

13/97



Ecole Nationale Polytechnique
Département : *Génie Mécanique*

PROJET DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en Génie Mécanique

Thème

COMPLEMENT DE RESOLUTION NUMERIQUE
DES EQUATIONS DE TRANSFERT EN MILIEU
POREUX PAR LA METHODE DES
DIFFERENCES FINIS

Proposé par :

Mr. S. LARBI

Mr. BELHANECHÉ

Etudié par :

Mr. DJ. ALLOUCHE

Dirigé par :

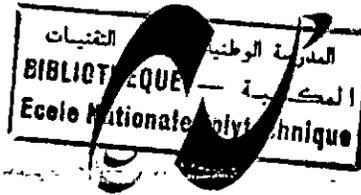
Mr. S. LARBI

Mr. H. BELHANECHÉ

Promotion : Septembre 1997

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

Ecole Nationale Polytechnique
Département : *Génie Mécanique*

PROJET DE FIN D'ETUDES

Essai de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en Génie Mécanique

Thème

COMPLEMENT DE RESOLUTION NUMÉRIQUE
DES EQUATIONS DE TRANSFERT EN MILIEU
POREUX PAR LA METHODE DES
DIFFERENCES FINIS

Proposé par :

Mr. S.LARBI

Mr. BELHANECHÉ

Etudié par :

Mr. DJ. ALLOUCHE

Dirigé par :

Mr. S. LARBI

Mr. H.BELHANECHÉ

Promotion : Septembre 1997

E.N.P. 10, AVENUE HASSEN BADI - EL-HARRACH - ALGER

ملخص

قمنا بدراسة تطبيق طريقة الفروق المنتهية لحل جملة معادلات مرتبطة المشتقات الجزئية الناتجة عن التحليل الرياضي للآليات تحويل في وسط مماسي لنموذج فيليب ديفراس.

قارنا النتائج العددية المحصل عليها بطريقة الفروق المنتهية بالمحصل عليها بطريقة العناصر المنتهية.

RESUME

La méthode des différences finies est appliquée pour la résolution du système d'équations couplées du à la modélisation mathématiques des mécanismes de transferts dans une structure poreuse, proposéé par *PHILIP DE VRIES*. Les résultats numériques obtenus sont comparés à ceux obtenus par la méthode des éléments finis.

ABSTRACT

The finite difference method is used in the solution of the set of coupled partial differential equations-that are the mathematical model for the transfer mecanisme in the porous strucure taken from the work of *PHILIP DE VRIES*. The obtained numerical results are compared to those obtained by the finite element method

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier dieu pour la volonté et le courage qui m'a donné pour l'achèvement de ce projet.

Je tiens aussi à exprimer ma profonde gratitude et ma reconnaissance envers mes promoteurs, messieurs *S.LARBI et H.BELHANECHÉ* pour tout l'intérêt qu'ils ont accordés à mon travail, pour leurs conseils, leurs savoirs et leurs encouragements qu'ils m'ont transmis tout en long de cette étude.

Mes remerciements vont aussi à

- Monsieur le président et Messieurs les membres du jury qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir évaluer mon travail.
- tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.
- tous mes amis et tout le personnel de la bibliothèque

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui m'ont encouragé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

- *Mes chers parents*
- *Mes frères*
- *Mes sœurs*
- *Mes grands-mères*
- *Toute la famille ALLOUCHE*
- *YAHIA Yacine*
- *Tous mes proches parents*
- *Tous mes amis*
- *Tous ceux qui luttent pour la justice et le bonheur de l'humanité*

Djamel

SOMMAIRE



NOMENCLATURE

INTRODUCTION.....1

CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES MILIEUX POREUX

I-1 TERMINOLOGIE ET DEFINITIONS.....	3
I-1-1 Definition d'un milieu poreux.....	3
I-1-2 Proprietes.....	3
I-2 LIAISON DE L'HUMIDITE DANS UNE STRUCTURE POREUSE	6
I-2-1 Adsorption.....	6
I-2-2 Capillarite.....	7
I-2-3 Condensation.....	8
I-3 MATERIAUX HYGROSCOPIQUES ET NON HYGROSCOPIQUES	8

CHAPITRE II : MODELISATION MATHEMATIKES DES MECANISMES DE TRANSFERTS EN MILIEU POREUX.

II-1 HYPOTHESES	10
II-2 EQUATIONS DU PHENOMENE	11
II-2-1 Equations de conservation	11
II-2-2 Lois complementaires de transferts	12
II-2-3 Equations d'equilibre des phases	13
II-2-4 Equations d'etat des fluides	14
II-2-5 Relations phenomenologiques	14
II-3 SYSTEME D'EQUATIONS RESULTANT	14
II-3-1 Mouvement de l'humidite en phase liquide	14
II-3-2 Mouvement de l'humidite en phase vapeur	16
II-3-3 Mouvement de l'humidite en phase liquide et vapeur.....	20
II-4 SYSTEME D'EQUATIONS COUPLEES DE TRANSFERT DE CHALEUR ET D'HUMIDITE EN MILIEU POREUX	23
II-5 MODELES PHYSIQUES ET MATHEMATIKES UTILISES	25
II-5-1 Equations	26
II-5-2 Conditions initiales et aux limites	27

CHAPITRE III : RESOLUTION NUMERIQUE.

III-1 RAPPELS SUR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES.....	28
III-1-1 Differentes approximations aux differences finies	30
III-1-2 Differents schemas des differences finies des equations aux derivees partielles paraboliques.....	31

III-2 PRESENTATION DE LA METHODE DE GRANK NICOLSON	33
III-3 APPLICATION DE LA METHODE DE GRANK NICOLSON AU CAS TRAITE	38
III-3-1 Discretisation de l'équation hydrique	39
III-3-2 Discretisation de l'équation de la chaleur	44
III-3-2-1 discretisation de l'équation de la chaleur dans le cas du systeme couplé	45
III-3-2-2 Resolution du systeme decouplé resultant	48
III-3-2-3 Discretisation de l'équation de la chaleur dans le cas du systeme couplé	48
III-3-2-4 Resolution du systeme couplé resultant	51
CHAPITRE IV : RESULTATS ET DISCUSSIONS	
IV-1 INTERPRETATION DES RESULTATS	52
IV-1-1 Profil hydrique pour (λ^*) et $(\rho C)^*$ constant	52
IV-1-2 Profil thermique pour (λ^*) et $(\rho C)^*$ constant	52
IV-1-3 Influence de (λ^*) et $(\rho C)^*$ sur les profils hydriques et thermiques.....	53
IV-2 PRESENTATION DES RESULTATS	54
IV-2-1 Profil hydrique pour (λ^*) et $(\rho C)^*$ constant	54
IV-2-2 Comparaison des méthodes d'élément finis et des différences finies (profil hydrique)	57
IV-2-3 Profil thermique pour (λ^*) et $(\rho C)^*$ constant	60
IV-2-4 Comparaison des méthodes d'élément finis et des différences finies (profil thermique)	61
IV-2-5 Profil hydrique pour (λ^*) variable et $(\rho C)^*$ constant	62
IV-2-6 Profil thermique pour (λ^*) variable et $(\rho C)^*$ constant	65
IV-2-7 Profil hydrique pour (λ^*) constant et $(\rho C)^*$ variable	66
IV-2-8 Profil hydrique pour (λ^*) et $(\rho C)^*$ variable	68
IV-2-9 Profil thermique pour (λ^*) et $(\rho C)^*$ variable	71
CONCLUSION	72
ANNEXE I	
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

NOMENCLATURE

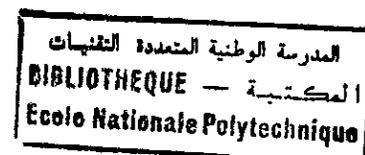


NOMENCLATURE

- a : coefficient de diffusion de masse isotherme
 A_s : surface spécifique
 c : capacité calorifique massique
 C_v : capacité calorifique à volume constant
 C : chaleur volumique
 d : diamètre
 d : diffusivité thermique
 D : coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air
 D_T : coefficient de diffusion massique non isotherme globale
 D_θ : coefficient de diffusion massique isotherme globale
 D_{θ_l} : coefficient de diffusion massique isotherme de la phase liquide
 D_{θ_v} : coefficient de diffusion massique isotherme de la phase vapeur
 D_T : coefficient de diffusion massique non isotherme globale
 D_{T_l} : coefficient de diffusion massique non isotherme de la phase liquide
 D_{T_v} : coefficient de diffusion massique non isotherme de la phase vapeur
 F : fonction de pondération
 g : accélération de la pesanteur
 h : enthalpie
 i : phase i
 I : terme source ou puits
 J_q : densité du flux de chaleur par conduction
 k : perméabilité du milieu
 K : conductivité hydraulique
 L : chaleur latente
 L : longueur de l'échantillon
 L : longueur moyenne des lignes de courant
 $\dot{m}(t)$: corrélation expérimentale exprimant la masse d'eau condensée ou évaporée en fonction de temps
 n : nombre de nœuds
 P_c : pression capillaire
 P_v : pression partielle de vapeur d'eau
 P_{vs} : pression de vapeur saturante
 P : pression totale du gaz
 r : rayon du capillaire
 r : rayon des pores
 R : constante des gaz parfaits
 s : pas de temps
 t : temps
 T : température
 V : volume
 x, y, z : dimensions d'espace

symboles grec

- ε : porosité
 λ : conductivité thermique
 τ : tortuosité
 ρ : masse volumique
 ρ : masse volumique du matériau sec
 ω : teneur en humidité pondérale
 θ : teneur en eau volumique
 θ : coefficient de pondération
 ψ : succion
 α, η : coefficients traduisant l'accumulation de l'humidité
 δ : coefficient de thermomigration
 ϕ : humidité relative
 σ : tension interfaciale
 ν : viscosité cinématique
 Δ : pas de discrétisation
 Ω : domaine d'étude
 Γ : frontières du domaine d'étude
 $(\rho C)^*$: chaleur volumique
 ∇ : opérateur de dérivation

*Indices et exposants*

- a : air
c : critique
c : capillaire
c : convectif
e : extérieur
d : diffusionnel
g : gravité
h : humide
i : intérieur
i : phase i
l : phase liquide
0 : valeur initiale
s : saturation
t : total
v : phase vapeur
* : grandeur équivalente du matériau

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION

L'un des vieux rêves de l'ingénieur est la possibilité de prédéterminer les phénomènes physiques qu'il étudie sans recourir systématiquement à l'expérience physique au préalable .

Pour satisfaire à cette demande, les chercheurs ont sans cesse essayé de mettre en « équations », les phénomènes physiques, de résoudre ces équations et de comparer les résultats de calcul aux résultats expérimentaux . Lorsque la comparaison est satisfaite et la physique assez bien comprise , ces équations reçoivent alors le label de « modèle mathématique » .

Ainsi, durant les dernières décennies, les instruments de travail de l'ingénieur ont subi d'énormes évolution. A la place des catalogues contenant des formules toutes faites et des abaques toutes tracés, l'ingénieur ressent de plus en plus le besoin de « revenir aux sources », en se tournant de nouveau vers les principes fondamentaux de la physique, vers les équations qui en découlent mais aussi vers les méthodes de résolution de ces dernières .

La mécanique des fluides et de transferts thermiques sont les branches de la physique, qui depuis longtemps, ont été le champ d'application des progrès de la résolution numérique des équations aux dérivées partielles ; cela est dû à : la non linéarité des équations régissant ces deux branches, qui limitent dramatiquement les méthodes habituelles (analytiques ,graphiques).

Pour ce travail nous allons essayer d'appliquer cette méthodologie (modélisation puis résolution) à l'étude des écoulements diphasiques dans les milieux poreux, présentant un grand intérêt dans de nombreux domaines d'activités industrielles et situations naturelles, notamment en : hydrologie, séchage du bois dans l'industrie papetière, génie pétrolier, génie chimique, géophysique, le génie civil et les sciences biologiques ;... vu la grande importance économique de ces différents domaines, une étude s'avère plus que nécessaire, des structures poreuses pour effectuer des prévisions aussi fiables que possible, soit de minimiser ou de supprimer les infiltrations, soit de maximiser le débit fluide tiré d'un gisement .

Bien que de nombreux travaux sur les milieux poreux aient été effectués à ce jour [2,3,4,5,9,11,17,18]. Nous nous intéressons qu'aux travaux de la modélisation fondée sur la prise en compte des transferts simultanés en phases liquide et vapeur illustré par les modèles mathématiques théoriques proposés par *PHILIP J.D* et *DEVRIES D.A* en 1957. [11]

- Modèle *PHILIP DE VRIES* complet .
- Modèle *PHILIP DE VRIES* simplifié.
- Modèle *PHILIP DE VRIS* généré .

Pour des considérations physiques et numériques, nous avons opté pour la résolution du modèle de *PHILIP DE VRIES* généré.

Le travail présenté dans ce mémoire est constitué de quatre chapitres/

- *Le premier chapitre* : est consacré à la description et à quelques rappels concernant les modes de liaison de l'humidité dans une structure poreuse;
- *Le deuxième chapitre* : traite la modélisation mathématique des mécanismes de transferts en milieu poreux, ainsi que les modèles mathématiques et physiques utilisées;
- *Le troisième chapitre* : porte sur la résolution numérique du modèle mathématique formé du système de deux équations couplées , par la méthode des différences finies;
- *Le quatrième chapitre* : est destiné à comparer les résultats de la méthode des différences finies et ceux des éléments finies

Enfin, nous terminerons ce travail par une conclusion générale.

I.1 TERMINOLOGIE ET DEFINITIONS

I.1.1 DEFINITION D'UN MILIEU POREUX

Un milieu poreux est un milieu constitué par un solide de forme compliqué, englobant des vides appelés pores. Ces pores peuvent contenir un fluide sous une ou plusieurs phases et communiquer entre eux. [2,4,9,11]

I.1.2 PROPRIETES :

On peut définir différents paramètres caractérisant une structure poreuse :

Porosité : est définie comme étant le rapport du volume des vides accessibles au volume de l'échantillon, elle est notée ε . [11,17,19]

$$\varepsilon = \frac{V_f}{V_t} = \frac{V_a + V_l}{V_t} \quad (\text{I-1-1})$$

Où :

- V_l : volume de la phase liquide
- V_a : volume de l'air
- V_t : volume total de l'échantillon
- V_f : volume du fluide

La masse volumique de la phase solide est donnée par :

$$\rho_s = \frac{m_s}{V_s} \quad (\text{I-1-2})$$

Où :

- m_s : masse de l'échantillon sec
- V_s : volume de l'échantillon

la masse volumique apparente a l'état sec est donnée par :

$$\rho_0 = \frac{m_s}{V_t} \quad (\text{I-1-3})$$

avec :

$$\rho_0 = \rho_s \cdot (1 - \varepsilon) \quad (\text{I-1-4})$$

la masse volumique équivalente est donnée par :

$$\rho^* = \frac{m_t}{V_t} = \frac{m_s + m_l + m_a}{V_t} \quad (\text{I-1-5})$$

Où :

m_l : masse de la phase liquide

m_a : masse de l'air

qui peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\rho^* = \frac{m_t}{V_t} = \frac{m_s + m_l + m_a}{V_t} \quad (\text{I-1-6})$$

la teneur en eau pondérale est définie par :

$$\omega_l = \frac{m_l}{m_s} \quad (\text{I-1-7})$$

La teneur en eau volumique est donnée par :

$$\theta_l = \frac{V_l}{V_t} \quad (\text{I-1-8})$$

La saturation en eau est définie par :

$$S = \frac{V_l}{V_f} = \frac{V_l}{V_a + V_f} \quad (\text{I-1-9})$$

Relations entre ces paramètres :

$$\omega_l = \frac{\rho_l \cdot S \cdot \varepsilon}{\rho_0} = \theta_l \cdot \frac{\rho_l}{\rho_0} \quad (\text{I-1-10})$$

La teneur en vapeur pondérale est donnée par :

$$\omega_v = \frac{m_v}{m_s} \quad (\text{I-1-11})$$

La teneur en vapeur volumique est donnée par :

$$\theta_v = \frac{V_v}{V_t} \quad (\text{I-1-12})$$

La teneur en eau pondérale totale est donnée par :

$$\omega = \omega_l + \omega_v \quad (\text{I-1-13})$$

La teneur en eau volumique totale est donnée par :

$$\theta = \theta_l + \theta_v \quad (\text{I-1-14})$$

Si l'on considère que la teneur en vapeur ω_v est négligeable devant ω_l , l'expression finale de la masse volumique équivalente du matériau se réduit à :

$$\rho^* = \rho_0 \cdot (1 + \omega) \quad (\text{I-1-15})$$

Le choix entre les variables ω et θ , en vue de caractériser la teneur en eau d'un milieu poreux, s'effectue généralement d'après le phénomène étudié, selon l'importance relative accordée soit aux masses d'humidité transférées (par exemple séchage), soit aux volumes d'eau déplacés (hydrologie).

D'autres propriétés structurales caractérisant la géométrie intrinsèque du milieu poreux peuvent être définies telles :

- **La surface spécifique** : elle est définie comme étant la surface limitant l'espace des pores par unité de volume du milieu poreux. [4,9,19]

$$A_s = \frac{\text{surfaces limitant les pores}}{\text{Volume de l'échantillon}} \quad (\text{I-1-16})$$

- **La tortuosité** : elle est définie [4,9,19] par la relation suivante :

$$\tau = \left(\frac{L_e}{L} \right)^2 \quad (\text{I-1-17})$$

Où :

L_e : la longueur moyenne des lignes de courant du fluide traversant l'échantillon

L : la longueur de l'échantillon

I-2- LIAISON DE L'HUMIDITÉ DANS UNE STRUCTURE POREUSE :

La liaison de l'humidité dans une structure poreuse s'effectue principalement selon trois types de mécanismes : *l'adsorption physique, la capillarité et la condensation.*

Toutefois, il convient d'ajouter, lorsque le milieu est susceptible de réagir chimiquement avec l'humidité, des mécanismes de liaison *chimique* (adsorption chimique)

I-2-1 ADSORPTION PHYSIQUE :

C'est le phénomène qui se caractérise par des différences entre la concentration de matières aux interfaces, par rapport à la concentration au sein des phases volumiques.

La fixation d'eau par le milieu poreux par le phénomène d'adsorption est attribuée aux forces intermoléculaires (forces de *VAN DE WAALS*) agissant sur les molécules de vapeur au voisinage de l'interface solide-fluide dans les pores. [5,9,1117]

L'interprétation théorique des courbes de sorption, traduisant l'accroissement de teneur en eau de l'échantillon en fonction de l'humidité relative, a conduit à distinguer différentes étapes dans le processus de fixation de l'humidité.

- *l'adsorption monomoléculaire* : caractérisée par la fixation d'une couche de molécules d'eau sur la surface des pores (LANGMUIR [18]).

- *l'adsorption plurimoléculaire* : caractérisée par la fixation de plusieurs couches de molécules d'eau sur la première couche absorbée (EMMET, TELLER, ... [18, 19]).

Et enfin, lorsque les diamètres des pores sont suffisamment petits [2, 9, 11], condensation capillaire sur les mécanismes formés par la jonction des couches plurimoléculaires (KELVIN [9, 18, 19]).

I-2-2- CAPILLARITE.

En tant que mécanisme de fixation de l'humidité, la capillarité [5, 9, 11/18] intervient lorsque la structure poreuse est mise en contact avec l'eau en phase liquide continue. Sans entrer dans une analyse détaillée des phénomènes complexes de mouillabilité, l'expérience montre que d'une manière générale, l'air en masse présente un comportement mouillant par rapport au solide constituant les structures poreuses, cette affinité de l'eau, se traduit par une tendance à l'étalement du liquide sur la surface des pores, et conduit à la formation d'interfaces courbes entre le fluide mouillant liquide et non mouillant gazeux constitué en l'occurrence par l'air humide. Lorsqu'on examine la condition d'équilibre d'une telle interface, on constate qu'il existe de part et d'autre, une différence de pression $P_c = P_a - P_l > 0$, la pression P_l dans la phase liquide étant inférieur à la pression P_a dans la phase gazeuse, cette différence de pression P_c , appelée pression capillaire, elle s'exprime par la relation suivante :

$$P_c = \sigma \cdot \cos \theta \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2 \cdot \sigma \cdot \cos \theta}{R} \quad (\text{I-2-1})$$

Où :

σ : tension interfaciale liquide-gaz

R_1, R_2 : rayons de courbures de deux surfaces orthogonales de la surface du liquide

θ : angle formé par les tangentes à la surface solide et à l'interface au point d'accrochage du liquide

Sous l'effet de cette différence de pression égale à la pression capillaire, un écoulement traduit par sa densité de flux en phase liquide J_e , conduisant au remplissage des pores par l'eau liquide s'établit.

La pression capillaire varie en fonction de ω , elle s'annule pour la teneur en eau de saturation ω_{es} .

I-3 CONDENSATION :

Considérons une paroi dont l'une des faces, rendue étanche à la vapeur d'eau, et elle est en équilibre hygrothermique, T_0 étant sa température, P_{v0} et P_{vs0} pressions de vapeur dans l'espace poreux, et saturante correspondante à T_0 , respectivement. Supposons que par suite d'un refroidissement de la face imperméable un régime stationnaire caractérisé par une diminution de température de T_0 à T_e , s'établisse. Si la courbe de pression de vapeur saturante correspondant à cette nouvelle distribution se situe en un certains points de la paroi, en dessous de la valeur P_{v0} , il est bien évident que l'on aura condensation [5,9,11,17,19]. La masse d'eau liquide ainsi formée proviendra, d'une part, de la condensation de la vapeur initialement en place dans ce domaine et, d'autre part, de la condensation d'une partie de flux d'humidité en phase vapeur s'écoulant vers les zones froides par diffusion moléculaire.

I-3 MATERIAUX HYGROSCOPIQUE ET NON HYGROSCOPIQUE :

En se basant sur les variations des seuls paramètres caractéristiques (A_s , ε et d) d diamètre des pores et A_s et ε déjà définis, deux grandes familles de matériaux poreux peuvent être distinguées :

- **Matériaux dits hygroscopiques** : dans lesquels les mécanismes d'absorption peuvent contribuer à la fixation de quantités d'humidité non négligeables (ces matériaux ont une grande surface spécifique et de surcroît des rayons des pores inférieurs à 10^{-7} m).

• *Matériaux dits non hygroscopiques où capillairo-poreux:* pour lesquels la quantité d'humidité fixée par adsorption est négligeable devant celle fixée par capillarité

En règle générale, même pour les matériaux ayant un comportement réputé hygroscopique, la quantité d'humidité fixée par adsorption reste faible par rapport à la quantité d'humidité correspondante au remplissage de tous les pores (saturation complète). [4,5]

CHAPITRE II

MODELISATION MATHEMATIQUES DES MECANISMES DE TRANSFERTS EN MILIEUX POREUX

II-1 HYPOTHESES

II-2 EQUATIONS DU PHENOMENE

II-2-1 Equations de conservation

II-2-2 Lois complémentaire de transferts

II-2-3 Equations d'équilibre des phases

II-2-4 Equations d'état des fluides

II-2-5 Relations phénoménologiques

II-3 SYSTEME D'EQUATIONS RESULTANT

II-3-1 Mouvement de l'humidité en phase liquide

II-3-2 Mouvement de l'humidité en phase vapeur

II-3-3 Mouvement de l'humidité en phase liquide et vapeur

II-4 SYSTEME D'EQUATIONS COUPLEES DE TRANSFERTS DE CHALEUR ET D'HUMIDITE EN MILIEU POREUX

II-5 MODELES PHYSIQUE ET MATHEMATIQUES UTILISES

II-5-1 Equations

II-5-2 Conditions initiales et aux limites

La modélisation mathématique de transfert en milieu poreux, s'inspire directement des méthodes classiques de la mécanique des milieux continus pour exprimer localement les lois de conservation.

