

16/97

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**Ministère de l'enseignement supérieur  
et de la recherche scientifique**

**Ecole Nationale Polytechnique  
Département du Génie Mécanique**

**MEMOIRE**

*Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état*

*en Génie Mécanique*  
**BIBLIOTHEQUE — المكتبة**  
**Ecole Nationale Polytechnique**

**THEME**



---

**DIMENSIONNEMENT ET  
ANALYSE DES PERFORMANCES DES  
POMPES CENTRIFUGES**

---

**Etudié par :**  
**M. NECHADI Hakim**

**Proposé par :**  
**M. M. BOUDJEMAA**

**PROMOTION 1997**

يهدف هذا الموضوع إلى تحديد أبعاد أهم العناصر المكونة  
لمضخة طاردة مركزية، ورسمها في مختلف المناظر لتحديد  
شكلها. إضافة إلى اقتراح طريقة لتقييم قدرات  
مضخة موجودة من قبل.

### RESUME:

L'objectif de ce sujet est le dimensionnement des principaux elements qui constituent une pompe centrifuge, et les tracer dans différent plans, pour permettre l'identification de ses formes. En plus on suggère une méthode d'analyse des performances d'une pompe existante.

### ABSTRACT:

The objective of this subject is the dimensioning of the principal elements which constitute a centrifugal pump, and drawing them in different planes, for the identification of their formes. Furthermore, we suggest an analysis method for studing the existing pump.

## Remerciements

- ◆ *Je remercie le dieu qui m'a aidé à effectuer ce travail.*
- ◆ *Je remercie monsieur Boudjemâa pour son suivi, pour le soin exceptionnel qu'il a bien voulu apporter à la lecture de la présente mémoire, et pour les remarques qu'il a formulé.*
- ◆ *Mes vives gratitudees vont à tous les enseignants qui ont participé à ma formation.*
- ◆ *Je remercie enfin; toutes les personnes qui ont participé à réaliser ce travail.*

**\*DEDICACES\***

*Je dédie ce présent travail :*

- ◆ *A la mémoire de ma très chère mère;*
- ◆ *A mon père;*
- ◆ *A mes frères et soeurs;*
- ◆ *A tous mes amis(ies).*

# SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

## **NOMENCLATURE**

## **INTRODUCTION GENERALE**

- Introduction
- Définition
- Classification des pompes
- Critères généraux de définition des pompes

## **I - ECOULEMENT EN MOUVEMENT ABSOLU**

- I.1-Propriétés des lignes de courant
- I.2-Accélération locale-Rotationnel
- I.3-Ecoulement irrotationnel - Fonction potentiel
  - I.3.1-Propriétés de la fonction potentiel
  - I.3.2-Propriétés de l'écoulement irrotationnel
- I.4-Equation de la dynamique des fluides parfaits

## **II - PROPRIETES DU MOUVEMENT RELATIF**

- II.1-Intoduction
- II.2-Equation de continuité
- II.3-Fonction potentiel
- II.4-Equation dynamique en mouvement relatif
- II.5-Evolution des triangles de vitesse en fonction du débit
  - II.5.1-Adaptation à l'entrée de la roue
  - II.5.2-triangle des vitesse à la sortie de la roue
- II.6-Influence du nombre d'aubes et modélisation du coefficient de glissement
  - II.6.1-Maillage simplifié d'un espace inter-aubages
  - II.6.2-Condition de périodicité
  - II.6.4-Applicaton
  - II.6.4-Modélisation du coefficient de glissement

### III -CARACTERISTIQUE DE LA POMPE ET EVALUATION DES PERTES

III.1-Caractéristique  $H = f(Q)$

III.2-Pertes énergétiques

III.2.1-Pertes hydrauliques

III.2.1.1- Modélisation des pertes par frottement

III.2.1.1.1-Définition géométrique d'un tronçon

III.2.1.1.2-Définition de la perte par frottement

III.2.1.1.3-Définition de la perte par élargissement progressif

III.2.1.1.4-Définition des pertes par changement de direction

III.2.1.2-Modélisation des pertes par désadaptation

III.2.1.3-Application

III.2.2-Pertes mécaniques

III.2.2.1-Pertes mécaniques externes

III.2.2.1.1-pertes dans les paliers

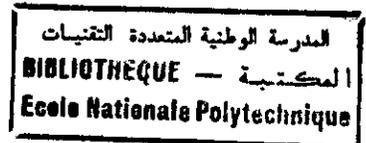
III.2.2.1.2-Pertes dans les garnitures mécaniques

III.2.2.1.3-Pertes dans les dispositifs d'étanchéité

III.2.2.2-Pertes mécaniques internes

III.2.3-Pertes volumétriques

III.2.4-Rendement global



### IV - METHODOLOGIE DE DIMENSIONNEMENT DE LA ROUE

IV.1-Introduction

IV.2-Détermination de la bride d'aspiration

IV.3-Détermination de l'entrée d'aubage

IV.3.1-Optimisation de la section d'entrée vis-à-vis de la cavitation

IV.3.2-Calcul du rayon  $R_1$  et de la largeur  $b_1$

IV.3.3-Calcul de l'épaisseur de l'aube

IV.4-Détermination de la sortie d'aubage

IV.4.1-Calcul du rayon extérieur  $R_2$

IV.4.2-Choix de l'angle de sortie  $\beta_{2\infty}$

IV.4.3-Détermination de la largeur  $b_2$

IV.5-Application

### III -CARACTERISTIQUE DE LA POMPE ET EVALUATION DES PERTES

III.1-Caractéristique  $H = f(Q)$

III.2-Pertes énergétiques

III.2.1-Pertes hydrauliques

III.2.1.1- Modélisation des pertes par frottement

III.2.1.1.1-Définition géométrique d'un tronçon

III.2.1.1.2-Définition de la perte par frottement

III.2.1.1.3-Définition de la perte par élargissement progressif

III.2.1.1.4-Définition des pertes par changement de direction

III.2.1.2-Modélisation des pertes par désadaptation

III.2.1.3-Application

III.2.2-Pertes mécaniques

III.2.2.1-Pertes mécaniques externes

III.2.2.1.1-pertes dans les paliers

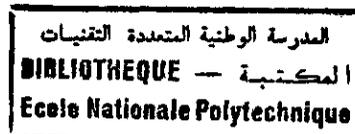
III.2.2.1.2-Pertes dans les garnitures mécaniques

III.2.2.1.3-Pertes dans les dispositifs d'étanchéité

III.2.2.2-Pertes mécaniques internes

III.2.3-Pertes volumétriques

III.2.4-Rendement global



### IV - METHODOLOGIE DE DIMENSIONNEMENT DE LA ROUE

IV.1-Introduction

IV.2-Détermination de la bride d'aspiration

IV.3-Détermination de l'entrée d'aubage

IV.3.1-Optimisation de la section d'entrée vis-à-vis de la cavitation

IV.3.2-Calcul du rayon  $R_1$  et de la largeur  $b_1$

IV.3.3-Calcul de l'épaisseur de l'aube

IV.4-Détermination de la sortie d'aubage

IV.4.1-Calcul du rayon extérieur  $R_2$

IV.4.2-Choix de l'angle de sortie  $\beta_{2\infty}$

IV.4.3-Détermination de la largeur  $b_2$

IV.5-Application

## V - TRACE DES AUBAGES

V.1-Introduction

V.2-Détermination de la vue méridienne

V.2.1-Définition de la ligne moyenne

V.2.2-Définition de la loi de surface

V.2.3-Détermination des deux lignes  $\Psi_e$  et  $\Psi_i$

V.2.4-Inclinaison de l'arête d'entrée d'aube  $\theta_1$  et des angles  $\beta_{1e0}$ ,  $\beta_{1i0}$

V.3-Tracé de l'aubage en deux vues

V.4-Calage angulaire des lignes en vue de face

V.5-Application

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## VI - CALCUL ET TRACE DE LA VOLUTE

VI.1-Introduction

VI.2-Définition des paramètres géométrique de la volute

VI.2.1-rayon de base  $R_3$

VI.2.2-Longueur  $b_3$  au rayon de base

VI.2.3-Définition du divergent

VI.3-Calcul et tracé de la volute

VI.3.1-Principe de la conservation du moment cinétique

VI.3.2-Principe de base sur la supposition d'une vitesse moyenne d'écoulement constante

IV.4-Application

**CONCLUSION**

**ANNEXE**

## NOMENCLATURE

### Symbole :

- b : longueur de la roue [m]  
d : diamètre de la roue [m]  
g : accélération de la pesanteur [ $m/s^2$ ]  
h : hauteur due à la pression [m]  
 $\Delta h$  : perte hydraulique [m]  
j : jeu [m]  
nsq : vitesse spécifique  
p : pression [pa]  
 $\Delta p$  : différence de pression [pa]  
r : rayon [m]  
t : temps [s]  
C : vitesse absolue [m/s]  
Ca : vitesse absolue axiale [m/s]  
Cm : vitesse méridienne débitante [m/s]  
D : diamètre [m]  
H : hauteur d'élévation [m]  
Hth : hauteur théorique [m]  
N : vitesse de rotation [trs/min]  
Na : nombre d'aubes  
P : Puissance [kW]  
Q : débit volumétrique [ $m^3/s$ ]  
W : vitesse relative [m/s]  
R : rayon [m]  
S : surface [ $m^2$ ]

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

$\alpha$  : ( $\widehat{C, U}$ ) - angle de la vitesse absolue

$\beta$  : ( $\widehat{W, C_m}$ ) - angle de la vitesse relative ou angle de l'aubage

$\delta$  : ( $\widehat{C_a, C_m}$ ) - angle de la vitesse débitante

$\eta$  : rendement

$\lambda$  : coefficient linéique de la perte de charge

$\mu$  : coefficient de glissement

$\rho$  : masse volumique [ $\text{Kg/m}^3$ ]

$\omega$  : vitesse angulaire [rd/s]

$\Gamma$  : accélération [ $\text{m/s}^2$ ]

$\Phi$  : fonction potentiel. [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]

#### Indices :

1 : à l'arête d'entrée de la roue

2 : à l'arête de sortie de la roue

3 : à la volute

a : axiale, absorbée

ad : admissible

ar : arbre

e : extérieur

f : fuite

fr : frottement

i : intérieur

m : mécanique, méridien.

opt : optimal

r : radial



# INTRODUCTION GÉNÉRALE

## Introduction:

Le dimensionnement des pompes conserve aujourd'hui un caractère empirique ou il reste basé sur un grand nombre de règles d'origine expérimentale et statistique. Cet état de fait est assez logique puisqu'en dehors des dimensions géométriques principales un très grand nombre de paramètres de second ordre sont fixés pour définir la géométrie complète de la roue et de son environnement immédiat. Ce choix, souvent arbitraire peut être guidé par des considérations telles que :

- Régularité de l'écoulement;
- Encombrement;
- Stabilité des caractéristiques;
- Optimisation des performances (rendement, cavitation, bruit...ect.).

Nous proposons dans ce présent travail une méthodologie de dimensionnement et d'analyse des performances des pompes centrifuges.

Parmi toutes les gammes des pompes, le développement et l'utilisation fréquente des pompes centrifuges a été d'une rapidité sans commune mesure, et ceci en adéquation avec les progrès réalisés dans l'emploi de la force motrice électrique.

A l'heure actuelle il n'existe aucune limite des valeurs du débit ou de la hauteur d'élévation. De tels progrès dans le développement et l'utilisation les plus universelles des pompes centrifuges dans maintes industries et techniques sont dûes à plusieurs facteurs:

- L'aptitude de fonctionnement à grandes vitesses de rotation d'où la possibilité d'accouplement direct à des moteurs électriques;
- Le minimum de parties mobiles;
- l'encombrement réduit , d'où un prix et des frais d'installation modérés relativement au volume déplacé, et éventuellement un coût bas d'exploitation.

L'organisation de cette étude est décrite ci-dessous:

- On introduit dans le chapitre I, la notion des écoulements en mouvement absolu

- Dans le chapitre II on traite l'écoulement en mouvement relatif en faisant ressortir les propriétés de l'écoulement rotationnel, ce développement nous permet d'établir l'expression de l'équation fondamentale des turbomachines (équation d'Euler). Grâce à un raisonnement simplifié, on met en évidence l'existence d'un écart angulaire de sortie lié au nombre d'aubes finis. Une modélisation de cet écart est proposée pour conclure ce chapitre.

- Dans le chapitre III, on propose une approche des différentes pertes rencontrées dans le cadre d'une analyse des performances d'une pompe existante, c'est ce qu'on appelle une méthode directe.

- Le chapitre IV montre la démarche adoptée dans ce projet d'une nouvelle pompe, c'est ce qu'on appelle la méthode inverse, pour un cahier de charge bien défini à l'avance quelles sont les géométries de la roue et de la volute les mieux adaptées.

- Nous proposons dans les chapitres V et VI des méthodes du tracé des aubages et des roues (vue méridienne et vue de face) ainsi que le calcul et le tracé de la volute.

### **Définition d'une pompe:**

On appelle pompe une machine qui sert à élever les liquides d'un niveau inférieur à un niveau supérieur où autrement dit une machine qui aspire des liquides d'une région à basse pression à une région à haute pression. Cette augmentation de pression a lieu à la suite de la transformation de l'énergie mécanique fournie par un moteur entraînant la pompe, en une augmentation de l'énergie hydraulique qui est acquise par le liquide entre l'entrée et la sortie de la pompe, cependant lorsque la pression totale ne peut pas être engendrée avec un bon rendement par une seule roue, on est amené alors de considérer plusieurs roues montées en série qui définissent ce qu'on appelle « pompes multicellulaires ». Dans notre cas nous traitons seulement les pompes monocellulaires.

### **Classification des pompes:**

suivant les méthodes des déplacements des liquides à l'intérieur des pompes, on classe ces dernières en deux grandes familles:

- Les pompes volumétriques (dites aussi à déplacement);
- Les turbopompes ou pompes rotodynamiques.

Le principe de fonctionnement d'une pompe volumétrique consiste dans le déplacement du volume élémentaire du liquide de l'aspiration (entrée de la pompe) vers la région de refoulement. Ce déplacement est un mouvement de translation (pompe alternative), un mouvement de rotation (pompe rotative) ou un mouvement composé de translation et de rotation.

Le principe de fonctionnement d'une turbopompe consiste dans le déplacement du liquide de l'aspiration vers le refoulement au moyen de l'élément actif qui est la roue à aubes ou rotor. Ainsi au contact du liquide avec les aubes a lieu la transformation de l'énergie mécanique en énergie hydraulique et cette transformation consiste essentiellement en une augmentation du moment cinétique. On distingue dans cette famille de pompes trois types en fonction du champ de courant:

1. Pompe centrifuge à écoulement radial dans la roue : grille d'aubes annulaires dont l'arête d'entrée est parallèle ou oblique par rapport à l'axe de rotation (ou de symétrie) tandis que l'arête de sortie lui est parallèle, ces pompes conviennent pour des débits modérés et les fortes pressions.

2. Pompe hélico-centrifuge à écoulement oblique: la roue est composée d'une grille tridimensionnelle dont les arêtes d'entrée et de sortie sont obliques par rapport à l'axe.

3. Pompe hélice à écoulement axial : dont la roue est constituée d'une grille d'aubes circulaires tournantes. suivi d'une grille fixe appelée stator ou redresseur. Elles sont destinées aux grands débits engendrés aux basses pressions.

Une autre classification est également introduite à partir de la vitesse angulaire spécifique  $\Omega$ , représentant un nombre addimensionnel issu des modèles de la similitude des turbomachines intimement lié à la forme de la roue et s'exprime en fonction des performances nominales de la machine (débit et hauteur correspondants au rendement maximal).

$$\Omega = \frac{\omega \sqrt{Q}}{(g H)^{3/4}}$$

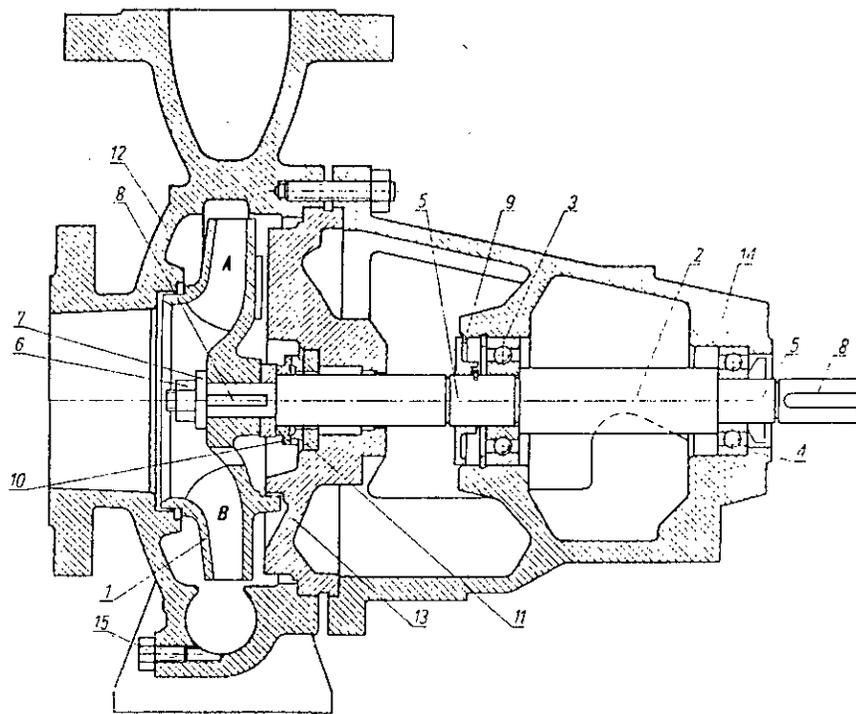
On définit aussi la vitesse spécifique  $nsq$ , nombre pratique ayant une valeur d'usage:

$$nsq = N \frac{\sqrt{Q}}{H^{3/4}}$$

On remarque que la vitesse spécifique <sup>dim. mètre</sup> augmente avec l'augmentation de la hauteur d'élevation. Les faibles vitesses spécifiques caractériseront donc les machines centrifuges et les grandes vitesses spécifiques les machines axiales.

### Constitution:

La figure ci-dessous donne les éléments constitutifs d'une pompe centrifuge monocellulaire.



### Nomenclature de la figure:

- |                           |                                |
|---------------------------|--------------------------------|
| 1- Roue                   | 9- Déflecteur                  |
| 2- Arbre                  | 10- Presse-étoupe              |
| 3- Roulement              | 11- Bague fixe                 |
| 4- Roulement axial        | 12- Corps de pompe             |
| 5- Graisseur de roulement | 13- Fond de boîte de garniture |
| 6- Ecrou de blocage       | 14- Corps de palier            |
| 7- Rondelle               | 15- Bouchon de vidange         |
| 8- Clavette               |                                |

## Critères généraux de définition des pompes:

Les critères les plus importants des pompes sont:

1. La vitesse de rotation : c'est le nombre de tours qu'effectue la pompe par unité de temps. Cette vitesse est notée par  $N$ . L'unité de mesure la plus utilisée est le tour par minute (tr/min.).

2. Débit  $Q$  d'une pompe : C'est le volume qu'une pompe peut ou doit fournir par unité de temps.

3. La hauteur  $H$  produite par la pompe : cette hauteur est la différence entre la hauteur totale du liquide au refoulement  $H_r$  et la hauteur totale de l'aspiration  $H_a$  ;  $H = H_r - H_a$ .

Avec:

$$H_a = \frac{P_a}{\rho g} + \frac{V_a^2}{2g} + Z_a$$

$$H_r = \frac{P_r}{\rho g} + \frac{V_r^2}{2g} + Z_r$$

Avec:

$p_a$  : pression d'aspiration;

$p_r$  : pression de refoulement;

$V_a$  : vitesse d'aspiration;

$V_r$  : vitesse de refoulement.

La hauteur  $H$  créée par une pompe est fonction de la vitesse de rotation  $N$  et du débit  $Q$ . La fonction  $H(Q)$  pour une vitesse de rotation  $N$  constante donnée est appelée caractéristique de la pompe.

4. La puissance (utile absorbée):

La puissance disponible au niveau de l'arbre d'entraînement de la roue de la pompe est la puissance absorbée  $P_a$  de cette pompe.

La puissance transmise au fluide, et ce de la part de la pompe, est appelée puissance hydraulique utile  $P_u$ , cette puissance est égale à :  $P_u = \rho g Q H$ .

5. Rendement de la pompe:

Le rapport de la puissance utile  $P_u$  à la puissance absorbée est appelé le rendement de la pompe  $\eta_p$  :  $\eta_p = P_u / P_a$

## CHAPITRE I

# ÉCOULEMENT EN MOUVEMENT ABSOLU

### I.1- Propriétés des lignes de courant:

Dans le domaine de la turbomachinerie, l'écoulement et ses équations associées, sont la plupart du temps en coordonnées cylindriques ( $r, \theta, Z$ ).

Dans ce repère la vitesse  $C$  en un point quelconque  $M$ , a pour composantes:

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} C_r = \frac{dr}{dt} \\ C_\theta \text{ ou } C_u = \frac{r d\theta}{dt} \\ C_a = \frac{dZ}{dt} \end{vmatrix}$$

La description lagrangienne de l'écoulement consiste à observer le déplacement d'une particule donnée et identifiée en fonction du temps. Inversement la description Eulerienne se place en un point de l'écoulement et observe les variations de la vitesse en fonction du temps (plusieurs particules se succèdent en ce même point). En observant au même instant l'ensemble des points de l'écoulement pendant un laps de temps, on peut définir alors les lignes de courant.

La courbe ( $\Psi$ ) est une ligne de courant; si en tout point  $M$  appartenant à ( $\Psi$ ) la vitesse  $\vec{C}$  est tangente à ( $\Psi$ ), on définira donc pour l'ensemble des points, l'équation différentielle des lignes de courant

$$\frac{dr}{C_r} = \frac{r d\theta}{C_\theta} = \frac{dZ}{C_a} \quad (\text{I.1})$$

Les composantes du vecteur vitesse dépendent à la fois des coordonnées du point  $M$  et du temps.

Lorsque l'écoulement est permanent (ou stationnaire), les composantes du vecteur vitesse sont indépendantes du temps. Les trajectoires et les lignes de courants sont confondues.

