

6/97  
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE  
GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

BIBLIOTHEQUE — المكتبة

Ecole Nationale Polytechnique

**PROJET DE  
FIN D'ETUDES**

**SUJET**

**COUPLAGE MODE  
SEMI INVERSE/DIRECT - COUCHE  
LIMITE APPLIQUE AUX  
ECOULEMENTS TRANSSONIQUES**

Proposé par :

Mr. M. BOUDJEMAA

Etudié par :

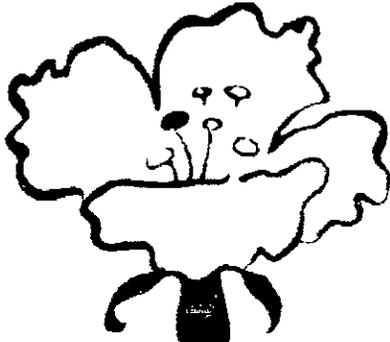
Mr. A. HALES  
Mr. N. BOUCHEFFA

Dirigé par :

Mr. M. BOUDJEMAA

*Promotion Juillet 1997*

E.N.P 10, Avenue Hassen Badi, 16200 El-Harrach, Alger.

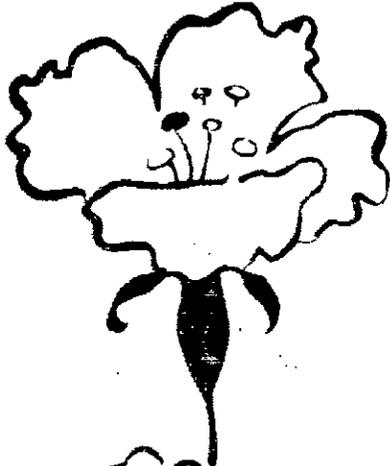


## Dédicaces

A

- la mémoire de mon père qui attendait chaleureusement ce jour.
- mes grandes mères, ma mère et mon grand père.
- mes seuls deux frères Amine et Samir, mes sœurs.
- mes oncles et exceptionnellement H. Houcine.
- toute la famille et particulièrement Habib.
- tous mes amis.

B. Noureddine .



## *Dédicaces*

*A*

- *mes chers parents, en guise de reconnaissance.*
- *mes frères et sœurs.*
- *Amine et Samir..*
- *toute la famille.*
- *tous mes amis.*

*H. Ahmed*

## *Remerciements*

*Nous remercions Dieu tout puissant de nous avoir donné la volonté et le courage afin d'arriver à la finalité de ce modeste travail.*

*Nous tenons aussi à témoigner notre profonde gratitude à notre promoteur **M. M. Boujema** qui a dirigé ce travail et qui nous a apporté son aide et son soutien moral, qu'il trouve ici l'expression de notre sincère reconnaissance.*

*Nous remercions également Messieurs les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer ce travail.*

*Nous ne manquerons pas de présenter notre profonde sympathie et nos sincères remerciements à toutes les personnes qui nous ont aidés à la réalisation de ce mémoire et particulièrement à **M. K. Toufouti**.*

*Nos merveilleuses familles à qui revient la gloire de nous avoir éduqué, encouragé et soutenu.*

ملخص

يهدف هذا العمل الى تطبيق طريقة شبه عكسية و طريقة مباشرة لتصميم جناح ريشة عجلة توربينية فى حالة انسياب عبر صوتى مع الأخذ بعين الاعتبار سمك الطبقة الحدية.

**Résumé:**

Le but de ce travail est l'application du mode semi-inverse direct couplé avec le calcul de la couche limite pour le tracé d'un profil d'aube de turbomachine en écoulement transsonique.

**Abstract:**

This work aims at applying a semi-invers and a direct method with taking into account the thickness of the boundary layer for the design of turbomachine blade profil in transonic flow.

## SOMMAIRE

INTRODUCTION GÉNÉRALE .....	2
<b>CHAPITRE I : Méthode semi-inverse</b>	
I.1 INTRODUCTION .....	5
I.2 POSITION DU PROBLÈME .....	5
I.3 MISE EN ÉQUATIONS .....	6
I.3.1 SYSTÈME DE COORDONNÉES .....	6
I.3.2 EQUATIONS DE MOUVEMENT .....	6
I.3.3 TRANSFORMATION DU SYSTÈME .....	9
I.4 DISCRÉTISATION EN DIFFÉRENCES FINIES .....	9
I.4.1 SCHÉMA DE DISCRÉTISATION .....	11
I.4.1.a- Etape explicite .....	11
I.4.1.b- Etape implicite .....	11
I.4.2 CONDITIONS INITIALES ET AUX LIMITES .....	14
I.4.2.a- Conditions initiales .....	14
I.4.2.b- Conditions aux limites .....	14
I.4.3 ETUDE DE LA STABILITÉ DU SCHÉMA EXPLICITE .....	15
I.4.4 ADAPTATION DU SCHÉMA AUX CONDITIONS AUX LIMITES .....	16
I.5 CONCLUSION .....	17
<b>CHAPITRE II : Méthode directe</b>	
II-1 INTRODUCTION .....	19
II.2 PRINCIPE DE LA MÉTHODE .....	19
II.3 FORMULATION DU PROBLÈME .....	19
II.3.1 EQUATION DE MOUVEMENT .....	19
II.3.2 CONDITIONS INITIALES ET CONDITIONS AUX LIMITES .....	20
II.3.2.1 CONDITIONS INITIALES .....	20
II.3.2.2 CONDITIONS AUX LIMITES .....	21
II.4 LE MODÈLE NUMÉRIQUE .....	22
II.4.1 ETAPE I: CHANGEMENT DE COORDONNÉES .....	22
II.4.2 ETAPE II : ECRITURE DES ÉQUATIONS DANS LE PLAN DE CALCUL .....	23
II.4.3 ETAPE III: DISCRÉTISATION DES ÉQUATIONS .....	23
II.4.3.1 DISCRÉTISATION AU POINT $M_D$ INTÉRIEUR AU DOMAINE DE CALCUL .....	23
a/ Calcul du prédicteur .....	24
b/ Calcul du correcteur .....	24
c/ Calcul d'une valeur lissée du correcteur .....	24
II.4.3.2 TRAITEMENT DES POINTS SITUÉS SUR LES FRONTIÈRES DU DOMAINE DE CALCUL .....	25
II.4.4 CONDITION DE STABILITÉ .....	27
II.5 CONCLUSION .....	28

### CHAPITRE III : Couche limite

INTRODUCTION .....	30
III.1 PHÉNOMÈNE D'INTERACTION ONDE DE CHOC-COUCHE LIMITE .....	30
III.2 EQUATIONS DYNAMIQUES DE LA COUCHE LIMITE .....	31
III.3 MÉTHODE DE <i>TH. VON KARMAN</i> ET <i>K. POHLHAUSSEN</i> .....	35
III.4 RÉOLUTION DU PROBLÈME .....	39
III.5 CONCLUSION .....	39

### CHAPITRE IV : Couplage

IV.1 INTRODUCTION .....	44
IV.2 COUPLAGE DE LA MÉTHODE SEMI-INVERSE AVEC LA MÉTHODE DIRECTE..	44
IV.2.1 NÉCESSITÉ DU COUPLAGE .....	44
IV.2.2 PROCÉDURE DE COUPLAGE .....	44
IV.2.3 CONVERGENCE DE LA MÉTHODE .....	45
IV.3 COUPLAGE AVEC CALCUL DE LA COUCHE LIMITE .....	46

### CHAPITRE V : Applications

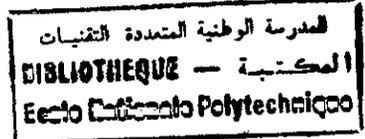
V.1 INTRODUCTION .....	48
V.2 EXEMPLES DE CALCUL D'ÉCOULEMENT TRANSSONIQUE.....	48
V.2.1 APPLICATION AU TRACÉ D'UNE GRILLE D'AUBES DE TURBINE .....	48
V.2.2 APPLICATION AU TRACÉ D'UNE GRILLE D'AUBES DE COMPRESSEUR .....	48
V.3 RÉSULTATS ET COMMENTAIRES .....	49

CONCLUSION GÉNÉRALE .....	62
---------------------------	----

### BIBLIOGRAPHIE

### ANNEXES

# Notations



## Chapitre I:

- $V$  : vitesse absolue.  
 $x, y$  : coordonnées cartésiennes  
 $h(x)$  : hauteur de la veine.  
 $\rho$  : densité  
 $p$  : pression  
 $a$  : vitesse du son.  
 $a_0$  : vitesse du son à l'arrêt.  
 $s$  : entropie.  
 $M$  : nombre de Mach.  
 $r$  : constante du gaz parfait  
 $\gamma$  : rapport des chaleurs spécifiques.  
 $\theta$  : angle d'attaque.  
 $\Delta y$  : épaisseur du tube de courant.  
 $\Delta m$  : incrément d'espace le long de la direction tangente à la ligne de courant.

## Chapitre II

- $u, v$  : composantes du vecteur vitesse.  
 $t$  : temps  
 $\Delta t$  : pas de temps.  
 $s$  : pitch  
 $p$  : pression statique.  
 $p_0$  : pression totale.  
 $H_0$  : enthalpie totale.  
 $J$  : jacobien.

# Notations

## Chapitre III

- $x, y$  : coordonnées curvilignes.  
 $U_e$  : vitesse du fluide libre.  
 $\mu$  : viscosité dynamique.  
 $\nu$  : viscosité cinématique.  
 $\tau$  : force de frottement par unité de surface.  
 $\delta$  : épaisseur de la couche limite.  
 $\delta^*$  : épaisseur de déplacement.  
 $\theta$  : épaisseur de quantité de mouvement.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# *Introduction Générale*

### **Introduction générale:**

Dans la conception assistée par ordinateur (CAO), celui-ci joue un rôle d'un outil, certes très efficace, utilisé en tant que simulateur numérique des phénomènes physiques, et permettant l'analyse d'une situation correspondant à une certaine configuration d'un prototype. Cet usage du calculateur où celui-ci n'intervient pas dans la conception même du prototype consiste à résoudre ce qu'on l'appelle un problème direct. A l'opposé lorsque le calculateur intervient dans le dimensionnement du prototype, en réponse à telle ou telle spécification, le problème traité est alors inverse.

Dans le cas des turbomachines, la simulation numérique vise à l'amélioration de leurs caractéristiques aérodynamiques. Et ce en améliorant les performances des aubages, tout en cherchant une géométrie de la paroi qui conduit à une distribution de vitesse minimisant l'intensité des ondes de choc et les effets visqueux, qui conditionnent l'efficacité d'un étage de compresseur ou de turbine.

Une telle recherche peut être réalisée par plusieurs méthodes, entre autres: la méthode semi-inverse où l'on se donne une répartition de vitesses choisie de manière à minimiser l'importance des couches limites; la géométrie résulte du calcul, et la méthode pseudo-stationnaire ou bien méthode directe où l'on se donne cette fois-ci un profil déterminé et on calcule les caractéristiques de l'écoulement tout autour.

Dans notre étude on propose de coupler dans un processus itératif la méthode semi-inverse avec la méthode directe, en tenant compte de l'épaisseur de la couche limite, pour le tracé de profil d'aubage en écoulement transsonique. Pour cela le mémoire a été divisé en **cinq chapitres:**

. Dans le **premier chapitre**, on va présenter la méthode semi-inverse.

. Le **deuxième chapitre** est consacré à l'utilisation de la méthode directe pour calculer les caractéristiques de l'écoulement.

. Dans le **troisième chapitre**, on va présenter un exposé sur le calcul de la couche limite.

. Le **quatrième chapitre** est consacré au couplage.

. Et enfin, le **cinquième chapitre** comporte les applications du couplage et du calcul de la couche limite.

*Méthode semi-inverse*

## I.1 Introduction:

Certains phénomènes de l'écoulement dans les turbomachines, réduisent les performances de leurs aubages. Et pour contourner ces problèmes, l'élaboration d'un tracé d'aubage est l'une des techniques les plus utilisées en vue de délimiter l'efficacité de ces phénomènes (particulièrement les décollements).

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à l'une des méthodes numériques qui traitent les écoulements transsoniques dont les équations sont de type mixte; c'est à dire, de type elliptique hyperbolique, qui caractérise bien la méthode semi-inverse.

## I.2 Position du problème :

L'écoulement est calculé dans un domaine limité par deux lignes de courant  $L_1$  et  $L_2$  et deux frontières arbitraires  $C_1$  et  $C_2$  connectant  $L_1$  avec  $L_2$  (Fig. I.1).

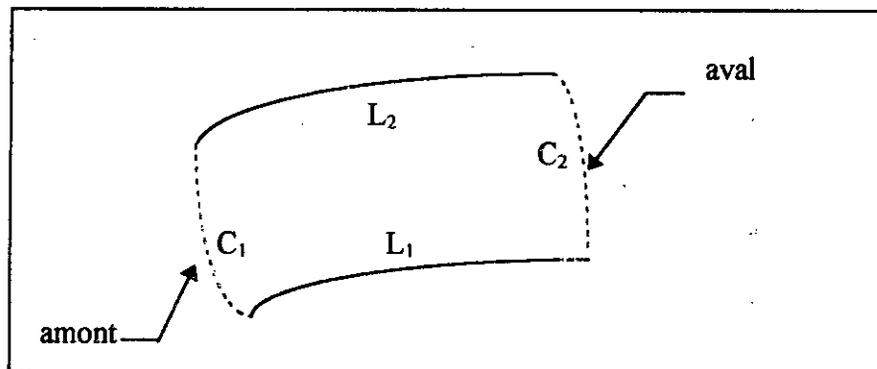


Fig. I.1

Le vecteur vitesse est défini en grandeur et en direction sur la ligne de courant initiale  $L_1$ , avec des conditions imposées sur la frontières amont  $C_1$  et éventuellement aval  $C_2$  si une solution subsonique est imposée. On détermine ainsi la forme d'un canal (et la répartition des vitesses). Pour l'application au calcul d'aubage,  $L_1$  représente l'extrados et  $L_2$  (défini seulement à la fin du calcul) correspondant à l'intrados de l'aube suivante.

La forme du profil d'aube est obtenue par une translation tangentielle d'un pas de grille (pitch).  $C_1$  et  $C_2$  sont généralement choisies pour coïncider avec les plans des bords d'attaque et de fuite respectivement.

**I.3 Mise en équations:**

**I.3.1 Système de coordonnées :**

Le plan étant rapporté au repère orthonormé (ox,oy), soit C une ligne de courant dans ce plan, M un point de C (Fig. I.2).

On définit un autre repère (m,y) lié aux déplacements des particules fluides, en se basant sur les vecteurs tangents aux lignes de courant en M et perpendiculaires à l'axe machine ox:

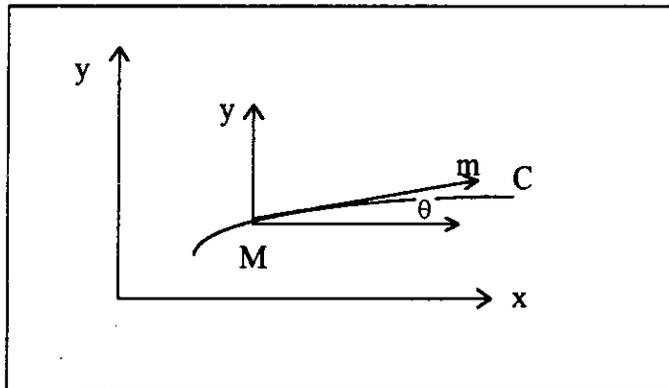


Fig. I.2

Il existe entre les dérivées partielles dans les deux repères, les relations:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial m} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (I.1a)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\operatorname{tg}\theta \\ \cos\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial m} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (I.1b)$$

$\theta$  : désignant l'angle de la tangente en M à C avec l'axe ox.

**I.3.2 Equations de mouvement :**

L'écoulement à travers une turbomachine obéit aux équations de *Navier-Stokes* instationnaires qui peuvent être représentées dans le repère relatif comme suit :

Continuité: 
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{I.1a})$$

Quantité de mouvement: 
$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + g\vec{r}ad\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V} \wedge \text{rot} \vec{V} + \Gamma_e + \Gamma_c + \frac{1}{\rho} g\vec{r}ad p + \frac{1}{\rho} \vec{F}_f = 0 \quad (\text{I.1b})$$

Energie: 
$$T g\vec{r}ad s = g\vec{r}ad h - \frac{1}{\rho} g\vec{r}ad p \quad (\text{I.1c})$$

avec :  $\Gamma_e = -\omega^2 r$  est l'accélération d'entraînement.

$\vec{\Gamma}_c = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{V}$  est l'accélération de Coriolis.

$\vec{F}_f$  représente les forces dissipatives.

$V, p, T, s$  représentent respectivement la vitesse, la pression, la température et l'entropie.