En raison de la complexité de l'espace poreux, cette approche ne peut toutefois être mise en pratique qu'après un changement d'échelle dont l'étape essentielle consiste à définir un volume élémentaire de référence permettant d'établir une équivalence entre le milieu dispersé réel et le milieu continu fictif [3,5,6,11,17,18,19]. Par opposition avec l'échelle du continu classique, dite microscopique, telle qu'elle est proposée en mécanique des milieux continus, l'échelle du milieu continu fictif équivalent en milieu poreux définie à partir d'un élément de volume dont les dimensions sont grandes auprès des dimensions des pores, est dite macroscopique.

Dans cette acception, variables et paramètres physiques sont supposés être représentatifs des variables et paramètres physiques moyens définis au sein du continuum poreux.

II-1- HYPOTHESES :

La modélisation mathématique utilisée est établie dans le cadre des hypothèses [11,17,18] suivantes :

- la phase solide constituant le milieu poreux est homogène, indéformable et isotrope;
- la conductivité thermique des phases est constante;
- l'enthalpie des différentes phases est indépendante de la pression;
- la phase liquide ne contient qu'un seul constituant;
- les différentes phases sont en équilibre thermique ;
- il n'y a pas de réaction chimique;
- la pression totale de la phase gazeuse est uniforme et constante;
- le travail des forces de compression est négligeable;
- la masse volumique de la phase liquide est constante;
- le travail des forces extérieures de diffusion de l'énergie cinétique sont négligeables ;
- les différentes phases sont continues;
- les interactions entre phases sont négligeable;
- le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable;

II-2- EQUATIONS DU PHENOMENE:**II-2-1- Equations de conservation :****II-2-1-1- Conservation de la masse:**

L'équation de conservation de la masse pour la phase i s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_i \theta_i) = -\Delta(\bar{J}_i) + I_i \quad (\text{II-2-1})$$

Où :

i : définie la phase fluide, (l) pour le liquide et (v) pour la vapeur ;

ρ : masse volumique ;

\bar{J}_i : densité de flux de masse ;

I : terme source ;

θ : teneur en eau volumique ;

II-2-1-2 Conservation de l'énergie :

L'équation de conservation de l'énergie pour la phase i s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0 h_0 + \sum_i \rho_i \theta_i h_i \right) = -\nabla \cdot \left(\bar{J}_q + \sum_i h_i \bar{J}_i \right) \quad (\text{II-2-2})$$

Où :

h : enthalpie massique ;

ρ_0 : masse volumique apparente du milieu poreux. ;

ρ_s : masse volumique du solide constituant la matrice ;

\bar{J}_q : densité de flux de chaleur conductif. ;

II-2-2 Lois complémentaires de transferts :

Il s'agit essentiellement de la loi de *FOURIER* pour la densité de flux de chaleur par conduction, de la loi de *FICK* pour la densité de flux de masse en phase vapeur et de la loi de *DARCY* pour la densité de flux de masse en phase liquide.

II-2-2-1 Lois de *FOURIER*

Elle exprime la densité du flux de chaleur par conduction :

$$\bar{J}_q = -\lambda^* \nabla T \quad (\text{II-2-3})$$

\bar{J}_q : densité de flux de chaleur conductive ;

λ^* : La conductivité thermique apparente du matériau ;

II-2-2-2 Loi de *FICK*

Elle exprime la densité du flux de masse en phase vapeur due à la diffusion moléculaire

$$\bar{J}_v = f_\pi(\theta) D \frac{p}{p - p_v} \cdot \frac{M}{RT} \nabla p_v \quad (\text{II-2-4})$$

\bar{J}_v : densité de flux masse due à la diffusion ;

D : coefficient de diffusion moléculaire de la vapeur d'eau dans l'air sec ;

$f_\pi(\theta)$: une fonction de pondération ;

P : pression totale de la phase gazeuse, supposée constante ;

P_v : pression de vapeur ;

II-2-1-3 Loi de DARCY

Elle exprime la densité de flux de masse en phase liquide due à la filtration.

$$\bar{J}_l = -\frac{K}{g} \tilde{\nabla} P_l \quad (\text{II-2-5})$$

Où :

\bar{J}_l : densité de flux de masse due à la filtration ;

K : conductivité hydraulique $\left(K = \frac{k_l \cdot g}{\nu_l} \right)$;

k_l : perméabilité du milieu à la phase liquide ;

ν_l : viscosité cinématique de la phase liquide ;

P_l : pression totale de la phase liquide ($P_l = \rho_l \cdot g \cdot \psi - \rho_l \cdot g_l \cdot z$) ;

ψ : succion capillaire ;

II-2-3- Equations d'équilibre des phases :

L'équilibre thermodynamique local entre les phases liquides et vapeur est formulé par la loi de *KELVIN* [17,18] donnée par:

$$P_v = P_{vs} \cdot \exp(M_v \cdot g \cdot \Psi / RT) \quad (\text{II-2-6})$$

Où:

M_v : masse molaire de la vapeur d'eau

P_{vs} : pression de vapeur saturante

II-2-4 Equations d'état des fluides :

$$\begin{cases} \rho_i = \rho_i(T) \\ \sigma = \sigma(T) \\ v_i = v(T) \\ C_i = \left(\frac{dh_i}{dT} \right)_p \end{cases} \quad (\text{II-2-7})$$

Où :

- σ : la tension interfaciale ;
- C_i : chaleur spécifique de la phase i ;

II-2-5 Relations phénoménologiques :

$$\begin{cases} \psi = \psi(\theta_i, T) \\ k_l = k_l(\theta_i) \\ f = f_\pi(\theta_i) \end{cases} \quad (\text{II-2-8})$$

Où :

- f : fonction de pondération
- Ψ : succion capillaire
- k_l : perméabilité de la phase liquide

II-3- SYSTEME D'EQUATIONS RESULTANT :

II-3-2- Mouvement de l'humidité en phase liquide :

L'équation de conservation de l'humidité en phase liquide s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_l \theta_l) = -\nabla \cdot \vec{J}_l + I_l \quad (\text{II-3-1})$$

\vec{J}_{lc} : : est exprimé par la loi de DARCY (II-2-5)

On a :

$$\Psi_t = \Psi_m + \Psi_g \quad (\text{II-3-2})$$

Ψ_g : potentiel gravitationnel ;

Ψ_m : potentiel matriciel ;

Avec :

$$\Psi_m = g \cdot \Psi = \frac{P_c}{\rho_l}$$

$$\Psi_g = -g \cdot z$$

Compte tenu de ces deux dernières relations \vec{J}_l devient :

$$\vec{J}_l = -\rho_l \cdot K \cdot \nabla(\Psi - z) \quad (\text{II-3-3})$$

Avec :

$$K = \frac{k \cdot g}{\nu_l} \quad (\text{II-3-3})$$

développons l'équation (II-3-3).

$$\vec{J}_l = -\rho_l \cdot K \cdot \nabla \Psi + \rho_l \cdot K \cdot \vec{k} \quad (\text{II-3-4})$$

\vec{k} : vecteur unitaire dirigé vers le bas ;

Comme $\Psi = \Psi(\theta, T)$

$$\nabla \Psi = \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right)_T \nabla \theta + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial T} \right)_{\theta} \nabla T \right] \quad (\text{II-3-5})$$

Substituons (II-3-5) dans (II-3-4), nous obtiendrons :

$$\vec{J}_l = -\rho_l \cdot K \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta_l} \right)_T \nabla \theta_l + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial T} \right)_{\theta_l} \nabla T - \vec{k} \right] \quad (\text{II-3-6})$$

$$\vec{J}_{lc} = -\rho_l \left[D_{\theta_l} \cdot \nabla \theta_l + D_{T_l} \cdot \nabla T - K \cdot \vec{k} \right] \quad (\text{II-3-7})$$

avec :

$$D_{\theta_l} = K \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta_l} \right)_T, \quad D_{T_l} = K \left(\frac{\partial \Psi}{\partial T} \right)_{\theta_l}$$

D_{θ_l} : Coefficient de diffusion massique à température constante ;

D_{T_l} : Coefficient de diffusion massique à teneur volumique constante ;

En injectant l'équation (II-3-7) dans l'équation (II-3-1), l'équation de conservation de masse en phase liquide s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_l \theta_l) = \nabla \cdot \left[\rho_l (D_{\theta_l} \cdot \nabla \theta_l + D_{T_l} \cdot \nabla T - K \cdot \vec{k}) \right] + I_l \quad (\text{II-3-8})$$

II-3-1-2- Mouvement de l'humidité en phase vapeur :

L'équation de conservation d'humidité en phase vapeur s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_v \theta_v) = -\nabla \cdot \vec{J}_v + I_v \quad (\text{II-3-9})$$

La pression totale de la phase gazeuse étant supposée constante, le flux de masse en phase vapeur est essentiellement du type diffusif (modélisé par la loi de FICK (II-2-4)).

Comme

$$P_v = P_v(T, \theta_l)$$

d'où :

$$\nabla P_v = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\theta_l} \nabla T + \left(\frac{\partial P_v}{\partial \theta_l} \right)_T \nabla \theta_l \quad (\text{II-3-10})$$

En injectant (II-3-10) dans (II-2-4) le flux de masse \vec{J}_v s'écrit :

$$\vec{J}_v = -f_\pi(\theta_l) \cdot D \cdot \frac{P}{P - P_v} \cdot \frac{M_v}{RT} \left[\left(\frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_l} \nabla T + \left(\frac{\partial P_v}{\partial \theta_l} \right)_T \nabla \theta_l \right] \quad (\text{II-3-11})$$

En posant :

$$D_{\theta_v} = f_\pi \cdot D \cdot \frac{P}{P - P_v} \cdot \frac{M_v}{RT} \cdot \frac{1}{\rho_l} \left(\frac{\partial P_v}{\partial \theta_l} \right)_T \quad (\text{II-3-12})$$

$$D_{T_v} = f_\pi \cdot D \cdot \frac{P}{P - P_v} \cdot \frac{M_v}{RT} \cdot \frac{1}{\rho_l} \left(\frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_v} \quad (\text{II-3-13})$$

Donc la densité de flux de chaleur \vec{J}_v s'écrit:

$$\vec{J}_v = -\rho_l \cdot (D_{\theta_v} \cdot \nabla \theta_v + D_{T_v} \cdot \nabla T) \quad (\text{II-3-14})$$

Comme $P_v = P_v(\psi)$ voir l'équation (II-2-6), en posant dans cette même équation la fonction $\phi(T, \theta)$ telle que :

$$\phi = \exp\left(\frac{M_v \cdot g \cdot \Psi}{RT}\right) \quad (\text{II-3-15})$$

Nous aurons :

$$\left(\frac{\partial P_v}{\partial T}\right)_{\theta_i} = \frac{dP_{vs}}{dT} \phi + P_{vs} \frac{M_v}{R} g \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial T}\right)_{\theta_i} - \frac{\Psi}{T^2} \right] \phi \quad (\text{II-3-16})$$

$$\left(\frac{\partial P_v}{\partial T}\right)_T = P_{vs} \cdot \frac{M_v}{R.T} \cdot g \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta_i}\right)_T \cdot \phi \quad (\text{II-3-17})$$

En injectant les équations (II-3-16) et (II-3-17) dans (II-3-12) et (II-3-13) respectivement, et en tenant compte de la relation de *CLAPEYRON* qui est formulée comme suit :

$$\frac{1}{P_{vs}} \cdot \frac{dP_{vs}}{dT} = \frac{M_v \cdot L}{RT^2} \quad (\text{II-3-18})$$

On obtient les coefficients de diffusion massique, à teneur volumique constante et à température constante, en fonction de la succion ψ , qui s'écrivent respectivement :

$$D_{\theta_v} = \frac{1}{\rho_l} f_{\pi} \cdot D \cdot \frac{P}{P - P_v} \left(\frac{M_v}{RT}\right)^2 P_{vs} \cdot \phi \cdot g \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta_i}\right)_T \quad (\text{II-3-19})$$

$$D_{Tv} = \frac{1}{\rho_l} f_{\pi} \cdot D \cdot \frac{P}{P - P_v} \left(\frac{M_v}{RT}\right)^2 P_{vs} \cdot \phi \cdot \frac{L}{T} \quad (\text{II-3-20})$$

En remplaçant (II-3-14) dans (II-3-9), on obtient :

$$\frac{\partial(\rho_v \cdot \theta_v)}{\partial t} = \nabla \left[\rho_l (D_{\theta_v} \cdot \nabla \theta_i + D_{Tv} \cdot \nabla T) \right] + I_v \quad (\text{II-3-21})$$

En exprimant θ_v en équivalent liquide condensé:

$$\rho_v \cdot \theta_v = \rho_l \cdot \theta_v^* \quad (\text{II-3-22})$$

cela donne

$$\theta_v^* = \theta_v \cdot \frac{\rho_v}{\rho_l} = (\varepsilon - \theta_i) \cdot \frac{\rho_v}{\rho_l} \quad (\text{II-3-23})$$

L'utilisation de la relation $\rho_v = P_v \frac{M_v}{RT}$, permet alors d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_v \theta_v) = -\frac{\rho_v}{\rho_l} \cdot \frac{\partial \theta_l}{\partial t} + \frac{\varepsilon_l - \theta_l}{\rho_l} \cdot \frac{\partial P_v}{\partial t} = -\frac{\rho_v}{\rho_l} \cdot \frac{\partial \theta_l}{\partial t} + \frac{\varepsilon_l - \theta_l}{\rho_l} \cdot \frac{M_v}{R} \cdot \frac{\partial (P_v T)}{\partial t} \quad (\text{II-3-24})$$

Et par suite d'expliciter la variation de masse due à l'évolution des variables thermodynamiques P et T : et en exploitant l'hypothèse que le liquide est peu compressible, l'équation (II-3-24) s'écrira :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_v^*}{\partial t} = & -\frac{\rho_v}{\rho_l} \cdot \frac{\partial \theta_l}{\partial t} + \frac{\varepsilon_l - \theta_l}{\rho_l} \cdot \frac{M_v}{R} \cdot \frac{1}{T} \left(\frac{\partial P_v}{\partial \theta_l} \right)_T \cdot \frac{\partial \theta_l}{\partial t} \\ & + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_l} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{P_v}{T^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{II-3-25})$$

avec :

$$\begin{aligned} D_{\theta_v} &= f_\pi \cdot D \cdot \frac{p}{p - p_v} \cdot \frac{M_v}{R \cdot T} \cdot \frac{1}{\rho_l} \left(\frac{\partial P_v}{\partial \theta_l} \right)_T \\ D_{T_v} &= f_\pi \cdot D \cdot \frac{p}{p - p_v} \cdot \frac{M_v}{R \cdot T} \cdot \frac{1}{\rho_l} \left(\frac{\partial P_v}{\partial \theta_l} \right)_{\theta_l} \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\frac{\partial \theta_v^*}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial \theta_l}{\partial t} + \beta \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II-3-26})$$

Où

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= (\varepsilon_l - \theta_l) \cdot \frac{D_{\theta_v}}{f_\pi \cdot D \cdot P} - \frac{\rho_v}{\rho_l} \\ &\quad \frac{P \cdot P_v}{P - P_v} \\ \beta &= (\varepsilon_l - \theta_l) \cdot \frac{D_{T_v}}{f_\pi \cdot D \cdot P} - (\varepsilon_l - \theta_l) \cdot \frac{\rho_v}{\rho_l \cdot T} \\ &\quad \frac{P - P_v}{P - P_v} \end{aligned} \right.$$

L'équation de conservation de masse en phase vapeur devient finalement :

$$\frac{\partial \theta_l^*}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial \theta_l}{\partial t} + \beta \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II-3-26})$$

$$\frac{\partial \theta_l^*}{\partial t} = \nabla (D_{\theta_l} \cdot \nabla \theta_l + D_{T_l} \cdot \nabla T) + \frac{I_v}{\rho_l} \quad (\text{II-3-27})$$

II.3.1.3-Mouvement de l'humidité en phase liquide et vapeur :

En sommant les équations (II-3-8) et (II-3-27) on aura :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\theta_l + \theta_v^*) = \nabla \left[(D_{\theta_l} + D_{\theta_v}) \nabla \theta_l + (D_{T_l} + D_{T_v}) \nabla T - K \vec{k} \right] + \frac{I_l + I_v}{\rho_l} \quad (\text{II-3-28})$$

Sachant que $I_l + I_v = 0$ (conservation de la masse globale) . Et en posant

$$D_{\theta} = D_{\theta_l} + D_{\theta_v}$$

$$D_T = D_{T_l} + D_{T_v}$$

L'équation (II-3-28) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\theta_l + \theta_v^*) = \nabla \left[D_{\theta} \nabla \theta_l + D_T \nabla T - K \vec{k} \right] \quad (\text{II-3-29})$$

En injectant l'équation (II-3-26) dans (II-3-29) on aura :

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \theta_l}{\partial t} + \gamma \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \left[D_{\theta} \nabla \theta_l + D_T \nabla T - K \vec{k} \right] \quad (\text{II-3-30})$$

L'équation de conservation de la masse globale s'écrit finalement sous la forme suivante :

$$(1 + \alpha) \frac{\partial \theta_l}{\partial t} + \gamma \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla [D_\theta \nabla \theta_l + D_T \nabla T - K \bar{k}] \quad (\text{II-3-31})$$

Développons maintenant l'équation de conservation de l'énergie :

En remplaçant l'indice (i) par (l) pour la phase liquide et (v) pour la phase vapeur, et en utilisant la relation (II-2-24), l'équation (II-2-2) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 h_0) + \rho_l \theta_l \frac{\partial h_l}{\partial t} + h_l \frac{\partial (\rho_l h_l)}{\partial t} + \rho_v \theta_v \frac{\partial h_v}{\partial t} + h_v \frac{\partial (\rho_v h_v)}{\partial t} = \\ - \nabla \bar{J}_q - (h_l \nabla \bar{J}_l + \bar{J}_l \nabla h_l + h_v \nabla \bar{J}_v + \bar{J}_v \nabla h_v) \end{aligned} \quad (\text{II-3-32})$$

Sachant que, d'après les équations (II-3-1), (II-3-9), (II-3-22) on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_l \theta_l) = -\nabla \bar{J}_{lc} + I_l \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_v \theta_v) = -\nabla \bar{J}_{vc} + I_v \\ \rho_v \theta_v = \rho_l \theta_v^* \\ I_v + I_l = 0 \end{cases}$$

On aura :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_l \theta_l) = -\nabla \bar{J}_l - I_v \quad (\text{II-3-33})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_l \theta_v^*) = -\nabla \bar{J}_v + I_v \quad (\text{II-3-34})$$

En injectant les équations (II-3-33) et (II-3-34), dans l'équation (II-3-32), en posant $L = h_v - h_l$ (L chaleur latente due au changement de phase), et en posant les équations de conservation de l'humidité en phase vapeur et liquide (II-3-8) et (II-3-27), il vient que :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 h_0) + \rho_l \theta_l \frac{\partial h_l}{\partial t} + \rho_v \theta_v^* \frac{\partial h_v}{\partial t} + = \quad (\text{II-3-35})$$

$$- \nabla \bar{J}_q - (\bar{J}_l \nabla h_l + \bar{J}_v \nabla h_v) - L \cdot I_v$$

Sachant que la chaleur massique à pression constante est donnée par l'équation (II-2-7), d'où on peut écrire :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = C_o \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \frac{\partial h_v}{\partial t} = C_v \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \frac{\partial h_l}{\partial t} = C_l \frac{\partial T}{\partial t}$$

Avec :

C_o, C_v, C_e : Chaleurs massiques à pression constante ;

Et, en remplaçant les termes \bar{J}_l , et \bar{J}_v par leurs formules exprimés (II-3-7) et (II-3-14) on aura :

$$(\rho C_o) \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho_l \theta_l \cdot C_l) \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho_v \theta_v^* \cdot C_v) \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda^* \cdot \nabla T)$$

$$+ \rho_l \cdot C_l (D_{\theta_l} \cdot \nabla \theta_l + D_{T_l} \cdot \nabla T - K \bar{k})$$

$$+ \rho_v \cdot C_v (D_{\theta_v} \cdot \nabla \theta_v + D_{T_v} \cdot \nabla T) \cdot \nabla T - L I_v$$

(II-3-36)

Le terme source I_v était tiré de la relation (II-3-24)

$$I_v = \rho_l \left(\alpha \frac{\partial \theta_l}{\partial t} + \beta \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (D_{\theta_l} \cdot \nabla \theta_l + D_{T_l} \cdot \nabla T) \right) \quad (\text{II-3-37})$$

et en posant : $(\rho C)^* = \rho_o \cdot C_o + \rho_v \cdot C_l \cdot \theta_l + \rho_l \cdot C_v \cdot \theta_v^*$

Il vient finalement en remplaçant ces deux valeurs dans (II-3-36)

$$\begin{aligned}
 (\rho C)^* \frac{\partial T}{\partial t} = & \nabla \cdot (\lambda^* \cdot \nabla T) + \rho_l \cdot C_l (D_{\theta_l} \cdot \nabla \theta_l + D_{T_l} \cdot \nabla T - K\bar{k}) \nabla T \\
 & + \rho_l \cdot C_v (D_{\theta_v} \cdot \nabla \theta_l + D_{T_l} \cdot \nabla T) \cdot \nabla T - LI_v \\
 & + L\rho_l \left[\nabla \cdot (D_{\theta_l} \cdot \nabla \theta_l + D_{T_v} \cdot \nabla T) - \alpha \frac{\partial \theta_l}{\partial t} - \gamma \frac{\partial T}{\partial t} \right]
 \end{aligned}
 \tag{II-3-37}$$

Signification physique des termes du système obtenu :

$(1 + \alpha) \frac{\partial \theta_l}{\partial t} + \gamma \frac{\partial T}{\partial t}$: le taux d'accumulation en masse de vapeur exprimé en équivalent

de liquide condensé ;

$\nabla \cdot (D_{\theta} \cdot \nabla \theta + D_T \cdot \nabla T)$: densité de flux de masse (liquide + vapeur) du gradient de pression de vapeur ;

$\rho_l \cdot L \cdot \nabla \cdot (D_{\theta_v} \cdot \nabla \theta_l + D_{T_v} \cdot \nabla T) - \alpha \frac{\partial \theta_l}{\partial t} - \gamma \frac{\partial T}{\partial t}$: énergie créé ou absorbée par le processus de changement de phase ;

$\rho_l \cdot C_l (D_{\theta_l} \cdot \nabla \theta_l + D_{T_l} \cdot \nabla T - K\bar{k}) \cdot \nabla T$: énergie convective propre à la phase liquide ;

$\rho_l \cdot C_v (D_{\theta_v} \cdot \nabla \theta_l + D_{T_v} \cdot \nabla T) \cdot \nabla T$: énergie convective propre à la phase vapeur ;

II-4 SYSTEME D'EQUATIONS COUPLEES EN TRANSFERT DE CHALEUR ET DE

L'HUMIDITE EN MILIEU POREUX :

Le système formé par les équations (II-3-31) et (II-3-37) constitue le modèle de *PHILIP DE VRIES* sous sa forme complète, Φ est donnée alors par :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + \alpha) \frac{\partial \theta_l}{\partial t} = \gamma \frac{\partial T}{\partial t} \nabla \cdot (D_{\theta} \cdot \nabla \theta_l + D_T \cdot \nabla T \cdot K \bar{k}) \text{ pour l'équation en conservation de l'énergie} \end{array} \right.$$

et par

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho C)^* \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla T) + \rho_l C_l (D_{\theta_l} \cdot \nabla \theta_l + D_{T_l} \cdot \nabla T \cdot K \bar{k}) \cdot \nabla T \\ \quad + \rho_l C_v (D_{\theta_v} \cdot \nabla \theta_v + D_{T_v} \cdot \nabla T) \cdot \nabla T \\ \quad + L \rho_l \left[\nabla (D_l \cdot \nabla \theta_l + D_{T_l} \cdot \nabla T) - \alpha \frac{\partial \theta_l}{\partial t} - \gamma \frac{\partial T}{\partial t} \right] \end{array} \right.$$

(II-4-1)

Lorsque l'on considère que :

- ◆ le transfert d'énergie convective dû au transfert de masse est négligeable ;
- ◆ les variations temporelles locales de la teneur en vapeur d'eau condensée sont négligeables ;

Le système d'équations couplées (II-4-1) se réduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_l}{\partial t} &= \nabla \cdot (D_{\theta} \cdot \nabla \theta_l + D_T \cdot \nabla T \cdot K \bar{k}) \\ (\rho C)^* \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla \cdot (\lambda^* \cdot \nabla T) + \rho_l L \nabla (D_{\theta_l} \cdot \nabla \theta_l + D_{T_v} \cdot \nabla T) \end{aligned} \tag{II-4-2}$$

$K, D_{\theta_l}, D_{T_l}, D_{\theta_v}, D_{T_v}, (\rho C)^*, \lambda^*$: étant des fonctions de la teneur en humidité et de la température ;

Si au lieu de raisonner en teneur en humidité volumique θ_l , on raisonne en teneur en humidité pondérale ω , les équations précédentes s'écrivent avec $\theta_l = \frac{\rho_o}{\rho_l} \cdot \omega$ où ρ_o représente la masse volumique apparente du matériaux sec supposée invariable.