## I.2-Accélération locale -Rotationnel :

Le vecteur accélération est calculable à partir de la vitesse  $\vec{C}$ :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d}{dt}(\vec{C}) \quad (I.2)$$

Et ses trois composantes en coordonnées cylindriques sont les suivantes:

$$\vec{\Gamma} = \begin{cases} \frac{d}{dt}(Cr) = \Gamma_r \\ \frac{d}{dt}(Cu) = \Gamma_\theta \\ \frac{d}{dt}(Ca) = \Gamma_z \end{cases} \quad (I.3)$$

Sachant que dans le cas général  $Cr$ ,  $Ca$ ,  $C\theta$ , sont des fonctions de  $r$ ,  $z$ ,  $\theta$ . On obtiendra la première composante à partir de la différentielle totale d'une fonction à quatre variables (annexe A.5):

$$dCr = \frac{\delta Cr}{\delta r} dr + \frac{1}{r} \frac{\delta Cr}{\delta \theta} d\theta + \frac{\delta Cr}{\delta Z} dZ + \frac{\delta Cr}{\delta t} dt$$

et on a :

$$\Gamma_r = \frac{dCr}{dt} - Cu \frac{d\theta}{dt}$$

D'où

$$\Gamma_r = \frac{dCr}{dt} = \frac{\delta Cr}{\delta r} Cr + \frac{1}{r} \frac{\delta Cr}{\delta \theta} Cu + \frac{\delta Cr}{\delta Z} Ca + \frac{\delta Cr}{\delta t} - \frac{Cu^2}{r}$$

Où l'on retrouve les composantes de  $\vec{C}$ :

$$Cr = \frac{dr}{dt}, \quad Cu = \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dt}, \quad Ca = \frac{dZ}{dt}$$

De la même manière on obtient les deux autres composantes de  $\vec{\Gamma}$  avec:

$$\begin{cases} \Gamma_{\theta} = \frac{dCu}{dt} + Cr \frac{d\theta}{dt} \\ \Gamma_z = \frac{dCa}{dt} \end{cases}$$

Soit finalement les composantes de  $\vec{\Gamma}$  :

$$\vec{\Gamma} = \begin{cases} \Gamma_r = Cr \frac{\delta Cr}{\delta r} + Cu \frac{\delta Cr}{r\delta\theta} + Ca \frac{\delta Cr}{\delta Z} - \frac{Cu^2}{r} + \frac{\delta Cr}{\delta t} \\ \Gamma_{\theta} = Cr \frac{\delta Cu}{\delta r} + Cu \frac{\delta Cu}{r\delta\theta} + Ca \frac{\delta Cu}{\delta Z} + \frac{CrCu}{r} + \frac{\delta Cu}{\delta t} \\ \Gamma_z = Cr \frac{\delta Ca}{\delta r} + Cu \frac{\delta Ca}{r\delta\theta} + Ca \frac{\delta Ca}{\delta Z} + \frac{\delta Cu}{\delta t} \end{cases} \quad (I.4)$$

On pourra retenir d'une façon générale la relation vectorielle (la forme de Lambe) :

$$\vec{\Gamma} = \frac{\delta \vec{C}}{\delta t} + \overrightarrow{grad} \frac{C^2}{2} - \vec{C} \wedge \overrightarrow{rot} \vec{C} \quad (I.5)$$

Avec:

$$\overrightarrow{rot} \vec{C} = \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\delta Ca}{\delta\theta} - \frac{\delta Cu}{\delta Z} = 2\Omega_r \\ \frac{\delta Cr}{\delta Z} - \frac{\delta Ca}{\delta r} = 2\Omega_{\theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} (rCr) - \frac{1}{r} \frac{\delta Cr}{\delta\theta} = 2\Omega_z \end{cases} \quad (I.6)$$

On rappellera enfin la définition du vecteur tourbillon  $\vec{\Omega}$  :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot} \vec{C} \quad (I.7)$$

### I.3-Ecoulement irrotationnel -Fonction potentiel :

L'écoulement est à potentiel des vitesses ou encore le champ des vitesses dérive d'un potentiel, est la terminologie employée dans le cas où la relation vectorielle suivante est vérifiée:

$$\vec{C} = \overrightarrow{\text{grad}}\Phi \quad (I.8)$$

Avec  $\Phi$  étant la fonction potentiel dépendant des coordonnées au même titre que les composantes du vecteur  $\vec{C}$ .

On l'écrit également (annexe A.3) en coordonnées cylindriques:

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} C_r = \frac{\delta \Phi}{\delta r} \\ C_u = \frac{\delta \Phi}{r \delta \theta} \\ C_a = \frac{\delta \Phi}{\delta z} \end{vmatrix} \quad (I.9)$$

#### I.3.1-Propriétés de la fonction potentiel :

L'écoulement à potentiel des vitesses présente la propriété remarquable de vérifier la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{C} = 0 \quad (I.10)$$

En remplaçant dans le système (I.6) les termes  $C_r$ ,  $C_u$  et  $C_a$  par leurs valeurs issues de (I.9) on obtiendra:

$$\vec{rot}\vec{C} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \frac{\delta^2 \Phi}{\delta \theta \delta z} - \frac{\delta^2 \Phi}{r \delta z \delta \theta} = 0 \\ \frac{\delta^2 \Phi}{\delta r \delta z} - \frac{\delta^2 \Phi}{\delta z \delta r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\delta^2 \Phi}{\delta r \delta \theta} - \frac{1}{r} \frac{\delta^2 \Phi}{\delta \theta \delta r} = 0 \end{vmatrix}$$

Les trois composantes du vecteur  $\vec{rot}\vec{C}$  sont nulles, on qualifie alors l'écoulement d'irrotationnel.

### I.3.2-Propriétés de l'écoulement irrotationnel :

D'après la relation (I.10), l'écoulement irrotationnel n'est le siège d'aucun vecteur tourbillon. Il ne peut donc être utilisé que pour la description des écoulements au fluide parfait, ou par extension des écoulements au fluide réel exempt de décollement. Cette propriété n'est pas applicable aux écoulements réels présentant :

- Une forte incidence sur les obstacles minces (désadaptation);
- De grandes variations de direction ou de section de passage.

### I.4-Equations de la dynamique des fluides parfaits:

L'équation dynamique est l'équation de Newton traduisant, pour un élément fluide, l'égalité des efforts extérieurs et des efforts d'inertie:

$$\vec{F} = \vec{\Gamma} dm \quad (I.11)$$

Avec :

$dm$  : masse de l'élément fluide  $dm = \rho dV$

$\vec{\Gamma}$  : accélération dans le repère fixe (galiléen)

$\vec{F}$  : résultante des efforts extérieurs appliqués

Les efforts agissant sur les particules sont classés en deux groupes principaux :

• Forces agissant à la surface de l'élément fluide :

1. efforts de pression agissant perpendiculairement aux parois :  $F_p$ ;
2. effort de frottement agissant tangentiellement et se manifestant en présence d'un fluide visqueux :  $F_f$ ;
3. efforts matériels tels que l'effort d'un aubage sur l'élément de fluide :  $F_a$ .

• Forces de volume  $F_v$  :

Efforts à distance tels que la pesanteur, les effets magnétiques ou tout autre effort extérieur agissant sans contact.

Plaçons-nous en coordonnées cartésiennes dans l'hypothèse d'un fluide parfait ( $F_f = 0$ ).

Considérons un volume de fluide élémentaire éloigné d'une paroi ( $F_a = 0$ ) sur lequel agit un effort de volume  $F_v$  de composantes ( $F_x, F_y, F_z$ ).

Examinons les efforts en présence suivant la direction  $\vec{Ox}$  (Figure I.1) :

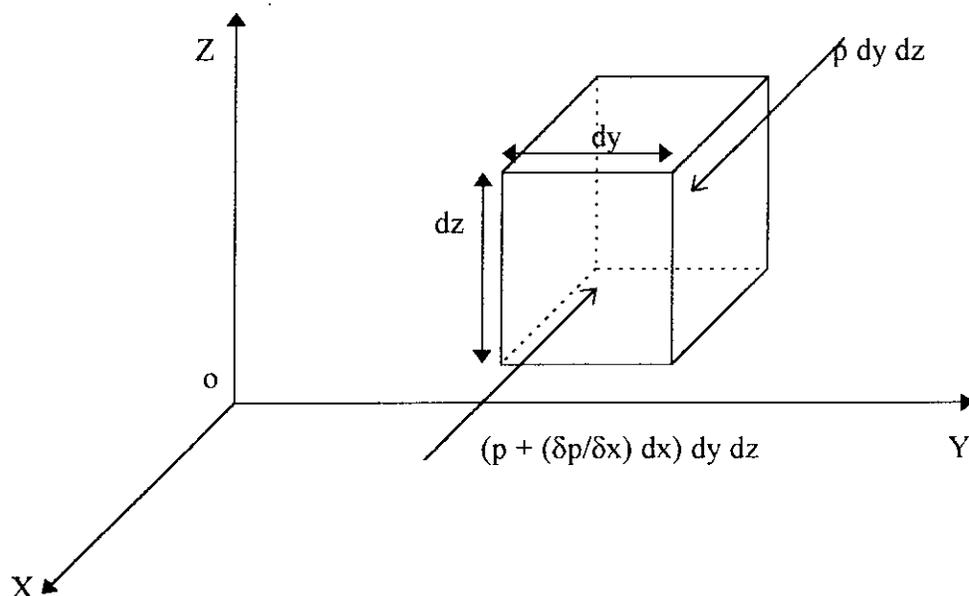


Figure I.1: Disposition des efforts de pression suivant  $Ox$

$$\text{-Forces de pression : } \rho \, dy \, dz - \left( p + \frac{\delta p}{\delta x} dx \right) dy \, dz = -\frac{\delta p}{\delta x} dx \, dy \, dz$$

-Forces de volume :  $F_x$

$$\text{-Masse de l'élément : } \rho dV = \rho dx \, dy \, dz$$

-Accélération :  $\Gamma_x$

Le bilan établit l'équation d'équilibre issue de l'équation (I.11):

$$-\frac{\delta p}{\delta x} dx \, dy \, dz + F_x = \rho \Gamma_x dx \, dy \, dz$$

En extrapolant aux autres composantes et en retenant  $\vec{f}$  comme effort par unité de masse :

$$\vec{f} = \frac{F_v}{\rho \, dx \, dy \, dz} \quad (\text{I.12})$$

On obtient l'équation vectorielle :

$$-\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p + \vec{f} = \vec{\Gamma} \quad (\text{I.13})$$

En générale, les forces de volume dérivent d'un potentiel et, plus particulièrement, de celui de la pesanteur. On notera dans ce cas :

$$\vec{f}_v = -\overrightarrow{\text{grad}}(gh)$$

Ainsi, l'expression la plus générale de l'équation dynamique s'écrira pour un fluide parfait :

$$-\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p - \overrightarrow{\text{grad}}(gh) = \vec{\Gamma} \quad (\text{I.14})$$

## CHAPITRE II

### PROPRIÉTÉ DU MOUVEMENT RELATIF

## II.1-Introduction :

En présence d'aubages animés d'un mouvement d'entraînement  $\vec{U} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ , correspondant à la mise en rotation du rotor à la vitesse angulaire  $\omega$ , on introduit la notion de vitesse relative  $\vec{W}$ . En respectant les règles de composition des champs de vitesses, la vitesse relative sera issue de la relation vectorielle:

$$\vec{C} = \vec{U} + \vec{W} \quad (\text{II.1})$$

La vitesse absolue  $\vec{C}$  correspond à la vitesse d'une particule fluide mesurée dans le repère fixe. dans le repère mobile lié au rotor, la même particule sera animée de la vitesse  $\vec{W}$ . L'introduction de la vitesse relative permet de ramener l'étude de l'écoulement autour des aubages mobiles à celle autour des mêmes aubages immobilisés artificiellement. Ainsi, sur le plan purement cinématique, on peut supposer dans une première approximation que les relations établies avec la vitesse absolue  $\vec{C}$  peuvent être utilisées en remplaçant  $\vec{C}$  par la vitesse relative  $\vec{W}$  à partir de laquelle on vérifiera notamment la condition de glissement sur les aubages.

Cette manipulation n'est pourtant justifiée que dans le cas restreint des équations qui ne sont pas fondées sur l'hypothèse d'irrotationnalité de l'écoulement. Pour les autres, et notamment celles faisant appel à la fonction potentiel  $\Phi$ , une correction faisant intervenir la vitesse instantanée de rotation  $\omega$ , est nécessaire.

Introduite par Stodola, cette particularité de l'écoulement relatif est décrite par la relation générale (annexe A.6.) :

$$\overrightarrow{rot} \vec{C} = \overrightarrow{rot} \vec{W} + 2\vec{\omega} \quad (\text{II.2})$$

montrant que si l'écoulement absolu est irrotationnel, l'écoulement relatif est quant à lui rotationnel :

$$\overrightarrow{rot} \vec{W} = -2\vec{\omega} \quad (\text{II.3a})$$

Relation qui s'écrit aussi d'après l'annexe A.6 :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{W} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \frac{\delta W_a}{\delta \theta} - \frac{\delta W_u}{\delta z} = 0 \\ \frac{\delta W_r}{\delta z} - \frac{\delta W_a}{\delta r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\delta(rW_u)}{\delta r} - \frac{1}{r} \frac{\delta W_r}{\delta \theta} = -2\omega \end{vmatrix} \quad (\text{II.3b})$$

**Les conséquences sont nombreuses :**

• Partant d'un écoulement absolu (aubages réellement immobiles), l'écoulement relatif ne peut être obtenu qu'en supposant à celui-ci un tourbillon d'intensité  $-\omega$  appelé tourbillon relatif.

• Le transfert énergétique entre les aubages et le fluide peut donc s'effectuer par l'intermédiaire de la circulation (machines axiales), de tourbillon relatif (machine centrifuge) ou encore par les deux modes à la fois (machines hélico-centrifuges).

• La présence de ce tourbillon confère à l'écoulement relatif inter-aubages ses propriétés essentielles :

1. non axisymétrique ( $\delta/\delta\theta$  différent de 0)

2. non permanent mais de caractère périodique s'illustrant par les relations :

|                                                                  |
|------------------------------------------------------------------|
| $W(r, z, \theta) = W\left(r, z, \theta + \frac{2\pi}{Na}\right)$ |
| $C(r, z, \theta) = C\left(r, z, \theta + \frac{2\pi}{Na}\right)$ |

où  $Na$  représente le nombre d'aubages.

Suivant les applications, on pourra cependant considérer l'écoulement comme permanent en moyenne.

- L'existence du tourbillon relatif est à l'origine du glissement, particulièrement important dans la prévision des performances des pompes centrifuges.

- L'effet de la viscosité sur le glissement est négligé dans cette étude.

## II.2-Equation de continuité:

On se place dans le cas général de l'écoulement dans l'espace inter-aubages correspondant à une grille d'aubes tridimensionnelle, dans laquelle on fait apparaître en coordonnées cylindriques les composantes des vitesses absolues  $\vec{C}$ , relative  $\vec{W}$  et d'entraînement  $\vec{U}$ .

$$\vec{C} = \begin{cases} Cr = \frac{\delta\phi}{\delta r} \\ Cu = \frac{\delta\phi}{r\delta\theta} \\ Ca = \frac{\delta\phi}{\delta z} \end{cases} \quad \vec{W} = \begin{cases} Wr \\ Wu \\ Wa \end{cases} \quad \vec{U} = \begin{cases} 0 \\ U = \omega r \\ 0 \end{cases}$$

L'écoulement absolu étant irrotationnel, la vitesse  $\vec{C}$  dérive d'un potentiel  $\phi$  comme l'indique ses composantes Cr, Cu et Ca.

La figure I.3a montre la vue méridienne et la vue de face de la grille d'aubes retenue. On définit dans cette figure trois directions particulièrement importantes :

- La direction m décrivant la ligne de courant méridienne, la composante méridienne Cm assurant le débit et l'angle  $\delta$  formé entre la direction méridienne et l'axe oz;

- la direction dl correspondant à la ligne de courant relative;

- La direction ds correspondant à la ligne de courant absolue.

Il faut noter que, seules les composantes U, Cu et Wu sont en vraie grandeur sur la vue de face de la figure II.3a.

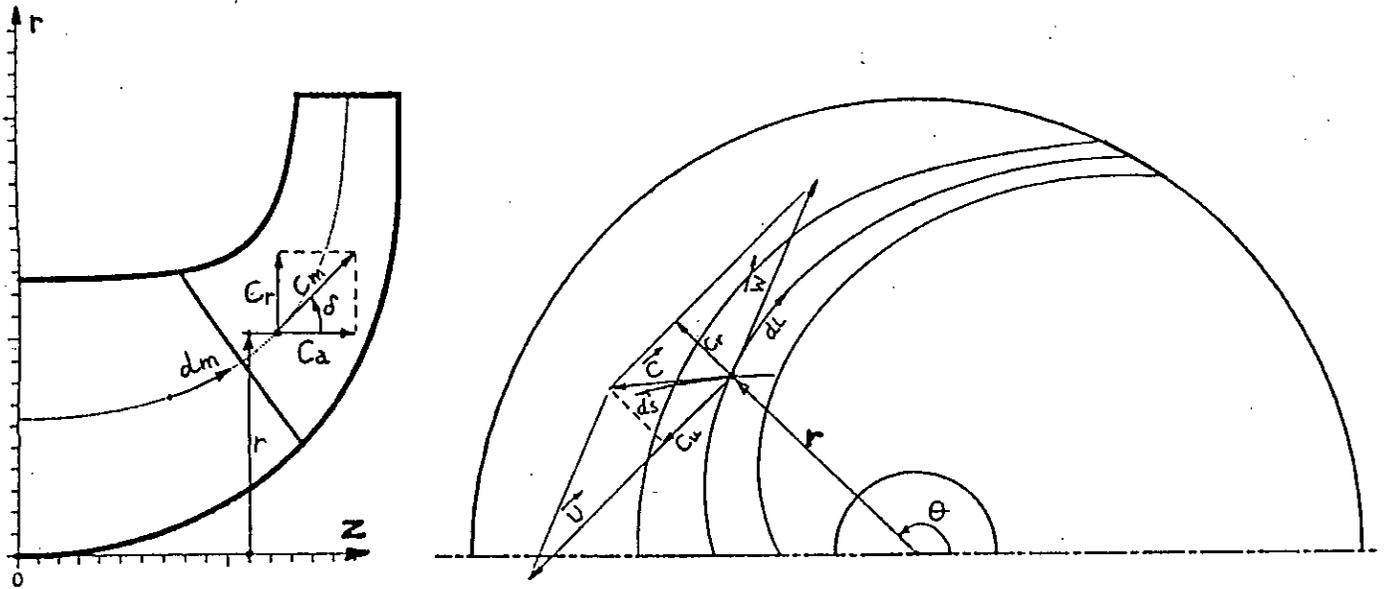


Figure II.3a : Vue méridienne et vue de face

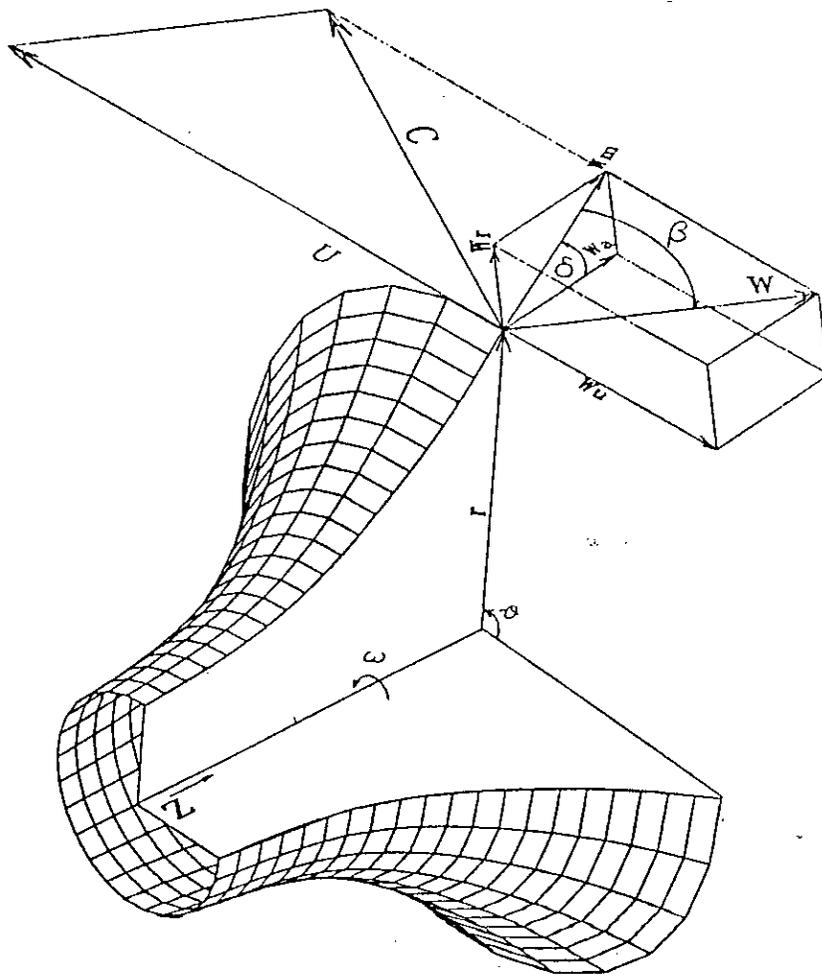


Figure II.3b : écoulement dans une grille tridimensionnelle

De ces figures, on déduit les relations géométriques suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 Cr = Cm \sin \delta & dr = dm \sin \delta \\
 Ca = Cm \cos \delta & dz = dm \cos \delta \\
 Cm = Wm &
 \end{array} \quad (II.5)$$

où  $dm$  est l'abscisse curviligne d'un tronçon en vue méridienne.

La loi de composition des vitesses donne la liaison entre les composantes des différentes vitesses :

$$\vec{C} = \begin{cases} Cr = \frac{\delta \Phi}{\delta r} = Wr \\ Cu = \frac{\delta \Phi}{r \delta \theta} = U + Wu = \omega r + Wu \\ Ca = \frac{\delta \Phi}{\delta z} = Wa \end{cases} \quad (II.6)$$

L'équation de continuité s'écrit pour un écoulement absolu :

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \text{div}(\rho \vec{C}) = 0 \quad (II.7)$$

Et en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r}(\rho r Cr) + \frac{\delta(\rho Cu)}{r \delta \theta} + \frac{\delta(\rho Ca)}{\delta z} = 0$$

et le système (II.6) décrivant la composition des vitesses est :

$$\vec{C} = \vec{U} + \vec{W} = \begin{cases} Cr = Wr \\ Cu = \omega r + Wu \\ Ca = Wa \end{cases} \quad (II.8)$$

En reportant les composantes  $C_r$ ,  $C_u$ ,  $C_a$  dans l'équation de continuité et en remarquant que :

$$\frac{\delta(\rho \omega r)}{r \delta \theta} = 0$$

Celle-ci se transforme en :

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} (\rho r W_r) + \frac{\delta(\rho W u)}{r \delta \theta} + \frac{\delta(\rho W a)}{\delta z} = 0$$

Ce qui traduit l'écriture vectorielle suivante :

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \text{div}(\rho \vec{W}) = 0 \quad (\text{II.9})$$

L'équation de continuité s'écrit donc de façon identique en mouvement relatif (II.9) et en mouvement absolu (II.7).

### II.3-Fonction potentiel:

Ecrivons maintenant la différentielle totale de  $\phi$  (A.5.) :

$$d\phi = \frac{\delta \phi}{\delta r} dr + \frac{\delta \phi}{r \delta \theta} r d\theta + \frac{\delta \phi}{dz} dz$$

Cette différentielle est calculable de deux façons, en remplaçant les termes  $\frac{\delta \phi}{\delta r}$ ,  $\frac{\delta \phi}{r \delta \theta}$  et  $\frac{\delta \phi}{dz}$  par les composantes de  $\vec{C}$  (système (II.6)) ou par les composantes issues de la composition de vitesse (II.8).

