

وزارة التربية الوطنية
MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة - BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : *GENIE MECANIQUE*

PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

Application du mode semi-inverse direct pour
le calcul d'écoulements transsoniques dans
les turbo-machines

Proposé par :

Mr. BOUDJEMAA M.

Etudié par :

Mr. ABASSI K.
Mr. OSMANI M.

Dirigé par :

Mr. BOUDJEMAA M.

PROMOTION

1996

Remerciement

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à notre promoteur Mr. BOUDJEMAA pour l'aide précieuse qu'il nous a apporté et pour les conseils qu'il nous prodigues pour la mise en oeuvre de ce projet de fin d'étude, on le remercie vivement.

Et nous remercions également tous nos collègues, et tous ceux qui nous ont aidés dans notre travail.

D'autre part nous remercions les Messieurs membres du jury.

الإهداء

إلى أمي وأبي العزيزين الذين جهدا في
رعايتي وتعليمي إلى جديتي العزيزة
إلى كل إخواني وأخواني إلى
كل أساتذتي في جميع الاطوار
و اصدقائي

أهدي هذا العمل المتواضع

محمد -

الاهداء

أهدي هذا العمل المتواضع إلى
والدي العزيزين تقديراً لجهودهما
التي بذلوها من أجل الوصول إلي
هذا العمل المتواضع .
كما لا أنسى إخوتي وأخواتي وجميع
أساتذتي في كل المراحل التعليمية .

خالد

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

TABLES DES MATIERES

Tables des Matières

Chapitre : 0

Introduction générale

Chapitre I : Généralité :

I.1- Introduction

I.2- Description des écoulements dans les turbomachines.

I.3- Equations caractérisant l'écoulement à travers les turbomachines.

I.4- Hypothèses simplificatrices fondamentales.

I.4.1- Hypothèse de localisation des effets de viscosité

I.4.2- Hypothèse d'écoulement stationnaire

I.4.3- Decomposition de l'écoulement tridimensionnel en deux familles d'écoulement bidimensionnel.

I.4.5- Conclusion :

Chapitre II : Méthode semi-inverse

II.1- Introduction.

II.2- Position du problème

II.3- Mise en equations

II.3.1- Système de coordonnées

II.3.2- Equation du mouvement

II.3.3- Transformation du système(II.3).

II.3.4- Stude de la variation d'entropie

II.4 Principe de discretisation en differences finies

II.4.1.1- Calcul de la courbure des lignes de courant

II.4.1.2- Schema de discretisation

II.4.1.2.a - Etape explicite

II.4.1.2.b - « implicite

II.4.2. - Condition aux limites et initiales

II.4.2.a - Condition initiales

II.4.2.b - Condition aux limites

- II.4.3. - *Etude de la stabilité du schéma explicite*
- II.4.4 - *Etude de la précision du schéma*
- II.4.5 - « « « *Implicite*
- II.4.6 - *Adaptation du schéma aux conditions aux limites influencées d'un terme de viscosité artificielle.*
- II.5. *Traitement numérique des discontinuités*
- II.6 *Conclusion*

Chapitre III : Méthode directe (pseudo-stationnaire)

- III.1 *Introduction*
- III.2 *Formulaire*
 - III.2.1 *Equation de mouvement*
 - III.2.2- *Traitement des conditions Initiales et aux limites*
 - III.2.2.1- *Conditions initiales*
 - III.2.2.2- *Conditions aux limites*
- III.3. *Méthode numérique*
 - III.3.2.1 *Discretisation au point Mij interieur au domaine de calcul.*
 - III.3.3.2 - *Traitement points situé sur la frontière du domaine de calcul*
 - III.3.3 *Critère de stabilité.*
- III.4. *Conclusions*

Chapitre IV : Couplage

- IV.1- *Introduction*
- IV.2- *Quelque types de couplages*
 - IV.2.1 *Couplage avec la méthode d'ondes choc*
 - IV.2.2. « *de couche limite*
 - IV.2.3. *Tendances recentes*
 - IV.2.4. *Couplage de la méthode inverse avec la méthode directe.*
- IV.3 - *Nécessite du couplage*
 - IV.3.2- *Résumé*
- IV.4 *Procédure de couplage*
 - IV.4.1 *Adaptation des domaines de calcul*
 - IV.4.2 « « *données initiales et des conditions aux limites*
 - IV.4.3- *Convergence de la méthode*
 - IV.4.4- *Le profil et la distribution du mach*
- IV.5 *Conclusion :*

Chapitre V : Applications et commentaire

V.2. Résultats et commentaire.

V.2.1- Grille d'aube (cas d'un compresseur)

V.3 Conclusion :

Conclusion Générale :

Références bibliographiques

Annexes

***Annexe A : Equations de l'écoulement à travers une turbomachine
(cas d'un repere mobile)***

Annexe B : Analyse de la stabilité des schema aux differnces finis

***Annexe C : Recherche systematique des discontinuités relation de
(Ranbire - Hugoniob)***

***Annexe D : Traitement numérique des ondes de choc notion de
viscosité artificielle***

CHAPITRE 0

Introduction Générale

Dans la conception assistée par ordinateur (CAO), celui-ci joue un rôle d'un outil, certes très efficace, utilisé en tant que simulateur numérique des phénomènes physiques, et permettant l'analyse d'une situation correspondant à une certaine configuration d'un prototype. Cet usage du calculateur où celui-ci n'intervient pas dans la conception même du prototype consiste à résoudre ce qu'on l'appelle un problème direct. A l'opposé lorsque le calculateur intervient dans le dimensionnement du prototype, en réponse à telle ou telle spécification, le problème traité est alors inverse.

Dans le cas des turbomachines, la simulation numérique vise à l'amélioration de leurs caractéristiques aérodynamiques. Et ce en améliorant les performances des aubages, tout en cherchant une géométrie de la paroi qui conduit à une distribution de vitesse minimisant l'intensité des ondes choc et les effets visqueux, qui conditionnent l'efficacité d'un étage de compresseur ou de turbine.

Une telle recherche peut être réalisée par plusieurs méthodes, entre autres : la méthode inverse où l'on se donne une répartition de vitesses choisie de manière à minimiser l'importance des couches limites ; la géométrie résulte du calcul, et la méthode pseudo-instationnaire ou bien méthode directe où l'on se donne cette fois-ci un profil déterminé et on calcule les caractéristiques de l'écoulement tout autour.

Chacune des deux méthodes présente des inconvénients dans la pratique. Et comme il est de peu d'intérêt de tracer un profil dont les performances sont excellentes d'où une situation s'effondre dans une autre, la notion de solution « optimale doit être prise en compte. D'où vient l'idée de coupler dans le processus itératif les deux méthodes précédentes dans l'espoir d'aboutir à des résultats applicables avec un minimum de prudence.

La tendance observée actuellement et d'étendre les méthodes précédentes à des cas tridimensionnels. Celles-ci sont obtenues généralement par couplage entre une méthode quasi 3D et une méthode de l'équilibre radial associées dans un même programme [réf. 6].

Le travail qui fait l'objet du présent mémoire a pour thème « l'application du mode inverse-direct pour le trace de profil d'aubage en écoulement transsonique » pour une loi d'épaisseur et une distribution de vitesse imposée uniquement sur l'extrados.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté les modèles les plus couramment utilisés pour présenter les écoulements dans les turbomachines.

Dans le deuxième, nous avons exposé la méthode semi-inverse.

Le troisième chapitre illustre la méthode directe.

Un exposé sur le couplage fait l'objet du quatrième chapitre.

Le cinquième chapitre concerne les applications du couplage.

I.1 Introduction

Des turbomachines de tous types sont largement utilisées de longue date dans pratiquement tous les secteurs de l'industrie et des transports.

En raison des quantités d'énergie, souvent très importantes, introduites et transformées dans ces machines, l'amélioration de leurs performances constitue une réussite économique de premier plan. Cela est sujet à ; en pratique à plusieurs contraintes de différentes natures (mécaniques, aérodynamiques, etc...) ce qui a suscité les chercheurs à essayer de trouver des modèles qui approchent le mieux la réalité, définis par I.

Dans ce chapitre nous allons décrire les principaux modèles d'écoulement dans les turbomachines.

Des hypothèses simplificatrices.

I.2 DESCRIPTION DES ECOULEMENTS DANS LES TURBOMACHINES :

A travers une turbomachine un échange d'énergie est effectué entre un fluide en mouvement et un arbre en rotation.

L'énergie mise en jeu peut être apportée par un organe extérieur, généralement un moteur (compresseur) ou par le fluide lui-même (turbine).

Au cours du processus d'échange d'énergie entre le fluide et les parties tournantes de la machine, deflections, accélérations et diffusions sont imposées à l'écoulement à travers les passages limités par les parois du moyeu et du carter externe. Ces parois ne présentent pas en général une forme simple, aussi l'écoulement est de type interne, tridimensionnel, le plus complexe que l'on puisse rencontrer.

De plus, l'écoulement est instationnaire (périodique dans le temps), bien souvent compressible et comporte des domaines limités par les ondes choc. Il est également soumis aux effets de viscosité, donc de caractère dissipatif en raison des forts gradients de vitesses aux voisinages des parois.

Sur le plan théorique, un tel écoulement peut-être décrit par les équations de NAVIER-STOKES, complet instationnaire, en régime turbulent, qui ne peuvent encore être résolues pour le moment.

Il est donc nécessaire, dans le domaine expérimental comme dans le domaine théorique, d'effectuer des hypothèses simplificatrices conduisant à des modèles utilisables en pratique.

I. EQUATIONS CARACTERISANT L'ECOULEMENT A TRAVERS LES TURBOMACHINES :

L'écoulement à travers une turbomachine obéit aux équations de NAVIER-STOKES instationnaires qui peuvent être représentées dans le repère relatif comme suit :

Continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{w}) = 0 \quad (\text{I.1.a})$$

quantité de mouvement

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{w^2}{2} \right) - \vec{W} \wedge \text{rot} \vec{V} + \Gamma \vec{e} + \Gamma \vec{c} + \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{1}{\rho} \vec{F} = \vec{O} \quad (\text{I.1b})$$

Energie

$$\vec{T} \text{ grad} s = \text{grad} h - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad (\text{I.1c})$$

\vec{W} : vitesse relative (ou absolue) par rapport au repère choisi avec :

$\Gamma \vec{e} = -\omega^2 \vec{r}$ est l'accélération d'entraînement

$\Gamma \vec{c} = 2 \omega \wedge \vec{W}$ est l'accélération de coriolis.

F_f représente les forces dissipatrices, V, P, T, S représente respectivement la vitesse, la pression, la température et l'entropie.

Les équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme suivante [ref.7]

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{w} - \frac{\vec{W}}{a^2} \text{grad} \left(\frac{W^2 + \omega^2 r^2}{2} \right) - \frac{\vec{W} \text{ grad } s}{R} = 0 \quad (\text{I.2a})$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} - W \Lambda \text{rot } W = T \text{ grad } S - \text{grad } H_R + \frac{F_f}{\rho} \quad (\text{I.2b})$$

$$\vec{W} \cdot \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \text{grad } H_R \right) = 0 \quad (\text{I.2c})$$

telque : $H_R = h - \omega^2 R^2/2$ (h étant l'enthalpie totale relative) est la rothalpie que joue le même rôle que l'enthalpie totale dans le cas d'un repère fixe.

I.4 HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES FONDAMENTALES :

Les hypothèses ayant permis de définir des modèles pratiquement utilisables sont :

- Hypothèse de localisation des effets de viscosité.
- Hypothèse de l'écoulement stationnaire
- Décomposition de l'écoulement tridimensionnel.

I.4.1 HYPOTHESE DE LOCALISATION DES EFFETS DE VISCOSITE :

Où consiste à supposer que les effets de viscosité et de conductivité ne sont sensibles que dans une couche d'épaisseur très limitée le long des parois de la veine et des profils (concept de la couche limite) [réf. 8]

Le modèle ainsi proposé simplifie énormément l'écoulement qui est alors supposé non visqueux hors du voisinage immédiat des parois. En pratique sa validité paraît assurée dans la mesure où les gradients (vitesse et température) suivant une direction perpendiculaire à la direction de l'écoulement, restent très faibles. (sa validité peut poser certains problèmes) lorsque l'écoulement subit des variations brutales à l'intérieur, si sa validité peut poser certains problèmes, mais il paraît qu'il est difficile de s'en affranchir en l'état actuel des connaissances.

I.4.2 HYPOTHESE D'ÉCOULEMENT STATIONNAIRE :

l'utilisation de modèles d'écoulements stationnaires est largement répandue. Ainsi de nombreuses méthodes qui concernent la conception ou la prévision de l'écoulement autour de profil d'auboges sont basées sur de tels modèles, sur le plan expérimental on peut citer sur le cadre de ces méthodes la grille plane par exemple.

Cependant les phénomènes instationnaires que l'on observe sur les turbomachines, essentiellement périodiques, peuvent avoir une influence sur certains aspects de l'écoulement et les performances globales. [réf. 8]

I.4.3 DECOMPOSITION DE L'ÉCOULEMENT TRIDIMENSIONNEL EN DEUX FAMILLES D'ÉCOULEMENTS BIDIMENTIONNELS :

Ce modèle a été développé par WU. Ca consiste à approcher l'écoulement réel tridimensionnel en considérant deux types d'écoulements le long de surfaces de courant qui, l'amont de la machine, s'appuient respectivement sur des cercles centrés sur l'axe de la machine (surface S_1) et sur des rayons perpendiculaires à l'axe (surfaces S_2).

Nous n'allons pas tarder à exposer cette méthode car elle a fait l'objet de plusieurs projets de fin d'étude des années précédentes [réf.9].

I.5 CONCLUSION :

Dans ce chapitre, trois hypothèses principales, généralement retenues pour décrire et étudier l'écoulement dans une turbomachine ont été rappelées.

Le problème mettant en jeu des phénomènes d'onde choc et d'interaction onde choc-couche limite est très difficile à résoudre et sa solution ne représente qu'un pas vers la détermination de l'écoulement tridimensionnel. C'est pourquoi, on fait recours (en particulier dans le présent mémoire) aux modèles d'écoulements décrits au début du chapitre.

CHAPITRE II

II.1 Introduction

Certains phénomènes de l'écoulement dans les turbomachines, réduisent les performances de leurs aubages. Et pour contourner ces problèmes, l'élaboration d'un tracé d'aubage est l'une des techniques les plus utilisées en vue de delimitier l'efficacité de ces phénomènes (particulièrement les décollements).

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à l'une des méthodes numériques qui traitent les écoulements transsoniques dont les équations sont de type mixtes; c'est à dire, de type élliptique hyper bolique, qui est bien la méthode semi-inverse.

II.2) Position du problème :

L'écoulement est calculé dans un domaine limité par deux lignes de courant L1 et L2 et deux frontières arbitraires C1 et C2 connectant L1 avec L2 (Fig.II.1).

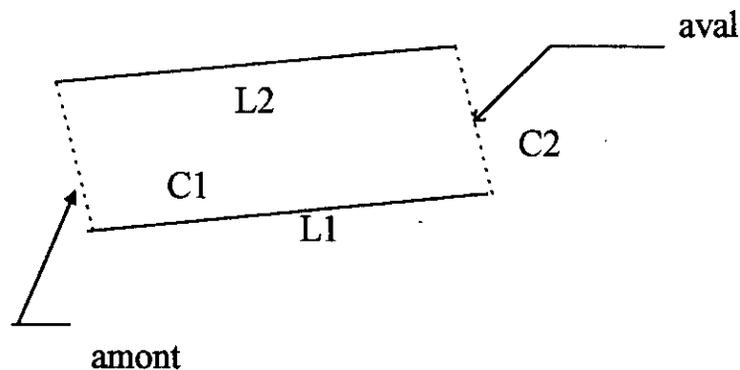


Fig.II.1

Le vecteur vitesse est défini en grandeur et en direction sur la ligne de courant initiale L1, avec des conditions imposées sur la frontière amont et éventuellement aval C2 si une solution subsonique est imposée. On détermine ainsi la forme d'un canal (et la répartition des vitesses).

Pour l'application au calcul d'aubage, L1 représente l'extrados et L2 (depuis seulement à la fin du calcul) correspond à l'intrados de l'aube suivante.

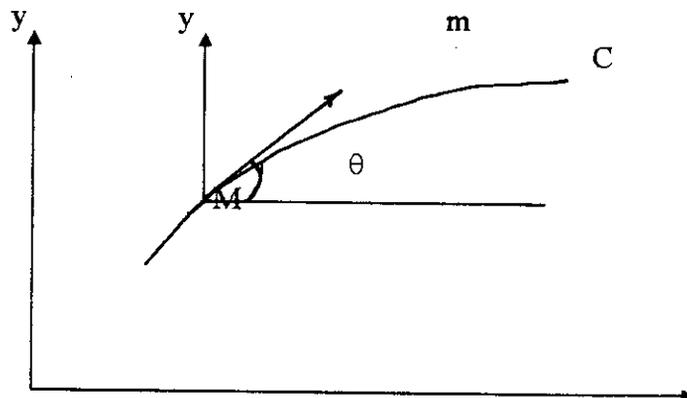
La forme du profil d'aube est obtenue par une translation tangentielle d'un pas de grille (pitch). C1 et C2 sont généralement choisies pour coïncider avec les plans d'attaque et de fuite respectivement.

II.3 MISE EN EQUATIONS :

II.3.1 Système de coordonnées :

Le plan étant rapporté au plan orthonormé (ox,oy) , soit C une ligne de courbure dans ce plan, M un point de C (Fig.II.2).

On définit un autre repère (m,y) lié aux déplacements des particules fluides, se basant sur des vecteurs tangents aux points M et perpendiculaire à l'axe machine ox :



Il existe entre les dérivées partielles dans les deux repères, les relations :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial m} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{II.1a})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos} & -\text{tg}\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial m} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{II.2b})$$

θ : désignant l'angle de la tangente en M à C avec l'axe ox.

II.3.2 EQUATIONS DU MOUVEMENT :

On se limitera ici au cas d'écoulement plan avec contraction de veine. On supposera ainsi qu'il s'effectue dans le plan de symétrie d'un canal délimité par deux parois distantes de $h(x)$ (Fig.II.3).

Les équations de l'écoulement supposée isoenérgétique permanent et non visqueux s'écrivent :

$$\text{div } \rho \vec{V} + \rho u \frac{d\omega}{dx} = 0 \quad (\text{II.2.a})$$

$$\vec{V} \wedge \text{rot } \vec{V} + T \text{grad } S = 0 \quad (\text{II.2.b})$$

$$\text{grad } S \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{II.2.c})$$

$$H_0 = \frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{(\gamma - 1)} = \frac{v_0^2}{(\gamma - 1)} = \text{cte} \quad (\text{II.2.d})$$

$$a^2 = \frac{\gamma p}{\rho} \quad (\text{II.2.e})$$

$$s/r = \ln(p/\rho\gamma) / (\gamma - 1) \quad (\text{II.2.f})$$

Pour l'équation (II.2.a) exprime la contraction de veine et son coefficient, tel que [ref.15.]

$$\omega(x) = \ln \frac{h(x)}{h(o)}$$

d'autres auteurs [ref.11] ont mis une corrélation entre le coefficient de contraction de l'écoulement :

$$\omega = \frac{\rho_1 U_{x1}}{\rho_2 U_{x2}} < 1$$

Et performances maxima de la grille, $\rho_1 U_{x1}$ et $\rho_2 U_{x2}$ désignant respectivement les composantes du débit de l'écoulement en amont et en aval, mesurés à mi-hauteur d'aube. Ce coefficient mesure la convergence de l'écoulement à travers les aubages, soit en raison de la convergence des parois latérales (cas d'un rotor par exemple) ou du développement des couches limites le long de ses parois. Les expériences ont montré que ce coefficient, est généralement, supérieur dans le cas de la grille plane à celle obtenue en rotor. Mais on a constaté que si l'on peut rendre ces valeurs identiques dans les deux types d'écoulements, les performances coïncident.

