



Département Métallurgie

Thèse de Magister

PRESENTÉE PAR : A.S. ADAMOU

Thème :

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# MODELISATION DE L'INDENTATION A BILLE

soutenue publiquement le 01 Mars 2001

Devant le Jury :

<b>M. BOUABDALLAH</b>	Président	Maître de Conférences	E.N.P
<b>N. MESRATI</b>	Directeur de Thèse	Maître de Conférences	E.N.P
<b>M. YOUSEFI</b>	Examinateur	Chargé de Cours	E.N.P
<b>M. BELOUACHRANI</b>	Examinateur	Docteur	E.M.P
<b>M. DJEGHLAL</b>	Examinateur	Chargé de Cours	E.N.P
<b>M. ZERARKA</b>	Invité	Chercheur	NAFTEC
<b>MM. BENABID</b>	Invitée	Ingénieur	CRDAT

Année Universitaire : 2000 – 2001

# MODELISATION DE L'INDENTATION A BILLE

المدسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

## ملخص

الهدف من هذا الموضوع هو الدراسة العددية لتجربة برينل في التماس الكرة مع جسم قابل للتشويه بطريقة العناصر المنتهية. بالفعل، تشمل هذه الدراسة حل مسألة التماس بالاحتكاك بين الجسمين في اطار المرونة العادية. تسنى استحداث نموذج ظاهرة الاحتكاك بواسطة قانون كولوم و الذي قمنا عليه بتطبيق طريقتين للتعديل. باستخلاص الجهود الناتجة على مستوى مساحة التلامس و التي تكون غير دقيقة تدرج طريقة العناصر الحدودية على مستوى برنامج التحليل بطريقة العناصر المنتهية. النتائج المتحصلة عليها تنطبق على النتائج النظرية لهيرتز في التلامس دون احتكاك، فيما يخص التلامس باحتكاك. ، تمكنا بواسطة احدي طريقتي التعديل من تحديد منطقتي التزلاق و التلاحم و ذلك وفقا لنتائج سبب التحليلية، على عكس الطريقة التقليدية الحرة.

## ABSTRACT

The purpose of this paper is to conduct a numerical study of the **BRINELL** test, in order to solve the contact problem between a spherical indenter and distorting support, by the finite element method. Indeed, the study is dedicated to the resolution of the contact with friction in classic elasticity. friction is modelled using **COULOMB**'s law, for which we test two regularisations.

The extrapolation of stresses on the surface of contact being too imprecise, we calculate these by the boundary element method, that we couple to our general program of resolution by finite element method. This program leads results in agreement with the theory of **HERTZ**, in the case without friction. For calculations with friction, one of the regularizations tested allows evidence the partition of the contact surface in zones of adhesion and slipping, and gives results in according with the **SPENCE** analytic solution.. This is not the case of the second regularisation.

## RESUME

L'objectif de cet article est d'étudier numériquement le test de **BRINELL** et donc de résoudre le problème du contact entre un indenteur sphérique et un support déformable, par la méthode des éléments finis. En effet, l'étude est consacrée à la résolution du contact avec frottement en élasticité classique. Le frottement est modélisé à l'aide de la loi de **COULOMB**, pour laquelle nous testons deux régularisations.

L'extrapolation des contraintes sur la surface de contact étant trop imprécise, nous calculons celles-ci par la méthode des éléments frontières, que nous couplons à notre programme général de résolution par éléments finis. Celui-ci nous donne des résultats en accord avec la théorie de **HERTZ**, dans le cas sans frottement. Pour les calculs avec frottement, l'une des régularisations testées permet de mettre en évidence la partition de la surface de contact en zones d'adhérence et de glissement, et donne des résultats conformes à la solution analytique de **SPENCE**. Ce qui n'est pas le cas de la deuxième régularisation.

**Mots clés :** Indentation, régularisations, loi de Coulomb, Hertz, Spence.

## REMERCIEMENTS

■ JE REMERCIE M<sup>FR</sup> MESRATI POUR M'AVOIR ASSURE LA DIRECTION SCIENTIFIQUE DE MA THESE, DE L'AIDE ET DES CONSEILS QU'IL M'A APPORTES AVEC BEAUCOUP DE SYMPATHIE ET GENTILLESSE.

J'ADRESSE MES REMERCIMENTS A : M<sup>FR</sup> BOUABDALLAH, M<sup>FR</sup> DJEGHLAL, M<sup>FR</sup> YUCEFI, M<sup>FR</sup> BELOUACHRANI D'AVOIR ACCEPTE DE PARTICIPER DANS LE JURY.

MES VIFS REMERCIMENTS VONT EGALEMENT A MON AMI BOUDJEMA, COMBATTANT DE LA DERNIERE CHANCE A MES COTES ET QUI A SU AU JOUR LE JOUR, TOLERER MES ETATS D'AME ET MON HUMEUR PARFOIS EXECRABLE. QU'IL SOIT ICI MILLE FOIS REMERCIE.

JE SALUE MON AMI AZIZ, POUR SA DISPONIBILITE ET SURTOUT POUR SON BONNE HUMEUR A CHAQUE FOIS QUE C'ETAIT NECESSAIRE, JE LUI DEDIE LE DICTON DE LA SOURIS DEGLINGUEE : . . . PLUS LA NUIT SERA BLANCHE, PLUS LE JOUR SERA LONG . . . TCHA TCHA TCHA

IL ME RESTE ENCORE QUELQUE REMERCIMENTS A ADRESSER ET NON DES MOINDRES A TOUS MES COLLEGUES (ET SOUVENT AMIS) QUI M'ONT SUPPORTE PENDANT PRESQUE DEUX ANS : DJOUAD, SAGHIR, SLIM, KARIM ECO, MOH INFO ET LE NOUVEAU DEBARQUE MEHDI.

JE NE SAURAI OUBLIER CEUX QUI M'ONT, A PLUSIEURS REPRISES APPORTE UNE AIDE OCCASIONNELLE MAIS TRES APPRECIEE. QUE M<sup>ME</sup> BENABID ET M<sup>FR</sup> HAMANI VEUILLENT BIEN SE RECONNAITRE ICI.

INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
-----------------------	---

## PREMIER CHAPITRE : INDENTATION ET LOIS CLASSIQUES

<b>I.A.1. INTRODUCTION</b>	<b>3</b>
<b>I.A.2. INDENTATION CLASSIQUE : RAPPELS ET GÉNÉRALITÉS</b>	<b>3</b>
I.A.2.1. Les essais de dureté	3
I.A.2.2. Phénomènes mis en jeu lors de l'indentation	4
I.A.2.2.1. Introduction	4
I.A.2.2.2. Pression de contact	4
I.A.2.2.3. Domaine élastique	5
I.A.2.2.4. Domaine élastoplastique	6
I.A.2.2.5. Domaine plastique	7
<b>I.A.3. LOI DE COMPORTEMENT D'UN MATÉRIAU</b>	<b>7</b>
I.A.3.1. Indentation sphérique	7
I.A.3.2. Indentation pyramidale	8
<b>I.A.4. APPROCHES CLASSIQUES</b>	<b>8</b>
I.A.4.1. Etude de la phase de charge	8
I.A.4.2. Analyse de la phase de décharge	9
I.A.4.3. Multi-indentation à charge normale constante	10
I.A.4.4. Multi-indentation à charge croissante	10
I.A.4.5. Mesures dynamiques	10
<b>I.B.1. CONTACT PONCTUEL</b>	<b>12</b>
<b>I.B.2. LOI DE COULOMB OU D'AMONTONS</b>	<b>13</b>
<b>I.B.3. INSUFFISANCE DE LA LOI DE COULOMB</b>	<b>15</b>
I.B.3.1. Variation du coefficient de frottement	15
I.B.3.2. Déplacement normal	15

**DEUXIEME CHAPITRE: MODELISATION MATHEMATIQUE**

<b>II.1. POSITION DU PROBLÈME</b>	<b>18</b>
<b>II.2. FORMULATION VARIATIONNELLE</b>	<b>21</b>
<b>II.3. ETUDE DU PROBLÈME INTERMÉDIAIRE AVEC <math>\sigma_N</math> CONNUE</b>	<b>23</b>
II.3.1. Inéquation variationnelle	23
II.3.2. Existence et unicité de la solution	25
II.3.3. Régularisation de la loi de Coulomb	25
II.3.4. Equation variationnelle du problème régularisé	28
II.3.5. Résolution du problème régularisé	29
II.3.5.a. Introduction	29
II.3.5.b. La méthode des approximations successives	29
II.3.5.c. La méthode de Newton - Raphson	31
<b>II.4. RÉOLUTION DU PROBLÈME GÉNÉRAL</b>	<b>32</b>
<b>II.5. DISCRÉTISATION PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS</b>	<b>34</b>
II.5.1. Introduction	34
II.5.2. Discrétisation de $\Omega$	35
II.5.3. Discrétisation de $\Gamma_{Spot}$	38
II.5.4. Transformation d'une intégrale	41
II.5.4.a. Sur $\Omega$	41
II.5.4.b. sur $\Gamma_S$	41
II.5.5. Discrétisation de l'équation variationnelle	42
<b>II.6. PROGRAMME DE RÉOLUTION</b>	<b>44</b>
II.6.1. Introduction	44
II.6.2. Organigramme	46
II.6.3. Résolution du système $[K]\{U\} = \{F\}$	47
II.6.3.a. Stockage de la matrice $[K]$	47
II.6.3.b. Principe de la méthode du gradient conjugué	47
II.6.3.c. Préconditionnement	48
II.6.3.d. Algorithme de résolution	49
II.6.4. Gestion du contact	50
II.6.4.a. Projection d'un nœud	50
II.6.4.b. Partage de l'incrément	51
II.6.5. Calcul de la partition de la surface de contact	52
II.6.6. Remaillage de la bille	53
<b>II.7. CALCUL DES CONTRAINTES PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FRONTIÈRES</b>	<b>55</b>
II.7.1. Introduction	55

II.7.2. Equation intégrale frontière	56
II.7.3. discrétisation	57
II.7.4.a. Calcul des matrices élémentaires singulières	61
II.7.4.b. Non-unicité du vecteur normal	62

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

### TROISIEME CHAPITRE : RESULTATS NUMERIQUES

III.1. RÉSULTATS NUMÉRIQUES	64
III.1.1. Validation	64
III.1.2. Contact de Hertz	66
III.1.2.a. Pression maximale – compression	66
III.1.2.b. Rayon de contact :	70
III.1.2.c. Distribution des contraintes	72
III.1.3. Premier exemple : Première série de calcul avec frottement	75
III.1.3.a. Zones d'adhérence et de glissement	75
III.1.3.b. Rayon de contact et pression maximale	81
III.1.4. Premier exemple : deuxième série de calcul avec frottement	87
CONCLUSION GENERALE	91
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	92

### ANNEXES

ANNEXE A : ELEMENTS FINIS	I
ANNEXE B : LE CONTACT DE HERTZ	III
ANNEXE C : LE CONTACT AVEC FROTTEMENT - SOLUTION ANALYTIQUE DE SPENCE	IX
ANNEXE D : LES SOLUTION FONDAMENTALE EN AXISYMETRIE	XI

## INTRODUCTION GENERALE



L'étude de l'indentation est intéressante à deux points de vue :

- Elle modélise le test de dureté. Selon l'indenteur (pyramide, cône ou bille) et le mode opératoire (statique ou dynamique) employés, elle permet de mesurer certaines caractéristiques mécaniques, telles que le module d'élasticité ou la contrainte d'écoulement des matériaux testés.

Ce test, très simple à réaliser et non destructif, est largement employé pour l'étude des métaux et des alliages. Il s'impose, en particulier, pour la détermination des caractéristiques élastoplastiques des matériaux revêtus ou durs avec un comportement fragile. En effet, l'essai de traction, généralement utilisé pour caractériser les matériaux, ne permet pas d'étudier les premiers, et donne des résultats incertains pour les seconds.

- Elle constitue une approche du contact entre surfaces rugueuses. En effet, l'aire réelle de contact est constituée par la somme d'aires microscopiques, où les sommets des aspérités du corps le plus dur indentent le corps le plus mou. Il se produit alors des déformations plastiques qui conditionnent les mécanismes de frottement et d'usure entre surfaces.

L'étude de l'indentation passe donc par celle du contact entre solides.

Dans la pratique, le contact ne peut être étudié que par l'observation et l'expérience. Cependant, des mesures directes sont généralement impossibles à réaliser car la zone d'étude est située sous la surface de contact. Et donc seuls la géométrie de l'empreinte d'indentation ainsi qu'un comportement global peuvent être mesurés expérimentalement.

Des méthodes numériques s'imposent alors pour étudier ce problème. Elles permettent, de plus, d'obtenir des résultats impossibles à atteindre par des mesures expérimentales (par exemple, le début de la plastification, l'évolution de la zone plastifiée, les contraintes résiduelles...)

Cependant, la modélisation du contact pose de nombreuses difficultés. En effet, le comportement dans le contact des propriétés mécaniques des matériaux, de la topologie et de la rugosité des surfaces (en partie responsable de la résistance au glissement, qui est le mécanisme physique associé au frottement), ainsi que de la façon dont la charge est appliquée (vitesse, amplitude et direction).

La modélisation mathématique du problème de contact conduit ainsi à des systèmes d'équations non linéaires complexes à résoudre.

L'objectif de ce travail est d'étudier numériquement le test de Brinell, c'est à dire de résoudre le problème du contact entre un indenteur sphérique et un support déformable à l'aide de la méthode des éléments finis.

Nous avons ainsi mis au point un programme de résolution du problème de contact bille - plan traitant le contact avec frottement en élasticité.

Notre mémoire se compose de trois parties :

- La Première partie est consacrée à l'étude bibliographique, où nous nous sommes attachés à mettre en clair les différents travaux relatifs à l'indentation ainsi que la loi de Coulomb.
- La Deuxième partie est consacrée à l'étude du contact bille – plan avec frottement en élasticité.

Nous modélisons celui-ci à l'aide de la loi de Coulomb. Elle est, en effet, généralement la plus utilisée en ingénierie. Cependant, cette loi n'est pas différentiable et doit donc être régularisée. Lors de nos calculs, nous testons deux méthodes différentes de régularisation.

Le problème ainsi posé s'exprime sous la forme d'une inéquation variationnelle. Celle-ci n'étant pas équivalente à un problème de minimisation, nous la résolvons à l'aide d'un double processus itératif : nous mettons en œuvre une méthode d'approximations successives, dont chaque itération est constituée par la résolution d'un problème (intermédiaire) de contact avec contrainte normale fixée à l'interface. Celui-ci étant également non linéaire, nous utilisons la méthode de Newton – Raphson.

Cependant, l'extrapolation des contraintes à l'interface est trop imprécise. Nous choisissons donc de les calculer à l'aide de la méthode des éléments frontières, que nous couplons à notre programme de résolution par éléments finis.

- La Troisième partie est relative à la validation du modèle mathématique, où nous effectuons plusieurs séries de calculs. Nous comparons nos résultats à la théorie de Hertz (cas sans frottement) et à la solution de Spence (cas avec frottement).

Nous avons achevé notre étude par une conclusion générale et des recommandations.



**PREMIER CHAPITRE :**

**INDENTATION ET LOIS CLASSIQUES**

CHAPITRE I : INDENTATION ET LOIS CLASSIQUES

PARTIE A : INDENTATION

**I.A.1. INTRODUCTION**

L'essai d'indentation, qui est un essai de dureté statique par pénétration, va bientôt fêter ses cent ans d'existence. C'est en effet au début de ce siècle qu'un ingénieur suédois répondant au nom de **J.A. Brinell** eut pour la première fois l'idée d'utiliser cet essai pour effectuer un contrôle qualité des aciers sur une chaîne de production <sup>[1]</sup>. Il plaça une bille entre deux échantillons d'acier et pressa le tout dans un étau. L'acier le plus dur était celui pour lequel l'empreinte rémanente était la plus petite. L'essai de dureté statique était né. Depuis, de nombreuses approches phénoménologiques et théoriques se sont succédées afin de décrire le mode de déformation et les champs de déformations et de contraintes sous l'indenteur.

**I.A.2. INDENTATION CLASSIQUE : RAPPELS ET GENERALITES**

**I.A.2.1. LES ESSAIS DE DURETE**

On peut distinguer parmi les essais de dureté, 4 groupes différents que l'on classe habituellement selon le principe de mesure utilisé :

- Essai sclérométrique ou par rayure : Déjà en 1820 **Mohs** a établi la première échelle de dureté qui comprend une liste de dix minéraux classés dans l'ordre des duretés croissantes. Chacun rayant le précédent et étant rayé par le suivant. Pour la caractérisation de la tenue mécanique des couples revêtements/substrats, ce test peut être instrumenté en force et déplacement afin de mesurer des charges critiques de fissuration ou de décohésion ainsi que le frottement tout au long du test de rayure. Il est peu utilisé pour la caractérisation des métaux.
- Essai par rebondissement (ou de **Shore**) : la dureté est caractérisée dans cet essai par la hauteur de rebondissement d'une bille seule ou d'une petite masse d'acier guidée dans un tube de verre tombant d'une certaine hauteur sur la surface du métal. Ce test est utilisé pour contrôle des grosses pièces de forge. Il est également bien adapté pour la caractérisation des matériaux à fort retour élastique (polymères par exemple).
- Méthodes indirectes : on peut distinguer les méthodes magnétiques et par ultrasons. Cette dernière méthode est particulièrement sensible à la taille de grains dans les matériaux métalliques.
- Essai de pénétration : c'est de loin l'essai le plus normalisé et le plus répandu de tous les essais de dureté. La forme du pénétrateur est variée. Nous détaillons cet essai au paragraphe suivant.

I.A.2.2. PHENOMENES MIS EN JEU LORS DE L'INDENTATION

I.A.2.2.1. INTRODUCTION

Nous allons utiliser l'indenteur sphérique pour faire cette description phénoménologique et théorique de l'essai d'indentation. C'est, en effet la seule configuration pour laquelle on travaille à déformation croissante. Il est ainsi plus facile de faire le parallèle de l'essai d'indentation avec d'autres essais mécaniques plus conventionnels (traction, compression, etc....).

I.A.2.2.2. PRESSION DE CONTACT

Lorsque l'on applique une bille rigide de rayon  $R$ , sous une force  $F$  sur la surface plane d'un solide de module d'Young  $E$  (figure I.1), la pression moyenne de contact  $P_m$  vaut :

$$P_m = \frac{F}{\pi a^2} \quad (I.1)$$

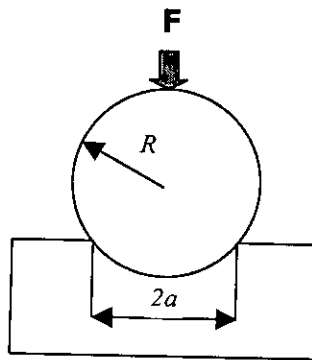


Figure I.1: Notations et configuration en contact bille plan

Cette pression moyenne de contact est aussi la dureté Meyer qui est le rapport de la force appliquée à l'aire projetée de l'empreinte d'indentation ( $A_{proj}$ ) de rayon  $a$ .

On peut distinguer, suivant la valeur de la charge normale  $F$  appliquée, différents régimes de déformation sous l'indenteur <sup>[2,3]</sup> (voir figure I.2) :

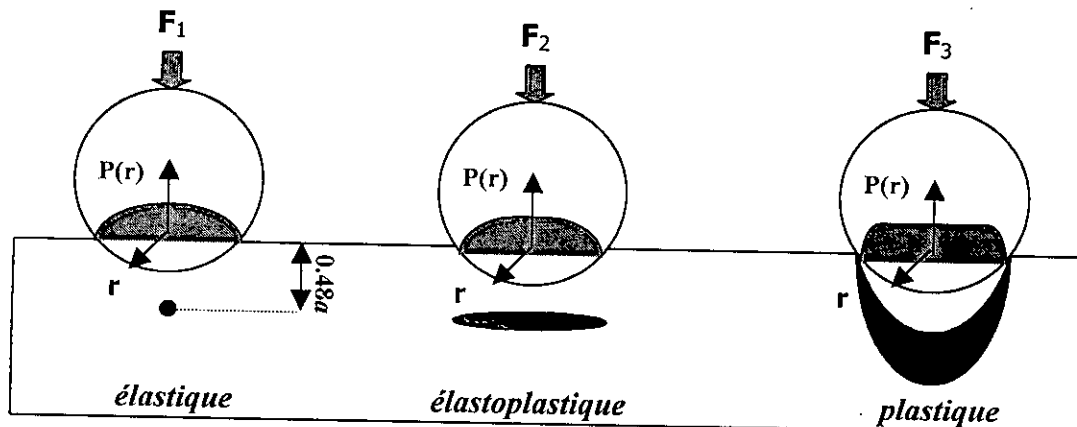


Figure I.2 : Evolution de la pression d'indentation

- Un régime de déformation élastique et réversible du massif : si l'on relâche la force, il n'y a pas d'empreinte résiduelle.
- Un régime de déformation élastoplastique : la déformation plastique débute sous la surface à une profondeur  $z = 0,48 a$  (voir Annexe B) mais n'a pas encore atteint la surface.
- Un régime de déformation plastique : la zone plastique atteint la surface et la pression moyenne de contact n'évolue plus.

On retrouve l'existence de ces trois régimes de déformation lorsque l'on porte l'évolution de la pression moyenne,  $P_m$ , en fonction du rapport  $a/R$  (voir figure I.3). En faisant l'analogie de cette courbe avec une courbe obtenue en essai de traction ou de compression, on peut se demander s'il est possible d'accéder aux distributions de la contrainte équivalente et de la déformation équivalente sous l'indenteur. Nous allons tenter de répondre à cette question en détaillant les différents domaines précités.

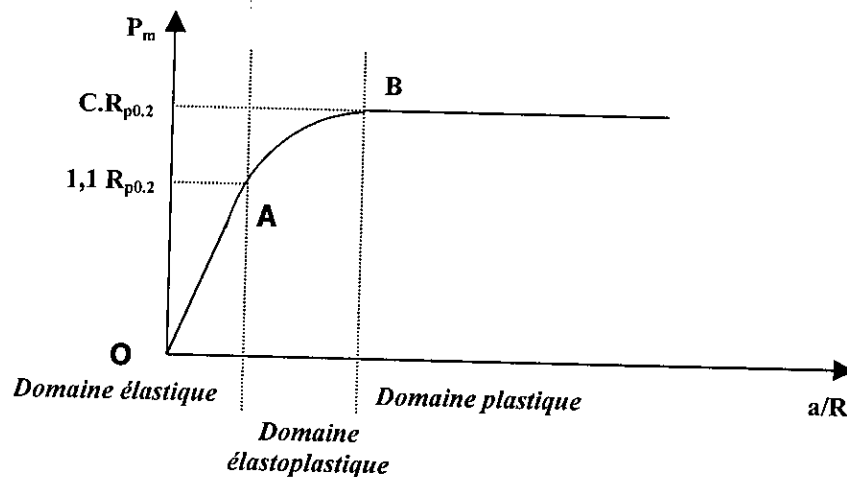


Figure I.3 : Evolution schématique de la pression moyenne de contact,  $P_m$  en fonction du rapport  $a/R$

Sur cette figure est également reporté le profil de distribution de la pression de contact  $P(r)$ : le profil est paraboloidal dans le domaine élastique, son expression est la suivante <sup>[4]</sup>:

$$P(r) = \frac{3}{2} P_m \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{I.2})$$

Le maximum  $P_o$  est atteint au centre de la zone de contact et vaut :

$$P_o = \frac{3}{2} P_m \quad (\text{I.3})$$

### I.A.2.2.3. DOMAINE ELASTIQUE

C'est la partie qui se situe sur la figure I.3 entre O et A. On doit à H. Hertz <sup>[5]</sup> la loi du même nom qui décrit l'évolution du rayon de contact en fonction de la force appliquée dans ce domaine :

En remplaçant dans cette relation  $F$  par son expression en fonction de  $P_m$ , il est possible d'exprimer  $P_m$  en fonction du rapport  $a/R$  :

$$P_m = \frac{4.E_r}{3.\pi} \frac{a}{R} \quad (I.5)$$

Er est le module d'Young équivalent.

Il est en revanche impossible de trouver dans la littérature, une expression empirique simple pour la déformation équivalente,  $\epsilon_{eq}$ , sous l'indenteur.

Ce régime de déformation élastique n'existe pas pour les indenteurs pointus (dièdres, cônes ou pyramides) pour lesquels on aurait, en appliquant rigoureusement l'analyse précédente, des contraintes infinies à la pointe de l'indenteur. L'application d'une charge, si faible soit-elle, provoque un écoulement plastique.

#### I.A.2.2.4. DOMAINE ELASTOPLASTIQUE

Lorsque la charge continue à augmenter (figure I.1 et portion A-B de la figure I.3), on atteint le seuil de plastification du matériau, la loi de Hertz cesse alors d'être valable. La contrainte de cisaillement ou contrainte résolue, responsable de la plastification atteint sa valeur maximale  $\tau_{max}$  sous la surface à  $z = 0,48 a$  (voir Annexe B). Son intensité est de  $0,47 P_m$ . Selon le critère de plastification que l'on choisit, la valeur  $P_m$  de début de plastification sera la suivante :

- $(p_m)_{plast} \cong 1,06R_{p0.2}$ , critère de **Tresca**.
- $(p_m)_{plast} \cong 1,1R_{p0.2}$ , critère de **Von Mises**.

En reportant cette dernière valeur dans la relation (I.5) on obtient :

$$\left(\frac{a}{R}\right)_{plast} = \frac{3.\pi}{4.E} . 1,1 . R_{p0.2} \quad (I.6)$$

Depuis les années 40, de nombreux auteurs se sont attachés à décrire au mieux le mode de déformation ainsi que l'évolution de la pression moyenne de contact et de la déformation équivalente dans le domaine élastoplastique.

**D.M. MARSH** <sup>[6]</sup>, sur la base de la théorie de **R. HILL** <sup>[7]</sup> proposa pour le domaine élastoplastique un mode de déformation similaire à l'expansion d'une cavité sphérique dans un massif infini sous l'action d'une pression interne :

$$\frac{P_m}{R_{p0.2}} = \frac{2}{3} \left( 1 + \ln \frac{2E}{3R_{p0.2}} \right) \quad (I.7)$$

**K.L. JOHNSON** <sup>[8]</sup>, sur la base des études précédentes, a étendu le modèle de **R. HILL** en intégrant pour la première fois dans ce modèle l'influence de la géométrie de l'indenteur. Il a fait l'hypothèse que l'expansion volumique de la cavité sphérique était égale au volume du matériau déplacé par l'indenteur et a suggéré, pour des indenteurs coniques et pyramidaux, l'expression suivante pour la pression moyenne :

matériau déplacé par l'indenteur et a suggéré, pour des indenteurs coniques et pyramidaux, l'expression suivante pour la pression moyenne :

$$\frac{P_m}{R_{p0.2}} = \frac{2}{3} \left( 1 + \ln \frac{E \cdot \tan \beta}{3 \cdot R_{p0.2}} \right) \quad (\text{I.8})$$

Où  $\beta$  désigne l'angle entre les faces de l'indenteur et la surface de l'échantillon.

**R. STUDMAN ET AL.** <sup>[9]</sup> ont proposé pour un indenteur sphérique de rayon  $R_i$  :

$$\frac{P_m}{R_{p0.2}} = 0.3 + \frac{2}{3} \left[ 1 + \ln \left( \frac{E}{R_{p0.2}} \frac{a}{R} \right) \right] \quad (\text{I.9})$$

### I.A.2.2.5. DOMAINE PLASTIQUE

Lorsque la zone plastique confinée sous l'indenteur atteint la surface, le domaine plastique commence (voir figure I.2). Ce domaine commence (figure I.3) à partir du point B, la fin du domaine élastoplastique qui coïncide avec le début de la déformation plastique correspond à :

$$\frac{E \cdot \tan \beta}{R_{p0.2}} \cong 60 \quad (\text{I.10})$$

## I.A.3. LOI DE COMPORTEMENT D'UN MATERIAU

### I.A.3.1. INDENTATION SPHERIQUE

La plupart des propriétés mécaniques des matériaux, telles que limite élastique, module d'Young, dureté, coefficient d'érouissage, peuvent être déduites d'une courbe contrainte - déformation généralement obtenue lors d'un essai de traction ou de compression.

**D. TABOR** <sup>[10]</sup> et plus récemment **T. ISHIBASHI** et al. <sup>[11]</sup> ont développé et utilisé une méthode permettant de reconstituer la courbe contrainte - déformation à partir d'expériences en indentation sphérique. En effet, en corrélant les courbes contraintes - déformations obtenues en essai de compression et des essais de dureté Brinell sur différents matériaux (acier doux, cuivre recuit, aluminium partiellement recuit), ils ont été en mesure d'établir des expressions pour les valeurs de la contraintes vraies ( $\sigma_v$ ) et de la déformation vraie en indentation sphérique pendant le régime de déformation plastique :

$$\sigma_v = \frac{P_m}{C} \quad (\text{I.11})$$

La constante  $C$  a pour une valeur comprise entre 2.7 et 3 selon le matériau testé et son degré d'érouissage.

La mesure du diamètre de l'empreinte rémanente pour différentes charges permet alors d'après les relations précédentes de reconstituer la courbe contrainte - déformation.

### I.A.3.2. INDENTATION PYRAMIDALE

Contrairement à un indenteur sphérique, l'indenteur pyramidal admet un angle  $\beta$  constant entre la surface de l'échantillon et les faces de l'indenteur lorsque l'on augmente la charge. De ce fait, la déformation équivalente sous l'indenteur, qui est proportionnelle à  $\tan\beta$ , est constante et vaut pour indenteur Vickers environ 8%. Le seul moyen, dans ce cas, de reconstituer la courbe contrainte - déformation est d'utiliser plusieurs indenteurs pyramidaux avec différents angles  $\beta$ . Cette méthode relativement lourde n'est pas utilisée en pratique.

En revanche, de nombreuses études dans la littérature sont consacrées à la détermination des caractéristiques mécaniques en traction, telles que limite d'élasticité ( $R_{p0.2}$ ), contraintes à la rupture ( $R_u$ ), coefficient d'écrouissage ( $n$ ), facteur de consolidation ( $K_{con}$ ), à partir du simple test de microdureté Vickers. Ces différentes études supposent l'utilisation d'une loi de type **LUDWIK** <sup>[12]</sup> pour la loi de comportement en traction :

$$\sigma = K_{con} \varepsilon^n \quad (\text{I.12})$$

Nous citerons, à titre d'exemple, les études de **J.R. CAHOON ET AL.** <sup>[13]</sup> portant sur divers alliages d'acier et d'aluminium plus ou moins recuits et écrouis, **M.O. LAI ET AL.** <sup>[14]</sup> concernant divers aciers et un alliage d'aluminium, puis de **K. YASUDA ET AL.** <sup>[15]</sup> portant sur du nickel pur, de l'aluminium pur et du cuivre pur irradié.

### I.A.4. APPROCHES CLASSIQUES

#### I.A.4.1. ETUDE DE LA PHASE DE CHARGE

Dans un essai de microindentation instrumentée, on ne mesure plus optiquement le diamètre de l'empreinte. On mesure en continu, pendant la charge et la décharge, la force appliquée et la profondeur de pénétration. Une courbe d'indentation est représentée schématiquement dans la figure I.4. La courbe de charge cumule les enfoncements élastique et plastique dans le matériau. **J.L. LOUBET ET AL.** <sup>[16]</sup> ont fait une analyse semi-empirique de cette courbe de charge et ont aboutit aux relations suivantes :

$$F = K_t \cdot h_t^2 \quad (\text{I.13})$$

avec :

$$K_t = \left[ 0.92 \frac{1-\nu^2}{E} \sqrt{HV} + \frac{0.194}{\sqrt{HV}} \right]^2 \quad (\text{I.14})$$

Cette approche permet, à partir de la courbe d'indentation, et connaissant deux des trois paramètres  $E$ ,  $HV$  et  $\nu$ , de déterminer le troisième. Cette démarche reste à l'heure actuelle assez fastidieuse et peu utilisée <sup>[16]</sup>.

#### I.A.4.2. ANALYSE DE LA PHASE DE DECHARGE

Certains auteurs <sup>[17,18]</sup> ont pu montrer que la phase de déchargement de la courbe d'indentation (voir figure I.4) est conditionnée par les seules propriétés élastiques du matériau. On peut cependant distinguer deux types de retour élastique :

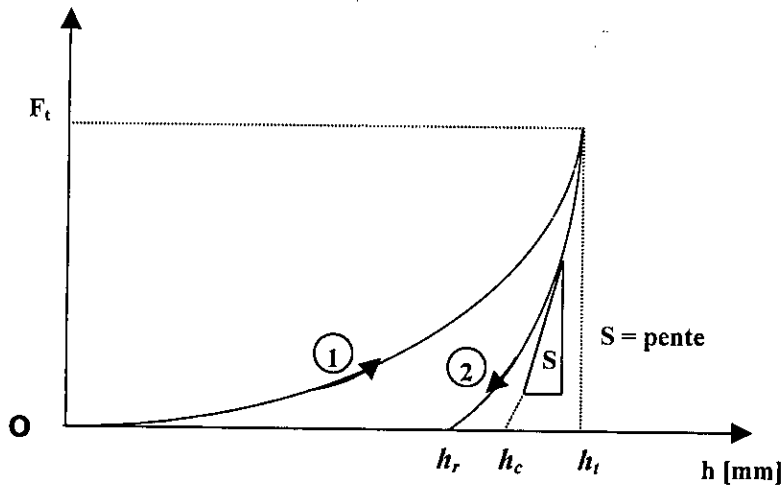


Figure I.4 : Courbes d'indentation schématique.  
(1) phase de charge, (2) phase de décharge

- Une seconde phase de retour élastique de la zone plastifiée sous l'indenteur. Ce retour s'accompagne généralement d'une ouverture angulaire de l'empreinte résiduelle et la perte de contact progressive entre l'indenteur et le matériau.

En appliquant la théorie du contact élastique <sup>[19]</sup> à la première phase de la courbe de déchargement, la pente de celle-ci au point initial de décharge est donnée par :

$$S = \left( \frac{dF}{dh} \right)_{h_c} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} E_r \sqrt{A_{proj}} \tag{I.15}$$

Avec  $E_r$  : module d'Young réduit (GPa)

$A_{proj}$  : aire de contact projetée ( $nm^2$ )

### I.A.4.3. MULTI-INDENTATION A CHARGE NORMALE CONSTANTE

Ce mode de fonctionnement permet de s'affranchir ou de minimiser les effets d'un retour partiellement plastique observé à la première décharge. **W.C. OLIVER** et **G.M. PHARR** <sup>[20]</sup> ont montré que cet effet était particulièrement prononcé pour le tungstène et l'aluminium monocristallin. Un cycle de trois ou quatre chargements successifs permet un retour élastique pur (voir figure I.5).

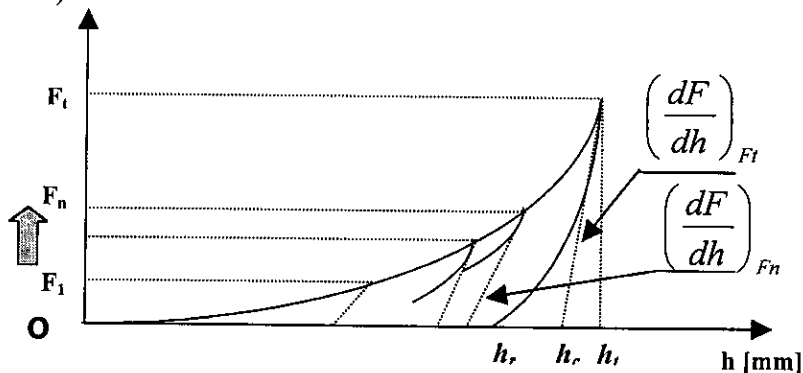


Figure I.5 : Exemple de courbe d'indentation obtenue par une multi-indentation à charge constante



#### I.A.4.4. MULTI-INDENTATION A CHARGE CROISSANTE

Un cycle typique de multi-indentation à charge croissante ou indentation en "zigzag" est représenté figure I.6. Chaque décharge partielle permet, après détermination de la profondeur de contact d'indentation (obtenue par intersection de la pente à la courbe de décharge et l'axe des profondeurs) d'accéder au module d'Young et à la dureté du matériau. On peut donc, en réalisant un cycle d'indentation sur une empreinte unique, connaître l'évolution de la dureté et du module d'Young avec la charge.

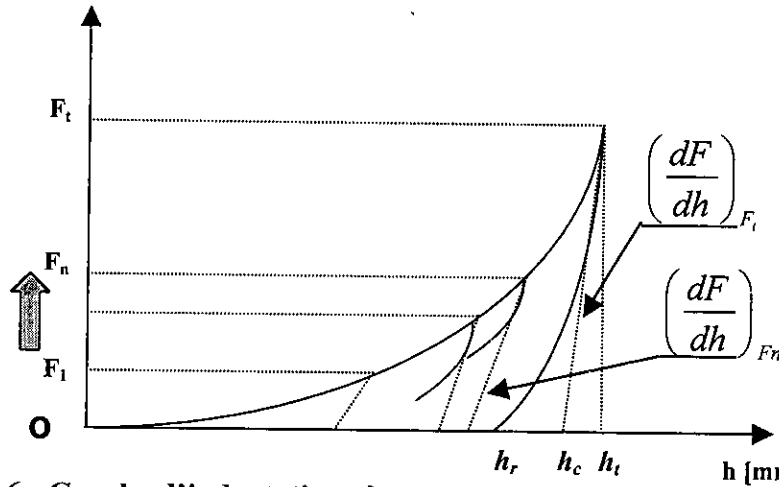


Figure I.6 : Courbe d'indentation obtenue par une multi-indentation à charge croissante.

*S et  $h_c$  sont déterminés pour chaque décharge partielle.*

#### I.A.4.5. MESURES DYNAMIQUES

Il est possible de mesurer en continu le module d'Young pendant l'indentation <sup>[17]</sup> en superposant au signal quasi-statique de force une perturbation oscillatoire  $\delta F$  de la forme suivante :

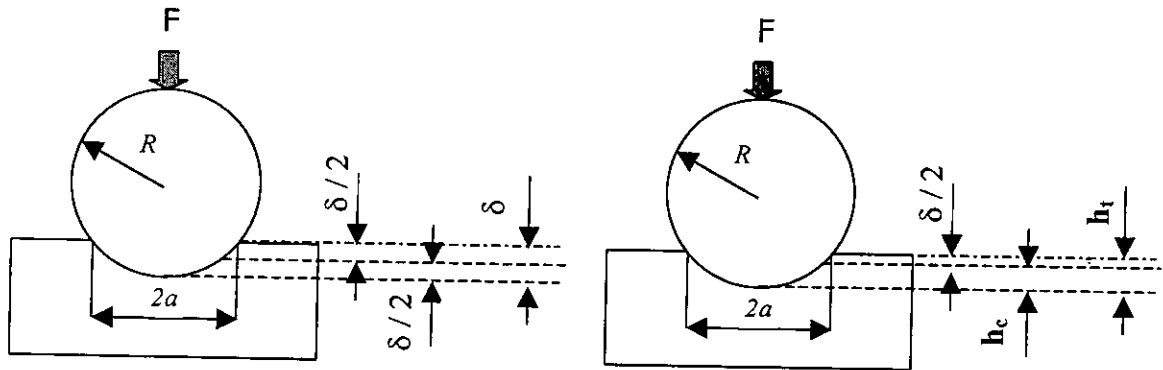
$$\delta F = \delta F_0 \exp(i\omega t) \quad (\text{I.16})$$

et en enregistrant l'amplitude,  $\delta x_0$ , et le déphasage,  $\phi$ , du signal résultant :

$$\delta x = \delta x_0 \exp[i(\omega t + \phi)] \quad (\text{I.17})$$

Cette méthode a été mise en œuvre par **J.B. PETHICA ET W.C. OLIVER** <sup>[21]</sup>. La fréquence d'oscillation qu'ils ont utilisé est d'environ 70 Hz. Leur système d'application de force étant électromagnétique. Il leur suffit d'appliquer un courant alternatif de la fréquence désirée dans la bobine. Pour que la mesure des propriétés élastiques du matériau soit valable, l'amplitude du signal doit être suffisamment faible pour ne pas influencer le processus d'indentation.

