

11/97

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة - BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

## **PROJET ~~DE FIN~~ D'ETUDES**

*Pour l'obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat en Génie-Mécanique*

### SUJET

**ANALYSE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE  
D'UN REDUCTEUR A ENGRENAGES A AXES  
PARALLELES EN REGIME TRANSITOIRE**

**Proposé par :**

MM : H.BELHANECHÉ  
S.LARBI

**Etudié par :**

MM : ROUIKHA Yazid  
: TALBI Mohamed

**Dirigé par :**

MM : H.BELHANECHÉ  
S.LARBI

**PROMOTION**  
/ SEPTEMBRE 1997 /

E.N.P. 10 , Avenue Hassen BADI - EL-Harrach - Alger

République Algérienne Démocratique et Populaire

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Ecole Nationale Polytechnique  
Département de Génie Mécanique

## Projet de fin d'études

pour l'obtention du Diplôme d'Ingeniorat d'Etat  
en Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# ANALYSE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UN RÉDUCTEUR À ENGRENAGES CYLINDRIQUE EN RÉGIME TRANSITOIRE

Proposé par :

*Mr H. Belhaneche*

*Mr S. Larbi*

Etudié Par :

*Mr Talbi Mohammed*

*Mr Rouikha Yazid*

Dirigé par :

*Mr H. Belhaneche*

*Mr S. Larbi*

Promotion  
- Octobre 1997 -

E.N.P. 10, Avenue Hassen Badi-El-Harrach-Alger

## REMERCIEMENTS



*Nous tenons au début de ce mémoire à exprimer notre profonde gratitude envers tous ceux et celles qui ont contribué de près ou de loin à notre formation et aux résultats aux quels nous sommes parvenus.*

*Que Mr.H.BELHANECHÉ qui nous a été de très bon conseil, trouve ici l'expression de notre profonde gratitude et de nos remerciements les plus vifs, de même pour Mr.S.LARBI.*

*Nos remerciements s'adressent également à tous les membres du jury qui ont accepté de juger ce travail.*

*notre gratitude s'adresse aussi à tous les membres du centre de calcul et de la bibliothèque de l'ENP.*

*Si ce travail sera un jour de quelque utilité aux étudiants qui le liront, nous nous estimons largement récompenser et soulager des soucis que nous avons assailli pendant sa rédaction.*

*Enfin nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail.*

## ملخص

تهدف دراستنا هذه إلى إنجاز برنامج عددي يسمح بمحاكاة السلوك الديناميكي لعلبة السرعات ذات العجلات الأسطوانية ذي الأسنان المستقيمة أو المائلة في النظام الإنتقالي باختيار النموذج كتلة - نابض .

## ABSTRACT

The object of this study is to elaborate a calculus computer program to simulate the dynamic behavior of the cylinder gear box with helical and spur gear . The used model is mass-spring .

## RESUME

L'objet de cette étude est d'élaborer un code de calcul pour la simulation du comportement dynamique du réducteur à engrenages cylindriques , à dentures droites ou hélicoïdales , en régime transitoire , en adoptant le modèle masses-ressorts .

# SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I-MODELISATION DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UN REDUCTEUR	3
I.1-CINEMATIQUE DU REDUCTEUR INDEFORMABLE	3
I.1.1-Introduction	3
I.1.2-Hypothèses générales	3
I.1.3-Cinématique des corps rigides	3
I.2-RAIDEUR D'ENGRENEMENT	9
I.2.1-Raideur de liaison	9
I.2.2-Influence du film lubrifiant	10
I.3-MODELISATION MASSES-RESSORTS DU REDUCTEUR	12
I.3.1-Introduction	12
I.3.2-Notation	13
I.3.3-Erreur de transmission	13
I.4-EQUATION DU MOUVEMENT	15
I.4.1-Mise en équation du système idéal non amorti	15
I.4.2-Mise en equation du système idéal amorti	21
I.4.3-Mise en équation du système idéal amorti, soumis à un couple moteuret une montée en vitesse variable	21
CHAPITRE II-RESOLUTION DES EQUATIONS	25
II.1-RAIDEUR D'ENGRENEMENT-METHODE DE DISCRETISATION	25
II.1.1-Introduction	25
II.1.2-Détermination de la raideur d'engrènement pour une position des lignes de contact	26
II.1.3-Détermination de la raideur d'engrènement pour différentes positions des lignes au cours du temps	27
II.1.4-Courbes de raideur	27
II.2-CHOIX DU PAS DE TEMPS	28
II.3-RESOLUTION DES EQUATIONS	28
II.3.1-Introduction	28
II.3.2-Présentation de la méthode de NEWMARK	28
II.3.3-Présentation de la méthode des perturbations	30

CHAPITRE III-PRESENTATION DU LOGICIEL	33
III.1-INTRODUCTION	33
III.2-DESCRIPTION DU LOGICIEL	33
CHAPITRE IV-RESULTATS ET DISCUSSION	37
IV.1-INTRODUCTION	37
IV.2-DONNEES GEOMETRIQUES DU REDUCTEUR	37
IV.3-ANALYSE DES RESULTATS	38
IV.3.1-Périodicité de la raideur d'engrènement	38
IV.3.2-résultats et commentaires	42
IV.4- VARIATION DU CHARGEMENT DYNAMIQUE	44
IV.5- VARIATION DE L'ERREUR DE TRANSMISSION	49
IV.6-ORGANIGRAMME DU LOGICIEL	58
IV.7-MENU D'UTILISATION DU LOGICIEL	60
CONCLUSION GENERALE	61
REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE	
ANNEXE I-GEOMETRIE DES ENGRENAGES CYLINDRIQUES	
A DENTURE DROITE ET HELICOIDALE	
A PROFIL EN DEVELOPANTE DE CERCLE	
ANNEXE II-ETUDE VIBRATOIRE :METHODE DES PERTURBATIONS	
ANNEXE III- ALGORITHME DE LA METHODE IMPLICITE DE NEWMARK :	
RESOLUTION PAS A PAS.	
ANNEXE IV- ANALYSE FREQUENTIELLE : DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURRIER	

## principaux symboles utilisés

- $\beta$  : angle d'hélice de taillage
- $\beta_b$  : angle d'hélice de base
- $C_M$  : couple moteur
- $C_F$  : couple du frein
- $I_{1,2}$  : moments d'inertie polaire des roues 1 et 2
- $k(i,j)$  : raideur élémentaire
- $K_t$  : raideur de voile
- $K_f$  : raideur de reflexion des dents
- $K_h$  : raideur hertzienne ou de contact
- $K_L$  : raideur du film lubrifiant
- $K_{moy}$  : raideur moyenne
- $K(t)$  : raideur d'engrènement
- $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  : normales extérieures aux profils en contact
- $P_b$  : pas de base réel
- $P_{bt}$  : Pas de base apparent
- $R_{b1,2}$  : rayons de base des roues 1 et 2
- $R_{p1,2}$  : rayons primitifs des roues 1 et 2
- $R_{a1,2}$  : rayons de tête des roues 1 et 2
- $T_{1,2}$  : intersection du ligne d'action avec cylindre de base de la roue 1,2
- $T_1$  : point début d'engrènement
- $T_2$  : point fin d'engrènement
- $T_m$  : période d'engrènement
- $\bullet, \bullet\bullet$  : dérivée première et seconde par rapport au temps
- $\Omega_1$  : Vitesse de rotation de la roue menante
- $\Omega_2$  : Vitesse de rotation de la roue menée

- $\alpha_0$  : angle de pression de taillage
- $\alpha_n$  : angle de pression normal
- $\alpha_t$  : angle de pression apparent
- $\varepsilon$  : Facteur d'amortissement
- $\theta_{1,2}$  : petites rotations (torsion) causées par la déformabilité des engrenages
- $\theta_{t 1,2}$  : angle de rotation totaux
- $\Delta(M)$  : erreur de transmission
- $Z_{1,2}$  : nombre de dents des roues 1 et 2
- $\varepsilon_\alpha$  : rapport de conduite transversal
- $\varepsilon_\beta$  : rapport de recouvrement
- $\varepsilon_t$  : rapport de conduite total
- $\omega_{1,2}$  : pulsations naturelles du réducteur
- $\alpha$  : amplitude de la variation de la raideur d'engrènement
- $\phi(t)$  : fonction représentant les variations de la raideur d'engrènement

## INTRODUCTION

Les transmissions de puissance par engrenages ont depuis longtemps été largement utilisées du fait de leur grande précision, mais aussi pour leur faible encombrement et leur faible rapport poids/puissance transmise. Depuis quelques dizaines d'années, ces mécanismes ont subi des perfectionnements techniques et technologiques afin d'améliorer leur fonctionnalité tant en durée de vie, résistance et capacité de charge qu'en rapport spécifique poids/puissance.

La qualité croissante des matériaux et des traitements de surface liée aux progrès dans le domaine de la lubrification a entraîné une augmentation assez nette du rapport puissance transmise sur poids des trains d'engrenages. Dans ce contexte, il apparaît nécessaire de définir le plus précisément possible le chargement réel sur la denture.

Ce problème a été étudié à l'origine au début des années 1930 par le comité de recherche sur le chargement dynamique des dents d'engrenages ASME qui a proposé une relation empirique, connue sous le nom d'Equation de Buckingham, permettant d'estimer les surcharges dynamiques[1]. Les études qui suivirent se sont appuyées sur une meilleure connaissance des élasticités de dents droites en développante de cercle et ont permis la construction des premières modélisations du comportement dynamique d'engrenages. Les effets de raideur périodique introduits par l'engrènement et les considérations relatives à la stabilité du système qui en découlent ont été étudiés par la suite.

Le développement des méthodes numériques lié à la possibilité de calculs importants a permis de déterminer de manière plus précise les déflexions et contraintes d'une dent chargée. Parallèlement, les analyses dynamiques se sont affinées avec la prise en compte des contacts hors du plan d'action par d'autres chercheurs et l'introduction des couplages induits par les engrenages droits entre les mouvements instantanés de flexion et de torsion des arbres supports.

Parmi le nombre important de publications répertoriées sur ce sujet, une large majorité a trait au comportement dynamique des engrenages à dentures droites, signalons toutefois les travaux qui portent sur le traitement de modèles simplifiés de réducteur à engrenages hélicoïdaux et les études sur les excitations introduites par l'engrènement combiné à des défauts de profil.

En plus à ces aspects dynamiques, au cours du fonctionnement de réducteurs à engrenages, on constate parfois la présence de vibrations intenses, de bruits et plus particulièrement d'efforts dynamiques importants pouvant dépasser largement l'effort statique dans certaines gammes de vitesses de rotation.

Cette étude a pour but d'étudier le comportement dynamique, en régime transitoire, de réducteur à engrenages cylindriques (droits ou hélicoïdaux), et notamment l'écrasement et la force de contact appliquée au système.

Ainsi, dans un premier temps, la cinématique du réducteur indéformable et la modélisation de ce réducteur seront successivement détaillées:

Puis, la résolution des équations sera mise en place. Une méthode a été utilisée: (Méthode de NEWMARK).

En suite, un logiciel permettant la simulation du comportement dynamique du système sera présenté.

Enfin, une dernière étape consistera en l'exploitation du modèle et l'analyse des résultats obtenus.

## CHAPITRE I

# Modélisation du comportement dynamique d'un réducteur

## CHAPITRE I

### MODELISATION DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UN REDUCTEUR

#### I-1 CINEMATIQUE DU REDUCTEUR INDEFORMABLE

##### I-1-1. INTRODUCTION :

Soit un engrenage (hélicoïdal ou droit) à axes parallèles appartenant à un réducteur constitué d'un pignon devant transmettre le couple moteur, et d'une roue menée.

Afin de déterminer l'évolution de l'écrasement et de la force de contact appliqués à ce système au cours du démarrage (régime transitoire) jusqu'à l'établissement du régime permanent, on fait l'hypothèse des corps rigides [11]

Dans l'analyse de la cinématique des engrenages, les corps solides définissent l'état de référence, pour lequel on peut calculer les déformations élastiques.

##### I-1-2. HYPOTHESES GENERALES :

a - Pas d'erreur de montage donc les axes géométriques coïncident avec les axes instantanés de rotation (pas d'erreur d'excentricité).

b - Les paliers sont rigides. La flexion des arbres moteur et récepteur est négligeable.

c - Les contacts entre les profils actifs se font sur le plan d'action.

d - Les normales aux différents points de contacts, entre profils actifs, font un angle  $\beta_b$

avec l'axe  $(P_1, \vec{Y}_0)$ , lorsque l'engrenage est hélicoïdal.

e - Les écarts de forme ne sont pas pris en compte dans cette étude.

##### I-1-3. CINEMATIQUE DES CORPS RIGIDES :

Pour cette étude on choisit les repères suivants:

Repères:

$\vec{x}_1 \vec{y}_1 \vec{z}_1$   
R1 ( $O_1, X_1, Y_1, Z_1$ ) Lié au solide (1) (pignon)

$\vec{x}_2 \vec{y}_2 \vec{z}_2$   
R2 ( $O_2, X_2, Y_2, Z_2$ ) Lié au solide (2) (roue)

$\vec{x}_0 \vec{y}_0 \vec{z}_0$   
R0 ( $P_1, X_0, Y_0, Z_0$ ) Repère fixe

(Voire figure I-1)

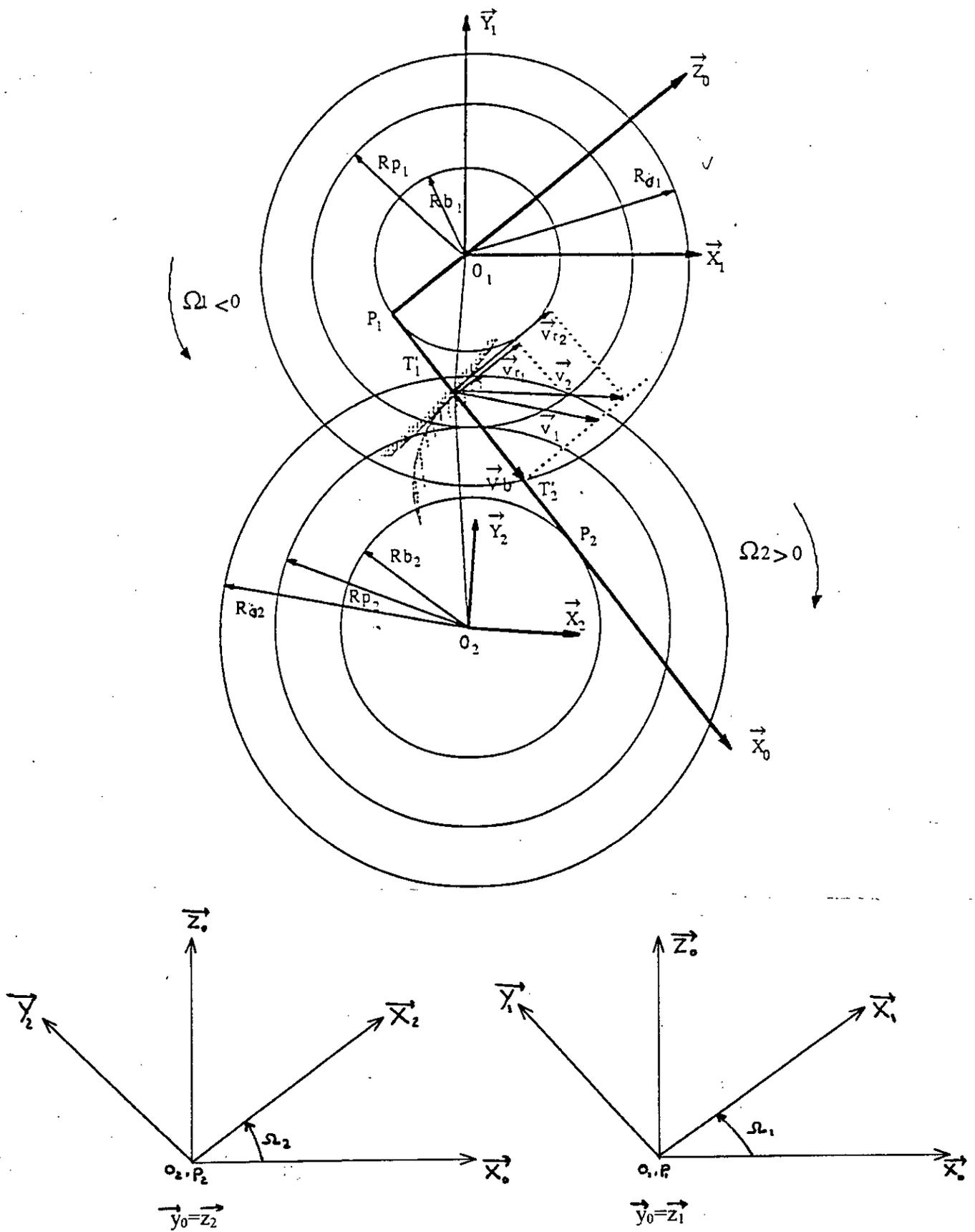


Figure I.1: SCHEMATISATION DU CONTACT ENTRE DEUX ENGRENAGES

**A- Vitesse du point de contact M appartenant au solide (1) :**

Dans le repère  $R_0$  nous avons :

$$\vec{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_1 \\ 0 \end{bmatrix} / R_0 \quad \vec{O_1P_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Rb_1 \end{bmatrix} / R_0 \quad \vec{P_1M} = \begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m = 0 \end{bmatrix} / R_0$$

$$\vec{O_1M} = \vec{O_1P_1} + \vec{P_1M}$$

$$\vec{O_1M} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Rb_1 \end{bmatrix} / R_0 + \begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ 0 \end{bmatrix} / R_0$$

$$\vec{O_1M} = \begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ -Rb_1 \end{bmatrix} / R_0$$

$$\vec{V}_1^{\circ}(M) = \vec{V}^{\circ}(O_1) + \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{O_1M}$$

Le point  $O_1$  étant fixe d'où :

$$\vec{V}^{\circ}(O_1) = 0 \quad \text{d'après les hypothèses (a et b)}$$

Donc :

$$\vec{V}_1^{\circ}(M) = \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{O_1M}$$

$$\vec{V}_1^{\circ}(M) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_1 \\ 0 \end{bmatrix} / R_0 \wedge \begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ -Rb_1 \end{bmatrix} / R_0 = \begin{bmatrix} -Rb_1 \Omega_1 \\ 0 \\ X_m \Omega_1 \end{bmatrix} / R_0 \quad (I.1)$$

La projection de  $\vec{V}_1^{\circ}(M)$  dans le plan d'action est définie par :

$$\vec{V}^{\circ}_{a_1}(M) = -Rb_1 \Omega_1 \vec{X}_0$$

La projection de  $\vec{V}_1^{\circ}(M)$  sur la normale au plan d'action est définie par :

$$\vec{V}^{\circ}_{t_1}(M) = -X_m \Omega_1 \vec{Z}_o$$

$\vec{V}^{\circ}_{a_1}(M)$  : représente la vitesse de déplacement du point de contact M au solide (1) dans le plan d'action par rapport au repère fixe  $R_o$

$\vec{V}^{\circ}_{t_1}(M)$  : représente la vitesse tangentielle aux deux profils actifs, au point M du solide(1) dans le repère fixe  $R_o$ .

La normale au profil du solide (1) est donnée par :

$$\vec{n}_1 = \cos(\beta b) \vec{X}_o - \sin(\beta b) \vec{Y}_o$$

$$\vec{V}_1^{\circ}(M) \cdot \vec{n}_1 = \begin{bmatrix} -Rb_1 \Omega_1 \\ 0 \\ -X_m \Omega_1 \end{bmatrix} / R_o \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta b) \\ -\sin(\beta b) \\ 0 \end{bmatrix} / R_o$$

$$\vec{V}_1^{\circ}(M) \cdot \vec{n}_1 = Rb_1 \Omega_1 \cos(\beta b) \tag{I-2}$$

$\vec{V}_1^{\circ}(M) \cdot \vec{n}_1$  : représente la composante normale de la vitesse au point de contact M du solide S1

**B- Vitesse du point de contact M appartenant au solide (2) :**

Dans le repère  $R_o$  nous avons :

$$\vec{\Omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_2 \\ 0 \end{bmatrix} / R_o ; \vec{O}_2 P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Rb_2 \end{bmatrix} / R_o ; \vec{P}_2 P_1 = \begin{bmatrix} -T_1 T_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} / R_o ; \vec{P}_1 M = \begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m = 0 \end{bmatrix} / R_o$$

voir hypothèse(c)

$$\vec{V}_2^{\circ}(M) = \vec{V}^{\circ}(O_2) + \vec{\Omega}_2 \wedge \vec{O}_2 M$$

Le point (O2) étant fixe d'où :

$$\vec{V}^{\circ}(O_2) = 0 \quad \text{D'après l'hypothèse (a)}$$

$$\vec{V}_2^{\circ}(M) = \vec{\Omega}_2 \wedge \vec{O}_2 M$$

$$\vec{O_2M} = \vec{O_2P_2} + \vec{P_2P_1} + \vec{P_1M}$$

$$\vec{O_2M} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Rb_2 \end{bmatrix} / R_0 + \begin{bmatrix} -T_1T_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} / R_0 + \begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ 0 \end{bmatrix} / R_0$$

$$\vec{O_2M} = \begin{bmatrix} X_m - T_1T_2 \\ Y_m \\ Rb_2 \end{bmatrix} / R_0$$

$$\vec{V_2^o}(M) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_2 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} X_m - T_1T_2 \\ Y_m \\ Rb_2 \end{bmatrix} / R_0$$

$$\vec{V_2^o}(M) = \begin{bmatrix} Rb_2\Omega_2 \\ 0 \\ -\Omega_2(X_m - T_1T_2) \end{bmatrix} / R_0 \tag{I-3}$$

La projection de  $\vec{V_2^o}(M)$  dans le plan d'action est définie par :

$$\vec{V_{a_2^o}}(M) = Rb_2 \Omega_2 \vec{X_0}$$

La projection de  $\vec{V_2^o}(M)$  sur la normale au plan d'action est définie par :

$$\vec{V_{t_2^o}}(M) = -\Omega_2 (X_M - T_1T_2) \vec{Z_0}$$

$\vec{V_{a_2^o}}(M)$  : représente la vitesse de déplacement du point de contact (M) du solide (2) dans le repère fixe  $R_0$

$\vec{V_{t_2^o}}(M)$  : représente la vitesse tangentielle aux deux profils actifs, au point (M) du solide (2) dans le repère fixe  $R_0$

La normale au profil du solide (1) est donnée par :

$$\vec{n}_1 = \cos(\beta_b) \vec{X_0} - \sin(\beta_b) \vec{Y_0}$$

$$\vec{V_2^o}(M) \cdot \vec{n}_1 = \begin{bmatrix} Rb_2 \Omega_2 \\ 0 \\ -\Omega_2 (X_M - T_1T_2) \end{bmatrix} / R_0 \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta_b) \\ -\sin(\beta_b) \\ 0 \end{bmatrix} / R_0$$

$$\vec{V}_2^0(M) \cdot \vec{n}_1 = \cos(\beta_b) \cdot Rb_2 \cdot \Omega_2 \quad (I-4)$$

$\vec{V}_2^0(M) \cdot \vec{n}_1$  : représente la composante normale de la vitesse au point de contact appartenant au solide (2)

### C- Conséquences

D'après l'équation de compatibilité des corps rigides, il vient :

$$\vec{V}_2^1(M) \cdot \vec{n}_1 = 0$$

Alors :

$$\vec{V}_2^0(M) \cdot \vec{n}_1 - \vec{V}_1^0(M) \cdot \vec{n}_1 = 0$$

$$\cos(\beta_b) Rb_1 \Omega_1 + \cos(\beta_b) Rb_2 \Omega_2 = 0$$

D'où :

$$Rb_1 \Omega_1 + Rb_2 \Omega_2 = 0$$

Par la suite :

$$\vec{V}_{a1}^0(M) = \vec{V}_{a2}^0(M)$$

La vitesse de glissement du profil du solide (1) au profil du solide (2)

$$\vec{g}_1^2(M) = \vec{V}^0 t_2(M) - \vec{V}^0 t_1(M)$$

$$\vec{g}_1^2(M) = [(\Omega_1 - \Omega_2) X_M + T_1 T_2 \Omega_2] \vec{Z}_0$$

La vitesse de glissement du profil du solide (2) / au profil du solide (1)

$$\vec{g}_2^1(M) = \vec{V} t_1^0(M) - \vec{V} t_2^0(M)$$

$$\vec{g}_2^1(M) = -[(\Omega_1 - \Omega_2) X_M + T_1 T_2 \Omega_2] \vec{Z}_0$$

La vitesse de glissement du point primitif des deux profils. le point primitif (I) représente l'intersection des deux cercles primitifs de coordonnées :

$$\vec{P}_1 I = \begin{bmatrix} P_1 I \\ Y_I \\ 0 \end{bmatrix} / R_0 \quad \text{avec } P_1 I = \text{tg}(\alpha_0) Rb_1 \quad \text{et} \quad \text{tg} \alpha_0 = \frac{T_1 T_2}{Rb_1 + Rb_2}$$

$$\vec{g}_1^2(I) = [(\Omega_1 - \Omega_2) P_1 I + T_1 T_2 \Omega_2] \vec{Z}_0$$

$$(\Omega_1 - \Omega_2) P_1 I + T_1 T_2 \Omega_2 = - \left( \Omega_2 \frac{Rb_2}{Rb_1} + \Omega_2 \right) \left( \frac{T_1 T_2}{Rb_1 + Rb_2} \right) Rb_1 + T_1 T_2 \Omega_2$$

$$(\Omega_1 - \Omega_2) P_1 I + T_1 T_2 \Omega_2 = - \Omega_2 (Rb_2 + Rb_1) \left( \frac{T_1 T_2}{Rb_1 + Rb_2} \right) + T_1 T_2 \Omega_2 = 0$$

D'où

$$\vec{g}_1^2(I) = \vec{g}_2^1(I)$$

Au point de contact primitif, la vitesse de glissement du solide (1) par rapport au solide (2) ou du solide (2) par rapport au solide (1) est nulle.