Il paraît donc absolument nécessaire de se donner un moyen d'agir sur le coefficient de contraction.

On constate aussi que ce coefficient permet de rendre compte des phénomènes tridimensionnels dans le modèle bidimensionnel.

Dans le cas où la convergence du canal ne dépend que de x l'équation (II.2b) devient

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\rho \partial y} + \frac{\rho u}{h} \cdot \frac{dh}{dx} = 0 \quad (\text{II.2.a})$$

définissant les nouvelles variables :

$$V = \ln(v/v_0) \text{ et } S = s/r$$

Les équations du système (II.2) peuvent s'écrire dans le repère (m, y) sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial y} \{u\} = [A] \frac{\partial}{\partial y} \{u\} + \{b\} \quad (\text{II.3})$$

tel que :

$$\{u\} \text{ est le vecteur : } \{u\} = \begin{bmatrix} \theta \\ V \end{bmatrix}$$

$$A \text{ étant la matrice : } \begin{bmatrix} \sin \theta & (M^2-1) \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

et $\{b\}$ le vecteur :

$$\begin{bmatrix} \cos\theta \frac{\partial V}{\partial m} - \cos\theta \frac{d\omega}{dx} \\ \frac{1}{\gamma M^2} \cdot \frac{\partial S}{\partial y} \end{bmatrix}$$

de plus l'équation d'énergie (II.2c) donne :

$$\frac{\partial S}{\partial m} = 0 \quad (\text{II.3c}).$$

II.3.3 TRANSFORMATION DU SYSTEME (II.3) :

EN EXPLICITANT LE SYSTEME (II.3) tel que :

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin\theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial m} + (M^2 - 1) \cos\theta \cdot \frac{\partial V}{\partial m} + \cos\theta \frac{\partial S}{\partial m} - \cos\theta \frac{d\omega}{dx} \quad (\text{II.3.a})$$

Il peut être placé sous une forme plus proche de la forme conservative en tenant compte de (II.3c) et en définissant une fonction (G) :

$$G = \frac{Me^{-s}}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}}$$

tel que :

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial \theta}{\partial m} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial m} (\ln(G(h(x)))) \quad (\text{II.3.b})$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial m} + \sin\theta \frac{\partial V}{\partial m} + \frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial S}{\partial y} \quad (\text{II.4.b})$$

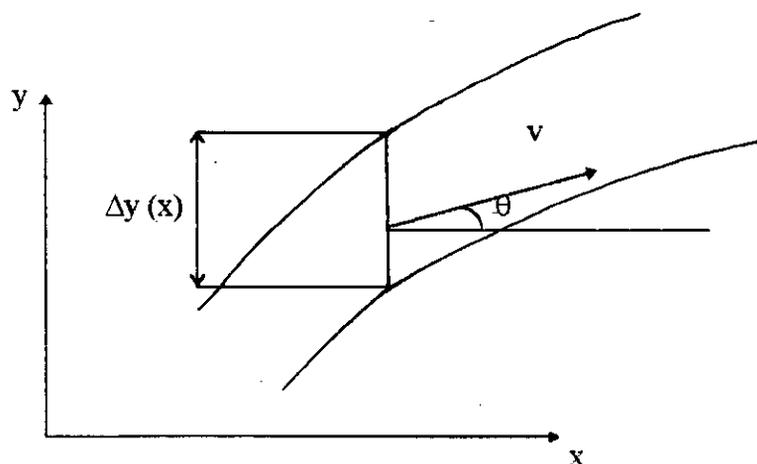
et en notant que : $\frac{\partial \theta}{\partial m} = C$

C désignant la courbure de la ligne de courant .

L'équation de continuité (II.4.b) traduit que dans le plan (x, y) la divergence d'un vecteur de module h(x) . G colinéaire à la vitesse V est nulle. Appliquons cette propriété à travers un tube de courant du plan (x,y) , de hauteur Δy(x), on peut écrire en chaque section de ce tube :

$$\int_0^{\Delta y(x)} \left[h G \cos\theta \right] (x) dy = \Delta Q \quad (\text{II.4.a})$$

ΔQ représente le débit du tube de courant (indépendant de x).



(fig.II.4).

II.3.4 ETUDE DE LA VARIATION D'ENTROPIE :

L'équation (II.3.c) montre que l'entropie demeure constante le long des lignes de courant tant que l'écoulement est subsonique. Lorsque l'écoulement est supersonique l'accroissement d'entropie à travers une onde choc de faible intensité est donnée par :

$$\Delta s = \frac{\gamma(\gamma+1)}{12} M^6 \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^3 + 0 \left[\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^4\right] \quad (\text{II.5.a})$$

$$\text{avec : } \frac{\Delta V}{V} = \frac{\partial V}{\partial m} \Delta m + 0 (\Delta m^2)$$

ce qui nous permet d'obtenir :

$$\Delta S = \frac{\gamma(\gamma+1)}{12} M^6 \left(\frac{\partial V}{\partial m}\right)^3 \Delta m^3 + 0 (\Delta m^4)$$

Ce qui prouve que l'accroissement d'entropie à travers un pas de calcul est d'ordre Δm^3 , à condition que la quantité $M^2 \partial v / \partial m$ demeure d'ordre 1. Sa dérivée suivant m défini par :

$$\Delta s = \frac{\partial S}{\partial m} \Delta m + 0 (\Delta m^2)$$

Est donc d'ordre Δm^2 et peut, dans ces conditions être négligée dans la mesure où la précision du schéma de différences finies mis en oeuvre n'est pas supérieur au second ordre.

Cela permet d'établir le critère :

$$\Delta S > 0 (E) \quad (\text{II.5.b}).$$

E : mesure l'erreur du schéma qui lorsque est vérifiée, aiguille le calcul vers le traitement des ondes de choc exposé plus loin.

II.4 PRINCIPE DE DISCRETISATION EN DIFFERENCES FINIES :

A l'intérieur du tube ^{de} courant de largeur $\Delta y (x)$, les relations (II.5) peuvent s'écrire de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\Delta y} F_1(y) dy \right] = 0 \quad (\text{II.6.1})$$

$$V(y + \Delta y) = V(y) + \int_0^{\Delta y} F_2(y) dy \quad (\text{II.6.2})$$

avec :

$$F_1(y) = h(x) \cdot G \cdot \cos\theta$$

$$F_2(y) = F_{21}(y) \frac{\partial V}{\partial m} + F_{22}(y)$$

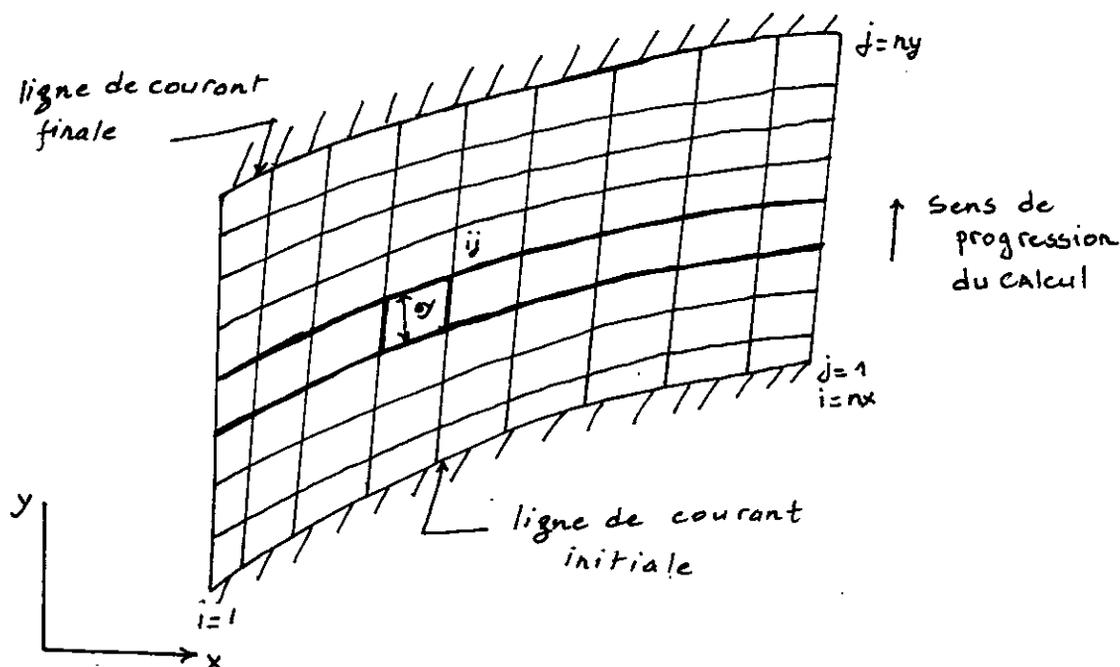
$$F_{21}(y) = \sin\theta$$

$$F_{22}(y) = \cos\theta \cdot C + \frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial S}{\partial y}$$

Partant d'une répartition entièrement déterminée du vecteur vitesse le long d'une ligne de courant, on détermine aussi le profil d'une ligne de courant voisine par (II.6.1) et la répartition de vitesse correspondante par (II.6.2).

En procédant ainsi de proche en proche, on détermine la forme du canal délimité par la ligne de courant finale, ainsi que la répartition de vitesse sur ces parois.

Les intersections de ces différentes lignes de courant avec des parallèles à ox constituent un maillage en i suivant ox et en j suivant oy (cf fig II.5).

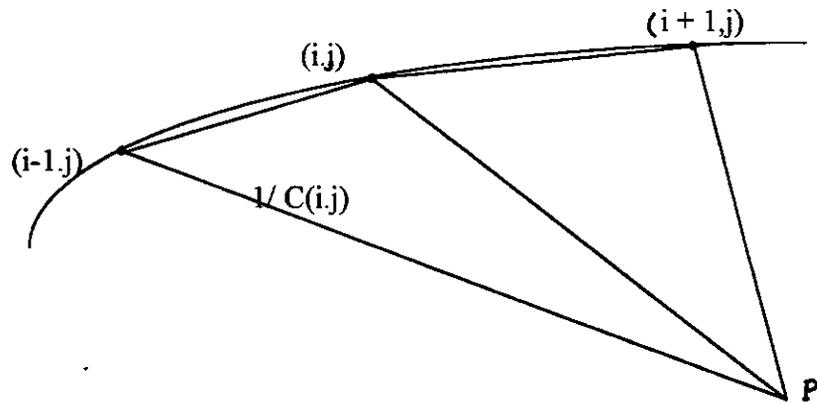


Fig(II.5)

Le calcul consiste ainsi à déterminer à chaque abscisse x du maillage l'épaisseur du tube de courant Δy et la répartition de vitesse $V(y + \Delta y)$.

II.4.1.1 CALCUL DE LA COUBURE DES LIGNES DE COURANT :

Le long d'une ligne de courant définie par ses coordonnées (x,y) , la courbure calculée comme celle d'un cercle passant par trois points consécutifs du maillage sur cette ligne de courant (cf.fig.II.6).



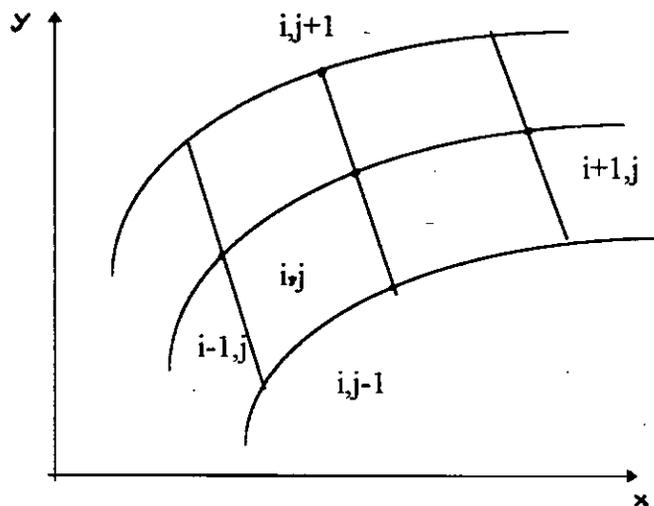
(Fig.II.6)

II.4.1.2 SCHEMA DE DISCRETISATION :

La grille de discretisation est représentée dans la figure (II.7) .
 Cette discrétisation comporte deux etapes :

II.4.1.2.a ETAPE EXPLICITE :

En remplaçant dans II.6.1) et (II.6.2) les dérivées par des différences finies, centrées autour du point (i,j) , on obtient :



(Fig.II.7)

$$y^*(i, j+1) = y(i, j-1) + \frac{F_1(1, j)}{F_1(i, j)} \left[y(i, j+1) - y(i, j-1) \right] \quad (\text{II.6.3.a})$$

$$V^*_{ij+1} = V_{ij-1} + F_{2, ij} (y^*_{ij+1} - y_{ij-1}) \quad (\text{II.6.3.b})$$

Le symbole * caractérisant les grandeurs obtenues à l'issue de cette première discrétisation, la fonction F_2 étant discrétisée au point (i,j) par l'expression suivante :

$$F_{2, ij} = F_{21, ij} + \frac{V_{i+1j} - V_{i-1j}}{\Delta m_{i-1j} + \Delta m_{ij}} F_{22, ij} \quad (\text{II.6.4})$$

Les opérations sont effectuées en chaque point le long de la ligne de courant.

Si l'écoulement est localement supersonique, on passe alors à la ligne de courant suivante sinon une étape supplémentaire doit être effectuée (lissage) pour assurer la stabilité du calcul.

II.4.1.2.b ETAPE IMPLICITE :

Cette étape consiste à corriger les résultats obtenus lors du calcul explicite (*) en utilisant des relations de la forme .

$$y_{ij+1} = y^*_{ij+1} - a_{1, ij} \left. \frac{\partial^2 y}{\partial m^2} \right|_{ij+1} \quad (\text{II.6.7})$$

$$V_{ij+1} = V^*_{ij+1} - a_{1, ij} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial m^2} \right|_{ij+1} \quad (\text{II.6.8})$$

$a_{1,ij}$, $a_{2,ij}$ étant des expressions de la forme :

$$a_{\alpha,ij} = K_{\alpha} (y^*_{ij+1} - y_{ij})^2 \cos^2 \theta_{ij} F(M_{ij}) \quad \alpha = 1,2$$

où K_{α} : étant une constante.

$$F(M_{ij}) = M^2_{ij} - 1$$

a_{α} : est un terme de viscosité artificielle, qui est utilisé, pour renforcer le caractère parabolique des équations.

Par discretisation des dérivées secondes au point $(i, j + 1)$ c'est à dire :

$$\frac{\partial^2 \Psi_{ij+1}}{\partial m^2} = \frac{\Psi_{i+1j+1} - 2\Psi_{ij+1} + \Psi_{i-1j+1}}{\Delta m^2_{ij}}$$

En supposant $\Delta m_{i-1j} = \Delta m_{ij}$

Les relations (II.6.7) et (II.6.8) se transformant en :

$$y^*_{ij+1} = \eta_1 y_{i+1,j+1} + (1-2\eta_1) y_{ij+1} + \eta_1 y_{i-1,j+1}$$

$$V^*_{ij+1} = \eta_2 V_{i+1,j+1} + (1-2\eta_2) V_{ij+1} + \eta_2 V_{i-1,j+1}$$

$$\text{avec : } \eta_{\alpha} = \frac{a_{\alpha,ij}}{\Delta m^2_{ij}}$$

Ecrite en chaque point de la ligne de courant, les relations précédentes fournissent deux systèmes lineaires tridiagonaux de la forme :

$$\boxed{A} \{x\}_{j+1} = \{x^*\}_{j+1}$$

$$\boxed{A} \text{ étant la matrice de la forme}$$

Les grandeurs calculées aux point $(i, j + 1)$ sont ainsi influencée par tous les points de la ligne de courant (i, j) et non pas seulement par deux ou trois points comme dans le calcul explicite).

On peut montrer théoriquement qu'une telle opération de lissage revient à approximer le problème (hyperbolique elliptique) reel par un problème (hyperbolique parabolique) en ajoutant aux équations du calcul explicite un terme de viscosité artificielle $a_{\alpha} \partial^2 \Psi / \partial m^2$.

On introduit ainsi volontairement une erreur dans les schémas de discrétisation pour modifier la nature du problème.

Ces considérations sommaire permettent d'expliquer que l'on puisse résoudre un problème à valeurs initiales, c'est a dire à l'intérieur d'un domaine ouvert.

Le type de conditions aux limites (ou initiales) nécessaires à la mise en oeuvre en découle.

II.4.3 Conditions initiales et aux limites :

La formulations des conditions initiales et aux limites permet d'assurer l'existence, l'unicité et continuité par rapport aux données initiales et aux limites de la solution des équations (II.5).

Considérons un domaines de calcul (Fig.II.9) limité par :

- Une ligne de courant (1)
- Une ligne de courant (2)
- Des frontières amont (3) et aval (4) parallèle à oy.

Pour remettre en oeuvre la méthode on doit imposés :

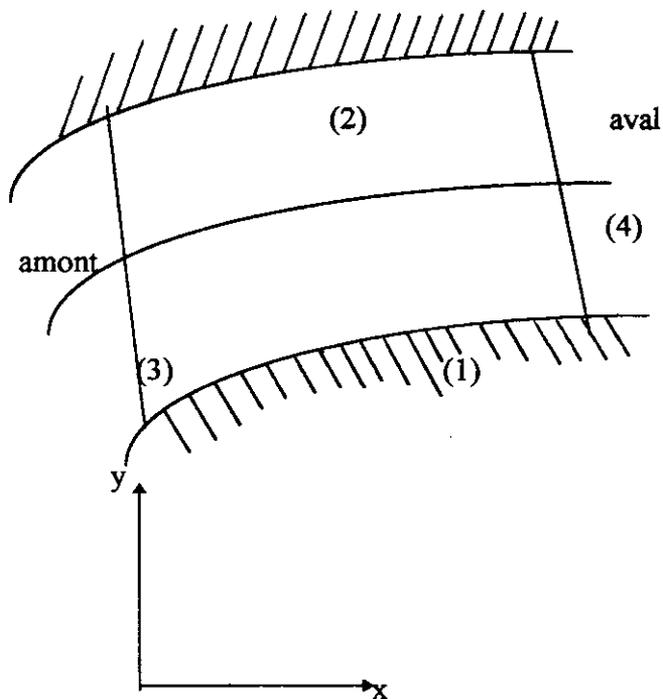
II.4.2.a Conditions initiales :

On imposera le long de (1) le vecteur vitesse en grandeur et en direction dans tous les cas.

