y_{rij}$$

On a aussi :

$$i \coth(Z_y) = \frac{\sin(2Y_y) + ish(2X_y)}{ch(2X_y) - \cos(2Y_y)}$$

Ce changement de variable nous permet de séparer les deux parties imaginaire, et réelle de la vitesse conjuguée.

$$C' = -\frac{1}{2t} \sum_{j=i}^n \int_{l_j} \frac{\sin(2Y_{rj}) + ish(2X_{rj})}{ch(2X_{rj}) - \cos(2Y_{rj})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{1}{2h} \sum_{j=i+1}^{2n} \int_{l_j} \frac{\sin(2Y_{sj}) + ish(2X_{sj})}{ch(2X_{sj}) - \cos(2Y_{sj})} \gamma_j(s) ds_j$$

$$-\frac{\gamma_m}{2} \exp(-i\delta_i) \quad [III2]$$

En introduisant les changements de variable suivants :

$$\text{Pour le stator : } f_{sx} = \frac{\sin(2Y_{sj})}{ch(2X_{sj}) - \cos(2Y_{sj})} \quad f_{sy} = \frac{sh(2X_{sj})}{ch(2X_{sj}) - \cos(2Y_{sj})}$$

$$\text{Pour le rotor : } f_{rx} = \frac{\sin(2Y_{rj})}{ch(2X_{rj}) - \cos(2Y_{rj})} \quad f_{ry} = \frac{sh(2X_{rj})}{ch(2X_{rj}) - \cos(2Y_{rj})}$$

Les composantes de la vitesse induite par l'étage seront :

$$\bar{C}_i \begin{cases} \text{Re}(C'_i) = -\frac{1}{2t} \sum_{j=i}^n \int_{l_j} f_{rx} \gamma_j(s) ds_j - \frac{1}{2h} \sum_{j=i+1}^{2n} \int_{l_j} f_{sx} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_i) \\ -\text{Im}(C'_i) = \frac{1}{2t} \sum_{j=i}^n \int_{l_j} f_{ry} \gamma_j(s) ds_j + \frac{1}{2h} \sum_{j=i+1}^{2n} \int_{l_j} f_{sy} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_i) \end{cases} \quad [III3]$$

Pour modéliser l'écoulement dans l'étage, on superpose l'ensemble des singularités induites par l'étage et un écoulement uniforme de module C_m et de direction α_m .

$$\bar{C}_i \begin{cases} u_i = C_m \cos(\alpha_m) - \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_{rx} \gamma_j(s) ds_j - \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} f_{sx} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_i) \\ v_i = C_m \sin(\alpha_m) + \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_{ry} \gamma_j(s) ds_j + \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} f_{sy} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_i) \end{cases} \quad [III.4]$$

C'est l'expression générale de la vitesse dans un point quelconque de l'étage.

III.3)- Condition de glissement :

Celle-ci s'écrira :

- ♦ pour rotor : $tg(\delta_i) = \frac{v_i + U}{u_i} \quad i = 1, n$
- ♦ pour stator : $tg(\delta_i) = \frac{v_i}{u_i} \quad i = n+1, 2n$

Après simplification :

$$\frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} (f_{ry} \cos(\delta_i) + f_{rx} \sin(\delta_i)) \gamma_j ds_j + \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} (f_{sy} \cos(\delta_i) + f_{sx} \sin(\delta_i)) \gamma_j ds_j$$

$$= C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i)$$

avec $\lambda = 1$ pour $j < n$

$\lambda = 0$ pour $j > n$

soit le changement de variable : $f_r = \{f_{rx} \sin(\delta_i) + f_{ry} \cos(\delta_i)\}$

$$f_s = \{f_{sx} \sin(\delta_i) + f_{sy} \cos(\delta_i)\}$$

Alors :

$$\frac{1}{2l} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_r \gamma_j(s) ds_j + \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} f_s \gamma_j(s) ds_j = C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i)$$

Comme γ_j est répartie linéairement, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2l} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \left(\gamma(j-1) + \frac{\gamma(j) - \gamma(j-1)}{l_j} s_j \right) f_r ds_j + \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} \left(\gamma(j-1) + \frac{\gamma(j) - \gamma(j-1)}{l_j} s_j \right) f_s ds_j \\ = C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i) \end{aligned}$$

Pour le rotor : $G_r(i,j) = \int_{l_j} f_r ds_j$; $F_r(i,j) = \int_{l_j} f_r s_j ds_j$

Pour le stator : $G_s(i,j) = \int_{l_j} f_s ds_j$; $G_s(i,j) = \int_{l_j} f_s s_j ds_j$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2l} \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n G_r(i,j) \gamma(j-1) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F_r(i,j) \frac{\gamma(j) - \gamma(j-1)}{l_j} \right\} \\ + \frac{1}{2h} \left\{ \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} G_s(i,j) \gamma(j-1) + \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} F_s(i,j) \frac{\gamma(j) - \gamma(j-1)}{l_j} \right\} \end{aligned}$$

[115]

$$= C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i)$$

Puisque pour $i=1$ l'équation n'est pas définie, on commence par $i=2$ et en terminant par $i=n+1$ puis on confond la distribution $(n+1)$ avec celle de 1, de façon similaire pour le rotor et le stator. Il devient alors :

$$\begin{aligned} G_r(i,n+1) &= G_r(i,1) & ; & & G_s(i,2n+1) &= G_s(i,n+1) \\ F_r(i,n+1) &= F_r(i,1) & , & & G_s(i,2n+1) &= G_s(i,n+1) \end{aligned}$$

Ce qui conduit à un système linéaire à $2n$ équation et $2n+2$ inconnues. on doit imposer les deux conditions de KUTTA. l'un pour le rotor et l'autre pour le stator.

III.4)- Condition de K U T T A:

- ❖ *sur rotor* : identité de la vitesse relative.
- ❖ *sur stator* : identité de la vitesse absolue.

Pour satisfaire cette condition, on impose :

- ❖ *sur rotor* $\gamma(n+1) = -\gamma(1)$
- ❖ *sur stator* $\gamma(2n+1) = -\gamma(n+1)$

En-fin, on aboutira à un système linéaire de $2n$ équations à $2n$ inconnues.

Soit finalement une matrice d'influence globale :

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline A_{rr} & A_{sr} \\ \hline A_{rs} & A_{ss} \\ \hline \end{array}$$

$$B = \begin{array}{|c|} \hline B_r \\ \hline B_s \\ \hline \end{array}$$

Avec :

- A_{rr} : représente l'influence du rotor sur lui-même.
- A_{sr} : représente l'influence du stator sur le rotor.
- A_{rs} : représente l'influence du rotor sur le stator.
- A_{ss} : représente l'influence du stator sur lui-même.

$$B_r(i) = C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - U \cos(\delta_i)$$

$$J = 1, n$$

$$A_{rr} = \begin{cases} A(i,1) = \frac{1}{2l} \left[G_r(i,2) - \frac{Fr(i,2)}{l_r(2)} - \frac{Fr(i,1)}{l_r(1)} \right] \\ A(i,j) = \frac{1}{2l} \left[Gr(i,j+1) - \frac{Fr(i,j+1)}{l_r(j+1)} + \frac{Fr(i,j)}{l_r(j)} \right] \\ A(i,n) = \frac{1}{2l} \left[Gr(i,1) + \frac{Fr(i,n)}{l_r(n)} - \frac{Fr(i,1)}{l_r(1)} \right] \end{cases}$$

$$J = n+1, 2n$$

$$A_{sr} = \begin{cases} A(i,n+1) = \frac{1}{2h} \left[G_s(i,n+2) - \frac{Fs(i,n+2)}{l_s(n+2)} - \frac{Fs(i,n+1)}{l_s(n+1)} \right] \\ A(i,j) = \frac{1}{2h} \left[G_s(i,j+1) - \frac{Fs(i,j+1)}{l_s(j+1)} + \frac{Fs(i,j)}{l_s(j)} \right] \\ A(i,2n) = \frac{1}{2h} \left[G_s(i,n+1) + \frac{Fs(i,2n)}{l_s(2n)} - \frac{Fs(i,n+1)}{l_s(n+1)} \right] \end{cases}$$

Pour $i = n+1, 2n$

$$B_s(i) = C_m \sin(\delta_i - \alpha_m)$$

$$J = 1, n$$

$$A_{rs} = \begin{cases} A(i,1) = \frac{1}{2l} \left[G_r(i,2) - \frac{Fr(i,n+2)}{l_r(n+2)} - \frac{Fr(i,n+1)}{l_r(n+1)} \right] \\ A(i,j) = \frac{1}{2l} \left[Gr(i,j+1) - \frac{Fr(i,j+1)}{l_r(j+1)} + \frac{Fr(i,j)}{l_r(j)} \right] \\ A(i,n) = \frac{1}{2l} \left[Gr(i,1) + \frac{Fr(i,n)}{l_r(n)} - \frac{Fr(i,1)}{l_r(1)} \right] \end{cases}$$

$J=n+1, 2n$

$$A_{ss} = \begin{cases} A(i, n+1) = \frac{1}{2h} \left[Gs(i, n+2) - \frac{Fs(i, n+2)}{l_s(n+2)} - \frac{Fs(i, n+1)}{l_s(n+1)} \right] \\ A(i, j) = \frac{1}{2h} \left[Gs(i, j+1) - \frac{Fs(i, j+1)}{l_s(j+1)} + \frac{Fs(i, j)}{l_s(j)} \right] \\ A(i, 2n) = \frac{1}{2h} \left[Gs(i, n+1) + \frac{Fs(i, 2n)}{l_s(2n)} - \frac{Fs(i, n+1)}{l_s(n+1)} \right] \end{cases}$$

La résolution de ce système, nous permet de calculer les vorticités $\gamma_s(j)$, $j = 1, 2n$. qui nous permet de calculer les différentes paramètres de l'écoulement.

III.5)- Expression de la vitesse tangentielle.

$$C_i = - \left[C_m \cos(\alpha_m) \cos(\delta_i) - \frac{1}{2l} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_{rx} \cos(\delta_i) \gamma_j(s) ds_j - \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} f_{rx} \cos(\delta_i) \gamma_j(s) ds_j \right. \\ \left. + C_m \sin(\alpha_m) \sin(\delta_i) + \frac{1}{2l} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_{ry} \sin(\delta_i) \gamma_j(s) ds_j + \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} f_{ry} \sin(\delta_i) \gamma_j(s) ds_j \right. \\ \left. - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_i) \cos(\delta_i) - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_i) \sin(\delta_i) \right] \quad [III6]$$

$$C_i = - \left[\frac{1}{2l} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} (f_{ry} \sin(\delta_i) + f_{rx} \cos(\delta_i)) \gamma_j ds_j - \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} (f_{ry} \sin(\delta_i) + f_{rx} \cos(\delta_i)) \gamma_j ds_j \right. \\ \left. - \frac{\gamma_m}{2} + C_m \cos(\alpha_m - \delta_i) \right]$$

On pose le changement de variable suivant :

$$f_r = f_{ry} \sin(\delta_i) + f_{rx} \cos(\delta_i)$$

$$f_s = f_{sy} \sin(\delta_i) + f_{sx} \cos(\delta_i)$$

On obtient :

$$C_i = - C_m \cos(\alpha_m - \delta_i) + \frac{\gamma_m}{2} + \frac{1}{2l} \sum_{j=i}^n \int_{l_j}^{l_{j+1}} f_r \gamma_j ds_j + \frac{1}{2h} \sum_{j=n+1}^{2n} \int_{l_j}^{l_{j+1}} f_s \gamma_j ds_j \quad [III7]$$

On remplace γ_j par sa valeur on obtient alors :

A_{rr} : représente l'influence du rotor sur lui-même.

A_{sr} : représente l'influence du stator sur le rotor.

A_{rs} : représente l'influence du rotor sur le stator.

A_{ss} : représente l'influence du stator sur lui-même.