- La vitesse de montée en charge du cycle d'indentation continu doit être suffisamment faible afin de pouvoir négliger l'enfoncement permanent généré à chaque cycle, devant l'amplitude du signal d'oscillation. De cette manière, la décharge dynamique est quasi-élastique.
- Il existe une profondeur de pénétration totale minimale pour que la mesure soit valide.



**Figure I.7 : Configuration du contact sphère / plan**  
 (a) en condition élastiques, (b) en conditions élastoplastiques

Le mode d'indentation dynamique présente certains avantages par rapport aux systèmes classiques :

- Il n'est plus nécessaire de faire plusieurs indentations afin d'avoir l'évolution du module d'Young et de la dureté avec la charge.
- L'exploitation de la courbe de décharge et la détermination de la pente initiale à la décharge n'est plus indispensable.
- Ce mode de fonctionnement permet de déterminer le point de contact entre indenteur et surface avec grande précision.

**Remarque :**

Les différentes approches expérimentales présentées ci-dessus, ont pour but de mettre en claire l'évolution relativement lente de l'aspect fondamental du phénomène de l'indentation.

PARTIE B : LOIS CLASSIQUES DE FROTTEMENT SEC ET LEURS LIMITATIONS

Une loi de frottement sec est un modèle mathématique reliant les principaux paramètres qui entrent en jeu dans les mécanismes du frottement sec. Les premières lois de ce type, élaborées à partir du 16<sup>ème</sup> siècle, résument les propriétés des surfaces en présence par la notion de coefficient de frottement, c'est à dire par le rapport maximal entre force tangentielle et force normale au point de contact. Bien sûr, c'est très insuffisant pour décrire l'ensemble des phénomènes qui interviennent lors du frottement. Malgré tout, ce modèle simple exhibe déjà beaucoup de difficultés, du fait de sa non-linéarité et de sa non-différentiabilité.

Dans cette partie , on s'attache à décrire ces premières lois de frottement sec, ainsi que certaines critiques qui donnent un aperçu de leurs limitations.

I.B.1. CONTACT PONCTUEL

Ces première lois de frottement ont été élaborées dans le cadre du contact ponctuel entre deux solides rigides. Classiquement, on considère un solide rigide effectuant un mouvement de translation sur un plan rigide (voir figure 1.8). Décrivons ce modèle simple. On désigne par  $\underline{R}$  la réaction du plan sur le solide que l'on décompose en composante tangentielle  $\underline{F}_f$  (ici projection sur le plan) et en composante normale  $\underline{N}$ . On désigne par  $\underline{u}$  le déplacement de translation du solide que l'on décompose aussi en composante tangentielle  $\underline{u}_T$  et composante normale  $u_N$ . On considère que le contact a lieu lorsque  $u_N = 0$ . La vitesse de glissement est  $\underline{v}_g = \partial_t \underline{u}_T$  lorsqu'il y a contact.

Le solide est en contact unilatéral, c'est à dire que l'on a :  $u_N \geq 0$

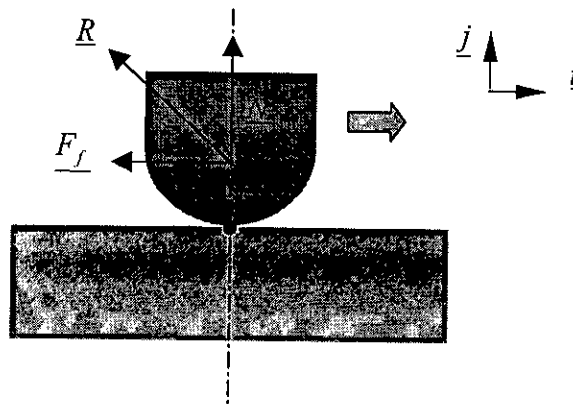


Figure I.8 : Point matériel en contact unilatéral avec un demi espace.

Le contact peut être rompu, et dans ce cas on a :

$$u_N > 0 \text{ et } \underline{R} = 0, \tag{I.18}$$

Ou bien :

$$u_N = 0 \text{ et } N \geq 0 \tag{I.19}$$

(On parle de contact bilatéral lorsque le contact est astreint à avoir lieu, c'est à dire  $u_N = 0$ . Dans ce cas on peut avoir  $N < 0$ ).

On dit que l'on a un *glissement parfait*, ou *sans frottement*, lorsque la composante tangentielle  $\underline{F}_f$  est nulle. Si au contraire, une force tangentielle existe, on dit que l'on a un *glissement avec frottement*, et on est amené à introduire une loi de frottement qui relie cette composante tangentielle aux autres variables du système.

### I.B.2. LOI DE COULOMB OU D'AMONTONS

Historiquement, **G. AMONTONS** <sup>[23]</sup> a mis en avant la proportionnalité de la force de frottement  $|\underline{F}_f|$  et du chargement normal  $N$ . De manière générale on parle de loi de Coulomb ou d'Amontons pour une loi de frottement qui respecte cette proportionnalité. L'expérience qui illustre le mieux la loi de Coulomb est celle d'un petit solide de base carrée, posé sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  et soumis à son poids  $\underline{P}$  (voir figure I.9). Expérimentalement, il existe une inclinaison critique  $\alpha_{cr}$  en deçà de laquelle le petit solide reste immobile et au delà de laquelle il se met en mouvement.

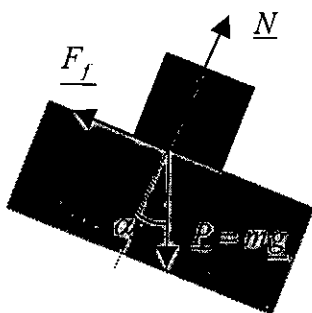


FIGURE I.9. PETIT SOLIDE SUR UN PLAN INCLINE

A l'équilibre, la réaction du plan et le solide se composent :

$$\underline{F}_f + \underline{N} + \underline{P} = 0 \quad (\text{I.20})$$

On a donc :

$$|\underline{F}_f| = |P| \sin \alpha \quad (\text{I.21})$$

$$|\underline{N}| = |P| \cos \alpha \quad (\text{I.22})$$

Le coefficient de frottement  $\mu_s$  est le rapport  $\frac{|\underline{F}_f|}{|\underline{N}|}$  à l'inclinaison critique :

$$\mu_s = \frac{\sin \alpha_{cr}}{\cos \alpha_{cr}} = \tan \alpha_{cr} \quad (\text{I.23})$$

La loi de Coulomb la plus simple stipule que le rapport  $\frac{|F_f|}{|N|}$  reste égal à  $\mu_s$  lorsque le solide est en glissement. Elle s'énonce ainsi lorsqu'il y a contact :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_N = 0 \text{ et } N \geq 0, \\ \text{soit } \frac{|F_f|}{|N|} < \mu_s \text{ et } \underline{v_g} = 0 \\ \text{soit } \frac{|F_f|}{|N|} = \mu_s \text{ et } \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \underline{v_g} = -\lambda \underline{F_f} \end{array} \right. \quad (\text{I.24})$$

La force de frottement s'oppose toujours à la vitesse de glissement.

**Remarque :**

Dans le cas du contact unilatéral, on peut remplacer l'inéquation  $\frac{|F_f|}{|N|} < \mu N$  puisque  $N \geq 0$ .

De plus on peut récrire les conditions de contact unilatéral avec frottement par la formulation équivalente suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} N \geq 0, u_N \geq 0, N u_N \text{ (contact unilatéral)} \\ \frac{|F_f|}{|N|} \leq \mu N, \underline{F_f} \underline{v_g} = \mu N \underline{v_g} \end{array} \right. \quad (\text{I.25})$$

**L. EULER** <sup>[24]</sup>, au début du 18<sup>ème</sup> siècle, fait une observation importante sur l'existence du solide posé sur un plan incliné. D'après la loi de Coulomb, lorsque le glissement a lieu, le petit solide a un mouvement uniformément accéléré. Le module de l'accélération est :

$$a = g(\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha),$$

où  $g$  est la constante de gravitation terrestre. Or, dans les expériences, on n'arrive pas à obtenir un mouvement avec une accélération aussi petite que l'on veut. Il existe une

accélération minimale. Il en conclut que le rapport  $\frac{|F_f|}{|N|}$  ne reste pas égal à  $\mu_s$  lors du glissement et il considère un coefficient de frottement dynamique  $\mu_d$  qui est plus petit que  $\mu_s$ . La loi de frottement s'écrit lorsqu'il y a contact :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_N = 0 \text{ et } N \geq 0, \\ \text{soit } \frac{|F_f|}{|N|} < \mu_d \text{ et } \underline{v_g} = 0 \\ \text{soit } \frac{|F_f|}{|N|} = \mu_d \text{ et } \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \underline{v_g} = -\lambda \underline{F_f} \end{array} \right. \quad (\text{I.26})$$

Si cette formulation permet de mieux rendre compte des comportements expérimentaux, elle introduit par contre une difficulté. En effet, pour  $\frac{|F_f|}{|N|} = \mu_d$  et  $\underline{v_g} = 0$ , on ne sait pas si on est dans une première alternative (*cas collé*) ou dans la deuxième alternative (*début de glissement*). On lève généralement cette indétermination par une description dynamique (souvent implicite) de la loi de frottement. Pratiquement, on décrit les transitions acceptables de l'état en glissement à l'état collé à l'état en glissement.

### I.B.3. INSUFFISANCE DE LA LOI DE COULOMB

#### I.B.3.1. VARIATION DU COEFFICIENT DE FROTTEMENT

**E. RABINOWICZ** est l'auteur d'importants travaux sur le frottement de solides métalliques (voir **E. RABINOWICZ** <sup>[25]</sup> plus particulièrement). Il s'est intéressé au phénomène de *stick-slip*, qui engendre des instabilités (grincements) lors du glissement à des vitesses réduites. On analyse généralement cela comme suite d'états collés et en glissement. La modélisation par une simple loi de Coulomb ne permet pas de rendre compte des résultats expérimentaux, tout au moins sur des modèles simples à pression de contact constante. Il propose donc de considérer deux dépendances :

- Le coefficient statique  $\mu_s$  dépend du temps de contact stationnaire.
- Le coefficient dynamique  $\mu_d$  dépend de la vitesse de glissement.

En ce qui concerne le premier point, soulevé à l'origine par Coulomb, le débat est encore ouvert pour savoir si on doit effectivement faire dépendre  $\mu_s$  du temps de contact stationnaire ou de la vitesse de chargement tangentielle (i.e. la vitesse avec laquelle la force tangentielle varie).

Des expériences de **V.I. JOHANNES**, **M.A. GREEN** et **C.A. BROCKLEY** <sup>[26]</sup> montrent une variation de 0.28 à 0.38 du coefficient statique par un changement d'un facteur 1000 de la vitesse de chargement tangentielle. On pourra trouver une discussion de ce problème dans **R.S.H. RICHARDSON**, **H. NOLLE** <sup>[27]</sup> qui compare l'influence des deux paramètres : vitesse de chargement tangentielle et le temps de contact stationnaire sur le coefficient statique. Sa conclusion est que les deux paramètres sont nécessaires à la bonne description durant le mouvement *stick-slip*.

Quant au deuxième point, **E. RABINOWICZ** <sup>[28]</sup> précise qu'il existe un retard entre le changement de vitesse de glissement et le changement de coefficient de frottement. Ce retard correspond à un glissement d'environ  $10^{-3}$  cm dans les expériences qu'il a mené sur des pièces métalliques. Il propose que l'on ne fasse pas dépendre le coefficient de frottement de la vitesse instantanée mais d'une moyenne des vitesses sur les  $10^{-3}$  cm glissés précédemment.

#### I.B.3.2. DEPLACEMENT NORMAL

Les surfaces qui entrent en contact, même minutieusement usinées ne sont jamais parfaitement planes. Celles-ci sont formées d'aspérités plus ou moins fines mais toujours grandes par rapport à la dimension moléculaires. Les propriétés mécaniques de ces aspérités sont souvent sensiblement différentes des propriétés des matériaux composant les corps des solides. Pour cette raison, on peut considérer qu'entre les deux surfaces en contact il y a une interface de petite épaisseur qui a un comportement propre (voir figure 8).

**D.M. TOLSTOI** <sup>[29]</sup> en 1967 a effectué des expériences sur le frottement de pièces métalliques qui montrent qu'il y a un lien entre la variation de la force de frottement et le déplacement normal de la pièce (voir figure 1.11).

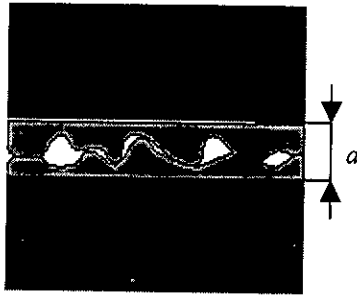


FIG. 1.10 – Interface entre deux corps en contact.

Son interprétation est la suivante : *le glissement s'accompagne de chocs entre les aspérités des deux surfaces en contact*. Ces chocs entretiennent une certaine pression qui s'oppose à la compression de l'interface. La force de frottement  $F_f$  dépend donc à la fois de la vitesse de glissement  $v_G$  et de l'épaisseur de l'interface  $a$ . Il décompose la variation de la force de frottement en deux parties :

$$\frac{d F_f}{d v_G} = \frac{\partial F_f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial v_G} + \frac{\partial F_f}{\partial v_G} \quad (1.27)$$

où

- $\frac{d F_f}{d v_G}$  serait toujours positif et représente l'augmentation de la résistance au cisaillement avec la vitesse de glissement,
- $\frac{\partial F_f}{\partial a}$  représente la diminution de la force de frottement avec la séparation  $a$ ,
- $\frac{\partial a}{\partial v_G}$  représente l'augmentation de la séparation avec la vitesse de glissement.

Expérimentalement il y a deux cas où  $\frac{\partial a}{\partial v_G}$  est constaté nul, pour des vitesses extrêmement petites et lorsque les déplacements normaux sont fortement amortis. Dans ces deux cas, l'auteur constate qu'il n'y a pas de phénomène de *stick-slip*, phénomène qui intervient lorsque  $\frac{d F_f}{d v_G} < 0$ .

Il constate à contrario que si on impose une vibration normale au glisseur, on observe une réduction substantielle du frottement, particulièrement importante si on impose une vibration en résonance avec la vibration naturelle du glisseur.

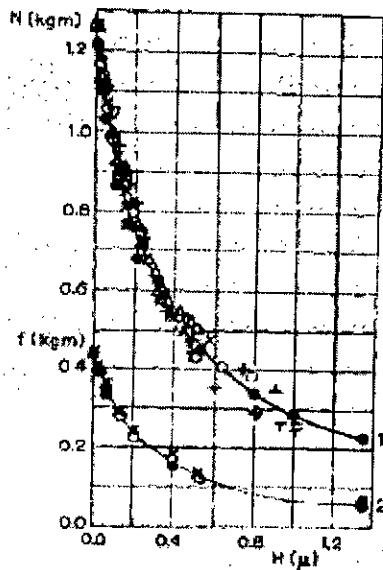


FIGURE I.11: FORCE DE FROTTEMENT  $f$  ET CHARGE NORMALE  $N$  EN FONCTION DE LA COMPOSANTE NORMALE DU DEPLACEMENT  $H$  <sup>II</sup>.

### CONCLUSION PARTIELLE

Les lois classiques de Coulomb ou d'Amontons relient de manière simple les composantes normales et tangentielles des contraintes qui s'exercent au point de contact lors d'un glissement.

La plupart des expériences sur le frottement sec montrent les limitations de la validité de ces lois. On vient de voir deux aspects à partir desquels on pourrait compléter la loi de Coulomb.



**DEUXIEME CHAPITRE :**

**MODELISATION MATHEMATIQUE**

## II.1. POSITION DU PROBLEME

Nous considérons une bille sur un support encastré et soumis à une force  $F_a$  (voir Figure II.1). Nous nous plaçons dans un repère cartésien  $(O, x, y, z)$ .

Les deux corps occupent un même domaine  $\Omega$  borné, de frontière  $\Gamma$ . Celle-ci est divisée en trois parties :

- $\Gamma_U$  sur laquelle le déplacement est imposé. Ici,  $\Gamma_U$  est la base encastrée du support,
- $\Gamma_F$  sur laquelle la force est imposée. Elle est composée des bords libres de  $\Omega$ , sur lesquels la contrainte est nulle, et du point C d'application de la charge  $F_a$ ,
- $\Gamma_{Spot}$  la surface de contact potentielle entre la bille et le support. Nous imposons sur cette surface un contact unilatéral avec des conditions de frottement obéissant à la loi de Coulomb.

Nous notons  $\Gamma_S$  la zone de contact réelle ( $\Gamma_S \subset \Gamma_{Spot}$ ).

Nous nous plaçons dans le cadre de l'élasticité linéaire statique.

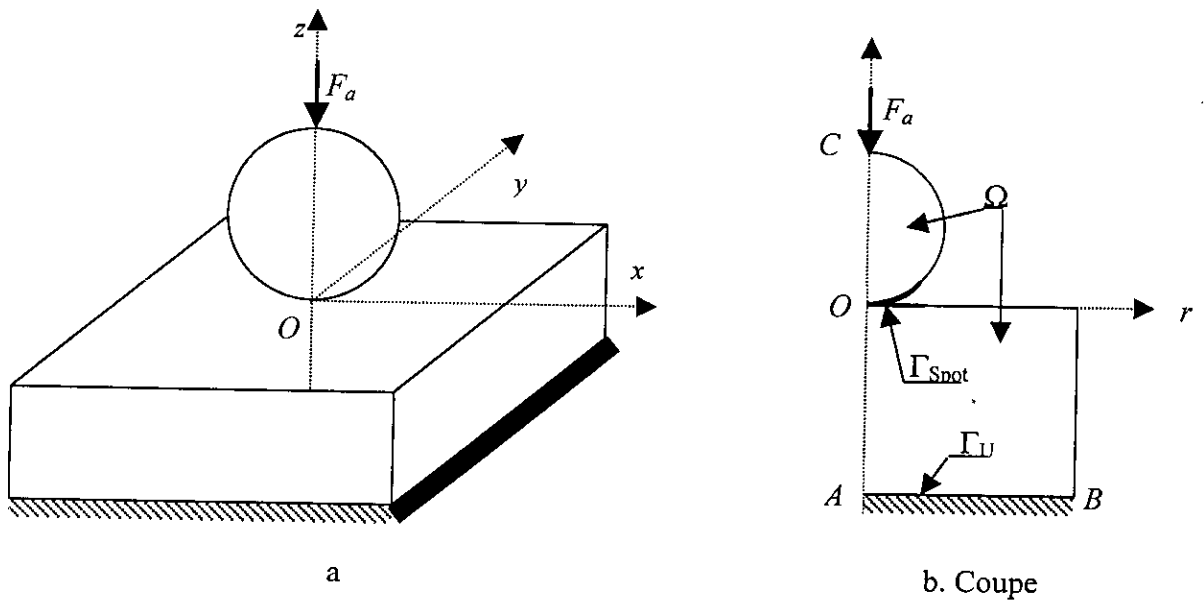


Figure II.1 : Indentation Bille / Plan

Le problème ainsi posé, défini par les équations suivantes, écrites en notation tensorielle avec la convention d'Einstein :

- Equations d'équilibre sur  $\Omega$  :

$$\sigma_{ij,j} + f_{v_i} = 0 \quad (\text{II.1})$$

$\sigma_{ij}$  : tenseur des contraintes

$f_{v_i}$  : forces de volume

Nous supposons que :  $f_{v_i} \in L^2(\Omega)$ .

- *Relation déformations - déplacements* : nous l'écrivons dans l'hypothèse des petits déplacements de la théorie classique de l'élasticité :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{(II.2)}$$

$\varepsilon_{ij}$  : tenseur des déformations

$u_i$  : vecteur des déplacements

- *loi de comportement élastique linéaire* :

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} + \sigma_{oij} \quad \text{(II.3)}$$

$a_{ijkl}$  : matrice d'élasticité. Elle est symétrique, définie positive.

$\sigma_{oij}$  : tenseur des contraintes initiales

- *conditions aux limites* :

➤ **géométriques** :

$$u_i = 0 \text{ sur } \Gamma_U \quad \text{(II.4)}$$

➤ **mécaniques**:

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = F_{a_i} \text{ au point } C$$

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = 0 \text{ sur les bords libres de } \Omega \quad \text{(II.5)}$$

$n_j$  : normale sortante à la frontière  $\Gamma$ .

➤ **Conditions de contact sur  $\Gamma_{S_{\text{ptt}}}$**  :

- **Contact unilatéral**

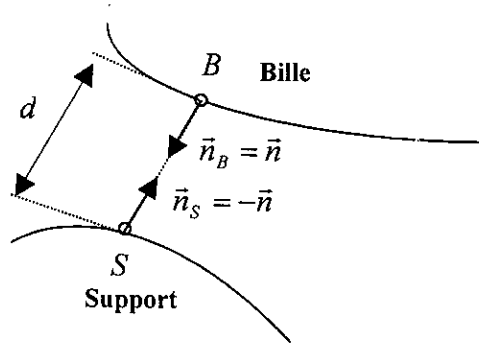
$$u_N - d < 0 \Rightarrow \sigma_N = 0$$

$$u_N - d = 0 \Rightarrow \sigma_N \leq 0 \quad \text{(II.6)}$$

$u_N = (u_{B_i} - u_{S_i}) \cdot n_i$  : déplacement normal relatif entre les deux solides,

$u_{B_i} (u_{S_i})$  : déplacement du point  $B$  de la bille (respectivement  $S$  du support),

" $d$ " est la distance entre deux points  $B$  et  $S$ , en vis-à-vis, appartenant respectivement à la bille et au support (voir figure II.2). Elle est mesurée le long de la normale commune  $\vec{n}$ .


 Figure II.2: définition de  $d$ 

Les points  $B$  et  $S$  sont initialement en contact lorsque " $d$ " est nul.

$u_N - d < 0$ , il n'y a pas contact.

$u_N - d = 0$ , il y a contact. La condition  $\sigma_N \leq 0$  traduit le fait que la contrainte normale doit être compressive pour maintenir en contact les deux points.

➤ **Loi de Coulomb :**

$$\begin{aligned}
 |\sigma_T| &\leq f \cdot |\sigma_N|, \\
 |\sigma_T| < f \cdot |\sigma_N| &\Rightarrow u_T = 0 \\
 |\sigma_T| = f \cdot |\sigma_N| &\Rightarrow \exists \lambda \geq 0, u_T = -\lambda \cdot \sigma_T
 \end{aligned}
 \tag{II.7}$$

$f$ : coefficient de frottement. Il est supposé constant et positif.

$u_{T_i} = (u_{B_i} - u_{S_i}) - u_N n_i$ : déplacement tangentiel relatif entre les deux solides.

$\sigma_{T_i} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_N n_i$ : contrainte tangentielle dans le contact.

Physiquement, la loi de Coulomb peut être interprétée de la façon suivante :

- Il n'y a pas de mouvement relatif entre deux particules adjacentes appartenant l'une à l'indenteur, l'autre au support tant que la norme de la contrainte tangentielle  $\sigma_T$  est inférieure à une valeur critique  $f \cdot |\sigma_N|$ . En effet,  $\sigma_T$ , appelée aussi contrainte de frottement, est suffisante pour s'opposer au mouvement relatif des deux solides et assurer l'équilibre statique.
- Lorsque  $|\sigma_T|$  atteint la valeur critique  $f \cdot |\sigma_N|$ , il se produit un glissement entre les deux solides. En effet, la contrainte de frottement n'est plus suffisante pour s'opposer au mouvement relatif. Elle est alors colinéaire, de sens opposé, au déplacement tangentiel relatif.

**II.2. FORMULATION VARIATIONNELLE**

Pour établir la formulation variationnelle de ce problème <sup>[30,31,32]</sup>, nous multiplions (II.1) par une fonction test  $(v_i - u_i)$ , puis nous intégrons sur le domaine  $\Omega$  :

$$u \in (H^1(\Omega))^3, \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + f_{v_i})(v_i - u_i) dx = 0 \quad \forall v \in (H^1(\Omega))^3 \quad (\text{II.8})$$

Après intégration par parties successives sur le domaine occupé par la bille et le support, et en tenant compte de la continuité de la contrainte normale sur  $\Gamma_{Spot}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} u \in (H^1(\Omega))^3, \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u)(\varepsilon_{ij}(v) - \varepsilon_{ij}(u)) dx - \int_{\Omega} f_{v_i}(v_i - u_i) dx - \int_{\Gamma_U} \sigma_{ij} n_j (v_i - u_i) ds - \int_{\Gamma_F} \sigma_{ij} n_j (v_i - u_i) ds \\ - \int_{\Gamma_{Spot}} \sigma_N(u)(v_N - u_N) ds - \int_{\Gamma_{Spot}} \sigma_T(u)(v_T - u_T) ds = 0 \quad \forall v \in (H^1(\Omega))^3 \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Nous avons :

- $\int_{\Gamma_U} \sigma_{ij}(v_i - u_i) ds = 0$  d'après la condition (II.4) portant sur  $u$  et  $v$
- $\int_{\Gamma_F} \sigma_{ij}(v_i - u_i) ds = F_{a_i}(v_i - u_i)$  d'après la condition (II.5)
- La condition de contact unilatéral (II.6) portant sur  $u$  et  $v$  nous donne :

$$\int_{\Gamma_{Spot}} \sigma_N(u)(v_N - u_N) ds = \int_{\Gamma_{Spot}} \sigma_N(u)(v_N - d) ds \geq 0 \quad (\text{II.10})$$

La loi de frottement de Coulomb (II.7) nous donne l'inégalité :

$$-\sigma_T(v_T - u_T) \leq f |\sigma_N| (|v_T| - |u_T|) \quad (\text{II.11})$$

Nous définissons les ensembles  $V$  et  $K$  des champs de déplacement admissibles :

$$\begin{aligned} V &= \{v, v \in (H^1(\Omega))^3, v = 0 \text{ sur } \Gamma_U\} \\ K &= \{v, v \in V, v_N - d \leq 0 \text{ sur } \Gamma_{Spot}\} \end{aligned}$$

En combinant (II.9) à (II.11), nous obtenons l'inéquation variationnelle :

$$u \in K, a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq f(v - u) \quad \forall v \in K \quad (\text{II.12})$$

Avec :

- $a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v) dx$

$\frac{1}{2} a(v, v)$  représente le travail virtuel de déformation

- $f(v) = \int_{\Omega} f_{v_i} v_i dx + F_{a_i} v_i - \int_{\Omega} \sigma_{0ij} \varepsilon_{ij}(v) dx$

$f(v)$  représente le travail virtuel des forces externes et des contraintes internes.

- $j(u, v) = \int_{\Gamma_{\text{spor}}} f |\sigma_N(u)| |v_T| ds$

$j(u, v)$  représente le travail virtuel de frottement.

□

**Remarque :**

La fonctionnelle  $j(u, v)$  est non - convexe, non -différentiable et non - quadratique. D'un point de vue mécanique, la non-différentiabilité est due au fait que, dans le modèle de frottement de Coulomb, la séparation entre les zones de glissement et d'adhérence, dans le contact, se réduit à une ligne. Physiquement, cela n'est pas le cas. En effet, des expériences ont montré qu'une bande intermédiaire sépare les zones de glissement "*pur*" et "*d'adhérence pure*".

**KIKUCHI** et **ODEN** <sup>[32]</sup> ont montré l'équivalence entre l'inéquation (II.12) et le problème de contact unilatéral avec frottement défini par les équations (II.1) à (II.7).

La dépendance de  $\sigma_N$  en  $u$  n'étant pas connue, la question de l'existence de solutions au problème de contact (II.12) reste ouverte.

Nous allons tout d'abord étudier un problème intermédiaire de contact avec frottement, où la pression de contact est connue. Pour ce cas particulier, l'existence et l'unicité d'une solution sont démontrées (cf. § II.3).

Nous résolvons ensuite le problème général (II.12) à l'aide d'un processus itératif dont chaque pas est constitué par la résolution du problème intermédiaire de contact avec  $\sigma_N$  connue (cf. § II.4).

### II.3. ETUDE DU PROBLEME INTERMEDIAIRE AVEC $\sigma_N$ CONNUE

#### II.3.1. INEQUATION VARIATIONNELLE

Nous reprenons le problème de contact décrit au paragraphe II.1., pour lequel la pression  $\sigma_N$  est connue :

$$\sigma_N = F_N \text{ sur } \Gamma_{\text{Spot}} \text{ avec } F_N \in L^\infty(\Gamma_{\text{Spot}})$$

La surface de contact réelle  $\Gamma_S$  (sur laquelle  $\sigma_N < 0$ ) est alors connue, et la condition (II.6) n'a plus besoin d'être imposée.

Dans ce cas, la loi de Coulomb (II.7) peut s'exprimer sous la forme sous-différentielle <sup>[33]</sup> :

$$(-\sigma_T) \in \partial J_T(u_T) \tag{II.13}$$

$$\partial J_T(u_T) = \begin{cases} -f|F_N| & \text{si } u_T < 0 \\ [-f|F_N|, f|F_N|] & \text{si } u_T = 0 \\ f|F_N| & \text{si } u_T > 0 \end{cases}$$

L'énergie potentielle  $J_T$  est donc définie par :

$$J_T(u_T) = f|F_N||u_T|$$

Nous représentons, sur la figure II.3, la loi de Coulomb ainsi que  $J_T$ .

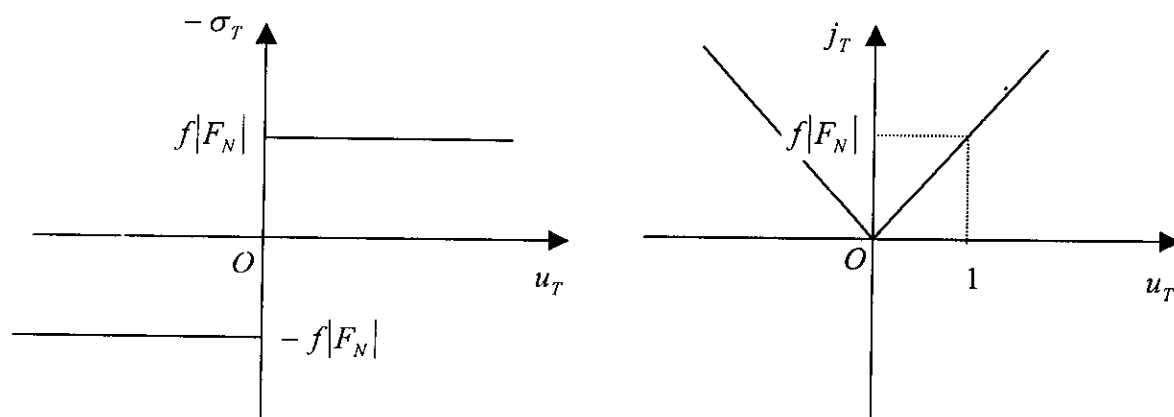


Figure II.3: Loi de Coulomb

$J_T$  étant sous-différentielle dans  $\mathbb{R}$ , elle vérifie la relation :

$$\sigma_T(v_T - u_T) \leq J_T(v_T) - J_T(u_T)$$

qui est identique à (II.11).

L'inéquation variationnelle (II.12) devient donc :

$$u \in V, \quad a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq f_c(v - u) \quad \forall v \in V \quad \text{(II.14)}$$

Avec 
$$j(v) = \int_{\Gamma_s} f |F_N| |v_T| ds$$

Et 
$$f_c(v) = \int_{\Omega} f v_i dx + F_{a_i} v_i - \int_{\Omega} \sigma_{ijkl} \varepsilon_{ij}(v) dx + \int_{\Gamma_s} F_N v_N ds$$

Nous avons de plus la proposition suivante :

L'inéquation variationnelle (II.14) est équivalente au problème de minimisation :

$$u \in V, \quad \Pi(u) \leq \Pi(v) \quad \forall v \in V \quad \text{(II.15)}$$

avec : 
$$\Pi(v) = \frac{1}{2} a(v, v) + j(v) - f_c(v).$$

□

**Remarque :**

Les forces de frottement n'étant pas conservatrices, il n'existe pas d'énergie potentielle, au sens usuel du terme, pour les problèmes de frottement. Néanmoins, nous pouvons considérer que la fonctionnelle  $\Pi$  représente l'énergie potentielle associée au problème de frottement statique de Coulomb.

L'inéquation (II.15) traduit ainsi une généralisation du principe du travail virtuel en élasticité classique : la solution  $u$  du problème de contact avec frottement minimise l'énergie potentielle  $\Pi$  parmi tous les champs cinématiquement admissibles.

□



### II.3.2. EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION

D'après (II.15), écrivons la fonctionnelle  $\Pi$  sous la forme :

$$\Pi(v) = F(v) + j(v)$$

$$\text{avec } F(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f_c(v)$$

$j$  est non-différentiable. Cependant, elle est convexe et semi-continue inférieurement, et donc sous différentiable sur  $V^{[32]}$ .

$F$  est strictement convexe, semi-continue inférieurement et Gâteaux-différentiable sur  $V$ .

De plus, la frontière  $\Gamma_l$  étant de mesure non nulle,  $F$  et donc  $\Pi$  sont coercitives sur  $V$ .

Ces conditions permettent d'énoncer le théorème suivant :

#### Théorème

Il existe un minimum unique  $u$ , appartenant à  $V$ , de la fonctionnelle d'énergie  $\Pi$ , définie en, (II.15) . De plus,  $u$  est la solution de l'inéquation variationnelle (II.14).

### II.3.3. REGULARISATION DE LA LOI DE COULOMB

L'approximation directe de l'inéquation variationnelle (II.15) par les éléments finis conduit à un système discret difficile à résoudre du fait de la non-différentiabilité de la fonctionnelle  $j$ . Afin de surmonter cette difficulté, nous considérons une perturbation Gâteaux-différentiable  $j_\varepsilon$  de  $j$ , fonction du paramètre  $\varepsilon$  positif, qui approche  $j$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

Nous étudions deux régularisations de la loi de Coulomb. Pour chacune d'elle,  $j_\varepsilon$  est définie par :

$$1) \quad j_\varepsilon(v) = \int_{\Gamma_N} f |F_N| \Phi_\varepsilon^1(v) ds$$

Avec  $\Phi_\varepsilon^1$  définie sur  $V$  par :

$$\Phi_\varepsilon^1(v) = \frac{|v_T|^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon} \tag{II.16}$$

$$2) \quad j_\varepsilon(v) = \int_{\Gamma_N} f |F_N| \Phi_\varepsilon^2 ds$$

Avec  $\Phi_\varepsilon^2$  définie sur  $V$  par :

$$\Phi_\varepsilon^2 = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} v_T v_T & \text{si } |v_T| \leq \varepsilon \\ |v_T| - \frac{\varepsilon}{2} & \text{si } |v_T| > \varepsilon \end{cases} \tag{II.17}$$

Dans les deux cas,  $j_\varepsilon$  est Gâteaux-différentiable sur  $V$ .

Nous remplaçons donc  $j$  par  $j_\varepsilon$  dans l'expression de  $\Pi$  (cf. (II.15)) pour obtenir la fonctionnelle d'énergie régularisée associée  $\Pi_\varepsilon$  :

$$\Pi_\varepsilon = \frac{1}{2} a(v, v) + j_\varepsilon(v) - f_c(v) \quad (\text{II.18})$$

$\Pi_\varepsilon$  est strictement convexe, Gâteaux-différentiable et coercitive car  $\Gamma_U$  est de mesure non nulle.

Nous pouvons ainsi énoncer le théorème suivant :

**Théorème**

Pour  $\varepsilon$  positif, il existe un minimum unique  $u_\varepsilon$  de  $V$ , de la fonctionnelle d'énergie perturbée  $\Pi_\varepsilon$ . De plus,  $u_\varepsilon$  est solution de l'équation variationnelle :

$$a(u_\varepsilon, v) + \langle Dj_\varepsilon(u_\varepsilon), v \rangle = f_c(v) \quad \forall v \in V \quad (\text{II.19})$$

Enfin, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, la solution  $u_\varepsilon$  tend fortement vers la solution  $u$  du problème (II.15).

Pour nos deux régularisations, la dérivée de Gâteaux de  $j_\varepsilon$  s'écrit :

$$1) \quad \langle Dj_\varepsilon(u), v \rangle = \int_{\Gamma_S} f |F_N| \frac{u_T}{|u_T|^{1-\varepsilon}} v_T ds \quad (\text{II.20})$$

$$2) \quad \langle Dj_\varepsilon(u), v \rangle = \int_{\Gamma_S} f |F_N| \Psi_\varepsilon(|u_T|) \frac{u_T v_T}{|u_T|} ds \quad (\text{II.21})$$

Avec :

$$\Psi_\varepsilon(|u_T|) = \begin{cases} \frac{|u_T|}{\varepsilon} & \text{si } |u_T| \leq \varepsilon \\ 1 & \text{si } |u_T| > \varepsilon \end{cases}$$

□

**Remarque :**

Nous pouvons exprimer les lois de frottement régularisées correspondant à (II.16) et (II.17) sous une forme analogue à (II.13) :

$$\sigma_T(u_T) = -f |F_N| \frac{\partial \Phi_\varepsilon(u_T)}{\partial u_T}$$

Car  $\Phi_\varepsilon$  est différentiable dans les deux cas.