II.4.2.b Condition aux limites :

On n'imposera aucune condition le long de (2) .

On donnera en amont (3) la grandeur de la vitesse et en aval, (4) une des composantes de la vitesse (grandeur ou direction) dans le cas subsonique. Pour un écoulement supersonique en aval, on n'imposera aucune condition.



(Fig.II.9)

II-4-4 ETUDE DE LA STABILITE DU SCHEMA EXPLICITE :

L'étude de la stabilité au sens de von Newman (voir annexe B) ne peut porter que sur la forme linearisée et homogène du système d'équations (II.3) c'est à dire :

$$\frac{\partial}{\partial y} \{U\} = [A] \frac{\partial}{\partial m} \{U\} \quad (\text{II.3}')$$

Où la matrice [A] est supposée localement constante.

En appliquant le schéma explicite, le système (II.6)

$$s'écrit \{U\}_{ij+1} = \{U\}_{ij-1} + \frac{y_{ij+1} - y_{ij-1}}{\Delta m_{i-1j} + \Delta m_{ij}} [A] [\{U\}_{i+1j} - \{U\}_{i-1j}] \quad (\text{II.6})$$

En supposant que le pas est constant le long des des lignes de courant ($\Delta m_{j-1j} = \Delta m_{ij}$) et posons que :

le système (II.7) peut s'écrire :

$$\{u\}_{kj-1} = \{v\}_j e^{ikm}$$

$$\{u\}_{kj} = \{w\}_j e^{ikm}$$

$$\{w\}_{j+1} = \{v\}_j + \frac{\Delta y}{\Delta m} 2i [A] \sin(k\Delta m) \{w\}_j$$

En ajoutant la relation triviale : $\{v\}_{j+1} = \{w\}_j$

Et en posant $a = (\Delta y / \Delta m) \sin(k\Delta m)$ d'où :

$$\begin{bmatrix} \{v\}_{j+1} \\ \{w\}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} & \{1\} \\ \{1\} & 2ia[A] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{v\}_j \\ \{w\}_j \end{bmatrix}$$

C'est à dire
$$\begin{bmatrix} \{v\}_{j+1} \\ \{w\}_{j+1} \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \{v\}_j \\ \{w\}_j \end{bmatrix}$$

[A] est la matrice d'amplification associée au schéma explicite définie par :

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2ia\sin\theta & 2ia(M^2-1)\cos\theta \\ 0 & 1 & 2iacos\theta & 2iasin\theta \end{bmatrix}$$

Appliquons la condition de von newmann pour determiner le critère de stabilité du système (II.8) : [A] doit être définie positive c'est à dire :

$$\rho([A]) < 1 \text{ et } |\lambda_{\max}| < 1 \dots\dots (II.9.1)$$

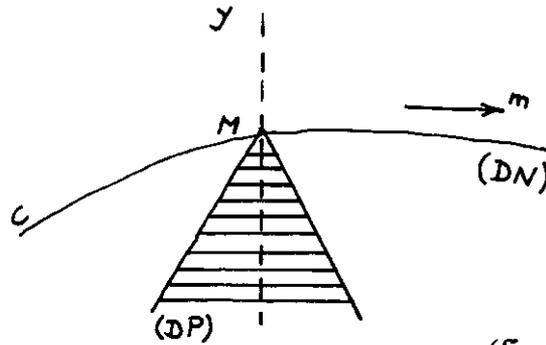
Où $\rho([A])$ désigne le rayon spectral de la matrice [A] et λ_{\max} la valeur propre de [A] telle que :

$$\lambda_{\max}^2 = 2a^2 (M^2 \cos^2 \theta - 1) + \sqrt{4a^2 (M^2 \cos^2 \theta - 1) - 1}$$

On en conclu que la stabilité du schéma (II.6) ne peut être assurée que pour $M > 1$, le pas de calcul devant vérifier la condition suivante :

$$a < \frac{1}{\cos \theta \sqrt{M^2 - 1}} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta y}{\Delta m} < \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (II.9.2)$$

Relation qui traduit que le domaine de dépendance physique (DP) d'un point doit être compris à l'intérieur de son domaine de dépendance numérique (DN) qui appelée aussi « condition de courant-friedricks-levry » ou de CFL (fig.10) [réf.16]



(fig.II.10)

II.4.5 ETUDE DE LAPRECISION DU SCHEMA :

Determinant le système d'équation aux dérivées partielles effectivement discrétisé par le schéma (II.6.7) et (II.6.8) appelé système d'équations modifiées [réf.17].

Ce système peut être obtenu en exprimant dans le schéma chaque différence finie à l'aide de son développement de série de TAYLOR autour du point (i,j).

Ce système s'écrit en supposant que $\Delta m_{ij-1} = 0$ (Δm_{ij}) :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = [A] \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} (M^2 \cos^2 \theta - 1) (\Delta m_{ij} - \Delta m_{i-1j}) + (y_{ij+1} - 2y_{ij} + y_{ij-1}) \frac{\partial^2 u}{\partial m^2} + O(\Delta m^2) \tag{II.10}$$

Qui ne représente au second ordre près, l'équation modifiée que si le terme suivant :

$$\frac{1}{2} (M^2 \cos^2 \theta - 1) (\Delta m_{ij} - \Delta m_{i-1j}) + (\Delta y_{ij} - \Delta y_{ij-1}) \frac{\partial^2 u}{\partial m^2}$$

est une quantité d'ordre Δm^2 .

II.5.6 ETUDE DE LA PRECISION DU SCHEMA IMPLICITE :

En admettant que l'introduction d'une matrice tridiagonale, puis son inversion ne modifiant en rien, ni la précision, ni la nature du problème. L'équation effectivement modifiée s'écrit en développant $\{u\}$ en fonction de y , au voisinage de (i,j) .

$$u_{ij+1} = u_{ij} + (y_{ij+1} - y_{ij}) \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{ij} + (y_{ij+1} - y_{ij})^2$$

$$u_{ij-1} = u_{ij} + (y_{ij-1} - y_{ij}) \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{ij} + 1/2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{ij} + (y_{ij-1} - y_{ij})^2$$

En faisant la différence, membre à membre de ces deux equations, et en injectant l'équation (II.3'), on obtient :

$$u_{ij+1} = u_{ij-1} + (y_{ij+1} - y_{ij-1}) [A] \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{ij} + 1/2 [A]^2 (y_{ij+1} - y_{ij})^2 \frac{\partial^2 u}{\partial m^2} \Big|_{ij} \quad [A]^2 = \cos^2 \theta$$

$$u_{ij+1} = u^*_{ij+1} + 1/2 \cos^2 \theta (M^2 - 1) (y_{ij+1} - y_{ij})^2 \frac{\partial^2 u}{\partial m^2} \quad (II.11)$$

II.4.7 ADAPTATION DU SCHEMA AUX CONDITIONS AUX LIMITEES **INFLUENCES D'UN TERME DE VISCOSITE ARTIFICIELLE :**

Les expériences numériques effectuées sur le schéma implicite [ref.11] ont montré que pour assurer la stabilité des calculs, il était nécessaire un terme

dissipatif ou de viscosité artificielle $a_{\alpha,ij} \frac{\partial^2 \{u\}}{\partial m^2}$ (voir annexe c) compte tenu

duquel le schéma s'écrit comme suit :

$$u_{ij+1} = u^*_{ij+1} + a_{\alpha,ij} \frac{\partial^2 u}{\partial m^2} \Big|_{ij+1} + O(\Delta m^2) \dots \dots \dots (II.11')$$

avec :

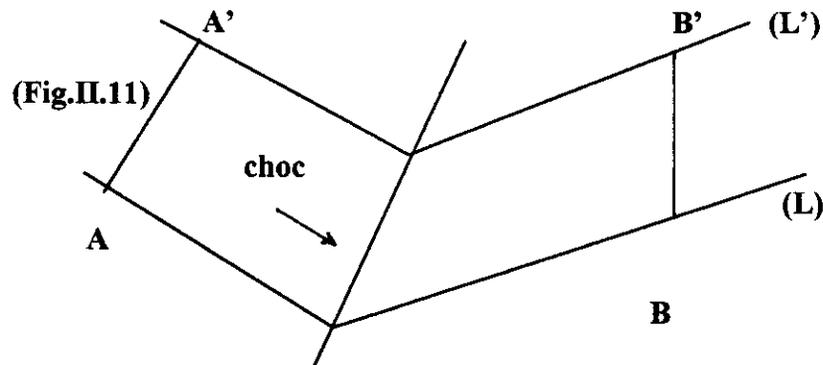
$$a_{\alpha,ij} = K_{\alpha} (y^*_{ij+1} - y_{ij})^2 \cos^2 \theta (M^2 - 1)$$

L'effet des coefficient de viscosité artificielle k_{α} était ainsi de renforcer le caractère parabolique de l'équation et de stabiliser le processus de calcul.

II.5 TRAITEMENT NUMERIQUE DES DISCONTINUITES :

La détection d'une discontinuité entre deux points du maillage le long d'une ligne de courant étant effectuée à l'aide de la relation (II.5b), une technique particulière doit être mise en oeuvre pour déterminer l'écoulement aux points correspondants sur la ligne de courant suivant.

L'existence d'une discontinuité entre deux points consécutifs du maillage le long d'une ligne de courant ne signifie pas qu'il existe une seule onde de choc passant entre ces deux points. L'inverse est, en effet, fréquent (lors de l'intersection de deux chocs par exemple). La méthode utilisée consiste à se fixer un nombre maximum de chocs pouvant se situer simultanément entre deux points du maillage le long d'une même ligne de courant. Par raison de simplicité, ce nombre maximum a été fixé à deux chocs obliques et un choc droit, choix qui permet la représentation convenable d'un grand nombre de configuration d'écoulements.



Considérons alors une onde de choc coupant une ligne de courant L entre deux points du maillage A et B (Fig.II.11). Si le calcul de l'écoulement en A' et B' homologues de A et B peut être effectué exclusivement à partir des données de l'écoulement en amont et aval de A et B respectivement, la "conservation" de la discontinuité sera réalisée. Le problème consiste par conséquent à prévoir (à partir des données de l'écoulement le long de L les positions relatives des points A' et B' et de l'onde de choc le long de L').

Cette prévision constitue le principe de méthode « d'ajustement de choc » basée sur les étapes suivantes :

- **Etape 1** : Detection et caractérisation des ondes de choc en A et B .
- **Etape 2** : Localisation des ondes de choc par rapport aux points du maillage.
- **Etape 3** : Calcul du vecteur vitesse (dans le cas supersonique ou subsonique) en tenant compte des étapes (1) et (2).

ETAPE 1: CARACTERISATION D'UN EVENTUEL SYSTEME D'ONDE DE CHOC ENTRE DEUX POINTS CONSECUTIFS DU MAILLAGE LE LONG D'UNE LIGNE DE COURANT :

Dans la mesure où deux chocs obliques et un choc droit sont admis, au plus, entre deux points consécutifs du maillage, les relations de Rankine Hugoniot permettent d'écrire entre deux points consécutifs $(i-1, j)$ et (i, j) le long

d'une ligne de courant, 2 relations faisant intervenir les variations du vecteur vitesse (en grandeur et en direction) entre ces deux points (nous allons écrire $\nabla\beta$ pour désigner $\nabla\beta_{i-1,j}$ pour alléger les expressions).

$$\text{Arcotg} (\alpha F (M_{i-1}) , x) + \text{Arcotg} (\alpha' F (M', x')) = \nabla\beta \quad (\text{II.12.1a})$$

$$g (M_{i-1,j} , x) \cdot g (m', x') - g (M'', M''') = e^{-\nabla\beta} \quad (\text{II.12.1a})$$

En posant : $X = M_{ij}^2 \cdot \sin^2\theta$

θ : désignant l'angle du choc avec la direction de l'écoulement en amont , les qualités accentives (M', X') et M'' caractérisant d'une part , l'écoulement entre les deux chocs obliques, et d'autre part, l'écoulement entre deux chocs obliques, et d'autre part , entre le second choc oblique et le choc droit.

On admet que α et α' soient égaux à + 1 ou -1 et que $F(M,x)$ étant les fonctions définis par les relations suivantes.

$$F (M,x) = \left| \frac{(\gamma + 1) M^2}{2(x - 1)} \right| \left(\frac{x}{M^2 - x} \right)^{1/2}$$

$$g (M,x) = \frac{1 - 4 (x - 1) (\gamma x + 1)}{(\gamma + 1)^2 M^2 X}$$

Les relations (II.12) peuvent s'écrire sous la forme d'un système de 2 équations à 2 inconnues x et x' .

$$\frac{\alpha\alpha' F (M_{i-1,j} , x) f (M', x') - 1}{\alpha F (M_{i-1,j} , x) + \alpha' f (M', x')} = \cotg \nabla\beta \quad (\text{II.12.1'})$$

$$g(M_{i-lj}, x) g(M', x') g(M'', x'') = e^{-2\gamma V}$$

$$M'^2 = \frac{(\gamma + 1)^2 M_{i-lj}^2 x - 4(x-1)(\gamma x + 1)}{(2\gamma x - (\gamma - 1))((\gamma - 1)x + 2)}$$

$$M_{ij}^2 = \frac{(\gamma - 1)^2 M''^2 + 2}{2\gamma M''^2 - (\gamma - 1)}$$

En réalité, le troisième choc (droit) ne doit être envisagé que si l'écoulement aux point M_{ij} est supersonique soit à la valeur limite :

$$M_1 = \left[\frac{(\gamma+1)^2 X'^2_1 M'^2 - 4 (X'_1 - 1) (\gamma X'_1 + 1)}{(2 \gamma X'_1 - (\gamma-1) ((\gamma-1) X'^2_1 + 2))} \right]^{1/2}$$

Expression donnant la valeur minimale du nombre de mach derrière un choc oblique, X'_1 étant donné par la relation.

$$X'_1 = \frac{1}{4\gamma} \left[(\gamma+1) M'^2 - 4 + \sqrt{(\gamma+1) [(\gamma+1) M'^4 + 8 (\gamma-1) M'^2 + 16]} \right]$$

C'est pourquoi le système d'équations (II.12') est résolu dans tous les cas en supposant dans un premier temps, qu'il existe seulement 2 ondes de choc obliques entre (i,j) et $(i-1,j)$, on obtient dans ces conditions le nouveau système :

$$\frac{\alpha \alpha' F (M_{i-1,j}, X) F (M', X') - 1}{\alpha F (M_{i-1,j}, X) + \alpha' F (M', X')} = \text{Cotg } \nabla \beta \quad (\text{II.12 2a})$$

$$g (M', X') = \frac{e^{2\nabla v}}{g (M_{i-1,j}, X)} \quad (\text{II.12 2b})$$

En exposant :

$$B = \frac{(1-\gamma)}{\gamma} + \frac{(\gamma+1)^2}{2} \frac{M^2}{\gamma} \left[\frac{e^{2\nabla V}}{g(Mi-1j, X)} - 1 \right]$$

La relation (II. 12 . 2b) fournit une expression analytique donnant x'

$$X' = \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{\beta}{2^2} \frac{1}{\gamma}}$$

En l'associant à l'équation (II.12.2a), on obtient un système d'une équation à une inconnue x donnée sous forme :

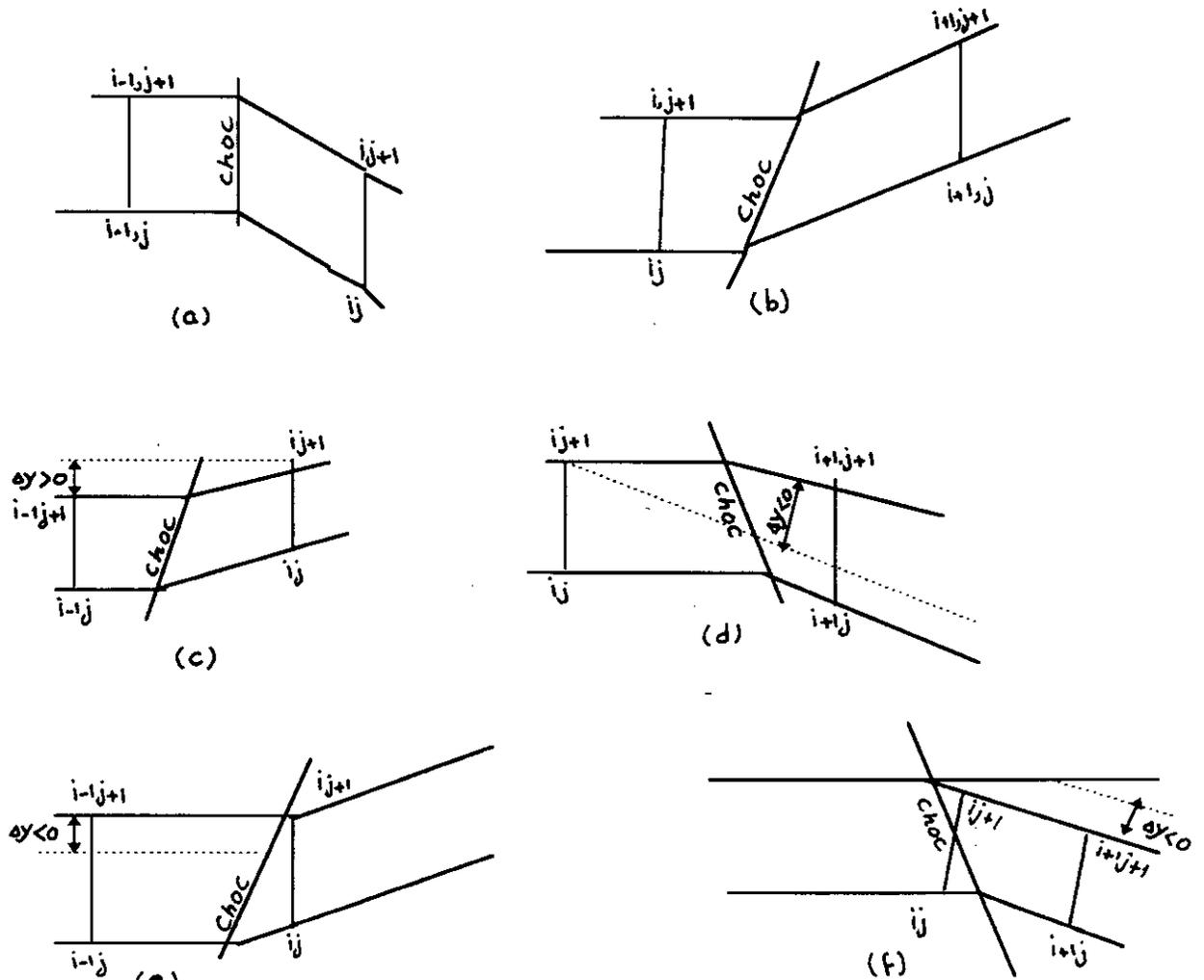
$$H(X, \nabla V, \nabla \beta, \alpha, \alpha') = 0$$

Dont la solution est obtenue impérativement en attribuant successivement α' et α les valeurs indiquées ci-dessous suivant le signe de $\nabla \beta$:

$\nabla \beta$	> 0	< 0	$= 0$
(α, α')	$(1, 1)$	$(-1, -1)$	$(-1, 1)$
	$(-1, 1)$	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
	$(1, -1)$	$(1, -1)$	

ETAPE 2 : LOCALISATION DES ONDES DE CHOC PAR RAPPORT AUX POINTS DU MAILLAGE :

On suppose dans ce qui concerne ce qui suit que la detection des discontinuités à déjà été effectuée et que les nouveaux points nécessaires introduits dans le maillage, correspondant à ce que toute discontinuité entre deux points puisse être représentée par un seul choc.