$J=1, n$

$$A_{rr} = \begin{cases} A(i,1) = \frac{1}{2l} \left[Gr(i,2) - \frac{Fr(i,2)}{l_r(2)} - \frac{Fr(i,1)}{l_r(1)} \right] \\ A(i,j) = \frac{1}{2l} \left[Gr(i,j+1) - \frac{Fr(i,j+1)}{l_r(j+1)} + \frac{Fr(i,j)}{l_r(j)} \right] \\ A(i,n) = \frac{1}{2l} \left[Gr(i,1) + \frac{Fr(i,n)}{l_r(n)} - \frac{Fr(i,1)}{l_r(1)} \right] \end{cases}$$

$J=n+1, 2n$

$$A_{sr} = \begin{cases} A(i,n+1) = \frac{1}{2h} \left[Gs(i,n+2) - \frac{Fs(i,n+2)}{l_s(n+2)} - \frac{Fs(i,n+1)}{l_s(n+1)} \right] \\ A(i,j) = \frac{1}{2h} \left[Gs(i,j+1) - \frac{Fs(i,j+1)}{l_s(j+1)} + \frac{Fs(i,j)}{l_s(j)} \right] \\ A(i,2n) = \frac{1}{2h} \left[Gs(i,n+1) + \frac{Fs(i,2n)}{l_s(2n)} - \frac{Fs(i,n+1)}{l_s(n+1)} \right] \end{cases}$$

Pour $i = n+1, 2n$

$J = 1, n$

$$A_{rs} = \begin{cases} A(i,1) = \frac{1}{2t} \left[G_i(i,2) - \frac{Fr(i,n+2)}{l_r(n+2)} - \frac{Fr(i,n+1)}{l_r(n+1)} \right] \\ A(i,j) = \frac{1}{2t} \left[Gr(i,j+1) - \frac{Fr(i,j+1)}{l_r(j+1)} + \frac{Fr(i,j)}{l_r(j)} \right] \\ A(i,n) = \frac{1}{2t} \left[Gr(i,1) + \frac{Fr(i,n)}{l_r(n)} - \frac{Fr(i,1)}{l_r(1)} \right] \end{cases}$$

$J = n+1, 2n$

$$A_{ss} = \begin{cases} A(i,n+1) = \frac{1}{2h} \left[Gs(i,n+2) - \frac{Fs(i,n+2)}{l_s(n+2)} - \frac{Fs(i,n+1)}{l_s(n+1)} \right] \\ A(i,j) = \frac{1}{2h} \left[Gs(i,j+1) - \frac{Fs(i,j+1)}{l_s(j+1)} + \frac{Fs(i,j)}{l_s(j)} \right] \\ A(i,2n) = \frac{1}{2h} \left[Gs(i,n+1) + \frac{Fs(i,2n)}{l_s(2n)} - \frac{Fs(i,n+1)}{l_s(n+1)} \right] \end{cases}$$

Pour $i = j$

$$\begin{cases} G(i,i) = k \\ F(i,i) = k \cdot l(j)/2 \end{cases}$$

Avec :

❖ $k=t$ pour $i=1,n$

❖ $K=h$ pour $i=n+1,2n$

III.6)- Coefficients de pression :

On a l'expression générale de la pression d'un fluide parfait et incompressible qui s'écrit :

$$\frac{p}{\rho} + \frac{C^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = cte(t). \quad \text{[III.8]}$$

Pour le cas stationnaire $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

tel que :

$Cte(t)$: représente la constante caractérisant l'écoulement à l'instant (t). Généralement prise égale à la pression totale du fluide à l'instant (t).

φ : représente le potentiel des vitesses

Ce qui nous permet d'avoir l'expression de la pression :

$$p = p_0 + \frac{\rho}{2} (C_0^2 - C^2) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

d'où

$$\underbrace{\frac{p - p_0}{\rho C_0^2}}_{Cp} = 1 - \left(\frac{C}{C_0} \right)^2 - \frac{2}{\rho C_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Donc :

$$Cp = 1 - \left(\frac{C}{C_0} \right)^2 - \frac{2}{\rho C_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$Cp = 1 - \left(\frac{W}{C_0} \right)^2 + \left(\frac{U}{C_0} \right)^2 - \frac{2}{\rho C_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{C_j l_j}{\Delta t}$$

C_j : est la vitesse du point j.

l_j : est la longueur du panneau j.

$$U = \frac{t}{n \Delta t}$$

t : le pas du profil du rotor.

U : la vitesse de rotation du rotor.

n : le nombre de position prise par le rotor.

D'où

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{nU}{t} C_j l_j$$

D'où l'expression générale du C_p :

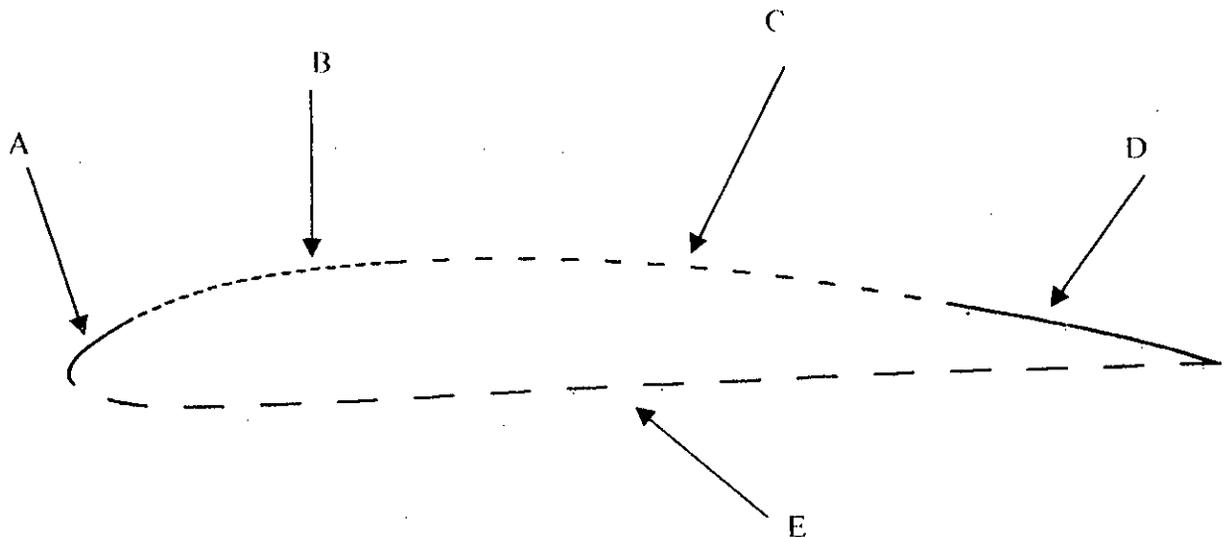
$$C_p = 1 - \left(\frac{W}{C_0} \right)^2 + \left(\frac{U}{C_0} \right)^2 - \frac{2}{\rho C_0^2} \frac{nU}{t} C_j l_j \quad \text{[III.9]}$$

III.7)- Résolution numérique du modèle

III.7.1)- Problème posé par cubic-spline

La méthode d'interpolation cubic-spline consiste à considérer entre chaque deux points du profil une fonction de troisième degré ce qui conduit à dire que l'erreur d'interpolation peut être réduite en augmentant les points d'interpolation, le contraire est juste, l'erreur diminue si le nombre de points à interpoler diminue.

La perturbation se manifeste au niveau de la jonction des fonctions entre eux, et pour prouver cela, on a divisé l'extrados en trois fonctions, comme le montre la figure [III.2]



A : polynôme de 10^{ème} degrés $\Rightarrow f(x) = 0.468861 + 1.25144 X - 0.118119 X^2 + 0.00872206 X^3 - 0.00043193 X^4 + 1.37314E-005 X^5 - 2.80261E-007 X^6 + 3.64308E-009 X^7 - 2.91197E-011 X^8 + 1.30412E-013 X^9 - 2.50493E-016 X^{10}$

B : polynôme de 3^{ème} degrés $\Rightarrow f(x) = 1.2656 + 0.791012 X - 0.028339 X^2 + 0.000392073 X^3$

C : polynôme de 3^{ème} degrés $\Rightarrow f(x) = 5.22265 + 0.260652 X - 0.00397279 X^2 + 7.84945E-006 X^3$

D : polynôme de 3^{ème} degrés $\Rightarrow f(x) = 82.5257 - 2.5565 X + 0.0298497 X^2 - 0.000125397 X^3$

E : polynôme de 4^{ème} degrés $\Rightarrow f(x) = -3.8849 + 0.949465 X - 0.0585859 X^2 - 0.000140278 X^3 - 5.64428E-007 X^4$

Nous avons porté sur la figure [III.3] les variations du C_p qui résulte l'utilisation de ce profil, on observe clairement des perturbations au niveau du jonction entre les fonctions.

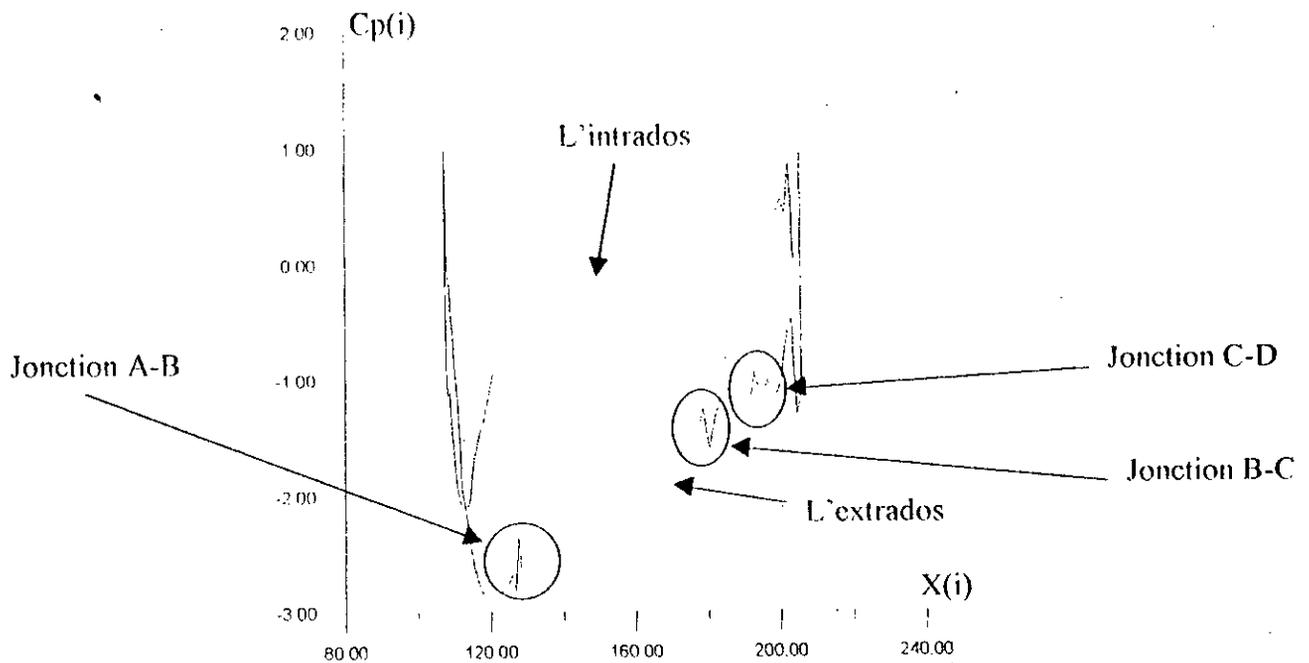


Fig [III.3] évaluation du C_p du stator

III.7.2)- Solution polynomiale

Contrairement à ce qui se passe dans l'interpolation avec cubic-spline l'interpolation polynomiale nous permet d'avoir une seule courbe qui englobe tout les points du profil.

Comme nous le constatons d'après la figure [III.2], l'intrados se constitue d'une seule courbe d'une fonction de 4^{ème} degrés. Effectivement la figure [III.3] ne montre aucune perturbation au niveau de l'intrados.

D'après la comparaison des deux méthodes, on distingue nettement que l'interpolation polynomiale du profil donne des résultats plus précises que celles données par l'interpolation par la méthode de cubic-spline.

III.8)- Experimentation numérique

III.8.1) - En régime stationnaire

Comportement en profils isolé :

Comme, on ne possède pas de résultats expérimentaux pour comparer les résultats obtenus par la méthode des singularités et dans le but de la validation du modèle. On a considéré les résultats obtenus dans le cas du profil isolé comme référence, et pour cela on donne des grandes valeurs aux distances inter aubes (t et h), et la distance rotor-stator.

D'après la figure **Fig. [III. 4]** obtenue pour un rotor immobile et des angles de calage nuls, on a :

Le comportement des coefficients de pression sur le rotor et le stator sont identiques et ont la même allure que celle du profil isolé, car l'effet du stator le rotor est négligé et vis versa, ce qui confirme la validité du modèle adopté.

