

THESE DE MAGISTER

Spécialité :

GENIE MECANIQUE

Présentée par :

A. Houssem R. BOUTEKEDJIRET

Ingénieur de l'Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Pour obtenir le titre de :

MAGISTER DE L'ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

SUJET DE LA THESE :

CONTRIBUTION A L'ETUDE D'ECOULEMENTS

DIPHASIQUES DANS LES CONDUITES

Soutenue en Décembre 1995

Devant le Jury composé de :

Messieurs : Pr S. RECHAK	Président
Pr K. SI AHMED	Examineur
Pr M. AMARA	Examineur
Pr A. GAHMOUSSE	Rapporteur
R. DJELLOULI	Co-Rapporteur

A. BELHAOUAS Invité (DG CRD - Sonatrach)

# THESE DE MAGISTERE DE L'ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Spécialité :

Génie Mécanique

Présentée par :

A.Houssein.R. BOUTEKEDJIRET

Ingénieur de l'Ecole Nationale Polytechnique

pour obtenir le titre de **MAGISTERE** de l'**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

Sujet de la thèse :

Contribution à l'Etude d'Écoulements Diphasiques dans les Conduites

Soutenue en Décembre 1995

devant le jury composé de

Messieurs:	Pr S. RECHAK	Président
	Pr K. SI AHMED	Examineur
	Pr M. AMARA	Examineur
	Pr A. GAHMUSSE	Rapporteur
	M <sup>r</sup> R. DJELLOULI	Co-Rapporteur
	M <sup>r</sup> A BELHAOUAS (DG C.R.D - Sonatrach)	Invité

**Abstract.** In this work the derivation and the resolution of an Eulerian system describing a two-phase flow composed with a cloud of liquid droplets suspended in a gas phase is considered. This liquid phase is also termed as the dispersed phase. This is the kind of configuration met during the transport of the natural gas in the pipelines.

Indeed, during its transport, the natural gas presents a two-phase mixture where the gas phase is formed of lighter hydrocarbons and a heavy vapor. The liquid phase is constituted of thin spherical drops resulting from the condensation of the heavy vapor and suspended in the mixture gas phase.

The establishment of a mathematical model describing the two phase flow seems as the main difficulty to overcome when we study this problem in general. That is why, several approaches exist in the litterature depending on the characteristics of the flow considered.

The local instantaneous formulation theoretically describes the two-phase flow, but it is not realistic to consider it except for some simple configurations. Indeed, it leads in general to the resolution of a moving boundary problem.

On the other hand, by using the Euler time averaging operator, macroscopic quantities are defined as the average of the corresponding microscopic ones over a time interval  $\Delta T$ . Thus, for each phase, the mean density, impulsion and energy supplied with the time (void) fraction  $\alpha$  are introduced.

Following this approach, two important models are derived:

- *The two-fluid model* which is formulated by considering each phase separately. It is expressed by two sets of conservation equations and three transfer conditions for the interaction terms appearing in the field equations. However, its mathematical study and numerical resolution are in general too hard.
- *The diffusion model* which is formulated by considering the mixture as the whole. It is expressed in terms of three mixture conservation equations supplied with an additional diffusion equation for either the phase mass or the time (void) fraction.

A more suitable form of the diffusion model which introduces the drift velocity of the dispersed phase, constitutes the basic background to establish the general equations describing the natural gas two-phase flow mixture.

Thus, an Euler system based on a total energy formulation of the Drift model is established. To do so, major physical assumptions are considered. Indeed, the amount of liquid is small and the gas flow rate gives the Reynold number sufficiently high at which the flow pattern can be assumed to be dispersed. Furthermore, the Reynolds number of the drops is supposed small enough so that the presence of the drops induce no turbulence. Hence, the gas turbulence is genuinely contained in the non linear terms of the impulsion conservation equation. On the other hand, the liquid dispersed phase is kept in a saturation state and in thermal equilibrium. The phase gas is treated as an isentropic perfect gas.

Using a formal asymptotic development based on physical considerations, a more suitable system function of the mixture properties is then derived. This development expresses the fact that the thermodynamic phenomena occur following the fluid flow direction. This assumption is licit with regard to the pipelines scales.

A previous model based on the enthalpy formulation of the drift model is also presented and a comparative analysis with the totale energy one is undertaken.

To compute a solution of the previous continuous problems, discrete algebraic problems are derived using finite differences methods. To do so, a uniform grid of the computational domain is built using a regular mesh in time and space. Then, approximations of all the partial differential operators by several implicit upwind and centered schemes are done.

To evaluate the used finite differences schemes, several experiments are done. The numerical results obtained were compared to analytical solutions and suggest to be convincing for the upwind ones.

In conclusion, a total energy formulation is adopted and 3D-asymptotic Drift models is derived. This model is more general than the enthalpy formulation one. It allows for all energies flux occuring in the fluid flow, particularly the pressur energies ones. Finally, the implicit finite differences schemes built to solve the two models give encouraging results.

## SOMMAIRE

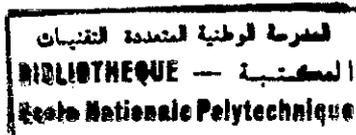
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

<b>INTRODUCTION GENERALE</b>		<b>1</b>
<b>1<sup>ère</sup> Partie</b>	<b>MODELISATION MATHEMATIQUE DES ECOULEMENTS DIPHASIQUES</b>	
<b>Chapitre I</b>	<b>EQUATIONS MATHEMATIQUES</b>	<b>6</b>
	Formulation Locale Instantanée.....	7
	Formulation en Moyenne Temporelle .....	9
	Modèles aux Moyennes Temporelles .....	10
	Modèle "Drift".....	12
	Conclusion.....	17
<b>Chapitre II</b>	<b>MODELES MATHEMATIQUES ADOPTES</b>	<b>18</b>
	Hypothèses Principales.....	19
	Equations du Modèle.....	20
	Conditions Initiales, Conditions aux Limites .....	25
	Conclusion.....	26
<b>2<sup>ème</sup> Partie</b>	<b>RESOLUTION NUMERIQUE</b>	
<b>Chapitre III</b>	<b>APPROXIMATION NUMERIQUE</b>	<b>27</b>
	Rappel du Problème Mathématique Continu .....	28
	Problème Discret.....	32
	Schémas d'Approximation.....	33
	Schéma IBFS .....	34
	Schéma IBS .....	53
	Schéma ICS .....	66
	Schéma IFCS .....	69
	Conclusion.....	77
<b>CONCLUSION GENERALE</b>		<b>78</b>
<b>Annexe A</b>	<b>SOLUTIONS ANALYTIQUES</b>	<b>81</b>
<b>Références</b>		<b>85</b>

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

---

# Introduction



Les écoulements diphasiques interviennent dans de nombreuses applications industrielles. En effet, nous les retrouvons aussi bien dans l'industrie nucléaire, dans les systèmes de transferts thermiques, dans le procédé industriel, dans les réseaux de transport, les réseaux d'information en électronique qu'au niveau des phénomènes géo-météorologiques ou encore des systèmes biologiques.

En industrie pétrolière, l'intérêt porté à l'étude des écoulements diphasiques ne s'est accru qu'à partir des années 80 avec l'avènement de puissants ordinateurs (cf. [Br], [Gr]). Toutefois, les applications technologiques de ces écoulements dans le domaine pétrolier remonte aux années 50. Cette époque fut caractérisée par des travaux empiriques réalisés sur des données de laboratoire concernant les débits volumétriques du gaz et du liquide, les propriétés physiques de chaque phase, les diamètres et inclinaisons ainsi que les pressions de service des pipelines. Durant les années 70, l'industrie du pétrole va commencer par adopter des démarches plus théoriques, déjà appliquées à d'autres industries (nucléaire en particulier), pour la modélisation des problèmes diphasiques, essentiellement dans les conduites horizontales.

L'apparition de calculateurs performants au début des années 80 et les défis que s'est fixés l'industrie pétrolière vont conduire notamment, au développement d'outils théoriques et de codes de calcul de plus en plus performants, aux Etats Unis, en Norvège, en France et en Grande Bretagne. A titre d'exemple le code de calcul OLGA (cf. [Ben]) dont une première version fût mise au point en 1983, a pour objectif de traiter des configurations d'écoulements diphasiques diverses pour tout type de conduites. Il fut financé par la STATOIL. Le concept POSEIDON, un projet entamé en 1984 et développé par l'IFP, TOTAL et la STATOIL, devrait mettre au point des stations de pompage multiphasique (cf. [Fu]). Ces stations permettraient d'effectuer du transport diphasique par pipeline, un grand défi de l'industrie pétrolière dite offshore. Il serait alors possible d'acheminer, en utilisant un même réseau, des mélanges diphasiques d'huile et de gaz à partir des plates-formes offshore vers le continent. Ceci réduirait considérablement les coûts d'investissement et d'exploitation de ces réseaux (cf. [Rai]).

Toujours dans le domaine pétrolier, et plus particulièrement dans l'industrie du gaz, l'intérêt sans cesse croissant du gaz naturel comme source d'énergie devient une réalité économique. Cette évolution importante de la consommation du gaz va nécessiter, dans un proche avenir, le transport de quantités de plus en plus importantes. Ceci impliquera de fait, une exploitation plus efficace des réseaux de pipelines existants et une optimisation plus accrue des différents paramètres intervenant dans le dimensionnement de nouvelles lignes.

Ces deux aspects importants, liés au transport du gaz par pipelines doivent tenir compte au mieux des phénomènes physiques présents dans les conduites. Par ailleurs, ils ne peuvent être atteints que par une parfaite compréhension des différents problèmes intervenant lors du transport dont, le plus important et de surcroît inévitable étant la formation de condensats au sein même de la conduite. En effet, ces condensats présents dans les réseaux de transport du gaz naturel sont une réalité incontournable. Aussi, il est important aujourd'hui d'en tenir compte durant l'exploitation des pipelines car ils influent inéluctablement sur leur rendement. D'autre part, ces condensats constituent aussi une source d'énergie et leur intérêt reste donc entier.

Ces différents aspects de l'industrie pétrolière en général et de celle du gaz naturel en particulier, nous amènent à aborder un axe de recherche et d'investigation assez nouveau. En effet, l'industrie nucléaire ayant été longtemps le principal champ d'application des écoulements diphasiques, les travaux réalisés sont beaucoup plus abondants et significatifs (cf. [De]). Malheureusement, les écoulements diphasiques dans les conduites pétrolières restent assez différents de ceux rencontrés dans le domaine nucléaire. Cette différence est liée aux conditions d'écoulement et aux produits transportés. Voilà pourquoi une étude particulière de ce type d'écoulement s'impose.

Ce travail est consacré à l'étude d'écoulements diphasiques constitués de gouttelettes liquides suspendues dans une phase gazeuse. Ces écoulements se retrouvent en industrie pétrolière, particulièrement sur les lignes de transport du brut ou du gaz naturel, que ce soit au niveau des champs de production, entre les stations de pompage ou encore dans les unités de stockage ou de raffinage.

Dans le cas du transport du gaz naturel par pipelines, ces écoulements diphasiques sont malheureusement toujours présents de par la composition même du gaz. En effet, même si le gaz naturel est traité avant son acheminement afin d'en éliminer les fractions d'hydrocarbures lourds, les hydrates et autres constituants indésirables, un taux assez faible de ces éléments reste présent sous forme de vapeur, formant ainsi une phase gazeuse homogène.

Sous l'effet des variations de pression et de température du gaz dans le pipeline, une partie de ces vapeurs va se condenser formant ainsi des brouillards de gouttes suspendues dans la phase gazeuse. Ces fines gouttelettes peuvent aussi se précipiter pour former des flaques de liquide pouvant être entraînées par le gaz en écoulement.

Par ailleurs, la particularité du pipeline étant de suivre parfaitement la topographie du terrain. La phase liquide aura alors tendance à s'accumuler dans des zones préférentielles ce qui favorisera la formation de bouchons liquides au sein même du pipeline. Il devient alors indispensable de localiser ces poches de liquide et de minimiser au maximum leur formation.

Aussi, il est utile de disposer d'outils de modélisation et de simulation pouvant d'une part, prédire sur les lignes de transports existantes la formation de tels condensats et d'autre part, servir à la conception de nouvelles lignes de sorte à minimiser au maximum ces configurations diphasiques d'écoulement.

Les conditions de transport du gaz naturel sont telles que l'écoulement dans le pipeline peut être considéré à phase liquide dispersée. Les gouttelettes liquides y sont globalement sphériques et le volume qu'elles occupent peut être très faible. En revanche, la masse de ce volume ne peut être négligée en raison de la très grande densité du liquide devant celle du gaz.

De par son inertie et sa viscosité, la fraction liquide va perturber le champ de vitesse dans l'écoulement. Ces effets sont d'autant plus importants lorsque les conduites présentent des changements de direction et/ou d'orientation. Par ailleurs, la présence des gouttelettes va modifier le champ de pression dans le gaz, faisant en sorte que la pression dans l'écoulement est différente de celle du gaz.

En tenant compte de toutes ces caractéristiques de l'écoulement, une description des phénomènes physiques ayant lieu lors du transport du gaz naturel dans les pipelines, passe par l'utilisation des outils de la modélisation de la mécanique des milieux continus d'une manière générale, et des écoulements diphasiques en particulier.

En effet, la mécanique des milieux continus offre le cadre de base, permettant d'aboutir aux modèles pouvant rendre compte des phénomènes physiques liés au transport du gaz. Ainsi, en considérant chaque phase du mélange diphasique comme étant un continuum, il est possible de décrire son comportement de manière locale et instantanée. Cette description amène à l'établissement des équations exprimant les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie dans le milieu.

Ces équations de conservation ne sont applicables qu'à l'intérieur du milieu continu. Au niveau des discontinuités, i.e. les interfaces liquide-gaz, des conditions dites de saut peuvent être écrites traduisant les différents transferts de masse, de quantité de mouvement et d'énergie d'une phase à l'autre de part et d'autre de l'interface.

Cette démarche locale instantanée aboutit à l'établissement d'équations mathématiques rigoureuses. Malheureusement, elle s'avère être inexploitable vu la complexité des configurations d'écoulement rencontrées en pratique. En effet, la présence des interfaces liquide-gaz représente une singularité du point de vue mathématique et amène à la résolution d'un problème aux frontières multiples, qui sont elles mêmes des inconnues du problème.

La définition de grandeurs macroscopiques, par l'introduction d'opérateurs de moyennes, permet de traiter le problème de manière globale. On se ramène alors à l'étude du liquide et du gaz en terme de phases coexistants simultanément en chaque point de l'espace avec une probabilité de présence pour chacune d'elles. Cette façon de faire est commune à celle utilisée dans l'étude des écoulements turbulents. Elle repose sur l'introduction de l'opérateur de moyenne temporelle d'Euler et son application aux équations locales instantanées. Cela permet alors d'établir le modèle dit bifluide (cf. [Is], [De]).

Ce modèle local moyenné dans le temps considère chaque phase séparément. Il est constitué de six équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie auxquelles viennent s'ajouter trois conditions de saut qui expriment les lois de conservation à l'interface des phases. Il reste un modèle assez complexe et la forme non conservative de ses équations rend difficile son étude mathématique et sa résolution numérique.

En définissant des grandeurs du mélange, une réécriture plus appropriée du modèle bifluide est possible. Elle correspond au modèle de diffusion. Ce dernier considère l'écoulement diphasique comme un tout. Il est constitué de trois équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, auxquelles vient s'ajouter une équation de diffusion.

Sous sa forme générale, le modèle de diffusion est particulièrement adapté à l'étude des écoulements à phase dispersée. Dans ces écoulements, les interactions thermodynamiques entre les phases sont étroitement liées et l'existence d'un gradient de vitesse entraîne l'apparition de phénomènes de diffusion. Tous ces phénomènes peuvent être décrits convenablement par ce modèle et en particulier lorsque la vitesse "drift" ou vitesse de dérive est introduite dans la formulation (cf. [Is], [De]). En effet, cette vitesse caractéristique des écoulements à phase dispersée, informe sur l'écart existant entre les champs de vitesse de chaque phase. Les différents phénomènes de diffusion s'en trouvent

alors directement liés. C'est cette forme du modèle du mélange faisant intervenir la vitesse "drift" que l'on appelle modèle "drift".

Dans cette étude, le modèle "drift" constitue l'outil de base servant à l'établissement de modèles plus spécifiques au problème du transport du gaz naturel dans les pipelines. Deux modèles sont présentés: le modèle en énergie totale et le modèle en enthalpie.

Le modèle en enthalpie correspond à des écoulements en conduites horizontales où les énergies d'origine thermique sont prépondérantes. Ainsi, les effets du champ de gravité n'apparaissent pas dans l'équation de quantité de mouvement et le bilan d'énergie néglige tous les termes d'origine mécanique. De ce fait, l'équation de bilan d'énergie correspond à l'équation d'énergie thermique qui fait apparaître l'enthalpie du mélange. Ce modèle a été développé lors d'une étude antérieure (cf. [BH]).

L'établissement du modèle en énergie totale est motivé par une analyse des résultats obtenus avec le modèle en enthalpie (cf. [BH], [BHD]). Ce modèle est beaucoup plus général puisqu'il tient compte, dans son bilan d'énergie, de toutes les énergies, qu'elles soient d'origine thermique ou mécanique. De plus, il inclut l'effet du champ de gravité ce qui permet de décrire les écoulements dans les conduites inclinées.

De plus, les deux modèles diffèrent aussi par la forme de l'équation de diffusion. En effet, une forme assez générale de cette équation a été retenue pour le modèle en énergie totale, afin de cerner au mieux les caractéristiques de la phase liquide qui peuvent varier vu les longueurs importantes des pipelines.

Enfin, puisque l'intérêt est porté sur des écoulements en conduites, il est encore possible de simplifier les deux modèles établis en tenant compte des spécificités de l'écoulement. En effet, compte tenu du rapport important entre le diamètre des conduites et leur longueur (ce rapport peut atteindre l'ordre de  $10^3$ ), les phénomènes thermodynamiques ayant lieu au cours de l'écoulement se produisent selon une direction privilégiée, i.e. la direction de l'écoulement. Cette propriété nous permet d'effectuer un développement asymptotique formel à l'ordre 1 des équations intrinsèques des deux modèles. Ce développement transforme le problème tridimensionnel global en un problème essentiellement unidimensionnel.

C'est cette forme asymptotique des modèles en énergie totale et en enthalpie que nous allons résoudre numériquement. Différentes techniques numériques s'appliquant à des problèmes diphasiques ou à des problèmes similaires de la dynamique des gaz, existent dans la littérature. Nous retenons plus particulièrement les techniques à base de différences finies appliquées aux problèmes de combustion dans les moteurs cryogéniques du lanceur européen (cf. [Sa1]), aux problèmes d'écoulement dans les réseaux de refroidissement des centrales nucléaires (cf. [To]), aux problèmes d'avalanche des neiges denses en montagne (cf. [Vi]) ou encore aux problèmes de transport dans les réseaux pétroliers (cf. [Be]).

Les schémas d'approximation aux différences finies se distinguent par leurs propriétés. Ces schémas peuvent être explicites, semi-implicites ou implicites. De plus, des propriétés comme la consistance et la stabilité conditionnent les capacités du schéma à converger vers les solutions exactes du problème. Enfin, les aspects liés à la mise en œuvre sur machine ne doivent pas être omis dans le choix d'un schéma.

Pour notre part, et compte tenu des travaux antérieurs (cf. [Ba], [BH]), nous avons construit successivement une famille de schémas à base de différences finies pour résoudre numériquement les modèles adoptés. Ces schémas sont tous implicites d'ordre 1 en temps et d'ordre 1 ou 2 en espace. Les résultats obtenus nous semblent très intéressants pour une meilleure compréhension des problèmes considérés.

Finalement, le travail que nous présentons comporte deux parties. La première est consacrée aux aspects de la modélisation des écoulements diphasiques à phase dispersée et à l'établissement des équations mathématiques. La seconde partie quant à elle, traite de l'approximation par différences finies.

Ainsi, au chapitre I, nous présentons succinctement les concepts de base de la mécanique des milieux continus et nous décrivons les équations générales en formulation locale instantanée. Ces équations n'étant pas exploitables, nous introduisons par la suite les opérateurs de moyenne, en particulier l'opérateur de moyenne temporelle d'Euler. Cet opérateur nous permet alors de définir la notion de taux de présence pour chaque phase, une notion fondamentale dans l'étude des écoulements diphasiques. Les modèles qui découlent de la formulation en moyennes temporelles, à savoir le modèle bifluide puis le modèle de diffusion sont décrits par la suite. La présentation détaillée du modèle de diffusion sous sa forme "drift" clos ce chapitre.

Le chapitre II est consacré au développement du modèle en énergie totale, spécifique au transport du gaz dans les pipelines. Les hypothèses principales de l'écoulement sont posées et les équations de conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie totale sont présentées. Les équations constitutives décrivant le comportement intrinsèque de la phase liquide et gaz sont développées en détail. Enfin, nous proposons un développement asymptotique qui nous permettra d'effectuer un "splitting" du système d'équations aux dérivées partielles global en le ramenant à un système essentiellement unidimensionnel. Ce développement repose sur le fait que tous les phénomènes thermodynamiques ayant lieu dans la conduite se produisent selon une direction privilégiée, i.e. le long de l'axe de la conduite. Par la

suite, le modèle en enthalpie est rappelé pour mettre l'accent sur les différences qu'il présente par rapport au modèle en énergie totale. L'écriture des conditions initiales et aux limites constitue le dernier point de ce chapitre.

Le chapitre III constitue la deuxième partie de ce travail. Il est entièrement consacré à la résolution numérique des deux modèles. Nous commençons par rappeler le problème mathématique continu. Nous définissons pour cela les différents vecteurs et flux nous permettant d'écrire les systèmes aux dérivées partielles des lois de conservation sous une forme conservative. Ensuite, nous présentons brièvement le problème approché correspondant ainsi que les différentes grandeurs discrètes intervenant dans le calcul approché. Le développement des schémas aux différences finies constitue le second point de ce chapitre. Nous présentons à chaque fois les propriétés du schéma et les résultats des tests numériques effectués ainsi que les commentaires qui s'imposent.

Ce travail s'achève par une conclusion générale portant sur les résultats obtenus et les perspectives que cette étude offre.

**Mots Clés:**

Écoulement Diphasique, Phase Dispersée, Méthode Asymptotique.

Différences Finies, Schéma Implicite, Système Algébrique Non Linéaire.

## Chapitre I

# Equations Mathématiques



Ce chapitre présente les outils mathématiques modélisant les écoulements diphasiques dans les conduites. Ces outils reposent sur les concepts de base de la mécanique des milieux continus. Ils s'appliquent aux écoulements de fluides caractérisés par la présence de discontinuités et/ou de fluctuations, ces deux aspects étant une propriété intrinsèque des écoulements diphasiques.

Pour ce faire, la *formulation locale instantanée* représente généralement le passage obligé pour toute modélisation physique. Elle permet d'établir des équations mathématiques rigoureuses mais difficilement exploitables dans le cas de problèmes complexes.

Une façon d'y remédier est l'introduction des opérateurs de moyenne (cf. [Is], [De]). Ces opérateurs peuvent être spatial, temporel, statistique ou une combinaison de ces derniers. Ils permettent la manipulation d'entités mathématiques correspondant à des grandeurs et propriétés physiques facilement observables.

Aussi, nous présentons succinctement l'approche locale instantanée et nous montrons pourquoi, dans le cas des écoulements diphasiques, les équations qui en découlent ne sont pas exploitables. Ceci nous amène à introduire l'*approche en moyenne temporelle*.

L'intérêt de cette formulation réside dans son aptitude à prendre en compte les aspects liés à la présence des interfaces liquide-gaz, ces interfaces constituant le caractère principal des fluides diphasiques. Elle aboutit à l'établissement du modèle dit *bifluide*, un outil puissant pour l'étude et l'analyse des phénomènes diphasiques.

Pour des considérations physiques et numériques que nous allons préciser, nous avons adopté par la suite le modèle dit de *diffusion*. Ce modèle n'est qu'une réécriture plus appropriée du modèle bifluide.

Ces deux modèles aux moyennes temporelles sont présentés sous leur forme intrinsèque. Une description plus détaillée ayant déjà été faite lors d'une précédente étude (cf. [BH]).

Par ailleurs, nous nous intéressons dans ce travail essentiellement à la résolution du modèle de diffusion qui est mieux adapté à l'étude des écoulements à phase dispersée. En effet, le modèle dit "*drift*" permet en particulier la prise en compte des propriétés dynamiques du fluide diphasique. C'est cette écriture du modèle de diffusion qui nous permettra par la suite d'établir et de développer le modèle général pour le transport du gaz naturel dans les pipelines.

## 1 FORMULATION LOCALE INSTANTANEE

La principale caractéristique d'un écoulement diphasique ou plus généralement d'une mixture non miscible est la présence d'une ou de plusieurs interfaces séparant les phases ou les constituants. La prise en compte de cette caractéristique lors de l'étude de ce type d'écoulement peut s'effectuer en adoptant l'approche standard de la mécanique des milieux continus. Ainsi, le fluide est subdivisé en régions monophasiques à frontières mobiles. Les équations régissant les différentes lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sont alors applicables à chaque domaine monophasique en lui imposant les conditions de saut aux interfaces et les conditions aux limites adéquates aux bords.

En introduisant une densité du fluide  $\tilde{\rho}_k$ , un flux  $\tilde{\mathbf{J}}_k$  et une source  $\tilde{\Phi}_k$ , les *équations de balance* s'écrivent pour toute quantité  $\tilde{\Psi}_k$  sous la forme intrinsèque (cf. [Ol], [Pn]):

$$\frac{d}{dt} \int_{v_m} \tilde{\rho}_k \tilde{\Psi}_k dv = - \oint_{a_m} \mathbf{n}_k \cdot \tilde{\mathbf{J}}_k da + \int_{v_m} \tilde{\rho}_k \tilde{\Phi}_k dv \quad (I.1)$$

où

- $k$  est l'indice désignant la phase liquide ( $k=l$ ) ou gaz ( $k=g$ ).
- $v_m$  est un volume matériel.
- $a_m$  est la surface matérielle délimitant  $v_m$  ( $a_m = \partial v_m$ ).
- $\mathbf{n}_k$  est la normale à la surface dirigée vers l'extérieur.

Cette forme intégrale stipule que la variation au cours du temps d'une grandeur  $\tilde{\rho}_k \tilde{\psi}_k$ , à l'intérieur d'un volume matériel  $v_m$ , est égale au flux  $\mathbf{J}_k$  entrant à travers  $a_m$  ajouté à la source  $\tilde{\phi}_k$  produite à l'intérieur de  $v_m$ .

Moyennant le théorème de transport de Reynolds et le théorème de Green (cf. [Ar]), cette forme intégrale se réduit à la forme différentielle commune:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\rho}_k \tilde{\psi}_k) + \nabla \cdot (\tilde{\rho}_k \tilde{\psi}_k \tilde{\mathbf{v}}_k) = -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{J}}_k + \tilde{\rho}_k \tilde{\phi}_k \quad (I.2)$$

où

$\tilde{\mathbf{v}}_k$  est le vecteur vitesse d'une particule fluide dans la phase k.

Ces équations ne sont applicables qu'à l'intérieur des domaines monophasiques car le milieu  $v_m$  doit être continu par définition. Au niveau d'une *surface de discontinuité*, en l'occurrence l'interface liquide-gaz, une forme intégrale des lois de conservation peut être écrite mais se réduit à l'équation algébrique (cf. [Is], [De]):

$$\sum_k \left( \tilde{\rho}_k \tilde{\psi}_k \mathbf{n}_k \cdot (\tilde{\mathbf{v}}_k - \tilde{\mathbf{v}}_i) - \mathbf{n}_k \cdot \tilde{\mathbf{J}}_k \right) + \tilde{\phi}_i = 0 \quad (I.3)$$

où

$\mathbf{n}_k$  est la normale à l'interface.

$i$  est l'indice désignant l'interface considérée.

$\tilde{\mathbf{v}}_i$  est la vitesse de l'interface.

$\tilde{\phi}_i$  est la source à l'interface.

Ces équations algébriques, dites *conditions de saut*, permettent de quantifier la discontinuité entre les variables de chaque phase au niveau de l'interface.

Enfin, il est nécessaire d'adjoindre à ces équations de bilan, des équations décrivant les propriétés intrinsèques du milieu continu. Ces équations définissent les différents flux et termes sources en fonction des variables d'état de l'écoulement. Ce sont les *équations constitutives* mécaniques, énergétiques et d'état du problème.

Les équations précédentes constituent les outils de base de la modélisation des écoulements diphasiques. Elles sont fonctions de variables locales instantanées et ne sont directement applicables que pour des configurations d'écoulements très simples, tels que les écoulements de mono-bulle ou de mono-goutte. En effet, les écoulements diphasiques présentent deux difficultés majeures:

- L'existence d'interfaces mobiles et déformables, leur mouvement étant inconnu.
- La présence de fluctuations dues à la turbulence et aux mouvements et déformations rapides des interfaces.

Le premier effet se traduit par des équations phasiques fortement couplées alors que le second introduit des caractéristiques statistiques liées à l'instabilité des équations de Navier-Stokes et à la présence d'ondes d'interfaces. Aussi, l'approche en variables locales instantanées pour l'obtention d'une solution tenant compte de ces effets, se trouve être une démarche très limitée, d'autant plus que la majorité des écoulements rencontrés dans les systèmes industriels présentent des géométries et des mouvements d'interfaces très complexes.

De plus, ce qui est recherché dans les problèmes d'ingénierie est l'aspect macroscopique de ces écoulements plutôt que le détail microscopique du fluide en mouvement et des autres variables de l'écoulement. Par conséquent, le choix d'une telle modélisation est en général prohibé.

En introduisant une procédure de moyenne adéquate, il est possible d'obtenir des valeurs et propriétés moyennes pouvant effectivement éliminer les fluctuations locales instantanées dans le fluide en mouvement. La procédure de moyenne peut alors être considérée comme un filtre passe bas excluant les signaux à haute fréquence des fluctuations locales instantanées. Néanmoins, il est important de tenir compte des caractéristiques statistiques de ces fluctuations car elles influent directement sur les processus macroscopiques de l'écoulement.

## 2 FORMULATION EN MOYENNE TEMPORELLE

La mécanique des milieux continus offre deux descriptions possibles des comportements et phénomènes physiques: la description Eulérienne et la description Lagrangienne.

La description Eulérienne consiste à se donner un repère fixe et à observer le phénomène au cours du temps, en tout point de l'espace. Cette description est dite spatio-temporelle. La description Lagrangienne quant à elle, consiste à suivre l'évolution du processus physique. Le repère d'observation n'est plus fixe mais plutôt lié, pour un écoulement par exemple, à une particule fluide. Il s'agira alors de décrire l'évolution de la particule au cours du temps.

L'approche standard développée précédemment, basée sur une description spatio-temporelle de l'écoulement, amène naturellement à considérer des moyennes par rapport aux variables spatiales et/ou temporelle. Ces moyennes correspondent aux opérateurs de moyenne d'Euler:

$$\bullet \text{ Moyenne temporelle: } \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} F(t, \mathbf{x}) dt \quad (I.4)$$

$$\bullet \text{ Moyenne spatiale: } \frac{1}{\Delta R} \int_{\Delta R} F(t, \mathbf{x}) dR(\mathbf{x}) \quad (I.5)$$

$$\bullet \text{ Moyenne statistique: } \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F_n(t, \mathbf{x}) \quad (I.6)$$

où

$F$  est une fonction des variables temporelle et spatiales.

$\Delta t$  est un intervalle de temps.

$\Delta R$  est un domaine de l'espace qui peut être un volume, une surface ou une ligne.

Ces opérateurs sont largement utilisés en mécanique des milieux continus car ils sont étroitement liés aux observations et prises de mesures expérimentales (cf. [Is], [De]). Ils ont pour principal effet d'atténuer les fluctuations locales ou instantanées par rapport au domaine d'intégration.

Plus particulièrement, l'opérateur de moyenne temporelle a été largement utilisé dans l'analyse des écoulements turbulents (cf. [Is]) et son intérêt aujourd'hui n'est plus à démontrer. Puisque les écoulements diphasiques présentent eux aussi des fluctuations locales instantanées, et de surcroît beaucoup plus complexes que celles apparaissant dans les écoulements turbulents, il est naturel et classique d'adopter, dans ce cas aussi, l'approche en moyenne temporelle.

Il existe deux conséquences notables quant à l'application de la moyenne temporelle à l'étude des écoulements diphasiques:

- Eliminer les fluctuations turbulentes comme pour les écoulements monophasiques.
- Considérer les deux phases, occupant consécutivement un même élément de volume, comme étant deux continuums présents simultanément au même point.

Pour décrire cette présence simultanée des deux phases en un point donné de l'espace, la notion de *taux de présence* ou *taux de vide*  $\alpha_k$  est introduite. En effet, soit la fonction de densité de présence suivante:

$$M_k(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{pour un point occupé par la phase } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (I.7)$$

Pour un intervalle de temps d'observation  $\Delta T$ , cette fonction définit à tout instant l'état liquide ou gaz pour tout point de l'espace. Il en découle que:

$$\Delta T = \sum_{k=l,g} \left( \sum_i \Delta T_i \right)_k = \Delta T_l + \Delta T_g \quad (I.8)$$

où

$(\Delta T_i)_k$  sont les intervalles de temps successifs correspondant à la présence de la phase  $k$  en un point donné de l'espace.

$\Delta T_l$  est l'intervalle de temps global correspondant à la présence de la phase liquide en un point donné de l'espace.

$\Delta T_g$  est l'intervalle de temps global correspondant à la présence de la phase gaz en un point donné de l'espace.

Des relations (I.7) et (I.8), il est possible de définir le taux de présence de la phase k. C'est la fonction de densité de présence moyenne sur l'intervalle de temps global  $\Delta T$ :

$$\alpha_k(t_0, \mathbf{x}_0) \equiv \overline{M}_k(t_0, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{\Delta T} \int_{\Delta T} M_k(t, \mathbf{x}_0) dt \quad (\text{I.9})$$

d'où:

$$\alpha_k = \frac{\Delta T_k}{\Delta T} \quad (\text{I.10})$$

où

$\Delta T_k$  est l'intervalle de temps global correspondant à la présence de la phase k en un point donné de l'espace.

ceci permet alors d'établir l'axiome de continuité suivant:

$$\alpha_l + \alpha_g = 1 \quad (\text{I.11})$$

où

$\alpha_l$  est le taux de présence de la phase liquide.

$\alpha_g$  est le taux de présence de la phase gaz.

Définie à chaque instant et en tout point de l'espace, la fonction  $\alpha_k$  constitue un paramètre fondamental dans l'établissement des équations moyennées. Elle représente la probabilité de trouver la phase k en un point donné de l'espace. Par ailleurs, l'intervalle de temps  $\Delta T$  doit d'une part, être suffisamment grand pour atténuer les variations locales des propriétés phasiques et d'autre part, suffisamment petit pour prendre en compte les effets instationnaires dans le fluide.

Enfin, l'établissement des équations moyennées passe par l'application de l'opérateur de moyenne temporelle aux équations locales instantanées et de leur écriture en fonction des variables et des propriétés moyennes de chaque phase (cf. [Is], [De]).

### 3 MODELES AUX MOYENNES TEMPORELLES

L'application de l'opérateur de moyenne temporelle aux équations locales instantanées conduit à l'établissement des équations générales du modèle bifluide. Ce modèle est obtenu en considérant chaque phase séparément. Les équations aux dérivées partielles obtenues traduisent les bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie de chaque phase.

De plus, l'interaction thermodynamique entre les phases est prise en compte par l'introduction de termes sources exprimant les transferts de masse, de quantité de mouvement et d'énergie à l'interface des phases.

#### 3.1 Modèle bifluide

Les équations de bilan du modèle bifluide s'écrivent sous la forme intrinsèque (cf. [Is]):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k \psi_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \psi_k \mathbf{v}_k) = -\nabla \cdot \left( \alpha_k (\mathbf{J}_k + \mathbf{J}_k^T) \right) + \alpha_k \rho_k \phi_k + I_k \quad (\text{I.12})$$

avec:

$$\sum_{k=l,g} I_k = I_m \quad (\text{I.13})$$

où

$\alpha_k$  est le taux de présence de la phase k.

$\rho_k$  est la densité moyenne de la phase k.

- $\psi_k$  est la propriété moyenne pour laquelle l'équation de bilan est écrite.  
 $\mathbf{v}_k$  est la vitesse moyenne de la phase k.  
 $\mathbf{J}_k$  est le flux moyen de la phase k.  
 $\mathbf{J}_k^T$  est le flux de turbulence dans la phase k.  
 $\phi_k$  est la source moyenne dans la phase k.  
 $I_k$  exprime le transfert à l'interface de la propriété  $\psi_k$ .  
 $I_m$  est le terme source dû à la présence de l'interface et correspondant à la propriété  $\psi_k$ .

En exprimant la propriété  $\psi_k$  ainsi que les flux  $\mathbf{J}_k$ ,  $\mathbf{J}_k^T$  et les termes sources  $\phi_k$  et  $I_k$ , respectivement pour la masse, la quantité de mouvement et l'énergie, le modèle bifluide se ramène alors à la résolution d'un système à six équations aux dérivées partielles (cf. [BH]). Ces équations sont fortement *non linéaires* et sont sous une forme dite *non conservative*. De ce fait, leur étude mathématique et numérique est particulièrement difficile.

En revanche, en considérant l'écoulement comme un seul fluide: le mélange, il est possible de réécrire ce système de conservation sous une forme mieux adaptée pour le calcul. C'est cette écriture qui correspond au modèle de diffusion.

### 3.2 Modèle de diffusion

L'établissement du modèle de diffusion passe par la définition de variables appropriées pour le mélange et la réécriture convenable des équations de conservation du modèle bifluide. Il est constitué de trois équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, auxquelles vient s'ajouter une équation de diffusion exprimant le bilan de masse pour l'une des deux phases.

En effet, les propriétés *phasiques* et les propriétés du *mélange* vérifient la relation suivante:

$$\sum_{k=l,g} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k \psi_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \psi_k \mathbf{v}_k) \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \psi) + \nabla \cdot (\rho \psi \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{J}^D \quad (I.14)$$

où  $\rho$  est la densité du mélange. Elle est définie par:

$$\rho = \sum_{k=l,g} \alpha_k \rho_k \quad (I.15)$$

$\psi$  est la propriété du mélange pour laquelle l'équation de bilan est écrite. Elle est fonction des propriétés phasiques et est donnée par:

$$\psi = \frac{\sum_{k=l,g} \alpha_k \rho_k \psi_k}{\sum_{k=l,g} \alpha_k \rho_k} \quad (I.16)$$

$\mathbf{v}$  est la vitesse du mélange. Elle se calcule à partir de la relation (I.16) lorsque  $\psi$  correspond à la vitesse.  
 $\mathbf{J}^D$  est le flux de diffusion. Il s'exprime par:

$$\mathbf{J}^D = \sum_{k=l,g} \alpha_k \rho_k \psi_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}) \quad (I.17)$$

Les équations de conservation du modèle de diffusion se déduisent alors des expressions (I.12) à (I.17) et prennent la forme intrinsèque:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \psi) + \nabla \cdot (\rho \psi \mathbf{v}) = - \nabla \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{J}^D + \mathbf{J}^T) + \rho \phi + I_m \quad (I.18)$$

où  $\mathbf{J}$  est le flux du mélange. Il vérifie:

$$\mathbf{J} = \sum_{k=l,g} \alpha_k \mathbf{J}_k \quad (I.19)$$

$\mathbf{J}^T$  est le flux de turbulence dans le mélange. Il est donné par:

$$\mathbf{J}^T = \sum_{k=l,g} \alpha_k \mathbf{J}_k^T \quad (I.20)$$

$\phi$  est la source dans le mélange. Elle prend la forme:

$$\phi = \sum_{k=l,g} \alpha_k \rho_k \phi_k \quad (I.21)$$

Les équations (I.12) et (I.18), correspondent respectivement aux équations de bilan du modèle bifluide et du modèle de diffusion. Elles font apparaître deux contributions majeures spécifiques aux écoulements diphasiques:

- Les termes d'interfaces. Ils caractérisent la thermodynamique des interfaces liquide-gaz.
- Les flux de turbulence. Ils caractérisent les effets statistiques des fluctuations.

De plus, le flux de diffusion (cf. équation (I.17)), prend en compte le gradient de vitesse existant entre les deux phases en mouvement.

Les outils mathématiques développés précédemment, à savoir la formulation locale instantanée, la formulation en moyenne temporelle et les modèles qui en découlent, constituent des voies possibles pour l'analyse des écoulements diphasiques. Ces outils présentent des avantages et des inconvénients et il revient à l'utilisateur d'adopter, en fonction des objectifs de l'analyse, l'une ou l'autre de ces démarches. En effet, il est important de remarquer que:

- Le *modèle bifluide* prend en compte de l'interaction dynamique entre les phases. Ceci est dû à l'écriture de deux équations de quantité de mouvement avec deux champs de vitesse différents. De plus, les conditions de transfert décrivent les phénomènes d'instabilité dans l'écoulement dus à la présence des interfaces. Malheureusement, le modèle bifluide dans sa forme générale reste assez complexe.
- Le *modèle de diffusion* quant à lui, est beaucoup plus maniable que le modèle bifluide du point de vue mathématique et numérique. Ce gain de maniabilité est possible moyennant une perte d'information quant aux différentes interactions thermodynamiques ayant lieu à l'interface des phases. Néanmoins, il reste très bien adapté à l'étude des phénomènes où les interactions dynamiques entre les phases sont étroitement couplées, ce qui est le cas pour les configurations dispersées.

Par ailleurs, le travail que nous présentons est consacré essentiellement à l'analyse des écoulements à phase liquide dispersée. Le but est l'étude du comportement du gaz naturel lors de son transport dans les pipelines. Voilà pourquoi, nous avons adopté le modèle de diffusion comme base de travail. Cependant, les résultats établis restent applicables à la plupart des écoulements où l'une des phases est présente sous forme de gouttes ou de bulles.

## 4 MODELE "DRIFT"

Puisque nous nous intéressons exclusivement à des écoulements à phase dispersée, les effets dus au gradient de vitesse entre les deux phases, pour ce type de configuration, peuvent être pris en compte convenablement par la vitesse "drift"  $v_{kj}$  (cf. [Is], [De], [Wa]). Aussi, nous allons rappeler dans ce paragraphe les équations du modèle de diffusion dit modèle "drift".

Nous définissons d'abord les différentes propriétés thermodynamiques du mélange. Nous présentons ensuite l'expression des lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie du mélange. Enfin, nous développons les lois constitutives qui restent valables pour tous les écoulements à phase dispersée.

### 4.1 Variables du mélange

Nous rappelons (cf. [Is], [De]) que les propriétés d'état du mélange se déduisent de l'expression (I.16) comme suit:

- la densité  $\rho$ :

$$\rho = \sum_{k=l,g} \alpha_k \rho_k \quad (I.22)$$

- le vecteur vitesse  $\mathbf{v}$ :

$$\rho \mathbf{v} = \sum_{k=l,g} \alpha_k \rho_k \mathbf{v}_k \quad (I.23)$$

• l'énergie totale  $e$  :

$$\rho e = \sum_{k=l,g} \alpha_k \rho_k e_k \quad (I.24)$$

avec :

$$e_k = u_k + \frac{1}{2} \mathbf{v}_k^2 \quad (I.25)$$

où

$e_k$  est l'énergie totale moyenne de la phase  $k$ .  
 $u_k$  est l'énergie interne moyenne de la phase  $k$ .

• Par ailleurs, la pression  $P$  du mélange est définie par :

$$P = \sum_{k=l,g} \alpha_k P_k \quad (I.26)$$

où

$P_k$  est la pression moyenne de la phase  $k$ .

## 4.2 Equations de bilan

Les équations de bilan sont établies à partir de la forme intrinsèque (cf. équation (I.18)), en définissant convenablement les différents termes y apparaissant (cf. [Is], [BH]).

### Conservation de la masse

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (I.27)$$

### Equation de diffusion

L'équation de diffusion exprime le changement de concentration pour l'une des phases. Elle prend la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \mathbf{v}_k) = \Gamma_k \quad (I.28)$$

où

$\Gamma_k$  est le transfert de masse dans la phase  $k$ .

Cette équation n'est que l'expression de la conservation de la masse pour la phase  $k$ .

### Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla \cdot ((P\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}) - \boldsymbol{\tau}^D) + \rho \mathbf{g} + M_m \quad (I.29)$$

où

$\boldsymbol{\tau}$  est le tenseur de viscosité du mélange.

$\boldsymbol{\tau}^D$  est le tenseur de diffusion. Il tient compte du transport de la quantité de mouvement de chaque phase par diffusion.