(Fig. II.12)

TEST I : On considère deux points consécutifs $(i-1, j)$ et (i, j) le long d'une ligne de courant où l'écoulement est connu et entre lesquelles passe une onde choc. Deux cas peuvent être envisagés :

$$\nabla \beta < 0 \text{ (fig. II.12-a)}$$

Dans ce cas l'onde de choc se dirige vers l'amont. Le point $(i, j+1)$ est alors situé nécessairement en aval de choc.

$$\nabla \beta > 0$$

Deux possibilités peuvent être envisagées suivant la position du point (i, j) par rapport au choc.

Dans la première figure (II.12-c) le point $(i, j + 1)$ est situé en aval du choc.

Par contre dans la seconde figure (II.13-e) le point $(i, j+1)$ se situe en amont du choc.

La condition pour que le point $(i, j+1)$ soit situé en amont du choc peut s'écrire dans ces conditions :

$$Y_{i, j+2} < y_{i-1, j+1} + \Delta x \operatorname{tg} \beta_{i-1, j}$$

ΔX étant le pas de calcul suivant X

TEST II :

On s'intéresse maintenant au couple de points (i, j) et $(i+1, -j)$, ce dernier étant situé en aval du point (i, j) .

Deux cas peuvent se présenter :

$$\Delta\beta < 0 \quad (\text{fig. II.12-b})$$

Dans ce cas, l'onde de choc se dirige vers l'aval.

Le point (i,j+1) est alors nécessairement situé en amont du choc.

$$\Delta\beta > 0$$

Deux possibilités peuvent être à nouveau envisagées suivant la position du point (i,j) par rapport au choc.

Dans le premier cas (fig II . 12. d) le point (i,j+1) est situé en amont du choc, tandis que dans le second cas (fig . II 12f) il est situé en aval du choc.

La condition pour que le point (i,j+1) soit situé en aval du choc peut s'écrire dans ce cas :

$$Y_{ij+1} > Y_{i+1,j+1} - \nabla x \operatorname{tg} \beta_{i+1,j}$$

II.6 CONCLUSION :

Les bases de méthode semi-inverse pour l'étude d'un écoulement transsonique par différences finies ont été exposées dans ce chapitre.

Le traitement des discontinuités est prévu numériquement par la méthode de SHOCK-FITTING (ou d'ajustement de choc), toute fois, permettant de déterminer l'écoulement à travers un canal inter aubes, en partant de la géométrie et de la répartition des vitesses sur l'une des parois, cette méthode permet ainsi de connaître à priori l'état de la couche limite sur cette paroi ce qui constitue un avantage significatif.

D'autres méthodes pour ce genre de calcul existent parmi elles la méthode « pseudo-instationnaire » ou « directe » qui fera l'objet du chapitre suivant

CHAPITRE III

III.1 - INTRODUCTION :

Il est en effet rendu difficile de tenir compte des conditions de périodicité de l'écoulement en amont et en aval des aubages. Pour cette raison, il est indispensables d'utiliser le calcul semi-inverse : l'une des études déjà élaborée [ref.8], d'où la nécessité de l'associer avec le calcul directe dans un processus itératif j'usqu'a atteindre une forme satisfaisante du profil.

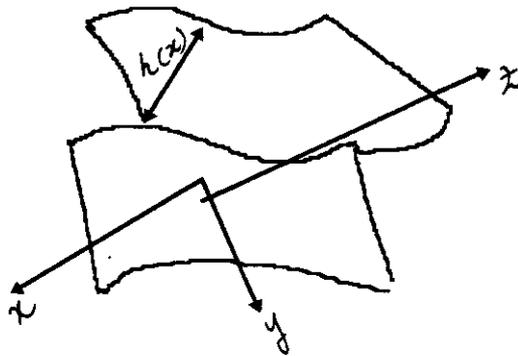
pour cela il existe plusieurs approches, les seules méthodes largement utilisées sont les méthodes instationnaires [ref.9].

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la méthode de calcul pseudo-instationnaire pour les écoulements transsoniques, la difficulté du problème du point de vue mathématique consiste à résoudre un problème de type mixte (hyperbolique-elliptique).

Le schéma aux différences finis retenu est de type prédicteur-correcteur; il permet le calcul des ondes de choc par une méthode de viscosité artificielle [ANNEXE : D].

III-2- FORMULATION DU PROBLEME :**III-2-1- EQUATION DE MOUVEMENT :**

On supposera ici que l'écoulement s'effectue dans un plan contenant les axes OX et OY disposées symétriquement entre deux parois espacées d'un intervalle $h(x)$ (fig. III-1).



(fig. III-1)

Posant $\omega(x) = \log(h(x)/h(0))$ définissant le coefficient de contraction de la veine, les équations de l'écoulement supposé isoénergétique ; stationnaire ; non visqueux s'écrivent sous les formes suivantes :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) + \rho \cdot u \cdot \frac{d\omega}{dx} = 0 \quad (\text{III-1a})$$

$$\vec{V} \wedge \operatorname{rot} \vec{V} + T \operatorname{grad} S = 0 \quad (\text{III-1b})$$

$$\operatorname{grad} S \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{III-1c})$$

$$H_{01} = \frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} = \frac{V_0^2}{\gamma-1} \quad (\text{III-1d})$$

$$a^2 = \frac{\gamma \cdot P}{\rho} \quad (\text{III-1e})$$

$$\frac{S}{r} = \frac{\frac{P}{\rho \cdot \gamma} \ln \left(\frac{P}{\rho \cdot \gamma} \right)}{\gamma - 1} \quad (\text{III-1f})$$

V : Vecteur Vitesse.

U : Composante de V suivant OX.

a : Célérité du son.

T, p, S, P sont respectivement température ; densité ; entropie ; et pression.

D'autres auteurs [ref : 2] ont mis une corrélation entre le coefficient de contraction de l'écoulement et les performances maximales de la grille $\rho_1 U_{x1}$ et $\rho_2 U_{x2}$ désignant respectivement les composantes du débit de l'écoulement en amont et aval, mesurés à mi-hauteur d'aube.

$$\omega = \frac{\rho_1 U_{x1}}{\rho_2 U_{x2}} < 1 \quad (\text{III-2})$$

Ce coefficient mesure la convergence de l'écoulement à travers les aubages, soit en raison de la convergence des parois latérales (cas d'un rotor par exemple) ou du développement des couches limites le long de ces parois.

Les expériences ont montré, que ce coefficient est généralement, supérieur dans le cas de la grille plane à celui obtenue en rotor ; mais on constate que si l'on peut rendre ces valeurs identiques dans les deux types d'écoulement, les performances coïncident.

Il paraît donc absolument nécessaire de se donner un moyen d'agir sur le coefficient de contraction.

On constate aussi que ce coefficient permet de rendre compte des phénomènes tridimensionnels dans le modèle bidimensionnels.

L'écoulement dans une grille de turbomachine (fig. III-2) est décrit par les équations d'EULER en tenant compte des termes instationnaires qui s'écrivent sous la forme suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + f \frac{u}{h} \frac{dh}{dx} = 0 \quad (\text{III-3a})$$

Où on désigne :

$$f = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \cdot u \\ \rho \cdot v \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho \cdot u \\ P + \rho \cdot u^2 \\ \rho \cdot u \cdot v \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho \cdot v \\ \rho \cdot u \cdot v \\ P + \rho \cdot v^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-3b})$$

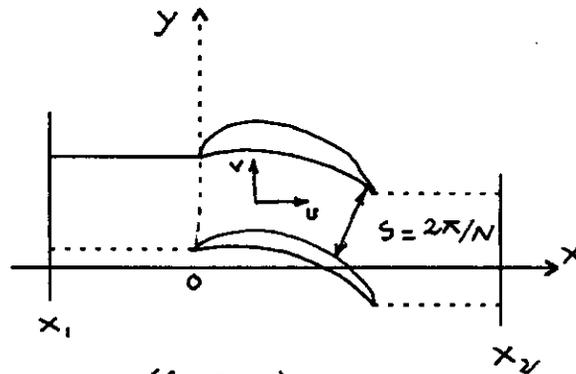
Où ρ étant la densité du fluide, u et v les composantes de la vitesse suivant x et y ; P sa pression statique et H_0 son enthalpie totale liée aux précédentes quantités par l'équation de BERNOULLI.

$$H_{01} = \frac{\gamma P}{\gamma - 1 \rho} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \quad (\text{III-3c})$$

L'enthalpie spécifique h est en fonction de la pression P et la densité ρ :

$$h = h(P, \rho) \quad (\text{III-3d})$$

Ces quatre équations (III-3) où n'interviennent que les variables t, x, y pour les inconnues ρ, u, v et P régissent l'écoulement bidimensionnels de grille sur chaque ligne de courant.



(fig. III.2)

Il est nécessaire de souligner que le caractère instationnaire des équations (III-3a) est introduit comme un artifice de calcul dans le but est rendre ces équations de type hyperbolique dans tout le champ de l'écoulement et en conséquence de ne pas avoir à utiliser qu'un seul schéma de discrétisation dans tout le domaine de calcul.

Pour diminuer le temps de calcul dont l'importance constitue l'inconvénient majeur des méthodes instationnaires. Il est donc possible comme l'a fait H. VIVAND [ref : 10] d'avancer que l'enthalpie totale est uniforme est indépendante du temps.

Cette simplification est en fait consistante avec l'écoulement stationnaire recherché dans le cas d'un fluide parfait dont l'enthalpie totale est uniforme à l'amont.

II-2-2 TRAITEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES

La formulation des conditions initiales et des conditions aux limites permettent, d'assurer l'existence, l'unicité et la continuité, par rapport aux données initiales et aux limites de la solution des équations (III-3a) ; est constitue un problème mathématique d'une grande difficulté qui n'a pas encore été résolue dans toute sa généralité.

Certains résultats peuvent toute fois être énoncés en considérant le caractère hyperbolique du système d'équations (III-3a) qui se traduit par l'existence d'un domaine de calcul.

III-2-2-1-CONDITIONS INITIALES:

A $t=0$ tous les prametres sont choisis arbitrairement.

III-2-2-2 CONDITIONS AUX LIMITES :

A) CONDITION DE GLISSEMENT :

On applique cette condition de glissement sur l'extrados et l'intrados des aubes . Si $y= Y(x)$ représente l'equation de l'intersection d'une aube avec la ligne de courant $\Psi = cte$ de l'écoulement cette condition aux limites décrites sous forme :

$$V = U. \left. \frac{dY(x)}{dx} \right|_y = Y(x) \quad (III-4)$$

B) CONDITION DE PERIODICITE :

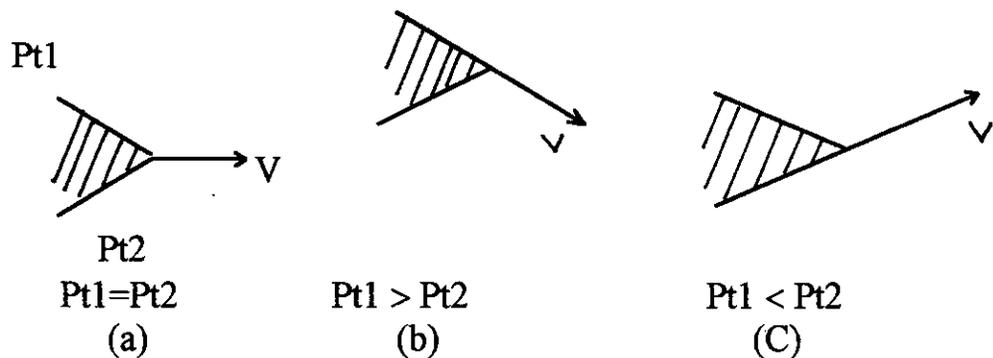
Elle est imposée à l'amont de l'aval du canal inter-aubes la solution stationnaire recherchée étant périodique par rapport à la variable y de période : $S= 2\pi / N$ où : S est le pitch et N le nombre d'aubes de la grille considérée.

Cette condition sera imposé en régime transitoire, soit :

$$f(x,y,t) = f(x,y + S,t) \quad (III-5)$$

C)- CONDITION DE KUTTA-JOUKOWSKY :

Dans le cas où l'écoulement sur l'extrados et l'intrados d'une même aube ont des pressions totales identiques on imposera à l'écoulement confluent au bord de fuite, d'avoir la direction de la bissectrice du dièdre formé par le bord de fuite de l'aube (fig.III-3a) ; dans le cas contraire, par exemple, dans le cas où un choc d'intensité variable se développe dans le canal inter-aube, l'écoulement confluent sera tangent au côté du dièdre où la pression totale est la plus élevée (fig. III-3b et 3c).



(FIG.III.3)

D)- CONDITIONS A L'INFINI AMONT ET AVAL :

Le domaine de calcul s'étant théoriquement de l'infini amont à l'infini aval est pratiquement limité par deux plans perpendiculaires à l'axe de la machine et des cotes : $x = X_1$ et $x = X_2$ (fig.III-2-).

Dans le cas où les chocs intenses existent dans le canal inter-aube. La théorie des caractéristiques pour les équations hyperboliques montre que le nombre et la nature des conditions aux limites sur les frontières amont et aval ne sont pas arbitraire.

Cette analyse à montrée que pour un nombre de Mach axial ($M_1 \cos \alpha_1$) supérieur à l'unité le domaine de dépendance d'un point P'_1 de la frontière amont par exemple, à l'instant $t = t_0 + \Delta t$; étant entièrement à l'extérieur du domaine de calcul (fig. III-4b).

Les différents variables n'y sont donc pas connues, il est clair que toutes les caractéristiques de l'écoulement doivent être imposées ; en revanche, dans le cas où ($M_1 \cos \alpha_1 < 1$) ; ce domaine de dépendance étant partiellement à l'intérieur du domaine de calcul (fig. III-4a) et quelques caractéristiques de l'écoulement peuvent être déterminés par les grandeurs calculées à l'instant $t_1 = t_0$.

En ce qui concerne la frontière aval ($x=x_2$), les considérations analogues permettent de parvenir aux conclusions suivantes :

Dans le cas où ($M_2 \cos \alpha_2 > 1$) ; le domaine de dépendance d'un point P'_2 à l'instant $t = t_2 + \Delta t$, est entièrement à l'intérieur du domaine de calcul, tout les grandeurs doivent donc être calculées dans le cas contraire le domaine de dépendance du point P'_2 coupe la frontière $X = X_2$, il n'est pas donc possible de calculer tout les grandeurs et certaines d'entre elles doivent être imposées.

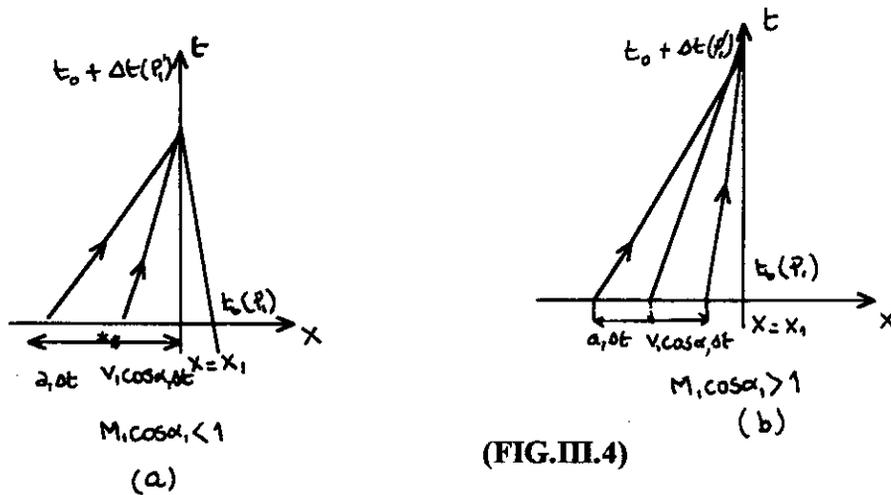
Dans le cas pratique, le Mach axiale est le plus souvent inférieur à l'unité à l'amont comme à l'aval [ref : 3].

Nous avons donc retenu que les résultats qualitatifs suivants :

- i)- sur la frontière ($x = x_1$), on fixe la pression total P_{01} , la température totale T_{01} (imposée puisque $H_0 = Cte$).

Une autre caractéristique de l'écoulement qui peut être soit la direction de la vitesse (α_1) soit le nombre de Mach (M_1), le débit résulte alors du calcul.

- ii)- sur la frontière aval ($x = x_2$) la pression statique (P_2) est imposée.