Dans le premier cas, on obtient :

$$d\phi = C_r dr + C_u r d\theta + C_a dz$$

En utilisant les relations géométriques du système (II.5),  $d\phi$  s'écrit aussi :

$$d\phi = C_m dm \sin^2 \delta + C_u r d\theta + C_m dm \cos^2 \delta$$

Soit après groupement et simplification :

$$d\phi = C_m dm + C_u r d\theta = C ds \quad (\text{II.10})$$

Partant des autres composantes, la relation (II.10) peut s'écrire:

$$d\phi = W_m dm + (U + W_u) r d\theta$$

$$d\phi = W_m dm + W_u r d\theta + \omega r^2 d\theta$$

Soit finalement :

$$d\phi = W dl + \omega r^2 d\theta = d\phi_R + d\phi_E \quad (\text{II.11})$$

Le potentiel de l'écoulement absolu irrotationnel peut donc s'écrire comme la superposition des pseudo-potentiels relatif et d'entraînement.

#### II.4-Equation dynamique en mouvement relatif :

L'équation générale de la dynamique des fluides parfaits s'écrit dans le repère absolu (relation I.14):

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{C}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - \text{grad}(gh) \quad (\text{II.12})$$

relation dans laquelle  $\vec{\Gamma}$  prend la forme vectorielle issue de la relation (I.5) :

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{\delta\vec{C}}{\delta t} + \text{grad} \frac{C^2}{2} - \vec{C} \wedge \text{rot } \vec{C} \quad (\text{II.13})$$

Lorsque  $\vec{C}$  est issu de la composition des vitesses relative  $\vec{W}$  et d'entraînement  $\vec{U} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ :

$$\vec{C} = \vec{W} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

L'accélération absolue peut être calculée à partir de la dérivée suivante:

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{d\vec{W}}{dt} + \frac{d\vec{U}}{dt} + 2 \vec{\omega} \wedge \vec{W} \quad (\text{II.14})$$

Relation issue de la composition des accélérations où l'accélération absolue est constituée de la somme des accélérations relative, d'entraînement et de Coriolis

D'après l'équation (II.13), les accélérations relative et d'entraînement s'écrivent:

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \frac{\delta\vec{W}}{\delta t} + \overrightarrow{\text{grad}} \frac{W^2}{2} - \vec{W} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{W} \quad (\text{II.15})$$

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\delta\vec{U}}{\delta t} + \overrightarrow{\text{grad}} \frac{U^2}{2} - \vec{U} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} \quad (\text{II.16})$$

Avec :

$$\vec{U} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} = \begin{vmatrix} 0 & \omega r & 0 \\ \omega r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2\omega^2 r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \overrightarrow{\text{grad}} \frac{U^2}{2}$$

D'où la relation (II.16) pour  $\omega = \text{cte}$  :

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}} \frac{U^2}{2}$$

La relation (II.14) s'écrit maintenant :

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{\delta\vec{W}}{\delta t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} \right) - \vec{W} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{W} + 2 \vec{\omega} \wedge \vec{W}$$

En remarquant que :

$$-\vec{W} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{W} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{W} = -\vec{W} \wedge (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{W} + 2\vec{\omega}) \quad (\text{II.17})$$

On obtient l'expression de l'équation dynamique en mouvement relatif pour un fluide barotrope :

$$-\overrightarrow{\text{grad}} \left[ \int \frac{dp}{\rho} + gh + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} \right] = \frac{\delta\vec{W}}{\delta t} - \vec{W} \wedge (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{W} + 2\vec{\omega}) \quad (\text{II.18})$$

**Simplifications :**

Pour un écoulement établi irrotationnel, la relation (II.18) indique que le second terme du second membre s'annule.

On peut alors intégrer l'équation (II.2) sur une ligne de courant relative pour obtenir la relation de Bernoulli en mouvement relatif :

$$\int \frac{dp}{\rho} + gh + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} + \int \frac{\delta W}{\delta t} dl = \text{cte}(t) \quad (\text{II.19})$$

Où le second terme est une constante d'intégration dépendant du temps.

En introduisant le potentiel relatif  $\phi_R$  défini en II.3, la relation de Bernoulli s'écrit également :

$$\int \frac{dp}{\rho} + gh + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} + \frac{\delta \phi_R}{\delta t} = \text{cte}(t) \quad (\text{II.20})$$

Enfin, dans le cadre d'un écoulement relatif permanent, on obtient la forme générale utilisable sur l'ensemble de l'écoulement :

$$\int \frac{dp}{\rho} + gh + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} = \text{cte} \quad (\text{II.21})$$

En dehors des écoulements à surface libre, les termes liés à la pesanteur sont généralement négligeables par rapport aux autres termes.

En fluide incompressible, le terme de pression s'écrit aussi :

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho} \int dp = \frac{p}{\rho}$$

**Expression énergétiques :**

dans le cadre de l'écoulement isentropique défini comme l'écoulement d'un fluide parfait sans échange de chaleur avec le milieu extérieur, l'enthalpie  $h$  du fluide s'écrit :

$$h = \int \frac{dp}{\rho} \quad (\text{II.22})$$

et l'enthalpie d'arrêt ou l'enthalpie totale H:

$$H = h + \frac{C^2}{2} = \int \frac{dp}{\rho} + \frac{C^2}{2} \quad (\text{II.23})$$

Dans le cadre du mouvement relatif, on définit aussi la rothalpie I par la somme :

$$I = h + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} = \int \frac{dp}{\rho} + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} \quad (\text{II.24})$$

Le théorème de Bernoulli en écoulement permanent et irrotationnel s'écrit donc :

$$H = \text{cte} \quad \text{en mouvement absolu}$$

$$I = \text{cte} \quad \text{en mouvement relatif}$$

Dans ces conditions d'application, les constantes d'intégration concernent l'ensemble de l'espace fluide. On qualifie ces écoulements d'isoénergétiques.

L'enthalpie d'un fluide ne peut varier que dans le cas d'un écoulement en grille mobile où est mise en oeuvre la vitesse d'entraînement  $\vec{U}$  issue généralement d'une rotation.

La variation d'enthalpie entre l'entrée 1 et la sortie 2 de la grille mobile s'écrira, d'après (II.23) :

$$\Delta H = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{C_2^2 - C_1^2}{2} \quad (\text{II.25})$$

Parallèlement, l'équation (II.24) donne la conservation de la rothalpie :

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} - \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} \quad (\text{II.26})$$

D'où les deux formes cinématiques de l'équation d'Euler des turbomachines :

$$\Delta H = \frac{C_2^2 - C_1^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} - \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} = U_2 C u_2 - U_1 C u_1$$

Concernant les pompes et les ventilateurs, on utilise la hauteur totale d'élévation au lieu de la variation d'enthalpie :

$$H_{th} = \frac{C_2^2 - C_1^2}{2g} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} - \frac{W_2^2 - W_1^2}{2g} = \frac{U_2 C u_2 - U_1 C u_1}{g} \quad (II.27)$$

S'agissant d'un fluide parfait, l'expression ci-dessus est qualifiée de hauteur théorique.

Inversement, pour une grille de turbine, la hauteur cédée par le fluide est donnée par la relation :

$$H_{th} = \frac{U_1 C u_1 - U_2 C u_2}{g}$$

## II.5-Evolution des triangles de vitesse en fonction du débit :

Nous considérons dans ce qui suit que la vitesse de rotation  $\omega$  est constante et que la géométrie de la roue est parfaitement définie.

Pour simplifier cette première approche qualitative, on retient l'hypothèse d'un écoulement relatif axisymétrique. Pour faciliter la comparaison des relations établies avec celle de la littérature, les angles relatifs sont comptés positivement dans le sens inverse du sens trigonométrique.

### II.5.1-Adaptation à l'entrée de la roue :

En supposant que le fluide pénètre dans la roue sans prérotation, la vitesse d'entraînement  $\vec{U}_1$  et la vitesse absolue  $\vec{C}_1$  sont entièrement définies par leurs composantes :

$$\vec{U}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ U_1 = \omega R_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C}_1 = \begin{pmatrix} C m_1 = \frac{Q_i}{S_1} = \frac{Q_i}{2\pi R_1 b_1} \\ C u_1 = 0 \end{pmatrix}$$

A partir des triangles des vitesses, on peut calculer la direction du fluide matérialisée par l'angle  $\beta_1$  :

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{U_1}{C_{m_1}} = \frac{\omega R_1 2\pi b_1}{Q_i} \quad (\text{II.28})$$

On définit l'adaptation lorsque l'angle  $\beta_1$  est égal à l'angle d'aubage  $\beta_{10}$  ( $Q_i$  est alors égal à  $Q_a$ ).

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\omega R_1 2\pi b_1}{Q_i} = \operatorname{tg} \beta_{10} \quad \text{et} \quad Q = Q_a \quad (\text{II.29})$$

D'où la valeur du débit d'adaptation  $q_a$  en fonction de la vitesse de rotation et de la géométrie de l'entrée de l'ailetage :

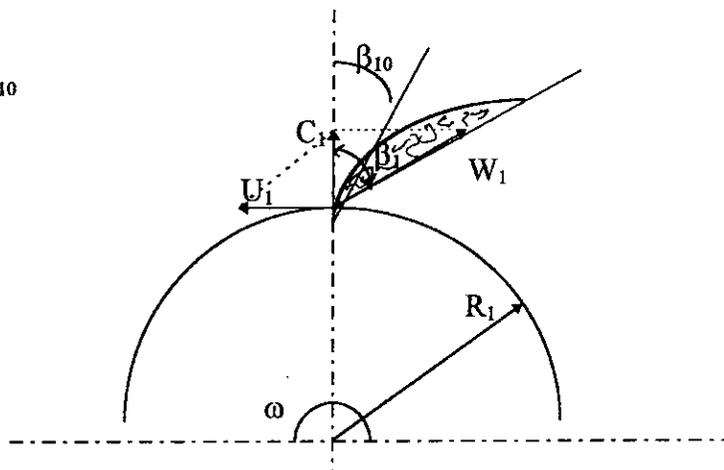
$$Q_a = \frac{2\pi\omega R_1^2 b_1}{\operatorname{tg} \beta_{10}} \quad (\text{II.30})$$

Dans le cas où  $Q < Q_a$  (figure II.4a), l'angle fluide  $\beta_1$  est supérieur à l'angle d'aubage  $\beta_{10}$  et on observe un décollement se produisant sur la face en dépression de l'aubage qui s'accroît quand on s'éloigne du débit d'adaptation.

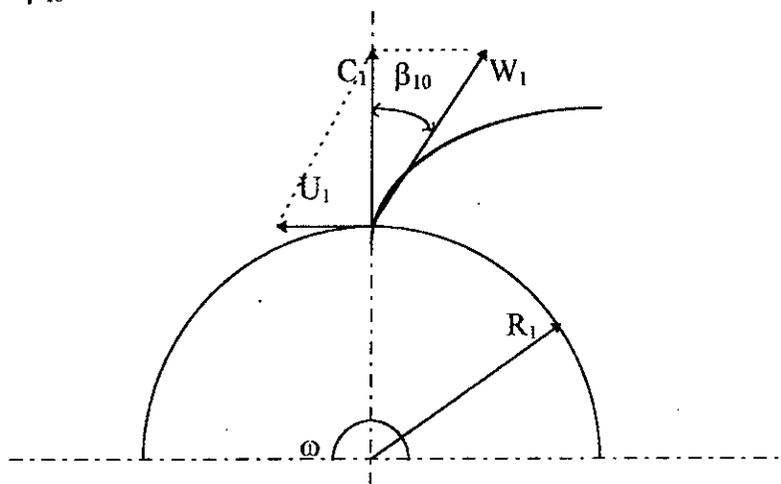
Quand  $Q > Q_a$  (figure II.4c), l'angle fluide  $\beta_1$  est inférieur à l'angle d'aubage  $\beta_{10}$  et c'est la face en pression qui est le siège d'un décollement.

Naturellement, ces perturbations s'accompagnent de pertes que l'on qualifie de pertes de désadaptation.

a)  $Q < Q_a$      $\beta_1 > \beta_{10}$



b)  $Q = Q_a$      $\beta_1 = \beta_{10}$



c)  $Q > Q_a$      $\beta_1 < \beta_{10}$

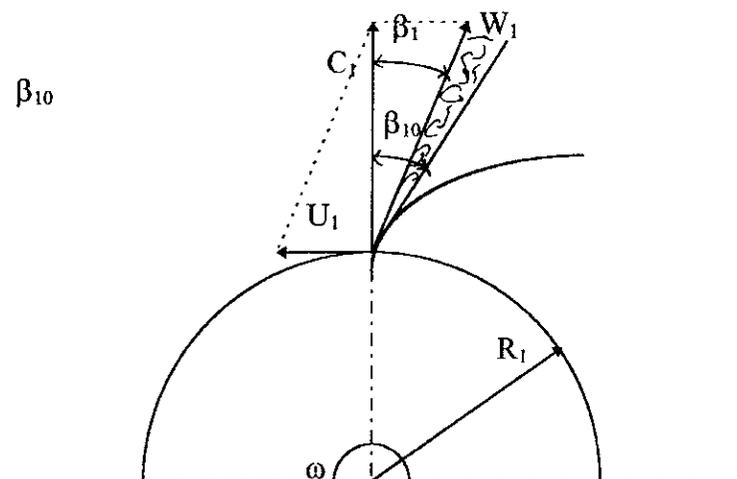


Figure 4: Influence du débit sur les triangles de vitesse à l'entrée de la roue.

### II.5.2-Triangles de vitesses à la sortie de la roue:

Les triangles de vitesse de sortie ne peuvent être construits sans l'intervention d'une hypothèse simplificatrice qui consiste à supposer que le fluide sort de la roue suivant la direction imposée par la direction de la sortie d'aubage. Cette hypothèse, appelée hypothèse d'Euler, n'est justifiée que dans le cas où le nombre d'aubages tend vers l'infini.

Dans ces conditions, la direction de la vitesse relative  $\vec{W}_2$  correspond à l'angle  $\beta_{2\infty}$  de l'aube et ceci quel que soit le débit. La relation d'Euler s'écrit alors :

$$H_{th\infty} = \frac{U_2 C u_{2\infty}}{g}$$

Les vitesses se décomposeront de la manière suivante (figure II.5b).

$$\vec{U}_2 = \begin{cases} 0 \\ U_2 = \omega R_2 \end{cases}$$

$$\vec{C}_2 = \begin{cases} C m_2 = \frac{Q_i}{2\pi R_2 b_2} \\ C u_2 = U_2 - C m_2 \operatorname{tg} \beta_{2\infty} \end{cases}$$

d'où l'expression analytique en fonction du débit, de la vitesse de rotation et de la géométrie de la roue :

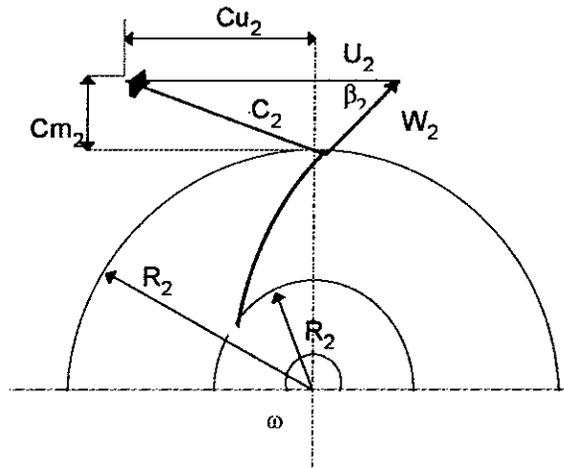
$$H_{th\infty} = \frac{U_2}{g} \left[ U_2 - \frac{Q_i}{2\pi R_2 b_2} \operatorname{tg} \beta_{2\infty} \right] \quad (\text{II.31})$$

Lorsque le débit diminue (figure II.5a), la composante  $C u_{2\infty}$  augmente, ainsi que la hauteur théorique. Quand le débit tend vers zéro elle prend la valeur  $\frac{U_2^2}{g}$ .

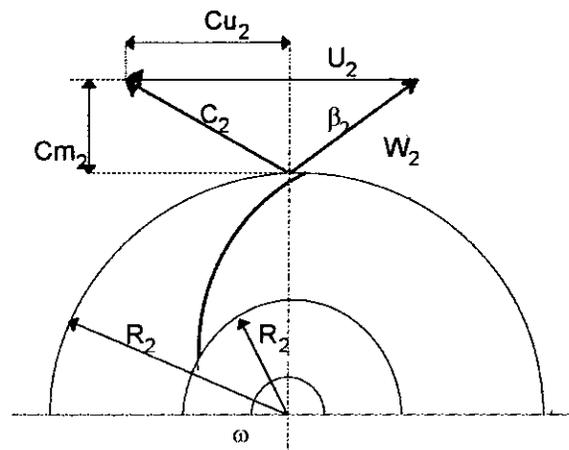
Inversement, lorsque le débit augmente (figure II.5c), la composante  $C u_2$  diminue jusqu'à atteindre la valeur zéro. Le débit correspondant à l'annulation de la hauteur théorique est donné par l'annulation de l'équation (II.31) :

$$Q_{max\infty} = \frac{2\pi R_2^2 b_2}{tg\beta_{2\infty}} \quad (\text{II.32})$$

a)  $Q < Q_a$



b)  $Q = Q_a$



c)  $Q > Q_a$

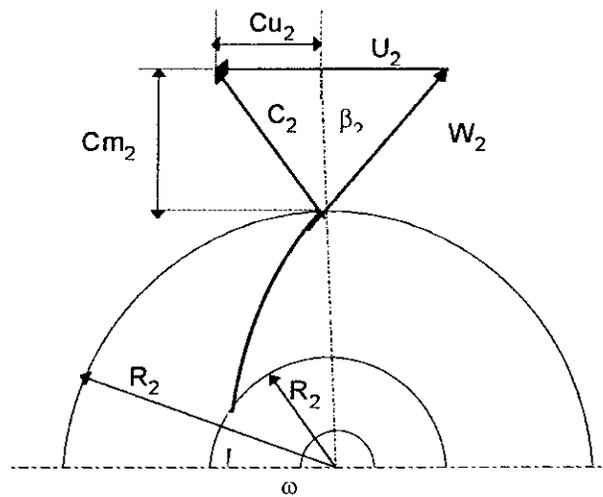


Figure II.5 : Influence du débit sur les triangles des vitesses à la sortie de la roue

## II.6-Influence du nombre d'aubes et modélisation du coefficient de glissement :

Nous avons supposé jusqu'ici que le fluide sortait de la roue suivant l'angle  $\beta_{2\infty}$  des aubes. Cette hypothèse s'avère réaliste lorsque le nombre d'aubages tend vers l'infini. En nombre fini d'aubages, tout se passe comme si l'écoulement moyen subissait en bloc un écart angulaire par rapport à la direction de sortie d'aubage.

Pour illustrer ce phénomène, nous présentons le tracé simplifié du champs de vitesses dans la roue centrifuge.

La roue retenue tourne à  $\omega = 150$  rd/s et les aubages, au nombre de 5, forment des spirales logarithmiques d'angle  $\beta = 65^\circ$ . Les rayons d'entrée et de sortie sont respectivement :

$$R_1 = 63 \text{ mm et } R_2 = 132 \text{ mm (figure II.6).}$$

### II.6.1-Maillage simplifié d'un espace inter-aubages:

On trace avec un pas sensiblement uniforme, l'ensemble des cercles ayant pour enveloppe s les différentes frontières de l'écoulement. Ces lignes enveloppes ( $\psi_i$  et  $\psi_e$ ) sont considérés comme des lignes de courant que le lien des centres des cercles que l'on désignera par ligne moyenne  $\bar{\psi}$  ou ligne de partage.

Si l'on joint par une même ligne trois points qui constituent les points de tangente à  $\psi_i$  et  $\psi_e$  et le centre d'un même cercle, on obtient l'allure des équipotentiels. On veillera au moment de ce tracé à l'orthogonalité avec les lignes de courant.

On peut calculer le potentiel du point M par la relation (II.11) :

$$\Delta\Phi = \bar{W}\Delta l_i + \omega r^2 \Delta\theta \quad (\text{II.33})$$

avec:

$\Delta l$ : abscisse curviligne séparant deux points du maillage.

$r$ : rayon du point considéré.

$\Delta\theta$  : variation angulaire entre deux points du maillage ( $\Delta\theta$  est négatif de l'entrée vers la sortie)

$\bar{W}$  : vitesse relative assurant le débit dans la section considérée :

$$\bar{W} = \frac{Q_i}{b \cdot h} \quad (\text{II.34})$$

$b$  : diamètre du cercle considéré

$h$  : épaisseur de la veine fluide supposée ici constante.

Les points de tangence  $M_i, M_e$  appartenant respectivement à la ligne de courant intérieur  $\psi_i$  et à la ligne de courant  $\psi_e$ , sont situés sur le même potentiel. De cette propriété, on peut déduire les valeurs des vitesses relatives à l'intrados et à l'extrados.

$$W_i = \frac{\Delta\phi - \omega r_i^2 \Delta\theta_i}{\Delta l_i} \quad (\text{II.35})$$

$$W_e = \frac{\Delta\phi - \omega r_e^2 \Delta\theta_e}{\Delta l_e} \quad (\text{II.36})$$

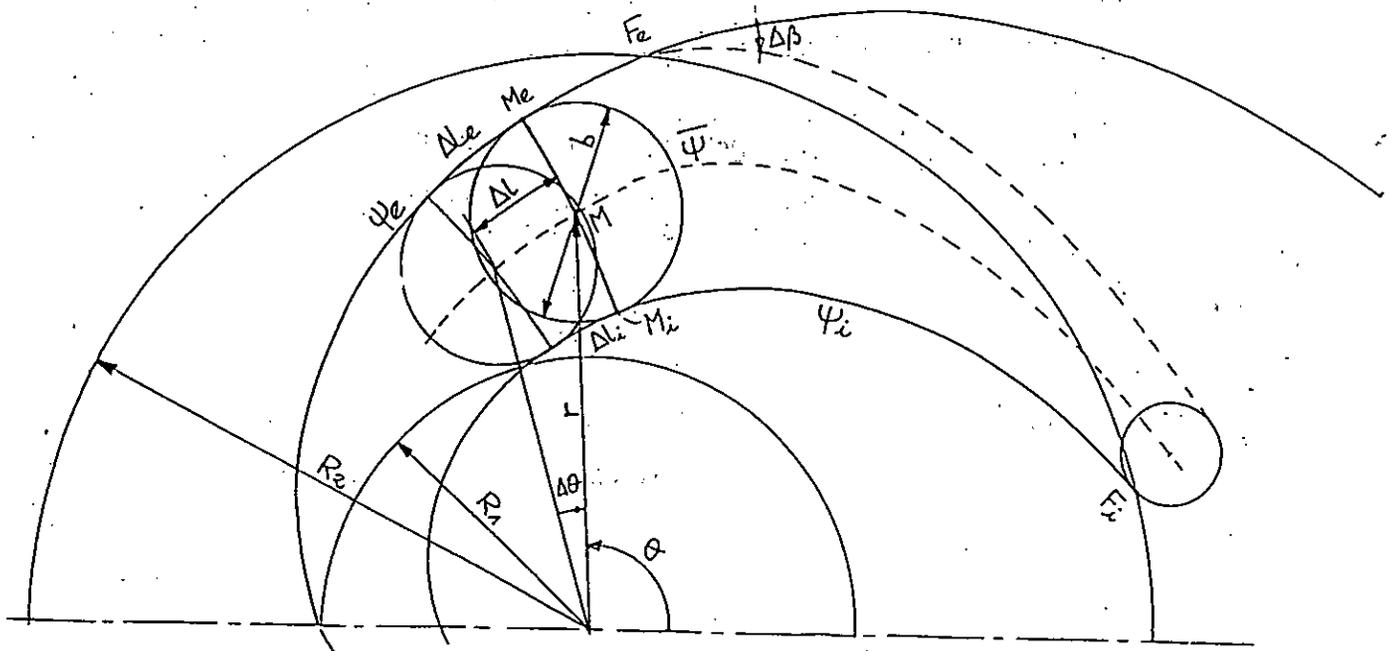


Figure II. 6 : Définitions relatives à l'espace inter-aubages

**II.6.2-Condition de périodicité :**

Celle-ci s'exprime, au même titre que la condition de Kutta-Joukowski, par l'unicité de la vitesse au bord de fuite des aubes. dans le cas d'une grille, il convient donc de respecter l'égalité des vitesses au points  $F_i$  et  $F_e$ .