Et en posant :

$$a_m = D_\theta \quad a_d = \frac{\rho_l}{\rho_0} . D_T \quad ; \quad a_{mv} = D_{\theta v} \quad a_{mv} = \frac{\rho_l}{\rho_0} . D_{T_v}$$

Le système des deux équations du modèle simplifié, exprimé en teneur en humidité pondérale ω , s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \cdot \left(a_m \nabla \omega + a_d \nabla T - \frac{\rho_l}{\rho_0} K \bar{k} \right) \\ (\rho C)^* \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot [\rho_l . L . a_{mv} . \nabla \omega + (\lambda^* + \rho_0 . L . a_{dv}) \nabla T] \end{cases} \quad (\text{II-4-3})$$

Une étude de sensibilité aux paramètres [1,2,,5,,11,18,17] a montré que le transfert en teneur est du type conductif, (cela est dû au changement de phase qui est négligeable), le modèle simplifié se réduit alors à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \cdot \left[a_m . \nabla \omega + a_d . \nabla T - \frac{\rho_l}{\rho_0} . K \bar{k} \right] \\ (\rho C)^* \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda^* \nabla T) \end{cases} \quad (\text{II-4-4})$$

II-5 Modèles physique et mathématique utilisés :

Afin de simplifier l'about en cette étude du point de vue numérique, le système physique choisi est unidirectionnel.

Le modèle physique choisi est semi-ouvert dont l'extrémité gauche ($x = 0$) est en contact avec un air régulé en température, et en humidité. L'extrémité droite ($x = d$) est fermée et maintenue à une température constante (figure II-5-1)

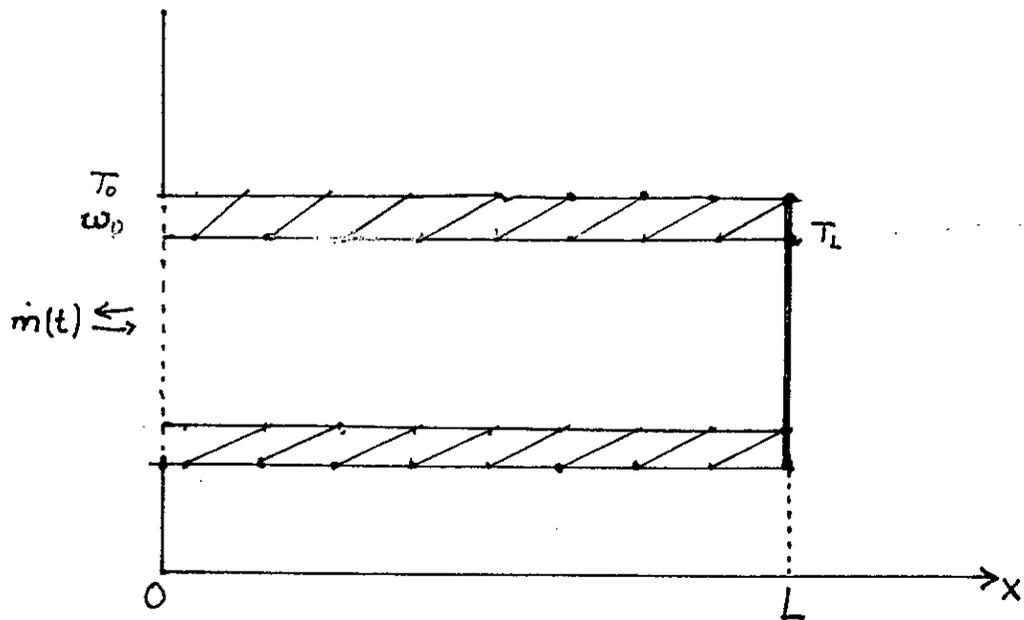


Fig. (II-5-1)

II-5-1 Equations :

le système d'équations (II-4-2) devient dans ce cas :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_d \frac{\partial T}{\partial x} \right] - \frac{\rho_l}{\rho_0} \frac{\partial K}{\partial z} \\ (\rho C)^* \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda^* \frac{\partial T}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (\text{II-5-1})$$

N.B : Le terme $\left(-\frac{\rho_l}{\rho_0} \frac{\partial K}{\partial z} \right)$ est nul dans le cas où le modèle physique est choisi horizontal (la composante suivant z de la gravité est nulle)

La résolution du système ainsi obtenu passe par la connaissance des conditions initiales et aux limites.

II-5-2 Conditions initiales et aux limites :

Les conditions initiales utilisées sont :

$$\text{pour } t \leq 0 \quad \begin{cases} \omega = \omega_0 = 0.02 \\ T = T_0 = 30^\circ\text{C} \end{cases}$$

Les conditions aux limites sont :

En $x=0$

$$\text{pour } t \geq 0 \quad \begin{cases} a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_d \frac{\partial T}{\partial x} = \dot{m}(t) \\ T = T_i = T_0 \end{cases}$$

avec : $\dot{m}(t) = \frac{dm(t)}{dt} = \frac{1}{\rho_0 S} \cdot \frac{dM(t)}{dt}$ = densité de flux de masse traversant la surface en ($x=0$) dans

laquelle $M(t)$ est une loi expérimentale donnant les masses d'eau condensées ou évaporées en fonction du temps, S est la section du passage de la vapeur et ρ_0 est la masse volumique de l'échantillon du milieu poreux.

En $x=L$

$$\text{pour } t \geq 0 \quad \begin{cases} a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_d \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ T = T_i \end{cases}$$

CHAPITRE III

RESOLUTION NUMERIQUE

III-1 RAPPELS SUR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

III-1-1 Différentes approximations aux différences finies

III-1-2 Différents schémas des différences finies des équations aux dérivées partielles paraboliques

III-2 PRESENTATION DE LA METHODE DE *GRANK-NICOLSON*

III-3 APPLICATION DE LA METHODE DE *GRANK-NICOLSON* AU CAS TRAITÉ

III-3-1 Discrétisation de l'équation hydrique

III-3-2 Discrétisation de l'équation de la chaleur

III-3-2-1 Discrétisation de l'équation de la chaleur dans le cas où le système est découplé

III-3-2-2 Résolution du système découplé résultant

III-3-2-3 Discrétisation de l'équation de la chaleur dans le cas où le système est couplé

III-3-2-4 Résolution du système couplé résultant

Le système d'équations (II-5-1) constituant le modèle de *PHILIP DE VRIES* est un système de deux équations aux dérivées partielles paraboliques mono-dimensionnelles couplées, le caractère non linéaire de ce système rend vaine la recherche de solutions analytiques et nécessite l'utilisation d'une méthode numérique .

La méthode retenue pour la résolution numérique est la méthode des différences finies ; et pour cela nous allons présenter brièvement la méthode utilisée.

III-1 RAPPELS SUR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES :

La méthode des différences finies est dite d'approximation, car elle est basée sur la discrétisation directe en remplaçant les équations différentielles ou aux dérivées partielles par des équations aux différences finies aboutissant à des équations algébriques.

Pour résoudre un problème par la méthode des différences, on doit suivre trois étapes :

- 1- *discrétiser le domaine de la solution par une grille de nœuds .*
- 2- *approximer l'équation différentielle ou à dérivées partielles par une équation aux différences finies équivalente .*
- 3- *résoudre l'équation aux différences finies en respectant les conditions aux limites et initiales .*

Pour qu'une solution approchée reflète bien la solution recherchée, elle lui faut satisfaire les conditions de consistance ,de stabilité et de convergence.

Pour définir ces trois notions , considérons l'équation aux dérivées partielles :

$$L(u)-g=0 \quad (\text{III-1-1})$$

Où :

u : dépend du vecteur des variables indépendantes x .

Cette équation est définie dans un domaine Ω et est associée aux conditions aux limites sur le contour Γ du domaine Ω fig.(III-1-1)

$$B(u) -h=0 \quad (\text{III-1-2})$$

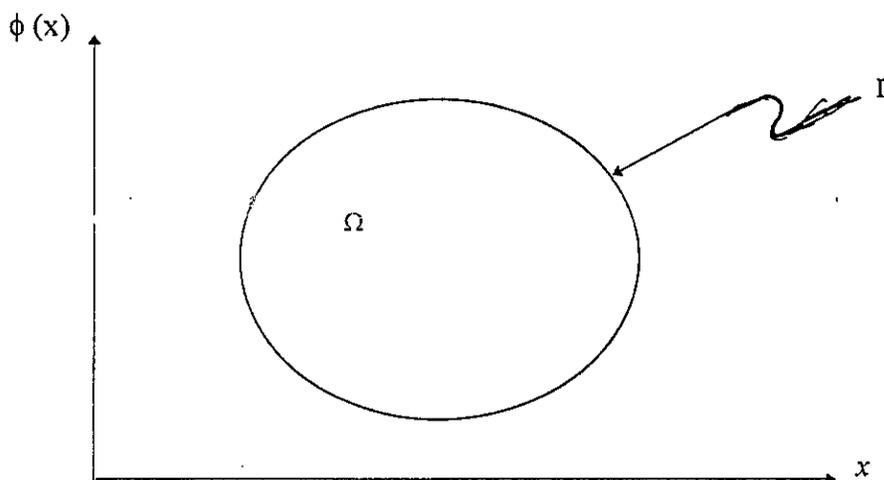


Fig. (III-1-1)

La forme discrétisée du système formé par les deux dernières relations s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta(u) &= g \text{ dans } \Omega \\ B_{\Delta}(u) &= h \text{ sur } \Gamma \end{aligned} \quad (\text{III-1-3})$$

où :

L_{Δ} : opérateur discret

Convergence : on dit qu'un schéma aux différences finies est convergent si la quantité $(u - U_{\Delta})$ tend vers zéro quand les pas de discrétisation Δ tendent vers zéro.

La solution U_{Δ} sera une solution approchée convenable de la solution exacte u . [16]

Consistance : une approximation est dite consistante si l'erreur de troncature tend vers zéro lorsque tous les pas de la discrétisation L_{Δ} tendent eux même vers zéro.

Dans ce cas la forme discrétisée représentera convenablement l'équation à résoudre, elle est représentée par $R_{\Delta}(u) = L_{\Delta}(U) - L(u)$. [16]

Stabilité : un schéma aux différences finies est dit stable si les erreurs d'arrondis ne s'amplifient pas au fur et à mesure que les calculs progressent, cela signifie qu'il est indispensable qu'à une itération de calcul donnée une erreur d'arrondi du calculateur, ne s'amplifie pas aux prochaines itérations de calcul. [16]

III-1-1 Différentes approximations aux différences finies :

Avant d'aborder la résolution d'un problème d'une équation différentielle ou à dérivées à partielles par la méthode des différences finies, un choix d'une approximation aux différences finies s'impose.

Soit une fonction $\phi(x)$ fig. (III-1-2). L'approximation de la fonction $\phi(x)$ par différence finies peut se faire selon plusieurs schémas :

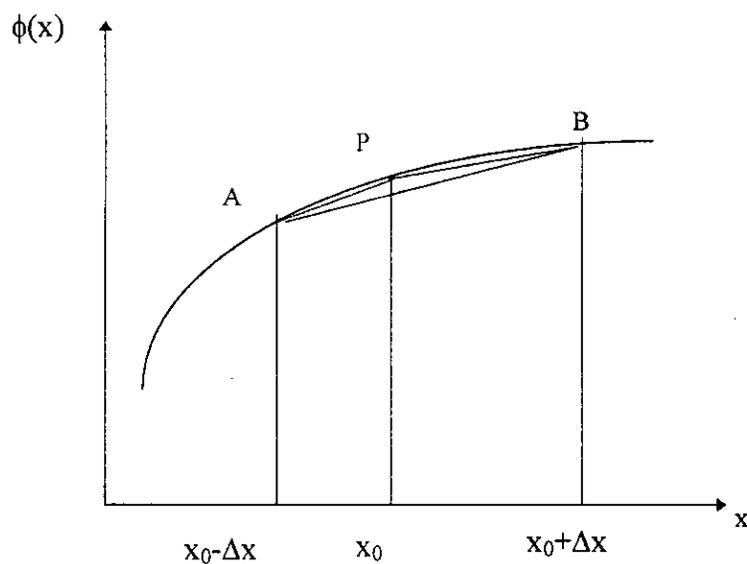


Fig (III-1-2)

- Selon la courbe PB « forward- difference »

$$\phi'(x_0) = \frac{\phi(x_0 + \Delta x) - \phi(x_0)}{\Delta x} \quad (\text{III-1-4})$$

- Selon la courbe AP « backward-difference »

$$\phi'(x_0) = \frac{\phi(x_0) - \phi(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \quad (\text{III-1-5})$$

- Selon la courbe AB « central-difference »

$$\phi'(x_0) = \frac{\phi(x_0 + \Delta x) - \phi(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (\text{III-1-6})$$

Comme on peut aussi estimer la seconde dérivée de $\phi(x)$ en P :

$$\begin{aligned} \phi''(x_0) &= \frac{\phi'(x_0 + \Delta x/2) - \phi'(x_0 - \Delta x/2)}{\Delta x} \\ \phi''(x_0) &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\phi(x_0 + \Delta x) - \phi(x_0)}{\Delta x} - \frac{\phi(x_0) - \phi(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \right] \end{aligned} \quad (\text{III-1-7})$$

Où :

$$\phi''(x_0) = \frac{\phi(x_0 + \Delta x) - 2\phi(x_0) + \phi(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (\text{III-1-8})$$

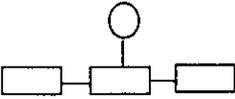
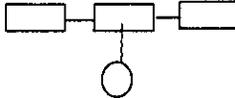
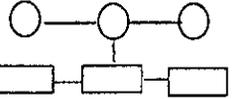
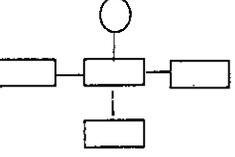
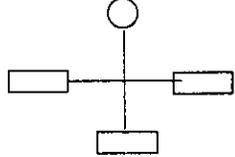
III-1-2 Les différents schémas des différences finies des équations aux dérivées partielles paraboliques :

pour illustrer les différents schémas des équations aux dérivées partielles paraboliques, Considérons une équation aux dérivées partielles parabolique simple à une variable spatiale indépendante .

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad , k > 0 \quad (\text{III-1-9})$$

La discrétisation de l'équation (III-1-9) peut se faire selon les différents schémas [12], représentée dans le tableau (III-1) suivant :

TABLEAU (III-1)

méthode	Algorithmme	Molécule
<p>1-progressive 1^{ere} ordre</p>	$\frac{\phi(i, j+1) - \phi(i, j)}{\Delta t} = \frac{\phi_{i+1}^j - 2\phi_i^j + \phi_{i-1}^j}{k(\Delta x)^2}$ <p>schéma explicite, stable pour</p> $0 \leq \frac{\Delta t}{k(\Delta x)^2} \leq 0.5$	
<p>2-regressive 1^{ere} ordre</p>	$\frac{\phi(i, j) - \phi(i, j-1)}{\Delta t} = \frac{\phi_{i+1}^j - 2\phi_i^j + \phi_{i-1}^j}{k(\Delta x)^2}$ <p>schéma implicite, inconditionnellement stable</p>	
<p>3-GRANK-NICOLSON</p>	$\frac{\phi_i^{j+1} - \phi_i^j}{\Delta t} = \frac{\phi_{i+1}^{j+1} - 2\phi_i^{j+1} + \phi_{i-1}^{j+1}}{k(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{i+1}^j - 2\phi_i^j + \phi_{i-1}^j}{k(\Delta x)^2}$ <p>schéma mixte, inconditionnellement stable</p>	
<p>4-LEAPFROG</p>	$\frac{\phi_i^{j+1} - \phi_i^{j-1}}{2\Delta t} = \frac{\phi_{i+1}^j - 2\phi_i^j + \phi_{i-1}^j}{k(\Delta x)^2}$ <p>schéma explicite, conditionnellement stable</p>	
<p>5-Dafort-frankel</p>	$\frac{\phi_i^{j+1} - \phi_i^{j-1}}{2\Delta t} = \frac{\phi_{i-1}^j - \phi_i^{j+1} - \phi_i^{j-1} + \phi_{i-1}^j}{k(\Delta x)^2}$ <p>schéma explicite, conditionnellement stable</p>	

III-2 PRESENTATION DE LA METHODE DE GRANK-NICOLSON:

On présentera la méthode de GRANK-NICOLSON en détail, car c'est la méthode qu'on a choisie pour traiter notre problème, et pour cela l'application de la méthode de GRANK-NICOLSON à une équation aux dérivées partielles parabolique simple $\phi(x,t)$, s'avère nécessaire pour illustrer les différentes étapes de la discrétisation :

Soient une fonction $\phi(x,t)$ définie et continue sur le domaine spatial unidirectionnel Ω de longueur L et l'équation (III-1-9) avec $\alpha^2=1/k$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,t) \tag{III-2-1}$$

$$0 \leq x \leq L \text{ et } t > 0$$

Le schéma de discrétisation dans le plan (x,t), propre à ce cas [1], est représenté sur la figure ci-dessus fig.(III-2-1)

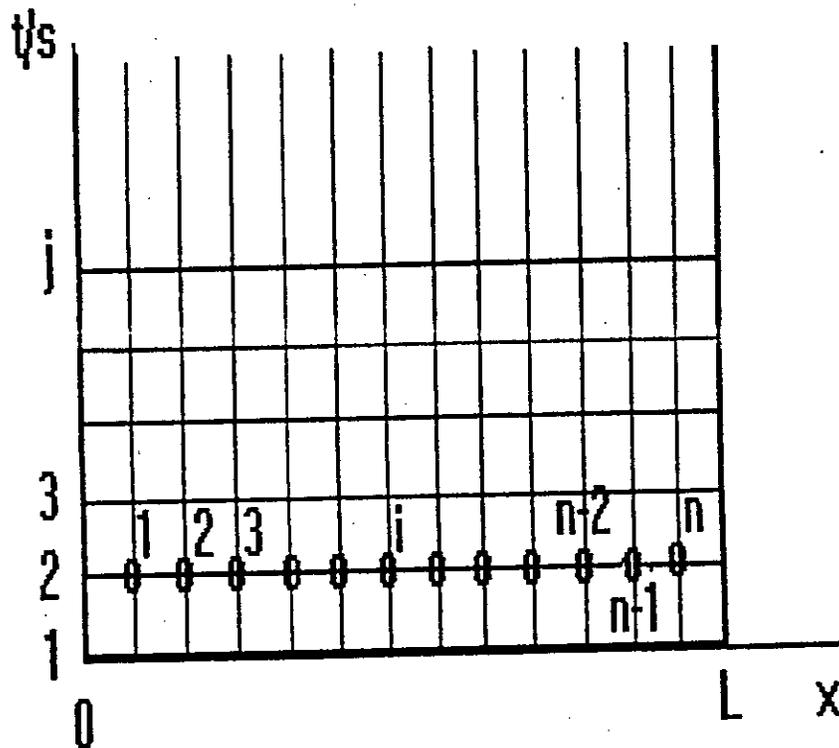


Fig.(III-2-1)

Avec :

$$\begin{cases} x = i \cdot h = i \cdot \Delta x \\ t = (j-1) \cdot s \end{cases}$$

$$i=1, n-1 \text{ et } j=1, 2, 3, \dots$$

Où :

h : pas d'espace.

s : pas de temps.

Soient les conditions aux limites associées à l'équation (III-2-1) :

$$\begin{cases} \phi(0, t) = g_0(t) \\ \phi(L, t) = g_L(t) \end{cases} \quad (\text{III-2-2})$$

et les conditions initiales sont:

$$\begin{aligned} \phi(x, 1) &= f(x) & (\text{III-2-3}) \\ 0 \leq x \leq L & \text{ et } t(1) = 0 \end{aligned}$$

l'équation aux différences finies équivalente est déduite à partir du développement limité de *TAYLOR* de la fonction $\phi(x, t)$, on a :

$$\begin{aligned} \phi(x_i + h, t_j + s) &= \phi(x_i, t_j) + h \frac{\partial \phi}{\partial x}(x_i, t_j) + s \frac{\partial \phi}{\partial t}(x_i, t_j) \\ &+ \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x_i, t_j) + h \cdot s \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t}(x_i, t_j) + \frac{s^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x_i, t_j) + \dots \\ &+ \frac{1}{(n-1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + s \frac{\partial}{\partial t} \right)^{n-1} \phi(x_i, t_j) + R_n \end{aligned} \quad (\text{III-2-4})$$

Où :

$$R_n = \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + s \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n)} \phi(x + \xi h, t + \eta s) \quad (\text{III-2-5})$$

La méthode de *GRANK-NICOLSON* est tirée des développements combinés de *TAYLOR*, des méthodes explicite au pas de temps j et implicite au pas de temps $j + 1$ [1,12,16,20]:

Discrétisation en t :

Le développement de *TAYLOR* de la méthode explicite au pas de temps j s'écrit :

$$\phi(x_i, t_j + s) = \phi(x_i, t_j) + s \frac{\partial \phi}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{s^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x_i, t_j) + \dots \quad (\text{III-2-6})$$

D'ou :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{\phi(x_i, t_j + s) - \phi(x_i, t_j)}{s} - \frac{s}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x_i, t_j + \mathcal{G}_j s) \quad (\text{III-2-7})$$

$$0 \leq \mathcal{G}_j <$$

Le développement de *TAYLOR* de la méthode explicite au pas de temps $j + 1$ s'écrit :

$$\phi(x_i, t_j) = \phi(x_i, t_j + s) - s \frac{\partial \phi}{\partial t}(x_i, t_j + s) + \frac{s^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x_i, t_j + s) + \dots \quad (\text{III-2-8})$$

d'ou :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x_i, t_j + s) = \frac{\phi(x_i, t_j + s) - \phi(x_i, t_j)}{s} + \frac{s}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x_i, t_j + \tilde{\mathcal{G}}_j s) \quad (\text{III-2-9})$$

$$-1 \leq \tilde{\mathcal{G}}_j < 0$$

En sommant les deux équations (II-2-7) et (II-2-9) et en supposant que $(t_j + \tilde{\mathcal{G}}_j s \approx t_j + \mathcal{G}_j s)$, on doit aller jusqu'à l'ordre supérieur de dérivation pour déterminer l'erreur d'approximation qui est de l'ordre $O(s^2)$.