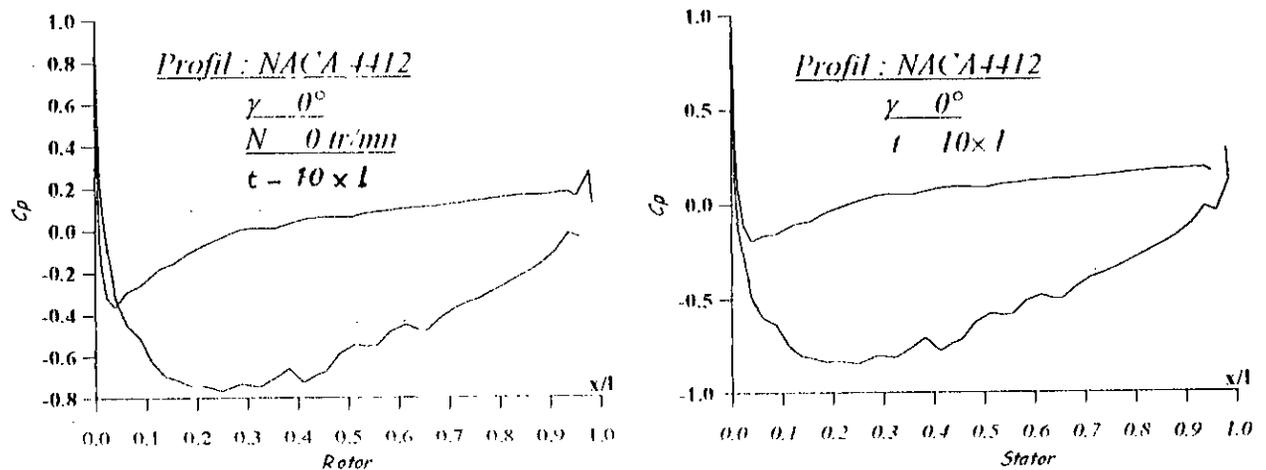


Fig [III. 4] Comportement en profils isolé

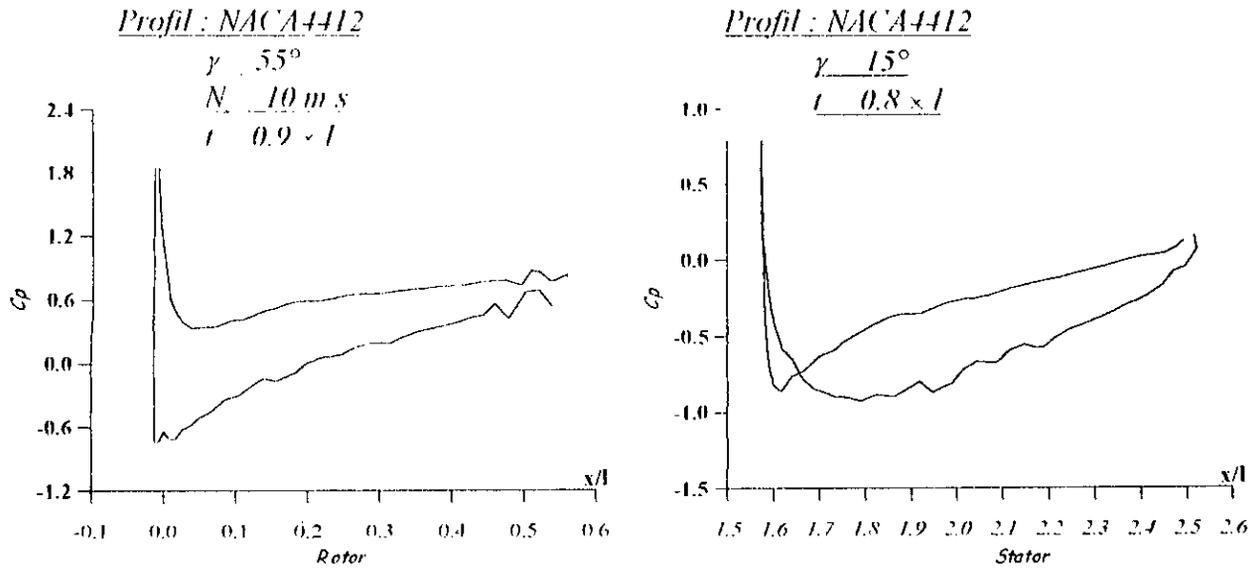


Fig [III. 4] Evolution des coefficients de pression

Pour donner un aspect pratique à notre travail, on a extrait les paramètres d'une pompe de la référence [4], ce qui a donné les résultats présentés à Fig[III.5] qui sont très significatifs.

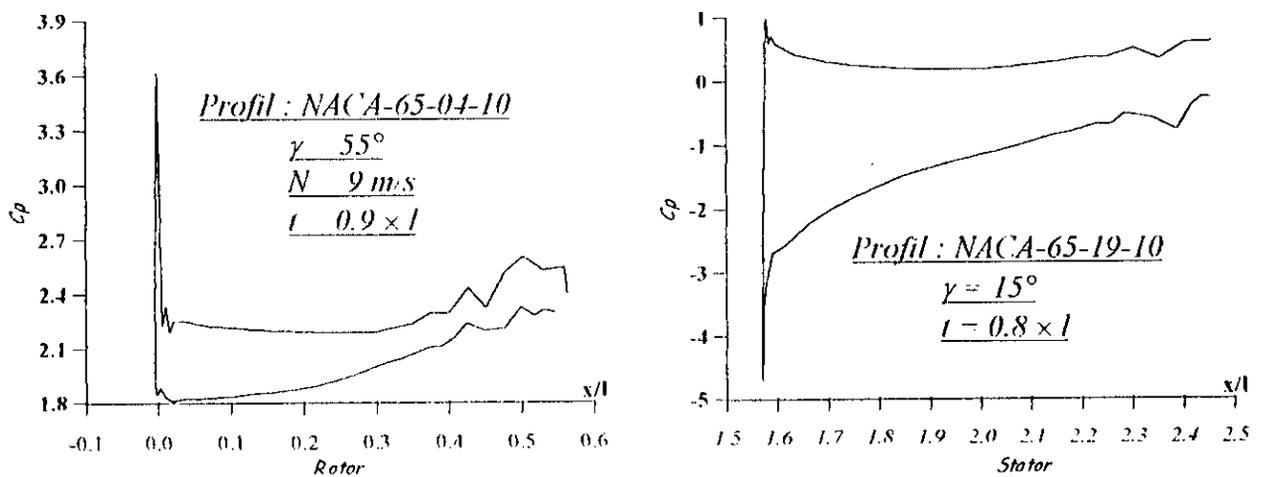


Fig III. 5] Evolution des coefficients de pression

III.8.2)- Régime instationnaire

On observe lors des manipulations continues des points de profils que la courbe du C_p montre une grande perturbation. L'augmentation des nombres de point du profil des aubes n'a pas permis de résoudre correctement le problème. Le changement de la méthode d'interpolation s'impose de la méthode de Cubic-spline, en une interpolation polynomial, ce qui a donné de meilleurs résultats.

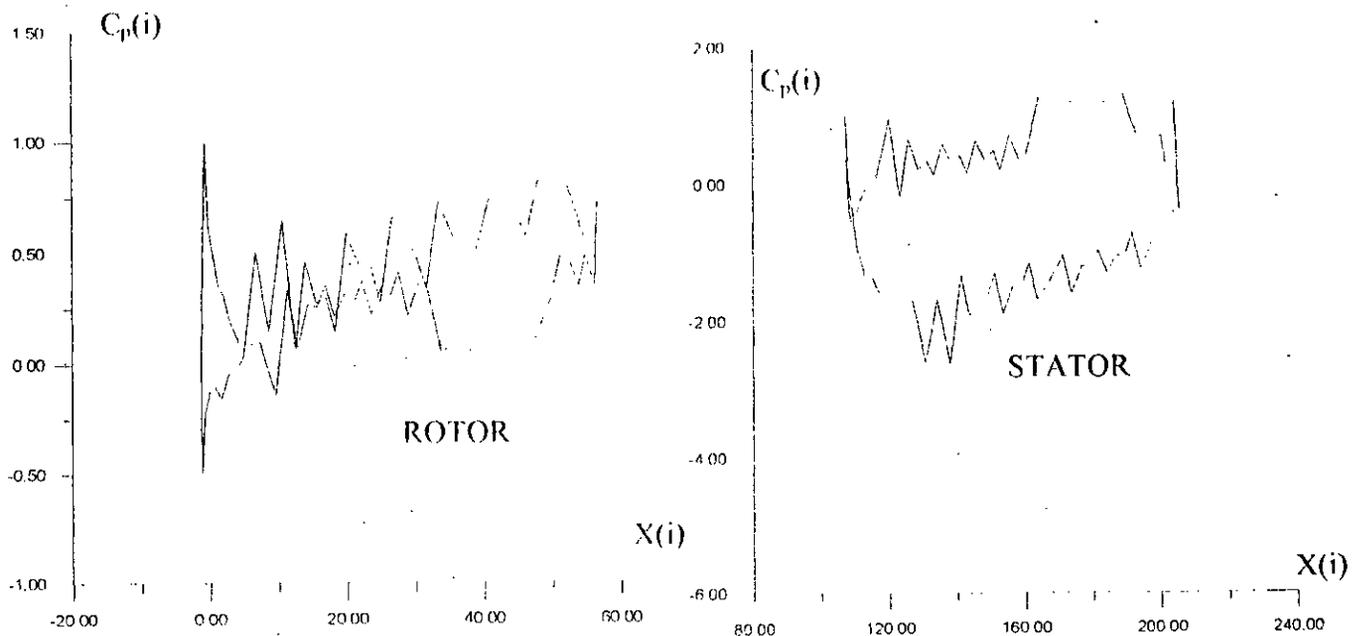


Fig [III.6] Variation du $C_p(i)$ en fonction des abscisses des points de contrôle $X(i)$ du rotor et du stator

Les résultats représentés dans la figure [III.6] sont obtenus avec un profil NACA 4412 interpolé par la méthode de cubic-spline de 35 points, qui se trouve dans la bibliographie [1] jusqu'à 79 points.

On observe une grande perturbation du profil ce qui nous empêche d'utiliser ces résultats au dimensionnement

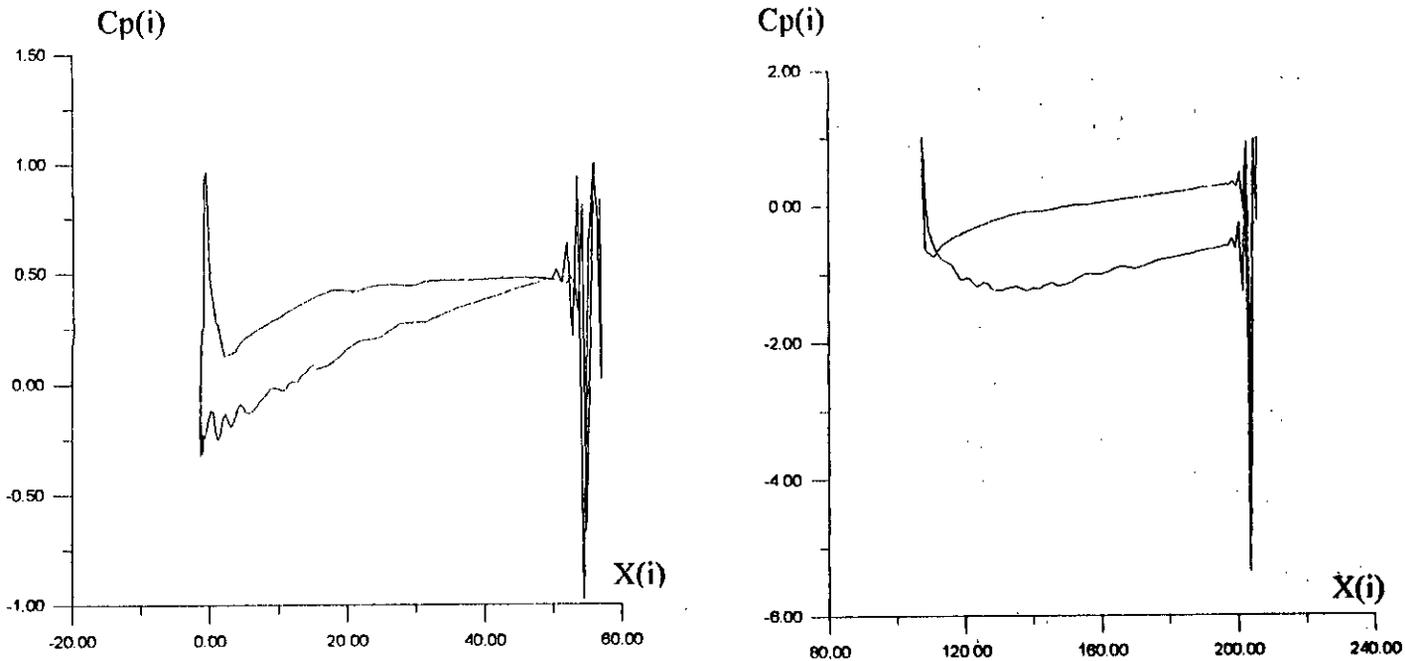


Fig [III.7] Variation du $CP(i)$ en fonction des abscisses des points de contrôle $X(i)$ du rotor et du stator

Les résultats représentés dans la figure [III.7] sont obtenus avec un profil NACA 4412 interpolé par la méthode de cubic-spline de 79 points, jusqu'à 203 points. On observe toujours des perturbations, surtout au niveaux du bord d'attaque et du bord de fuite du rotor et du stator.

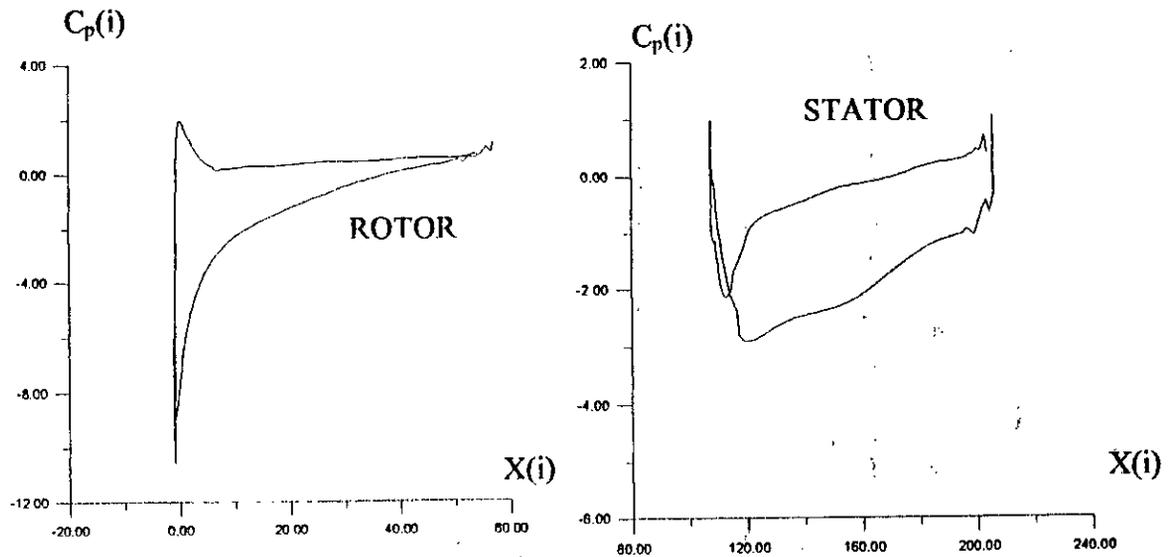


Fig [III.8] Variation du $CP(i)$ en fonction des abscisses des points de contrôle $X(i)$ du rotor et du stator

Lors du changement de la méthode d'interpolation de cubic-spline par une interpolation polynomiale de degré 10 pour l'extrados, et de degré 6 pour l'intrados, on observe une stabilité des courbes excepté au bord de fuite du rotor ce qui est tolérable, Fig [III.8].