Cette propriété ne peut être observé que dans le cas où la ligne de courant  $\psi_e$  s'écarte, à partir de  $F_e$ , de la spirale logarithmique d'un angle  $\Delta\beta$ .

**II.6.3-Application :**

On propose de déterminer le champ de vitesse relative sur les deux faces de l'aube de la roue considérée ci-dessus, en mesurant graphiquement les paramètres géométriques nécessaires.

Pour simplifier les calculs, on a établi un programme en Fortran

Les relations (II.30) et (II.31) permettent le calcul des vitesses relatives  $W_e$  et  $W_i$  (figure II.7).

**Interpretation:**

On constate d'importances vitesses sur la ligne de courant extérieure et des vitesses faibles voire nulles ou négatives sur la ligne de courant intérieure.

La présence du tourbillon relatif engendre donc un écoulement relatif non axisymétrique pour lequel on observe sur un même rayon :

$$\frac{\delta W}{\delta \theta} > 0 \quad (\text{II.37})$$

Le champ de pression est calculé à partir de la relation de Bernoulli en mouvement relatif (relation II.21 avec simplifications classiques) :

$$p + \rho \left[ \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} \right] = \text{cte} \quad (\text{II.38})$$

La constante est calculée en fixant la pression à l'entrée de la ligne moyenne.

La ligne de courant intérieure est en surpression par rapport à la ligne de courant extérieure jusqu'à la sortie où la condition de périodicité impose une égalité parfaite.

La partie située près du bord d'attaque de la face en dépression sera le siège du phénomène de cavitation en présence d'une pression d'entrée suffisamment faible.

Sur un même rayon, la différence de pression  $p_i - p_e$  matérialisera l'effort du fluide sur la pale, effort à l'origine du couple moteur  $C_m$  exigé pour entretenir le mouvement.

Celui-ci se calculera à partir des relations suivantes écrites pour une épaisseur d'écoulement unitaire :

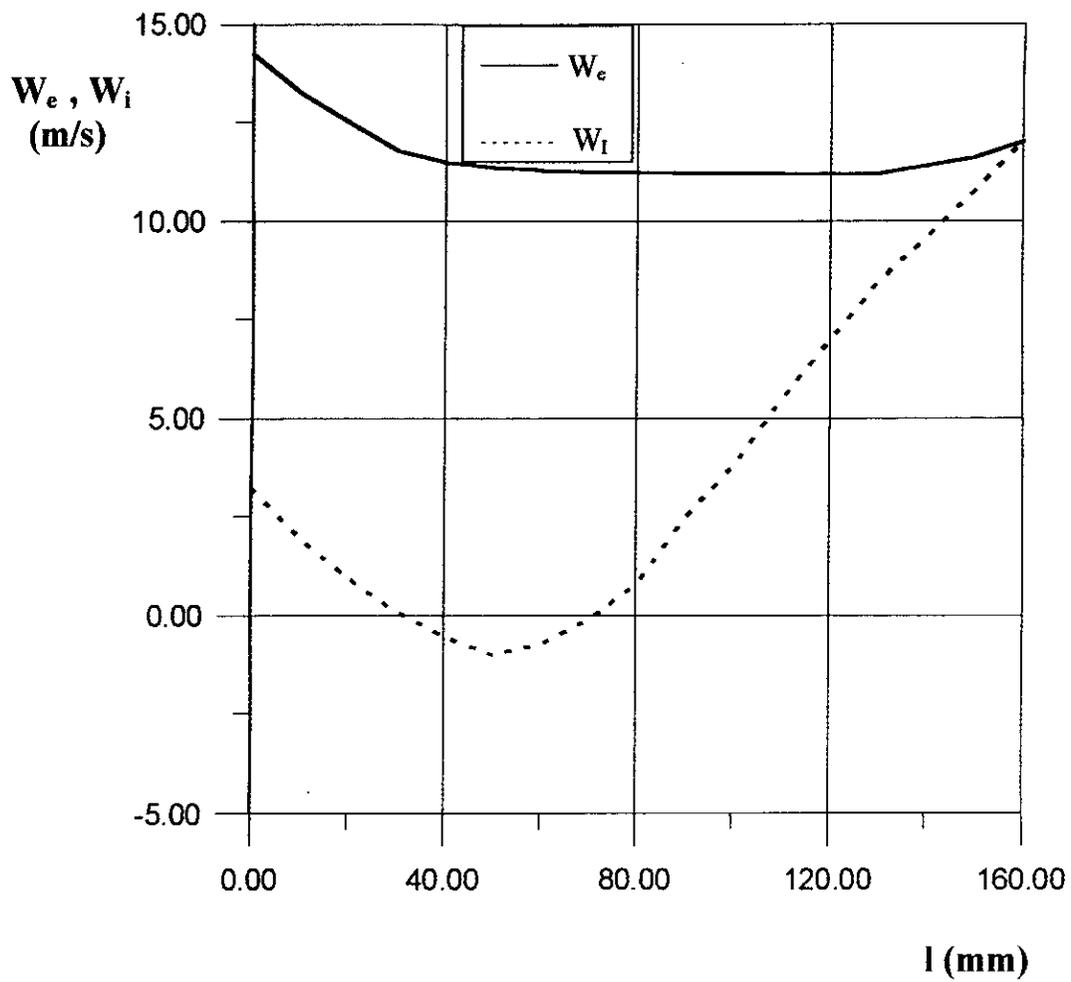
$$dC_m = r \cdot (p_i - p_e) N_a \cos\beta \, dl \quad (\text{II.39})$$

avec  $N_a$  : nombre d'aubages

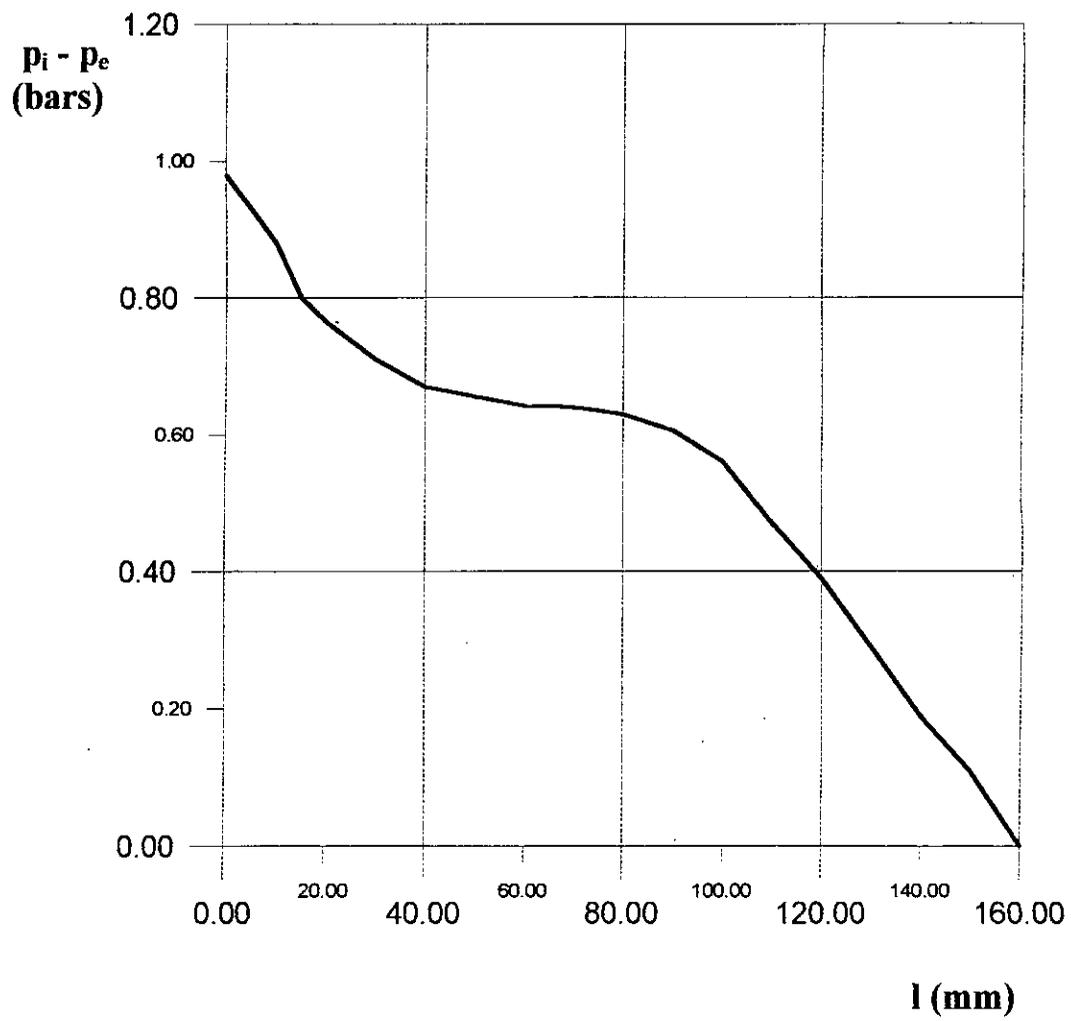
Soit finalement:

$$C_m = N_a \int_e^s r (p_i - p_e) \cos\beta \, dl \quad (\text{II.40})$$

L'allure de l'écart de pression  $(p_i - p_e)$  en fonction de l'abscisse curviligne de la pale est donnée sur la figure II.8.



*Figure II.7 : Evolution des vitesses relatives sur l'itrados et sur l'extrados en fonction de l'abscisse curviligne de la pale.*



*Figure II.8 : Evolution de l'écart de pression entre l'intrados et l'extrados en fonction de l'abscisse curviligne de la pale.*

A l'écart angulaire  $\Delta\beta$  observé ci-dessus est associé le coefficient de glissement  $\mu$  traduisant globalement un défaut de hauteur produite. l'expression de  $\mu$  est donnée par le rapport :

$$\mu = \frac{Cu_2}{Cu_{2\infty}} = \frac{H_{th}}{H_{th\infty}}$$

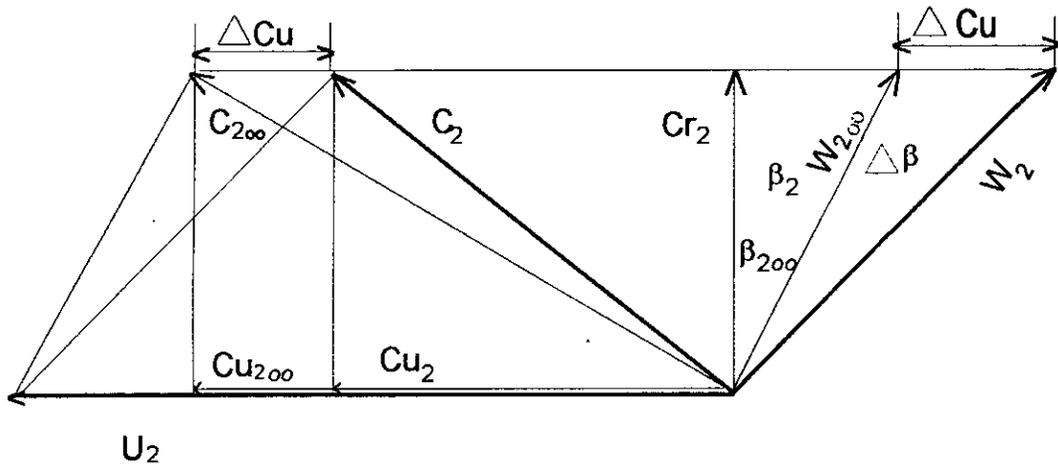


Figure II.9 : Influence du glissement sur les triangles des vitesses.

#### II.6.4-Modélisation du coefficient de glissement :

On retrouve dans la littérature de nombreuses relations semi-empiriques permettant de calculer le coefficient de glissement. Plusieurs auteurs se sont intéressés à ce calcul, parmi lesquels Stodola (1925), Buseman (1928), Pfleiderer (1935), Balje (1952), Weisner (1967). toute ces correlations ne doivent être utilisées que dans les conditions où les coefficients numériques qu'elle contiennent ont été confrontés avec l'expérience.

On retient pour notre cas La relation de pfeiderer qui fait apparaître le coefficient  $p$  dans l'expression du facteur de glissement :

$$\mu = \frac{1}{1+p} \quad (\text{II.41})$$

Pour lequel il propose la forme :

$$P = \frac{0,6(1 + \cos \beta_{2\infty})R_2^2}{Na Mst} \quad (\text{II.42})$$

Na étant le nombre d'aubes et Mst le moment statique de l'aube par rapport à l'axe de rotation (figure II.3a):

$$Mst = \int_{R_1}^{R_2} r \, dm = \int_{R_1}^{R_2} \frac{r \, dr}{\sin \delta} \quad (\text{II.43})$$

On calcul cette integrale par une methode graphique ou numerique.

## CHAPITRE III

# CARACTÉRISTIQUE DE LA MACHINE- ÉVALUATION DES PERTES

### III.1-Caractéristique $H = f(q)$ :

La hauteur théorique, pour un nombre d'aube infini, est donnée par la relation d'Euler :

$$H_{th\infty} = \frac{U_2 C_{u2\infty}}{g}$$

Suivant l'équation de continuité et la propriété des triangles de vitesses en sortie, on écrit

$$C_{m2} = Q_i / (2 \pi R_2 b_2) \quad (III.1)$$

et 
$$C_{u2} = U_2 - C_{m2} \operatorname{tg} \beta_{2\infty} \quad (III.2)$$

d'où :

$$H_{th} = \frac{U_2}{g} \left[ U_2 - \frac{Q_i}{2\pi R_2 b_2} \operatorname{tg} \beta_{2\infty} \right] \quad (III.3)$$

C'est l'équation d'une droite descendante avec le débit et passant par deux points de coordonnées calculables :

- A débit nul :  $Q = 0$  et  $H_{th\infty} = U_2^2 / g$

- A hauteur nulle :  $H_{th\infty} = 0$  et  $Q = Q_{\max\infty} = 2 \pi R_2^2 b_2 \omega / \operatorname{tg} \beta_{2\infty}$

Pour un nombre fini d'aubages, la caractéristique  $H_{th} = f(Q)$  est également représentée par une droite mais, suivant les auteurs, celle-ci est parallèle ou non à la précédente établie pour une infinité d'aubages.

Nous avons retenu, pour notre part, l'hypothèse du parallélisme introduite par Stodola, la hauteur théorique en nombre fini d'aube étant déduite au point d'adaptation par la relation:

$$H_{th} = \bar{\mu} H_{th\infty} \quad (III.4)$$

$\bar{\mu}$  étant le coefficient de glissement moyen, calculé sur trois lignes de courant  $\psi_c, \psi_i, \psi_m$  à partir de la relation (II.11).

$$\bar{\mu} = \frac{\mu_{\psi_m} + \mu_{\psi_i} + \mu_{\psi_c}}{3} \quad (III.5)$$

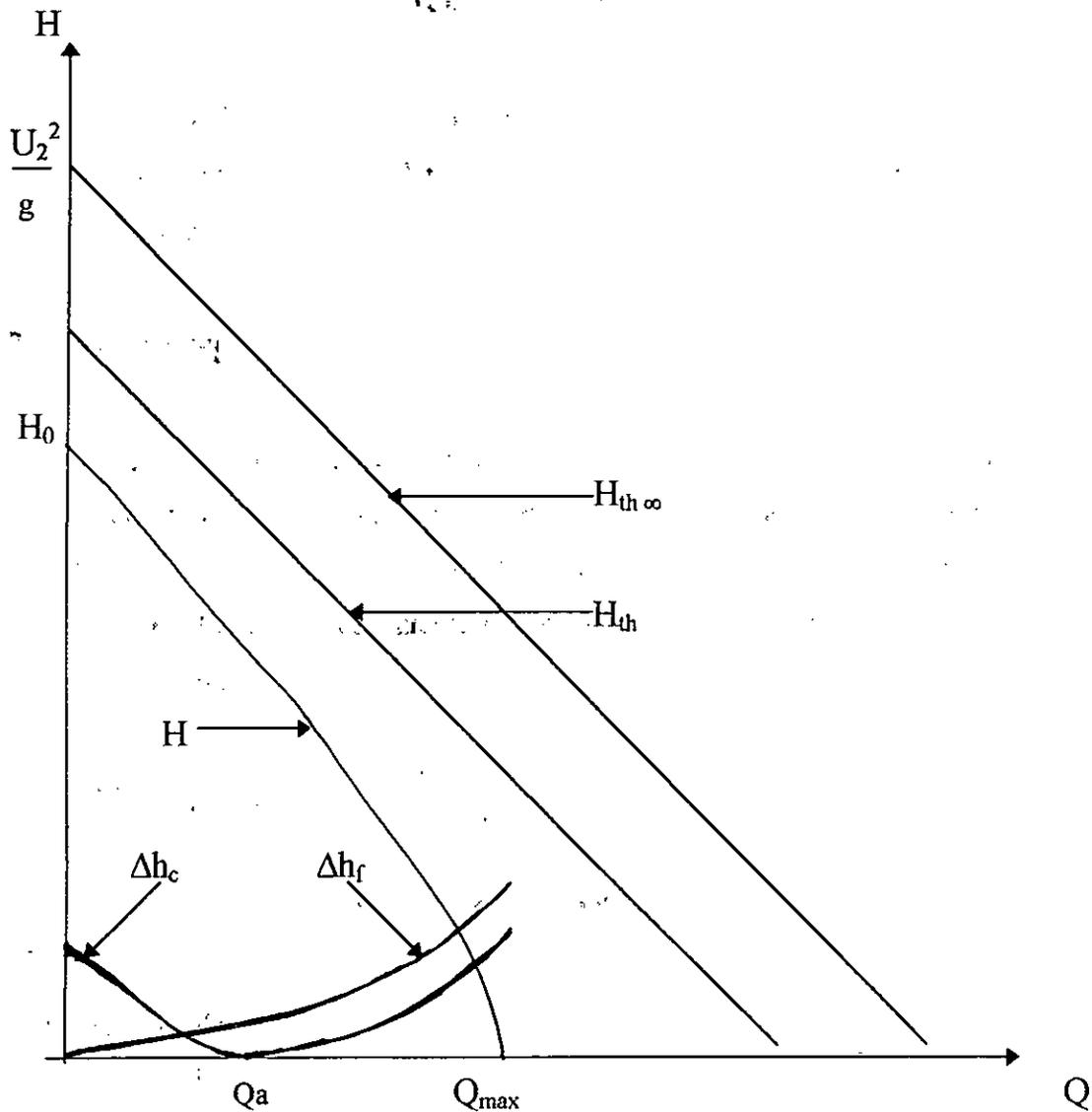


Figure III.1 : Construction de la courbe caractéristique  $H = f(Q)$

Pour la grande majorité des pompes, l'hypothèse du parallélisme est vérifiée expérimentalement, du moins dans la zone d'écoulement sain allant de 70% à 120% du débit nominal.

Au régime d'adaptation, correspondant au débit  $q_a$ , les pertes par frottement  $\Delta h_f$  existent. Celles-ci varient sensiblement comme le carré du débit et sont représentées par la parabole  $\Delta h_f = f(Q)$  (figure III.1). Les pertes de désadaptation croissent de part et d'autre du débit d'adaptation suivant une forme également parabolique  $\Delta h_c = f(Q)$ . En retranchant l'ensemble de ces pertes de la hauteur théorique  $H_{th}$ , on obtient la hauteur caractéristique  $H = H_{th} - \Delta h$ . Elle coupe les axes en deux points particuliers :

- A débit nul,  $H_0$  la hauteur à vanne fermée;
- A hauteur nulle,  $Q_{max}$  le débit maximal que débite la machine lorsqu'elle à la pression d'aspiration.

### III.2-Pertes énergétiques :

Les pertes dans la machine sont de trois types : hydrauliques ou aérauliques, mécaniques et volumétriques, elles sont incontournables mais peuvent être optimisées. Bien entendu, les pertes dues à l'environnement, par exemple à une mauvaise alimentation de la roue, ne font pas l'objet de ce paragraphe et ne sont pas à prendre en compte dans un fonctionnement normal.

#### III.2.1-Pertes hydrauliques :

Ces pertes sont arbitrairement dissociées en deux catégories :

- les pertes par frottement;
- les pertes de désadaptation.

Le rendement hydraulique les caractérisant est donné par :

$$\eta_H = (H_{th} - \Delta h) / H_{th} \quad (\text{III.6})$$

avec  $\Delta h$  : ensemble des pertes hydrauliques.

### III.2.1.1-Modélisation des pertes par frottement :

En raison du caractère fortement tridimensionnel des canaux interaubages, les pertes dans les canaux de la roue, du diffuseur et de la volute, sont difficiles à modéliser, même en régime d'adaptation.

On distingue ainsi sous le vocable de pertes par frottement, l'ensemble des trois pertes suivantes :

- Les pertes par frottement du fluide à la paroi des canaux  $\Delta h_f$ .
- Les pertes par changement de direction liées à la courbure de la veine  $\Delta h_{cd}$ .
- Les pertes par élargissement  $\Delta h_e$ .

Ces deux dernières pertes se produisent sur une longueur plus ou moins importante du canal et ne sont pas dissociables des pertes par frottement. Cependant, pour la commodité du calcul, nous les supposons concentrées dans le tronçon considéré. La sommation sera effectuée suivant le principe d'additivité :

$$\Delta h_{Fi} = \Delta h_{fi} + \Delta h_{ei} + \Delta h_{cdi} \quad (\text{sur un tronçon})$$

En discrétisant le canal en n tronçon :

$$\Delta h_F = \sum_{i=1}^n \Delta h_{Fi} \quad (\text{III.7})$$

#### III.2.1.1.1-Définition géométrique d'un tronçon :

Dans le cas du rotor on modélise chaque subdivision par un parallépipède et par un tronc conique dans le cas de la volute (figure III.2). Les éléments sont caractérisés par une section d'entrée  $S_i$ , une section de sortie  $S_{i+1}$  et une longueur  $\Delta l_i$ .