III-3- METHODE NUMERIQUE :

L'intégrations numérique des équations (III-3) est effectuée par une méthode aux différence finis utilisant un schéma explicite de type prédicteur - correcteur, la procédure générale pour résoudre le problème du calcul de l'écoulement transsonique est donnée de la façon suivante :

III-3-1- CHANGEMENT DE COORDONNEES :

La formulation des schémas au différences finis se trouve notablement simplifiée notamment en ce qui concerne le traitement des conditions aux limites lorsque ' on dispose d'un maillage rectangulaire et des frontières parallèles aux axes de coordonnées du plan physique (x,y) (fig. III-4a), en un plan de calcul (X,Y) (fig. III-4b) à l'aide d'une transformation ponctuelle définie par :

$$\begin{cases} x = x(X, Y) \\ y = y(X, Y) \end{cases} \quad (III-6-a)$$

Les relation entre les dérivées partielles des deux systèmes de coordonnées sont :

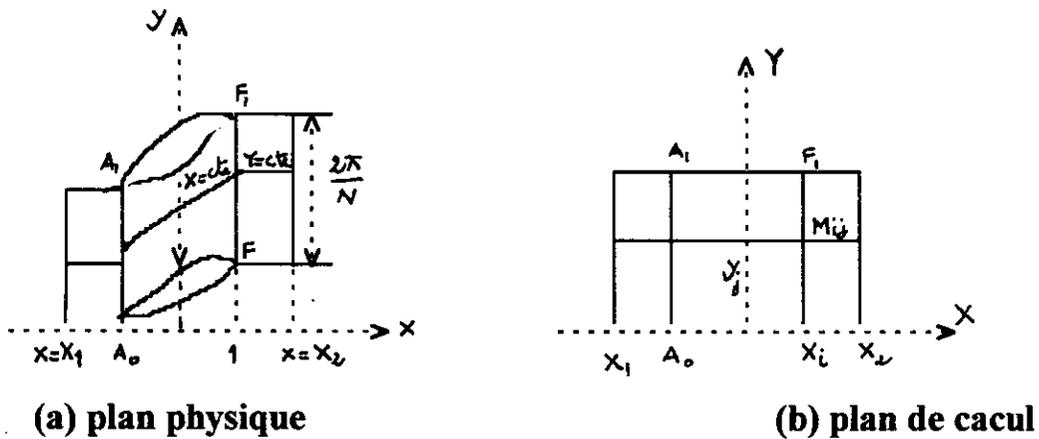
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial X} \\ \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{III-6-b})$$

La transformée inverse est :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{j} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial Y} & -\frac{\partial y}{\partial X} \\ \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \end{bmatrix} \quad (\text{III-6-c})$$

Avec j le jacobien de la transformation (III.6-a)

$$j = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial y}{\partial Y} - \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial y}{\partial X}$$



(fig. III-5)

D'après la relation (III-6-c), on peut exprimer les dérivées partielles de (III-3-a) dans le plan de calcul (X, Y) :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial Y} \frac{\partial F}{\partial X} - \frac{\partial y}{\partial X} \frac{\partial F}{\partial Y} \right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{J} \left(- \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial G}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial G}{\partial Y} \right)$$

D'où l'équation (III-3-a) devient :

$$J \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial y}{\partial Y} \frac{\partial F}{\partial X} - \frac{\partial y}{\partial X} \frac{\partial F}{\partial Y} \right) + \left(\frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial G}{\partial Y} - \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial G}{\partial X} \right) = J.H(u) \quad (III-7)$$

Avec H(u) est le seconde membre de l'équation (III-3 a)

$$H(u) = -f \frac{u}{h} \frac{dh}{dx}$$

III-3-2- DISCRETISATION AU POINT M_{ij} INTERIEUR AU DOMAINE DE CALCUL :

Le schéma utilisé comporte les trois étapes suivantes :

A)- CALCUL DU PREDICTEUR / f_{ij}^{*n+1}

Connaissant f_{ij}^n on calcul une première approximation de f_{ij}^{n+1} : f_{ij}^{*n+1}

En utilisant les différences avancées pour approcher les dérivées d'espace :

$$f_{ij}^{*n+1} = f_{ij}^n + \Delta t \cdot H_{ij}^n + A_{ij}^n \left[\begin{aligned} & \left(\frac{\partial y}{\partial Y} \right)_{ij} (\bar{F}_{i+1,j}^n - \bar{F}_{ij}^n) - \left(\frac{\partial y}{\partial X} \right)_{ij} (\bar{F}_{i,j+1}^n - \bar{F}_{ij}^n) \\ & + \left(\frac{\partial x}{\partial X} \right)_{ij} (\bar{G}_{ij+1} - \bar{G}_{ij}) \end{aligned} \right]$$

(III-8a)

Où les coefficients A_{ij}^n sont définis par : $A_{ij}^n = - \frac{\Delta t}{\Delta} \frac{1}{J_{ij}}$

(l'indice supérieur n, rappelant que le pas de temps est susceptible de varier au cours des itérations) et où la notation $\bar{H}(f_{ij})$ désigne : $H(f_{ij})$.

B)- CALCUL DU CORRECTEUR : f_{ij}^{n+1}

La valeur F_{ij}^{*n+1} est ensuite corrigée en utilisant, cette fois des différences retardées pour approcher les dérivées d'espace :

$$f_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[f_{ij}^n + \bar{f}_{ij}^{*n+1} + \Delta t \bar{H}_{ij}^{*n+1} + A_{ij}^n \left(\begin{array}{l} \left(\frac{\partial y}{\partial Y_{ij}} \right) (\bar{F}_{ij}^{*n+1} - \bar{F}_{i-1j}^{*n+1}) \\ \left(\frac{\partial y}{\partial Y_{ij}} \right) (\bar{F}_{ij}^{*n+1} - \bar{F}_{ij-1}^{*n+1}) \\ + \left(\frac{\partial x}{\partial X_{ij}} \right) (\bar{G}_{ij}^{*n+1} - \bar{G}_{ij-1}^{*n+1}) \end{array} \right) \right]$$

Le schéma ainsi limité à ces deux premières étapes est précis au second ordre et conditionnellement stable, c'est à dire que le pas d'espace Δt au delà de laquelle les calculs divergent rapidement (voir annexé B).

La détermination de cette condition de stabilité est abordée au paragraphe § (II-3-3) l'expérience montre toute fois que cette condition est bien souvent insuffisante pour assurer le bon déroulement des calculs, les oscillations apparaissent notamment dans les régions à fort gradients.

Il est alors nécessaire d'amortir ces oscillations par exemple par un procédé de lissage effectué à chaque itération.

C) CALCUL D'UNE VALEUR LISSEE DU CORRECTEUR :

La valeur lissée du correcteur est obtenue par l'expression suivante :

$$(\bar{f}_{ij}^{n+1})_{\text{Liss}} = \bar{f}_{ij}^{n+1} + \varepsilon (\bar{f}_{i+1j}^{n+1} + \bar{f}_{i-1j}^{n+1} + \bar{f}_{i+1j}^{n+1} + \bar{f}_{i-1j}^{n+1} - 4\bar{f}_{ij}^{n+1}) \quad (\text{III-8c})$$

Où ε : est un coefficient déterminé empiriquement de façon à obtenir un bon amortissement des oscillations sans détériorer excessivement la précision du calcul qui du second ordre, passe à l'ordre 0 ($\varepsilon \Delta$), l'expression (III-8c) peut être interprétée comme l'adjonction à l'équation (III-7) du terme dissipatif : $\varepsilon(\Delta^2/\Delta t).\Delta f$ où (Δ est l'opérateur de la place dans le plan (X,Y) et le coefficient $\nu = \varepsilon\Delta^2 / \Delta t$ comme un coefficient de viscosité artificielle.

III-3-2-2 TRAITEMENT PARTICULIER DES POINTS SITUE SUR LA FRONTIERE DU DOMAINE DE CALCUL :

Les points du maillage situés sur la frontière du domaine de calcul présentent les particularités suivantes :

- 1°) Le schéma numérique défini par les équations algébriques (III-8) ne peut y être appliqué strictement car il n'est pas possible d'utiliser des différences finies décentrées vers l'extérieur du domaine de calcul.
- 2°) Les valeurs de \bar{f} en ces points doivent vérifier outre les équations (III-3) les conditions aux limites du paragraphe § (II-1-2-2) : c'est - à - dire que l'on dispose pour le calcul de \bar{f} , d'un nombre d'informations surabondant.

La technique utilisées pour remédier à ces difficultés est la suivante :

i)- Aux points du maillage situés sur la frontière, les équations (II-8-a) et (II-8-b) sont modifiées par l'emploi de différences finis systématiquement décentrées vers l'intérieur du domaine de calcul ; par exemple la dérivée $\partial F/\partial Y$ sur la frontière $Y = O(i = j_0)$ (fig. 4-b) est approximée de la manière suivante :

* A l'étape du prédicteur (formule inchangée) :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_{ij_0} = \frac{F_{ij_0+1} - F_{ij_0}}{\Delta Y}$$

* A l'étape du correcteur (formule modifiée) :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_{ij_0} = \frac{-F_{ij_0+2} + 3F_{ij_0+1} - 2F_{ij_0}}{\Delta Y}$$

Cette méthode utilisée par veuillot [ref : 3] permet de conserver une précision du second ordre.

Pour les frontières amont $X = X1$ et aval $X = X2$ les formules de différences finis décentrées ont toute fois été conservées ; en effet, la précision bien que théoriquement du premier ordre seulement est en fait meilleure.

ii) Les trois composantes du vecteur f sont ainsi calculée par application du schéma, avec les modifications indiquées ; puis les valeurs obtenues sont lissées par une formule analogue à (III-8 c) mais unidimensionnelle (sur la frontière amont $X = X1$, toute fois les grandeurs sont supposées uniformes et égales aux moyennes arithmétiques des valeurs obtenues à l'étape du correcteur).

Pour tenir compte des différentes conditions aux limites, les valeurs lissées sont alors modifiées comme suit :

A) CONDITION DE GLISSEMENT :

La vitesse calculée par application du schéma en un point du profil de l'aubage général, tangente à celui-ci ; le procédé utilisé pour tenir compte de la condition de glissement consiste alors à annuler la composante de la vitesse normale au profil et à annuler la composante tangentielle pour le calcul du pas de temps suivant ; si $u^{(1)}$ et $v^{(1)}$ et θ_P désignent respectivement les composantes méridienne et azimutale de la vitesse et la pente du profil, les composantes $u^{(2)}$ et $v^{(2)}$ retenues pour le calcul du pas de temps suivant ont pour expression :

$$\begin{cases} u^{(2)} = \frac{u^{(1)} + \operatorname{tg} \theta_P \cdot v^{(1)}}{\operatorname{tg}^2 \theta_P} \\ v^{(2)} = \operatorname{tg} \theta_P \cdot u^{(2)} \end{cases}$$

B) CONDITION DE PERIODICITE :

Les composantes du vecteur f sont calculées par le schéma sur les parties des frontières $Y = 0$ et $Y = 1$ situées en amont et en aval de l'aubage (fig III-5) ; la condition de la périodicité est alors appliquée en prenant comme valeur commune pour le calcul du pas de temps suivant, l'expression :

$$\bar{f}^{(2)}(X, Y = 0 \text{ ou } 1) = \frac{\bar{f}^{(1)}(X, 0) + \bar{f}^{(1)}(X, 1)}{2}$$

C) CONDITION AMONT :

Dans le cas d'un nombre de Mach axial $M1 \cos \alpha_1 < 1$ on se donne sur la frontière on se donne sur la frontière amont $X = X1$ la pression totale $P01$, la température totale (implicitement donnée) et une autre caractéristique de l'écoulement qui peut être soit la direction de la vitesse (α_1) soit le nombre de Mach ($M1$).

Le débit qui n'est pas fixé par les données de ces quantités est alors de la façon suivante :

La valeur du débit à travers la section amont $X = X1$ à la $(n+1)^{\text{ème}}$ itération est prise égale à celle du débit à travers une section $X = \text{cte}$ intérieur à l'aubage calculée à la n ième itération . Les composantes du f sont entièrement déterminées.

D)- CONDITION AVAL :

Toujours dans le cas d'un écoulement axial subsonique, les composantes f_2, f_3 du vecteur f sont calculées par le schéma numérique ; connaissant la pression statique aval (P_2) imposée comme condition aux limites sur la frontière aval $X = X_2$, on déduit f_1 de l'équation de l'énergie par la relation :

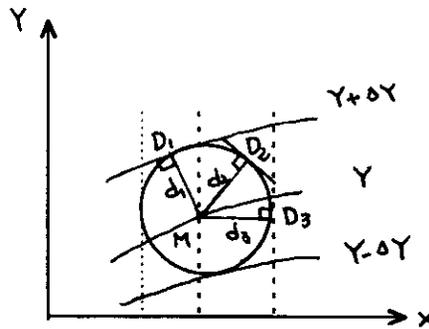
$$H_{01} \bar{f}_1^2 - \frac{\gamma \cdot P_2}{\gamma - 1} \bar{f}_1 - \frac{1}{2} (\bar{f}_2^2 + \bar{f}_3^2) = 0$$

On notera que cette équation du second degré admet toujours une et une seule racine positive.

III-3- CRITERE DE STABILITE :

La condition de stabilité a été déterminée par application de la regle de Courant Friedrichs - Lewey (C. F. L) qui consiste à écrire que le domaine de dependance physique d'un point M_{ij} du domaine de calcul est interieur au domaine de dependance numérique de ce point.

Le domaine de dépendance numérique d'un point M_{ij} peut être assimilé à un hexagone en approchant au voisinage du point M_{ij} les courbes coordonnées $X = cte$ et $Y = cte$ par des droites D_1, D_2, D_3 , etc. (fig.III-6a), en fait, pour simplifier, on remplace cet hexagone par le plus grand cercle inscrit de centre M_{ij} .



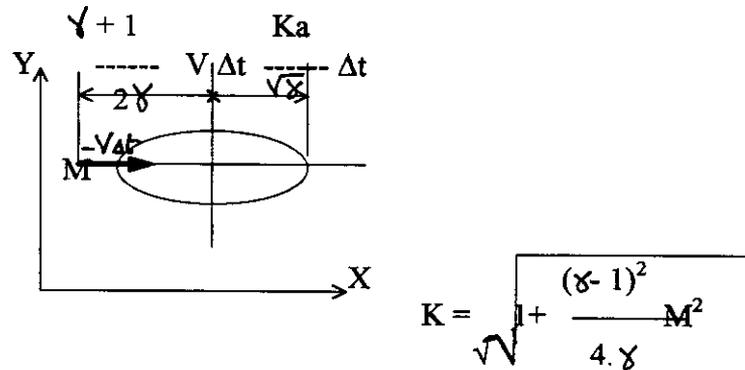
(fig. III. 6a)

domaine de dépendance numérique

Si d_1, d_2, d_3 sont les distances des droites D_1, D_2, D_3 au point M_{ij} (fig.-III-6a) et d_{min} la plus petite de ces distances, la condition de C. F. L s'écrit pour le point M_{ij} :

$$\frac{\gamma + 1}{2 \gamma} |V_{ij}| + \sqrt{\frac{a^2_{ij}}{\gamma} + \left(\frac{\gamma - 1}{2 \gamma} |V_{ij}|\right)^2} \Delta t \leq d_{min ij}$$

Le domaine de dépendance physique de M_{ij} est une ellipse [ref : 11] dont les caractéristiques sont données à la figure (II-6b).



(fig.III-6b)

domaine de dépendance physique

III- 4- CONCLUSION :

Dans ce chapitre nous avons présenter les modèles mathématiques et numériques de la méthode directe ainsi que les conditions initiales et les conditions limites choisies.

Le couplage entre les deux méthodes (semi inverse directe) au calcul d'écoulements transsoniques sera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE IV

IV.1. Introduction :

La solution optimale est toujours cherchée, dans toutes les études et les recherches scientifiques, quel que soit le domaine d'application. Et ce, en étudiant le compromis entre les différentes contraintes qui pèsent sur le concepteur, notamment économiques. D'autre part, la totalité des méthodes connues à l'heure actuelle fournissent une solution associée à un seul régime de fonctionnement, donc, on cherche toujours à tracer un profil répondant au maximum à des situations réalistes.

Le chapitre traite l'une des méthodes ayant pour but d'améliorer les résultats obtenus par deux méthodes différentes, par un processus dit « couplage ».

IV.2. Quelques types de couplages :

Les résultats obtenus, par chacune des méthodes; inverse et directe; présentent quelques inconvénients dans la pratique (paragraphe suivant), ce qui a donné naissance à l'idée de coupler ces méthodes avec d'autres méthodes approchant ainsi la situation d'un écoulement réel entre deux aubes de turbomachines

IV.2.1 : Couplage avec la méthode d'ondes choc :

Le fluide utilisé étant parfait, et l'écoulement est traité sans ondes choc, on a pensé à coupler à titre d'exemple la méthode inverse avec la méthode d'ondes choc, ce qui permet d'approcher au mieux le problème transsonique

IV.2.2 Couplage avec de couche limitée :

Une autre idée de couplage, et celle de prendre en compte d'un autre phénomène souvent rencontré dans la réalité qui est le phénomène de couche limite. (les effets de viscosité).

IV.2.3. Tendances récentes :

La tendance observée actuellement consiste à étendre les méthodes de type précédent à des cas tridimensionnels. Celles-ci sont obtenues généralement par couplage en une méthode quasi 3D (type précédent) et une méthode de calcul d'équilibre radial associée dans un même programme.(REF.1)

IV2.4 Couplage de la méthode inverse avec la méthode directe :

Ce qui constitue notre objet dans cette étude il s'agit d'assembler ces deux méthodes dans le processus itératif, pour des raisons, rencontrées, aussi dans un écoulement réel, et que nous présentons ci-dessous.

IV.3 NECESSITE DU COUPLAGE:

Les chapitres précédents, ont permis d'avoir une idée modeste mais significative sur deux méthodes appliquées pour le tracé d'un profil d'aube; la méthode inverse et la méthode directe.

IV.3.1 Quelques problèmes posés par la méthode inverse :

Il est très difficile de développer une approche générale de ces problèmes. C'est pourquoi on se limitera ici au sujet qui nous intéresse directement, celui du calcul de profil d'aubages.

L'écoulement est décrit par des équations qui constituent un modèle liant les propriétés de l'espace entourant l'aubage à ses performances au sens large.

Il convient de remarquer que de telles équations (**Euler**) généralement paraissant, par nature, mieux adaptées au calcul des performances (vitesse, pression, rendement, etc....) à partir des caractéristiques particulières de l'espace introduit par les aubages, c'est à dire au problème direct.

Un autre problème, plus important, réside dans le choix des données nécessaires à la détermination d'un profil, sinon l'expérience de l'utilisateur (il en existe de très expérimentés dans ce domaine !), ne permet de connaître au départ : (ref.2)

- Quelques caractéristiques physiques de l'écoulement doivent être imposées plutôt que les autres.
- Comment ces données doivent être réparties pour obtenir une solution acceptable en pratique.
- Comment choisir la nature et répartition de ces données pour obtenir une solution « optimale »

Il apparaît ainsi que les résultats fournis par les méthodes inverses doivent être utilisés avec la plus grande prudence.

IV.3.2. Résumé :

Le paragraphe ci-dessus, insinue que malgré des avantages présentés par la méthode inverse, telles que :

- Possibilité de traitement des écoulements transsoniques.
- Possibilité de traitement des écoulements semi-3D.
- Rapidité d'exécution.

Il est toutefois rendu difficile, par la nature même de la méthode, de tenir compte des conditions imposées par la périodicité

de l'écoulement en amont et en aval des aubages.

Pour cette raison, il est indispensable d'utiliser la présente méthode couplée avec la méthode directe, qui à son tour permet de tenir compte de ces conditions.