Autres résultats représentés aux figures suivantes, qui représentent les variations du C_p pour les différents types de profils.

NACA 4412

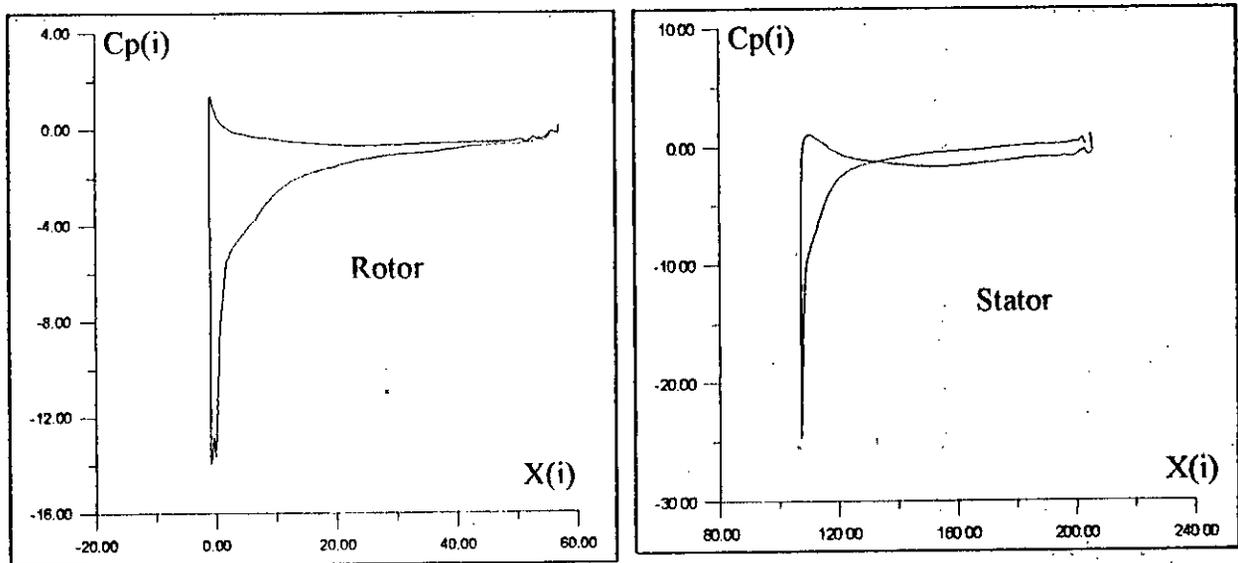


Fig [III.9] Variation du C_p pour $U = 6 \text{ m/s}$, $C_0 = 10 \text{ m/s}$, $\gamma_r = 55^\circ$, $\gamma_s = 8.8^\circ$

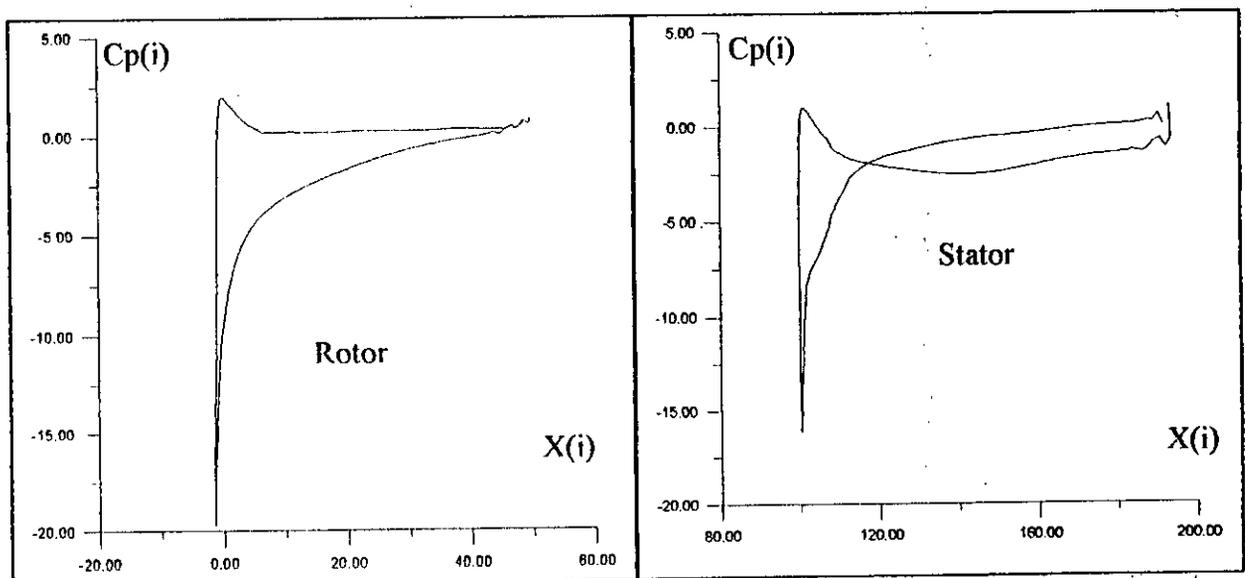


Fig [III.10] Variation du C_p pour $U = 10 \text{ m/s}$, $C_0 = 10 \text{ m/s}$, $\gamma_r = 60^\circ$, $\gamma_s = 20^\circ$

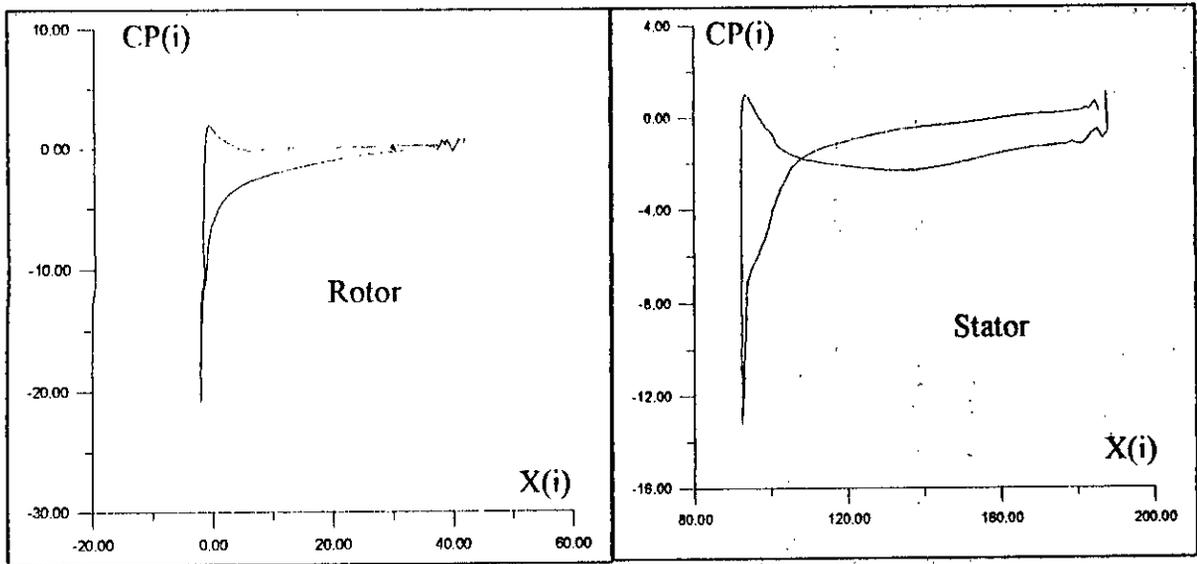


Fig [III.11] Variation du C_p pour $U = 10 \text{ m/s}$, $C_0 = 10 \text{ m/s}$, $\gamma_r = 65^\circ$, $\gamma_s = 16^\circ$

NACA 65-18-10

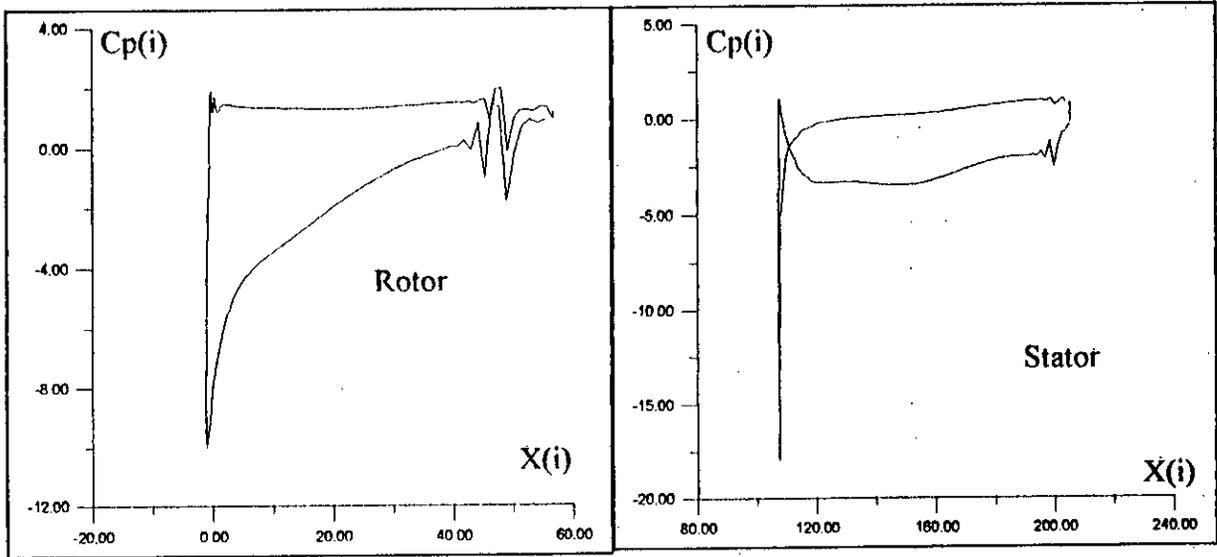


Fig [III.12] Variation du C_p pour $U = 10 \text{ m/s}$, $C_0 = 10 \text{ m/s}$, $\gamma_r = 55^\circ$, $\gamma_s = 10^\circ$

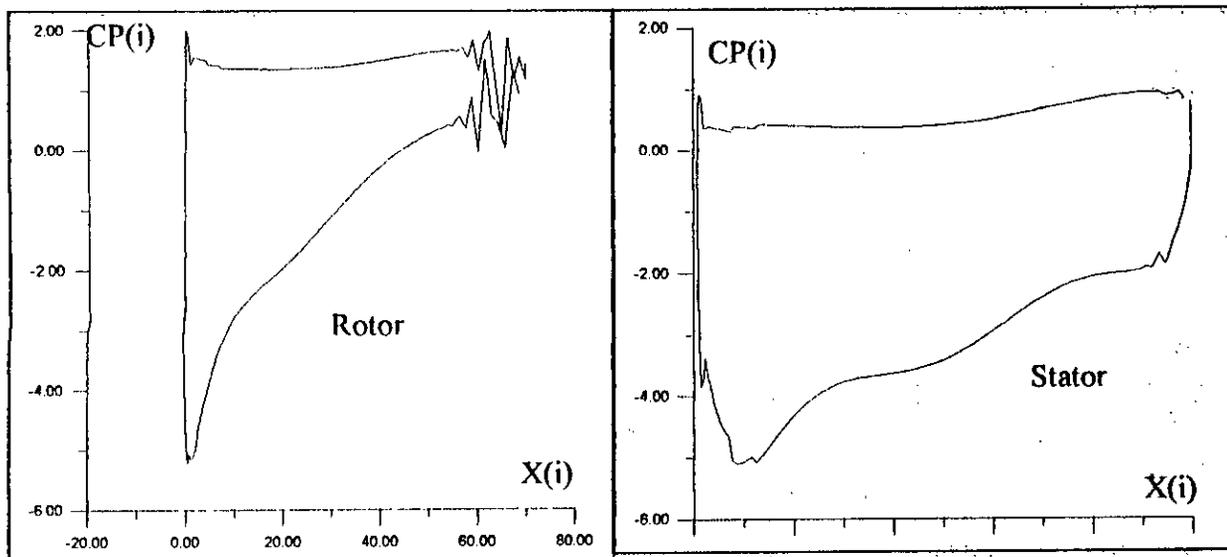


Fig [III.13] *Variation du Cp pour $U = 10 \text{ m/s}$, $C_0 = 10 \text{ m/s}$, $\gamma_r = 45^\circ$, $\gamma_s = 5^\circ$*