On pourra alors approximer le premier terme de l'équation (III-2-1) par :

$$2 \left(\frac{\phi_i^{j+1} - \phi_i^j}{s} \right) \quad (\text{III-2-10})$$

Discrétisation en x :

Le développement du deuxième terme de l'équation (III-2-1) par rapport à x est donné comme suit :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{\phi(x_i + h, t_j) - 2\phi(x_i, t_j) + \phi(x_i - h, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}(x_i + \phi_i h, t_j) \quad (\text{III-2-11})$$

$$-1 < \phi < 1$$

où l'erreur est de l'ordre $O(h^2)$

On pourra alors approximer l'équation (III-2-1) par :

$$2 \left[\frac{\phi_i^{j+1} - \phi_i^j}{s} \right] - \alpha^2 \left[\frac{\phi_{i-1}^{j+1} - 2\phi_i^{j+1} + \phi_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{\phi_{i-1}^j - 2\phi_i^j + \phi_{i+1}^j}{h^2} \right] = 0 \quad (\text{III-2-12})$$

Soit :

$$\frac{\phi_i^{j+1} - \phi_i^j}{s} \left] - \frac{\alpha^2}{2} \left[\frac{\phi_{i-1}^{j+1} - 2\phi_i^{j+1} + \phi_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{\phi_{i-1}^j - 2\phi_i^j + \phi_{i+1}^j}{h^2} \right] = 0 \quad (\text{III-2-13})$$

avec une erreur d'approximation d'ordre de $O(s^2+h^2)$

En posant : $\gamma = \alpha^2 \frac{s}{h^2}$

l'équation (III-2-13) prend la forme :

$$-\frac{\gamma}{2} \phi_{i-1}^{j+1} + (1 + \gamma) \phi_i^{j+1} - \frac{\gamma}{2} \phi_{i+1}^{j+1} = \frac{\gamma}{2} \phi_{i-1}^j + (1 - \gamma) \phi_i^j + \frac{\gamma}{2} \phi_{i+1}^j \quad (\text{III-2-14})$$

avec les conditions limites :

$$\begin{cases} \phi_0^{j+1} = g_0^{j+1} \\ \phi_{n+1}^{j+1} = g_L^{j+1} \end{cases} \quad (\text{III-2-15})$$

Et les conditions initiales :

$$\phi_L^0 = f_1 \quad (\text{III-2-16})$$

En écriture matricielle, l'équation (III-2-14) associée aux conditions limites (III-2-15) et initiales (III-2-16), elle se met sous la forme suivante :

$$[A]\{\phi\}^{j+1} = [B]\{\phi\}^j \quad (III-2-17)$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} (1+\gamma) & -\frac{\gamma}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{\gamma}{2} & (1+\gamma) & -\frac{\gamma}{2} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -\frac{\gamma}{2} & (1+\gamma) & -\frac{\gamma}{2} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{\gamma}{2} & (1+\gamma) & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1^{j+1} \\ \phi_2^{j+1} \\ \phi_{31}^{j+1} \\ \dots \\ \phi_{n-2}^{j+1} \\ \phi_{n-1}^{j+1} \\ \phi_n^{j+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\gamma) & \frac{\gamma}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & (1+\gamma) & \frac{\gamma}{2} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\gamma}{2} & (1-\gamma) & \frac{\gamma}{2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{\gamma}{2} & (1-\gamma) & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1^j \\ \phi_2^j \\ \phi_{31}^j \\ \dots \\ \phi_{n-2}^j \\ \phi_{n-1}^j \\ \phi_n^j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\gamma}{2}(\phi_0^j + \phi_0^{j+1}) \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\gamma}{2}(\phi_{n+1}^j + \phi_{n+1}^{j+1}) \end{Bmatrix} \quad (III-2-18)$$

Une écriture générale résume trois méthodes, explicite, implicite et *GRAN NICOLSON* ; s'écrit comme suit :

$$\frac{\phi_i^{j+1} - \phi_i^j}{s} = \theta \cdot \alpha \left(\frac{\phi_{i-1}^{j+1} + \phi_i^{j+1} + \phi_{i+1}^{j+1}}{h^2} \right) + (1-\theta) \cdot \alpha^2 \left(\frac{\phi_{i-1}^j + \phi_i^j + \phi_{i+1}^j}{h^2} \right) \quad (III-2-19)$$

En posant :

$$\gamma = \alpha^2 \frac{S}{h^2}$$

l'équation (III-2-19) ; devient :

$$\phi_i^{j+1} - \phi_i^j = \gamma \cdot \left\{ \theta [\phi_{i-1}^{j+1} + \phi_i^{j+1} + \phi_{i+1}^{j+1}] + (1-\theta) [\phi_{i-1}^j + \phi_i^j + \phi_{i+1}^j] \right\} \quad (\text{III-2-20})$$

$\theta=0 \Rightarrow$ méthode explicite

$\theta=1 \Rightarrow$ méthode implicite

$\theta=1/2 \Rightarrow$ méthode de *CRANK-NICOLSON*

La condition de stabilité est satisfaite [12,16,20] pour :

$$0 \leq \theta < 1/2 \quad \text{si} \quad \gamma \leq \frac{1}{2 \cdot (1-\theta)}$$

$$\theta \geq 1/2 \quad \text{si} \quad \text{quelque soit } \gamma$$

L'erreur de troncature minimale est obtenue [12,16,20] pour :

$$\theta \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{12\gamma} \quad (\text{III-2-21})$$

III-3 APPLICATION DE LA METHODE DE *CRANK-NICOLSON* AU CAS TRAITE

On se propose d'utiliser le schéma de *CRANK-NICOLSON*, vu qu'il est inconditionnellement stable présente une erreur de troncature relativement faible et par conséquent plus consistant , pour résoudre le système des deux équations du modèle mathématique de *PHILIP DE VRIES* généré lié au modèle physique décrit au deuxième chapitre (§ II-5-1.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_d \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \\ (\rho c)^* \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda^* \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{III-3-1})$$

associé aux conditions aux limites et initiales suivantes :

■ Conditions aux limites :

$$\begin{aligned} t > 0 & \quad T = T_0 \\ x = 0 & \quad a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_0 + a_d \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_0 = \dot{m}(t) \end{aligned} \quad (\text{III-3-2})$$

$$\begin{aligned} t > 0 & \quad T = T_L \\ x = x_L = L & \quad a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_L + a_d \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_L = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-3-3})$$

Conditions initiales :

$$t \leq 0 \quad \begin{cases} T = T_0 \\ \omega_0 = 0.02\% \end{cases} \quad (\text{III-3-4})$$

A signaler que pour la discrétisation géométrique du domaine, les nœuds situés aux frontières sont numérotés à partir de 1, comme pour la méthode des éléments finis.

III-3-1 Discrétisation de l'équation hydrique.

Soit n le nombre de nœuds. En appliquant le schéma général de discrétisation pondéré par θ à la deuxième équation du système (III-3-1) représentant l'équation hydrique [1], on obtient:

$$\frac{\omega_i^{j+1} - \omega_i^j}{\Delta t} = \frac{\theta}{\Delta x} \left[\left(a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_d \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} - \left(a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_d \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}}^{j+1} \right] + \frac{1-\theta}{\Delta x} \left[\left(a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_d \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}}^j - \left(a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_d \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}}^j \right] \quad (\text{III-3-5})$$

i=2 ; n-1

en développant l'équation (III-3-5), on aura:

$$\frac{\omega_i^{j+1} - \omega_i^j}{\Delta t} = \frac{\theta}{\Delta x} \left\{ \left[(a_m)_{i+1/2}^{j+1} \frac{\omega_{i+1}^{j+1} - \omega_i^{j+1}}{\Delta x} + (a_d)_{i+1/2}^{j+1} \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1}}{\Delta x} \right] - \left[(a_m)_{i-1/2}^{j+1} \frac{\omega_i^{j+1} - \omega_{i-1}^{j+1}}{\Delta x} + (a_d)_{i-1/2}^{j+1} \frac{T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{\Delta x} \right] \right\} +$$

$$\frac{1-\theta}{\Delta x} \left\{ \left[(a_m)_{i+1/2}^j \frac{\omega_{i+1}^j - \omega_i^j}{\Delta x} + (a_d)_{i+1/2}^j \frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{\Delta x} \right] - \left[(a_m)_{i-1/2}^j \frac{\omega_i^j - \omega_{i-1}^j}{\Delta x} + (a_d)_{i-1/2}^j \frac{T_i^j - T_{i-1}^j}{\Delta x} \right] \right\}$$

(III-3-6)

où : $\Delta x = h$: pas d'espace

$\Delta t = s$: pas de temps

En posant $\gamma = s/h^2$

Le schéma de GRANK-NICOLSON est obtenu pour $\theta=1/2$ d'où l'équation (III-3-6) devient :

$$\omega_i^{j+1} - \omega_i^j = \frac{\gamma}{2} \left\{ \left[(a_m)_{i+1/2}^{j+1} (\omega_{i+1}^{j+1} - \omega_i^{j+1}) + (a_d)_{i+1/2}^{j+1} (T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1}) \right] - \left[(a_m)_{i-1/2}^{j+1} (\omega_i^{j+1} - \omega_{i-1}^{j+1}) + (a_d)_{i-1/2}^{j+1} (T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}) \right] \right\} +$$

$$\frac{\gamma}{2} \left\{ \left[(a_m)_{i+1/2}^j (\omega_{i+1}^j - \omega_i^j) + (a_d)_{i+1/2}^j (T_{i+1}^j - T_i^j) \right] - \left[(a_m)_{i-1/2}^j (\omega_i^j - \omega_{i-1}^j) + (a_d)_{i-1/2}^j (T_i^j - T_{i-1}^j) \right] \right\}$$

(III-3-7)

En réorganisant l'équation (III-3-7),devient :

$$-\frac{\gamma}{2} (a_m)_{i-1/2}^{j+1} \omega_{i-1}^{j+1} + \left[1 + \frac{\gamma}{2} \left((a_m)_{i-1/2}^{j+1} + (a_m)_{i+1/2}^{j+1} \right) \right] \omega_i^{j+1} - \frac{\gamma}{2} (a_m)_{i+1/2}^{j+1} \omega_{i+1}^{j+1} =$$

$$\frac{\gamma}{2} (a_m)_{i-1/2}^j \omega_{i-1}^j + \left[1 + \frac{\gamma}{2} \left((a_m)_{i-1/2}^j + (a_m)_{i+1/2}^j \right) \right] \omega_i^j + \frac{\gamma}{2} (a_m)_{i+1/2}^j \omega_{i+1}^j +$$

$$\frac{\gamma}{2} (a_d)_{i-1/2}^{j+1} T_{i-1}^{j+1} - \frac{\gamma}{2} \left((a_d)_{i-1/2}^{j+1} + (a_d)_{i+1/2}^{j+1} \right) T_i^{j+1} + \frac{\gamma}{2} (a_d)_{i+1/2}^{j+1} T_{i+1}^{j+1} +$$

$$\frac{\gamma}{2} (a_d)_{i-1/2}^j T_{i-1}^j - \frac{\gamma}{2} \left((a_d)_{i-1/2}^j + (a_d)_{i+1/2}^j \right) T_i^j + \frac{\gamma}{2} (a_d)_{i+1/2}^j T_{i+1}^j +$$

$i=2, n-1$ (III-3-8)

En écriture matricielle :

$$[A]\{\omega^{j+1}\} = [B]\{\omega^j\} + [C]\{T^{j+1}\} + [D]\{T^j\}$$

(III-3-9)

En posant

$$\{r\omega\} = [B]\{\omega^j\} + [C]\{T^{j+1}\} + [D]\{T^j\}$$

(III-3-10)

et $k=i+1$

soit :

$$\begin{aligned}
 r\omega_i = & \frac{\gamma}{2} (a_m)_{k-1/2}^j \omega_i^j + \left[1 + \frac{\gamma}{2} \left((a_m)_{k-1/2}^j + (a_m)_{k+1/2}^j \right) \right] \omega_{i+1}^j + \frac{\gamma}{2} (a_m)_{k+1/2}^j \omega_{i+2}^j \\
 & + \frac{\gamma}{2} (a_d)_{k-1/2}^{j+1} T_i^{j+1} - \frac{\gamma}{2} \left((a_d)_{k-1/2}^{j+1} + (a_d)_{k+1/2}^{j+1} \right) T_{i+1}^{j+1} + \frac{\gamma}{2} (a_d)_{k+1/2}^{j+1} T_{i+2}^{j+1} \\
 & + \frac{\gamma}{2} (a_d)_{k-1/2}^j T_i^j - \frac{\gamma}{2} \left((a_d)_{k-1/2}^j + (a_d)_{k+1/2}^j \right) T_{i+1}^j + \frac{\gamma}{2} (a_d)_{k+1/2}^j T_{i+2}^j
 \end{aligned}$$

pour tout $i=1, n-2$ et $k=i+1$ (III-3-11)

cela revient à résoudre l'équation algébrique suivante

$$[A] \{ \omega^{j+1} \} = \{ r\omega \} \tag{III-3-12}$$

cette équation s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix}
 a_1 & b_1 & c_1 & 0 & & & & & 0 \\
 0 & a_2 & b_2 & c_2 & & & & & \\
 \cdot & & \cdot & \cdot & & & & & \\
 \cdot & & \cdot & \cdot & & & & & \\
 \cdot & & \cdot & \cdot & & & & & \\
 \cdot & & & & a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} & 0 & \\
 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} &
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \omega_1^{j+1} \\
 \omega_2^{j+1} \\
 \omega_3^{j+1} \\
 \cdot \\
 \omega_{n-2}^{j+1} \\
 \omega_{n-1}^{j+1} \\
 \omega_n^{j+1}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 r\omega_1 \\
 r\omega_2 \\
 r\omega_3 \\
 \cdot \\
 r\omega_{n-4} \\
 r\omega_{n-3} \\
 r\omega_{n-2}
 \end{Bmatrix}$$

(III-3-13)

avec :

$$\begin{aligned}
 a_i &= -\frac{\gamma}{2} (a_d)_{k-1/2}^{j+1} \\
 b_i &= 1 + \frac{\gamma}{2} \left((a_m)_{k-1/2}^j + (a_m)_{k+1/2}^j \right) \\
 c_i &= -\frac{\gamma}{2} (a_m)_{k+1/2}^j
 \end{aligned}$$

(III-3-14)

A rappeler que les nœuds 1 et n sont attribués aux conditions aux limites qui sont :

à l'entrée :

$$x=x_1=0 \quad a_m \left. \frac{\partial \omega}{\partial x} \right|_1 + a_d \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_1 = \dot{m}(t) \quad (\text{III-3-15})$$

à la sortie

$$x=x_n=L \quad a_m \left. \frac{\partial \omega}{\partial x} \right|_n + a_d \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_n = 0 \quad (\text{III-3-16})$$

Les conditions aux limites associées à l'équation hydrique sont du type *NEUMAN*, qu'on discrétise par le schéma à 3 points qui traduit une formule d'extrapolation pour évaluer la dérivée première en nœuds extrêmes

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_1 = \frac{1}{2\Delta x} (3\phi_1 - 4\phi_2 + \phi_3) \quad (\text{III-3-17})$$

En appliquant ce schéma à notre cas de conditions aux limites, nous obtiendrons.

à l'entrée :

$$a_m \left|_1 \left(\frac{3\omega_1^{j+1} - 4\omega_2^{j+1} + \omega_3^{j+1}}{2h} \right) + a_d \left|_1 \left(\frac{3T_1^{j+1} - 4T_2^{j+1} + T_3^{j+1}}{2h} \right) = \dot{m}(t_{j+1}) \quad (\text{III-3-18})$$

à la sortie :

$$a_m \left|_n \left(\frac{3\omega_n^{j+1} - 4\omega_{n-1}^{j+1} + \omega_{n-2}^{j+1}}{2h} \right) + a_d \left|_n \left(\frac{3T_n^{j+1} - 4T_{n-1}^{j+1} + T_{n-2}^{j+1}}{2h} \right) = 0 \quad (\text{III-3-19})$$

D'où :

$$\omega_1^{j+1} = \frac{4}{3}\omega_2^{j+1} - \frac{1}{3}\omega_3^{j+1} - \frac{a_d}{a_m} \left|_1 \left(T_1^{j+1} - \frac{4}{3}T_2^{j+1} + \frac{1}{3}T_3^{j+1} \right) + \frac{1}{a_m} \left|_1 \left(\frac{2h}{3} \right) \dot{m}(t_{j+1}) \quad (\text{III-3-20})$$

et

$$\omega_n^{j+1} = \frac{4}{3}\omega_{n-1}^{j+1} - \frac{1}{3}\omega_{n-2}^{j+1} - \frac{a_d}{a_m} \Big|_n \left(T_n^{j+1} - \frac{4}{3}T_{n-1}^{j+1} + \frac{1}{3}T_{n-2}^{j+1} \right) \quad (\text{III-3-21})$$

En tenant compte de ces conditions aux limites et en transformant l'équation précédente afin d'avoir une matrice tridiagonale et par conséquent la résolution deviendra beaucoup plus facile, nous substituons la première et la dernière colonne de la matrice [A], par leur équivalent dans le vecteur droite {rω} de l'équation algébrique.

[A]{ω^{j+1}} = {rω} qui s'écrira comme suit :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_1^{j+1} \\ \omega_2^{j+1} \\ \omega_3^{j+1} \\ \cdot \\ \omega_{n-2}^{j+1} \\ \omega_{n-1}^{j+1} \\ \omega_n^{j+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r\omega_1 \\ r\omega_2 \\ r\omega_3 \\ \cdot \\ r\omega_{n-4} \\ r\omega_{n-3} \\ r\omega_{n-2} \end{Bmatrix} \quad (\text{III-3-22})$$

Les coefficients de la première et de la dernière ligne de la matrice [A] changeront en :

$$\begin{cases} b(1) = b(1) + \frac{4}{3}a(1) \\ c(1) = c(1) - \frac{1}{3}a(1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b(n-2) = b(n-2) + \frac{4}{3}c(n-2) \\ a(n-2) = a(n-2) - \frac{1}{3}c(n-2) \end{cases}$$

par contre la première et la dernière valeur du vecteur {rω} deviendront :

$$r\omega(1) = r\omega(1) - a(1) \frac{a_d}{a_m} \Big|_1 \left(T_1^{j+1} - \frac{4}{3}T_2^{j+1} + \frac{1}{3}T_3^{j+1} \right) - a(1) \frac{1}{a_m} \Big|_1 \left(\frac{2h}{3} \right) m(t_{j+1}) \quad (\text{III-3-23})$$

$$r\omega(n-2) = r\omega(n-2) - c(n-2) \frac{a_d}{a_m} \Big|_n \left(T_n^{j+1} - \frac{4}{3}T_{n-1}^{j+1} + \frac{1}{3}T_{n-2}^{j+1} \right) \quad (\text{III-3-24})$$

III-3-2 Discrétisation de l'équation de la chaleur :

En appliquant le schéma général pondéré par θ . (III-2-20) pour la première équation du système (III-3-1), représentant l'équation de la chaleur, on obtient :

$$\begin{aligned} ((\rho c)^*)_i^{j+\theta} \frac{T_i^{j+\theta} - T_i^j}{\Delta t} &= \frac{\theta}{\Delta x} \left[\left(\lambda^* \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+1/2}^{j+1} - \left(\lambda^* \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-1/2}^{j+1} \right] \\ &+ \frac{1-\theta}{\Delta x} \left[\left(\lambda^* \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+1/2}^j - \left(\lambda^* \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-1/2}^j \right] \end{aligned} \quad \text{(III-3-25)}$$

$i = 2, n-1$

Après développement on aura

$$\begin{aligned} ((\rho c)^*)_i^{j+\theta} \frac{T_i^{j+\theta} - T_i^j}{\Delta t} &= \frac{\theta}{\Delta x} \left[(\lambda^*)_{i+1/2}^{j+1} \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1}}{\Delta x} - (\lambda^*)_{i-1/2}^{j+1} \frac{T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{\Delta x} \right] \\ &+ \frac{1-\theta}{\Delta x} \left[(\lambda^*)_{i+1/2}^j \frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{\Delta x} - (\lambda^*)_{i-1/2}^j \frac{T_i^j - T_{i-1}^j}{\Delta x} \right] \end{aligned} \quad \text{(III-3-26)}$$

$i = 2, n-1$

Le schéma de GRANK-NICOLSON est obtenu pour $\theta=1/2$, d'où l'équation (III-3-26) devient :

$$\begin{aligned} ((\rho c)^*)_i^{j+1/2} (T_i^{j+1} - T_i^j) &= \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} \left\{ (\lambda^*)_{i+1/2}^{j+1} T_{i+1}^{j+1} \right. \\ &- \left. \left((\lambda^*)_{i+1/2}^{j+1} + (\lambda^*)_{i-1/2}^{j+1} \right) T_i^{j+1} \right. \\ &+ (\lambda^*)_{i-1/2}^{j+1} T_{i-1}^{j+1} \\ &+ (\lambda^*)_{i+1/2}^j T_{i+1}^j \\ &- \left. \left((\lambda^*)_{i+1/2}^j + (\lambda^*)_{i-1/2}^j \right) T_i^j \right. \\ &\left. + (\lambda^*)_{i-1/2}^j T_{i-1}^j \right\} \end{aligned} \quad \text{(III-3-27)}$$

$i = 2, n-1$

En posant : $\gamma = s/h^2$

avec :

$s = \Delta t$: pas de temps

$h = \Delta x$: pas d'espace .

et

$$d_1^* = \frac{(\lambda)_{i+1/2}^{j+1}}{((\rho C)^*)_i^{j+1/2}}; \quad d_2^* = \frac{(\lambda)_{i-1/2}^{j+1}}{((\rho C)^*)_i^{j+1/2}}; \quad d_3^* = \frac{(\lambda)_{i+1/2}^j}{((\rho C)^*)_i^{j+1/2}}; \quad d_4^* = \frac{(\lambda)_{i-1/2}^j}{((\rho C)^*)_i^{j+1/2}}$$

i=2,n-1 (III-3-28)

l'équation ((III-3-28) devient :

$$T_i^{j+1} - T_i^j = \frac{\gamma}{2} (d_1^* T_{i+1}^{j+1} - (d_1^* + d_2^*) T_i^{j+1} + d_2^* T_{i-1}^{j+1} + d_3^* T_{i+1}^j - (d_3^* + d_4^*) T_i^j + d_4^* T_{i-1}^j)$$

(III-3-29)

Deux cas se présentent ,le cas où la chaleur équivalente $(\rho C)^*$ et la conductivité thermique apparente du matériau (λ^*) sont constantes, d'où la diffusivité thermique sera constante et dans ce cas on aura à résoudre l'équation de la chaleur indépendamment de l'équation hydrique cela revient à dire que le système est partiellement découplé, et le cas où la chaleur volumique équivalente $(\rho C)^*$ et la conductivité thermique apparente du matériau (λ^*) sont dépendantes de l'humidité $(\rho C)^* = (\rho C)^*(\omega)$ et $\lambda^* = \lambda^*(\omega)$; d'où la diffusivité thermique est dépendante de l'humidité, dans ce deuxième cas on a à résoudre un système d'équations couplé.