On se limitera ici au cas d'écoulement plan avec contraction de veine. On supposera ainsi qu'il s'effectue dans le plan de symétrie d'un canal délimité par deux parois distantes de  $h(x)$  (fig.I.3)

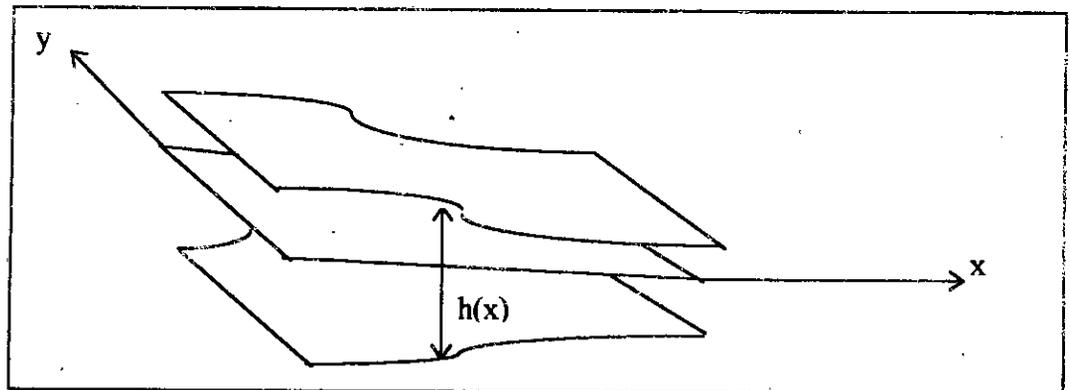


Fig. I.3

Les équations de l'écoulement supposé isoénergétique, permanent et non visqueux s'écrivent :

$$\text{div} \rho \vec{v} + \rho u \frac{d\omega}{dx} = 0 \quad (\text{I.2 a})$$

$$\vec{v} \wedge \text{rot} \vec{v} + T g\vec{r}ad s = 0 \quad (\text{I.2 b})$$

$$g\vec{r}ad s \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{I.2 c})$$

$$H = \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{(\gamma - 1)} = \frac{a_0^2}{(\gamma - 1)} = Cte \quad (I.2 d)$$

$$a^2 = \gamma p / \rho \quad (I.2 e)$$

$$s/r = \ln(p / p^{\gamma}) / (\gamma - 1) \quad (I.2 f)$$

Pour l'équation (I.2a), le terme additionnel  $\rho v \cdot d\omega/dx$  exprime la contraction de veine et son coefficient, tel que: [2]

$$\omega(x) = \ln\left(\frac{h(x)}{h(0)}\right)$$

Définissant les nouvelles variables:

$$\tilde{V} = \ln(V / a_0) \quad \text{et} \quad \tilde{S} = s/r$$

Les équations du système (I.2) peuvent s'écrire dans le repère (m,y) défini ci-dessus sous la forme:

$$\frac{\partial}{\partial y} \{u\} = [A] \frac{\partial}{\partial m} \{u\} + \{b\} \quad (I.3)$$

Tels que :

{u} est le vecteur:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \theta \\ \tilde{V} \end{Bmatrix}$$

[A] étant la matrice :

$$\begin{bmatrix} \sin\theta & (M^2 - 1)\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$$

et {b} le vecteur :

$$\begin{bmatrix} \cos\theta \frac{\partial \tilde{s}}{\partial m} - \cos\theta \frac{d\omega}{dx} \\ \frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} \end{bmatrix}$$

En plus l'équation d'énergie( I.2c) donne:

$$\frac{\partial s}{\partial m} = 0 \quad (I.3 c)$$

### I.3.3 Transformation du système (I.3)

En explicitant le système (I.3) tel que:

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial m} + (M^2 - 1) \cos \theta \frac{\partial \tilde{V}}{\partial m} + \cos \theta \frac{\partial \tilde{S}}{\partial m} - \cos \theta \frac{d\omega}{dx} \quad (I.3 a)$$

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} + \sin \theta \frac{\partial \tilde{V}}{\partial m} - \frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} \quad (I.3 b)$$

Il peut être placé sous une forme plus proche de la forme conservative en tenant compte de (I.3c) et en définissant une fonction G:

$$G = \frac{Me^{-\tilde{s}}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}} \quad (I.4 a)$$

tel que :

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial m} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial m} (\ln(G.h(x))) \quad (I.4 b)$$

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial m} + \sin \theta \frac{\partial \tilde{V}}{\partial m} + \frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} \quad (I.4 c)$$

et en notant que:

$$\frac{\partial \theta}{\partial m} = C$$

C désignant la courbure locale de la ligne de courant.

L'équation de continuité (I.4b) traduit que dans le plan (x , y) la divergence d'un vecteur h(x).G colinéaire à la vitesse est nulle. Appliquons à travers un tube de courant du plan (x,y), de hauteur Δy(x), on peut écrire en chaque section de ce tube:

$$\int_0^{\Delta y(x)} [h.G.\cos\theta](x) dy = \Delta Q \quad (I.4 d)$$

ΔQ représente le débit (indépendant de x) du tube de courant.

### I.4 Discrétisation en différences finies:

A l'intérieur d'un tube de courant de largeur Δy(x), les relations (I.4.c) et (I.4.d) peuvent s'écrire de la forme:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^{\Delta y} F_1(y) dy \right] = 0 \tag{I.5.1}$$

$$\tilde{V}(y + \Delta y) = \tilde{V}(y) + \int_0^{\Delta y} F_2(y) dy \tag{I.5.2}$$

avec:

$$\begin{cases} F_1(y) = h(x).G.\cos\theta \\ F_2(y) = F_{21}(y) \frac{\partial \tilde{V}}{\partial m} + F_{22}(y) \\ F_{21}(y) = \sin\theta \\ F_{22}(y) = \cos\theta.c + \frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} \end{cases}$$

Partant d'une répartition entièrement déterminée du vecteur vitesse le long d'une ligne de courant, on détermine aussi le profil d'une ligne de courant voisine par (I.5.1) et la répartition de vitesse correspondante par (I.5.2).

En procédant ainsi de proche en proche, on détermine la forme du canal délimité par la ligne de courant finale, ainsi que la répartition de vitesse sur ces parois.

Les intersections de ces différentes lignes de courant avec des parallèles à  $oy$  constituant un maillage en  $i$  suivant  $ox$  et en  $j$  suivant  $oy$  (Fig I.4).

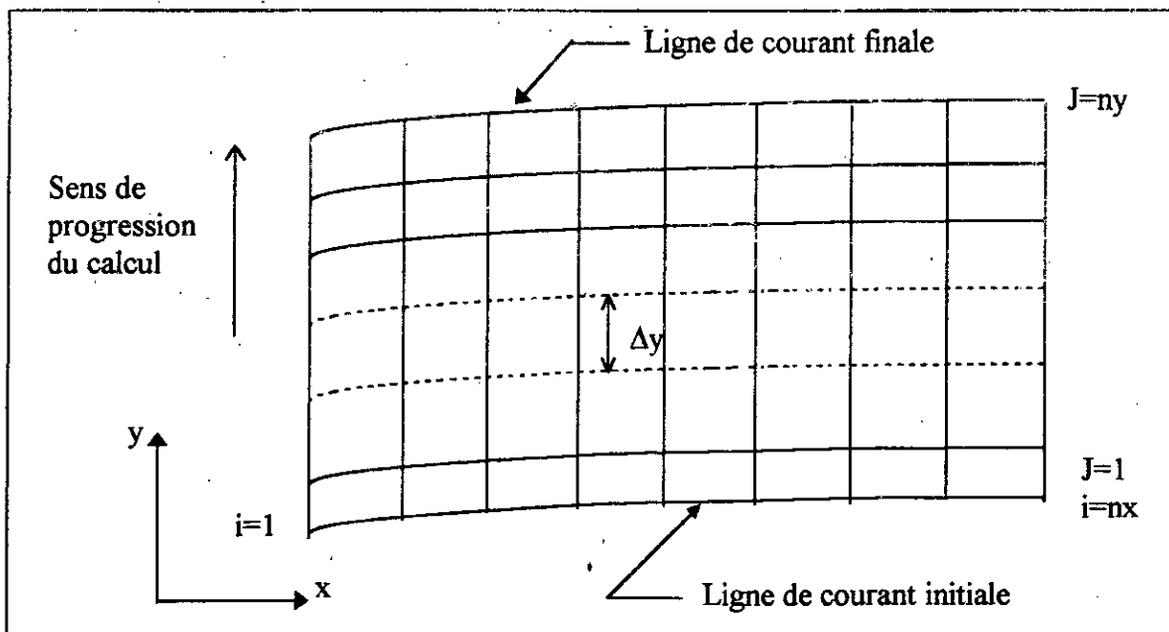


Fig. I.4

Le calcul consiste ainsi à déterminer à chaque abscisse  $x$  du maillage, l'épaisseur du tube de courant  $\Delta y$  et la répartition de la vitesse  $\tilde{v}(y+\Delta y)$ .

**I.4.1 Schéma de discrétisation:**

La grille de discrétisation est représentée dans la figure (I.5). Cette discrétisation comporte deux étapes:

**I.4.1.a- Etape explicite:**

En remplaçant dans (I.5.1) et (I.5.2) les dérivées par des différences finies, centrées autour du point  $(i,j)$ , on obtient:

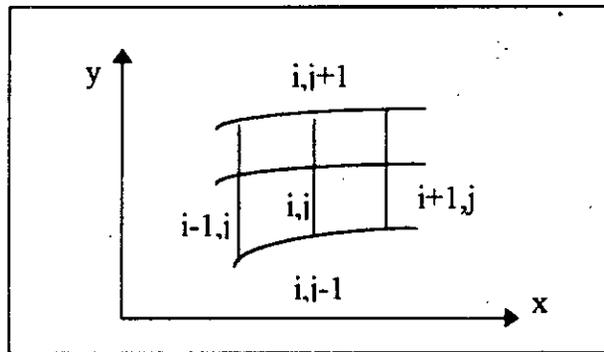


Fig. I.5

$$y_{ij+1}^* = y_{ij-1} + \frac{F_{1,ij}}{F_{1,ij}} (y_{1j+1} - y_{1j-1}) \quad (I.5.3 a)$$

$$\tilde{V}_{ij+1}^* = \tilde{V}_{ij-1} + F_{2,ij} (y_{ij+1}^* - y_{ij-1}) \quad (I.5.3 b)$$

Le symbole \* caractérisant les grandeurs obtenues à l'issue de cette première étape, la fonction  $F_2$  étant discrétisée au point  $(i,j)$  par l'expression suivante :

$$F_{2,ij} = F_{21,ij} \frac{\tilde{V}_{i+1j} - \tilde{V}_{i-1j}}{\Delta m_{i-1j} + \Delta m_{ij}} + F_{22,ij} \quad (I.5.4)$$

Ces opérations sont effectuées en chaque point le long de la ligne de courant.

Si l'écoulement est localement supersonique, on passe alors à la ligne de courant suivante. Sinon une étape supplémentaire doit être effectuée (lissage) pour assurer la stabilité du schéma.

**I.4.1.b- Etape implicite:**

Cette étape consiste à corriger les résultats obtenues lors du calcul explicite en utilisant des relations de la forme:

$$y_{ij+1} = y_{ij+1}^* - a_{1,ij} \left. \frac{\partial^2 y}{\partial m^2} \right|_{ij+1} \quad (I.5.5 a)$$

$$\tilde{V}_{ij+1} = \tilde{V}_{ij+1}^* + a_{2,ij} \left. \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial m^2} \right|_{ij+1} \quad (I.5.5 b)$$

$a_{1,ij}$  et  $a_{2,ij}$  étant des expression de la forme:

$$a_{\alpha,ij} = k_{\alpha} (y_{ij+1}^* - y_{ij})^2 \cos^2 \theta_{ij} F(M_{ij}) \quad \alpha = 1,2$$

où  $k_{\alpha}$ : étant une constante.

$$F(M_{ij}) = M_{ij}^2 - 1$$

$a_{\alpha}$ : est un terme de viscosité artificielle, qui est utilisé, pour renforcer le caractère parabolique des équations.

Par discrétisation des dérivées secondes au point  $(i, j+1)$ , c'est à dire:

$$\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2} \right|_{ij+1} = \frac{\psi_{i+1j+1} - 2\psi_{ij+1} + \psi_{i-1j+1}}{\Delta m_{ij}^2}$$

En supposant  $\Delta m_{i-1j} = \Delta m_{ij}$ .

Les relations (I.5.5 a) et (I.5.5 b) se transforment en :

$$y_{ij+1}^* = \eta_1 y_{i+1j+1} + (1 - 2\eta_1) y_{ij+1} + \eta_1 y_{i-1j+1}$$

$$\tilde{V}_{ij+1}^* = \eta_2 \tilde{V}_{i+1j+1} + (1 - 2\eta_2) \tilde{V}_{ij+1} + \eta_2 \tilde{V}_{i-1j+1}$$

$$\text{avec:} \quad \eta_{\alpha} = \frac{a_{\alpha,ij}}{\Delta m_{ij}^2}$$

Ecrites en chaque point de la ligne de courant, les relations précédentes fournissent deux systèmes linéaires tridiagonaux de la forme:

$$[A]\{X\}_{j+1} = \{X^*\}_{j+1}$$

[A] étant la matrice de la forme:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ \eta_\alpha(2) & 1 - 2\eta_\alpha(2) & \eta_\alpha(2) & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \eta_\alpha(i) & 1 - 2\eta_\alpha(i) & \eta_\alpha(i) & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & \eta_\alpha(n-1) & 1 - 2\eta_\alpha(n-1) & \eta_\alpha(n-1) \\ & & & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On obtient finalement un système de la forme:

$$\{X\}_{j+1} = [A]^{-1} \{X\}_{j+1}^*$$

Cette double opération de calcul explicite - implicite permet de calculer les caractéristiques de l'écoulement en chaque point de la ligne de courant j+1 en fonction de ces mêmes caractéristiques en tous points le long de la ligne de courant précédente j (Fig. I.6)

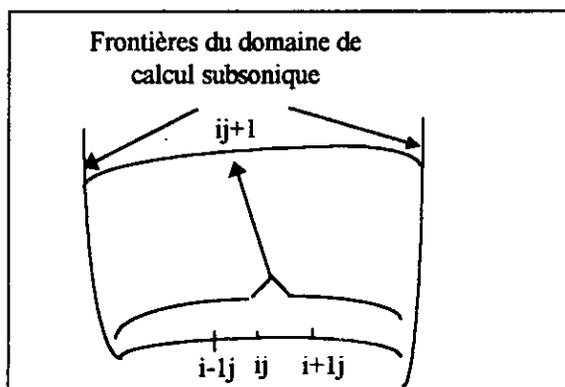


Fig I.6

Les grandeurs calculées au point  $(i,j+1)$  sont ainsi influencées par tous les points de la ligne de courant j et non pas seulement par deux ou trois points comme dans le calcul explicite.

On peut montrer théoriquement qu'une telle opération de lissage revient à approximer le problème (hyperbolique - elliptique) réel par un problème (hyperbolique - parabolique) en ajoutant aux équations du calcul explicite un terme de viscosité artificielle  $a_\alpha \partial^2 \psi / \partial m^2$ .

On introduit ainsi volontairement une erreur dans les schémas de discrétisation pour modifier la nature du problème.

Ces considérations sommaires permettent cependant d'expliquer que l'on puisse résoudre un problème à valeurs initiales, c'est à dire à l'intérieur d'un domaine ouvert.

Le type de conditions aux limites (ou initiales) nécessaires à la mise en œuvre de la méthode en découle.

#### I.4.2 Conditions initiales et aux limites:

La formulation des conditions initiales et aux limites permet d'assurer l'existence, l'unicité et la continuité par rapport aux données initiales et aux limites de la solution des équations (I.4).

Considérons un domaine de calcul (Fig. I.7) limité par:

- une ligne de courant (1)
- une ligne de courant (2)
- Des frontières amont (3) et aval (4) parallèles à  $oy$ .

Pour mettre en œuvre la méthode, on doit imposer :

##### I.4.2.a- Conditions initiales :

On imposera le long de (1), le vecteur vitesse en grandeur et en direction dans tous les cas.

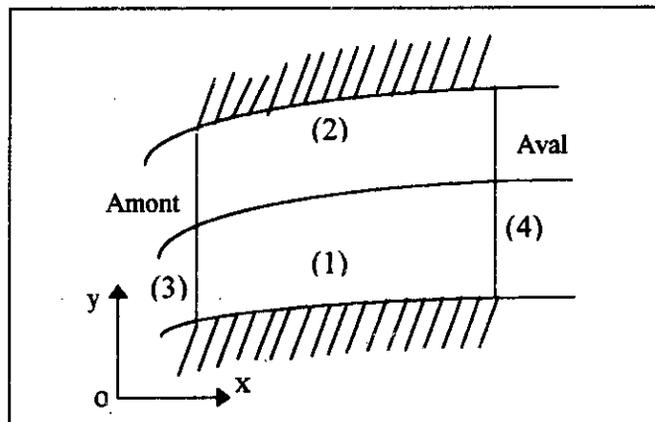


Fig. I.7

##### I.4.2.b- Conditions aux limites :

On n'imposera aucune condition le long de (2). On donnera en amont (3), la grandeur de la vitesse et en aval (4), une des composantes de la vitesse (grandeur ou direction) dans le cas subsonique. Pour un écoulement supersonique en aval, on n'imposera aucune condition.

### I.4.3 Etude de la stabilité du schéma explicite:

L'étude de la stabilité au sens de *Von Neumann* (voir annexe A) ne peut porter que sur la forme linéarisée et homogène du système d'équations (I.3) c'est à dire:

$$\frac{\partial}{\partial y}\{U\} = [A] \frac{\partial}{\partial m}\{U\}$$

où la matrice [A] est supposée localement constante.

En appliquant le schéma explicite, le système (I.6) s'écrit:

$$\{U\}_{j+1} = \{U\}_{j-1} + \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{\Delta m_{i-1j} + \Delta m_{ij}} [A] \left[ \{U\}_{i+1j} - \{U\}_{i-1j} \right] \quad (I.6)$$

En supposant que le pas est constant le long des lignes de courant ( $\Delta m_{i-1j} = \Delta m_{ij}$ ).

Le système(I.6) peut s'écrire:

$$\begin{aligned} \{U\}_{kj-1} &= \{V\}_j e^{ikm} \\ \{U\}_{kj} &= \{W\}_j e^{ikm} \\ \{W\}_{j+1} &= \{V\}_j + \frac{\Delta y}{\Delta m} 2i A \sin(k\Delta m) \{W\}_j \quad (I.6.1) \end{aligned}$$

en ajoutant la relation triviale :

$$\{V\}_{j+1} = \{W\}_j \quad (I.6.2)$$

et en posant  $a = \frac{\Delta y}{\Delta m} \sin(k\Delta m)$  d'ou

$$\begin{bmatrix} \{V\}_{j+1} \\ \{W\}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} & \vdots & \{1\} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \{1\} & \vdots & 2ia[A] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{V\}_j \\ \{W\}_j \end{bmatrix}$$

c'est à dire:

$$\begin{bmatrix} \{V\}_{j+1} \\ \{W\}_{j+1} \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \{V\}_j \\ \{W\}_j \end{bmatrix} \quad (I.7)$$

[A] est la matrice d'amplification associée au schéma définie par:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2ia \sin\theta & 2ia(M^2 - 1)\cos\theta \\ 0 & 1 & 2ia \cos\theta & 2ia \sin\theta \end{bmatrix}$$

Appliquons la condition de *Von Neumann* pour déterminer le critère de stabilité du système (I.7): [A] doit être définie positive c'est à dire:

$$\rho\{[A]\} < 1 \quad \text{et} \quad |\lambda_{max}| < 1$$

où  $\rho([A])$  désigne le rayon spectral de la matrice [A] et  $\lambda_{max}$  la valeur propre de [A] donnée en fonction du Mach et du pas.

On en conclu que la stabilité du schéma (I.5) ne peut être assurée que pour  $M > 1$ , le pas de calcul doit, de plus, vérifier la condition suivante:

$$\frac{\Delta y}{\Delta m} < \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (I.8)$$

Relation qui traduit que le domaine de dépendance physique (DP) d'un point doit être compris à l'intérieur de son domaine de dépendance numérique (DN) (Fig I.8) qui est appelée aussi " condition de CFL" [ 6].