$\mathbf{g}$  est le vecteur champ de gravité.

$M_m$  est le moment source dû à l'interface.

$\mathbf{I}$  est le tenseur identité.

*Conservation de l'énergie totale*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v}) = -\nabla \cdot ((\varphi + (P\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v}) + \varphi^D) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + E_m \quad (\text{I.30})$$

où

- $\varphi$  est le flux de conduction thermique dans le mélange.
- $\varphi^D$  est le flux de diffusion thermique. Il tient compte du transport de l'énergie de chaque phase par diffusion.
- $E_m$  est la source d'énergie due à l'interface.

Les équations (I.27) à (I.30) constituent les lois de conservation du modèle de diffusion. Remarquons qu'elles ne font pas intervenir le flux de turbulence (cf. équation (I.20)) dans le mélange comme c'est le cas pour l'équation (I.18).

**4.3 Equations constitutives**

Les équations constitutives permettent de décrire les propriétés et comportements intrinsèques du fluide au cours de l'écoulement. Cependant, en établissant le modèle de diffusion, certaines propriétés telles que les dynamiques de chaque phase ainsi que celles de l'interface sont perdues. Ceci est dû essentiellement à l'utilisation de l'opérateur de moyenne d'une part, et au fait que le modèle de diffusion n'est qu'une réécriture plus appropriée du modèle bifluide d'autre part.

Afin de compléter le modèle de diffusion, il est alors nécessaire d'y adjoindre différentes équations constitutives pour le mélange. Ces équations permettent d'une part, de décrire le comportement de la mixture et d'autre part, de prendre en compte les caractéristiques dynamiques de l'écoulement qui n'apparaissent pas dans les équations de conservation.

*Equations cinématiques*

La vitesse de diffusion de la phase  $k$  est définie comme:

$$\mathbf{v}_{km} = \mathbf{v}_k - \mathbf{v} \quad (\text{I.31})$$

la vitesse "drift" de la phase liquide comme:

$$\mathbf{v}_{lj} = \frac{\rho}{\rho_g} \mathbf{v}_{lm} \quad (\text{I.32})$$

et celle de la phase gaz comme:

$$\mathbf{v}_{gj} = -\frac{\alpha_l}{\alpha_g} \mathbf{v}_{lj} \quad (\text{I.33})$$

Lorsqu'on introduit cette vitesse dans la formulation, le modèle de diffusion est appelé modèle "drift".

Cette vitesse a été largement étudiée dans l'analyse des écoulements à phase dispersée (cf. [Wa], [Is]). Elle dépend de la vitesse terminale  $\mathbf{v}_\infty$  d'une goutte ou d'une bulle dans un milieu infini et du taux de présence de la phase continue. Son expression est donnée par:

$$\mathbf{v}_{dj} = (1 - \alpha_d)^n \mathbf{v}_\infty \quad (\text{I.34})$$

où

- $d$  est l'indice désignant la phase dispersée. Dans le cas du transport du gaz, l'indice correspond à la phase liquide.
- $\mathbf{v}_{dj}$  est la vitesse "drift" de la phase dispersée.
- $\alpha_d$  est le taux de présence de la phase dispersée.
- $n$  est une constante réelle strictement positive. Elle dépend de la nature de l'écoulement.

L'introduction de la vitesse "drift" dans la définition des équations cinématiques est essentielle dans le modèle de diffusion. En effet, en se ramenant à l'écriture d'une seule équation de quantité de mouvement et donc d'un seul champ de vitesse pour le mélange, toute information concernant les écarts entre les champs de vitesse phasique est perdue. La vitesse "drift" permet alors de reconstituer cet écart et par conséquent de tenir compte des phénomènes de transport par diffusion.

### Etat thermodynamique entre les phases

Ces relations permettent de spécifier l'écart entre les états thermodynamiques de chaque phase. De manière générale, les déséquilibres thermodynamiques peuvent être mécanique, thermique et chimique.

Le déséquilibre mécanique est dû à l'écart de pression entre les deux phases. Il se traduit par:

$$P_c - P_d = -2H_{dc}\sigma \quad (I.35)$$

où

- $c$  est l'indice désignant la phase continue.
- $P_c$  est la pression moyenne de la phase continue.
- $P_d$  est la pression moyenne de la phase dispersée.
- $H_{dc}$  est la courbure moyenne de l'interface.
- $\sigma$  est la tension de surface moyenne.

La loi constitutive pour l'écart de température entre les deux phases est l'une des expressions les plus difficiles à déterminer en raison de la complexité des phénomènes de transfert énergétique intervenant à l'interface. Néanmoins, elle peut être remplacée par l'expression donnant l'écart de température entre l'une des phases et l'interface. Pour les écoulements à phase dispersée, la température de celle-ci est assimilée à la température de l'interface. Il vient alors:

$$T_d = T_i \quad (I.36)$$

où

- $T_d$  est la température moyenne de la phase dispersée.
- $T_i$  est la température moyenne de l'interface.

Enfin, l'état chimique de chaque phase conditionne le changement de phase à l'interface. Dans le cas des écoulements à phase dispersée, celle-ci peut être prise en état de saturation. Dans ce cas, il vient:

$$P_d = P^{sat}(T_i) \quad (I.37)$$

où

- $P^{sat}$  est la pression de saturation.

### Tenseurs de cisaillement

Les tenseurs de cisaillement sont de deux types: le tenseur de déformation dû aux effets de viscosité et le tenseur de diffusion dû au gradient de vitesse entre les phases.

En supposant que les fluides sont Newtoniens (cf. [Lu]) et que la configuration de l'écoulement est dispersée, le tenseur de viscosité pour le mélange s'écrit alors:

$$\tau = \sum_{k=l,g} \alpha_k \tau_k - \frac{1}{2} \mu_c (\nabla \alpha_c (\mathbf{v}_d - \mathbf{v}_c) + (\mathbf{v}_d - \mathbf{v}_c) \nabla \alpha_c) \quad (I.38)$$

avec:

$$\tau_k = \mu_k (\nabla \mathbf{v}_k + \nabla \mathbf{v}_k^t) \quad (I.39)$$

où

- $\tau_k$  est le tenseur de viscosité moyen de la phase k.
- $\mu_c$  est la viscosité dynamique moyenne de la phase continue.
- $\alpha_c$  est le taux de présence de la phase continue.
- $v_d$  est la vitesse moyenne de la phase dispersée.
- $v_c$  est la vitesse moyenne de la phase continue.
- $\mu_k$  est la viscosité dynamique moyenne de la phase k.

D'autre part, le **tenseur de diffusion** prend la forme générale (cf. équations (I.17), (I.31)):

$$\tau^D = - \sum_{k=l,g} \alpha_k \rho_k v_{km} v_{km} \quad (I.40)$$

La vitesse de diffusion pouvant s'exprimer en fonction de la vitesse "drift" de la phase dispersée (cf. équations (I.32) et (I.33)), les phénomènes de transport de la quantité de mouvement par diffusion s'en trouvent alors directement liés.

### Flux thermiques

Pour les écoulements à phase dispersée, la température de la phase dispersée est assimilée à la température de l'interface (cf. équation (I.36)) et le gradient de température à l'interface est négligé. Par conséquent, en adoptant la *loi de Fourier* pour la conduction thermique (cf. [In]), le **flux de conduction thermique** dans l'écoulement se réduit alors à:

$$\phi = -k_c \nabla(\alpha_c(T_c - T_i)) \quad (I.41)$$

où

- $k_c$  est la conductibilité thermique moyenne de la phase continue, i.e. celle du gaz pour le problème de transport.
- $T_c$  est la température moyenne de la phase continue.

Le **flux de diffusion thermique** quant à lui s'exprime de manière générale:

$$\phi^D = \sum_{k=l,g} \alpha_k \rho_k e_k v_{km} + \sum_{k=l,g} \alpha_k (P_k \mathbf{I} - \tau_k) \cdot v_{km} \quad (I.42)$$

Dans cette expression les effets mécaniques sont généralement négligés devant les effets thermiques. En effet, ces derniers sont beaucoup plus significatifs puisqu'ils font intervenir les énergies latentes de changement de phase. Par ailleurs, le flux de diffusion (cf. équation (I.42)) est fonction de la vitesse de diffusion et donc de la vitesse "drift".

### Termes d'interface

Dans le cas des écoulements dispersés, la phase dispersée est à la température de l'interface. Par conséquent, le **changement de phase** à l'interface s'exprime en fonction de l'écart de température:

$$\Gamma_k = \Gamma_k(T_i - T_c) \quad (I.43)$$

Cette relation étant directement liée aux conditions de l'écoulement, elle peut s'écrire en fonction de paramètres adimensionnels (cf. [Is]).

Le **moment source** pour un écoulement dispersé prend la forme:

$$M_m = \nabla(2H_{dc} \sigma \alpha_d) \quad (I.44)$$

Cette relation suppose que la tension de surface est uniquement fonction de la température de l'interface et que cette température est uniforme à la surface des gouttes. Ceci est largement vérifié dans le cas des écoulements à phase dispersée.

Enfin, la source d'énergie à l'interface dépend de paramètres divers. Elle rend compte des variations des énergies de surface dues aux variations de la surface des interfaces ainsi qu'au travail de la tension de surface. Elle s'exprime (cf. [Is]) par:

$$E_m = E_m(T_i, \sigma, H_{dc}, \alpha_c) \quad (I.45)$$

Néanmoins, par rapport aux transferts énergétiques importants induits par les énergies latentes de changement de phase, cette source d'énergie peut être négligée:

$$E_m \equiv 0 \quad (I.45)_{bis}$$

### Equations d'état

Enfin, les équations d'état définissent les propriétés thermodynamiques pour chaque phase (cf. [Wy]). Pour la densité, la pression, la température et l'énergie interne, elles correspondent aux relations:

$$\rho_k = \rho_k(P_k, T_k) \quad (I.46)$$

$$u_k = u_k(P_k, T_k) \quad (I.47)$$

où

$T_k$  est la température moyenne de la phase k.

auxquelles vient s'ajouter l'équation d'état pour la tension de surface de l'interface:

$$\sigma = \sigma(T_i) \quad (I.48)$$

Ces différentes équations constitutives (cf. équations (I.31) à (I.48)) auxquelles viennent s'ajouter les relations (I.22) à (I.26) définissant les variables du mélange, l'axiome de continuité (I.11) et les conditions initiales et conditions aux limites, permettent ainsi de "fermer" le système d'équations aux dérivées partielles (I.27) à (I.30). En effet, ce dernier devient uniquement fonction du vecteur état:

$$(\rho, \alpha_l, \rho v, \rho e)^t \quad (I.49)$$

Enfin, il est possible aussi d'établir une équation de conservation de l'énergie thermique qui fait apparaître l'enthalpie du mélange (cf. [BH]). Cette équation n'est intéressante que lorsque les échanges énergétiques dans l'écoulement sont dominés par les effets thermiques.

## 5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord mis l'accent sur les difficultés liées à la modélisation des écoulements diphasiques de manière générale. Nous avons ensuite présenté une famille de modèles basée sur une approche locale moyennée dans le temps. Ceci nous a permis d'établir une forme assez générale du modèle de diffusion: le modèle "drift". Ce système d'équations est capable de modéliser les différents phénomènes intervenant dans les écoulements à phase dispersée.

Il constitue pour notre part l'outil de base qui nous permettra d'établir le modèle mathématique décrivant le transport du gaz naturel dans les pipelines. En effet, certaines expressions présentées au § I.4.3 ont une forme assez générale et peuvent encore être simplifiées, si nous tenant compte des spécificités de l'écoulement.

Le développement de ce modèle propre à l'étude et l'analyse du transport du gaz naturel dans les pipelines sera l'objet du chapitre suivant.

## Chapitre II

# **Modèles Mathématiques Adoptés**

# II

L'objet de ce chapitre est d'établir, à partir des équations générales du modèle "drift" (cf. § I.4), le modèle mathématique spécifique à l'écoulement du gaz naturel dans les pipelines.

L'écoulement du gaz naturel dans les conduites se présente sous forme d'un mélange diphasique constitué d'une:

- Phase gazeuse formée d'hydrocarbures légers pris comme gaz inertes et jouant le rôle de gaz porteurs car non condensables et d'une vapeur d'hydrocarbures lourds pouvant se condenser.
- Phase liquide formée de fines gouttelettes sphériques résultant de la condensation des hydrocarbures lourds et restant en suspension dans le mélange gazeux..

La description de cet écoulement nous amène à le considérer comme étant à phase dispersée par excellence même si l'accumulation, par effet de gravité, de gouttelettes liquides au fond de la conduite est possible.

Dans ce qui suit, nous allons tout d'abord poser les conditions physiques supposées vérifier par l'écoulement considéré. Nous écrivons ensuite les équations du modèle mathématique régissant les différents phénomènes physiques s'y produisant. Ce modèle est basé sur une formulation en énergie totale, différente de celle du modèle en enthalpie développé lors d'un précédent travail (cf. [BH]). En effet, le modèle en énergie totale prend en compte toutes les énergies intervenant dans l'écoulement du gaz alors que le modèle en enthalpie ne considère que les énergies d'origine thermique. Nous présentons aussi, succinctement le modèle en enthalpie en mettant l'accent sur les différences entre les deux formulations. Enfin, moyennant un développement asymptotique, nous établissons le modèle mathématique adopté pour l'étude du transport du gaz dans les conduites.

## 1 HYPOTHESES PRINCIPALES

Pour établir les équations qui modélisent l'écoulement du gaz naturel dans les pipelines, nous nous plaçons sous les hypothèses de base suivantes:

### La configuration de l'écoulement est dispersée

Les gouttelettes liquides sont suffisamment éloignées les unes des autres pour pouvoir négliger les phénomènes de coalescence. Elles sont aussi suffisamment petites pour pouvoir négliger les phénomènes de désintégration. Ceci implique que le taux de liquide est "faible" et que l'écoulement du gaz engendre un Reynolds suffisamment élevé permettant ainsi de considérer une configuration à phase liquide dispersée de l'écoulement.

### La turbulence est peu développée

Le Reynolds des gouttes est suffisamment petit. La présence des gouttes n'induit donc pas de turbulence. Par ailleurs, les vitesses d'écoulement du gaz ne sont pas importantes. Ceci implique que la turbulence dans l'écoulement n'est pas développée. Elle peut être donc contenue dans les termes convectifs non linéaires.

### Le liquide est en équilibre thermique

La phase liquide est en équilibre thermique à la température de l'interface. Aussi, sa température est uniforme et saturante. De plus, sa viscosité est *constante* et elle obéit à un processus *isochore*.

### Le gaz est parfait

Le gaz est assimilé à un gaz parfait *isentropique* et les gradients de concentration sont négligés.

Par ailleurs, nous considérons que tous les phénomènes cinétiques, mécaniques et thermiques qui apparaissent lors de l'écoulement se font le long de la direction de l'écoulement. Nous pouvons donc supposer que:

*Tous les phénomènes physiques se produisent selon une direction privilégiée, i.e. le long de l'axe de la conduite.*

Cette hypothèse est fondamentale. Elle est à la base du calcul asymptotique développé dans la suite de ce chapitre.

Ces différentes hypothèses nous permettront d'établir le modèle en énergie totale pour le transport du gaz naturel.

## 2 EQUATIONS DU MODELE

### 2.1 Modèle en énergie totale

Partant des équations de bilan du modèle "drift" (cf. équations (I.27) à (I.30)) et compte tenu des hypothèses adoptées, l'expression des lois de conservation reste inchangée, i.e.:

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \right. \quad (\text{II.1})_i$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_l \rho_l) + \nabla \cdot (\alpha_l \rho_l \mathbf{v}_l) = \Gamma_l \right. \quad (\text{II.1})_{ii}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla P + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}^D) + \rho \mathbf{g} + M_m \right. \quad (\text{II.1})_{iii}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\varphi + \varphi^D) - \nabla \cdot ((P\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + E_m \right. \quad (\text{II.1})_{iv}$$

En revanche, les équations constitutives du modèle sont données par les lois suivantes:

•La loi régissant le transfert de masse à l'interface est étroitement liée aux conditions de l'écoulement. Elle dépend, de façon générale, des propriétés thermodynamiques des deux phases comme la densité, la température, la chaleur latente, ainsi que de la concentration en surface d'interface et du taux de vide. Elle est donc considérée comme une donnée du problème.

•Le moment source (cf. équation (I.44)) s'écrit:

$$M_m = \nabla(\alpha_l P_a) \quad (\text{II.2})$$

avec:

$$P_a \equiv 2H_{lg}\sigma \quad (\text{II.3})$$

où

$P_a$  est la pression induite par la tension de surface à l'interface.

•La source d'énergie à l'interface s'exprime difficilement en fonction des propriétés de l'interface. De plus, sa contribution dans les échanges énergétiques est faible par rapport aux énergies latentes de changement de phase mises en jeu (cf. équation (I.45)). Néanmoins, en ne considérant que le travail du moment source, elle peut s'écrire en première approximation sous la forme:

$$E_m = \nabla \cdot (\alpha_l P_a \mathbf{v}_l) = \nabla \cdot (\alpha_l P_a \mathbf{v}_l) \quad (\text{II.4})$$

où

$\mathbf{v}_l$  est la vitesse moyenne de l'interface. Elle correspond dans ce cas à la vitesse de la phase dispersée.

Cette équation correspond au travail de la pression  $P_a$  induite par l'interface. Nous verrons dans la suite que cette écriture permet d'exprimer le travail des forces de pression dans l'équation de bilan pour l'énergie totale (cf. équation (II.1)<sub>iv</sub>) en fonction du travail de la pression effective du mélange.

De la définition de la vitesse de diffusion du liquide (cf. équation (I.31)), il résulte que:

$$E_m = \nabla \cdot (\alpha_l P_a \mathbf{v}) + E_m^D \quad (\text{II.5})$$

avec:

$$E_m^D = \nabla \cdot (\alpha_l P_a \mathbf{v}_{lm}) \quad (\text{II.6})$$

où  $E_m^D$  est la source d'énergie par diffusion.

Cette énergie de diffusion d'origine mécanique est négligée, comparée aux énergies de diffusion d'origine thermique (cf. équation (I.42)).

•La pression totale effective est définie (cf. [Sa]):

$$P_{eff} \equiv P - \alpha_l P_a \quad (II.7)$$

Si les gouttes sont suffisamment éloignées les unes des autres de sorte que l'écoulement du gaz autour d'une goutte n'est pas affecté par la présence des autres gouttes, cette pression s'écrit sous la forme (cf. [Sa]):

$$P_{eff} = P_g + \nu_0 \alpha_l^{4/3} \quad (II.8)$$

où  $\nu_0$  est une constante proportionnelle à la pression d'arrêt du gaz sur les gouttes.

Cette expression de la pression totale effective pour le mélange est licite car l'écoulement considéré est par excellence un écoulement à configuration dispersée et la fraction liquide présente dans le gaz est faible.

L'introduction de cette pression effective permet de réduire le nombre d'équations constitutives dans la formulation du modèle "drift" (cf. § I.4.3). En effet, la loi donnant l'écart de pression entre les phases (cf. équation (I.35)), l'expression du déséquilibre chimique (cf. équation (I.37)) et à fortiori, l'équation d'état pour la tension de surface (cf. équation (I.48)) ne sont plus nécessaires.

•Le tenseur de viscosité (cf. équation (I.38)) dépend uniquement des propriétés du liquide car le gaz est assimilé à un gaz parfait. Nous avons donc:

$$\tau = \alpha_l \mu_l (\nabla \mathbf{v}_l + \nabla \mathbf{v}_l^t) \quad (II.9)$$

•Le tenseur de diffusion (cf. équation (I.40)) s'écrit en fonction de la vitesse "drift" du liquide (cf. équations (I.32)):

$$\tau^D = - \frac{\alpha_l \rho_l \rho_g}{1 - \alpha_l \rho} \mathbf{v}_{lj} \mathbf{v}_{lj} \quad (II.10)$$

•Le flux de conduction thermique (cf. équation (I.41)) est présent uniquement dans le gaz car le liquide est en équilibre thermique à la température de l'interface. D'autre part, les gradients de concentration du gaz sont négligés. Par conséquent, l'expression (I.41) se réduit à:

$$\phi = - (1 - \alpha_l) k_g \nabla T_g \quad (II.11)$$

•Le flux de diffusion thermique (cf. équation (I.42)) ne tient compte que des effets thermiques et s'exprime en fonction de la vitesse "drift" du liquide (cf. équation (I.32)) de la façon suivante:

$$\phi^D = \rho_g (e - e_g) \mathbf{v}_{lj} \quad (II.12)$$

•Les équations cinématiques (cf. équations (I.23) et (I.31) à (I.34)) deviennent:

$$\mathbf{v}_l = \mathbf{v} + \frac{\rho_g}{\rho} \mathbf{v}_{lj} \quad (II.13)$$

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v} - \frac{\alpha_l \rho_l}{1 - \alpha_l \rho} \mathbf{v}_{lj} \quad (II.14)$$

$$\mathbf{v}_{lj} = (1 - \alpha_l)^n \mathbf{v}_\infty \quad (II.15)$$

• Les équations d'état adoptées sont les suivantes:

$$\rho_l = \text{const.} \quad (\text{II.16})$$

$$\frac{P_g}{\rho_g} = rT_g \quad (\text{II.17})$$

$$\frac{P_g}{\rho_g^\gamma} = c = \text{const.} \quad (\text{II.18})$$

$$e_g = c_v T_g + \frac{1}{2} v_g^2 \quad (\text{II.19})$$

où

$r$  est la constante des gaz parfait.

$\gamma$  est le coefficient isentropique.

$c_v$  est la chaleur spécifique du gaz à volume constant.

L'introduction d'une loi supplémentaire pour le gaz, à savoir la condition de gaz isentropique (cf. équation (II.18)) remplace la loi d'état pour l'énergie interne du liquide (cf. équation (I.47)). Par conséquent, la température du liquide qui est aussi celle de l'interface (cf. équation (I.36)), n'apparaît plus dans la formulation du modèle mathématique.

En revanche, toutes les propriétés du liquide (température, pression, énergie totale et énergie interne) peuvent se déduire des expressions définissant les propriétés du mélange (cf. équations (I.22) à (I.25)) et des lois constitutives (cf. équations (II.13) à (II.20)).

• La densité du gaz est donnée par (cf. équation (I.22)):

$$\rho_g = \frac{\rho - \alpha_l \rho_l}{1 - \alpha_l} \quad (\text{II.20})$$

Le système d'équation (II.1) et les équations constitutives (II.2) à (II.20) constituent les équations du modèle mathématique décrivant l'écoulement du gaz naturel dans les pipelines sous les hypothèses précédentes. Ces hypothèses physiques, permettent entre autre de réduire le nombre d'équations constitutives nécessaires à la description complète de l'écoulement, sans aller à l'encontre des différentes considérations physiques citées pour le modèle "drift" (cf. § I.4.3).

Par ailleurs, l'hypothèse que tous les phénomènes thermodynamiques ont lieu le long de la direction de l'écoulement du gaz est licite. En effet, le rapport des longueurs aux diamètres pour ces conduites est de l'ordre de  $10^4$  voir  $10^5$ . Nous sommes donc en mesure d'effectuer un développement asymptotique du système d'équations précédent en s'appuyant sur les deux approximations suivantes:

• Introduire de nouvelles coordonnées spatiales:

$$X = \varepsilon^a x \quad (\text{II.21})_i$$

$$Y = \varepsilon^a y \quad (\text{II.21})_{ii}$$

$$Z = z \quad (\text{II.21})_{iii}$$

où

$\varepsilon$  est un réel strictement positif.

$a$  est un réel positif non nul.

• Négliger les variations transversales des vecteurs vitesses. Nous déterminons donc le vecteur vitesse du mélange  $\mathbf{v}$  sous la forme:

$$\mathbf{v} = (\varepsilon^a U_1, \varepsilon^a U_2, U_3)^t \quad (\text{II.22})$$

Il faut remarquer que les phénomènes le long de l'axe de la conduite sont d'autant plus privilégiés que la constante  $a$  est grande.

Les variables définies précédemment permettent d'écrire un développement asymptotique en  $\varepsilon$ . Le développement à l'ordre 1 de l'équation de continuité s'obtient par exemple, comme suit:

nous avons:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \varepsilon^a \partial_x(\rho U_1) + \varepsilon^a \partial_y(\rho U_2) + \partial_z(\rho U_3) \quad (\text{II.23})_i$$

comme:

$$\partial_x = \varepsilon^a \partial_X \quad ; \quad \partial_y = \varepsilon^a \partial_Y \quad ; \quad \partial_z = \partial_Z \quad (\text{II.23})_{ii}$$

il en résulte alors que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \partial_Z(\rho U_3) + \varepsilon^{2a}(\partial_X(\rho U_1) + \partial_Y(\rho U_2)) = 0 \quad (\text{II.23})_{iii}$$

Le bilan de masse à l'ordre 1 s'écrit donc:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \partial_Z(\rho U_3) = 0 \quad (\text{II.24})$$

Ce calcul étant développé pour toutes les équations de bilan (cf. équations (II.1) et [BH]), le modèle final prend la forme asymptotique suivante:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}\rho + \partial_Z(\rho U_3) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.25})_i$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i) + \partial_Z(\alpha_i \rho_i U_{3i}) = \Gamma_i \end{array} \right. \quad (\text{II.25})_{ii}$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\rho U_1) + \partial_Z(\rho U_1 U_3) = -\partial_X P_{eff} + \partial_Z(\tau_{13} + \tau_{13}^D) + \varepsilon^{-a} \rho g_1 \end{array} \right. \quad (\text{II.25})_{iii}$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\rho U_2) + \partial_Z(\rho U_2 U_3) = -\partial_Y P_{eff} + \partial_Z(\tau_{23} + \tau_{23}^D) + \varepsilon^{-a} \rho g_2 \end{array} \right. \quad (\text{II.25})_{iv}$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\rho U_3) + \partial_Z(\rho U_3^2) = -\partial_Z P_{eff} + \partial_Z(\tau_{33} + \tau_{33}^D) + \rho g_3 \end{array} \right. \quad (\text{II.25})_v$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \partial_Z(\rho e U_3) = -\partial_Z(\phi_3 + \phi_3^D) - \partial_Z((P_{eff} - \tau_{33})U_3) + \rho g_3 U_3 \end{array} \right. \quad (\text{II.25})_{vi}$$

Compte tenu des différentes lois constitutives (cf. équations (II.2) à (II.20)), le modèle en énergie totale s'écrit en fonction du vecteur état suivant:

$$(\rho, \alpha_i, \rho U_1, \rho U_2, \rho U_3, \rho e) \quad (\text{II.26})$$

En fait, le système (II.25) est découpé en deux systèmes. Nous pouvons dans un premier temps résoudre les équations (II.25)<sub>i</sub>, (II.25)<sub>ii</sub>, (II.25)<sub>v</sub> et (II.25)<sub>vi</sub> fonction du vecteur état:

$$(\rho, \alpha_i, \rho U_3, \rho e)^t \quad (\text{II.27})$$

Ensuite, nous déduisons les composantes transverses de la vitesses à partir des équations (II.25)<sub>iii</sub> et (II.25)<sub>iv</sub>.

## 2.2 Modèle en enthalpie

Le modèle en enthalpie a été établi lors d'une précédente étude (cf. [BH]). Il repose sur le modèle de diffusion et est plus restrictif que le modèle en énergie totale. En effet, les équations de ce modèle sont différentes de celles du modèle en énergie totale compte tenu de certaines hypothèses supplémentaires. Ces différences se présentent comme suit:

•L'équation de diffusion s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\alpha_l} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{v}_l}{\alpha_l} \right) = \Gamma_n \quad (\text{II.28})$$

Cette forme de l'équation de diffusion suppose en particulier que les gouttelettes liquides sont *uniformes* à géométrie *sphérique*. Leur *diamètre* est *constant* à tout instant et en tout point de l'espace mais leur *nombre* peut *varier*. Le terme de droite de l'équation (II.28) est proportionnel au volume source des particules.

•L'équation de quantité de mouvement ne tient pas compte des effets de gravité. En effet, ces derniers peuvent être pris en considération dans la loi constitutive pour la vitesse "drift" du liquide (cf. équation (I.34)). Cette hypothèse est licite pour les conduites horizontales. Il en résulte alors:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) = -\nabla P + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}^D) + M_m \quad (\text{II.29})$$

•L'équation de conservation de l'énergie ne prend en compte que les énergies d'origine thermique. Toutes les énergies d'origine mécanique et en particulier, celles de pression sont négligées. Ceci n'est vrai que pour des écoulements à faibles vitesses soumis à des apports d'énergie extérieurs. Il en résulte alors:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \nabla \cdot (\rho h \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\varphi + \varphi^D) \quad (\text{II.30})$$

où

$h$  est l'enthalpie du mélange. Elle est fonction des enthalpies de chaque phase (cf. équation (I.14)):

$$\rho h = \sum_{k=l,g} \alpha_k \rho_k h_k \quad (\text{II.31})$$

où

$h_k$  est l'enthalpie moyenne de la phase  $k$ .

•Les équations constitutives du modèle en enthalpie sont analogues à celles du modèle en énergie totale, sauf celles du flux de diffusion et l'équation d'état donnant l'enthalpie du gaz.

En effet, le flux de diffusion thermique (cf. équation (I.17)) fait apparaître l'enthalpie de chaque phase et non pas son énergie totale puisque le bilan d'énergie (cf. équation (II.30)) est établi pour l'enthalpie du mélange. Il vient alors:

$$\varphi^D = \sum_{k=l,g} \alpha_k \rho_k h_k \mathbf{v}_{km} \quad (\text{II.32})$$

En introduisant l'enthalpie du mélange (cf. équation (II.31)) et la vitesse "drift" du liquide (cf. équation (I.34)), l'expression (II.32) devient:

$$\varphi^D = \rho_g (h - h_g) \mathbf{v}_{lj} \quad (\text{II.33})$$

Quant à l'équation d'état de l'enthalpie pour le gaz, elle s'écrit:

$$h_g = c_p T_g \quad (\text{II.34})$$

où

$c_p$  est la chaleur spécifique du gaz à pression constante.

D'autre part (cf. [BH]), à l'ordre 1, le système des lois de conservation du modèle en enthalpie s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \partial_Z(\rho U_3) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\alpha_i} \right) + \partial_Z \left( \frac{U_{3i}}{\alpha_i} \right) = \Gamma_n \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho U_1) + \partial_Z (\rho U_1 U_3) = -\partial_X P_{eff} + \partial_Z (\tau_{13} + \tau_{13}^D) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho U_2) + \partial_Z (\rho U_2 U_3) = -\partial_Y P_{eff} + \partial_Z (\tau_{23} + \tau_{23}^D) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho U_3) + \partial_Z (\rho U_3^2) = -\partial_Z P_{eff} + \partial_Z (\tau_{33} + \tau_{33}^D) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) + \partial_Z (\rho h U_3) = -\partial_Z (\varphi_3 + \varphi_3^D) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(II.35)} \\ \text{(II.35)}_{ii} \\ \text{(II.35)}_{iii} \\ \text{(II.35)}_{iv} \\ \text{(II.35)}_v \\ \text{(II.35)}_{vi} \end{array}$$

Là aussi, compte tenu des différentes lois constitutives du modèle (cf. [BH]), le système d'équations (II.35) est fonction du vecteur état suivant:

$$\left( \rho, \frac{1}{\alpha_i}, \rho U_1, \rho U_2, \rho U_3, \rho h \right)^t \quad \text{(II.36)}$$

Le modèle en enthalpie paraît plus simple que le modèle en énergie totale. Cependant, il ne tient pas compte des effets de gravité et néglige les énergies de pression. Or:

- Dans le cas des conduites inclinées, même pour des taux de liquide faibles, les effets du champ de gravité doivent être pris en compte. En effet, les forces gravitationnelles influent sur le champ de vitesse de la phase liquide, les gradients de pression et le taux d'accumulation du liquide. Ces considérations n'interviennent pas dans le cas des conduites horizontales mais restent toujours présentes même pour des conduites faiblement inclinées.
- L'écoulement du gaz naturel, sur de grandes distances, le long des pipelines, est principalement dû aux gradients de pression. En revanche, l'effet de ces forces s'atténue sur des tronçons subissant des apports d'énergie de l'extérieur et où les vitesses d'écoulement du gaz sont réduites.

La formulation en énergie totale a l'avantage justement de tenir compte de toutes ces considérations. Ceci est rendu possible grâce à l'introduction des termes de gravité (cf. équation (II.1)<sub>iii</sub>) et des termes de travail des forces de pression, des forces de viscosité et du champ de gravité (cf. équation (II.1)<sub>iv</sub>) dans les équations de bilan.

De plus, le choix d'une équation de diffusion qui n'est qu'un bilan de masse pour la phase liquide, n'impose aucune restriction sur la géométrie de la phase liquide. Cette équation s'adapte mieux à la réalité de l'écoulement car la phase dispersée ne peut garder sur de grandes distances, une géométrie uniforme.

Toutes ces remarques justifient l'adoption du modèle en énergie totale pour l'étude et l'analyse de manière générale, du transport du gaz naturel dans les pipelines. Néanmoins, le modèle en enthalpie, de par ses spécificités, est particulièrement bien adapté à l'étude des écoulements dans les conduites horizontales.

Par ailleurs, le modèle en enthalpie nous permet d'analyser dans un premier temps les performances des schémas numériques. Voilà pourquoi nous allons présenter à chaque fois au chapitre suivant, les résultats obtenus dans les deux cas: modèle en énergie totale et modèle en enthalpie.

### 3 CONDITIONS INITIALES, CONDITIONS AUX LIMITES

L'étude mathématique des systèmes d'équations aux dérivées partielles (cf. équations (II.25), (II.35)) constitue l'étape préalable qui permet d'affirmer que le problème est bien posé en imposant les "bonnes" conditions aux limites et initiales.

Cette étude nous semble particulièrement difficile pour les deux systèmes considérés et nous ne savons pas la mener. C'est pourquoi, nous avons choisi des conditions initiales et des conditions aux limites dictées seulement par des considérations physiques. Il s'agit d'une démarche tout à fait classique lorsqu'on s'intéresse aux problèmes diphasiques.

### Condition initiale

A l'instant initial, l'état de l'écoulement est entièrement déterminé, i.e. le vecteur état est supposé connu en tout point de la conduite:

$$\rho, \alpha_l, U_1, U_2, U_3, \quad \text{connus} \quad (\text{II.37})$$

### Conditions aux limites

• **En entrée:**

Le vecteur état est supposé connu à tout instant de l'écoulement, i.e.:

$$\rho, \alpha_l, U_1, U_2, U_3, \quad \text{connus} \quad (\text{II.38})$$

• **A la paroi:**

$$U_l = 0 \quad \text{condition d'adhérence pour le liquide} \quad (\text{II.39})_i$$

$$U_g \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{condition de glissement pour le gaz} \quad (\text{II.39})_{ii}$$

$$P_{eff} \quad \text{connue} \quad (\text{II.39})_{iii}$$

où

$\mathbf{v}$  est un vecteur normal dirigé vers l'extérieur.

• **En sortie:**

$$\begin{aligned} U \wedge \mathbf{v} &= 0 \\ U \cdot \mathbf{v} &> 0 \end{aligned} \quad \text{débit sortant} \quad (\text{II.40})_i$$

$$T_g \quad \text{connue} \quad (\text{II.40})_{ii}$$

Les conditions précédentes s'appliquent aussi au modèle en enthalpie à condition de remplacer l'énergie totale par l'enthalpie du mélange. Enfin, la condition initiale et les conditions aux limites doivent être, pour les deux modèles, compatibles aux bords du domaine physique.

## 4 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons d'abord établi un modèle mathématique pour étudier l'écoulement du gaz naturel dans les conduites. C'est un modèle en énergie totale plus général que le modèle en enthalpie (cf [BH]), puisqu'il tient compte des échanges d'énergies thermiques et mécaniques ayant lieu dans l'écoulement.

Pour résoudre le modèle mathématique ainsi obtenu, nous avons supposé que lors du transport du gaz, les phénomènes physiques intervenant le long de l'axe de la conduite sont prépondérants devant ceux apparaissant dans le plan transverse à l'axe de la conduite. Ceci nous a permis d'effectuer un développement asymptotique formel à l'ordre 1 et d'établir un modèle mathématique qui nous paraît plus simple et mieux adapté pour traiter les écoulements du gaz dans les conduites. Enfin, en l'absence de résultats mathématiques sur le système d'équations ainsi obtenu, nous avons imposé des conditions initiales et aux limites à partir de considérations essentiellement physiques pour avoir un problème bien posé.

L'étape suivante de ce travail consiste à résoudre numériquement les deux modèles mathématiques établis. C'est l'objet du chapitre III.

## Chapitre III

# Approximation Numérique

# III

La résolution numérique des modèles mathématiques en énergie totale et en enthalpie développés (cf. Chap. II) constitue la deuxième partie de ce travail. En effet, le calcul scientifique est devenu de nos jours un passage obligé dans toute problématique faisant intervenir une modélisation. Il permet de simuler et d'analyser un phénomène physique en général, ou un comportement de fluide en particulier.

L'analyse numérique offre un large éventail d'outils d'approximations pour les différents problèmes posés par les sciences et les techniques d'ingénieurs (cf. [Da], [Gl]). En mécanique des fluides, l'intérêt porte essentiellement sur les techniques à base de différences finies (cf. [Fl], [Ho], [Wag]) même si d'autres techniques comme celles des éléments finis restent couramment utilisées.

Dans le cas de l'étude des écoulements diphasiques, nous retrouvons les méthodes à base d'éléments finis (cf. [Mo]) mais surtout et de façon plus abondante, celles à base de différences finies. Ainsi, les schémas dits de Goudounov utilisés en gazo-dynamique (cf. [Le]), ont été testés avec succès dans des problèmes diphasiques de combustion (cf. [Sa1]), de transport (cf. [To]), ou encore d'environnement (cf. [Vi]). Ces schémas robustes sont assez complexes et leur mise en œuvre reste assez difficile.

L'utilisation de schémas aux différences finies classiques peut aussi amener à l'obtention de résultats satisfaisants (cf. [Be], [Ben], [Mf]). Ces schémas présentent l'avantage d'être peu coûteux et simples à mettre en œuvre. Ils peuvent être explicites ou implicites et amènent à la résolution de systèmes d'équations algébriques linéaires ou non linéaires.

Pour notre part, et lors d'une étude préliminaire (cf. [Ba]), différents schémas tels que le schéma de Lax-Wendroff (cf. [Da]), les  $S_{\beta}^{\alpha}$  schémas introduits par Lerat et Peyrat (cf. [Ra]), comme le schéma de Richtmyer et le schéma de Mac Cormack par exemple ont été testés sur le modèle de diffusion homogène. Ce modèle ne prend pas en compte le gradient de vitesse entre les phases et néglige tout les termes de second ordre. Les résultats obtenus présentaient de fortes instabilités numériques. En effet, la classe des schémas explicites ou même semi-implicites ne permet pas d'approcher convenablement la solution du problème continu. Ceci est dû à la linéarisation des termes convectifs dans les équations de bilans, amenant ainsi à la résolution d'équations algébriques linéaires alors que le problème continu reste essentiellement non linéaire.

Pour y remédier, l'option des schémas implicites a été retenue lors d'un précédent travail (cf. [BH]). Nous avons testé un schéma centré d'ordre 1 en temps et en espace pour la résolution du modèle en enthalpie (cf. § II.2). Les résultats obtenus nous ont encouragé à poursuivre cette étude et à construire des schémas sur le même principe afin d'atténuer au maximum leurs instabilités numériques encore présentes.

Nous allons dans ce chapitre commencer par rappeler le problème mathématique continu pour le modèle en énergie totale et en enthalpie. Nous décrivons ensuite les différents schémas d'approximation que nous avons construit. Ces schémas sont tous implicites d'ordre 1 en temps et d'ordre 1 ou 2 en espace. Nous présentons à chaque fois les résultats des tests numériques effectués avec les conclusions qui s'imposent.

## 1 RAPPEL DU PROBLEME MATHEMATIQUE CONTINU

Les équations mathématiques des modèles en énergie totale et en enthalpie établies (cf. Chap. II), permettent de décrire les phénomènes de transport du gaz naturel dans les pipelines. Elles sont écrites sous les hypothèses principales suivantes:

- La configuration de l'écoulement est dispersée.
- La turbulence est peu développée.
- Le liquide est en équilibre thermique.
- Le gaz est parfait.

Les équations du modèle en enthalpie tiennent compte des hypothèses supplémentaires suivantes:

- Les gouttelettes liquides sont uniformes à géométrie sphérique.
- L'effet du champ de gravité est négligé.

- Les flux thermiques sont prépondérants.

Par ailleurs, l'introduction d'un développement asymptotique formel à l'ordre 1 traduisant l'idée que:

- *Tous les phénomènes physiques se produisent selon une direction privilégiée i.e., le long de l'axe de la conduite,*

permet de simplifier les équations de bilan du modèle en énergie totale, respectivement en enthalpie et d'établir un système d'équations spécifiques à la description du transport du gaz dans les conduites.

De plus, les équations de quantité de mouvement pour les composantes transversales du vecteur vitesse se découplent du reste du système. Nous sommes donc amenés à résoudre un système à quatre équations aux dérivées partielles non linéaires, monodimensionnelles, pour les deux modèles en énergie totale et en enthalpie.

Le problème continu s'énonce alors comme suit:

### Problème en énergie totale $P_E$

Déterminer, pour tout  $(t, z) \in \Omega_T$ , le vecteur  $\mathbf{w}(t, z)$  qui soit solution du système d'équations aux dérivées partielles suivant:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w}(t, z) + \partial_z \mathbf{H}(\mathbf{w}) = F(\mathbf{w}, L(\mathbf{w})) \quad (\text{III.1})$$

avec:

$$\Omega_T = ]0, T] \times ]0, l[ \quad (\text{III.2})$$

où

- $T$ : l'intervalle de temps de l'écoulement.
- $l$ : la longueur de la conduite.

Le vecteur état  $\mathbf{w}$  est donné par:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ \alpha_1 \\ \rho U_3 \\ \rho e \end{pmatrix} \quad (\text{III.3})$$

Le flux  $\mathbf{H}$  est défini comme:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} : \mathfrak{R}^4 &\rightarrow \mathfrak{R}^4 \\ \mathbf{w} &\rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{w}) \end{aligned} \quad (\text{III.4})_i$$

tel que:

$$\mathbf{H}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \rho U_3 \\ \alpha_1 U_{31} \\ \rho U_3^2 + P_{eff} - \tau_{33}^D \\ \rho e U_3 + P_{eff} U_3 + \varphi_3^D \end{pmatrix} \quad (\text{III.4})_{ii}$$

Le terme de second membre  $F(\mathbf{w}, L(\mathbf{w}))$  s'écrit:

$$F(\mathbf{w}, L(\mathbf{w})) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_z(2\alpha_l \mu_l \partial_z U_{3l}) \\ \partial_z((1 - \alpha_l)k_g \partial_z T_g) + \partial_z((2\alpha_l \mu_l \partial_z U_{3l})U_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\Gamma_l}{\rho_l} \\ -\rho g \sin \theta \\ -\rho g \sin \theta U_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III.5})$$

où

- $g$ : la norme du champ de gravité terrestre.
- $\theta$ : l'inclinaison de la conduite par rapport à l'horizontale.  $\theta$  est un angle orienté.