III3-2-1 Discrétisation de l'équation de la chaleur dans le cas où le système est découplé :

La diffusivité thermique est constante .

D'où :

$$d^* = d_1^* = d_2^* = d_3^* = d_4^* \tag{III-3-30}$$

Donc le système d'équations (III-3-1) se réduit à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_d \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} = d \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \end{cases} \tag{III-3-31}$$

- L'hypothèse influence que sur l'équation de la chaleur.

En développant l'équation (III-3-29), en tenant compte de l'hypothèse citée ci-dessus,

on obtient :

$$T_i^{j+1} - T_i^j = d^* \frac{\gamma}{2} (T_{i-1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i+1}^{j+1} + T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j) \tag{III-3-32}$$

Après réarrangement, l'équation (III-2-32) s'écrit :

$$-d^* \frac{\gamma}{2} T_{i-1}^{j+1} + (1 + \gamma d^*) T_i^{j+1} - d^* \frac{\gamma}{2} T_{i+1}^{j+1} = d^* \frac{\gamma}{2} T_{i-1}^j + (1 - \gamma d^*) T_i^j + d^* \frac{\gamma}{2} T_{i+1}^j \tag{III-3-33}$$

i=2,n-1

Soit sous forme matricielle :

$$[A] \{T^{j+1}\} = [B] \{T^j\} \tag{III-3-34}$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{2}d^* & (1+\gamma d^*) & -\frac{\gamma}{2}d^* & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2}d^* & (1+\gamma d^*) & -\frac{\gamma}{2}d^* & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -\frac{\gamma}{2}d^* & (1+\gamma d^*) & -\frac{\gamma}{2}d^* & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\frac{\gamma}{2}d^* & (1+\gamma d^*) & -\frac{\gamma}{2}d^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^{j+1} \\ T_2^{j+1} \\ T_3^{j+1} \\ \dots \\ T_{n-2}^{j+1} \\ T_{n-1}^{j+1} \\ T_n^{j+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2}d^* & (1-\gamma d^*) & \frac{\gamma}{2}d^* & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{2}d^* & (1-\gamma d^*) & \frac{\gamma}{2}d^* & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\gamma}{2}d^* & (1-\gamma d^*) & \frac{\gamma}{2}d^* & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{\gamma}{2}d^* & (1-\gamma d^*) & \frac{\gamma}{2}d^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^j \\ T_2^j \\ T_3^j \\ \dots \\ T_{n-2}^j \\ T_{n-1}^j \\ T_n^j \end{Bmatrix} \tag{III-3-35}$$

Posons que :

$$\left. \begin{aligned} a_i &= -\frac{\gamma}{2} d^* \\ b_i &= (1 + \gamma d^*) \\ c_i &= -\frac{\gamma}{2} d^* \end{aligned} \right\} i = 1, n-2 \quad \text{(III-3-36)}$$

et :

$$\{r \ t_i\} = [B] \{T^j\} \quad \text{(III-3-37)}$$

avec :

$$r \ t_i = \frac{\gamma}{2} d^* (T_i^j + T_{i+2}^j) + (1 - \gamma d^*) T_{i+1}^j \quad \text{(III-3-38)}$$

$i = 1, n-2$

d'où l'équation algébrique (III-3-35) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & & & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^{j+1} \\ T_2^{j+1} \\ T_3^{j+1} \\ \cdot \\ T_{n-2}^{j+1} \\ T_{n-1}^{j+1} \\ T_n^{j+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r t_1 \\ r t_2 \\ r t_3 \\ \cdot \\ r t_{n-4} \\ r t_{n-3} \\ r t_{n-2} \end{Bmatrix} \quad \text{(III-3-39)}$$

Les noeuds 1 et n sont attribués aux conditions au limite avec :

$$\begin{aligned} T(1, j) &= T_1 \\ T(n, j) &= T_n \end{aligned} \quad j = 2, 3, \dots \quad (\text{pour tout } t > 0) \quad \text{(III-3-40)}$$

Le changement de la première et de la dernière ligne du vecteur du membre droite, permet d'avoir une matrice tridiagonale et par conséquent plus maniable, et ceci en posant :

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} \\ 0 & & & & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2^{j+1} \\ T_3^{j+1} \\ T_4^{j+1} \\ \cdot \\ T_{n-3}^{j+1} \\ T_{n-2}^{j+1} \\ T_{n-1}^{j+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} rt_1 \\ rt_2 \\ rt_3 \\ \cdot \\ rt_{n-4} \\ rt_{n-3} \\ rt_{n-2} \end{Bmatrix} \tag{III-3-41}$$

avec :

$$\begin{cases} rt_1 = rt_1 - a_1 T_1^{j+1} \\ rt_{n-2} = rt_{n-2} - c_{n-2} T_n^{j+1} \end{cases} \tag{III-3-42}$$

III-3-2-2- Résolution du système découplé résultant :

L'hypothèse qu'on a supposé, à savoir la déffusivité thermique est constante, nous a permet d'avoir un système de deux équations découplées, leur discrétisation nous a conduit à un système de deux équations algébriques découplées, dont les matrices sont définies positives et à diagonales dominantes. Les différentes étapes de résolution de ce système sont résumés dans l'organigramme 1 (Annexe I).

3-2-3- Discrétisation de l'équation de la chaleur dans ~~les cas où~~ le cas où le système est couplé:

Dans ce cas on considère la chaleur volumique équivalente $(\rho C)^*$ et la conductivité thermique apparente du matériaux (λ^*) dépendent de la teneur en eau pondérale ω , ce qui nous conduit à résoudre le système (III-3-1) de deux équations couplées tel qu'il est proposé dans le chapitre II.

Après réarrangement l'équations (III-3-25), s'écrit:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\gamma}{2} \frac{(\lambda^*)_{i-1/2}^{j+1}}{((\rho c)^*)_i^{j+1/2}} T_{i-1}^{j+1} + \left(1 + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{(\lambda^*)_{i-1/2}^{j+1} + (\lambda^*)_{i+1/2}^{j+1}}{((\rho c)^*)_i^{j+1/2}} \right) \right) T_i^{j+1} + \frac{\gamma}{2} \frac{(\lambda^*)_{i+1/2}^{j+1}}{((\rho c)^*)_i^{j+1/2}} T_{i+1}^{j+1} = \\
 & \frac{\gamma}{2} \frac{(\lambda^*)_{i-1/2}^j}{((\rho c)^*)_i^{j+1/2}} T_{i-1}^j + \left(1 - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{(\lambda^*)_{i-1/2}^j + (\lambda^*)_{i+1/2}^j}{((\rho c)^*)_i^{j+1/2}} \right) \right) T_i^j + \frac{\gamma}{2} \frac{(\lambda^*)_{i+1/2}^j}{((\rho c)^*)_i^{j+1/2}} T_{i+1}^j \\
 & \qquad \qquad \qquad i = 2, n-1
 \end{aligned}
 \tag{III-3-43}$$

Soit sous la forme matricielle :

$$[A]\{T^{j+1}\} = [D]\{T^j\}
 \tag{III-3-44}$$

Où :

$$[A]\{T^{j+1}\} = \{rt\}
 \tag{III-3-45}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 rt_i &= \frac{\gamma}{2} \frac{(\lambda^*)_{k-1/2}^j}{((\rho c)^*)_k^{j+1/2}} T_i^j \\
 &+ 1 - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{(\lambda^*)_{k-1/2}^j + (\lambda^*)_{k+1/2}^j}{((\rho c)^*)_k^{j+1/2}} \right) T_{i+1}^j \\
 &+ \frac{\gamma}{2} \frac{(\lambda^*)_{k+1/2}^j}{((\rho c)^*)_k^{j+1/2}} T_{i+2}^j
 \end{aligned}$$

pour tout $i = 1, n-2$ et $k = i+1$

En posant de même que précédemment :

$$\begin{cases} a_i = -\frac{\gamma}{2} \frac{(\lambda^*)_{k-1/2}^{j+1}}{((\rho c)^*)_k^{j+1/2}} \\ b_i = 1 + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{(\lambda^*)_{k-1/2}^{j+1} + (\lambda^*)_{k+1/2}^{j+1}}{((\rho c)^*)_k^{j+1/2}} \right) \\ c_i = -\frac{\gamma}{2} \frac{(\lambda^*)_{k-1/2}^{j+1}}{((\rho c)^*)_k^{j+1/2}} \end{cases} \quad (\text{III-3-47})$$

pour tout $i = 1, n-2$ et $k = i+1$

Nous pouvons alors écrire l'équation (III-34-3) plus simplement :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^{j+1} \\ T_2^{j+1} \\ T_3^{j+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{n-2}^{j+1} \\ T_{n-1}^{j+1} \\ T_n^{j+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} rt_1 \\ rt_2 \\ rt_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ rt_{n-3} \\ rt_{n-2} \end{Bmatrix} \quad (\text{III-3-48})$$

Rappelons que ,les nœuds 1 et n sont attribués aux frontières du domaine et sont :

$$\begin{cases} T(1, j) = T_1 \\ T(n, j) = T_n \end{cases} \quad j = 2, 3, \dots \quad (\text{III-3-49})$$

Nous aboutissons donc au système tridiagonal suivant :

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2^{j+1} \\ T_3^{j+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{n-2}^{j+1} \\ T_{n-1}^{j+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} rt_1 \\ rt_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ rt_{n-3} \\ rt_{n-2} \end{Bmatrix} \quad (\text{III-3-50})$$

Avec ,toutefois ,les changements suivants au niveau de la première et de la dernière ligne du vecteur représentant $\{rt\}$.

$$\begin{aligned}rt_1 &= rt_1 - a_1 T_1^{j+1} \\rt_{n-2} &= rt_{n-2} - c_{n-2} T_n^{j+1}.\end{aligned}\tag{III-3-51}$$

III-3-2-4 Résolution du système couplé résultant :

L'organigramme2 (voir *Annexe D*), résume les étapes de résolution des deux équations algébriques couplées, déduites de la discrétisation du système de deux équations à dérivées partielles du modèle mathématique de *PHILIP+DE VRIES* généré ,dont les matrices sont tridiagonales, définies positives et diagonales dominantes.

CHAPITRE IV

RESULTATS ET DISCUSSIONS

IV-1 INTERPRETATION DES RESULTATS

- IV-1-1 Profil hydrique pour (λ^*) et $(\rho C)^*$ constant
- IV-1-2 Profil thermique pour (λ^*) et $(\rho C)^*$ constant
- IV-1-3 Influence de (λ^*) et $(\rho C)^*$ sur les profils hydriques et thermique

IV-2 PRESENTATION DES RESULTATS

- IV-2-1 Profil hydrique pour (λ^*) et $(\rho C)^*$ constant
- IV-2-2 Comparaison des méthodes d'élément finis et des différences finies (profil hydrique)
- IV-2-3 Profil thermique pour (λ^*) et $(\rho C)^*$ constant
- IV-2-4 Comparaison des méthodes d'élément finis et des différences finies (profil thermique)
- IV-2-5 Profil hydrique pour (λ^*) variable et $(\rho C)^*$ constant
- IV-2-6 Profil thermique pour (λ^*) variable et $(\rho C)^*$ constant
- IV-2-7 Profil hydrique pour (λ^*) constant et $(\rho C)^*$ variable
- IV-2-8 Profil hydrique pour (λ^*) et $(\rho C)^*$ variable
- IV-2-9 Profil thermique pour (λ^*) et $(\rho C)^*$ variable

IV-1 INTERPRETATION DES RESULTATS :

IV-1-1 Profil hydrique pour $((\lambda^*)$ et $(\rho C)^*)$ constant :

Les profils hydriques présentés sur les figures (IV-2-1) (a) et (b), (IV-2-2) (a) et (b), (IV-2-3), montrent les distributions d'humidité à différents temps (4 jours, 9 jours, 16 jours, 25 jours, 30 jours, 44 jours, 50 jours, 62 jours, 90 jours, 135 jours) obtenus par calcul où l'on peut noter la présence de deux zones bien distinctes :

- une zone sèche, comprise entre la face exposée ouverte , et l'interface de condensation , et
- une zone humide, saturée en liquide condensée, comprise entre l'interface de condensation et la surface sous refroidie en $x = L$

Dans la zone sèche, l'évaluation de la teneur en eau suit la loi d'adsorption du matériau, tandis que dans la zone humide, don l'interface progresse au cours du temps sous l'influence conjointe des effets thermiques et hydriques, la condensation se poursuit.

Les résultats de comparaison entre la méthode des différences finies et ceux des éléments finis pour les profils d'humidité sont portés sur les figures (IV-2-4) (a) et (b) pour 9 jours et 16 jours, (IV-2-4) (a) et (b) pour 30 jours et 90 jours et (IV-2-5) (a) et (b) pour 135 jours et 180 jours

d'une manière générale les résultats montrent le caractère satisfaisant de la méthode des différences finies , malgré ce léger décalage des résultats, par rapport à ceux des éléments finis qui ont été déjà bien comparés avec ceux expérimentaux [19], ce qui confirme la validité du modèle de *PHILP DE VRIES* pour décrire les phénomènes observés expérimentalement .

Le décalage constaté peut provenir de (λ^*) et $(\rho C)^*$, pris constants (indépendants de l'humidité).

IV-1-2 Profil thermique pour $((\lambda^*)$ et $(\rho C)^*)$ constant :

Les profils thermiques présenté sur la figure (IV-2-6) montre la distribution de température à différents temps obtenus par la méthode des différences finies, où l'on peut noter la présence de profil thermique linéaire ce qui est tout à fait normal car l'équation de la chaleur est discrétisée indépendamment de celle hydrique $((\lambda^*)$ et $(\rho C)^*)$ constant)

Les températures calculées par les deux méthodes de calcul fig.(IV-2-8), montrent une parfaite équivalence des résultats obtenus par les deux méthodes,

IV-1-3 Influence de (λ^) et $(\rho C)^*$ sur les Profil hydriques et thermiques :*

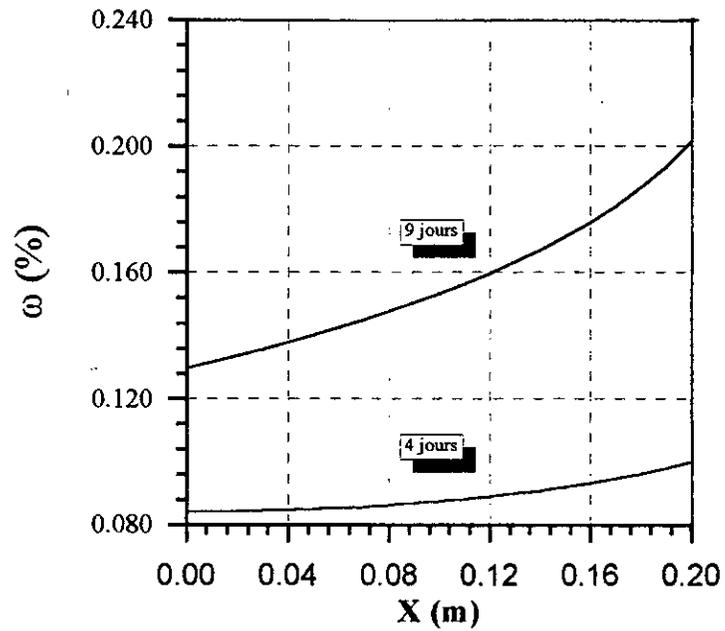
Les figures (IV-2-9) à (IV-2-18), montrent les profils hydriques et thermiques obtenus par la méthode des différences finies appliqué au système d'équation couplées du au modèle de PHILP DE VRIES généré, mais seulement les profils obtenus, que ce soit pour (λ^*) constant et $(\rho C)^*$ variable, où pour (λ^*) variable et $(\rho C)^*$ constant, où pour (λ^*) et $(\rho C)^*$ variables, sont tout à fait loin d'être interprétés physiquement.

D'où on peut dire que la méthode des différences finies n'est adéquate pour la résolution des systèmes fortement couplés.

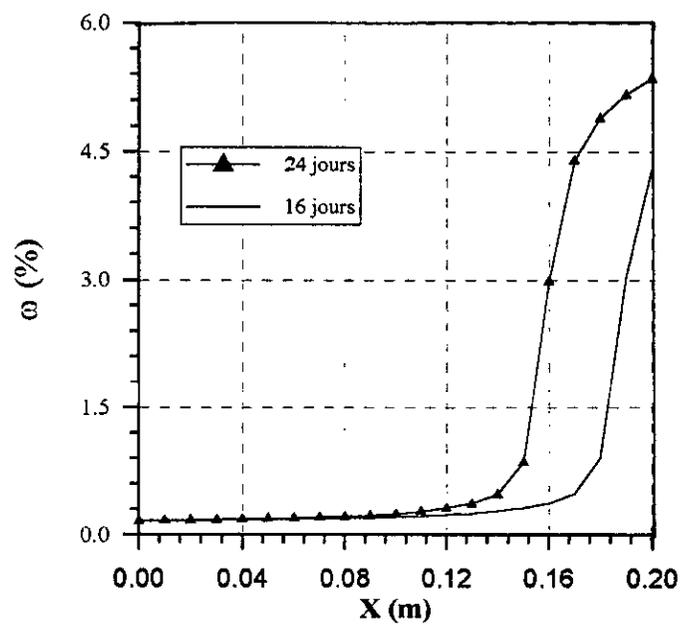
Malgré que les coefficients a_m et a_d intervenant dans l'équation hydrique qui dépendent de la température, on a eu des résultats plus au moins satisfaisant dans le cas du système découplé, mais seulement dans ce cas ces coefficients dépendent beaucoup plus de l'humidité, mais légèrement de la température, donc dans le premier cas (système d'équations découplées), on a résolve un système partiellement découplé mais surtout faiblement couplé, par contre dans le deuxième cas on a résolve un système d'équations complètement et fortement couplées.

IV-2-PRESENTATION DES RESULTATS :

IV-2-1 Profil hydrique pour (λ) et (ρC) constant



(a)



(b)

Fig. (IV-2 -1) Profils hydriques

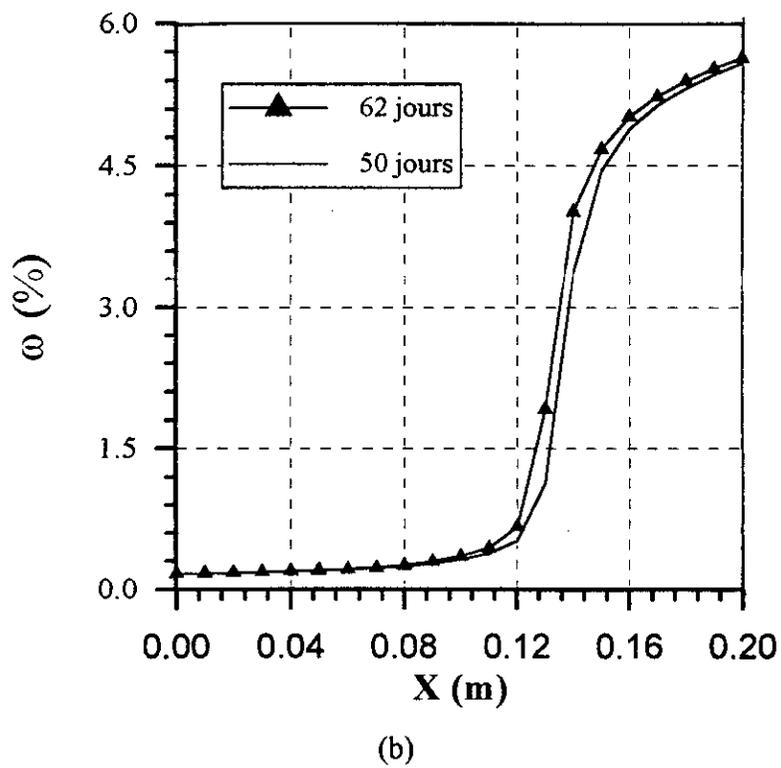
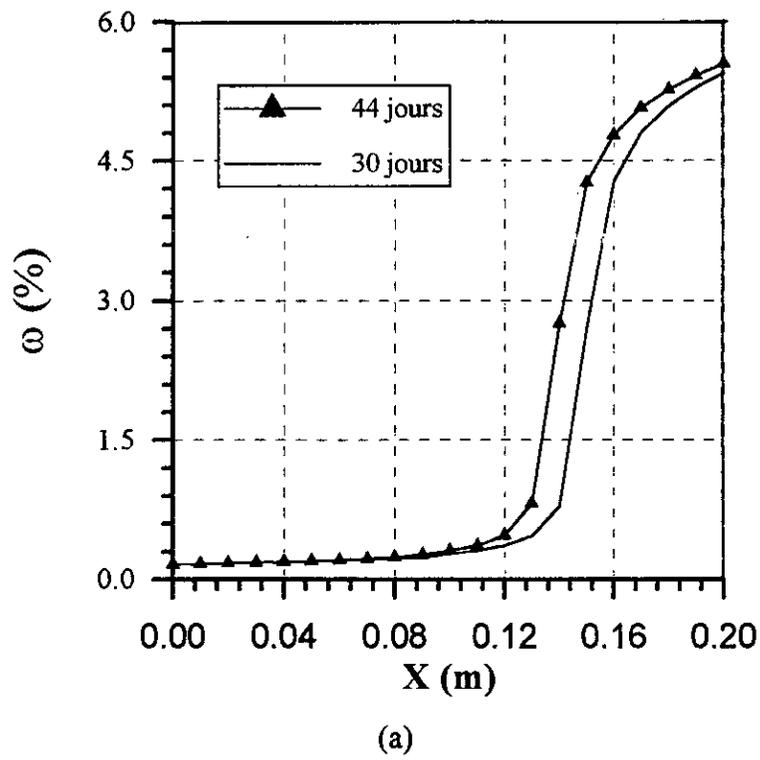


Fig. (IV-2 -2) Profils hydriques

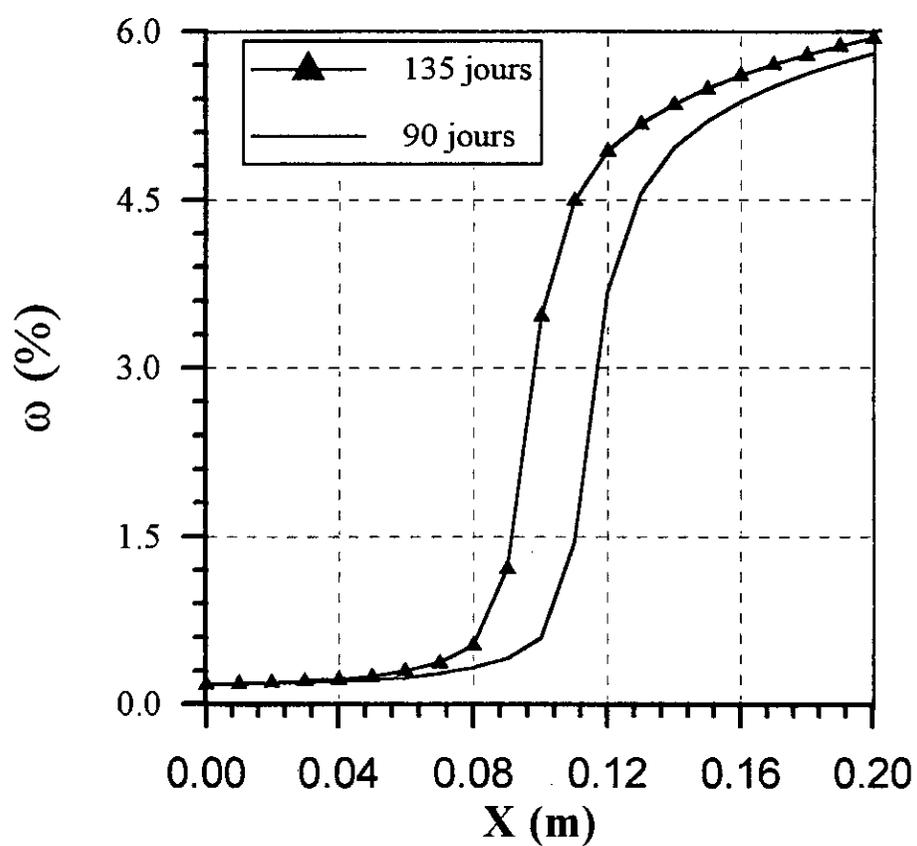


Fig. (IV-2 -3) Profils hydriques

IV-2-2 Comparaison des méthodes d'éléments finis et des différences finies (profil hydrique):