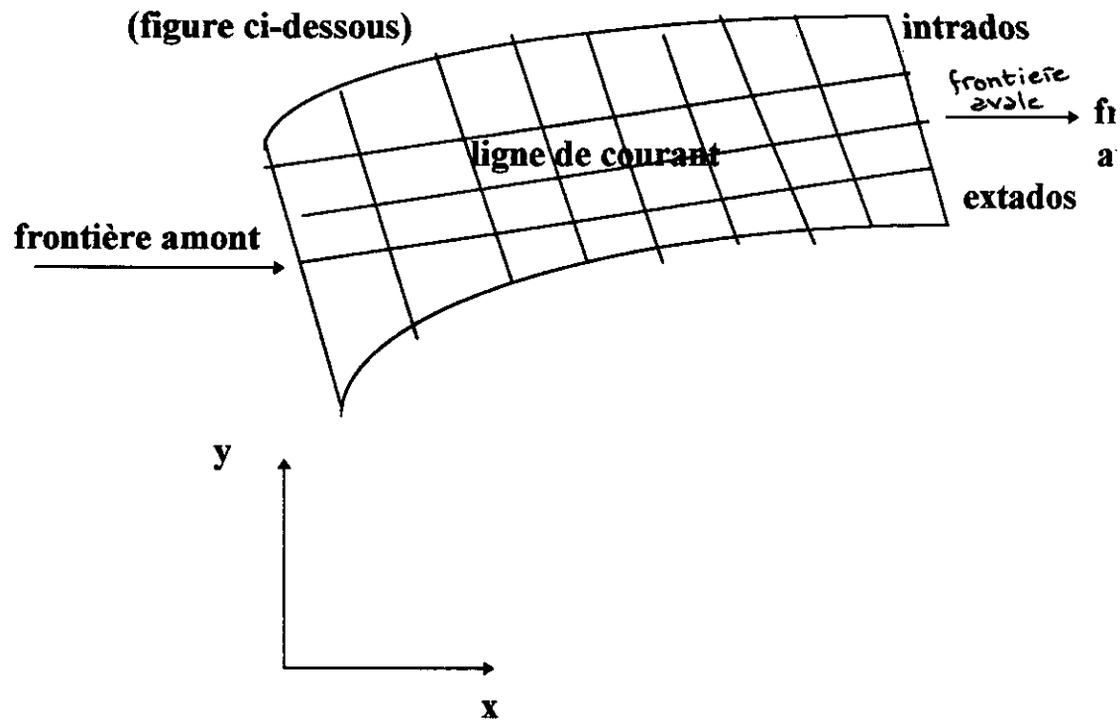
Avec cette approche, de satisfaisantes géométrie d'aubes et de bon profil de vitesses sont capables de surgir :

IV .4- Procédure de couplage :

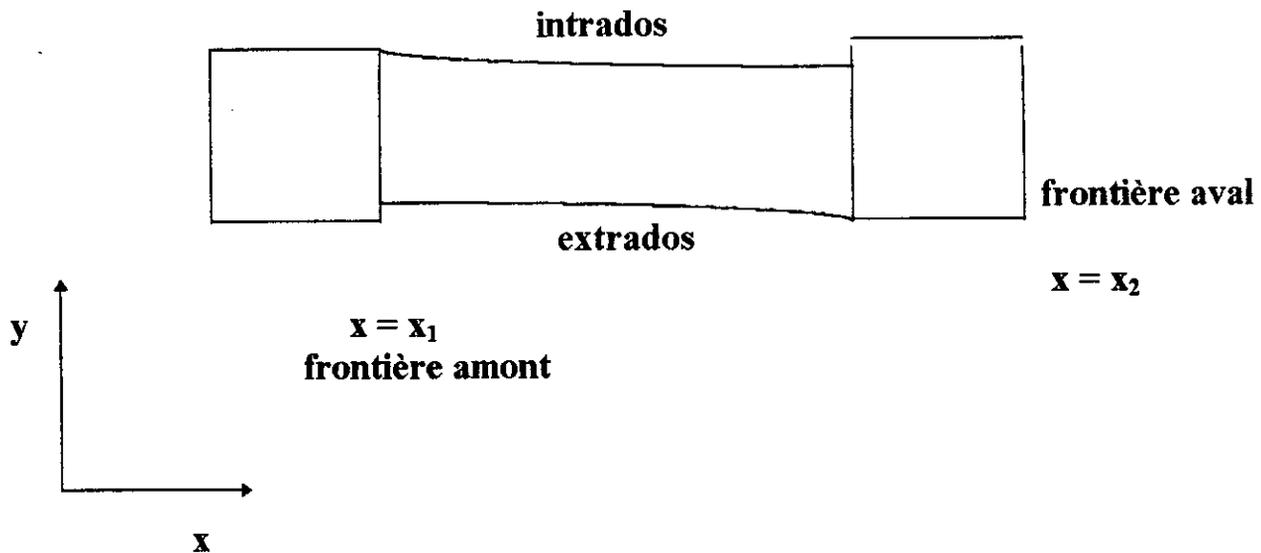
Nous avons conçu un processus itératif pour pouvoir combiner ces deux méthodes, en injectant les résultats obtenus par l'une d'elles dans l'autre. Nous avons préféré commencer par la méthode inverse qui détermine une certaine géométrie, qui à son tour permet d'aborder le problème direct par la suite. Mais, ceci exige certaines manipulations, que nous essayons de présenter succinctement ci-après .

IV .4.1 Adaptation des domaines de calcul :

Nous savons que la méthode inverse permet de calculer un écoulement au voisinage d'une ligne de courant initial, qui représente l'extrados du profil d'aube, on détermine ainsi un de proche en proche, un canal(et la répartition des vitesses et pressions internes) délimité par l'extrados et l'intrados obtenus à la fin du calcul.



avec les frontières amont et aval du domaine on définit un maillage à l'intérieur du domaine obtenu à la fin du calcul. Dans un même repère (ici cartésien) nous avons injecté ce maillage dans le domaine de calcul de la méthode directe. Mais ceci s'avère insuffisant, du moment où la méthode directe exige des conditions à l'infini amont et l'infini aval. En se basant sur ça, nous avons fait les translations nécessaires pour adapter ces deux domaines, on obtient ainsi pour la méthode directe la figure ci-dessous :



pour la prochaine itération, d'autres translations sont conçues pour adapter encore le domaine de calcul, en allant cette fois-ci du domaine de calcul direct à celui de calcul inverse.

IV.4.2 Adaptation des données initiales et des conditions aux limites :

- Puisque nous commençons par la méthode inverse.
- Nous avons imposé pour mettre en oeuvre le calcul :
- La distribution du nombre de Mach sur l'extrados.
- A l'amont la distribution du nombre de mach quelque soit la nature de l'écoulement, super sonique ou subsonique).

- La distribution du nombre de Mach à l'aval, si l'écoulement est subsonique à cette région, sinon, si l'écoulement y est supersonique on n'impose rien (problème hyperbolique).

Pour entreprendre le calcul direct, on injecte les distributions du nombre de Mach et de pression obtenues dans le calcul inverse.

Et pour prendre compte des conditions à l'amont et l'aval, on essaye au maximum d'injecter des valeurs qui respectent les conditions aux limites, telle que l'uniformité à l'infini amont et celui d'aval, et la périodicité en amont et en aval, pour ne pas avoir lieu de discontinuité dans les résultats qu'on doit déterminer. Ceci, en se basant toujours sur le calcul inverse.

Nous rappelons que l'enthalpie totale est prise constante, on impose pour le calcul direct :

- Sur la frontière amont on se donne la pression totale et le nombre de Mach
- Sur la frontière aval, on impose la pression statique.

Les résultats ainsi obtenus, sont injectés dans le calcul inverse, tout en respectant les conditions aux limites et ainsi de suite, jusqu'à la convergence qui fera l'objet du paragraphe suivant.

IV.4.3 Convergence de la méthode :

Le mode inverse génère un profil d'aube, et une distribution du nombre de Mach et une autre de pression. L'écoulement au tour de ce profil est en suite calculé par le mode direct.

Une autre distribution du nombre de Mach, différente de celle obtenue dans le calcul inverse, provient du calcul direct.
(refl.)

En général, arrivant à ce stade, l'étape qui succède est la suivante :

- Si la distribution du nombre de Mach donnée par la méthode directe est assez bonne, et si l'épaisseur du profil est acceptable (épaisseur positive, profil fermé) le profil est alors accepté et le processus s'arrête.
- Si cette distribution du nombre de mach est inacceptable, où bien le profil est non satisfaisant, alors une autre itération est conseillée pour améliorer la géométrie du profil et la distribution du nombre de mach.

IV.5. Le profil et la distribution du mach choisi :

On juge que la distribution du nombre de Mach est inacceptable si, de large décélérations apparaissent dans la direction de l'écoulement, effet de la viscosité qui encourage la formation de couches limites et de décollements.

Le profil est jugé suivant sont épaisseur; les calculs nous ont souvent donnés des profils ouverts, on des profils à épaisseur négative et ceci, est du à une mauvaise distribution du nombre de mach choisi, ce qui explique la nécessité d'une autre itération les résultats du calcul direct étant sensé être mieux adapté pour un écoulement réel (valeurs lissées).

IV.5- Conclusion :

Un processus de design pour un profil d'aube d'un écoulement transsonique est présenté.

Il est basé sur une utilisation itérative de la très rapide méthode inverse et la méthode directe qui est aussi très utilisée, (mais qui demande un temps assez grand relativement à la méthode inverse.

La méthode inverse, ne tient pas compte, au début des conditions de périodicité. Elle donne de profil d'aubes assez performant, toute fois, sans une large expérience pour son utilisation, il est très très difficile de concevoir une distribution du nombre de mach initial qui vérifient les conditions de périodicité, son couplage avec la méthode directe, parait donc nécessaire pour améliorer les performances.

Les applications de cette méthode, fera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE V

V.1 INTRODUCTION :

La mise en évidence des possibilités de la méthode fait l'objet de ce chapitre, et ce en exécutant un programme élaboré pour cette méthode dans un cas spécifique d'un écoulement transsonique : Les résultats obtenus sont représentés sous forme de traces.

V.2 Exemple de calcul d'écoulement transsonique :**V.2.a Application au tracé profil d'aube de turbomachine :**

Le type tracé pose en effet des problèmes particuliers; nous avons trouvé surtout des problèmes dans le choix des conditions et le long de l'extrados (ligne de courant initiale) permettant non seulement le contrôle de la couche limitée le long des parois, mais également qui correspond à un profil présentant une situation réaliste.

On a tenté cependant de tracer un profil d'aubage pour compresseur transsonique à l'aide de la méthode disponible actuellement.

V.2.b Trace d'un profil d'aube d'un compresseur transsonique :

Il s'agit d'un profil transsonique adapté à une compression allant d'un nombre de mach égal à 1,7 à l'amont, à un 0,63 à l'aval. (fig.V.2).

L'angle de calage est pris égal à -35° par rapport à la direction axiale.

La répartition du nombre du mach imposée à l'amont du canal inter-aube est présentée à la (fig.V.1).

Pour le calcul direct les conditions imposées sont introduites dans le calcul, déduites à partir des résultats du calcul inverse.

V.2.7 Résultats et commentaires :

La (fig.V.3) représente le profil d'aube obtenu par juxtaposition en amont et en aval des deux lignes de courant limitant le domaine de calcul.

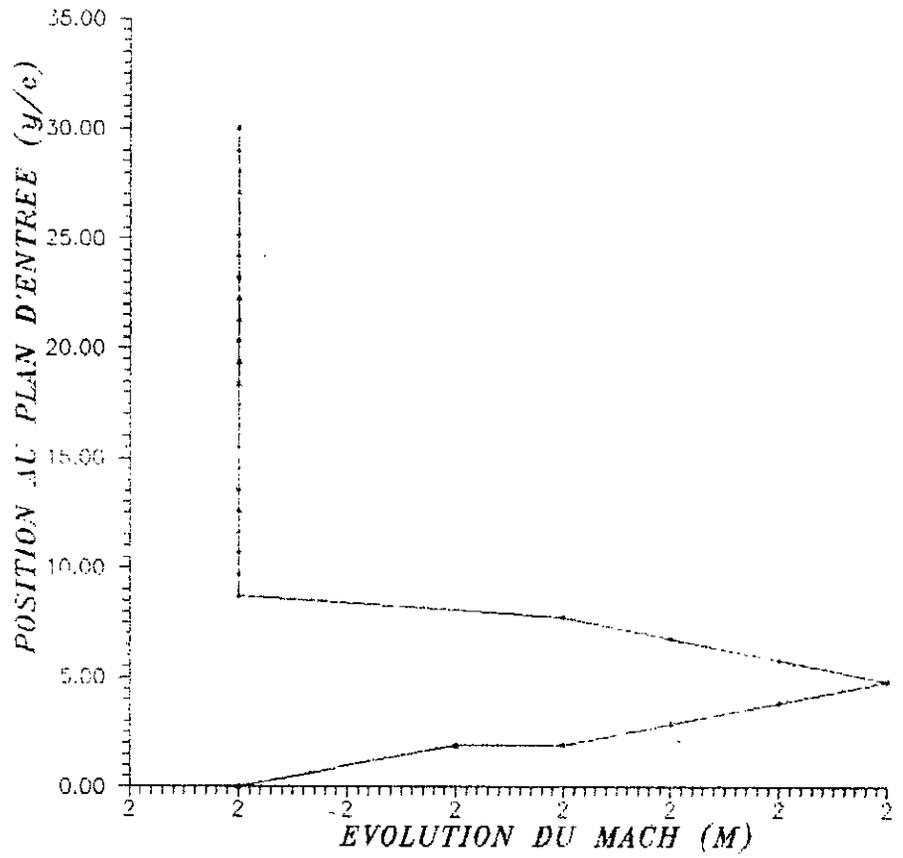
Ce profil paraît satisfaisant, puisqu'il présente une répartition d'épaisseur acceptable, et il correspond à un profil d'aube de compresseur dont la forme en générale est aplatie. Ceci est conséquence du bon choix des valeurs du nombre de machs imposés à l'extrados et à l'amont, pour ces dernières on a opté à choisir la forme présentée à la figure (fig.V.2) d'autre part pour maintenir la stabilité du calcul physiquement l'écoulement est perturbé à l'abord de l'aube.

Le calcul divers nous donne la répartition du nombre de mach à l'intrados schématisée à la (fig.V.4). L'absence de condition de périodicité de l'écoulement au bord de fuite se traduit par les différences importantes qui subsistent en ce point entre les nombres de mach. L'égalité des pressions n'est donc pas assurée le long de la ligne de glissement prolongeant le bord de fuite, ce qui, en principe s'oppose à la juxtaposition des deux écoulements d'intrados de l'extrados en aval; grossomodo le profil géométrique et formé par contre le profil de vitesse est non formé. Le couplage de cette méthode avec la méthode directe nous conduit à un profil de vitesse montré à la (fig.V.6). Le profil est donc fermé, la condition de périodicité est vérifiée donc la juxtaposition des deux écoulements extrados intrados est possible. Les résultats sont obtenus à la 1ère itération, nous nous sommes contenté uniquement à une itération puisqu'elle fournit des résultats acceptable; un bon profil d'aube et une bonne distribution du nombre de mach à l'intrados est l'extrados.

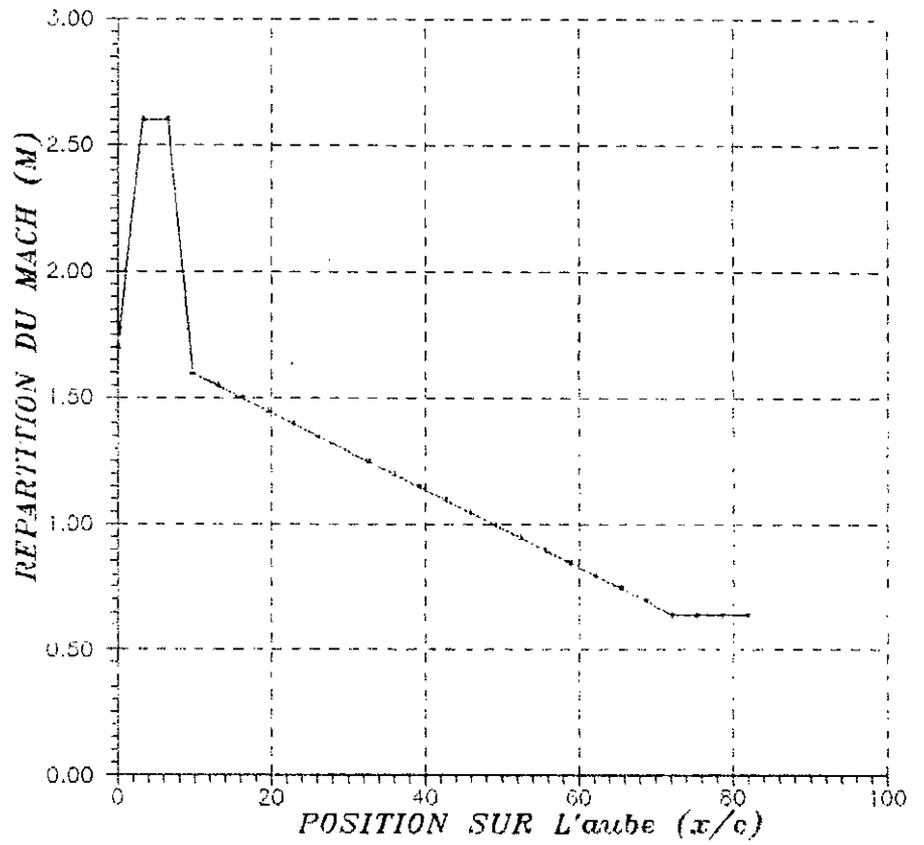
Pour varier la forme de l'aube il suffit donc de jouer sur les données initialement imposées.

V.3 Conclusion :

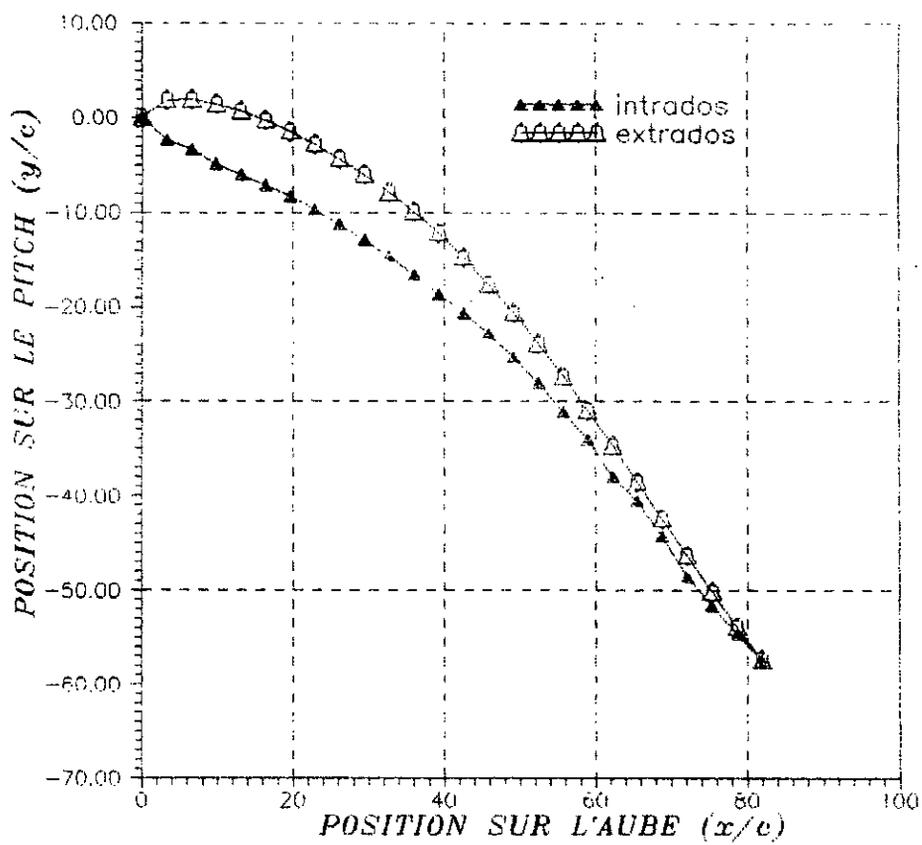
Le chapitre à été consacré pour la mise en évidence des possibilités de la méthode, pour le tracé d'un profil d'aube d'une roue de turbomachine pour un écoulement transsonique, qui est le but de nôtre étude.