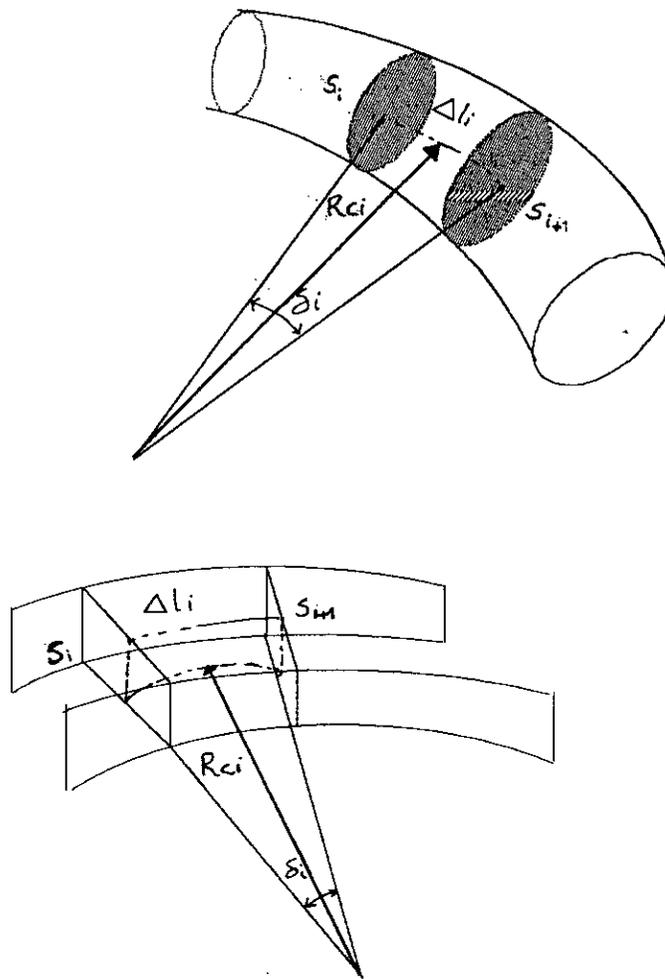


Figure III.2 : Définition géométrique d'un tronçon

#### III.2.1.1.2-Définition de la perte par frottement $\Delta h_f$ :

Les pertes par frottement sont liées à la viscosité du fluide et résultent des échanges de quantité de mouvement entre les diverses particules des couches voisines de fluide, qui se déplacent avec des vitesses différentes. On retiendra pour ces pertes la relation de Darcy-Weissbach, définie pour un écoulement turbulent dans un tuyau rugueux :

$$\Delta h_{Fi} = \frac{\lambda_i \Delta l_i W_i^2}{Dh_i 2g} \quad (\text{III.8})$$

avec

$Dh_i$  : Le diamètre hydraulique :  $Dh_i = 4 S_i / p_i$

où  $S_i$  et  $P_i$  sont respectivement la section mouillée et le périmètre mouillé.

$W_i$  : La vitesse débitante dans la section d'entrée :  $W_i = Q_i / S_i$

Où  $Q_i$  est le débit interne

$\lambda_i$  : Le coefficient linéique de perte de charge, tient compte de la nature de l'écoulement et de l'état de surface des parois, il est donné par la formule de Colebroock et White :

$$\lambda_i = \frac{1}{\left[ -2 \log_{10} \left[ \frac{2,51}{\Re_i \sqrt{\lambda_i}} + \frac{\bar{\Delta}}{3,71} \right] \right]^2} \quad (\text{III.9})$$

Avec :

$\bar{\Delta}$  : rugosité relative :

$$\bar{\Delta} = \frac{\Delta}{Dh_i}$$

Où  $\Delta$  est la hauteur moyenne des aspérités supposées uniformément réparties

$\Re_i$  : nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement :

$$\Re_i = \frac{W_i Dh_i}{\nu}$$

$\nu$  : viscosité cinématique du fluide.

Le coefficient  $\lambda$  est calculée par une méthode itérative (annex A.6).

### III.2.1.1.3-Définition de la perte par élargissement progressif $\Delta h_{ei}$ :

Les pertes de chages par élargissement sont liées à l'accroissement ou au décollement de la couche limite du à la présence d'un gradient de pression positif provoqué par la chute de vitesse associée à l'élargissement de la section débitante (figure III.3). Nous retiendrons pour ces pertes la relation relative aux divergents coniques.

$$\Delta h_{ei} = 3,2 \left[ \frac{Dh_{i+1} - Dh_i}{2\Delta l_i} \right]^{1,25} \left[ 1 - \left[ \frac{S_i}{S_{i+1}} \right]^2 \right] \frac{W_i^2}{2g} \quad (\text{III.10})$$

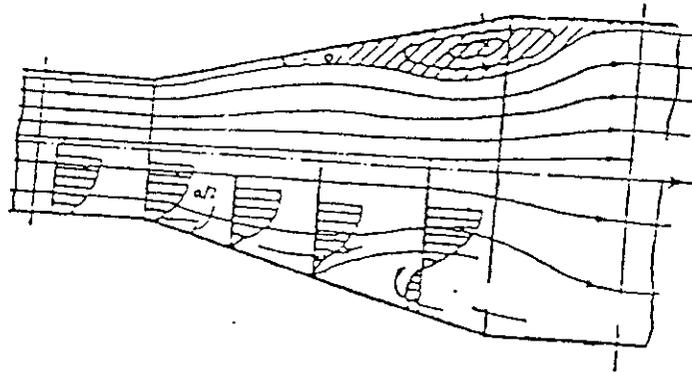


Figure III.3 : Décollement dans un divergent

### III.2.1.1.4-definition des pertes par changement de direction $h_{cdi}$ :

Les pertes de charge par changement de direction sont assciées à la formation de zones de décollement tourbillonnaire au voisinage des parois, réduisant la section de l'écoulement principal. La superposition de la force centrifuge et de la couche limite de parois donne naissance à un écoulement secondaire transversal qui, en se superposant à l'écoulement principale, donne une forme hélicoïdale aux lignes de courant (figure III.4).

On peut calculer ces pertes par la relation de Nekrassov simplifiée relative à un coude de section circulaire:

$$\Delta h_{cdi} = \left[ \frac{0,1134 \sin(\delta_i)}{\sqrt{\frac{R_{ci}}{Dh_i}}} \right] \frac{W_i^2}{2g} \quad (\text{III.11})$$

avec :

$\delta_i$  : l'angle au centre;

$R_{ci}$  : le rayon de courbure.

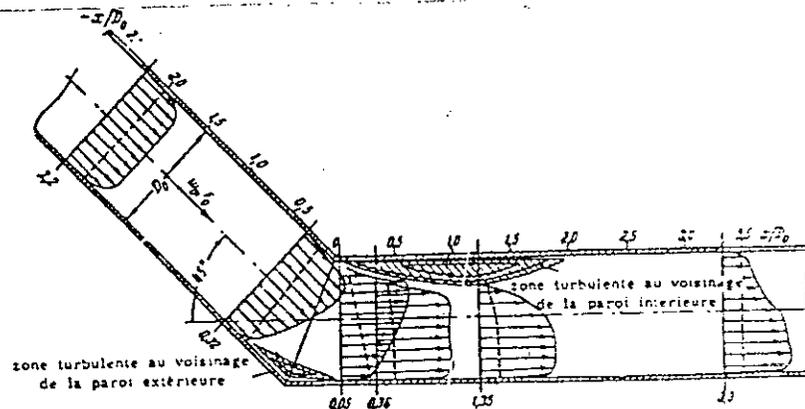


Figure III.4 : Décollement tourbillonnaire et écoulement secondaire dans un coude

### III.2.1.2-Modélisation des pertes de désadaptation :

les pertes de désadaptation, générées par l'écart formé entre la direction de la veine fluide et l'angle des aubes de la roue, sont représentées, pour des raisons de simplification, par une relation de type parabolique:

$$\Delta h_c = K_c (Q - Q_a)^2$$

Sur la base du dépouillement de résultats expérimentaux concernant plusieurs pompes industrielles représentant une plage de vitesses spécifiques de 10 à 70, une allure de ces pertes a été représentée sur la figure III.5 (voir figure).

On définit le coefficient de pertes de désadaptation (perte par choc)  $\psi_c$  et le coefficient de débit  $\varphi_c$  par les relations suivantes:

$$\Psi_c = \frac{\Delta h_c}{\frac{U_2^2}{g}} \tag{III.12}$$

$$\varphi_c = \frac{Q}{Qa} \tag{III.13}$$

On peut noter avec satisfaction que ces pertes s'annulent pratiquement toutes au voisinage du débit d'adaptation et présentent comme prévue une forme quadratique pratiquement symétrique sauf au voisinage du débit nul.

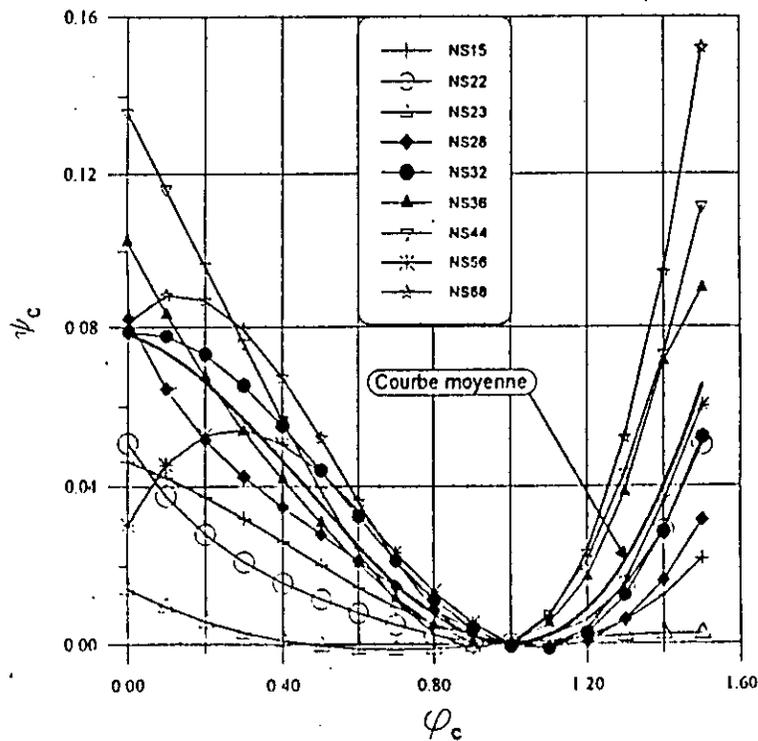


Figure III.5 : Evolution des pertes de désadaptation en fonction du débit.

L'évolution moyenne donnée sur la figure précédente peut être représentée par la corrélation :

$$\Psi_c = 0,12 \varphi_c^3 - 0,17 \varphi_c^2 - 0,03 \varphi_c + 0,08 \tag{III.14}$$

III.2.1.3-Application:

La figure (III.6) représente à titre d'exemple, une comparaison des caractéristiques expérimentale et théorique  $H = f(Q)$  établies suivant le modèle ci-dessus pour une pompe de vitesse spécifique égale à 32.

pour le calcul on a établi un programme en Fortran.

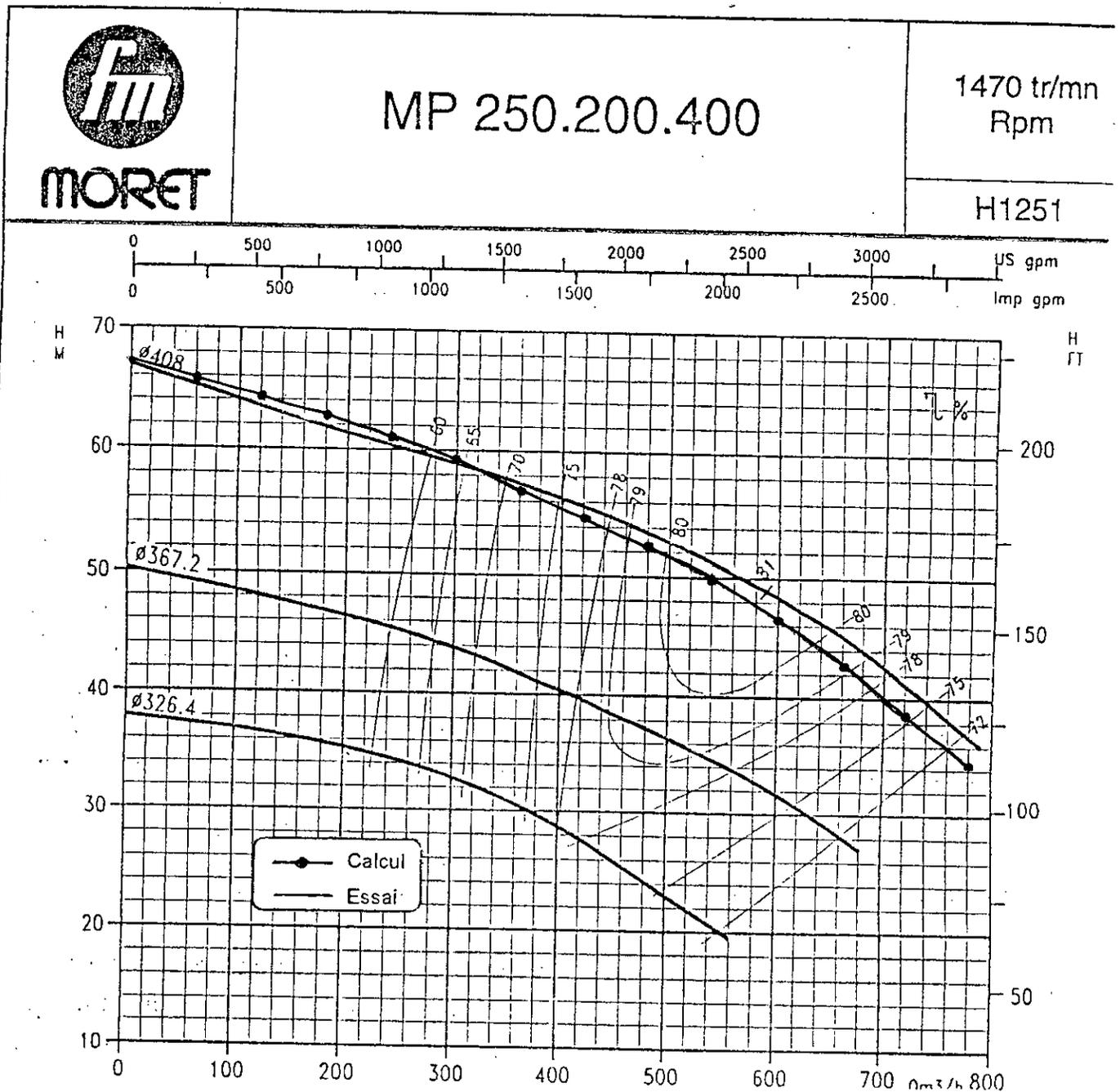


Figure III.6 : Comparaison des caractéristiques  $H=f(Q)$  théorique et expérimentale.

**Interprétation:**

On constate un petit écart entre la courbe expérimentales et la courbe théorique qui ne dépasse pas les 2m, et qui est dû à l'approche géométriques des tronçons cet écart devient très petit au voisinage du débit d'adaptation au les pertes par chocs s'annulent, et il augmente en s'éloignant de ce débit, ce qui montre que la méthode de discrétisation en tronçons et de superposition des pertes est une méthode performante, en raison de sa simplicité et de l'absence du cout d'expérimentation.

**III.2.2-Pertes mécanique:**

Ces pertes sont de deux types:

- Les pertes mécanique externes;
- Les pertes mécaniques internes.

**III.2.2.1-Pertes mécaniques externes:**

Ces pertes sont liées aux frottements de l'arbre sur les paliers et les dispositifs d'étanchéité (garnitures mécaniques, presse-étoupes).

**III.2.2.1.1-Pertes dans les paliers:**

Pratiquement ces pertes ne dépassent pas 1% de la puissance fournie à la pompe (réf.2):

$$P_p = 0,01\rho g q H \quad (\text{III.15})$$

**III.2.2.1.2-Pertes dans les garnitures mécaniques:**

On peut estimer ces pertes de puissance par la relation (réf .7):

$$P_{gm} = 5 d_g N(p_r/3)^{0,25} \quad (\text{III.16})$$

avec :

$d_g$  : diamètre moyen de la garniture mécanique;

$p_r$  : pression à étancher.

### III.2.2.1.3-Pertes dans les dispositifs d'étanchéité:

On peut estimer ces pertes par la relation suivante (réf.7):

$$P_{de} = 5 d_{ar} N (p_r/5)^{0,25} \quad (III.17)$$

avec  $d_{ar}$  est le diamètre de l'arbre.

### III.2.2.2-Pertes mécaniques internes:

Ces pertes sont dues au frottement des flasques tournants que l'on calcule en assimilant les faces extérieures d'une roue centrifuges aux deux faces d'un disque mince de même rayon  $R_2$  tournant à la vitesse angulaire  $\omega$ .

Si  $f$  est le coefficient de frottement entre le fluide tournant à  $\omega/2$  et le disque, la force élémentaire  $dF$ , et la puissance absorbée  $dP$ , correspondant à la surface élémentaire de largeur  $dr$  (figure III.7).

$$dF = 2 \pi r dr f (\rho/2) (\omega r/2)^2$$

$$dP = \omega r dF = \omega r dr f (\rho/4) (\omega r)^3$$

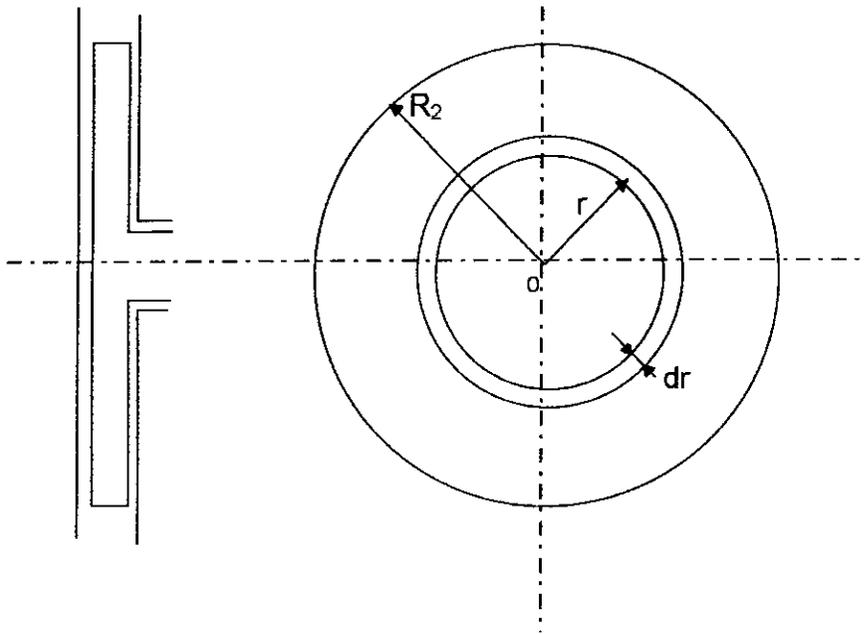
Le terme  $(\omega r/2)^2$  dans l'expression de  $dF$  représente la force de frottement tangentielle par unité de surface.

Après intégration de  $r = 0$  à  $r = R_2$ , on obtient les pertes pour une face de disque, cette valeur sera doublée pour prendre en compte le deuxième face:

$$P_{fd} = (\pi f \rho / 10) \omega R_2^5 \quad (\text{III.18})$$

Pour les fluides peu visqueux, cette dernière relation devient :

$$P_{fd} = 2,3 \cdot 10^{-3} \rho \omega^3 R_2^5 \quad (\text{III.19})$$



*Figure III.7 : Modélisation du frottement des flasques*

Les pertes mécaniques totales est la somme de toutes les pertes calculées ci-dessus:

$$P_m = P_p + P_{gm} + P_{dc} + P_{fd} \quad (\text{III.20})$$

Le rendement mécanique caractérisant l'ensemble de ces pertes est :

$$\eta_m = \frac{P_a - P_m}{P_a} \quad (\text{III.21})$$

### III.2.3-Pertes volumétriques:

Les pertes volumétriques sont fonction des diverses fuites et prélèvements de débit que l'on observe dans la machine, à savoir : les fuites extérieures par les dispositifs d'étanchéité mais surtout les fuites internes entre les bagues d'étanchéité, les jeux de fonctionnement, les prélèvements de liquide assurant le refroidissement des paliers, des presse-étoupes, des systèmes d'équilibrage, ...

La roue est traversée par un débit  $Q_i = Q + Q_f$ , avec  $Q_f$  est le débit total de fuite.

Le rendement volumétrique caractérisant ces pertes est donné par la relation :

$$\eta_v = \frac{Q}{Q + Q_f} \quad (\text{III.22})$$

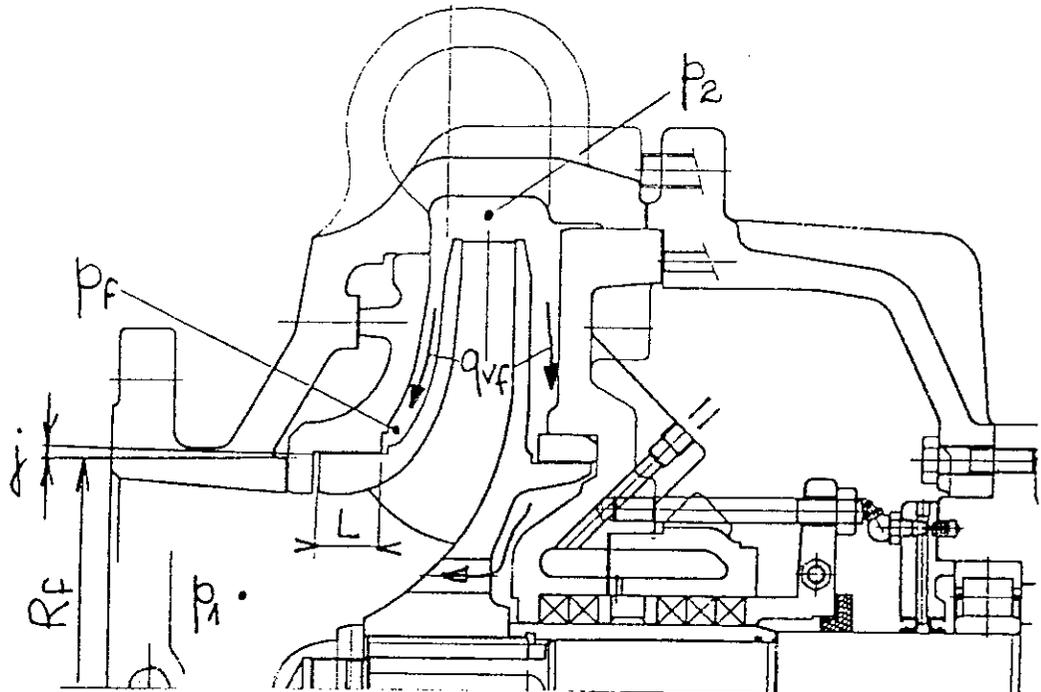


Figure III.8 : Fuites de débit dans une roue centrifuge

Le débit de fuite  $Q_f$  est généré par la différence de pression  $\Delta p_f = p_f - p_1$  régnant de part et d'autre de la bague d'étanchéité.

La chute de pression dans la cavité entre le diamètre de sortie  $D_2$  de la roue et le diamètre  $D_f$  de la garniture d'ouïe est estimée en supposant que le fluide dans la cavité est entraîné à une vitesse égale à la moitié de la vitesse du flasque avant de la roue. Avec cette hypothèse, la pression  $p_f$  est donnée par la relation suivante :

$$p_f = p_2 - (\rho / 8) \omega^2 (R_2^2 - R_f^2)$$

D'où :

$$\Delta p_f = p_2 - p_0 - (\rho / 8) \omega^2 (R_2^2 - R_f^2)$$

Appliquant l'équation de Bernoulli entre les points 0 et 2 :

$$p_2 - p_0 = (\rho / 2) (C_0^2 - C_2^2) - \rho g \Delta h_{roue}$$

où  $\Delta h_{roue}$  sont les pertes hydrauliques dans la roue.