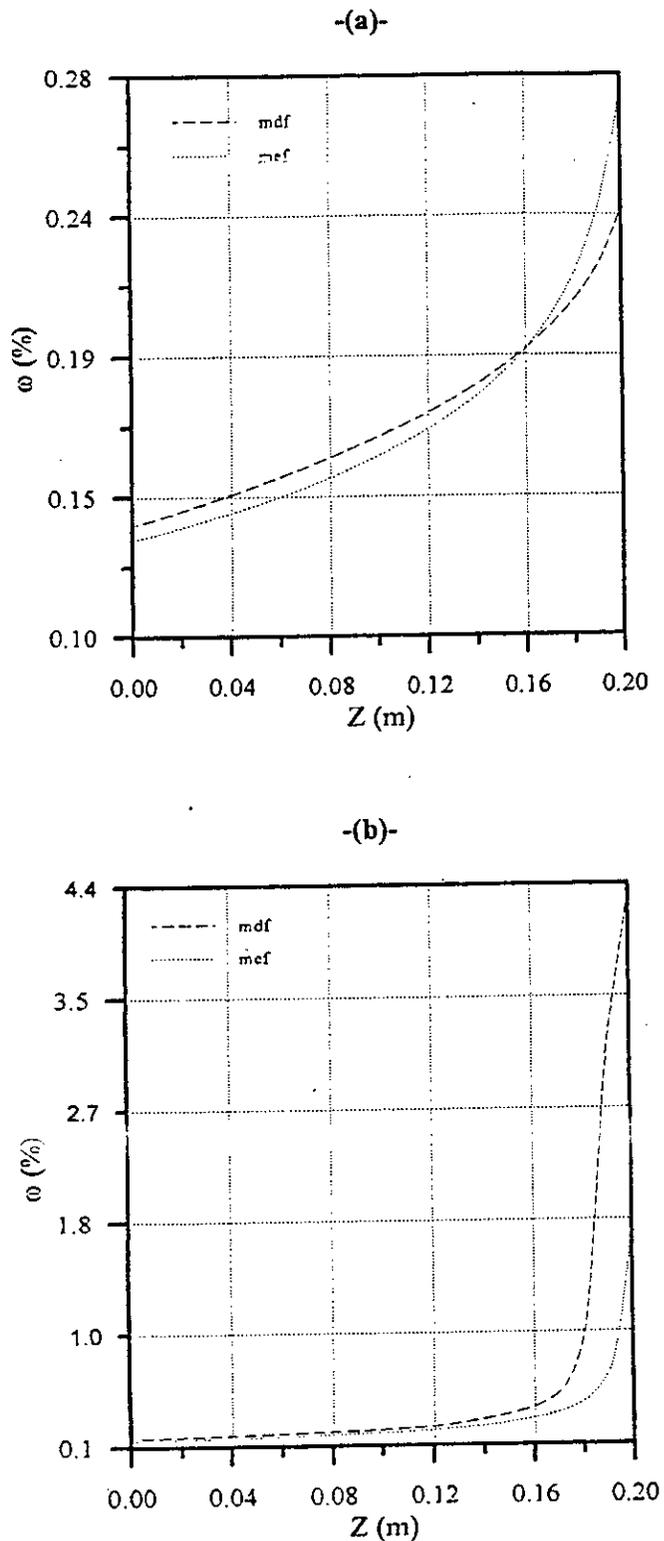


Fig.(IV-2-4) Profils hydriques[1]
 (a) pour 9 jours et (b) pour 16 jours

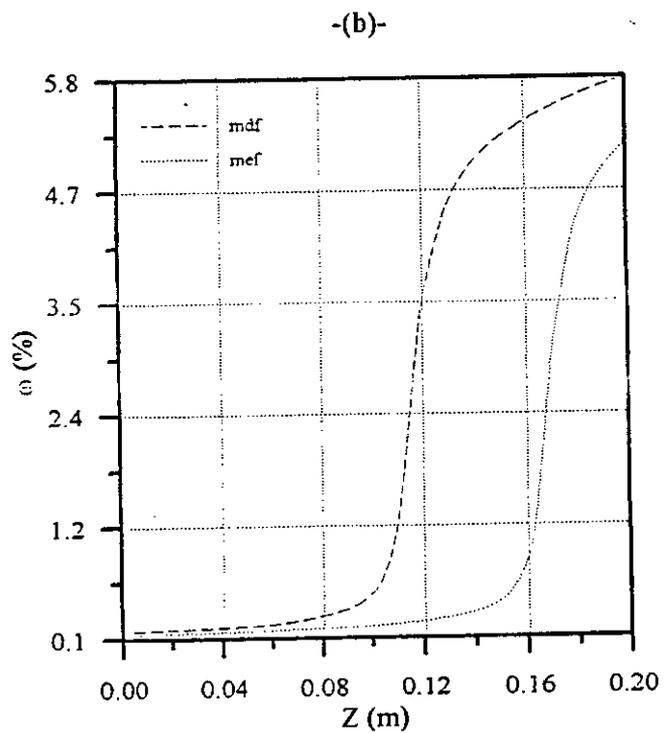
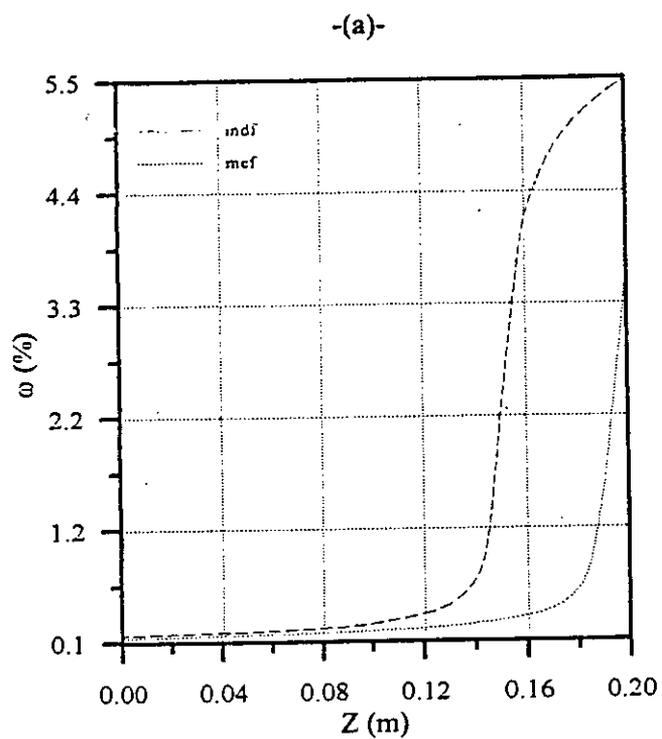


Fig.(IV-2-5) Profils hydriques [1].
 (a) pour 30 jours et (b) pour 90 jours

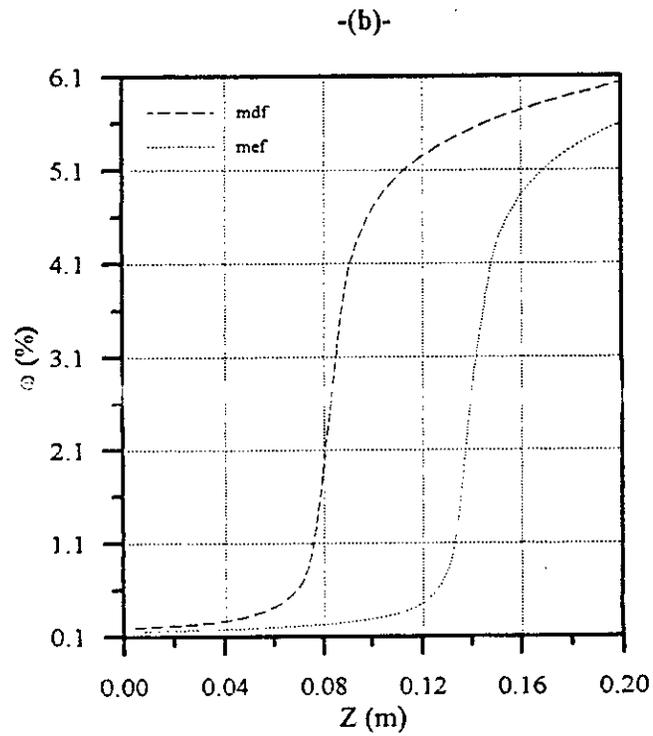
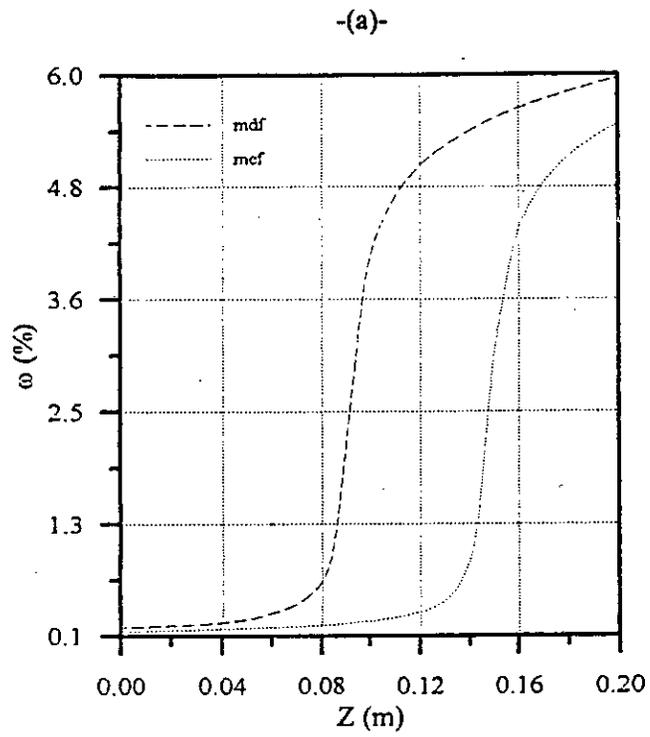


Fig.(IV-2-6) Profils hydriques [1]
 (i) pour 135 jours et (b) pour 180 jours

IV-2-3 Profil thermique pour (λ^*) et $(\rho C)^*$ constant

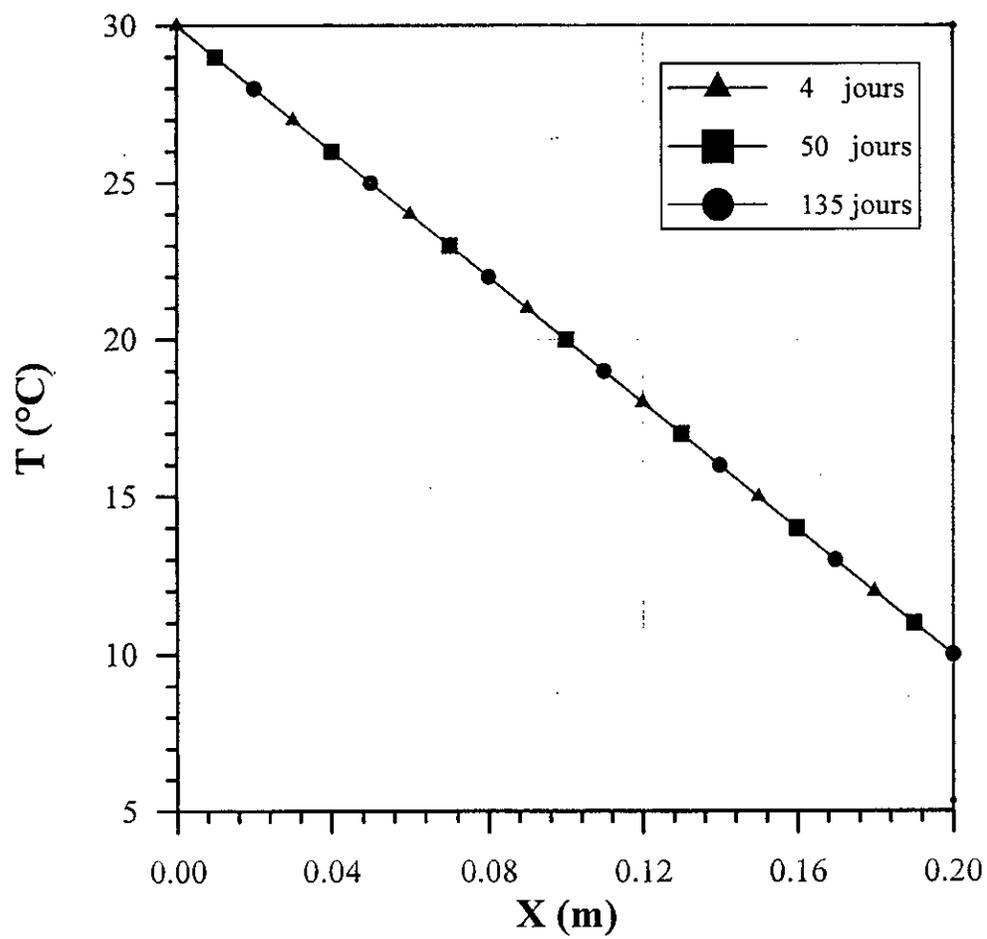
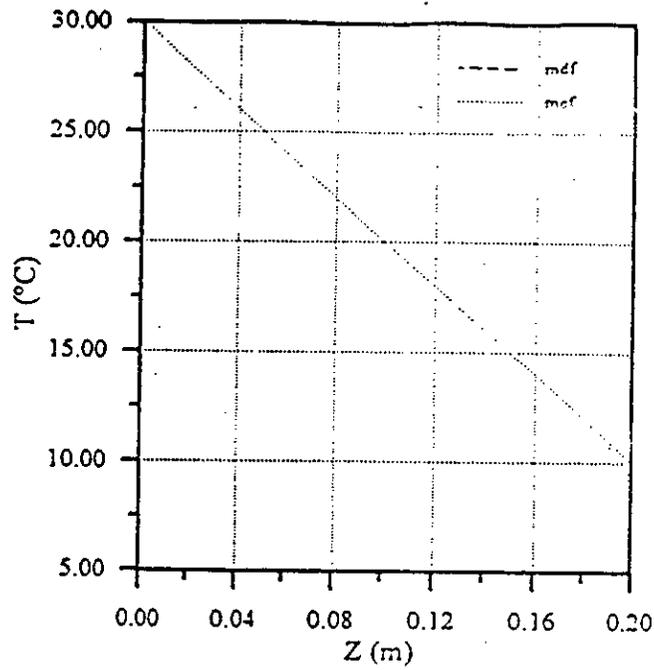


Fig. (IV-2-7) Profil thermique

IV-2-4 Comparaison des méthodes d'éléments finis et des différences finies (profil thermique)

-(a)-



-(b)-

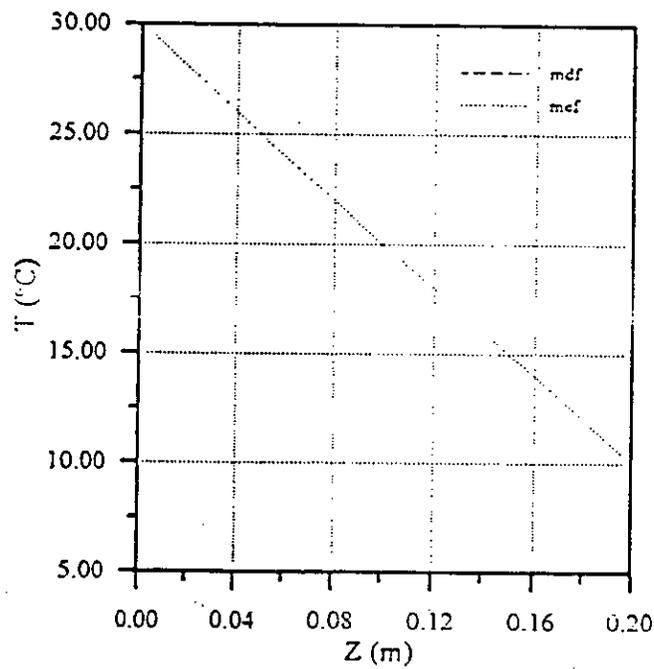
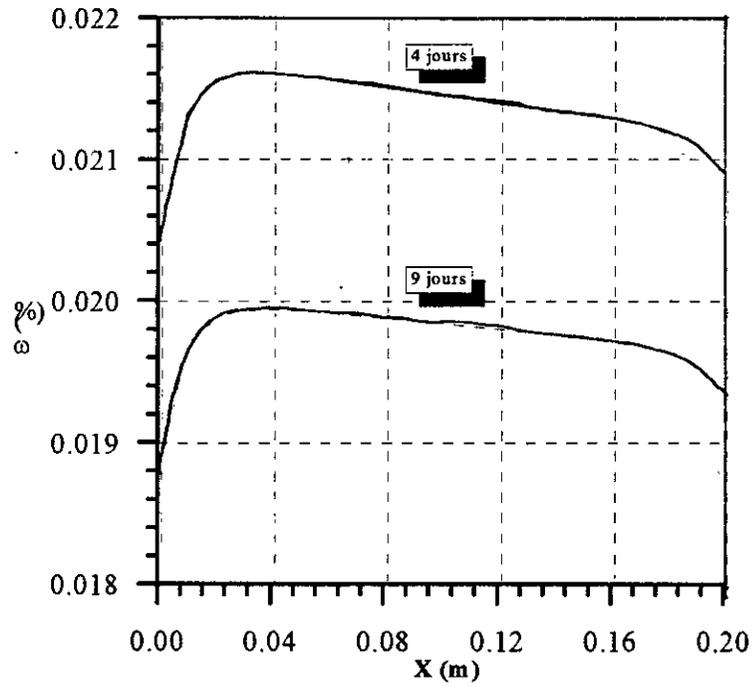


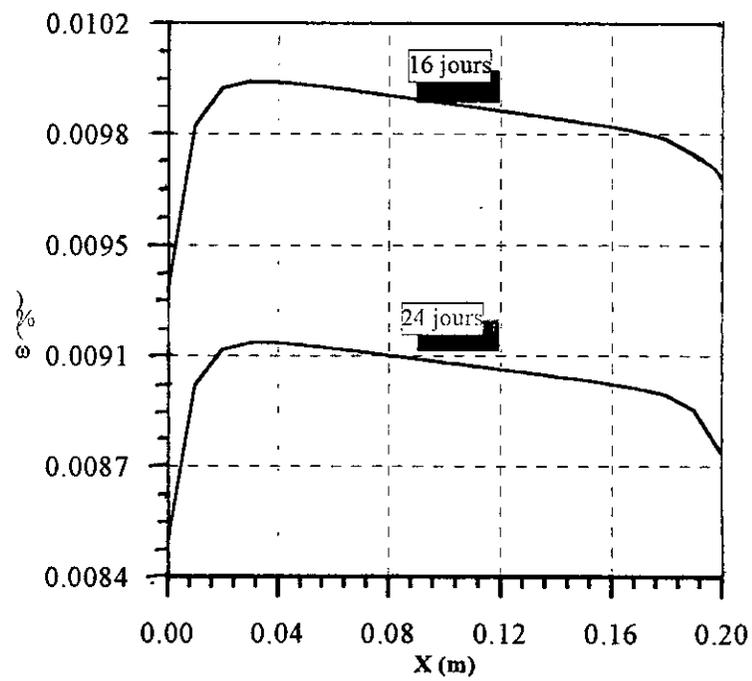
Fig.(IV-2-8) Profils thermique

(i) pour 4 jours et (b) pour 135 jours

IV-2-5 Profil hydrique pour (λ^*) variable et (ρC^*) constant

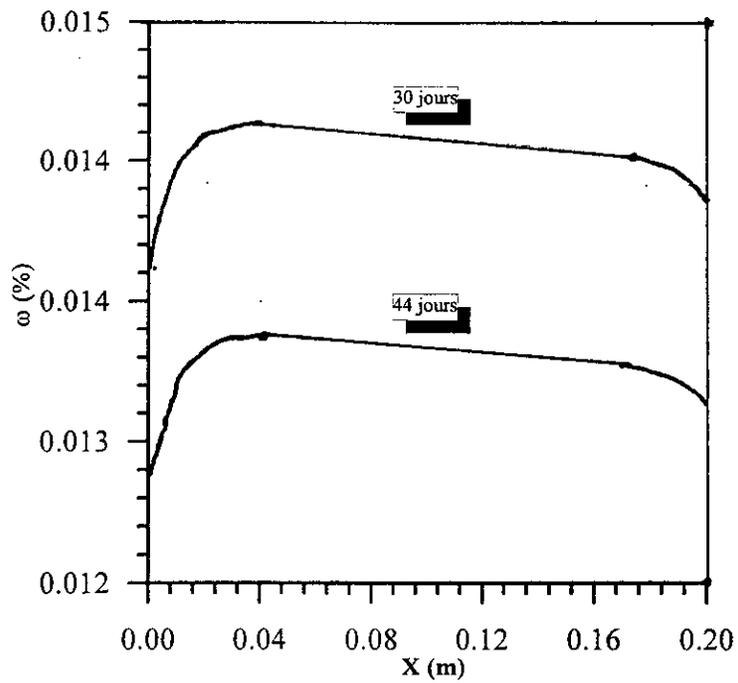


(a)

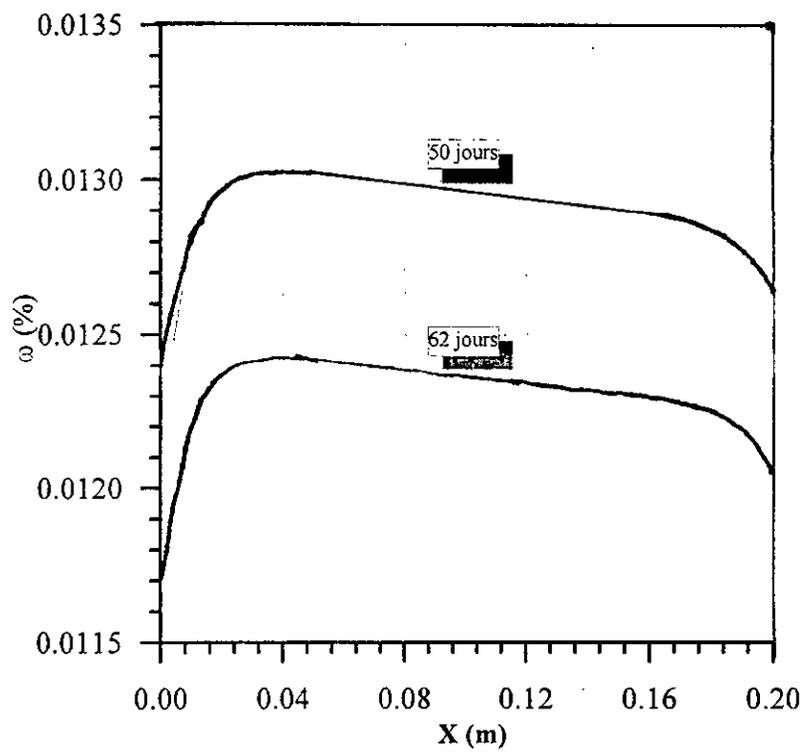


(b)