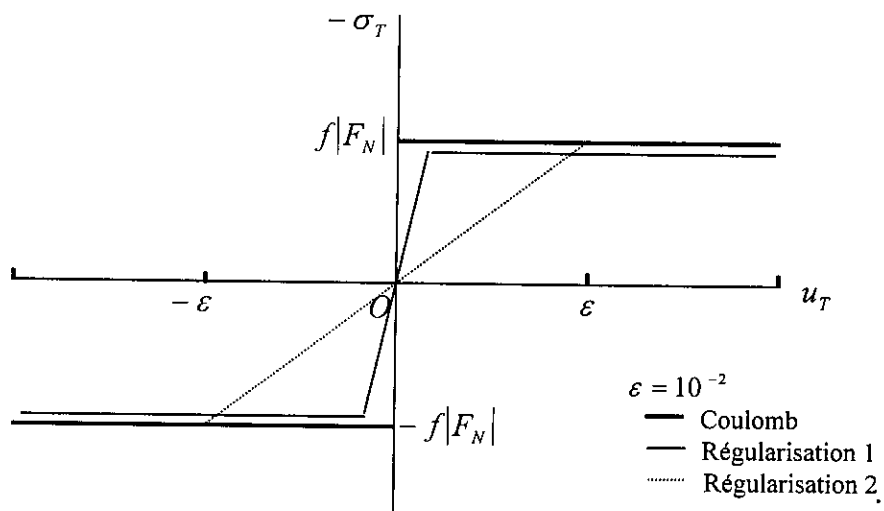
Ces deux lois s'écrivent donc :

$$1) \quad \sigma_T(u_T) = -f|F_N| \frac{u_T}{|u_T|^{1-\varepsilon}} \quad (\text{II.22})$$

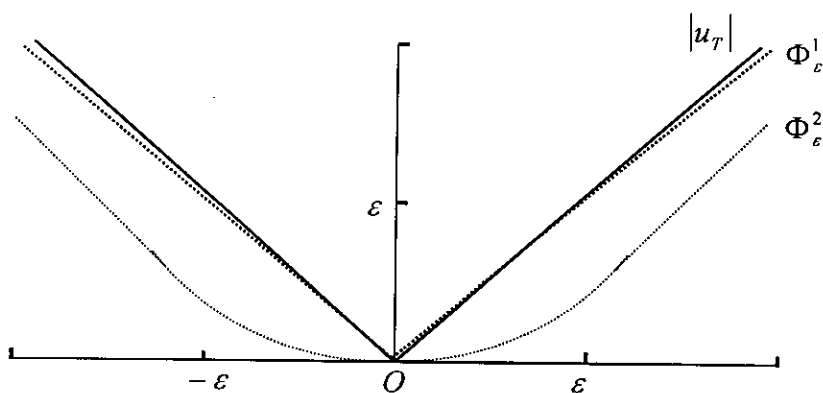
$$2) \quad \sigma_T(u_T) = \begin{cases} -f|F_N| \frac{u_T}{\varepsilon} & \text{si } |u_T| \leq \varepsilon \\ -f|F_N| \frac{u_T}{|u_T|} & \text{si } |u_T| > \varepsilon \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

Nous les représentons ainsi que la loi de Coulomb (voir Figure II.3) sur la figure II.4. Nous traçons sur la figure II.4.b les fonctions  $\Phi_\varepsilon^1$  et  $\Phi_\varepsilon^2$  (cf. (II.16) et (II.17)).

□



a. Régularisation de la loi de Coulomb



b. Fonctions  $\Phi_\varepsilon^1$  et  $\Phi_\varepsilon^2$

Figure II.4 : Régularisation de la loi de Coulomb

La deuxième régularisation aboutit à une partition de la surface de contact  $\Gamma_S$  en deux parties :

- $\Gamma_{S1}$  sur laquelle :  $|u_T| \leq \varepsilon$  et  $\sigma_T = -f|F_N| \frac{u_T}{\varepsilon}$
- $\Gamma_{S2}$  sur laquelle :  $|u_T| > \varepsilon$  et  $\sigma_T = -f|F_N| \frac{u_T}{|u_T|}$

Sur  $\Gamma_{S2}$ , la norme de la contrainte tangentielle atteint la valeur critique  $f|F_N|$ . Il se produit donc un glissement entre les deux solides sur cette portion de la surface de contact.  $\Gamma_{S1}$ ,  $|\sigma_T|$  reste inférieure à  $f|F_N|$ , ce qui correspond à un état d'adhérence.

□

**Remarque :**

Ceci rejoint les observations effectuées par **SPENCE** (cf. Annexe C).

□

**II.3.4. EQUATION VARIATIONNELLE DU PROBLEME REGULARISE**

L'équation variationnelle du problème régularisé est donc, d'après (II.14) et (II.19) :

$$\begin{aligned}
 u_\varepsilon \in V, \int_{\Omega} a_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u_\varepsilon) \varepsilon_{kl}(v) dx + \langle Dj_\varepsilon(u_\varepsilon), v \rangle &= \int_{\Omega} f v_i v_i dx + F_{a_i} v_i - \int_{\Omega} \sigma_{Oij} \varepsilon_{ij}(v) dx \\
 + \int_{\Gamma_S} F_N v_N ds \quad \forall v \in V & \tag{II.24}
 \end{aligned}$$

$\langle Dj_\varepsilon(u), v \rangle$  est définie par les relations (II.20) ou (II.21) selon la régularisation utilisée.

□

**Remarque:**

Ce problème est non linéaire. En effet :

- Dans le cas de la première régularisation, le terme de frottement  $\langle Dj_\varepsilon(u), v \rangle$  dépend du déplacement  $u$  par l'intermédiaire de  $|u_T|^{1-\varepsilon}$  (cf. (II.20)).
- Dans le cas de la deuxième régularisation, la partition de la surface de contact en zones glissante et adhérente, et donc la construction du terme de frottement  $\langle Dj_\varepsilon(u), v \rangle$ , dépend du déplacement  $u$  (cf. § II.3.3).

□

### II.3.5. RESOLUTION DU PROBLEME REGULARISE

#### II.3.5.A. INTRODUCTION

Le problème (II.24) étant non linéaire, nous devons donc mettre en œuvre un processus itératif pour le résoudre.

Dans leurs travaux, **MARTINS ET AL.** <sup>[34]</sup>, ainsi que **RADI** <sup>[35]</sup> utilisent une méthode d'approximations successives. Pour leur part, **KIKUCHI ET AL.** <sup>[32]</sup> développent un algorithme basé sur la méthode de **NEWTON - RAPHSON**.

Nous présentons, dans les deux paragraphes suivants, ces deux algorithmes de résolution. Nous les avons programmés et inclus successivement dans notre logiciel de résolution par éléments finis.

Des essais numériques ont montré que la méthode des approximations successives :

- Converge moins vite que celle de **NEWTON - RAPHSON** dans le cas de la première régularisation,
- Converge trop vite dans le cas de la deuxième régularisation (cf. remarque n°2 § II.3.5.b). Elle ne permet alors pas aux contraintes dans le contact de vérifier au mieux la loi de Coulomb.

Nous avons donc choisi, pour mener à bien nos calculs, d'utiliser la méthode de Newton - Raphson, quelle que soit la régularisation.

#### II.3.5.B. LA METHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

L'algorithme de résolution du problème (II.24), par la méthode des approximations successives, est décrit en (II.25).

□

#### Remarque :

Lors de la construction du système, nous utilisons  $u^{i-1}$  pour calculer  $\langle Dj_\varepsilon(u), v \rangle$ .

□

Dans le cas de la première régularisation, nous avons :

$$\langle Dj_\varepsilon(u), v \rangle = \int_{\Gamma_s} \frac{g}{|u^{i-1}|^{1-\varepsilon}} u_T v_T ds \quad (\text{Cf. (II.20)}).$$

Dans le cas de la deuxième régularisation, la surface de contact se décompose en deux parties, adhérente  $\Gamma_{S1}$  et glissante  $\Gamma_{S2}$  (cf. § II.3.3).

Si nous avons, en un point :

- $|u^{i-1}| \leq \varepsilon$ , celui-ci appartient à  $\Gamma_{S1}$ , le terme de frottement s'écrit alors :

$$\langle Dj_\varepsilon(u), v \rangle = \int_{\Gamma_{S1}} \frac{g}{\varepsilon} u_T v_T ds \quad (\text{cf. (II.21)}), \text{ et s'assemble dans la matrice du syst\eme.}$$

(II.25)

**Algorithme**

Nous posons :  $g = f|\sigma_N|$

**Initialisation :** *Nous r\esolvons le probl\eme :*

$$u^1 \in V, a(u^1, v) = f_c(v) \quad \forall v \in V$$

Nous obtenons alors le d\eplacement  $u^1$ .

**It\eration :**  $i = 2, \dots$

Nous supposons que le d\eplacement  $u^{i-1}$  est connu.

Nous calculons le terme  $\langle Dj_\varepsilon(u), v \rangle$  \`a l'aide de  $u^{i-1}$  (cf. remarque n)1).

Nous r\esolvons l'\equation :

$$u^i \in V, a(u^i, v) + \langle Dj_\varepsilon(u), v \rangle = f_c(v) \quad \forall v \in V \quad (\text{cf. (I.19)}).$$

Nous obtenons alors le d\eplacement  $u^i$ .

Le test de convergence s'effectue en calculant l'erreur sur la solution  $u$  :

$$\frac{|u^i - u^{i-1}|}{|u^i|}$$

Cette int\egrale joue le r\ole d'une p\enalisation sur les d\epplacements tangentiels afin d'imposer la condition :  $u_T = 0$  dans la zone d'adh\erenc\e (cf. (II.7)).

- $|u^{i-1}| > \varepsilon$ , celui-ci appartient \`a  $\Gamma_{S2}$ , le terme de frottement s'\ecrit alors :

$$\langle Dj_\varepsilon(u), v \rangle = \int_{\Gamma_{S1}} \frac{u_T^{i-1}}{|u_T^{i-1}|} g v_T ds \quad (\text{cf. (II.21)}), \text{ et s'assemble dans le second membre du}$$

syst\eme.

Cette int\egrale repr\esente le travail des forces de frottement associ\ees aux points de  $\Gamma_{S2}$ . Elles ne d\ependent du d\eplacement  $u$  que par l'interm\ediate de la direction et de l'orientation de son vecteur.

1. Lorsque nous utilisons la deuxi\eme r\egularisation, le test de convergence sur  $u$  n'est pas utile.

En effet, le processus a converg\e lorsque l'\etat des points (glissant dans un sens ou adh\erant) \`a l'it\eration (i-1) reste inchang\e \`a l'it\eration  $i$ . Dans ce cas, les termes de frottement et les syst\emes sont identiques lors des deux it\erations. Et donc  $u^{i-1} = u^i$ .

### II.3.5.C. LA METHODE DE NEWTON - RAPHSON

Après discrétisation et assemblage, le problème (II.24) s'écrit sous la forme (c.f. § II.5.5) :  
 $U \in U_c$  tel que  $K(U).U = F$

La résolution de ce système revient donc à chercher la solution  $U^*$  de  $U_c$  telle que  
 $\Psi(U^*) = 0$

où  $\Psi$  est la force résiduelle définie par :

$$\Psi(U) = K(U).U - F \quad (\text{II.26})$$

Développons-la en série de **TAYLOR** à l'ordre 1, les termes d'ordre supérieur étant négligés :

$$\begin{aligned} \Psi(U^*) &\approx \Psi(U) + \frac{\partial \Psi}{\partial U}(U)(U^* - U) \\ &= 0 \end{aligned}$$

En notant :  $\Delta U = U^* - U$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Psi(U) &\approx -\frac{\partial \Psi}{\partial U}(U).\Delta U \\ &\approx -J(U).\Delta U \end{aligned}$$

$J$  est la matrice jacobienne. D'après (II.26), elle s'écrit :

$$J(U) = \frac{\partial \Psi}{\partial U}(U) = K(U) + \frac{\partial K}{\partial U}(U).U \quad (\text{II.27})$$

□

#### Remarque :

Le deuxième terme de cette expression rend la matrice  $J$  non symétrique.

□

Le processus de Newton - Raphson consiste à calculer la correction  $\Delta U^r$  sur la solution  $U^r$  obtenue à l'itération  $r$ , à partir des forces résiduelles  $\Psi(U^r)$ , en résolvant le système :

$$J(U^r).\Delta U^r = -\Psi(U^r)$$

$J(U^r)$  et  $\Psi(U^r)$  sont calculées respectivement à l'aide des équations (II.27) et (II.26).

$$J(U^r) = K(U^r) + \frac{\partial K}{\partial U}(U^r).U^r$$

$$\Psi(U^r) = K(U^r).U^r - F$$

Nous obtenons ainsi la nouvelle solution :

$$U^{r+1} = U^r + \Delta U^r$$

Les itérations sont poursuivies jusqu'à ce que le résidu  $\Psi$  soit inférieur à une tolérance  $\varepsilon$ . En effet, celui-ci mesure directement la convergence du processus.

Pour résoudre le problème (II.24), nous utilisons la méthode de Newton- Raphson généralisée. Elle consiste à retirer le terme non linéaire  $\frac{\partial K}{\partial U}(U).U$  de la matrice jacobienne (II.27):

$$J(U^r) = K(U^r)$$

Le processus est identique à celui exposé ci-dessus. L'algorithme de résolution est donc le suivant:

**Algorithme**

(II.28)

**Initialisation :**  $U^0 = 0$   
 $\Psi(U^0) = K(U^0).U^0 - F = -F$

**Itérations :**  $r = 0, \dots$

(1) Calcul de  $\Delta U^r$  par la résolution de :  $K(U^r).\Delta U^r = -\Psi(U^r)$

(2) Correction de la solution :  $U^{r+1} = U^r + \Delta U^r$

(3) calcul de :  $K(U^{r+1}) = J(U^{r+1})$   
 $\Psi(U^{r+1}) = K(U^{r+1}).U^{r+1} - F$

*Le test de convergence s'effectue en calculant l'erreur :*

- Soit sur le résidu :  $\frac{|\Psi(U^{r+1})|}{|F|}$
- Soit sur la solution :  $\frac{|U^{r+1} - U^r|}{|U^{r+1}|}$

□

**Remarque**

Lors de la première itération  $r = 0$ , le système à résoudre correspond au problème de contact sans frottement.

En effet, la matrice  $K(U^0)$  ne contient pas de terme de frottement, car la dérivée de Gâteaux  $\langle Dj(u^0), v \rangle$  est nulle ((cf.II.20) et (II.21)).

□

**II.4. RESOLUTION DU PROBLEME GENERAL**

Nous présentons ici la résolution du problème de contact avec frottement décrit dans les paragraphes II.1 et II.2 (cf. (II.12)).

Nous utilisons pour cela une méthode d'approximations successives portant non pas sur les déplacements (cf. § II.3.5.b), mais sur le terme  $g = f|\sigma_N|$ . Ainsi, à chaque itération, nous



résolvons un problème de contact avec  $g$  et donc  $\sigma_N$  connue. La résolution de ce dernier a été exposée dans le paragraphe II.3.

Le schéma général de la méthode est donc le suivant :

**Initialisation** : nous posons  $g_0 = 0$

Ceci nous ramène à résoudre le problème sans frottement. En effet, le terme  $\langle Dj(u), v \rangle$  est nul (cf. § II.3.5.a)

**Itération n** : nous supposons  $g_{n-1}$  connu.

Nous résolvons le problème de contact (II.24), à l'aide de l'algorithme (II.28) (cf. § II.3.5.a) et nous obtenons  $g_n$ .

L'algorithme de résolution est donc le suivant :

**Algorithme**

**(II.29)**

(i1) **Initialisation** : nous posons :  $g_0 = 0$

Nous résolvons le problème sans frottement.

Nous obtenons le déplacement  $u_1$ .

Nous calculons la contrainte normale au bord  $\sigma_{N_1}$

Nous posons :  $g_1 = f |\sigma_{N_1}|$ .

**Itérations : n = 2, ...**

Nous supposons  $g_{n-1}$  connu.

(i2) **Initialisation** : Nous posons  $u^0 = u_{n-1}$ , déplacement obtenu à l'itération (n-1).

Nous calculons la matrice  $K(u^0)$  et le résidu  $\Psi(u^0)$  (cf. (I.26)).

Itérations :  $r = 0, \dots$

(1) Nous résolvons le système :  $K(u^r) \cdot \Delta u^r = -\Psi(u^r)$ .

(2) Nous calculons la nouvelle solution :  $u^{r+1} = u^r + \Delta u^r$ .

(3) Nous calculons la matrice  $K(u^{r+1})$  et le résidu  $\Psi(u^{r+1})$ .

Après convergence, la solution en déplacement est notée  $u_n$ .

Nous calculons la contrainte normale correspondante  $\sigma_{N_n}$ .

Nous posons :  $g = f |\sigma_{N_n}|$

*Le test de convergence s'effectue en calculant l'erreur sur  $g$  :* 
$$g : \frac{|g_n - g_{n-1}|}{|g_n|}$$

□

**Remarque**

L'initialisation de la résolution du problème de contact avec  $\sigma_N$  connue (étape i2) est ici différente de celle de l'algorithme (II.28). Nous posons  $u^0 = u_{n-1}$ , où  $u_{n-1}$  est le déplacement

calculé à l'itération précédente (n-1), et non plus  $u^0 = 0$ . En effet, cette dernière condition revient à résoudre le problème de contact sans frottement, et n'est donc pas optimale à cette étape de la résolution.

## II.5. DISCRETISATION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

### II.5.1. INTRODUCTION

Le problème défini au paragraphe II.1 présentant une symétrie de révolution autour de l'axe Oz, nous limitons l'étude à un demi-plan à l'aide des coordonnées axisymétriques. Les calculs par éléments finis portent donc sur la demi-section  $\Omega$  représentée sur la Figure II.1.b. Le domaine est maillé à l'aide d'éléments finis à deux dimensions (triangles et quadrangles).

L'équation (II.24) contenant des intégrales sur la zone de contact  $\Gamma_S$ , il convient de créer des éléments de contact. Ceux-ci sont construits dans une zone potentielle  $\Gamma_{Spot}$  englobant  $\Gamma_S$ , à partir des éléments à une dimension de chacune des frontières en vis-à-vis de la bille et du support (voir figure II.5).

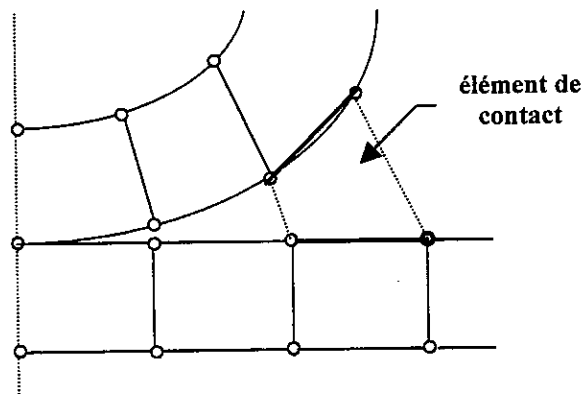


Figure II.5: Eléments de contact

Nous imposons un contact nœud-à-nœud à l'interface entre les deux solides. Nous discrétisons donc les surfaces de contact potentielles de chaque solide par le même nombre d'éléments, les segments en vis-à-vis ayant la même longueur.

Un élément de contact est activé lorsque les deux segments en vis-à-vis qui le composent, coïncident (voir Figure II.6).

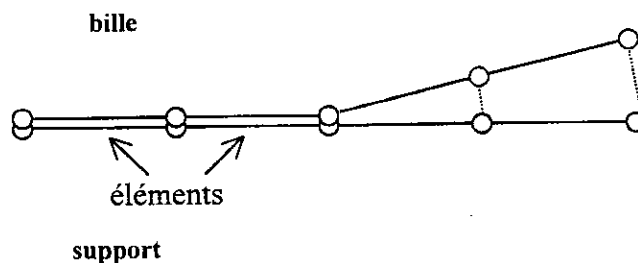


Figure II.6 : Activation d'un élément de contact

Pour chacun d'eux, nous construisons une table de connexion spéciale, reliant les nœuds de la bille et du support. Elle permettra d'assembler les matrices de contact élémentaire dans la matrice globale du système (cf. § II.5.5).

### II.5.2. DISCRETISATION DE $\Omega$

Nous discrétisons le domaine  $\Omega$  par un ensemble de  $N_\Omega$  éléments  $\Omega_e$  tels que :

1.  $\Omega = \bigcup_{e=1}^{N_\Omega} \Omega_e$ .
2. Chaque élément est, soit un triangle soit un quadrilatère de surface non nulle.
3. Les intérieurs de deux éléments sont disjoints.
4. Toute face d'un élément est, soit face d'un autre élément adjacent, soit une partie de la frontière  $\Gamma$ .

Notre problème étant axisymétrique, le déplacement  $v$  est indépendant de l'angle  $\theta$  autour de l'axe  $z$ . Nous choisissons donc de travailler en coordonnées cylindriques dans le plan  $\theta=0$ .

$v$  s'écrit alors au point de coordonnées  $(r, z)$  :

$$v = \langle v_r(r, z) v_z(r, z) \rangle$$

$v_r$  : déplacement selon l'axe  $(O, r)$

$v_z$  : déplacement selon l'axe  $(O, z)$

Nous introduisons la transformation  $G_1$  qui définit les coordonnées  $(r, z)$  d'un point  $M$  de l'élément réel, à partir des coordonnées  $(\xi, \eta)$  du point  $m$  correspondant de l'élément de référence :

$$G_1 : m(\xi, \eta) \rightarrow M(r, z)$$

Elle est bijective en tout point intérieur et sur le contour de l'élément.

**Exemple :** Pour un élément triangulaire

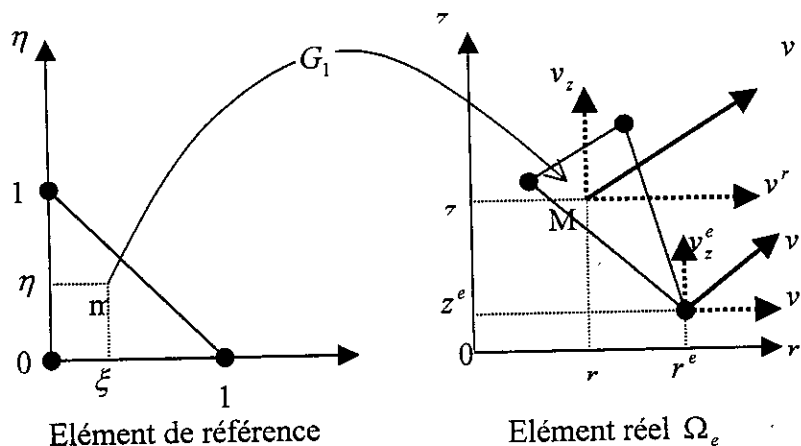


Figure II.7 : Transformation d'un élément de référence en élément réel

Nous définissons les coordonnées  $(r, z)$  du point M, par interpolation des coordonnées  $(r^e, z^e)$  des nœuds de l'élément auquel il appartient, à l'aide de fonctions de forme  $N$ . Celles-ci s'expriment en fonction de  $\xi$  et  $\eta$  sur l'élément de référence, et sont telles que :

Pour le nœud  $j$  :  $N_j(\xi, \eta) = \delta_{ij}$

Nous calculons de la même façon les déplacements  $(v_r, v_z)$  de M par interpolation des déplacements  $(v_r^e, v_z^e)$  des nœuds de l'élément, à l'aide des mêmes fonctions de forme (cf. Annexe A).

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} r(\xi, \eta) &= \langle N(\xi, \eta) \rangle \{r^e\} \\ z(\xi, \eta) &= \langle \dot{N}(\xi, \eta) \rangle \{z^e\} \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

et

$$\begin{aligned} v_r(\xi, \eta) &= \langle N(\xi, \eta) \rangle \{v_r^e\} \\ v_z(\xi, \eta) &= \langle N(\xi, \eta) \rangle \{v_z^e\} \end{aligned}$$

que nous écrivons sous la forme :

$$\{\varpi(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} v_r(\xi, \eta) \\ v_z(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = [N(\xi, \eta)] \{v^e\} \quad (\text{II.31})$$

$$\{v^e\} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ v_r^e \\ v_z^e \\ \vdots \end{Bmatrix}, \text{ vecteur élémentaire des déplacements.}$$

Notons  $J$  la matrice jacobienne de la transformation  $G_I$  :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

et  $j$  son inverse :

$$j = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial r} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \langle N_{,\eta} \rangle \{z^e\} & -\langle N_{,\xi} \rangle \{z^e\} \\ -\langle N_{,\eta} \rangle \{r^e\} & \langle N_{,\xi} \rangle \{r^e\} \end{bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

Les dérivées premières s'obtiennent par la relation :

$$\{\partial_r\} = [J]\{\partial_\xi\} \quad (\text{II.33})$$

Nous pouvons donc calculer les déformations axisymétriques du point réel M, en fonction des déplacements nodaux. Elles sont définies par :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{r,r} \\ \frac{v_r}{r} \\ v_{z,z} \\ v_{r,z} + v_{z,r} \end{Bmatrix}$$

En utilisant les relations (II.30) à (II.33), nous obtenons :

$$\{\varepsilon\} = [B]\{v^e\} \quad (\text{II.34})$$

Avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} \dots & (J_{11}N_{i,\xi} + J_{12}N_{i,\eta}) & 0 & \dots \\ \dots & \frac{N_i}{r} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & (J_{21}N_{i,\xi} + J_{22}N_{i,\eta}) & \dots \\ \dots & (J_{21}N_{i,\xi} + J_{22}N_{i,\eta}) & (J_{11}N_{i,\xi} + J_{12}N_{i,\eta}) & \dots \end{bmatrix}$$

Nous pouvons finalement discrétiser les contraintes axisymétriques au point M, elles sont définies par :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix}$$

La loi de comportement (II.3) s'écrit donc sous forme discrétisée, en utilisant (II.34) :

$$\{\sigma\} = [H]\{\varepsilon\} + \{\sigma_0\} = [H][B]\{v^e\} + \{\sigma_0\} \quad (\text{II.35})$$

$\{\sigma_0\}$  : vecteur des contraintes initiales en M,

$[H]$  : matrice d'élasticité.

Les matériaux étant isotropes,  $[H]$  a la forme suivante :

$$[H] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$E, \nu$  : Module d'Young et coefficient de Poisson du matériau.

### II.5.3. DISCRETISATION DE $\Gamma_{Spot}$

Nous discrétisons, de manière identique, la zone de contact potentielle de chaque solide  $\Gamma_{Spot}$  (voir Figure II.5) par un ensemble de  $N_s$  éléments finis  $\Gamma_{S_e}$ , à une dimension, tels que :

$$\begin{aligned} 1. \quad \Gamma_{Spot} &= \bigcup_{e=1}^{N_s} \Gamma_{S_e} \\ 2. \quad \Gamma_{S_i} \cap \Gamma_{S_j} &= \{ \} \end{aligned}$$

Nous introduisons la transformation  $G_2$  qui définit les coordonnées  $(r, z)$  d'un point M de l'élément réel, à partir des coordonnées  $\xi$  du point m correspondant de l'élément de référence :

$$G_2 : m(\xi) \rightarrow M(r, z)$$

Elle est bijective en tout point de l'élément.

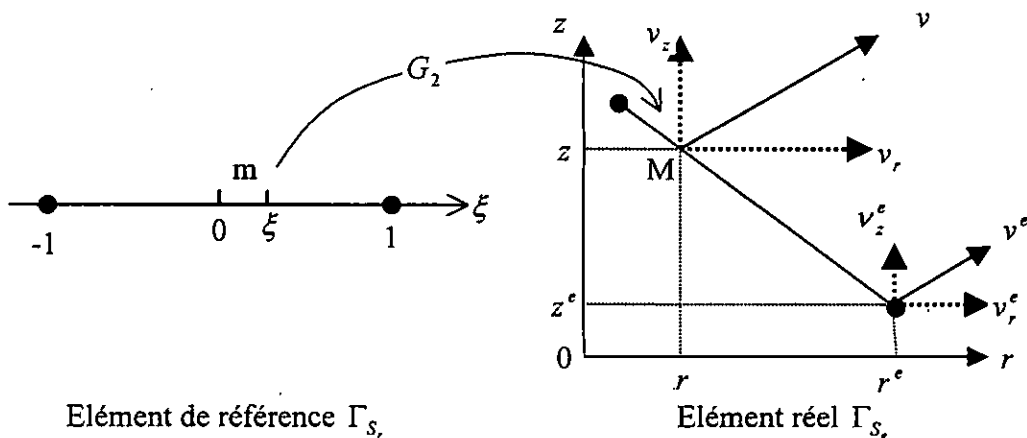


Figure II.8 : Bijection des coordonnées

Nous définissons, de même que précédemment, les coordonnées  $(r, z)$  et les déplacements  $(\nu_r, \nu_z)$  du point M, par interpolation des coordonnées  $(r^e, z^e)$  et des déplacements  $(\nu_r^e, \nu_z^e)$  des

nœuds de l'élément auquel il appartient. Les fonctions de forme  $N_i$  utilisées ne dépendent que de  $\xi$ , sur l'élément de référence (cf. annexe A).

Nous avons donc :

$$\begin{cases} r(\xi) = \langle N_1(\xi) \rangle \{r^e\} \\ z(\xi) = \langle N_1(\xi) \rangle \{z^e\} \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

et :

$$\begin{cases} v_r(\xi) = \langle N_1(\xi) \rangle \{v_r^e\} \\ v_z(\xi) = \langle N_1(\xi) \rangle \{v_z^e\} \end{cases}$$

que nous écrivons sous la forme :

$$\{v(\xi)\} = \begin{Bmatrix} v_r(\xi) \\ v_z(\xi) \end{Bmatrix} = [N_1(\xi)] \{v^e\} \quad (\text{II.37})$$

En utilisant les mêmes notations qu'en (II.31).

Les intégrales sur  $\Gamma_S$  contenant les déplacements relatifs normaux  $v_N$  et tangentiels  $v_T$ , il convient de les discrétiser. Nous calculons ceux-ci en choisissant, par commodité, l'indenteur comme référence. Nous avons donc :

$$\begin{cases} v_N = v_{B_N} - v_{S_N} \\ v_T = v_{B_T} - v_{S_T} \end{cases}$$

Où :

$v_{B_N}$  et  $v_{B_T}$  sont les déplacements normal et tangentiel du point B de la frontière de la bille,  $v_{S_N}$  et  $v_{S_T}$  sont les déplacements normal et tangentiel du point S, en vis-à-vis, de la frontière du support.

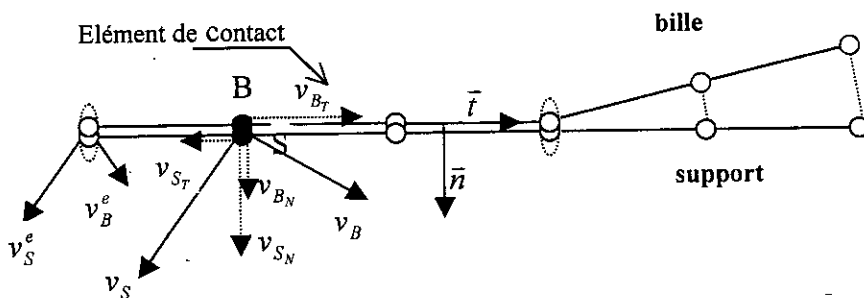


Figure II.9 : Vecteurs normal et tangentiel des éléments

Ceux-ci sont obtenus par projection des déplacements  $v_B$  et  $v_S$ , des points B et S, sur la normale  $\bar{n}$  et la tangente  $\bar{t}$ , calculées en ce point par rapport à la frontière de la bille (voir Figure II.9). De plus,  $v_B$  et  $v_S$  sont interpolés à l'aide de l'expression (II.37).

Nous obtenons donc :

$$\begin{cases} v_N = \langle n \rangle (\{v_B\} - \{v_S\}) = \langle n \rangle [N_1(\xi)] (\{v_B^e\} - \{v_S^e\}) \\ v_T = \langle t \rangle (\{v_B\} - \{v_S\}) = \langle t \rangle [N_1(\xi)] (\{v_B^e\} - \{v_S^e\}) \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

Où  $\{v_B^e\}$  et  $\{v_S^e\}$  sont les déplacements des nœuds, de la bille et du support, appartenant à l'élément de contact.

□

### Remarque

1. Les vecteurs  $\bar{n}$  et  $\bar{t}$  sont calculés en fonction des coordonnées des nœuds de l'élément de contact, de la façon suivante :

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} t_z \\ -t_r \end{Bmatrix} \text{ et } \{t\} = \begin{Bmatrix} t_r \\ t_z \end{Bmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} t_r = \frac{dr}{d\xi} / \sqrt{\left(\frac{dr}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2} \\ t_z = \frac{dz}{d\xi} / \sqrt{\left(\frac{dr}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\xi} = \langle N_{1,\xi} \rangle \{r^e\} \\ \frac{dz}{d\xi} = \langle N_{1,\xi} \rangle \{z^e\} \end{cases} \quad \text{d'après (II.36)}$$

2. Nous calculons  $v_N$  et  $v_T$  uniquement aux points de Gauss de l'élément de contact.

En effet, le calcul numérique des intégrales sur la frontière  $\Gamma_S$  ne nécessite les valeurs de  $v_N$  et  $v_T$  qu'en ces points (cf. § II.5.4.b)

□



**II.5.4. TRANSFORMATION D'UNE INTEGRALE**

**II.5.4.A. TRANSFORMATION D'UNE INTEGRALE SUR  $\Omega$**

Les intégrales sur le domaine  $\Omega$  sont discrétisées de la façon suivante :

$$\iint_{\Omega} (...) dx = \sum_{e=1}^{N\Omega} \iint_{\Omega_e} (...) dx$$

La transformation géométrique  $G_1$ , décrite au paragraphe II.5.2, permet de ramener l'intégration sur tout élément réel  $\Omega_e$  à une intégration plus simple sur l'élément de référence  $\Omega_r$ , (voir Figure II.7). Celle-ci est ensuite effectuée numériquement à l'aide d'un schéma classique de quadrature de Gauss.

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_e} (...) dx &= \iint_{\Omega_r} (...) 2\pi r dr dz \\ &= \iint_{\Omega_r} (...) 2\pi r |\det J| d\xi d\eta \\ &= \sum_{i=1}^{NPG} ((...) 2\pi r |\det J| \omega_i)_{\xi_i, \eta_i} \end{aligned} \tag{II.39}$$

$NPG$  : nombre de points d'intégration,

$\xi_i, \eta_i, \omega_i$  : coordonnées et poids du point d'intégration  $i$ .

**II.5.4.B. TRANSFORMATION D'UNE INTEGRALE SUR  $\Gamma_S$**

Les intégrales sur la frontière  $\Gamma_S$  sont discrétisées de la façon suivante :

$$\int_{\Gamma_S} (...) ds = \sum_{e=1}^{N_c} \int_{\Gamma_{S_e}} (...) ds$$

$N_c$  : nombre d'éléments de contact activés.

La transformation géométrique  $G_2$ , décrite au paragraphe II.5.3, permet de ramener l'intégration sur tout élément  $\Gamma_{S_e}$ , à une intégration sur l'élément de référence  $\Gamma_{S_r}$  (voir Figure II.8). Nous utilisons ensuite la méthode numérique décrite en **a**.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{S_e}} (...) ds &= \int_{\Gamma_{S_e}} (...) 2\pi r ds \\ &= \int_{\Gamma_{S_e}} (...) 2\pi r |\det J_s| d\xi \\ &= \sum_{i=1}^{NPG} ((...) 2\pi r |\det J_s| \omega_i)_{\xi_i} \end{aligned} \tag{II.40}$$

$s$  : abscisse curviligne sur  $\Gamma_{S_e}$ ,

$|\det J_s| = \sqrt{(r_{,\xi})^2 + (z_{,\xi})^2}$  : jacobien de la transformation  $G_2$ ,

$\xi_i, \omega_i$  : coordonnées et poids du point d'intégration  $i$ .

### II.5.5. DISCRETISATION DE L'EQUATION VARIATIONNELLE

Pour résoudre le problème du contact avec frottement, nous avons choisi de mettre en œuvre un processus incrémental dont chaque pas est constitué par la résolution du problème (II.12), en supposant la zone de contact  $\Gamma_S$  connue (cf. § II.6.1).

Nous remplaçons donc la condition de contact unilatéral (II.6) par la condition de contact bilatéral :  $u_N - d = 0$  sur  $\Gamma_S$ . Nous intégrons celle-ci dans l'équation (II.24) à l'aide de la fonction de pénalisation :

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \int_{\Gamma_S} (v_N - d)(v_N - d) ds \quad \varepsilon_1 > 0$$

L'équation du problème régularisé (II.24) devient donc :

$$\begin{aligned} u_\varepsilon \in V, \int_{\Omega} a_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u_{kl}) \varepsilon_{kl}(v) dx + \langle Dj_\varepsilon(u_\varepsilon), v \rangle + \frac{1}{\varepsilon_1} \int_{\Gamma_S} (u_{\varepsilon_N} - d)(v_N - d) ds = \\ \int_{\Omega} f_i v_i dx + F_a v_i - \int_{\Omega} \sigma_{Oij} \varepsilon_{ij}(v) dx \quad \forall v \in V \end{aligned} \tag{II.41}$$

Nous discrétisons les différentes intégrales composant cette équation à l'aide des schémas de discrétisation exposés dans les paragraphes II.5.2 et II.5.3. Nous obtenons alors :

$$\sum_{e=1}^{N_\Omega} \langle v^e \rangle [k] \{u^e\} + \sum_{e=1}^{N_c} [(\langle v_B^e \rangle - \langle v_S^e \rangle) (k_F) + k_c] (\{u_B^e\} - \{u_S^e\}) = \sum_{e=1}^{N_\Omega} \langle v^e \rangle \{f\}$$

avec :

- $[k] = \iint_{\Omega_e} [B]^T [H] [B] dx$  : matrice élémentaire de rigidité,
- $[k_F] = \int_{\Gamma_{S_e}} \frac{f |F_N|}{|u_T|^{1-\varepsilon}} [N_1]^T \{t\} \{t\} [N_1] ds$  : matrice élémentaire de frottement dans le cas de la régularisation 1 (cf. (II.20)),

- $[k_F] = \int_{\Gamma_{S1_e}} \frac{f|F_N|}{\varepsilon} [N_1]^T \{t\}\langle t \rangle [N_1] ds + \int_{\Gamma_{S2_e}} \frac{f|F_N|}{|u_T|} [N_1]^T \{t\}\langle t \rangle [N_1] ds$  : matrice élémentaire de frottement dans le cas de la régularisation 2 (cf. (II.2.1)).

□

**Remarque**

$|u_T|$  est calculé à l'aide de la relation (II.38).

□

- $[k_c] = \frac{1}{\varepsilon_1} \int_{\Gamma_{S_e}} [N_1]^T \{n\}\langle n \rangle [N_1] ds$  : matrice élémentaire de contact,
  - $\{f\} = \int_{\Omega_e} [N]^T \{f_a^e\} dx + \{F_a^e\} - \int_{\Omega_e} [B]^T \{\sigma_0^e\} dx$  : vecteur élémentaire des sollicitations.
- $\{f_v^e\}$ ,  $\{F_a^e\}$ ,  $\{\sigma_0^e\}$  sont les vecteurs élémentaires des forces de volume, des forces appliquées et des contraintes internes.

□

**Remarque**

Nous calculons toutes ces intégrales élémentaires à l'aide des schémas d'intégration (II.39) et (II.40).

□

Après assemblage sur les éléments de maillage de  $\Omega$ , ainsi que sur les éléments de contact, nous obtenons l'expression discrétisée globale de l'équation (II.41) :

$$\{U\} \in U_e, \langle V \rangle [K(U)] \{U\} = \langle V \rangle \{F\}, \forall \{V\} \in U_e \quad \text{(II.42)}$$

où :

- $U_e$  est une approximation conforme par éléments finis de l'ensemble  $V$  (cf. § II.3.4),
- $\{U\}$  et  $\{V\}$  sont les vecteurs globaux des déplacements,
- $[K]$  est la matrice globale du système. Elle est construite par assemblage des matrices élémentaires  $[k]$ ,  $[k_F]$  et  $[k_c]$ . Elle est symétrique, définie positive.
- $\{F\}$  est le vecteur global des sollicitations. Il est construit par assemblage des vecteurs élémentaires  $\{f\}$ .