**Problème en énergie totale  $P_h$**

Là aussi, Il s'agit de déterminer, pour tout  $(t, z) \in \Omega_T$ , le vecteur  $\omega(t, z)$  qui soit solution du système d'équations aux dérivées partielles (III.1) où le vecteur état  $\omega$  est donné par:

$$\omega = \begin{pmatrix} \rho \\ \frac{1}{\alpha_l} \\ \rho U_3 \\ \rho h \end{pmatrix} \quad (\text{III.3})_{\text{bis}}$$

Le flux  $\mathbf{H}(\omega)$  s'exprime comme:

$$\mathbf{H}(\omega) = \begin{pmatrix} \rho U_3 \\ \frac{U_{3l}}{\alpha_l} \\ \rho U_3^2 + P_{\text{eff}} - \tau_{33}^D \\ \rho h U_3 + \varphi_3^D \end{pmatrix} \quad (\text{III.4})_{\text{ii-bis}}$$

et le terme de second membre  $F(\omega, L(\omega))$  s'écrit:

$$F(\omega, L(\omega)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_z(2\alpha_l \mu_l \partial_z U_{3l}) \\ \partial_z[(1 - \alpha_l)k_g \partial_z T_g] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Gamma_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.5})_{\text{bis}}$$

**Equations constitutives**

Les équations constitutives (cf. § II.2) permettent d'exprimer le reste des termes en fonction du vecteur d'état.

$$U_{3l} = U_3 + \left(1 - \frac{\alpha_l \rho_l}{\rho}\right) (1 - \alpha_l)^{(n-1)} U_{3\infty} \quad (\text{III.6})_i$$

$$P_{\text{eff}} = c \left(\frac{\rho - \alpha_l \rho_l}{1 - \alpha_l}\right)^\gamma + v_0 \alpha_l^{4/3} \quad (\text{III.6})_{ii}$$

$$T_g = \frac{c}{r} \left(\frac{\rho - \alpha_l \rho_l}{1 - \alpha_l}\right)^{(\gamma-1)} \quad (\text{III.6})_{iii}$$

$$\tau_{33}^D = \alpha_l \rho_l \left( \frac{\alpha_l \rho_l}{\rho} - 1 \right) (1 - \alpha_l)^{2(n-1)} U_{3\infty}^2 \quad (\text{III.6})_v$$

Le flux thermique est donnée pour le modèle en énergie totale par:

$$\varphi_3^D = (\rho - \alpha_l \rho_l) \left( e - \left( c_v T_g + \frac{1}{2} \left( U_3 - \frac{\alpha_l \rho_l}{\rho} (1 - \alpha_l)^{(n-1)} U_{3\infty} \right)^2 \right) \right) (1 - \alpha_l)^{(n-1)} U_{3\infty} \quad (\text{III.6})_v$$

et pour le modèle en enthalpie par:

$$\varphi_3^D = (\rho - \alpha_l \rho_l) (h - c_p T_g) (1 - \alpha_l)^{(n-1)} U_{3\infty} \quad (\text{III.6})_{v\text{-bis}}$$

Finalement, il est nécessaire de spécifier les conditions initiales et les conditions aux limites adéquates (cf. § II.3).

### Condition Initiale

A l'instant initial, le vecteur état est supposé connu en tout point de la conduite, i.e.:

$$\mathbf{w}^0 \equiv \begin{pmatrix} \rho^0 \\ \alpha_l^0 \\ (\rho U_3)^0 \\ (\rho e)^0 \end{pmatrix} = \mathbf{w}(0, z) \quad , \quad \forall z, z \in [0, l] \quad (\text{III.7})$$

De même pour le problème en enthalpie:

$$\omega^0 = \omega(0, z) \quad , \quad \forall z, z \in [0, l] \quad (\text{III.7})_{\text{bis}}$$

### Conditions aux Limites

Par ailleurs, le système aux dérivées partielles (III.1) ne fait pas intervenir les composantes transversales du vecteur vitesse. Par conséquent, les conditions aux limites pour le problème mathématique continu (cf. équations (II.38) à (II.40)) deviennent:

#### • En entrée:

Tout le vecteur état est supposé connu à tout instant de l'écoulement, i.e.:

$$\mathbf{w}^e \equiv \begin{pmatrix} \rho^e \\ \alpha_l^e \\ (\rho U_3)^e \\ (\rho e)^e \end{pmatrix} = \mathbf{w}(t, 0) \quad , \quad \forall t, t \in [0, T] \quad (\text{III.8})_i$$

De même pour le problème en enthalpie:

$$\omega^e = \omega(t, 0) \quad , \quad \forall t, t \in [0, T] \quad (\text{III.8})_{i\text{-bis}}$$

• **En sortie:**

Le débit est sortant et la pression du gaz est supposée connue à tout instant de l'écoulement, i.e.:

$$\mathbf{w}^s \equiv \begin{pmatrix} U_3^s \\ P_g^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_3 > 0 \\ P_g \end{pmatrix} (t, l) \quad , \quad \forall t, t \in [0, T] \quad (\text{III.8})_{ii}$$

De même pour le problème en enthalpie:

$$\omega^s = \mathbf{w}^s \quad , \quad \forall t, t \in [0, T] \quad (\text{III.8})_{ii-bis}$$

En outre, la condition initiale et les conditions aux limites doivent être compatibles en début et en fin de conduite, i.e. aux points (0,0) et (0,l).

Il s'agit donc de résoudre, dans le domaine borné  $\Omega_T = ]0, T] \times ]0, l[$ , deux systèmes d'évolution non linéaires  $P_E$  et  $P_h$  écrits sous forme conservative. Ces systèmes de lois de conservation sont obtenus par "splitting" des systèmes aux dérivées partielles du modèle en énergie totale et en enthalpie (cf. équations (II.25), (II.35)). En effet, le développement asymptotique appliqué aux équations de chaque modèle nous a permis de découpler ces équations, en deux systèmes: un système principale à quatre équations non linéaires couplées correspondant aux équations de continuité, de diffusion, de quantité de mouvement pour la vitesse axiale et de l'énergie, et un autre à deux équations non linéaires découplées qui sont celles de la quantité de mouvement pour les composantes transverses.

## 2 PROBLEME DISCRET

Pour résoudre numériquement les problèmes mathématiques continus  $P_E$  et  $P_h$ , nous utilisons une technique d'approximation basée sur la méthode aux différences finies. Celle ci permet de ramener le système d'équations aux dérivées partielles (cf. équation (III.1)) à un système d'équations algébriques non linéaires.

Pour cela, nous discrétisons d'abord le domaine de résolution  $\Omega_T$  et construisons donc une grille de calcul  $\Omega_T^h$ , obtenue en générant un maillage régulier en temps et en espace le long de la conduite. Le problème consiste alors, non plus à calculer la solution continue dans  $\Omega_T$ , mais sa valeur dite *discrète* en chaque point de la grille  $\Omega_T^h$  (cf. Fig. 1).

En adoptant les notations suivantes:

$$t^n = n\Delta t \quad ; \quad n = \overline{0, N} \quad N\Delta t = T \quad (\text{III.9})_i$$

$$z_k = k\Delta z \quad ; \quad k = \overline{0, K} \quad K\Delta z = l \quad (\text{III.9})_{ii}$$

le domaine de calcul est défini par:

$$\Omega_T^h = \{(t^n, z_k) / 0 < t^n \leq T; 0 < z_k < l\} \quad (\text{III.10})$$

et toute fonction  $f$  des variables  $(t, z)$  prend la forme discrète suivante:

$$f_k^n \equiv f(t^n, z_k) = f(n\Delta t, k\Delta z) \quad \text{dans } \Omega_T^h \quad (\text{III.11})$$

Pour le problème  $P_E$  par exemple, il s'agit alors de déterminer, pour tout  $(t^{n+1}, z_k) \in \Omega$ , le vecteur  $\mathbf{w}_k^{n+1}$  qui soit solution du système d'équations algébriques non linéaires suivant:

$$\frac{\mathbf{w}_k^{n+1} - \mathbf{w}_k^n}{\Delta t} + \mathbf{H}^h(\mathbf{w}_k^{n+1}) = F^h(\mathbf{w}_k^{n+1}, L^h(\mathbf{w}_k^{n+1})) \quad (\text{III.12})_i$$

sachant:

$$\begin{cases} (\mathbf{w}^0)_k & \text{condition initiale} \\ (\mathbf{w}^e)_0^n & \text{condition d'entrée} \\ (\mathbf{w}^s)_l^n & \text{condition de sortie} \end{cases} \quad (\text{III.12})_i$$

où

$\mathbf{H}^h$ : la forme approchée du flux (cf. équation (III.4)).

$F^h$ : la forme approchée du second membre (cf. équation (III.5)).

La résolution du problème discret s'effectue de manière séquentielle en partant de la condition initiale et de la condition d'entrée et en évoluant de proche en proche le long de l'axe des espaces à chaque pas de temps (cf. Fig. 1). Cette démarche permet de déterminer les valeurs discrètes du vecteur état  $\mathbf{w}_k^{n+1}$  dans tout le domaine de calcul  $\Omega_T^h$ .

Ces valeurs discrètes du vecteur état constituent la solution du système algébrique (III.12)<sub>i</sub> en chaque point du domaine de calcul. Une méthode de point fixe à convergence accélérée, la méthode de Brown (cf. [By]), est utilisée pour l'obtention de cette solution.

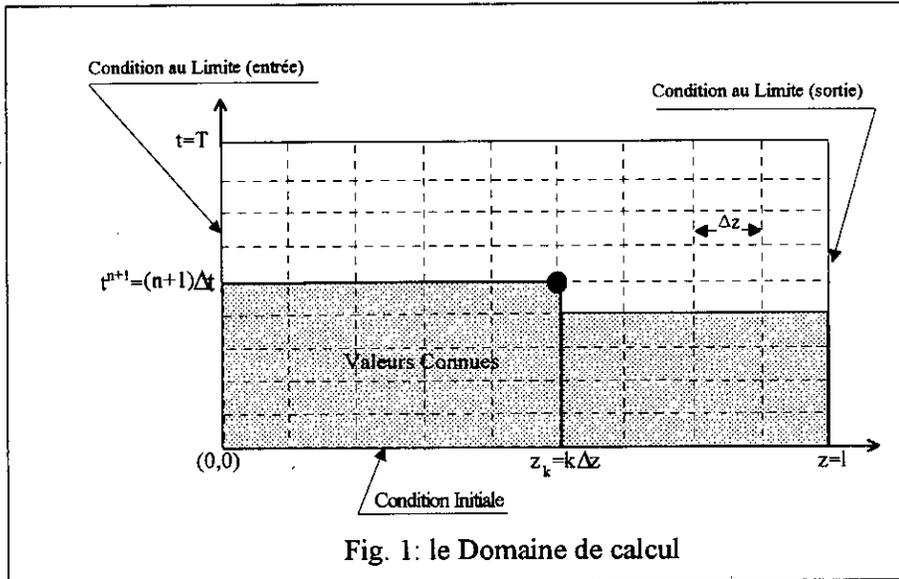


Fig. 1: le Domaine de calcul

### 3 SCHEMAS D'APPROXIMATION

Sur la base des travaux antérieurs (cf. [Ba], [BH]), nous avons écrit, mis en œuvre et testé différents schémas aux différences finies *implicites*. Nous allons présenter ces schémas en mettant en évidence à chaque fois les propriétés et caractéristiques de chacun d'eux.

Dans tous les schémas que nous proposons, toutes les dérivées partielles sont approximées au point  $(t^{n+1}, z_k)$ . En particulier, la dérivée par rapport au temps au point  $(t^{n+1}, z_k)$  est discrétisée comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t^{n+1}, z_k) = \frac{1}{\Delta t} (f_k^{n+1} - f_k^n) + O(\Delta t) \quad (\text{III.13})$$

qui est une approximation décentrée à gauche d'ordre 1.

### 3.1 Schéma IBFS

"Implicit Backward Forward Space" a été développé précédemment (cf. [BH]). Il correspond au schéma d'approximation suivant (cf. Fig. 2):

Pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  de  $(t, z)$ , les dérivées premières et mixtes sont données au point  $(t^{n+1}, z_k)$  comme suit:

$$\partial_z f(t^{n+1}, z_k) = \frac{1}{\Delta z} (f_k^{n+1} - f_{k-1}^{n+1}) + O(\Delta z) \tag{III.14}_i$$

$$\partial_z (f \partial_z g)(t^{n+1}, z_k) = \frac{1}{\Delta z} \left( f_k^{n+1} \left( \frac{g_{k+1}^n - g_k^{n+1}}{\Delta z} \right) - f_{k-1}^{n+1} \left( \frac{g_k^{n+1} - g_{k-1}^{n+1}}{\Delta z} \right) \right) + O(\Delta z) \tag{III.14}_{ii}$$

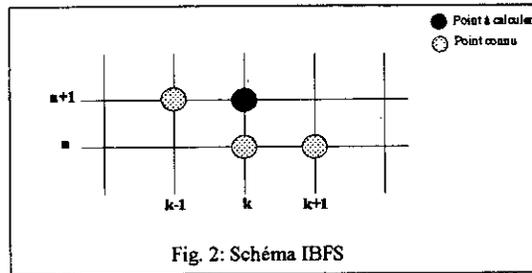


Fig. 2: Schéma IBFS

Le schéma IBFS présente les caractéristiques suivantes:

- Les différences finies sont d'ordre 1 en espace.
- Le schéma est centré.
- Le schéma est auto-démarrant.
- Le schéma nécessite deux conditions aux limites en fin de conduite. En effet, les dérivées mixtes (cf. équation (III.5)) font apparaître au point  $(n, k + 1)$  les valeurs de la vitesse  $U_{3l}$  et de la température  $T_g$ . Ce sont ces deux valeurs qui sont données comme conditions de sortie.

Compte tenue de ces remarques, des tests numériques sont effectués dans les buts suivants:

- Etudier les performances du schéma IBFS.
- Voir s'il y a une différence de comportement de ce schéma suivant que nous l'appliquons au problème en énergie totale ou en enthalpie.

Les calculs sur machine sont menés de sorte que les conditions initiales et les conditions aux limites introduites lors des différents tests correspondent à la solution analytique (cf. Annexe A). Toutes les expériences numériques sont effectuées avec les données de calcul suivantes:

- Longueur de la Conduite:

$$l = 10\,000 \text{ m}$$

(Conduite horizontale sans inclinaison)

- Valeurs du Pas de Temps:

$$\Delta t \in [0.01, 0.5] \text{ s}$$

- Valeurs du Pas d'Espace:

$$\Delta z \in [10, 500] \text{ m}$$

*Problème en énergie totale***Test 1**

Les conditions de calcul sont les suivantes:

- Pas de temps variable:

$$0.01s \leq \Delta t \leq 0.5s$$

- Pas d'espace fixé:

$$\Delta z = 10 m$$

Les résultats obtenus sont présentés pour différents temps:

- Pour le pas:  $\Delta t = 0.01s$   
nous avons:

La densité (cf. Fig. 3a).

Le taux de présence du liquide (cf. Fig. 3b).

La vitesse axiale (cf. Fig. 3c).

L'énergie totale (cf. Fig. 3d).

L'erreur relative pour la densité (cf. Fig. 3e).

L'erreur relative pour l'énergie totale (cf. Fig. 3f).

- De même, les résultats obtenus pour  $\Delta t = 0.1s$ , respectivement  $\Delta t = 0.5s$ , sont présentés dans les figures 4, respectivement les figures 5.

**Commentaire**

Les résultats obtenus nous permettent de faire les remarques suivantes:

- Une forte instabilité apparaît en début de conduite. Cette instabilité s'amortit très vite après quelques itérations en espace.
- L'instabilité se propage le long de la conduite et s'accroît au fur et à mesure que le temps de l'écoulement augmente. Elle devient alors suffisamment importante pour faire diverger l'algorithme de résolution du système d'équations algébriques non linéaires.
- L'erreur relative en aval de l'instabilité s'améliore considérablement au fur et à mesure que le pas de temps se réduit. Pour les valeurs testées, elle varie de 0.5% à 20%.

**Test 2**

Les conditions de calcul sont les suivantes:

- Pas de temps fixé:

$$\Delta t = 0.1 s$$

- Pas d'espace variable:

$$10m \leq \Delta z \leq 500m$$

Les résultats obtenus sont présentés pour le pas d'espace  $\Delta z = 100 m$ , respectivement  $\Delta z = 500 m$ , dans les figures 6, respectivement les figures 7.

**Commentaire**

Il apparaît dans ce cas que:

- L'instabilité reste toujours présente. Elle se localise d'autant plus en début de conduite lorsque le pas d'espace est faible. Elle est donc directement liée au nombre d'itérations effectuées en espace.
- L'erreur relative en aval de l'instabilité garde globalement le même ordre de grandeur lorsque le pas d'espace varie. Elle reste constante pour la densité et le taux de présence du liquide et varie quelque peu pour la vitesse et l'énergie totale.

**Test 3**

Les conditions de calcul sont les suivantes:

- Pas de temps fixé:

$$\Delta t = 0.1s$$

- Pas d'espace fixé:

$$\Delta z = 10 m$$

- La solution exacte est donnée en amont de la conduite et le calcul de la solution approchée commence suffisamment loin de l'entrée ( $z=2500m$ ) (cf. Fig. 8).

**Commentaire**

- L'instabilité n'est pas liée à la condition au limite imposée en début de conduite. En effet, le même phénomène persiste dès que le calcul approché est entamé.

*Problème en enthalpie***Test 4**

Les conditions de calcul sont identiques aux conditions du test 1 et du test 2. Les résultats présentés sont les suivants:

$$\Delta t = 0.1s ; \Delta z = 10m \text{ (cf. Fig. 9).}$$

**Commentaire**

- Les résultats obtenus pour le problème en enthalpie font ressortir les mêmes phénomènes numériques que pour le problème en énergie totale.
- L'erreur relative reste toute fois beaucoup moins importante pour le modèle en enthalpie. En effet, pour le test  $\Delta t = 0.1s$  et  $\Delta z = 10m$  par exemple, les erreurs pour le modèle en énergie totale et pour le modèle en enthalpie sont inférieurs respectivement à 6% et à 1.8%.

**Conclusion**

Cette série d'expériences numériques nous amène aux conclusions suivantes:

- La solution approchée obtenue par le schéma IBFS correspond à la solution analytique proposée pour des pas de temps et d'espace adéquats (par exemple:  $(\Delta t, \Delta z) = (0.01, 10)$ ).
- L'erreur relative obtenue pour les différentes valeurs du pas d'espace et de temps testées peut atteindre, pour le modèle en énergie totale 0.5% et reste en dessous des 20%. Cette erreur est beaucoup moins importante pour le modèle en enthalpie et varie de 0% à 10%.
- L'erreur relative se réduit d'autant plus que le pas de temps est faible.
- Une instabilité locale apparaît en début de conduite et s'amortit très vite le long de la conduite. Elle est directement liée à la nature du schéma et son étendue se réduit avec le pas d'espace.

Par ailleurs, au vue des différents tests effectués pour les deux modèles il apparaît que:

- La densité et le de présence de la phase liquide se comportent identiquement pour les deux modèles. Ceci est prévisible car elles sont solutions d'équations de même type. La vitesse et l'énergie quant à elles se comportent de façon identique pour le modèle en enthalpie mais non pas pour le modèle en énergie totale. Ces comportements peuvent être liés à la forme des équations et donc aux dérivées qui y interviennent.
- Le schéma IBFS n'est pas satisfaisant en raison de l'instabilité de départ qui va en s'accroissant pour faire exploser le schéma au cours du temps.

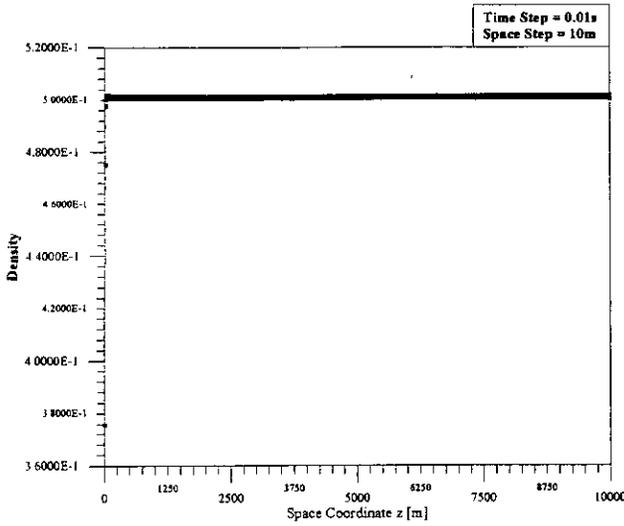


Figure 3a1: Temps de représentation  $t = 1s$

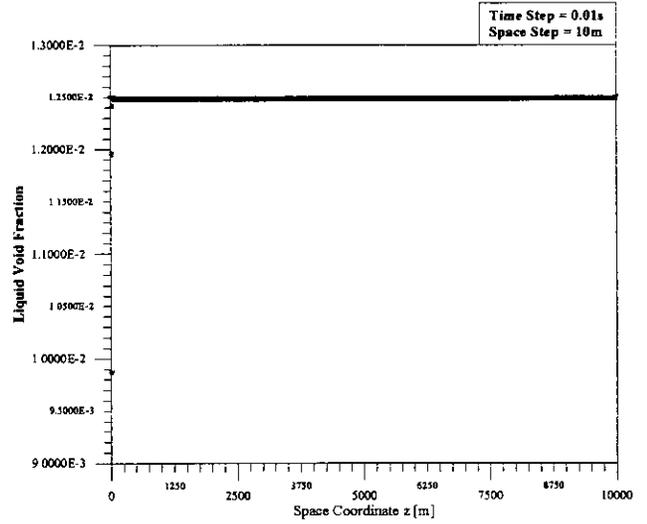


Figure 3b1: Temps de représentation  $t = 1s$

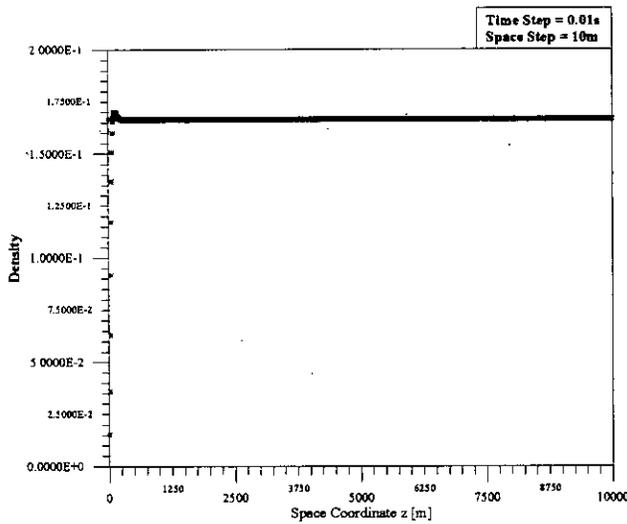


Figure 3a2: Temps de représentation  $t = 5s$

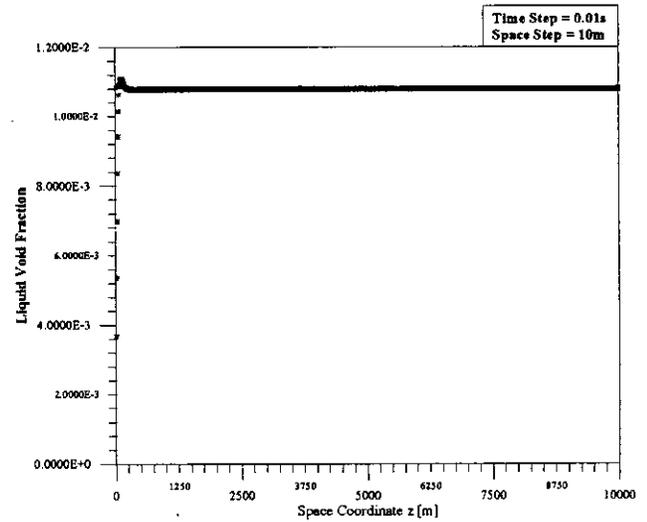


Figure 3b2: Temps de représentation  $t = 5s$

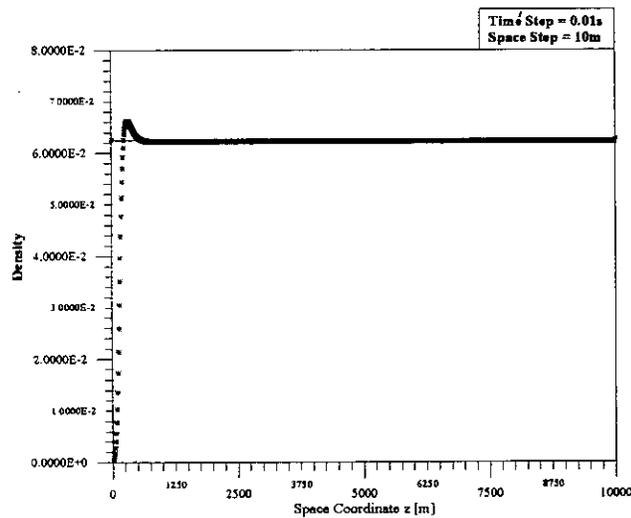


Figure 3a3: Temps de représentation  $t = 15s$

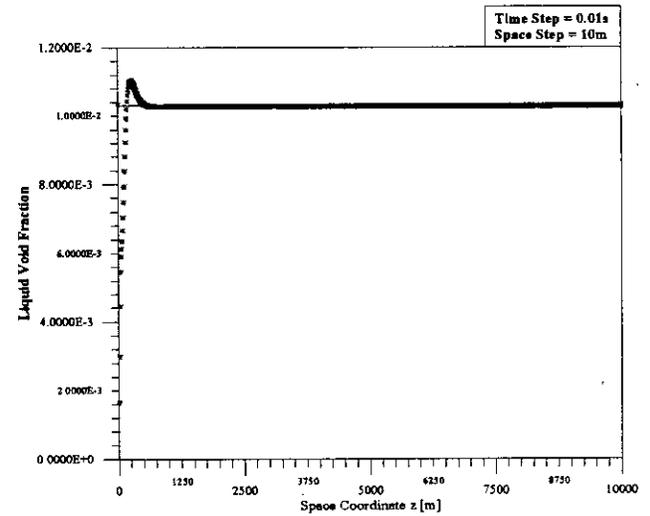


Figure 3b3: Temps de représentation  $t = 15s$

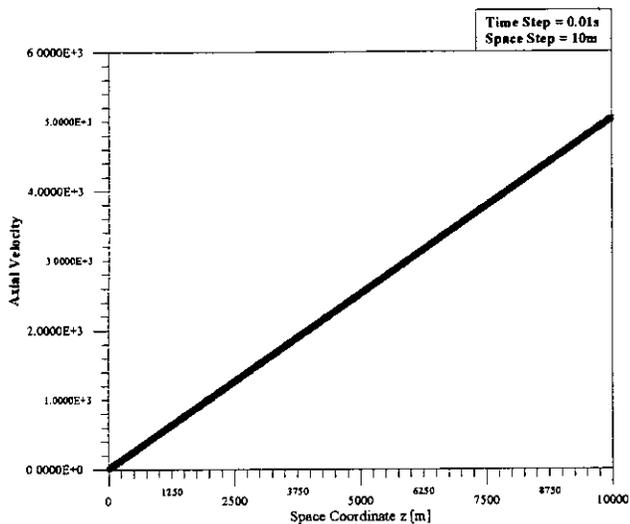


Figure 3c1: Temps de représentation  $t = 1s$

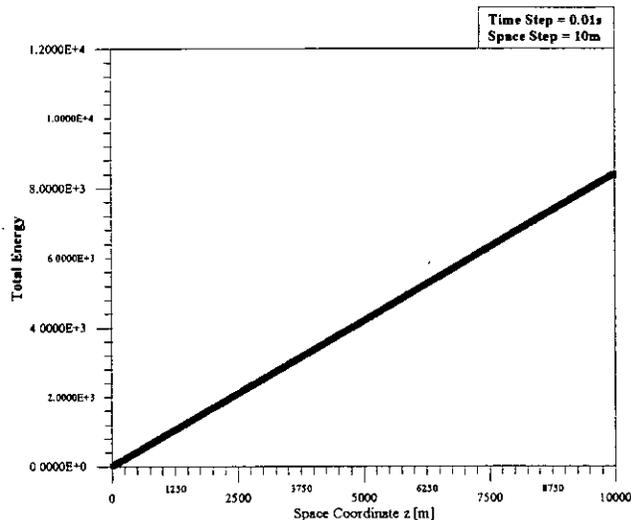


Figure 3d1: Temps de représentation  $t = 1s$

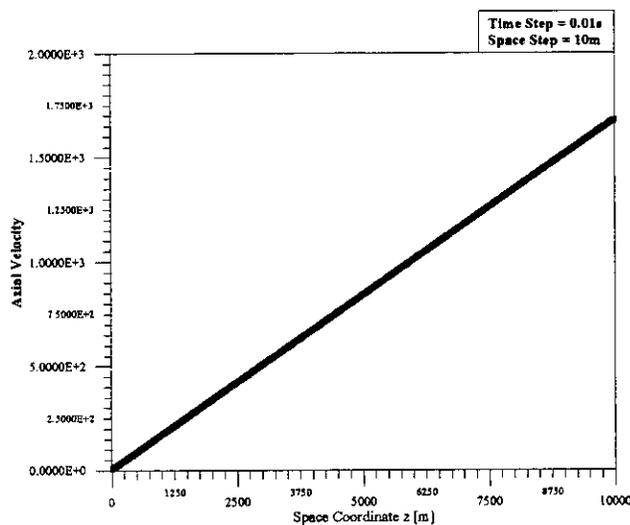


Figure 3c2: Temps de représentation  $t = 5s$

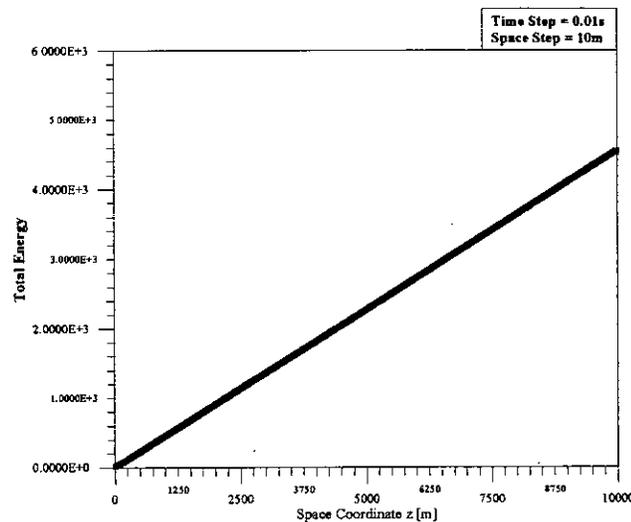


Figure 3d2: Temps de représentation  $t = 5s$

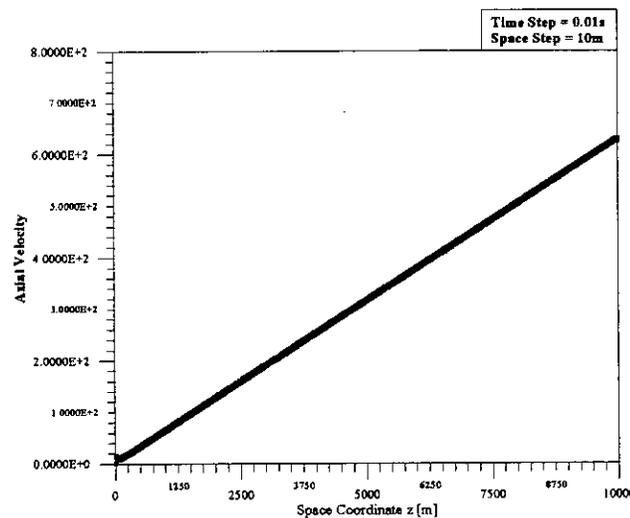


Figure 3c3: Temps de représentation  $t = 15s$

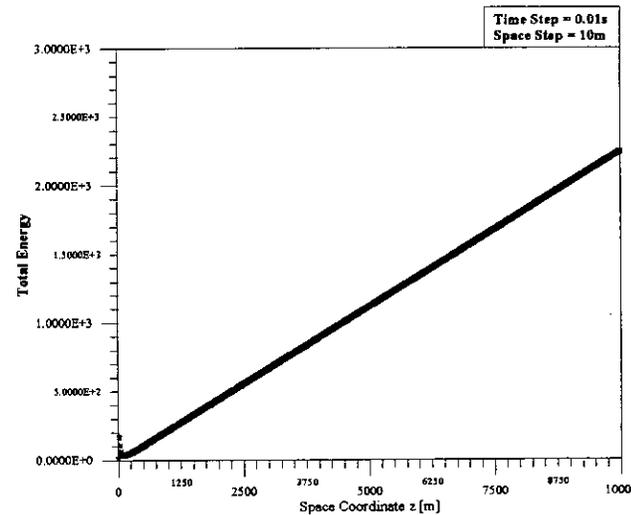


Figure 3d3: Temps de représentation  $t = 15s$

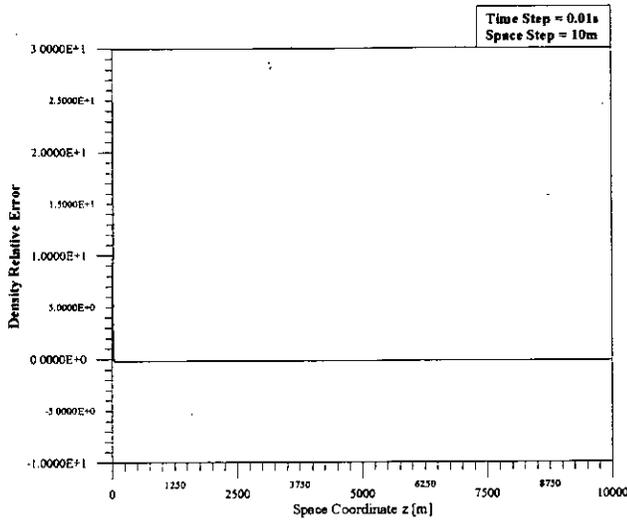


Figure 3e1: Temps de représentation  $t = 1s$

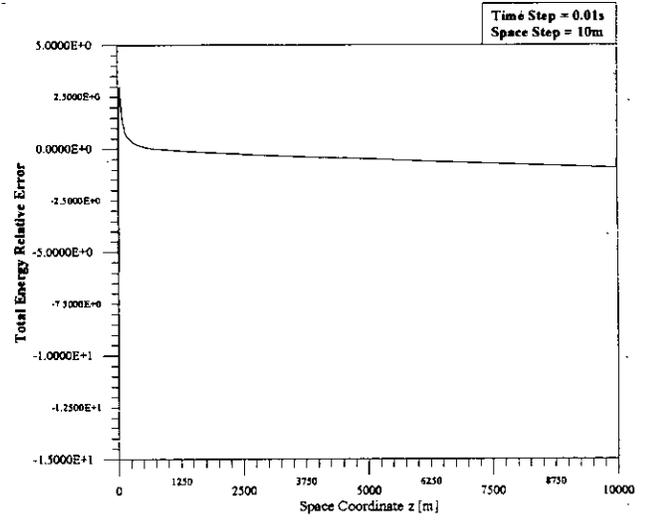


Figure 3f1: Temps de représentation  $t = 1s$

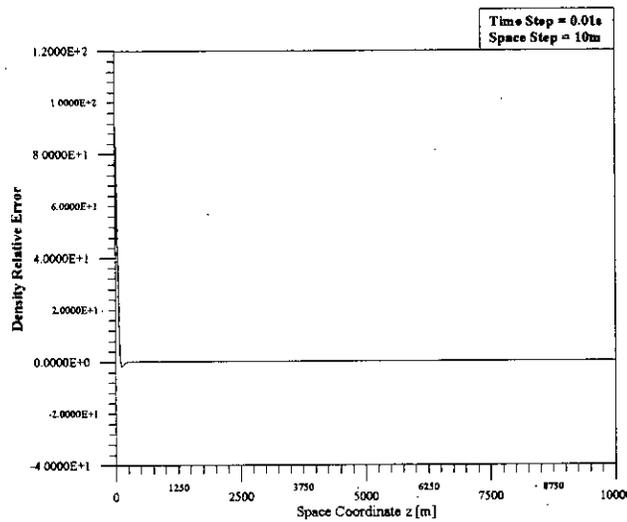


Figure 3e2: Temps de représentation  $t = 5s$

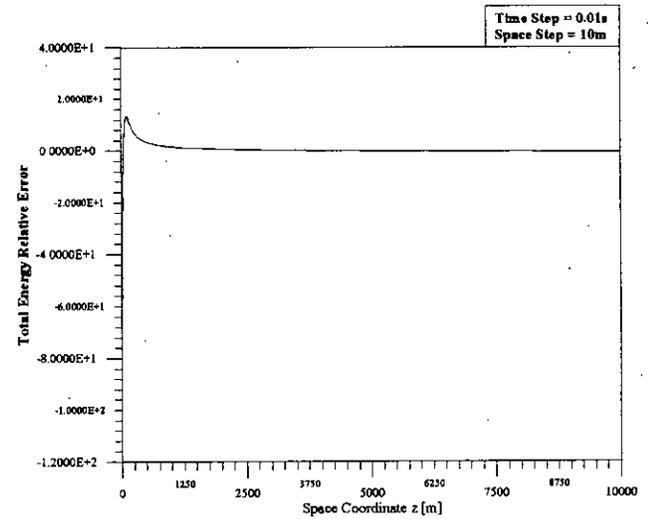


Figure 3f2: Temps de représentation  $t = 5s$

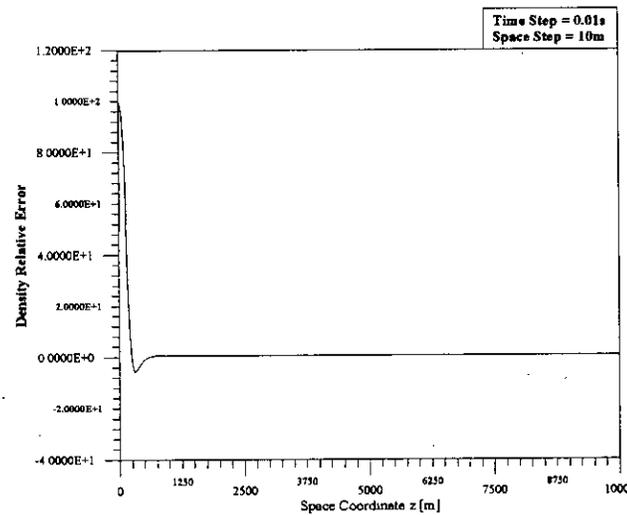


Figure 3e3: Temps de représentation  $t = 15s$

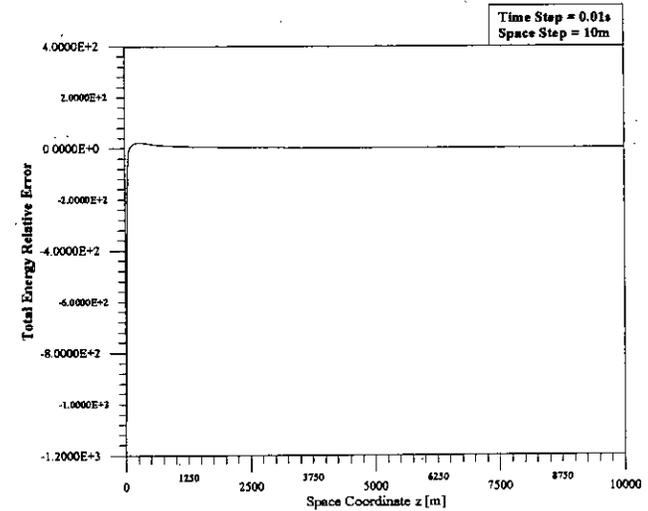
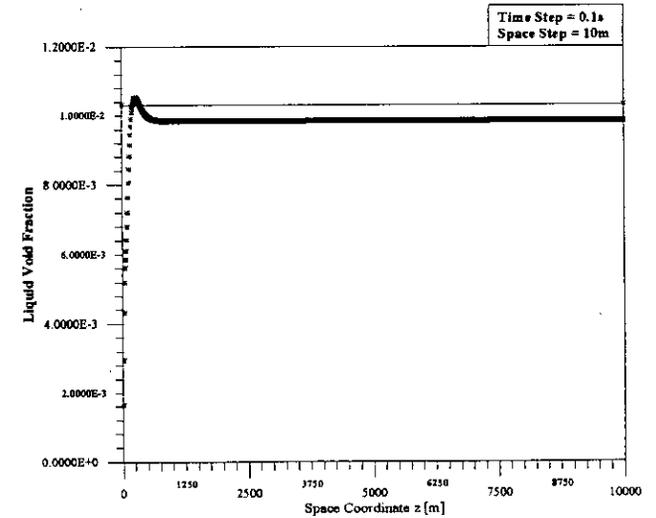
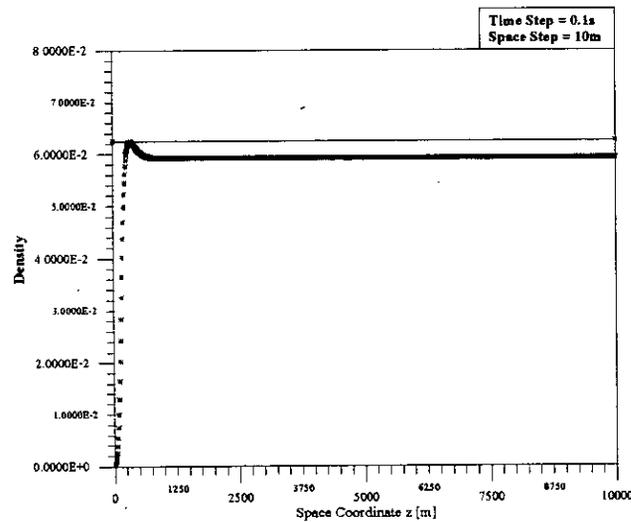
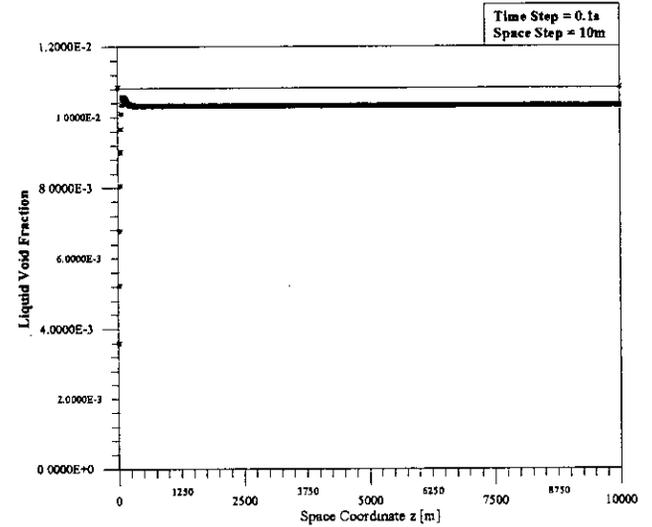
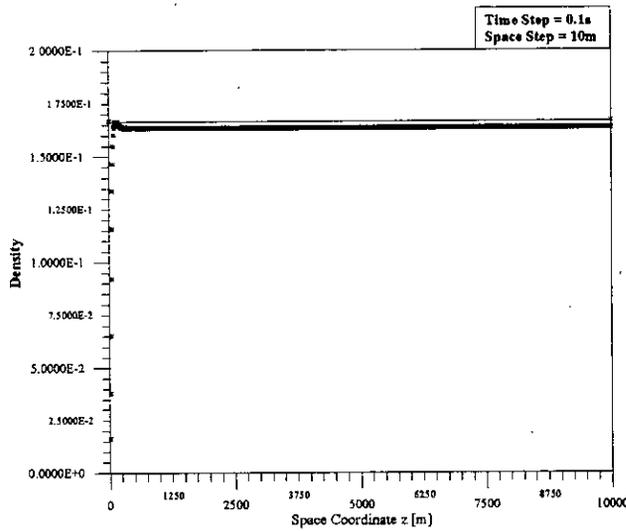
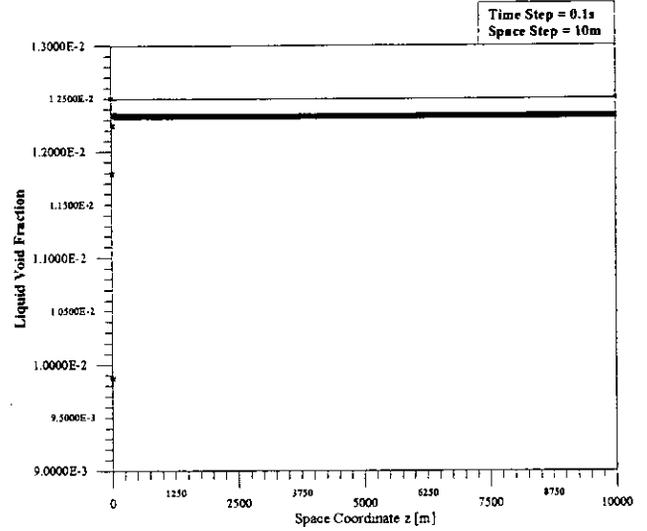
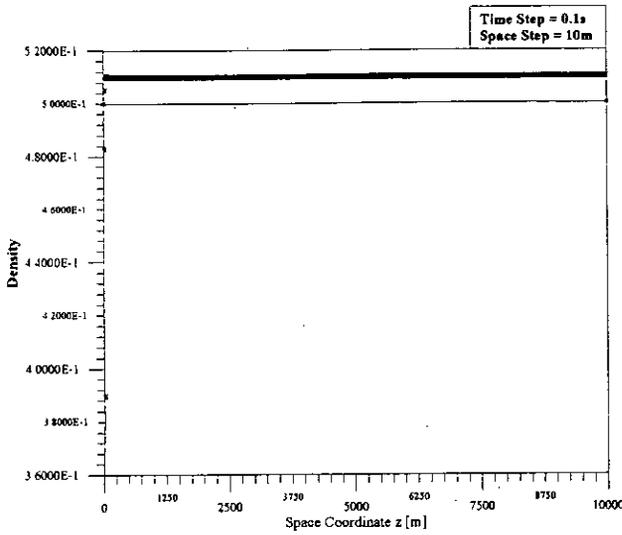