Fig. (IV-2-9) Profils hydriques



(a)



(b)

Fig (IV-2-10) Profilshydrique

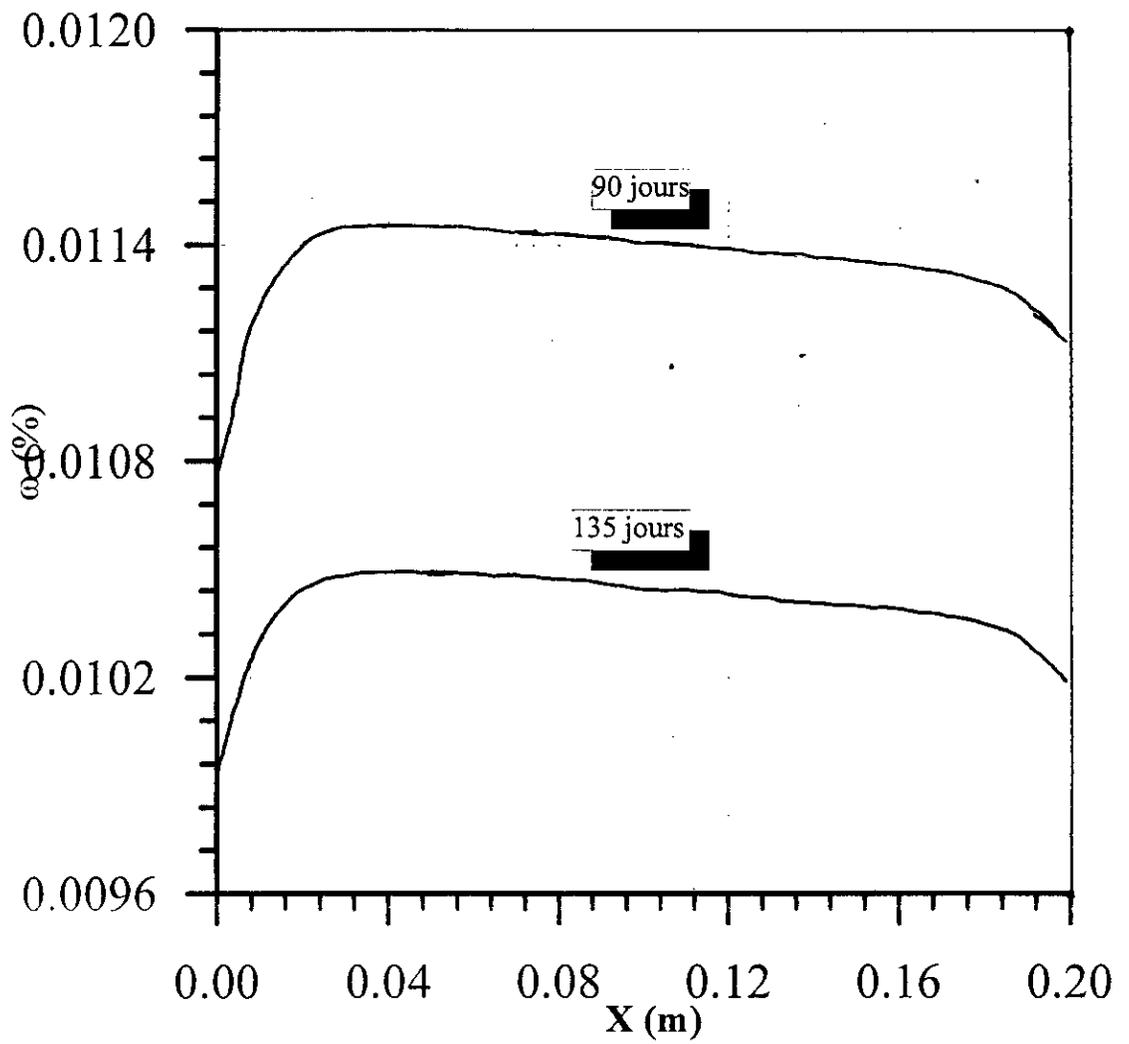


Fig. (IV-2-11) Profil hydrique

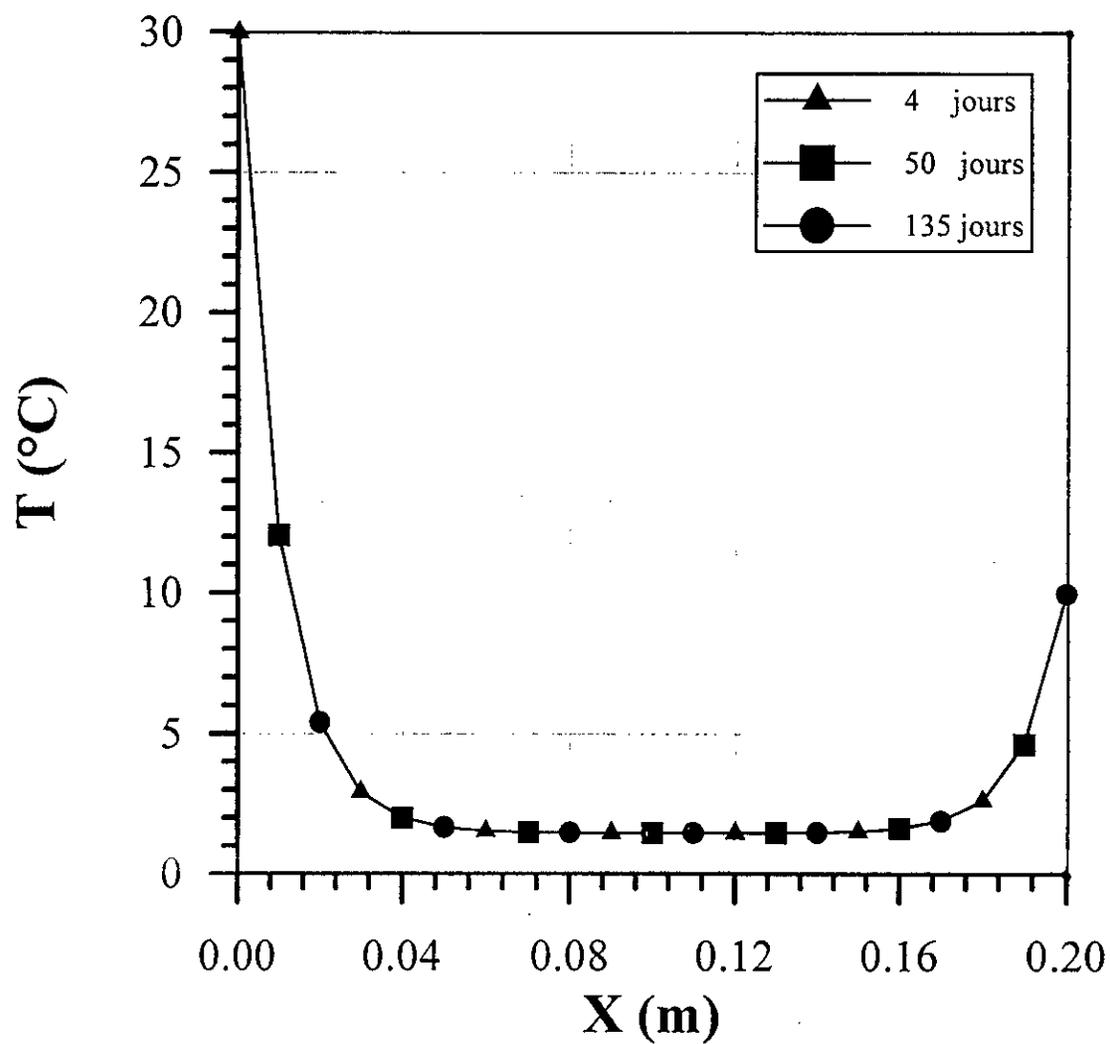
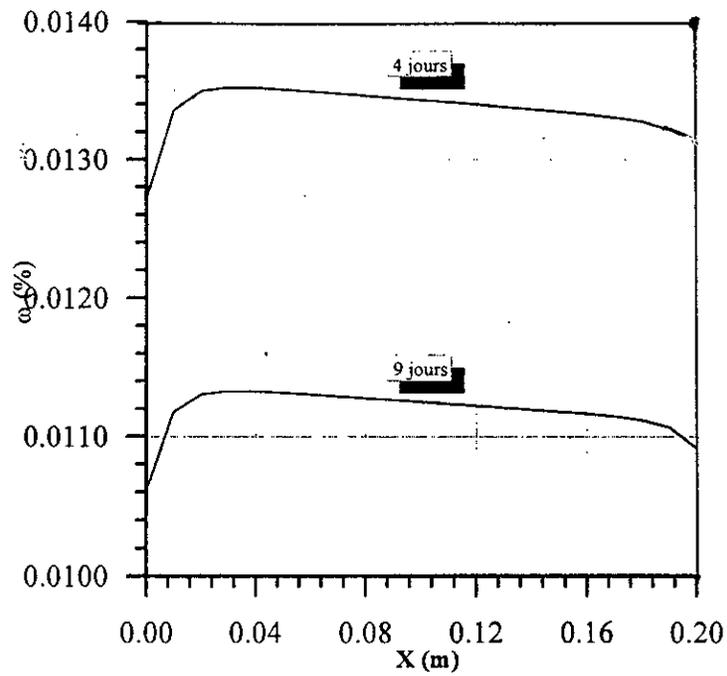
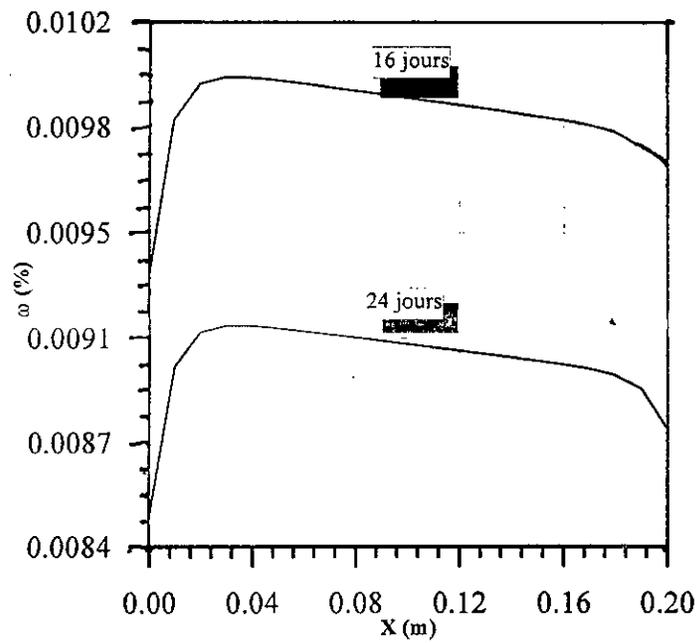
IV-2-6 Profil thermique pour (λ^*) variable et $(\rho C)^*$ constant

Fig. (IV-2-12) Profil thermique

IV-2-7 Profil hydrique pour (λ^*) constant et $(\rho C)^*$ variable :



(a)



(b)

Fig. (IV-2-13) Profil hydrique

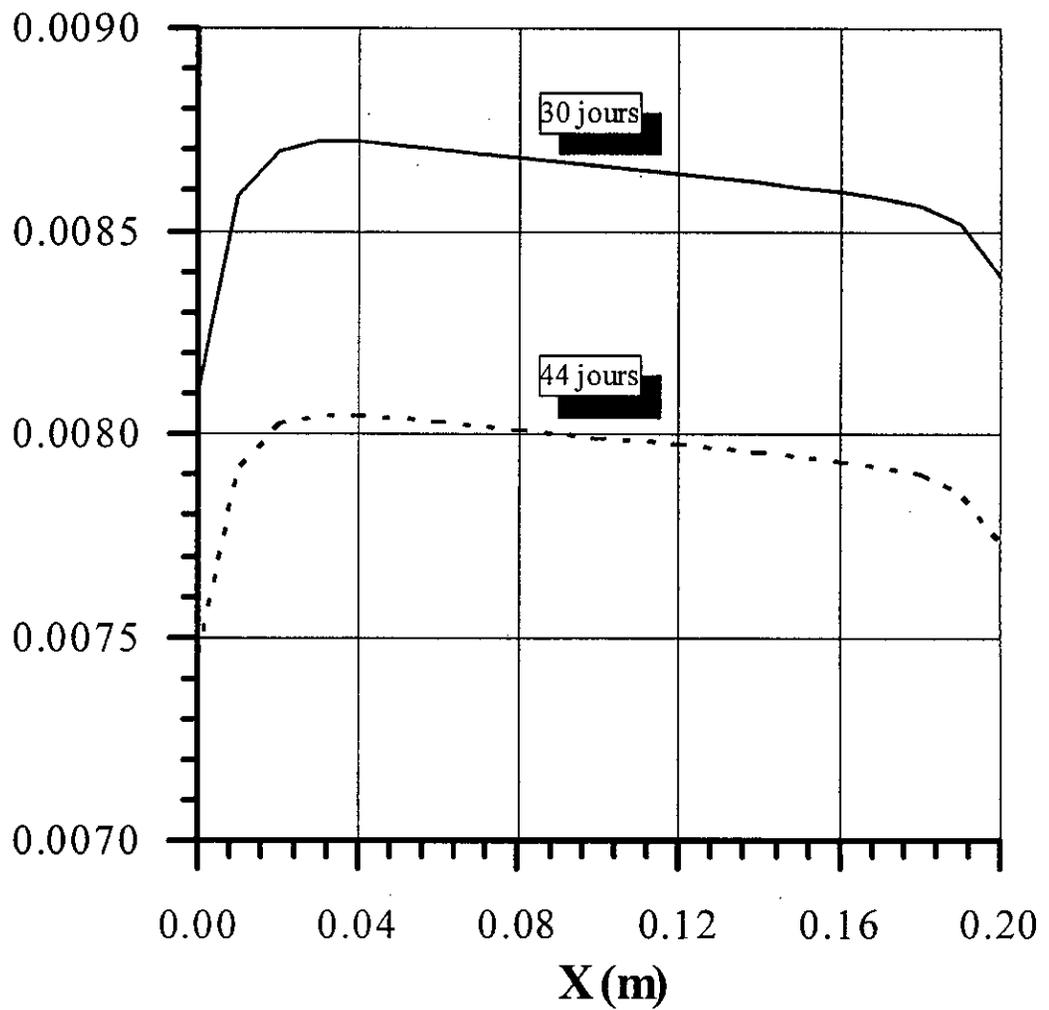
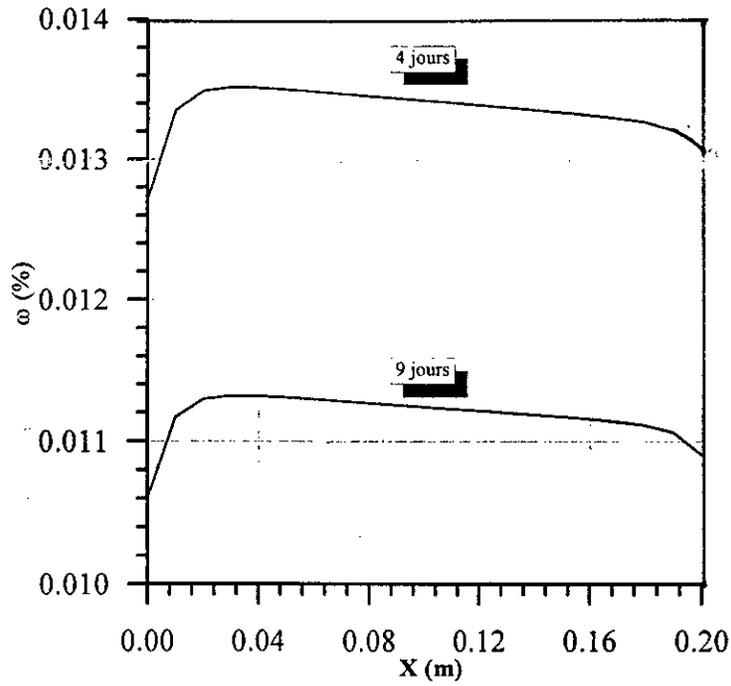
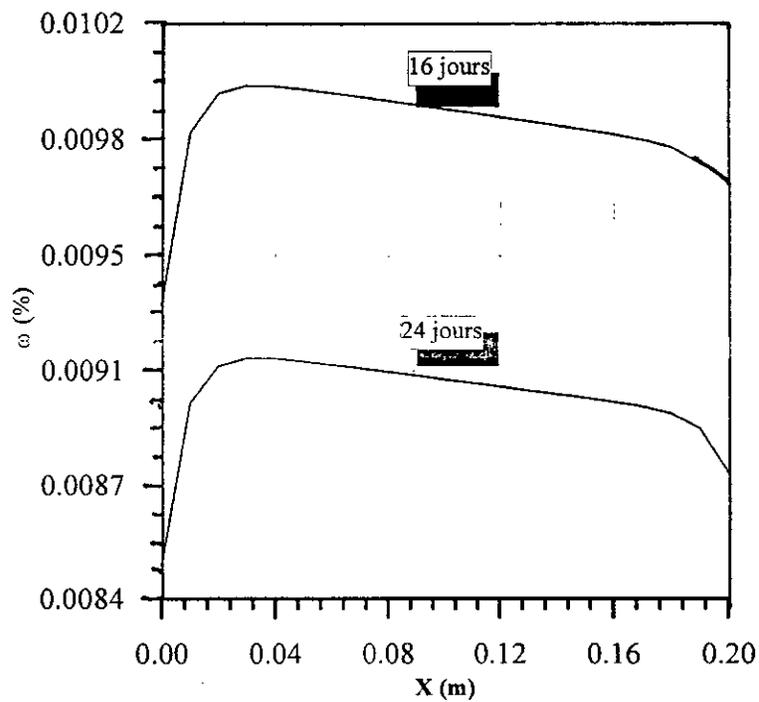


Fig.(IV-2-14) Profil hydrique

IV-2-8 Profil hydrique pour (λ^*) et $(\rho C)^*$ variables :

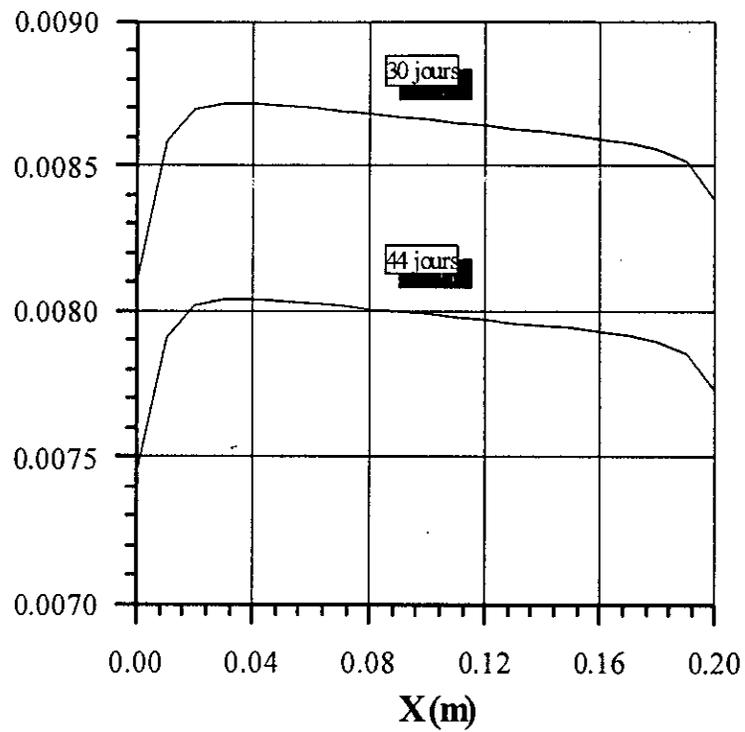


(a)

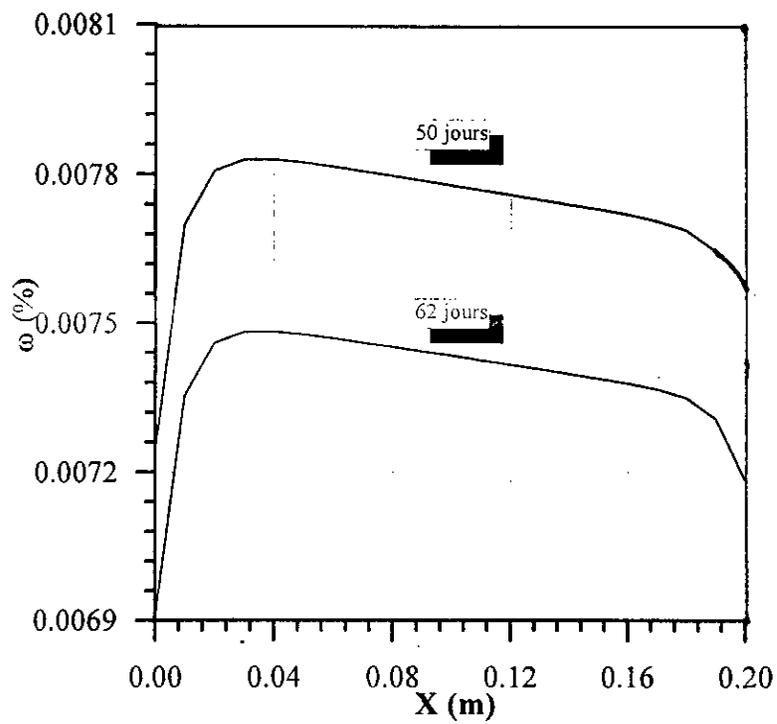


(b)

Fig. (IV-2-15) Profil hydrique



(a)