## II.6. PROGRAMME DE RESOLUTION

### II.6.1. INTRODUCTION

Il existe différentes méthodes pour appliquer la charge sur l'indenteur <sup>[4]</sup> :

- La méthode du chargement total : le problème est résolu avec un seul pas de chargement,
- La méthode du chargement pseudo-incrémental : une série de charges croissantes est appliquée sur les solides, dans leur configuration initiale. Les conditions de contact (zones glissante et adhérente dans le contact) sont réactualisées au début de chaque pas de chargement,
- La méthode du chargement incrémental : ce type de chargement est similaire au précédent, à la différence que la géométrie et les conditions de contact sont réactualisées à l'issue de chaque incrément, à partir des résultats en déplacements et en contraintes. Cette méthode permet de suivre l'évolution du contact et du chargement.

Pour résoudre le problème du contact avec frottement, nous avons choisi la méthode du chargement incrémental.

En effet, si nous appliquons directement la charge finale (première méthode), la gestion du contact impose des déplacements très importants dans le support. Ceci engendre alors des contraintes anormalement élevées dans la zone de contact.

Nos essais numériques ont montré qu'il est nécessaire, pour obtenir une bonne précision sur les résultats, d'activer les éléments un par un. Nous calculons donc les incréments de charge de façon à ce que le rayon de contact évolue suffisamment lentement.

Ceci permet aux solides de subir des déformations plus réalistes, et aux surfaces libres d'entrer en contact de façon plus précise.

A chaque incrément de charge, nous déterminons la solution du problème (II.42) à l'aide du processus itératif (II.29) (cf. § II.4).

A chaque itération de cet algorithme, nous résolvons le système linéaire :

$$K(u') \Delta u' = \Psi(u') \quad (\text{étape (1)})$$

à l'aide de la méthode du gradient conjugué (cf. § II.6.3)

Après avoir obtenu la solution, et avant de réactualiser les coordonnées des nœuds du maillage, nous examinons s'il convient d'agrandir la surface de contact par activation d'un élément de contact.

Pour cela, nous calculons la position du premier nœud B de la bille situé hors de la zone de contact. Lorsque celui-ci pénètre dans le maillage du support, le nœud S en vis-à-vis est projeté sur la surface de la bille (voir Figure II.10, cf. § II.6.4.a), un nouvel élément de contact est alors activé.

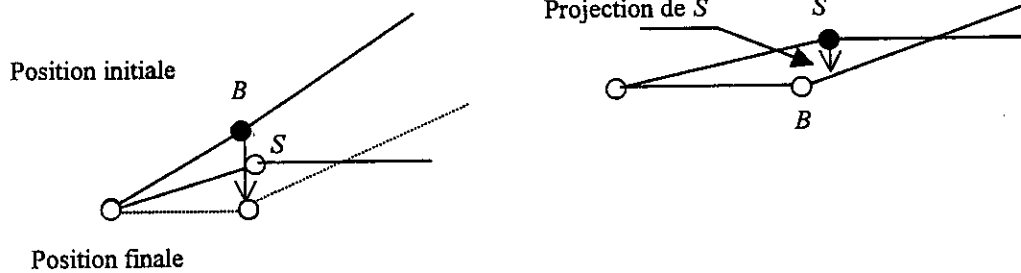


Figure II.10 : Projection d'un nœud

Lorsque cette projection entraîne un déplacement du nœud S trop important, induisant des sollicitations trop élevées dans le support, nous partageons l'incrément de charge en deux de telle sorte que les nœuds B et S arrivent juste en contact à l'issue du premier (cf. § II.6.4.b).

A la fin de chaque itération de l'algorithme de résolution, nous calculons le résidu ainsi que la matrice du nouveau système (cf. (II.29) étape (3)). Pour cela, nous évaluons la matrice de frottement  $[k_F]$  (cf. § II.5.5). Ce calcul nécessite de connaître :

- Pour la régularisation 1, le déplacement tangentiel total de l'incrément en cours,
- Pour la régularisation 2, les contraintes normales et tangentielles sur chaque élément de la surface de contact (cf. § II.6.5). Ceci nous permet de déterminer si celui-ci appartient à la zone d'adhérence  $\Gamma_{S1}$ , ou de glissement  $\Gamma_{S2}$  (cf. § II.3.3).

Les éléments de la surface de contact sont activés par superposition des éléments à une dimension de chacune des frontières en vis-à-vis de la bille et du support. Cela suppose que les nœuds de chacune d'elles coïncident parfaitement, notamment au début de chaque incrément de charge.

Or, à l'issue d'un incrément, ils peuvent avoir glissé l'un par rapport à l'autre.

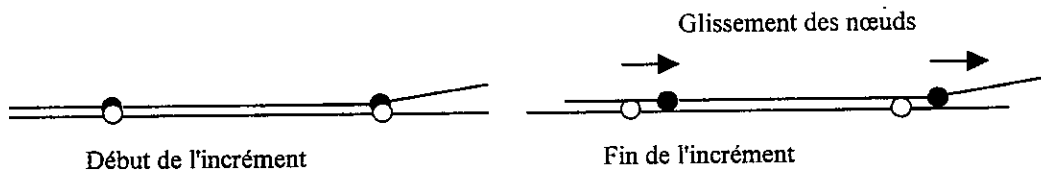


Figure II.11 : Cas du glissement des nœuds

Il est alors nécessaire de repositionner ces nœuds par un remaillage d'un des deux solides. Cependant, cette opération nécessite de recalculer les contraintes à l'intérieur de celui-ci. Un des objectifs de notre étude étant la détermination des contraintes dans le support, nous choisissons de remailler la bille afin de ne pas perturber nos résultats (cf. § II.6.6).

II.6.2. ORGANIGRAMME

La résolution du problème de contact bille-support en élasticité avec frottement, défini par l'équation (II.42), est organisée selon le schéma suivant :

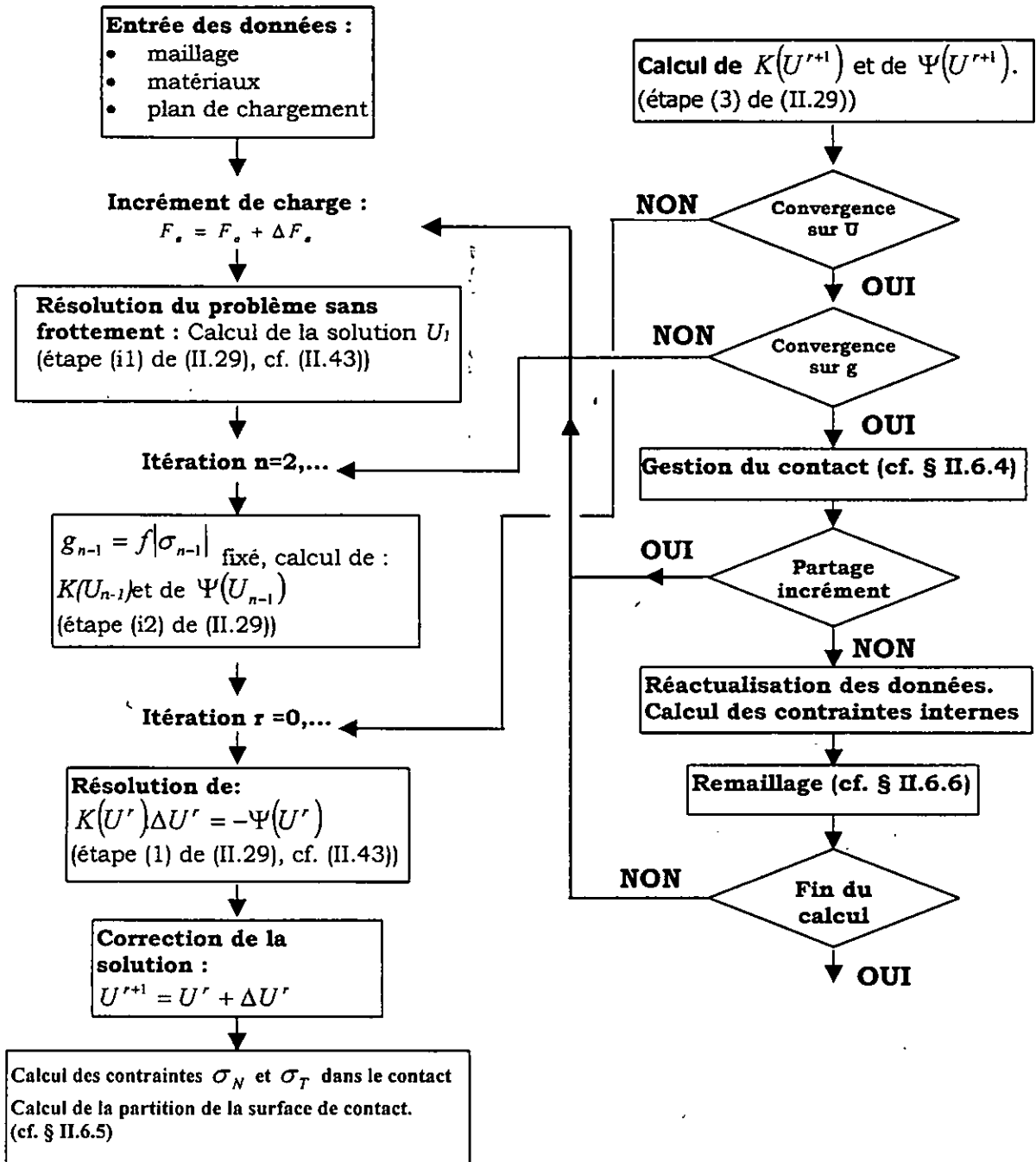


Figure II.12 : Organigramme général de résolution

□

Remarque

Ce programme fonctionne selon un plan de chargement défini à l'avance.

□

### II.6.3. RESOLUTION DU SYSTEME $[K]\{U\} = \{F\}$

#### II.6.3.A. STOCKAGE DE LA MATRICE $[K]$

Nos maillages comportent un nombre important de nœuds ( $\approx 900$ ). De plus, la matrice  $[K]$  du système, de par sa construction, est très creuse. Sa topologie (c'est à dire la position des termes non nuls) vérifie les propriétés suivantes :

- Elle est prévisible. En effet,  $K_{ij}$  est non nul si  $i$  et  $j$  sont des degrés de liberté correspondant à des nœuds appartenant à un même élément.
- Elle est symétrique,  $[K]$  l'étant également, seule sa partie supérieure est stockée.

Ceci nous permet d'utiliser la méthode MORSE pour le stockage de la matrice  $[K]$ .

Nous obtenons ainsi un compactage optimal, puisque seuls les termes non nuls de sa partie supérieure sont stockés.

Cependant, ce type de stockage nécessite un algorithme de résolution de système conservant la topologie de la matrice. Or, les techniques directes, telles que la factorisation LU, n'ont pas cette propriété, à la différence de la méthode du gradient conjugué.

De plus, celle-ci est bien adaptée à des matrices creuses, symétriques et définies positives, ce qui est le cas de  $[K]$ . Nous la retenons donc pour la résolution de notre système.

#### II.6.3.B. PRINCIPE DE LA METHODE DU GRADIENT CONJUGUE

Soit à résoudre le système :

$$\{U\} \in U_e, [K]\{U\} = \{F\}$$

ceci est équivalent au problème de minimisation de la fonctionnelle  $Q$  :

$$\{U\} \in U_e, Q(U) = \min_{V \in U_e} Q(V)$$

$Q$  étant définie par :

$$Q(V) = \frac{1}{2} \langle V \rangle [K] \{V\} - \langle V \rangle \{F\}$$

Le principe de la méthode du gradient conjugué est le suivant. Elle procède par itérations successives.

A partir de  $\{U_0\}$  donné, nous construisons la suite de terme général  $\{U_k\}$  telle que :

$$\{U_{k+1}\} = \{U_k\} + \alpha_k \{P_k\}$$

- La direction de descente  $\{P_k\}$  est donnée par l'expression suivante :

$$\{P_k\} = -grad(Q(U_k)) + \beta_k \{P_{k-1}\}$$

➤  $grad(Q(U_k))$  représente la direction de plus grande pente,

➤  $\beta_k$  est calculé de façon à ce que  $\{P_k\}$  et  $\{P_{k-1}\}$  soient conjugués.

- Le coefficient  $\alpha_k$  est choisi à minimiser la fonctionnelle  $Q$  dans la direction  $\{P_k\}$  :

$$Q(U_k + \alpha_k P_k) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} Q(U_k + \alpha P_k)$$

La suite  $\{U_k\}$  converge théoriquement vers la solution  $\{U\}$  en un nombre d'itérations inférieur à la dimension du système.

Cependant, en pratique, la convergence est mal assurée. Cela est dû à un mauvais conditionnement de la matrice, induit notamment par les pénalisations destinées à imposer la condition de contact bilatéral (cf. II.4.1)) et à régulariser la loi de frottement de Coulomb (cf. (II.20) et (II.21)).

L'emploi d'un préconditionnement s'avère donc nécessaire.

### II.6.3.c. PRECONDITIONNEMENT

Le préconditionnement consiste à trouver une matrice  $[C]$  facilement inversible, de stockage aisé et peu encombrant, telle que  $[C^{-1}K]$  soit symétrique, définie positive, de valeurs propres proches de l'unité. Cette dernière propriété lui confère ainsi un conditionnement optimal.

Le système :  $[K]\{U\} = \{F\}$  est alors remplacé par :

$$[C]^{-1}[K]\{U\} = [C]^{-1}\{F\}.$$

La matrice du gradient conjugué, appliquée à ce système, converge beaucoup plus rapidement.

Il existe plusieurs matrices  $[C]$  de préconditionnement. Parmi celles-ci, nous choisissons la matrice SSOR d'**EVANS** pour sa facilité de mise en œuvre, elle est définie par :

$$[C] = \frac{1}{2-\omega} \left( \frac{1}{\omega}[D] - [E] \right) \left( \frac{1}{\omega}[D] \right)^{-1} \left( \frac{1}{\omega}[D] - [E]^T \right)$$

- $[D]$  et  $[E]$  représentent la diagonale et le triangle inférieur de  $[K]$  :  
 $[K] = [D] - [E] - [E]^T$
- $\omega$  est un paramètre de préconditionnement compris entre 0 et 2, déterminé de façon à minimiser le nombre d'itération nécessaire à la convergence.

Ce type de préconditionnement présente l'avantage de ne pas poser de problèmes de stockage de la matrice  $[C]$ , car celle-ci est déjà contenue dans  $[K]$ .



**II.6.3.D. ALGORITHME DE RESOLUTION**

L'algorithme de résolution du système :

$$\{U\} \in U_e, [K]\{U\} = \{F\}$$

utilisant la méthode du gradient conjugué préconditionné décrite ci-dessus, est le suivant :

**Algorithme**

**(II.43)**

**Initialisation:**  $\{U_0\} = 0$

$$\{R_0\} = \{F\}$$

$$\{Z_0\} = [C]^{-1}\{R_0\}$$

$$\{P_0\} = \{Z_0\}$$

**Itérations:**  $k=0,1,\dots$

$$^{(1)} \alpha_k = \frac{\langle \{R_k\} | \{Z_k\} \rangle}{\langle \{P_k\} | [K]\{P_k\} \rangle}$$

$$\{U_{k+1}\} = \{U_k\} + \alpha_k \text{ solution en déplacement}$$

$$\{R_{k+1}\} = \{R_k\} - \alpha_k [K]\{P_k\}$$

$$\{Z_{k+1}\} = [C]^{-1}\{R_{k+1}\}$$

$$\beta_{k+1} = \frac{\langle \{R_{k+1}\} | \{Z_{k+1}\} \rangle}{\langle \{R_k\} | \{Z_k\} \rangle}$$

$$\{P_{k+1}\} = \{Z_{k+1}\} + \beta_{k+1}\{P_k\} \text{ direction de descente}$$

Retour en (1)

Le test de convergence porte sur l'erreur relative :  $e = \frac{\|U_{k+1} - U_k\|}{\|U_{k+1}\|} < \varepsilon$

**Remarque**

La résolution du système linéaire :  $\{Z\} = [C]^{-1}\{R\}$  s'effectue en trois étapes :

1. nous résolvons le système triangulaire inférieur :

$$\frac{1}{2-\omega} \left( \frac{1}{\omega} [D] - [E] \right) \{T\} = \{R\}$$

2. Nous effectuons ensuite le changement de variable suivant, à l'aide de la matrice diagonale  $[D]$ :

$$\{T\} = \frac{1}{\omega} [D]\{T\}$$

3. Nous résolvons enfin le système triangulaire supérieur :

$$\left( \frac{1}{\omega} [D] - [E]^T \right) \{Z\} = \{T\}$$

II.6.4. GESTION DU CONTACT

II.6.4.A. PROJECTION D'UN NŒUD <sup>[35,36]</sup>

A la fin de chaque incrément de charge, nous examinons la situation du premier élément de contact non activé, en calculant le produit vectoriel suivant (voir Figure II.13) :

$$\vec{S}_f = P\vec{B} \times P\vec{S} = S_f \cdot \vec{n}$$

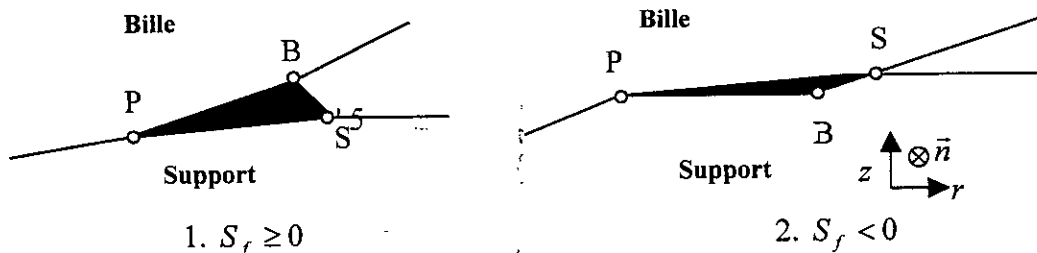


Figure II.13 : Situation de l'élément de contact non activé

Deux cas alors possibles :

1. Cas  $S_f \geq 0$  : lorsque  $0 \leq S_f < \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  proche de zéro, l'élément de contact est activé, et la zone de contact s'agrandit d'autant.
2. Cas  $S_f < 0$  : le nœud B de la bille a pénétré dans le support. Nous considérons la bille comme indéformable. C'est donc elle qui, logiquement, entraîne le support dans le déplacement imposé par la charge. Par conséquent, nous projetons le nœud S du support sur le segment PB de la bille, parallèlement au vecteur déplacement  $v_B$  du nœud B (voir Figure II.14).

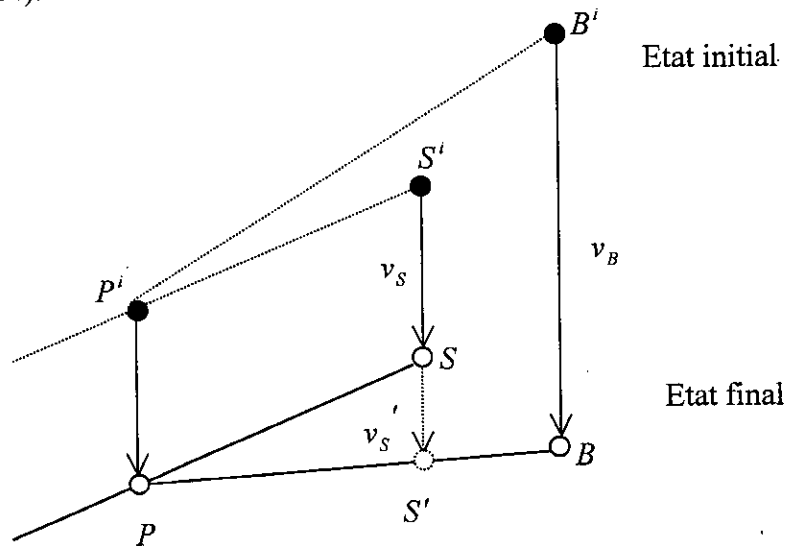


Figure II.14 : Projection d'un nœud

"S" vient alors en "S'", et subit le déplacement supplémentaire  $v'_s$ . Lorsque celui-ci est suffisamment faible pour ne pas perturber les contraintes dans le support, la projection S est prise en compte et l'élément de contact est activé.

### II.6.4.B. PARTAGE DE L'INCREMENT

Lorsque le déplacement  $v'_s$  imposé par la projection est trop important, nous ne pouvons pas projeter le nœud S. En effet, cela induirait des contraintes, dans le support, surévaluées par rapport à la charge appliquée. Nous partageons donc la charge  $\Delta F_a$  en deux incréments  $\Delta F_1$  et  $\Delta F_2$  tels que <sup>[37]</sup> :

- $\Delta F_a = \Delta F_1 + \Delta F_2$
- Le nœud S arrive au contact du segment PB à l'issue de l'incrément  $\Delta F_1$ .

Pour calculer  $\Delta F_1$ , nous considérons que, sur un petit incrément de charge, le comportement est linéaire, c'est à dire que les déplacements sont proportionnels à la force appliquée.

Nous calculons donc  $\Delta F_1$  sous la forme :

$$\Delta F_1 = \alpha \Delta F_a$$

avec les conditions suivantes :

- $0 < \alpha < 1$
- A l'issue de la charge  $\alpha \Delta F_a$ , le nœud S appartient à la droite PB. Ce qui s'écrit :  

$$(z_S^\alpha - z_B^\alpha)(r_P^\alpha - r_B^\alpha) = (z_P^\alpha - z_B^\alpha)(r_S^\alpha - r_B^\alpha)$$
 (voir Figure II.15),
- Les déplacements sont proportionnels à la charge, c'est à dire :

$$\begin{cases} r^\alpha - r^i = \alpha(r^f - r^i) \\ z^\alpha - z^i = \alpha(z^f - z^i) \end{cases}$$

$(r_i, z_i)$  : coordonnées du nœud I (I=S, P, B),

$(r^i, z^i)$  : coordonnées des nœuds au début de l'incrément  $\Delta F_a$ ,

$(r^f, z^f)$  : coordonnées des nœuds à l'issue de l'incrément  $\Delta F_a$ ,

$(r^\alpha, z^\alpha)$  : coordonnées des nœuds à l'issue de l'incrément  $\alpha \Delta F_a$ ,

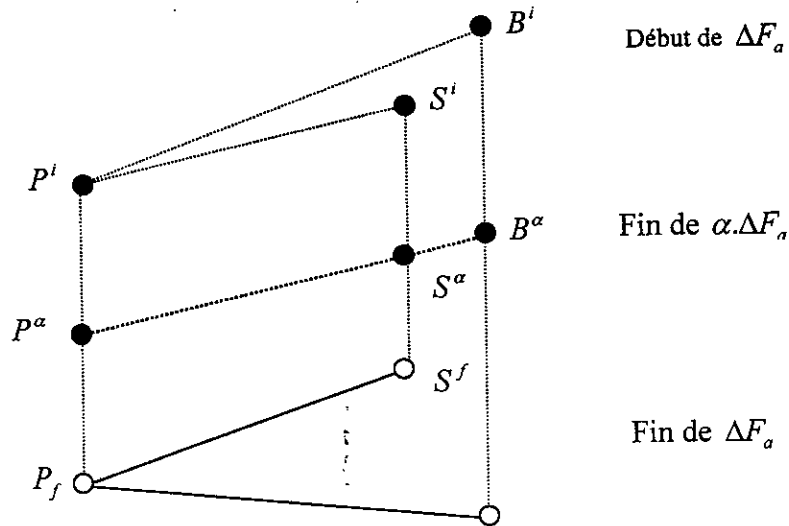


Figure II.15 : Partage de l'incrément

Lors du partage de l'incrément de charge  $\Delta F_a$ , nous exécutons les opérations suivantes :

1. Nous ne conservons pas les résultats en déplacements obtenus en résolvant le problème avec la charge  $\Delta F_a$ ,
2. Nous calculons le paramètre  $\alpha$  à l'aide du schéma décrit ci-dessus,
3. Nous résolvons le problème avec la charge  $\Delta F_1 = \alpha \Delta F_a$ . Le comportement n'étant pas tout à fait linéaire, le nœud S du support n'arrive pas exactement au contact du segment PB de la bille. Une projection est alors nécessaire avant d'activer l'élément de contact correspondant. Néanmoins, celle-ci est très faible et est supposée ne pas entraîner de perturbation dans les contraintes,
4. Nous résolvons enfin le problème avec la charge  $\Delta F_2 = \Delta F_a - \Delta F_1$  afin de compléter l'incrément  $\Delta F_a$ .

### II.6.5. CALCUL DE LA PARTITION DE LA SURFACE DE CONTACT

A chaque itération, nous calculons le résidu ainsi que la matrice du nouveau système (cf.(II.29) étape (3)). Pour cela, nous évaluons la matrice de frottement  $[k_f]$  (cf. § II.5.5). Ceci nécessite, dans le cas de la deuxième régularisation de la loi de frottement de Coulomb (cf. § II.3.3), de déterminer les zones d'adhérence  $\Gamma_{S_1}$  et de glissement  $\Gamma_{S_2}$  dans la surface de contact.

Ce type de régularisation conduit naturellement à calculer la partition de la surface de contact à l'aide du déplacement tangentiel  $u^T$  [35].

En effet, si en un point :

- $|u_T| \leq \varepsilon$ , celui-ci est dans un état adhérent,

- $|u_T| > \varepsilon$ , celui-ci est dans un état glissant.

Cependant, en pratique, ce type de gestion des éléments de contact est un peu fiable, et le calcul de la partition de  $\Gamma_S$  en  $\Gamma_{S1}$  et  $\Gamma_{S2}$  comporte des erreurs importantes.

- $|\sigma_T| < f|\sigma_N|$ , celui-ci est dans un état adhérent,
  - $|\sigma_T| \geq f|\sigma_N|$ , celui-ci est dans un état glissant.
- (II.44)

Nous calculons les intégrales élémentaires sur  $\Gamma_S$  composant  $[k_F]$ , à l'aide d'un schéma d'intégration numérique de Gauss. Nous déterminons donc l'appartenance d'un élément de contact à  $\Gamma_{S1}$  ou  $\Gamma_{S2}$  à partir de l'état de ses points d'intégration.

Nous considérons qu'un élément de contact :

- Appartient à  $\Gamma_{S1}$  si au moins un de ses points d'intégration est dans un état adhérent,
- Appartient à  $\Gamma_{S2}$  si tous ses points d'intégration sont dans un état glissant.

□

### Remarques

1. Nous n'étudions pas ici l'état, adhérent ou glissant, des nœuds dans le contact.
2. La méthode que nous avons choisie donne, implicitement, un caractère non-local à la loi de frottement régularisée.

□

### II.6.6. REMAILLAGE DE LA BILLE

Notre méthode de calcul nécessite que les nœuds de chacune des frontières coïncident parfaitement. Donc, lorsque, à l'issue d'un incrément de charge, les nœuds en vis-à-vis d'un élément de contact ont glissé l'un par rapport à l'autre, nous repositionnons ceux-ci par un remaillage de la bille.

Cette opération consiste (voir Figure II.16) :

1. A déplacer les nœuds de la frontière de la bille sur ceux du support,
2. A recalculer les contraintes internes des éléments de la bille, contenant ces nœuds, de façon à conserver l'intégrale élémentaire correspondante (cf. § II.5.5). Ceci s'écrit sous la forme :

soit  $\{\sigma_0^e\}$  le vecteur élémentaire des contraintes à l'élément,

soit  $\{\sigma_0^{e'}\}$  le vecteur élémentaire des contraintes internes  $\Omega_e$  remaillé, noté  $\Omega_e'$ ,

nous calculons  $\{\sigma_0^{e'}\}$  tel que :

$$\iint_{\Omega_e} [B]^T \{\sigma_0^e\} dx = \iint_{\Omega_e'} [B]^T \{\sigma_0^{e'}\} dx$$

Ainsi, lors de la résolution du problème (II.42) à l'incrément de charge suivant, le vecteur élémentaire des sollicitations  $\{f\}$ , contenant le travail des contraintes internes, et par conséquent le vecteur global  $\{F\}$ , ne sont pas affectés par le remaillage de la bille.

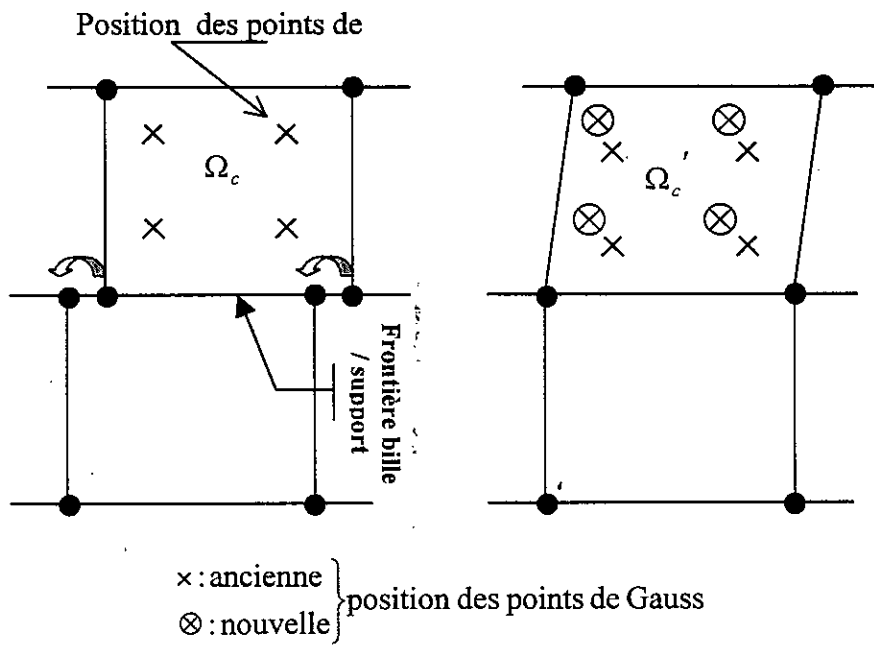


Figure II.16 : Remaillage de la bille

## II.7. CALCUL DES CONTRAINTES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FRONTIERES

### II.7.1. INTRODUCTION

Dans le cas de la deuxième régularisation de la loi de Coulomb, nous déterminons l'appartenance d'un élément de contact à la zone d'adhérence  $\Gamma_{S1}$  ou de glissement  $\Gamma_{S2}$ , à l'aide d'un calcul portant sur les contraintes normale et tangentielle (cf. § II.6.5).

Or, avec la méthode des éléments finis, celles-ci sont obtenues par le schéma numérique suivant :

1. Nous calculons le tenseur des contraintes aux points d'intégration, à l'intérieur du domaine  $\Omega$ ,
2. Nous l'extrapolons ensuite aux nœuds de la frontière  $\Gamma_S$ ,
3. Nous le projetons enfin sur la tangente à  $\Gamma_S$  afin d'obtenir les contraintes normale et tangentielle aux nœuds,
4. Nous calculons enfin les contraintes normale et tangentielle aux points d'intégration de chaque élément de contact, par interpolation des valeurs aux nœuds.

Le calcul de  $\sigma_N$  par cette technique donne des résultats satisfaisants. Par contre, celui de  $\sigma_T$  est entaché d'erreurs importantes.

En effet, la normale à la surface de contact est pratiquement parallèle à l'axe Oz.  $\sigma_T$  est donc pratiquement égale à la contrainte de cisaillement  $\sigma_x$ . Or celle-ci varie fortement au voisinage de la surface. Aussi, son extrapolation aux nœuds de la frontière (étape 2) donne des valeurs erronées.

Ces erreurs sont telles qu'il est difficile de déterminer l'état, adhérent ou glissant, des éléments de contact à l'aide des relations (II.44).

A ce stade, nous ne pouvons donc pas résoudre le cas de la deuxième régularisation de la loi de Coulomb.

□

#### Remarque :

Cette résolution est néanmoins possible avec la première régularisation (cf. § II.5.5), car il n'est pas nécessaire de connaître la partition de  $\Gamma_S$  en  $\Gamma_{S1}$  et  $\Gamma_{S2}$ . Cependant, pour les mêmes raisons que précédemment, les valeurs de  $\sigma_N$  et  $\sigma_T$  obtenues à la frontière ne nous permettent pas de déterminer  $\Gamma_{S1}$  et  $\Gamma_{S2}$ .

□

Pour calculer les contraintes au bord, nous choisissons donc d'associer la méthode des éléments finis à celle des éléments frontières. En effet, celle-ci est une méthode "mixte" qui permet d'obtenir directement les déplacements et les contraintes aux nœuds de la frontière.

Nous procédons donc de la façon suivante :

- Nous utilisons les déplacements issus de la résolution du système discrétisé par les éléments finis (cd. Etape (1) de (II.29)), comme conditions aux limites de **DRICHLET** d'un problème d'élasticité classique. Nous résolvons celui-ci à l'aide de la méthode des éléments frontières. Ainsi, nous obtenons de façon précise les contraintes aux nœuds de la frontière, et la partition de  $\Gamma_S$  en  $\Gamma_{S1}$  et  $\Gamma_{S2}$ .
- Nous présentons dans les paragraphes suivants la méthode des éléments frontières appliquée à un problème d'élasticité classique avec conditions aux limites de Drichlet.

### II.7.2. EQUATION INTEGRALE FRONTIERE <sup>[38]</sup>

Dans ce paragraphe, nous considérons la bille et le support séparément. Ils occupent respectivement un domaine  $\Omega_1$  ( $\Omega_2$ ), de frontière  $\Gamma_1$  ( $\Gamma_2$ ).

Nous négligeons les forces de volume :  $f_{vi} = 0$  dans  $\Omega_i$  ( $i=1,2$ ).

Nous supposons les déplacements, notés  $\bar{u}_i$ , connus en tous points de la frontière des deux solides.

Nous calculons le vecteur des contraintes  $p_i$ , défini par :  $p_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$

sur  $\Gamma_1$  tel que :

$$\sigma_{ij} = 0 \text{ dans } \Omega_i, \tag{II.45}$$

$$u_i = \bar{u}_i \text{ sur } \Gamma_i \ (i=1,2) \tag{II.46}$$

L'équation d'équilibre (II.45) est équivalente à l'équation intégrale frontière :

$$\theta \in \Gamma_l, C_{ij}(\theta)u_j(\theta) + \int_{\Gamma_i} P_{ij}(x, \theta)u_j(x)d\gamma(x) = \int_{\Gamma_i} U_{ij}(x, \theta).p_j(x)d\gamma(x), \ l=1,2 \tag{II.47}$$

Les coefficients  $C_{ij}$  sont calculés à partir du concept de mouvement rigidifiant. Ils sont définis par la relation :

$$C_{ij}(\theta) = - \int_{\Gamma_i} P_{ij}(x, \theta)d\gamma(x), \ l=1,2 \tag{II.48}$$

$U_{ij}$  et  $P_{ij}$  sont respectivement les solutions fondamentales en déplacements et en contraintes.

Physiquement,  $U_{ij}(x, \theta)$  représente la j-ième composante du déplacement au point x d'un corps infini, en réponse à une force unitaire agissant dans la i-ième direction au point  $\theta$ .



Dans un repère de coordonnées axisymétriques, l'équation (II.47) devient :

$$\theta \in \Gamma_l, \int_{\Gamma_l} D_{ij}^*(x, \theta) d\gamma(x) u_j(\theta) + \int_{\Gamma} T_{ij}^*(x, \theta) (u_j(x) - u_j(\theta)) d\gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(x, \theta) p_j(x) d\gamma(x) \quad l = 1, 2 \quad (\text{II.49})$$

$i, j = r, z$

L'expression des solutions fondamentales  $D_{ij}^*$ ,  $T_{ij}^*$  et  $U_{ij}^*$  est donnée dans l'annexe D.

□

**Remarque**

Le concept de mouvement rigidifiant (II.48) n'est ici valable que dans la direction de l'axe de symétrie.

□

**II.7.3. DISCRETISATION** <sup>[39]</sup>

Nous construisons les éléments frontières à partir des éléments finis à une dimension de chacune des frontières  $\Gamma_l$  de la bille et du support.

□

**Remarque**

Nous maillons ici l'ensemble des frontières des deux solides, à l'exception de l'axe de symétrie (voir figure II.17).

□

Nous discrétisons donc celles-ci par un ensemble de  $N_l$  ( $l = 1, 2$ ) éléments finis  $\Gamma_{l_e}$  à une dimension tels que :

$$1. \quad \Gamma_l = \bigcup_{e=1}^{N_l} \Gamma_{l_e}$$

$$2. \quad \Gamma_l \cap \Gamma_{l_j}^0 = \{ \} \quad (l = 1, 2)$$

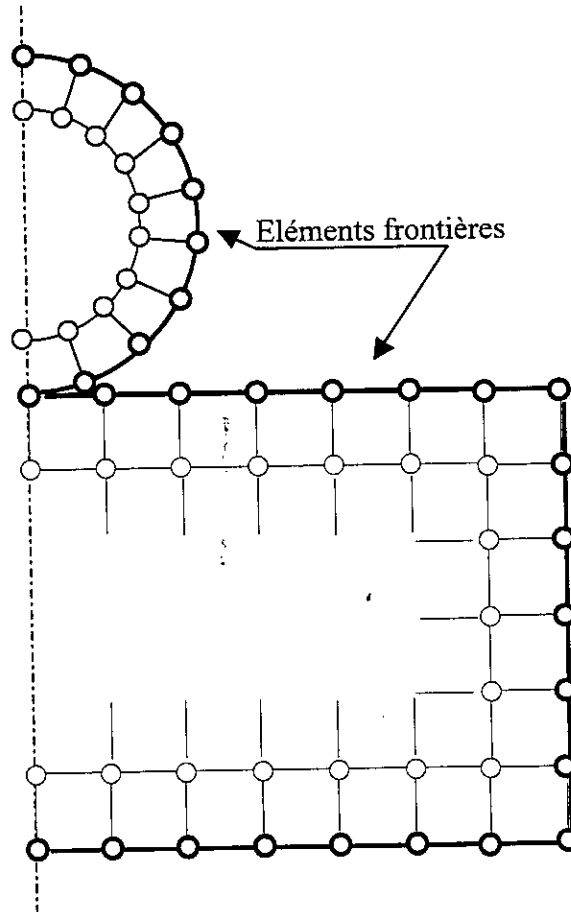


Figure II.17 : Discretisation de la frontière du domaine  $\Omega$

De même qu'au paragraphe II.5.3, nous définissons les coordonnées  $(r,z)$ , les déplacements  $(v_r, v_z)$  et les contraintes  $(p_r, p_z)$  d'un point M, par l'interpolation suivante :

$$\begin{cases} r(\xi) = \langle N_i(\xi) \rangle \{r^e\} \\ z(\xi) = \langle N_i(\xi) \rangle \{z^e\} \end{cases}$$

$$\{v(\xi)\} = \begin{Bmatrix} v_r(\xi) \\ v_z(\xi) \end{Bmatrix} = [N_i(\xi)] \{v^e\}$$

$$\{p(\xi)\} = \begin{Bmatrix} p_r(\xi) \\ p_z(\xi) \end{Bmatrix} = [N_i(\xi)] \{p^e\} \quad (\text{cf. (II.36) et (II.37)})$$

avec :

$\{r^e\}, \{z^e\}$  : coordonnées des nœuds de l'élément  $\Gamma_i$ ,

$\{v^e\} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ v_r^e \\ v_z^e \\ \vdots \end{Bmatrix}$  : vecteur élémentaire des déplacements,

$$\{p^e\} = \begin{Bmatrix} : \\ p_r^e \\ p_z^e \\ : \end{Bmatrix} : \text{vecteur élémentaire des contraintes.}$$

□

**Remarque :**

Nous choisissons les mêmes fonctions d'interpolation pour les coordonnées, les déplacements et les contraintes.