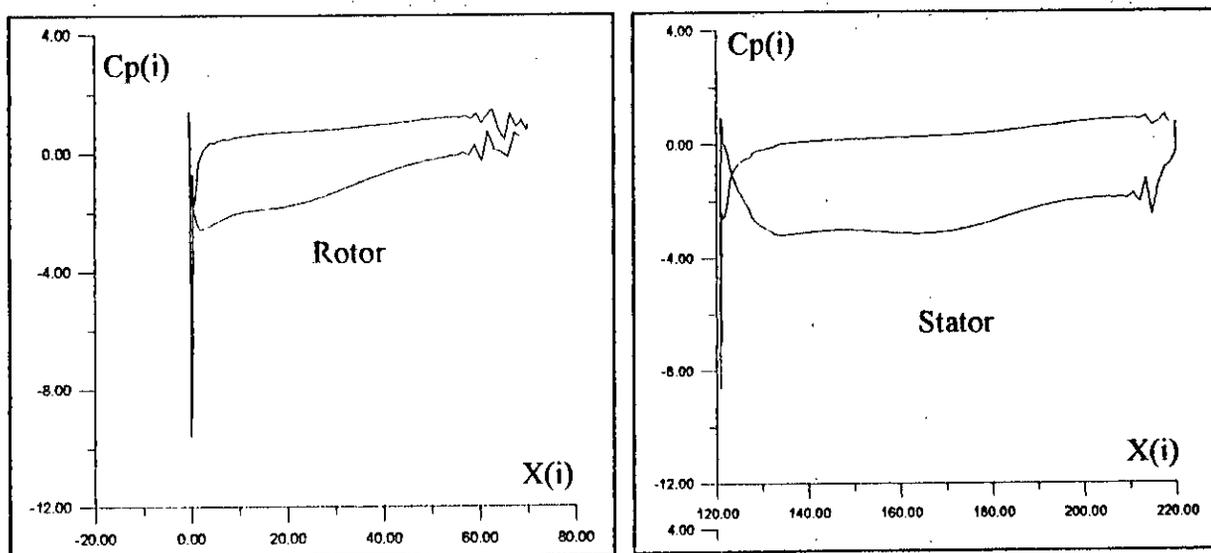


Fig [III.14] *Variation du Cp pour $U = 8 \text{ m/s}$, $C_0 = 10 \text{ m/s}$, $\gamma_r = 45^\circ$, $\gamma_s = 5^\circ$*

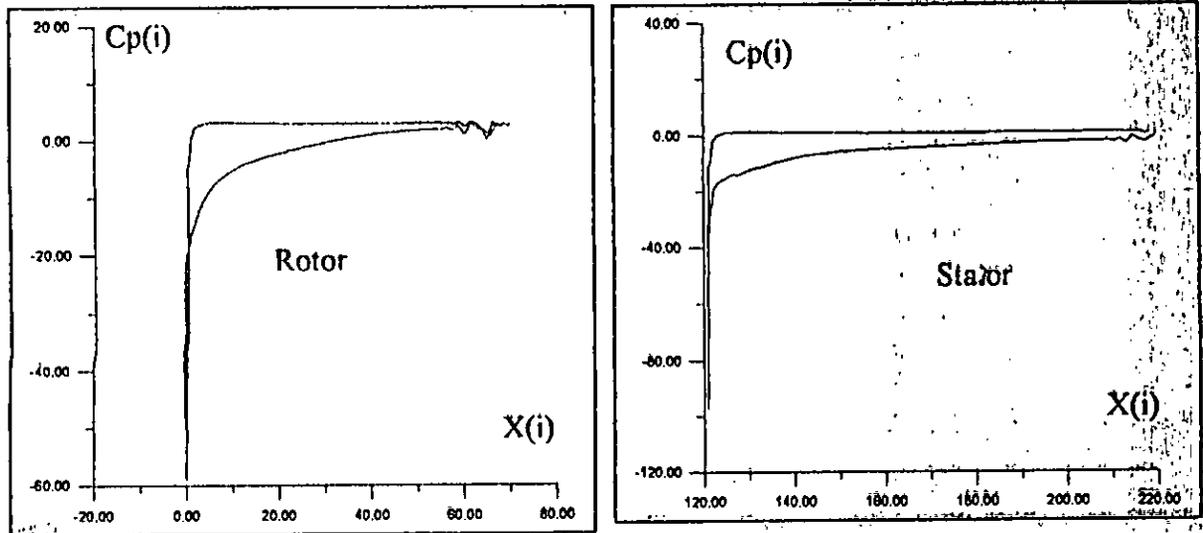


Fig [III.15] Variation du C_p pour $U = 15 \text{ m/s}$, $C_0 = 10 \text{ m/s}$, $\gamma_r = 45^\circ$, $\gamma_s = 5^\circ$

CHAPITRE IV

IV- DIMENSIONNEMENT D'UNE MACHINE A COMPRESSION AXIAL

IV.1)- Etude générale d'un étage de compression formé de deux grilles planes :

Les figures ci-dessous établissent la morphologie d'un étage de compression ainsi que les triangles de vitesses et les efforts exercés sur les aubages du rotor et du stator.

Le rotor est entraîné à la vitesse de translation U et les aubages du stator sont disposés de manière à redresser l'écoulement vers l'axe (α_3 faible ou idéalement nul).

En mouvement relative (rotor), les vitesses sont repérées par les angles β ($\beta_1, \beta_2, \beta_m$) et en mouvement absolu (stator) par les angles α ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_m$).

L'introduction du mouvement relatif facilite le traitement du problème lié à la grille mobile. En effet, l'ensemble des lois déjà présentées est applicable en remplaçant les angle α par les angles β et les vitesses C par les vitesses relatives W .

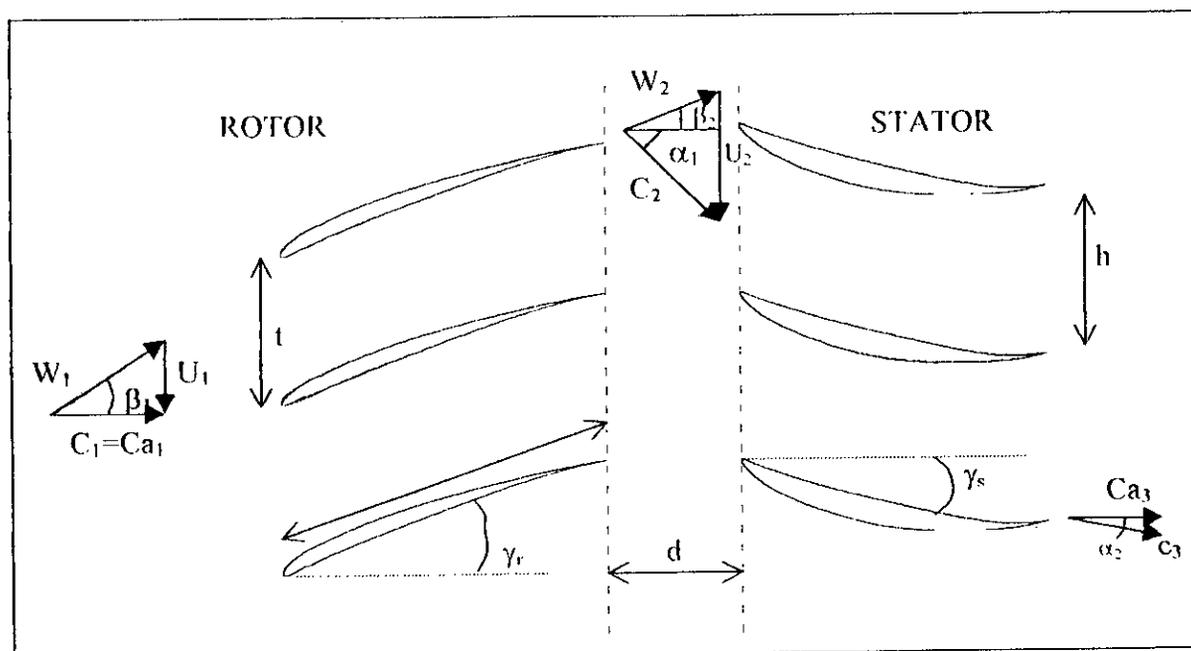


Fig [IV.1] : La morphologie d'un étage de compression axial

$$\operatorname{tg}(\beta_m) = \frac{\operatorname{tg}(\beta_1) + \operatorname{tg}(\beta_2)}{2} \quad (a)$$

$$\operatorname{tg}(\beta_1) = \operatorname{tg}(\beta_2) + \operatorname{tg}(\alpha_2) \quad (c)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_m) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1) + \operatorname{tg}(\alpha_2)}{2} \quad (b)$$

$$\operatorname{tg}(\beta_1) = \operatorname{tg}(\beta_m) + \operatorname{tg}(\alpha_m) \quad (d)$$

IV.2)- Expression de la hauteur locale

La hauteur de l'étage est établie par une double application du théorème des quantités de mouvement aux aubages du rotor puis aux aubages du stator (fig IV-2)

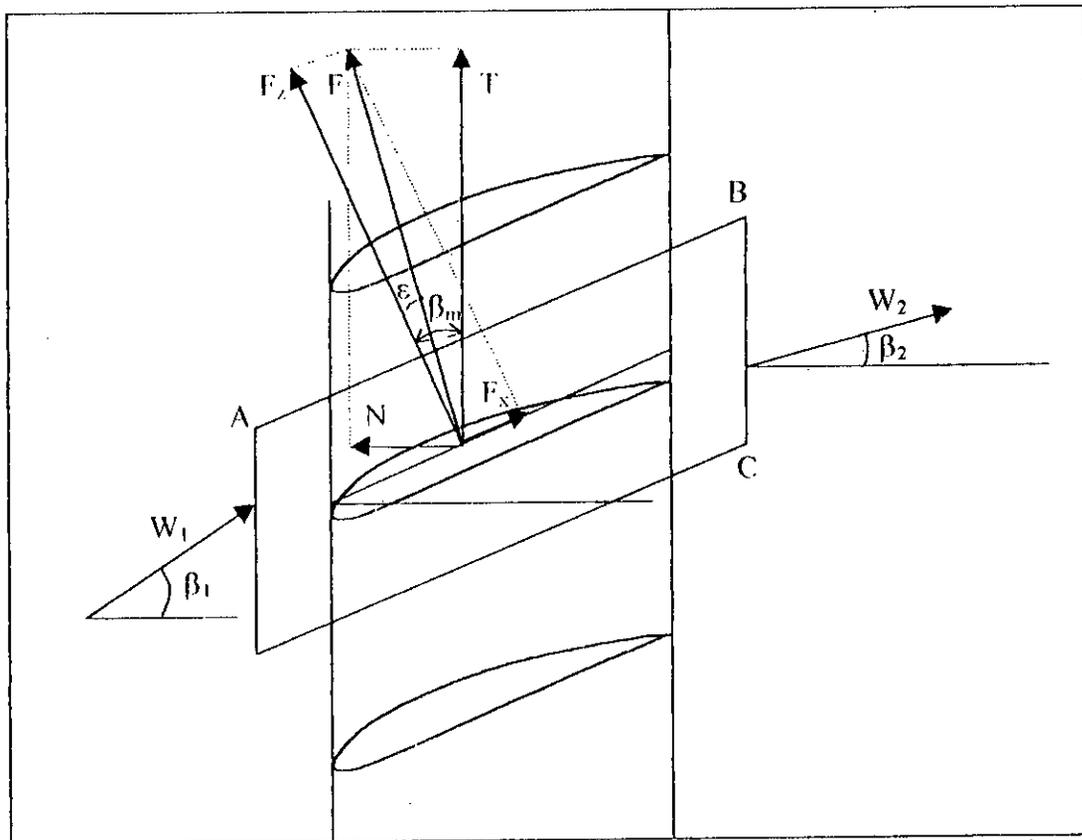


Fig [IV.2] : définition de l'espace fluide étudié.

L'espace fluide étudié est l'espace ABCD d'envergure égale à b et de largeur égale au pas des profils t .

On aura pour le rotor :

$$\rho q_v (W_2' - W_1') = -F_1' + \sum_{i=1}^z P_i \bar{S}_i$$

et pour le stator :

$$\rho q_v (C_3' - C_2') = F_2' + \sum_{i=1}^z P_i \bar{S}_i$$

Equations dans lesquelles F_1' et F_2' sont les actions du fluide sur l'aubage et q_v le débit volumique traversant les surfaces AD et BC.