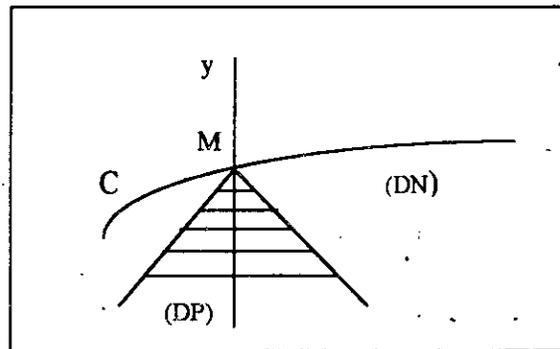


Fig. I.8

#### I.4.4 Adaptation du schéma aux conditions aux limites

##### Influence d'un terme de viscosité artificielle:

Les expériences numériques effectuées sur le schéma implicite[4], ont montré que pour assurer la stabilité du calcul , il était nécessaire d'introduire un terme dissipatif ou de viscosité artificielle  $a_{\alpha ij} \partial^2 \{U\} / \partial m^2$  compte tenu duquel le schéma s'écrit comme suit:

$$\text{avec: } U_{ij+1} = U_{ij+1}^* - a_{\alpha ij} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial m^2} \right|_{ij+1} + O(\Delta m^2) \quad (I.9)$$

$$a_{\alpha ij} = k_{\alpha} (y_{ij+1}^* - y_{ij})^2 \cos^2 \theta (M^2 - 1)$$

L'effet du coefficient de viscosité artificielle  $k_{\alpha}$  était ainsi de renforcer le caractère parabolique de l'équation et de stabiliser le processus de calcul.

**I.5 Conclusion:**

Les bases d'une méthode de calcul d'aubage transsonique par différences finies ont été exposées dans ce chapitre .

Toutefois, afin de déterminer l'écoulement à travers un canal inter-aubes, en partant de la géométrie et de la répartition des vitesses sur l'une des parois, cette méthode permet ainsi de connaître à priori l'état de la couche limite sur cette paroi ce qui constitue un avantage significatif.

Le seul inconvénient de la méthode est qu'elle ne tient pas en compte de la condition de périodicité. Pour palier ce problème, il faut donc l'associer avec une méthode directe dans un processus itératif jusqu'à la convergence.

La présentation de cette méthode directe sera l'objet du chapitre suivant.

*Méthode directe*

## II-1 Introduction :

Il est en effet rendu difficile de tenir compte des conditions de périodicité de l'écoulement en amont et en aval des aubages. Pour cette raison, il est indispensable d'utiliser le calcul semi-inverse et de l'associer avec le calcul direct dans un processus itératif jusqu'à atteindre une forme satisfaisante du profil.

Pour cela il existe plusieurs approches, les seules méthodes largement utilisées sont les méthodes instationnaires. [9]

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la méthode de calcul pseudo-instationnaire pour les écoulements transsoniques.

## II.2 Principe de la méthode :

Elle consiste à utiliser les équations d'Euler sous forme instationnaire, c'est à dire de type hyperbolique dans tout le champs de l'écoulement quelle que soit la valeur du nombre de Mach local, et à obtenir l'écoulement stationnaire comme solution limite de ces équations pour les valeurs importantes du temps.

Le schéma aux différences finies retenu est de type prédicteur-correcteur.

## II.3 Formulation du problème :

### II.3.1 Equation de mouvement:

Nous garderons les mêmes hypothèses avancées au chapitre précédent. L'écoulement dans une même grille de turbomachine (fig. II.1) est décrit par les équations d'Euler qui s'écrivent sous la forme suivante:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = H \quad (\text{II.1. a})$$

Où U, F, G et H sont des vecteurs ayant pour composantes:

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \end{pmatrix} \quad H = -U \frac{u}{h} \frac{dh}{dx} \quad (\text{II.1 b})$$

$\rho$ : étant la densité du fluide; u et v les composantes de sa vitesse suivant x et y, p sa pression statique et  $H_0$  son enthalpie totale liée aux précédentes quantités par la relation:

$$H_0 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \quad (\text{II.1. c})$$

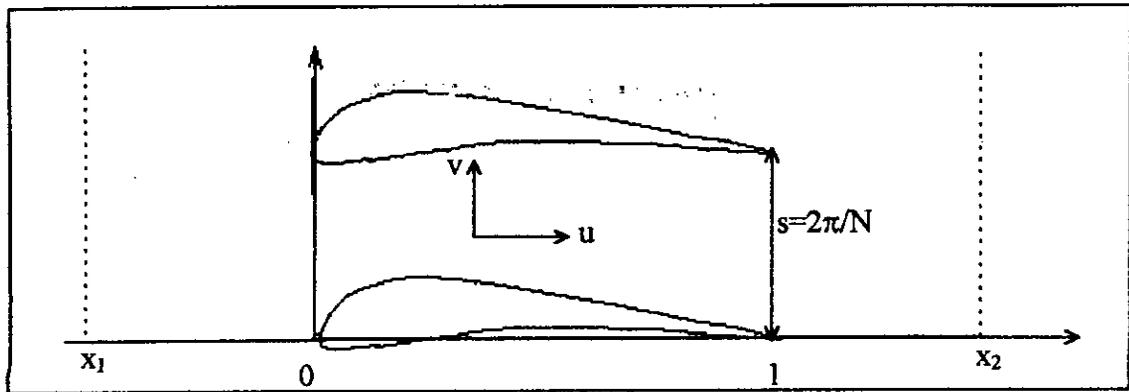


Fig. II.1

Ces quatre équations où n'interviennent que les variables  $t$ ,  $x$  et  $y$  pour les quatre inconnues  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$  et  $p$  régissent l'écoulement bidimensionnel de grille sur chaque ligne de courant.

Nous soulignons que l'enthalpie totale a été prise uniforme et indépendante du temps, dans un souci de diminuer le temps de calcul, considéré comme l'inconvénient majeur des méthodes instationnaires. Cela est possible, car d'une part, le caractère instationnaire est introduit comme un artifice de calcul dans le but de rendre les équations (II.1-a) de type hyperbolique dans tout le champs de l'écoulement et, en conséquence, de ne pas avoir à l'utiliser qu'un seul schéma de discrétisation; d'autre part, cette simplification est en effet consistante avec l'écoulement stationnaire recherché dans le cas d'un fluide parfait dont l'enthalpie totale est uniforme à l'amont.

### II.3.2 Conditions initiales et conditions aux limites:

La formulation des conditions initiales et les conditions aux limites permet d'assurer l'existence, l'unicité et la continuité par rapport aux données initiales et aux limites de la solution des équations (II.1), et constitue un problème mathématique d'une grande difficulté qui n'a pas été résolu dans toute sa généralité. Certains résultats peuvent toutefois être énoncés en considérant le caractère hyperbolique du système d'équations (II.1) qui se traduit par l'existence d'un domaine de dépendance pour chaque point du calcul.

#### II.3.2.1 Conditions initiales:

A l'instant  $t=0$ , les composantes du vecteur  $U$  sont données arbitrairement en prenant soin, toutefois, de leurs attribuer des valeurs vérifiant les conditions aux limites.

II.3.2.2 Conditions aux limites:

a/ Condition de glissement :

Elle est appliquée sur l'extrados et l'intrados des aubes. Si  $y=Y(x)$  représente l'équation de l'intersection d'une aube avec la ligne de courant  $\psi=Cte$ . De l'écoulement, cette condition s'écrit:

$$v = u \cdot \frac{dY(x)}{dx} \Big|_{y=Y(x)} \quad (II.2)$$

b/ condition de périodicité :

Elle est imposée à l'amont et à l'aval du canal inter-aubes. La solution stationnaire recherchée étant périodique par rapport à la variable  $y$ , de période  $s=2\pi /N$  où  $s$  est le pitch et  $N$  le nombre d'aubes de la grille considérée, cette condition sera imposée en régime transitoire:

$$U(x, y, t) = U(x, y + s, t) \quad (II.3)$$

c/ Condition de Kutta- Joukowski :

Dans le cas où l'écoulement sur l'extrados et l'écoulement sur l'intrados d'une même aube ont des pressions totales identiques on imposera à l'écoulement confluent au bord de fuite, d'avoir la direction de la bissectrice du dièdre formé par le bord de fuite de l'aube (Fig. II.2.a); dans le cas contraire, par exemple, dans le cas où un choc d'intensité variable se développe dans le canal inter-aubes, l'écoulement confluent sera tangent au côté du dièdre où la pression totale est la plus élevée (Fig. II.2 b) et (Fig. II.2 c)

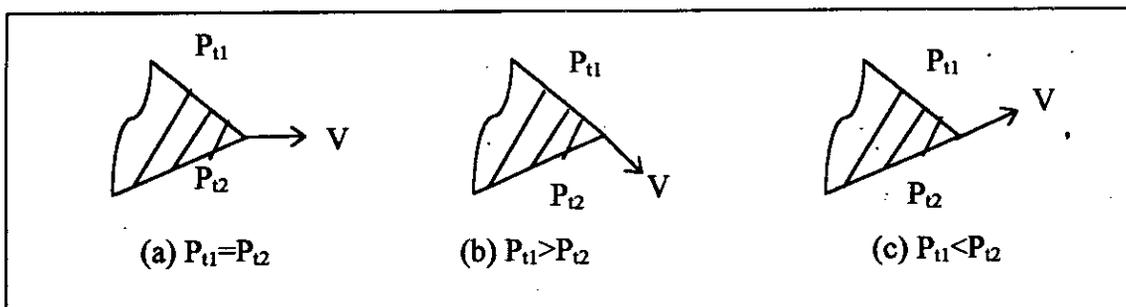


Fig. II.2

d/ Conditions à l'infini amont et aval:

Le domaine de calcul qui théoriquement, s'étend de l'infini amont à l'infini aval est pratiquement délimité par deux plans perpendiculaires à l'axe de la grille  $x=x_1$  et  $x=x_2$

(Fig. II.1). Nous avons retenu les résultats suivants: [1]

i/ Sur la frontière  $x=x_1$ , on se donne la pression totale  $P_{01}$ , La température totale  $T_{01}$  (implicitement imposée puisque  $H_0=Cte.$ ) et une autre caractéristique de l'écoulement qui peut être soit la direction de la vitesse ( $\alpha_1$ ) soit le nombre de Mach ( $M_1$ ); le débit résulte du calcul.

ii/ Sur la frontière aval  $x=x_2$ , la pression statique  $p_2$  est imposée.

II.4 Le modèle numérique :

La procédure générale pour résoudre le problème du calcul de l'écoulement transsonique est donnée de la façon suivante:

II.4.1 Etape I: Changement de coordonnées:

La formulation des schémas aux différences finies se trouve notablement simplifiée notamment en ce qui concerne les conditions aux limites lorsqu'on dispose d'un maillage rectangulaire et des frontières parallèles aux axes de coordonnées, nous avons été amenés à effectuer une transformation de coordonnées du plan physique ( $x, y$ ) (Fig. II.3 a), en un plan de calcul

( $X, Y$ ) (Fig. II.3 b) à l'aide d'une transformation définie par:

$$\begin{cases} x = x(X, Y) \\ y = y(X, Y) \end{cases} \quad (II.4.1)$$

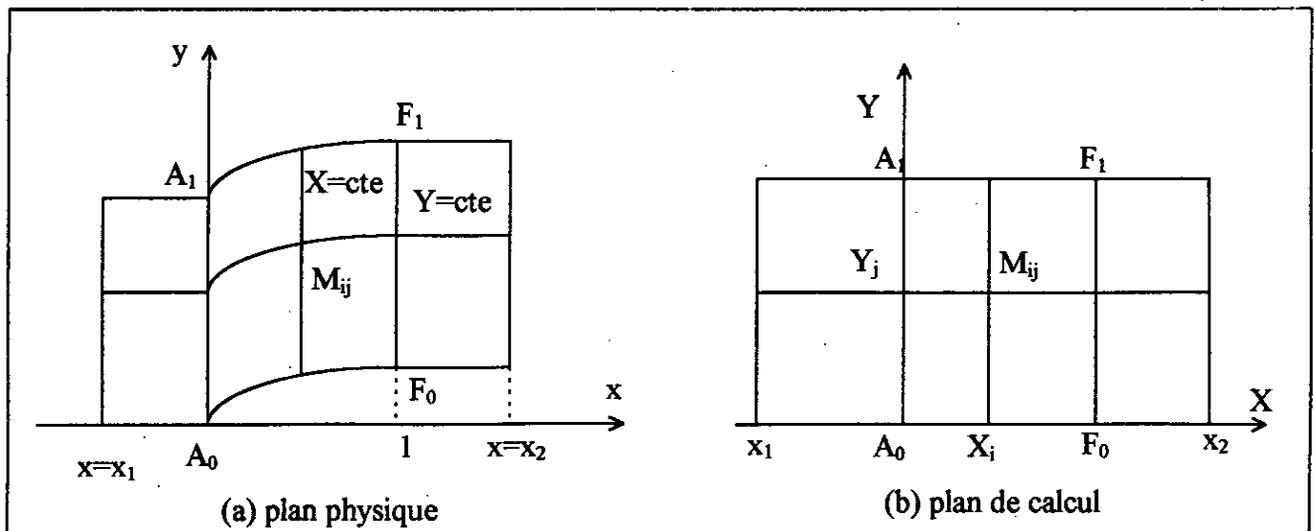


Fig. II.3

Les relations entre les dérivées partielles des deux systèmes de coordonnées sont :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial X} \\ \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (II.4.2)$$

la transformation inverse est :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial Y} & -\frac{\partial y}{\partial X} \\ -\frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \end{bmatrix} \quad (II.4.3)$$

avec J le Jacobien de la transformation II.4.1 :

$$J = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial y}{\partial Y} - \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial y}{\partial X} \quad (II.4.4)$$

**II.4.2 Etape II : Ecriture des équations dans le plan de calcul**

D'après la relation (II.4.3), on peut exprimer les dérivées partielles de (II.1-a) dans le plan de calcul (X, Y):

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial y}{\partial Y} \frac{\partial F}{\partial X} - \frac{\partial y}{\partial X} \frac{\partial F}{\partial Y} \right) \\ \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial G}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial G}{\partial Y} \right) \end{cases}$$

L'équation (II.1 a) devient:

$$J \frac{\partial U}{\partial t} + \left( \frac{\partial y}{\partial Y} \frac{\partial F}{\partial X} - \frac{\partial y}{\partial X} \frac{\partial F}{\partial Y} \right) + \left( \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial G}{\partial Y} - \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial G}{\partial X} \right) = J.H(U) \quad (II.5)$$

avec  $H(U) = -U \frac{u}{h} \frac{dh}{dx}$

**II.4.3 Etape III: discrétisation des équations (II.5) :**

On définit dans le domaine de calcul du plan (X, Y) un maillage carré dont les noeuds  $M_{ij}$  ont pour coordonnées  $X_i, Y_j$ .

L'approximation de  $U(x, y, t)$  à l'instant  $t_n = n. \Delta t$  et au point de discrétisation  $M_{ij}$  sera notée:  $U_{ij}^n$ .

### II.4.3.1 Discrétisation au point $M_{ij}$ intérieur au domaine de calcul:

Le schéma utilisé comporte les trois étapes suivantes:

#### a/ Calcul du prédicteur $U_{ij}^{*n+1}$ :

Connaissant  $U_{ij}^n$ , on calcule une première approximation de  $U_{ij}^{*n+1}$  en utilisant les différences avancées pour approcher les dérivées d'espace:

$$U_{ij}^{*n+1} = U_{ij}^n + \Delta t \cdot H_{ij}^n + A_{ij}^n \left[ \frac{\partial y}{\partial Y} (F_{i+1j}^n - F_{ij}^n) - \frac{\partial y}{\partial X} (F_{ij+1}^n - F_{ij}^n) \right. \\ \left. + \frac{\partial x}{\partial X} (G_{ij+1}^n - G_{ij}^n) - \frac{\partial x}{\partial Y} (G_{i+1j}^n - G_{ij}^n) \right] \quad (II.6.1)$$

où les coefficients  $A_{ij}^n$  sont définis par  $A_{ij}^n = -\frac{\Delta t}{\Delta} \frac{I}{J_{ij}}$

#### b/ Calcul du correcteur $\hat{U}_{ij}^{*n+1}$

La valeur  $U_{ij}^{*n+1}$  est ensuite corrigée en utilisant, cette fois-ci, des différences retardées pour approcher les dérivées d'espace:

$$U_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ U_{ij}^{*n+1} + U_{ij}^n + \Delta t \cdot H_{ij}^{*n+1} + A_{ij}^n \left[ \frac{\partial y}{\partial Y} (F_{ij}^{*n+1} - F_{i-1j}^{*n+1}) - \frac{\partial y}{\partial X} (F_{ij}^{*n+1} - F_{ij-1}^{*n+1}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial x}{\partial X} (G_{ij}^{*n+1} - G_{ij-1}^{*n+1}) - \frac{\partial x}{\partial Y} (G_{ij}^{*n+1} - G_{i-1j}^{*n+1}) \right] \right] \quad (II.6.2)$$

Le schéma ainsi limité à ces deux étapes est précis au second ordre et conditionnellement stable, c'est à dire que le pas d'espace ( $\Delta X = \Delta Y = \Delta$ ) étant fixé, il existe une valeur maximum du pas de temps ( $\Delta t$ ) au delà de laquelle les calculs divergent rapidement (voir annexe A), La détermination de cette condition de stabilité est abordée au paragraphe (II.4.4). L'expérience montre toutefois que cette condition est bien souvent insuffisante pour assurer le bon déroulement des calculs, les oscillations apparaissent notamment dans les régions à fort gradients de pression. Il est alors nécessaire d'amortir ces oscillations par exemple par un procédé de lissage effectué à chaque itération.

#### c/ Calcul d'une valeur lissée du correcteur :

La valeur lissée du correcteur est obtenue par l'expression suivante :

$$U_{ij}^{n+1} \Big|_{lis} = U_{ij}^{n+1} + \varepsilon(U_{i+1j}^{n+1} + U_{i-1j}^{n+1} + U_{ij+1}^{n+1} + U_{ij-1}^{n+1} - 4U_{ij}^{n+1}) \quad (II.6.3)$$

où  $\varepsilon$  est un coefficient déterminé empiriquement de façon à obtenir un bon amortissement des oscillations. L'expression (II.6.3) peut être interprétée comme l'adjonction à l'équation (II.5) d'un terme dissipatif ( $\varepsilon \Delta^2/\Delta t \cdot \Delta U$ ), où  $\Delta U$  désigne le Laplacien de  $U$  dans le plan  $(X, Y)$  et un coefficient  $\nu = \varepsilon \cdot \Delta^2/\Delta t$  comme un coefficient de viscosité artificielle.