□

Nous discrétisons l'équation (II.49), en un nœud  $i$  du maillage, sous la forme :

$$\sum_{e=1}^{N_l} \left( \int_{\Gamma_l} ([D^*] - [T^*]) d\gamma(x) \right) \begin{Bmatrix} u_r^i \\ u_z^i \end{Bmatrix} + \sum_{e=1}^{N_l} \left( \int_{\Gamma_l} [T^*] [N_l] d\gamma(x) \cdot \{u^e\} \right) = \sum_{e=1}^{N_l} \left( \int_{\Gamma_l} [U^*] [N_l] d\gamma(x) \cdot \{p^e\} \right) \quad (\text{II.50})$$

( $l = 1, 2$ )

Avec :

$$[D^*] = \begin{bmatrix} D_{rr}^* & D_{rz}^* \\ D_{zr}^* & D_{zz}^* \end{bmatrix}$$

$$[T^*] = \begin{bmatrix} T_{rr}^* & T_{rz}^* \\ T_{zr}^* & T_{zz}^* \end{bmatrix}$$

$$[U^*] = \begin{bmatrix} U_{rr}^* & U_{rz}^* \\ U_{zr}^* & U_{zz}^* \end{bmatrix}$$

Cette équation étant valable pour tout nœud  $i$  du maillage de la frontière, nous obtenons, après assemblage, le système suivant :

$$[H_l] \{U_l\} = [G_l] \{P_l\} \quad (\text{II.51})$$

où :

$\{U_l\}$ ,  $\{P_l\}$  sont les vecteurs globaux des déplacements et des contraintes sur la frontière  $\Gamma_l$ .

$[H_l]$  est construit par assemblage des matrices élémentaires :

$$[h_{1l}] = \int_{\Gamma_l} ([D^*] - [T^*]) d\gamma(x),$$

$$[h_{2l}] = \int_{\Gamma_l} ([D^*] [N_l]) d\gamma(x),$$

$[G_l]$  est construit par assemblage des matrices élémentaires :

$$[g_l] = \int_{\Gamma_l} ([U]^T [N_l]) d\gamma(x)$$

□

**Remarque**

$[H_l]$  et  $[G_l]$  sont des matrices carrées de dimension  $2(N_l + 1)$ .

□

Nous introduisons à présent les conditions aux limites (II.46). Le système (II.51) devient :

$$[G_l] \{P_l\} = [H_l] \{\bar{U}_l\} \quad (l=1,2) \tag{II.52}$$

Sa résolution nous donne alors le vecteur des contraintes aux nœuds de la frontière  $\Gamma_l$  ( $l=1,2$ ). Nous l'effectuons à l'aide d'un algorithme de Gauss-Jordan [1].

□

**Remarque**

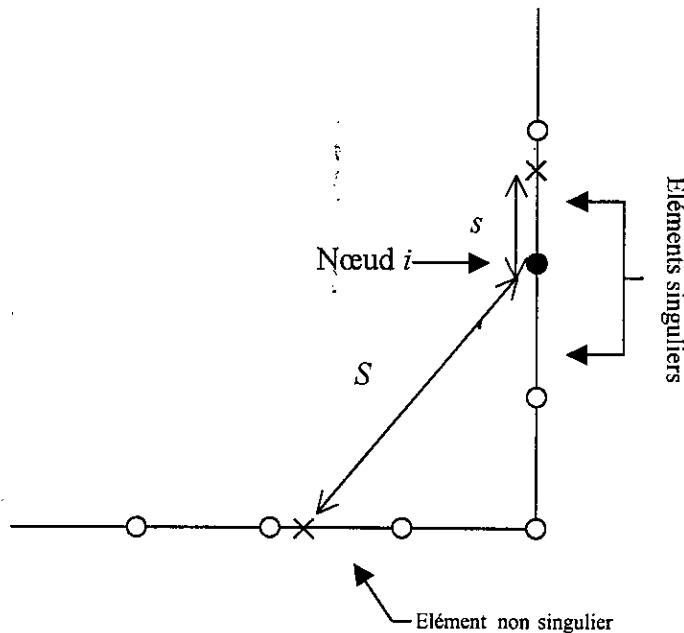
$[G_l]$  est une matrice pleine, non symétrique et non définie positive. Cependant, sa taille est sensiblement inférieure à celle des matrices d'éléments finis.

□

**II.7.4.A. CALCUL DES MATRICES ELEMENTAIRES SINGULIERES <sup>[40]</sup>**

Un élément  $\Gamma_{i_e}$  est dit singulier relativement au nœud  $i$  (cf. (II.50)), lorsque celui-ci appartient à  $\Gamma_{i_e}$ .

Soit  $s$  la distance entre le nœud  $i$  et un point d'intégration de l'élément  $\Gamma_{i_e}$ . Sur l'élément singulier,  $s$  tend vers zéro, ce qui entraîne des singularités dans les intégrales élémentaires composant  $[H_i]$  et  $[G_i]$ .



**Figure II.18 : Définition d'un élément singulier**

Ces singularités sont de deux types :

- $\frac{1}{s}$  : elle est contenue dans l'expression des  $D_{ij}^*$  et des  $T_{ij}^*$ . Elle disparaît car les déplacements interpolés à la frontière vérifient la condition de **HÖLER** <sup>[41]</sup> :  
 $|u_i(x) - u_i(\theta)| \leq \beta \cdot s^\alpha \quad \beta > 0, 0 < \alpha \leq 1.$
- logarithmique : elle est due au comportement asymptotique de la fonction elliptique de première espèce  $K(k)$  présente dans  $D_{ij}^*, T_{ij}^*$  et  $U_{ij}^*$ .

En effet, nous avons :

$$K(k) = \ln\left(\frac{4}{\sqrt{1-k^2}}\right) + O(l) \text{ lorsque } k \text{ tend vers } 1.$$

D'où :  $K(k) = -\ln s + O(l)$  lorsque  $s$  tend vers 0 (cf. annexe D).

Nous levons cette singularité en deux étapes.

Nous écrivons, tout d'abord, les intégrales singulières sous la forme :

$$I = \int_{\Gamma_{i_e}} ((A) + (B)K(k)) d\gamma = I_1 + I_2$$

1. Nous calculons les matrices élémentaires  $[h_1]$ ,  $[h_2]$  et  $[g_1]$  en remplaçant  $K(k)$  par  $(K(k) + \ln s)$  dans les solutions fondamentales.

Nous obtenons les intégrales non singulières :

$$I_1 = \int_{\Gamma_i} ((A) + (B)(K(k) + \ln s)) d\gamma$$

2. Nous complétons ces matrices en rajoutant les termes manquants, ils sont de la forme :

$$I_2 = \int_{\Gamma_i} (B)(-\ln s) d\gamma$$

A l'aide du changement de variable :  $s = \alpha.t^2$ , nous ramenons à l'intégrale non singulière :

$$I_2 = cste. \int_0^1 (B)(-2\alpha.t \ln \alpha.t^2) d\gamma$$

..... □

**Remarque**

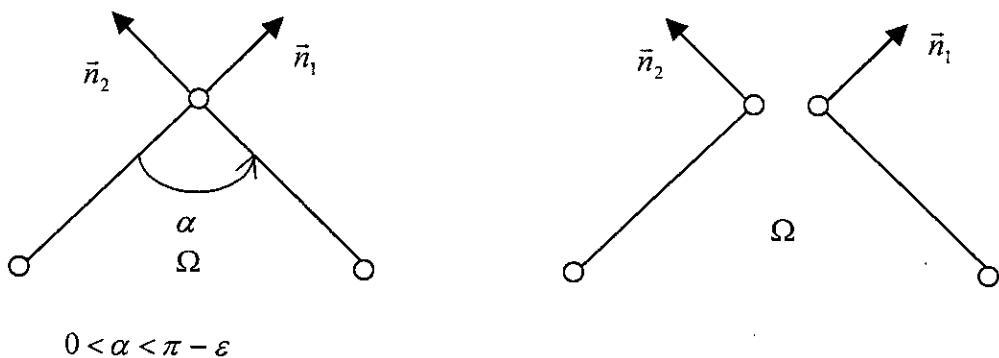
Nous calculons les intégrales élémentaires à l'aide d'un schéma d'intégration numérique de Gauss.

□

Afin de diminuer le temps de calcul sans précision, nous modulons le nombre de points de Gauss en fonction de la distance  $d$  entre le nœud  $i$  en cours, et le milieu de l'élément  $\Gamma_i$ .  $d$  mesure la « singularité » des intégrales : plus  $d$  diminue, plus l'intégrale est singulière, et le nombre de points d'intégration doit être grand.

**II.7.4.B. NON-UNICITE DU VECTEUR NORMAL**

Une autre difficulté apparaît lorsque la frontière  $\Gamma_i$  présente un angle tel que la normale en ce point n'est pas unique (voir figure II.19.a).



**a. Non unicité de la normale**

**b. Point double**

**Figure II.19 : Non-unicité du vecteur normal**

Deux vecteurs des contraintes peuvent être définis en cet endroit. Il n'y a donc pas unicité de la solution.

Pour contourner cette difficulté, nous utilisons la méthode des points doubles développée par **BREBBIA** <sup>[42]</sup>.

En dimension deux, ceux-ci sont constitués de deux nœuds de coordonnées identiques sans élément frontière entre eux (voir figure II.19.b).

Cependant, afin qu'il n'y ait pas deux lignes identiques dans le système (II.52), et que celui-ci admette une solution unique, nous imposons un déplacement sur le premier nœud du point double, et une contrainte sur le deuxième.

**TROISIEME CHAPITRE :**

**RESULTATS NUMERIQUES**



### III.1. RESULTATS NUMERIQUES

#### III.1.1. VALIDATION

Nous avons réalisé des calculs avec et sans frottement sur une bille de rayon égal à 1 mm (voir figure III.1.a). Le maillage de l'ensemble bille - support est composé de *921 éléments* (3 nœuds et 4 nœuds).

Nous avons maillé finement la zone de contact potentielle (voir Figure III.1.b) :

- Pour  $0 \leq r \leq 0.05$  mm : un nœud tous les 2.5  $\mu\text{m}$ ,
- Pour  $0.05 \leq r \leq 0.1$  mm : un nœud tous les 5  $\mu\text{m}$ .

Les propriétés des matériaux utilisés sont les suivantes :

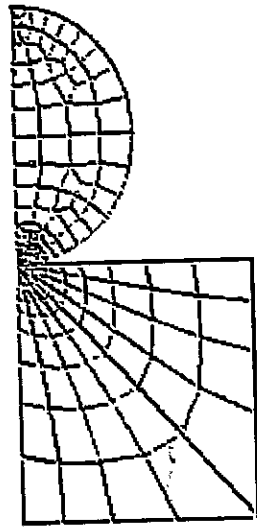
- **Bille :**

Module d'Young :  $E_1 = 432000$  MPa  
Coefficient de Poisson :  $\nu_1 = 0.32$

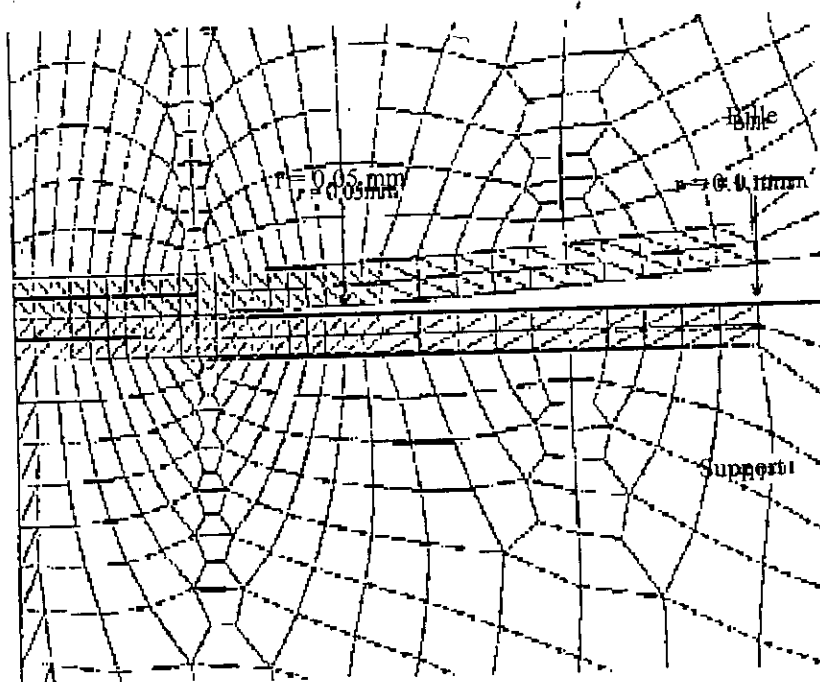
- **Support :**

Module d'Young :  $E_2 = 72000$  MPa  
Coefficient de Poisson :  $\nu_2 = 0.32$

Ces constantes correspondent respectivement à un carbure (*Carbure de Silicium SiC*) et à un alliage d'aluminium (*AS4G*).  
Nous avons élaboré un plan de chargement qui fait varier la charge de 0 à 20 N en 141 incréments.  
Ceci nous permet d'appliquer sur la bille des petits incréments de charge.



a. Maillage de l'ensemble bille - support



b. Maillage de la zone de contact potentielle

Figure III.1 : Maillage du domaine  $\Omega$

Nous avons réalisé trois séries de calculs à l'aide de notre programme de résolution, présenté aux paragraphes II.6 et II.7 :

- Un calcul sans frottement (cf. § III.1.2). Nous comparons nos résultats à la théorie de Hertz,
- Une première série de calculs avec frottement (cf. § III.1.3). Nous utilisons la deuxième régularisation de la loi de Coulomb (cf. (II.21)).

Nous faisons varier le coefficient de frottement  $f$  entre 0.1 et 0.6. Le paramètre de régularisation  $\varepsilon$  est fixé à  $10^{-7}$ .

- Une deuxième série de calculs avec frottement (cf. § III.1.4), en utilisant la première régularisation de la loi de Coulomb (cf. (II.20)).  
 $f$  varie entre 0.1 et 0.6.  $\varepsilon$  est fixé à  $10^{-4}$ .

### III.1.2. CONTACT DE HERTZ

Nous présentons dans ce paragraphe les résultats de notre calcul sans frottement.

#### III.1.2.A. PRESSION MAXIMALE – COMPRESSION

Nous traçons sur la figure III.2 les courbes de la pression maximale  $P_m$  mesurée au centre de la surface de contact (par la méthode des éléments finis), et de la compression  $\delta$ , en fonction de la charge  $F_a$  appliquée. Nous y reportons également celles correspondant à la théorie de Hertz (cf. (B.3) et (B.1)).

Nous donnons dans le tableau récapitulatif, les valeurs numériques que nous obtenons pour charges  $F_a = 10$  N et  $F_a = 20$  N.

- Pour  $F_a = 10$  N

Caractéristiques			Résultats Théoriques	
Force appliquée:	10	[N]	Pression Max:	2092,45434 [MPa]
Rayon de la bille:	1	[mm]	Compression:	0,00228299 [mm]
Module d'Young de la bille:	432000	[MPa]	Rayon de contact:	0,04778073 [mm]
Coefficient de Poisson (bille):	0,32	[ ]	Résultats Numériques par éléments finis	
Module d'Young de support:	72000	[MPa]	Pression Max:	2146,02099604 [MPa]
Coefficient de Poisson / support:	0,32	[ ]	Compression:	0,00229387004 [mm]
calculer...			Rayon de contact:	0,0478070154 [mm]
Tableau Récapitulatif			Résultats Numériques par éléments frontiers	
			Pression Max:	2087,2231446 [MPa]

- Pour  $F_a=20N$

**A-S- ADAMOU : Contact de Hertz - Comparaison / Validation**

Calcul Sans Frottement | Calculs Avec Frottement

Caracteristiques			Resultats Theoriques		
Force appliquee	20	[N]	Pression Max	2636,32739	[MPa]
Rayon de la bille	1	[mm]	Compression	0,00362403	[mm]
Module d'Young de la bille	432000	[MPa]	Rayon de contact	0,06019994	[mm]
Coefficient de Poisson /bille	0,32	[-]	<b>Resultats Numeriques par elements fins</b>		
Module d'Young de support	72000	[MPa]	Pression Max	2703,8171386	[MPa]
Coefficient de Poisson / support	0,32	[-]	Compression	0,0036428799	[mm]
<input type="button" value="calculer"/>			Rayon de contact	0,0602330602	[mm]
<input type="button" value="Tableau Récapitulatif"/>			<b>Resultats Numeriques par elements frontieres</b>		
			Pression Max	2629,7365722	[MPa]

Cliquez ICI

- Tableau récapitulatif :

**A-S- ADAMOU : Récapitulatif**

Calcul Sans Frottement | Calculs Avec Frottement

Caracteristiques		Coefficient de Poisson /bille	
Module d'Young de la bille	432000 [MPa]	0,32 [-]	
Module d'Young de support	72000 [MPa]	Coefficient de Poisson / support : 0,32 [-]	
Rayon de la bille: 1 [mm]			

Force appliquee [N]	Pression Max			Compression			Rayon de contact		
	Théorie de Hertz	Elements Fins	Elements Frontieres	Théorie de Hertz	Elements Fins	Elements Frontieres	Théorie de Hertz	Elements Fins	Elements Frontieres
10	2092,45434	2146,02099	2087,22314	0,002262998	0,002294870	0,002262998	0,04778073	0,04780701	0,04778073
20	2636,32739	2703,81713	2629,73657	0,00362403	0,003642879	0,00362403	0,06019994	0,060233060	0,06019994

Notre simulateur est en mesure de tracer les courbes relatives à la pression maximale ainsi que de la compression. Pour cela, il faut cliquer sur le menu comme suit :

**A-S- ADAMOU : Contact de Hertz - Comparaison / Validation**

Evolution de l'empreinte

Calculer

Tableau Récapitulatif

**Résultats Numériques par éléments :**

Pression Max:	266632759	[MPa]
Compression:	0,00362405	[mm]
Rayon de contact:	0,00000000	[mm]

**Résultats Numériques par éléments finis :**

Pression Max:	270360713861	[MPa]
Compression:	0,00364287091	[mm]
Rayon de contact:	0,00023306027	[mm]

**Résultats Numériques par éléments frontières :**

Pression Max:	262973657221	[MPa]
---------------	--------------	-------

Une fenêtres avec des onglets est activée :

**A-S ADAMOU : Contact de Hertz - Comparaison / Validation**

Calculs : Frottement / Calculs : Ave / R Normé

**Caractéristiques :**

Force appliquée:	25	[N]	Rayon de la bille:	1	[mm]
Module de Young de la bille:	432000	[MPa]	Coefficient de Poisson / bille:	0,32	
Module de Young de support:	72000	[MPa]	Coefficient de Poisson / support:	0,32	

Pression Maximale | Compression | Rayon de contact

**Pression Maximale**

Fa [N]	Pm [MPa] (calculée)	Pm [MPa] (théorique)
0	0	0
2.5	~1000	~1000
5	~1500	~1500
7.5	~1800	~1800
10	~2000	~2000
12.5	~2200	~2200
15	~2400	~2400
17.5	~2600	~2600
20	~2800	~2800
22.5	~3000	~3000
25	~3200	~3200

Tracer | Save AS | Exporter | Excel...

On peut également exporter nos données sous **EXCEL**, il suffit de cliquer sur **SaveAs**.  
Le graphique ci-dessus comporte deux courbes : Pression maximale calculée ainsi que celle relative à la théorie de Hertz.

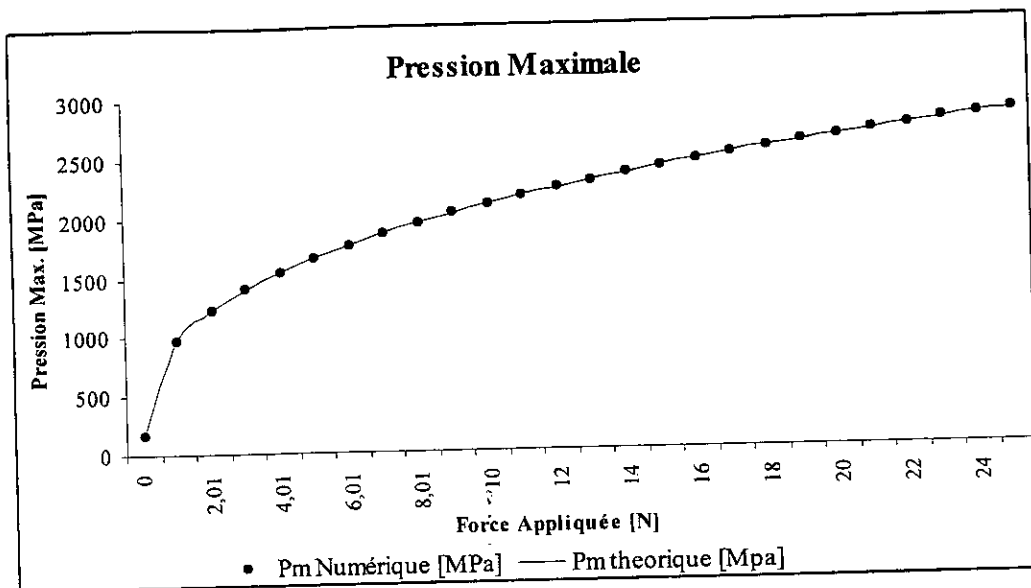
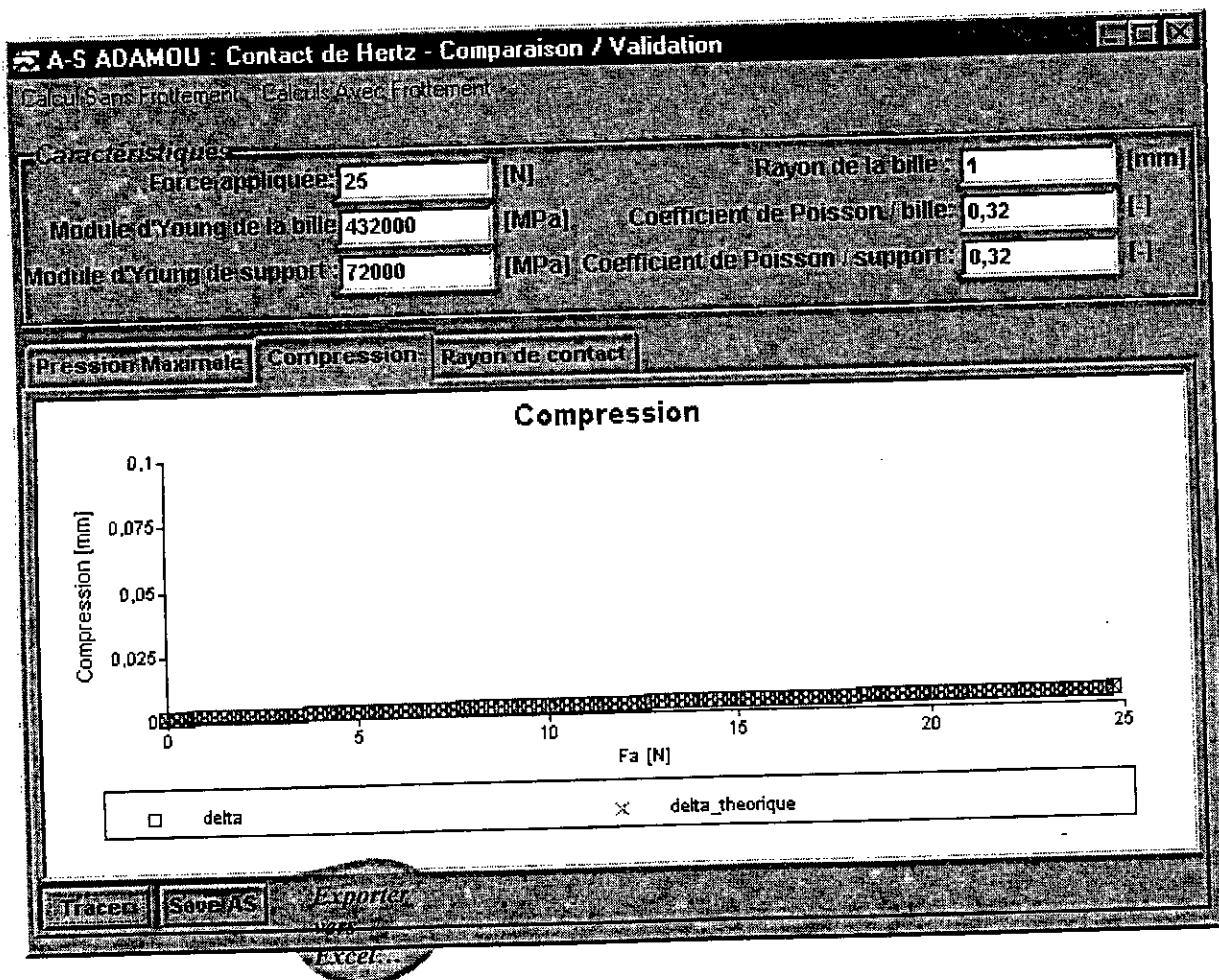


Figure III.2.a : Evolution de la pression maximale

De même pour la compression :



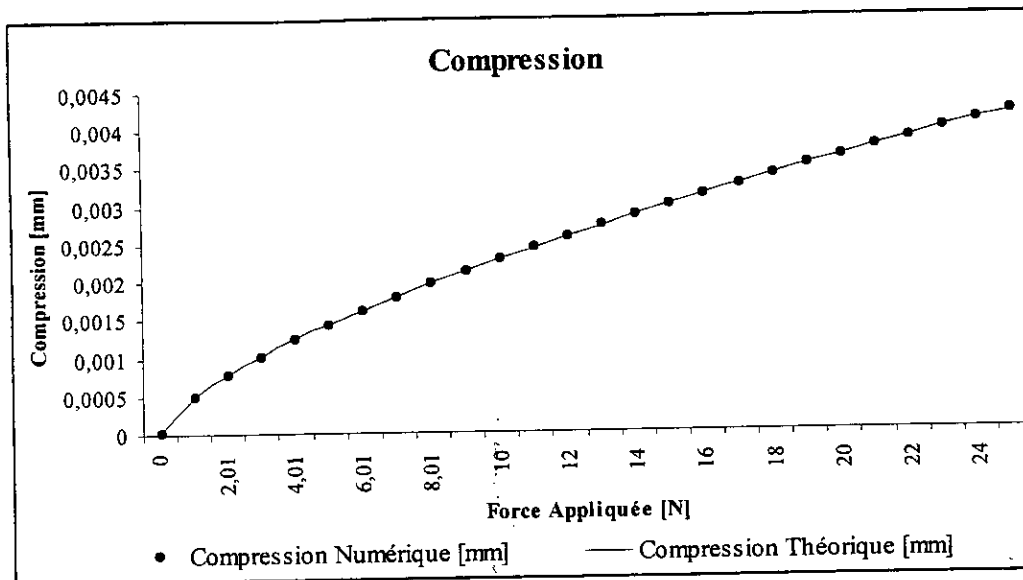


Figure III.2.b : Evolution de la compression

### Remarques

1. Le rayon  $a$  est obtenu par extrapolation de la courbe de la contrainte normale  $\sigma_N$ , calculée dans le contact par la méthode des éléments frontières (voir figure III.28).
2. Nous avons reporté dans le tableau récapitulatif, les valeurs  $P_m$  calculées par les éléments finis, et par les éléments frontières. Comme nous pouvons nous y attendre, la deuxième méthode est plus précise au niveau des contraintes que la première. Cependant, celle-ci donne des résultats satisfaisants.

### III.1.2.B. RAYON DE CONTACT :

Nous traçons sur la figure III.3 les courbes du rayon de contact  $a$  théorique (cf. (B.2)) et numérique en fonction de  $F_a$ .

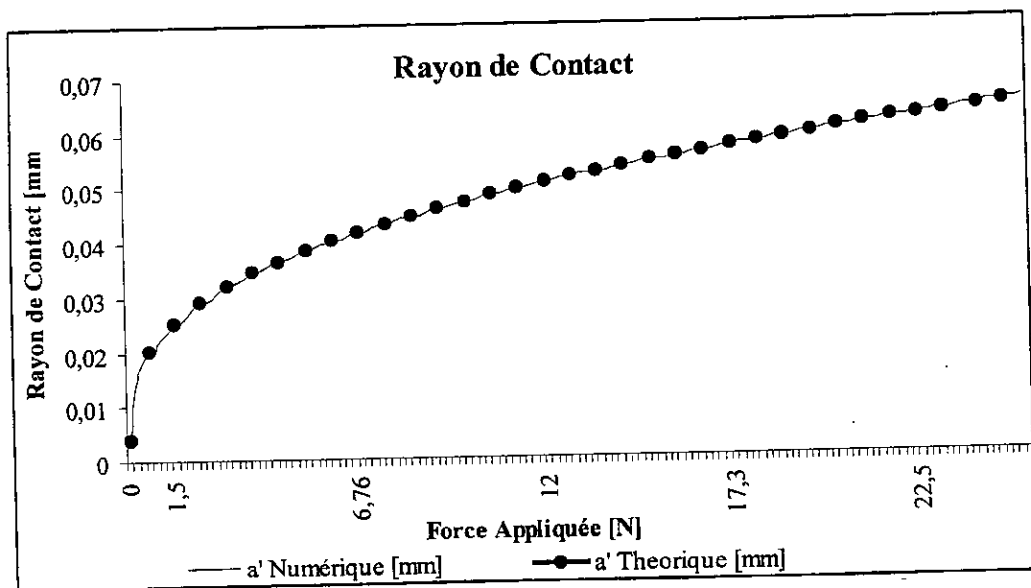
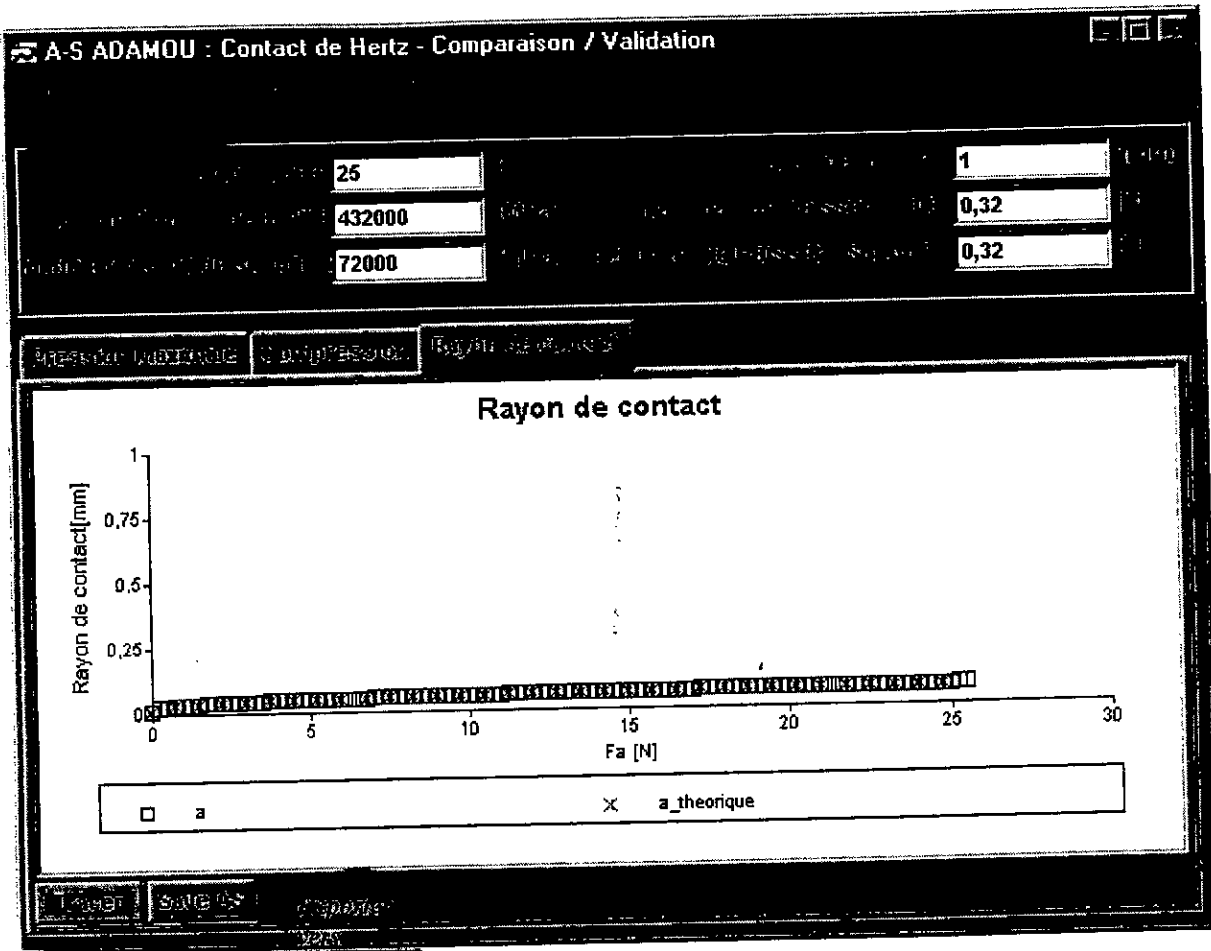


Figure III.3 : Evolution du rayon de contact



Nous avons donc défini les incréments de charge de sorte que ces éléments entrent dans le contact un par un, et que le rayon évolue suffisamment lentement (cf. § II.6.1). De plus, nous avons maillé finement la zone de contact potentielle. Ainsi, la courbe du rayon calculé approche de façon satisfaisante de la théorie de Hertz.

Dans les paragraphes suivants, nous représentons les courbes relatives aux résultats obtenus pour  $F_a = 10 \text{ N}$ .

Les contraintes et les coordonnées sont normalisées, respectivement par la pression maximale  $P_m$  et le rayon  $a$ .

Nous comparons nos courbes à la théorie de Hertz.

### III.1.2.c. DISTRIBUTION DES CONTRAINTES

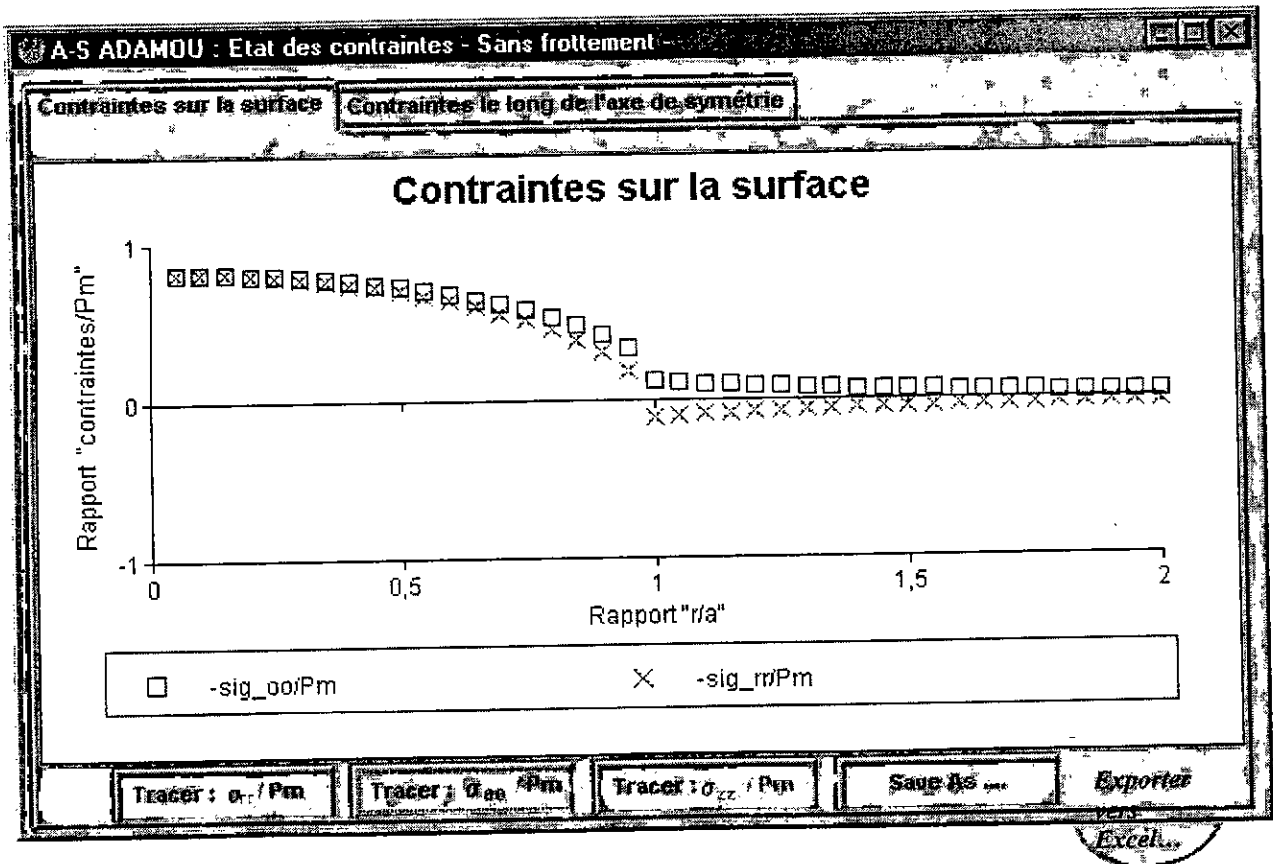
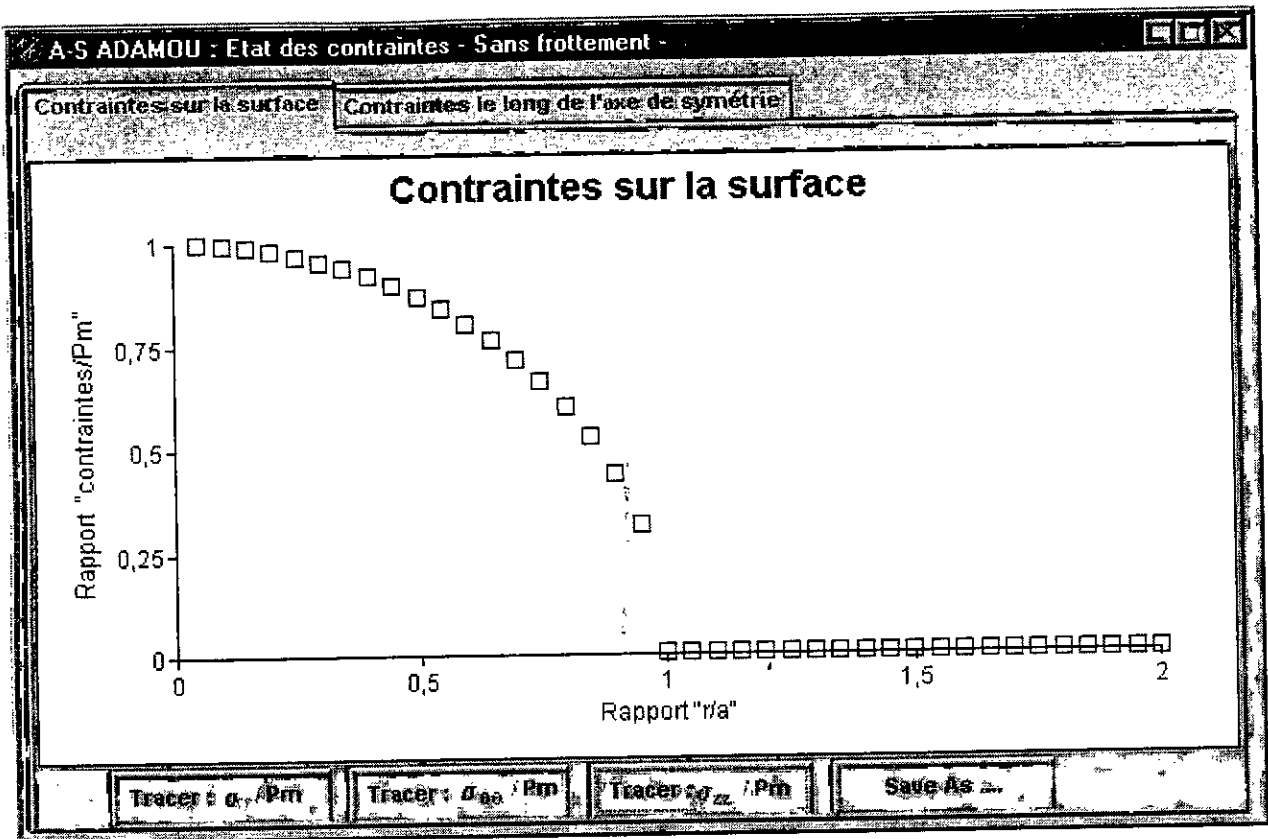
Nous traçons :

- Sur la surface de contact (voir figure III.24), les contraintes  $\frac{\sigma_{zz}}{P_m}$ ,  $\frac{\sigma_{rr}}{P_m}$  et  $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{P_m}$  en fonction de  $\frac{r}{a}$ . Les courbes théoriques sont obtenues à partir des relations (B.6) et (B.7).
- Le long de l'axe de symétrie (voir Figure III.25), les contraintes  $\frac{\sigma_{rr}}{P_m}$ ,  $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{P_m}$ ,  $\frac{\sigma_{zz}}{P_m}$  et  $\frac{\tau}{P_m}$  en fonction de  $\frac{z}{a}$ . Les courbes théoriques sont obtenues à partir des relations (B.8) et (B.9).