On peut admettre que ces pertes sont égales à la moitié des pertes hydrauliques totales (réf. 1):

$$\Delta h_{roue} = H [ (1/\eta_H) - 1 ] / 2$$

D'où :

$$\Delta p_f = \rho (C_0^2 - C_2^2) / 2 - \rho g H ((1/\eta_H) - 1) / 2 \quad (\text{III.23})$$

Les vitesses  $C_0$  et  $C_2$  sont calculables à partir des relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 = \frac{Q + Q_f}{\pi(R_0^2 - R_e^2)} \\ C_2 = C m_2^2 + C u_2^2 \\ C m_2 = \frac{Q + Q_f}{2\pi R_2 b_2} \\ C u_2 = U_2 - C m_2 \operatorname{tg} \beta_{2\infty} \\ U_2 = \omega R_2 \end{array} \right.$$

avec :

$$R_e = 1,3 R_{ar}$$

$R_{ar}$  : rayon de l'arbre

$$Q_f = 2 \pi R_f C_f 2 j$$

$C_f$  : vitesse moyenne du fluide dans le jeu

$j$  : jeu radiale

Le rayon  $R_f$  est approximativement le rayon  $R_0$  de la bride d'aspiration pour la fuite par la garniture avant.

En présence d'un système d'équilibrage de la poussée axiale par bague arrière et trous d'équilibrage, il convient de multiplier le débit de fuite par 2.

La différence de pression  $\Delta p_f$  est la perte de charge générée par le débit de fuite au passage de la bague d'étanchéité, on l'exprime également par la somme suivante :

$$\Delta p_f / \rho g = 1,5 (C_f^2 / 2 g) + \lambda (L / 2 j) (C_f^2 / 2 g) \quad (\text{III.24})$$

où  $L$  est la longueur de la bague.

- Le premier terme correspond à la perte de charge due à la contraction à l'entrée et à l'élargissement à la sortie du jeu.

- Le deuxième terme définit la perte par frottement sur la longueur de la bague où  $2 j$  est le diamètre hydraulique.

Le coefficient  $\lambda$  est calculé par la relation de Blasius pour  $\mathfrak{R} \leq 10^5$  :

$$\lambda = 0,316 / \mathfrak{R}^{1/4} \quad (\text{III.25})$$

avec  $\mathfrak{R}$  le nombre de Reynolds dans le jeu :

$$\mathfrak{R} = C_f 2 j / \nu \quad (\text{III.26})$$

Le coefficient  $\lambda$  est calculé par la relation de Blasius pour  $\Re \leq 10^5$  :

$$\lambda = 0,316 / \Re^{1/4} \quad (\text{III.25})$$

avec  $\Re$  le nombre de Reynolds dans le jeu :

$$\Re = C_f 2 j / \nu \quad (\text{III.26})$$

$\nu$  étant la viscosité cinématique du fluide.

Après remplacement et simplification dans l'équation (III.24), on obtient:

$$C_f = \left[ \frac{\Delta p_f}{0,75\rho + 0,066 \frac{L}{j^{1,25}} \left( \frac{\nu}{C_f} \right)^{0,25}} \right]^{0,5} \quad (\text{III.27})$$

avec  $\Delta p_f = f(C_f)$ .

La valeur de  $C_f$  sera calculée par itération successive (annex A.6).

### III.2.4-Rendement global :

Compte tenu de toutes les pertes citées ci-dessus, la puissance absorbée sur l'arbre moteur s'écrit :

$$P_a = \rho g (H + \Delta h) (Q + Q_f) + P_m \quad (\text{III.28})$$

La puissance hydraulique utile est donnée par la relation :

$$P_u = \rho g H Q \quad (\text{III.29})$$

D'où l'expression du rendement global :

$$\eta_{gl} = \frac{\rho g H Q}{\rho g (H + \Delta h) (Q + Q_f) + P_m} \quad (\text{III.30})$$

Donc le rendement globale est égale au produit des trois rendements pertiels :

$$\eta_{gl} = \eta_H \cdot \eta_v \cdot \eta_m \quad (\text{III.31})$$

### IV.1-Introduction:

Dans ce chapitre, nous présentons le problème inverse, à savoir les relations ou les choix arbitraires permettant, à partir d'un cahier des charges donné ( hauteur  $H_a$ , débit  $Q_a$ , vitesse de rotation  $N$ ) de définir les principaux paramètres géométriques de la roue, à savoir:

- bride d'aspiration : rayon  $R_0$  ;
- entrée d'aubage : angle  $\beta_{10}$ , rayon à la ligne moyenne  $R_1$ , largeur  $b_1$  ;
- sortie d'aubage : angle  $\beta_{2\infty}$ , rayon de sortie  $R_2$ .

### IV.2-Détermination de la bride d'aspiration :

Pour une roue à arbre traversant on a :

$$Q_i = \left( \frac{D_0^2 - d_0^2}{4} \right) \pi \cdot C_0 \quad (\text{IV.1})$$

avec;

$C_0$  : la vitesse à l'entrée de l'ouïe;

$d_0$  : le diamètre du moyeu.

Dans le cas d'une pompe en porte-à-faux  $d_0 = 0$ .

Le diamètre  $d_0$  est donné par :  $d_0 = 1,3 d_{ar}$

avec :

$$d_{ar} = 6,97 \sqrt{\frac{Pa}{\tau N}} \quad [\text{mm}] \quad (\text{IV.2})$$

Où :

$\tau$  [ $\text{N/m}^2$ ] : la contrainte de cisaillement du matériau de l'arbre

$Pa$  [ $\text{w}$ ] : la puissance absorbée sur l'arbre de la pompe:  $Pa = Pu / \eta_{g1}$ .

Le rendement globale est donné sur un abaque dans l'annexe A.7 en fonction de la vitesse spécifique et du débit.

La vitesse  $C_0$  est donnée par la formule suivante (réf.2) :

$$C_0 = \varepsilon \sqrt{2gH} \quad (\text{IV.3})$$

Où  $\varepsilon$  est le coefficient de vitesse d'entrée.

Le meilleur rendement peut être estimé à :  $\varepsilon_\eta = 0.021 \text{ nsq}^{2/3}$  (réf.2).

La meilleure capacité d'aspiration peut être estimée à :  $\varepsilon_\sigma = 0.0167 \text{ nsq}^{2/3}$  (réf.2).

En général on utilise le coefficient de vitesse d'entrée  $\varepsilon$  qui rend le compromis entre  $\varepsilon_\eta$  et  $\varepsilon_\sigma$  (réf.2) :

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_\eta + \varepsilon_\sigma}{2}$$

D'où :

$$\varepsilon = 0.0188 \text{ nsq}^{2/3} \quad (\text{IV.4})$$

### IV.3-Détermination de l'entrée d'aubage :

On admet que le fluide entre sans prérotation  $Q = Q_a$ .

$$\begin{cases} \text{tg } \beta_1 = \frac{U_1}{C_1} \\ U_1 = \omega R_1 \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

avec  $C_1$  est la vitesse absolue égale à la vitesse débitante  $C_{m1}$ .

$$\begin{cases} \text{tg } \beta_1 = \text{tg } \beta_{10} \\ C_{m1} = \frac{Q_i}{S_1} \varphi_1 \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

avec  $\phi_1$  est le coefficient de rétrécissement à l'entrée d'aubage.

Pour calculer  $Q_i$  on admet pour  $\eta_v$  la formule empirique suivante (réf.15):

$$\eta_v = 1 - \left( 0.4 + \frac{0.3}{\sqrt[3]{Q}} \right) \frac{1.0586}{nsq} \quad (\text{IV.7})$$

#### IV.3.1-Optimisation de la section d'entrée vis -à-vis de la cavitation :

Optimisons la section d'entrée de la pompe pour l'obtention d'une bonne aspiration en respectant les limites de cavitation.

La pression absolue  $p_1$  à l'entrée de la pompe est ( d'après l'équation de Bernoulli ) :

$$p_1 = p_0 - \rho g h_a - \left( \rho C_1^2 / 2 \right) - \rho g \xi h_{pa} \quad (\text{IV.8})$$

avec :

$h_a$  : la hauteur d'aspiration;

$\xi h_{pa}$  : les pertes dans la conduite d'aspiration.

Pour éviter la cavitation il faut que  $p_1$  soit supérieure à la tension de vapeur. En réalité lors de l'analyse des répartitions des pressions sur l'intrados et sur l'extrados, on démontre que le point où règne la plus faible pression est un point qui est situé dans les aubages au voisinage de l'entrée.

La valeur de  $\Delta p$  peut être rapportée à  $\rho W_1^2 / 2$  :

$$\Delta p = \lambda \rho W_1^2 / 2$$

avec  $\lambda = 0.25 \div 0.40$  (réf.4), coefficient à ne pas confondre avec le coefficient des pertes de charge.

Pour éviter la cavitation il faut que  $p_1 - \Delta p > p_s$

où  $p_s$  est la tension de vapeur.

En remplaçant  $p_1$  et  $\Delta p$  par leurs expressions dans la dernière égalité, il vient :

$$p_0 - \rho g \xi h_{pa} - \rho g \left[ \frac{C_1^2}{2g} + \lambda \frac{W_1^2}{2g} \right] > p_s$$

Ou autrement écrite, cette inégalité prend la forme :

$$\frac{p_0 - p_s}{\rho g} - h_a - \xi h_{pa} > \frac{C_1^2}{2g} + \lambda \frac{W_1^2}{2g}$$

A l'entrée d'aubage on a :

$$W_1^2 = C_1^2 + U_1^2$$

Et par conséquent :

$$\frac{p_0 - p_s}{\rho g} - h_a - \xi h_{pa} > (1 + \lambda) \frac{C_1^2}{2g} + \lambda \frac{W_1^2}{2g}$$

En remplaçant  $U_1$  par  $\pi d_1 N / 60$  et  $C_1$  par  $4 Q_i / \pi d_1^2$ , on aura :

$$\frac{p_0 - p_s}{\rho g} - h_a - \xi h_{pa} > \frac{1}{2g} \left( (1 + \lambda) \frac{16 Q_i^2}{\pi^2 d_1^4} + \lambda \frac{\pi^2 d_1^2 N^2}{60^2} \right) \quad (\text{IV.9})$$

Choisissons  $d_1$  tel que le premier membre de (IV.9) soit minimal, nous annulons dans ce cas la dérivée par rapport à  $d_1$  du second membre de cette inégalité ; on a alors :

$$-4(1 + \lambda) \frac{16 Q_i^2}{\pi^2 d_1^5} + 2\lambda \frac{\pi^2 d_1 N^2}{60^2} = 0$$

D'où après résolution :

$$R_{opt} = K_0 \sqrt[3]{\frac{Q_i}{N}} \quad (IV.10)$$

avec :  $K_0 = f(\lambda) = 2.1 + 2.25$

### V.3.2-Calcul du rayon $R_1$ et de la largeur $b_1$ :

A partir des des système (IV.5) et (IV.6) et de la relation (IV.10) on obtient :

$$R_1 = \frac{Q_i \operatorname{tg} \beta_{10}}{\pi \omega R_{opt}^2} \varphi_1 \quad (IV.11)$$

où  $\varphi_1$  est le coefficient de rétrécissement à l'entrée de l'aube :  $\varphi_1 = C_1 / C_0$

Puisque on à pas encore calculé  $R_1$ , on determine  $C_1$  suivant la formule empirique de Stepanoff :

$$C_1 = Kcm_1 \sqrt{2gH}$$

On retient pour  $Kcm_1$  la formule empirique donnée par stepanoff :

$$Kcm_1 = 0,1301933 + 1,6216 \cdot 10^{-3} \operatorname{nsq} + 526,23875 \cdot 10^{-3} \operatorname{nsq}^2$$

D'autre part on a :

$$S_1 = 2\pi R_1 b_1 \quad (IV.12)$$

D'où :

$$b_1 = \frac{S_1}{2\pi R_1} \quad (IV.13)$$

### IV.3.3-Calcul de l'épaisseur de l'aube :

Le coefficient  $\varphi_1$  est donné par :

$$\varphi_1 = \frac{t_1}{t_1 - Su_1}$$

avec :  $t_1 = \frac{\pi d_1}{Na}$

Le nombre d'aube  $Na$  peut être estimé par la formule empirique suivante (réf.1):

$$Na = 22,71 Nsq^{-0.3562}$$

D'où :

$$Su_1 = t_1 \frac{(\varphi_1 - 1)}{\varphi_1} \quad (IV.14)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} Su_1 = \frac{S_1}{\cos \beta_{10}} \quad \text{pour les aubes à simple courbure;} \\ Su_1 = \frac{S_1}{\cos \beta_{10} \sin \lambda_1} \quad \text{pour les aubes à double courbure.} \end{array} \right. \quad (IV.15)$$

où  $\lambda_1$  est l'angle compris entre la surface de l'aube et la surface de courant qu'on peut calculer par la relation :

$$\text{ctg } \lambda_1 = \text{ctg } \lambda'_1 \sin \beta_{10}$$

où  $\lambda'_1$  est l'angle compris entre l'arête d'entrée et la ligne de courant à l'entrée de la roue (figure IV.1a).

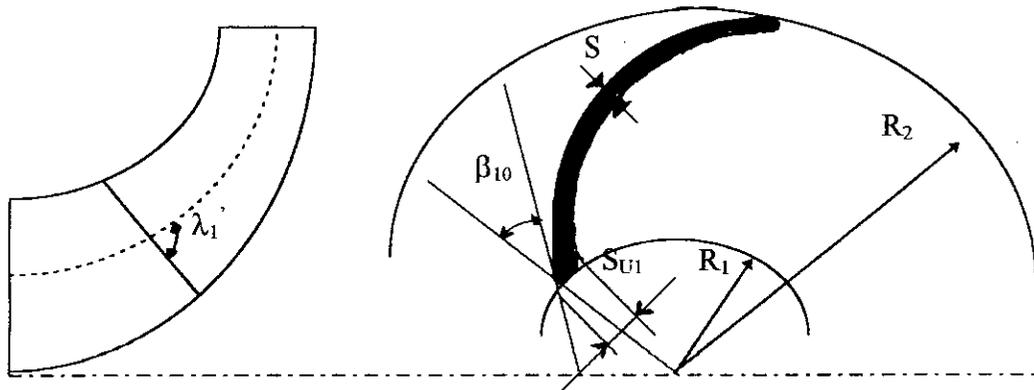


Figure IV.1: Projection de l'épaisseur de l'aube

De (IV.14) et (IV.15) on tire :

$$\left| \begin{array}{ll} S_1 = t_1 \frac{(\varphi_1 - 1)}{\varphi_1} \cos \beta_{10} & \text{pour aubes à simple courbure;} \\ S_1 = t_1 \frac{(\varphi_1 - 1)}{\varphi_1} \cos \beta_{10} \sin \lambda_1 & \text{pour aubes à double courbure.} \end{array} \right. \quad (\text{IV.16})$$

On prend souvent une épaisseur d'aube constante:  $S = \text{cte}$

#### IV.4-Détermination de la sortie d'aubage :

##### V.4.1-Calcul du rayon extérieur $R_2$ :

Le choix du rayon extérieur s'effectue à partir d'une valeur de référence communément utilisée pour la construction des pompes. Cette valeur standard qui dépend de la vitesse angulaire spécifique  $\Omega$  a été introduite par CORDIER.

Le diagramme de Cordier est un diagramme statistique issu de résultats expérimentaux sur lequel est portée la vitesse angulaire spécifique de divers pompes en fonction de leur rayon spécifique (encombrement spécifique) :

$$\Omega = \frac{R_2 (gH)^{1/4}}{\sqrt{Q}} \quad (\text{IV.17})$$

Pour chacun des points représentatifs, les courbes d'isorendement permettent de définir le lieu de dimensionnement idéal concernant le rendement (figure IV.3).

Pour une vitesse spécifique donnée, on définit ainsi le rayon spécifique le mieux adapté puis l'encombrement idéal :

$$R_2 = \frac{\Omega \sqrt{Q}}{(gH)^{1/4}} \quad (\text{IV.18})$$

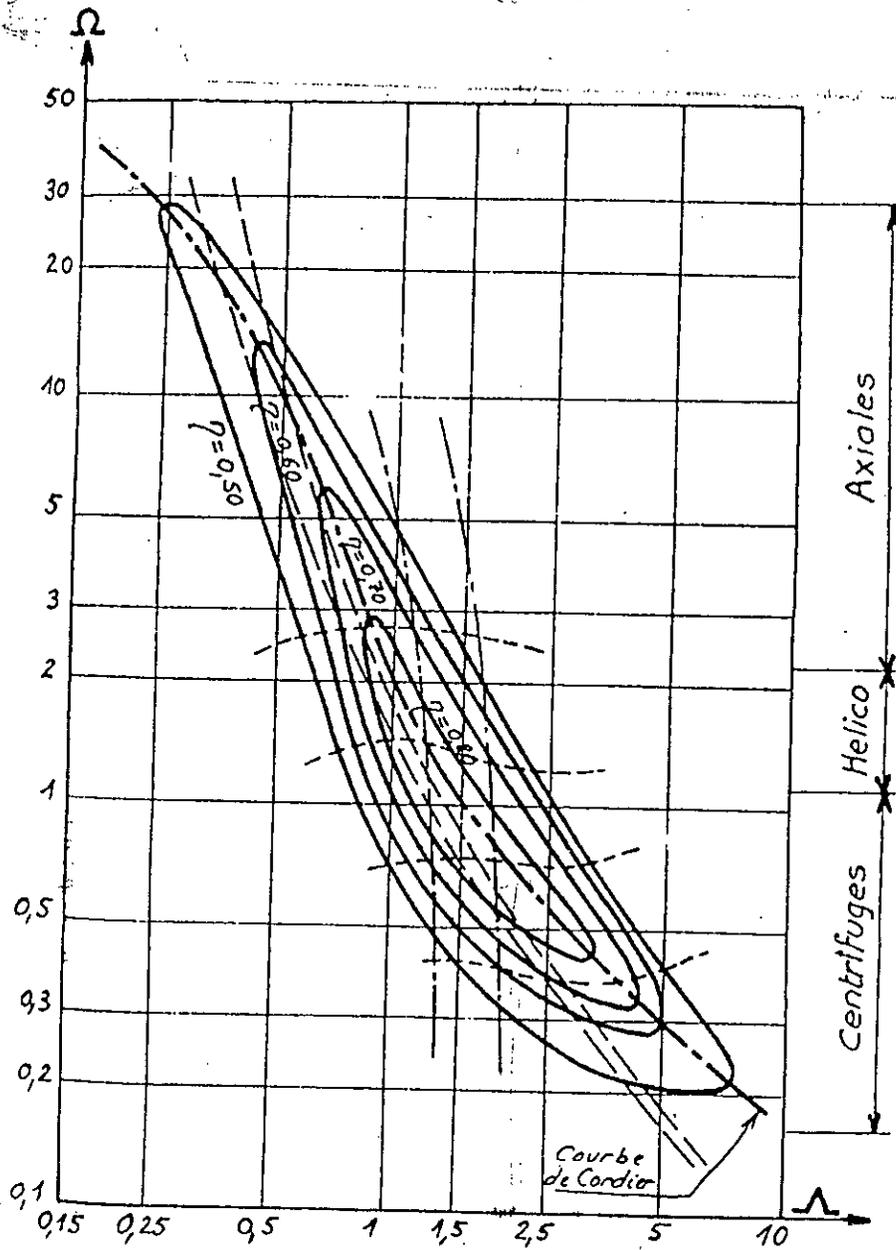


Figure IV.3 : Evolution standard selon CORDIER.

IV.4.2-Choix de l'angle de sortie  $\beta_{2\infty}$  :

Lorsque le fluide pénètre dans la roue sans prérotation, la hauteur théorique est donnée par l'équation d'Euler :

$$H_{th} = \frac{U_2 CU_2}{g} \quad \text{et} \quad H_{th\infty} = \frac{U_2 CU_{2\infty}}{g}$$

On constate, d'après cette relation, que la hauteur d'élévation théorique d'une machine de compression (ventilateur, pompe, compresseur) ne dépend que de la vitesse périphérique  $U_2$  et de la composante giratoire de la vitesse absolue  $Cu_2$ . Le rapport entre  $U_2$  et  $Cu_2$  peut être choisi dans des limites assez larges. Il est intimement lié à l'angle de sortie d'aubage  $\beta_{2\infty}$ .

Les pompes sont construites exclusivement avec des aubes couchés vers l'arrière, et notamment des angles  $\beta_{2\infty}$  compris entre  $50^\circ$  et  $70^\circ$  (valeur qui sera choisie arbitrairement).

#### IV.4.3-Détermination de la largeur $b_2$ :

Le dernier paramètre géométrique définissant la roue, à savoir la largeur de sortie  $b_2$  s'effectue sur la base d'une méthodologie que nous pouvons résumer ainsi :

On estime d'abord le rendement hydraulique  $\eta_H$  de la roue à partir de la formule de Lomakine au point de rendement maximal :

$$\eta_H = 1 - \frac{0.42}{[\log_{10} d_{red} - 0.172]^2} \quad (IV.19)$$

avec :

$$d_{red} = 4250 \sqrt[3]{\frac{Q}{N}}$$

Q: le débit en  $m^3 / s$

N : vitesse de rotation en tr / mn

On en déduit la hauteur théorique et la hauteur théorique infinie ( H est donné par le cahier des charges) :

$$H_{th} = \frac{H}{\eta_H}$$

$$H_{th\infty} = \frac{H_{th}}{\mu}$$

avec  $\mu$  est le facteur de glissement donné par la relation (II.14).

La composante giratoire est déduite de  $H_{th\infty}$  par la relation d'Euler :

$$Cu_{2\infty} = \frac{g H_{\text{théor}}}{U_2}$$

Les triangles des vitesses en sortie de roue permettent de déduire la vitesse débitante  $Cm_2$  puis la largeur  $b_2$  :

$$Cm_2 = \frac{U_2 - Cu_{2\infty}}{\text{tg } \beta_{2\infty}}$$

$$b_2 = \frac{Q}{2\pi R_2 Cm_2} \varphi_2 \quad (\text{IV.20})$$

Avec :

$$\varphi_2 = \frac{t_2}{t_2 - Su_2}$$

Où :

$$Su_2 = \frac{S}{\cos \beta_{2\infty}}$$

#### IV.5-Application:

##### Cahier de charge:

$$H=53 \text{ m}$$

$$Q=800 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$N=1450 \text{ tr/mn}$$

##### Caractéristiques géométriques:

$$R_1 = 88.3 \text{ mm}$$

$$b_1 = 94.1 \text{ mm}$$

$$R_2 = 202.2 \text{ mm}$$

$$b_2 = 47 \text{ mm}$$

$$\beta_{10} = 70^\circ$$

$$\beta_{2\infty} = 64$$

Na = 5

S = 4.4 mm

## CHAPITRE V

# TRACÉ DES AUBAGES

## V.1-Introduction:

Nous proposons dans ce chapitre une méthode complète de tracé des aubes de roues centrifuges et hélico-centrifuges. elle est basée sur la définition des deux projections; la vue méridienne et la vue de face. Ce tracé important et délicat, la plupart du temps abordé de manière succincte dans les ouvrages, confère à la machine ses qualités d'aspiration, de rendement et de stabilité.