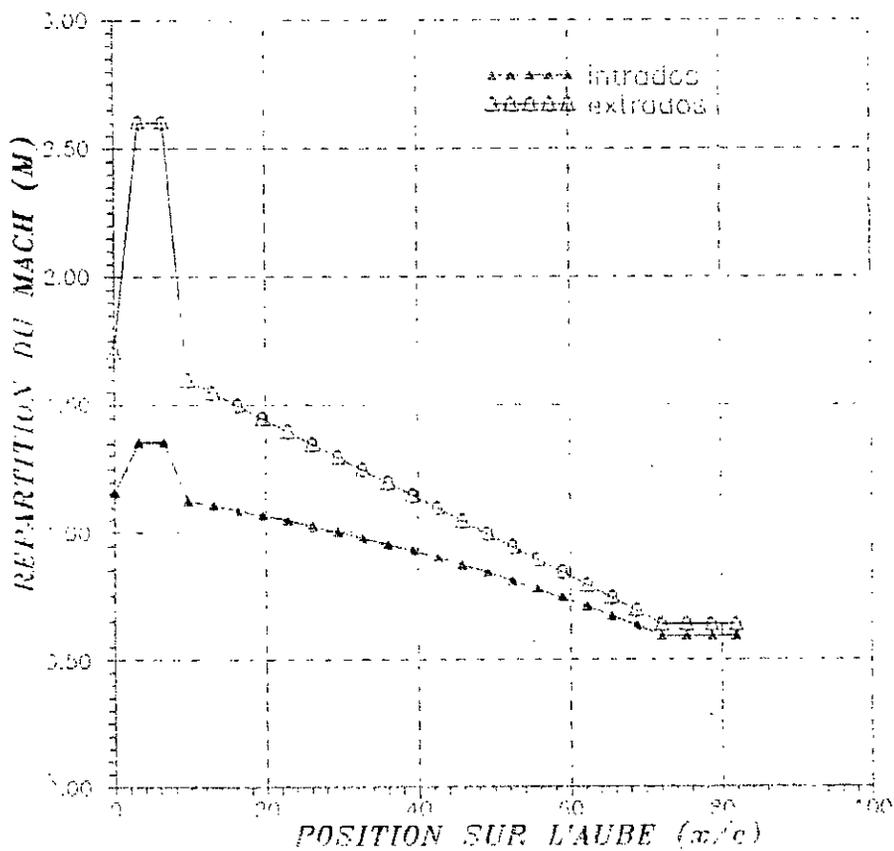
(fig.v.1) distribution du nombre de mach imposee au plan d'entree du canal inter aube.



(fig.v.2) repartition du nombre de mach imposee sur sur l'extados pour une compression transsonique.

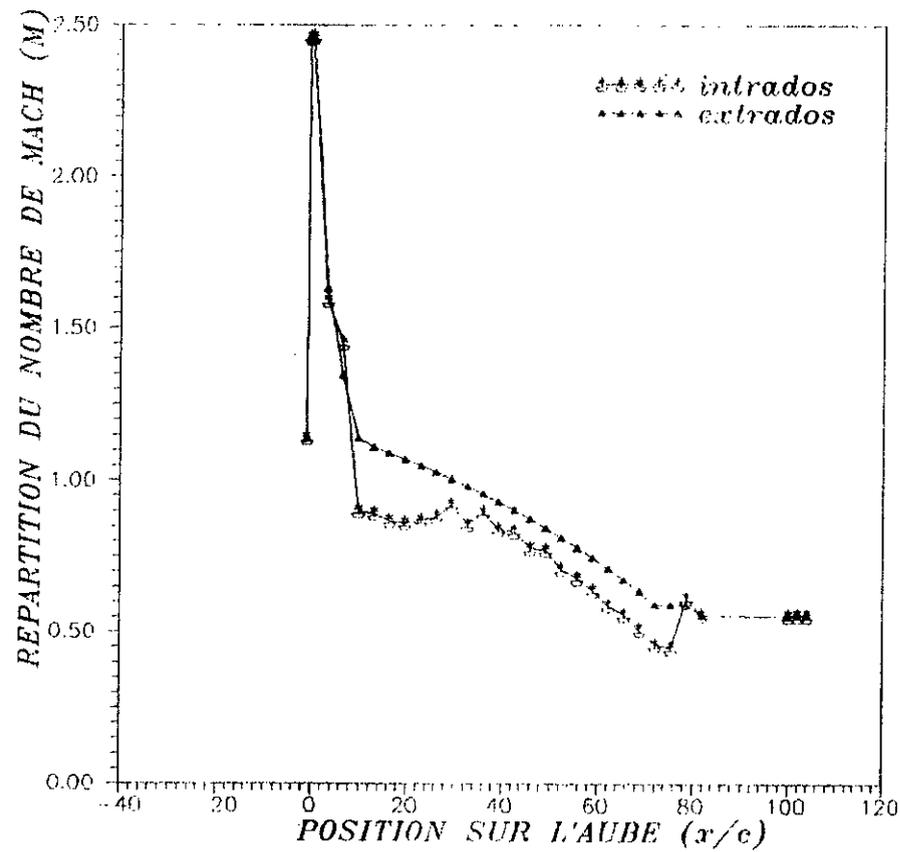


(fig.v.3) profil d'aube de compresseur transsonique obtenu par le calcul semi inverse (premiere iteration) pour une incidence $\text{Beta} = -35$ degres .

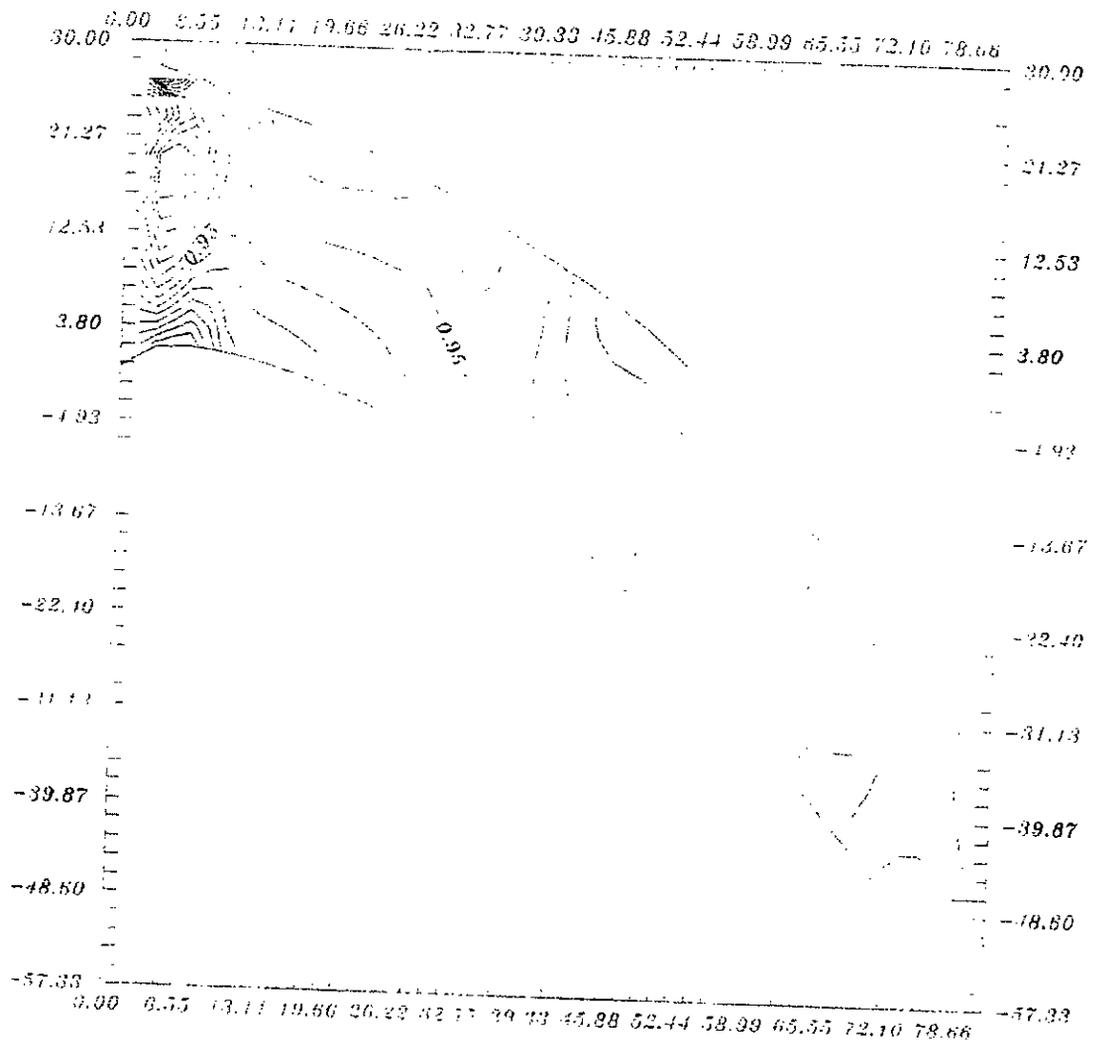


(fig. 4) répartition du nombre de mach sur le profil d'aube d'un compresseur transsonique obtenu par le calcul semi inverse.

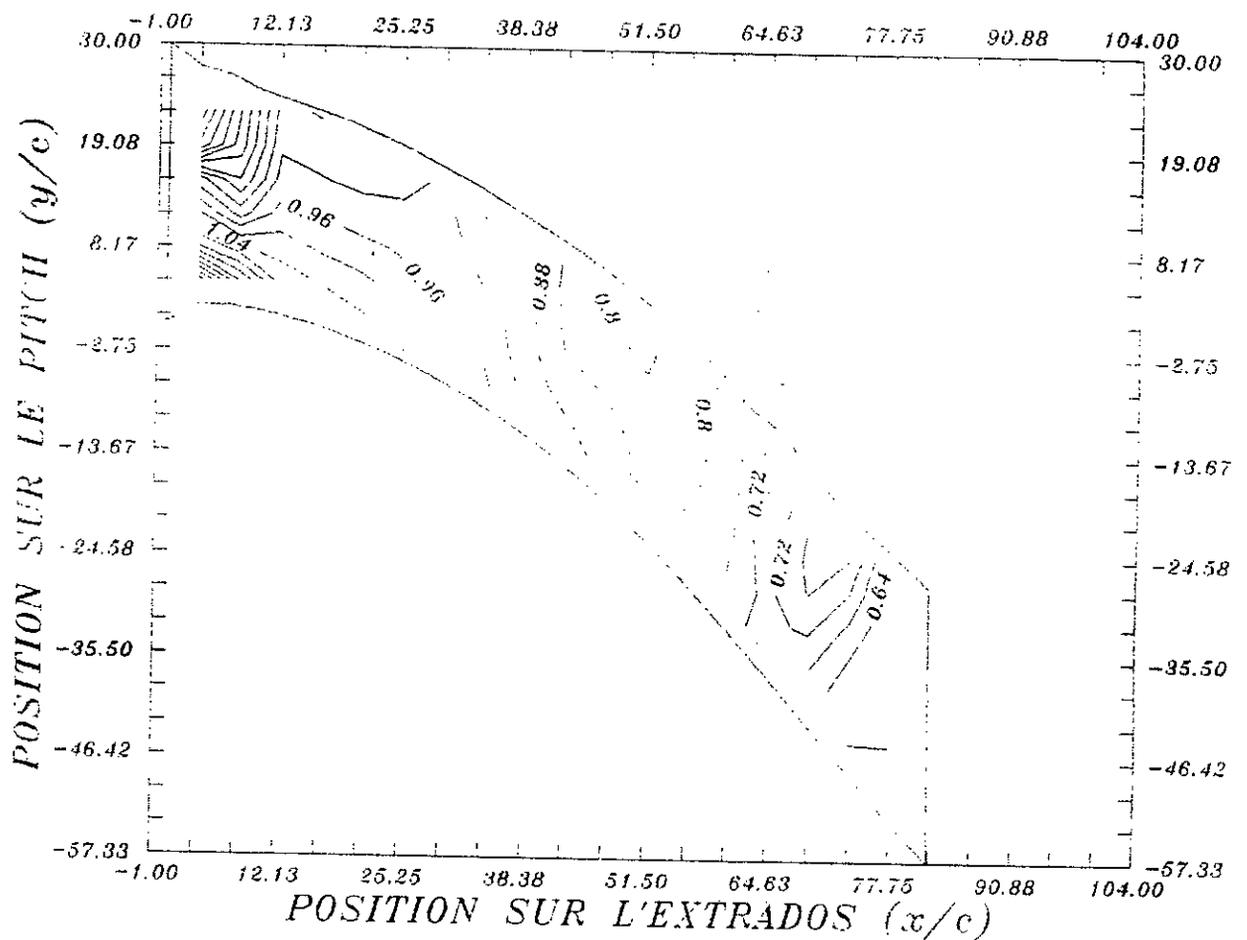
(fig.V.6) distribution du nombre de mach sur le profil
d'aube d'un compresseur transsonique obtenue
apres le calcul direct.



(fig. n. 2) schematisation des lignes isomachs le long du canal inter aube obtenus par le calcul sans inverse.



(fig.V.7) schematisation des lignes isomachs le long du canal inter-aube obtenu apres le calcul direct.(fin de la premiere iteration).



**CONCLUSION
GENERALE**

CONCLUSION GENERALE

Conclusion Générale :

Les bases d'une méthode de calcul d'écoulements plans, non visqueux transsoniques par différences finis ont été exposé dans ce mémoire.

La difficulté mathématique de ce problème consiste à résoudre un système de type mixte (elliptique- hyperbolique).

La méthode inverse, qui est rapide à l'exécution présente des problèmes , tels que la prise en compte de la condition de périodicité à l'amont et à l'aval de l'écoulement.

Cette difficulté à été relevée, en associant cette méthode avec la méthode directe, qui est plus lente dans l'exécution.

Pour améliorer les résultats obtenus par le couplage, nous proposons d'améliorer l'abord les deux méthodes inverses et directe, en les associant avec d'autres méthodes telles que le calcul d'onde choc et de couches limite, pour bien simuler le problème physique, cela peut se faire mais en ayant un temps machine important.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

[1] - MITON H., SANKALE H.

- *Méthode Inverse De Calcul De Profils D'aubage.*
Ecole Centrale De Lyon. (Nov 1984).

[2] - MITON H.

- *Etude Théorique Et Expérimentale De Problème Aérodynamique
Concernant Les Compresseurs Transonique.*
Université d'Aix Marseille II, 1978.

[3] - VEUILLOT J.P.

- *Calcul Numérique De L'Ecoulement Transonique D'un Fluide Parfait
Dans Une Grille D'Aubes.*
Recherche Aéronautique N°6 (Nov 1975).

[4] - PEYRET R., TAYLOR T.D.

- *Computational Methods For Fluid Flow.*
Spring-verlag, Edition 1990.

[5] - VAVRA M.H.

- *Aérodynamics and flow in turbomachines.*
John Willy And Sons Inc (1960)

[6] - ROSHKO A., LIEPMANN H.W.

- *Elements Of Gasdynamics*
John Willy And Sons. Inc (1957)

[7] - CHIKHI N.

- *Element D'un Code Pour Le Calcul D'un Ecoulement Dans Une Roue De Turbomachine*
Projet De Fin D'etude, 1993.

[8] - TOUFOUTI K.

- *Application Du Mode Inverse Aux Ecoulement Transsonique*
Projet De Fin D'etude, 1994.

[9] - MEAUZE G.

- *Méthode de Calcul Aérodynamique inverse Pseudo-Instationnaire. La recherche Aerosp. N° 1980-1*

[10] - VIVLAND H, VEUILLOT J.P.

- *Méthode pseudo-Instationnaire pour le calcul D'Ecoulement Transsoniques.*
publication ONERA (France) N°1978-4

[11] - EUVRARD D.

- *Resolution Numérique Des Equations Aux Dérivées Partielles méthode éléments finis, Différences Finies et Singularités. Edition Masson, 1990.*

[12] - RYHMING I.

- *Dynamique des fluides*
presse polytechnique Romandes, Lausanne

ANNEXES

ANNEXE A :

**EQUATIONS DE L'ÉCOULEMENT A TRAVERS
UNE TURBOMACHINE
(cas d'un repère mobile)**

ANNEXE A :
EQUATIONS DE L'ÉCOULEMENT A TRAVERS
UNE TURBOMACHINE
(cas d'un repère mobile)

On considère l'écoulement dans un repère entraîné à la vitesse de rotation ω autour de l'axe OZ de la machine dans ce repère. L'écoulement peut être représenté par les trois équations de conservations (voir fig. -1-).

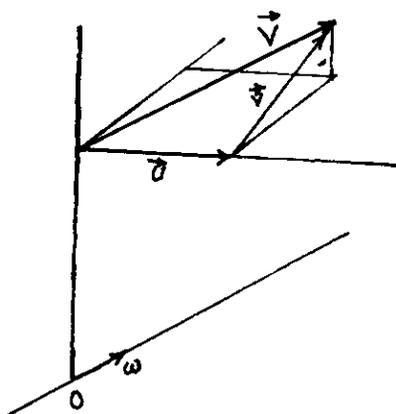


Fig. 1-

Equation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (\text{A-1})$$

Equation de mouvement

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\vec{V}^2}{2} - \vec{V} \wedge \text{rot} \vec{V} + \vec{\Gamma}_e + \vec{\Gamma}_c + \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad} p - \frac{1}{\rho} \vec{F}_f = 0 \quad (\text{A-2})$$

Equation d'énergie

$$T \cdot \text{grad} S = \text{grad} h + \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad} p = 0 \quad (\text{A-3})$$

tq :

\vec{V} : vitesse relative de l'écoulement dans le repère mobile.

$\vec{\Gamma}_e$: accélération d'entraînement.

Γ_c : accélération de coriolis.

\vec{F}_f : représente les forces visqueuses (dissipatives).

V, P, T, S représente respectivement la vitesse, la pression, la température et l'entropie.

Dans le cas du mouvement d'entraînement considéré ici, les accélérations s'écrivent :

$$\vec{\Gamma}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V} \quad (\text{A-4})$$

$$\vec{\Gamma}_e = -\vec{\omega}^2 . r \quad (\text{A-5})$$

$\vec{\omega}$: étant le vecteur rotation uniforme parallèle à l'axe OZ

Ces équations peuvent également représenter l'écoulement dans un repère fixe ; il suffit de faire $\omega = 0$ et d'annuler dans les termes correspondants :

Posant :

$$\text{a) } H_0 = \frac{V^2}{2} + h \quad (\text{enthalpie totale relative})$$

$$\text{b) } I = H_0 - \frac{\omega^2 r^2}{2} \quad (\text{rothalpie})$$

On peut écrire par combinaison des relations (A-2) et (A-3)

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad } I - T . \text{grad } S - \vec{V} \wedge \text{rot } \vec{V} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V} = \frac{1}{\rho} \vec{F}_f$$

\vec{V} : étant la vitesse absolue.