**II.4.3.2 Traitement des points situés sur les frontières du domaine de calcul:**

Les points du maillage situés sur la frontière du domaine de calcul présentant les particularités suivantes:

1. Le schéma numérique défini par les équations (II.6.1), (II.6.2) et (II.6.3) ne peut y être appliqué strictement car il n'est pas possible d'utiliser des différences finies décentrées vers l'extérieur du domaine de calcul.

2. Les valeurs de  $U$  en ces points doivent vérifier outre les équations (II.1), les conditions aux limites du paragraphe §(II.3.2); c'est à dire que l'on dispose pour le calcul de  $U$ , d'un nombre d'informations surabondant.

La technique utilisée pour remédier à ces difficultés est la suivante :

1. Aux points du maillage situés sur la frontière, les équations (II.6) sont modifiées par l'emploi de différences finies systématiquement décentrées vers l'intérieur du domaine de calcul; par exemple, la dérivée  $\partial F/\partial Y$  sur la frontière  $Y=0$  (II.4 b) est approximée de la manière suivante:

. A l'étape du prédicteur (formule inchangée) :

$$\frac{\partial F}{\partial Y} \Big|_{ij_0} = \frac{F_{ij_0+1} - F_{ij_0}}{\Delta Y}$$

. A l'étape du correcteur (formule modifiée) :

$$\frac{\partial F}{\partial Y} \Big|_{ij_0} = \frac{-F_{ij_0+2} + 3F_{ij_0+1} - 2F_{ij_0}}{\Delta Y}$$

Cette méthode utilisée par *Veillot* permet de conserver une précision du second ordre. [1]

Pour les frontières  $X=X_1$  et  $X=X_2$ , les formules ont été conservées bien que la précision n'est que du premier ordre.

2. les trois composantes du vecteur  $U$  sont ainsi calculées par application du schéma, avec les modifications indiquées, puis les valeurs obtenues sont lissées par une formule analogue à (II.6.3), mais unidimensionnelle (sur la frontière  $X=X_1$ , toutefois, les grandeurs sont supposées uniforme et égales aux moyennes des valeurs obtenues à l'étape du correcteur). Pour tenir compte des différents conditions aux limites, les valeurs lissées sont alors modifiées comme suit:

**a/ Condition de glissement :**

La vitesse calculée par application du schéma en un point du profil de l'aubage n'est pas, en général, tangente à celui-ci, le procédé utilisé pour tenir compte de la condition de glissement consiste alors à annuler la composante normale au profil et à ne retenir compte que la composante tangentielle pour le calcul du pas de temps suivant:

$$V_{ij}^{n+1} = U_{ij}^{n+1} \cdot \text{tg}\theta_p$$

où  $\theta_p$  désigne la pente du profil.

**b/ Condition de périodicité:**

Les composantes du vecteur  $U$  sont calculées par le schéma sur les parties des frontières  $Y=0$  et  $Y=1$  situées en amont et en aval de l'aubage (Fig. II.3 b); la condition de périodicité est appliquée comme valeur commune pour le calcul du pas de temps suivant i.e.:

$$U^{n+1}(X, Y = 0 \text{ ou } 1) = \frac{U^{n+1}(X, Y = 0) + U^{n+1}(X, Y = 1)}{2}$$

**c/ Condition amont:**

Dans le cas où  $M_1 \cos\alpha_1 < 1$ , les conditions imposées ont été précisées dans le paragraphe §(II.3.2-d). Le débit est déterminé de la façon suivante: la valeur du débit à travers la section amont  $X=X_1$  à la  $(n+1)^{\text{ème}}$  itération est prise égale à celle du débit à travers une section  $X=Cte$  intérieur à l'aubage calculé à la  $n^{\text{ème}}$  itération. Les composantes de  $U$  sont alors entièrement déterminées.

d/ Condition aval:

Toujours dans le cas d'un écoulement axial subsonique, les composantes  $U_2$  et  $U_3$  du vecteur  $U$  sont calculées par le schéma; connaissant la pression statique aval ( $p_2$ ) imposée à la frontière aval  $X_2$ , on déduit  $U_1$  de l'équation de l'énergie (II.1 c):

$$H_0 U_1^2 - \frac{\gamma p_2}{\gamma - 1} U_1 - \frac{1}{2} (U_2^2 + U_3^2) = 0$$

On notera que cette équation du second ordre admet toujours une et une seule racine positive.

II.4.4 Condition de stabilité:

La condition de stabilité à été déterminée par application de la règle de CFL (*Courant - Friedrichs-lewy*) déjà citée au cours du précédent chapitre.

Le domaine de dépendance numérique d'un point  $M_{ij}$  peut être assimilé à un hexagone en approchant au voisinage du point  $M_{ij}$  les courbes  $X = Cte$  et  $Y = Cte$  par des droites  $D_1, D_2, D_3 \dots etc.$  (Fig. II.5), en fait, pour simplifier, on remplace cet hexagone par le plus grand cercle inscrit de centre  $M_{ij}$ .

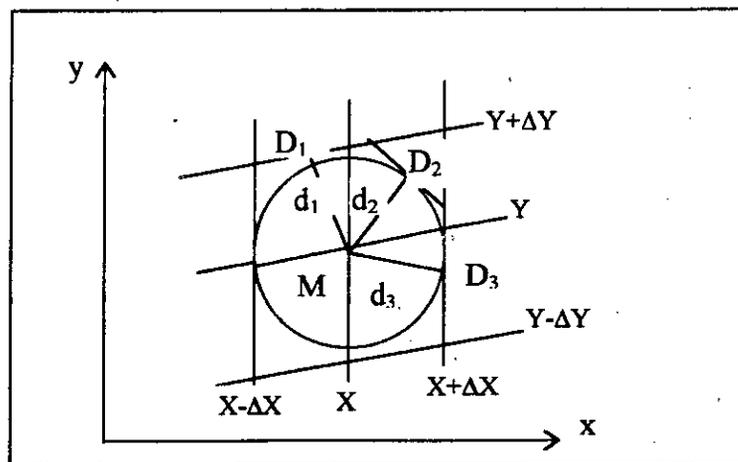


Fig. II.5

Le domaine de dépendance physique de  $M_{ij}$  est une ellipse [6]

Si  $d_1, d_2, d_3$  sont les distances des droites  $D_1, D_2, D_3$  au point  $M_{ij}$  et  $d_{\min}$  la plus petite de ces distances, la condition de CFL s'écrit pour le point  $M_{ij}$ :

$$\frac{\gamma + 1}{2\gamma} |V_{ij}| + \sqrt{\frac{a_{ij}^2}{\gamma} + \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} V_{ij}\right)^2} \cdot \Delta t \leq d_{\min ij}$$

Signalons que cette règle n'est qu'approximative, et la valeur du pas optimal n'est prise qu'après des essais numériques.

## II.5 Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons présenté les modèles mathématiques et numériques de la méthode directe ainsi que les conditions initiales et les conditions aux limites choisies.

Le calcul de la couche limite sera l'objet du chapitre suivant.

*Couche limite*

## Introduction :

La notion de la couche limite a été introduite en 1904 par le savant allemand *Prandtl*. La région dans laquelle sont localisées les variations notables de la vitesse est appelée "Couche limite hydrodynamique". L'épaisseur de cette couche est définie comme étant la distance comptée à partir de la paroi où la vitesse locale atteint 99 % de la vitesse  $U_\infty$  du fluide loin de la paroi.

En première approximation, la couche limite divise le champ d'écoulement autour d'un corps en deux parties: une mince couche enveloppant la surface du corps où le gradient de pression est grand et les forces de viscosité sont importantes; et, une région à l'extérieur de cette couche où la vitesse est presque égale à celle de l'écoulement libre et les effets de viscosité sont négligeables.

Ainsi *Prandtl* a clarifié l'essentiel de l'influence de viscosité dans les écoulements à grands nombres de *Reynolds* et a montré que les équations de *Navier-Stokes* pouvaient être simplifiées et conduire à des solutions approchées.

### III.1 Phénomène d'interaction onde de choc-couche limite:

Parmis les problèmes rencontrés en écoulement transsonique, il y a lieu de signaler le phénomène d'interaction entre l'onde de choc et la couche limite.

Cette interaction se produit couramment non seulement sur des aubages de turbomachines, mais encore dans les entrées d'air et les tuyères de moteurs au cours des vols supersoniques ainsi que sur les profils d'ailes d'avions à partir des vitesses subsoniques élevées.

Cette configuration résulte de la décélération d'un écoulement qui passe du régime supersonique au régime subsonique par l'intermédiaire d'une onde de choc. Suivant la valeur du nombre de Mach et les caractéristiques de la couche limite en amont, celle-ci peut décoller sous l'influence du gradient de pression, modifiant à son tour la forme effective des parois et donc l'écoulement extérieur.

Ainsi le choc adopte généralement au voisinage de la paroi en cas de décollement une configuration classique en  $\lambda$  (voir annexe C).

### III.2 Equations dynamiques de la couche limite:

Pour étudier l'écoulement dans la couche limite aux grands nombres de *Reynolds*, on utilise le système de coordonnées curvilignes représenté dans la figure III.1.

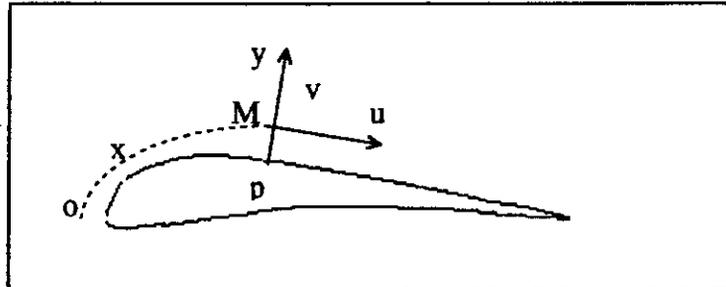


Fig. III.1

La position d'un point M dans la couche limite est définie par son ordonnée y comptée sur la normale à la paroi PM et par l'abscisse curviligne x comptée suivant le périmètre de la section droite de l'obstacle. La projection du vecteur vitesse U en M sur la tangente à la surface de l'obstacle (située dans le plan de la section droite) est désignée par u et la projection de U sur PM est désignée par v.

Les équations dynamiques de la couche limite ne seront autres que les équations de *Naviers-Stokes* concernant l'écoulement laminaire tenant compte de certaines hypothèses appelées : hypothèses de couche limite et l'équation de continuité.

Les hypothèses de couche limite sont les suivantes:

a- L'épaisseur de la couche limite étant très petite devant les dimensions de l'obstacle, c'est à dire que l'on néglige l'épaisseur de la couche limite devant le rayon de courbure de la surface de l'obstacle en P.

b- On admet que la composante v est petite devant u.

c- Les dérivées par rapport à x sont petites devant les dérivées correspondantes par rapport à y.

Ces hypothèses conduisent aux équations suivantes de l'écoulement laminaire permanent d'un fluide incompressible dans la couche limite: (voir Annexe B)

$$s \left\{ \begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned} \right. \quad (III.2.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (III.2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (III.2.3)$$

d'après l'équation (III.2.2), la pression  $p$  est constante le long d'une normale PM et par conséquent la pression dans la couche limite est égale à la pression dans le fluide libre à la frontière de la couche limite.

En assimilant le fluide libre à un fluide parfait, l'équation de *Bernoulli* écrite le long de la frontière de la couche donne:

$$P + \frac{1}{2} \rho U_e^2 = cte \quad (III.2.4)$$

où  $\rho$  et  $U_e$  sont respectivement la masse volumique et la vitesse du fluide libre.

En dérivant l'expression (III.2.4) par rapport à  $x$ , on obtient:

$$\frac{dP}{dx} = -\rho U_e \frac{dU_e}{dx} \quad (III.2.5)$$

Ce qui nous donne le gradient de pression dans la couche limite.

En reportant l'équation (III.2.5) dans l'équation (III.2.1), le système d'équations (s) devient:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \rho U_e \frac{dU_e}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned} \right. \quad (III.2.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (III.2.7)$$

La solution des équations (III.2.6) et (III.2.7) peut être calculée numériquement en remplaçant les dérivées partielles par des différences finies.

Elle peut être calculée aussi par des méthodes approchées qui utilisent l'équation de *Von Karman* obtenue en intégrant les deux membres de l'équation dynamique (III.26) entre 0 et H (distance à la paroi, supérieure à l'épaisseur de la couche limite). On obtient:

$$\int_{y=0}^H \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) dy = \frac{\mu}{\rho} \int_{y=0}^H \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \quad (III.2.8)$$

Le second membre de l'équation (III.2.8) s'exprime ainsi:

$$\frac{\mu}{\rho} \int_{y=0}^H \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \frac{1}{\rho} \left[ \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=H} - \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \right]$$

le terme  $\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=H}$  désigne la force de frottement par unité de surface en un point  $y=H$

du fluide qui est nulle dans ce cas.

Le terme  $\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \tau_0$  désigne la force de frottement par unité de surface à la paroi.

Ainsi, l'équation (III.28) devient :

$$\int_{y=0}^H \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_0}{\rho} \quad (III.2.9)$$

L'équation (III.29) peut être valide aussi bien pour un écoulement laminaire que pour un écoulement turbulent à condition que u et v désignent les moyennes des composantes respectives de vitesse. La composante normale v peut être remplacée d'après l'équation (III.27) par:

$$v = -\int_0^y \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy$$

Par conséquent, on a:

$$\int_{y=0}^H \left( u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_0}{\rho}$$

Pour intégrer cette équation, on doit poser les conditions aux limites sur les vitesses u et v, qui sont:

$$u=0 \quad ; \quad v=0 \quad \text{pour} \quad y=0$$

$$u=U_e \quad \text{pour} \quad y=H$$

Ainsi en intégrant par parties, on obtient pour le second terme :

$$\int_{y=0}^H \left( \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^H \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) dx = U_e \int_0^H \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^H u \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

D'où:

$$\int_0^H \left( 2u \frac{\partial u}{\partial x} - U_e \frac{\partial U}{\partial x} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_0}{\rho}$$

qui peut être simplifiée en :

$$\int_0^H \frac{\partial}{\partial x} [u(U_e - u)] dy + \frac{dU_e}{dx} \int_0^H (U_e - u) dy = \frac{\tau_0}{\rho} \quad (III.2.9a)$$

On peut maintenant faire tendre H vers l'infini et introduire pour plus de commodité les épaisseurs:

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left( 1 - \frac{u}{U_e} \right) dy \quad (III.2.10)$$

appelée épaisseur de déplacement et :

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_e} \left( 1 - \frac{u}{U_e} \right) dy \quad (III.2.11)$$

appelée épaisseur de quantité de mouvement.

Où sous une forme:

$$\delta^* U_e = \int_{y=0}^{\infty} (U_e - u) dy \quad (III.2.10a)$$

$$\theta U_e^2 = \int_{y=0}^{\infty} u(U_e - u) dy \quad (III.2.11a)$$

Maintenant en reportant les équations (III.2.10a) et (III.2.11a) dans l'équation (III.2.9a), on aboutit à :

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx} (U_e^2 \theta) + \delta^* U_e \frac{dU_e}{dx}$$

ou bien

$$\frac{\tau_0}{\rho} = U_e^2 \frac{d\theta}{dx} + (2\theta + \delta^*) U_e \frac{dU_e}{dx} \quad (III.2.12)$$

Cette équation est appelée: équation intégrale du moment pour une couche limite incompressible et bidimensionnelle. L'équation(III.2.12) s'applique aussi bien pour une couche limite laminaire que pour une couche limite turbulente.

### III.3 Méthode de Th. Von Karman et K. Pohlhausen:

Suivant K. Pohlhausen, pour intégrer l'équation (III.212), on doit se donner par exemple la forme de la fonction vitesse u:

$$\frac{u}{U_e} = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4$$

avec  $\eta=y/\delta(x)$  la distance adimensionnelle à partir de la paroi et  $\delta(x)$  l'épaisseur de la couche limite au point considéré.