#### D- Remarque :

Dans le cas avec erreurs ou écarts de forme, la position du (ou des) point (s) de contact dans la condition des corps rigides n'est pas connu a priori, il faut donc le (ou les) rechercher.

## I.2- RAIDEUR D'ENGREMENT

### I.2.2. RAIDEUR DE LIAISON :

La transmission des charges par engrenage se fait dans le plan d'action par l'engrènement d'un ou plusieurs couples de dents. L'engrènement d'un ou de plusieurs couples de dents entraîne une variation de la raideur au cours du temps. A partir des valeurs de déplacements normaux sous différentes charges, il est possible de déterminer les raideurs selon le plan d'action.

On distingue pour chacun des engrenages trois raideurs distinctes supposées linéaires :

$K_t$  : Raideur de voile

$K_f$  : Raideur de flexion des dents

$K_h$  : Raideur hertzienne ou de contact liant de dents en prise

$K_l$  : Raideur du film lubrifiant.

La raideur équivalente est donnée par :

$$\frac{1}{K_{\text{eq}}} = \frac{1}{K_{t_1}} + \frac{1}{K_{f_1}} + \frac{1}{K_h} + \frac{1}{K_{t_2}} + \frac{1}{K_{f_2}} + \frac{1}{K_l} \quad (I-5)$$

On montrera dans la suite que l'influence de la raideur du lubrifiant est négligeable.

### I-2-3 - INFLUENCE DU FILM LUBRIFIANT :

Dans le contact entre profils adjacents, la présence de frottement entraîne des efforts tangentiels sur les profils et des pertes de puissance, conduisant à un dégagement de calories. Pour réduire le coefficient de frottement entre profils actifs et par suite, diminuer les efforts tangentiels et faciliter l'évacuation de la chaleur dégagée, les contacts sont lubrifiés.

En général, le fluide utilisé est un fluide visqueux, isotherme en régime permanent, il satisfait donc aux hypothèses de linéarité, d'homogénéité et d'isotropie [ 14 ].

Vu que les surfaces de contacts subissent des déformations élastiques sous l'effet de fortes pressions, on est amené à la résolution exacte de l'analyse élastohydrodynamique de **DOWSON** et **HIGGINSON** Pour un contact hertzien lubrifié.

De point de vue analyse mathématique, le contact entre les deux cylindres de base de rayon  $R_{b1}$  et  $R_{b2}$  peut être décrite par une équivalence galet-plan [16].

$$H_m^* \cong 0,985 U^{*0,7} G^{*0,6} W^{*-0,13} \quad ( I.6 )$$

Les paramètres sans dimensions utilisés sont :

$$U^* : \text{Paramètre de vitesse} = \mu_0 \frac{(U_1 + U_2)}{E R_X}$$

$$G^* : \text{Paramètre de matériaux} = \alpha \cdot E$$

$$W^* : \text{Paramètre de charge normale} = \frac{W}{E R_X L}$$

$$H_m^* : \text{Paramètre d'épaisseur du film} = \frac{h}{R_X}$$

$R_X$  : Rayon de courbure au point de contact.

$U_{1,2}$  : Vitesses tangentielles des deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$

$E$  : Module d'élasticité équivalent définis à partir des modules de Young et coefficients de Poisson des deux matériaux:

$$E = \left[ \left( \frac{1 - \lambda_1^2}{E_1} + \frac{1 - \lambda_2^2}{E_2} \right) / \pi \right]^{-1}$$

$\alpha$  : coefficient de piézoviscosité  $\mu = \mu_0 \exp[\alpha p]$

$\mu_0$  : viscosité à pression relative

$\lambda_{1,2}$  : coefficients de Poisson relatifs aux matériaux 1 et 2

$E_{1,2}$  : modules d'Young relatifs aux matériaux 1 et 2

$W$  : La force normale constante appliquée au contact

$L$  : Largeur de contact

$h$  : Epaisseur du film lubrifiant

Dans les conditions où les vitesses tangentielles sont constantes et les matériaux sont les mêmes, l'épaisseur minimale du film lubrifiant est donnée par la formule :

$$H_m^* = C_1 \cdot W^{*-0,13}$$

D'où :

$$W^* = C_2 \cdot H_m^{*-7,692} \quad (I.7)$$

$C_{1,2}$  : sont des constantes

La raideur du film d'huile est donnée par :

$$K_L = \left| \frac{\partial W^*}{\partial H_m^*} \right| = 7,692 C_2 H_m^{*-8,692} \quad (I.8)$$

L'épaisseur du film d'huile ( $h$ ) peut être calculée à partir de la théorie analytique ou numérique, elle est de l'ordre de  $0,01 \mu\text{m}$  à  $1 \mu\text{m}$ , de même pour  $H_m^*$ .  
Pour les deux valeurs limites de  $H_m^*$ , on constate que la raideur  $K_L$  est de l'ordre de  $10^{52}$  à  $10^{60}$  N/m d'où  $K_L \gg K_1, K_2$  qui sont de l'ordre de  $10^8$  N/m (raideurs associées aux deux engrenages).

$$\text{D'où : } \frac{1}{K_L} \ll \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

La raideur du film est très grande donc le film est très peu déformable ( Fig. I.2 )

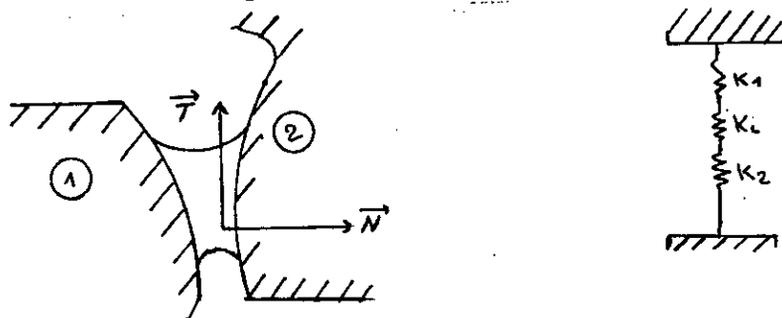


Fig. I-2 : INFLUENCE DU FILM LUBRIFIANT

La lubrification modifie très peu la raideur de liaison donc on peut négliger son effet sur le calcul de la raideur équivalente d'où :

$$\frac{1}{K_{\text{éq}}} = \frac{1}{K_{t_1}} + \frac{1}{K_{f_1}} + \frac{1}{K_{t_2}} + \frac{1}{K_{f_2}} + \frac{1}{K_H} \quad (I-9)$$

Ainsi, à tout instant, la raideur équivalente est égale à la raideur de l'engrènement. Elle sera notée  $K(t)$  car on verra, par la suite, qu'elle est variable au cours du temps ..

### I.3- MODELISATION MASSES -RESSORT DU REDUCTEUR

#### I.3-1 - INTRODUCTION

A partir des résultats statiques, on construit un modèle représentatif des différentes approches de l'analyse dynamique existantes dans la littérature .

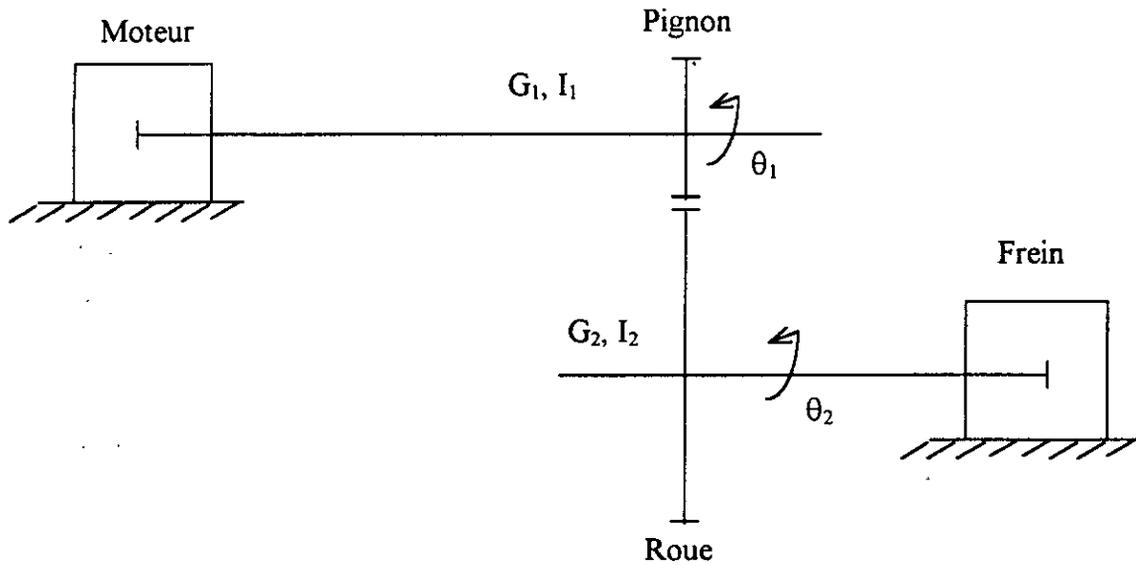


Figure I.3 : MODELISATION MASSES - RESSORTS DU REDUCTEUR

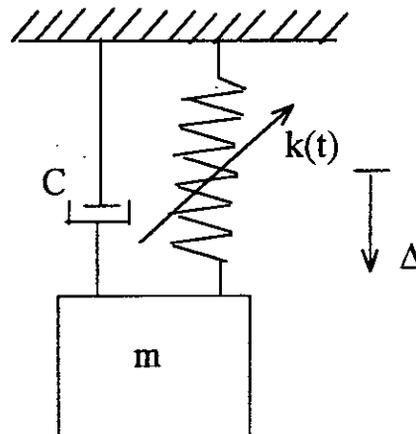


Figure I.4 : MODELE SIMPLIFIE A UN SEUL DEGRE DE LIBERTE

Une série d'hypothèses est formulée:

- a - Les perturbations par rapport aux mouvements nominaux , dans les conditions des corps rigides , sont caractérisées par des petites rotations ( vibrations de torsion ).
- b - Les équations développées découlent de la modélisation masses- ressorts du système mécanique
- c - Il n'y a pas d'erreurs de montage dans les engrenages qui fonctionnent en régime lubrifié.

La formulation du problème dynamique par les équations de LAGRANGE sera systématiquement utilisée.

### I-3-2- NOTATION

$\theta_1$  : Petite perturbation du pignon par rapport à l'état de référence, condition de fonctionnement des corps rigides .

$\theta_2$  : Petite perturbation de la roue par rapport à l'état de référence .

$I_1$  : Inertie de masse du pignon

$I_2$  : Inertie de masse de la roue .

$G_{1,2}$  : Modules de cisaillement des matériaux constituant le pignon et la roue .

$\Omega_1$  : Vitesse de rotation à l'entrée dans les conditions des corps rigides.

$\Omega_2$  : Vitesse de rotation à la sortie dans les conditions des corps rigides.

### I-3-3- ERREUR DE TRANSMISSION

Un engrenage sans erreurs géométriques ou de montage parfaitement rigide sur des supports indéformables, transmet des mouvements de rotation uniformes. C'est la cinématique des solides .

Lorsqu'on considère les différentes élasticités des éléments constituant le mécanisme, la cinématique est la même uniquement lorsque la charge transmise est nulle. Sous l'action des couples appliqués, les éléments se déforment , ces déplacements vont perturber la cinématique de l'engrènement en introduisant des composantes parasites dans les mouvements de rotation . Cet écart par rapport à la cinématique des corps rigides est appelé " erreur de transmission "

L'erreur de transmission est définie comme la déviation de position des engrenages en cours de fonctionnement par rapport à la position qu'occupent les deux engrenages s'ils sont indéformables et géométriquement parfaits [ 16 ]

Cette erreur a une tendance à rapprocher les dentures les unes des autres , les profils de dentures ne sont plus conjugués , ce qui crée des chocs d'engrènement . Par ailleurs , les dents ne pouvant s'interpénétrer , la structure est obligée de se déformer , une zone de contact se forme dans laquelle un champ de contraintes est généré.

L'erreur de transmission en un point M appartenant aux deux solides  $S_1$  et  $S_2$  est définie par :

$$\Delta(M) = d^{\circ} O_1 M \cdot n_1 + d^{\circ} O_2 M \cdot n_1 = X_1 + X_2 \quad (I-10)$$

$d^{\circ} O_1 M \cdot n_1$  : Représente la variation normale (suivant  $n_1$ ) du point de contact M (point de référence dans la condition des corps rigides sans écarts géométriques) appartenant à la roue n°1 par rapport à l'état de référence.

$d^{\circ} O_2 M \cdot n_2$  : Représente la variation normale (suivant  $n_2$ ) du point de contact M (point de référence dans la condition des corps rigides sans écarts géométriques) appartenant à la roue n°2 par rapport à l'état de référence.

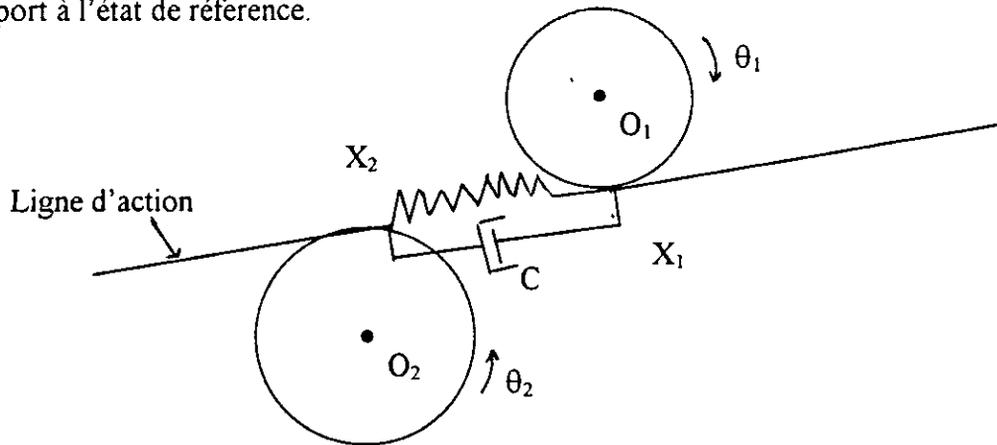


Figure. I-5: MODELE D'ENGREMENT

Avec  $\Delta < 0$  : Ecrasement  
 $\Delta > 0$  : Ecartement

D'après ces conventions de signe, l'erreur de transmission est comptée positivement si on a perte de contact, donc séparation des deux dents adjacentes et négativement si le contact entre le couple de dents est maintenu

Un point M peut être défini par (i, j) avec :

- i : le numéro de ligne contenant le point M
- j : le numéro de segment contenant le point M

$$\theta_1^t = \Omega_1 t + \theta_1 \quad \text{et} \quad d^{\circ} O_1 M \cdot n_1 = \frac{\partial^{\circ} O_1 M}{\partial \theta_1^t} \cdot n_1 d \theta_1^t \quad (I.11)$$

$$\theta_2^t = \Omega_2 t + \theta_2$$

Par rapport aux références, corps rigides, sans erreurs de forme, une variation de l'angle total de torsion  $\partial \theta_1^t$  entraîne un déplacement du point M appartenant au solide  $S_1$ , donné par :

$$\vec{\partial}^{\circ} \text{OM}_1 = -Rb_1 \cdot \cos(\beta_b) \cdot \vec{\partial} \theta_1^t \cdot n_1$$

D' où :

$$\frac{\vec{\partial}^{\circ} \text{OM}_1}{\vec{\partial} \theta_1^t} \cdot n_1 = -Rb_1 \cdot \cos(\beta_b) \quad (\text{I-12})$$

$$d \theta_1^t = \Omega_1 (t + dt) + \theta_1 - \Omega_1 t - \theta_1 \text{ réf}$$

$$d \theta_1^t = \theta_1 + \Omega_1 dt \quad (\theta_{1 \text{ réf}} = 0)$$

$$d\theta_1^t = \theta_1 + \Omega_1 dt \quad (\text{I-13})$$

Des équations (I-11) , (I-12) et (I-13) on aura :

$$d^{\circ} \text{O}_1 \text{M} \cdot n_1 = -Rb_1 (\theta_1 + \Omega_1 dt) \cos(\beta_b) \quad (\text{I-14})$$

De même :

$$d^{\circ} \text{O}_2 \text{M} \cdot n_2 = -Rb_2 (\theta_2 + \Omega_2 dt) \cos(\beta_b) \quad (\text{I-15})$$

Alors :

$$\Delta(M) = \Delta(i, j) = -\cos(\beta_b) [ Rb_1 \Omega_1 + Rb_2 \Omega_2 ] dt - \cos(\beta_b) [ Rb_1 \theta_1 + Rb_2 \theta_2 ]$$

$$\text{En un point de contact } M_c, \text{ on a : } \Omega_2(t) = \frac{-Rb_1}{Rb_2} \Omega_1$$

En introduisant cette expression dans la précédente, il vient :

$$\Delta(i, j) = -\cos(\beta_b) [ Rb_1 \theta_1 + Rb_2 \theta_2 ] \quad (\text{I-16})$$

## I-4 - EQUATIONS DU MOUVEMENT

### I-4-1 - MISE EN EQUATION DU SYSTEME IDEAL NON AMORTI

On envisage un système pignon-roue devant transmettre un couple moteur  $C_1$ .  
Les équations de **LAGRANGE** permettent l'écriture systématique des équations du mouvement d'un système.

Elles sont particulièrement bien adaptées aux problèmes de vibrations où les déplacements généralisés sont souvent indépendants.

Les équations de **LAGRANGE** qui donnent les équations du mouvement du système sont :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (\text{I - 17})$$

avec  $i = 1, 2$

ou

T : L'énergie cinétique.

U : L'énergie de déformation ( énergie potentielle)

W : Travail virtuel des forces extérieures.

$q_i$  : Coordonnées généralisées du système.

#### A) Energie de déformation :

L'énergie de déformation, au niveau de l'engrènement est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} \Delta_{ij}^2 \quad (\text{I - 18})$$

avec  $\Delta_{ij} = -\cos(\beta_b) [Rb_1 \theta_1 + Rb_2 \theta_2]$

donc

$$U = \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} [Rb_1 \theta_1 + Rb_2 \theta_2]^2 \cos^2(\beta_b) \quad (\text{I - 19})$$

#### B) Energie cinétique :

L'énergie cinétique des engrenages est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_2)^2 \quad (\text{I - 20})$$

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\Omega_1 + \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} I_2 (\Omega_2 + \dot{\theta}_2)^2 \quad (\text{I - 21})$$

avec

$\theta_{1,2}$  : Petites perturbations due aux irrégularités de transmission .

$\Omega_1$  : Vitesse de rotation instantanée à l'entrée, dans les conditions des corps rigides.

### C) Application des équations de LAGRANGE :

$$* \frac{\partial T}{\partial \theta_1} = 0$$

$$* \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{1}{2} I_1 2 (\Omega_1 + \dot{\theta}_1) = I_1 (\Omega_1 + \dot{\theta}_1)$$

$$* \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right] = I_1 (\dot{\Omega}_1 + \ddot{\theta}_1)$$

$$* \frac{\partial U}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} 2 [Rb_1 \theta_1 + Rb_2 \theta_2] Rb_1 \cos^2(\beta_b)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = \sum_{ij} k_{ij} Rb_1 \cos^2(\beta_b) [Rb_1 \theta_1 + Rb_2 \theta_2]$$

$$* \frac{\partial T}{\partial \theta_2} = 0$$

$$* \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{1}{2} I_2 2 (\Omega_2 + \dot{\theta}_2) = I_2 (\Omega_2 + \dot{\theta}_2)$$

$$* \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right] = I_2 (\dot{\Omega}_2 + \ddot{\theta}_2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} 2 [Rb_1 \theta_1 + Rb_2 \theta_2] Rb_2 \cos^2(\beta_b)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = \sum_{ij} kij Rb_2 \cos^2(\beta_b) [ Rb_1 \theta_1 + Rb_2 \theta_2 ]$$

**Remarque :**

On néglige les raideurs torsionnelles des arbres d'entrée et de sortie.  
En appliquant les équations de LAGRANGE, on obtient :

$$\begin{cases} I_1 (\dot{\Omega}_1 + \ddot{\theta}_1) + \sum kij Rb_1 \cos^2(\beta_b) [ Rb_1 \theta_1 + Rb_2 \theta_2 ] = C_M \\ I_2 (\dot{\Omega}_2 + \ddot{\theta}_2) + \sum kij Rb_2 \cos^2(\beta_b) [ Rb_1 \theta_1 + Rb_2 \theta_2 ] = C_F \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 + \sum kij Rb_1^2 \cos^2(\beta_b) \theta_1 + \sum kij Rb_1 Rb_2 \cos^2(\beta_b) \theta_2 = C_M - I_1 \dot{\Omega}_1 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + \sum kij Rb_1 Rb_2 \cos^2(\beta_b) \theta_1 + \sum kij Rb_2^2 \cos^2(\beta_b) \theta_2 = C_F - I_2 \dot{\Omega}_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum kij Rb_1^2 \cos^2(\beta_b) & \sum kij Rb_1 Rb_2 \cos^2(\beta_b) \\ \sum kij Rb_1 Rb_2 \cos^2(\beta_b) & \sum kij Rb_2^2 \cos^2(\beta_b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_M - I_1 \dot{\Omega}_1 \\ C_F - I_2 \dot{\Omega}_2 \end{bmatrix} \quad (I.22)$$

Le couple  $C_F$  peut s'exprimer à partir notamment du couple  $C_M$ , en appliquant le théorème de l'énergie cinétique ( corps rigides ).

$$\frac{dT}{dt} = P_{ext} + P_{int} \quad (I.23)$$

$$T = 1/2 I_1 \Omega_1^2 + 1/2 I_2 \Omega_2^2 \quad (\text{ Régime statique })$$

$$P_{ext} = C_M \Omega_1 + C_F \Omega_2$$

$$P_{int} = F_{1/2} \cdot V_2^0(M) + F_{2/1} \cdot V_1^0(M)$$

Avec :

$$\vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1} = 0$$

Donc :

$$P_{int} = F_{1/2} \cdot V_2^0(M) - F_{1/2} \cdot V_1^0(M)$$

$$P_{int} = F_{1/2} [ V_2^0(M) - V_1^0(M) ]$$

$$\vec{P}_{int} = F_{1/2} \cdot \vec{V}_2^1(M)$$

On considère ici qu'il n'y a pas de frottement donc:

$$\vec{V}_2^1(M) = 0 \Rightarrow P_{int} = 0$$

Alors:

$$I_1 \Omega_1 \dot{\Omega}_1 + I_2 \Omega_2 \dot{\Omega}_2 = C_M \Omega_1 + C_F \Omega_2$$

Où:

$$C_F = [ I_1 \Omega_1 \dot{\Omega}_1 + I_2 \Omega_2 \dot{\Omega}_2 - C_M \Omega_1 ] \frac{1}{\Omega_2}$$

$$C_F = \frac{-\Omega_1}{\Omega_2} [ C_M - I_1 \dot{\Omega}_1 ] + I_2 \dot{\Omega}_2 \quad (I.24)$$

D'autre part :

$$\Omega_2 = \frac{-Rb_1}{Rb_2} \Omega_1 \Rightarrow \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{-Rb_2}{Rb_1}$$

En substituant l'expression  $\frac{\Omega_1}{\Omega_2}$  dans l'équation (I-24) on aura:

$$C_F = \frac{Rb_2}{Rb_1} [ C_M - I_1 \dot{\Omega}_1 ] + I_2 \dot{\Omega}_2 \quad (I.25)$$

donc:

$$\begin{bmatrix} C_M - I_1 \dot{\Omega}_1 \\ C_F - I_2 \dot{\Omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_M - I_1 \dot{\Omega}_1 \\ \frac{Rb_2}{Rb_1} [ C_M - I_1 \dot{\Omega}_1 ] + I_2 \dot{\Omega}_2 - I_2 \dot{\Omega}_2 \end{bmatrix} = C_M \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{Rb_2}{Rb_1} \end{bmatrix} - I_1 \dot{\Omega}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{Rb_2}{Rb_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{kij} Rb_1^2 \cos^2(\beta_b) & \sum_{kij} Rb_1 Rb_2 \cos^2(\beta_b) \\ \sum_{kij} Rb_1 Rb_2 \cos^2(\beta_b) & \sum_{kij} Rb_2^2 \cos^2(\beta_b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = (C_M - I_1 \dot{\Omega}_1) \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{Rb_2}{Rb_1} \end{bmatrix}$$

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + \sum k_{ij} Rb_1^2 \cos^2(\beta_b) \theta_1 + \sum k_{ij} Rb_1 Rb_2 \cos^2(\beta_b) \theta_2 = C_M - I_1 \dot{\Omega}_1 \quad (\times I_2 Rb_1)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 + \sum k_{ij} Rb_1 Rb_2 \cos^2(\beta_b) \theta_1 + \sum k_{ij} Rb_2^2 \cos^2(\beta_b) \theta_2 = \frac{C_M}{d} - \frac{I_1 \dot{\Omega}_1}{d} \quad (\times I_1 Rb_2)$$

Avec :  $d = Rb_1 / Rb_2$

$$I_1 I_2 Rb_1 \ddot{\theta}_1 + \sum k_{ij} Rb_1^2 I_2 \cos^2(\beta_b) [Rb_1 \theta_1 + Rb_2 \theta_2] = C_M I_2 Rb_1 - I_1 I_2 Rb_1 \dot{\Omega}_1 \quad (I.26)$$

$$I_2 I_1 Rb_2 \ddot{\theta}_2 + \sum k_{ij} I_1 Rb_2^2 \cos^2(\beta_b) [Rb_1 \theta_1 + Rb_2 \theta_2] = \frac{I_1 Rb_2 C_M}{d} - \frac{I_1^2 Rb_2 \dot{\Omega}_1}{d} \quad (I.27)$$

(I.26) + (I.27)

$$I_1 I_2 ([Rb_1 \ddot{\theta}_1 + Rb_2 \ddot{\theta}_2] + \sum k_{ij} \cos^2(\beta_b) [Rb_1 \theta_1 + Rb_2 \theta_2]) [I_2 Rb_1^2 + I_1 Rb_2^2] =$$

$$C_M (I_2 Rb_1 + \frac{I_1 Rb_2}{d}) - I_1 \dot{\Omega}_1 (I_2 Rb_1 + \frac{I_1 Rb_2}{d})$$

Sachant que  $\Delta = - (X_1 + X_2)$ , on obtient :

$$\frac{I_1 I_2}{\cos(\beta_b)} \ddot{\Delta} + \sum_{ij} k_{ij} \cos(\beta_b) (I_2 Rb_1^2 + I_1 Rb_2^2) \Delta = -(C_M - I_1 \dot{\Omega}_1) \left( I_2 Rb_1 + \frac{I_1 Rb_2}{d} \right)$$

$$\ddot{\Delta} + \sum_{ij} k_{ij} \cos^2(\beta_b) \left[ \frac{I_2 Rb_1^2 + I_1 Rb_2^2}{I_1 I_2} \right] \Delta = -(C_M - I_1 \dot{\Omega}_1) \left( \frac{Rb_1}{I_1} + \frac{Rb_2}{d I_2} \right) \cos(\beta_b)$$

On pose

$$\sum_{ij} K_{ij} = K(t) = K_{moy} [1 + \alpha \phi(t)]$$

avec:

$\alpha =$  Constante

$\phi(t)$  : Fonction bornée de faible amplitude

$$\sum_{ij} K_{ij} \cos^2(\beta_b) \left[ \frac{I_2 Rb_1^2 + I_1 Rb_2^2}{I_1 I_2} \right] = K_{moy} \cos^2(\beta_b) [1 + \alpha \phi(t)] \left[ \frac{I_2 Rb_1^2 + I_1 Rb_2^2}{I_1 I_2} \right]$$

On pose:

$$\Omega_0^2 = \frac{K_{moy} \cos^2(\beta_b)}{I_1 I_2} [I_2 Rb_1^2 + I_1 Rb_2^2]$$

Donc:

$$\ddot{\Delta} + \Omega_0^2 [1 + \alpha \phi(t)] \Delta = -(C_M - I_1 \dot{\Omega}_1) \left( \frac{Rb_1}{I_1} + \frac{Rb_2}{d I_2} \right) \cos(\beta_b) \quad (I-28)$$

**I-4-2- MISE EN EQUATION DU SYSTEME IDEAL AMORTI:**

Vue l'existence de dissipation d'énergie dans l'ensemble des éléments du réducteur et afin d'obtenir des déplacements et des efforts finis pour les vitesses critiques, il est nécessaire d'introduire des termes d'amortissement.