Figure 3f3: Temps de représentation  $t = 15s$



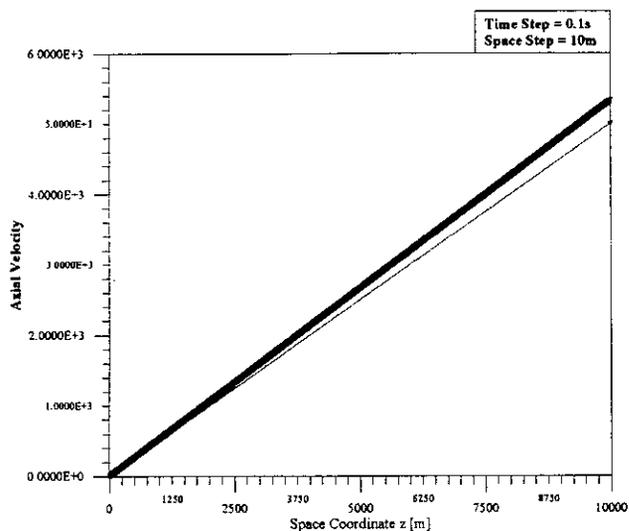


Figure 4c1: Temps de représentation  $t = 1s$

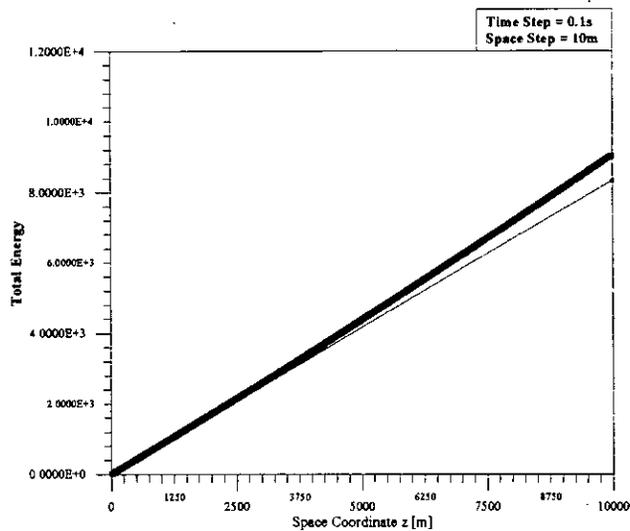


Figure 4d1: Temps de représentation  $t = 1s$

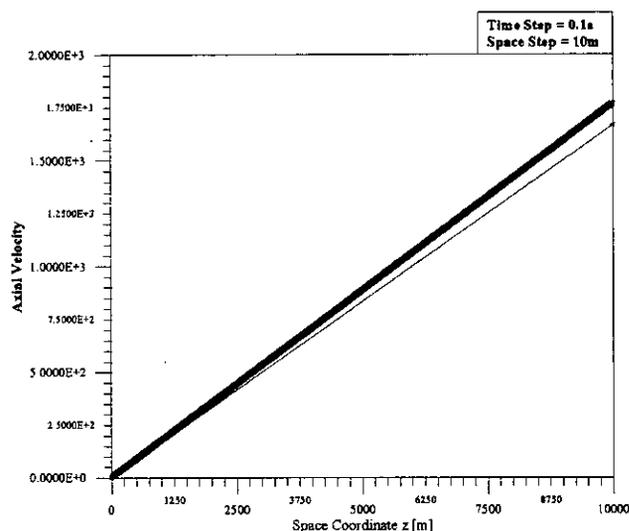


Figure 4c2: Temps de représentation  $t = 5s$

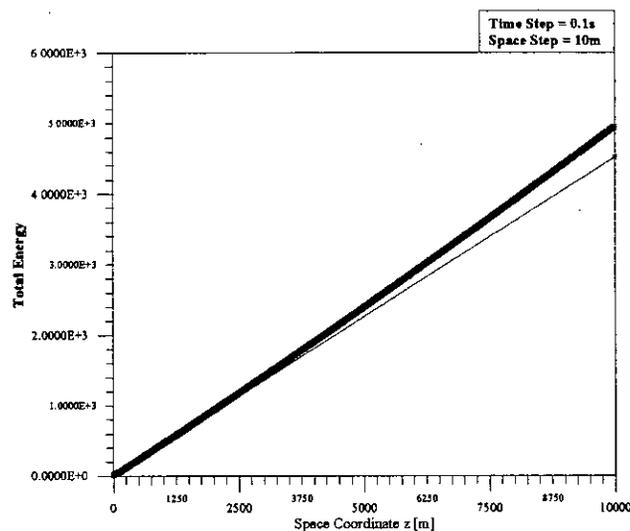


Figure 4d2: Temps de représentation  $t = 5s$

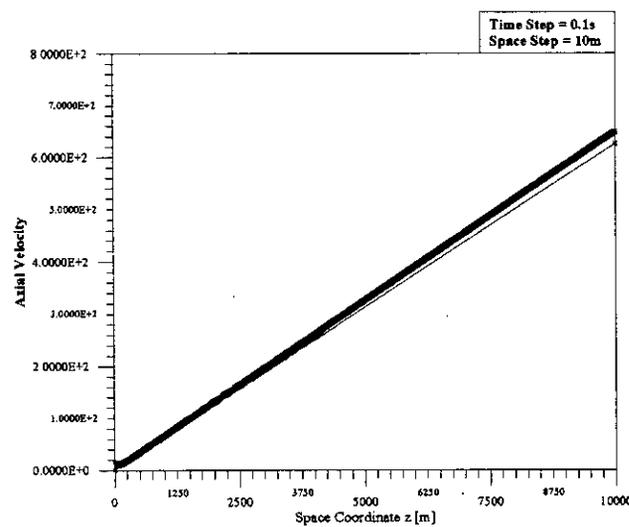


Figure 4c3: Temps de représentation  $t = 15s$

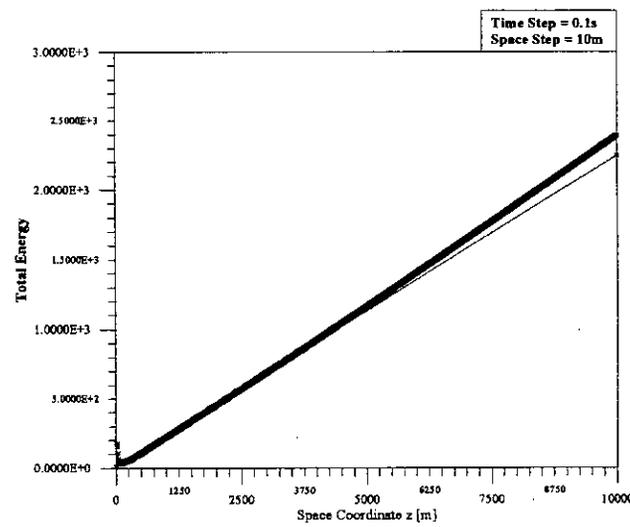
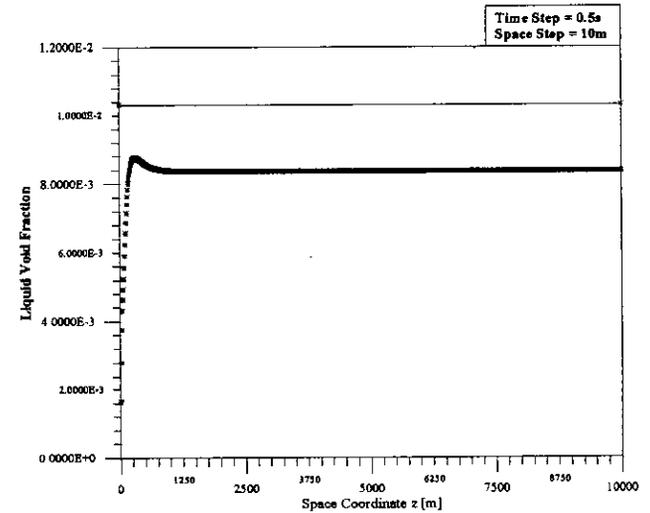
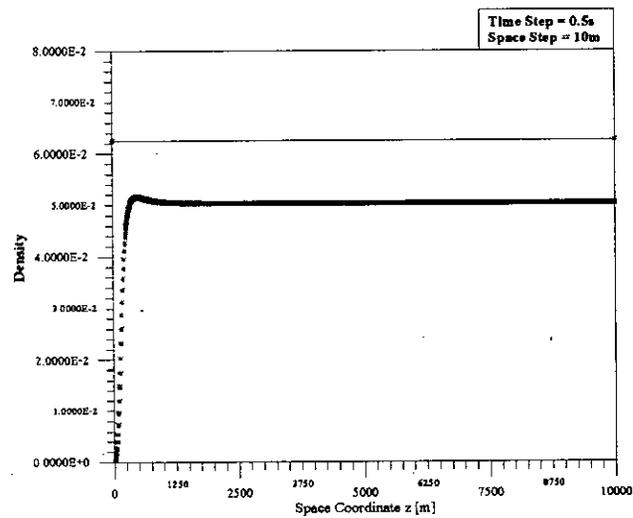
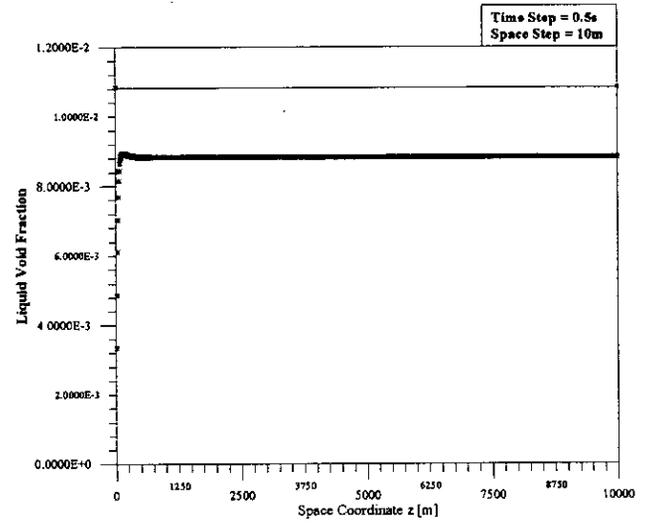
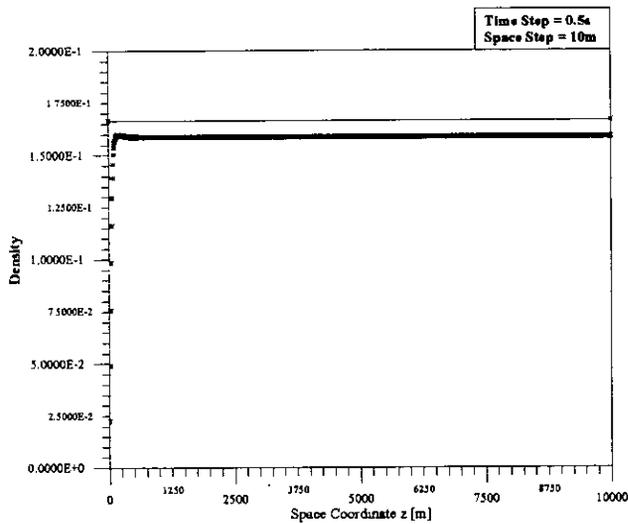
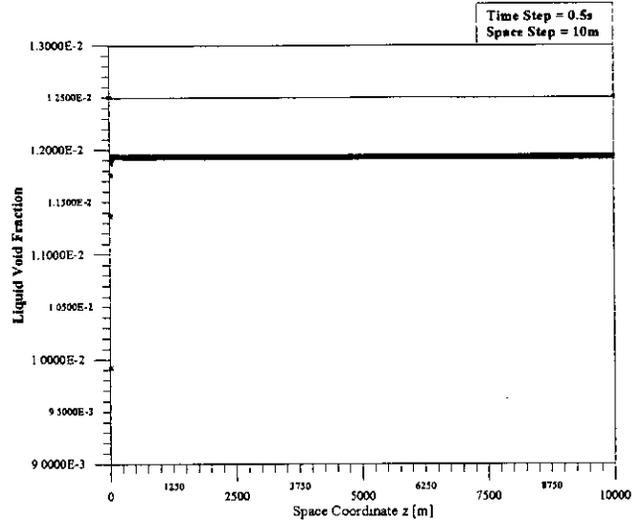
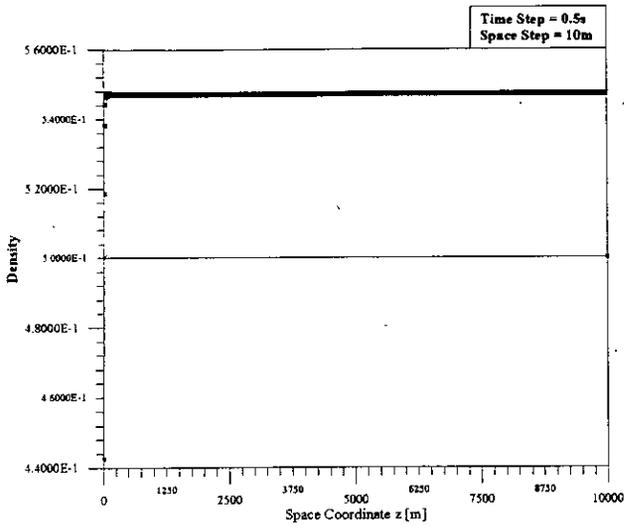
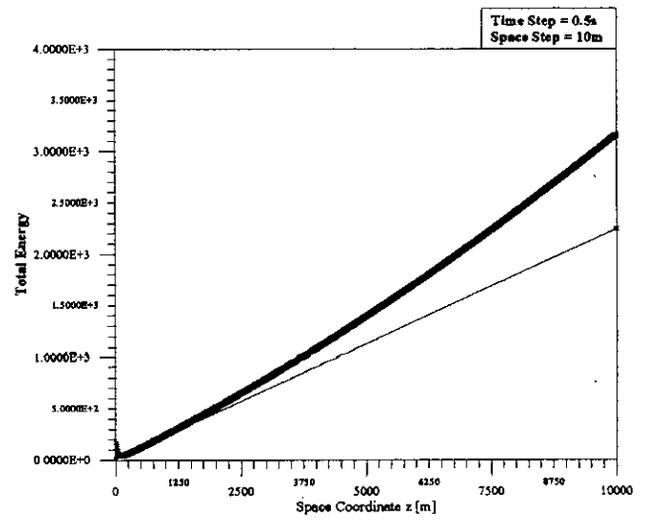
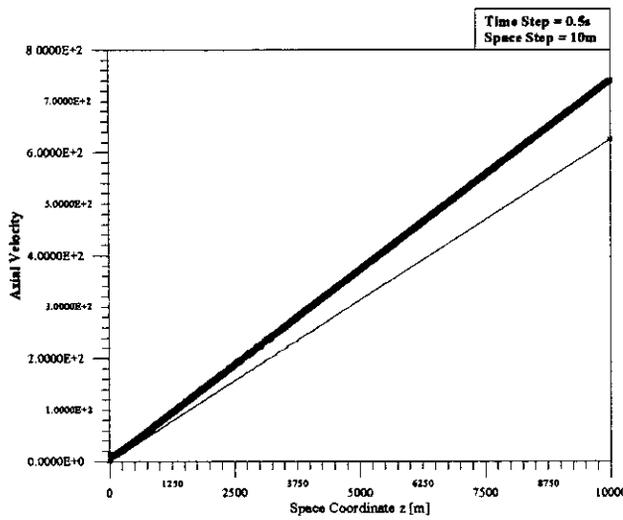
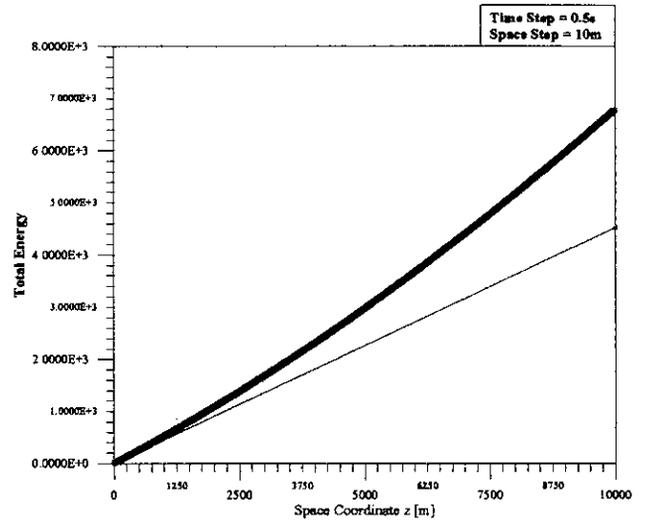
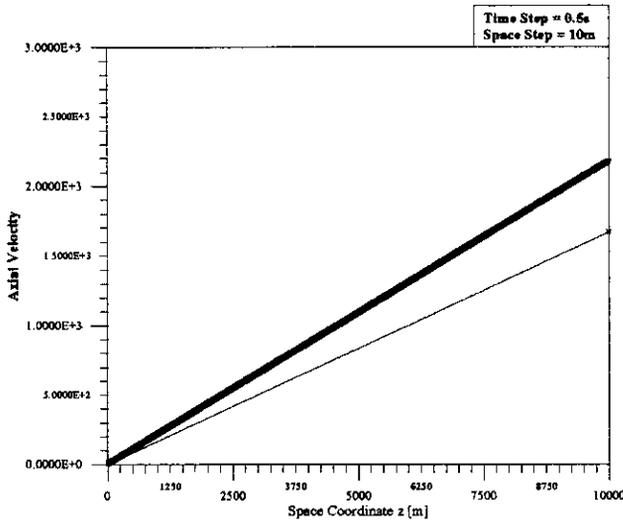
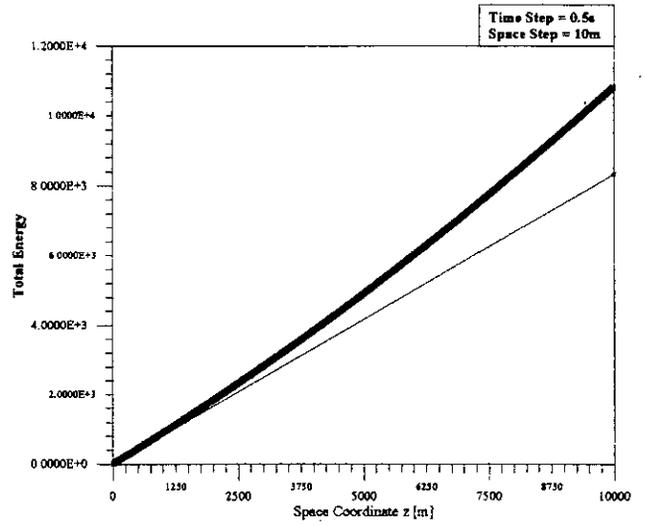
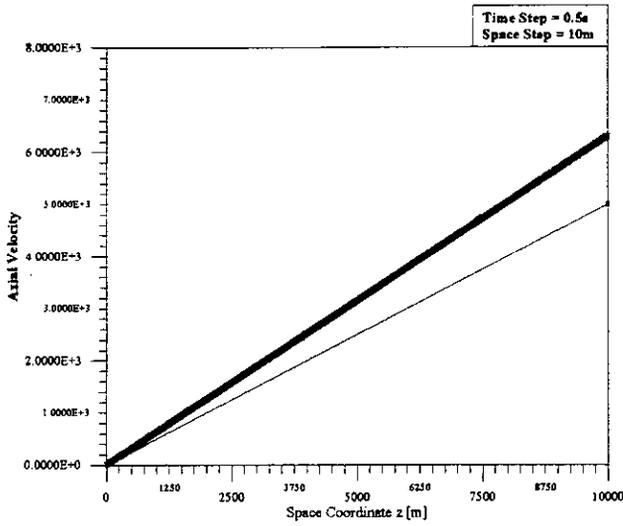


Figure 4d3: Temps de représentation  $t = 15s$





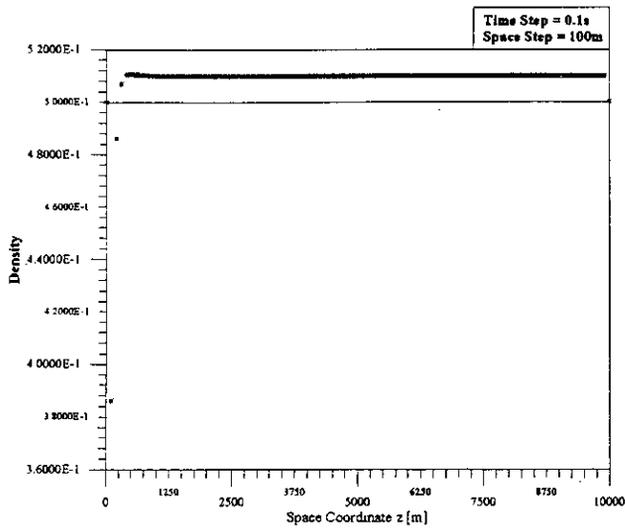


Figure 6a1: Temps de représentation  $t = 1s$

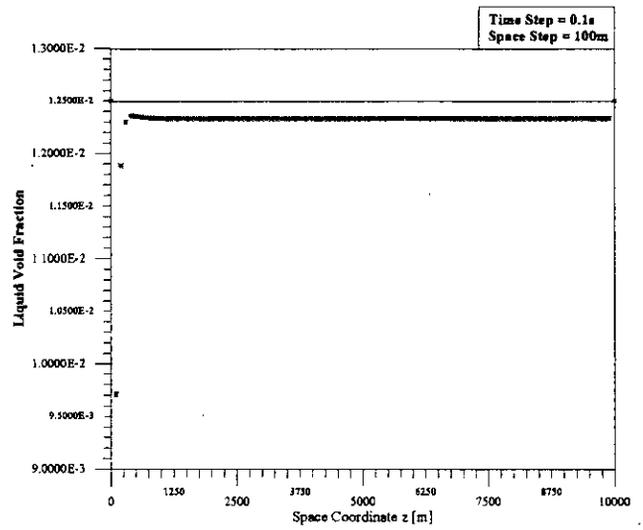


Figure 6b1: Temps de représentation  $t = 1s$

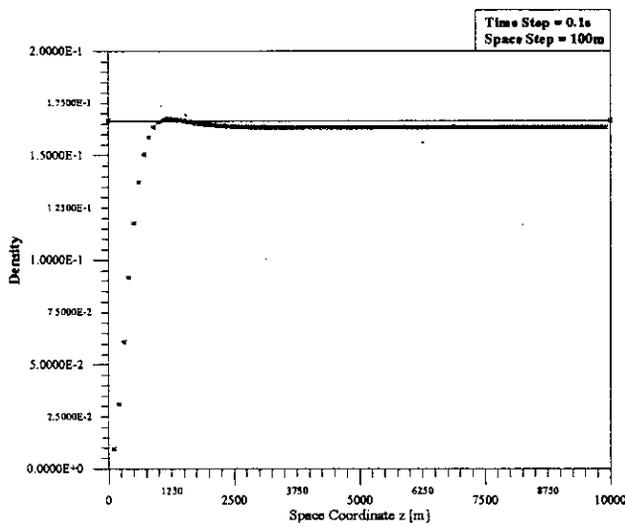


Figure 6a2: Temps de représentation  $t = 5s$

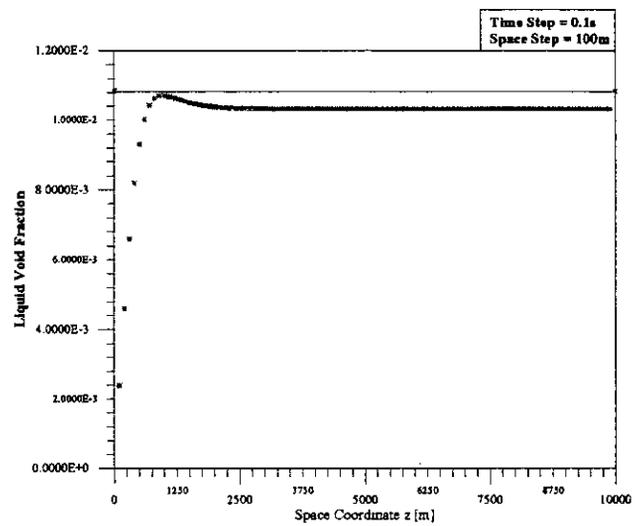


Figure 6b2: Temps de représentation  $t = 5s$

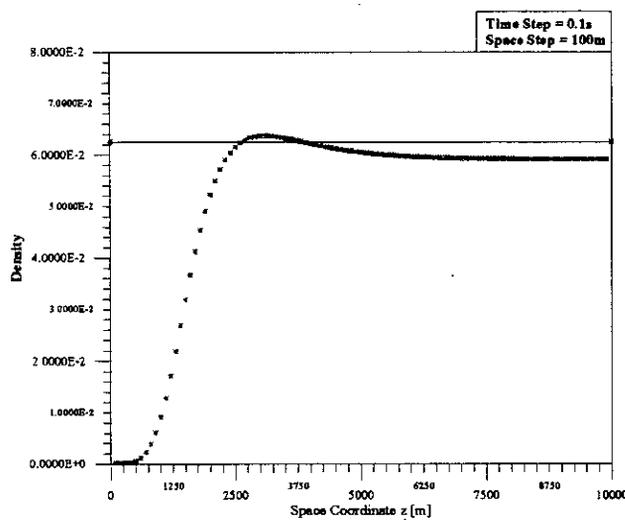


Figure 6a3: Temps de représentation  $t = 15s$

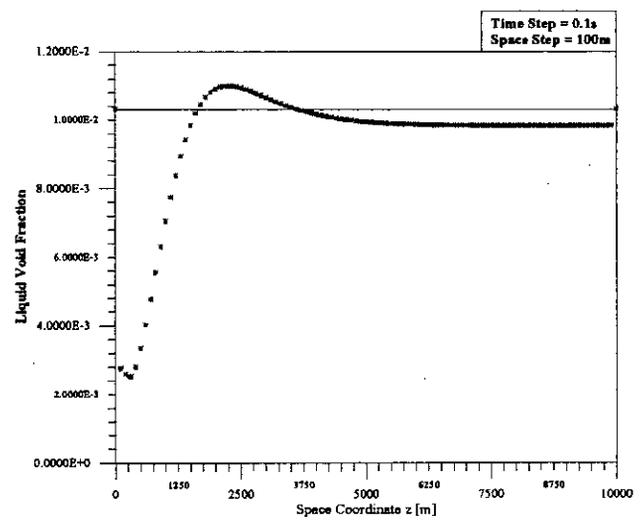
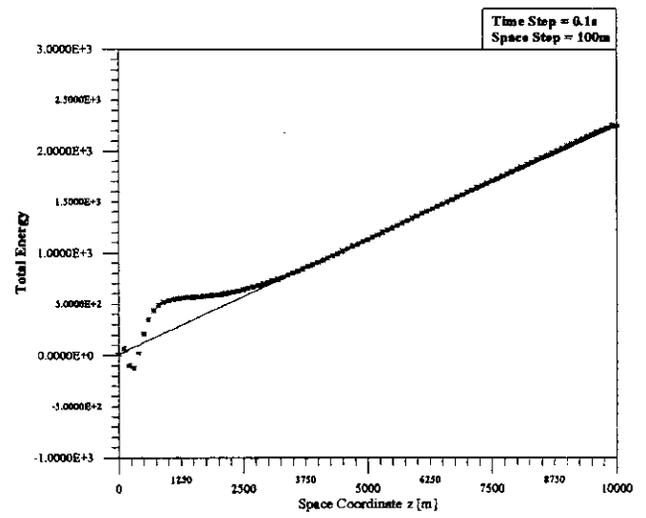
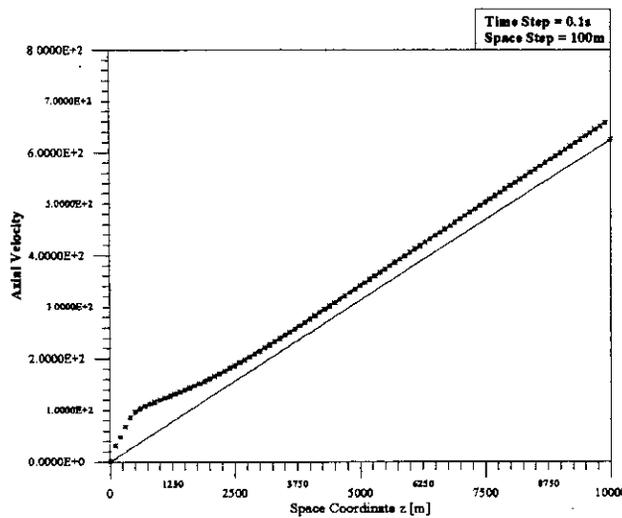
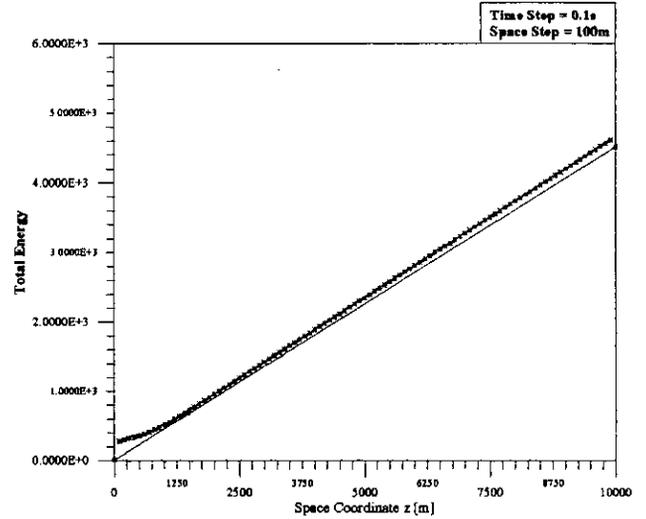
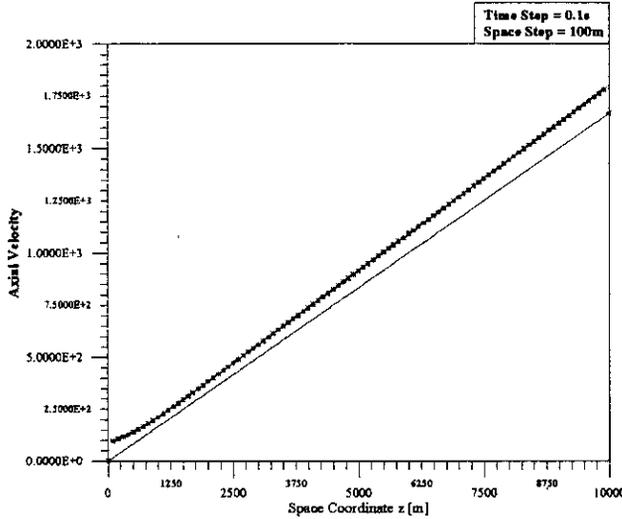
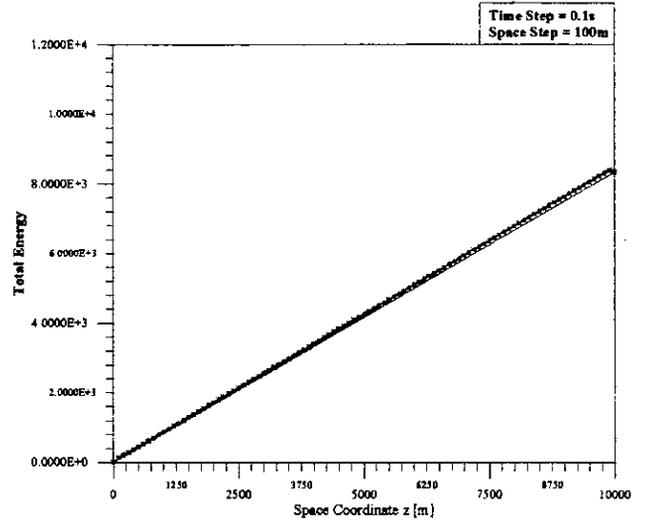
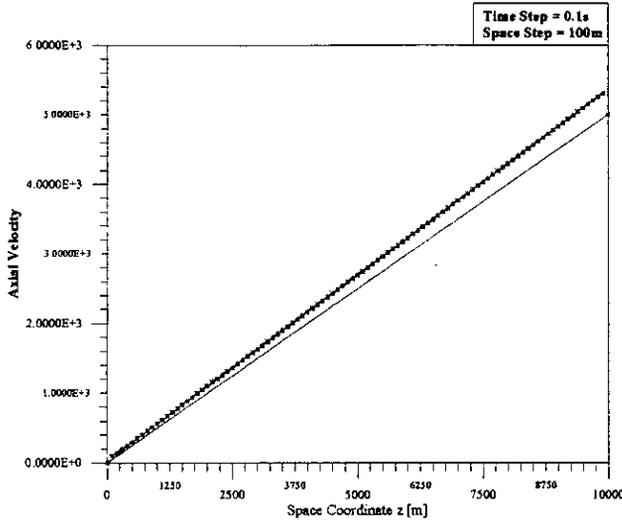
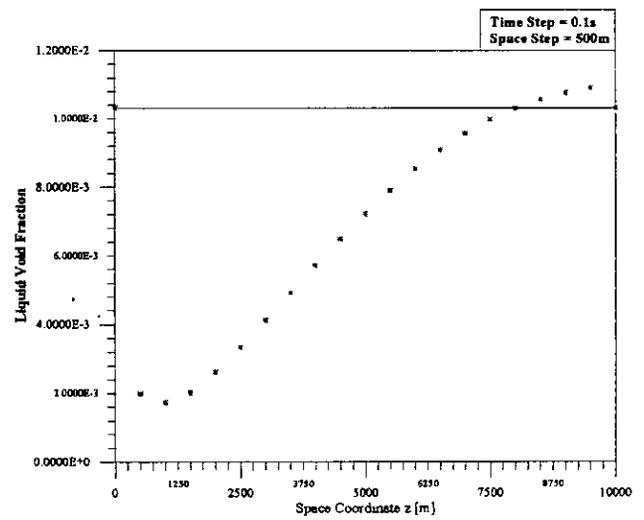
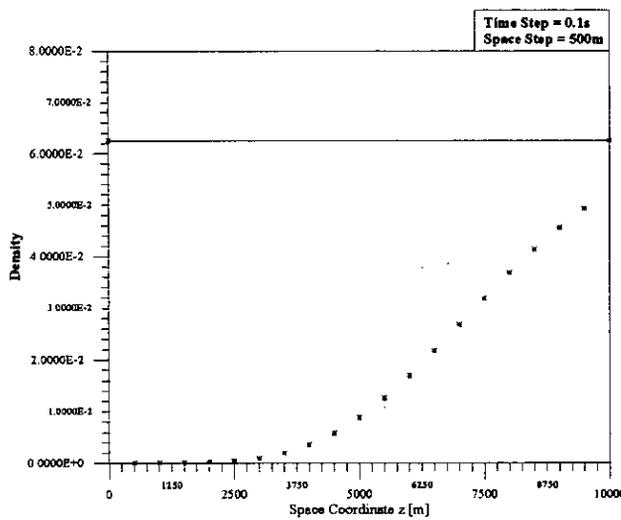
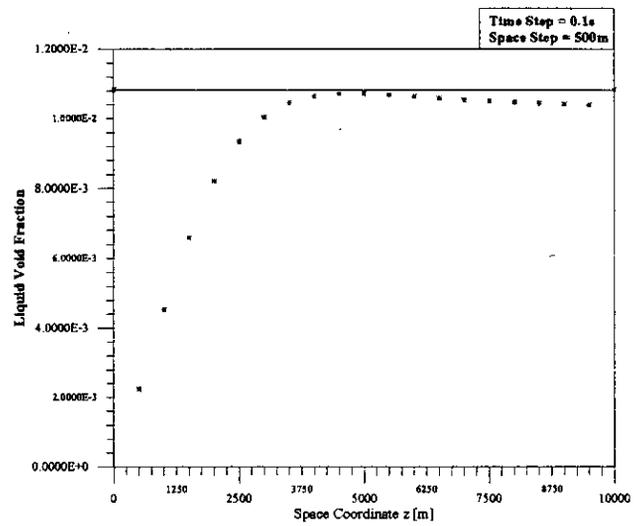
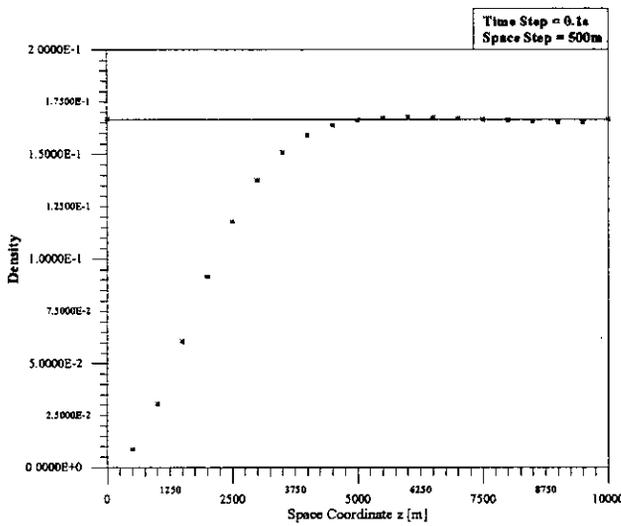
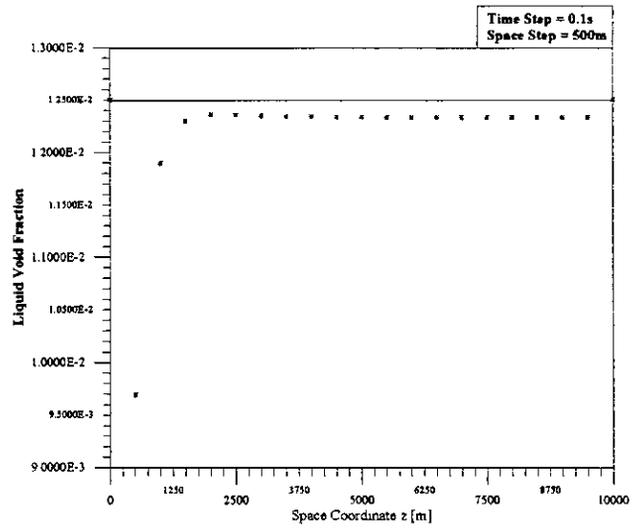
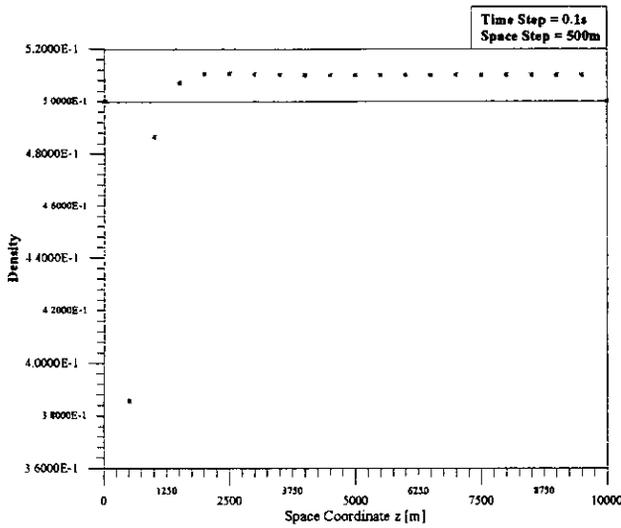
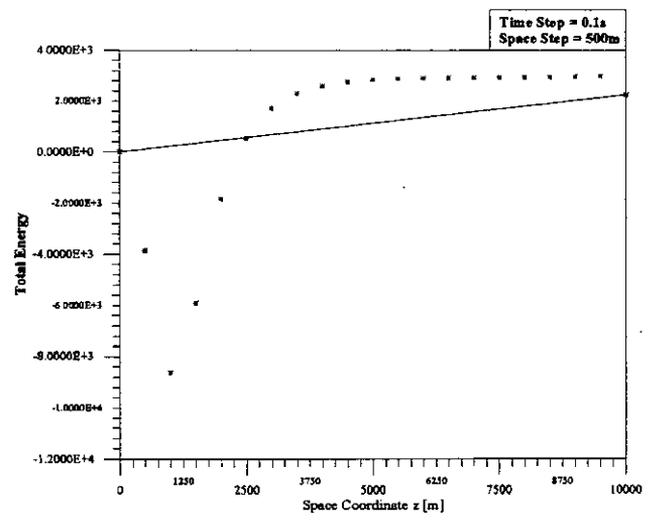
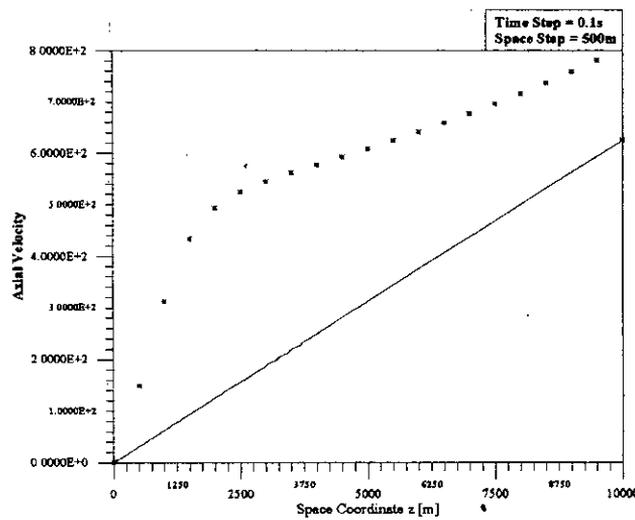
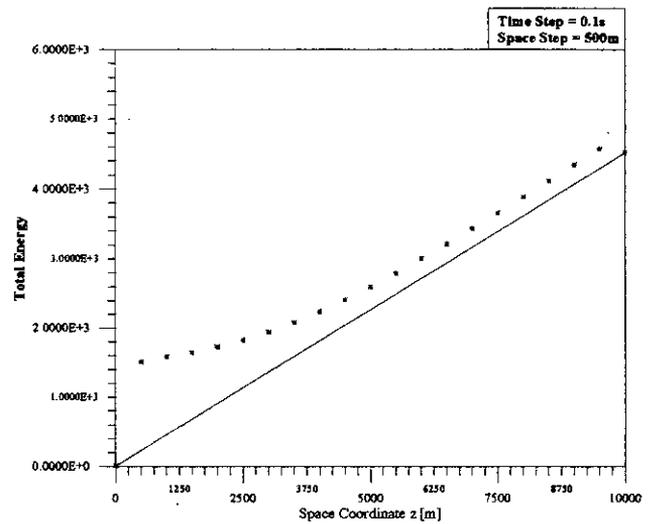
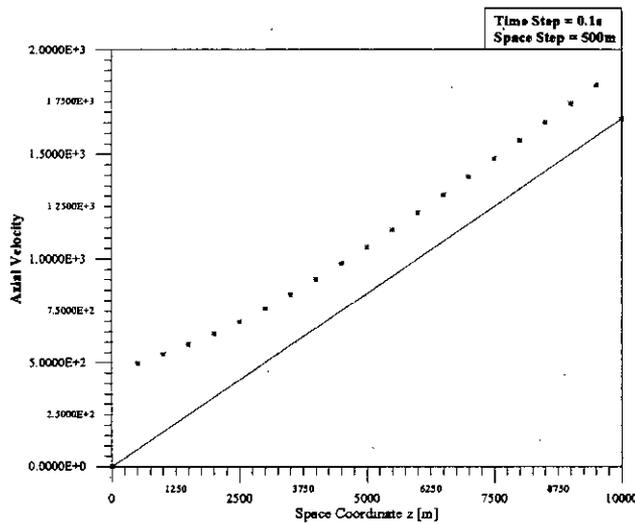
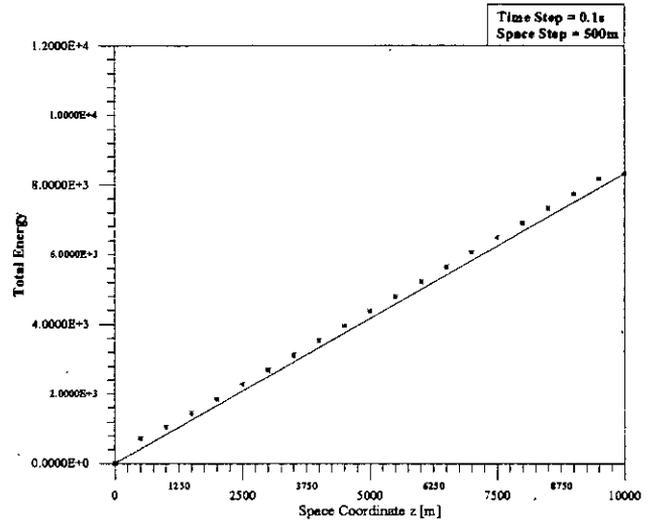
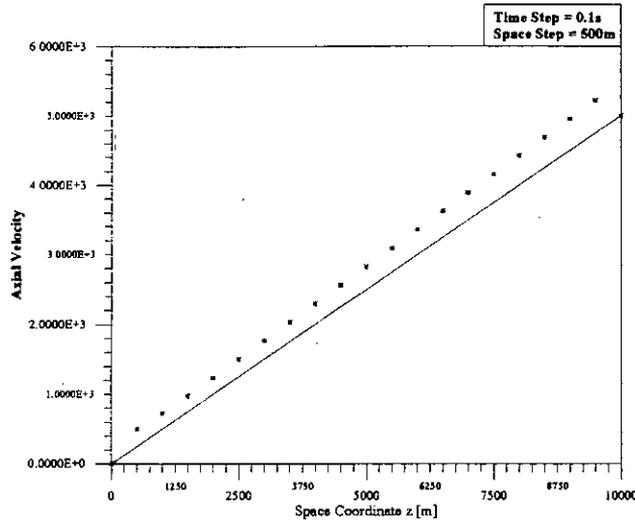