#### Remarque

Ces contraintes sont calculées, dans le contact et le long de l'axe de symétrie, par extrapolation à partir de nos résultats d'éléments finis.

\* Pour tracer les contraintes sur la surface, il suffit de cliquer sur l'onglet "*Contraintes sur la surface*". Une série de boutons, chacun relatif à une contrainte, lequel, il suffit de cliquer pour que le simulateur prenne en charge le traçage de courbe :



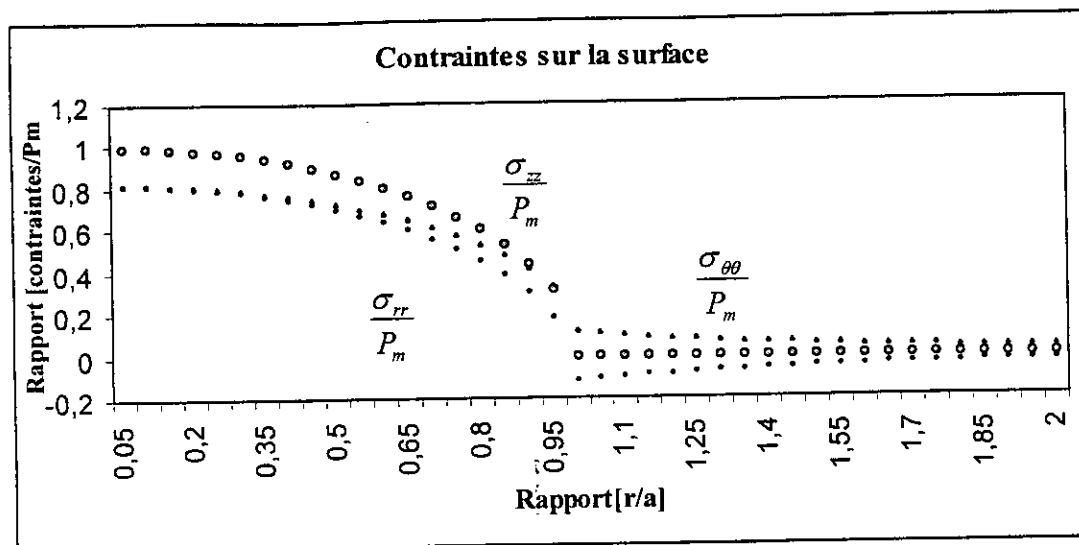
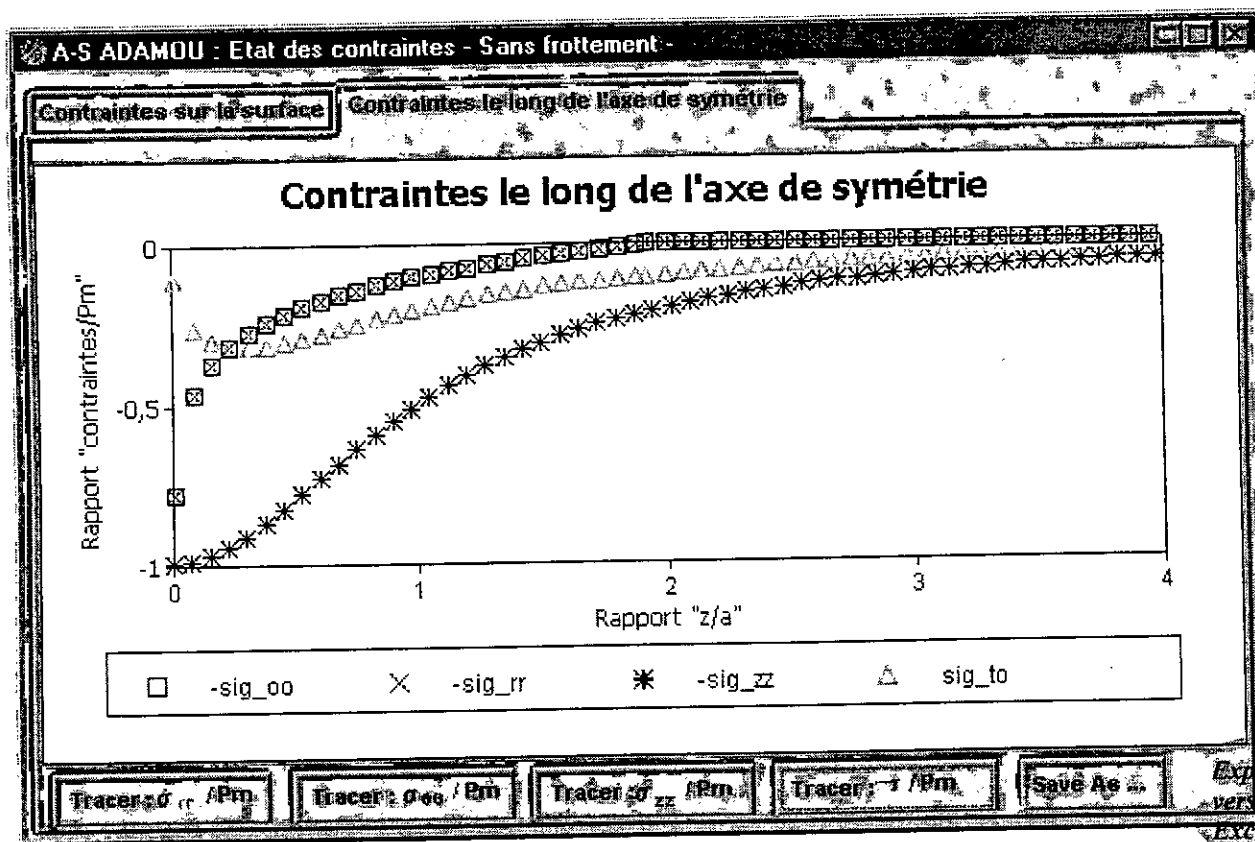


Figure III.4 : Contact dans le contact

- Contraintes le long de l'axe de symétrie :



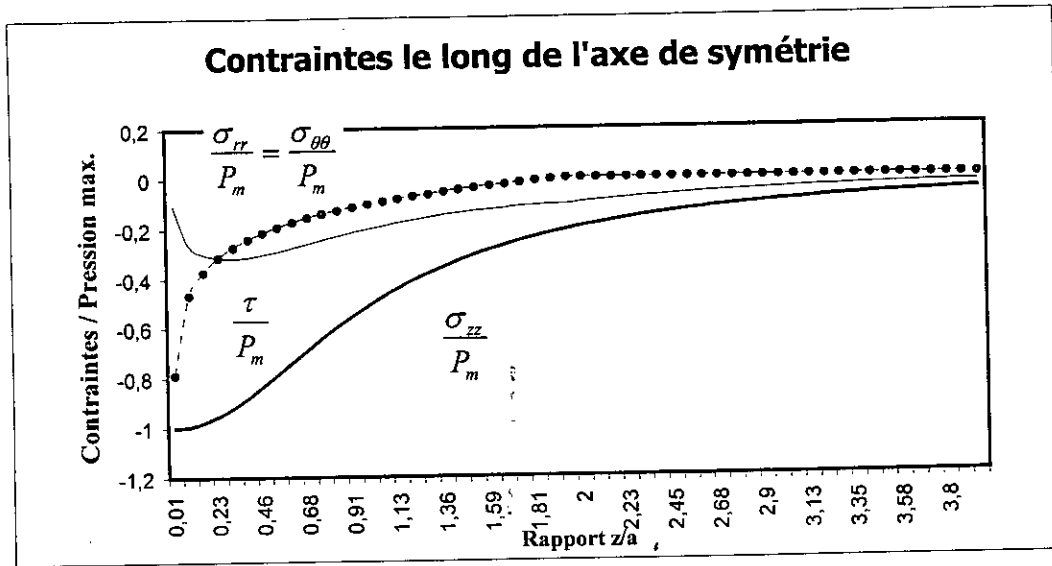


Figure III.5 : Contrainte le long de l'axe de symétrie

Comme prévu par la théorie, toutes les contraintes sont compressives dans le contact et le long de l'axe. En dehors de la surface de contact,  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$  sont égales en intensité,  $\sigma_{\theta\theta}$  restant compressives,  $\sigma_{rr}$  devenant positive.

Le long de l'axe, nous observons que  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$  sont approximativement égales. L'ensemble de ces courbes est donc conforme à la théorie de Hertz.

### III.1.3. PREMIER EXEMPLE : PREMIERE SERIE DE CALCUL AVEC FROTTEMENT

Nous présentons dans ce paragraphe, les résultats de notre première série de calculs avec frottement (deuxième régularisation de la loi de coulomb).

#### III.1.3.A. ZONES D'ADHERENCE ET DE GLISSEMENT

Nous représentons sur la figure III.28 les courbes des contraintes  $\sigma_N$  et  $\frac{\sigma_T}{f}$ , obtenues à  $F_a = 10$  N, pour trois coefficients de frottement :  $f=0.1$ ,  $f=0.2$ ,  $f=0.6$ .

Pour pouvoir tracer les graphes relatifs aux différentes contraintes dans le cas avec frottement, il suffit de cliquer comme suit :

**A.S. ADAMOU : Contact de Hertz - Comparaison / Validation**

Détermination de la zone de Glissement et Adhérence / MEF

Module d'Young de la bille	432000	[MPa]
Coefficient de Poisson de la bille	0,32	
Module d'Young de support	72000	[MPa]
Coefficient de Poisson de support	0,32	

Rayon de la bille: 1 [mm]

Pression Max: 27038174386 [MPa]

Compression: 1003622735 [mm]

Rayon de contact: 0,050730612 [mm]

Pression Max: 26297305722 [MPa]

- Il suffit de saisir les caractéristiques des matériaux, ainsi que le coefficient de frottement.

➤  $f=0.1$

**A.S. ADAMOU: Contact avec Frottement / Résolution : Eléments finis**

Force appliquée: 10 [N]

Module d'Young de la bille: 432000 [MPa]

Module d'Young de support: 72000 [MPa]

Rayon de la bille: 1 [mm]

Coefficient de Poisson de la bille: 0,32

Coefficient de Poisson de support: 0,32

Coefficient de frottement: ,10 [Reset]

**Zone de Glissement et Zone d'adhérence**

c/a	sigN (MPa)	sigT (MPa)
0.0	2000	500
0.1	2000	1000
0.2	2000	1200
0.3	2000	1300
0.4	2000	1400
0.5	1800	1450
0.6	1600	1500
0.7	1400	1550
0.8	1200	1600
0.9	1000	1650
1.0	500	1650

□ sigN      × sigT

Contraintes Tangentielles / Eléments finis      Contraintes Normales / Eléments finis      Save As      Reset

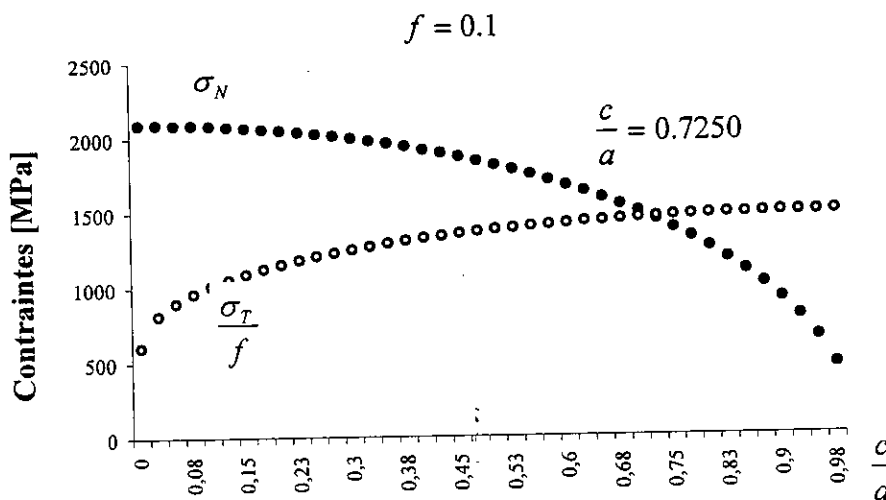
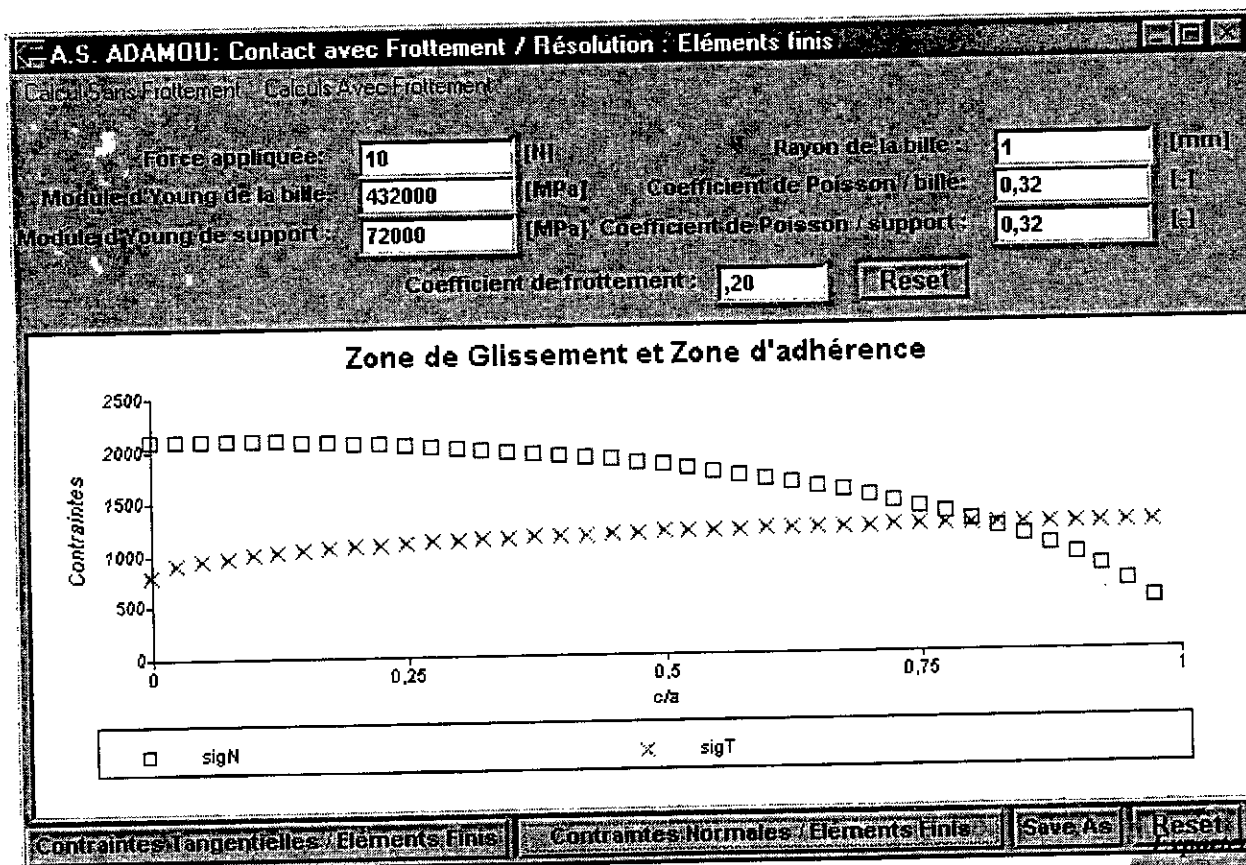


Figure III.6.a : Contraintes normale et tangentielle dans le contact pour  $f = 0.1$

➤  $f = 0.2$  :



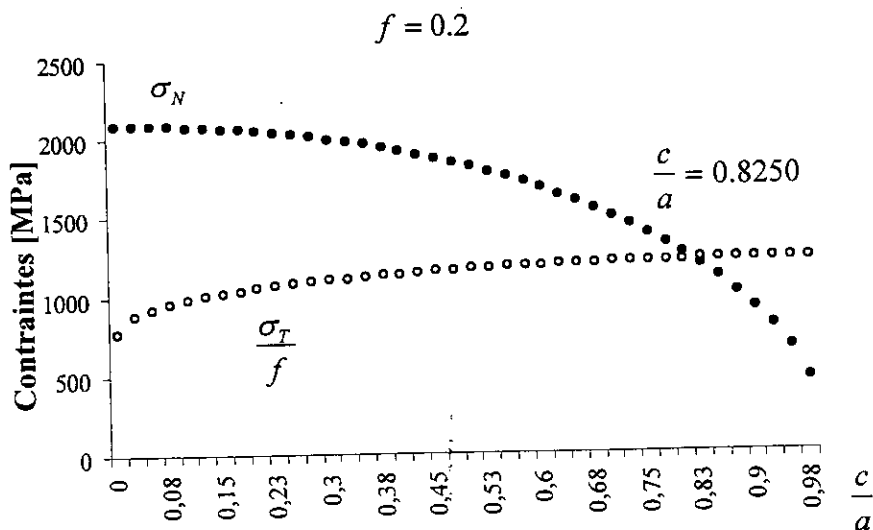
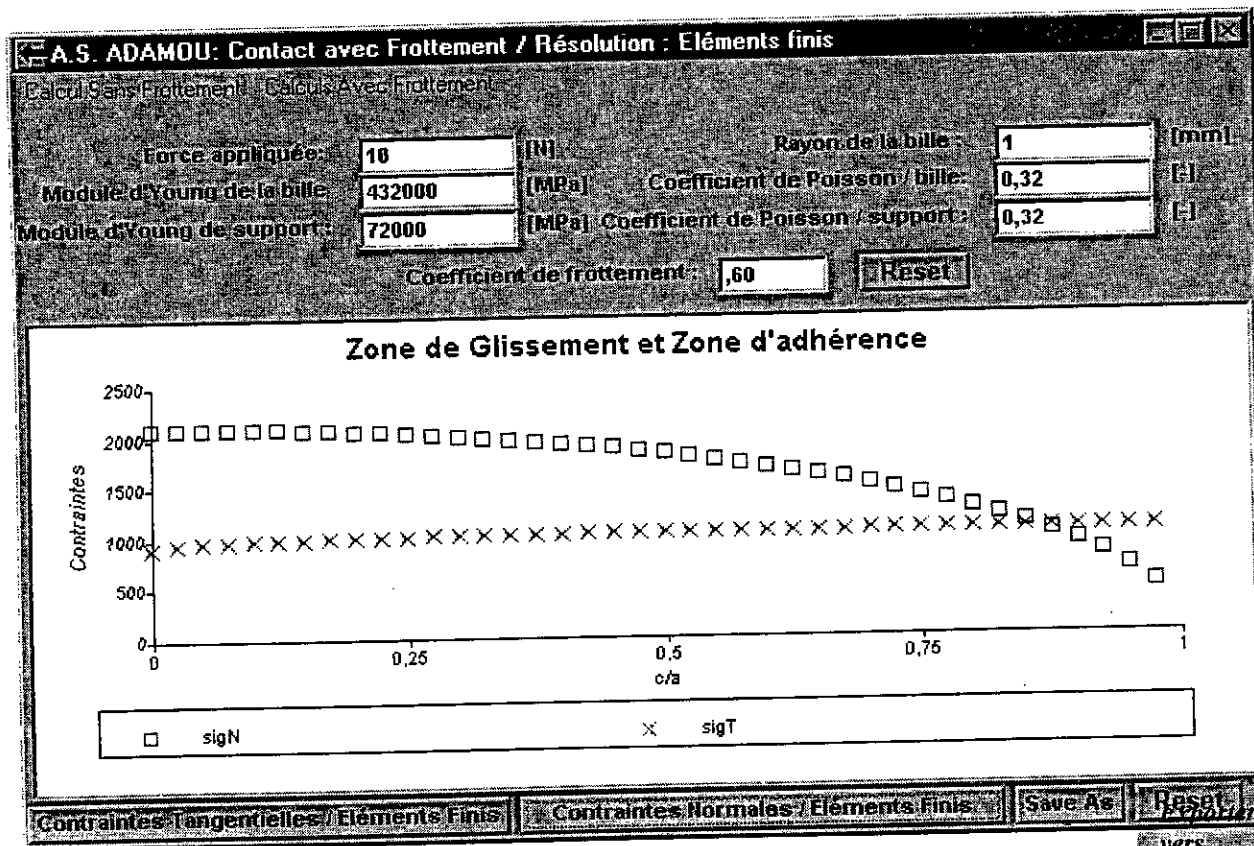


Figure III.6.b : Contraintes normale et tangentielle dans le contact pour  $f = 0.2$

➤  $f = 0.6$  :



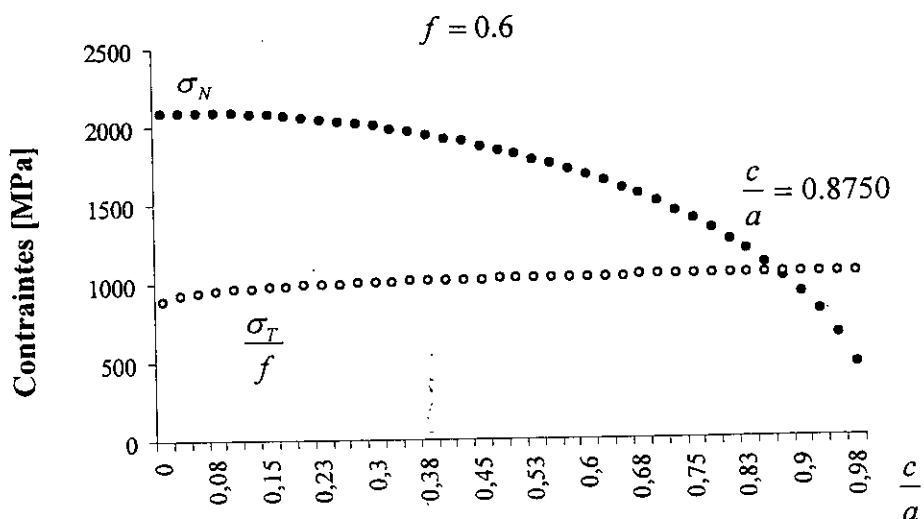


Figure III.6.c : Contraintes normale et tangentielle dans le contact pour  $f = 0.6$

**Remarque**

Ces contraintes sont calculées dans le contact par la méthode des éléments frontières (cf. § II.7).

Ces courbes mettent en évidence :

- Une zone d'adhérence :  $0 \leq r \leq c$  sur laquelle  $\sigma_T < f \cdot \sigma_N$ ,
- Une zone de glissement :  $c \leq r \leq a$  sur laquelle  $\sigma_T = f \cdot \sigma_N$ .

Nous reportons dans le tableau III.1, les valeurs des rayons  $a$  et  $c$ , obtenues à  $F_a = 10N$ . Nous comparons le rapport  $c/a$  à la solution analytique donnée par **SPENCE** (voir annexe C).

$f$	$c/a$	
	Num.	Spence
0	0.00	0.000
0.1	0.7250	0.630
0.2	0.8250	0.920
0.6	0.8750	0.999

Tableau III.1 : Comparaison avec l'analyse de Spence



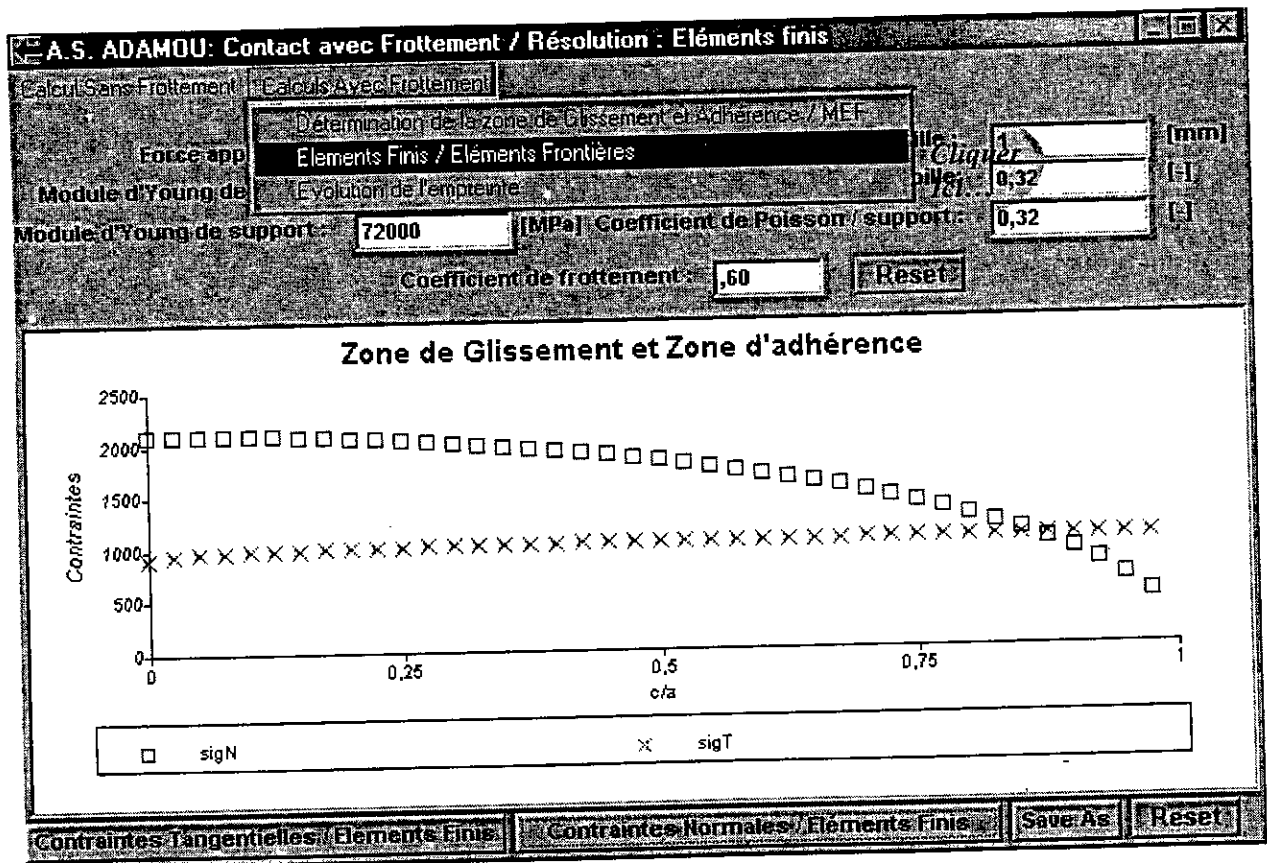
Remarques

- Nous représentons sur la figure III.7,  $\sigma_N$  et  $\frac{\sigma_T}{f}$  extrapolées dans le contact à partir des contraintes obtenues dans le support (cf. § II.7.1) par la méthode des éléments finis.

Nous observons que la contrainte normale  $\sigma_N$  est correctement calculée par cette technique. En effet, les courbes sont proches de celles que nous obtenons par les éléments frontières. Cependant, la valeur de  $\sigma_N$ , sur le dernier nœud de la zone de contact, ne permet pas une bonne estimation du rayon de contact  $a$  (voir méthode de calcul au § III.1.2.a).

Pour  $f=0.1$  et  $f = 0.2$ , la courbe de  $\frac{\sigma_T}{f}$  comporte d'importantes erreurs et ne fait pas apparaître de zone de glissement où  $\sigma_T \neq f \cdot \sigma_N$  (voir figure III.7.a et b). Ceci illustre nos commentaires (cf. § II.7.1) sur la difficulté de résoudre notre problème de contact avec frottement, régularisé par la méthode des éléments finis. Nous avons reproduit sur la figure III.7, les courbes de la figure III.6. La comparaison des deux séries de résultats justifie le couplage des éléments frontières aux éléments finis que nous avons développé.

Pour obtenir les graphes désirés, il suffit de cliquer sur le menu général, comme suit :



$f = 0.1$

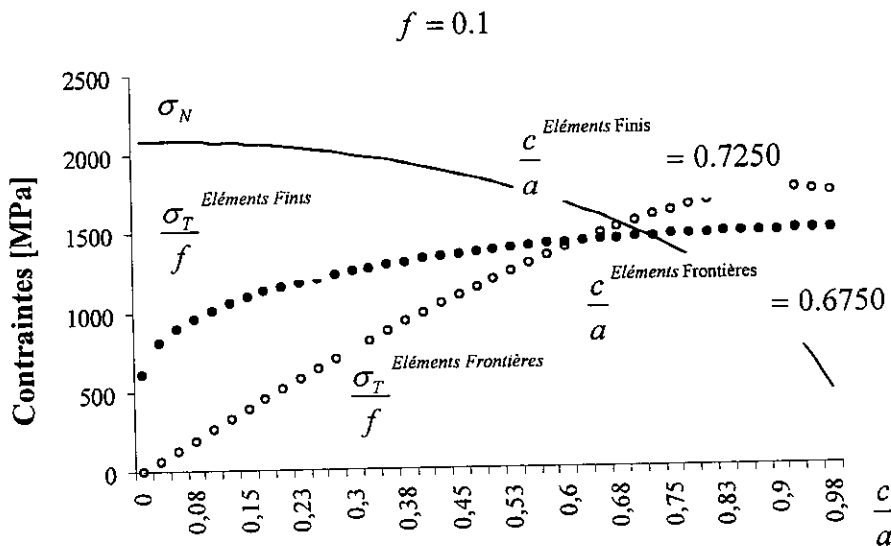
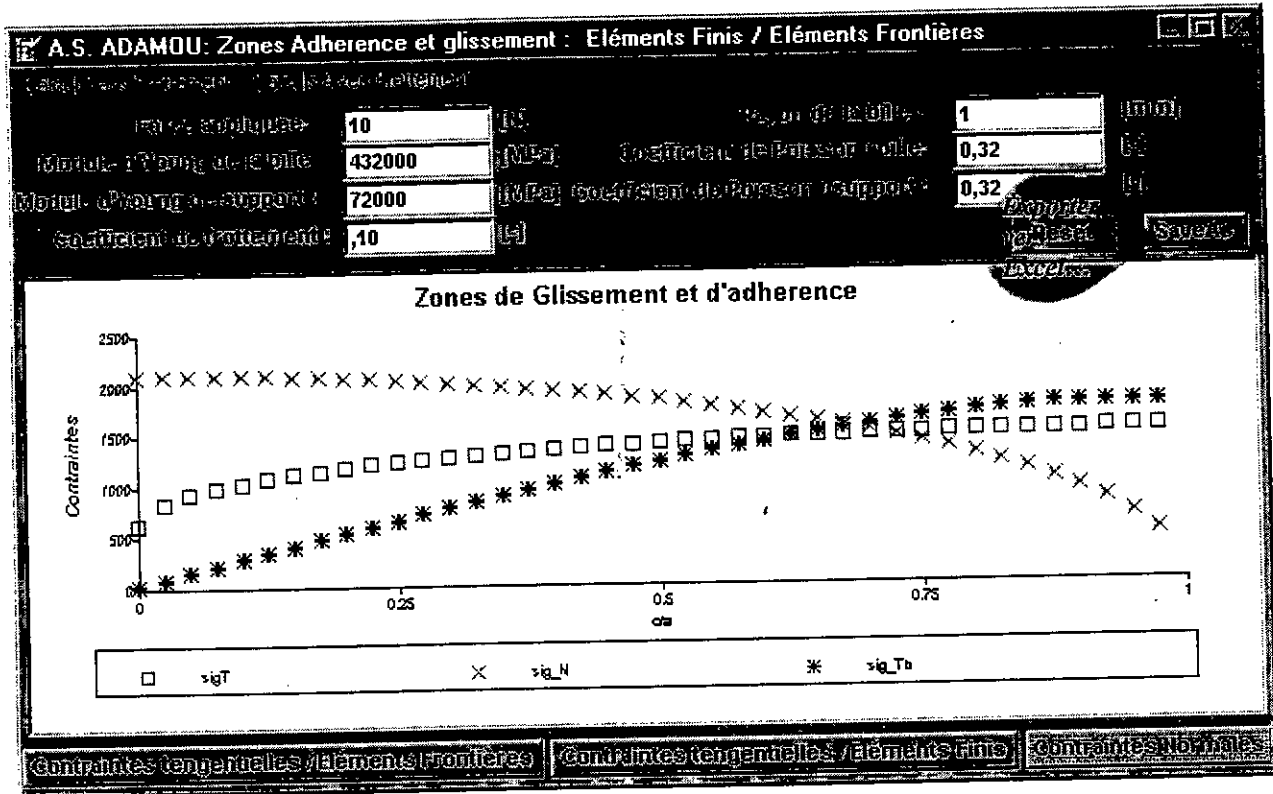


Figure III.7.a : Contraintes normale et tangentielle dans le contact pour  $f = 0.1$

$f = 0.2$

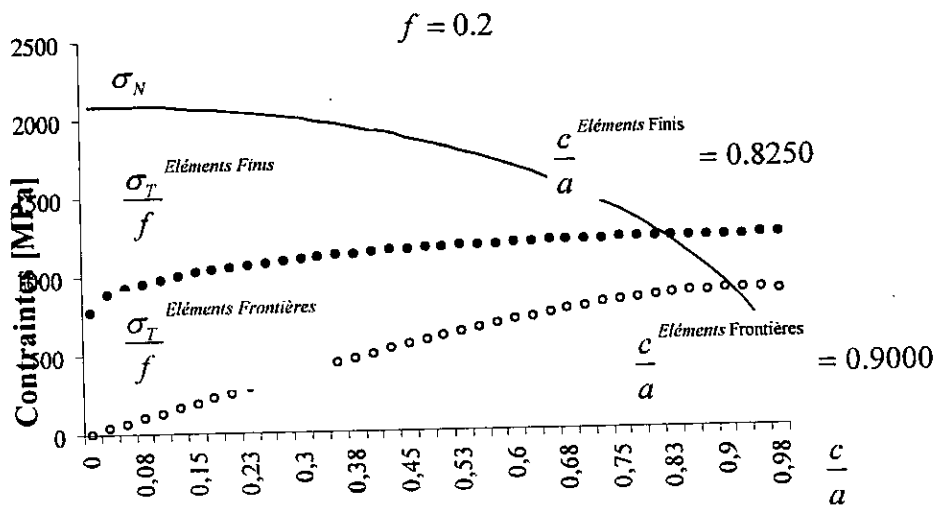
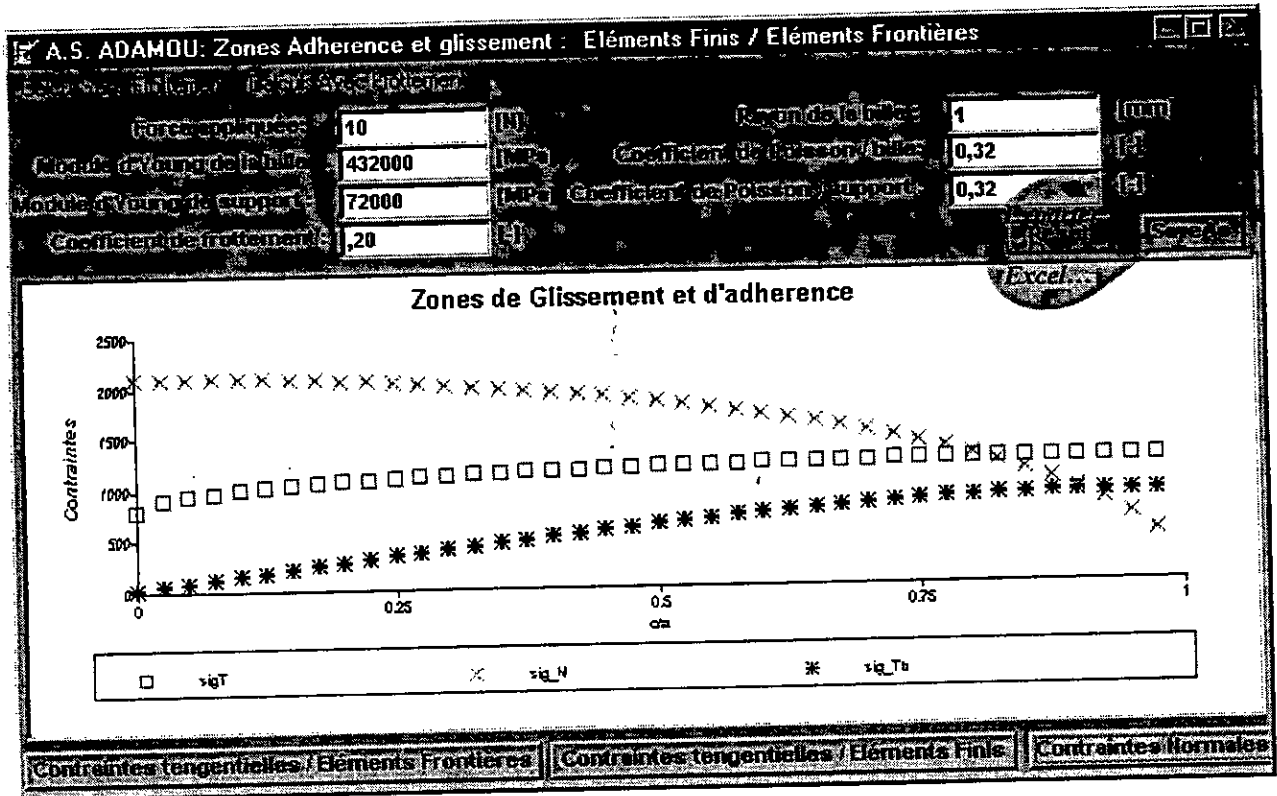