L'amortissement est introduit d'une manière globale directement dans les équations de mouvement. Il suffit d'ajouter à la relation établie précédemment un terme d'amortissement.

On aura:

$$\ddot{\Delta} + C\dot{\Delta} + \Omega_0^2[1 + \alpha\phi(t)]\Delta = -(Cm - I_1\dot{\Omega}_1)\left(\frac{Rb_1}{I_1} + \frac{Rb_2}{dI_2}\right)\cos(\beta b) \quad (I-29)$$

avec:

$$\begin{cases} C = 2\varepsilon\Omega_0 \\ e: \text{facteur d'amortissement variant entre } 0,02 \text{ et } 2 \end{cases}$$

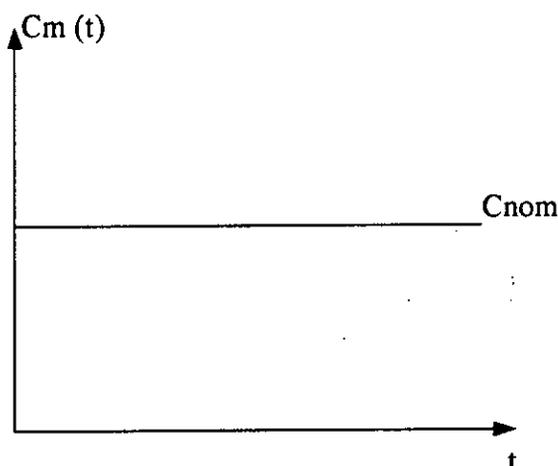
**I-4-3- MISE EN EQUATION DU SYSTEME IDEAL AMORTI, SOUMIS A UN COUPLE MOTEUR UNE MONTEE EN VITESSE VARIABLE**

L'équation s'écrit maintenant:

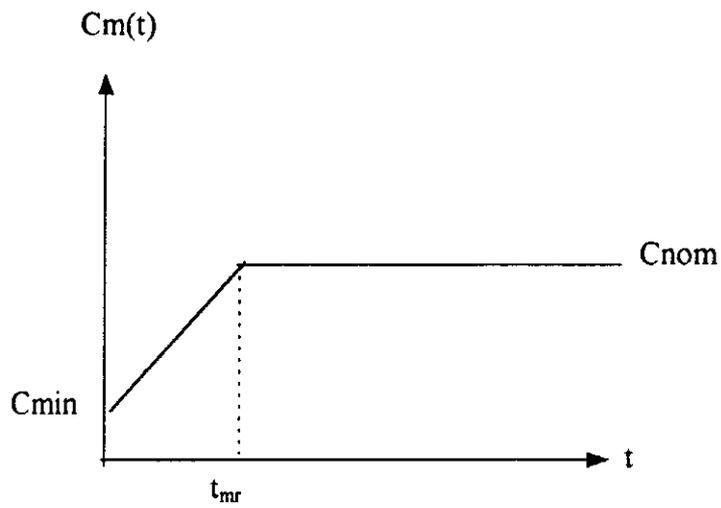
$$\ddot{\Delta} + C\dot{\Delta} + \Omega_0^2[1 + \alpha\phi(t)]\Delta = -[Cm(t) - I_1\dot{\Omega}_1(t)]\left(\frac{Rb_1}{I_1} + \frac{Rb_2}{dI_2}\right)\cos(\beta b) \quad (I-30)$$

Trois cas différents sont envisagés pour le couple moteur variable:

**\*Couple constant:**

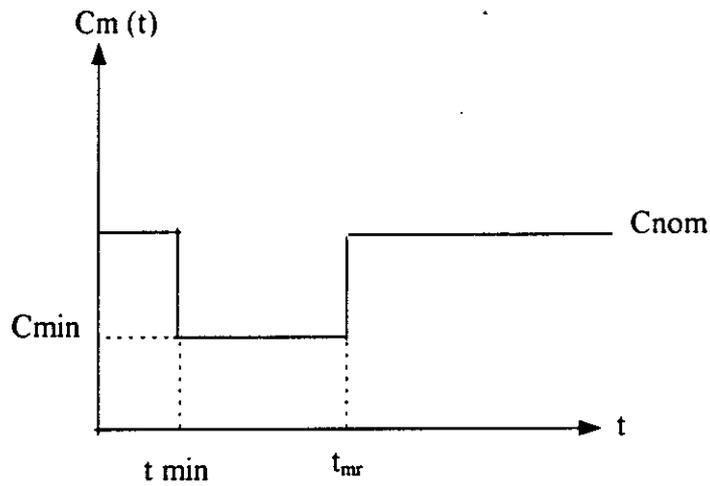


**Couple linéaire:**



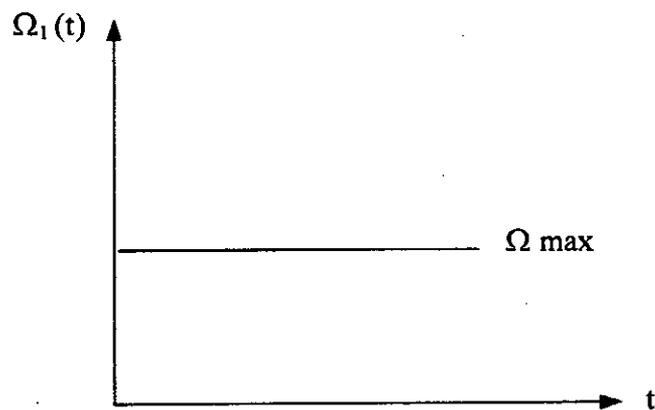
$t_{mr}$  correspond au temps de montée en régime, c'est-à-dire au temps de durée du régime transitoire.

**\* Couple créneau:**



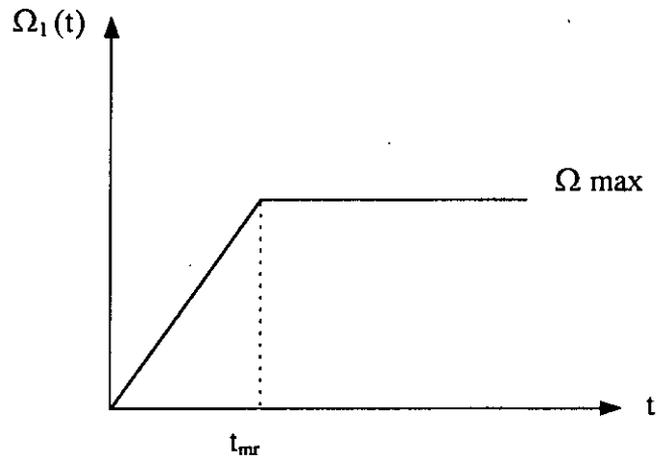
Trois cas différents sont également envisagés pour la montée en vitesse.

**\* Entrée constante:**



$$\Omega_1(t) = \Omega_{max} \Rightarrow \Omega_1(t) = 0$$

\* Entrée linéaire:

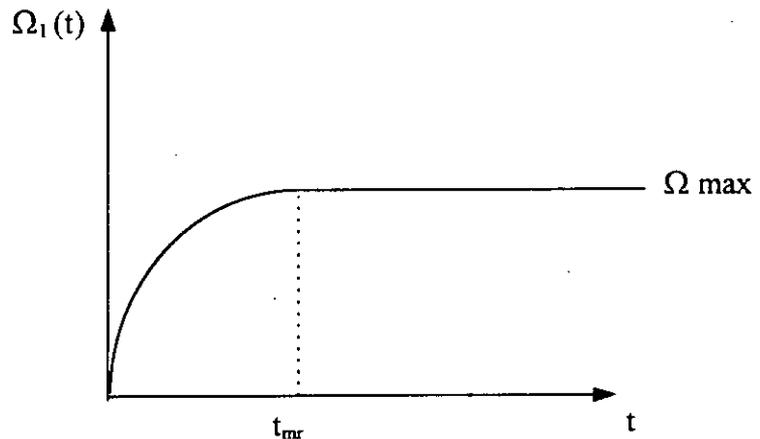


$$\begin{cases} \Omega_1(t) = A \cdot t & \text{pour } t \leq t_{mr} \\ \Omega_1(t) = A \cdot t_{mr} & \text{pour } t \geq t_{mr} \end{cases}$$

(A = constante)

$$\begin{cases} \Omega_1(t) = A & \text{pour } t < t_{mr} \\ \Omega_1(t) = 0 & \text{pour } t \geq t_{mr} \end{cases}$$

\* Entrée exponentielle:



$$\begin{cases} \Omega_1(t) = -\alpha \cdot e^{-\beta t} + \alpha & \text{pour } t \leq t_{mr} \\ \Omega_1(t) = -\alpha \cdot e^{-\beta t_{mr}} + \alpha & \text{pour } t \geq t_{mr} \end{cases}$$

(\alpha, \beta : sont des constantes)

$$\begin{cases} \Omega_1(t) = \alpha \beta \cdot e^{-\beta t} & \text{pour } t < t_{mr} \\ \Omega_1(t) = 0 & \text{pour } t \geq t_{mr} \end{cases}$$

#### **I.4.4 Conclusion**

Cette étude dynamique, nous a permis de modéliser le système étudié, à un modèle mathématique qui découle de la formulation des équations de LAGRANGE. Cette formulation nous a conduit à un système d'équations différentielles linéaires.

La résolution du système par des méthodes analytiques et numériques sera présentée au chapitre suivant.

## CHAPITRE II

# Résolution des équations

## CHAPITRE II

### RESOLUTION DES EQUATIONS

#### II-1- RAIDEUR D'ENGRENEMENT - METHODE DE DISCRETISATION

##### II-1-1 INTRODUCTION

On désire connaître avec précision l'évolution de la raideur de l'engrènement, au cours d'une période. On calcul donc la raideur en 100 points équidistants, séparés d'une longueur  $Pbt/100$ .

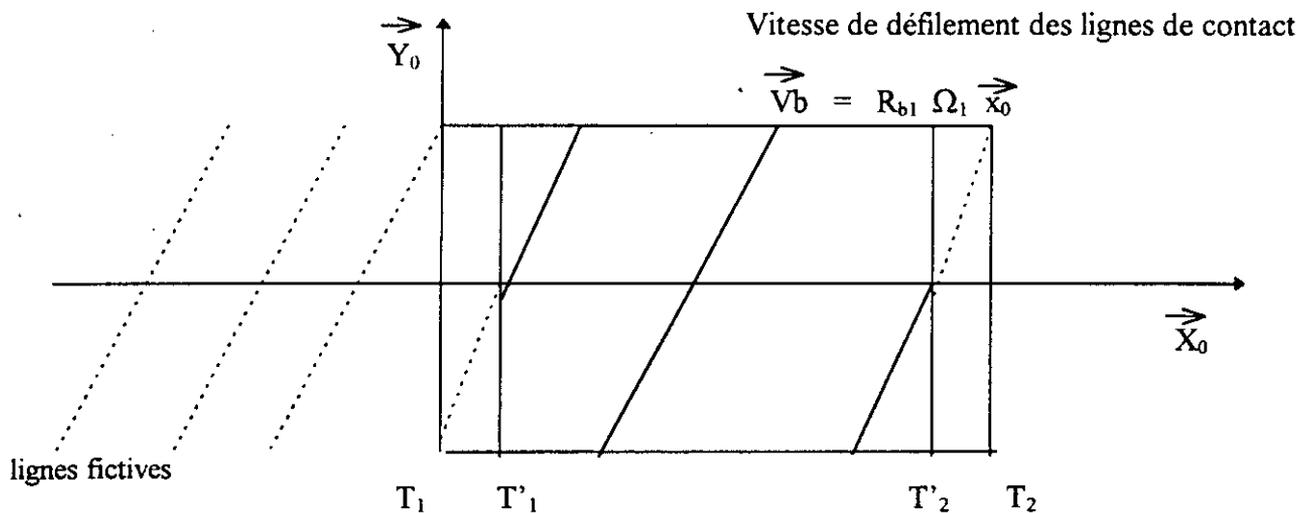


Figure II.1 Défilement des lignes de contact dans le plan d'action

Afin de décrire le défilement des lignes de contact sur le plan d'action et d'assurer la continuité de l'engrènement, des lignes de contact fictives sont introduites.

La fenêtre d'engrènement est la surface rectangulaire appartenant au plan d'action de largeur égale à la largeur minimale des deux engrenages et de longueurs  $T'_1 T'_2$ .

La fenêtre d'engrènement est le lieu géométrique où les différents couples de dents adjacents entrent en engrènement.

Soit  $k_{\text{ligne}}$ , la raideur d'une ligne de contact de longueur 1 mètre.

Soit  $L$ , la somme des longueurs des lignes de contact comprises dans la fenêtre d'engrènement.

A cet instant, la raideur de l'engrènement keng est définie par:

$$K_{\text{eng}} = K_{\text{ligne}} \times L \quad (\text{II.1})$$

### II-1-2 DETERMINATION DE LA RAIDEUR D'ENGRENEMENT POUR UNE POSITION DES LIGNES DE CONTACT

L'idée fondamentale pour le calcul instantané de la raideur est d'effectuer une discrétisation des lignes de contact. Cette opération consiste à subdiviser chaque ligne de contact en plusieurs segments possédant chacun une raideur élémentaire [1]. On calcule l'abscisse de chacun des milieux de ces segments. Si cette abscisse appartient à l'intervalle  $T'_1 T'_2$ , le segment contribue à la raideur de l'ensemble.

Connaissant la valeur de la raideur moyenne d'un couple de dents en prise et le nombre de segments de discrétisation par ligne de contact, une simple division de la raideur moyenne par le nombre des segments par ligne de contact donne la valeur de la raideur d'un segment. L'augmentation du nombre des segments entraîne des changements de la valeur instantanée de la raideur d'engrènement.

La valeur de la raideur variant d'un segment à un autre, les raideurs des segments extrêmes sont moins importants que celles des segments milieux, il est possible d'introduire une fonction permettant de moduler la répartition de la raideur le long des lignes de contact.

La raideur globale ( raideur d'engrènement ) à l'instant t est la somme de toutes les raideurs élémentaires.

$$k(t) = \sum_{i,j} k(i, j) \quad (II.2)$$

Le nombre de segments existants dans la fenêtre d'engrènement varie en fonction du temps; la raideur globale dépend du temps.

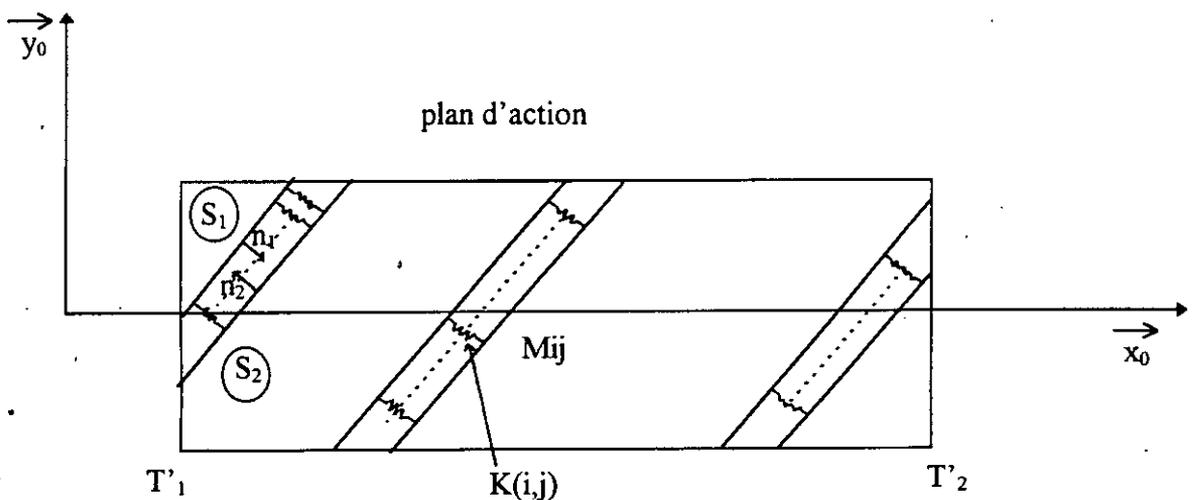


Figure II.2 Discrétisation des lignes de contact

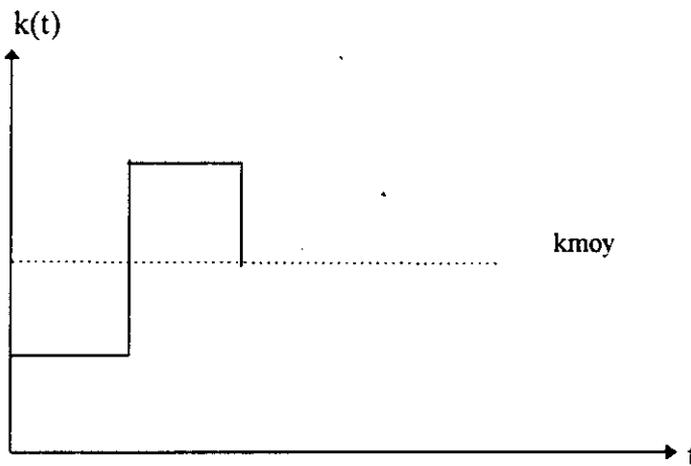
**II-1-3 DETERMINATION DE LA RAIDEUR D'ENGRENEMENT POUR DIFFERENTES POSITIONS DES LIGNES AU COURS DU TEMPS**

On déduit les positions en translatant de  $i \times \frac{pbt}{100}$  les lignes de contact de la position de référence.

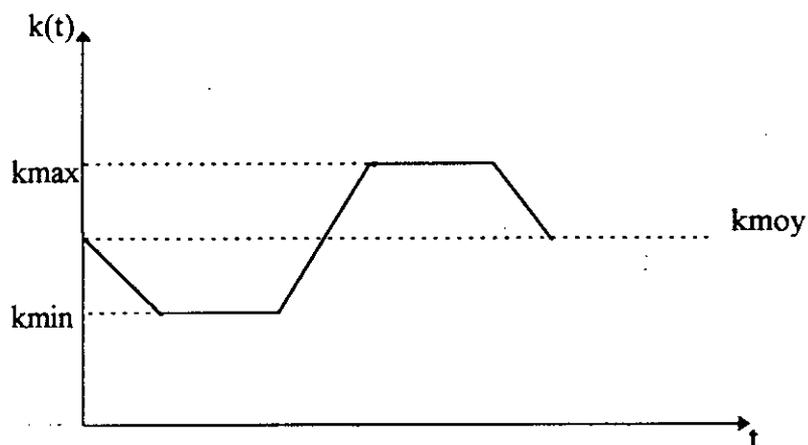
**II-1-4 COURBES DE RAIDEUR**

Calculées en 100 points équidistants de  $pbt/100$ , avec un nombre de segments de discrétisation élevé ( $nt=1000$ ), les courbes de raideur sont recentrées de façon à ce que le premier point soit le plus proche possible de  $k_{moy}$ [11].

Engrenage droit ( $\beta b=0$ )



Engrenage hélicoïdal ( $\beta b=15^\circ$ )



De plus, on désire écrire  $k(t)$  sous la forme :

$$k(t) = k_{moy} [ 1 + \alpha \varnothing(t) ] \quad (II.3)$$

On peut définir  $\alpha$  de la façon suivante :

$$\alpha = 0.5 \frac{k_{\max} - k_{\min}}{k_{\text{moy}}} \quad (\text{II.4})$$

Avec:

$$k_{\max} = k_{\text{moy}}(1 - \alpha) \quad (\text{II.5})$$

$$k_{\min} = k_{\text{moy}}(1 + \alpha) \quad (\text{II.6})$$

Ainsi, pour un engrenage hélicoïdal,  $\alpha$  sera de l'ordre de 0,05. Pour un engrenage droit  $\alpha$  sera de l'ordre de 0,25.

$\varnothing(t)$  sera compris approximativement entre -1 et +1.

## II-2 CHOIX DU PAS DE TEMPS

Puisqu'on travaille en régime transitoire, il faut, pour rendre compte de l'évolution des phénomènes avec précision, choisir judicieusement le pas de temps.

On ne travaillera donc pas avec un pas de temps constant, mais plutôt avec un pas de distance constant, égale à 1/100 éme du pas de base apparent [ 11 ].

On a donc:

$$\Delta d = \text{cte} = \frac{p_b t}{100} = \Omega_1(t) R_{b1} \Delta t \quad (\text{II.7})$$

## II.3 RESOLUTION DES EQUATIONS

### II-3-1 INTRODUCTION

Les différentes équations obtenues précédemment ne peuvent être résolues analytiquement. Il faut donc envisager l'utilisation des méthodes itératives: Pour s'assurer de l'exactitude des résultats.