(b)

figure (IV-2-16) Profilthydrique

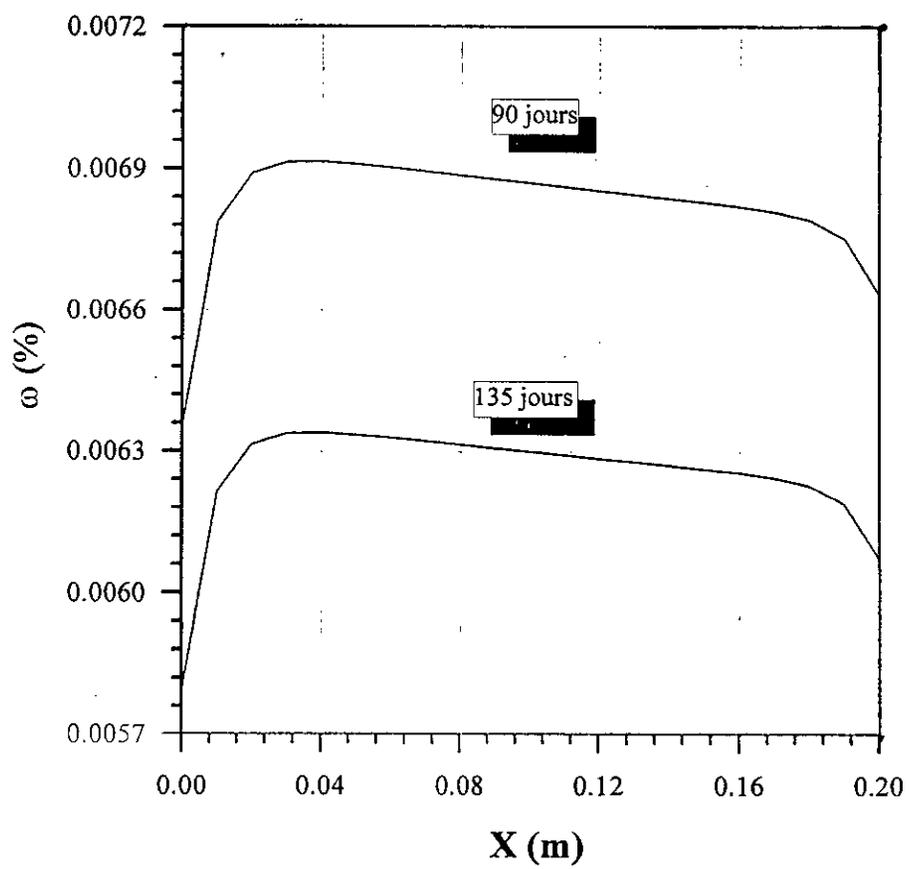


Fig (IV-2-17) Profil hydrique

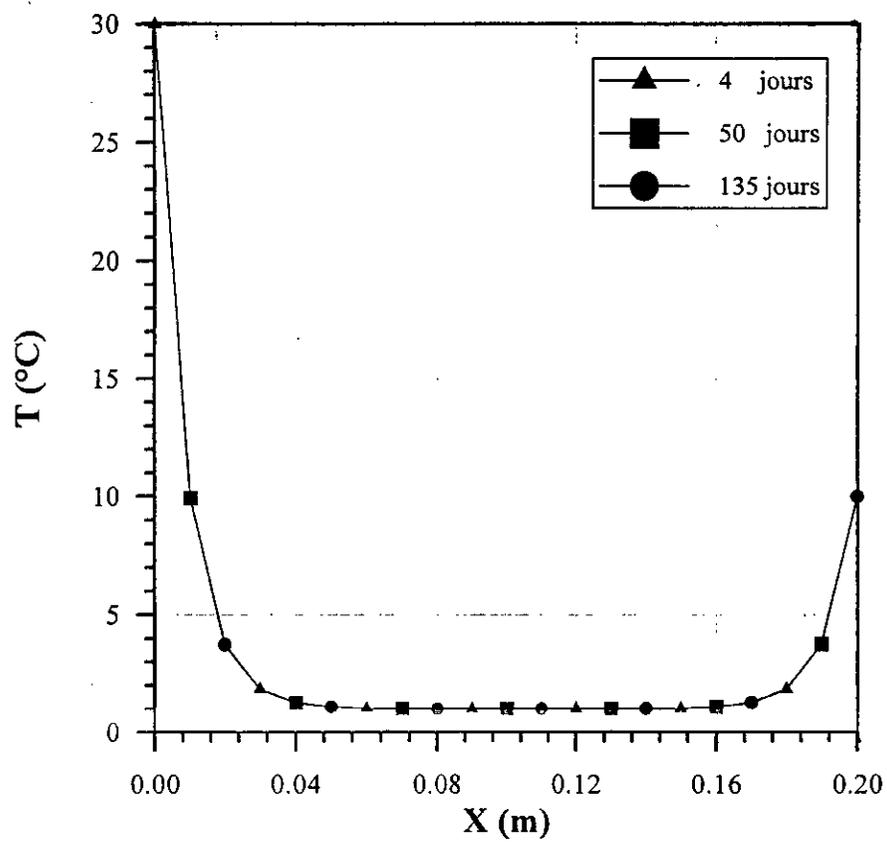
IV-2-9 Profil thermique pour (λ^*) et $(\rho C)^*$ variables :

Fig. (IV-2-18) Profil thermique

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION

Le travail présenté dans cette thèse , concerne la résolution du système d'équations couplées de transferts de chaleur et d'humidité en milieu poreux du au modèle de *PHILP et DE VRIES* généré , par la méthode des différences finies et pour cela on a d'abord découplé les deux équations pour simplifier la résolution et ceci en supposant que λ^* et $(\rho C)^*$ constant c'est à dire : la résolution de l'équation de la chaleur est indépendante de celle hydrique et les résultats obtenus sont plus au moins satisfaisant comparativement à ceux obtenus par la méthode des éléments finies , car ils présentent une même allure mais avec un léger décalage .

Et afin d'y remédier à ce problème on a pensé qu'il est nécessaire de coupler les deux équations en tenant compte de la dépendance de λ^* et $(\rho C)^*$ de l'humidité , mais lors de la simulation numérique on est arrivé à des résultats erronés (insignifiants comparativement à ceux obtenus expérimentalement) .

Ainsi on peut dire que malgré la mise en oeuvre simple de la méthode des différences finies surtout lorsque le domaine d'étude est de géométrie simple, cette méthode présente des difficultés dans les systèmes d'équations fortement couplées aussi bien du point de vu formulation que résolution numérique

Par contre, des travaux [19], ont montrés que l'utilisation de la méthode des éléments finis appliqué à ce type de système d'équations fortement couplées, donne des résultats satisfaisants (concordent avec l'expérience), ce qui nous mène à conclure que la méthode des éléments finies est plus recommandée que celle des différences finies pour la simulation numériques des de ce genre de problème

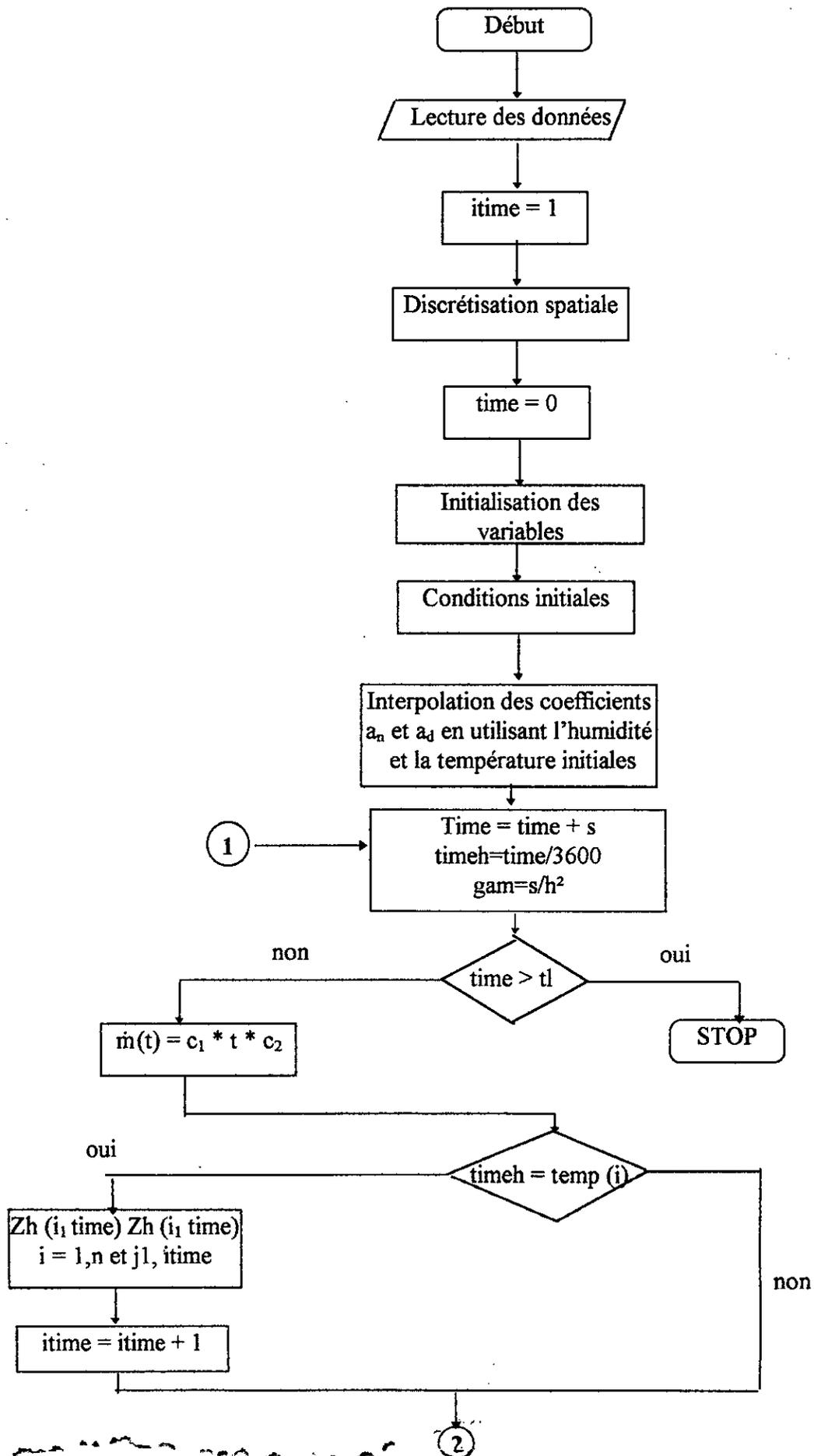
ANNEXE I

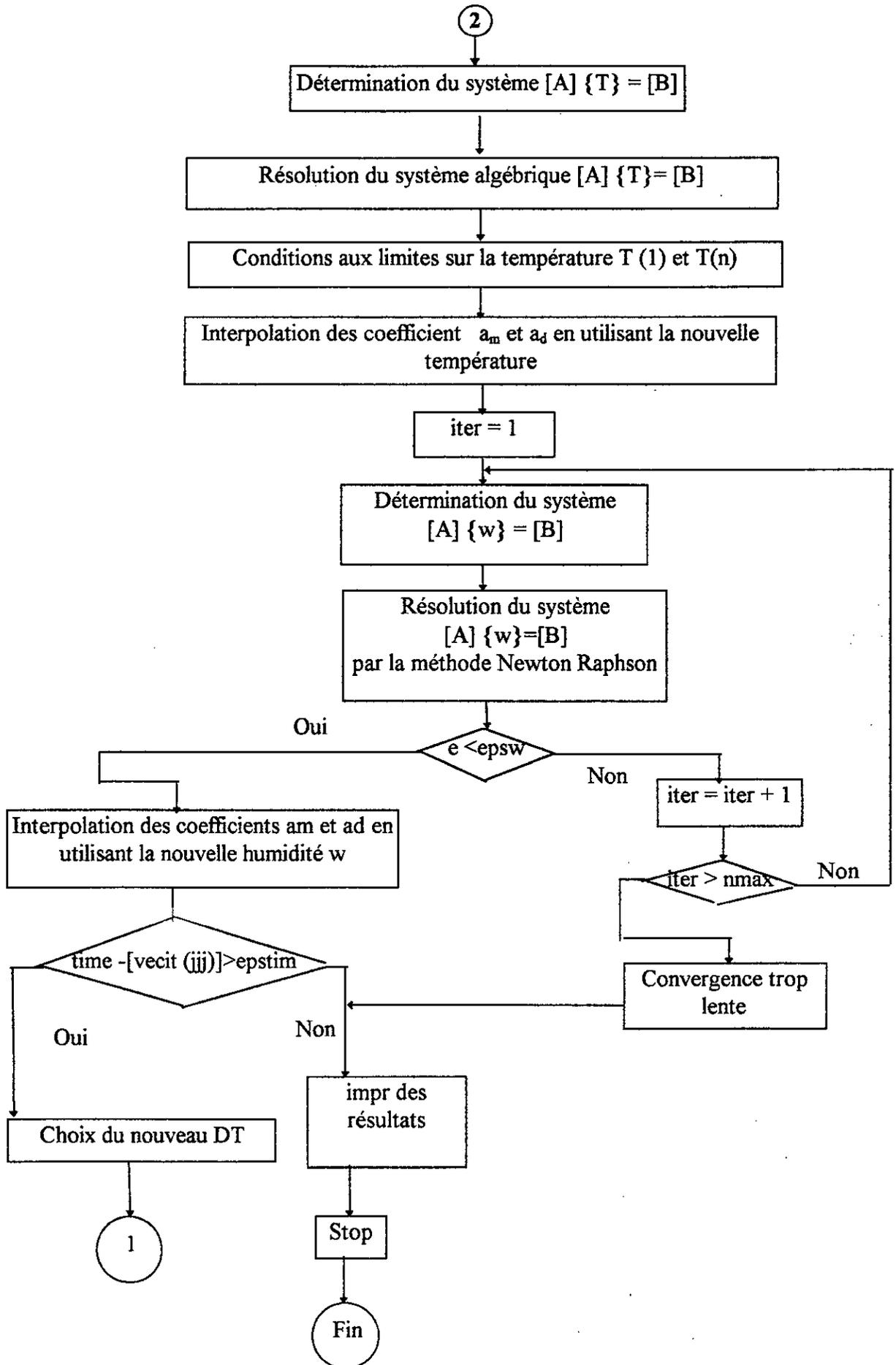
ORGANIGRAMMES

- 1- ORGANIGRAMME DE RESOLUTION DU
SYSTEME RESULTANT DECOUPLE

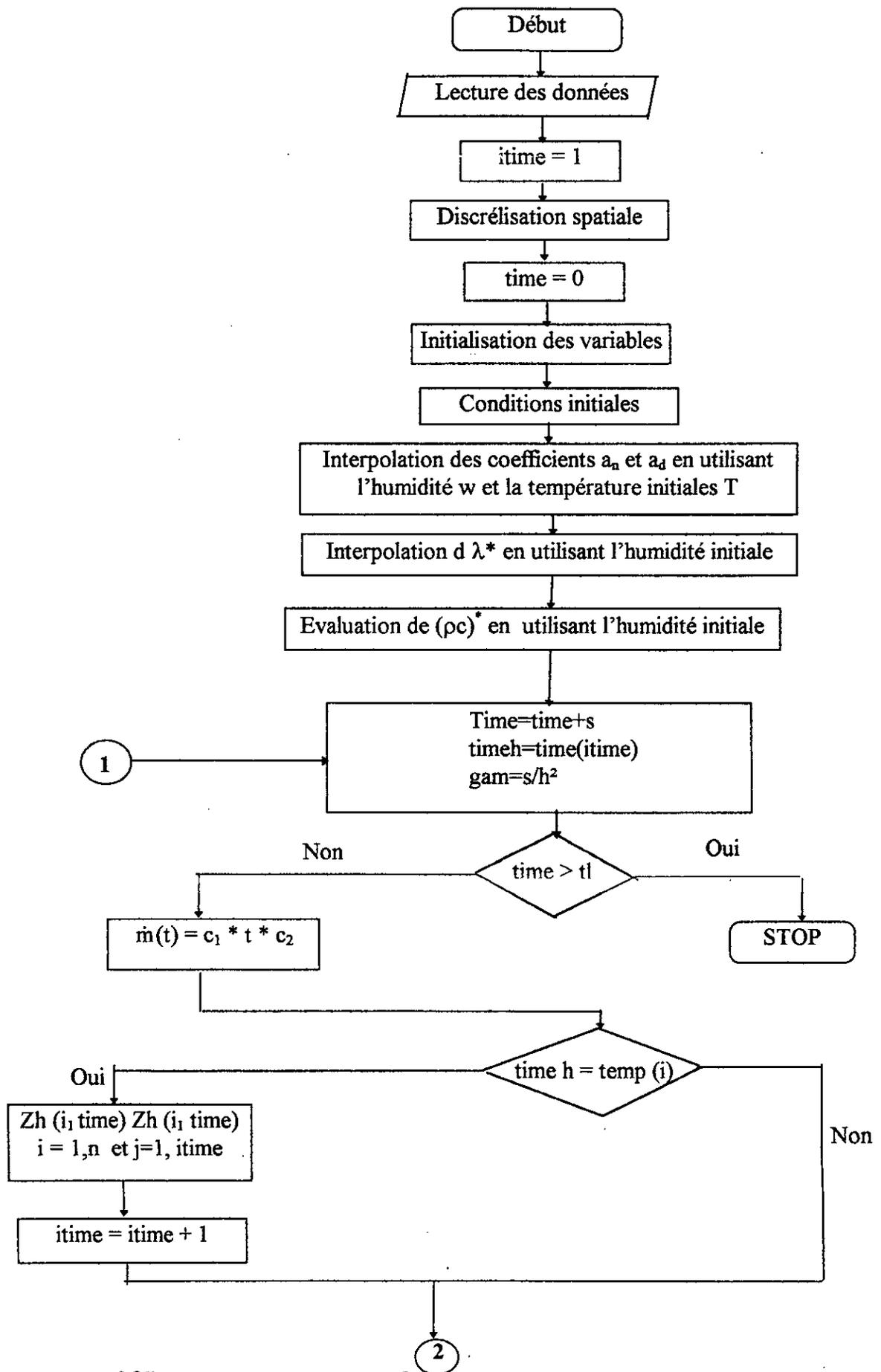
- 2- ORGANIGRAMME DE RESOLUTION DU
SYSTEME RESULTANT COUPLE

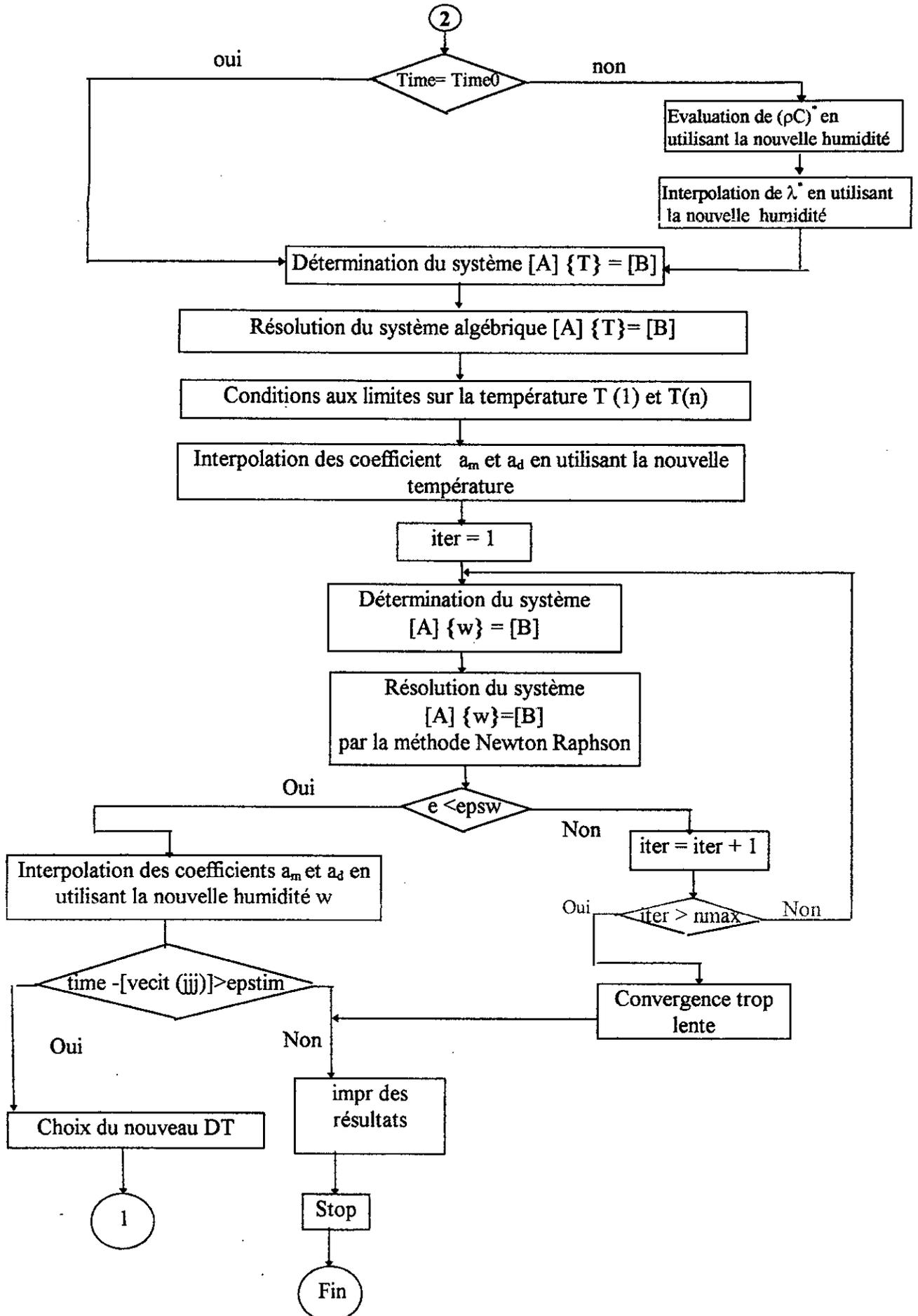
1-Organigramme de résolution du système résultant découplé :





2-Organigramme de résolution du système résultant couplé





REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] AIT SIDHOUM, K & BENABDERRAHMANE.D (1996)

Analyse des aspects massique et thermique dans les milieux poreux par une étude de sensibilité aux paramètres.

Projet de fin d'étude. ENP d'ALGER.

[2] BACON,G. (1982)

Simulation numérique des transferts de chaleur et de masse dans un milieu poreux non saturé.

colloque sur les transferts de chaleur et de masse dans un milieu poreux non saturé.

LAUSANNE.

[3] BERTHIER, J. (1985)

Diffusion de vapeur à travers des parois. Condensation.

REEF. 2,CSTB ? PARIS

[4] BORIES, S. (1982)

Principes physiques de l'évaporation. Transferts de chaleur et de masse entre un matériau poreux et l'atmosphère. Humidité dans le bâtiment.

Collège international des sciences de la construction

[5] BORIES, S. (1987)

Transferts en milieu poreux, notes de cours de D.E.A.

institut de Genie-Mecanique ENSEE/HT. TOULOUSE.

[6] BOUMARAH RAT, M . GOURDIN,A. (1991)

Méthodes numériques appliquées

Office des publications universitaires

[7] DONALD, W. PEACEMANE (1977)

Fundamentals of numerical reservoir simulation

- [8] COUSSY, O. (1991)
Mécanique des milieux poreux.
Edition Technip.
- [9] CRAUSSE, P. (1983)
Etude fondamentale des transferts couplés de chaleur et d'humidité en milieu poreux non saturé.
Thèse de doctorat d'état, INP de TOULOUSE.
- [10] CRAUSSE, P, G.BACON and S. BORIES (1981)
Etude fondamentale des transferts couplés de chaleur-masse en milieu poreux.
Int .J. Heat Mass Transfer.
- [11] DE VRIES, D.A (1987)
The theory of heat and moisture transfer in porous media.
Int.J.Heat Mass Transfer
- [12] FERZIGER, H (1981)
Numerical Methods for Engineering Application
Edition John Wiley & Sons.
- [13] FORSYTHE, G.E et WASOW ? W.R. (1960)
Finite difference methods for partial differential equation.
Edition John Wiley & Sons.
- [14] FRANK.P.INCROPERA et DAVID.P.DEWITT (1984)
Fundamentals of heat and mass transfer.
Edition John Wiley & Sons.
- [15] GODOUNOV,S . RIABENKI, V (1977)
Schémas aux différences
Edition ; MIR (Moscou)

[16] LE POURHIET, A (1988)

Résolution numérique des équations aux dérivées partielles.

Editions Cepadues.

[17] MARLE, C.M (1984)

Les écoulements polyphasiques en milieu poreux : de l'échelle des pores à l'échelle macroscopiques.

Annales des mines.

[18] RECAN, M (1982)

Simulation numérique du comportement thermique et hydrique d'un sol nu. Application à l'étude de l'évaporation par télédétection.

Thèse de docteur-ingénieur. INP de TOULOUSE.

[19] SLIMANI, B (1995)

Modélisation mathématique des mécanismes de transfert en milieu poreux. Application au processus de condensation.

Projet de fin d'étude. ENP d'ALGER.

[20] SIBONY, M et MARDON, J.CL (1984)

Approximations et équations différentielles.

Volume 2, édition Hermann.

[21] TAIBI, N & S

Pratique du FORTRAN 77

Edition. BERTI