Figure 6b3: Temps de représentation  $t = 15s$







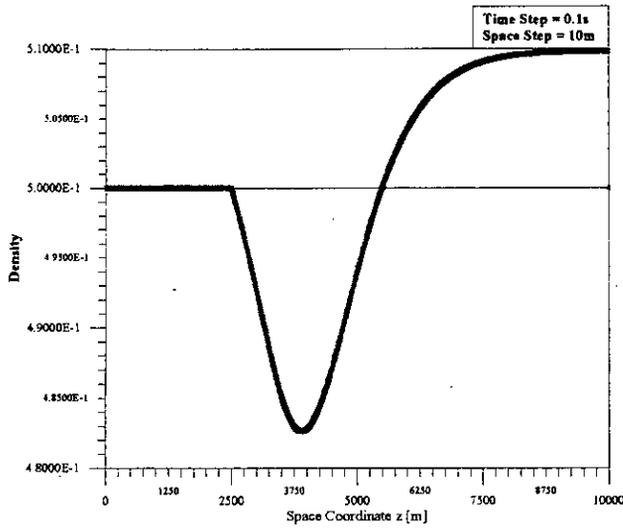


Figure 8a1: Temps de représentation  $t = 1s$

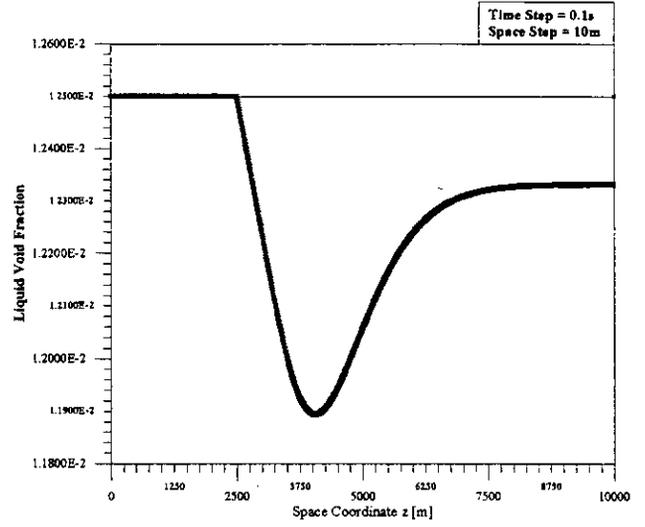


Figure 8b1: Temps de représentation  $t = 1s$

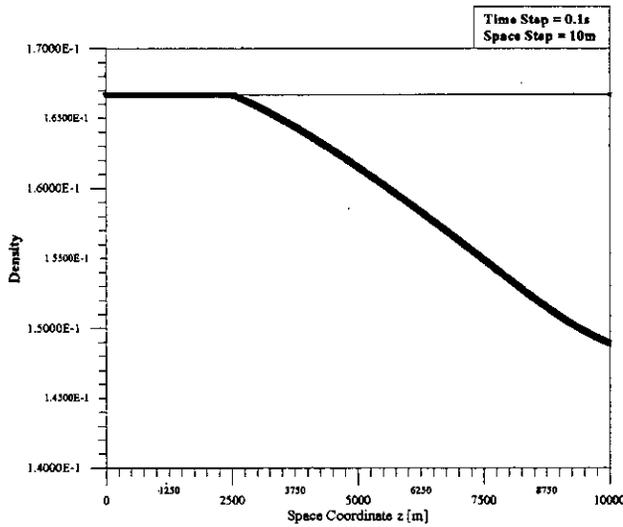


Figure 8a2: Temps de représentation  $t = 5s$

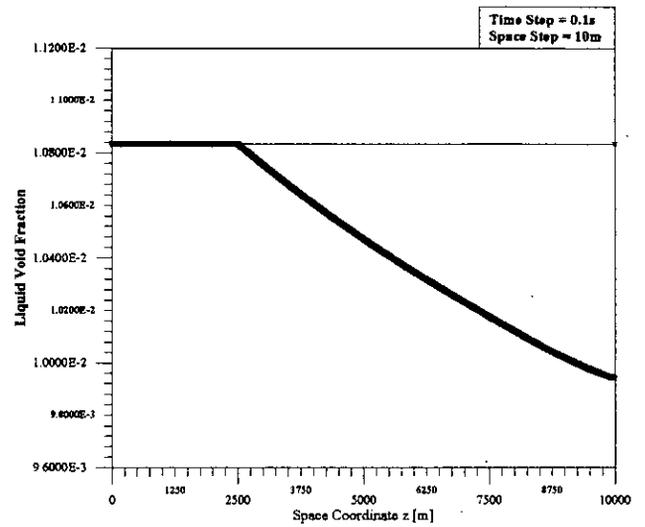


Figure 8b2: Temps de représentation  $t = 5s$

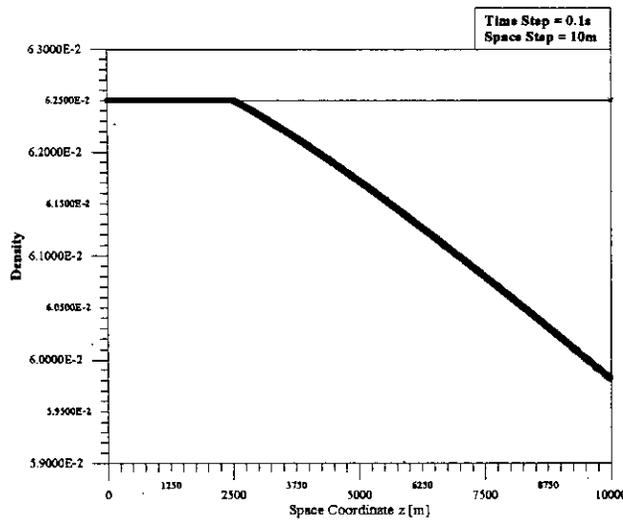


Figure 8a3: Temps de représentation  $t = 15s$

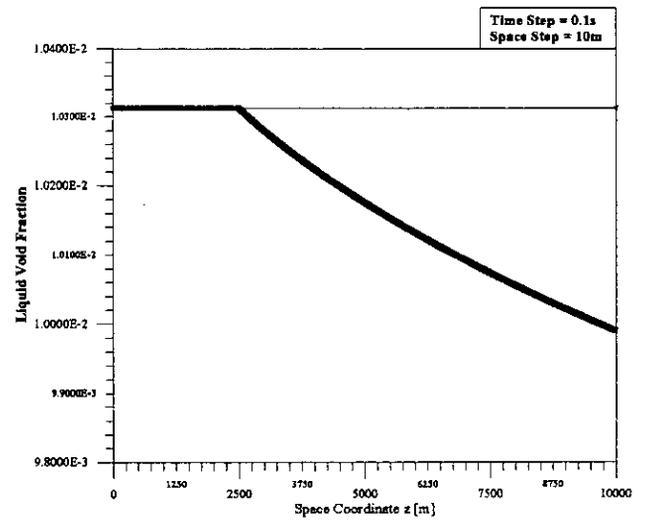


Figure 8b3: Temps de représentation  $t = 15s$

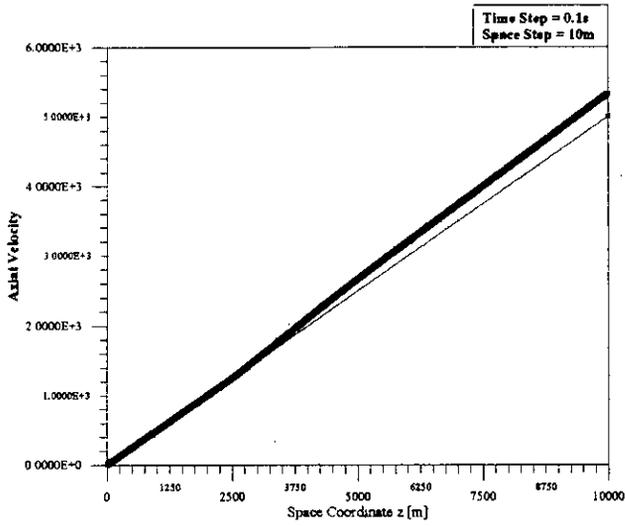


Figure 8c1: Temps de représentation t = 1s

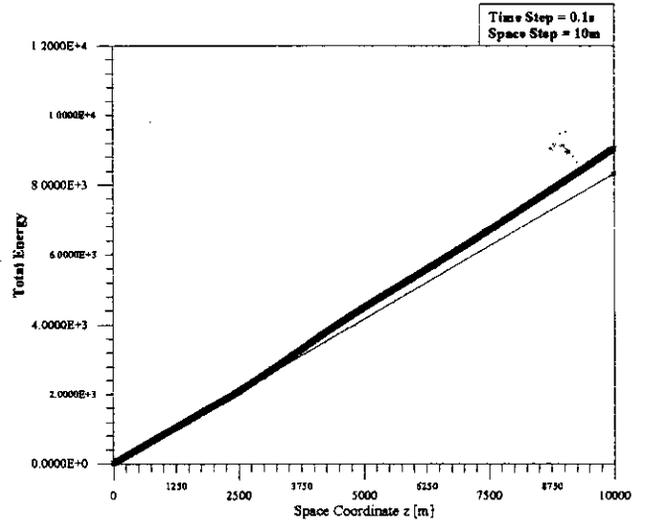


Figure 8d1: Temps de représentation t = 1s

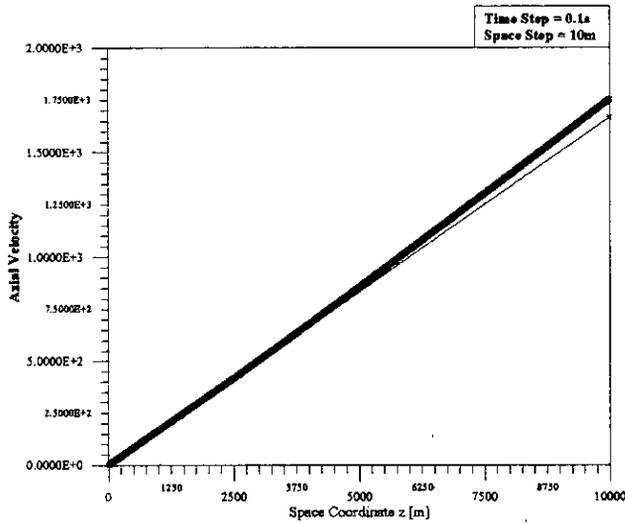


Figure 8c2: Temps de représentation t = 5s

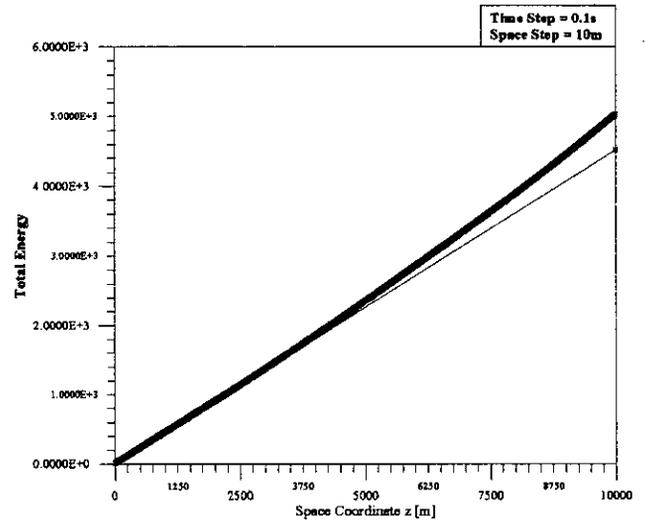


Figure 8d2: Temps de représentation t = 5s

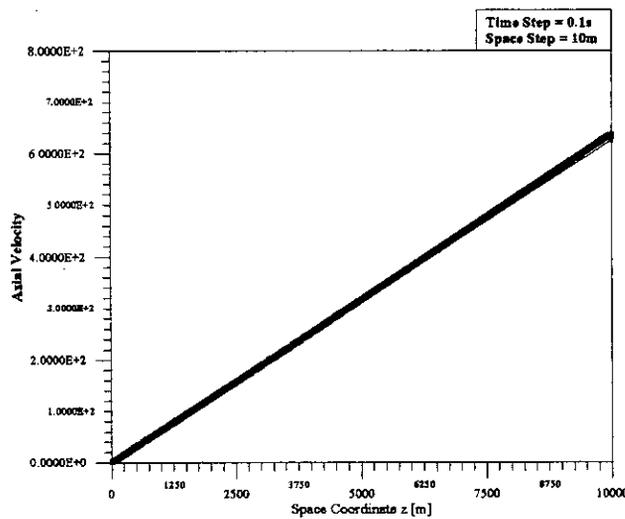


Figure 8c3: Temps de représentation t = 15s

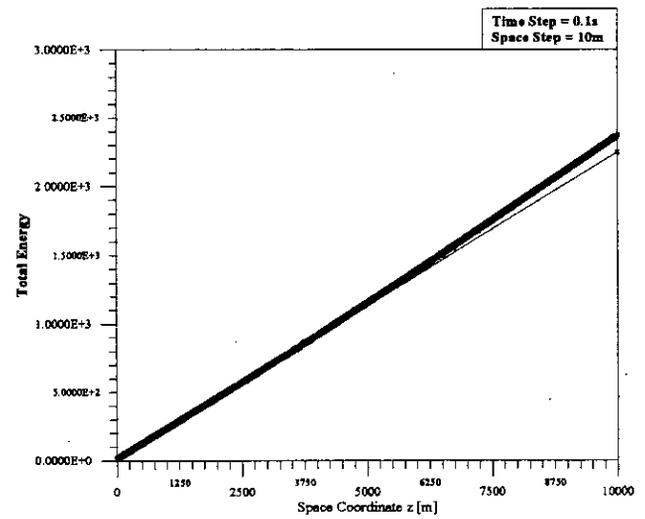


Figure 8d3: Temps de représentation t = 15s

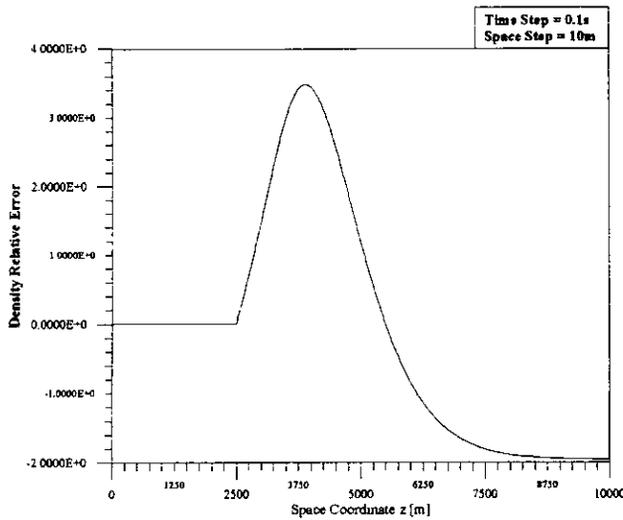


Figure 8e1: Temps de représentation  $t = 1s$

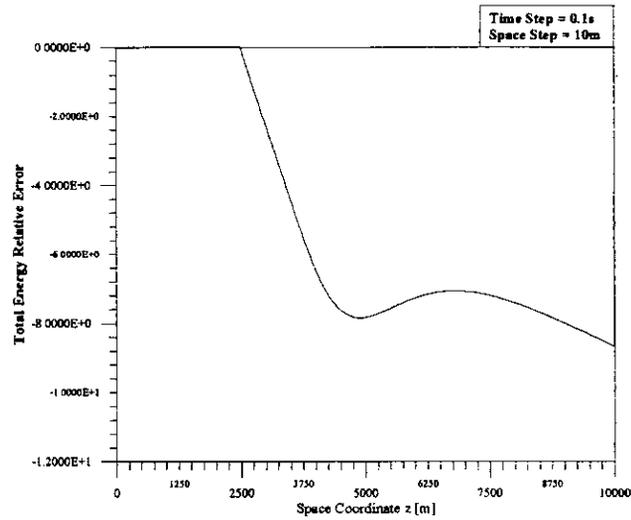


Figure 8f1: Temps de représentation  $t = 1s$

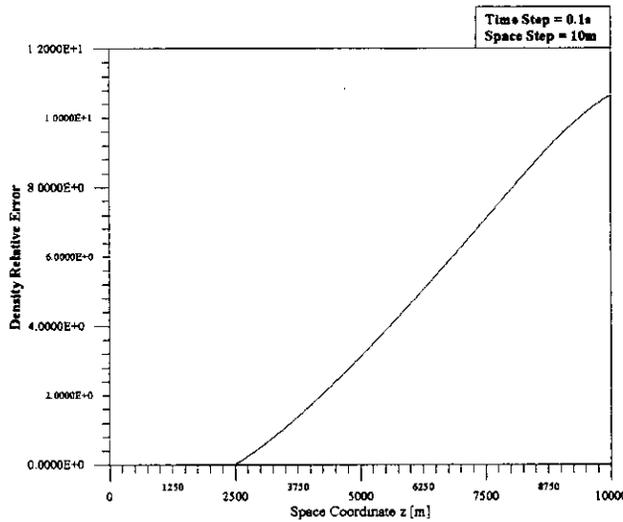


Figure 8e2: Temps de représentation  $t = 5s$

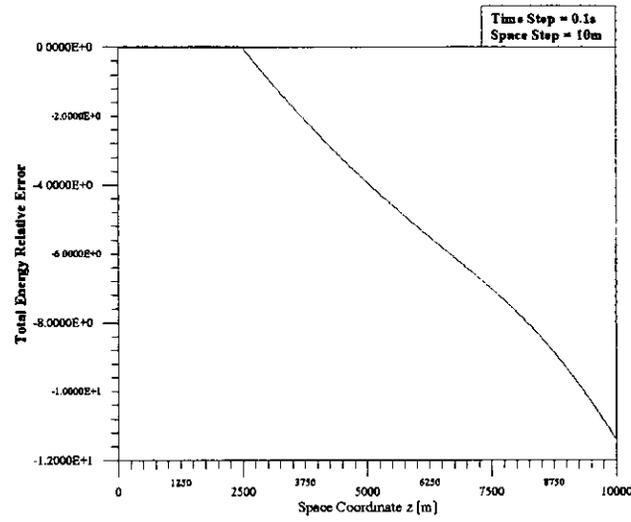


Figure 8f2: Temps de représentation  $t = 5s$

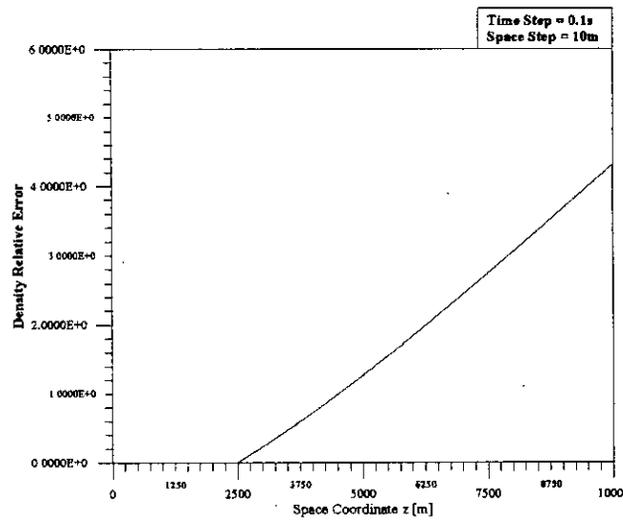


Figure 8e3: Temps de représentation  $t = 15s$

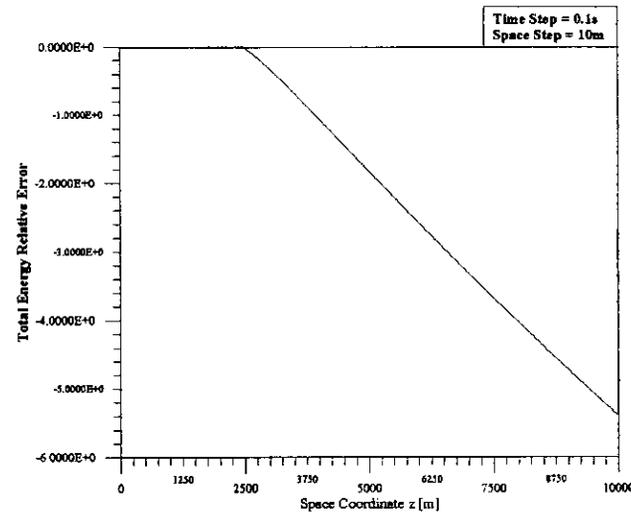
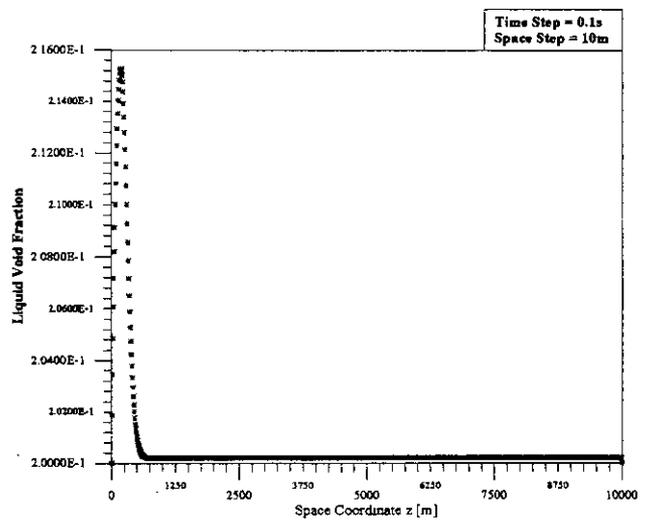
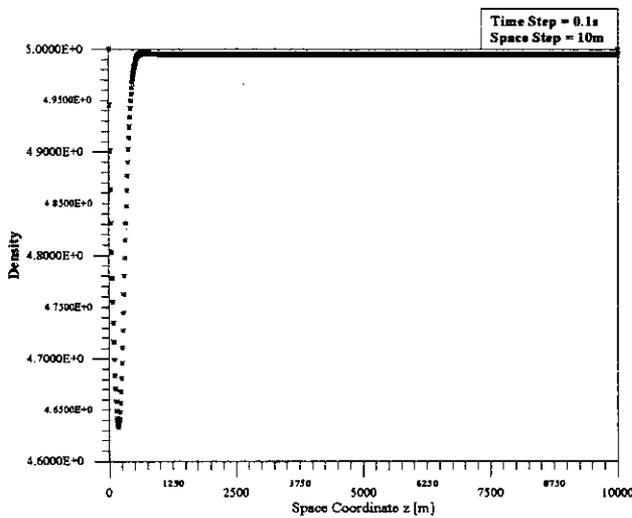
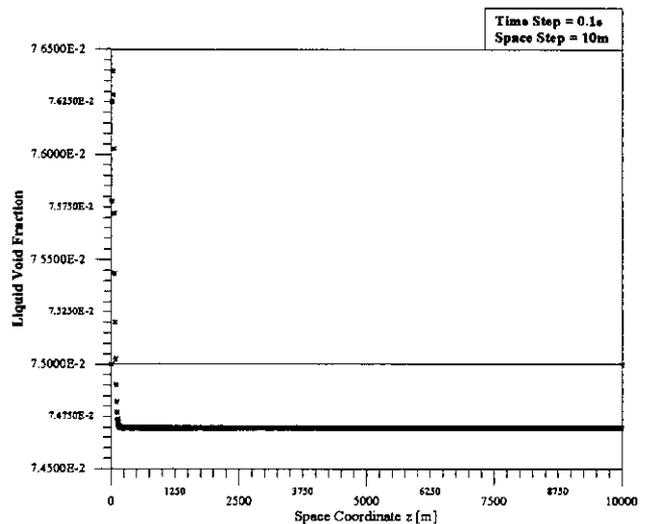
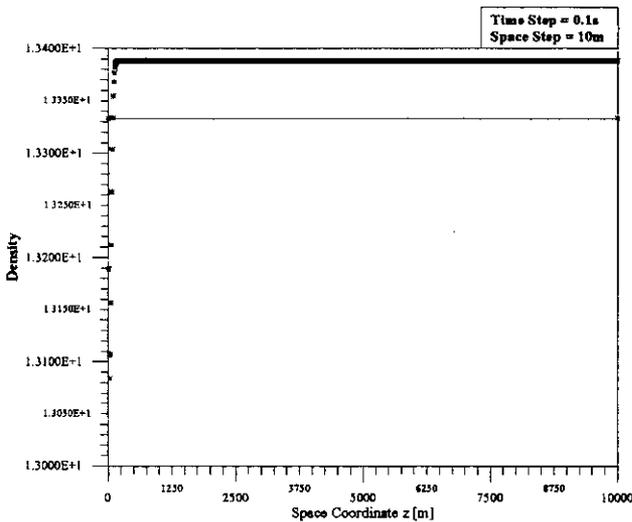
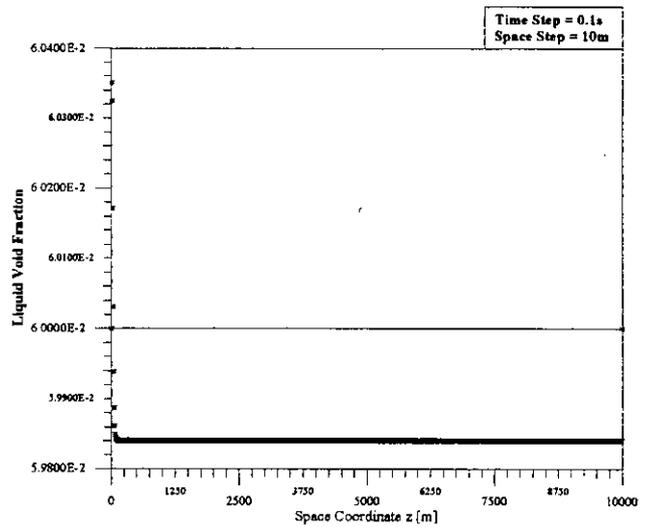
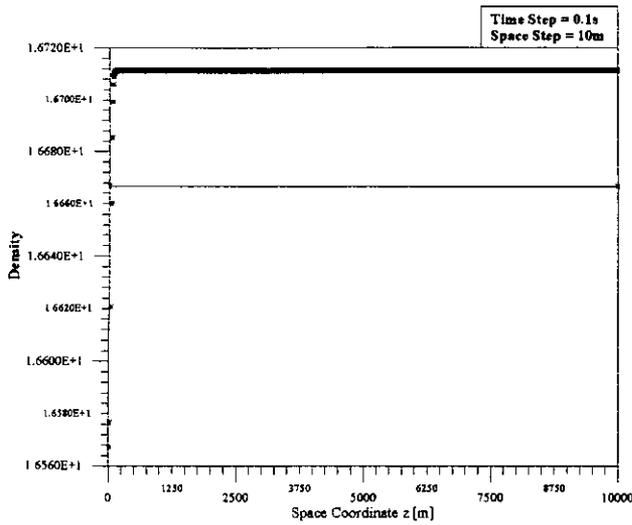


Figure 8f3: Temps de représentation  $t = 15s$



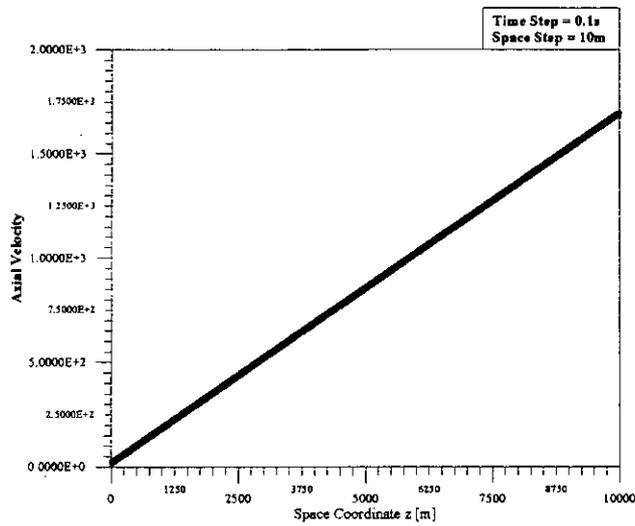


Figure 9c1: Temps de représentation  $t = 1s$

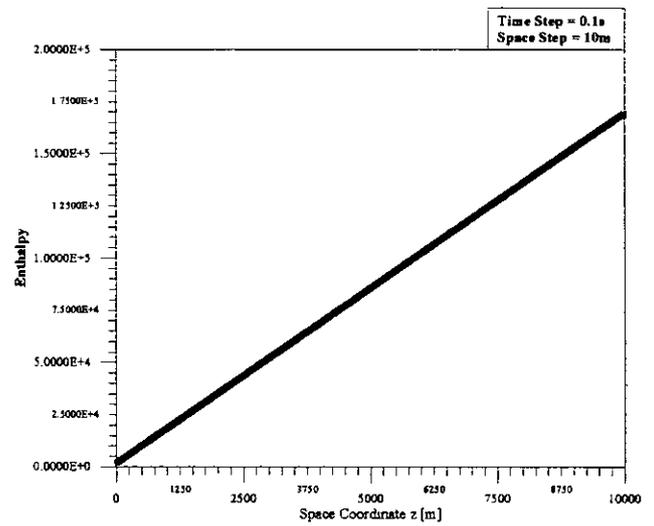


Figure 9d1: Temps de représentation  $t = 1s$

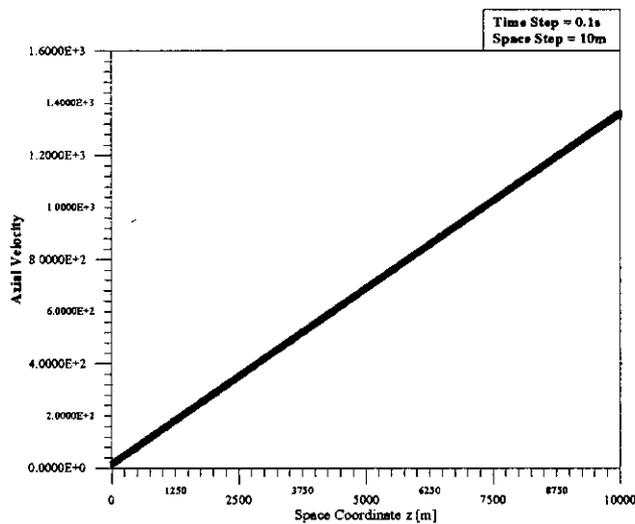


Figure 9c2: Temps de représentation  $t = 5s$

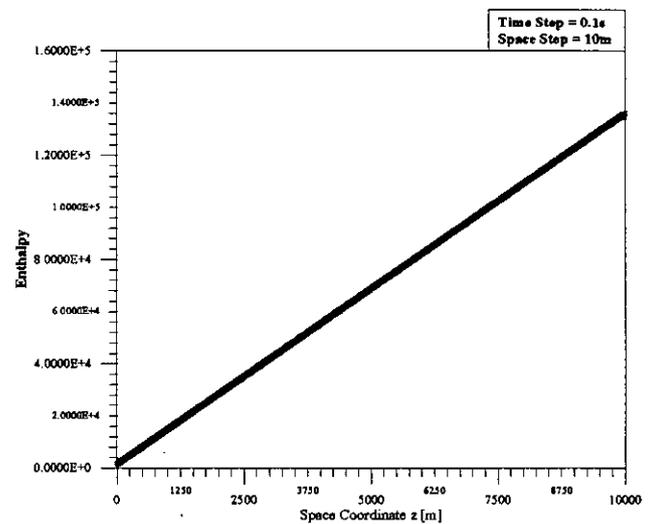


Figure 9d2: Temps de représentation  $t = 5s$

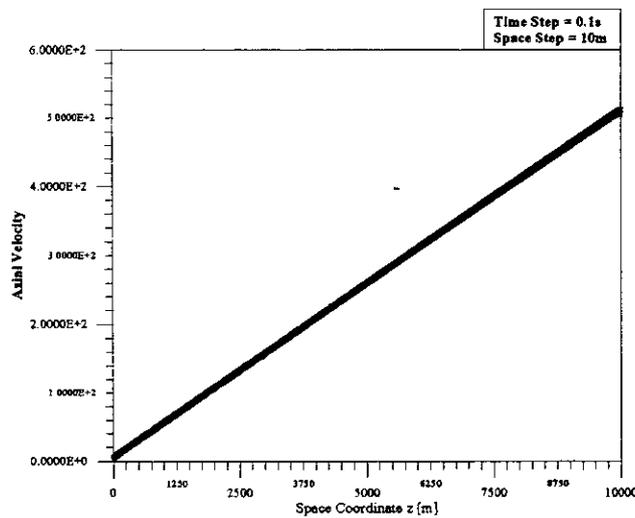


Figure 9c3: Temps de représentation  $t = 15s$

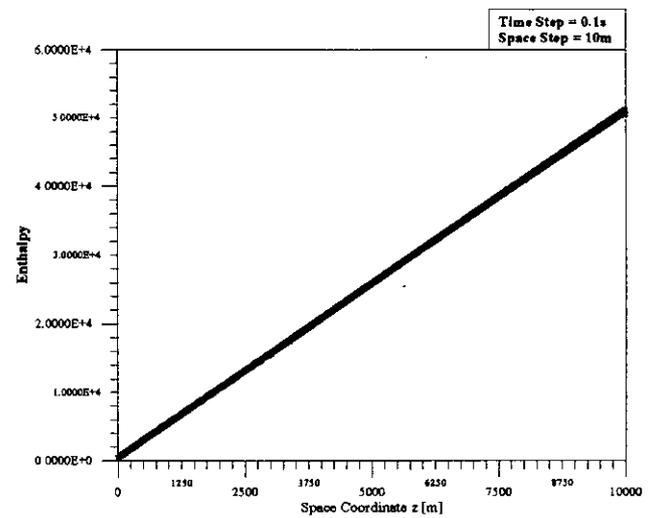


Figure 9d3: Temps de représentation  $t = 15s$

### 3.2 Schéma IBS

"Implicit Backward Space" est un schéma totalement décentré (cf. Fig. 10). Ce type de schémas est connu pour être généralement plus stable que les schémas centrés. Nous l'avons construit en vue d'atténuer l'effet de l'instabilité du schéma IBFS sans avoir à augmenter l'ordre du schéma. IBS correspond aux approximations suivantes:

Pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  de  $(t, z)$ , les dérivées premières et mixtes sont données au point  $(t^{n+1}, z_k)$  comme suit:

$$\partial_z f(t^{n+1}, z_k) = \frac{1}{\Delta z} (f_k^{n+1} - f_{k-1}^{n+1}) + O(\Delta z) \tag{III.15}$$

$$\partial_z (f \partial_z g)(t^{n+1}, z_k) = \frac{1}{\Delta z} \left( f_k^{n+1} \left( \frac{g_k^{n+1} - g_{k-1}^{n+1}}{\Delta z} \right) - f_{k-1}^{n+1} \left( \frac{g_{k-1}^{n+1} - g_{k-2}^{n+1}}{\Delta z} \right) \right) + O(\Delta z) \tag{III.15)_i}$$

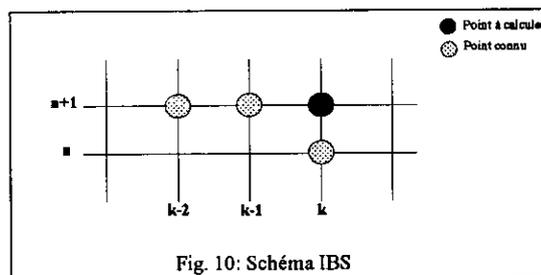


Fig. 10: Schéma IBS

Le schéma IBS présente les caractéristiques suivantes:

- Les différences finies sont d'ordre 1 en espace.
- Le schéma est complètement décentré.
- Le schéma n'est pas auto-démarrant. En effet, le calcul au point  $(n + 1, 2)$  nécessite la connaissance des valeurs au point  $(n + 1, 1)$ . Nous devons donc soit imposer une condition supplémentaire (sur les gradients par exemple) ou utiliser un schéma de démarrage. Les valeurs au point  $(n + 1, 0)$  sont quant à elles données comme condition d'entrée.
- Le schéma ne nécessite aucune condition de sortie.

#### Teste 5

Les conditions de calcul sont les suivantes:

$$\Delta t = 0.5s ; \Delta z = 10 \quad (\text{cf. Fig. 11}).$$

$$\Delta t = 0.1s ; \Delta z = 10 \quad (\text{cf. Fig. 12}).$$

$$\Delta t = 0.1s ; \Delta z = 100 \quad (\text{cf. Fig. 13}).$$

Par ailleurs, nous présentons dans la figure 14, le comportement en 3D de l'écoulement en début de conduite dans le cas où:

$$(\Delta t, \Delta z) = (0.01s, 10m)$$

Les résultats du problème en enthalpie sont représentés seulement pour les valeurs  $\Delta t = 0.1s$  et  $\Delta z = 10 m$  (cf. Fig. 15) car nous retrouvons exactement les mêmes comportements.

#### Commentaire

Au vue des résultats obtenus il apparaît que:

- Les mêmes phénomènes rencontrés dans le cas du schéma IBFS réapparaissent pour le schéma IBS. Il n'y a donc pas d'atténuation de l'instabilité en entrée.
- Les erreurs relatives pour la densité, le taux de présence du liquide et la vitesse sont comparables. Par contre, l'erreur relative pour l'énergie totale est nettement réduite.

Par ailleurs, au vu des différents tests effectués, le choix de la condition supplémentaire en entrée n'influe pas sur le reste des calculs.