### II-3-2 PRESENTATION DE LA METHODE DE NEWMARK

L'équation du mouvement s'écrit:

$$\Delta + c\Delta + \Omega_0^2 [ 1 + \alpha \varnothing(t) ] \Delta = - ( C_m - I_1 \Omega_1 ) \left( \frac{R_{b1}}{I_1} + \frac{R_{b2}}{d I_2} \right) \cos(\beta b)$$

Avec :

$$C = 2 \varepsilon \Omega_0$$

$$\begin{aligned} C_m &= C_m(t) \\ \dot{\Omega}_1 &= \dot{\Omega}_1(t) \end{aligned}$$

D'après l'annexe III présentant le schéma implicite de NEWMARK, on a:

$$\Delta_1 = \Delta_0 + \Delta t \cdot \dot{\Delta}_0 + \frac{\Delta t^2}{4} [ \ddot{\Delta}_0 + \ddot{\Delta}_1 ] \quad (\text{II.8})$$

$$\dot{\Delta}_1 = \dot{\Delta}_0 + \frac{\Delta t}{2} [ \ddot{\Delta}_0 + \ddot{\Delta}_1 ] \quad (\text{II.9})$$

$$(\text{II.8}) \Rightarrow \ddot{\Delta}_1 = [ \Delta_1 - \Delta_0 - \Delta t \cdot \dot{\Delta}_0 ] \frac{4}{\Delta t^2} - \ddot{\Delta}_0$$

$$(\text{II.9}) \Rightarrow \dot{\Delta}_1 = \dot{\Delta}_0 + (\Delta_0 + \frac{4}{\Delta t^2} ( \Delta_1 - \Delta_0 - \Delta t \cdot \dot{\Delta}_0 ) - \ddot{\Delta}_0) \Delta t / 2$$

Donc:

$$\dot{\Delta}_1 = \dot{\Delta}_0 + \frac{2}{\Delta t} ( \Delta_1 - \Delta_0 - \Delta t \cdot \dot{\Delta}_0 ) \quad (\text{II.10})$$

$$\ddot{\Delta}_1 = [ \Delta_1 - \Delta_0 - \Delta t \cdot \dot{\Delta}_0 ] \frac{4}{\Delta t^2} - \ddot{\Delta}_0 \quad (\text{II.11})$$

On remplace, dans l'équation du mouvement  $\ddot{\Delta}$  et  $\dot{\Delta}$  par les expressions obtenues précédemment. On obtient :

$$\begin{aligned} [ \Delta_1 - \Delta_0 - \Delta t \cdot \dot{\Delta}_0 ] \frac{4}{\Delta t^2} \ddot{\Delta}_0 + C [ \dot{\Delta}_0 + \frac{2}{\Delta t} ( \Delta_1 - \Delta_0 - \Delta t \cdot \dot{\Delta}_0 ) ] \Omega_0^2 [ 1 + \alpha \mathcal{O}(t) ] \Delta_1 = \\ - ( C_M - I_1 \dot{\Omega}_1 ) ( \frac{Rb_1}{I_1} + \frac{Rb_2}{d I_2} ) \cos(\beta_b) \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

De l'équation (II.12), on peut tirer l'expression de  $\Delta_1$  donc on aura:

$$\Delta_1 = \frac{ - ( C_m - I_1 \dot{\Omega}_1 ) ( \frac{Rb_1}{I_1} + \frac{Rb_2}{d I_2} ) \cos(\beta_b) + ( \Delta_0 + \Delta t \cdot \dot{\Delta}_0 ) ( \frac{4}{\Delta t^2} + \frac{2 C}{\Delta t} ) + \ddot{\Delta}_0 - C \dot{\Delta}_0 }{ \frac{4}{\Delta t^2} + \frac{2 C}{\Delta t} + \Omega_0^2 [ 1 + \alpha \mathcal{O}(t) ] } \quad (\text{II-13})$$

Connaissant  $\Delta_1$ , on peut ensuite en déduire  $\dot{\Delta}_1$  et  $\ddot{\Delta}_1$ .

Les trois formules déterminées précédemment pour  $\Delta_1$ ,  $\dot{\Delta}_1$  et  $\ddot{\Delta}_1$  peuvent être ensuite utilisées pour le calcul des  $\Delta_i$  aux différents instants  $t_i$ , en fonction de  $\Delta_{i-1}$ ,  $\dot{\Delta}_{i-1}$  et  $\ddot{\Delta}_{i-1}$ .

L'organigramme de cette méthode est présenté dans l'annexe III.

### II-3-3 PRESENTATION DE LA METHODE DES PERTURBATIONS.

L'équation du mouvement s'écrit:

$$\ddot{\Delta} + C\dot{\Delta} + \Omega_0^2 [1 + \alpha\varnothing(t)] \Delta = - (C_M - I_1 \dot{\Omega}_1) \left( \frac{Rb_1}{I_1} + \frac{Rb_2}{d I_2} \right) \cos(\beta_b)$$

On peut écrire la solution  $\Delta$  sous la forme :

$$\Delta = \Delta_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i \Delta_i \quad (II-14)$$

$\Delta_0$  étant la solution de l'équation si  $\alpha = 0$

En reportant dans l'équation du mouvement, on obtient :

$$\left( \Delta_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i \Delta_i \right)'' + C \left( \Delta_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i \Delta_i \right)' + \Omega_0^2 \left[ 1 + \alpha\phi(t) \left( \Delta_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i \Delta_i \right) \right] = - (C_M - I_1 \dot{\Omega}_1) \left( \frac{Rb_1}{I_1} + \frac{Rb_2}{d I_2} \right) \cos(\beta_b) \quad (II-15)$$

(II-15)  $\Rightarrow$

$$\ddot{\Delta}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i \ddot{\Delta}_i + C\dot{\Delta}_0 + C \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i \dot{\Delta}_i + \Omega_0^2 \Delta_0 + \Omega_0^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i \Delta_i + \Omega_0^2 \alpha \phi(t) \Delta_0 + \Omega_0^2 \alpha \phi(t) \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i \Delta_i = - (C_M - I_1 \dot{\Omega}_1) \left( \frac{Rb_1}{I_1} + \frac{Rb_2}{d I_2} \right) \cos(\beta_b) \quad (II-16)$$

En identifiant, on obtient :

$$(1) \quad \ddot{\Delta}_0 + C \dot{\Delta}_0 + \Omega_0^2 \Delta_0 = - (C_M - I_1 \dot{\Omega}_1) \left( \frac{Rb_1}{I_1} + \frac{Rb_2}{d I_2} \right) \cos(\beta_b)$$

$$(\alpha) \quad \ddot{\Delta}_1 + C \dot{\Delta}_1 + \Omega_0^2 \Delta_1 = - \Omega_0^2 \varnothing(t) \Delta_0$$

$$(\alpha^i) \quad \ddot{\Delta}_i + C \dot{\Delta}_i + \Omega_{02}^2 \Delta_i = - \Omega_0^2 \varnothing(t) \Delta_{i-1}$$

Pour la méthode des perturbations du premier ordre, deux équations devront être résolues:

$$\ddot{\Delta}_0 + C\dot{\Delta}_0 + \Omega_0^2 \Delta_0 = - (C_M - I_1 \dot{\Omega}_1) \left( \frac{Rb_1}{I_1} + \frac{Rb_2}{dI_2} \right) \cos(\beta_b) \quad (\text{II-17})$$

$$\ddot{\Delta}_1 + C\dot{\Delta}_1 + \Omega_0^2 \Delta_1 = - \Omega_0^2 \varnothing(t) \Delta_0 \quad (\text{II-18})$$

De l'équation (II-17), on déduit  $\Delta_0$ , et connaissant ce  $\Delta_0$ , on déduit de l'équation (II-18)  $\Delta_1$ . Ainsi, on obtient:

$$\Delta = \Delta_0 + \alpha \Delta_1 \quad (\text{II-19})$$

Pour la méthode des perturbations du 2<sup>ème</sup> ordre, trois équations doivent être résolues:

$$\ddot{\Delta}_0 + C\dot{\Delta}_0 + \Omega_0^2 \Delta_0 = - (C_M - I_1 \dot{\Omega}_1) \left( \frac{Rb_1}{I_1} + \frac{Rb_2}{dI_2} \right) \cos(\beta_b) \quad (\text{II-20})$$

$$\ddot{\Delta}_1 + C\dot{\Delta}_1 + \Omega_0^2 \Delta_1 = - \Omega_0^2 \varnothing(t) \Delta_0 \quad (\text{II-21})$$

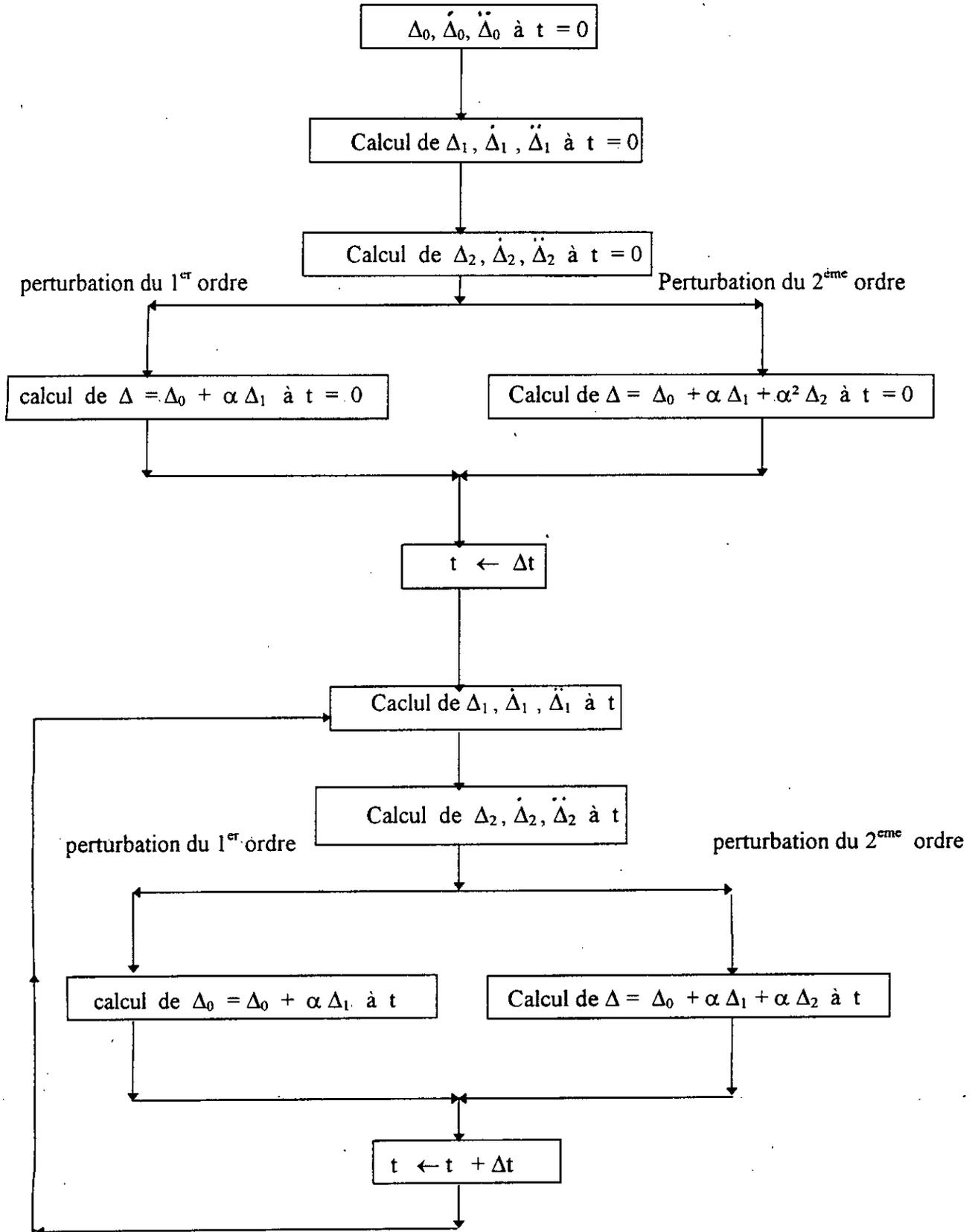
$$\ddot{\Delta}_2 + C\dot{\Delta}_2 + \Omega_0^2 \Delta_2 = - \Omega_0^2 \varnothing(t) \Delta_1 \quad (\text{II-22})$$

De l'équation (II-20), on en déduit  $\Delta_0$ . Connaissant ce  $\Delta_0$ , on déduit de l'équation (II-21)  $\Delta_1$ , et connaissant ce  $\Delta_1$  on déduit de l'équation (II-22)  $\Delta_2$ .

On obtient donc:

$$\Delta = \Delta_0 + \alpha \Delta_1 + \alpha^2 \Delta_2 \quad (\text{II-23})$$

Voici l'organigramme de cette méthode:



**Méthode des perturbations**

## CHAPITRE III

# Présentation du logiciel

## CHAPITRE III

### PRESENTATION DU LOGICIEL

#### III-1 INTRODUCTION

Vue les caractéristiques importantes de précision, de stabilité et de convergence des diverses méthodes de résolution possibles, la taille du système différentiel et par là, le type de modélisation retenu constituent des critères importantes de choix de méthodes.

En outre, nous avons utilisé la méthode de NEWMARK, qui présente l'avantage d'être une méthode implicite donc inconditionnellement stable et d'être convergente.

Ce logiciel, écrit exclusivement en langage FORTRAN, présente la méthode de calcul, permettant la détermination de l'écrasement et de la force de contact appliqués sur le système étudié.

#### III-2 DESCRIPTION DU LOGICIEL

D'abord, deux fichiers permettant l'entrée de données géométriques et de caractéristiques du compte moteur et de la montée en vitesse du réducteur.

Ensuite, un ensemble de menus permet à l'utilisateur d'effectuer un choix de calcul. Suivant le choix de l'utilisateur, on lance le programme principal qui appelle différentes sous-programmes.

Voici la présentation des différentes sous-programmes qui sont appelés et utilisés.

##### III.2.1. SOUS PROGRAMME 1

Ce sous programme calcule certains paramètres géométriques de l'engrenage à partir de ses caractéristiques primitives.

Ainsi sont calculées les valeurs :

- \* De l'angle de pression apparent de taillage ;
- \* Du module apparent de taillage ;
- \* Des rayons primitifs nominaux des deux roues ;
- \* Du pas de base apparent ;
- \* Des rayons de tête des deux roues ;
- \* Des rayons de base des deux roues ;
- \* De l'angle de pression apparent de fonctionnement ;
- \* Des longueurs caractéristiques du plan d'action ;
- \* De l'angle d'hélice de base ;
- \* De l'angle d'hélice de fonctionnement ;
- \* Du module réel de fonctionnement ;

- \* Du module apparent de fonctionnement ;
- \* Des rayons primitifs de fonctionnement des deux roues ;
- \* Des inerties de roues ;
- \* De la masse équivalente .

### III.2.2. SOUS PROGRAMME 2

Ce sous programme détermine le nombre de lignes de contact avant et après la référence, intervenant dans le calcul de la raideur. Il s'agit, en fait du nombre maximum de lignes de contact pouvant être comprises dans le plan d'action, en fonction de sa géométrie.

### III.2.3. SOUS PROGRAMME 3

Ce sous programme a pour but de calculer avec précision les valeurs de la raideur pour 100 points de l'engrènement distant de  $P_{bt}/100$ .

### III.2.4. SOUS PROGRAMME 4

Ce sous programme calcule les valeurs de  $\phi(t)$  qui représente la variation de la raideur au cours de l'engrènement.

### III.2.5. SOUS PROGRAMME 5

Ce sous programme calcule les instants successifs pour une montée en vitesse linéaire.

Le pas de temps  $\Delta t$  est égale à  $P_{bt}/(100 R_{b1} \Omega(t))$

Donc:

$$A t \Delta t = P_{bt} / (100 R_{b1})$$

Avec:

A: pente de la montée en vitesse linéaire.

**III.2.6. SOUS PROGRAMME 6**

Ce sous programme calcule également les instants successifs, mais cette fois-ci pour une montée en vitesse exponentielle. Le pas de temps reste le même que précédemment.

$$\Omega(t) \Delta t = P_{bt} / (100 R_{b1})$$

**III.2.7. SOUS PROGRAMME 7**

Ce sous programme calcule les instants successifs, en régime établi. Le pas du temps  $\Delta t$  ici est donné par la formule suivante:

$$\Delta t = P_{bt} / (100 R_{b1} \Omega(t))$$

Avec:

$\Omega(t)$  est une constante.

Donc:

$\Delta t$  est une constante

**III.2.8. SOUS PROGRAMME 8**

Ce sous programme calcule les valeurs  $\Delta$  et  $F$ , respectivement de l'erreur de transmission et de la force de contact, par la méthode de NEWMARK.

**III.2.9. SOUS PROGRAMME 9**

L'équation correspondant à un système idéal amorti, soumis à un couple moteur et une montée en vitesse variable s'écrit:

$$\Delta'' + c \Delta' + \Omega_0 (1 + \alpha \phi(t)) \Delta = -(C_m(t) - I_1 \Omega_1(t)) (R_{b1}/I_1 + R_{b2}/(d I_2)) \cos(\beta_b)$$

Et ce sous programme permet de calculer les valeurs correspondant au second membre de l'équation précédente qui est:

$$-(C_m(t) - I_1 \Omega_1(t)) (R_{b1}/I_1 + R_{b2}/(d I_2)) \cos(\beta_b)$$

Lorsque le couple varie linéairement ou en créneau.

### III.2.10. SOUS PROGRAMME 10

Ce sous programme initialise les valeurs extrêmes de la force et de l'écrasement après le premier passage dans la procédure de calcul.

## CHAPITRE IV

# Résultats et discussion

## CHAPITRE IV

### RESULTATS ET DISCUSSION

#### IV.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous présentons les résultats numériques obtenus au cours de cette étude, sous forme de graphes et de tableaux.

#### IV.2. DONNEES GEOMETRIQUES DU REDUCTEUR

On propose l'étude du réducteur possédant les paramètres géométriques suivants:

*Nombre des dents du pignon	: $Z_1 = 28$
*Nombre de dents de la roue	: $Z_2 = 56$
*Angle de pression de taillage	: $\alpha_0 = 20$
*Inclinaison d'hélice de taillage	: $\beta_0 = 15$
*Module normal de taillage	: $m_{n0} = 0.004 \text{ m}$
*Coefficient de déport du pignon	: $x_1 = 0$
*Coefficient de déport de la roue	: $x_2 = 0$
*Coefficients des saillies	: $x_{h_{a1}} = x_{h_{a2}} = 1$
*Coefficients des creux	: $x_{h_{f1}} = x_{h_{f2}} = 1.4$
*Largeur de l'engrenage	: $l = 0.04 \text{ m}$
*Masses volumiques du pignon et de la roue	: $\rho_1 = \rho_2 = 7800 \text{ kg/m}^3$
*Raideur d'un couple de dent	: $K_c = 0.175 \cdot 10^{11} \text{ N/m}$
*Couple moteur maximal	: $C_{1\max} = 500 \text{ N.m}$
*Couple moteur minimal	: $C_{1\min} = 50 \text{ N.m}$
*Instant où le couple en créneau passe du couple moteur maximal au couple moteur minimal	: $T_{\min} = 0.5 \text{ s}$
*Temps de montée en régime	: $T_{mr} = 1 \text{ s}$
*Nombre de périodes pour le calcul en régime établi	: $N = 15$

A partir des relations géométriques existantes entre les différents paramètres des engrenages parfaits et en tenant compte de l'annexe I, on donne le tableau suivant:

**Tableau I: Caractéristiques des engrenages en fonction des différents angles d'inclinaison primitifs**

$\beta_0$ (en degré)	0	15	30	45
$\beta_b$ (en radian)	0.00000	0.24566	0.48890	0.72650
$Mt_0$ (m)	$0.400 \cdot 10^{-2}$	$0.414 \cdot 10^{-2}$	$0.462 \cdot 10^{-2}$	$0.565 \cdot 10^{-2}$
$Rp_1$ (m)	$5.600 \cdot 10^{-2}$	$5.797 \cdot 10^{-2}$	$6.465 \cdot 10^{-2}$	$7.916 \cdot 10^{-2}$
$Rp_2$ (m)	$11.200 \cdot 10^{-2}$	$11.560 \cdot 10^{-2}$	$12.930 \cdot 10^{-2}$	$15.833 \cdot 10^{-2}$
$Rb_1$ (m)	$5.262 \cdot 10^{-2}$	$5.425 \cdot 10^{-2}$	$5.960 \cdot 10^{-2}$	$7.040 \cdot 10^{-2}$
$Rb_2$ (m)	$10.525 \cdot 10^{-2}$	$10.850 \cdot 10^{-2}$	$11.922 \cdot 10^{-2}$	$14.080 \cdot 10^{-2}$
$Ra_1$ (m)	$6.000 \cdot 10^{-2}$	$6.197 \cdot 10^{-2}$	$6.865 \cdot 10^{-2}$	$8.316 \cdot 10^{-2}$
$Ra_2$ (m)	$11.600 \cdot 10^{-2}$	$11.994 \cdot 10^{-2}$	$13.330 \cdot 10^{-2}$	$16.233 \cdot 10^{-2}$
$Pbt$ (m)	$1.180 \cdot 10^{-2}$	$1.217 \cdot 10^{-2}$	$1.333 \cdot 10^{-2}$	$1.579 \cdot 10^{-2}$
$T1T2$ (m)	$5.743 \cdot 10^{-2}$	$6.129 \cdot 10^{-2}$	$7.510 \cdot 10^{-2}$	$10.861 \cdot 10^{-2}$
$T1'T2'$ (m)	$2.015 \cdot 10^{-2}$	$1.978 \cdot 10^{-2}$	$1.859 \cdot 10^{-2}$	$1.644 \cdot 10^{-2}$
$T1T1'$ (m)	$0.877 \cdot 10^{-2}$	$1.017 \cdot 10^{-2}$	$1.546 \cdot 10^{-2}$	$2.783 \cdot 10^{-2}$
$T2T2'$ (m)	$2.861 \cdot 10^{-2}$	$3.134 \cdot 10^{-2}$	$4.104 \cdot 10^{-2}$	$6.443 \cdot 10^{-2}$
$\varepsilon_\alpha$	1.707	1.625	1.391	1.041

### IV.3. ANALYSE DES RESULTATS

#### IV.3.1. PERIODICITE DE LA RAIDEUR D'ENGREMENT

Le développement des lignes de contact dans le plan d'action et particulièrement dans la fenêtre de contact entraîne une variation de la longueur de contact en cours du temps par conséquent la raideur d'engrènement dépend du temps.

La raideur d'engrènement se présente sous forme d'une fonction périodique.

La raideur d'engrènement peut s'écrire comme nous l'avons précisée déjà dans les chapitres précédents sous la forme:

$$K(t) = K_{\text{moy}} (1 + \alpha \phi(t)) \quad (\text{IV.1})$$

Donc  $\phi(t)$  est une fonction périodique qui représente la variation de la raideur d'engrènement en cours du temps.

La raideur moyenne est donnée comme suit:

$$K_{\text{moy}} = \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} K(t) dt \quad (\text{IV.2})$$

Avec:

$T_m$ : Période de la raideur d'engrènement.

**Tableau 2. Raideur moyenne en fonction des différents angles d'inclinaison primitifs**

Pour une raideur moyenne d'un couple de dent ( $K_c = 0.175 \cdot 10^{11}$  N/m) on obtient le tableau suivant:

$\beta_0$ (en degré)	$K_m$ (N/m)
0	$0.289 \cdot 10^{11}$
15	$0.284 \cdot 10^{11}$
30	$0.243 \cdot 10^{11}$
45	$0.182 \cdot 10^{11}$

En premier lieu on voit bien que la raideur moyenne diminue quant l'angle d'inclinaison d'hélice augmente.

Pour les engrenages droits la variation de la raideur est en créneau vue qu'il y a un ou deux couple de dent en prise, la longueur de contact passe brusquement d'une valeur minimale à une valeur maximale (figure IV.1).

La fonction  $\phi(t)$  dans ce cas est une fonction en créneau.

pour les engrenages hélicoïdaux, contrairement aux engrenages droits la longueur de contact passe progressivement de sa valeur minimale à sa valeur maximale ce qui est juste pour la raideur (figure IV.2),(figure IV.3).