Dans le but de déterminer les quatres constantes a, b, c et d nous allons poser les 4 conditions aux limites suivantes:

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \quad ; \quad u = 0 \quad , \quad v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U_e \frac{dU_e}{dx} \\ y = \delta \quad ; \quad u = U_e \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right| \quad (III.3.1)$$

Introduisons un facteur de forme A défini par:

$$A = \frac{\delta^2}{v} \frac{dU_e}{dx} \quad (III.3.2)$$

On obtient :

$$a=2+A/6 \quad ; \quad b=-A/2 \quad ; \quad c=-2+A/2 \quad ; \quad d=1-A/6$$

et pour le profil de vitesse:

$$\frac{u}{U_e} = F(\eta) + A.G(\eta) = (2\eta - 2\eta^3 + \eta^4) + \frac{1}{6}A(\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 + \eta^4) \quad (III.3.3)$$

$$\text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} F(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 = 1 - (1-\eta)^3(1+\eta) \\ G(\eta) = \frac{1}{6}(\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4) = \frac{1}{6}\eta(1-\eta)^3 \end{array} \right. \quad (III.3.4)$$

En combinant les équations (III.210a) et (III.2.11a) avec l'équation (III.2.2), on obtient:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \int_{\eta=0}^1 [1 - F(\eta) - A.G(\eta)] d\eta$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \int_{\eta=0}^1 [F(\eta) + A.G(\eta)][1 - F(\eta) - A.G(\eta)] d\eta$$

En remplaçant  $F(\eta)$  et  $G(\eta)$  d'après (III.2.4), on aura:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{3}{10} - \frac{A}{120} \quad , \quad \frac{\theta}{\delta} = \left( \frac{37}{315} - \frac{A}{945} - \frac{A^2}{9072} \right) \quad (III.3.4a)$$

La force de frottement par unité de surface sur la paroi est :

$$\tau_0 = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\mu U_e}{\delta} \left( 2 + \frac{A}{6} \right) \quad (III.3.6)$$

Dans le but de déterminer le facteur de forme  $A(x)$  et par conséquent la fonction  $\delta(x)$  à partir de (III.3.2), il est nécessaire de se référer à l'équation à l'équation du moment (III.212). En multipliant les deux membres de celle ci par  $\theta/\nu U_e$  on obtient:

$$\frac{U_e \cdot \theta \cdot \theta'}{\nu} + \left(2 + \frac{\delta^*}{\theta}\right) \frac{U_e' \theta^2}{\nu} = \frac{\tau_0 \theta}{\mu U_e} \quad (III.3.6)$$

Introduisons un second facteur de forme K défini par :

$$K = \frac{\theta^2}{\nu} \cdot \frac{dU_e}{dx} \quad (III.3.7)$$

et posons  $Z = \frac{\theta^2}{\nu} \cdot \frac{dU_e}{dx}$

donc  $K = Z \frac{dU_e}{dx}$

des équations (III.2.2), (III.2.7) et (III.2.4a) on déduit :

$$K = \left( \frac{37}{315} - \frac{A}{945} - \frac{A^2}{9072} \right)^2 A \quad (III.3.10)$$

d'où:  $\frac{\delta^*}{\theta} = \frac{3/10 - A/120}{37/315 - A/945 - A^2} = f_1(K) \quad (III.3.11)$

$$\frac{\tau_0 \theta}{\mu U_e} = \left(2 + \frac{A}{6}\right) \left( \frac{37}{315} - \frac{A}{945} - \frac{A^2}{9072} \right) = f_2(K) \quad (III.3.12)$$

En combinant les équations (III.2.7) et (III.2.8) ensemble avec les équations (III.2.11)

et (III.2.12), on obtient à partir de l'équation du moment (III.2.5) avec  $\frac{\theta \cdot \theta'}{\nu} = \frac{1}{2} \frac{dZ}{dx}$  l'équation

$$\frac{1}{2} U_e \frac{dZ}{dx} + [2 + f_1(K)] K = f_2(K) \quad (III.3.13)$$

Finalement, on introduit l'abréviation :

$$2f_2(K) - 4K - 2Kf_1(K) = F(K) \quad (III.3.14)$$

En substituant les expressions de  $K$ ,  $f_1(K)$  et  $f_2(K)$  dans l'équation (III.3.14), on obtient

$$F(K) = 2 \left( \frac{37}{315} - \frac{A}{945} - \frac{A^2}{9072} \right) \left[ 2 - \frac{116.A}{315} + \left( \frac{2}{945} + \frac{1}{120} \right) A^2 + \frac{2A^3}{9072} \right] \quad (III.3.15)$$

Avec toutes ces abréviations et substitutions, l'équation du moment (III.3.13) peut être réécrite sous la forme condensée suivante :

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{F(K)}{U_e} \quad ; \quad K = Z.U_e \quad (III.3.16)$$

Ce qui représente une équation différentielle non linéaire du premier ordre d'inconnue  $Z = \theta^2/\nu$  fonction de l'abscisse curviligne  $x$ . Le fait que la fonction  $F(K)$  soit complexe ne constitue pas une réelle difficulté pour la résolution de l'équation (III.3.16). Les fonctions  $K(A)$  de l'équation (III.3.10) aussi bien que les équations  $f_1(K)$ ,  $f_2(K)$  et  $F(K)$  données respectivement par les équations (III.3.11), (III.3.12) et (III.3.15) sont données dans le tableau -3-.

### III.3.a Solution de l'équation (III.3.16):

En ce qui concerne la solution de l'équation (III.3.16), il est possible de faire les remarques suivantes:

Le calcul commencera à partir du point d'arrêt  $x=0$  où  $U_e=0$  et  $dU_e/dx$  est fini et est différent de zéro. Donc d'après l'équation (III.3.16), la valeur initiale de la pente  $dZ/dx$  sera infinie en ce point et de ce fait,  $F(K)$  tendra à s'annuler. Le zéro de  $F(K)$  apparaît pour des valeurs de  $A$  pour lesquelles le second terme à droite et entre parenthèses de l'équation (III.3.15) s'annule. Ainsi:

$$F(K)=0 \text{ pour } K=K_0=0.770 \text{ ou pour } A=A_0=7.052$$

De cette manière, la pente initiale  $(dZ/dx)_0$  au point d'arrêt se présente sous une forme indéterminée  $0/0$ , mais sa valeur peut être calculée par un simple passage à la limite. On obtient:

$$Z_0 = \frac{K_0}{U_{e0}} = \frac{0.077}{U_{e0}}$$

où l'indice zéro fait référence au point d'arrêt.

Avec ces valeurs initiales, l'équation (III.3.16) peut facilement être intégrée.

Le calcul commence à partir du point d'arrêt pour lequel  $A_0=7.052$  et  $K_0=0.077$ . On poursuit l'intégration jusqu'à atteindre le point de décollement, correspondant à  $\tau_0=0$ , c'est à dire pour  $A=-0.1567$  et  $F(K)=1.7241$ .

La fonction de vitesse  $U_c(x)$  et leurs dérivées premières  $dU_c/dx$  sont données par la solution de l'écoulement potentiel.

La procédure de calcul peut être résumée comme suit :

- 1- La répartition de vitesses  $U_c(x)$  et leurs dérivées  $dU_c/dx$  sont données en fonction de l'abscisse curviligne  $x$ .
- 2- l'intégration de l'équation (III.3.16) donne  $Z(x)$  et le second facteur  $K(x)$ . Ce qui conduit au calcul de  $\theta(x)$  d'après l'équation (III.3.7).
- 3- La variation du premier facteur de forme  $A(x)$  est obtenue de l'équation (III.3.10) et du tableau 3.
- 4- L'épaisseur de la couche limite  $\delta(x)$  est finalement obtenue à partir de l'équation (III.3.4a).

### III.4 Résolution du problème :

Dans notre travail l'extrados de l'aube est connu. Les données du problème sont :

- 1- N nombre de points choisis le long de l'extrados.
- 2-  $X_i$  abscisse curviligne du point  $i$ .
- 3-  $Y_i$  ordonnée du point  $i$ .
- 4-  $U_{ci}$  répartition de vitesse sur l'extrados.

On calcule les dérivées de vitesses le long de l'abscisse curviligne.

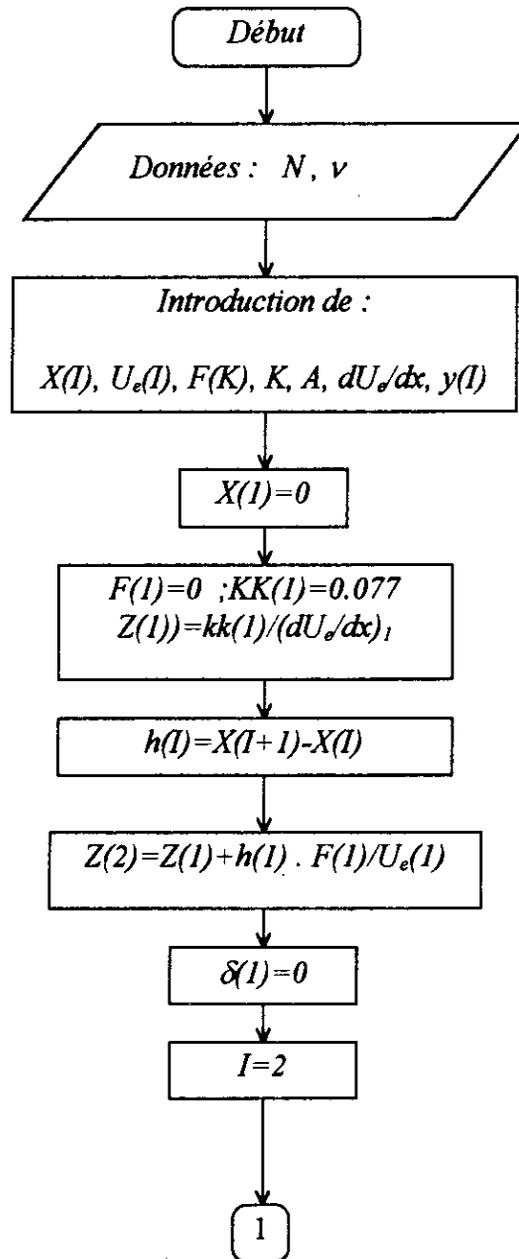
### III.5 Conclusion :

Le calcul de la couche limite est très utile, car à l'intérieur de cette couche les forces de viscosité sont importantes .

La méthode de calcul utilisée dans cette partie, est celle du *Von Karman et Paulhausen*.

Le couplage fera l'objet du chapitre suivant.

L'organigramme pour la résolution de l'équation (III.3.16) est donné sur la figure (III.A)



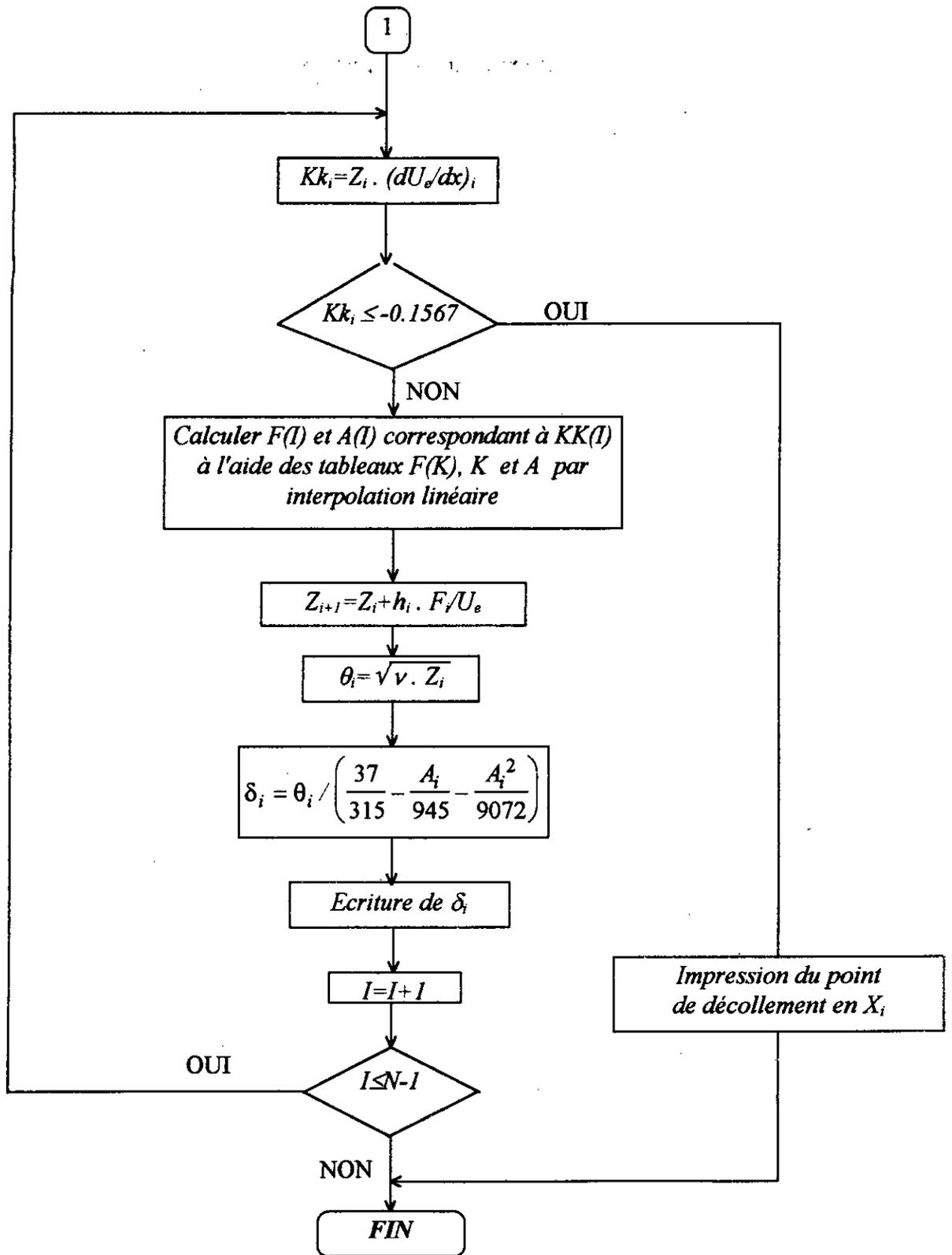


Tableau 3 : Les fonctions auxiliaires pour le calcul de l'épaisseur de la couche limite laminaire d'après Holstein et Bohlen [11].

A	K	F(k)	$f_1(k)1=\delta^*/\theta$	$f_2(k)=\theta\tau_0/\mu U$
15	0.0884	-0.0658	2.279	0.346
14	0.0928	-0.0885	2.262	0.351
13	0.0941	-0.0914	2.253	0.354
12	0.0948	-0.0948	2.250	0.356
11	0.0941	-0.0912	2.253	0.355
10	0.0919	-0.0800	2.260	0.351
9	0.0882	-0.0608	2.273	0.347
8	0.0831	-0.0355	2.289	0.340
7.8	0.0819	-0.0271	2.293	0.338
7.6	0.0807	-0.0203	2.297	0.337
7.4	0.0794	-0.0132	2.301	0.335
7.2	0.0781	-0.0051	2.305	0.333
7.052	0.0770	0	2.308	0.332
7	0.0767	0.0021	2.309	0.331
6.8	0.0752	0.0102	2.314	0.330
6.6	0.0737	0.0186	2.318	0.328
6.4	0.0721	0.0274	2.323	0.326
6.2	0.0706	0.0363	2.328	0.324
6	0.0689	0.0459	2.333	0.321
5	0.0599	0.0979	2.361	0.310
4	0.0495	0.1579	2.392	0.297
3	0.0385	0.2300	2.427	0.283
2	0.0264	0.3004	2.466	0.268
1	0.0135	0.3820	2.508	0.252
0	0	0.4698	2.554	0.235
-1	-0.0140	0.5633	2.604	0.217
-2	-0.0284	0.6609	2.647	0.199
-3	-0.0420	0.7640	2.716	0.179
-4	-0.0575	0.8698	2.779	0.160
-5	-0.0720	0.9780	2.847	0.140
-6	-0.0862	1.0877	2.921	0.120
-7	-0.0999	1.1961	2.999	0.100
-8	-0.1130	1.3080	3.085	0.079
-9	-0.1254	1.4167	3.176	0.059
-10	-0.1369	1.5220	3.276	0.039
-11	-0.1474	1.6257	3.383	0.019
-12	-0.1567	1.7241	3.500	0
-13	-0.1648	1.8169	3.627	-0.019
-14	-0.1715	1.9033	3.765	-0.037
-15	-0.1767	1.9820	3.916	-0.054

*Couplage*

## IV.1 Introduction :

La solution optimale est toujours recherchée, dans toutes les études et les recherches scientifiques. Cette notion de solution "optimale" est d'ailleurs toute relative de beaucoup de points de vue. Un grand nombre de contraintes pèsent sur le concepteur, notamment économiques.

D'autre part, la totalité des méthodes connues à l'heure actuelle fournissent une solution associée à un seul régime de fonctionnement. Il sera de peu d'intérêt de tracer un profil dont les performances, excellentes pour un régime, s'effondrent en dehors d'une plage restreinte autour de celui-ci. Sur ce point, on cherche toujours à tracer un profil répondant au maximum à des situations réalistes.

Notre travail consiste à coupler les deux méthodes, semi-inverse et directe, pour le tracé d'un profil d'aube en écoulement transsonique. Ensuite, on va coupler ces deux méthodes avec le calcul de la couche limite.

## IV.2 Couplage de la méthode semi-inverse avec la méthode directe:

Il s'agit d'assembler ces deux méthodes dans un processus itératif, en injectant les résultats obtenus par l'une d'elle dans l'autre.

### IV.2.1 Nécessité du couplage:

Malgré les avantages présentés par la méthode semi-inverse, tels que:

- . Possibilité de traitement des écoulement transsoniques.
- . Possibilité de traitement des écoulement semi tridimensionnels.
- . Rapidité d'exécution.

Il est toutefois rendu difficile, par la nature même de la méthode, de tenir compte des conditions imposées par la périodicité de l'écoulement en amont et en aval des aubages.

Pour cette raison, il est indispensable d'utiliser la présente méthode couplée avec une méthode directe, qui à son tour permet de tenir compte de ces conditions.

### IV.2.2 Procédure de couplage:

Nous avons conçu un processus itératif pour pouvoir combiner ces deux méthodes, en injectant les résultats obtenus par l'une d'elles dans l'autre. Nous avons préféré commencer par

la méthode semi-inverse qui détermine une certaine géométrie et permet d'aborder le problème direct par la suite.

Puisque nous commençons par la méthode semi-inverse, nous avons imposé pour mettre en œuvre le calcul:

- . La distribution du nombre de Mach sur l'extrados.
- . La distribution du nombre de Mach en amont quelque soit la nature de l'écoulement (supersonique ou subsonique).
- . La distribution du nombre de Mach en aval, si l'écoulement est subsonique à cette région, sinon si l'écoulement y est supersonique on n'impose rien (problème hyperbolique).

Pour entreprendre le calcul direct, on injecte les distributions du nombre de Mach et de pression, obtenus par le calcul semi-inverse, qui respectent les conditions aux limites.

Nous rappelons que l'enthalpie totale est prise constante, on impose pour mettre en œuvre le calcul direct:

- . La pression totale et Le nombre de Mach sur la frontière amont.
- . La pression statique sur la frontière aval.

Les résultats ainsi obtenus, sont injectés dans le calcul semi-inverse, tout en respectant les conditions aux limites et ainsi de suite, jusqu'à la convergence

#### **IV.2.3 Convergence de la méthode:**

Le mode semi-inverse génère un profil d'aube, et une distribution du nombre de Mach et une autre de pression. L'écoulement autour de ce profil est ensuite calculé par le mode direct.

Une autre distribution du nombre de Mach, différente de celle obtenue dans le calcul semi-inverse, provient du calcul direct.

En général, arrivant à ce stade, l'étape qui succède est la suivante:

- Si la distribution du nombre de Mach donné par la méthode directe est assez bonne, et si l'épaisseur du profil est acceptable (épaisseur positive, profil fermé) le profil est alors accepté le processus s'arrête.

- Si cette distribution du nombre de Mach est inacceptable, ou bien le profil obtenu n'est pas satisfaisant alors une autre itération est conseillée pour améliorer la géométrie du profil et la distribution du nombre de Mach.

### **IV.3 Couplage avec calcul de la couche limite:**

La théorie de l'écoulement potentiel d'un fluide parfait autour d'un corps aérodynamique donne une bonne approximation de l'écoulement, pour ce qui est de la portance. Cependant cette théorie donne aussi une traînée nulle.

Pour cela il faut tenir compte des effets de la viscosité dans la région immédiatement voisine de la paroi.