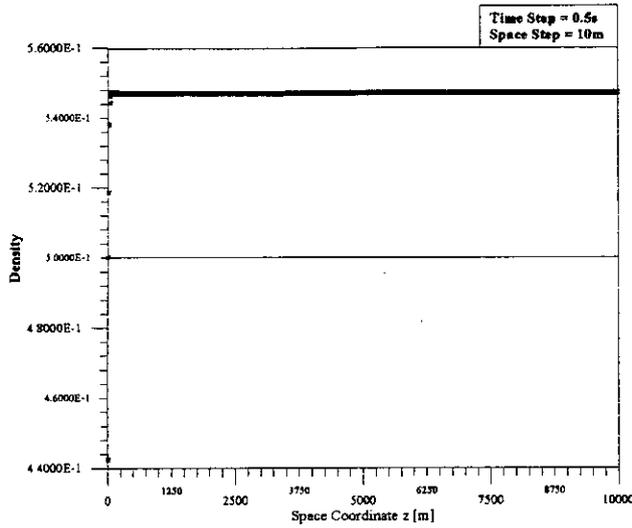


Figure 11a1: Temps de représentation t = 1s

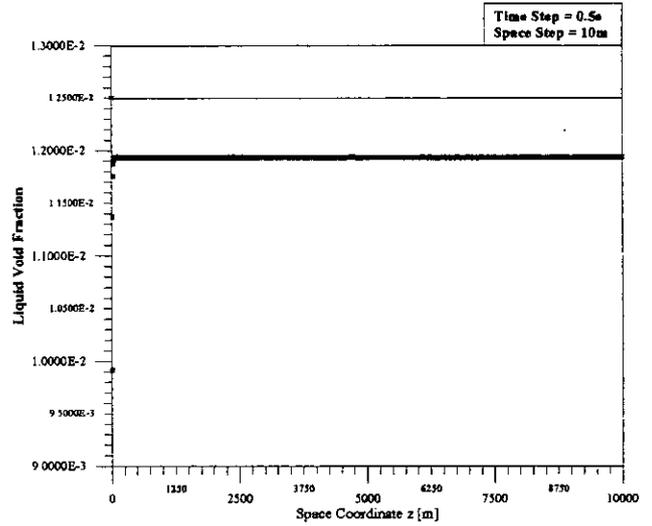


Figure 11b1: Temps de représentation t = 1s

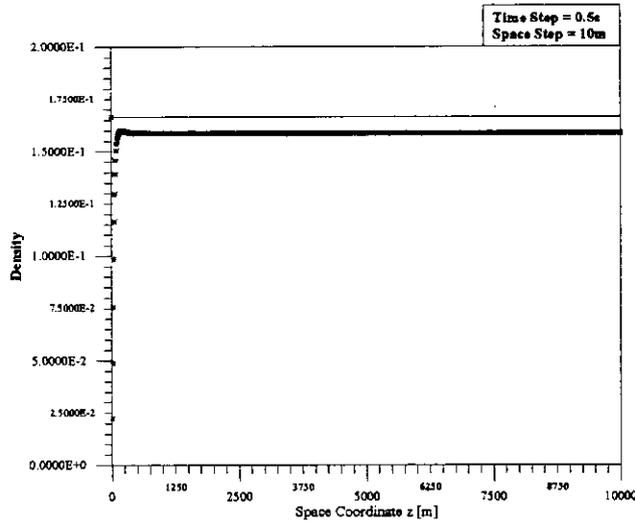


Figure 11a2: Temps de représentation t = 5s

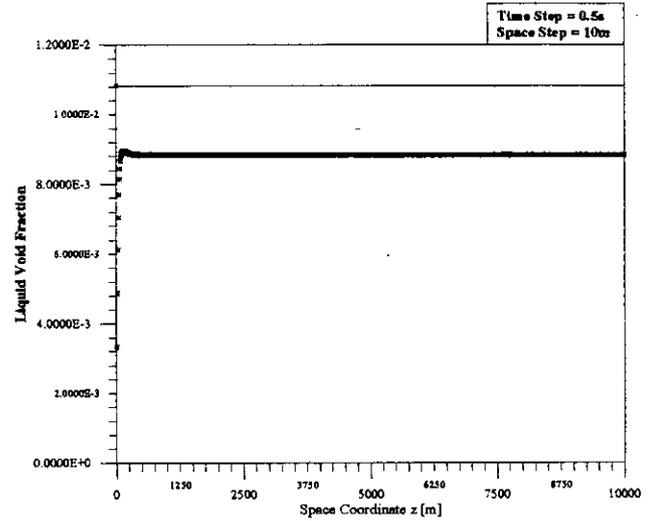


Figure 11b2: Temps de représentation t = 5s

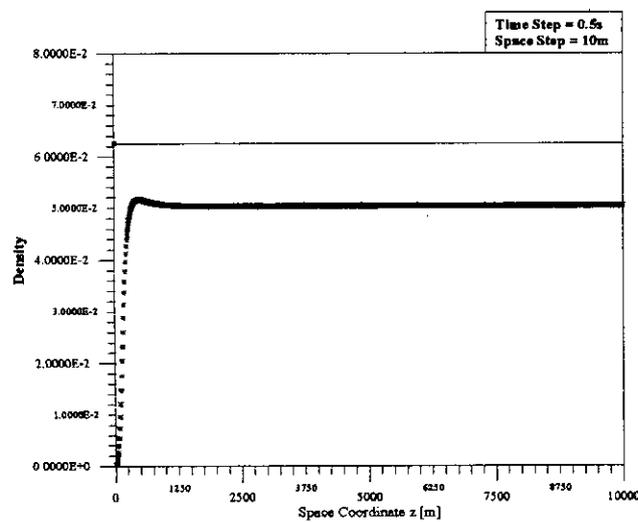


Figure 11a3: Temps de représentation t = 15s

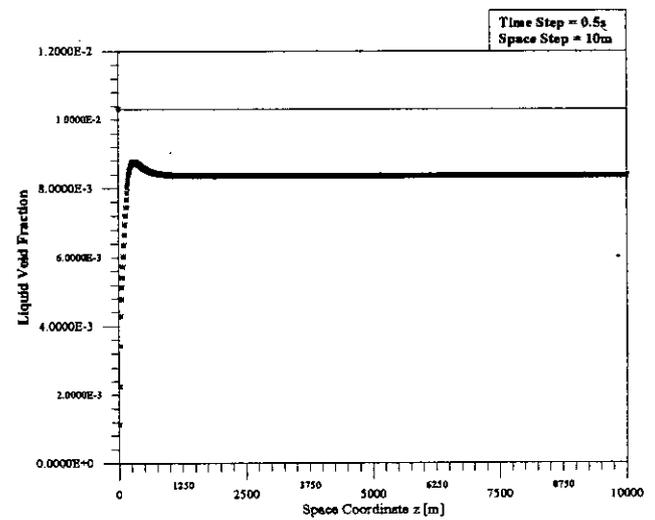


Figure 11b3: Temps de représentation t = 15s

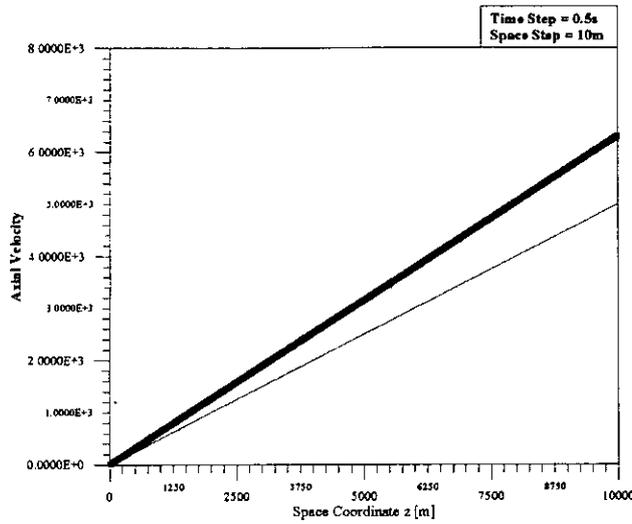


Figure 11c1: Temps de représentation  $t = 1s$

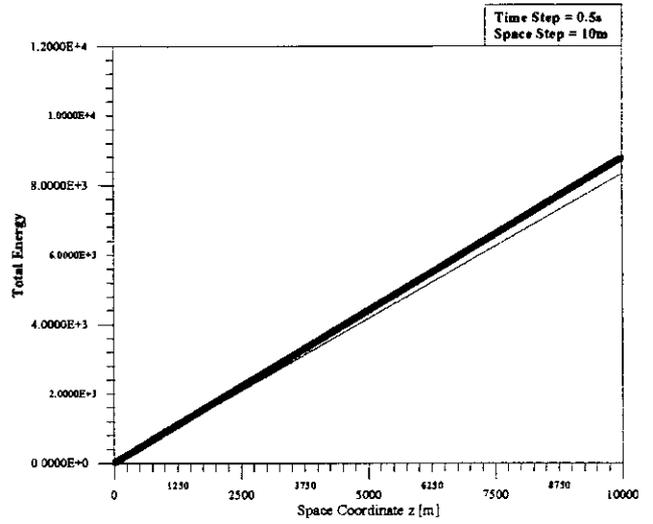


Figure 11d1: Temps de représentation  $t = 1s$

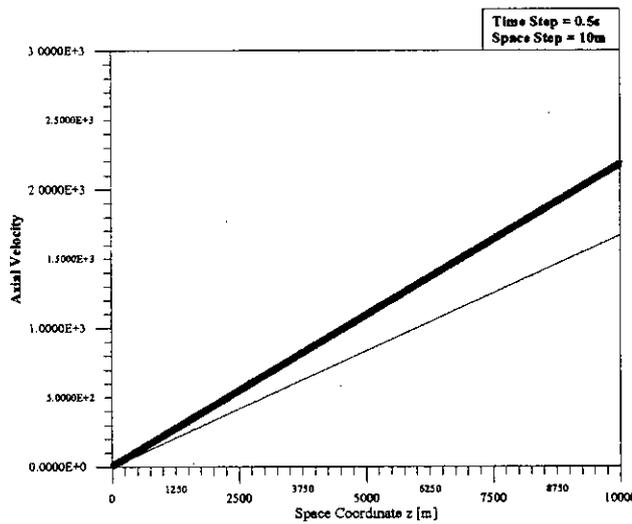


Figure 11c2: Temps de représentation  $t = 5s$

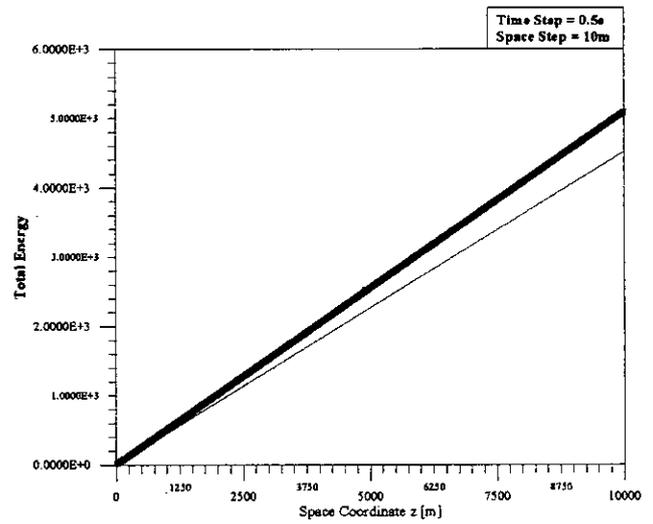


Figure 11d2: Temps de représentation  $t = 5s$

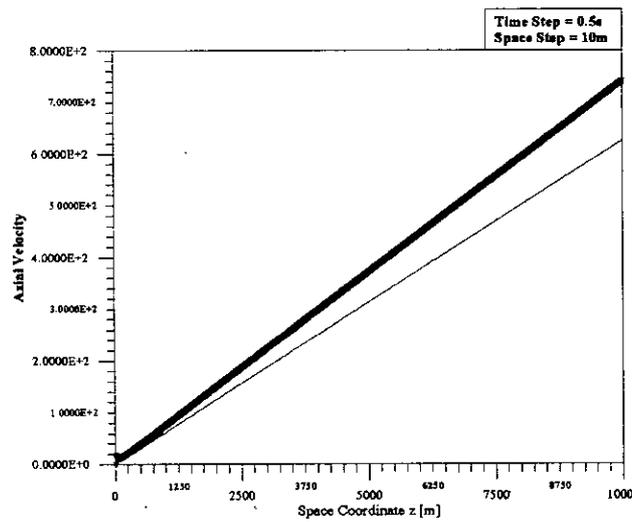


Figure 11c3: Temps de représentation  $t = 15s$

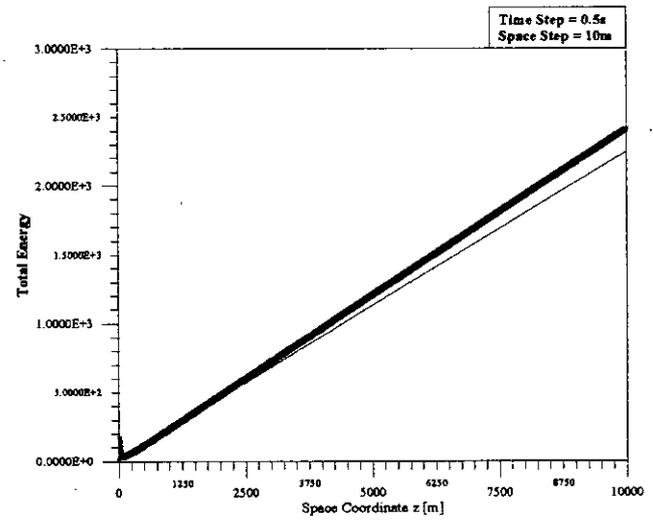


Figure 11d3: Temps de représentation  $t = 15s$

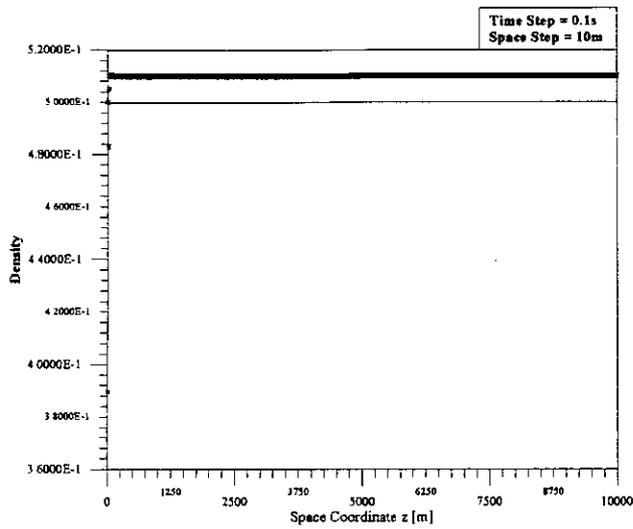


Figure 12a1: Temps de représentation  $t = 1s$

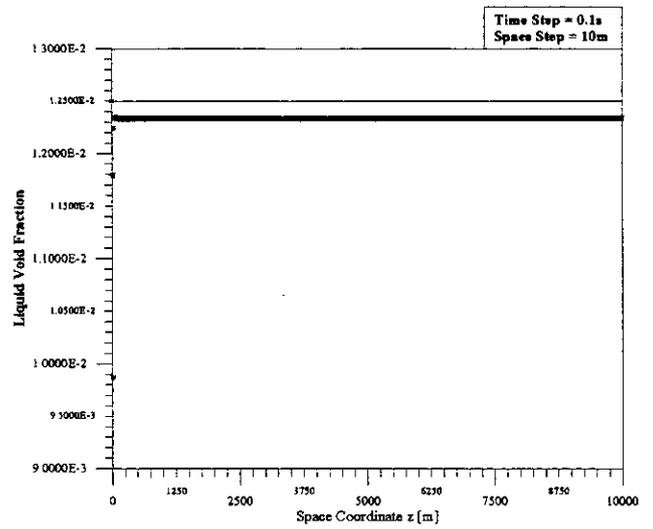


Figure 12b1: Temps de représentation  $t = 1s$

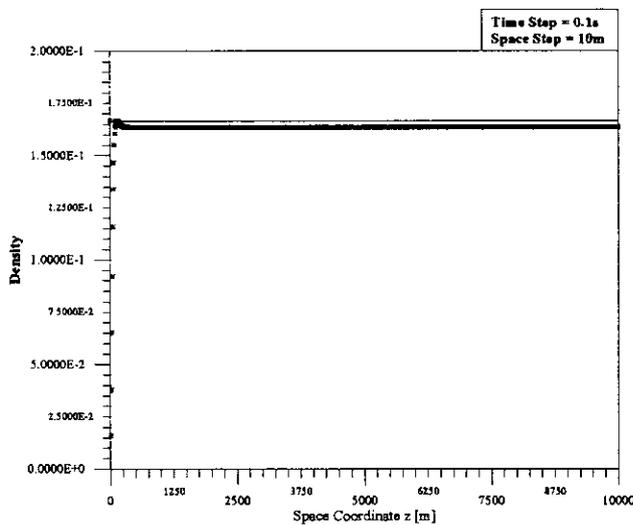


Figure 12a2: Temps de représentation  $t = 5s$

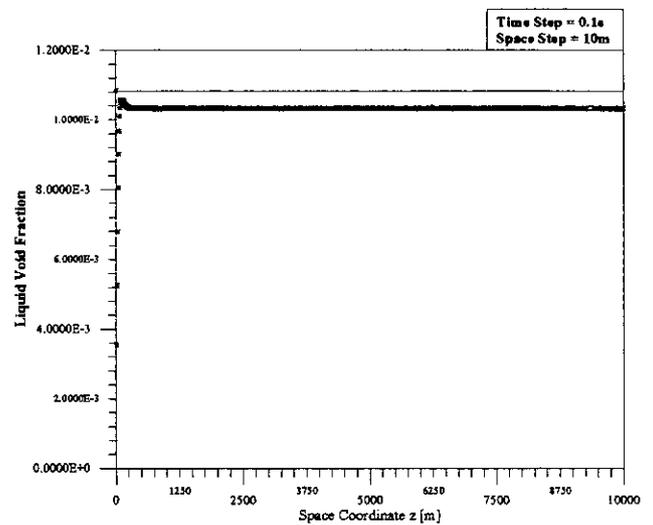


Figure 12b2: Temps de représentation  $t = 5s$

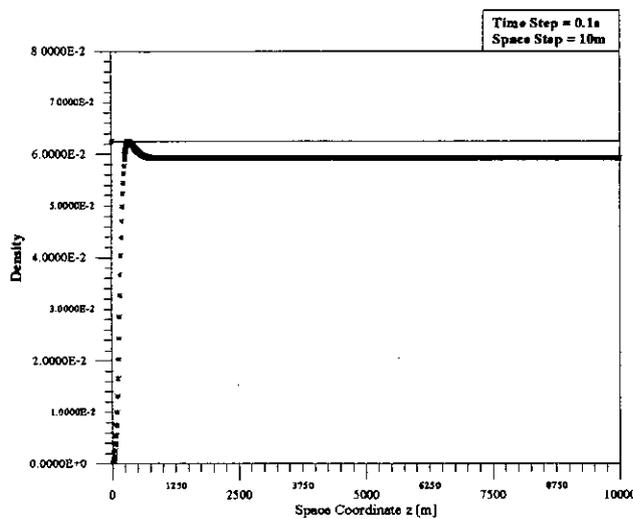


Figure 12a3: Temps de représentation  $t = 15s$

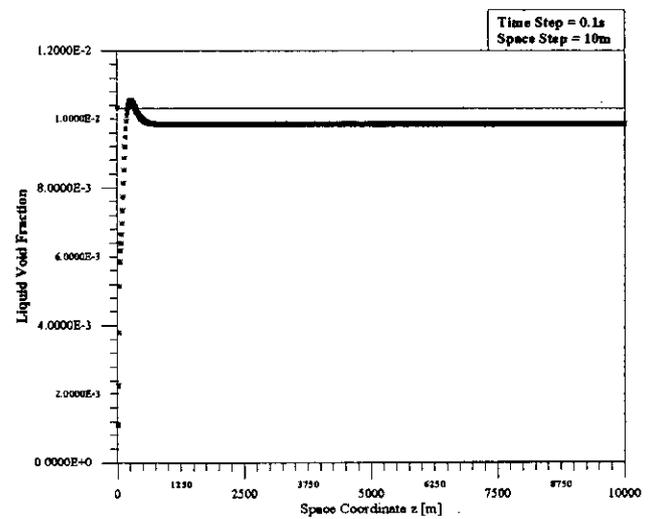


Figure 12b3: Temps de représentation  $t = 15s$

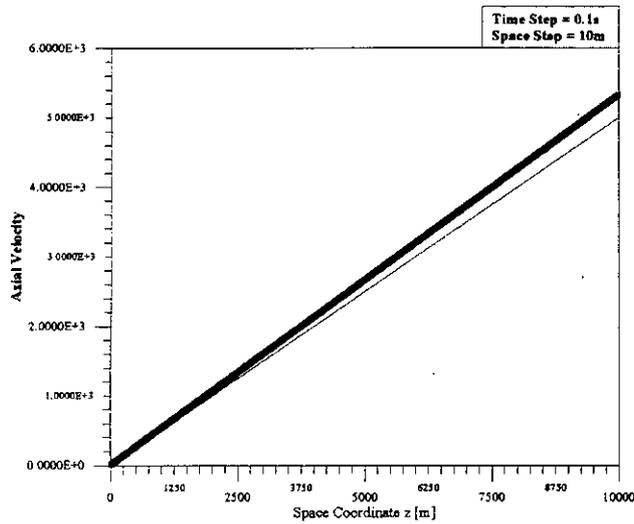


Figure 12c1: Temps de représentation  $t = 1s$

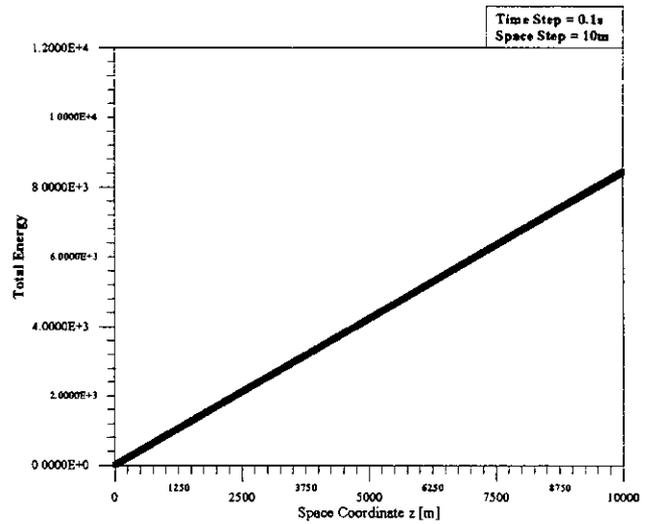


Figure 12d1: Temps de représentation  $t = 1s$

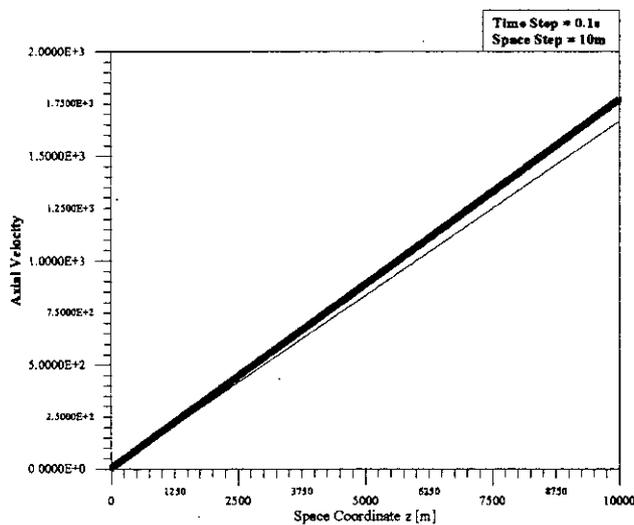


Figure 12c2: Temps de représentation  $t = 5s$

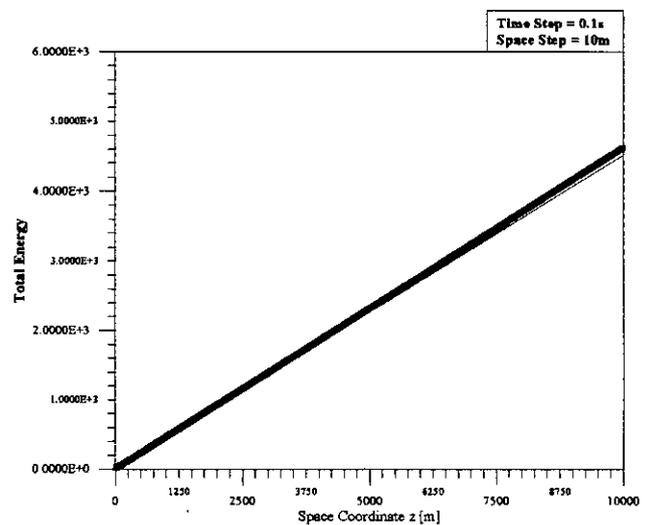


Figure 12d2: Temps de représentation  $t = 5s$

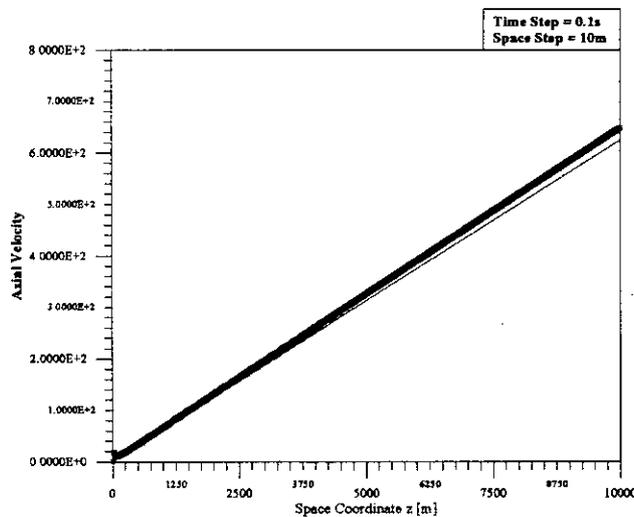


Figure 12c3: Temps de représentation  $t = 15s$

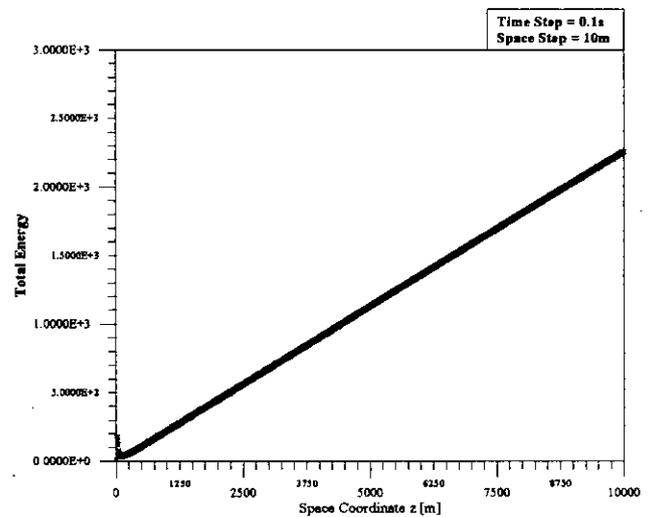


Figure 12d3: Temps de représentation  $t = 15s$

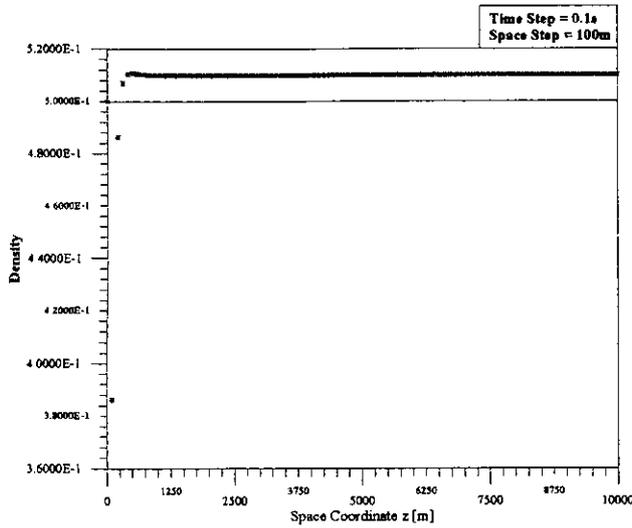


Figure 13a1: Temps de représentation  $t = 1s$

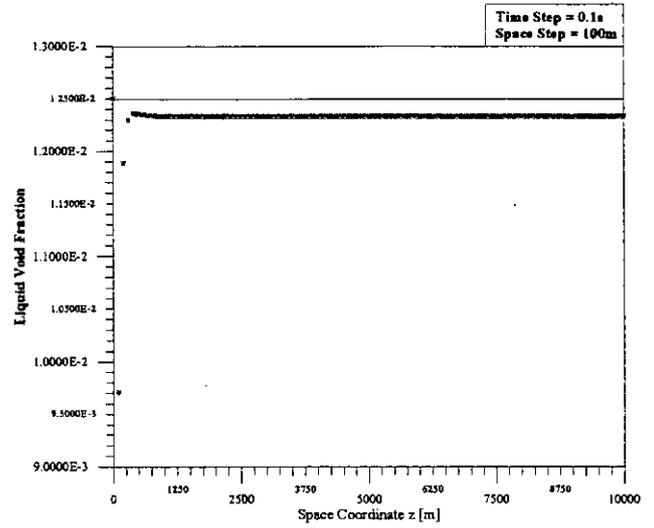


Figure 13b1: Temps de représentation  $t = 1s$

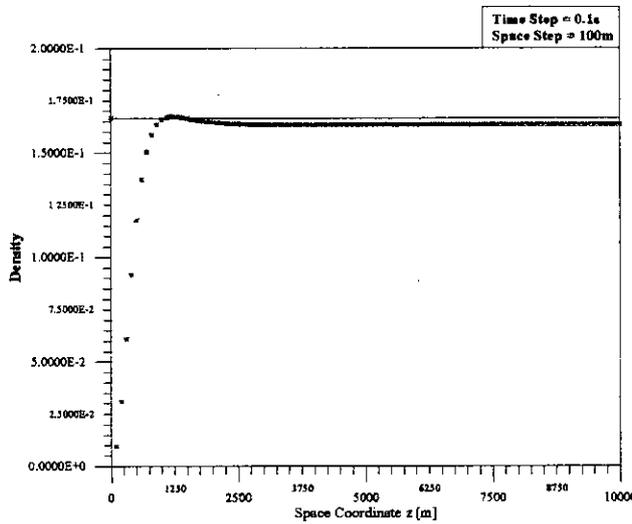


Figure 13a2: Temps de représentation  $t = 5s$

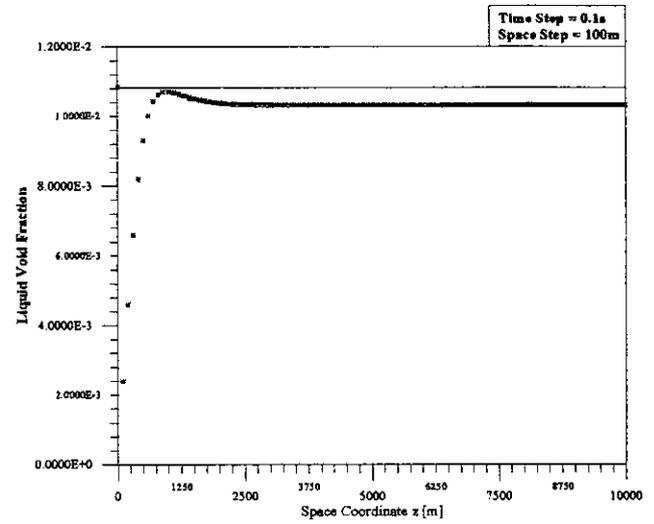


Figure 13b2: Temps de représentation  $t = 5s$

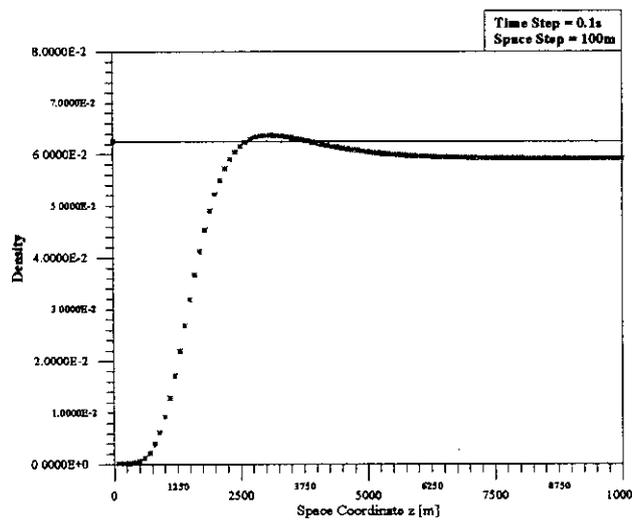


Figure 13a3: Temps de représentation  $t = 15s$

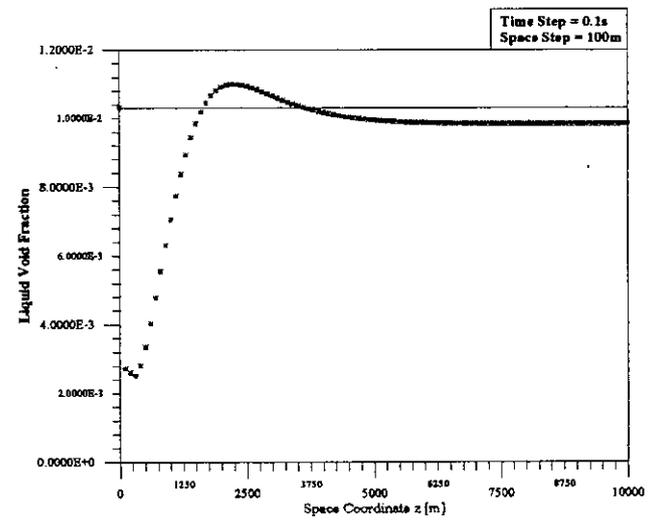


Figure 13b3: Temps de représentation  $t = 15s$

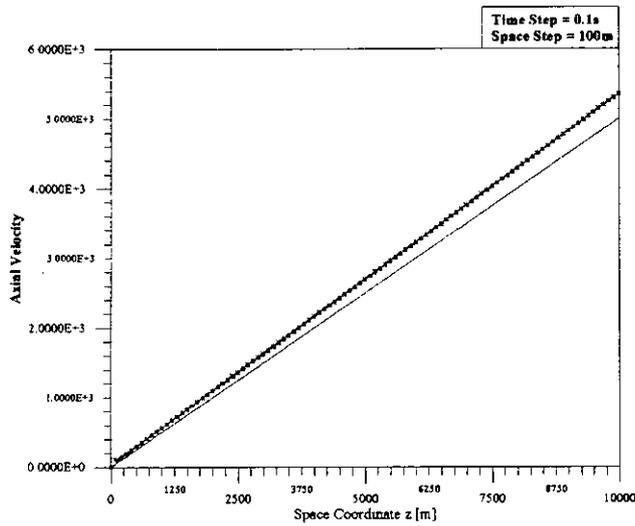


Figure 13c1: Temps de représentation  $t = 1s$

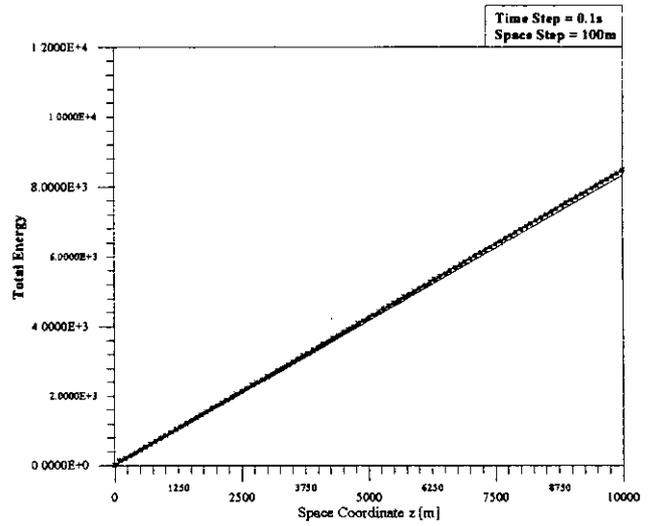


Figure 13d1: Temps de représentation  $t = 1s$

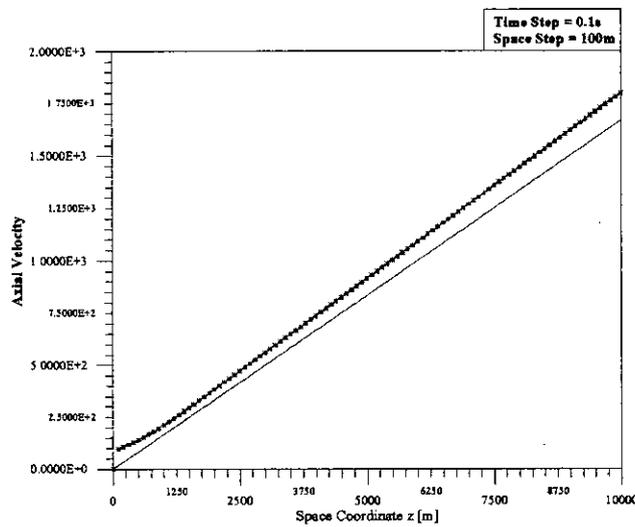


Figure 13c2: Temps de représentation  $t = 5s$

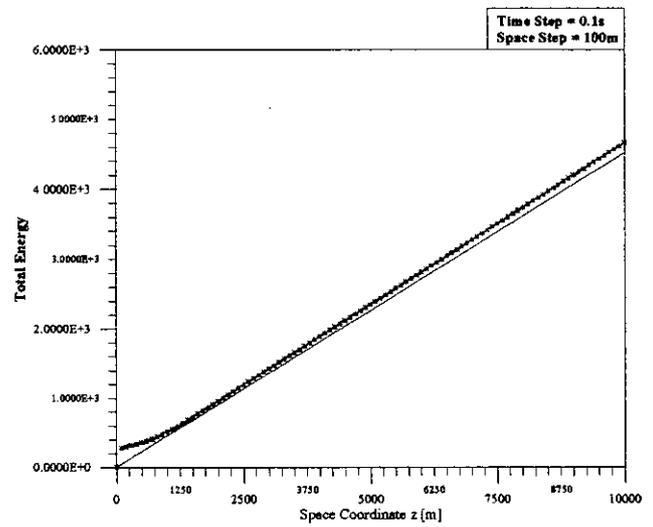


Figure 13d2: Temps de représentation  $t = 5s$

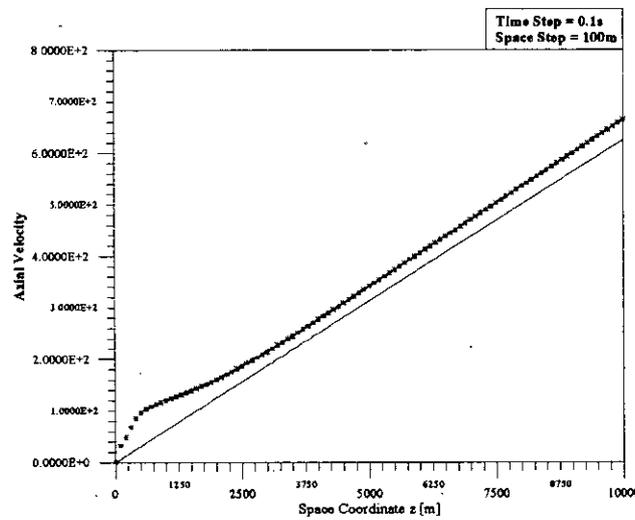


Figure 13c3: Temps de représentation  $t = 15s$

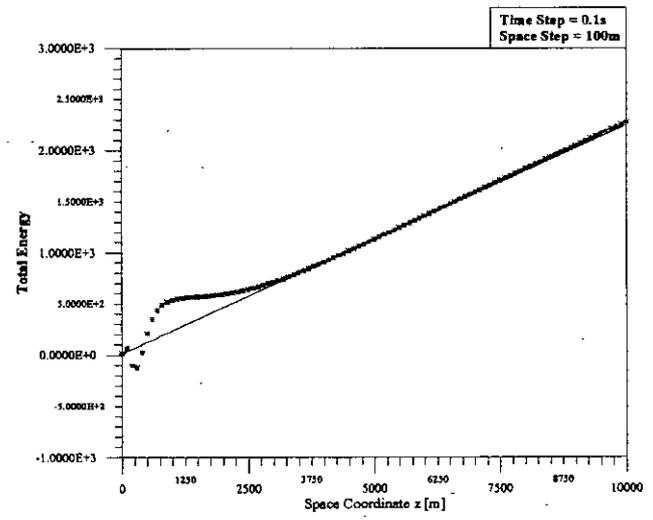


Figure 13d3: Temps de représentation  $t = 15s$

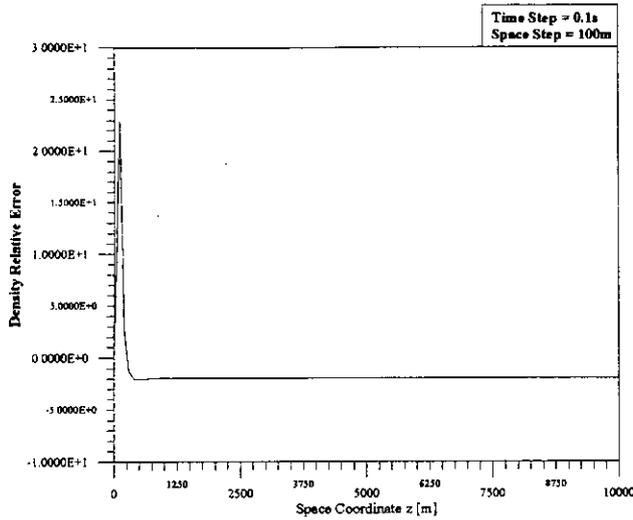


Figure 13e1: Temps de représentation  $t = 1s$

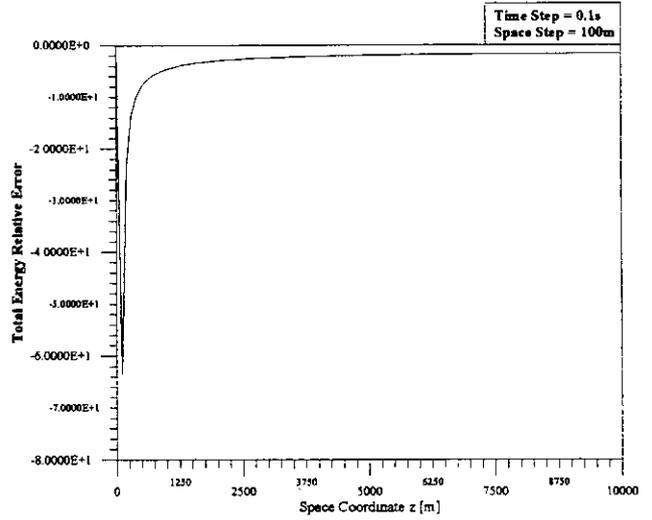


Figure 13f1: Temps de représentation  $t = 1s$

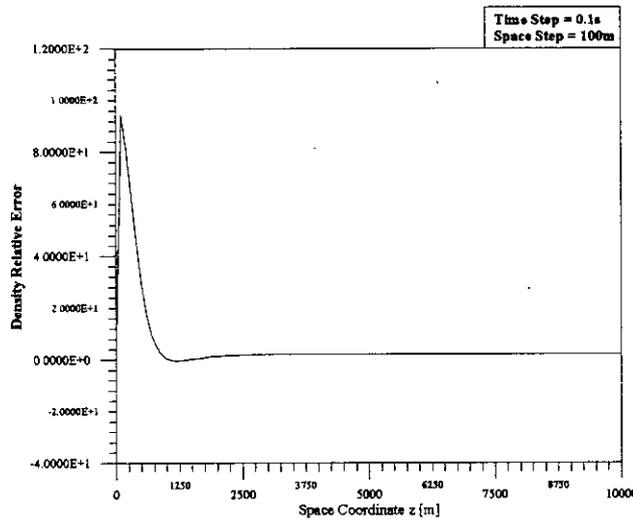


Figure 13e2: Temps de représentation  $t = 5s$

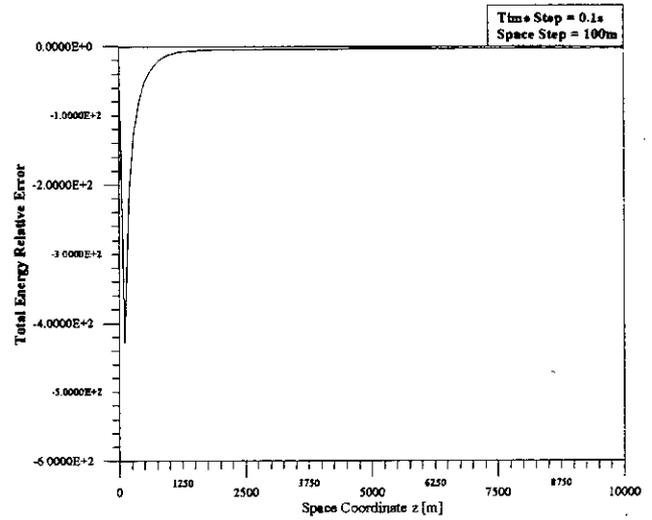


Figure 13f2: Temps de représentation  $t = 5s$

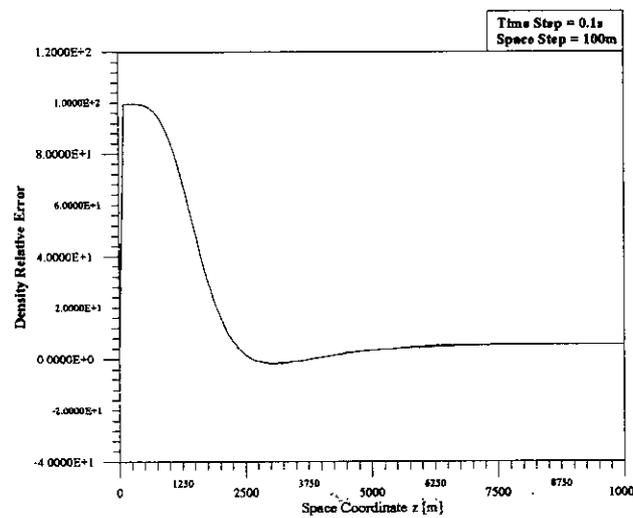


Figure 13e3: Temps de représentation  $t = 15s$

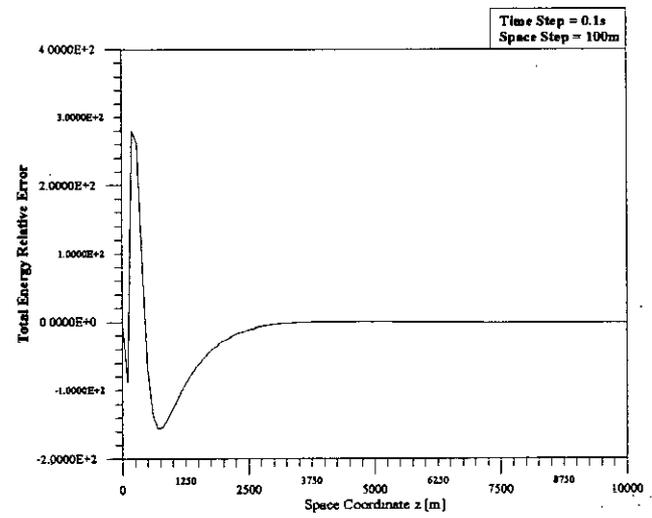


Figure 13f3: Temps de représentation  $t = 15s$

Figure 14a: Représentation Partielle  
Densité, Espace, Temps

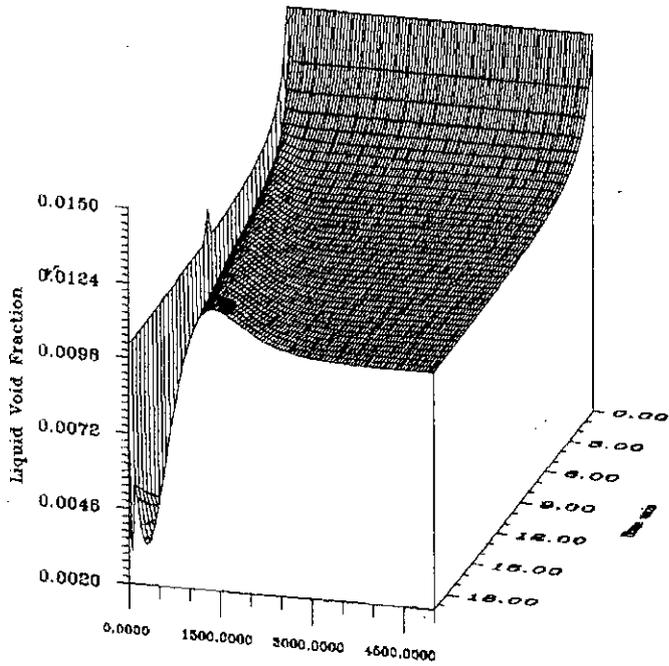
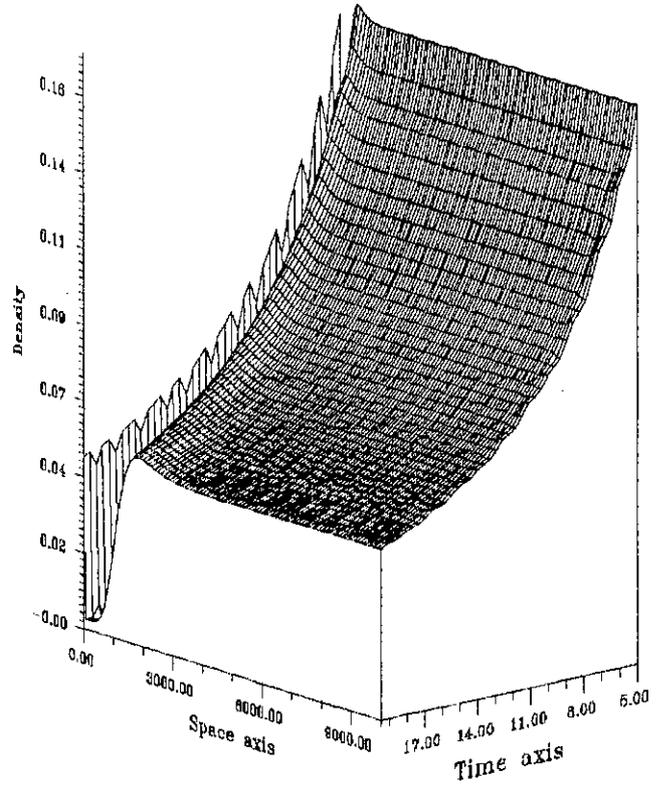