Figure III.7.b : Contraintes normale et tangentielle dans le contact pour  $f = 0.2$

$f = 0.6$

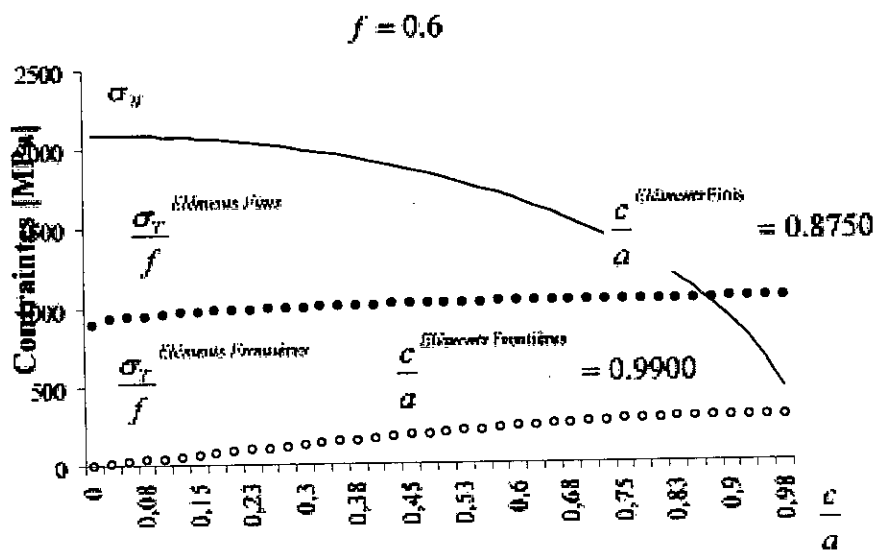
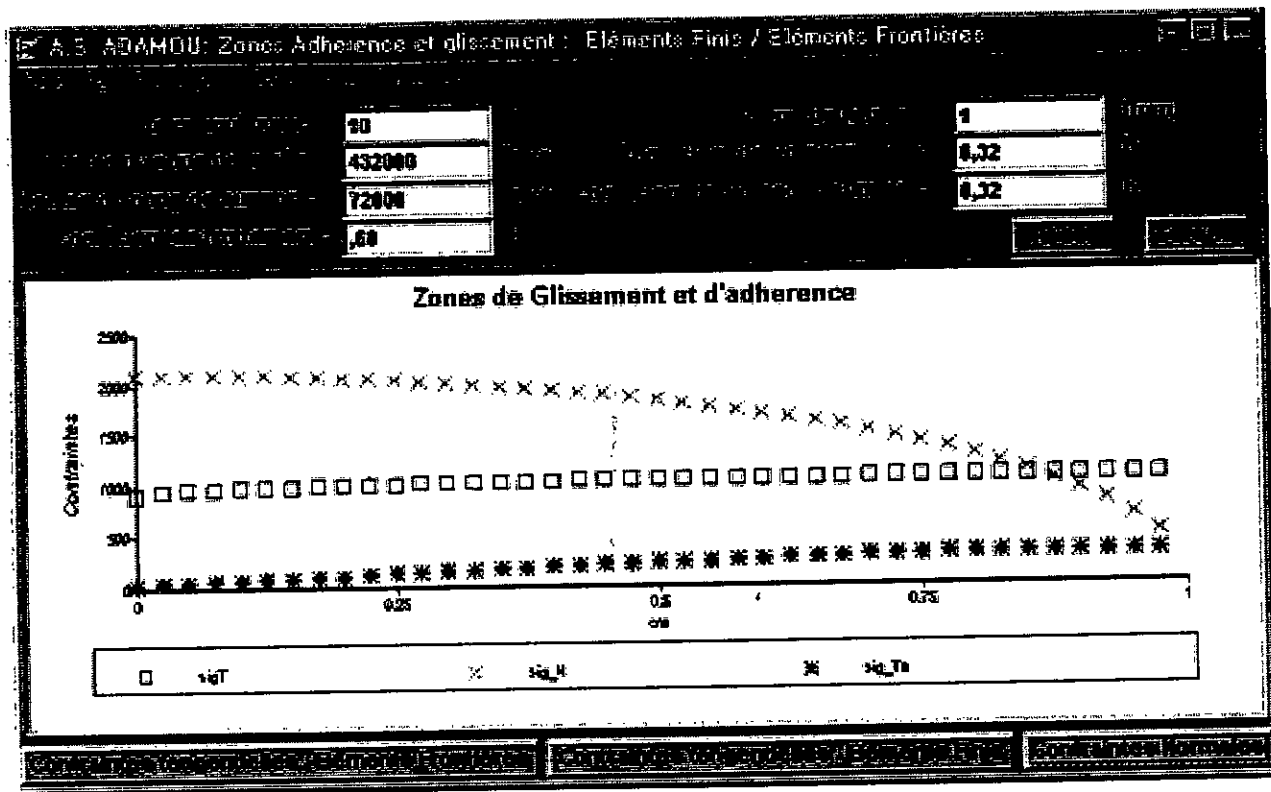


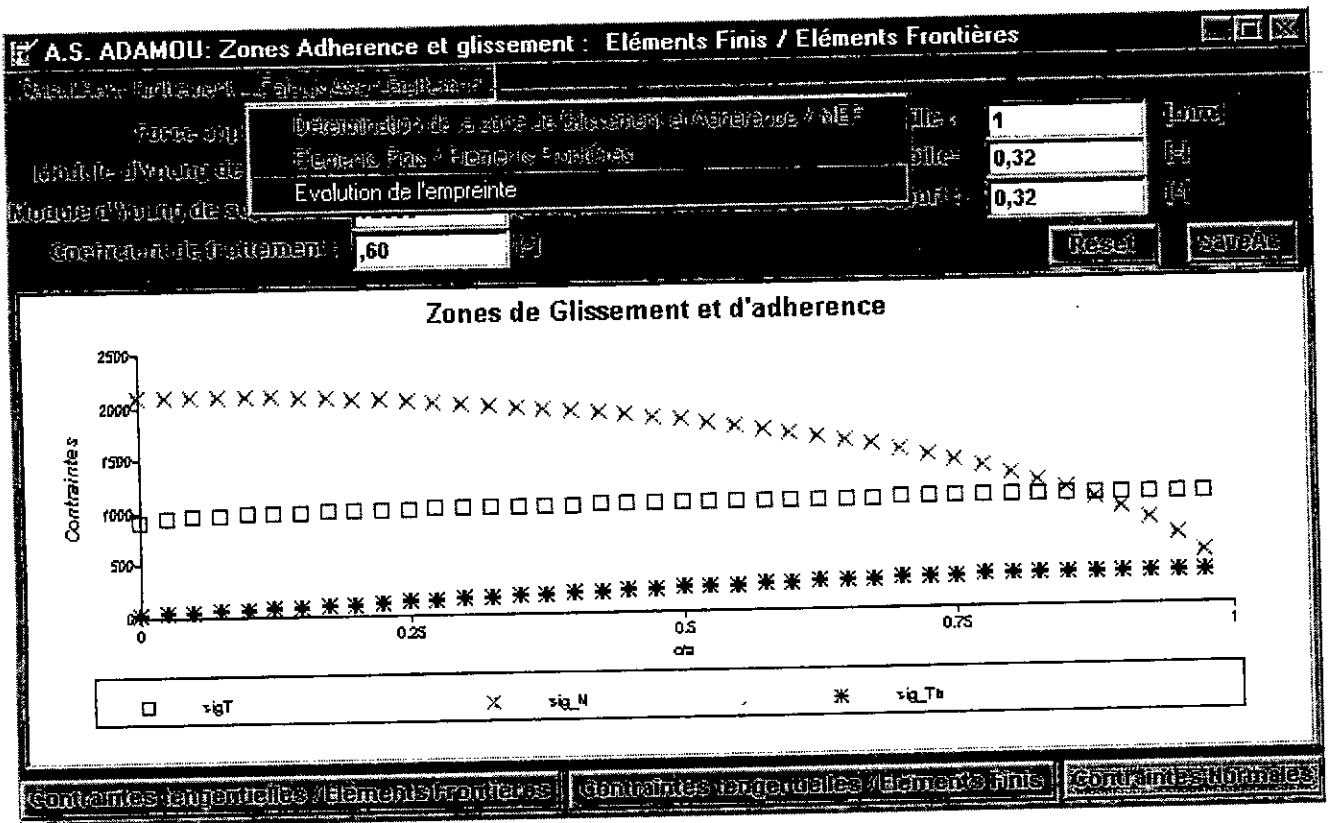
Figure III.7.c : Contraintes normale et tangentielle dans le contact pour  $f = 0.6$

Pour  $f \geq 0.3$ , la zone de glissement devient négligeable, et les courbes de  $\frac{\sigma_T}{f}$  extrapolées sont assez proches de celles calculées par les éléments frontières. Nous présentons la courbe correspondant à  $f=0.6$  sur la figure III.7.c.

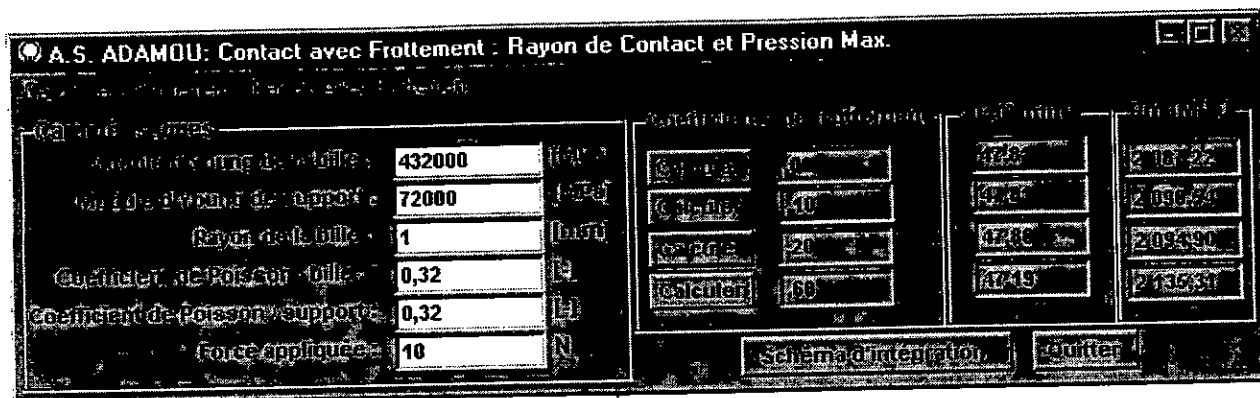
### III.1.3.B. RAYON DE CONTACT ET PRESSION MAXIMALE

Nous reportons dans les valeurs du rayon de contact  $a$ , et de la pression maximale au centre  $P_m$  mesurées pour les trois coefficients de frottement étudiés, et pour les charges  $F_a = 10 \text{ N}$  et  $F_a = 20 \text{ N}$ .

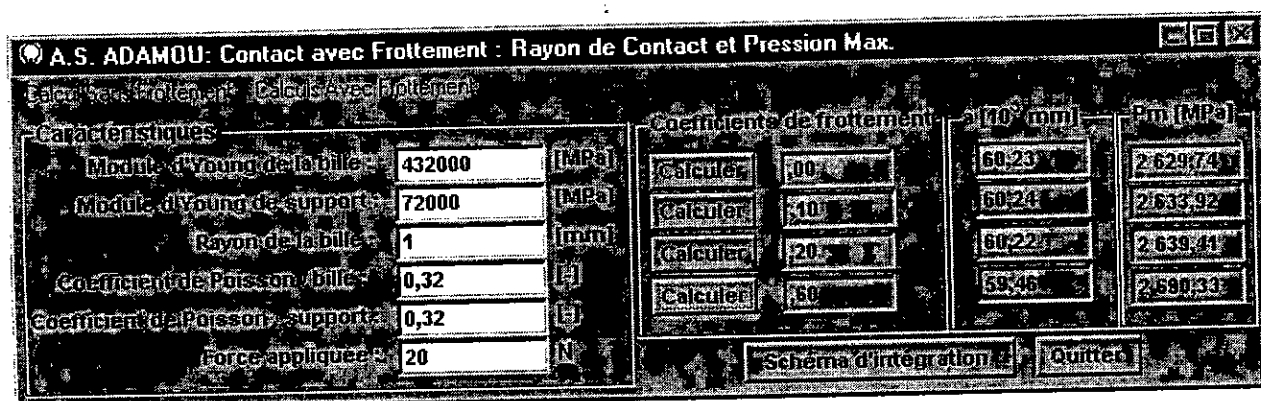
Pour pouvoir effectuer ces calculs, il suffit de cliquer sur 'Evolution de l'empreinte' au niveau du menu comme suit :



- Pour  $F_a = 10\text{ N}$



- Pour  $F_a = 20\text{ N}$



**Remarque**

Pour  $f=0.1$ , nous avons limité le calcul à  $F_a=10\text{N}$ . En effet, lorsque le nombre d'éléments de contact dans la zone de glissement devient important (ce qui est le cas pour  $f=0.1$  et  $F_a=10\text{N}$ ) le nombre d'itération nécessaire à la convergence du processus de résolution augmente considérablement.

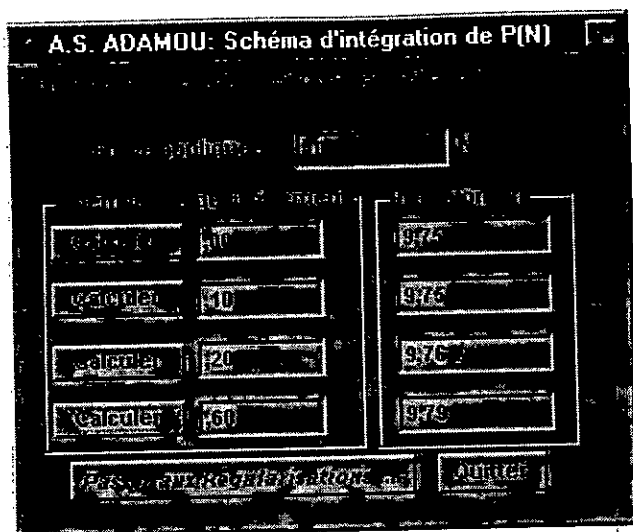
Nous observons dans ce tableau ainsi que sur les courbes de la figure III.28, une augmentation de la pression  $P_m$  couplée à une diminution du rayon  $a$ , par rapport au cas sans frottement, de telle sorte que l'intégrale

$$P = \int_0^a 2\pi r \sigma_{zz}(r) dr \text{ reste constante.}$$

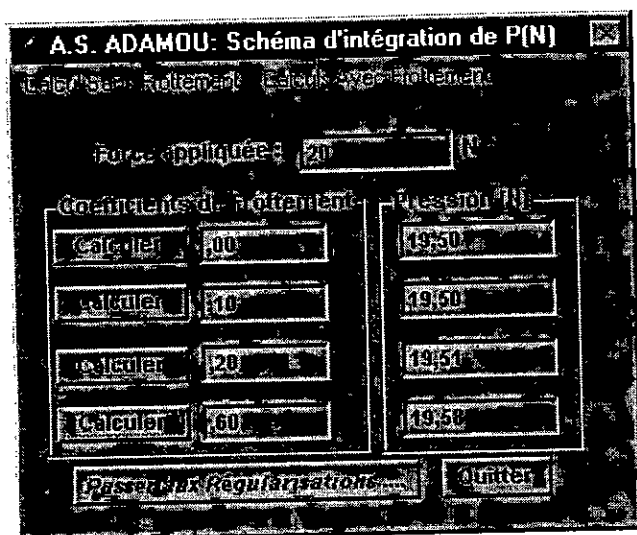
En effet,  $P$  représente la charge sur l'indenteur.

Nous calculons  $P$  à l'aide d'un schéma d'intégration numérique classique. Nous présentons les valeurs correspondant à 10 N et 20 N : (cliquer sur le bouton 'Schéma d'intégration')

- Pour  $F_a = 10 N$



- Pour  $F_a = 20 N$



D'après ce tableau, nous pouvons considérer que l'intégrale  $P$  reste constante, à  $F_a$  donnée, entre les cas  $f=0$  et  $f=0.6$ . En effet, la variation est faible (de l'ordre de 0.5%).

III.1.4. PREMIER EXEMPLE : DEUXIEME SERIE DE CALCUL AVEC FROTTEMENT

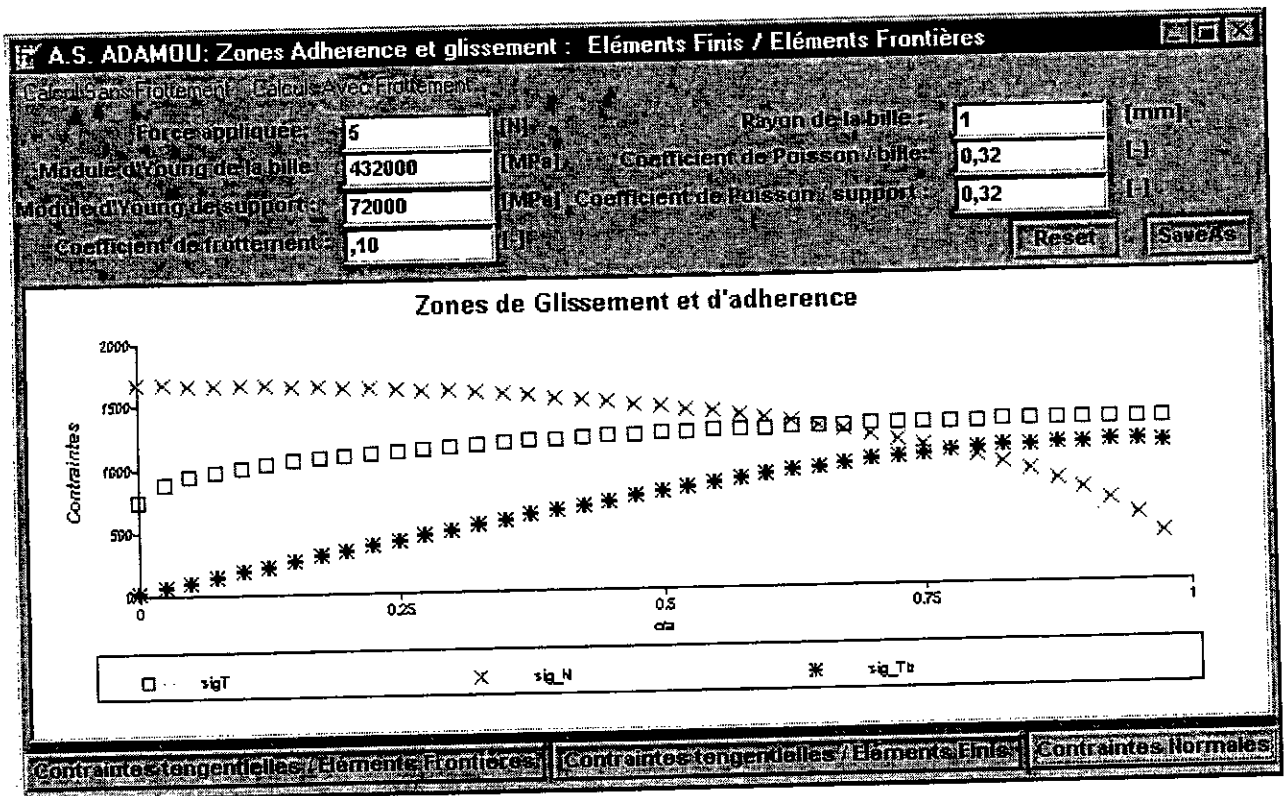
Nous présentons dans ce paragraphe les résultats de notre deuxième série de calculs avec frottement (première régularisation de la loi de Coulomb).

Nous représentons sur la figure III.8 les courbes des contraintes  $\sigma_N$  et  $\frac{\sigma_T}{f}$ , obtenues à  $F_a=5$  N, pour les coefficients de frottement  $f=0.1$  et  $f=0.6$ .

Remarque

- 1. Ces contraintes sont calculées dans le contact par la méthode des éléments frontières (cf. § II.7). Nous avons rajouté sur ces figures, les courbes extrapolées dans le contact par la méthode des éléments finis.
- 2. Nous avons limité les calculs à  $F_a=5$  N. En effet, pour un coefficient de frottement et un incrément de charge donnée, le nombre d'itérations ( $n+r$ , cf. (II.29)) nécessaire à la résolution du problème est approximativement le double avec cette régularisation qu'avec celle utilisée au paragraphe précédent. De plus, à chaque étape, il nous faut plus d'itérations pour résoudre le système (cf. étape (1) de (II.29)) par la méthode du gradient conjugué.

>  $f=0.1$





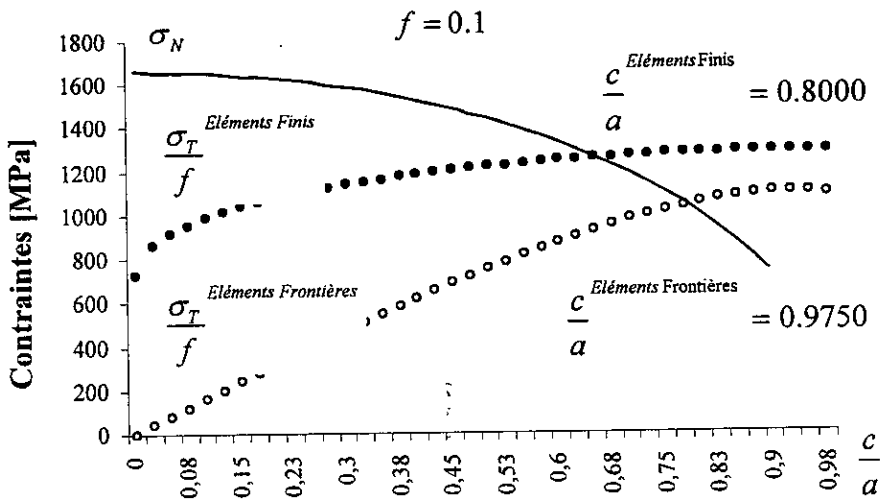
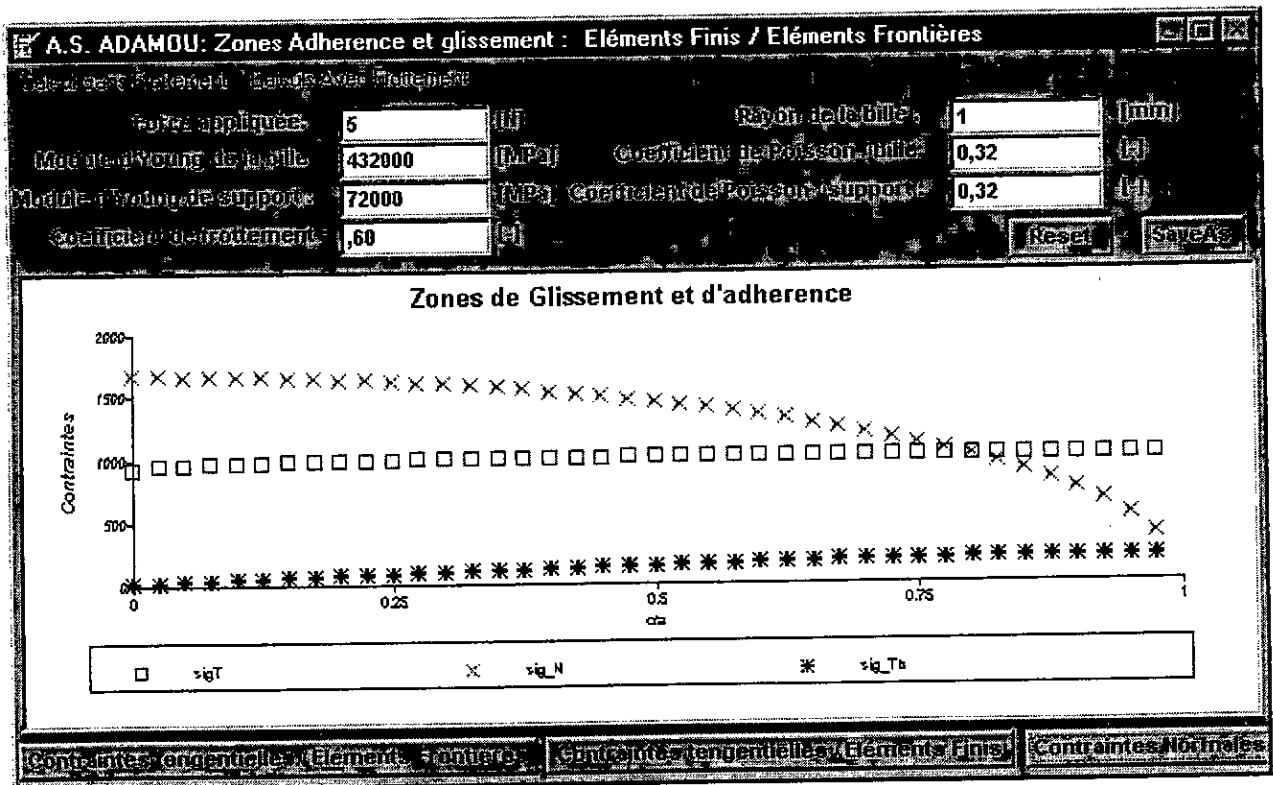


Figure III.8.a : Contraintes normale et tangentielle dans le contact pour  $f = 0.1$

>  $f = 0.6$



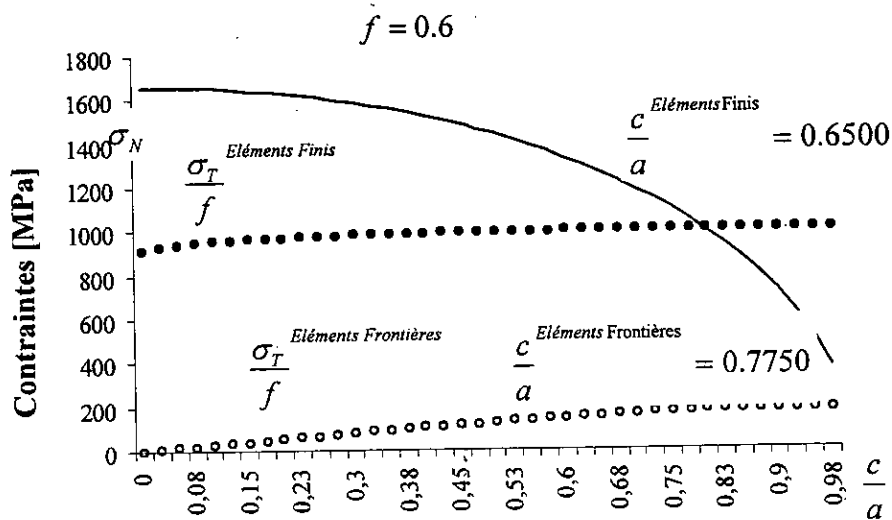
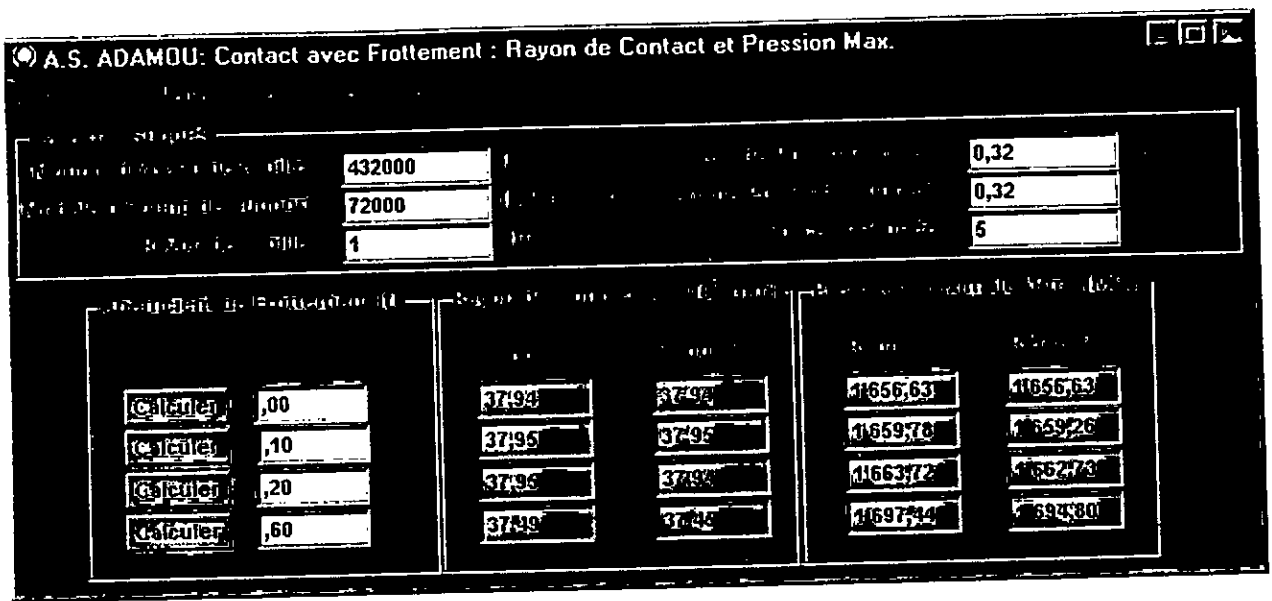


Figure III.8.b : Contraintes normale et tangentielle dans le contact pour  $f = 0.6$

Les courbes de  $\sigma_N$  sont conformes à celle présentée au paragraphe précédent (voir figure III.6). Par contre, les courbes de  $\frac{\sigma_T}{f}$ , que nous obtenons par la méthode des éléments frontières, sont très aplaties et ne nous permettent pas de déterminer des zones d'adhérence et de glissement dans la surface de contact. Par ailleurs, les courbes de  $\frac{\sigma_T}{f}$  calculées par les éléments finis, sont similaires à celles de la figure III.7.

Nous notons cependant une augmentation de la pression  $P_m$  couplée à une diminution du rayon  $a$ . Nous effectuons les calculs du rayon de contact et ceux de la pression maximale relatifs aux deux régularisations pour  $F_a = 5$  N. Nous les comparons à celles issues de la première série de calculs.



Nous obtenons donc des résultats identiques avec les deux séries de calculs.  
 Nous pouvons conclure que les deux régularisations sont valables pour la détermination du rayon de contact et de la pression maximale.

## **CONCLUSION GENERALE**

## CONCLUSION GENERALE

Dans notre étude, nous avons présenté la résolution du contact avec frottement en élasticité classique, entre un indenteur sphérique et un support déformable, par la méthode des éléments finis. Nous avons modélisé le frottement à l'aide de la loi de Coulomb, pour laquelle nous avons testé deux régularisations.

Nos calculs d'indentation sans frottement donnent de bons résultats, conformes à la théorie de Hertz.

Nos calculs avec frottement montrent la nécessité de calculer les contraintes dans le contact par la méthode des éléments frontières, les éléments finis étant trop imprécis.

Nous avons testé les deux régularisations de la loi de Coulomb :

- L'utilisation de la première méthode ne permet pas de déterminer correctement les zones d'adhérence et de glissement dans le contact. Elle présente l'inconvénient supplémentaire de nécessiter un temps de calcul plus long qu'avec la deuxième méthode.
- La mise en oeuvre de la deuxième régularisation dans nos exemples, permet de mettre en évidence, dans la surface de contact, une zone d'adhérence et une zone de glissement, où la relation  $\sigma_T = f\sigma_N$  est vérifiée. Leurs dimensions respectives sont conformes aux résultats analytiques de Spence.

Nous avons par ailleurs, étudié l'influence du frottement sur les contraintes. Nos calculs montrent que celui-ci induit une augmentation de la pression maximale au centre, couplée à une diminution du rayon de contact, par rapport au cas sans frottement.

Nous observons enfin, en présence du frottement, le développement de contraintes de cisaillement sur la surface de contact.

Sur ces points, il n'existe cependant pas de solution analytique valable à laquelle nous pouvions comparer ces différents résultats. Il nous est donc difficile d'en apprécier la précision et la validité.

Comme perspective de développement, il serait souhaitable :

1. D'utiliser des lois de frottement non locales et non linéaires plus proches de la réalité. En effet, le modèle de Coulomb est insuffisant pour décrire correctement le frottement. La non localité rend compte du fait que le comportement d'un point est influencé par ce qui se passe dans le domaine l'entourant. La non linéarité prend en considération les déformations élastoplastiques qui peuvent se produire à la jonction entre des rugosités des deux corps en contact.
2. Entre autre la modélisation du contact bille – support, le simulateur que nous avons créé, peut être considéré comme une vraie plate-forme d'un code de calculs, il serait vraiment intéressant de l'enrichir par des modules.

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] : J.A. BRINELL, 2<sup>EME</sup> CONGRES INTERNATIONAL DES METHODES D'ESSAIS. PARIS (1901)
- [2] : H.A. FRANCIS, "PHENOMENOLOGICAL ANALYSIS OF PLASTIC SPHERICAL INDENTATIONS"  
ASME. JOURNAL OF ENGINEERING MATERIALS TECHNOLOGY, JULY (1976) 272-281
- [3] : C.J. STUDMAN, J.E. FIELD, "THE INDENTATION BEHAVIOUR OF HARD METALS"  
J. PHYS. D : APP. PHYS. 9 (1976), 857-867
- [4] : K.L. JOHNSON, "CONTACT MECHANICS"  
CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, (1985)
- [5] : H.R. HERTZ, "MISCELLANEOUS PAPER"  
(MACMILLAN, LONDON 1896)
- [6] : D.M. MARSH. "PLASTIC FLOW IN GLASS"  
PROC. ROY. SOC. A279 (1964), 420-435
- [7] : R. HILL, "THE MATHEMATICAL THEORY OF PLASTICITY"  
OXFORD UNIVERSITY PRESS., OXFORD (1950)
- [8] : K.L. JOHNSON. "THE CORRELATION OF INDENTATION EXPERIMENTS"  
J. MECH. PHYS. SOLIDS, 18 (1970) 115
- [9] : C.J. STUDMAN, M.A. MOORE, S.E. JONES. "ON THE CORRELATION OF INDENTATION EXPERIMENTS"  
J. PHYS. D : APP. PHYS., 10 (1977), 949-956
- [10] : D. TABOR, "THE HARDNESS OF METALS"  
OXFORD, THE CLARENDON PRESS, 1951
- [11] : T. ISHIBASHI, S. SHIMODA, "THE CORRELATION BETWEEN HARDNESS (MEAN CONTACT PRESSURE BY A SPHERICAL INDENTER) AND FLOW STRESS"  
J.S.M.E. INTERNATIONAL JOURNAL 31, 1 (1988), 117-125
- [12] : L.E. GOODMAN, L.M. KEER, "THE CONTACT STRESS PROBLEM FOR AN ELASTIC SPHERE INDENTING AN ELASTIC CAVITY"  
INT. J. SOLIDS AND STRUCTURES. 407, 117 (1965), 407-415
- [13] : J.R. CAHOON, W.H. BROUGHTON, R. KUTZAK, "THE DETERMINATION OF YIELD STRENGTH FROM HARDNESS MEASUREMENTS"  
METALL. TRANS., 2, JULY (1970)
- [14] : M.O. LAI, K.B. KIM, "ON THE PREDICTION OF TENSILE PROPERTIES FROM HARDNESS TESTS"  
J. MATER. SCI., 26 (1991), 2031, 2036
- [15] : K. YASUDA, K. SHINOHARA, C. KINOSHITA, M. YAMADA, M. ARAI, "DEVELOPMENT OF THE ULTRA-MICROHARDNESS TECHNIQUE FOR EVALUATING STRESS-STRAIN PROPERTIES OF METALS"  
J. NUCL. MATER., 212-215 (1994), 1698-1702
- [16] : J.L. LOUBET, J.M. GEORGES, G. MEILLE, "VICKERS INDENTATION CURVES OF ELASTOPLASTIC MATERIALS"  
MICROINDENTATION TECHNIQUES IN MATERIALS SCIENCE AND ENGINEERING, ASTM STP 889, P.J. BLAU AND B.R. LAWN EDS, AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS, PHILADELPHIA. 72-89, 1986
- [17] : A.G. TANGENA, G.A.M. HURKX, "THE DETERMINATION OF STRESS-STRAIN CURVES OF THIN LAYERS USING INDENTATION TIP INDENTER"  
MAT. TRANSACTIONS OF THE ASME. 108 (1986) 230-232
- [18] : E. SÖDERLUND, N.H. MACMILLAN, "ANALYSIS OF THE DIFFERENTIAL (ALTERNATING CURRENT) TECHNIQUE FOR MEASUREMENTS OF YOUNG'S MODULUS DURING ULTRA-LOW-LOAD INDENTATION"  
JOURNAL OF MATERIALS SCIENCE LETTERS, 10(1991) 720-722
- [19] : I.N. SNEDDON, "THE RELATION BETWEEN LOAD AND PENETRATION IN THE AXISYMMETRIC BOUSSINESQ PROBLEM FOR A PUNCH OF ARBITRARY PROFILE"  
INT. J. ENG. SCI., 3, 47 (1965), 47-57
- [20] : W.C. OLIVER, G.M. PHARR, "AN IMPROVED TECHNIQUE FOR DETERMINING HARDNESS AND ELASTIC MODULUS USING LOAD AND DISPLACEMENT SENSING INDENTATION EXPERIMENTS", J. MATER. RES., 7, 6 (1992), 1564, 1583
- [21] : J.B. PETHICA, W.C. OLIVER, "MECHANICAL PROPERTIES OF NANOMETRE VOLUMES OF MATERIALS : USE OF THE ELASTIC RESPONSE OF SMALL AREA INDENTATION"  
MAT. RES. SOC. SYMP. PROC. 130 (1989), 13-23
- [22] : T.W. WU, "THE A.C. INDENTATION TECHNIQUE AND HIS APPLICATION"  
MATERIALS CHEMISTRY AND PHYSICS, 33 (1993), 15-30

- [23] : R.A. ADAMS, "SOBOLEV SPACES"  
ACADEMIC PRESS, 1975
- [24] : G. DUVAUT, "MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS"  
MASSON, 1990
- [25] : E. RABINOWICZ, "STUDY OF THE STICK-SLIP PROCESS"  
DAVIES FRICTION & WEAR, PAGES 149-164, ELSEVIER NEW-YORK, 1949
- [26] : V.I. JOHANNES, M.A. GREEN ET C.A. BROCKLEY, "THE ROLE OF THE RATE OF APPLICATION OF  
TANGENTIAL FORCE IN DETERMINING THE STATIC FRICTION COEFFICIENT"  
WEAR N° 24 1973: PP 381-385
- [27] : R.S.H. RICHARDSON, H. NOLLE
- [28] : E. RABINOWICZ, "THE INTRINSIC VARIABLES AFFECTING THE STICK-SLIP PROCESS"  
PROCEEDINGS OF THE ROYAL PHYSIC SOCIETY, N°71 : PP 668-675, 1958
- [29] : D.M. TOLSTOI, "SIGNIFICANCE OF THE NORMAL DEGREE OF FREEDOM AND NATURAL VIBRATIONS IN  
CONTACT WITH FRICTION"  
WEAR, N°\_ 10 (1967), PP. 199-213
- [30] : G. DUVAUT, J.L. LIONS, "LES INEQUATIONS EN MECANIQUE ET PHYSIQUE"  
DUNOD (PARIS 1972)
- [31] : G. DUVAUT, "PROBLEMES MATHEMATiques DE LA MECANIQUE : EQUILIBRE D'UN SOLIDE ELASTIQUE AVEC  
CONTACT UNILATERAL ET FROTTEMENT DE COULOMB"  
C.R. ACAD. SCIENCES. PARIS, T.290, 1980, SERIE A, PP. 263-265
- [32] : N. KIKUCHI, J.T. ODEN, "CONTACT PROBLEMS IN ELASTICITY. A STUDY OF VARIATIONAL INEQUALITIES AND  
FINITE ELEMENT METHODS"  
STUDIES IN APPLIED MATHEMATICS
- [33] : P.D. PANAGIOTOPOULOS, "INEQUALITY PROBLEMS IN MECHANICS AND APPLICATIONS"  
BIRKHAUSER BOSTON INC. (1995)
- [34] : J.A.C MARTINS, J.T. ODEN, "A NUMERICAL ANALYSIS OF A CLASS OF CONTACT PROBLEMS WITH FRICTION IN  
ELASTOPLASTICS"  
COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING, 34, 1982, PP. 821-360
- [35] : B. RADI, "ANALYSIS OF CONTACT FRICTION USING THE BOUNDARY ELEMNT METHOD"  
COMPUTITIONAL METHODS IN CONTACT MECHANICS. ELSEVIER APPLIED SCIENCE (1993), PP. 1-60
- [36] : M.L. EDLINGER, "INDENTATION ELASTOPLASTIQUE DE MATERIAUX HOMOGENES ET REVETUS. ETUDE  
THEORIQUE ET CPNFRONTATION A L'EXPERIENCE"  
THESE MINES DE PARIS (1991)
- [37] : K.W. MAN, M.H. ALIABADI, D.P. ROOKE, "ANALYSIS OF CONTACT FRICTION USING THE BOUNDARY  
ELEMNT METHOD"  
COMPUTATIONAL METHODS IN CONTACT MECHANICS. ELSEVIER APPLIED SCIENCE (1993), PP.1-60
- [38] : T. A. CRUSE, D.W. SNOW, R.B. WILSON, "NUMERICAL SOLUTIONS IN AXISYMETRIC ELASTICITY"  
COMPUTERS AND STRUCTURES, VOL. 7, 1997, PP. 445-451
- [39] : J. BALAS, J.SLADEK, V. SLADEK, "STRESS ANALYSIS BY BOUDARY ELEMENT METHODS"  
STUDIES IN APPLIED MECHANICS 23. ELSEVIER (1980)
- [40] : F. SIDORFF, "MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS"  
COURS ECOLE CENTRALE DE LYON
- [41] : D. FRAÇOIS, A. PINEAU, A. ZAOU, "COMPORTEMENT MECANIQUE DES MATERIAUX. ELASTICITE ET  
PLASTICITE"  
HERMÈS (PARIS 1992)
- [42] : C.CA BREBBIA, "BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR ENGINEERS"  
PENTECH. PRESS (1980)



**ANNEXES**

## Annexe A

Fonctions de forme des éléments finis à une et à deux dimensions.