On pourra ainsi donner les plages où varie la raideur:

Pour les engrenages droits  $0.174 \cdot 10^{11} \leq K(t) \leq 0.349 \cdot 10^{11} \text{ [N/m]}$

Pour les engrenages hélicoïdaux:

a)  $\beta_0=15^\circ$   $0.270 \cdot 10^{11} \leq K(t) \leq 0.308 \cdot 10^{11} \text{ [N/m]}$

b)  $\beta_0=30^\circ$   $0.217 \cdot 10^{11} \leq K(t) \leq 0.261 \cdot 10^{11} \text{ [N/m]}$

c)  $\beta_0=45^\circ$   $0.181 \cdot 10^{11} \leq K(t) \leq 0.185 \cdot 10^{11} \text{ [N/m]}$

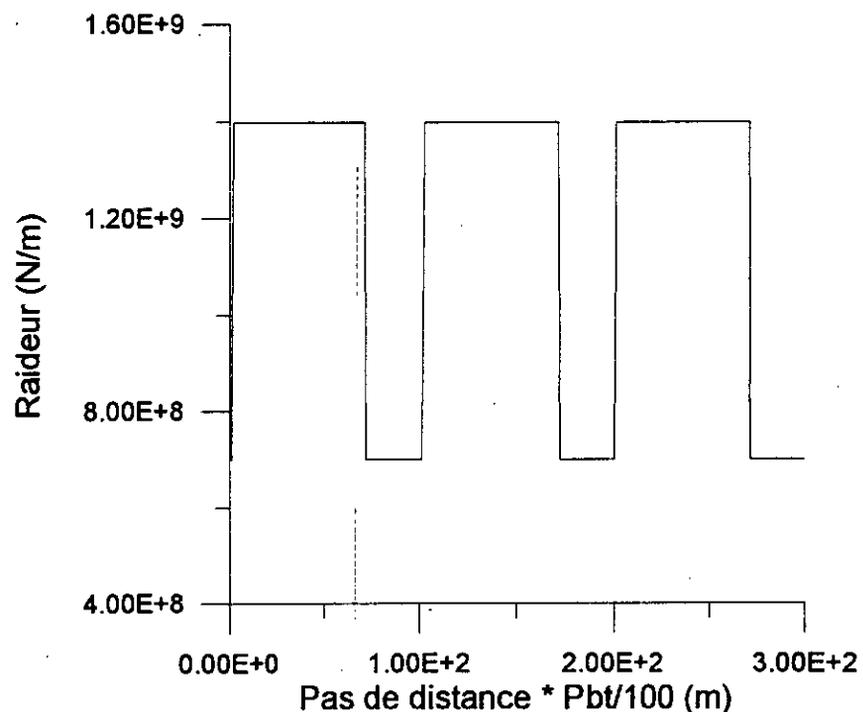


Fig.IV.1: VARIATION EN CRENEAU DE LA RAIDEUR POUR LES ENGRENAGES DROITS

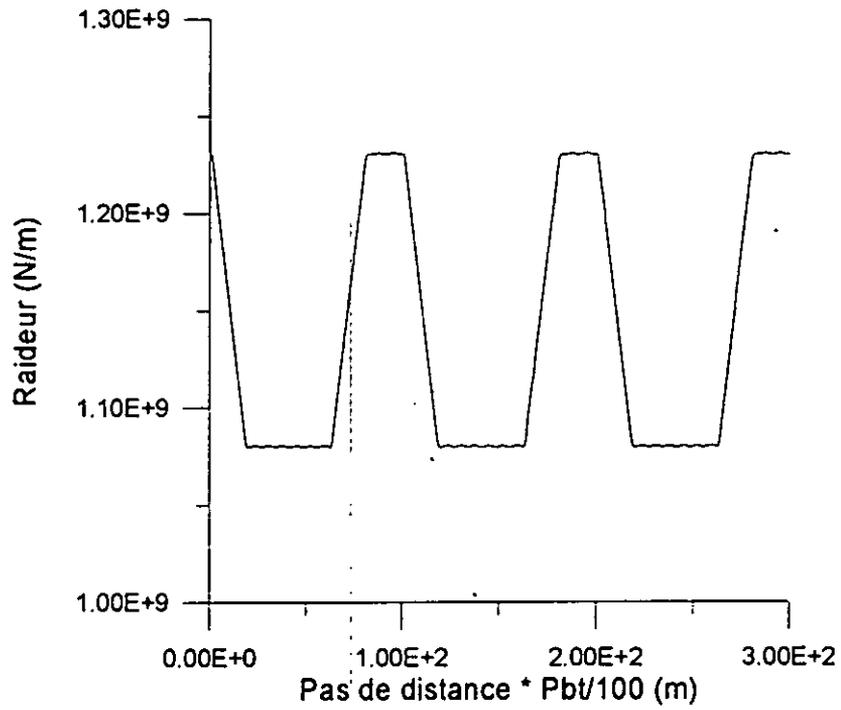


Fig.IV.2: VARIATION DE LA RAIDEUR POUR UN ANGLE D'HELICE=15°

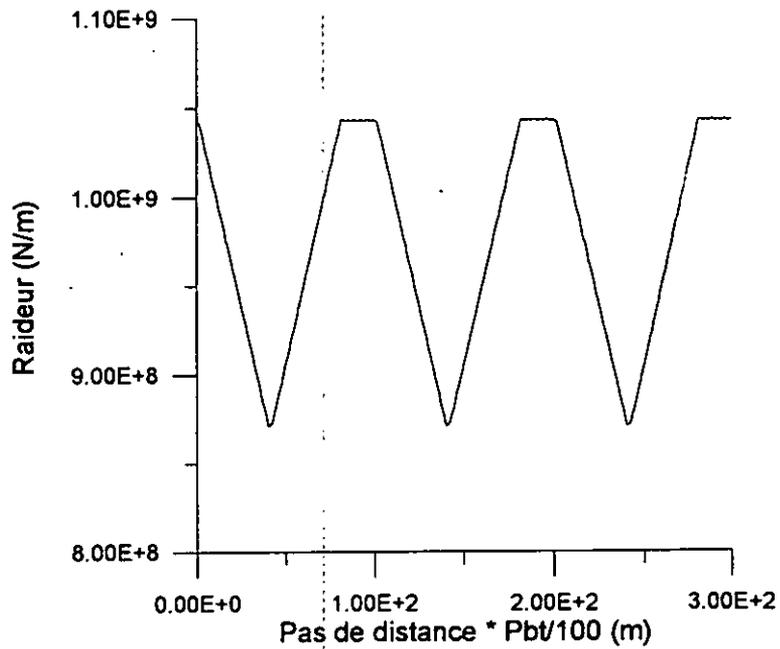


Fig.IV.3: VARIATION DE LA RAIDEUR POUR UN ANGLE D'HELICE=30°

### IV.3.2. RESULTATS ET COMMENTAIRES:

Afin de comparer nos résultats avec ceux établis par [11], nous avons calculé les efforts dynamiques engendrés dans un système de deux engrenages dont les caractéristiques sont portées dans le tableau N°1, et les erreurs de transmission.

On constate :

- un très bon accord avec les valeurs déterminées par [11]
- une variation aléatoire du chargement, ainsi que pour les déformations élastiques .
- le modèle choisi ne prend pas en compte les changements plus ou moins brutaux de raideur de liaison entre deux engrenages droits .
- il ne permet pas non plus une extension aisée aux calculs d'efforts dynamiques sur un réducteur plus complet.

Cette première traduction du comportement vibratoire a cependant le mérite :

- a) d'être d'une très grande simplicité .
- b) de fournir des valeurs, semble-t-il raisonnables d'efforts dynamiques, (sous l'hypothèse de pouvoir chiffrer l'amortissement).
- c) de fournir une première indication des vitesses critiques à éviter.

#### IV.3.2.1. INFLUENCE DE L'AMORTISSEMENT:

Le facteur d'amortissement  $\epsilon$  a une influence majeure sur la réponse dynamique, ainsi le système a une tendance à se stabiliser en augmentant le coefficient d'amortissement, ce qui est bien claire pour les figures (IV.4) (c) et (d), (IV.5) (f) et (i).

#### IV.3.2.2. INFLUENCE DE L'ANGLE D'INCLINAISON D'HELICE :

Ce paramètre a également une influence importante sur le niveau de la réponse. Un angle d'hélice moins élevé (un rapport de conduite élevé ) apparaît bénéfique pour les déplacements, ainsi que le chargement dynamique ce qui est montré dans les figures (IV.5) (g) et (h).

**IV.3.2.3. REMARQUES:**

En premier lieu on voit bien pour la figure (IV.5) (c) une instabilité du système pour une vitesse de rotation  $\omega = 1078$  rd/s, vue que la réponse est très élevée que pour une vitesse de rotation  $\omega = 800$  rd/s.

Les figures (IV.4) (g) et (h) montrent une variation en créneau pour le chargement dynamique.

Comme nous avons déjà précisé dans les chapitres précédents, lorsque l'écrasement  $a$  a une valeur négative et par convention on a un écartement de dents donc une perte de contact ce qui est montré par les figures (IV.5) (a), (b) et (c).

La figure (IV.4) (j) montre que le chargement chute et remonte brusquement.

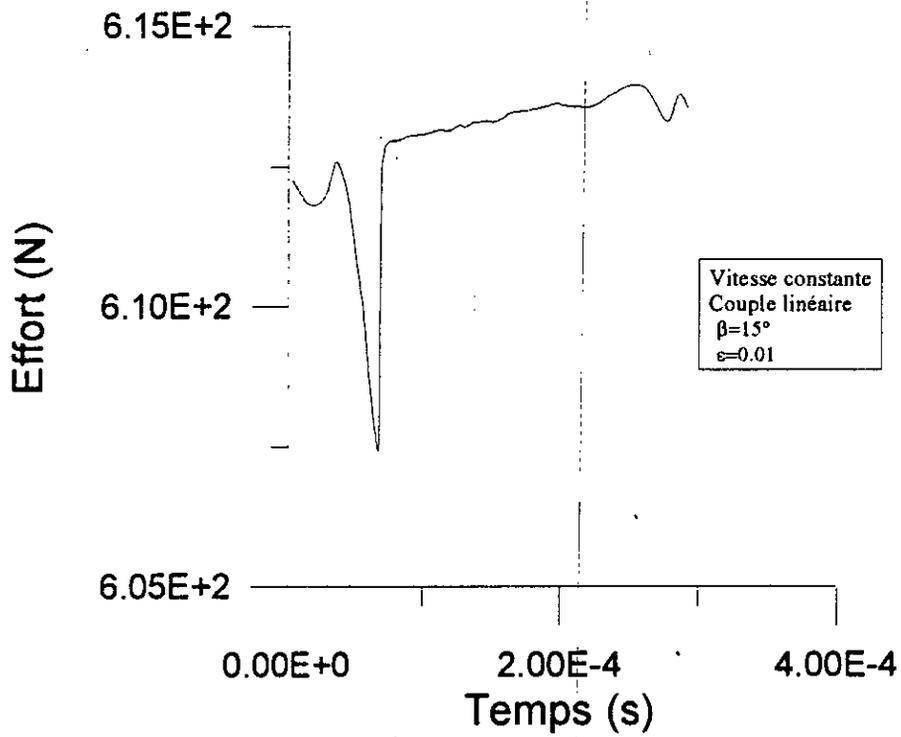
Pour les courbes (IV.4) (a) et (b) le chargement est très important pour un couple qui varie en créneau que pour un couple qui varie linéairement.

Si on prend en compte du deuxième terme de l'équation du système, on voit bien que pour une vitesse linéaire et un couple linéaire, théoriquement la charge varie linéairement ce qui est le cas pour les figures (IV.4) (c), (e) et (f).

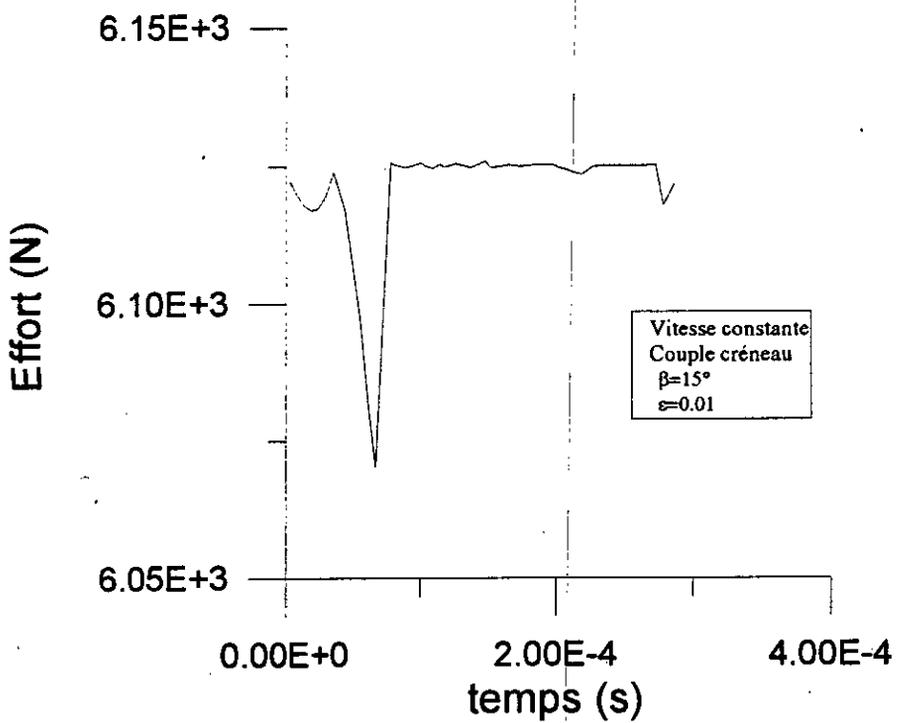
La valeur maximale du déplacement pour la courbe (IV.5) (k) est plus importante que pour la courbe (IV.5) (g).

Enfin, on note pour les courbes (IV.4) (c), (IV.5) (g), (h), (i), (j) et (k) que le temps de montée en régime  $T_{nr} = 1.5$  s.