Pour pouvoir faire le couplage entre les deux méthodes précédentes et le calcul de la couche limite, il faudrait en premier lieu calculer l'épaisseur de la couche limite sur l'extrados, et ceci en utilisant la répartition de vitesses obtenue par calcul semi-inverse/direct de l'écoulement potentiel.

Pour cela on néglige le décollement de la couche limite ayant apparu sur l'extrados de l'aube. L'épaisseur de la couche limite en aval du point de décollement est obtenue par extrapolation linéaire.

Ensuite on va relancer le programme semi-inverse/direct avec ce nouveau profil d'extrados (extrados engraisé). Une nouvelle géométrie du profil résulte du calcul (profil engraisé).

Et comme les méthodes de calcul de l'écoulement de fluide parfait suppose un écoulement uniforme à l'infini aval, il est donc nécessaire de refermer le profil engraisé en définissant un bord de fuite fictif.

La détermination de la position du bord de fuite fictif se fera par un procédé graphique, tel que ce point est déterminé par l'intersection des courbes définissant l'intrados et l'extrados du profil engraisé.

# *Applications*

## V.1 Introduction:

La mise en évidence des possibilités du couplage fait l'objet de ce chapitre, et ce en exécutant un programme élaboré dans un cas spécifique d'un écoulement transsonique.

Les résultats obtenues sont représentés sous forme de graphe.

## V.2 Exemples de calcul d'écoulement transsonique

### V.2.1 Application au tracé d'une grille d'aubes de turbine:

Cette grille principalement étudiée dans le cas où le nombre de Mach amont à la valeur  $M=0.6$ , correspondant à un nombre de Mach axial inférieur à l'unité. L'angle de calage est pris égal à  $-35^\circ$  par rapport à la direction axiale.

Pour le calcul semi-inverse nous avons trouvé des problèmes dans le choix des conditions le long de l'extrados (ligne de courant initiale) permettant non seulement le contrôle de la couche limite mais également qui correspond à un profil présentant une répartition d'épaisseur satisfaisante.

La répartition du nombre de Mach est imposée le long de l'extrados (Fig. V.1) et l'amont du canal inter-aube (Fig V.2).

Pour le calcul direct les conditions imposées sont déduites à partir du calcul semi-inverse.

Pour le calcul de la couche limite le long de l'extrados, la répartition de vitesse est déduite à partir du couplage semi-inverse direct.

### V.2.2 Application au tracé d'une grille d'aubes de compresseur:

on a tenté de tracer un profil engraisé d'aubage pour un compresseur transsonique. Mais ce type de tracé pose en effet des problèmes particuliers, tels que le choix de conditions en amont du canal et surtout le long de la ligne de courant initiale (extrados) permettant non seulement le contrôle de la couche limite le long des parois mais également, dans le cas correspondant à un profil présentant une répartition d'épaisseur satisfaisante (épaisseur positive, profil fermé).

Un autre problème se pose, c'est que la répartition du nombre de Mach imposée à l'extrados ne permet pas de calculer l'épaisseur de la couche limite le long de l'extrados à cause

de l'apparition de point de décollement dès le début du calcul. Vu qu'au delà du point de décollement, les équations de l'écoulement sont de type elliptique, la théorie de la couche limite n'est plus valable; dans ce cas, on peut faire une extrapolation linéaire pour calculer l'épaisseur de la couche limite aux points se trouvant en aval du point de décollement, mais le fait que ce point apparaît au début, l'extrapolation linéaire serait insignifiante.

### V.3 Résultats et Commentaires:

L'aubage obtenu par juxtaposition en amont et en aval des deux lignes de courant limitant le domaine de calcul (Fig. V.3) présente une répartition d'épaisseur satisfaisante. Ceci résulte du bon choix de l'évolution du nombre de Mach imposée à l'extrados et à l'amont.

Le calcul semi-inverse nous donne la répartition du nombre de Mach à l'intrados (Fig.V.4). L'absence de conditions de périodicité de l'écoulement au bord de fuite se traduit par les différences importantes qui subsistent en ce point entre les nombres de Mach et donc entre les vitesses à l'extrados et à l'intrados. L'égalité des pressions n'est donc pas assurée le long de la ligne de glissement prolongeant le bord de fuite, ce qui, en principe, s'oppose à la juxtaposition des deux écoulements de l'intrados et de l'extrados en aval.

Le couplage du calcul semi-inverse avec le calcul direct nous conduit à une distribution de vitesse montrée à la figure (Fig. V.5). La condition de périodicité est vérifiée, donc la juxtaposition des deux écoulements sur l'intrados et l'extrados est possible.

Le calcul de la couche limite sur l'extrados donne la répartition de l'épaisseur en fonction de l'abscisse curviligne (Tableau V.6).

Ainsi on a défini un nouveau profil de l'extrados. Le calcul semi-inverse nous permet de déterminer le nouveau profil d'aube en partant de la nouvelle géométrie de l'extrados (Fig. V.7) la répartition du nombre de Mach correspondante à l'extrados est représentée à la figure (Fig V.8).

On remarque que les répartitions du nombre de Mach à l'extrados et l'intrados convergent au niveau du bord de fuite, par conséquent l'engrèvement permet d'obtenir des solutions meilleurs malgré que la condition de périodicité demeure non vérifiée.

Pour vérifier celle-ci, on fait un calcul direct qui nous conduit à une répartition du nombre de Mach à l'extrados et l'intrados représentée sur la figure V.9.

Le nouveau profil d'aube (profil engraisé) obtenue paraît satisfaisant et ne diffère pas beaucoup du profil obtenu dans le cas d'écoulement potentiel de fait de la très faible épaisseur de la couche limite.

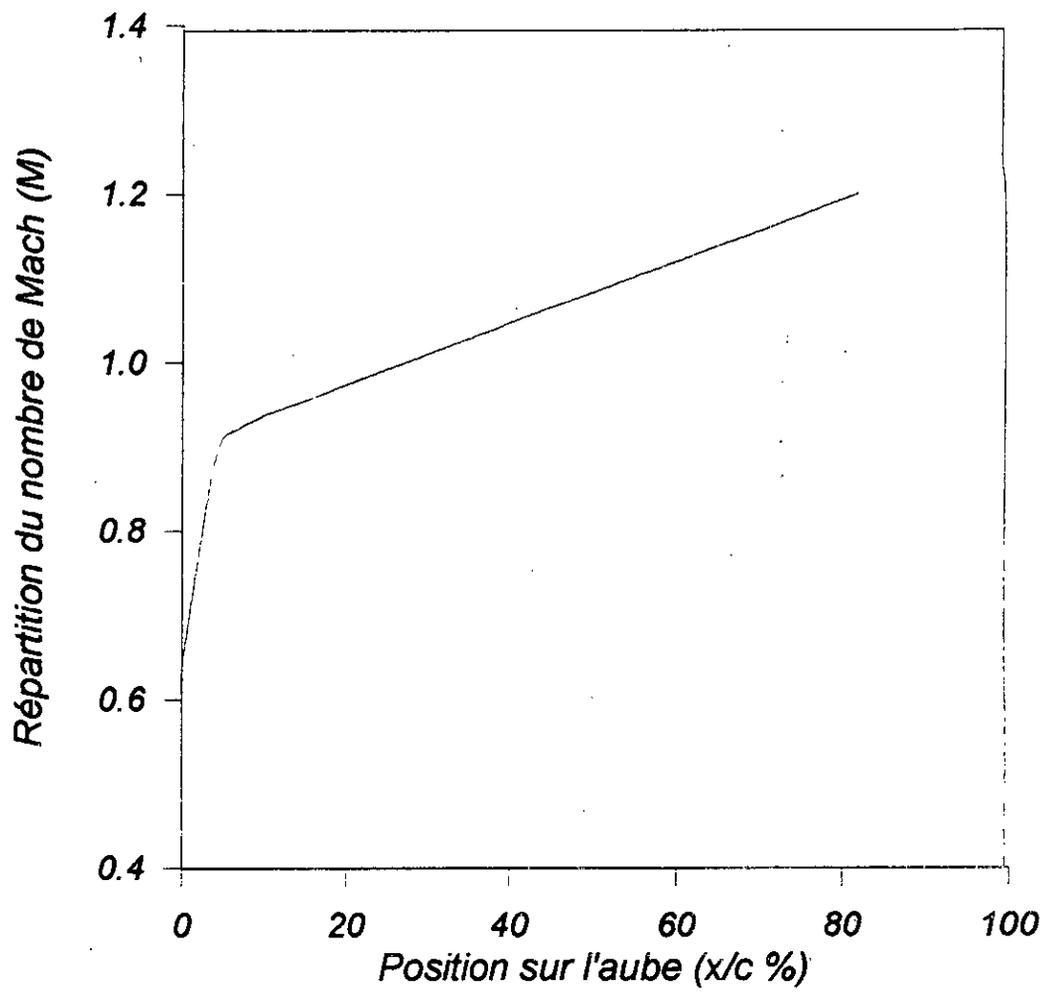
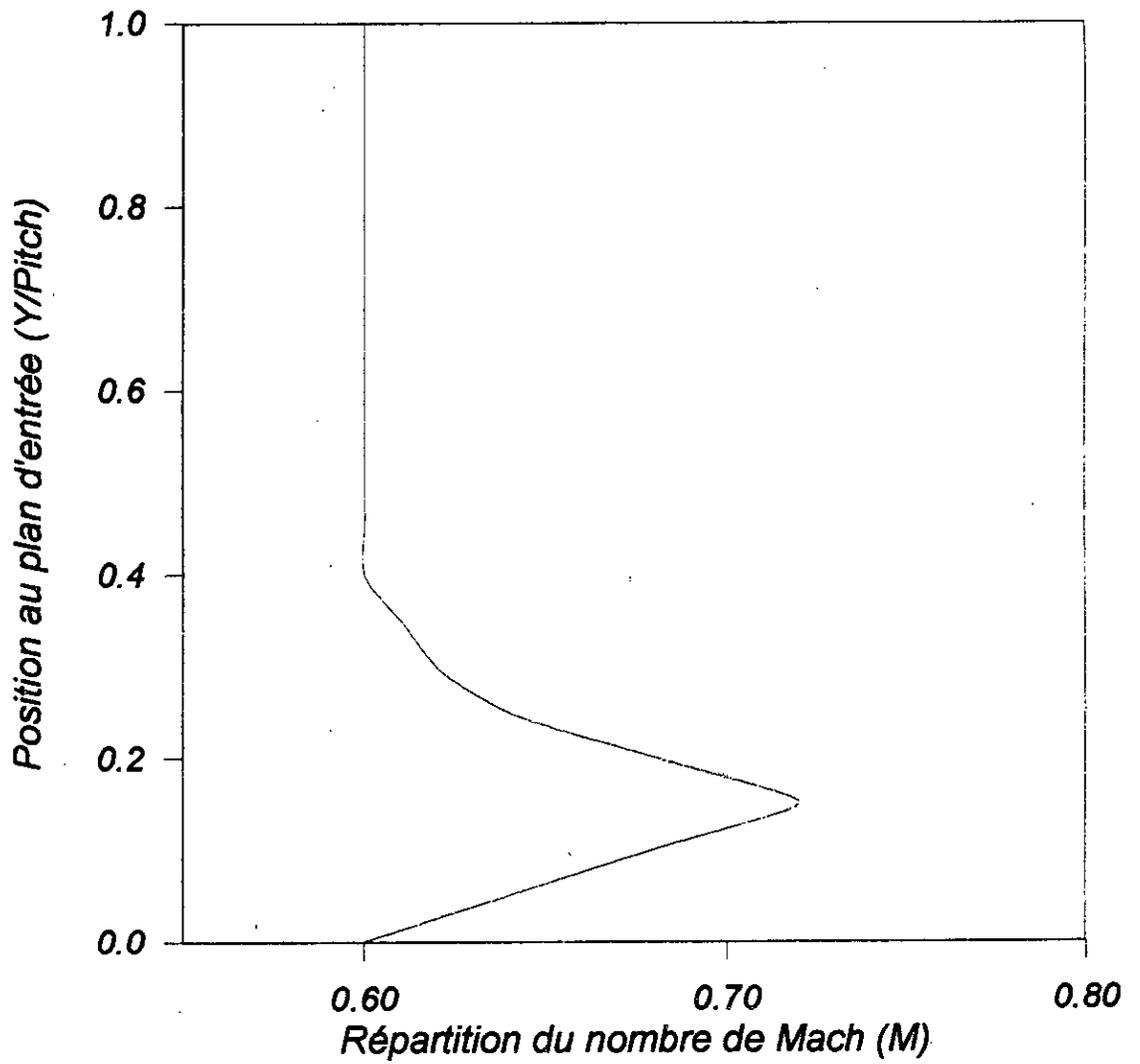


Fig. V.1 : Répartition du nombre de Mach imposée sur l'extrados



*Fig V.2 : Répartition du nombre de Mach imposée à l'entrée du canal inter-aube*

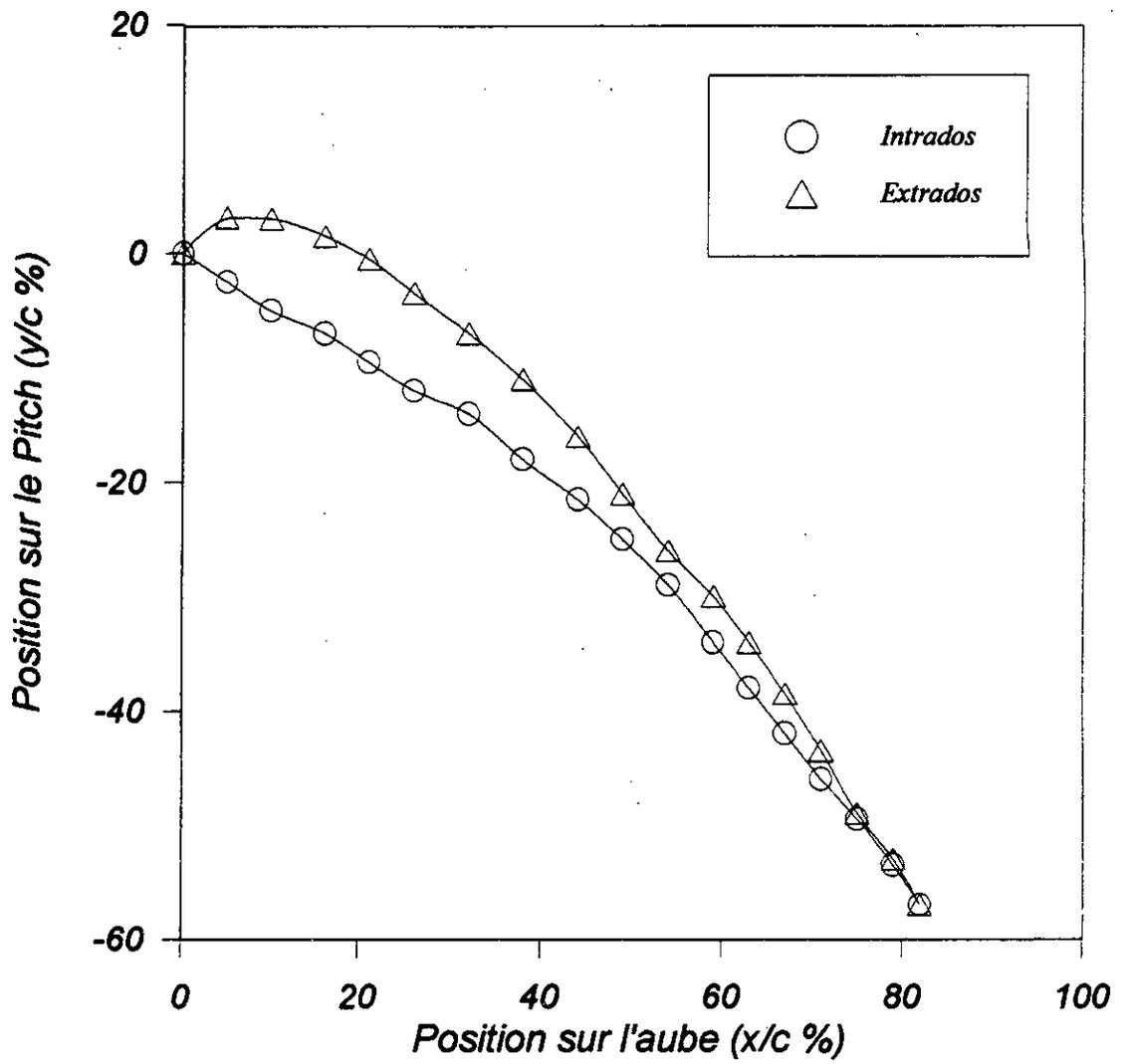


Fig V.3 : Profil d'aube de turbine obtenu par le calcul semi-inverse pour une incidence  $\beta = -35^\circ$