## V.2-Determination de la vue méridienne:

Les étapes définissant la vue méridienne sont les suivantes :

- \* définition de la ligne moyenne du canal méridien;
- \* discrétisation de cette ligne en un certain nombre de segments;
- \* adoption d'une loi d'évolution de la surface méridienne;
- \* définition des enveloppes ( flasques avant et arrière ).

### V.2.1-Définition de la ligne moyenne :

La ligne moyenne de la roue est définie par l'association d'une courbe de Bézier à trois pôles et d'une portion de droite en sortie (figure V.1). Les 3 pôles sont définis de la manière suivante :

- Le premier pôle a comme coordonnées  $(0 ; R_{0x})$  avec  $R_{0x} = \frac{R_0}{2}$  pour roue en porte-à-faux et  $R_{0x} = \frac{R_0 + R_a}{2}$  pour une roue entre paliers ( arbre traversant ).

- Le deuxième pôle est défini par l'intersection de deux droites  $\Delta 1$  et  $\Delta 2$  :

- $\Delta 1$  est la droite parallèle à l'axe de rotation passant par le pôle  $(0 , R_{0x})$ .

•  $\Delta_2$  est la droite passant par le point de coordonnées  $(z_2, R_2)$  et formant un angle  $\varphi$  avec la droite  $\Delta_3$ , où  $\Delta_3$  est la droite perpendiculaire à l'arête de sortie  $b_2$  au point de coordonnées  $(z_2, R_2)$ .

– Le troisième pôle  $(z_3, R_3)$  se trouve sur la droite  $\Delta_2$  à une distance  $m_R$  du point de coordonnées  $(z_2, R_2)$ .

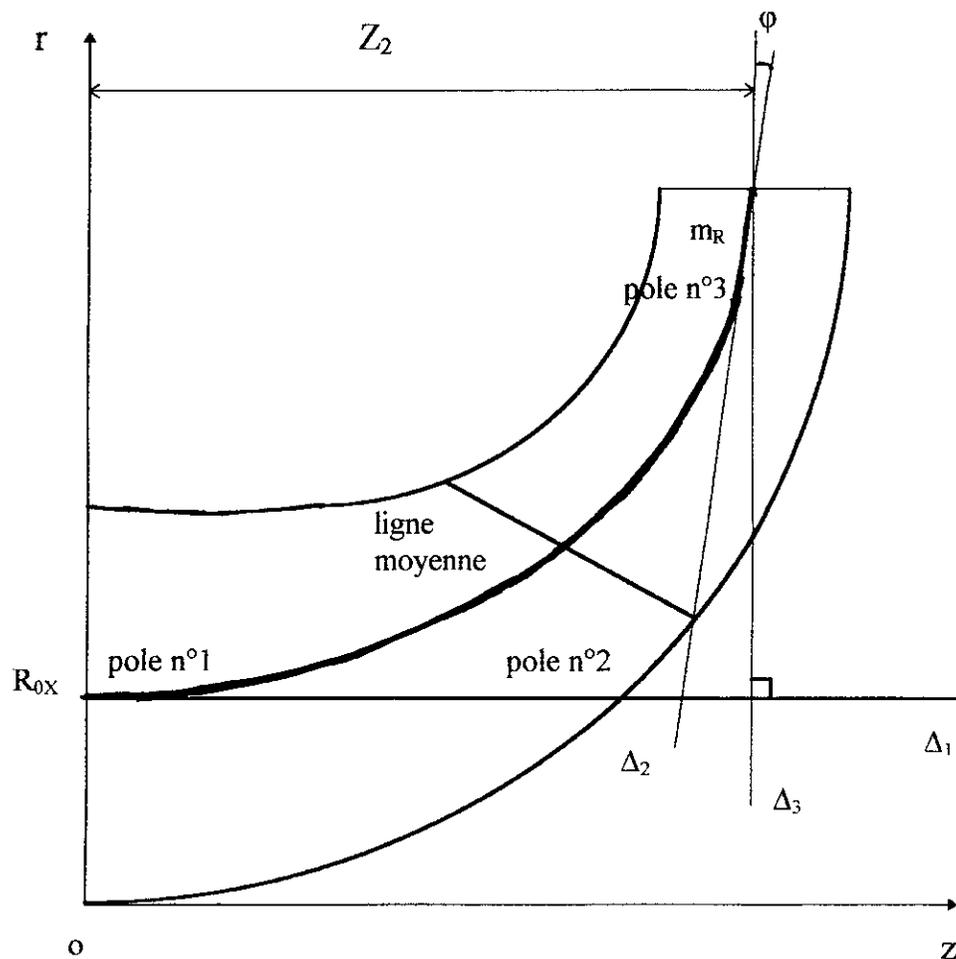


Figure V.1: Définition de la ligne moyenne

**Remarques :**

- La valeur de  $m_R$  dépend de la vitesse spécifique de la machine et diminue avec celle-ci.
- L'angle  $\varphi$  est un paramètre libre qualifié d'angle de cabrage. Le choix adéquat de ce paramètre permet de régler la concavité des deux flasques avant et arrière.
- La distance  $z_2$  est aussi un paramètre libre caractérisant l'encombrement axial. La valeur retenue correspond dans la plupart des cas à un compromis entre les pertes et la taille de la machine.

**V.2.2-Définition de la loi de surface:**

L'évolution de la surface méridienne est explicitée en fonction de l'abscisse curviligne mesurée sur la ligne moyenne :  $S = S(m)$  cette abscisse curviligne est calculée à partir de la relation suivante :

$$m(z) = \int_0^z \sqrt{1 + \left[ \frac{dr}{dz} \right]^2} dz \quad (V.1)$$

La détermination analytique de cette intégrale est généralement impossible pour les fonctions  $r(z)$  de degré supérieur à un. De ce fait, on utilise une méthode d'intégration numérique (méthode des trapèzes par exemple).

Une série d'équations simples peut être retenue pour décrire et maîtriser l'évolution de la surface débitante.

Nous considérons sur la vue méridienne deux parties distinctes :

la partie en amont de l'aubage : entre la bride d'aspiration et l'entrée d'aubage ;

la partie aubée : entre l'entrée et la sortie d'aubage.

On définit ensuite une loi de surface arbitraire dont les conditions aux limites les plus courantes sont données par les diverses équations :

$$S(m_e) = S_1$$

$$\left[ \frac{dS}{dm} \right]_{m=m_e} = 0$$

$$S(m_s) = S_2$$

$$\left[ \frac{dS}{dm} \right]_{m=m_s} = 0$$

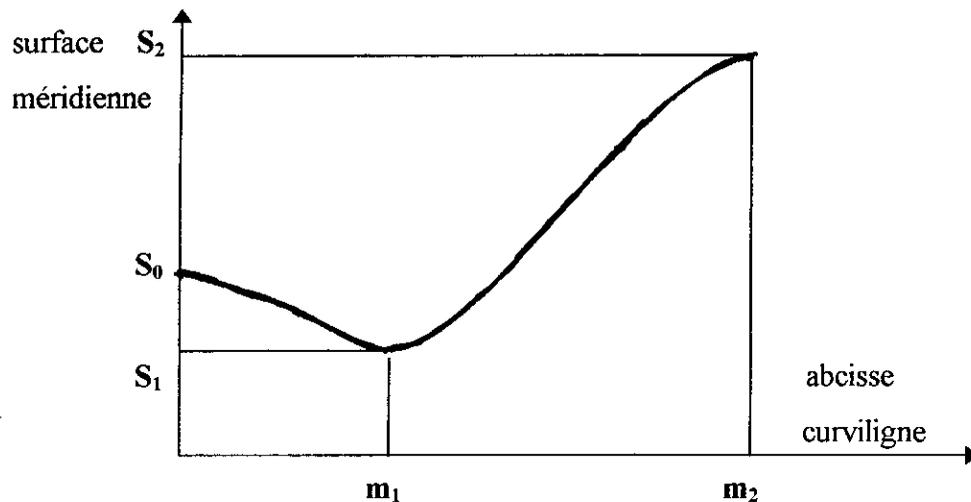


Figure V.2 : Exemple de loi de surface

### V.2.3-Détermination des deux lignes $\psi_e$ et $\psi_i$ ( flasques avant et arrière ) :

Nous discrétisons la ligne moyenne en un certain nombre de segments d'égale longueur curviligne, nous déterminons ensuite les coordonnées  $(r, z)$  de chaque point de discrétisation par la méthode graphique. A partir de la loi de surface imposée, on calcule aisément les diamètres des cercles osculateurs par :

$$b = \frac{S(m)}{2\pi r} \quad (V.2)$$

Les deux enveloppes  $\psi_e$  et  $\psi_i$  doivent, en n'importe quel rayon être tangents aux cercles de diamètre  $b$ .

$$S(m_e) = S_1$$

$$\left[ \frac{dS}{dm} \right]_{m=m_e} = 0$$

$$S(m_s) = S_2$$

$$\left[ \frac{dS}{dm} \right]_{m=m_s} = 0$$

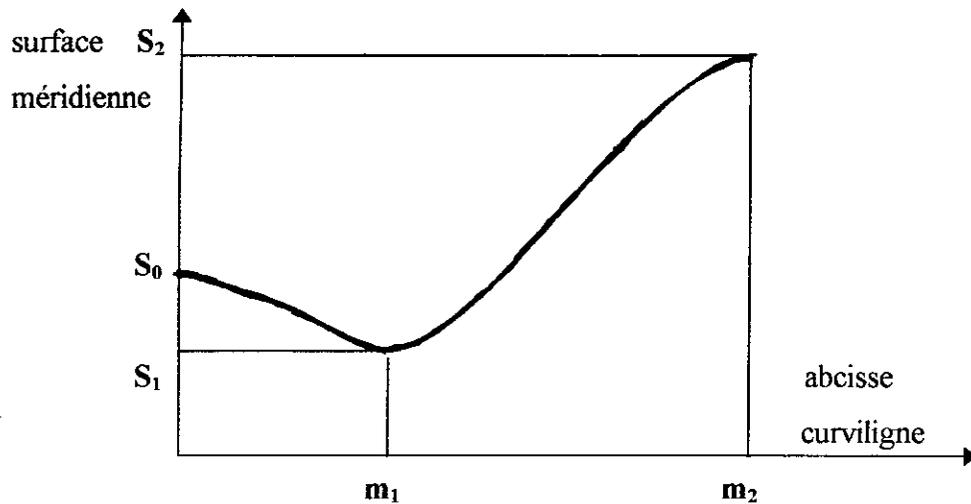


Figure V.2 : Exemple de loi de surface

### V.2.3-Détermination des deux lignes $\psi_e$ et $\psi_i$ ( flasques avant et arrière ) :

Nous discrétisons la ligne moyenne en un certain nombre de segments d'égale longueur curvilignè, nous déterminons ensuite les coordonnées  $(r, z)$  de chaque point de discrétisation par la méthode graphique. A partir de la loi de surface imposée, on calcule aisément les diamètres des cercles osculateurs par :

$$b = \frac{S(m)}{2\pi r} \quad (V.2)$$

Les deux enveloppes  $\psi_e$  et  $\psi_i$  doivent, en n'importe quel rayon être tangents aux cercles de diamètre  $b$ .

On détermine l'équation du flasque avant sous forme de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  comme suit :

Soient deux cercles  $(C_0)$  et  $(C)$  consécutifs et une tangente  $(T)$  comme aux deux cercles.

Le cercle  $(C)$  de centre  $\omega (z, R)$  et de rayon  $b/2$  a pour équation dans le repère  $(x, y)$ :

$$(x - z)^2 + (y - R)^2 = (b/2)^2 \quad (\text{V.3})$$

L'équation de la tangente  $(T)$  est telle que :

$$\vec{\omega M} \cdot \vec{M M_0} = 0$$

avec :

$$\vec{\omega M} = \begin{pmatrix} x - z \\ y - R \end{pmatrix}$$

$$\vec{M M_0} = \begin{pmatrix} x_0 - x \\ y_0 - y \end{pmatrix}$$

Le produit scalaire  $\vec{\omega M} \cdot \vec{M M_0}$  devient donc :

$$(x - z)(x_0 - x) + (y - R)(y_0 - y) = 0 \quad (\text{V.4})$$

Les équations (V.3) et (V.4) contribuent à former le système suivant :

$$\begin{cases} (x - z)^2 + (y - r)^2 = (b/2)^2 \\ (x - z)(x_0 - x) + (y - r)(y_0 - y) = 0 \end{cases} \quad (\text{V.5})$$

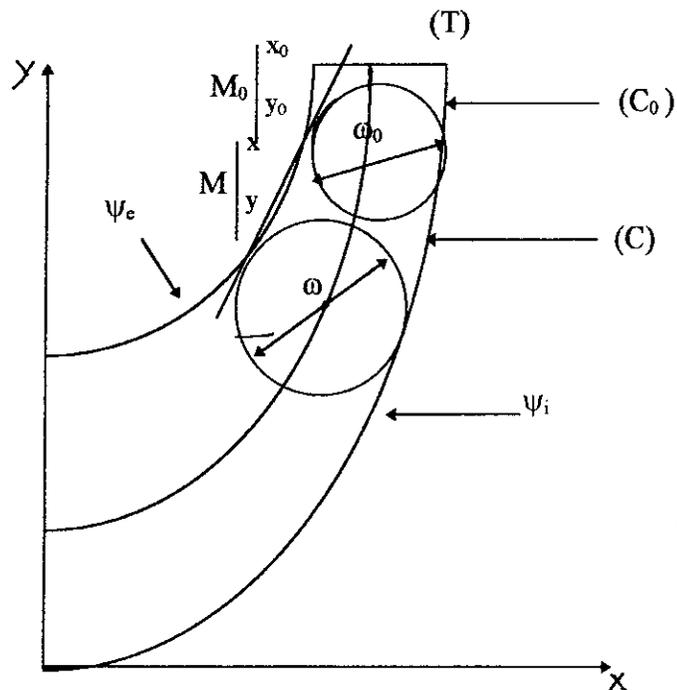


Figure V.3 : Tracé des enveloppes des cercles.

Par le biais d'une substitution, on peut à partir du système (IV.5) déterminer les coordonnées cartésiennes de l'enveloppe extérieure en prenant comme point de départ, le point de coordonnées :

$$\begin{cases} x_0 = z_2 - \frac{b_2}{2} \\ y_0 = R_2 \end{cases}$$

On procède de la même manière que pour l'enveloppe extérieure et on aura le même système précédant dont le point de départ est le point de coordonnées :

$$\begin{cases} x_0 = z_2 + \frac{b_2}{2} \\ y_0 = R_2 \end{cases}$$

### V.2.4-Inclinaison de l'arête d'entrée d'aube $\theta_1$ et des angles $\beta_{1e0}$ , $\beta_{1i0}$ :

Pour les pompes de faibles vitesses spécifiques, l'angle  $\theta_1$  est généralement égale à  $90^\circ$ . Lorsque  $nsq$  augmente ; le tracé de l'aubage devient tridimensionnel (figure V.4 ) et il n'est plus possible de limiter les aubes à une partie purement radiale.

Dans la pratique l'angle  $\theta_1$  est souvent choisi proche de  $45^\circ$ . Pour déterminer les angles d'aubage  $\beta_{1e0}$  et  $\beta_{1i0}$  on fait correspondre les vitesses débitantes  $cm_{1i}$  et  $cm_{1e}$  avec celles associées aux cercles osculateurs correspondants .

$$Cm_{1i} = \frac{Q_i}{S_{1i}} \quad \text{et} \quad Cm_{1e} = \frac{Q_e}{S_{1e}}$$

avec :

$$S_{1i} = 2 \pi R_1 b_{1i} \quad \text{et} \quad S_{1e} = 2 \pi R_1 b_{1e}$$

Où  $b_{1i}$  et  $b_{1e}$  sont respectivement les diamètres des cercles des sections  $S_{1i}$  et  $S_{1e}$ .

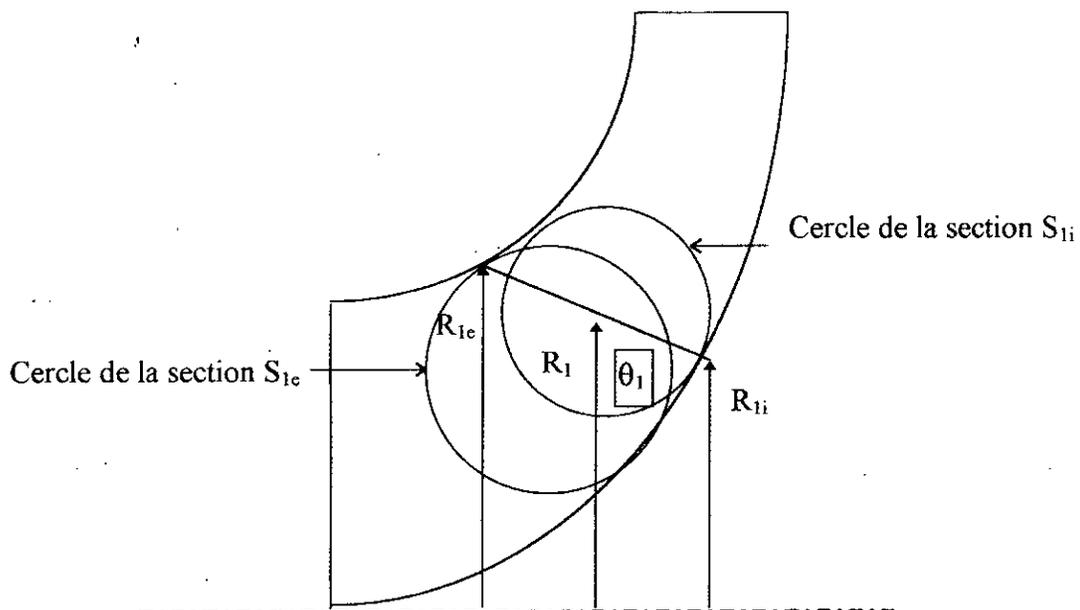


Figure V.4 : Définition de l'inclinaison de l'arête d'entrée.

On peut déterminer maintenant les angles  $\beta_{1e0}$  et  $\beta_{1i0}$  en partant des triangles des vitesses respectifs :

$$\operatorname{tg} \beta_{1i0} = \frac{U_{1i}}{c_{m_{1i}}} = \frac{\omega R_{1i}}{c_{m_{1i}}}$$

et

$$\operatorname{tg} \beta_{1e0} = \frac{U_{1e}}{c_{m_{1e}}} = \frac{\omega R_{1e}}{c_{m_{1e}}}$$

### V.3-Tracé de l'aubage en deux vues :

On considère l'empreinte d'une aube vue en perspective sur une surface de révolution dont la génératrice est la ligne moyenne du canal méridien ( figure V.5b ).

On découpe un élément de la pale dl à l'aide de deux plans perpendiculaires à l'axe de rotation passant par les points 1 et 2.

Sur l'élément ainsi considéré on intercepte :

- en projection méridienne ( figure V.5a ) : les longueurs  $dm$ ,  $dr$  et  $dz$
- en vue de face ( figure V.5c ) : les valeurs  $r d\theta$  et  $dr$ .

Dans un repère cartésien plan, on porte les  $dm$  sur l'axe des abscisses et les  $r d\theta$  sur l'axe des ordonnées. Lorsque la quantité d'éléments est en nombre suffisant, cette représentation reproduit la vraie grandeur et les angles de l'aube en tout point. Dans ce cas précis, ce tracé est qualifié de *développée de la pale* ( figure V.5d ).

Dans le cas du dimensionnement, connaissant les angles d'entrée  $\beta_{1e0}$  et de sortie  $\beta_{1i\infty}$ , nous pouvons à l'inverse, pour tracer l'aube, commencer par se donner une développée, par exemple en arc de cercle, et en déduire ses projections en vue de face et en vue méridienne, la démarche est alors la suivante :

On dispose de deux dessins, la vue méridienne et la développée.

En vue méridienne, partant du rayon d'entrée  $R_1$  jusqu'à le rayon de sortie  $R_2$ , on s'impose un pas  $dm$  arbitrairement petit par rapport à la longueur totale. On obtient ainsi :

- en vue méridienne : les rayons  $dr$ ,
- sur la développée : les valeurs  $r d\theta$ .

On en déduit ainsi, la vue de face à l'aide des couples  $(r d\theta, dr)$ . Et ainsi de suite de l'entrée vers la sortie ou de la sortie vers l'entrée.