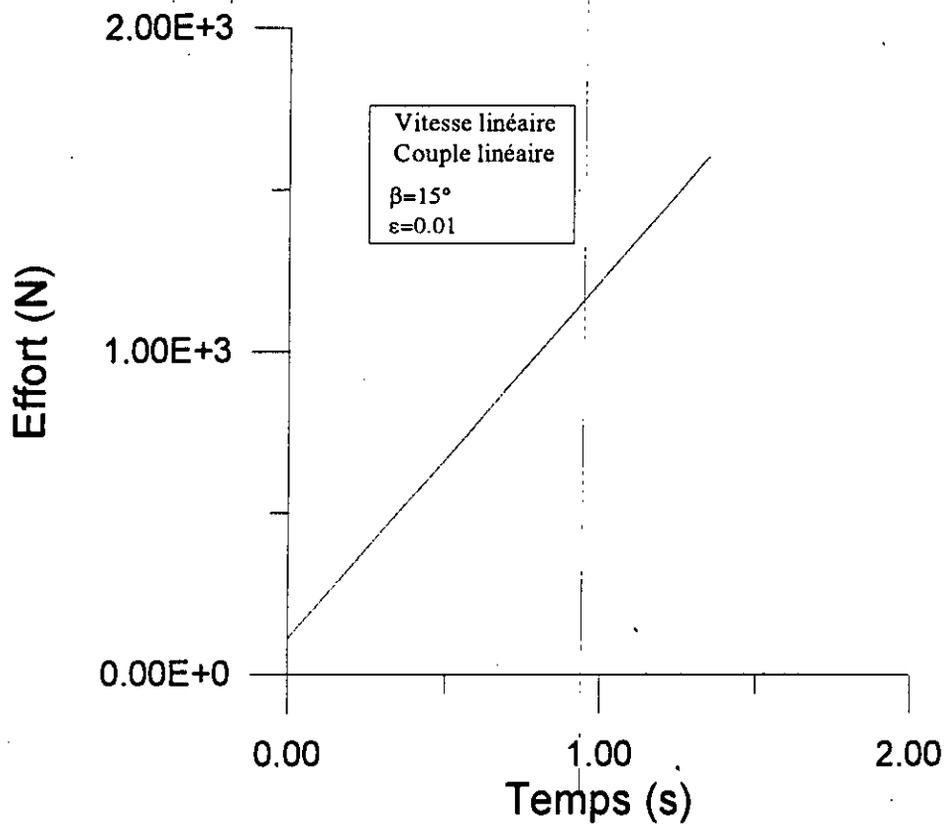
IV.4.VARIATION DU CHARGEMENT DYNAMIQUE



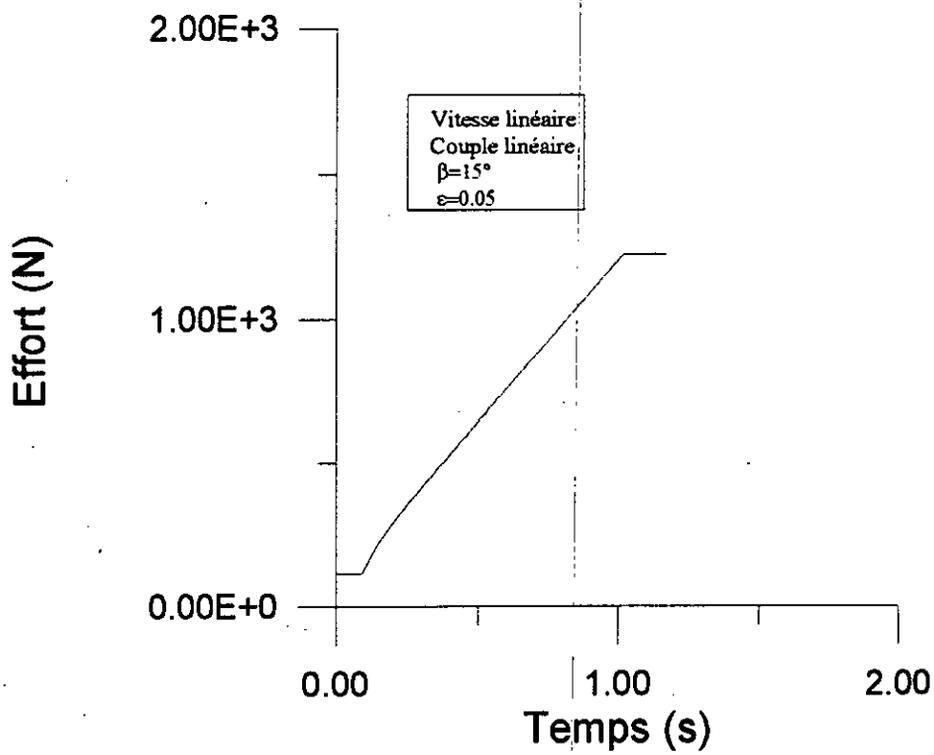
(a) EFFORT MAXIMAL



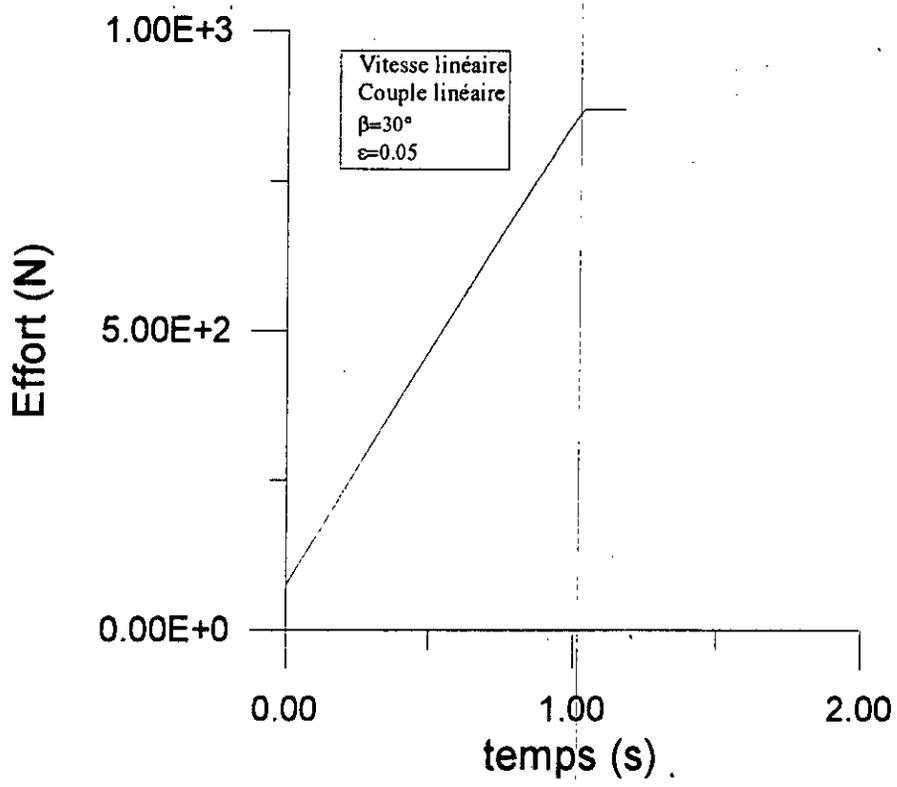
(b) EFFORT MAXIMAL



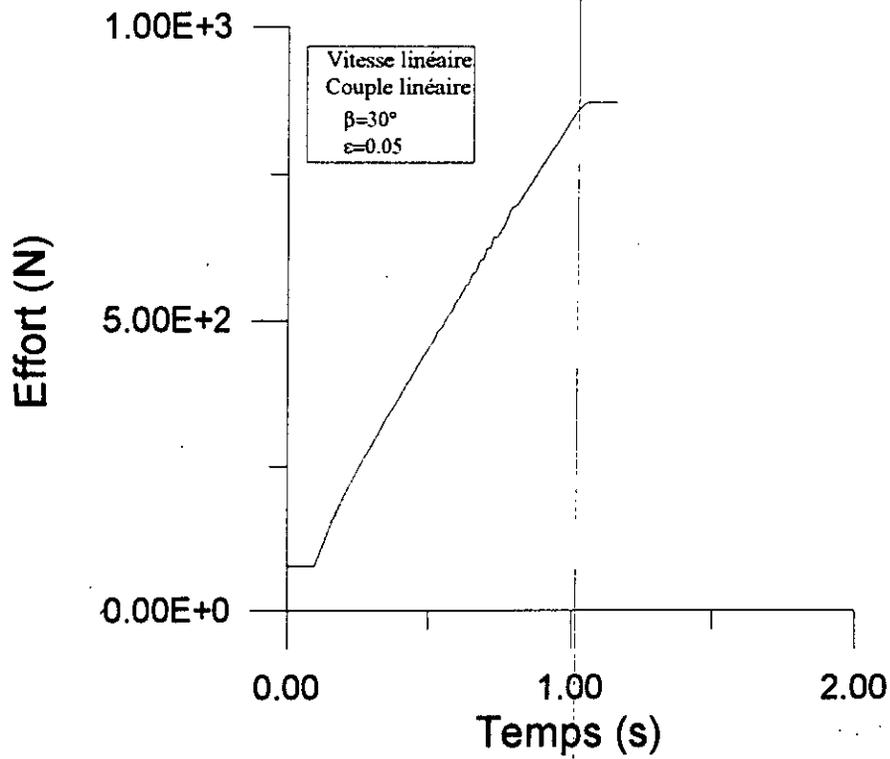
(c) EFFORT MAXIMAL



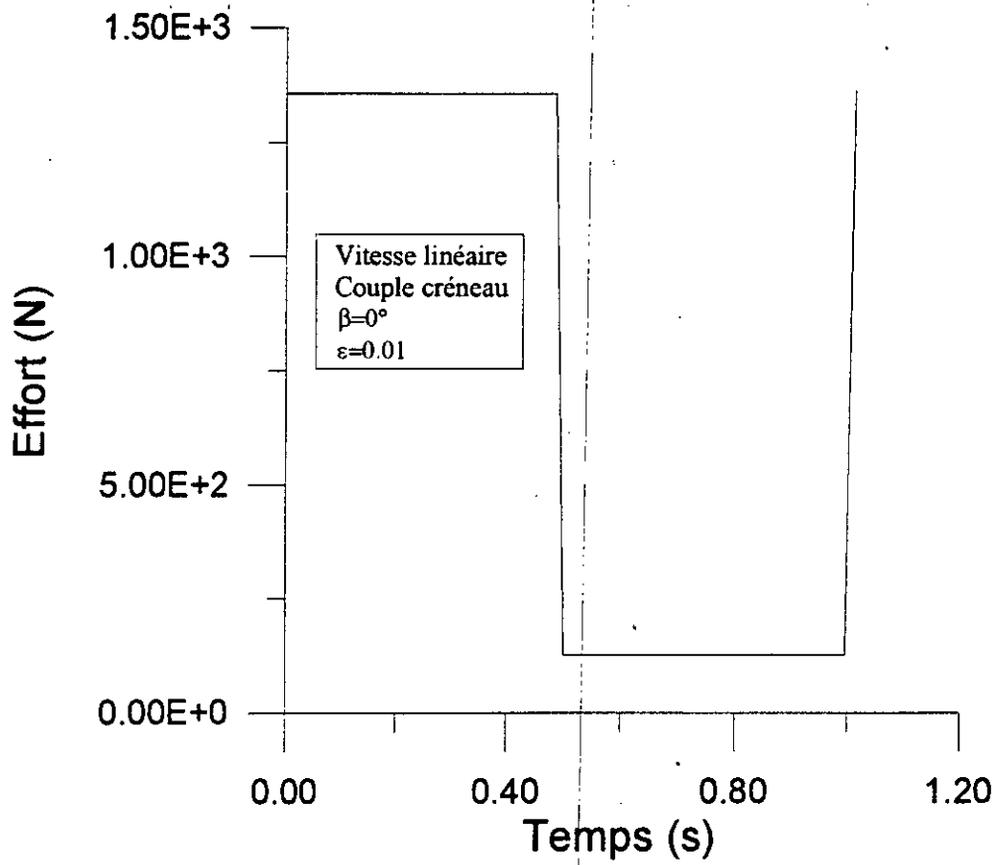
(d) EFFORT MAXIMAL



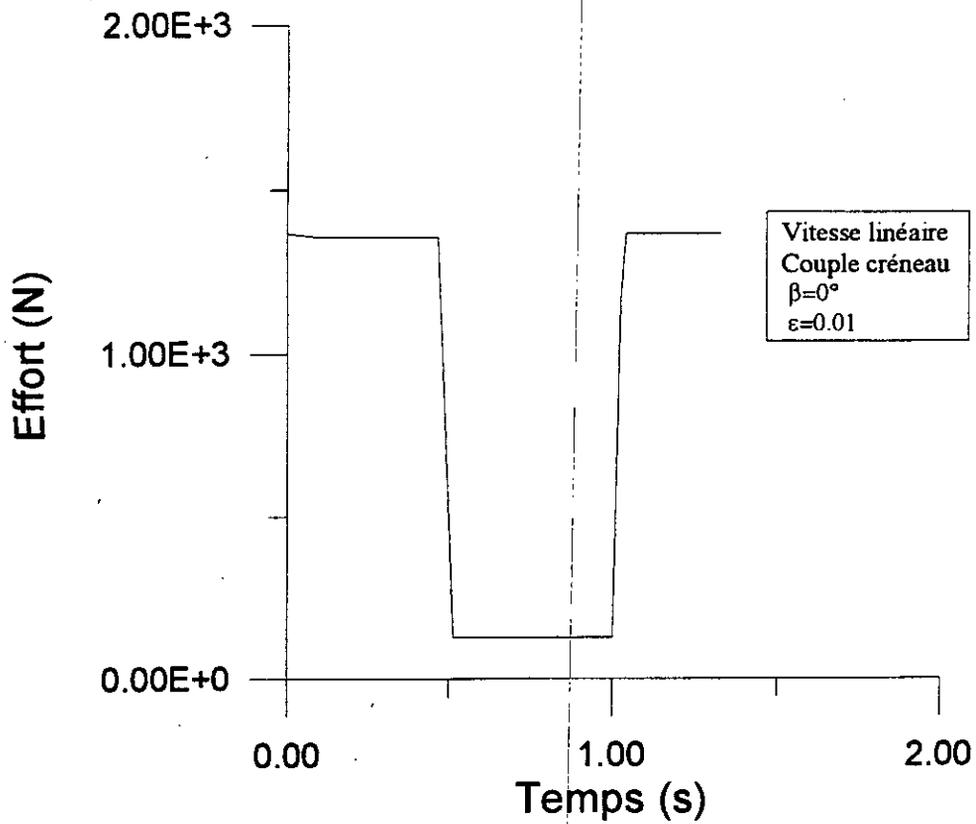
(e) EFFORT MAXIMAL



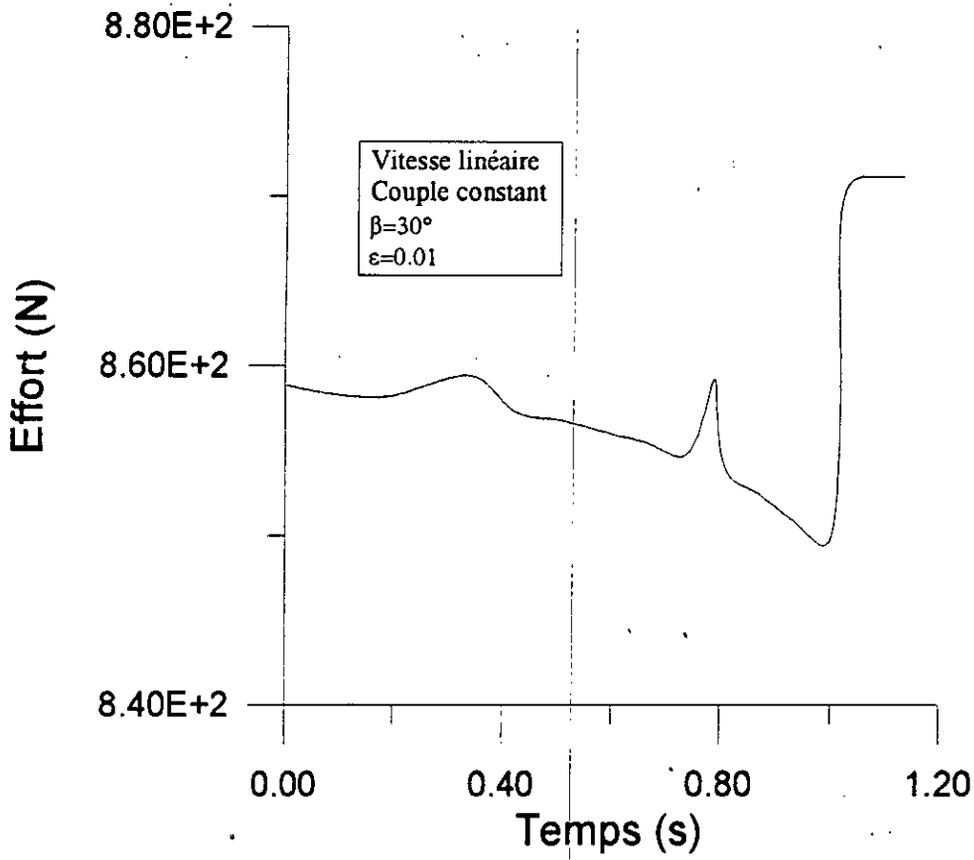
(f) EFFORT MINIMAL



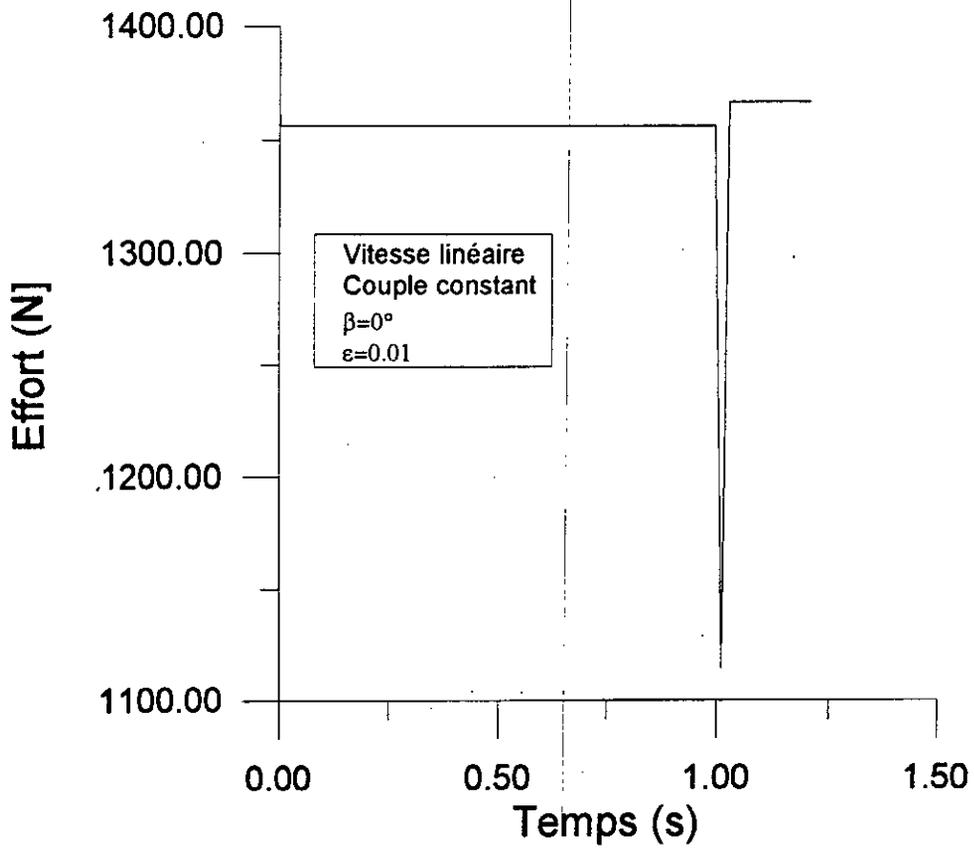
(g) EFFORT MAXIMAL



(h) EFFORT MINIMAL

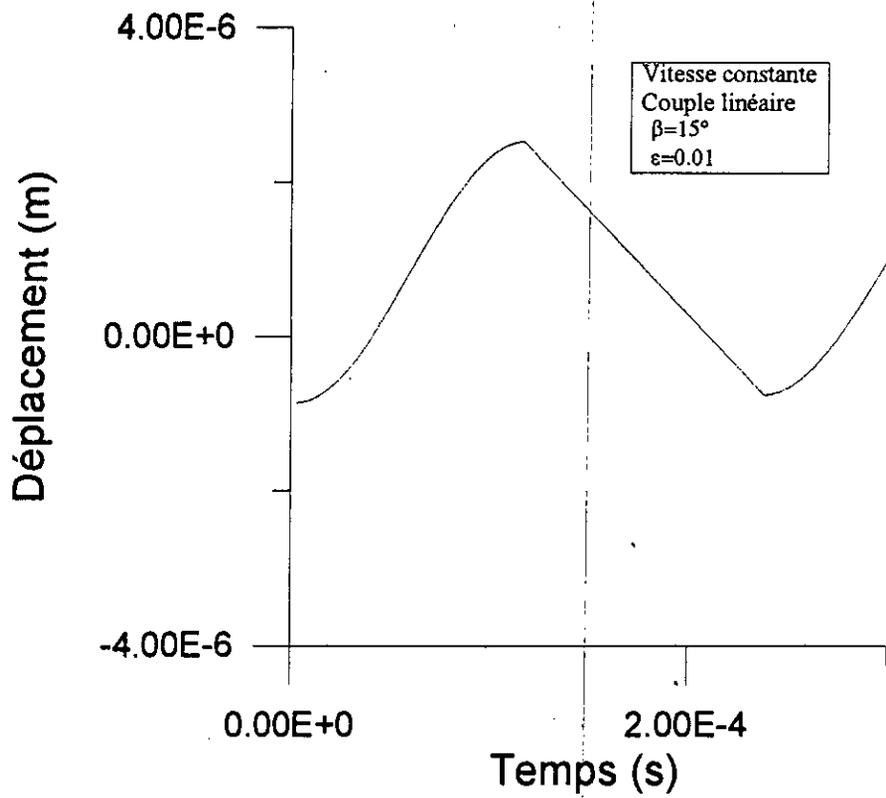


(i) EFFORT MAXIMAL

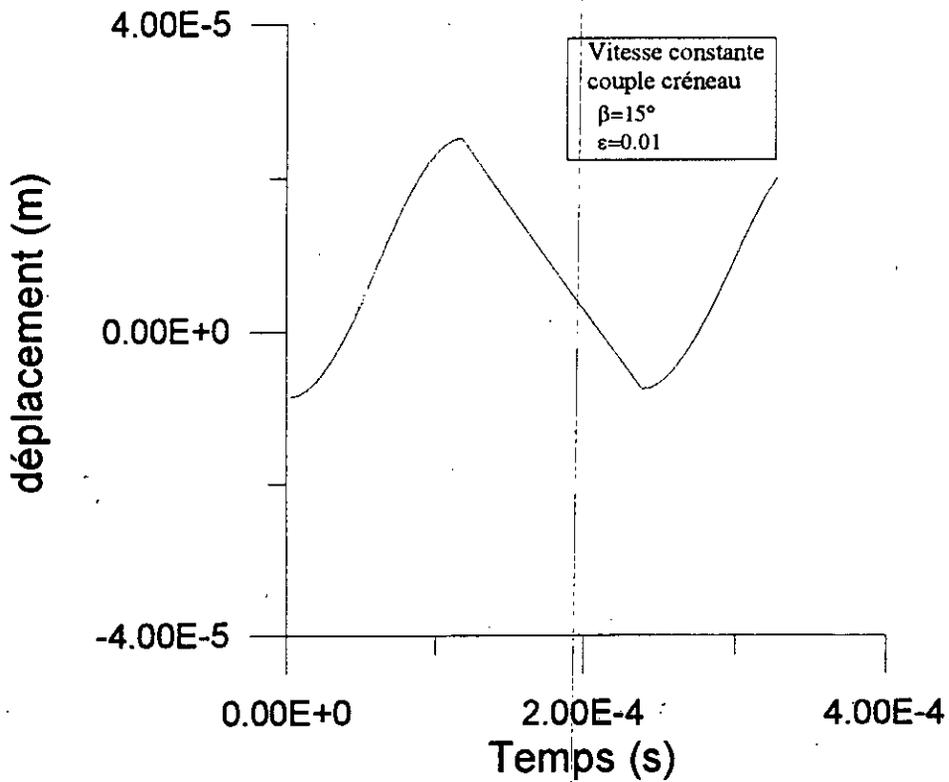


(j) EFFORT MAXIMAL

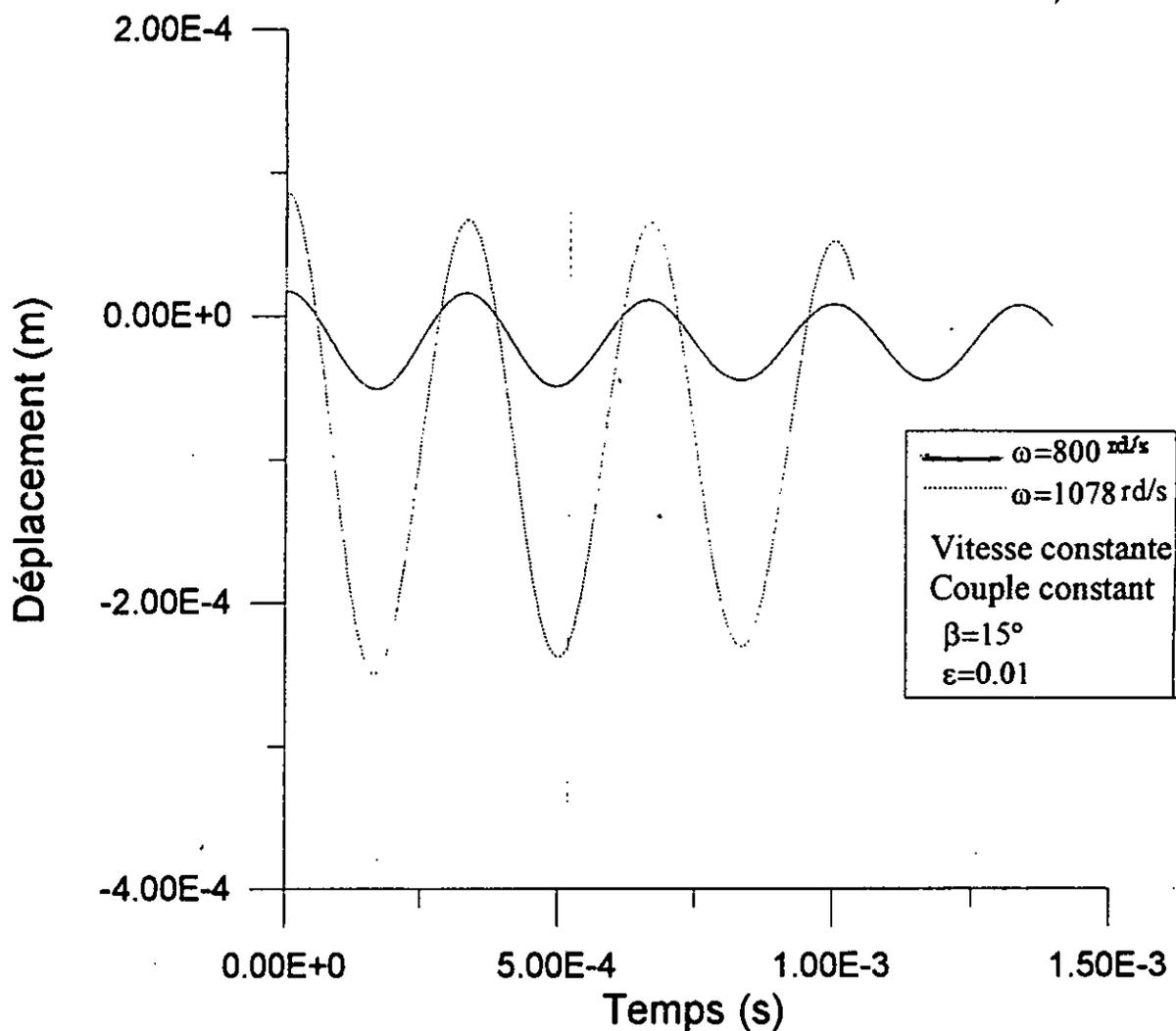
IV.5.VARIATION DE L'ERREUR DE TRANSMISSION