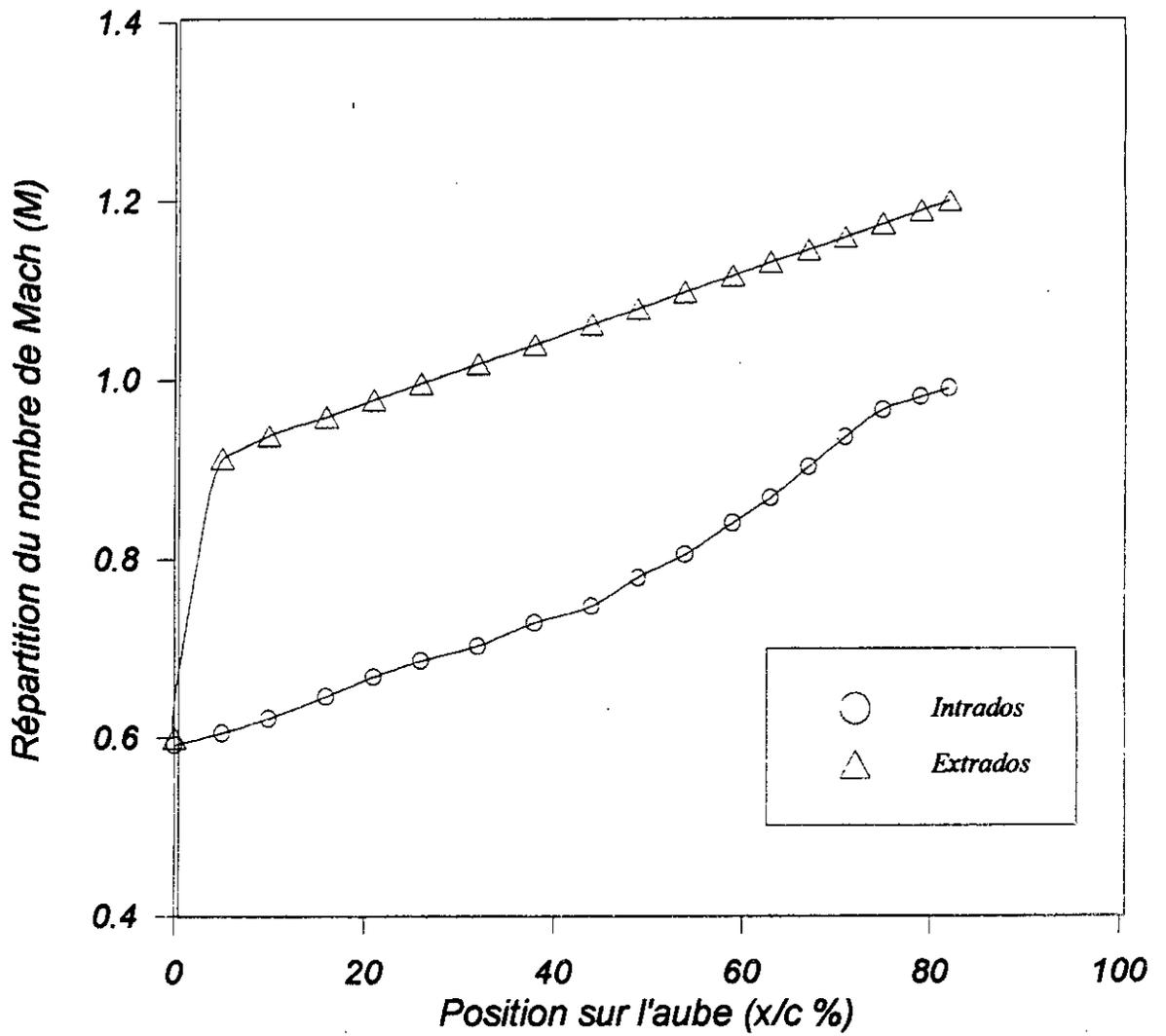


Fig V.4 : Répartition du nombre de Mach sur le profil d'aube obtenue par le calcul semi-inverse

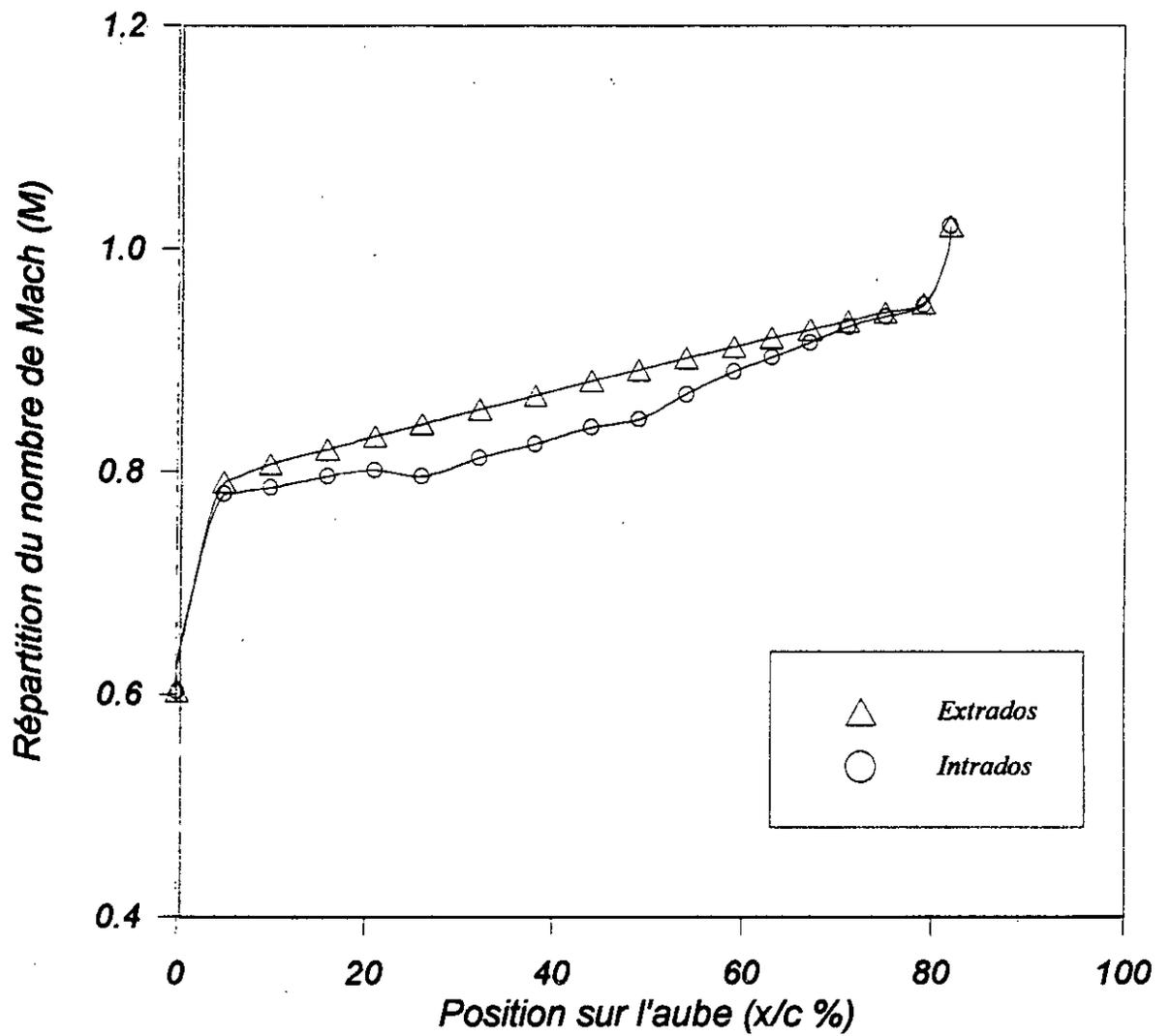


Fig V.5 : Répartition du nombre de Mach sur le profil d'aube obtenue par le calcul direct

<i>i</i>	<i>delta(i) (m)</i>	<i>xc(i) (mm)</i>
1	0.000000E+00	0.0000
2	1.528662E-04	5.883027
3	2.176208E-04	10.884030
4	2.757511E-04	17.068690
5	3.113343E-04	22.453850
6	3.491138E-04	28.284800
7	3.839263E-04	35.231020
8	4.165086E-04	42.442120
9	4.442261E-04	50.252370
10	4.724203E-04	57.323440
11	4.931083E-04	64.394510
12	5.126784E-04	70.797630
13	5.284253E-04	76.454480
14	5.435048E-04	82.111340
15	5.602461E-04	88.514460
16	5.784312E-04	95.725560
17	5.935035E-04	101.382400
18	6.100000E-04	106.382400

Tableau V.6 : Epaisseur de la couche limite sur l'extrados .

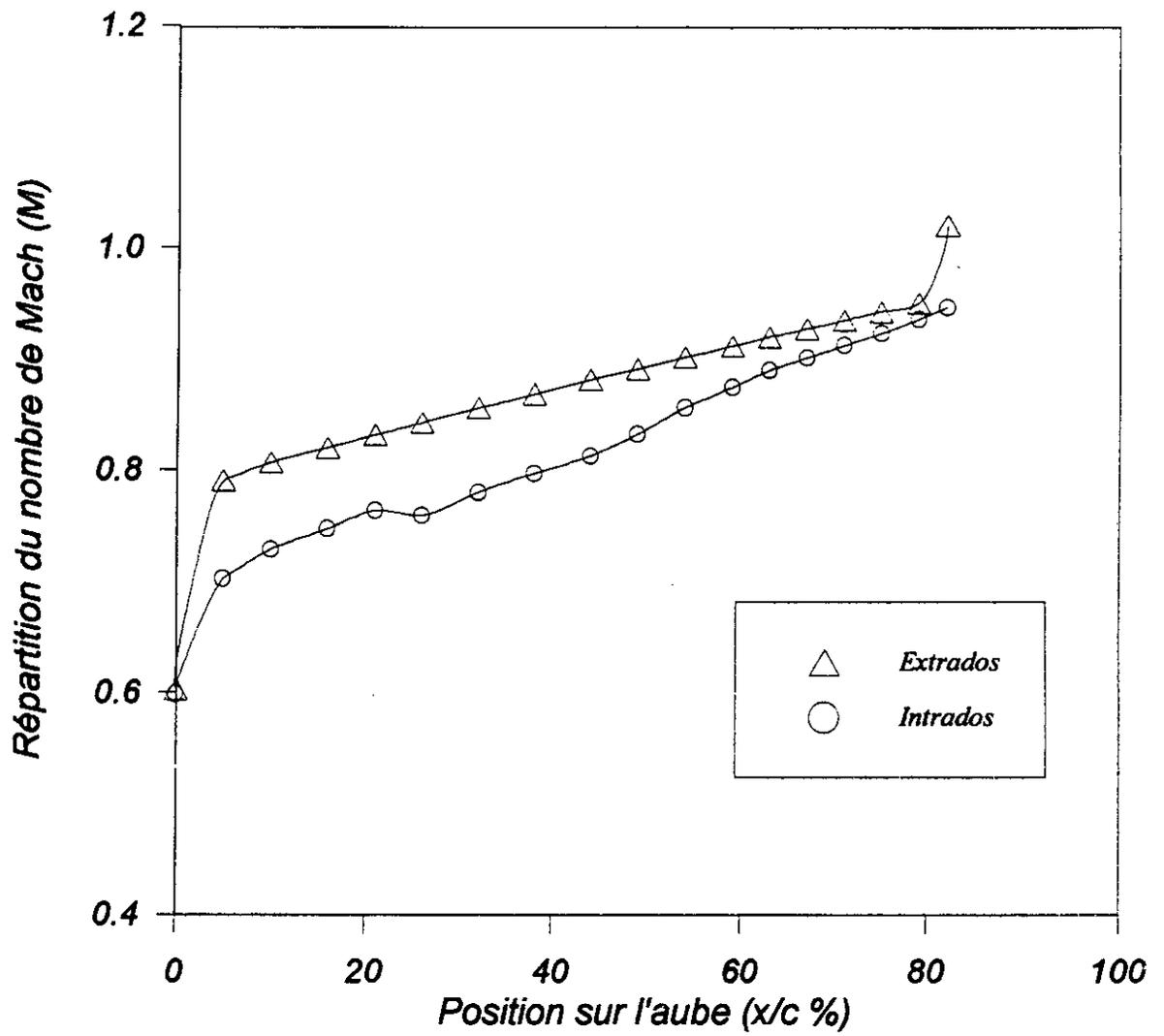


Fig V.8 : Répartition du nombre de Mach sur le profil engraisé obtenue par le calcul semi-inverse

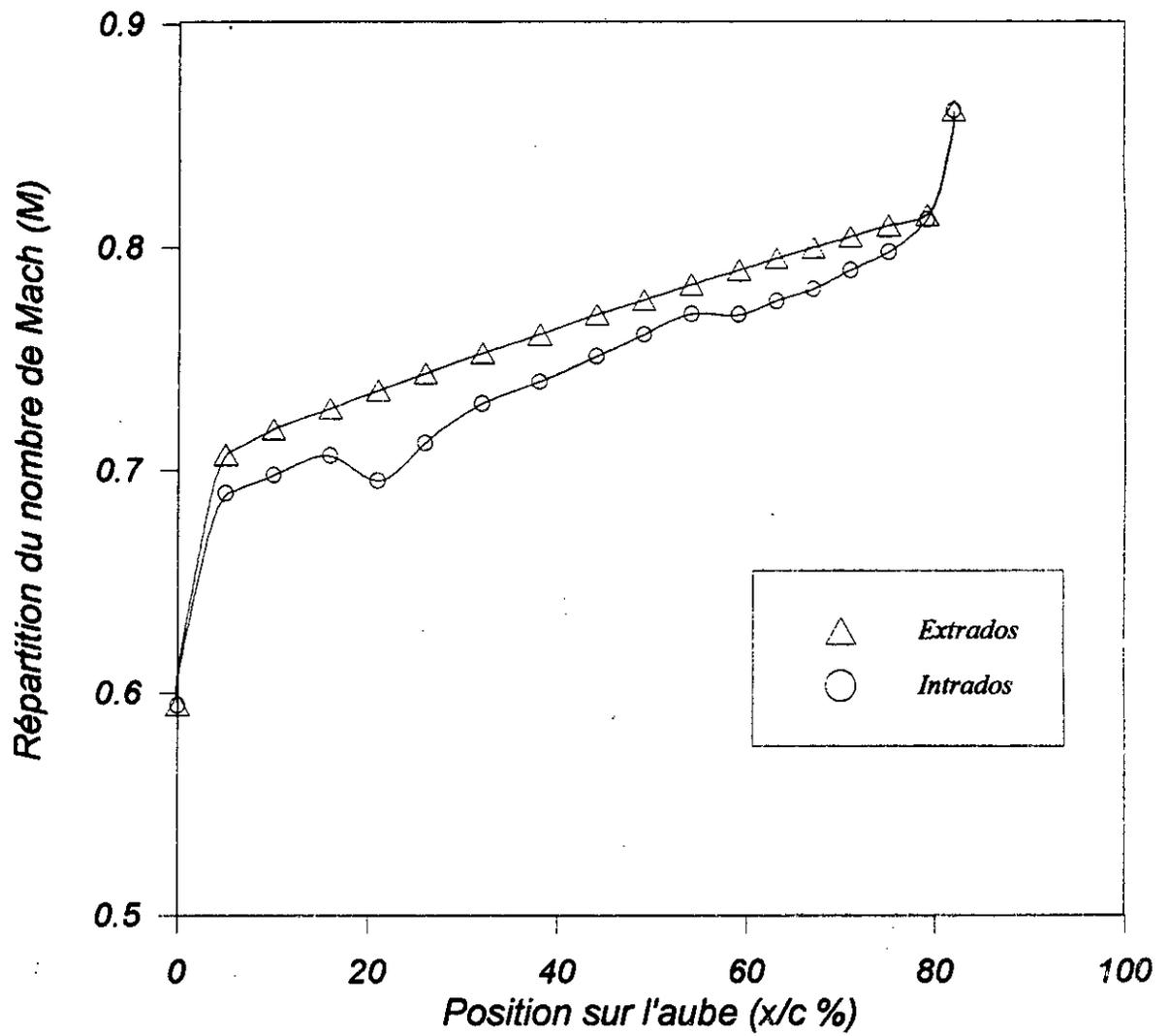


Fig V.9 : Répartition du nombre de Mach sur le profil engraisé obtenue par le calcul direct

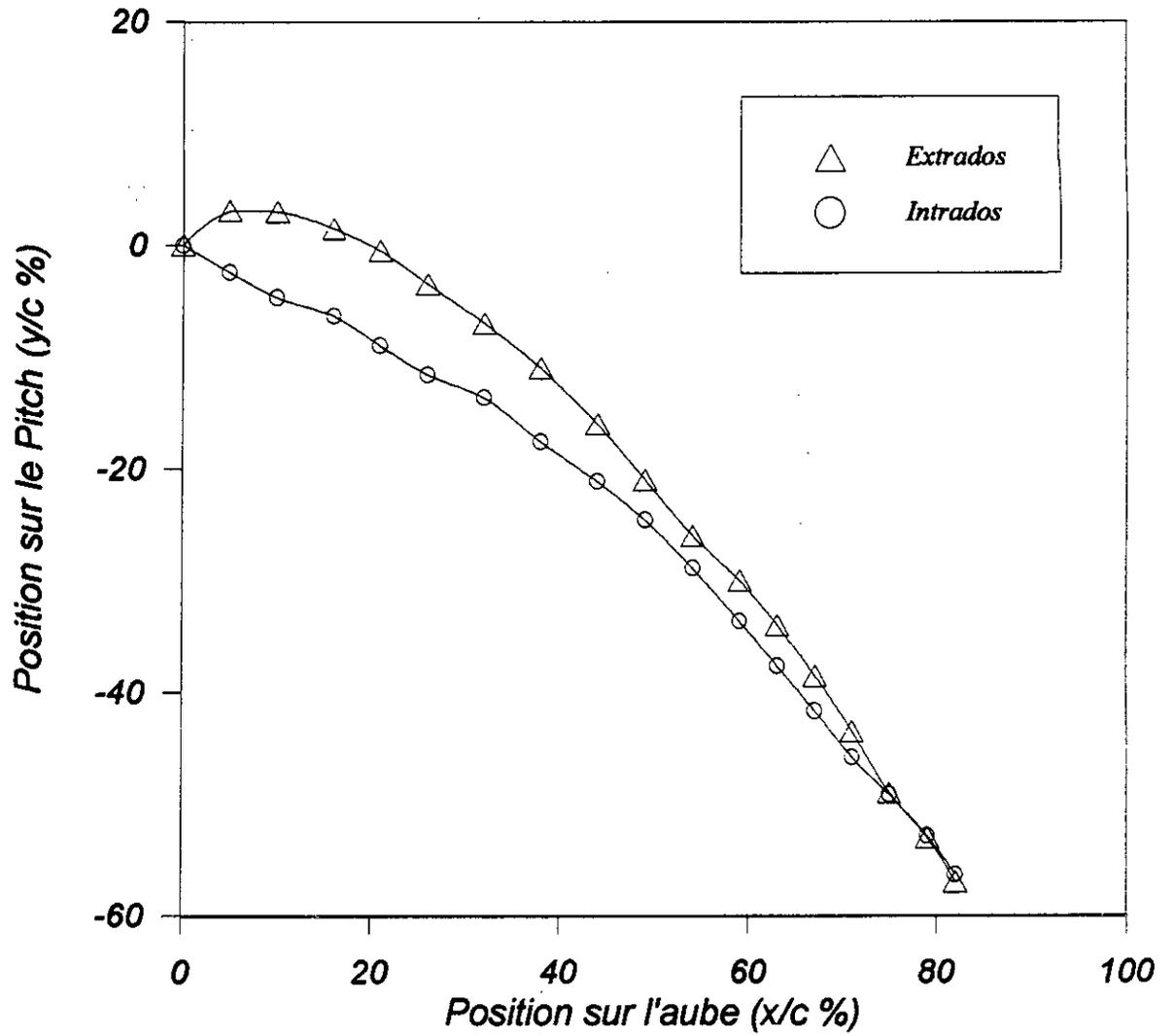


Fig V.7 : Profil d'aube engraisé de turbine obtenu par le calcul semi-inverse

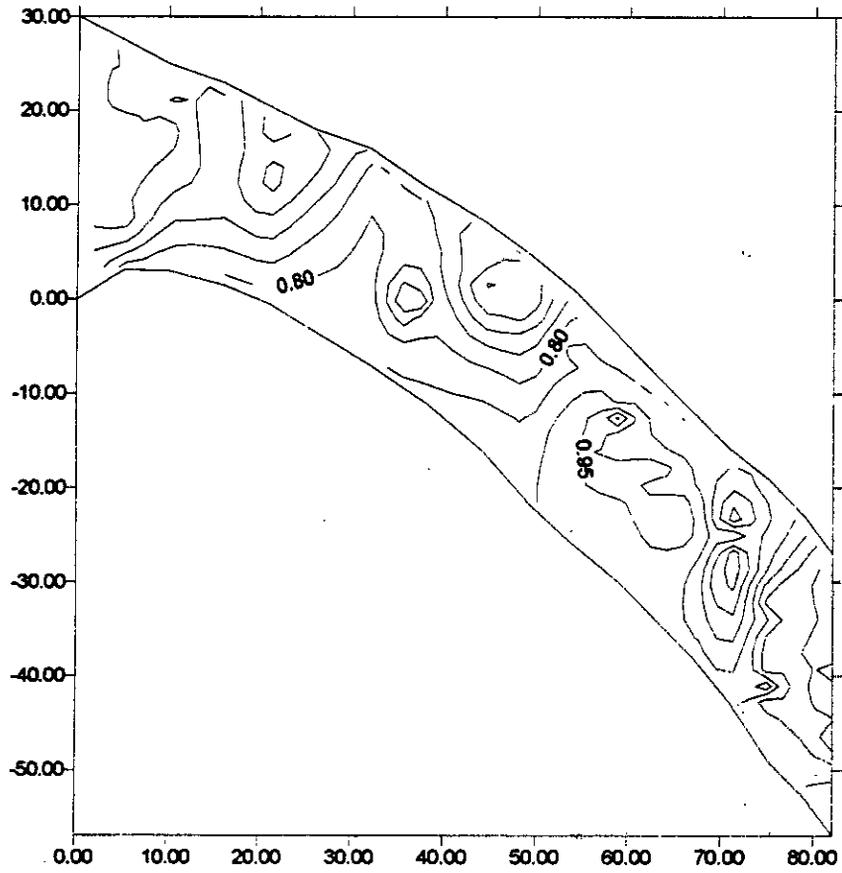


fig V.10: Schématisation des isomachs le long du canal inter-aube d'une turbine.