Figure 14b: Représentation Partielle  
Taux de Vide, Espace, Temps

Figure 14c: Représentation Partielle  
Vitesse Axiale, Espace, Temps

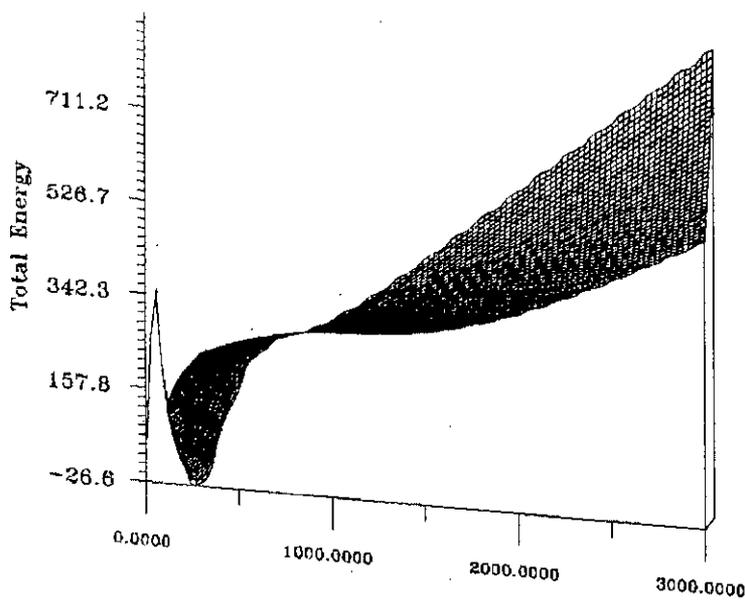
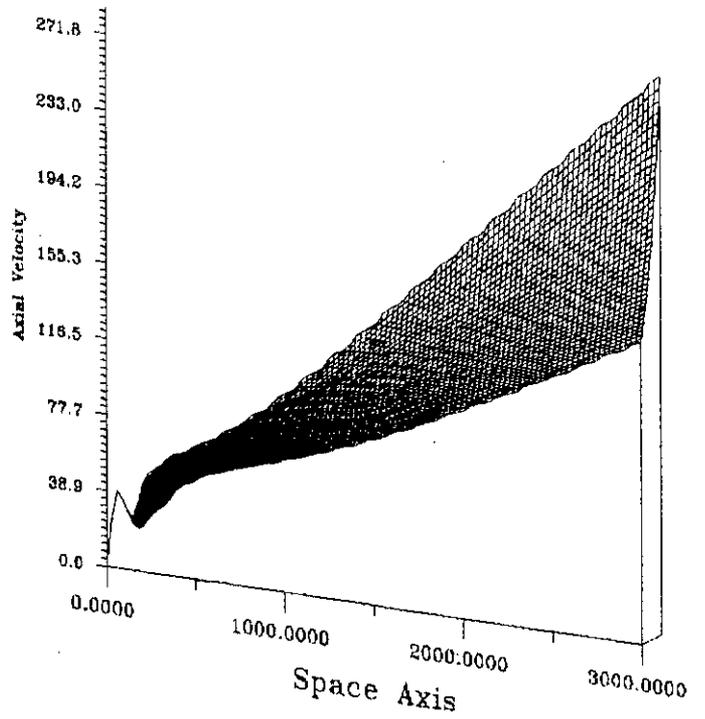


Figure 14d: Représentation Partielle  
Energie Totale, Espace, Temps

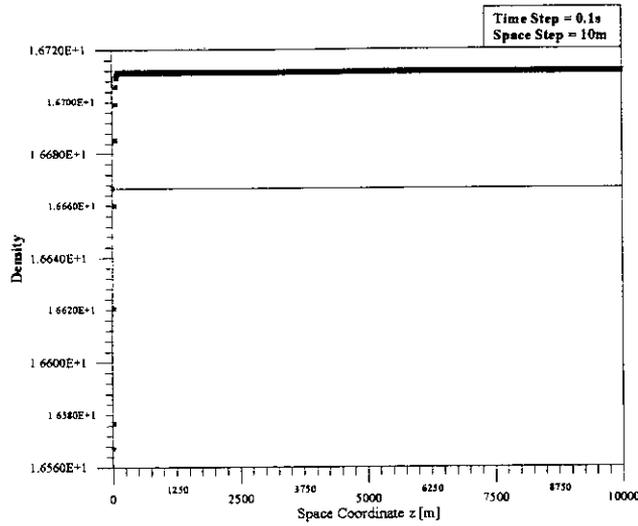


Figure 15a1: Temps de représentation  $t = 1s$

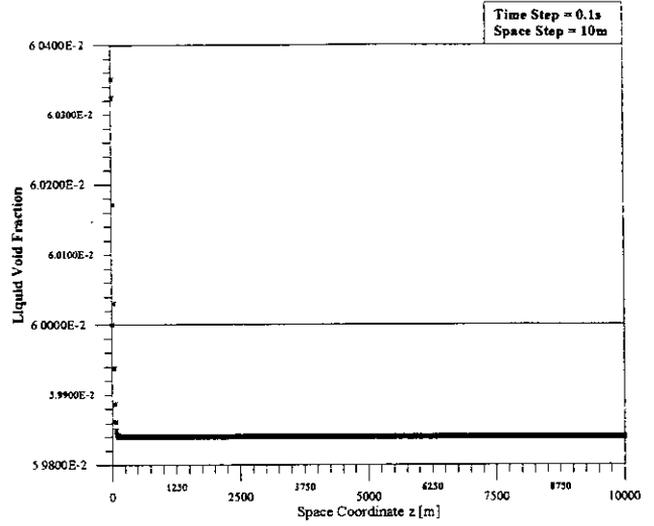


Figure 15b1: Temps de représentation  $t = 1s$

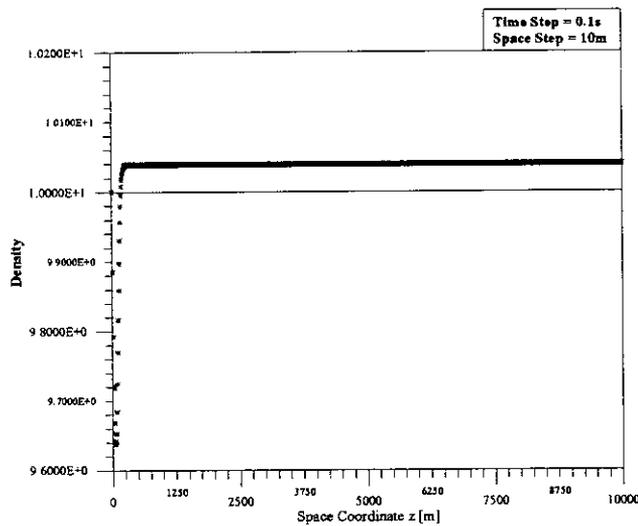


Figure 15a2: Temps de représentation  $t = 5s$

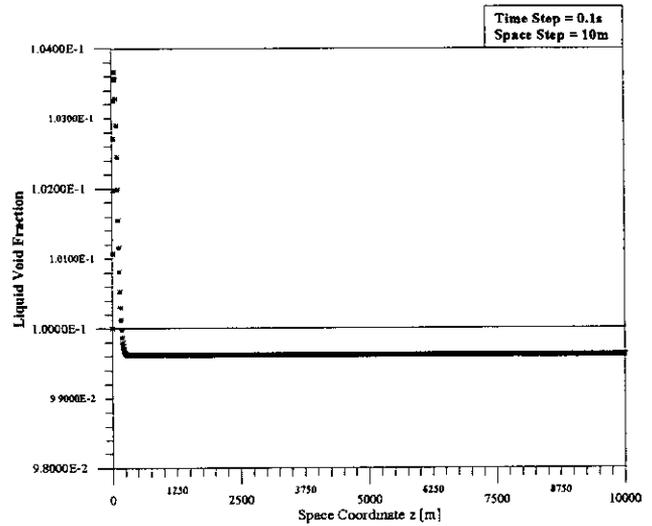


Figure 15b2: Temps de représentation  $t = 5s$

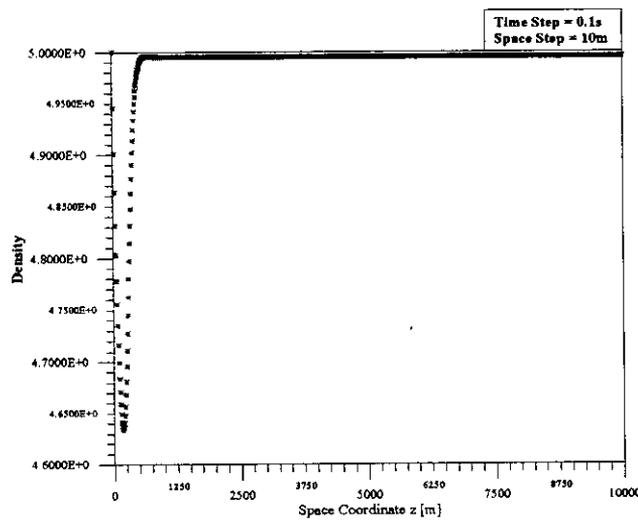


Figure 15a3: Temps de représentation  $t = 15s$

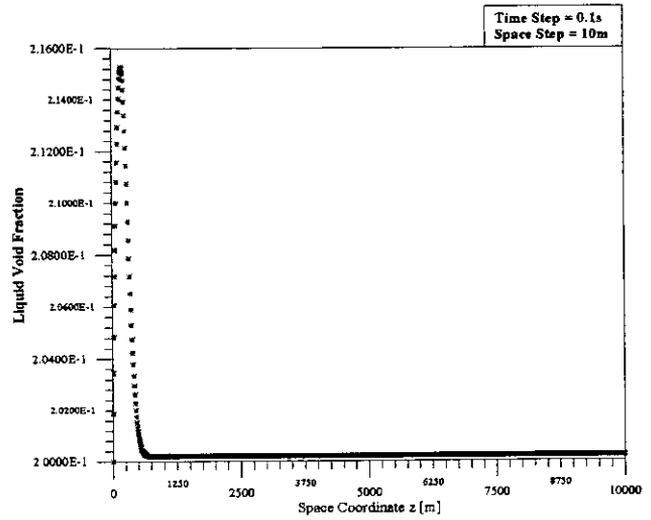


Figure 15b3: Temps de représentation  $t = 15s$

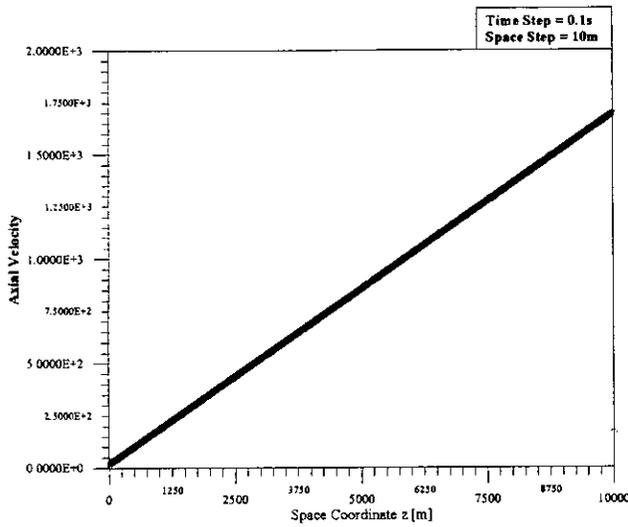


Figure 15c1: Temps de représentation  $t = 1s$

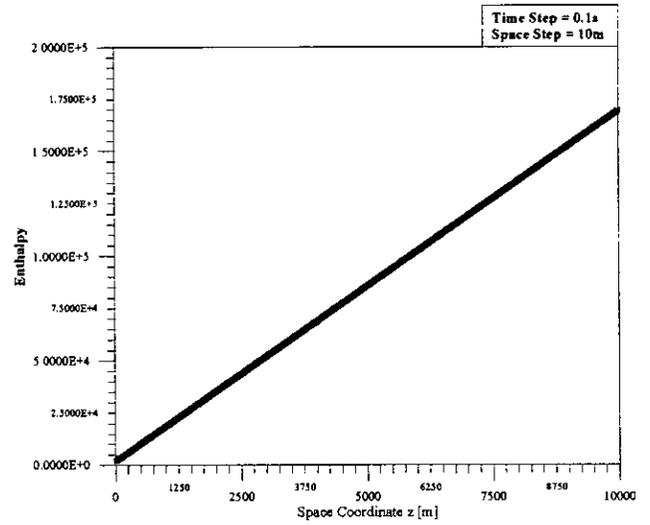


Figure 15d1: Temps de représentation  $t = 1s$

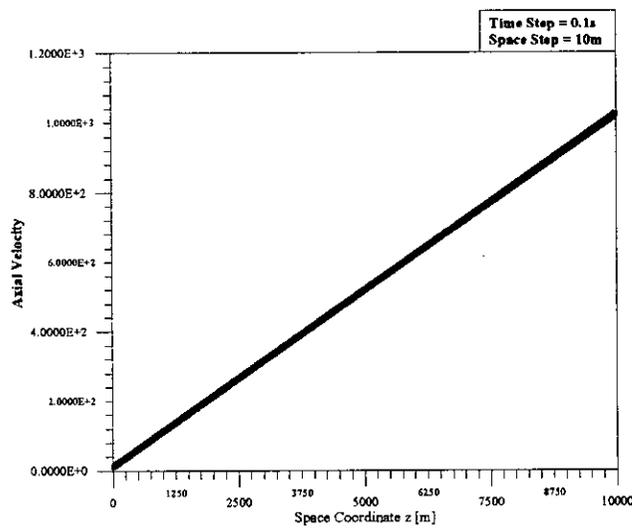


Figure 15c2: Temps de représentation  $t = 5s$

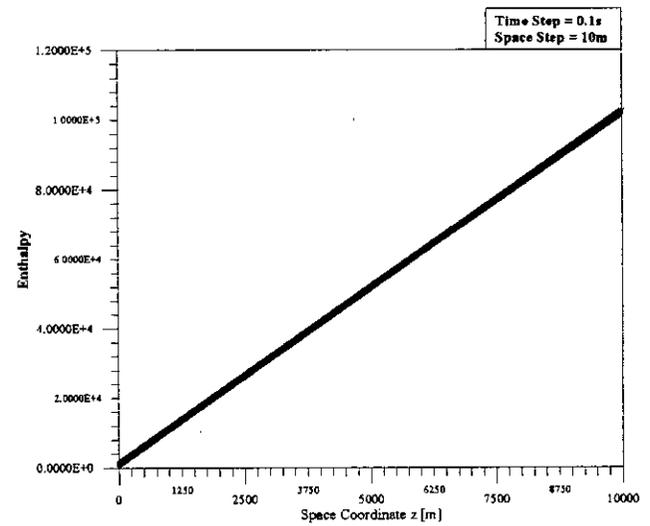


Figure 15d2: Temps de représentation  $t = 5s$

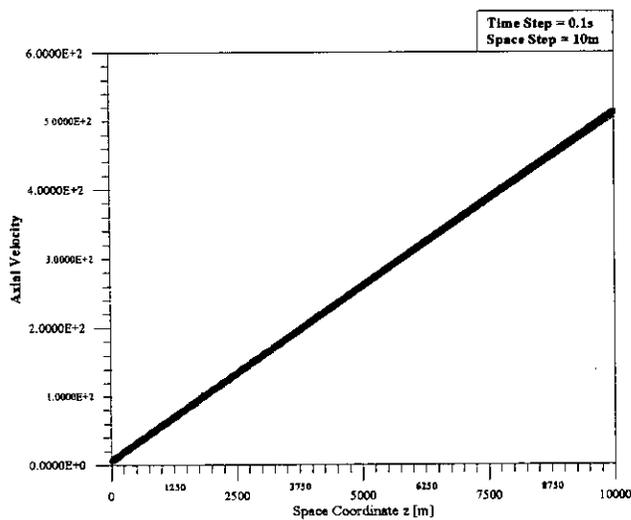


Figure 15c3: Temps de représentation  $t = 15s$

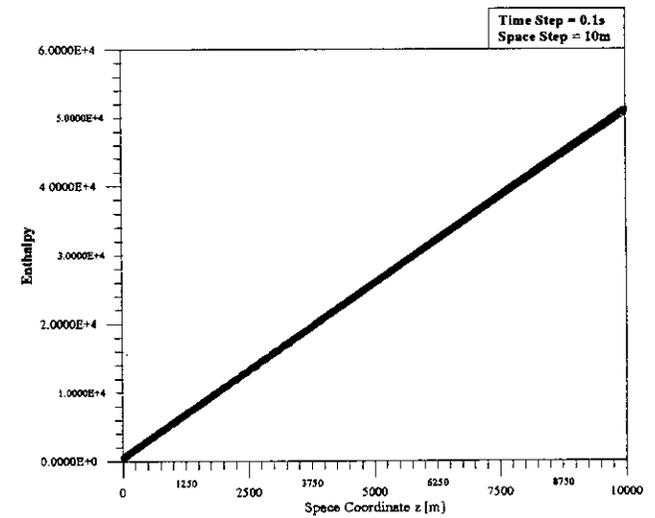
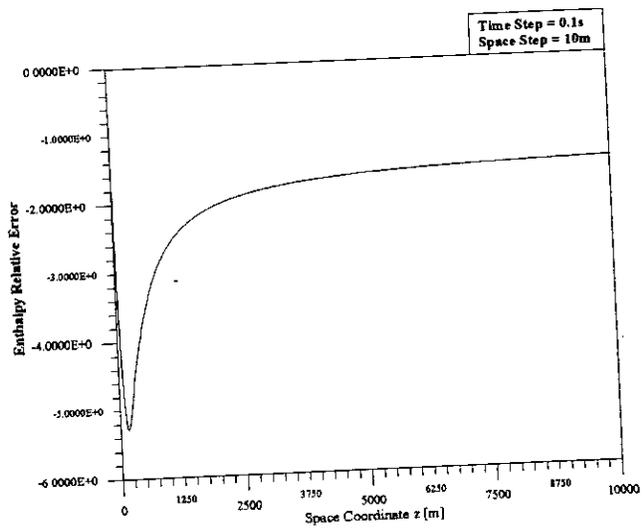
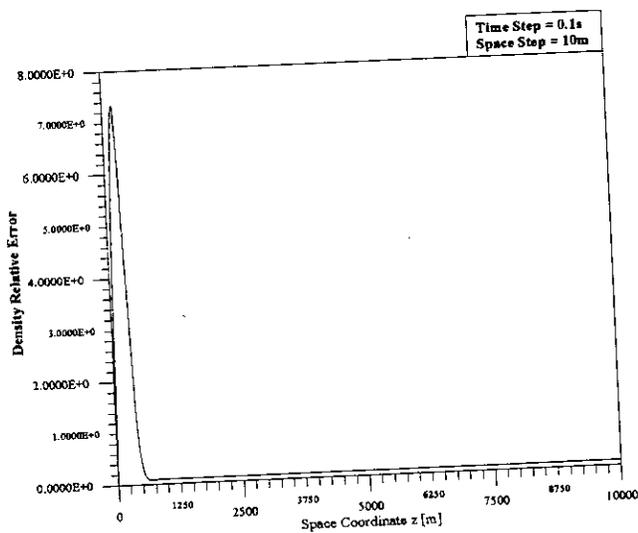
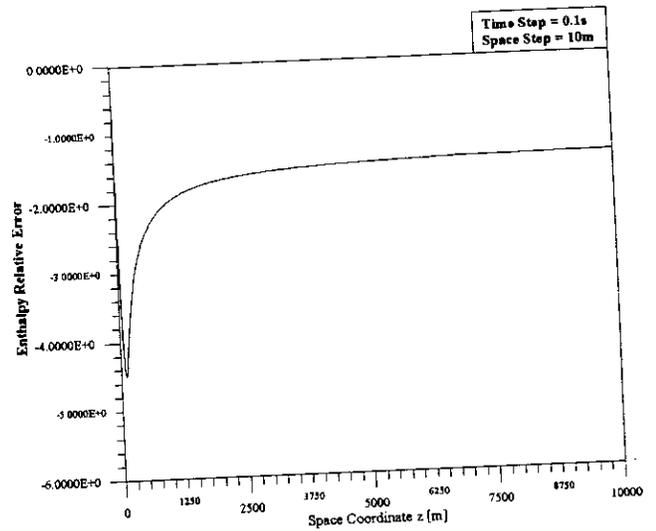
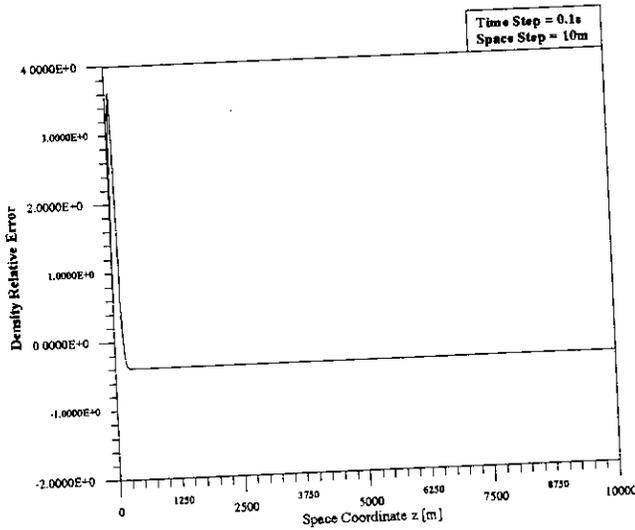
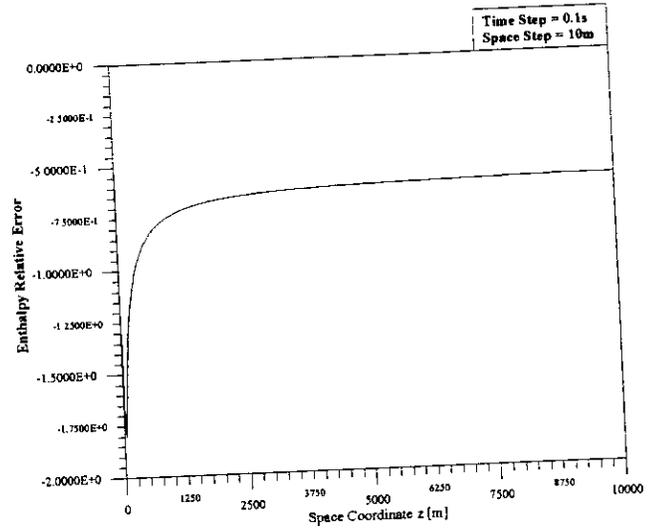
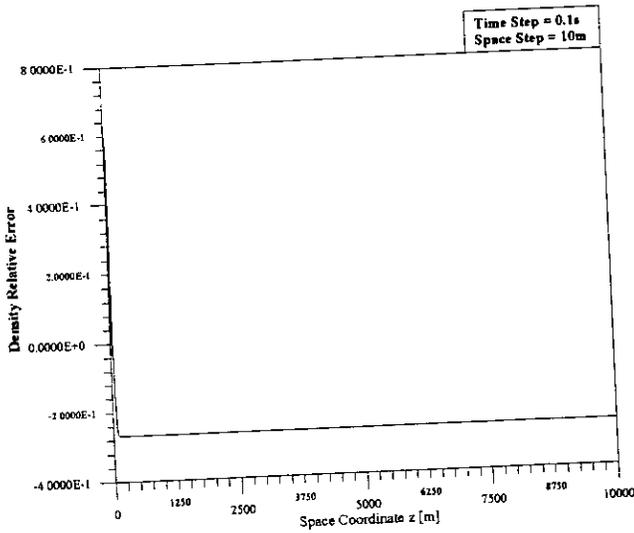


Figure 15d3: Temps de représentation  $t = 15s$



### 3.3 Schéma ICS

Pour traiter l'instabilité que nous avons observé pour les deux schémas précédents, nous nous proposons d'augmenter l'ordre de l'approximation. Un premier schéma à trois points que nous avons construit est le schéma "Implicit Centered Space" (cf. Fig. 16).

Pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  de  $(t, z)$ , les dérivées premières et mixtes sont approchées au point  $(t^{n+1}, z_k)$  de la façon suivante:

$$\partial_z f(t^{n+1}, z_k) = \frac{1}{2\Delta z} (f_{k+1}^{n+1} - f_{k-1}^{n+1}) + O(\Delta z)^2 \tag{III.16}_i$$

$$\partial_z (f \partial_z g)(t^{n+1}, z_k) = \frac{1}{2\Delta z} \left( f_{k+1}^{n+1} \left( \frac{g_{k+1}^{n+1} - g_k^{n+1}}{\Delta z} \right) - f_{k-1}^{n+1} \left( \frac{g_k^{n+1} - g_{k-1}^{n+1}}{\Delta z} \right) \right) + O(\Delta z)^2 \tag{III.16}_{ii}$$

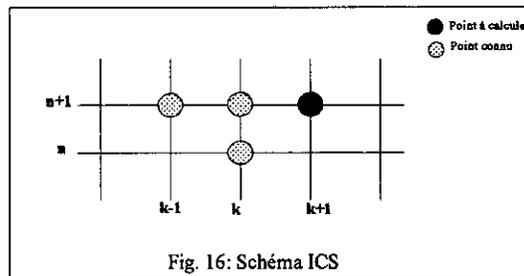


Fig. 16: Schéma ICS

Le schéma ICS présente les caractéristiques suivantes:

- Les dérivées sont approchées à l'ordre 2 en espace.
- Le schéma est centré.
- Le schéma n'est pas auto-démarrant. Nous devons procéder exactement comme pour le schéma IBS au point  $(n + 1, 1)$ , i.e. soit imposer une condition supplémentaire sur le gradient soit utiliser un schéma de démarrage. Les valeurs au point  $(n + 1, 0)$  sont données comme condition d'entrée.
- Le schéma ne nécessite aucune condition de sortie.

#### Teste 6

Les expériences numériques sont effectuées dans les conditions suivantes:

$$\Delta t = 0.1s ; \Delta z = 10 m \text{ (cf. Fig. 17).}$$

$$\Delta t = 0.1s ; \Delta z = 100 m \text{ (cf. Fig. 18).}$$

Les résultats que nous présentons correspondent seulement au problème en énergie totale, ceux du problème en enthalpie étant similaire.

#### Commentaire

- De fortes instabilités numériques apparaissent dès les premières itérations et font diverger très vite l'algorithme du point fixe. Aussi, le schéma ICS paraît être inconditionnellement instable au vu des nombreux tests effectués pour les deux modèles.

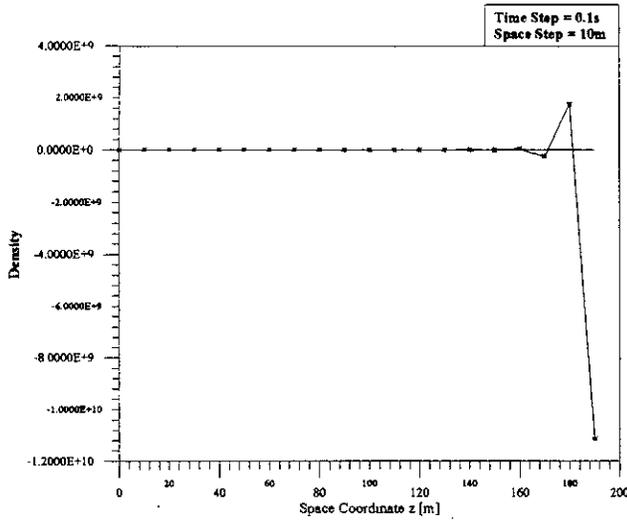


Figure 17a: Temps de représentation  $t = 0.1s$

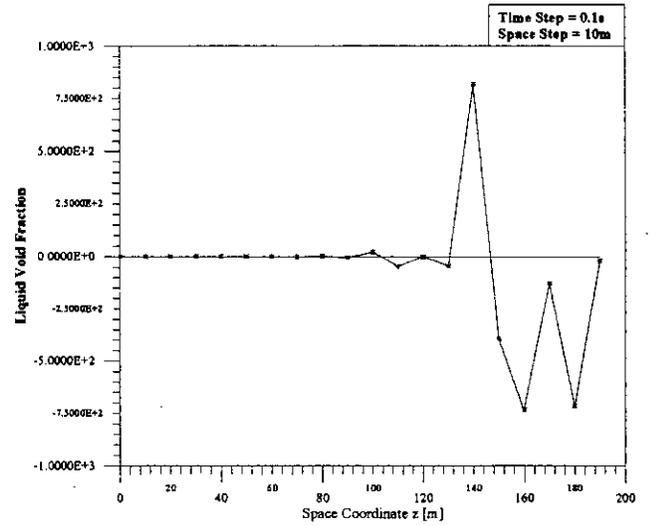


Figure 17b: Temps de représentation  $t = 0.1s$

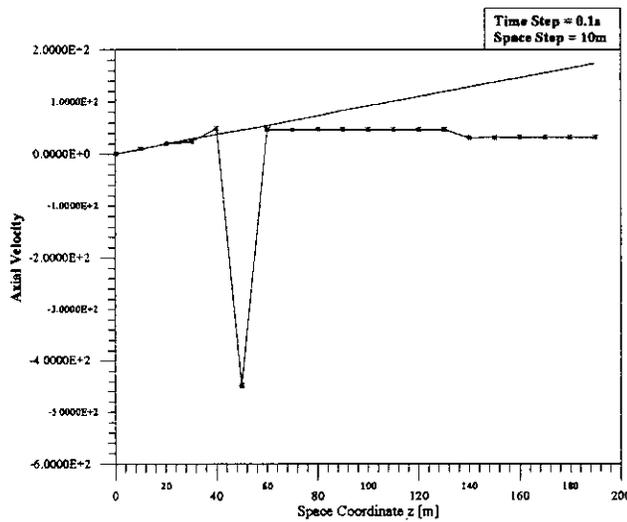


Figure 17c: Temps de représentation  $t = 0.1s$

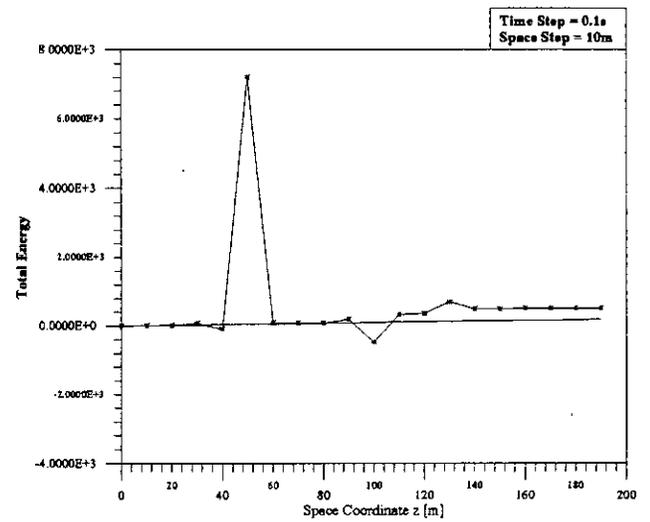


Figure 17d: Temps de représentation  $t = 0.1s$

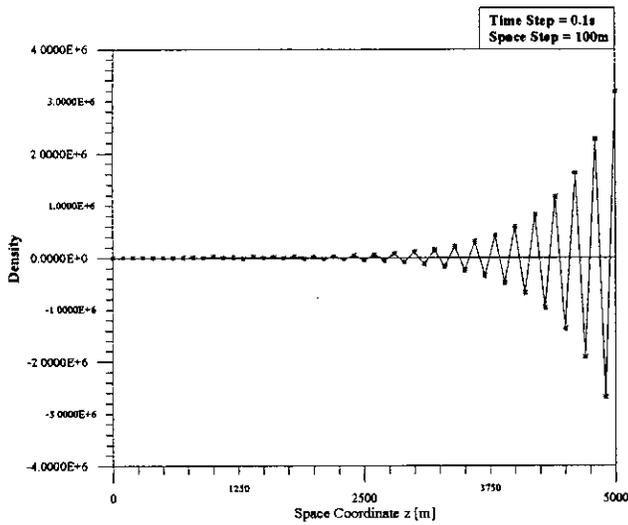


Figure 18a: Temps de représentation  $t = 0.1s$

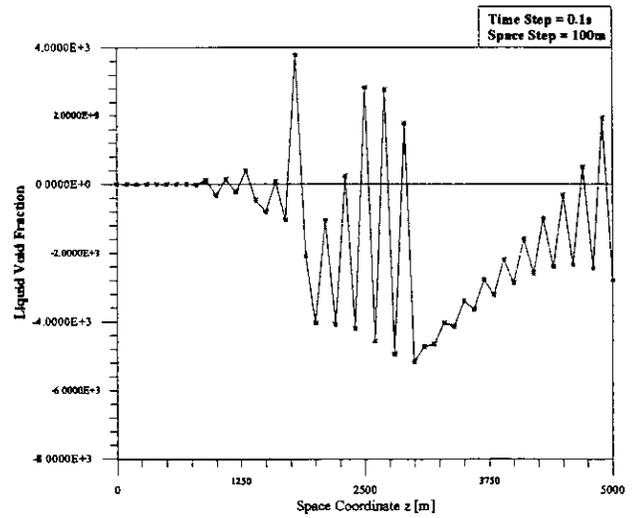


Figure 18b: Temps de représentation  $t = 0.1s$

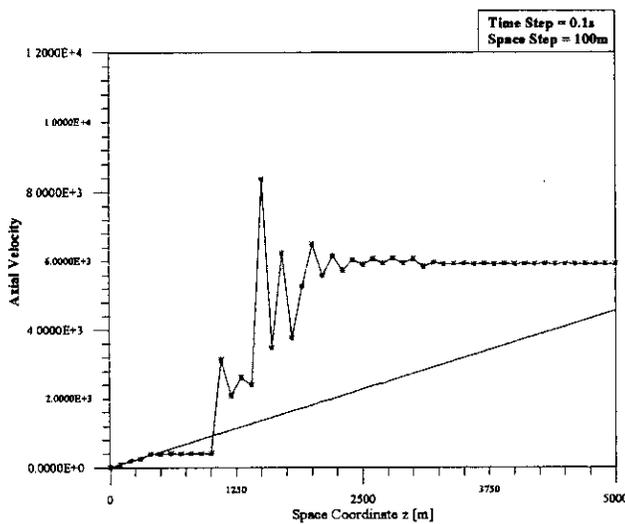


Figure 18c: Temps de représentation  $t = 0.1s$

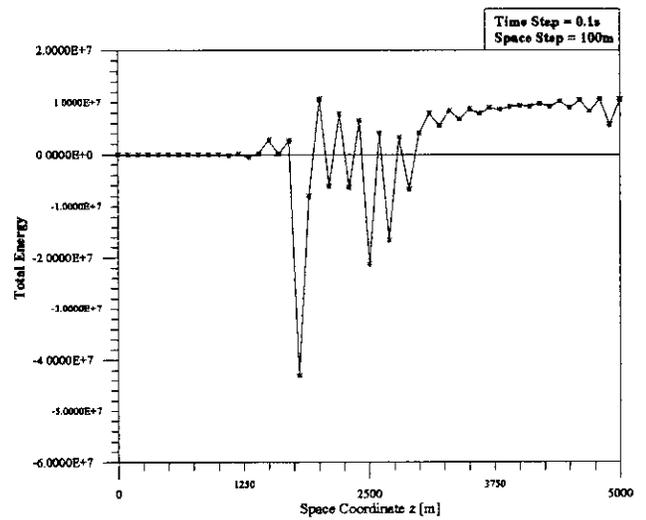


Figure 18d: Temps de représentation  $t = 0.1s$

### 3.4 Schéma IFCS

L'idée du schéma "Implicit Forward Centered Space" est de garder la dérivée première décentrée et d'augmenter l'ordre pour la dérivée mixte en faisant ressortir les valeurs des point intermédiaires (cf. Fig. 19). Le schéma d'approximation est le suivant:

Pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  de  $(t, z)$ , les dérivées premières et mixtes sont approximées au point  $(t^{n+1}, z_k)$  comme suit:

$$\partial_z f(t^{n+1}, z_k) = \frac{1}{\Delta z} (f_{k+1}^{n+1} - f_k^{n+1}) + O(\Delta z) \tag{III.17}_i$$

$$\partial_z (f \partial_z g)(t^{n+1}, z_k) = \frac{1}{2\Delta z} \left( f_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} \left( \frac{g_{k+1}^{n+1} - g_k^{n+1}}{\Delta z} \right) - f_{k-\frac{1}{2}}^{n+1} \left( \frac{g_k^{n+1} - g_{k-1}^{n+1}}{\Delta z} \right) \right) + O(\Delta z)^2 \tag{III.17}_{ii}$$

où  $f_{k+\frac{1}{2}}^{n+1}$  est la valeur intermédiaire de la fonction  $f$ . Elle est définie par:

$$f_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} = f \left( (n+1)\Delta t, \left( k + \frac{1}{2} \right) \Delta z \right) \tag{III.18}$$

Cette valeur intermédiaire peut être approchée de différentes façons que nous allons préciser par la suite.

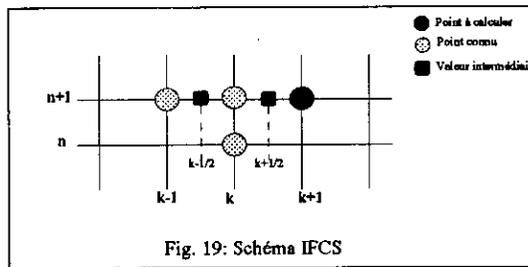


Fig. 19: Schéma IFCS

Le schéma IFCS présente les caractéristiques suivantes:

- Les dérivées premières sont approchées à l'ordre 1 en espace et les dérivées secondes le sont à l'ordre 2.
- Le schéma est centré.
- Le schéma n'est pas auto-démarrant. Nous procédons exactement comme pour le schéma IBS au point  $(n+1, 1)$ . Les valeurs au point  $(n+1, 0)$  sont données comme condition d'entrée.
- Le schéma ne nécessite aucune condition de sortie.

#### Teste 7

Nous avons effectué des expériences numériques pour des valeurs intermédiaires (cf. équation (III.18)) décentrées une fois à droite et une fois à gauche. Ceci donne le schéma IFCS "Centered":

$$f_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} = f_{k+1}^{n+1} \tag{III.19}_i$$

$$f_{k-\frac{1}{2}}^{n+1} = f_{k-1}^{n+1} \tag{III.19}_{ii}$$

Les conditions de calcul sont les suivantes:

$\Delta t = 0.5s$  ;  $\Delta z = 10 m$  (cf. Fig. 20).

$\Delta t = 0.1s$  ;  $\Delta z = 10 m$  (cf. Fig. 21).

$\Delta t = 0.1s$  ;  $\Delta z = 100 m$  (cf. Fig. 22).

Les résultats que nous présentons correspondent seulement au modèle en énergie totale, les résultats du problème en enthalpie étant similaires.

### Commentaire

- De fortes instabilités numériques apparaissent dès les premières itérations et font diverger très vite l'algorithme du point fixe.
- Le schéma semble être inconditionnellement instable au vu des nombreux tests effectués pour le modèle en énergie totale et pour le modèle en enthalpie.

### Teste 8

Nous avons cette fois-ci effectué des expériences pour des valeurs intermédiaires (cf. équation (III.18)) décentrées à gauche. Ceci donne le schéma IFCS "Backward":

$$f_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} = f_k^{n+1} \quad (\text{III.20})_i$$

$$f_{k-\frac{1}{2}}^{n+1} = f_{k-1}^{n+1} \quad (\text{III.20})_u$$

Les conditions de calcul sont les suivantes:

$$\Delta t = 0.01s ; \Delta z = 10 m \text{ (cf. Fig. 23).}$$

$$\Delta t = 0.1s ; \Delta z = 10 m \text{ (cf. Fig. 24).}$$

$$\Delta t = 0.1s ; \Delta z = 100 m \text{ (cf. Fig. 25).}$$

Les résultats que nous présentons correspondent là aussi seulement au problème en énergie totale.

### Commentaire

- De fortes instabilités numériques apparaissent aussi dès les premières itérations et font diverger très vite l'algorithme du point fixe.
- Le schéma est aussi inconditionnellement instable au vu des nombreux tests effectués pour le modèle en énergie totale et pour le modèle en enthalpie.