On obtient finalement :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \wedge \text{rot} \vec{V} = T \text{gr} \ddot{a}d S - \text{gr} \ddot{a}d I + \frac{\vec{F}_f}{\rho} \quad (\text{A-6})$$

La relation, qui multipliée scalairement par \vec{V} donne :

$$\vec{V} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \text{gr} \ddot{a}d I = T \vec{V} \text{gr} \ddot{a}d S + \frac{\vec{F}_f}{\rho}$$

L'écoulement étant supposé adiabatique, l'accroissement d'entropie associé à un volume se déplaçant le long d'une ligne de courant est nécessairement égal au travail des forces de frottement donc :

$$T \vec{V} \text{gr} \ddot{a}d S + \frac{\vec{F}_f}{\rho} = 0$$

On obtient dans ces conditions :

$$\vec{V} \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{gr} \ddot{a}d I \right) = 0 \quad (\text{A-7})$$

On obtient le système suivant :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{V} - \frac{\vec{V}}{a^2} \text{gr} \ddot{a}d \left(\frac{V^2 + \omega^2 r^2}{2} \right) - \frac{\vec{V}}{R} \text{gr} \ddot{a}d S = 0 \quad (\text{a})$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \wedge \text{rot} \vec{V} = T \text{gr} \ddot{a}d S - \text{gr} \ddot{a}d I + \frac{\vec{F}_f}{\rho} \quad (\text{b})$$

$$\vec{V} \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{gr} \ddot{a}d I \right) = 0 \quad \text{©}$$

Représentant les équations de NAVIER-STOKES pour un écoulement tridimensionnel instationnaire ; par rapport à un repère animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe.

On remarque que la rothalpie I qui vient d'être définie, joue un rôle analogue à l'enthalpie de l'écoulement dans un repère fixe. Elle s'y réduit d'ailleurs lorsque on fait $\bar{\omega} = 0$

ANNEXE B:

**ANALYSE DE LA STABILITE DES SCHEMAS
AUX DIFFERENCES FINIS**

ANNEXE B:
ANALYSE DE LA STABILITE DES SCHEMAS AUX
DIFFERENCES FINIS

Pour un schéma donné, il existe des valeurs du pas de calcul, pour lesquelles, les résultats numériques donnent des oscillations qui croissent rapidement et après un certain temps leur amplitude devient infinie telle que le calculateur passe en «*over-flow*» et s'arrête.

Ce phénomène est caractéristique de l'instabilité numérique, en plus l'instabilité peut se produire par d'autres sources, par exemple, dans un cas non linéaire pour des nombres de REYNOLDS importants, les causes d'instabilités sont :

1. Les effets non linéaires.
2. Le changement rapide de la direction dans la région de décollement de l'écoulement.
3. Un fort gradient de pression.
4. Présence de parois ou de frontières au domaine de calcul.

L'effet de telles instabilités qualifiées de « faible » ; n'est pas nécessairement une divergence rapide du calcul, mais souvent, il provoque des oscillations qui restent d'amplitude bornée [ref :4].

Ce phénomène est corrigé soit en diminuant le rapport des pas de calcul ; en le choisissant inférieur à la valeur donnée par la condition de COURANT-FRIEDERICHS-LEWY (C-F-L) voir [chap III], soit en introduisant un terme dissipatif ou de viscosité artificielle.

Cela nous amène à introduire la notion de stabilité, nous dirons qu'un schéma est stable si la solution du problème discrétisé reste bornée [ref :11].

Examinons, maintenant par l'analyse de Fourier ; la stabilité du schéma suivant :

$$C_{-1} \cdot U_h^{n+1} + C_0 \cdot U_h^n + C_{-1} \cdot U_h^{n-1} = 0 \quad (\text{B-1})$$

Où C_1 , C_0 et C_{-1} sont des opérateurs de différences finies, $U_n^h \approx (X_h, n\Delta t)$ avec $U = (U_1, \dots, U_m)$ et $X = (X_1, \dots, X_d)$ telque X_h désignent la discrétisation en espace $X_h = (\gamma_1 \cdot \Delta X_1, \dots, \gamma_d \cdot \Delta X_d)$, où $\gamma = \gamma_1, \dots, \gamma_d$ étant des entiers, l'indice n désigne la discrétisation en temps $m = n \cdot \Delta t$, n un entier.

On suppose que la solution est de la forme :

$$U_n^h = U^h(K) \exp(i \cdot K \cdot X_h) \quad (\text{B-2})$$

ou : $i = \sqrt{-1}$, et K le vecteur nombre d'onde, $K = (K_1, \dots, K_d)$ substituant (B-2) dans (B-1) et en divisant par un facteur commun $\exp(iKX_h)$, on obtient l'équation vectorielle :

$$G_0 \cdot U^{n+1} + G_0 \cdot U^n + G_0 \cdot U^{n-1} = 0 \quad (\text{B-3})$$

Cette équation à trois niveaux est transformée en une équation à deux niveaux en introduisant une variable auxiliaire $V_n = U_{n-1}$, l'équation (B-3) devient donc :

$$\begin{aligned} G_1 \cdot V^{n+1} + G_0 \cdot U^n + G_{-1} \cdot V^{n-1} &= 0 \\ V^{n+1} - U^n &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B-4})$$

qui peut être écrite sous la forme :

$$\phi_{n+1} = G \cdot \phi_n$$

Où $\phi = (u, v)$ est un vecteur à $2m$ composant, G une matrice $2m \times 2n$ déduite de (B-4) appelée matrice d'amplification.

La stabilité du schéma (au sens de *Von Neumann*) exige que le rayon spectrale de la matrice d'amplification G est inférieur à l'unité i.e :

$$\rho(G) = \text{Max}|\lambda| \leq 1, \quad 0 \leq K \Delta X \leq 2\pi, \quad j = 1, \dots, d \quad (\text{B-6})$$

Où λ_1 sont les valeurs propres de G racines de l'équation caractéristique :

$$\det(G - \lambda I) = f(\lambda) \quad (\text{B-7})$$

Dont les valeurs des λ résultent de l'étude des zéros de $F(\lambda)$, une autre possibilité consiste à calculer directement les valeurs propres de G par des méthodes numériques.

Les calculs sont effectués en faisant varier les paramètres (physique et numérique) du problème et en constituant les graphes des résultats pour une telle approche, il est recommandé de procéder à l'étude analytique préliminaire de la stabilité pour les cas simples ; pour l'instant en :

1. considérant le problème en dimension d'espace inférieur.
2. annulant quelques paramètres physiques.
3. considérant quelques relations entre les composants du vecteur nombre d'onde ou éventuellement quelque valeurs d'entre eux une telle analyse préliminaire permet souvent la détermination d'une forme grossière du critère de stabilité qui peut être raffiner par le calcul numérique des valeurs propres.

ANNEXE C:

**RECHERCHE SYSTEMATIQUE DES
DISCONTINUITÉ
RELATIONS DE (RANKINE-HUGONOT)**

ANNEXE C:**RECHERCHE SYSTEMATIQUE DES
DISCONTINUITÉ RELATIONS DE
(RANKINE-HUGONIOT)**

Les équations de NAVIER-STOKES sont des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre qui nécessitent pour être résolues un nombre N de conditions aux limites réelles.

Par contre les équations d'Euler sont du premier ordre, elles nécessitent un nombre E de conditions aux limites inférieur à N.

Il est paradoxal de constater que $P = N - E$ conditions réelles, deviennent des inconnues dans le nombre d'Euler. La seule façon de solver ce paradoxe est de supposer l'existence d'une surface de discontinuité.

Le calcul de ces discontinuités est effectué par les relations dites de RANKINE-HUGONIOT, associées aux équations d'Euler, permettent le calcul de l'écoulement autour d'un obstacle de géométrie connue.

C-1 EQUATION DE RANKINE-HUGONIOT

Ces équations désignent les relations de comptabilités entre les principes de conservation et l'existence des discontinuités.

Elles sont obtenues rapidement en posant :

$$\vec{V}_n = \vec{V} \cdot \vec{n}_s$$

\vec{n}_s : la normale à la surface de discontinuité (fig.C.1)

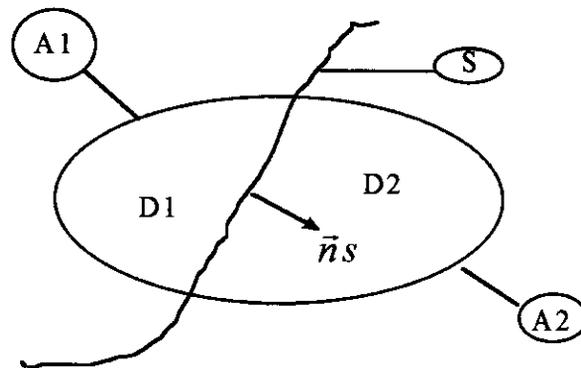


Fig. C.1

L'équation de continuité prend la forme :

$$\rho_1.V_{n1} = \rho_2.V_{n2} \quad (\text{C.1a})$$

L'équation de quantité de mouvement, s'écrit :

$$\rho_1.\vec{V}_1.V_{n1} - \rho_2.\vec{V}_2.V_{n2} + (P_1 - P_2).\vec{n}_s = 0$$

D'où, en projetant cette relation respectivement sur le normale et le plan tangent à la surface S, on obtient :

$$P_1 + \rho_1.V_{n1}^2 = P_2 + \rho_2.V_{n2}^2 \quad (\text{C.1b})$$

$$\rho_1.\vec{V}_t1.V_{n1} = \rho_2.\vec{V}_t2.V_{n2} \quad (\text{C.1c})$$

L'équation de l'énergie s'écrit :

$$\rho_1.\left(h_1 + \frac{V_1^2}{2}\right).V_{n1} + p_1.V_{n1} = \rho_2.\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2}\right).V_{n2} + p_2.V_{n2} \quad (\text{C.1d})$$

C. 2- LIGNE OU SURFACE DE GLISSEMENT :

Ces lignes ou surfaces sont définies en écrivant que le fluide ne traverse pas le discontinuité soit :

$$V_{n1} = 0 \quad (\text{C.2a})$$

d'où, en injectant dans le système (C.1), on obtient :

$P_1 = P_2$	(C .2b)	continuité de la pression
$V_{n1} = V_{n2}$	(C .2c)	continuité de la vitesse normale
ρ, V_t, h		quantités éventuellement discontinues

Ce type de discontinuité apparaît généralement dans deux cas. Le premier, est le cas d'un contour extérieur d'un corps placé dans un fluide parfait. Il existe une zone d'épaisseur nulle au voisinage de la paroi qui est de type « surface de glissement » (fig. C.2a). Par conséquent, la condition au limite qui est appliquée sur la paroi, pour résoudre les équations d'Euler est la nullité de la composante normale de la vitesse, c'est la condition dite de glissement, l'autre cas, est celui d'un jet débouchant dans l'atmosphère au repos. Il se forme, après un certain temps une discontinuité qui sépare le fluide contenu dans le jet et l'air ambiant (fig. C.2b) :

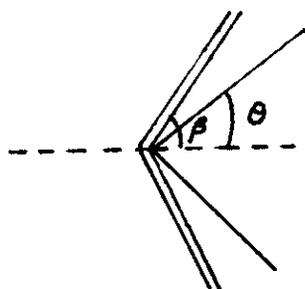


Fig. C. 2a



Fig. C. 2b

Compte tenu de l'identité des composantes normales V_{n1} et V_{n2} . Les deux côtés de la ligne de glissement sont respectivement constitués des mêmes particules qui glissent les uns par rapport aux autres du fait de la discontinuité de la vitesse tangentielle.

C.3- LES ONDES DE CHOCS :

Les équations des ondes de choc sont obtenues en écrivant $V_{n1} \neq 0$ dans les relations de Rankine-Hugoniot (C.1), ceci implique, contrairement au cas précédent, une traversée de la discontinuité par le particule fluide.

Le système (C.1) est alors réécrit sous une forme plus simple, soit :

$$m = \rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2} \quad (\text{C.3a})$$

$$P_1 + m V_{n1} = P_2 + m V_{n2} \quad (\text{C.3b})$$

$$h_1 + \frac{1}{2} V_{n1}^2 = h_2 + \frac{1}{2} V_{n2}^2 \quad (\text{C.3c})$$

$$V_{t1} = V_{t2} \quad (\text{C.3d})$$

Le cas particulier des ondes de choc droites est obtenue en posant $V_{t1} = V_{t2} = 0$.

En manipulant, les équations (C.3), on obtient les relations dites d'*Hugoniot*.

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (Mn_1^2 - 1) \quad (\text{C.4a})$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \left(\frac{1}{Mn_1^2} - 1 \right) + 1 \right)^{-1} \quad (\text{C.4b})$$

Les autres quantités telles que h_1 , T_1 et Mn_1 peuvent être déduites sans difficultés.

Dans la pratique, il est commode d'introduire aussi les pentes locales β et celles de la ligne de courant aval θ , par rapport à la direction de la vitesse initiales V_1 (fig. C. 3).

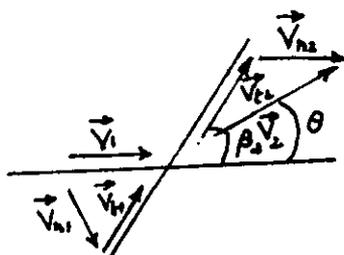


Fig. C.3

Les équations de continuités et de conservation des vitesses tangentielles s'écrivent :

$$\begin{aligned}\rho_2 V_2 \sin(\beta - \theta) &= \rho_1 V_1 \sin \beta \\ V_2 \cos(\beta - \theta) &= V_1 \cos \beta\end{aligned}$$

Il en résulte une relation fondamentale :

$$\frac{\operatorname{tg}(\beta - \theta)}{\operatorname{tg}(\beta)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (\text{C.5})$$

Cette relation peut être écrite sous la forme [ref. 12]

$$\operatorname{tg} \theta = 2 \operatorname{ctg} \beta \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \quad (\text{C.5}')$$

Cette expression s'annule pour $\beta = \pi/2$ et $\beta = \arcsin(1/M_1)$ appelé angle du Mach. Cette relation (C. 5') traduit dans le plan (θ, β) qu'il existe deux solutions β_1 et β_2 pour chaque valeur $\theta \leq \theta_{\max}(M_1)$. La valeur $\sup(\beta_1, \beta_2)$ est appelée solution choc fort, tandis que le (β_1, β_2) est appelée solution choc faible.

Pour $\theta > \theta_{\max}(M_1)$, aucune solution locale n'est compatible avec la valeur M_1 fixée. Le choc ne peut être que détaché.

Ce type de discontinuité se produit, soit à l'amont d'obstacles placés dans un courant supersonique (Fig. C. 5a) soit lors d'un changement brusque de la pente d'une paroi (Fig. C.5b).

ANNEXE D:

**TRAITEMENT NUMERIQUE DES ONDES DE
CHOC
NOTION DE VISCOSITE ARTIFICIELLE**

ANNEXE D
TRAITEMENT NUMERIQUE DES ONDES DE CHOC
NOTION DE VISCOSITE ARTIFICIELLE

Durant toute cette annexe, nous nous baserons sur l'équation de Bûrgeres sous la forme (d.1) et (d.2).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad (d.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (d.2)$$

$\nu = cst > 0$

Lorsqu'une solution $u(x, t)$ de l'équation de Bûrgeres (d.1) présente un choc et qu'on discrétise le problème correspondant, il subsiste nécessairement, entre les points du maillage les plus proches du choc et situés de part et d'autre de celui-ci, une variation de u qui ne tend pas vers zéro, de sorte qu'un schéma aux différences finies, constant n'a plus de sens.

D.1- METHODE DU « SHOCK-FITTING » :

Elle consiste à considérer explicitement la position X_c du choc à chaque instant t comme une inconnue du problème, et à discrétiser l'équation (d.1) en différences finies de part et d'autre X_c , et à imposer les conditions de choc (relation de Rankine-Hugoniot annexe B) une telle méthode appelée « Shock-fitting » est parfois utilisée, mais elle se heurte à trois difficultés principales [ref.3] :

1. La difficulté informatique à suivre les chocs, qui sont parfois nombreux, et qui peuvent apparaître ou disparaître.
2. La difficulté d'exprimer numériquement les relations de choc.

3. La difficulté d'obtenir des schémas stables.

De sorte que cette méthode est assez peu utilisée, sauf si on ne peut pas écrire l'équation traitée sous forme conservative.

D.2- METHODE DU « SHOCK-CAPTURING »

Cette méthode a perturbé l'équation (d.1) selon le modèle (d.2), en lui adjoignant un terme de viscosité artificielle du type $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, l'équation résultant est, à la convergence :

a- du second ordre, et

b- suffisamment dissipative pour amortir les oscillations éventuelles, ν' est un coefficient positif petit.

Ce terme permet d'étaler le choc, bien que la structure du choc est faussée (car beaucoup plus épaisse qu'en réalité), mais à l'usage, on constate heureusement que la position et l'intensité du choc sont correctement obtenues.

Dans la pratique, on peut :

- Soit introduire explicitement un terme $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ au second membre de l'équation (d.1) ; qui s'écrit alors sous la forme (d.2), avec ν' au lieu de ν ($\nu > 0$).
- Soit discrétiser (d.1) à l'aide d'un schéma dit dissipatif i.e : un schéma contenant implicitement du terme de viscosité artificielle, comme dans le procédé de lissage appliqué aux chapitres II.

D. 3- RESOLUTION D'UN CAS PARTICULIER :

Nous allons appliqué la seconde méthode à l'équation (d. 2) dans le cas stationnaire, puisque ($\partial / \partial t = 0$), cette équation permet d'avoir une équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u^2}{2} \right) = v \frac{d^2}{dx^2} \quad (d.3)$$

Dont la solution est de la forme :

$$u = u_* \frac{1 + K \cdot \exp\left(\frac{u_* \cdot X}{v}\right)}{1 - K \cdot \exp\left(\frac{u_* \cdot X}{v}\right)} \quad K = \pm \exp\left(\frac{u_* \cdot X}{v}\right) = Cte \quad (d.4)$$

$U_* = U(X_*) = Cte$ qu'on peut toujours supposer positive.

v et U_* étant positif, lorsque X varie de $-\infty$ à $+\infty$ $\exp\left(\frac{u_* \cdot X}{v}\right)$ varie de 0 à $+\infty$.

Nous supposons $K > 0$ sinon le dénominateur peut s'annuler et u devient infini.

On peut aussi, sans perte de généralité, se ramener au cas où $X_* = 0$ i.e : $K = 1$ d'où :

$$u = u_* \operatorname{th}\left(\frac{u_* \cdot X}{2v}\right) \quad (d.5)$$

Lorsque X croît de $-\infty$ à $+\infty$, u décroît de $+U_*$ (>0) à $-U_*$, d'abord lentement puis rapidement ; au voisinage de $X = 0$, et de nouveau lentement (figure ci-dessus).