Conclusion

Générale

**Conclusion générale:**

Nous avons tout au long de ce mémoire essayer de nous initier à la recherche dans le domaine de calcul de profils d'aubages de turbomachine.

Notre thème concernait le calcul dans le mode transsonique qui représente une difficulté mathématique liée au type mixte des équations régissant l'écoulement.

Nous avons donc tenter, au préalable, d'exploiter les études ultérieures entamées depuis quelques années au sein du département de génie mécanique de l'E.N.P à savoir: Le mode semi-inverse pour le calcul de la géométrie de l'aube; le mode direct de calcul de l'écoulement basée sur la méthode pseudo-instationnaire; le couplage des deux méthodes pour obtenir un profil fermé et qui prend en compte la condition de périodicité imposée dans le cas des turbomachines. Viendra ensuite notre part de contribution par l'élaboration d'un module complémentaire qui mis en évidence la présence de la couche limite qui aboutira à quantifier la performance du profil étudié.

Donc, le programme élaboré jusqu'à présent permet un calcul précis de canaux tels que les tuyères, ainsi que l'aubage d'une turbine. Cependant, il se heurte pour le cas du compresseur, aux problèmes des ondes de choc et leur interaction avec l'écoulement potentiel et/ou la couche limite.

En conclusion, l'étude développée peut faire l'objet de certain nombre d'extension en l'occurrence:

- \* Comparaison des résultats d'autre méthodes ou dans le cas échéant des données expérimentales.

- \* Tentative de développer la méthode pseudo-instationnaire dans un système de coordonnées polaire qui pourrait être plus compatible du point de vue géométrie du problème.

- \* Etude plus exhaustive de l'interaction onde de choc-couche limite, qui notons le, dépasse le cadre d'un PFE.

- \* Exploitation des résultats obtenus par le programme pour constituer une base de données qui évalue les performances de différents profils d'aubes et dans la mesure du possible les associer au données de résistance mécanique et qui servira à tester l'efficacité des modèles qui seront développer postérieurement.



# *Bibliographie*

## Bibliographie

- [1] ***Veillot J. P.***  
*Calcul numérique de l'écoulement transsonique  
d'un fluide parfait dans une grille d'aubes.*  
Recherche aérospatiale N° 1975-6
- [2] ***Miton H., Sankale M.***  
*Méthode inverse de calcul de profils d'aubages*  
Ecole centrale de Lyon, Nov. 1984.
- [3] ***Roshko A., Liepmann H.***  
*Eléments of gasodynamics.*  
John Willy & Sons, inc, 1957.
- [4] ***Miton H.***  
*Etude théorique et expérimentale de problèmes aérodynamique  
concernant les compresseurs transsoniques.*  
Université d'Aix Marseille II, 1978.
- [5] ***Vavra M. H.***  
*Aérodynamics and flow in turbomachines.*  
John Willy & Sons, inc., 1960.
- [6] ***Euvrard D.***  
*Résolution numérique des équations aux dérivées partielles.*  
Edition Masson, 1990.
- [7] ***Chikhi N.***  
*Elément d'un code pour le calcul d'un écoulement  
dans une roue de turbomachine*  
Projet de fin d'étude, 1993.

- [8] **Toufouti K.**  
*Application du mode inverse aux écoulements transsoniques.*  
Projet de fin d'étude, 1994.
- [9] **Meauze G.**  
*An inverse time marching method for the definition of cascade geometry.*  
J. Engineering for power, N°1981-3
- [10] **Abassi K.**  
*Application du mode semi-inverse direct pour le calcul  
d'écoulements transsoniques dans les turbomachines*  
Projet de fin d'étude, 1996.
- [11] **Schlichting H.**  
*Boundary layer theory*
- [12] **Viviand H., Veuillot J. P.**  
*Méthode pseudo-instationnaire pour le calcul  
d'écoulements transsoniques.*  
Publication ONERA (France) N°1978-4.
- [13] **Peyret R., Taylor T. D.**  
*Computational methods for fluid flow.*  
Springer-Verlag , édition 1990.

*Annexes*

## ANNEXE A

### Analyse de la stabilité des schémas aux différences finies

Pour un schéma donné, il existe des valeurs du pas de calcul, pour lesquelles, les résultats numériques donnent des oscillations qui croissent rapidement et après un certain temps, leurs amplitudes deviennent infinies tels que l'ordinateur passe en "over-flow" et s'arrête.

Ce phénomène est une caractéristique de l'instabilité numérique qui peut se produire par d'autres sources, par exemple, dans un cas non linéaire, pour des nombres de *Reynolds* importants, les causes des instabilités sont:

- (i) les effets non linéaires.
- (ii) le changement rapide de la direction dans la région de décollement de l'écoulement.
- (iii) un fort gradient de pression.
- (iv) présence de parois ou de frontières au domaine de calcul.

L'effet de telles instabilités qualifiées de "faible", n'est pas nécessairement une divergence rapide du calcul, mais souvent, ils provoquent des oscillations qui restent d'une amplitude bornée. [13]

Ce phénomène est corrigé soit en diminuant le rapport des pas de calcul, en le choisissant inférieur à la valeur donnée par la condition de *Courant-Friederichs-Lewy*(CFL) -voir chapitre §I et §II- soit en introduisant un terme dissipatif ou de viscosité artificielle.

Cela nous amène à introduire la notion de stabilité. Nous dirons qu'un schéma est stable si la solution du problème discrétisé reste bornée (pour une donnée initiale bornée bien entendu). [6]

Examinons, maintenant, par l'analyse de *Fourier*, la stabilité du schéma suivant:

$$C_1 u_h^{n+1} + C_0 u_h^n + C_{-1} u_h^{n-1} = 0 \quad (\text{A.1})$$

où  $C_1$ ,  $C_0$  et  $C_{-1}$  sont des opérateurs de différences finies,  $u_h^n \equiv u(x_h, n\Delta t)$  avec  $u = (u_1, \dots, u_m)$  et  $x = (x_1, \dots, x_d)$  tel que  $x_h$  désignent la discrétisation en espace

$x_h = (\gamma_1 \Delta x_1, \dots, \gamma_d \Delta x_d)$  où  $\gamma_1, \dots, \gamma_d$  étant des entiers, l'indice  $n$  désigne la discrétisation en temps  $t_n = n \Delta t$ ,  $n$  un entier.

On suppose que la solution est de la forme :

$$u_h^n = U^n(k) \exp(ik \cdot x_h) \quad (A.2)$$

où  $i^2 = -1$ , et  $k$  le vecteur nombre d'onde,  $k = (k_1, \dots, k_d)$  substituant (A.2) dans (A.1) et en divisant par un facteur commun  $\exp(ik \cdot x_h)$ , on obtient l'équation vectorielle:

$$G_1 U^{n+1} + G_0 U^n + G_{-1} U^{n-1} = 0 \quad (A.3)$$

Cette équation à trois niveaux est transformée en une équation à deux niveaux en introduisant une variable auxiliaire  $V^n = U^{n-1}$ . L'équation devient donc:

$$G_1 V^{n+1} + G_0 V^n + G_{-1} V^{n-1} = 0 \quad (A.4)$$

$$V^{n+1} - U^n = 0$$

qui peut être écrite sous la forme:

$$\phi^{n+1} = G \cdot \phi^n \quad (A.5)$$

où  $\phi = (U, V)$  est un vecteur à  $2m$  composantes,  $G$  une matrice  $2m \times 2m$  déduite de (A.4) appelée matrice d'amplification.

La stabilité du schéma (au sens de *Von Neumann*) exige que le rayon spectral de la matrice d'amplification  $G$  est inférieur à l'unité i.e.:

$$\rho(G) = \text{Max} |\lambda_j| \leq 1, \quad 0 \leq k_j \Delta x_j \leq 2\pi, \quad j = 1, \dots, d \quad (A.6)$$

où  $\lambda_j$  sont les valeurs propres de  $G$  racines de l'équation caractéristique:

$$\det(G - \lambda I) = f(\lambda) = 0 \quad (A.7)$$

Dont les valeurs des  $\lambda$  résultent de l'étude des zéros de  $f(\lambda)$ . Une autre possibilité consiste à calculer directement les valeurs propres de  $G$  par des méthodes numériques. Les calculs sont effectués en faisant varier les paramètres (physique et numérique) du problème et en construisant les graphes des résultats. Pour une telle approche, il est recommandé de procéder à l'étude analytique préliminaire de la stabilité pour des cas simples; Pour l'instant, soit :

- (i) En considérant le problème en dimension d'espace inférieur, ou
- (ii) En annulant quelques paramètres physiques, ou

(iii) considérant quelque relations entre les composantes du vecteur nombre d'onde où éventuellement quelque valeurs d'entre eux.

Une telle analyse préliminaire permet souvent la détermination d'une forme grossière du critère de stabilité qui peut être raffiner par le calcul numérique des valeurs propres.

## ANNEXE B

### Simplification des équations de Navier Stokes pour l'étude de la couche limite

Réécrivons les équations de *Navier-Stokes* sous la forme adimensionnelle.

Soit:

$V_e$  : est la vitesse d'écoulement, dont on réfère toutes les vitesses.

$L$  : la longueur du corps.

La pression est rendue adimensionnelle avec  $\rho \cdot V_e^2$ .

Le temps est référé à  $L/V_e$ .

Le nombre de *Reynolds* est  $R = V_e \cdot L \cdot \rho / \mu = L \cdot V_e / \nu$  qui est considéré très grand.

Avec ces formules, on peut écrire :

$$\begin{aligned}x^* &= \frac{x}{L} \\y^* &= \frac{y}{L} \\u^* &= \frac{u}{V_e} \\v^* &= \frac{v}{V_e} \\p^* &= \frac{P}{\rho \cdot V_e^2}\end{aligned}$$

Donc les équations de *Navier-Stokes* deviennent après substitution des formules ci-dessous:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial(u^* \cdot V_e)}{\partial(L \cdot x^*)} = \frac{V_e}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial(u^* \cdot V_e)}{\partial(L \cdot y^*)} = \frac{V_e}{L} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial(P^* \cdot \rho \cdot V_e^2)}{\partial(L \cdot x^*)} = \frac{\rho \cdot V_e^2}{L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (u^* V_e)}{\partial (L x^*)^2} = \frac{V_e}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (u^* V_e)}{\partial (L y^*)^2} = \frac{V_e}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\rho V_e^2}{L} \frac{\partial p^*}{\partial y^*}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{V_e}{L} \frac{\partial v^*}{\partial y^*}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{V_e}{L^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{V_e}{L^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}$$

Et finalement on a :

$$\frac{L}{V_e^2} \frac{\partial u}{\partial t} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{(V_e L / \nu)} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$\frac{L}{V_e^2} \frac{\partial v}{\partial t} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{(V_e L / \nu)} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

L'estimation de l'ordre de grandeur permet de négliger certains termes.  
Soit  $\delta$  l'épaisseur de la couche limite tel que  $\delta \ll L$ :

$$\sigma(u^*) \rightarrow 1$$

$$\sigma(x^*) \rightarrow 1$$

$$\text{donc} : \sigma\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\right) \rightarrow 1$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$\text{donc} : \sigma\left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right) \rightarrow 1$$

Et de même :

$$V^* = -\int_0^y \frac{\partial u^*}{\partial x^*} dy^* \quad \text{donc} \quad o(v^*) = o(y^*)$$

$$y^* = \frac{y}{L} \quad \text{donc} \quad o(y^*) = o(\delta)$$

$$o\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right) \rightarrow \frac{1}{\delta^*}$$

$$o\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}\right) < o\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right) \rightarrow o\left(\frac{1}{\delta^{*2}}\right)$$

$$o\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}}\right) < o\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right) \rightarrow o\left(\frac{1}{\delta^{*2}}\right)$$

Négligeant les termes :  $\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$  devant  $\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$

Donc les équations de *Navier-Stokes* simplifiées adimensionnelles pour un écoulement stationnaire sont :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

## ANNEXE C

## Description sommaire de l'interaction onde de choc-couche limite

Les écoulements transsoniques à Mach supérieur à 1 sont inévitablement traversés par des ondes de choc obligeant la vitesse à redevenir subsonique. Ces ondes restent en contact avec la couche limite qui se développe sur la paroi. Il se produit localement un phénomène qui augmente les effets dissipatifs dûs au gradient de pression défavorable auquel la couche limite est soumise. Il s'ensuit une dégradation de sa distribution de vitesse, jusqu'à la formation fréquente d'un décollement.

### C.1 Description sommaire de l'interaction onde de choc couche limite :

En dehors de la zone d'interaction, le saut de pression à la traversée de l'onde de choc est établi sur une distance extrêmement courte. Cependant, dans la couche limite, on observe une zone d'épaisseur  $\Delta x$  sur laquelle la pression croît de manière importante mais non brutale (fig. C.1).

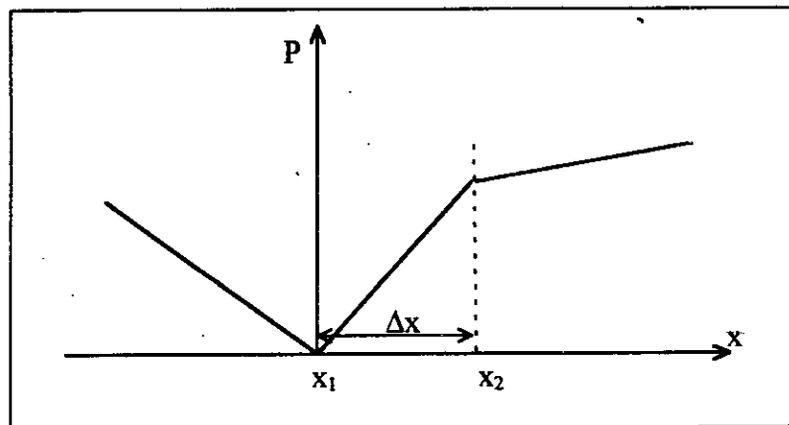


fig. C1 : Saut de pression dans une couche limite à travers une onde de choc

L'explication de ce phénomène tient dans la nature elliptique de la zone de la couche visqueuse située à proximité immédiate de la paroi. Cette zone retransmet vers l'amont du choc l'information liée à la présence à l'aval d'une pression élevée.

En conséquence, la couche visqueuse va réagir à l'élévation de la pression avant d'atteindre le choc. L'épaisseur de la couche limite augmente ainsi en amont du choc formant

un coin (fig. C.2) qui introduit dans l'écoulement une onde de choc oblique (AB). Cette onde (AB) intercepte l'onde de choc principale (BD), et introduit une deuxième branche (BC). Il se forme donc un système d'onde de choc en lambda  $\lambda$ .

La figure C 2 montre que le décollement s'organise en une bulbe séparant d'une part le fluide venant de l'amont et poursuivant son chemin vers l'aval, et d'autre part le fluide qui est faute d'énergie suffisante se trouve piégé dans la bulbe.

En conclusion l'interaction onde de choc- couche limite dépend des paramètres suivants:

- L'état de la couche limite en amont du choc (en particulier le profil de vitesse).
- La répartition de la pression amont et aval.
- L'intensité du choc.

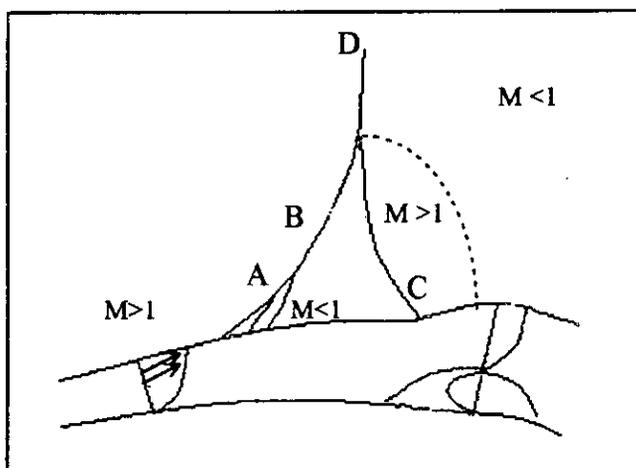


Fig. C2 : réflexion d'un choc avec décollement

## ANNEXE D

### Organigramme du couplage semi-inverse/direct