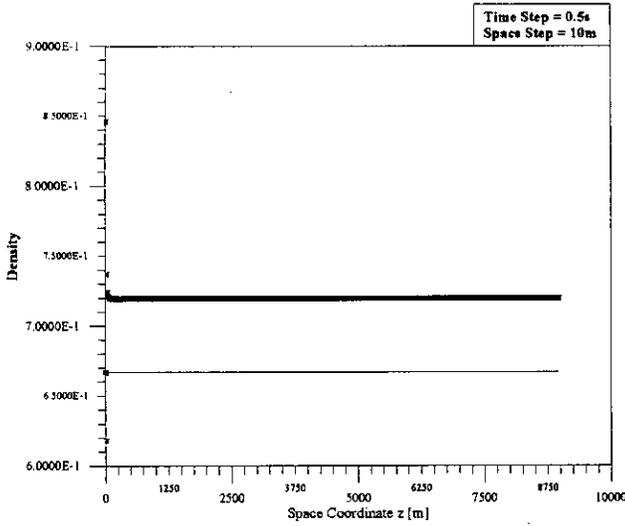


Figure 20a: Temps de représentation  $t = 0.5s$

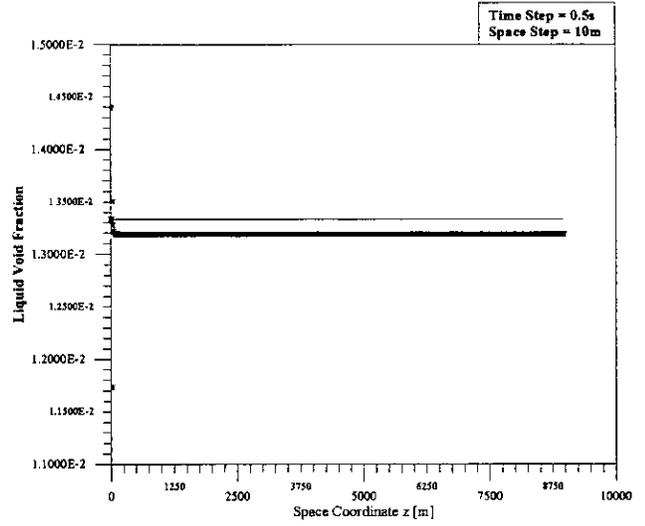


Figure 20b: Temps de représentation  $t = 0.5s$

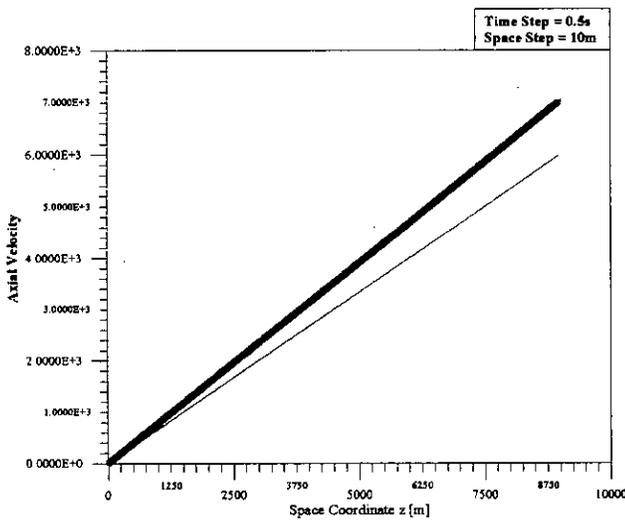


Figure 20c: Temps de représentation  $t = 0.5s$

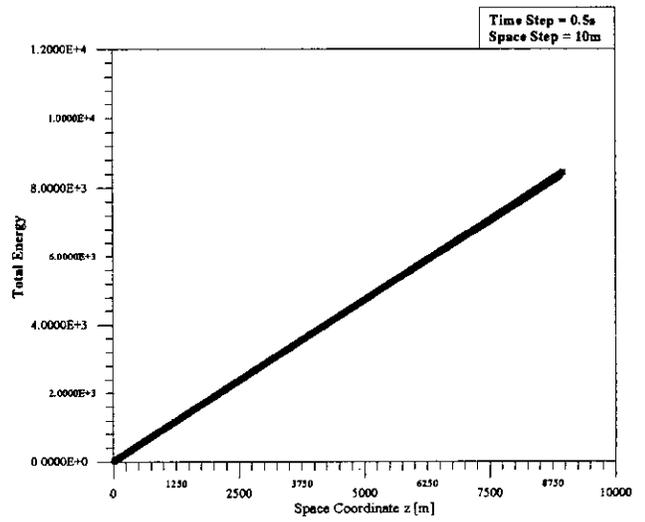


Figure 20d: Temps de représentation  $t = 0.5s$

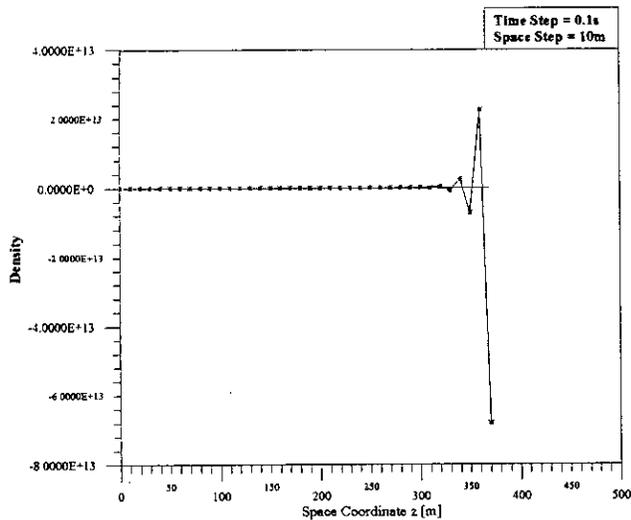


Figure 21a: Temps de représentation  $t = 0.1s$

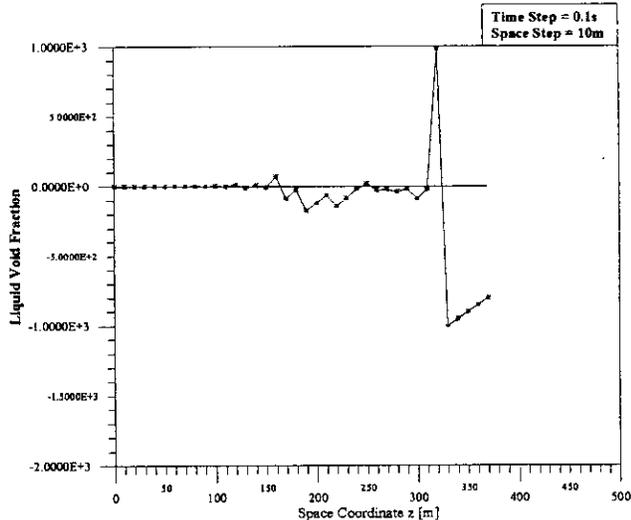


Figure 21b: Temps de représentation  $t = 0.1s$

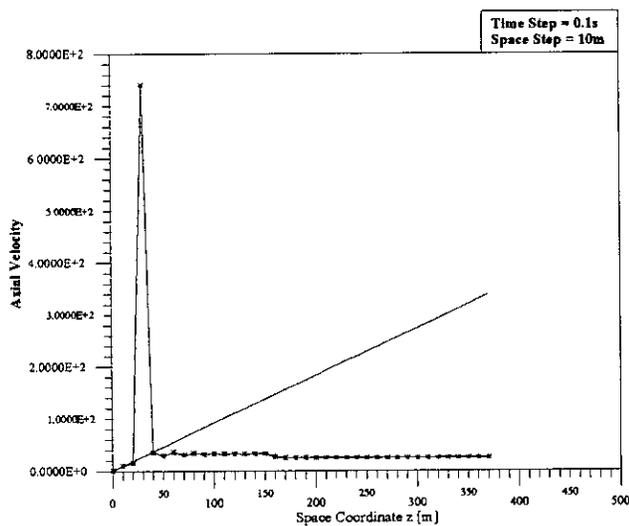


Figure 21c: Temps de représentation  $t = 0.1s$

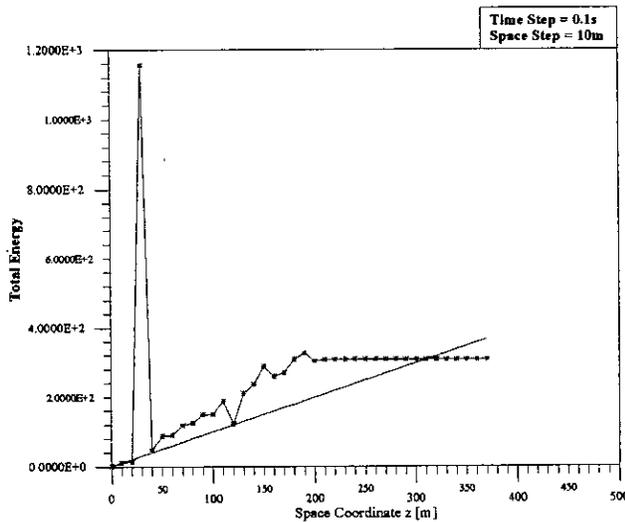


Figure 21d: Temps de représentation  $t = 0.1s$

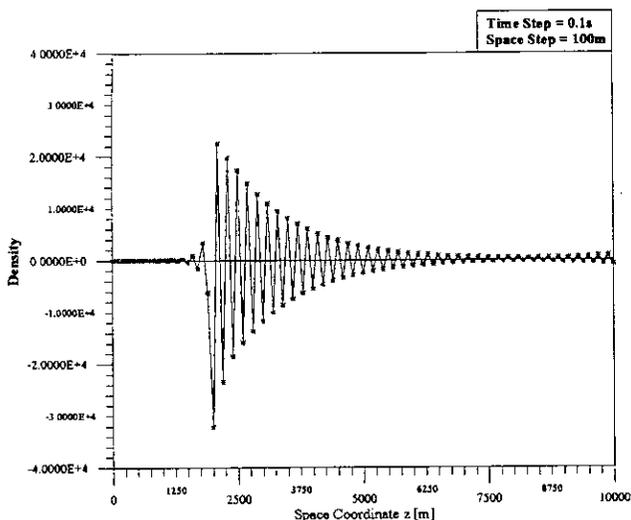


Figure 22a: Temps de représentation  $t = 0.1s$

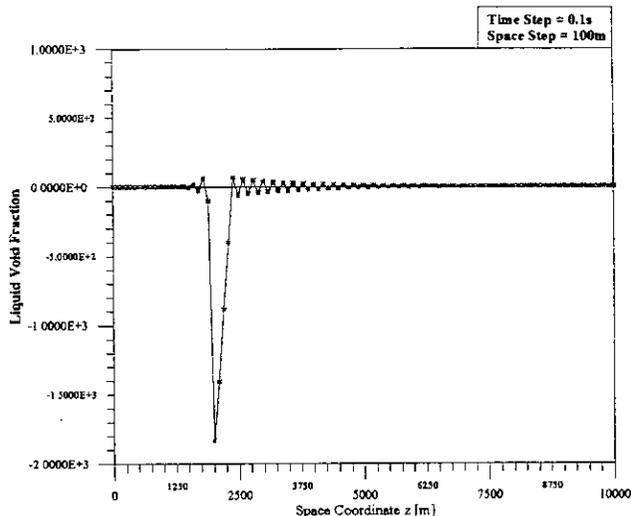


Figure 22b: Temps de représentation  $t = 0.1s$

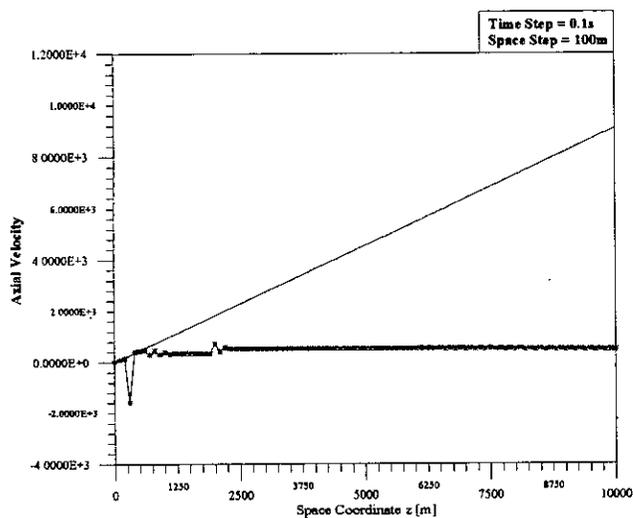


Figure 22c: Temps de représentation  $t = 0.1s$

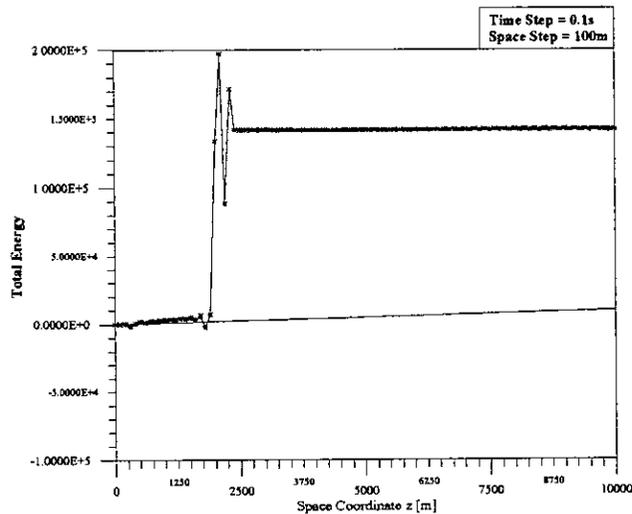


Figure 22d: Temps de représentation  $t = 0.1s$

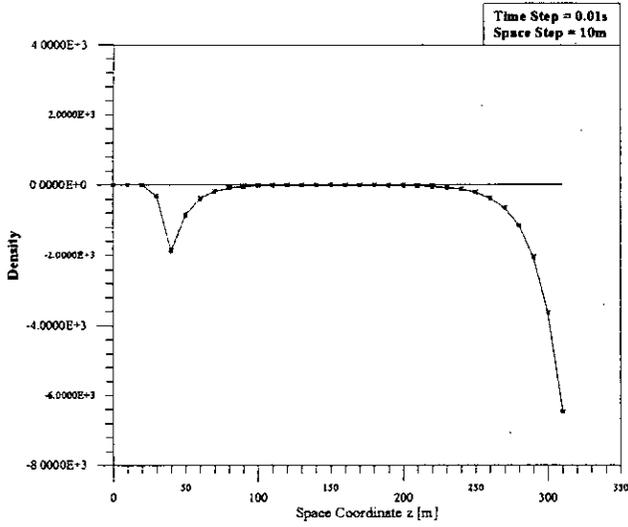


Figure 23a: Temps de représentation  $t = 0.01s$

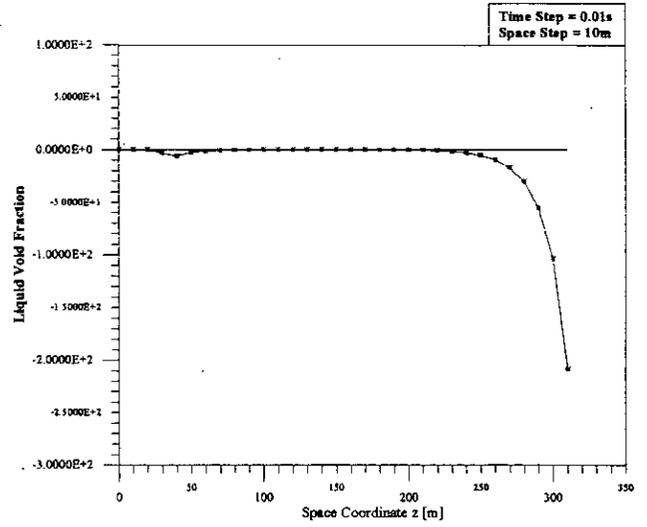


Figure 23b: Temps de représentation  $t = 0.01s$

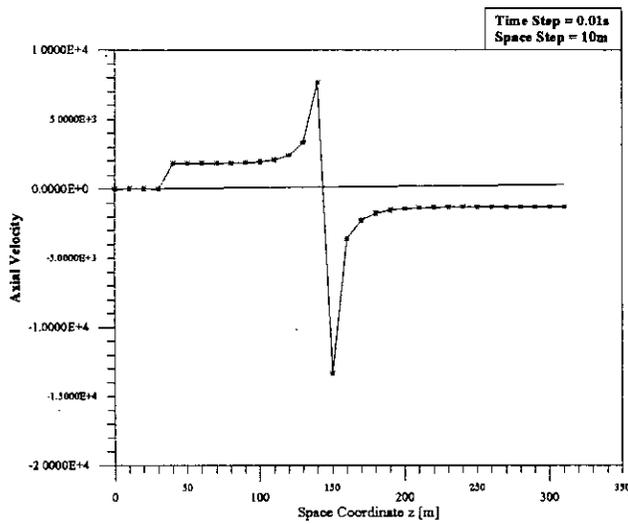


Figure 23c: Temps de représentation  $t = 0.01s$

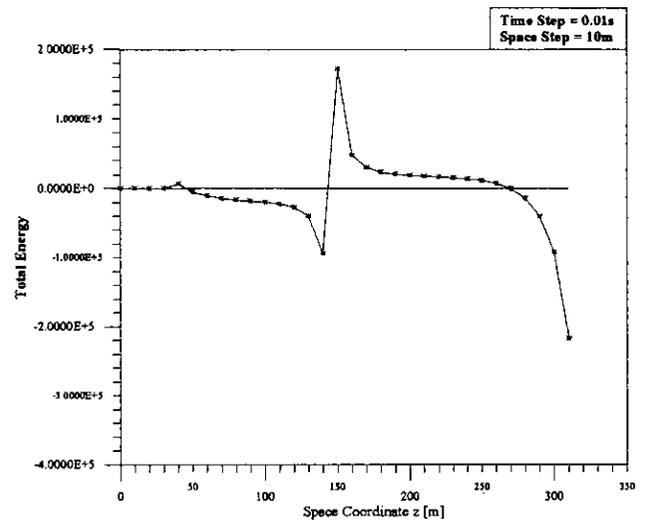


Figure 23d: Temps de représentation  $t = 0.01s$

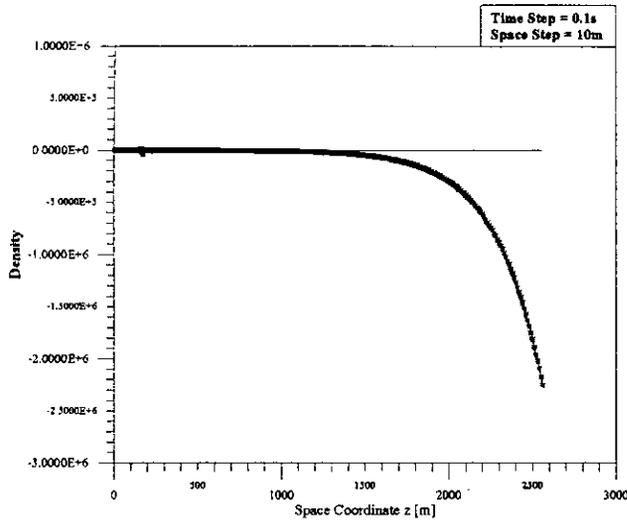


Figure 24a: Temps de représentation  $t = 0.1s$

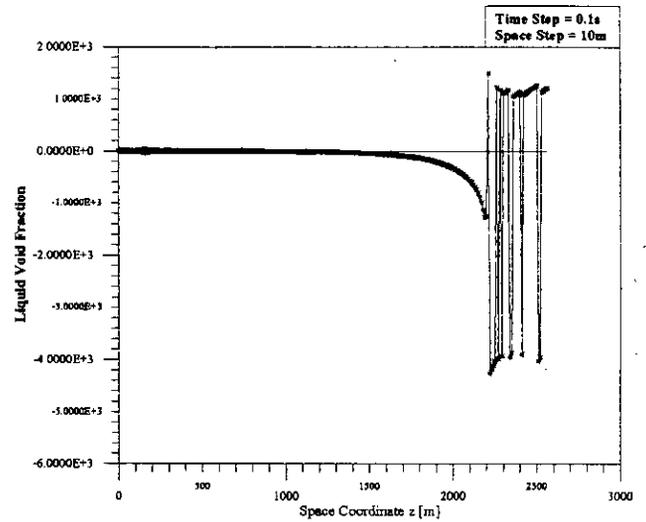


Figure 24b: Temps de représentation  $t = 0.1s$

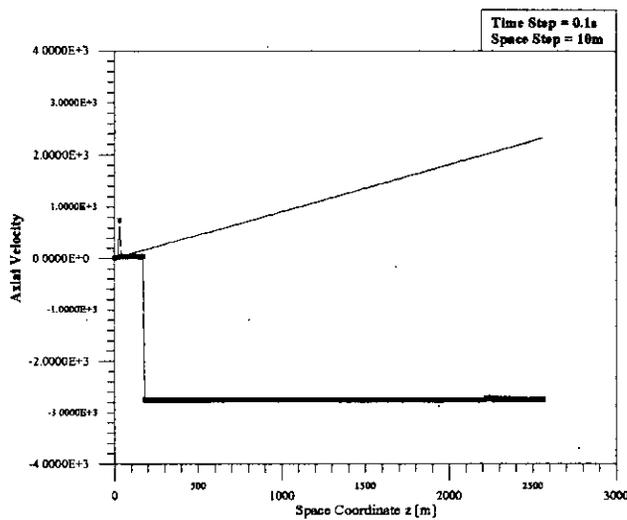


Figure 24c: Temps de représentation  $t = 0.1s$

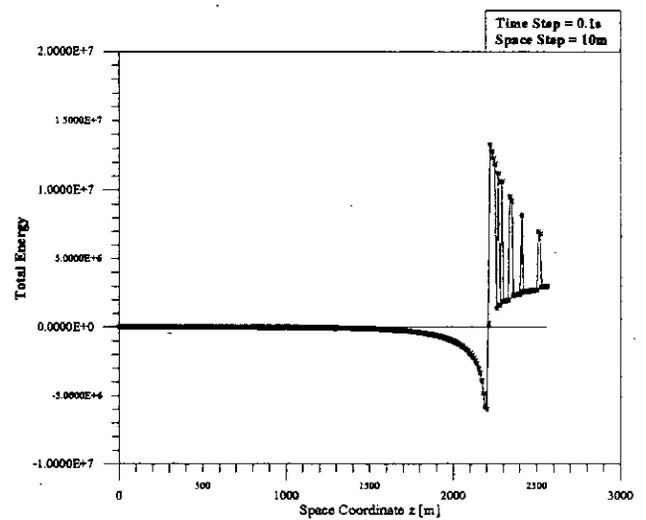


Figure 24d: Temps de représentation  $t = 0.1s$

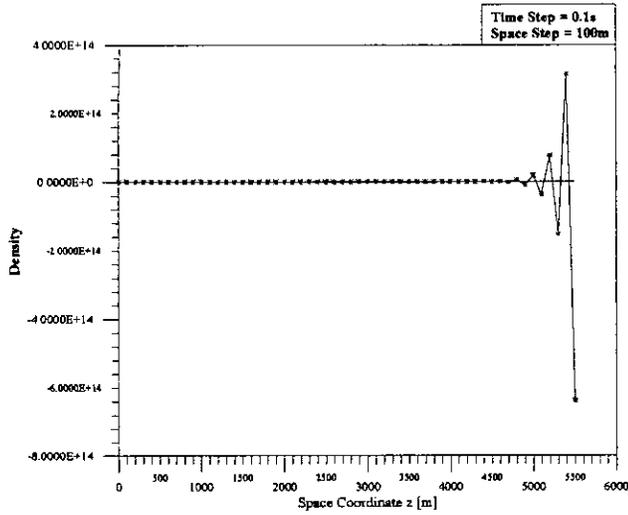


Figure 25a: Temps de représentation  $t = 0.1s$

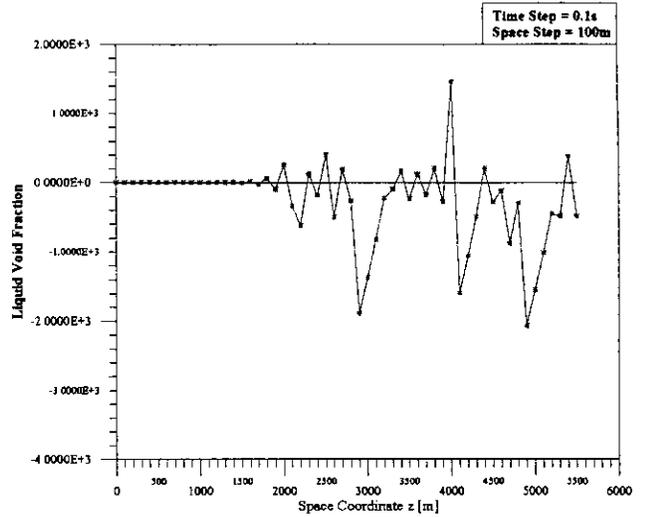


Figure 25b: Temps de représentation  $t = 0.1s$

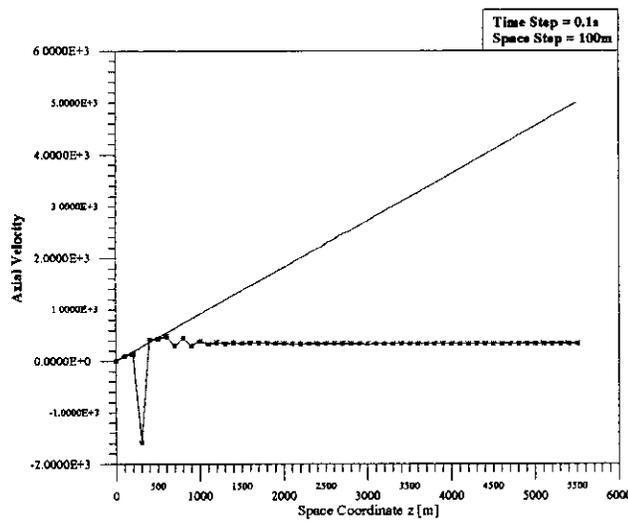


Figure 25c: Temps de représentation  $t = 0.1s$

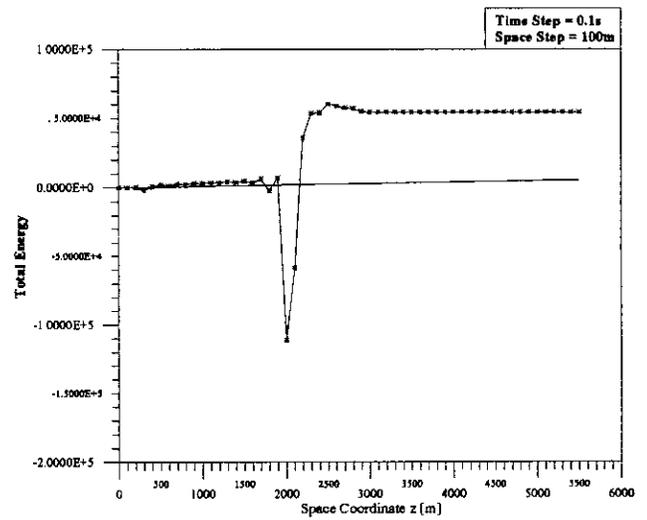


Figure 25d: Temps de représentation  $t = 0.1s$

## 4 CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons présenté un ensemble de résultats de calcul menés sur ordinateur obtenus à partir d'approximations des modèles en énergie totale et en enthalpie pour différents schémas aux différences finies.

Le premier schéma testé est un schéma implicite centré que nous avons appelé schéma IBFS. Les résultats obtenus sont partiellement satisfaisant. En effet, bien que les erreurs relatives soient acceptables, il apparaît toujours une instabilité en début de conduite.

Le second schéma construit est le schéma IBS. Il nous a permis d'améliorer la précision des calculs, notamment pour l'énergie totale, sans éliminer pour autant l'instabilité en début de conduite.

Pour traiter cette instabilité numérique, nous avons augmenté l'ordre de l'approximation. Il s'agit là d'une démarche classique pour surmonter une telle difficulté. C'est ainsi que nous avons construit un schéma centré, le schéma ICS. Les résultats obtenus ont montré qu'il est inconditionnellement instable. Nous avons donc construit un deuxième schéma, le schéma IFCS. Ce dernier fait intervenir des valeurs intermédiaires des grandeurs à calculer. Nous avons proposé deux variantes de ce schéma qui paraissent, au vu des résultats obtenus, être toutes deux inconditionnellement instables.

A ce stade de notre étude, il apparaît clairement que les schémas décentrés sont les méthodes d'approximation qui nous ont donné les résultats les plus probants. Nous ne pouvons cependant être complètement satisfait de ces schémas en raison de l'existence de l'instabilité en début de conduite qui est préjudiciable lorsqu'il s'agit de mener les calculs pendant longtemps. Enfin, ce phénomène est toujours persistant même dans le cas où l'écoulement est monophasique, i.e. en supposant qu'il n'y a pas de phase liquide.

---

# | Conclusion

L'objectif visé par ce travail est de fournir un modèle mathématique et une méthode d'approximation numérique capables de décrire les caractéristiques des écoulements du gaz naturel dans les conduites. Il constitue ainsi un prolongement à une série de travaux consacrés aux problèmes de transport du gaz par pipelines (cf. [Ba], [BH], [BHD]).

Aussi, nous avons abordé au cours de ce travail deux aspects: le premier rhéologique consacré à l'établissement d'un modèle en formulation énergie totale alors que le second aspect a été dévolue à l'approximation et la résolution numérique des modèles établis.

Du point de vu rhéologique, le modèle en formulation énergie totale est issu du modèle général "drift". Il est fonction des variables du mélange locales moyennées dans le temps. Nous l'avons établi en partant des lois fondamentales de la mécanique des milieux continus auxquelles nous avons appliquées l'opérateur temporel d'Euler. Ceci nous a permis d'écrire des équations moyennées correspondant au modèle dit bifluide. Une réécriture plus appropriée de ce modèle permet alors d'aboutir au modèle "drift".

Par ailleurs, l'établissement de ce modèle est motivé par une analyse du modèle en enthalpie et des hypothèses s'y rattachant (cf. [BH]). En effet, la formulation en énergie totale est une approche globale. Elle permet de prendre en compte les aspects liés au transport du gaz naturel dans des conduites inclinées ou faiblement inclinées. En outre, elle tient compte des aspects énergétiques non seulement thermiques, comme c'est le cas pour le modèle en enthalpie, mais aussi mécaniques, particulièrement ceux qui se rattachent aux gradients de pression.

Le modèle en énergie totale adopté correspond à un écoulement à configuration dispersée. La phase liquide y est présente sous forme de gouttelettes. Le gaz est considéré parfait et isentropique. Par ailleurs, les phénomènes de turbulence sont pris en compte seulement dans les termes non linéaires convectifs des lois de conservation. Ces hypothèses nous ont permis d'établir un système d'équations aux dérivées partielles non linéaire sous forme conservative. Il est constitué des quatre équations de bilan suivantes:

- une équation de continuité pour la conservation de la masse du mélange.
- Une équation de diffusion qui traduit la conservation de la massephasique liquide. Cette équation est beaucoup plus générale que celle du modèle en enthalpie et peut s'appliquer à tout type de configuration.
- Une équation de quantité de mouvement incluant le terme de gravité. La prise en compte de l'inclinaison de la conduite est donc garantie.
- Une équation de conservation de l'énergie totale du fluide. Celle-ci fait intervenir les flux thermiques, les dissipations visqueuses, les énergies de pression et le travail des forces gravitationnelles.

Par ailleurs, la principale contribution de ce travail se situe au niveau de l'approche asymptotique adoptée au niveau de la modélisation. Elle repose sur l'idée que tous les phénomènes thermodynamiques ayant lieu dans le fluide en mouvement s'effectuent selon une direction privilégiée qui est l'axe de la conduite. Cette hypothèse fondamentale est licite compte tenu des caractéristiques géométriques des conduites de gaz (le rapport des longueurs aux diamètres de celles-ci peut atteindre  $10^5$ ). Appliqué aux équations de conservation, ce développement permet d'effectuer un "splitting" du modèle globale de l'écoulement. Il ramène ainsi le problème tridimensionnel en un problème essentiellement unidimensionnel. Ceci qui constitue une simplification majeur pour la résolution numérique.

Dans la seconde partie de ce travail, nous nous sommes intéressés à l'aspect résolution numérique des modèles mathématiques obtenus. Nous avons donc construit des schémas d'approximation aux différences finies pour résoudre les deux systèmes aux dérivées partielles en énergie totale et en enthalpie. Les résultats obtenus précédemment (cf. [Ba], [BH]) nous ont amené à construire et à mettre en œuvre sur ordinateur cinq schémas implicites. Les approximations en temps sont toutes décentrées à gauche et d'ordre 1. Les approximations en espace sont de deux types: décentrées d'ordre 1 et centrées d'ordre 2. Nous avons évalué les performances de chaque schéma construit en menant des expériences numériques pour différentes valeurs des pas d'espace et de temps. Il ressort des résultats obtenus que les schémas décentrés sont plus robustes que les centrés. En effet, les schémas centrés "ICS" et "IFCS" semblent être inconditionnellement instables alors que les schémas "IBFS" et "IBS" ne présente qu'un fort pique en

début de conduite qui s'amortit très vite lorsque l'en s'éloigne. Au vu des résultats numériques obtenus, et bien que nous ne puissions pas le démontrer, il nous semble que ce pique serait beaucoup plus dû à la nature du système d'équations aux dérivées partielles qu'à une instabilité numérique. En effet, même si les conditions initiales du système sont très régulières, rien ne garantit a priori que la solution le sera. Ces phénomènes sont classiques et parfaitement connus par les spécialistes des systèmes hyperboliques non linéaires. Enfin, l'erreur relative obtenue pour ces deux schémas se réduit d'autant plus lorsque le pas d'espace est petit.

Pour conclure, nous avons sur le plan de la modélisation proposé un modèle asymptotique en énergie totale assez générale pour l'étude des écoulements à phase liquide dispersée dans les conduites. Ce modèle ainsi que celui en enthalpie, constituent des outils d'analyse qui peuvent s'appliquer à une large gamme de problèmes de transport. Toutefois, il serait intéressant dans l'avenir de pouvoir inclure dans chaque modèle, des lois constitutives relatives au gaz naturel et à ses condensats. Nous pensons particulièrement aux équations d'état de Peng-Robinson couramment utilisés dans le domaine pétrolier. Par ailleurs, il reste à s'assurer de la validité des deux modèles par rapport aux phénomènes rencontrés dans la réalité. Cet objectif ne peut être atteint sans une collaboration effective avec les industriels concernés.

Sur le plan numérique, et au vu des résultats obtenus, une étude mathématique du système en énergie totale et en enthalpie s'impose (calcul des invariants, cadre fonctionnel, régularité des solutions, ...). Ceci permettrait alors d'écrire les bonnes conditions aux limites et de s'assurer que les problèmes établis sont bien posés. En outre, cette étape est indispensable si nous voulons construire des schémas numériques robustes et fiables pour la résolution de ce type problème.

Annexe A

**Solutions  
Analytiques**

## 1 ECOULEMENT VRAIMENT DIPHASIQUE

Les conditions initiales et les conditions aux limites introduites pour les différents tests numériques effectués sont choisies de sorte que la solution analytique du problème continu corresponde à ce qui suit:

### 1.1 Problème en énergie totale

En imposant les lois constitutives suivantes:

$$\Gamma_l = a\alpha_0\rho_l\rho \quad (\alpha, \alpha_0) \in \mathfrak{R}^{*2} \quad (\text{A.1})$$

$$P_{eff} = P_g + \nu_0\alpha_l^p \quad p = 1 \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{v}_{ij} = (1 - \alpha_l)^n \mathbf{v}_\infty \quad n = 2 \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{P_g}{\rho_g} = c = const \quad \gamma = 1 \quad (\text{A.4})$$

et en anulant le champ de gravité terrestre, une solution analytique du problème continu en énergie totale prend la forme suivante:

$$\rho = \frac{1}{at+b} \quad b \in \mathfrak{R} \quad (\text{A.5}_i)$$

$$\alpha_l = \alpha_0 + A\rho \quad A \in \mathfrak{R}^* \quad (\text{A.5}_{ii})$$

$$U_3 = (az+d)\rho \quad d \in \mathfrak{R} \quad (\text{A.5}_{iii})$$

$$e = (az+d)g(t) + h(t) \quad (\text{A.5}_{iv})$$

avec:

$$g(t) = (\rho - A_0) + A_1\rho \ln \rho + A_2\rho$$

$$h(t) = \frac{1}{2}(C_{-1} - D_0)\rho^{-2} + (A_1B_{-1} + C_0 - D_1 - cN_2 - \nu_0\alpha_0)\rho^{-1} + \\ (A_1B_1 - C_2 + D_3 - 2aA\mu_l)\rho - \frac{1}{2}(C_3 - D_4)\rho^2 + \\ \left( D_2 - C_1 + \nu_0A - 2a\alpha_0\mu_l - A_1B_1\rho + A_1B_{-1}\rho^{-1} - \frac{1}{2}A_0B_0 \ln \rho - cN_1 \ln(B - \rho) \right) \ln \rho$$

où les différentes constantes correspondent aux valeurs suivantes:

$$A_0 = U_{3\infty}\alpha_0\rho_l(1 - \alpha_0)$$

$$A_1 = -U_{3\infty}(1 - \alpha_0 - A\rho_l(1 - 2\alpha_0))$$

$$A_2 = U_{3\infty}A(1 - A\rho_l)$$

$$B = A^{-1}(1 - \alpha_0)$$

$$B_{-1} = U_{3\infty}\alpha_0\rho_l(1 - \alpha_0)$$

$$B_0 = -U_{3\infty}((1 - A\rho_l)(1 - \alpha_0) + A\alpha_0\rho_l)$$

$$B_1 = U_{3\infty}A(1 - A\rho_l)$$

$$C_{-1} = -B_{-1}A_0$$

$$C_0 = B_{-1} - A_0B_0$$

$$C_1 = B_{-1}A_2 + B_0 - B_1A_0$$

$$C_2 = B_0A_2 + B_1$$

$$C_3 = B_1A_2$$

$$D_0 = -(U_{3\infty}\alpha_0\rho_l(1-\alpha_0))^2$$

$$D_1 = U_{3\infty}^2\rho_l(1-\alpha_0)(\alpha_0(1-\alpha_0) + 2A\rho_l\alpha_0(2\alpha_0 - 1))$$

$$D_2 = -U_{3\infty}^2\rho_l\left(2A\alpha_0(1-2A\rho_l)(1-\alpha_0) - A(1-\alpha_0)^2(1-A\rho_l) + \alpha_0^2A^2\rho_l\right)$$

$$D_3 = -U_{3\infty}^2A^2\rho_l(2(1-\alpha_0)(1-A\rho_l) - \alpha_0(1-2A\rho_l))$$

$$D_4 = U_{3\infty}^2A^3\rho_l(1-A\rho_l)$$

$$N_1 = \frac{A}{1-\alpha_0}\left(\frac{1-A\rho_l}{A} - \frac{\alpha_0\rho_l}{1-\alpha_0}\right)$$

$$N_2 = -\frac{\alpha_0\rho_l}{1-\alpha_0}$$

## 1.2 Problème en enthalpie

Pour le problème en enthalpie, les lois constitutives sont les suivantes:

$$\Gamma_n = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$P_{eff} = P_g + v_0\alpha_l^p \quad p > 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{v}_{ij} = (1-\alpha_l)^n \mathbf{v}_\infty \quad n > 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{P_g}{\rho_g^\gamma} = c = const \quad \gamma = c_p = 2 \quad (\text{A.9})$$

Ceci nous amène à considérer la solution analytique suivante:

$$\rho = \frac{1}{at+b} \quad (a, b) \in \mathfrak{R}^* \times \mathfrak{R} \quad (\text{A.10})_i$$

$$\alpha_l = at+b \quad (\text{A.10})_{ii}$$

$$U_3 = \frac{\alpha+1}{at+b} \quad (\text{A.10})_{iii}$$

$$h = \frac{1}{a}\left(\frac{\alpha+1}{at+b} + U_{3\infty}\left(\ln\left(\frac{b}{at+b}\right) + at\right) + U_{3\infty}\rho_l\left(\frac{(at+b)^2-b^2}{2} - \frac{(at+b)^3-b^3}{3}\right)\right) \quad (\text{A.10})_{iv}$$

## 2 ECOULEMENT DE GAZ PUR

Les lois constitutives dans ce cas sont les mêmes pour les deux problèmes en énergie totale et en enthalpie. Elles se réduisent à la seule loi d'état du gaz qui prend la forme:

$$\frac{P_g}{\rho_g^\gamma} = c = const. \quad \gamma = c_p = 2 \quad (\text{A.11})$$

## 2.1 Problème en énergie totale

1ère Solution

$$\rho = \frac{1}{b-\alpha t} \quad (b, \alpha) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^* \quad (\text{A.12})_i$$

$$U_3 = \frac{a-\alpha z}{b-\alpha t} \quad a \in \mathfrak{R} \quad (\text{A.12})_{ii}$$

$$e = \ln \left( \frac{a-\alpha z}{b-\alpha t} \right)^{\frac{4}{\alpha}} - \frac{c}{b-\alpha t} \quad A \in \mathfrak{R}^* \quad (\text{A.12})_{iii}$$

2ème Solution

$$\rho = (ct^2 + at + d) + (b - z) \quad (a, d, b) \in \mathfrak{R}^* \times \mathfrak{R}^2 \quad (\text{A.13})_i$$

$$U_3 = 2ct + a \quad (\text{A.13})_{ii}$$

$$e = \lambda \exp(A(z - ct^2 - at)) \quad (\lambda, A) \in \mathfrak{R}^2 \quad (\text{A.13})_{iii}$$

## 2.2 Problème en enthalpie

$$\rho = (ct^2 + t) + (a - z) \quad a \in \mathfrak{R} \quad (\text{A.14})_i$$

$$U_3 = 2ct + 1 \quad (\text{A.14})_{ii}$$

$$h = c \frac{\gamma}{\gamma-1} (ct^2 + t + a - z) \quad (\text{A.14})_{iii}$$

## Références

|

- [Ad] M.A. ADEWUMI, L. MUCHARAM and R.W. WATSON, Field Study and Modeling of Condensation in a Gas Distribution Pipeline, 64th Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers, San Antonio, TX, October 8-11, 1989, SPE # 19811.
- [Ar] R. ARIS, Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1962.
- [Ba] A. BAGGAG, Contribution au Calcul par la Méthode aux Différences Finies des Ecoulements Diphasiques, Rapport d'Ingénieur, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, 1990.
- [Be] S. BENZONI-GAVAGE, Analyse Numérique des Modèles Hydrodynamiques d'Ecoulements Diphasiques Instationnaires dans les Réseaux de Production Pétrolière, Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard, Lyon I, 1991.
- [Ben] K.H. BENDIKSEN, D. MALNES, R. MOE and S. NULAND, The Dynamic Two-Fluid Model OLGA: Theory and Application, Society of Petroleum Engineers, 1989, SPE # 19451.
- [BH] A.H.R. BOUTEKEDJRET et M. HABOUSSI, Une Approche Mathématique et Numérique pour l'Etude des Ecoulements Diphasiques dans les Conduites, Rapport d'Ingénieur, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, 1992.
- [BHD] A.H.R. BOUTEKEDJRET, M. HABOUSSI and R. DJELLOULI, An Euler 3D-Asymptotic Model Describing a Dispersed Two-Phase Flow in a Duct, Proceedings of the Second European Computational Fluid Dynamics Conference, Stuttgart, Germany, September 5-8, 1994.
- [Br] J.P. BRILL and S.J. ARIRACHAKARAM, State of Art in Multiphase Flow, J. of Petroleum Technology, 1992, SPE # 23835.
- [By] G.D. BYRNE and C.A. HALL, Numerical Solution of Systems of Nonlinear Algebraic Equations, Academic Press, 1973.
- [Da] R. DAUTRAY et J.L. LIONS, Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques: Problèmes d'Evolution,
- [De] J.M. DELHAYE, M. GIOT and M.L. RIETHMULLER, Thermohydraulics of Two-Phase Systems for Industrial Design and Nuclear Engineering, Hemisphere, 1981.
- [Fl] C.A.J. FLETCHER, Computational Techniques for Fluid Dynamics, Volume I & II, Springer-Verlag, Second Edition, 1991.
- [Fu] E.M. FURUHOLT, Multiphase Technology: is it of Interest for Future Field Development?, SPE European Petroleum Conference, London, UK, October 16-19, 1988, SPE # 18361.
- [Gl] R. GLOWINSKI, Computing Methods in Applied Sciences and Engineering', Proceedings of the 10th International Conference on Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, Paris 11-14 February, France, Nova Science Publishers, 1992.
- [Gr] P. GRIFFITH, Multiphase Flow in Pipes, J. of Petroleum Technology, 1984, SPE # 12895.
- [Ho] K.A. HOFFMANN, Computational Fluid Dynamics for Engineers, Engineering Educational System, 1989.
- [Il] V. ILIC and R. THORN, Multiphase Metering for Production Pipeline Flows, Society of Petroleum Engineers Asia-Pacific Conference, Sydney, Australia, September 13-15, 1989, SPE # 19483.
- [In] F.P. INCROPERA and D.P. DEWITT, Fundamentals of Heat and Mass Transfer, John Wiley & Sons, 1985.
- [Is] M. ISHII, Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow, Eyrolles, 1975.
- [Le] P. LEFLOCH, Contribution à l'Etude Théorique et à l'Approximation Numérique des Systèmes Hyperboliques Non Linéaires. Application aux Equations de la Dynamique des Gaz, Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, Palaiseau 1988.
- [Lu] PAU CHANG LU, Introduction to the Mechanics of Viscous Fluid, Mc. Graw Hill, 1977.
- [Mf] G.B.S. MFONFU and A.S. GRADER, Versatile Implicit Four-Point Method for Transient Two-Phase Pipeline Flow, 64th Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers, San Antonio, TX, October 8-11, 1989, SPE # 19703.
- [Mo] J.L. MONTAGNE, Une Application de la Méthode des Eléments Finis Mixte au Calcul Bidimensionnel d'un Fluide Diphasique, Thèse de Docteur Ingénieur, Université Paris Sud, Orsay, 1981.
- [Mu] L. MUCHARAM and M.A. ADEWUMI, Study of Gas Condensation in Transmission Pipelines Using a Hydrodynamic Model, 63th Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers, Houston, TX, October 2-5, 1988, SPE # 18234.
- [Ol] R.M. OLSON, Essentials of Engineering Fluid Mechanics, Intext Educational Publishers, Third Edition, 1973.
- [Pa] H. PASCAL, Ecoulements Non Permanents dans les Gazoducs, Technip, 1972.
- [Pn] D. PNUELI and C. GUTFINGER, Fluid Mechanics, Cambridge University Press, 1992.
- [Ra] P.A. RAVIART, Systèmes Hyperboliques, Cours Université Paris VI, 1984.
- [Rai] R. RAI, P.K. SHARMA and R.K. MUKERJIE, Multiphase Long-Distance Pipeline Transportation: An Emerging Technology for Offshore Production, Society of Petroleum Engineers, 1991, SPE # 21734.
- [Sa] L. SAINSAULIEU, An Euler System Modeling Vaporizing Sprays, CMAP Rapport n°247, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1991.

- [Sa1] L. SAINSAULIEU, Modélisation, Analyse Mathématique et Numérique d'Écoulements Diphasiques Constitués d'un Brouillard de Gouttes, Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, Palaiseau 1991.
- [To] I. TOUMI, Etude du Problème de Riemann et Construction de Schémas Numériques Type Goudounov Multidimensionnels pour des Modèles d'Écoulement Diphasique, Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1989.
- [Vi] J.P. VILLA, Sur la Théorie et l'Approximation Numérique de Problèmes Hyperboliques Non Linéaires. Application aux Equations de Saint Venant et à la Modélisation des Avalanches de Neige Dense, Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1986.
- [Wa] G.B. WALLIS, One Dimensional Two-Phase Flow, Mc. Graw Hill, 1969.
- [Wag] S. WAGNER, E.H. HIRSCHEL, J. PERIAUX and R. PIVA, Computational Fluid Dynamics '94, Proceedings of the Second European Computational Fluid Dynamics Conference, Stuttgart, Germany, September 5-8, John Wiley & Sons, 1994.
- [Wy] G.J. VAN WYLEN, R.E. SONNTAG and P.DESROCHERS, Fundamentals of Classical Thermodynamics, John Wiley & Sons, Third Edition, 1985.