IV.3)- Equation du rotor :

En projetant l'équation sur l'axe x puis sur l'axe y, on obtient en tenant compte de l'uniformité des vitesses axiales :

Suivant X $0 = P_1 S_1 - P_2 S_2 - N_1$ [IV.1]

Suivant Y $\rho q_v (W_{u2} - W_{u1}) = 0 - T_1$ [IV.2]

D'où :

$$N_1 = P_1 S_1 - P_2 S_2$$
 [IV.3]

D'après le triangle de vitesses, on peut également écrire :

$$N_1 = -T_1 \operatorname{tg}(\beta_m - \varepsilon_1)$$
 [III.4]

En remplaçant dans l'équation [IV.4], T_1 par la valeur issus de [IV.2], on aura :

$$\rho q_v (W_{u2} - W_{u1}) = -T_1 = \frac{N_1}{\operatorname{tg}(\beta_m - \varepsilon_1)} = \frac{P_1 S_1 - P_2 S_2}{\operatorname{tg}(\beta_m - \varepsilon_1)}$$
 [IV.5]

Qui s'écrit aussi :

$$P_2 S_2 - P_1 S_1 = \rho q_v (W_{u2} - W_{u1}) (g (\beta_m - \varepsilon_1)) \quad \text{[IV.6]}$$

En remarquant d'autre part que :

$$S_2 = S_1 = tb$$

$$W_{u1} = C_a \operatorname{tg} \beta_1$$

$$W_{u2} = C_a \operatorname{tg} \beta_2$$

$$q_v = C_a tb$$

On obtient :

$$P_2 - P_1 = \rho C_a^2 (\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2) (g (\beta_m - \varepsilon_1)) \quad \text{[IV.7]}$$

IV.4)- Equation du stator :

$$P_3 - P_2 = \rho C_a^2 (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1) (g (\alpha_m - \varepsilon_2)) \quad \text{[IV.8]}$$

La hauteur fournie par l'étage horizontal est par définition donnée par :

$$H = \frac{P_3 - P_1}{\rho g} + \frac{C_3^2 - C_1^2}{2g} \quad \text{[IV.9]}$$

Dans l'hypothèse d'un écoulement redressé à la sortie du stator ($\alpha_3 = 0$) et pour une vitesse axiale uniforme, on obtient en utilisant [IV.7] et [IV.8] :

$$H = \frac{C_a^2}{g} \left[(\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2) (g (\beta_m - \varepsilon_1)) + \operatorname{tg} \alpha_2 (g (\alpha_m - \varepsilon_2)) \right] \quad \text{[IV.10]}$$

En remarquant d'autre part que dans le triangle de vitesse (c), la hauteur locale prend l'expression finale :

$$H = \frac{C^2}{g} \operatorname{tg} \alpha_2 [\operatorname{tg}(\beta_m - \varepsilon_1) + \operatorname{tg}(\alpha_m - \varepsilon_2)] \quad \text{[III.11]}$$

REMARQUE . en fluide parfait, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ et l'on obtient :

$$H_E = \frac{C^2}{g} \operatorname{tg} \alpha_2 [\operatorname{tg} \beta_m + \operatorname{tg} \alpha_m] \quad \text{[III.12]}$$

Qui s'écrit aussi suivant la forme classique d'EULER :

$$H_E = U_2 C u_2 / g \quad \text{[IV.13]}$$

IV.5)- EXPRESSION DU RENDEMENT LOCAL :

Le rendement hydraulique ou aéraulique local est obtenu par le rapport de la hauteur en fluide réel à la hauteur en fluide parfait :

$$\eta_H = \frac{H}{H_E} = \frac{\operatorname{tg}(\beta_m - \varepsilon_1) + \operatorname{tg}(\alpha_m - \varepsilon_2)}{\operatorname{tg} \beta_m + \operatorname{tg} \alpha_m} \quad \text{[IV.14]}$$

Cette expression donne l'influence des pertes rotoriques et statoriques (ε_1 et ε_2) sur le rendement local.

En supposant que ε_1 et ε_2 constants, on peut noter que le rendement est d'autant plus grand que α_m est grand (compatible avec une cambrure acceptable des profils du stator), le meilleur choix pour β_m se portera sur la solution de l'équation :

$$\frac{\partial \eta_H}{\partial \beta_m} = 0$$

Qui, après développement et simplification s'écrira :

$$\operatorname{tg} \beta_m = -\operatorname{tg} \alpha_m + \sqrt{\left(1 + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon_1}{\operatorname{tg} \varepsilon_2}\right) \left(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_m\right)} \quad \text{[IV.15]}$$

donnant lorsque ε_1 est peu différent de ε_2 , la solution approchée :

$$\operatorname{tg} \beta_m = -\operatorname{tg} \alpha_m + \sqrt{2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_m)} \quad \text{[IV.16]}$$

IV.6)- DIMENSIONNEMENT GLOBAL

Dans le cas du fluide réel, nous retiendrons le même rayon moyen et l'on adoptera les notions suivantes :

$$\alpha_2(\bar{R}) = \bar{\alpha}_2; \quad \beta_m(\bar{R}) = \bar{\beta}_m; \quad \alpha_m(\bar{R}) = \bar{\alpha}_m; \quad C_{a2}(\bar{R}) = \bar{C}_{a2}$$

$$\bar{R} = \frac{R_c + R_i}{2} \quad ; \quad \text{le rayon moyen}$$

Au point de fonctionnement de la machine, on définit la vitesse spécifique et le rayon spécifique par :

$$\text{Vitesse spécifique :} \quad \Omega = \frac{\omega q_v^{1/2}}{(gH)^{3/4}} \quad \text{[IV.17]}$$

$$\text{Rayon spécifique :} \quad A = \frac{R_c (gH)^{1/4}}{q_v^{1/2}} \quad \text{[IV.18]}$$

D'où Λ : *représente le volume de la pompe*

Par ailleurs, l'allure générale de la machine est caractérisée en premier lieu par le rapport de moyeu :

$$T = R_i / R_c \quad \text{[IV.19]}$$

La relation [IV.17] peut être transformée en remarquant que :

$$q_v = \pi (R_c^2 - R_i^2) C_{at} \quad \text{[IV.20]}$$

On obtient :

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2 \pi R_c^2 (1 - T^2) C_{at}}{(gH)^{3/2}} \quad \text{[IV.21]}$$

En négligeant les pertes de parois par rapport aux pertes d'aubages, H peut être assimilé à

$$\bar{H} = K \frac{C_{at}^2}{g} \quad K = 2 \operatorname{tg} \alpha_m \left[\operatorname{tg}(\bar{\beta}_m - \varepsilon_1) + \operatorname{tg}(\alpha_m - \varepsilon_2) \right] \quad \text{[IV.22]}$$

Et remplacé dans l'expression [IV.21] :

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2 \pi R_c^2 (1 - T^2) C_{at}}{K^{3/2} C_{at}^3} \quad \text{[IV.23]}$$

Après simplification par C_{at} et en remarquant que :

$$\operatorname{tg} \bar{\beta}_1 = \frac{\omega \bar{R}}{C_{at}} = \frac{\omega}{C_{at}} \frac{R_i + R_c}{2} = \frac{\omega}{C_{at}} \left(\frac{1+T}{2} \right) \quad \text{[IV.24]}$$

La relation [IV.23] s'écrit aussi :

$$\Omega^2 = \frac{4 \operatorname{tg}^2 \bar{\beta}_1 \pi (1 - T^2)}{(1+T)^2 K^{3/2}} \quad \text{[IV.25]}$$

Conduisant à la première relation fonctionnelle :

$$\boxed{T = \frac{c - \Omega^2}{c + \Omega^2}} \quad \text{[IV.26]}$$

Où c est un paramètre égal à :

$$c = \frac{4\pi \overline{tg^2 \beta_1}}{K^{3.2}} \quad \text{[IV.27]}$$

Ou encore, d'après les relations des triangles de vitesses :

$$c = \frac{4\pi(\overline{tg \alpha_m} + \overline{tg \beta_m})}{K^{3.2}} \quad \text{[IV.28]}$$

On peut procéder de même pour la relation [IV.18] :

$$A^2 = \frac{R_c^2 K^{1.2} C_{al}}{\pi(R_c^2 - R_i^2) C_{al}} \quad \text{[IV.29]}$$

S'écrivant aussi :

$$A^2 = \frac{K^{1.2}}{\pi(1-T^2)} \quad \text{[IV.30]}$$

En remplaçant T par sa valeur issue de [IV.26], on obtient la deuxième relation fonctionnelle :

$$A = \frac{d}{2\Omega} (c + \Omega^2) \quad \text{[IV.31]}$$

Où d est un paramètre définis par :

$$d = \frac{K^{1.4}}{\sqrt{\pi c}} \quad \text{[IV.32]}$$

Comme nous l'examinerons dans les paragraphes suivants, le choix du couple $(\overline{\alpha_m}, \overline{\beta_m})$ s'il peut être fait au hasard confère néanmoins à la machine ses propriétés géométriques et hydrauliques (ou aérauliques) : taille, poids, rendement, NPSH, bruit, ...).

D'autre part, certains couples mal adaptés conduisent à des déflexions rotoriques ou statoriques incompatibles avec les profils NACA précédemment étudiés ou encore à des rapports de moyeu trop faibles (impossibilité de fixer les pales).

IV.7)- RENDEMENT HYDRAULIQUE :

Le rendement hydraulique globale est donc défini par :

$$\eta_{Hgl} = \frac{H}{H_E} = \frac{\bar{H} - Ah}{H_E} = \frac{\bar{H}}{H_E} - \frac{Ah}{H_E} = \bar{\eta} - \frac{Ah}{H_E}$$

$$\eta_{Hgl} = \bar{\eta} - \frac{C^2 4f}{2g(1-T)2tg\alpha_m(tg\alpha_m + tg\beta_m)} \frac{C^2}{g}$$

$$\eta_{Hgl} = \bar{\eta} - \frac{f}{(1-T)tg\alpha_m(tg\alpha_m + tg\beta_m)} \tag{III.33}$$

où f représente le coefficient de charge, calculable par la relation de COLEBROOK :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left[\frac{2.51}{R_{en} \sqrt{f}} + \frac{\epsilon}{3.71 d_H} \right] \tag{IV.34}$$

avec :

$$R_{en} = \frac{C d_H}{\nu} = \frac{q_v}{\pi R \nu} : \text{nombre de Reynolds.}$$

$$d_H = 2 \bar{R}$$

IV.8)- Déflexion locale des grilles rotoriques et statoriques

Le couple $(\bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_m)$ étant choisi et le régime d'écoulement étant imposé par le choix de la loi génératrice (vortex libre, forcé, constant, ...)¹, le calcul des grilles s'effectue rayon par rayon depuis R_1 jusqu'à R_2 .

Choisissons ici le cas du vortex libre caractérisé par la relation :

$$C_{u2} = \frac{K_3}{r}$$

La constante K_3 est calculable à partir de la relation d'Euler en fluide parfait :

$$H_E = \frac{U_2 C_{u2}}{g} = \frac{\omega K_3}{g} = \frac{H}{\eta_{Hgl}}$$

$$K_3 = \frac{gH}{\omega \eta_{Hgl}} \quad \text{[IV.35]}$$

Au rayon r quelconque, les données de base de la machine et le dimensionnement global permettent le tracé des triangles des vitesses :

$$C_{u2} = \frac{K_3}{r}$$

$$U_1 = U_2 = \omega r$$

$$C_{a1} = C_{a2} = \frac{q_v}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \quad \text{[IV.36]}$$

¹ Annexe IV.1

On calcul ensuite les angles d'entrée et de sortie pour le rotor et le stator :

$$\operatorname{tg} \beta_1 = U_1 / C_{a1} \quad [\text{IV.37}]$$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = (U_2 - C_{u2}) / C_{a2} \quad [\text{IV.38}]$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = C_{u2} / C_{a2} \quad [\text{IV.39}]$$

$$\alpha_3 = 0 \quad (\text{supposition})$$

IV.9)- DEGRE DE REACTION :

Le degré de réaction caractérise le rapport du travail de réaction au travail total échangé par l'étage.

Il est défini par le rapport suivant :

$$\sigma^* = \frac{W_1^2 - W_2^2}{\frac{W_1^2 - W_2^2}{2} + \frac{C_2^2 - C_1^2}{2}} = 1 - \frac{C_{u2}}{2U_2} \quad [\text{IV.40}]$$

Ce coefficient évolue naturellement avec le rayon depuis le rayon intérieur R_i , jusqu'au rayon extérieur R_e en passant par le rayon moyen \bar{R} où il prend la valeur particulière :

$$\sigma^* = \frac{\operatorname{tg} \beta_m}{\operatorname{tg} \alpha_m + \operatorname{tg} \beta_m} \quad [\text{IV.41}]$$

IV.10)- BRUIT HYDRAULIQUE

Le bruit étudié ici est celui produit par les fluctuations de pression liées à la fréquence de passage des pales du rotor. Sous forme de puissance, nous retiendrons l'expression de Lawson :

$$W_m = \frac{m^2 Z_1^4}{2\pi \rho c_0^3} \omega^2 N_1^2 (m Z_1)^{-1} \quad \text{[IV.42]}$$

avec :

c_0 : vitesse du son dans le fluide

Z_1 : nombre de pales du rotor.

m : rang de l'harmonique étudié.

N_1 : Composante axiale à \bar{R} de la force aérodynamique sur chaque aubage du rotor (fig IV.2).