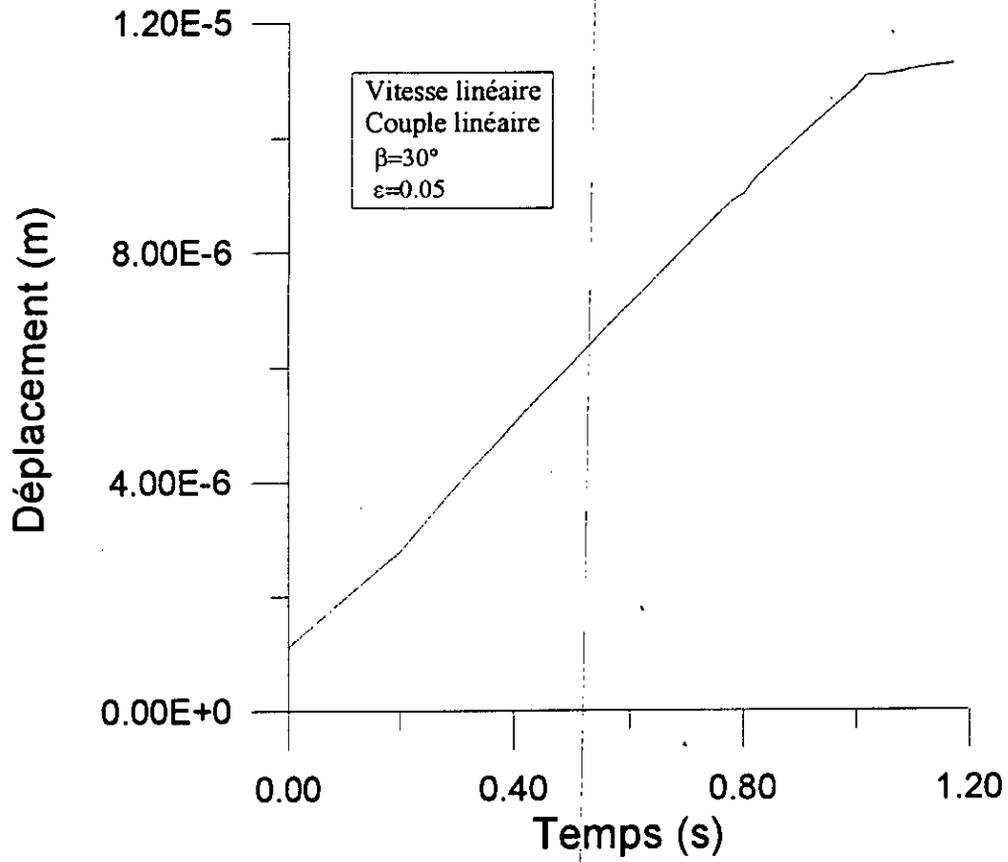
(a) DEPLACEMENT MAXIMAL



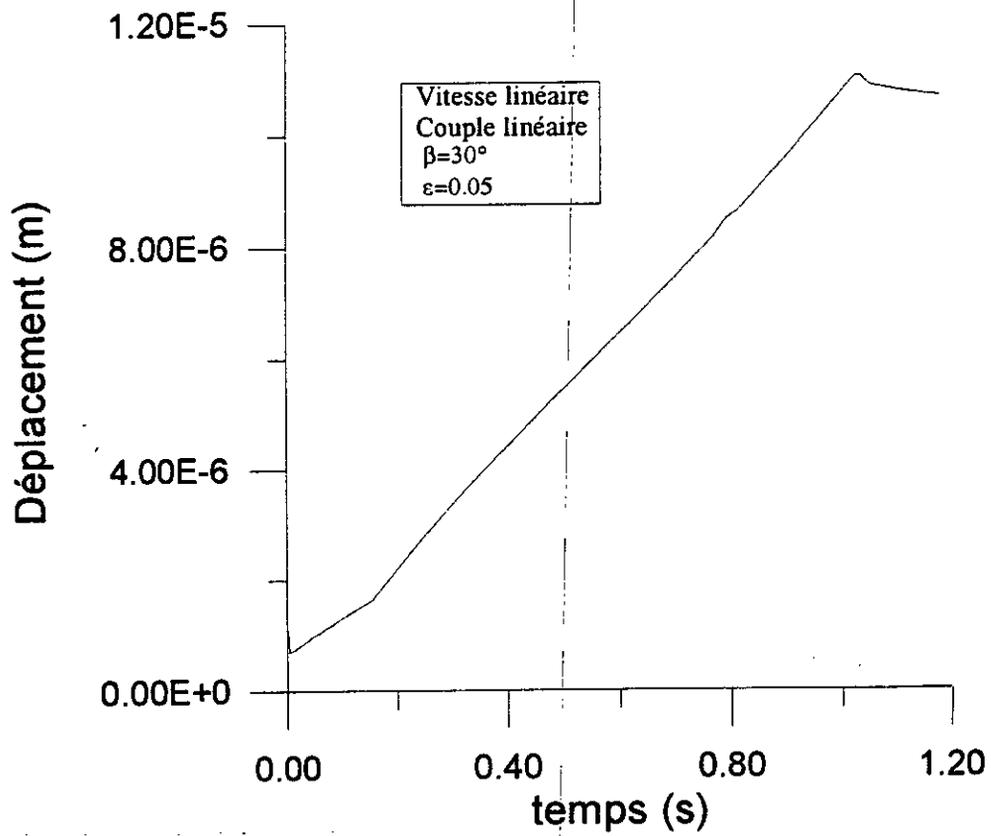
(b) DEPLACEMENT MAXIMAL



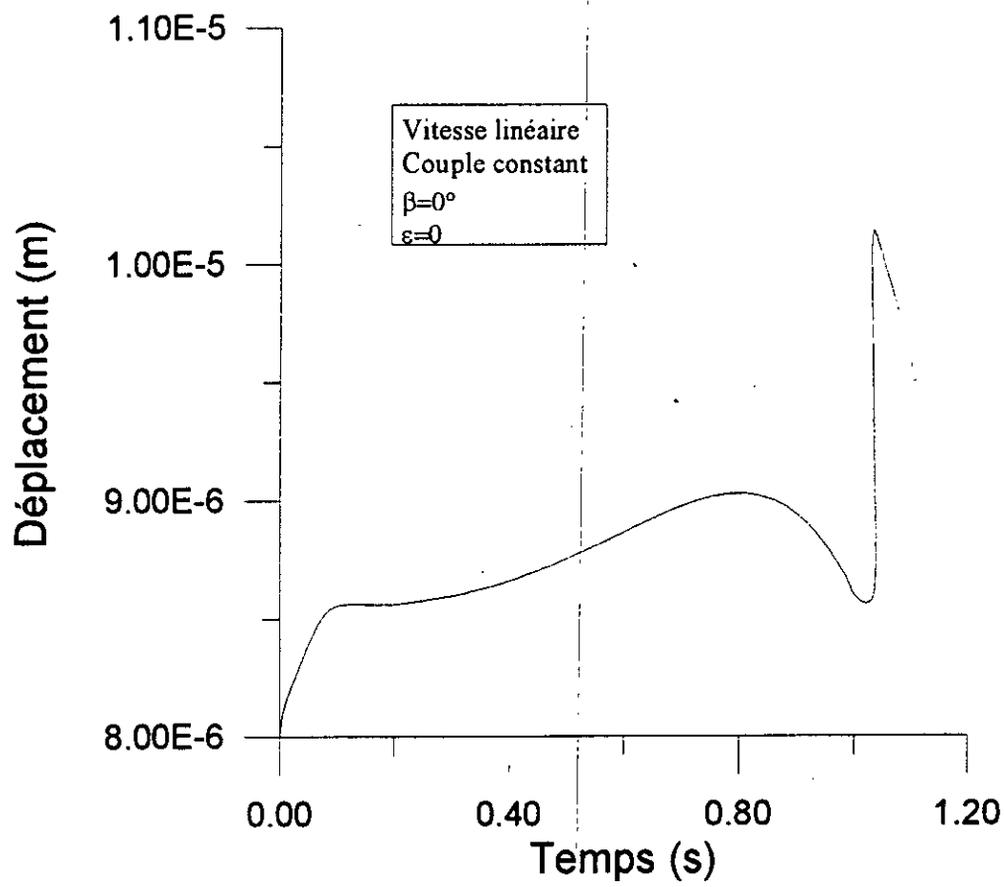
(c) VARIATION DU DEPLACEMENT



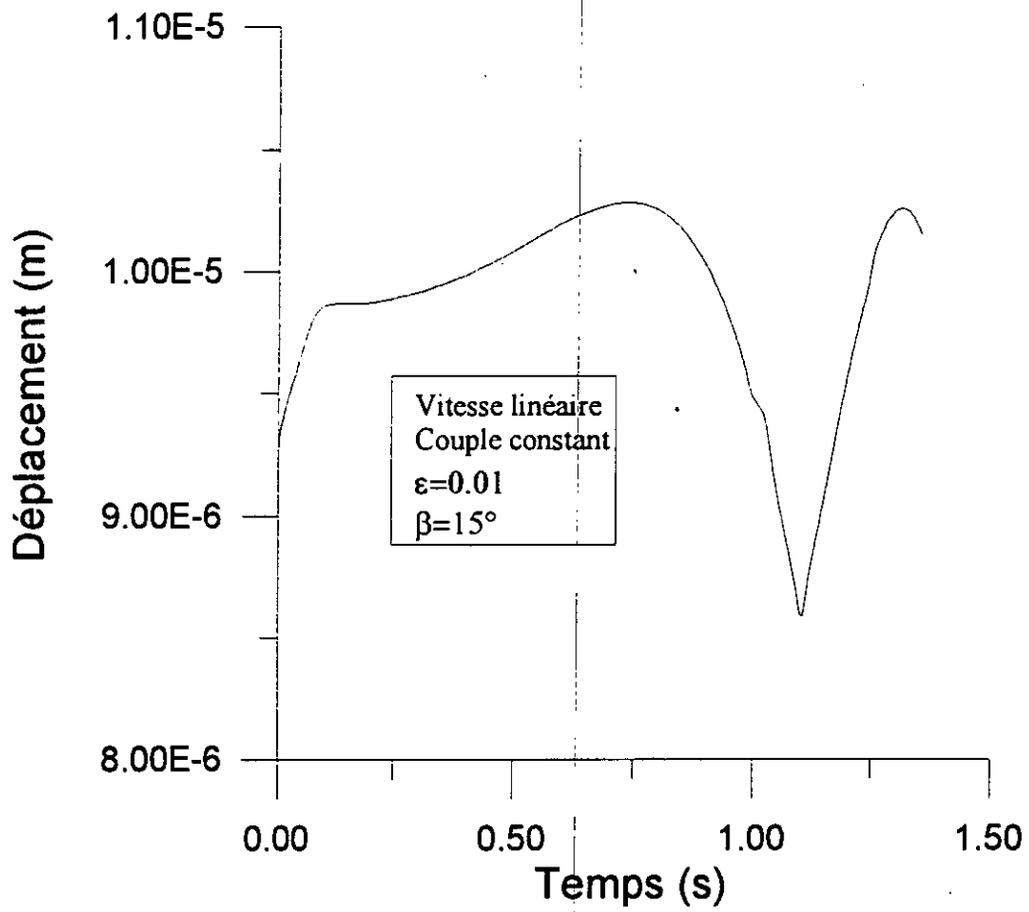
(d) DEPLACEMENT MAXIMAL



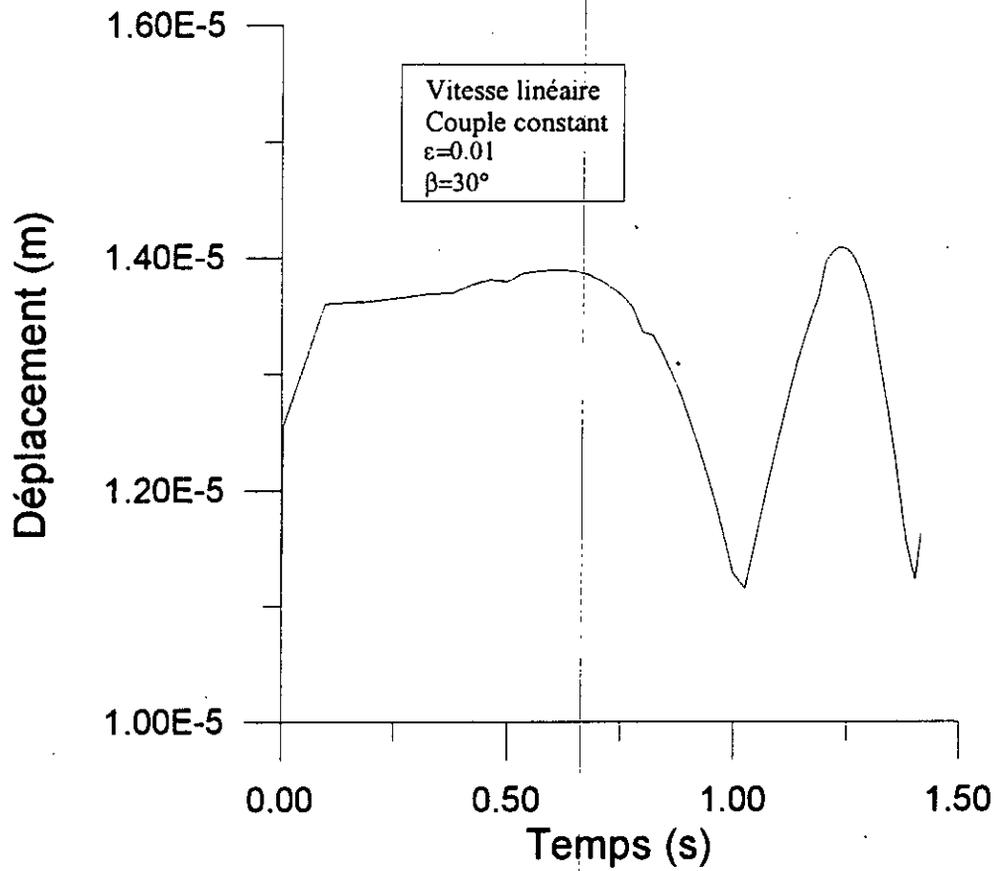
(e) DEPLACEMENT MINIMAL



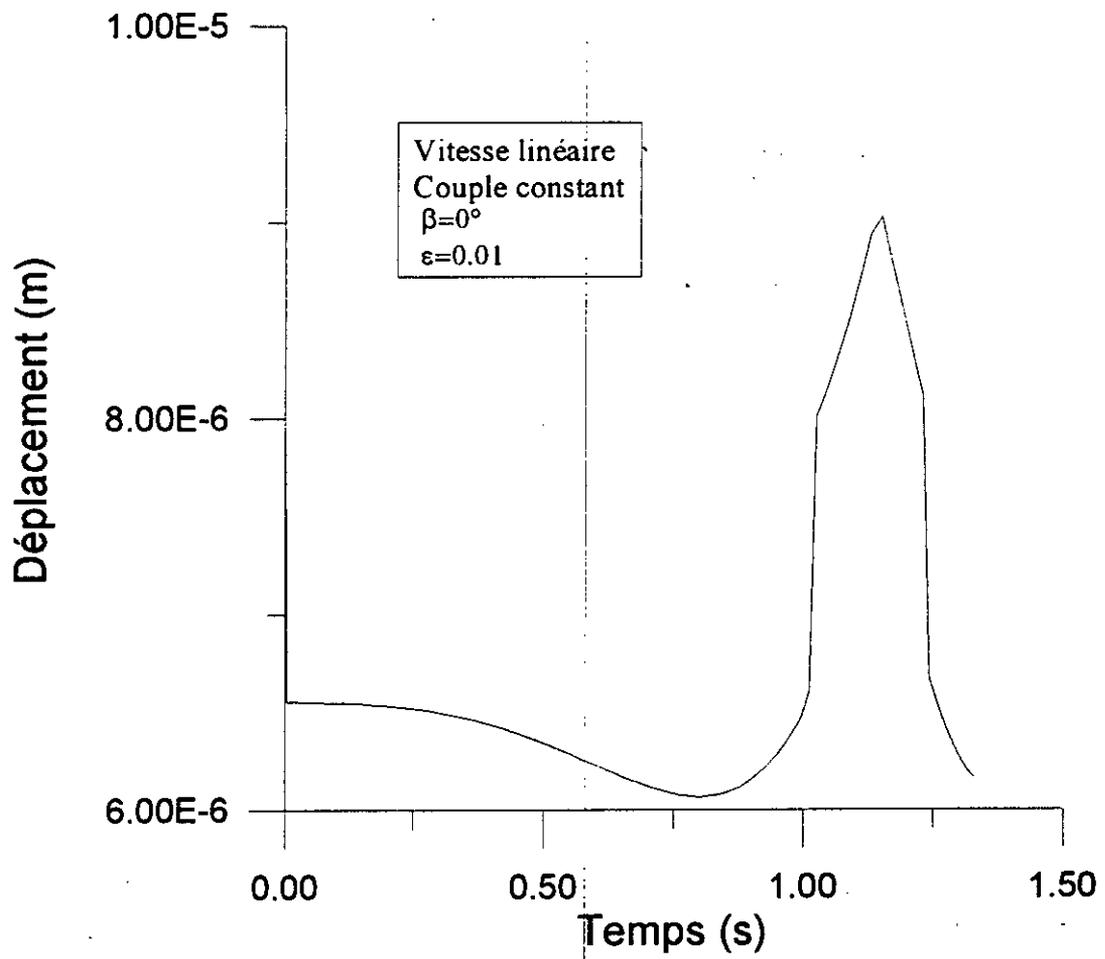
(f) DEPLACEMENT MAXIMAL



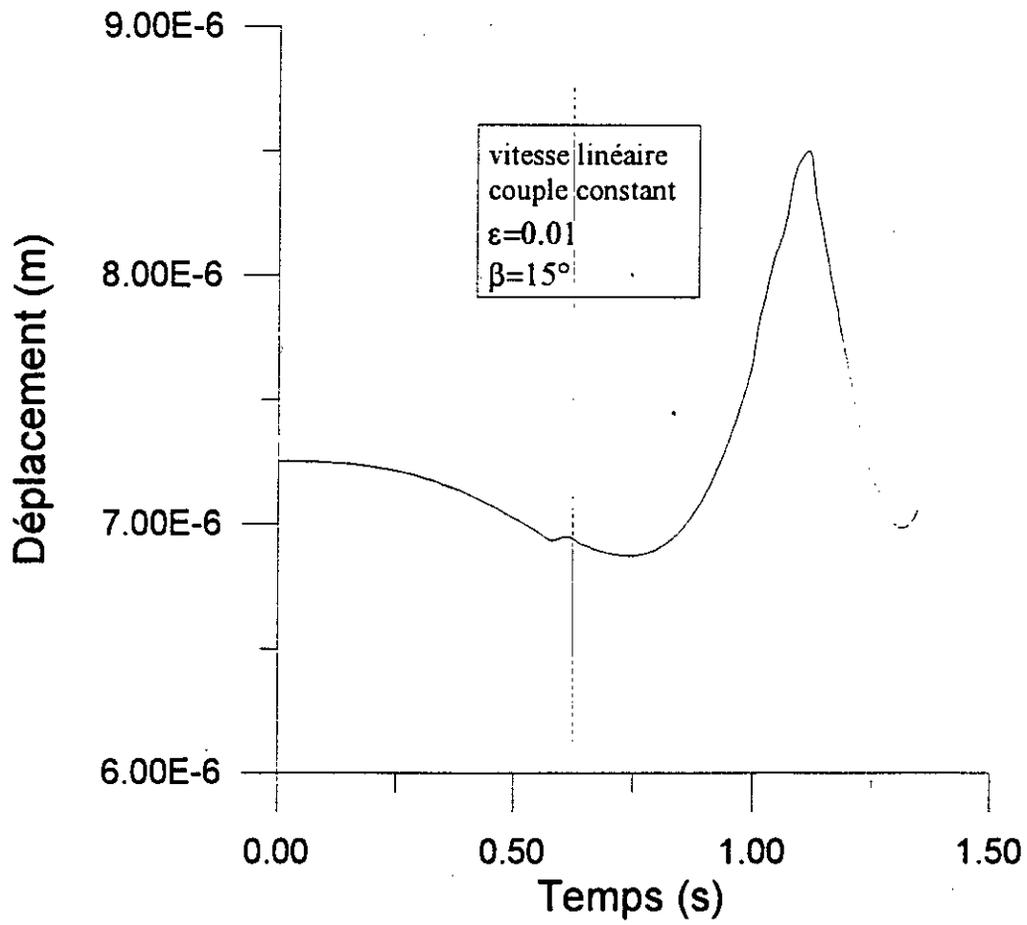
(g) VARIATION DU DEPLACEMENT MAXIMAL



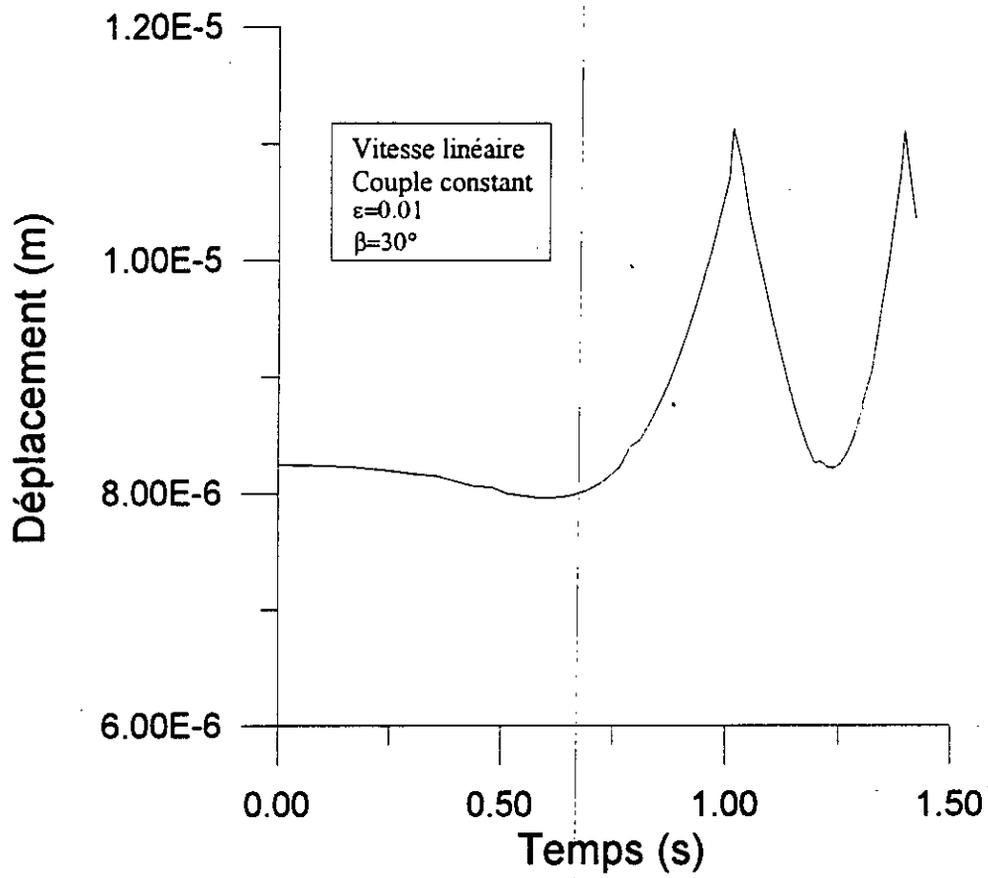
(h) VARIATION DU DEPLACEMENT MAXIMAL



(i) DEPLACEMENT MAXIMAL

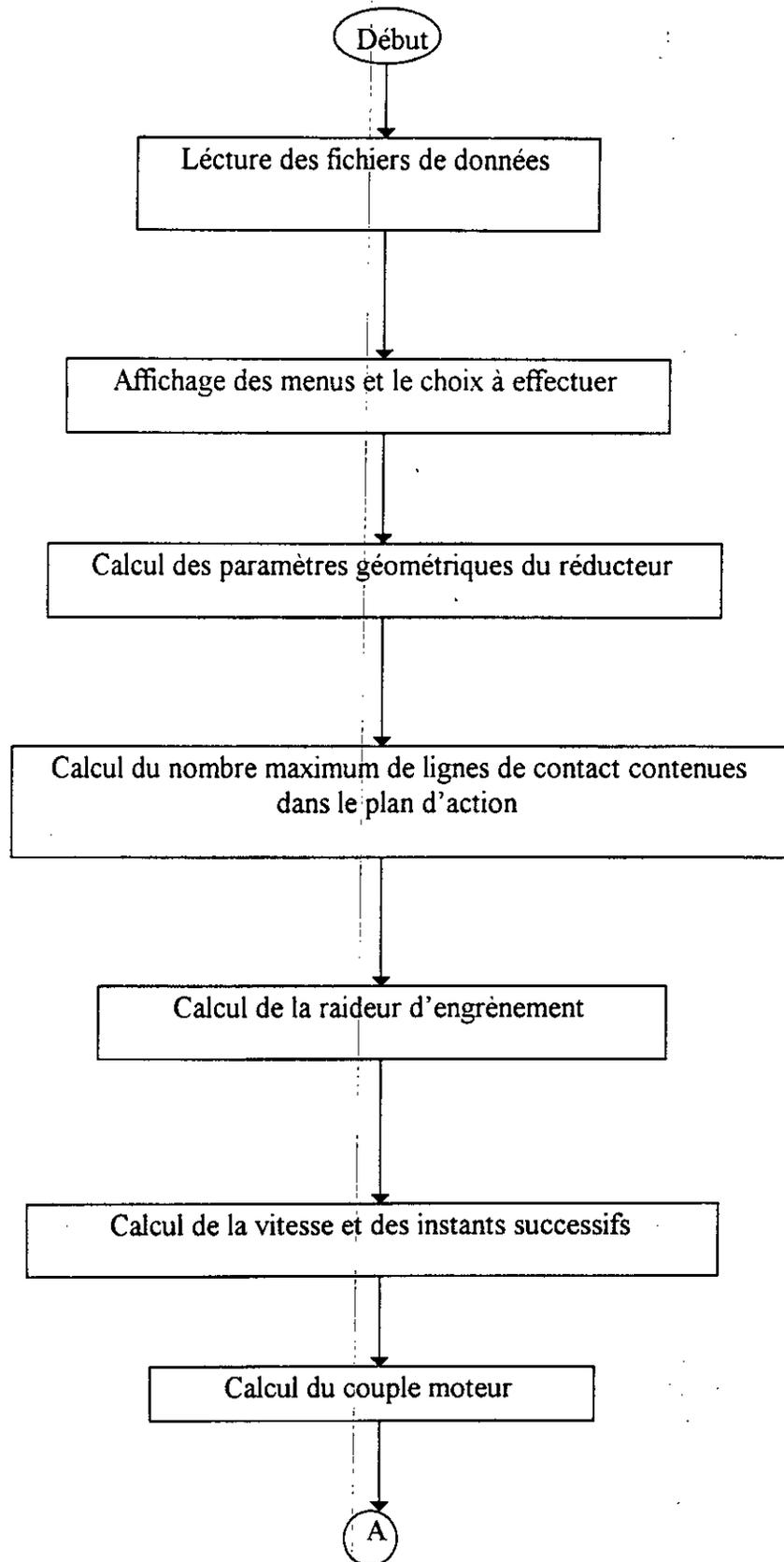


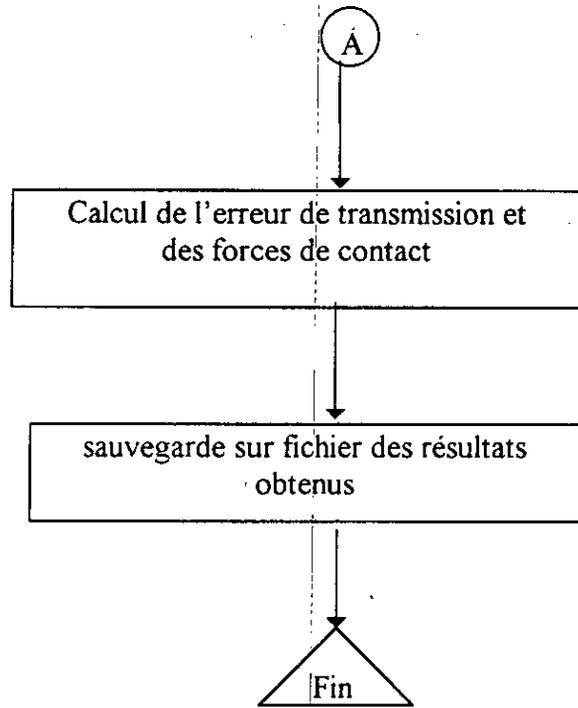
(j) VARIATION DU DEPLACEMENT MINIMAL



(b) VARIATION DU DEPLACEMENT MAXIMAL

**ORGANIGRAMME DU LOGICIEL**







## CONCLUSION GENERALE

La connaissance du chargement des dentures est un paramètre important dans la conception d'un engrenage. L'effort appliqué sur chaque dent gouverne le dimensionnement des roues, le but recherché étant de faire en sorte que le réducteur ait une durée de vie la plus grande possible.

Cette étude portant sur le comportement d'engrenages en régime transitoire, domaine encore mal connu, doit permettre une meilleure conception et conduire à l'élimination des essais sur prototypes souvent effectués avant chaque conception, cela suppose une facilité d'emploi et une large utilisation au niveau du bureau d'étude.

La détermination des efforts statiques de denture passe par la résolution du problème entre dents, problème hyperstatique.

Ce logiciel présenté précédemment basé sur les différentes approches de l'analyse dynamique nous a permis d'aboutir aux résultats suivants :

- a) L'influence du coefficient d'amortissement.
- b) Les charges dynamiques instantanées sur les dentures.
- c) L'erreur de transmission instantanée des dents en contact
- d) Les vitesses critiques de fonctionnement.
- e) L'influence du rapport de conduite sur la raideur et les efforts dynamiques.

Des améliorations peuvent être également apportées au logiciel. Une résolution par d'autres méthodes (méthodes des perturbations ; Ritz, ...) , l'étude des chocs pendant l'engrènement ou l'étude du régime transitoire avec un pas de temps constant permettront une nouvelle évolution de ce logiciel.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] VELEX Ph . " Contibution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à englundages à axes parallèles " .  
Thèse de doctorat , INSA de Lyon , (1988)
- [2] HENRIOT G . " Traité théorique et pratique des englundages " .  
Tome 1 : Théorie et technologie ,  
Tome 2 , étude complète du matériel , Paris Dunod 1983
- [3] HENRIOT G . " MANUEL PRATIQUE DES ENGLUNAGES " .  
Dunod 1964
- [4] BELHANECHÉ H . " Mécanique analytique " .  
Cours et exercices corrigés 3<sup>ème</sup> année g.méc . E.N.P 92-93
- [5] VELEX Ph . " Une modélisation du comportement dynamique de réducteur à englundages à axes parallèles " . 4<sup>ème</sup> journée d'études, transmission mécanique E.C.A.M Lyon , 20,21,22 juin 1990
- [6] REMOND D . "Inventaire des sources et des causes d'excitation dans les transmissions par englundages " . I.N.S.A - C.A.S.M -Lyon .
- [7] VELEX Ph . " Modélisation du comportement dynamique des transmissions par englundages " .  
I.N.S.A - LMC - LYON
- [8] KASUBA R . , ZVANS J . W . " An extended model por determining dynamic loads in spur gearing " . Journal of Mechanical Design . APRIL 1981

- [9] DOWSON D , TAYLOR C.M , GODET M and BERTHE D " Tribological design of machine elements " . I.N.S.A 6 th , 9th September 1988
- [10] VELEX Ph , BERTHE D . " Eccentricity and meshing contributions to the dynamic tooth loading on geared trains " . I.N.S.A 1990
- [11] DUMONT J.Ph " Contribution à l'analyse du comportement dynamique , en régime transitoire , de réducteurs à engrenages à axes parallèles" .  
Thèse d'ingénieur , I.N.S.A de Lyon 1992
- [12] PARIS F . " Modélisation du comportement dynamique d'engrenages à dentures larges . Effets de torsion différentielle" .Thèse d'ingénieur I.N.S.A de Lyon 1993
- [13] UMEZAWA K . "The performance diagrams for the vibration of Helical gears" . I.N.S.A de Lyon .
- [14] BOUTERFAS T . " Simulation numérique du comportement dynamique de réducteurs à engrenages à axes parallèles . Sans et avec erreurs géométriques" .  
Thèse d'ingénieur , E.N.P 1996
- [15] RECHAK S . "Vibration et calcul dynamique des structures " . Cours et exercices ,  
4<sup>ème</sup>année g.méc E.N.P 95-96
- [16] MAATER M . "Analyse du comportement dynamique des réducteurs à engrenages . Influence des écarts de formes" .Thèse d'ingénieur I.N.S.A de Lyon 1991 .
- [17] KUCUKAY F . "Dynamic behaviour of high speed gears" . Institute for mechanics ,  
technical university of Munich , west Germany . 1984

[18] KUMAR A.S, SANKAR T.S, OSMAN M.O.M " ON dynamic tooth load and stability of a spur - gear system using the state - space approach " .Department of Mechanical Engineering . Concordia University.Montreal .CANADA . MARCH 1985

[19] KAZUNORI . . F , FUJIO H . "Dynamic behavior of heavy-loaded spur gears " . Faculty of Engineering , Kyushu University , Fukuoka city , JAPAN . MAY 1974

[20] LIN H .H .; OSWALD F . B and TOWNSEND D.P " Dynamic loading of spur gears with linear or parabolic tooth profile modification " . Department of mechanical engineering Memphis state University .

[21] ABUID B.A , BEL NI KOLOVSKY B.G "Study of dynamic loads in machines with spur gears" .

Part 1 . Mechanical Department , Technical University , Sofia , Bulgaria . august 16-31 1991

[22] KLAUS - JURGEN . B , EDWARD L.W." Numerical methods in finite element analysis", Pventice - hall , INC 1976

# ANNEXE

## ANNEXE 1

**GEOMETRIE DES ENGRENAGES CYLINDRIQUES  
A DENTURE DROITE ET HELICOIDALE A PROFILS  
EN DEVELOPPANTE DE CERCLE**

**1 - ENGRENAGES CYLINDRIQUES A DENTURE DROITE**

En chaque point de l'engrèvements, les géométries et les vitesses des surfaces de dentures ainsi que la charge transmise varient. Il a été montré que pour des engrenages cylindriques droits à axes parallèles, on peut représenter un point donné de l'engrènement en régime permanent par le contact entre deux cylindres d'axes parallèles munis des mêmes charges, géométries et vitesses [26].

Les paramètres de contact utilisé pour la simulation de l'engrènement sont généralement cinq points :

$T_1'$  : Premier point de l'engrènement en pied de pignon avec deux couples de dent en prise.

$T_1''$  : Point de transition entre pied de pignon et primitif, de deux à un couple de dents en prise, la charge normale étant supposée transmise par un seul couple de dents.

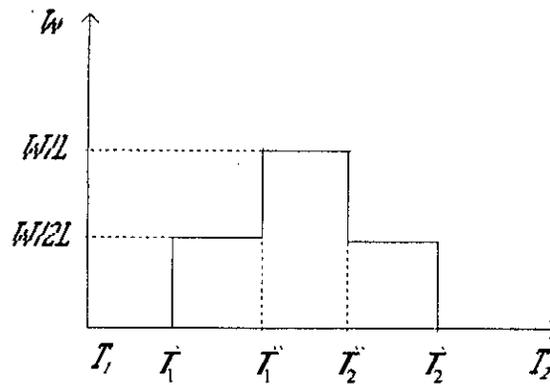
$I$  : Point de contact confondu avec le primitif.

$T_2''$  : Point de transition entre primitif et sommet de pignon, de un à deux couples de dents en prise, ici encore la charge normale est supposée transmise par un seul couple de dents.

$T_2'$  : Dernier point de l'engrènement au sommet du pignon avec deux couples de dents en prise.