Les fonctions de forme (notées  $N_1$  ou  $N_2$ ) de chaque élément sont exprimées dans le repère de référence de celui-ci. Les nœuds sont numérotés dans le sens trigonométrique.

### A.1. ELEMENTS DE REFERENCE A UNE DIMENSION

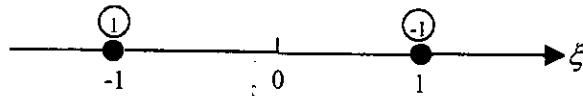


Figure A.1.

Élément à 2 nœuds :  $\{N_1(\xi)\} = \begin{Bmatrix} \frac{1-\xi}{2} \\ \frac{1+\xi}{2} \end{Bmatrix}$

### A.2. ELEMENTS DE REFERENCE A DEUX DIMENSIONS

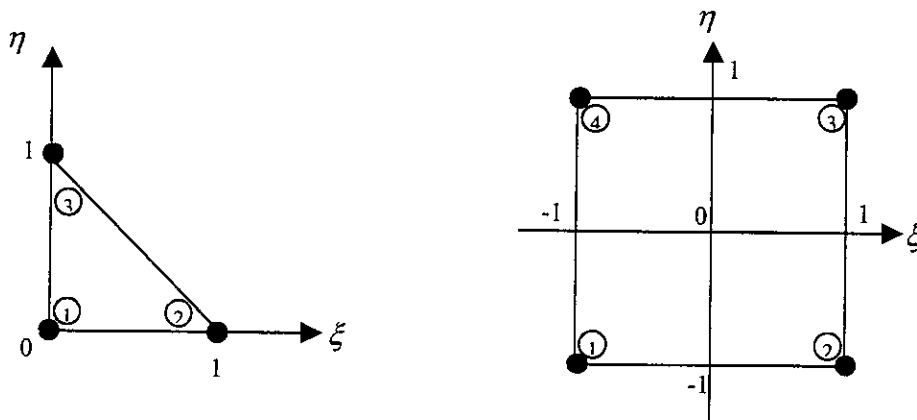


Figure A.2.

Triangle à 3 nœuds :  $\{N(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} 1-\xi-\eta \\ \xi \\ \eta \end{Bmatrix}$

Quadrilatère à 4 nœuds :  $\{N\{\xi, \eta\}\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{Bmatrix}$

## Annexe B :

## LE CONTACT DE HERTZ

## B.1. Introduction

Sous certaines hypothèses simplificatrices, le problème du contact normal entre deux solides élastiques a été résolu analytiquement par Hertz (en 1882) en termes de pression et de dimensions de l'aire de contact, ainsi que par Huber (en 1904) pour ce qui est des contraintes. Considérons deux corps initialement en contact en un point ou le long d'une ligne.

Sous l'action d'un petit chargement, ils subissent un déplacement relatif, et se déforment au voisinage de ce premier point pour coïncider le long d'une surface de contact. La théorie de Hertz permet, sous certaines hypothèses, de déterminer la dimension de cette surface ainsi que la distribution des déformations et des contraintes, en fonction de la pression de contact, de la géométrie et des caractéristiques mécaniques des solides.

Les hypothèses énoncées par Hertz sont les suivantes :

- l'aire de contact entre les deux corps est elliptique,
- Chaque solide est assimilé à un demi-espace élastique. Il est chargé sur une petite zone de sa surface considérée comme plane,
- La surface de contact est petite devant la dimension des corps. En effet, les contraintes sont concentrées dans la région de contact et décroissent rapidement en intensité à partir de celle-ci. Par cette condition, le champ de contraintes n'est pas perturbé par la proximité des bords des solides.
- La surface de contact est petite devant les rayons de courbure des corps. Ainsi, les surfaces autour de la zone de contact peuvent être considérées comme planes. De plus, les déformations dans le contact sont alors suffisamment faibles pour que la théorie linéaire puisse être appliquée.
- Les surfaces sont parfaitement lisses. Elles sont supposées entrer en contact sans frottement de façon à ce que seule une distribution de pression normale agisse sur chacune d'elles.
  - Considérons donc deux corps élastiques, placés au contact l'un de l'autre, puis appuyés l'un contre l'autre par deux forces finies  $F$ , égales en intensité et de sens opposés (voir figure B.1).
  - Durant la compression, les points  $T_1$  et  $T_2$  se rapprochent de l'origine, en se déplaçant, parallèlement à l'axe  $Oz$ , des quantités  $\delta_1$  et  $\delta_2$ .
    - Nous notons :  $\delta = \delta_1 + \delta_2$ , la compression totale.
    - Le problème consiste à calculer la distribution de pression agissant sur l'aire de contact  $S$  entre les deux solides, et produisant des déplacements normaux en surface,  $u_{z_1}$  et  $u_{z_2}$ , vérifiant :

$$\bar{u}_{z_1} + \bar{u}_{z_2} = \delta - h \quad \text{sur } S$$

$$\bar{u}_{z_1} + \bar{u}_{z_2} > \delta - h \quad \text{hors de } S$$

$\bar{u}_z$  : mesure positive

$h = z_1 - z_2$  distance de séparation initiale

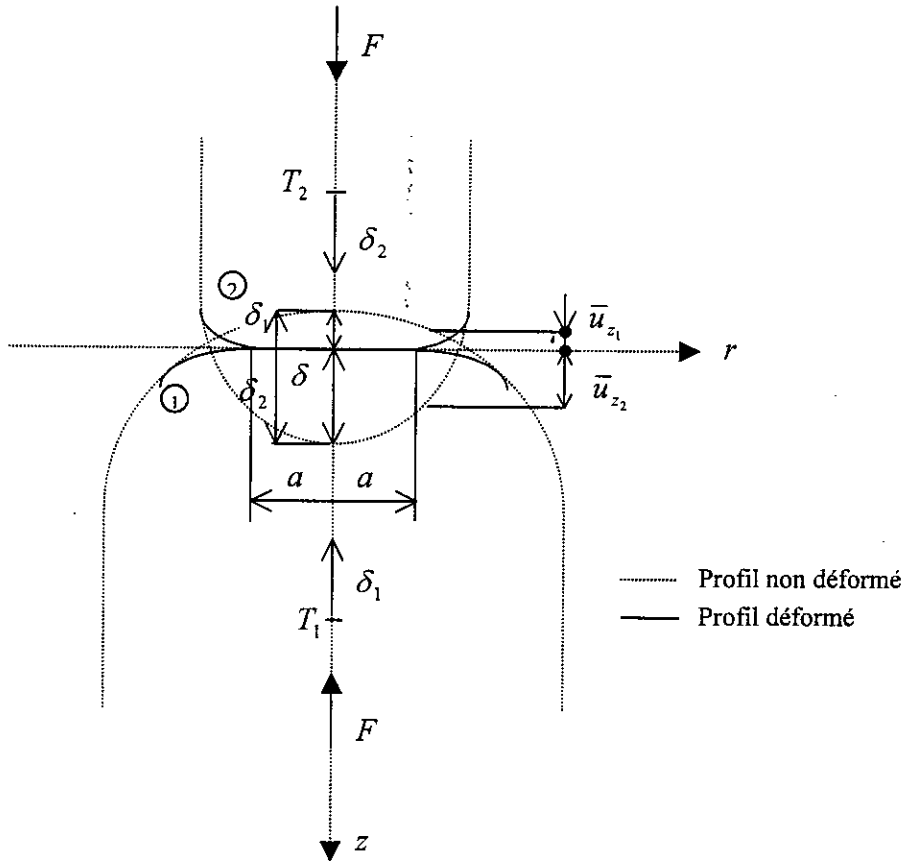


Figure B.1

Nous exposons ici la solution du problème dans le cas du contact de solide de révolution.

## B.2. Solides de révolution

L'aire de contact entre les deux solides est circulaire, de rayon  $a$ .

La distribution de pression proposée par Hertz est donnée par la relation :

$$P(r) = P_m \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}$$

$P_m$  est la pression maximale, s'exerçant au centre du contact ( $r = 0$ ). Elle s'exprime en fonction de la charge totale appliquée  $F$  par :

$$P_m = \frac{3F}{2\pi a^2} \quad (\text{B.1})$$

Le rayon de contact  $a$  et la compression  $\delta$  sont données par :

$$a = \left( \frac{3FR}{4E^*} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{B.2})$$

$$\delta = \frac{a^2}{R} = \left( \frac{9F^2}{16RE^{*2}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{B.3})$$

Avec :

$\frac{1}{R}$  la courbure relative définie par :  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

$R_1, R_2$  : rayons de courbure des corps 1 et 2.

$E^*$  le module d'Young équivalent défini par :  $\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$ .

$E_1, E_2$  : modules d'Young des corps 1 et 2.

$\nu_1, \nu_2$  : coefficients de Poisson des corps 1 et 2.

La solution en déplacements s'écrit :

- dans la zone de contact :  $r \leq a$

$$\begin{cases} \bar{u}_r(r) = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu) P_m a^2}{3E r} \left( 1 - \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \\ \bar{u}_z(r) = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\pi P_m}{4a} (2a^2 - r^2) \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

- Hors de la zone de contact :  $r > a$

$$\begin{cases} \bar{u}_r(r) = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu) P_m a^2}{3E r} \\ \bar{u}_z(r) = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\pi P_m}{4a} \left( (2a^2 - r^2) \arcsin\left(\frac{a}{r}\right) + r^2 \frac{a}{r} \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}} \right) \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

$E, \nu$  : Module d'Young et coefficient de Poisson d'un des deux solides.

La solution en contraintes s'écrit :

- Sur la surface :  $z = 0$

si  $r \leq a$

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{rr}}{P_m} = \frac{1-2\nu}{3} \frac{a^2}{r^2} \left( 1 - \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) - \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \\ \frac{\sigma_{\theta\theta}}{P_m} = -\frac{1-2\nu}{3} \frac{a^2}{r^2} \left( 1 - \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) - 2\nu \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \\ \frac{\sigma_{zz}}{P_m} = -\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

si  $r > a$

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{rr}}{P_m} = -\frac{\sigma_{\theta\theta}}{P_m} = \frac{1-2\nu}{3} \frac{a^2}{r^2} \\ \sigma_{zz} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

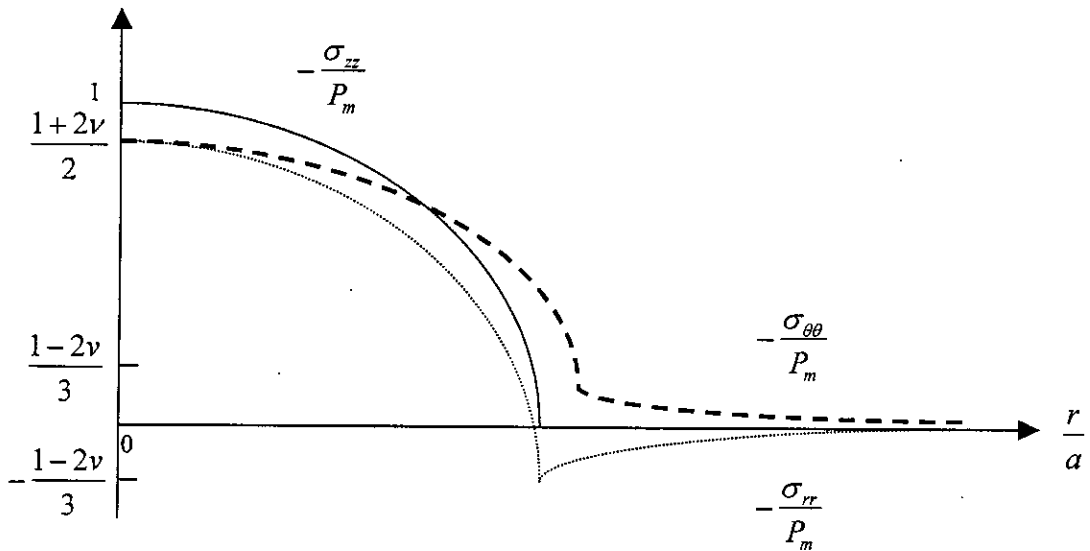


Figure B.2

En surface, les contraintes sont toutes compressives, à l'exception de la composante radiale  $\sigma_{rr}$  qui est positive hors du cercle de contact. Elle atteint sa valeur maximale  $\left(\frac{1-2\nu}{3}\right)P_m$  en  $r = a$ . Cette contrainte est responsable des ruptures en anneaux observées lors de l'indentation de matériaux fragiles, tels que le verre.

- le long de l'axe de symétrie  $Oz$  :

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{rr}}{P_m} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{P_m} = -(1+\nu) \left( 1 - \frac{z}{a} \arctan\left(\frac{a}{z}\right) \right) + \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{z^2}{a^2} \right)} \\ \frac{\sigma_{zz}}{P_m} = -\frac{1}{1 + \frac{z^2}{a^2}} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

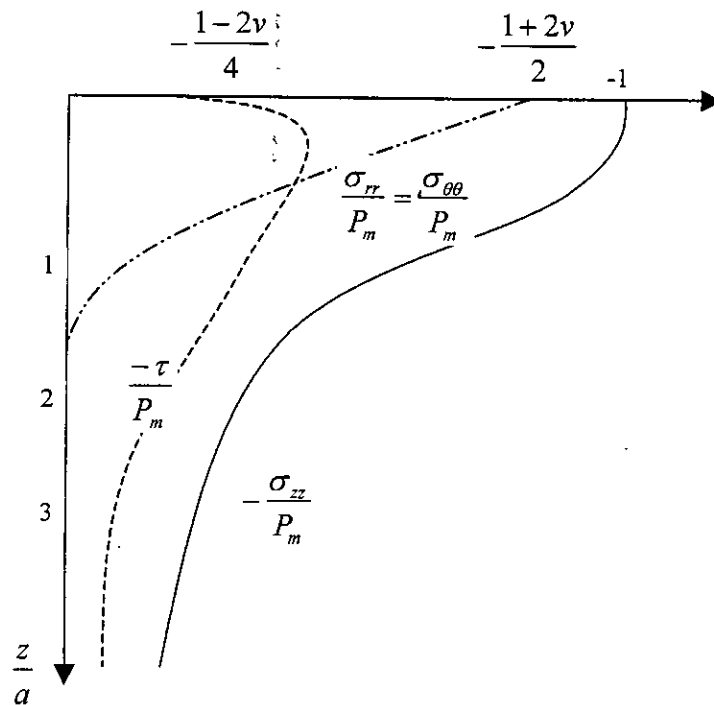


Figure B.3

Le long de l'axe de symétrie, les contraintes  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$  et  $\sigma_{zz}$  sont principales. Nous avons donc :  $\sigma_{rz} = 0$ . Le cisaillement principal s'écrit :

$$\tau = \frac{1}{2} |\sigma_{rr} - \sigma_{zz}| \quad (\text{B.9})$$

Celui-ci atteint sa valeur maximale sous la surface.

Par exemple pour  $\nu = 0.3$ , nous avons :  $\tau_{\max} \approx 0.31.P_m$  en  $z \approx 0.48.a$

C'est à cet endroit que s'initie la plastification d'un matériau lors de son indentation.

### B.3. Application au problème de l'indentation

Les résultats précédents restent valables dans le cas du contact entre demi-espace et une sphère soumise à une charge  $F$ .

En effet, la force  $F$  appliquée sur le corps 1 (voir figure B.1 et figure B.4) n'a aucune influence car celui-ci est supposé infini.

Nous pouvons donc appliquer les formules présentées au paragraphe précédent, en prenant :  $R = R_2$  ( $R_2$  : rayon de la sphère),  $R_1$  étant infini.

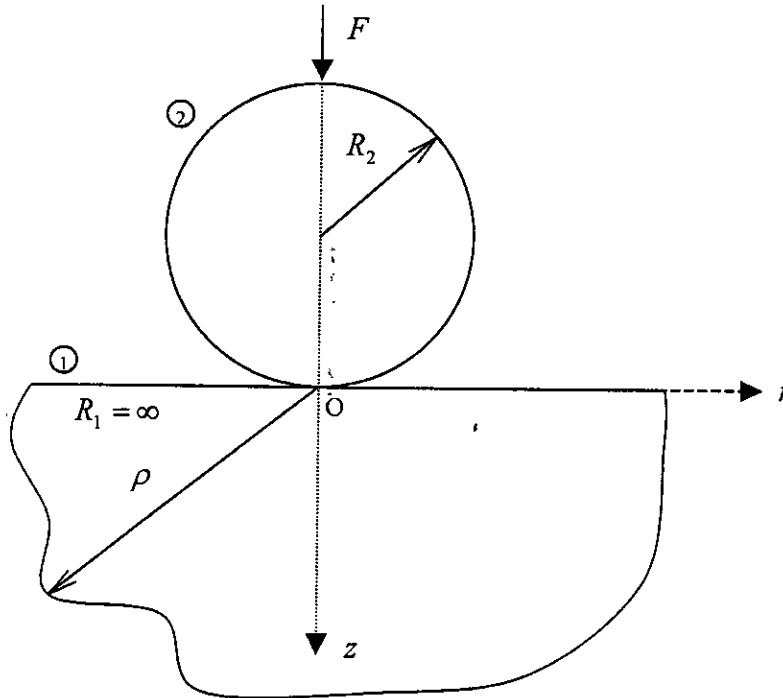


Figure B.4

**Remarque :**

Pour que nous puissions considérer le support comme un demi-espace, nous choisissons ses dimensions telles que :

$$\rho = \max(\sqrt{r^2 + z^2}) \geq 100.a$$

$M(r, z)$  étant un point du support.

En effet, au-delà de la distance  $\rho = 100.a$ , les contraintes peuvent être considérées comme nulles à 0.01 près.



## Annexe C :

## LE CONTACT AVEC FROTTEMENT : SOLUTION ANALYTIQUE DE SPENCE

Spence a établi la solution analytique, en terme de contrainte normale et de dimension de la zone d'adhérence, dans le cas du contact élastique avec frottement entre un demi-espace et un indenteur axisymétrique. Il suppose, pour cela, que le frottement est régi par la loi de Coulomb.

Ses calculs reposent sur les observations de la surface de contact, le frottement s'oppose au glissement relatif des deux solides. Il y a alors adhérence.

Nous avons donc :  $|\sigma_T| < f \cdot |\sigma_N|$  si  $\left| \frac{r}{a} \right| \leq c$  (cf. § II.1).

$f$  : coefficient de frottement,

$\sigma_N, \sigma_T$  : contraintes normale et tangentielle,

$a$  : rayon de la surface de contact,

$c$  : dimension de la zone d'adhérence. Elle est exprimée en pourcentage de  $a$ .

- Dans la partie complémentaire de la surface de contact, entourant la zone d'adhérence, un glissement relatif existe.

Nous avons donc :  $|\sigma_T| = f \cdot |\sigma_N|$  si  $c \leq \left| \frac{r}{a} \right| \leq 1$  (cf. § II.1).

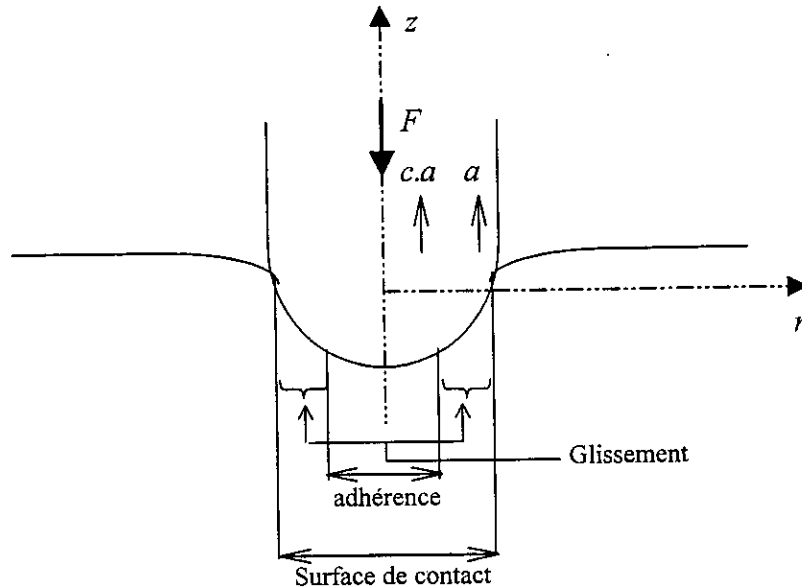


Figure C.1

En supposant que la charge  $F$  est appliquée de façon monotone, à l'aide d'incrémentes suffisamment faibles de manière à rester dans l'hypothèse quasi-statique, Spence établit que le paramètre  $c$  ne dépend que des propriétés mécaniques des matériaux et du coefficient de frottement  $f$ .

Le rapport du rayon de la zone d'adhérence sur celui de la surface de contact, représenté par  $c$ , est donc indépendant de la charge  $F$ .

La relation établit par Spence est la suivante :

$$f = \frac{\gamma}{2cK_1(c)} \ln\left(\frac{1+c}{1-c}\right)$$

- le paramètre  $\gamma$  est défini par la relation :

$$\gamma = \frac{\frac{1-2\nu_1}{2G_1} - \frac{1-2\nu_2}{2G_2}}{\frac{1-\nu_1}{G_1} + \frac{1-\nu_2}{G_2}}$$

$E_i$  : module d'Young } du solide n°i  
 $\nu_i$  : coefficient de Poisson }

$$G_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} : \text{module de cisaillement.}$$

Dans le cas particulier d'un indenteur rigide, l'expression de  $\gamma$  se simplifie :

$$\gamma = \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}$$

$\nu$  : coefficient de Poisson du support.

$K_1(x) = K(\sqrt{1-x^2})$ , où  $K$  est l'intégrale elliptique complète de première espèce.

### Remarque

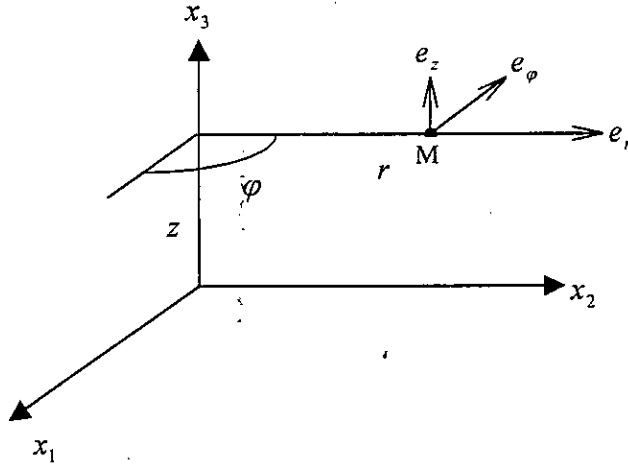
Cette relation entre  $f$ ,  $c$  et  $\gamma$  est valable pour un indenteur plat ou de forme elliptique. La figure suivante représente la courbe de  $f$ , en fonction de  $c$ , pour une valeur de  $\gamma$  donnée.

**Annexe D :**

**LES SOLUTIONS FONDAMENTALES EN AXISYMETRIE**

Dans cette annexe, nous donnons l'expression des solutions fondamentales définies dans le paragraphe II.7.2.

Nous nous plaçons dans le système de coordonnées cylindriques  $(e_r, e_\varphi, e_z)$  (voir figure D.1).



**Figure D.1**

Les solutions fondamentales sont exprimées en fonction de la distance  $s$  d'un point M d'intégration de coordonnées  $(r, 0, z)$  à un nœud  $i$  de coordonnées  $(R, 0, Z)$ .

Nous rappelons les notations suivantes :

$E$  : module d'Young du matériau

$\nu$  : coefficient de Poisson du matériau

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \text{ coefficient de Lamé}$$

$\eta$  : normale extérieure en un point M appartenant à  $\Gamma$

$$K(k) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha, \text{ intégrale elliptique complète de première espèce}$$

$$E(k) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha, \text{ intégrale elliptique complète de deuxième espèce}$$

nous définissons les variables suivantes :

$$b = r - R, \quad c = z - Z, \quad s = \sqrt{b^2 + c^2},$$

$$a = 4Rr + s^2, \quad d = 2Rr + s^2,$$

$$k = 2 \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{a}}.$$

Les solutions fondamentales s'écrivent sous la forme :

$$U_{rr}^*(r, z, R, z) = \frac{1}{4\pi\mu(1-\nu)\sqrt{a}} \left\{ \left[ (3-4\nu) \left( r + \frac{s^2}{2R} \right) + \frac{c^2}{2R} \right] K(k) - \left[ (3-4\nu) \left( 2r + \frac{s^2}{2R} \right) \right] E(k) \right\}$$

$$\begin{aligned}
U_{rr}^*(r, z, R, z) &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)\sqrt{a}} \left\{ \frac{c}{a} K(k) + \left( r \frac{c}{s} \frac{b}{s} - \frac{c}{2} \right) E(k) \right\} \\
U_{rz}^*(r, z, R, z) &= \frac{1}{4\pi\mu(1-\nu)\sqrt{a}} \left\{ -\frac{c}{2} \frac{r}{R} K(k) + \left( r \frac{c}{s} \frac{b}{s} + \frac{c}{2} \frac{r}{R} \right) E(k) \right\} \\
U_{zz}^*(r, z, R, z) &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)\sqrt{a}} \left\{ (3-4\nu)K(k) + \left( \frac{c}{s} \right)^2 E(k) \right\} \\
T_{rr}^*(r, z, R, z) &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)\sqrt{a}} \left\{ \left[ \left( \frac{s^4}{4aRr} + \frac{bs^2}{a} \left( \frac{1}{2r} - \frac{1}{R} \right) + b^2 \left( \frac{3}{2Rr} + \frac{r}{Ra} - \frac{2}{a} \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{16\nu-17}{4Rr} s^2 + b \left( \frac{3}{2R} + \frac{2r}{a} \left( \frac{b}{s} \right)^2 \right) + (2\nu-1) \left( 4 - \frac{r}{R} \right) \right] n_r \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{c}{R} \left[ \frac{b^2-c^2}{2a} + \frac{2Rr}{a} \left( \frac{b}{s} \right)^2 + \frac{5}{2} - 2\nu \right] n_z K(k) + \left[ \left( \frac{5-8\nu}{2Rr} + \frac{2R}{ar} \right) s^2 + 3 \frac{c^2-b^2}{2Rr} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + 2 \frac{b}{R} \left( \nu - 6 \frac{R^2}{a} \right) + 10 - 14\nu + \left( \frac{b}{s} \right)^2 \left( \frac{24Rr}{a} - \frac{r}{R} - 6 \right) - 2 \frac{r}{s} \frac{b}{s} \left( 1 - 2\nu + \frac{8Rr}{a} \left( \frac{b}{s} \right)^2 \right) \right] n_r \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left[ c \left( \frac{4R}{a} + 2 \frac{1-\nu}{R} \right) + \frac{b}{s} \frac{c}{s} \left( 3 + \frac{r}{R} - 16 \frac{Rr}{a} \right) + \frac{2r}{s} \frac{c}{s} \left( 1 - 2\nu + \frac{8Rr}{a} \left( \frac{b}{s} \right)^2 \right) n_z \right] E(k) \right\}
\end{aligned}$$

$$T_{rz}^*(r, z, R, z) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)\sqrt{a}}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{ \left[ \frac{c}{r} \left[ \frac{1}{2a} \left( 2r \frac{b}{s} - s \right)^2 - \frac{3}{2} \right] n_r + \left[ \left( \frac{c}{s} \right)^2 \frac{2rb-s^2}{a} + 2\nu-1 \right] n_z \right] K(k) \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{c}{r} \left( 3 - 2 \frac{d}{a} \right) - 2 \frac{b}{s} \frac{c}{s} \left( 3 - 4 \frac{d}{a} \right) + \frac{2r}{s} \frac{c}{s} \left( 1 - 2\nu - \frac{4d}{a} \left( \frac{b}{s} \right)^2 \right) \right] n_r \right. \\
&\quad \left. - \left[ 2\nu-1 + \left( 3 - 4 \frac{d}{a} \right) \left( \frac{c}{s} \right)^2 + \frac{2r}{s} \frac{b}{s} \left( 1 - 2\nu + \frac{4d}{a} \left( \frac{c}{s} \right)^2 \right) \right] n_z \right. \\
&\quad \left. - \left[ 2\nu-1 + \left( 3 - 4 \frac{d}{a} \right) \left( \frac{c}{s} \right)^2 + \frac{2r}{s} \frac{b}{s} \left( 1 - 2\nu + \frac{4d}{a} \left( \frac{c}{s} \right)^2 \right) \right] n_z \right] E(k) \right\}
\end{aligned}$$

$$T_{zz}^*(r, z, R, z) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)\sqrt{a}}$$

$$\left\{ \left[ \frac{c}{R} \left[ \frac{b^2-c^2}{2a} + \frac{2Rr}{a} \left( \frac{b}{s} \right)^2 + \frac{5}{2} - 2\nu \right] n_r + \frac{r}{R} \left[ \left( \frac{c}{s} \right)^2 \frac{2Rb+s^2}{a} + 2\nu-1 \right] n_z \right] K(k) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left( - \left[ c \left( \frac{4R}{a} + 2 \frac{1-v}{R} \right) + \frac{b}{s} \frac{c}{s} \left( 3 + \frac{r}{R} - 16 \frac{Rr}{a} \right) + \frac{2r}{s} \frac{c}{s} \left( 1 - 2v + \frac{8Rr}{a} \left( \frac{b}{s} \right)^2 \right) \right] \right) n_r \\
& + r \left[ \frac{1-2v}{R} + \left( \frac{c}{s} \right)^2 \left( \frac{8R}{a} - \frac{1}{R} \right) + \frac{2}{s} \frac{b}{s} \left( 1 - 2v - \frac{8Rr}{a} \left( \frac{c}{s} \right)^2 \right) \right] n_z \left. E(k) \right\} \\
T_{zz}^*(r, z, R, z) &= \frac{1}{4\pi(1-v)\sqrt{a}} \left\{ \left[ \left( \frac{c}{s} \right)^2 \frac{2rb - s^2}{a} + 2v - 1 \right] n_r + \frac{2rc}{a} \left( \frac{c}{s} \right)^2 n_z \right\} K(k) \\
& + \left( - \left[ 2v - 1 + \left( 3 - 4 \frac{d}{a} \right) \left( \frac{c}{s} \right)^2 + \frac{2r}{s} \frac{b}{s} \left( 1 - 2v + \frac{4d}{a} \left( \frac{c}{s} \right)^2 \right) \right] n_r \right. \\
& \left. - \frac{2r}{s} \frac{c}{s} \left[ 4 \frac{d}{a} \left( \frac{c}{s} \right)^2 + 1 - 2v \right] n_z \right) \left. E(k) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{rr}^*(r, z, R, z) &= \frac{1}{4\pi(1-v)\sqrt{a}} \left\{ \left[ \left( \frac{s^4}{4aR} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) + \frac{bs^2}{2a} \left( \frac{1}{r} - \frac{r}{R^2} \right) + b^2 \left( \frac{3}{2Rr} - \frac{r}{Ra} - \frac{1}{a} \right) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{16v-17}{4Rr} s^2 + \frac{3}{2} \frac{b}{R} + 6v + \frac{r}{R} (1-2v) - \frac{9}{4} \frac{d}{R^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] n_r \right. \\
& \left. + \frac{c}{R} \left[ \frac{b^2 - c^2}{2a} - \frac{r}{R} \frac{s^2}{2a} - \frac{2rb}{a} + \frac{5}{2} - 2v + \frac{3}{2} \frac{r}{R} \right] n_z \right\} K(k) \\
& + \left[ \left( \left( \frac{5-8v}{2Rr} + \frac{2R}{ar} \right) s^2 + 3 \frac{c^2 - b^2}{2Rr} + \frac{b}{R} \left( 2v + 3 - 12 \frac{R^2}{a} \right) + 9 - 12v \right) \right. \\
& \left. + \left( \frac{b}{s} \right)^2 \left( \frac{8r}{a} - \frac{3}{R} \right) (r+R) + \frac{3}{4} \frac{a}{R^2} + \frac{5}{4} \left( \frac{s}{R} \right)^2 - \left( \frac{b}{R} \right)^2 + \frac{2}{a} (c^2 - b^2) - 4 \frac{rb}{a} \right] n_r \\
& + \left[ -c \left( \frac{4}{a} (r+R) + 2 \frac{1-v}{R} + \frac{r}{R^2} \right) - \frac{b}{s} \frac{c}{s} \left( \frac{3}{R} - \frac{8r}{a} \right) (r+R) \right] n_z \left. E(k) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{zz}^*(r, z, R, z) &= \frac{1}{4\pi(1-v)\sqrt{a}} \\
& \left\{ \left[ c \left[ - \frac{s(R+r)}{2aRr} \left( 2r \frac{b}{s} - s \right) - \frac{3}{2r} - \frac{1}{R} \left( \frac{1}{2} + 2v \right) \right] n_r + \left( 1 + \frac{r}{R} \right) \left( 2v - 1 - \frac{c^2}{a} \right) n_z \right\} K(k) \right. \\
& + \left[ \left( \frac{b}{s} \frac{c}{s} \left( \frac{r}{R} - 3 \right) + \frac{8bc}{a} - \frac{8rc}{a} \left( \frac{b}{s} \right)^2 + 2v \frac{c}{R} + \frac{c}{R} \left( 3 - \frac{2s^2}{a} \right) \right] n_r \\
& \left. + \left[ (1-2v) \left( 1 + \frac{r}{R} \right) + \left( \frac{c}{s} \right)^2 \left( -3 + \frac{r}{R} - \frac{8rb}{a} \right) + 4 \frac{c^2}{a} \right] n_z \right\} E(k)
\end{aligned}$$

$$D_{rz}^*(r, z, R, z) = D_{zz}^*(r, z, R, z) = 0$$

Dans le cas où le nœud  $i$  appartient à l'axe de symétrie ( $R = 0$ ), les formules précédentes se simplifient :

$$U_{rr}^*(r, z, 0, z) = U_{zz}^*(r, z, 0, z) = 0$$

$$U_{rz}^*(r, z, 0, z) = \frac{1}{8\mu(1-\nu)} \left(\frac{b}{s}\right)^2 \frac{c}{s}$$

$$U_{zz}^*(r, z, 0, z) = \frac{1}{8\mu(1-\nu)} \frac{b}{s} \left[ 3 - 4\nu + \left(\frac{c}{s}\right)^2 \right]$$

$$T_{rr}^*(r, z, 0, z) = T_{zz}^*(r, z, 0, z) = 0$$

$$T_{rz}^*(r, z, 0, z) = \frac{1}{4(1-\nu)s} \left\{ \frac{b}{c} \frac{c}{s} \left[ 3 \left(\frac{c}{s}\right)^2 - 2(1+\nu) \right] n_r - \left(\frac{b}{s}\right)^2 \left[ 1 - 2\nu + 3 \left(\frac{c}{s}\right)^2 \right] n_z \right\}$$

$$T_{zz}^*(r, z, 0, z) = \frac{1}{4(1-\nu)s} \frac{b}{s} \left( \frac{b}{s} n_r + \frac{c}{s} n_z \right) \left[ 2\nu - 1 - 3 \left(\frac{c}{s}\right)^2 \right]$$

$$D_{rr}^*(r, z, 0, z) = D_{zz}^*(r, z, 0, z) = 0$$

Lorsque  $r$  est nul,  $D_{rr}$  et  $D_{zz}$  se simplifient :

$$D_{rr}^*(0, z, R, Z) = D_{zz}^*(0, z, R, Z) = 0$$