La fréquence d'émission est donnée par :

$$f_m = m \cdot f_{z1} = m z_1 \omega / 2\pi \quad \text{[IV.43]}$$

La puissance acoustique associée W_m est donnée en dB par la définition :

$$L_w = 10 \log_{10} (W_m / 10^{-12}) \quad (\text{en dB}) \quad \text{[IV.44]}$$

Cette puissance acoustique est maximale pour $m=1$, on obtient :

$$W_1 = \frac{\omega^2}{2\pi \rho c_0^3} N_1^2 \quad \text{[IV.45]}$$

$$f_1 = Z_1 \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{[IV.46]}$$

La puissance acoustique W_1 peut être transformée à partir des relations [IV.2] , [IV.4] où le débit du tube de courant est égal à : q_v/Z_1

$$T_1^2 = \rho^2 \frac{q_v^2}{Z_1^2} (\dots)^2$$

$$N_1^2 = T_1^2 \operatorname{tg}(\overline{\beta}_m - \varepsilon_1) = \rho^2 \frac{q_v^2}{Z_1^2} (\alpha_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_2 \operatorname{tg}^2(\overline{\beta}_m - \varepsilon_1))$$

$$W_1 = \frac{\rho \Omega^2 \omega^2}{Z_1^2 2\pi \alpha_0^3} (\alpha_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_2 \operatorname{tg}^2(\overline{\beta}_m - \varepsilon_1))$$

On a :

$$Ca_1^2 = gH/K$$

D'où la valeur :

$$W_1 = \frac{\rho \omega^2 q_v^2}{2\pi \alpha_0^3 Z_1^2} \frac{gH}{K} \operatorname{tg}^2 \alpha_2 \operatorname{tg}^2(\overline{\beta}_m - \varepsilon_1)$$

En négligeant ε_1 et ε_2 dans ces diverses expressions, on obtient finalement en remplaçant K par sa valeur :

$$W_1 = \frac{\rho \Omega^2}{\pi \alpha_0^3 Z_1^2} q_v (gH)^{5/2} \frac{\operatorname{tg} \alpha_m \operatorname{tg}^2 \overline{\beta}_m}{\operatorname{tg} \alpha_m + \operatorname{tg} \overline{\beta}_m} \quad \text{[IV.47]}$$

De cette relation on peut tirer les conclusions suivantes :

- ❖ Pour des performances (H, q_v) données, c'est la plus petite vitesse spécifique (ou la plus petite vitesse de rotation) qui conduit au bruit le plus faible.
- ❖ Le bruit est d'autant plus faible que $\overline{\alpha}_m$ et $\overline{\beta}_m$ sont petits

❖ Pour $m=2$, on aura :

$$W_2 = W_1/4$$

$$f_2 = 2f_1$$

❖ Le bruit diminue quand le nombre d'aubages Z_1 augmente.

IV.11)- CAPACITE D'ASPIRATION (NPSH)

a)- mécanisme de la cavitation :

Parmi les nombreux critères d'optimisation, on peut également introduire pour le cas des pompes la capacité d'aspiration ou plus précisément le NPSH requis, défini comme « la charge nette requise à l'aspiration au-dessus de la pression de vapeur ».

Au cours de son écoulement dans la roue, le fluide voit sa pression augmenter depuis la pression P_1 jusqu'à la pression P_2 . Cependant, cette variation n'est pas monotone et présente au voisinage de l'entrée de la roue (point K) une dépression dynamique ΔP^* donnant en ce point particulier la pression minimale du circuit. La dépression dynamique est directement liée au contournement du bord d'attaque. Elle correspond à la vitesse maximale d'extrados.

Lorsque les conditions d'installation sont défavorables (forte hauteur d'aspiration), la pression au point K peut atteindre la pression limite pour un liquide, à savoir la pression de vapeur P_v .

Dans ces conditions particulières, le point K sera le siège d'une vaporisation ponctuelle se manifestant par l'apparition d'une bulle de vapeur, immédiatement résorbée puisqu'à partir de K, la pression va continuellement augmenter (fig IV.3). L'examen des triangles de vitesse montre que la vitesse maximale et donc la dépression maximale, est obtenue au rayon extérieur de la roue. C'est à ce rayon qu'apparaît la première bulle (cavitation physique)

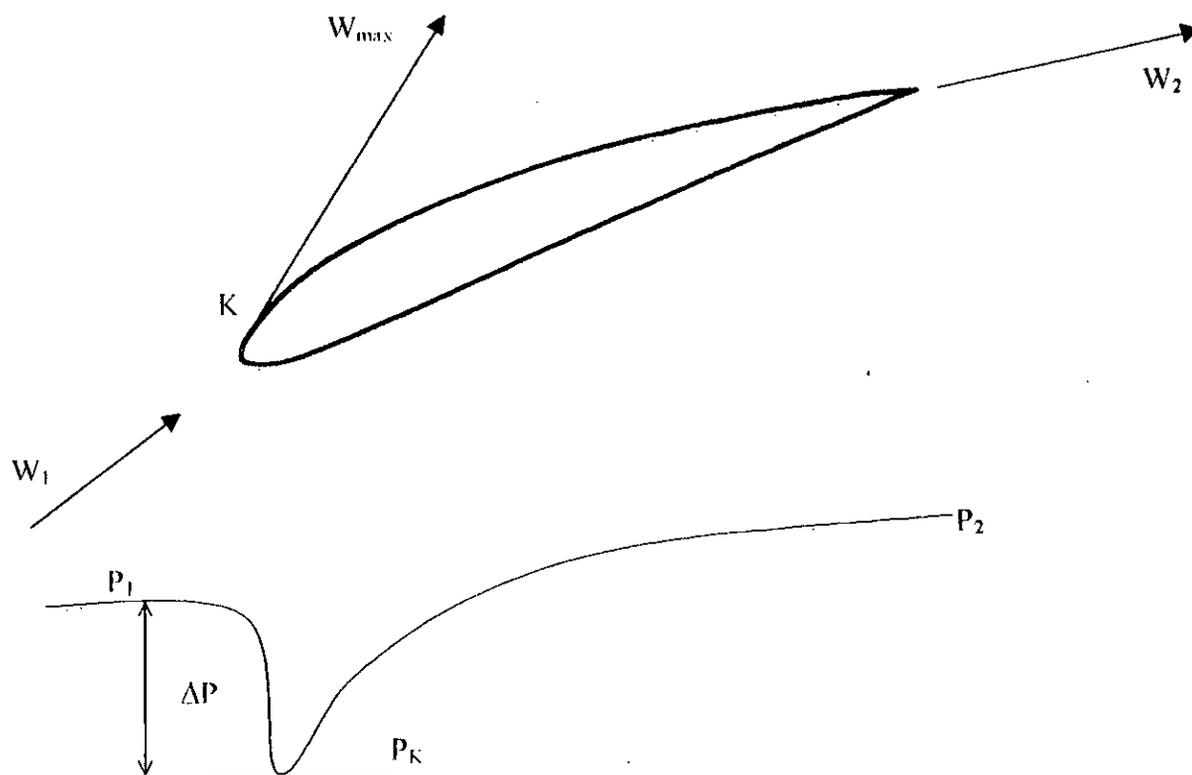


FIGURE IV.3 : Evaluation de la pression de l'entrée à la sortie de la roue.

Lorsque les conditions d'aspiration se dégradent encore, la pression diminue et la cavitation s'étend depuis K jusqu'à un autre point K' en formant entre K et K' une « poche de vapeur » plus ou moins stable attachée au profil (fig IV.4). L'extension de la poche s'effectue également radialement en descendant progressivement vers le pied de la pale.

LES CONSEQUENCES DE CE PHENOMENE

Une fois formée, la cavitation se développe en prenant des formes variées, plus ou moins structurées, selon les conditions rencontrées : bulles isolées ou coalescentes (nuages), lames relativement lisses, poches fixes, tourbillons.

Quand une cavité, entraînée dans l'écoulement, traverse des zones où la pression croît de nouveau, elle se résorbe brutalement (en un temps de l'ordre du millième de seconde à peine), d'où le nom de « collapsus » donné à ce phénomène. En fin de collapsus, les vitesses et les pressions au voisinage immédiat des parois de la cavité sont très grandes (des pressions de 10 000 bars ont pu être mesurées) ; il y a alors formation d'une véritable onde de choc qui,

Comme toute onde de choc, dégénère en onde sonore. Le bruit qui en résulte est souvent la manifestation la plus évidente de la cavitation ; il est atténué si la cavité contient une quantité suffisante de gaz, celui-ci, incondensable, jouant alors un rôle de matelas.

Le collapsus des cavités de vapeur est aussi à l'origine des érosions qui accompagnent la cavitation. Quand une bulle se contracte, sa forme est en effet instable ; il se produit alors une sorte de microjet qui, au voisinage d'une paroi solide, a tendance à se diriger vers celle-ci. La vitesse dans ce jet étant élevée (de l'ordre de 100 m/s), il produit un microcratère quand il frappe la paroi. Lorsqu'une surface solide est ainsi le siège de collapsus répétés, elle commence par prendre un aspect de peau d'orange puis, après arrachement de matière, un aspect d'éponge, avant d'être finalement transpercée de part en part. La résistance d'un matériau à l'érosion de cavitation est naturellement liée aux autres caractéristiques mécaniques de ce matériau (résilience, dureté notamment).

Un autre effet de la cavitation, propre aux machines hydrauliques et aux hélices, et d'une façon générale aux surfaces portantes, consiste en une chute des performances mécaniques (rendement). C'est d'ailleurs parce que, à la fin du siècle dernier, on avait été surpris par les performances médiocres de navires rapides qu'on commença à s'intéresser sérieusement à la cavitation et, en particulier, à réaliser les premières installations expérimentales spécialisées.

Les effets de la cavitation (bruits, érosions, chute des performances mécaniques) sont le plus souvent nuisibles. C'est donc un phénomène à éviter dans toute la mesure du possible, ou à l'extrême rigueur à maîtriser (profils supercavitants pour les hélices ou les pompes fonctionnant à grande vitesse, profils ventilés pour atténuer le bruit, etc.).

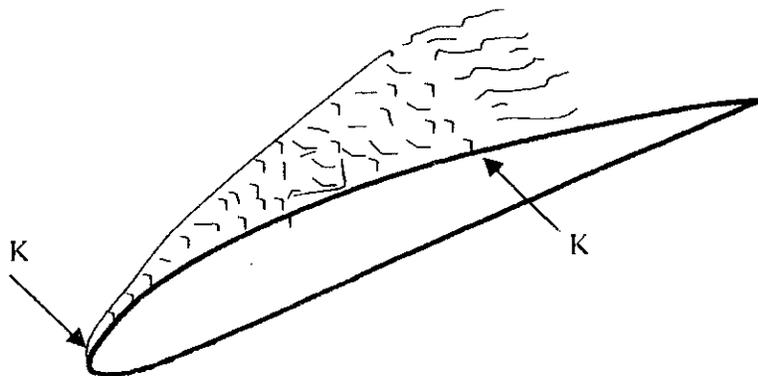


FIGURE IV.4 Développement de la poche de vapeur à la surface du profil.

b)- NPSH requis :

De par sa définition, le NPSH s'écrit :

$$\text{NPSH} = \frac{P_1}{\rho g} + \frac{C_1^2}{2g} - \frac{P_v}{\rho g} \quad [\text{IV.48}]$$

En appliquant le théorème de Bernoulli entre le point 1 d'entrée et le point critique K situé au rayon $R=R_c$, on obtient :

$$\frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_K}{\rho g} = \Delta P^* = \left[\frac{W_{\max}^2}{2g} - \frac{W_1^2}{2g} \right]_{r=R_c} \quad [\text{IV.49}]$$

La dépression dynamique ΔP^* s'écrit également par convention :

$$\Delta P^* = \lambda_d \left[\frac{W_1^2}{2g} \right]_{r=R_c} \quad [\text{IV.50}]$$

Où λ_d est le coefficient de dépression dynamique dépendant principalement de l'épaisseur et de la cambrure des profils.

Ainsi, le NPSH peut s'écrire de deux manières :

$$\text{NPSH} = \frac{P_1}{\rho g} + \frac{C_1^2}{2g} + \lambda_d \left[\frac{W_1^2}{2g} \right]_{r=R_c} - \frac{P_v}{\rho g} \quad [\text{IV.51}]$$

$$\text{NPSH} = \frac{P_k}{\rho g} + \frac{C_1^2}{2g} + \left[\frac{W_{\max}^2}{2g} - \frac{W_1^2}{2g} \right]_{r=R} - \frac{P_v}{\rho g} \quad [\text{IV.52}]$$

Au seuil du premier stade de la cavitation, on observe :

$$\frac{P_i}{\rho g} = \frac{P_v}{\rho g} \quad \text{[IV.53]}$$

D'où le NPSH correspondant à la première bulle de vapeur :

$$NPSH_r = \frac{C_1^2}{2g} + \lambda_d \left[\frac{W_1^2}{2g} \right]_{r, R_r} \quad \text{[III.54]}$$

Où :

$$NPSH_r = \frac{C_1^2}{2g} + \left[\frac{W_{max}^2}{2g} - \frac{W_1^2}{2g} \right]_{r, R_r} \quad \text{[IV.55]}$$

On appelle D_1 facteur de diffusion local défini par :

$$D_1 = \frac{W_{max} - W_2}{W_{max}} \quad \text{[IV.56]}$$

Celui-ci peut être introduit dans le NPSH requis, on obtient :

$$NPSH_r = \frac{C_1^2}{2g} + \left[\frac{W_2^2}{2g(1-D_1)^2} - \frac{W_1^2}{2g} \right]_{r, R_r} \quad \text{[IV.57]}$$

On peut aussi expliciter le coefficient de dépression dynamique par identification [IV.54] et [IV.57] :

$$\lambda_d = \left[\frac{W_2}{W_1(1-D_1)} \right]_{r, R_r}^2 - 1$$

$$\lambda_d = \left[\frac{\cos \beta_1}{\cos \beta_2(1-D_1)} \right]_{r, R_r}^2 - 1 \quad \text{[IV.58]}$$

Pour comparer aisément les machines entre elles, il est utile d'introduire un nombre adimensionnel caractérisant le NPSH requis ; c'est le paramètre de Thoma σ^{**} :

$$\sigma^{**} = \text{NPSH} / H \quad \text{[IV.59]}$$

Comme les autres critères d'optimisation σ^{**} dépend du couple $(\overline{\alpha}_m, \overline{\beta}_m)$ mais aussi de la vitesse spécifique et du facteur de diffusion à la périphérie D_{lc} .