En chaque point de profil, il faut définir :

- les rayons de courbure des deux dents au point de contact  $R_1, R_2$ .
- Les vitesses respectives des deux massifs  $U_1, U_2$ .
- La charge par unité de longueur (normale en contact)  $w/l$  fig (A1).



$$R_1 = T_1 M$$

$$R_2 = T_2 M$$

$$U_1 = R_1 \omega_1$$

$$U_2 = R_2 \omega_2$$

Fig (A1) : Diagramme de charge 1

Afin de déterminer la géométrie d'un engrenage, il faut connaître les paramètres de taillages et de fonctionnement suivants :

- Le nombre de dents  $Z_1, Z_2$ .
- Les coefficients de déports  $x_1, x_2$ .
- L'angle de pression de taillage  $\alpha_0$
- Le module de taillage  $m_0$ .
- La largeur de l'engrènement le plus étroit  $l$ .
- L'entraxe  $E$ .
- Les saillies des dents  $h_{a1}, h_{a2}$ .
- Les creux des dents  $h_{f1}, h_{f2}$ .
- La vitesse d'entrée  $\omega_1$ .

Ainsi que les caractéristiques du matériaux et du lubrifiant :

- Les coefficients de poisson  $\nu_1, \nu_2$ .
- La viscosité à l'entrée du contact  $\mu$ .
- Le coefficient de piézoviscosité  $\alpha$
- Le coefficient de frottement  $f$ .
- Les masses volumiques  $\rho_1, \rho_2$
- Les modules de Young  $E_1, E_2$

Avec ces données, nous pouvons définir :

- Les rayons primitifs nominaux

$$r_i = \frac{m_0 Z_i}{2} \quad i=1,2$$

- Les rayons de base :

$$r_{bi} = r_i \cos \alpha_0 \quad i=1,2$$

- Les rayons de tête :

$$r_{ai} = r_i + x_i m_0 + h_{ai} \quad i=1,2$$

- Le pas de base :

$$P_b = \pi m_0 \cos \alpha_0$$

- L'angle de pression de fonctionnement :

$$\alpha' = \ar \cos \left( \frac{r_{b1} + r_{b2}}{E} \right)$$

- Le module de fonctionnement :

$$m' = m_0 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}$$

- Les rayons primitifs de fonctionnement :

$$r'_i = \frac{m' Z_i}{2} \quad i=1,2$$

- L'effort normal aux dentures :

$$w = \frac{Q}{I_{bi} w_i} \quad i=1,2$$

- Les longueurs :

$$\begin{cases} \dot{r}_1 \dot{r}_2 = \sqrt{E^2 - (r_{a1} - r_{b2})^2} \\ \dot{r}_1 \dot{r}_1' = \dot{r}_1 \dot{r}_2 - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} \\ \dot{r}_2 \dot{r}_2' = \dot{r}_1 \dot{r}_2 - \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} \\ \dot{r}_1 \dot{r}_2' = \dot{r}_1 \dot{r}_2 - \dot{r}_1 \dot{r}_1' - \dot{r}_2 \dot{r}_2' \end{cases}$$

- Le rapport de conduite :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\dot{r}_1 \dot{r}_2}{P_m}$$

- Le rapport de recouvrement :

$$\varepsilon_\beta = \frac{\text{tg}\beta}{\pi m}$$

- Le rapport de conduite total :

$$\varepsilon_t = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta = \frac{\dot{r}_1 \dot{r}_2}{P_m} + \frac{\text{tg}\beta}{\pi m}$$

- Le module d'Young équivalent :

$$\frac{1}{E_q} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)$$

On peut déterminer les caractéristiques de l'engrènement en  $n + 1$  points du profil.

Pour cela, on divise la ligne d'action entre  $\dot{r}_1$  et  $\dot{r}_2$  en segments de longueur  $\rho = \frac{\dot{r}_1 \dot{r}_2}{n}$

Nous avons alors en chaque point :

$$R_1 = (r_1 \dot{r}_1 + ip)$$

$$R_2 = r_2 \dot{r}_2 - R_1$$

$$U_1 = w_1 R_1$$

$$U_2 = w_2 R_2$$

$$i = 0, n$$

- Le rayon de courbure équivalent est :

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

## II - ENGRENAGES CYLINDRIQUES A DENTURE HELICOIDALE

Le contact entre deux dents d'engrenage hélicoïdal ne sera plus présenté par le contact entre deux cylindres, mais par le contact entre deux cônes de même conicité  $\beta_b$ .

Pour connaître les caractéristiques de l'engrenage, il faut connaître

- Le nombre de dents des roues 1 et 2 :  $Z_1, Z_2$ .
- Les coefficients de déport des roues 1 et 2 :  $x_1, x_2$ .
- L'angle de pression normal :  $\alpha_{n0}$
- Le module normal de taillage :  $m_{n0}$ .
- L'inclinaison d'hélice :  $\beta_0$
- La largeur de l'engrenage :  $I$ .
- L'entraxe :  $E$ .
- Les saillies des roues 1 et 2 :  $h_{a1}, h_{a2}$ .
- Les creux des roues 1 et 2 :  $h_{f1}, h_{f2}$ .
- La vitesse d'entrée de la roue 1 :  $\omega_1$
- La puissance transmise :  $Q$ .
- Les modules d'Young des roues 1 et 2 :  $E_1, E_2$
- Les coefficients de poisson des roues 1 et 2 :  $\nu_1, \nu_2$
- La viscosité à l'entrée du contact :  $\mu$
- Le coefficient de frottement :  $f$
- Le coefficient de piézoviscosité :  $\alpha$

Nous pouvons alors calculer :

- L'angle de pression apparent de taillage :

$$\alpha_{t0} = \operatorname{arctg} \left[ \frac{\operatorname{tg} \alpha_{n0}}{\cos \beta_0} \right]$$

- L'angle d'hélice de base :

$$\beta_b = \arctg[\operatorname{tg}\beta_0 \cdot \cos\alpha_{t0}]$$

- Le module apparent de taillage :

$$m_{t0} = \frac{m_{n0}}{\cos\beta_0}$$

- Les rayons primitifs nominaux :

$$r_i = \frac{m_{t0} \cdot Z_i}{2} \quad i = 1, 2$$

- Les rayons de base :

$$r_{bi} = r_i \cos\alpha_{t0} \quad i = 1, 2$$

- Les rayons de tête :

$$r_{ai} = r_i + x_i m_{n0} + h_{ai} \quad i = 1, 2$$

- Le pas de base réel :

$$P_{bn} = \pi m_{n0} \cos\alpha_{n0}$$

- Le pas de base apparent :

$$P_{bt} = \pi m_{t0} \cos\alpha_{t0}$$

- Le pas axial :

$$P_x = \frac{P_{bn}}{\sin\beta_b}$$

- L'angle de pression apparent de fonctionnement :

$$\alpha'_t = \arccos\left[\frac{r_{b1} + r_{b2}}{E}\right]$$

- L'angle d'hélice de fonctionnement :

$$\beta' = \arctg\left[\frac{\operatorname{tg}\beta_b}{\cos\alpha'_t}\right]$$

- L'angle de pression normal de fonctionnement :

$$\alpha'_n = \arctg \left[ \operatorname{tg} \alpha'_t \cdot \cos \beta' \right]$$

- Le module apparent de fonctionnement :

$$m'_t = \frac{m'_n}{\cos \beta'}$$

- Les rayons primitifs de fonctionnement :

$$r'_i = \frac{m'_t Z_i}{2} \quad i = 1, 2$$

- Les longueurs :

$$\begin{cases} T_1 T_2 = \sqrt{a^2 - (r_{b1} - r_{b2})^2} \\ T_1 T'_1 = T_1 T_2 - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} \\ T_2 T'_2 = T_1 T_2 - \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} \\ T'_1 T'_2 = T_1 T_2 - T_1 T'_1 - T_2 T'_2 \end{cases}$$

- Le rapport de conduite :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{T'_1 T'_2}{P_{bt}}$$

- Le rapport de recouvrement :

$$\varepsilon_\beta = \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\pi m'_t}$$

- Le rapport de conduite total :

$$\varepsilon_t = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta = \frac{T'_1 T'_2}{P_{bt}} + \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\pi m'_t}$$

- Le module d'Young équivalent :

$$\frac{1}{E_q} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)$$

## ANNEXE II

**ETUDE VIBRATOIRE**  
**METHODE DES PERTURBATIONS**

On s'intéresse au système différentiel suivant :

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F(t)\}$$

**1 - Recherche des fréquences et des modes propres**

L'amortissement est supposé négligeable de telle façon qu'il ne modifie pas beaucoup les fréquences propres.

Les valeurs propres sont déduites de l'annulation du déterminant de la matrice  $[K] - \lambda_i [M]$ . On suppose que toutes les valeurs propres sont distinctes et réelles positives ce qui est le cas de la majorité des systèmes réels.

Les fréquences propres sont déduites des relations suivantes :

$$\lambda_i = \omega_i^2$$

Les modes propres  $\{\phi_i\}$  associés aux fréquences propres  $\omega_i$  sont obtenus à partir des équations suivantes :

$$([K] - \lambda_i [M])\{\phi_i\} = \{0\}$$

On norme les vecteurs propres par :  $\|\{\phi_i\}\| = 1$

Soit  $[\phi] = [\{\phi_1\} \{\phi_2\} \dots \{\phi_n\}]$  matrice de passage de la base de l'espace physique à la base modale

$$\{X\} = [\phi]\{q\} \Leftrightarrow \{q\} = [\phi]^T \{X\}$$

**2. Equation de 2ème ordre :**

$$m \ddot{X} + c \dot{X} + kX = F \quad (1)$$

**2-1) Excitation harmonique**

$$F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$$

la solution en régime permanent est cherchée sous la forme :

$$X = A \sin(\Omega t + \varphi) \quad (2)$$

A : est l'amplitude de la réponse.

$\varphi$  : est le déphasage de la réponse.

En identifiant les termes en  $\sin(\Omega t)$  et en  $\cos(\Omega t)$

$$C\Omega \cos(\varphi) - (k - m\Omega^2) \sin(\varphi) = 0 \quad (3)$$

$$\left[ (k - m\Omega^2) \cos(\varphi) + C\Omega \sin(\varphi) \right] A - F_0 = 0 \quad (4)$$

(3) permet d'exprimer  $\sin(\varphi)$  en fonction de  $\cos(\varphi)$

$$\sin(\varphi) = \frac{C \beta \Omega \cos(\varphi)}{k - m \Omega^2}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{F_0}{A} \frac{k - m \Omega^2}{(k - m \Omega^2)^2 + C^2 \Omega^2}$$

En utilisant l'identité :  $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$ , il vient :

$$X = \frac{F_0}{\left[ \left[ 1 - (\Omega/\omega_n)^2 \right]^2 + \left[ 2\xi\Omega/\omega_n \right]^2 \right]^{1/2}}$$

$$\text{tg}(\varphi) = \frac{2\xi(\Omega, \omega_n)}{1 - (\Omega, \omega_n)^2}$$

On peut démontrer que l'amplitude est maximale pour :

$$\Omega / \omega_n = (1 - 2\xi^2)^{1/2}$$

dans ce cas on obtient :

$$X = \frac{F_0}{2K\xi[1 - \xi^2]^{1/2}} \quad \text{tg}(\varphi) = \frac{[1 - 2\xi^2]^{1/2}}{\xi}$$

En effet pour un système réel on a couramment  $\xi < 0,1$  dans ce cas on obtient :

$$\Omega / \omega_n \cong 1 - \xi \cong 1$$

$$X = \frac{F_0}{2K\xi} \left(1 + \left(\frac{\xi^2}{2}\right)\right) \cong F_0 / (2K\xi)$$

$$\text{tg}(\varphi) \cong 1/\xi$$

La résonance de phase et la résonance d'amplitude sont pratiquement confondues.

On peut voir les cas quand  $\Omega \ll \omega_n$ ,  $\Omega = \omega_n$  et  $\Omega \gg \omega_n$ .

## 2-2) Excitation périodique :

La force d'excitation périodique, de période  $T = 2\pi/\Omega$ , peut se transformer en série de fourrier.

$$\left\{ \begin{array}{l} F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t) \\ a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\Omega t) dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\Omega t) dt \end{array} \right.$$

En régime permanent, on calcule la réponse correspondante à chaque harmonique et on reconstruit la réponse par simple superposition.

Prenant un cas simple où  $F(t)$  est une fonction en créneau

$$\begin{cases} F(t) = 1 & \text{Si } t < n(T/2), \text{ } n \text{ impair} \\ F(t) = 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

Tous calculs conduit à :

$$F(t) = \frac{F_0}{2} + \frac{2F_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\Omega t)}{n}$$

Par suite la solution en régime permanent est :

$$X(t) = \frac{F_0}{2k} + \frac{2F_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\Omega t)}{n \left( [k - m(n\Omega)^2]^2 + [Cn\Omega]^2 \right)^{1/2}}$$

On voit apparaître la possibilité de résonance pour :

$$k - mn^2\Omega^2 = 0 \Rightarrow \Omega = \frac{\omega_n}{n}$$

### 2-3) Equation différentielle à coefficients périodiques :

On prend le cas où la matrice raideur est à coefficients périodiques dans le temps ( de même période ) et on néglige l'amortissement. La matrice masse est constante.

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K(t)]\{X\} = \{F_0\} \quad (f_0 = \text{constante})$$

On se place dans le cas où :

$$[K(t)] = (1 + \alpha\phi(t))[Km]$$

$$[M]\{\ddot{X}\} + [Km](1 + \alpha\phi(t))\{X\} = \{F_0\} \quad (5)$$

$\phi(t)$  est une fonction périodique de période  $T = 2\pi/\omega_m$  donc transformable en série de fourrier.

$$\phi(t) = \sum_n a_n \cos(n\omega_m t) + b_n \sin(n\omega_m t)$$

Il a été prouvé que les équations différentielles à coefficients périodiques n'admettent pas de solutions exactes cependant une solution approchée peut être envisagée par l'utilisateur des méthodes de perturbation.

En formulant l'hypothèse d'un petit  $\alpha$  devant l'unité, ce qui est le cas des engrenages, il est possible de décomposer la solution de l'équation en une partie principale et une somme de perturbations de poids décroissants, soit :

$$\{X\} = \{X_0\} + \alpha\{X_1\} + \alpha^2\{X_2\} + \dots$$

On se limite à l'ordre 1

$$\{X\} = \{X_0\} + \alpha\{X_1\} \quad (6)$$

En introduisant (6) dans l'équation du mouvement (5) il vient :

$$[M]\{\ddot{X}_0\} + \alpha[M]\{\ddot{X}_1\} + [Km](1 + \alpha\phi)\{X_0\} + \alpha[Km](1 + \alpha\phi)\{X_1\} = \{F_0\}$$

$$[M]\{\ddot{X}_0\} + [Km]\{X_0\} + \alpha\left[ [M]\{\ddot{X}_1\} + [Km]\{X_1\} + [Km]\phi\{X_0\} \right] + \alpha^2[[Km]\phi\{X_1\}] = \{F_0\}$$

En négligeant les termes en  $\alpha^2$  ( $\alpha$  petit), en identifiant les termes de même ordre il vient

- **Ordre  $\alpha^0$  :**

$$[M]\{\ddot{X}_0\} + [Km]\{X_0\} = \{F_0\}$$

La solution en régime permanent de cette équation coïncide avec la solution statique pour raideur moyen  $\{X_{st}\}$

- **Ordre  $\alpha^1$  :**

$$[M]\{\ddot{X}_1\} + [Km]\{X_1\} = -[KM]\phi(t)\{X_{st}\}$$

Posons  $\{A\} = [KM]\{X_{st}\}$

$$[M]\{\ddot{X}_1\} + [Km]\{X_1\} = \{A\} \sum_n a_n \cos(n\omega_m t) + b_n \sin(n\omega_m t)$$

On revient à une équation différentielle à excitation périodique dont on connaît la solution.

$$\{X_1(t)\} = \sum_n \{A_n\} \cos(n\omega_m t + \varphi_n) + \{B_n\} \sin(n\omega_m t + \varphi_n)$$

avec :

$$\{A_n\} = \{A\} \frac{a_n}{\left[ \left( K - m(n\omega_m)^2 \right)^2 \right]^{1/2}}$$

$$\{B_n\} = \{A\} \frac{b_n}{\left[ \left( K - m(n\omega_m)^2 \right)^2 \right]^{1/2}}$$

- La solution générale en régime permanent sera :

$$\{X(t)\} = \{X_{st}\} + \alpha \sum_n \{A_n\} \cos(n\omega_m t + \varphi_n) + \{B_n\} \sin(n\omega_m t + \varphi_n)$$

- si  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  sont les fréquences propres du système on constate la possibilité de résonance en  $\omega_m = \Omega_i / n \quad i=1, 2, \dots$

Remarque :

Cela est très important pour expliquer les résonances (pics) pour les résultats obtenus par la méthode numérique.

## ANNEXE III

ALGORITHME DE LA METHODE IMPLICITE  
DE NEWMARK

- Résolution pas à pas
- Méthode implicite de NEWMARK

Soit le système du seconde ordre :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$$

Le schéma implicite de NEWMARK est construit à partir de développement de Taylor de vecteurs déplacement et vitesse à l'instant  $t = t_0 + \Delta t$

$$\{\mathbf{x}_1\} = \{\mathbf{x}_0\} + \Delta t \{\dot{\mathbf{x}}_0\} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \{\ddot{\mathbf{x}}_0\} + \frac{1}{6} (6\alpha) \Delta t^3 \{\ddot{\mathbf{x}}_0\} + O(\Delta t)^4$$

$$\{\dot{\mathbf{x}}_1\} = \{\dot{\mathbf{x}}_0\} + \Delta t \{\ddot{\mathbf{x}}_0\} + \frac{1}{2} 2\delta \Delta t^2 \{\ddot{\mathbf{x}}_0\} + O(\Delta t)^3$$

$\alpha$  et  $\delta$  sont des facteurs de pondération utilisés dont le but est de stabiliser la solution.

En utilisant le fait que  $\{\ddot{\mathbf{x}}_0\} = \frac{\{\ddot{\mathbf{x}}_1\} - \{\ddot{\mathbf{x}}_0\}}{\Delta t}$

$$\{\mathbf{x}_1\} = \{\mathbf{x}_0\} + \Delta t \{\dot{\mathbf{x}}_0\} + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \{\ddot{\mathbf{x}}_0\} + \alpha \{\ddot{\mathbf{x}}_1\} \right]$$

$$\{\dot{\mathbf{x}}_1\} = \{\dot{\mathbf{x}}_0\} + \Delta t \left[ (1 - \delta) \{\ddot{\mathbf{x}}_0\} + \delta \{\ddot{\mathbf{x}}_1\} \right]$$

(I)

Le système (I) présenté sous la forme générale de NEWMARK. Nous utilisons son expression la plus connue « Loi Trapézoïdale ». Dans ce cas on prend  $\alpha = \frac{1}{4}$  et  $\delta = \frac{1}{2}$

il vient :

$$\begin{aligned} \{X_1\} &= \{X_0\} + \Delta t \{\dot{X}_0\} + 0,25\Delta t^2 \left( \{\ddot{X}_0\} + \{\ddot{X}_1\} \right) \\ \{\dot{X}_1\} &= \{\dot{X}_0\} + 0,5\Delta t \left[ \{\ddot{X}_0\} + \{\ddot{X}_1\} \right] \end{aligned} \quad \text{(II)}$$

L'étude dynamique conduit à une équation différentielle de la forme suivante :

$$[M]\{\ddot{X}\} + [c]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F(t)\} \quad \text{(III)}$$

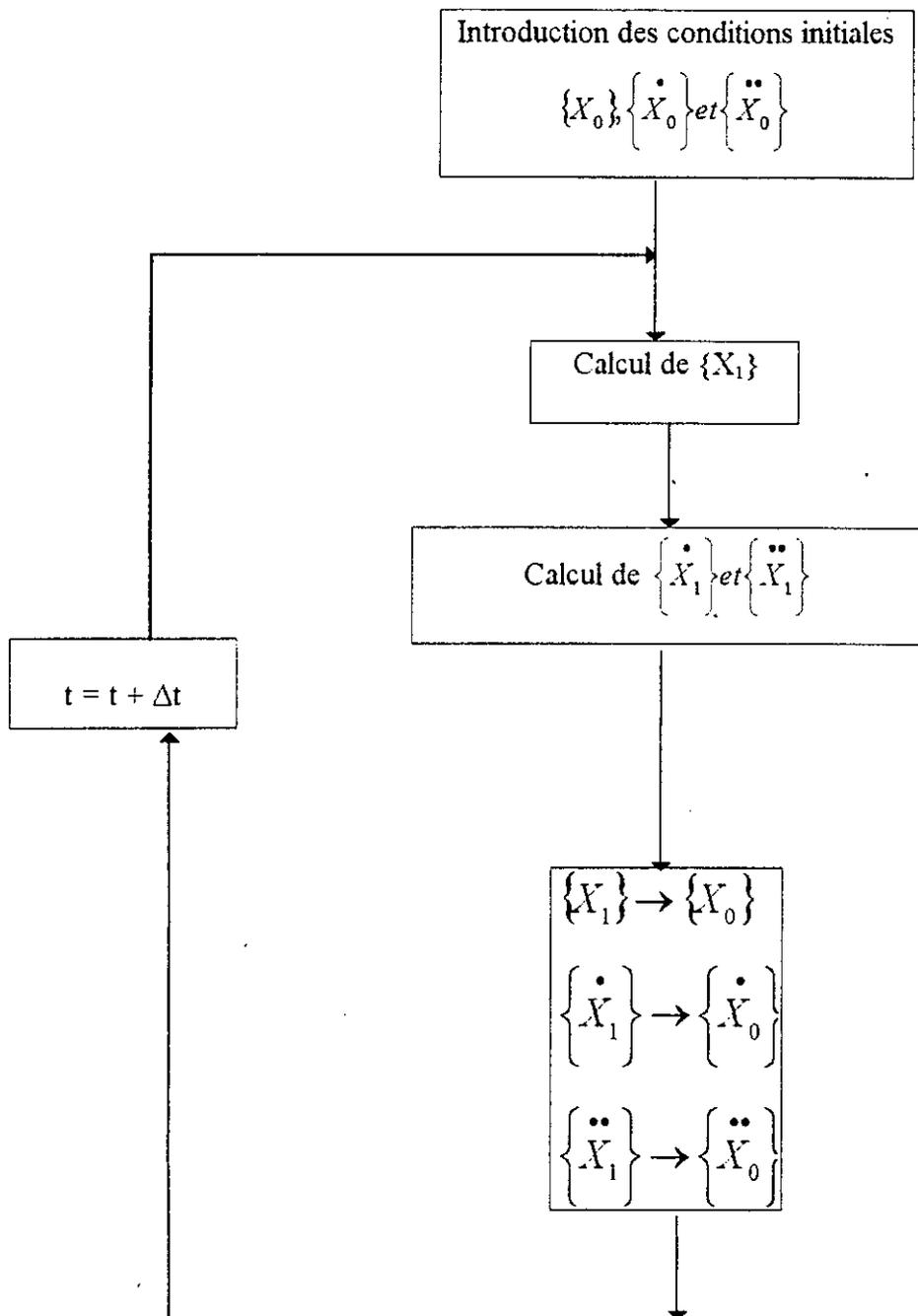
A l'instant  $t = t_1$  on remplace dans (III)  $\{X_1\}$  et  $\{\dot{X}_1\}$  par leurs valeurs, il vient :

$$\left[ \frac{4}{\Delta t^2}[M] + \frac{2}{\Delta t}[C] + [k] \right] \{X_1\} = [M] \left[ \{\ddot{X}_0\} + \frac{4}{\Delta t} \{\dot{X}_0\} + \frac{4}{\Delta t^2} \{X_0\} \right] + [c] \left[ \{\dot{X}_0\} + \frac{2}{\Delta t} \{X_0\} \right] + \{F(t)\} \quad \text{(IV)}$$

Les conditions initiales sont :  $\{X_0\}$ ,  $\{\dot{X}_0\}$  et  $\{\ddot{X}_0\}$ , on calcule  $\{X_1\}$  et en remplaçant  $\{X_1\}$  dans

(II), on trouve  $\{\dot{X}_1\}$  et  $\{\ddot{X}_1\}$ .

## ORGANIGRAMME DE NEWMARK



## ANNEXE IV

ANALYSE FREQUENTIEL  
DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURRIER

## I - GAMME DE FREQUENCES

L'ensemble des fréquences est divisé arbitrairement en gammes dont les dénominations peuvent changer suivant les domaines physiques concernés par exemple :

BF : Bases Fréquences < 300 khz.

HB : Hautes Fréquences.

## II - DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURRIER

Toute fonction périodique de période  $T$  ( $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ;  $\lambda = \frac{1}{T}$ ) peut être exprimée comme une somme finie ou infinie de fonctions sinusoïdales de pulsation  $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots, n\omega, \dots$  appelée série de fourrier :

$$f(t) = \sum a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt; a_0 \text{ est la valeur moyenne de } f(t)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

Les différentes fonctions sinusoïdales portent le nom d'harmoniques de rang (d'ordre) 1, 2, ..., n, ...; les harmoniques de rang 1 et 2 sont dites successivement fondamentale et double.

Le développement de fourrier représente la fonction  $f(t)$  avec une précision croissant avec le nombre de termes considérés.

### III. SPECTRE FREQUENTIEL DE $f(t)$ :

On appelle le spectre discontinu de  $f(t)$  l'ensemble des coefficients de fourrier  $a_n$  et  $b_n$  considéré comme fonction des pulsations  $\omega_n$  (fréquence  $\lambda_n$ ) ou de l'entier  $n$ .

Le spectre de fréquences (analyse fréquentiel) d'une fonction périodique  $f(t)$  montre l'importance relative des différentes harmoniques de  $f(t)$  et on compare la courbe obtenue avec celle de  $f(t)$ . Ce procédé permet de savoir l'importance des différentes harmoniques et l'ordre ou on peut s'arrêter dans le développement de fourrier.