D'une manière générale, on peut retenir que pour réaliser des machines de forte capacité d'aspiration, il faut s'efforcer de choisir :

- ❖ Une faible vitesse spécifique, ce qui revient à retenir une faible vitesse de rotation lorsque le choix de celle-ci est libre.
- ❖ Un facteur de diffusion au rayon extérieur aussi faible que possible et compatible avec une cambrure positif.

Pour simplifier, on peut retenir $D_{lc} = \frac{5}{6} D_c$

Où D_c est le facteur de diffusion global à la périphérie « annexe IV.2 »

IV.12)- APPLICATION NUMERIQUE :

Voici quelque résultats obtenue pour les données suivantes :

$$N = 1450 \text{ tr/mn} \quad q = 516 \text{ l/s}$$

$$H = 10 \text{ m} \quad \Omega = 3.5$$

$$Z_1 = 11$$

BETA M	ALFA M	BETA 1	BETA 2	ALFA 2	RAYON MOY	η_{HGT}
60	20	64.49	52.63	38.18	0.1143	8685
55	8.8	57.71	41.92	34.4	0.1526	4225
45	10	49.63	24.56	35.72	0.1233	4579
65	25	69.04	58.62	44.14	0.1129	8981
70	10	71.11	67.66	26.1	.1959	6617
50	25	58.9	33.82	44.65	0.0895	8872
60	25	65.53	50.7	44.31	0.1033	8981

Autres resultats pour :

$$N = 3000 \text{ tr/mn} \quad q = 100 \text{ l/s}$$

$$H = 5 \text{ m} \quad \Omega = 5.26$$

$$Z_1 = 15$$

BETA M	ALFA M	BETA 1	BETA 2	ALFA 2	RAYON MOY	η_{HGT}
60	20	64.49	52.86	37.79	0.0391	8806
55	8.8	57.71	47.47	26.23	0.0521	5873
45	10	49.63	31.82	29.05	0.0421	5927
65	25	69.04	38.7	43.99	0.0386	9029
70	10	71.11	68.12	23.39	0.0835	7495
50	25	58.9	33.99	44.53	0.0306	8949
60	25	65.53	50.82	44.16	0.0353	9027

IV.13)- CHOIX OPTIMAL DU COUPLE ($\bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_m$)

Nous avons vu que le couple ($\bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_m$) confère à la machine ses principales caractéristiques géométriques et hydraulique.

Ce choix sera conditionné par les critères d'optimisation retenue pour répondre aux mieux au cahier de charge proposé :

- ✓ Encombrement, poids (Λ).
- ✓ Rendement (η_h).
- ✓ Bruit (W_m).
- ✓ NPSH (σ^{**}).

Nous avons porté sur la « figure IV.5 » l'évolution de ces caractéristiques dans l'espace ($\bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_m$) pour les données suivantes :

Vitesse spécifique	$\Omega = 3.5$
Débit	$Q_v = 400$ l/s
Hauteur hydraulique	$H_h = 10$ m
Masse volumique	$\rho = 1000$ g/l

—	Λ	Rayon spécifique
—	η_{ngl}	Rendement hydraulique global
—	σ^{**}	Paramètre de THOMA
—	T	Rapport des rayons R_i / R_e
- - -	W_m	Bruit minimal [dB]

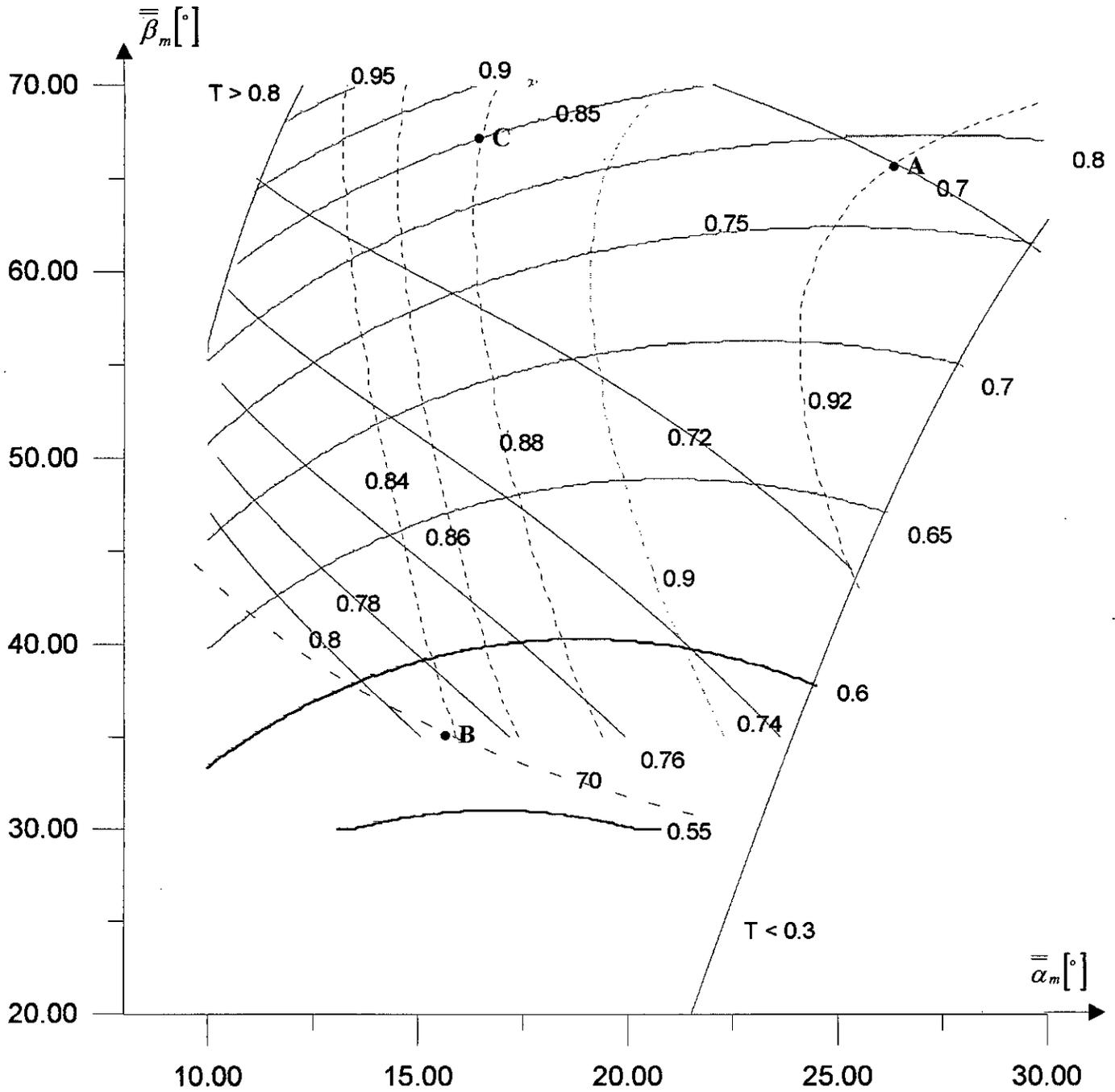


Fig [IV.5] Evaluation des différents paramètres de l'écoulement en fonction de $(\bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_m)$

Interprétation et mode d'utilisation de l'abaque :

D'après la figure [IV.5] en remarque que l'optimisation de l'ensemble de ces paramètres se révèle impossible, on peut noter les points suivants :

Point A :

Optimisation simultanée du rendement et du NPSH ($\bar{\beta}_m = 65^\circ$, $\bar{\alpha}_m = 26.5^\circ$)

Point B :

Optimisation du bruit et d'encombrement mais à rendement peut faible ($\bar{\beta}_m = 35^\circ$, $\bar{\alpha}_m = 16.5^\circ$).

Point C :

Ce point, correspondant à des valeurs satisfaisantes du NPSH et du rendement, mais avec une augmentation du volume par rapport à A et B ($\bar{\beta}_m = 66^\circ$, $\bar{\alpha}_m = 17^\circ$)

CONCLUSION

CONCLUSION :

D'après cette étude on a remarqué une grande souplesse dans l'utilisation de la méthodes des singularités, et ceci à travers l'analyse des écoulements autour des obstacles.

Le seul problème rencontré dans l'utilisation de cette méthode se résume à :

- ❖ Le nombre des points de l'obstacle soit assez grand se qui implique des matrices très grande se qui génère un problème de mémoire et de rapidité de l'ordinateur.
- ❖ Le choix de La méthode d'interpolation doit être adéquat, pour permettre un calcul plus précis

Les résultats obtenus nous ont permis d'avoir un code de calcul performant des machines en fluide incompressible, que ce soit en mode direct ou en mode inverse (dimensionnement)

En conclusion, la méthode nous a permis de voir l'étude de son utilisation en turbomachine, une utilisation de cette méthode dans le dimensionnement nécessite des moyens de calcul plus performants pour nous permettre d'avoir un abaque plus précis.

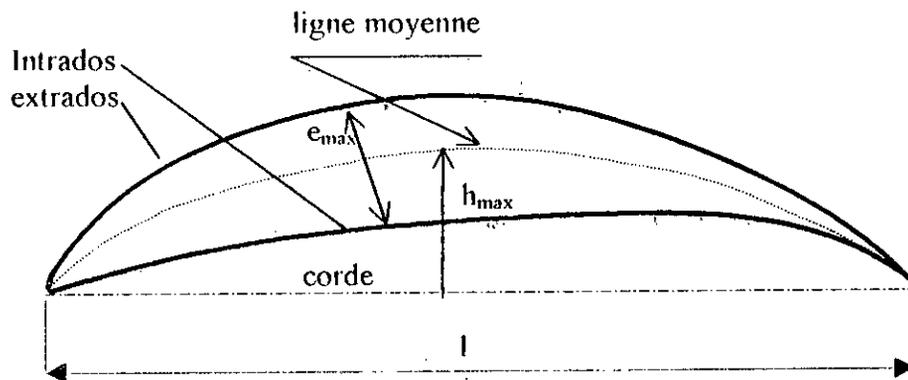
Nous proposons comme travaux ultérieur de prendre ces remarques en considération en utilisant un système d'informatique assez puissant pour réduire le temps d'exécution.

ANNEXES

DEFINITION GEOMETRIQUE :

La construction d'un profil aérodynamique s'articule autour de la corde, ligne imaginaire joignant le bord d'attaque au bord de fuite et servant aussi du repérage du profil par rapport à l'écoulement.

Les principales définitions géométriques sont données sur la figure suivante :



On retiendra principalement les rapports caractéristiques :

Cambrure géométrique h_{\max}/l : 0 à 20 %

Cambrure aérodynamique $C_{z_{\text{zef}}} = h_{\max}/lk$: 0 à 2.7 %

Tel que K : représente un coefficient numérique lié à une série constructive, dans la série NACA 65, $K = 5.515$.

Épaisseur relative e_{\max}/l : 4 à 20 %

DIFFERENTS TYPES DE LOI GÉNÉRATRICE

Dans la conception des machines axiales, on définit la loi génératrice comme étant la loi de répartition radiale de la composante C_{u2} . Le choix de cette distribution est de l'initiative de concepteur.

Très généralement, on utilise la forme générale suivante :

$$C_{u2}(r) = K_1 r + K_2 + \frac{K_3}{r}$$

➤ Vortex libre : $K_1 = K_2 = 0$

$$C_{u2} = K_3 / r$$

➤ Vortex forcé : $K_2 = K_3 = 0$

$$C_{u2} = K_1 r$$

➤ Vortex canotant : $K_1 = K_3 = 0$

$$C_{u2} = K_2$$

FACTEUR DE DIFFUSION

Le facteur de diffusion a été défini pour la première fois par Lieblein. Il traduit un compromis entre les pertes de frottement et le sillage des aubages.

Au cours de l'écoulement à l'extrados du profil, la vitesse locale passe de C_1 à C_2 en présentant au voisinage de l'entrée (point K) une vitesse maximale C_{max} et le facteur de diffusion (ralentissement) local est décrit par la relation suivante :

$$D_l = \frac{C_{max} - C_2}{C_{max}}$$

puisque ce facteur est difficile à employer parcequ'il fait appel à une donnée interne de l'écoulement (C_{max})

Ainsi, on a introduit un facteur de diffusion global D décrivant, dans les mêmes conditions, l'influence du sillage :

$$D = 1 - \frac{C_2}{C_1} + \frac{|K_{a2}|}{2C_1\sigma}$$

Et pour $C_{a1} = C_{a2}$

$$D = 1 - \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} + \frac{\cos\alpha_1}{2\sigma} (\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2)$$