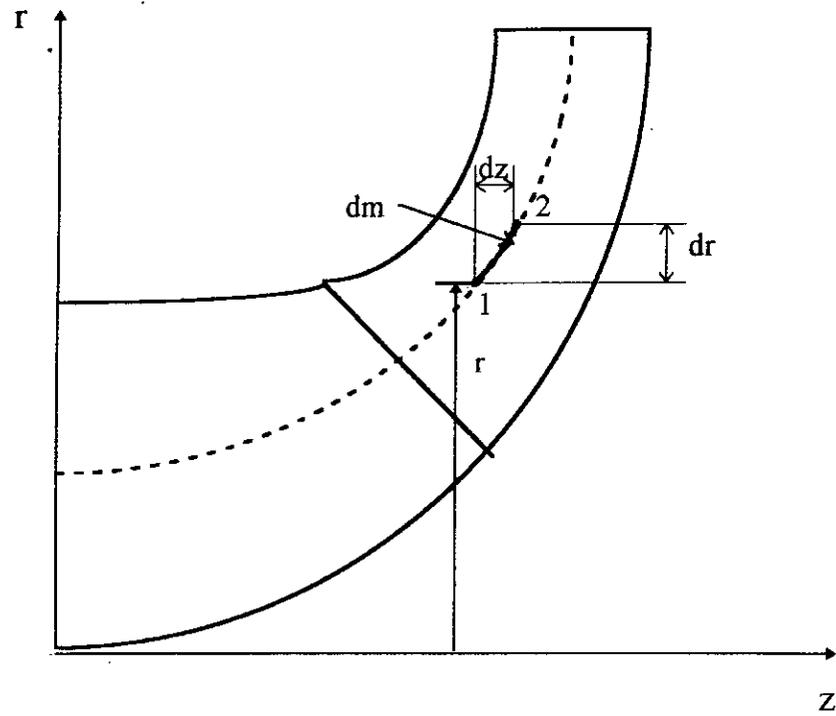


Figure V.5a : Vue méridienne (suivant M)

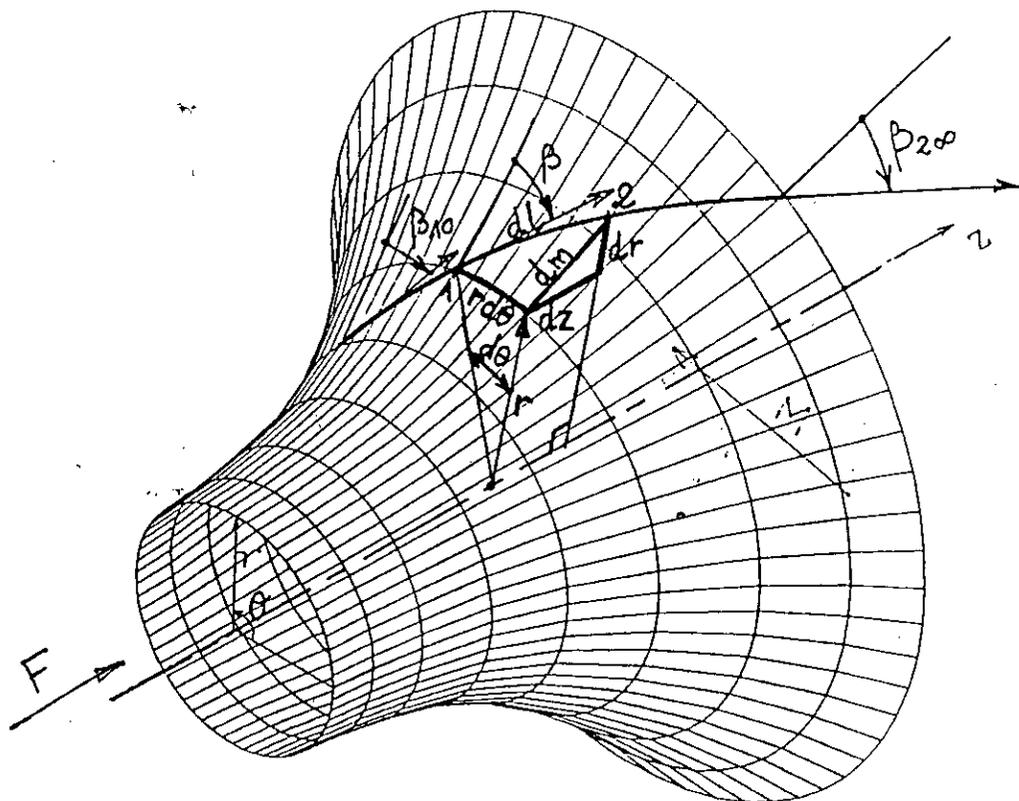


Figure V.5b : Surface de courant moyenne

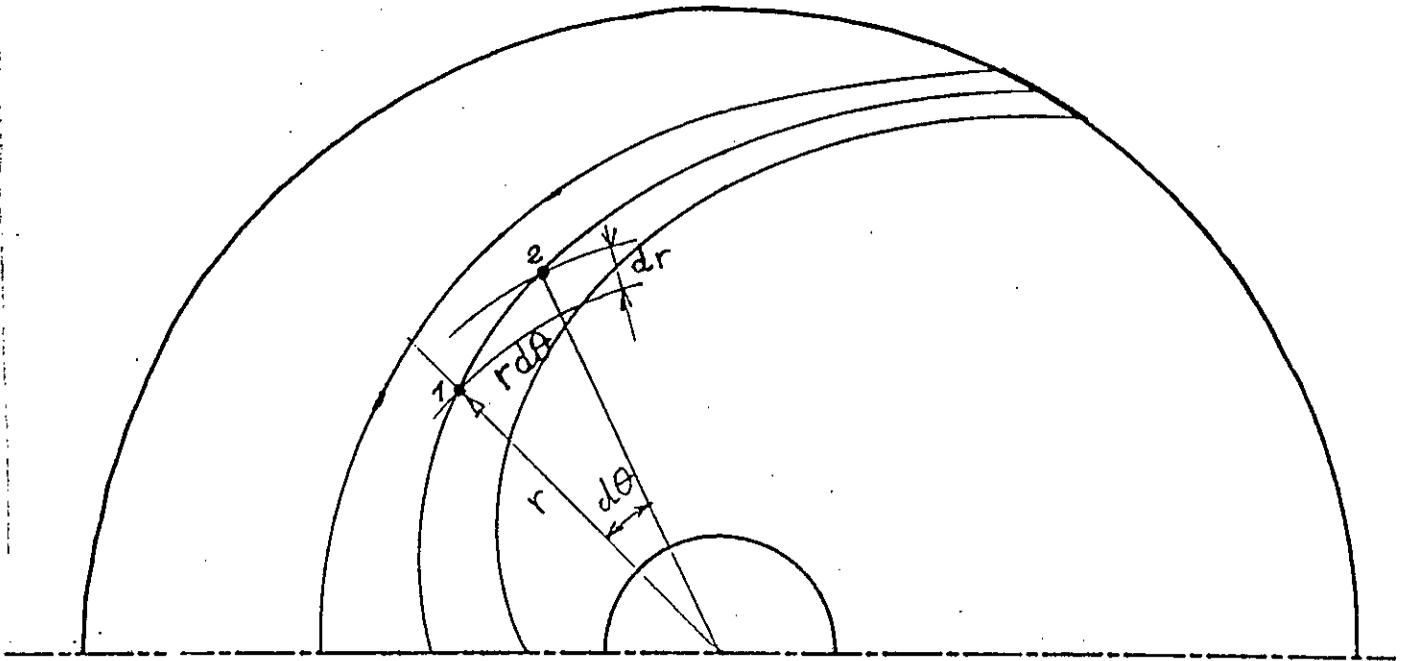


Figure V.5c : Vue de face (suivant F)

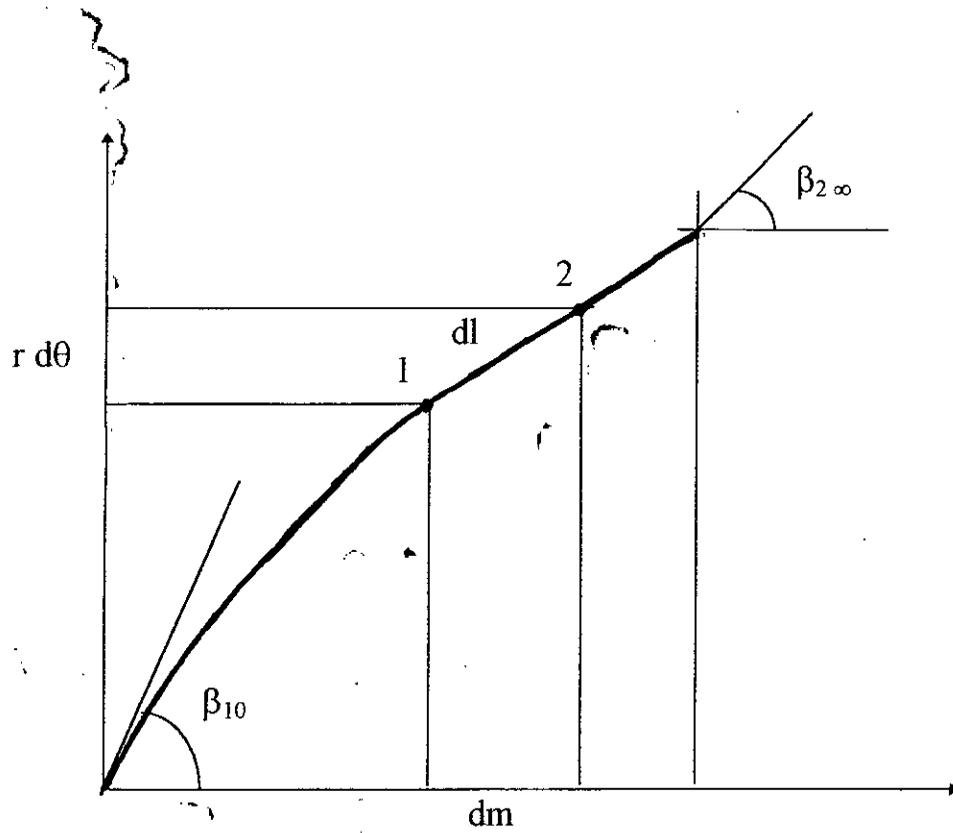


Figure V.5d : Développée de l'aube (vrai grandeur)

#### V.4-Calage angulaire des lignes en vue de face :

Les différentes projections de l'aube en vue de face étant déterminées, il faut se fixer un dernier réglage pour les caler angulairement les unes par rapport aux autres, en réalisant une arête d'entrée dirigée vers l'arrière, radiale ou dirigée vers l'avant.

Considérons la roue centrifuge dont on a déterminé les deux lignes AB et CD de l'aube respectivement sur le flasque arrière et le flasque avant (figure V.7). Si l'on se fixe comme condition qu'à la sortie de la roue, l'aube soit parallèle à l'axe, on amènera par rotation le point D à coïncider avec B, ce qui conduira le point C en  $C_1$ . L'arête d'entrée se projettera alors en  $AC_1$  qui, dans le cas de la figure V.7, sera évidemment loin d'être située dans un plan radial, ce qui perturbera le mouvement méridien du fluide à l'entrée. Il est préférable de disposer l'arête d'entrée en AC, plus proche d'une radiale et de tolérer à la sortie une inclinaison de la pale. On observe généralement cette disposition sur les roues centrifuges à vitesse spécifique élevée.

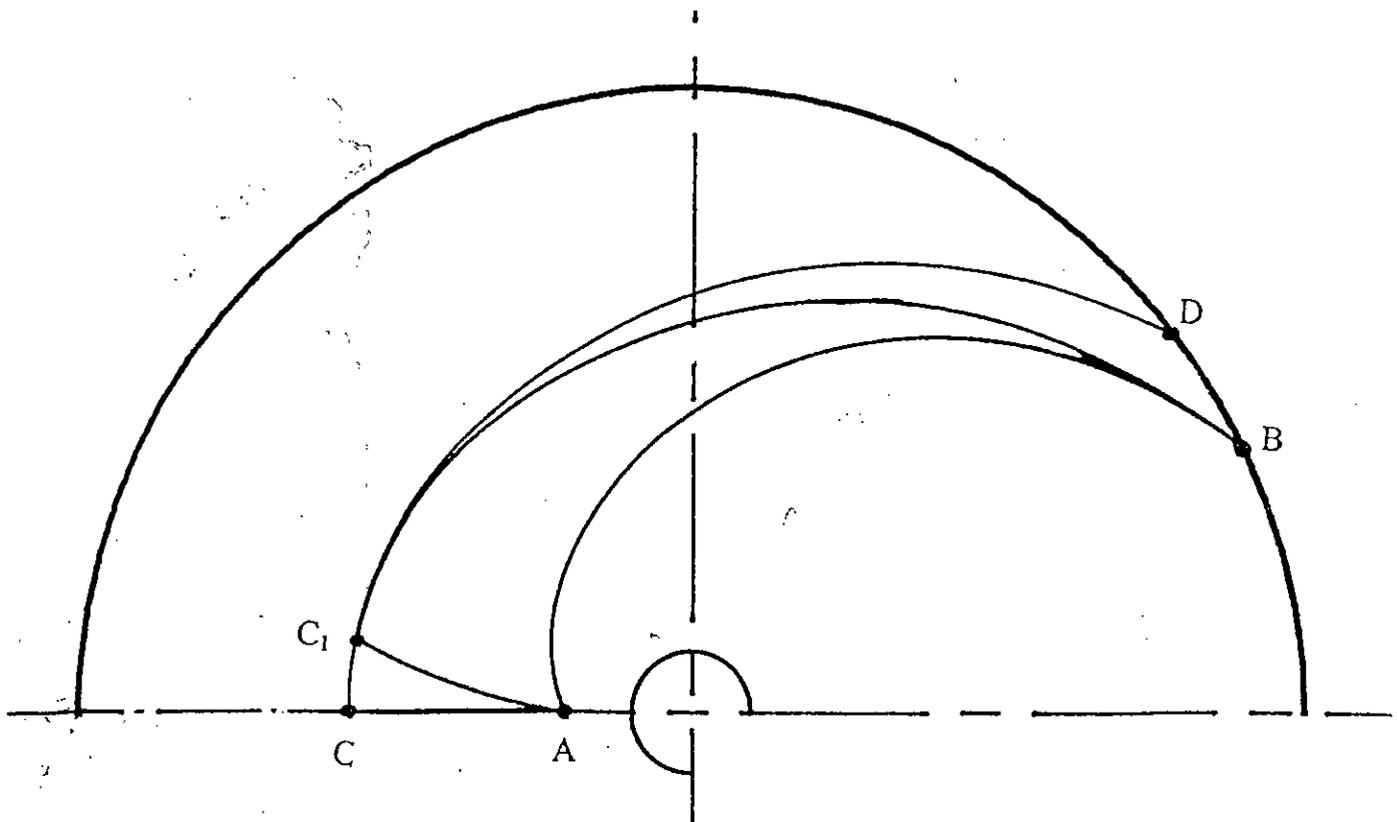


Figure V.7 : calage angulaire des projections de l'aube

**V.5-Application :**

On utilise les valeurs de la roue dimensionnée en IV.5 pour déterminer la vue méridienne et la vue de face, en choisissant pour  $z_2$ ,  $\varphi$ , et  $m_R$  les valeurs suivantes:

$$z_2 = 155 \text{ mm}$$

$$\varphi = 10^\circ$$

$$m_R = 35 \text{ mm}$$

La vue de face et la vue méridienne sont représentées sur les figures ci-dessous.

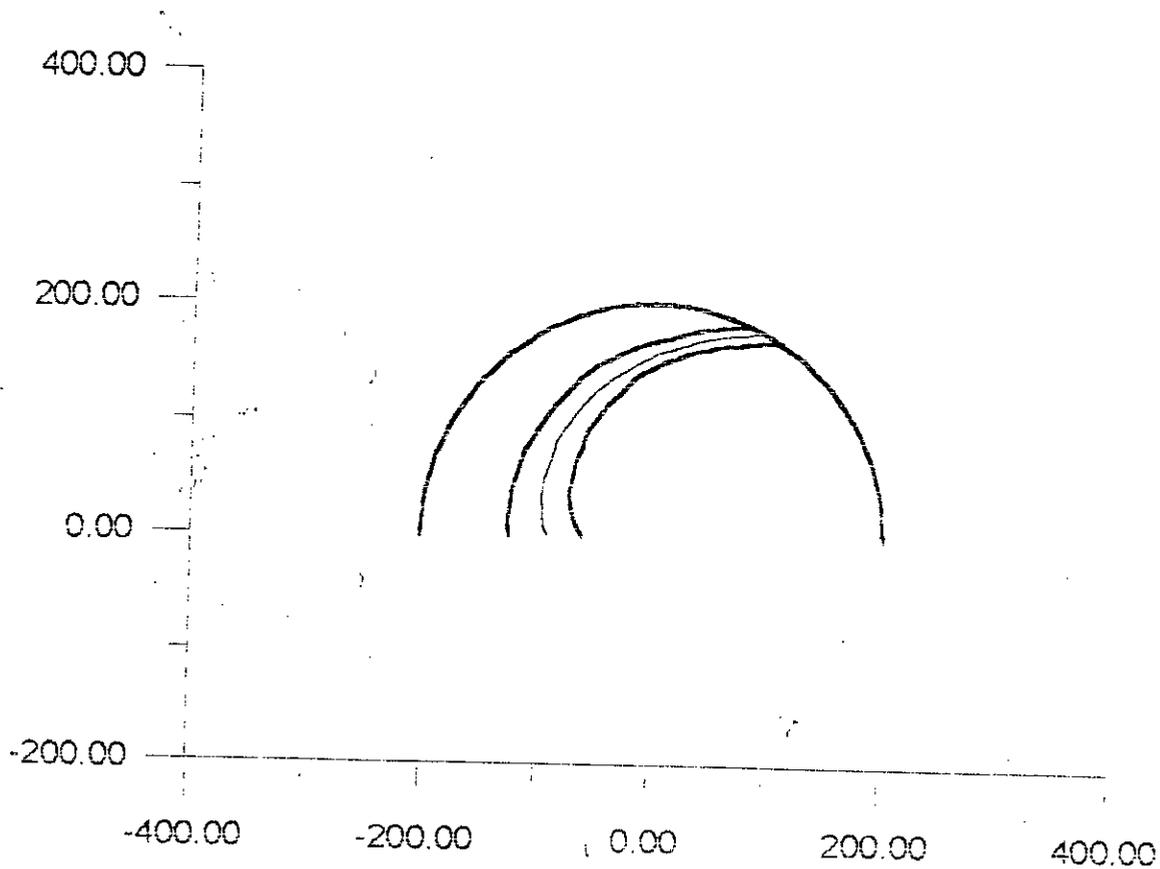


Figure V.8 : Vue de face (Echelle en mm)

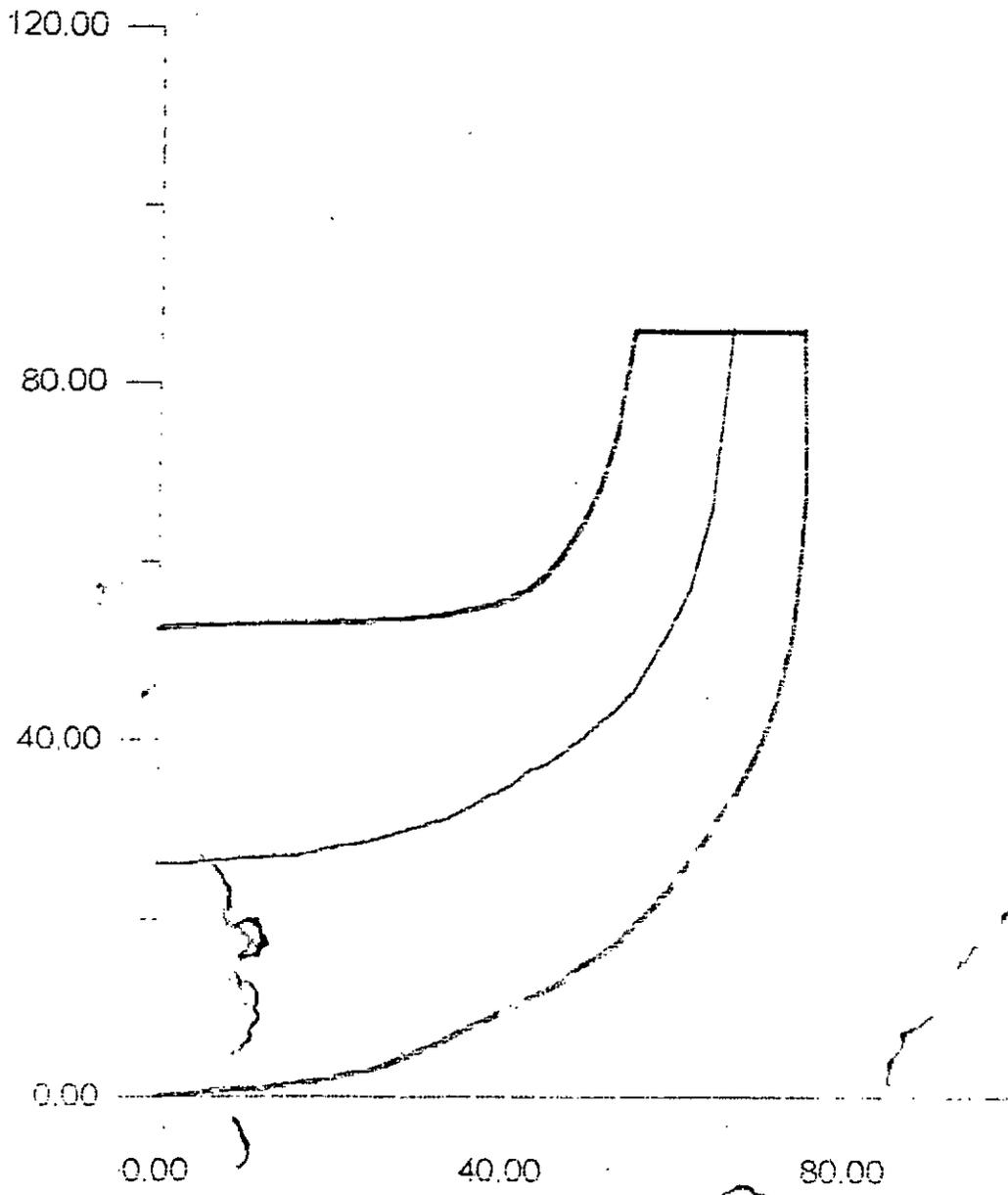


Figure V.9 : Vue méridienne (Echelle en mm)

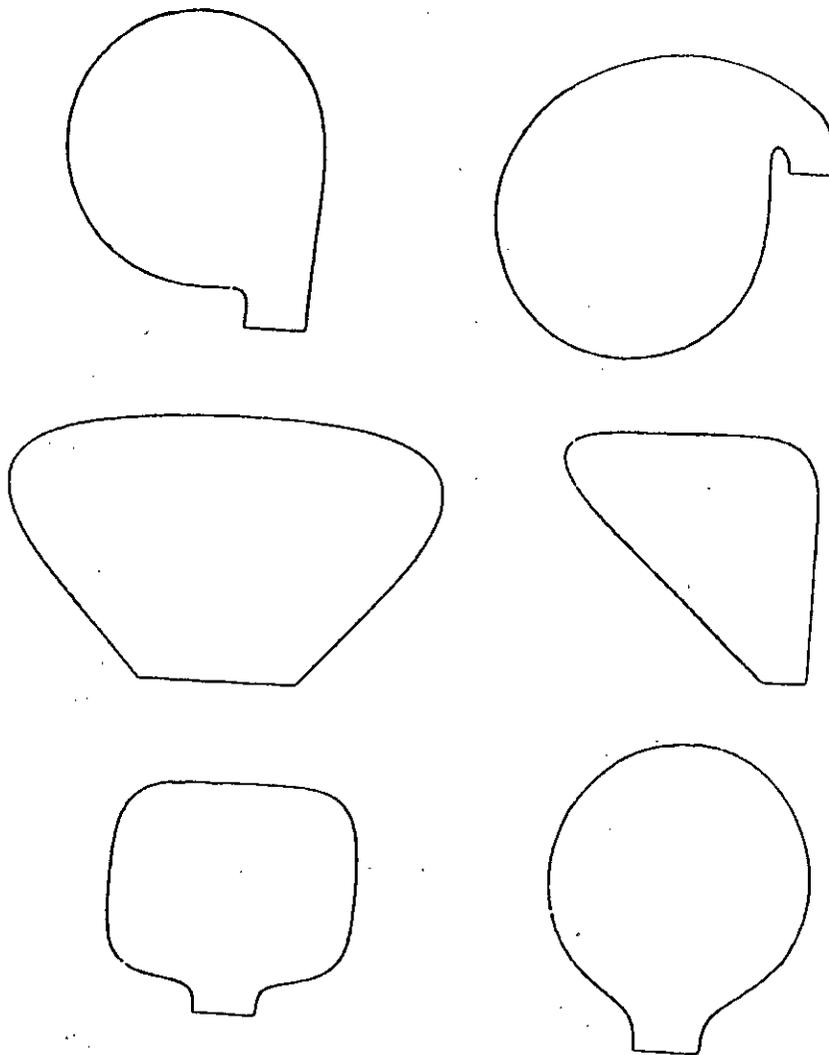
## CHAPITRE VI

### CALCUL ET TRACÉ DE LA VOLUTE

### VI.1-Introduction :

La vitesse du liquide sortant de la roue est très importante si on la compare avec celle de ce liquide lorsqu'il aborde cette roue. Pour cela on utilise la volute et dans laquelle a lieu la transformation de l'énergie cinétique en énergie de pression (transformation qui doit se faire avec le minimum de pertes, car le rendement en dépend).

La section transversale de la volute peut avoir plusieurs formes ( figure VI.1) . Ces formes dépendent de la facilité de la réalisation et de la minimisation de l'encombrement radial . Les sections circulaires sont le plus souvent utilisées compte tenu de leur qualité et de leur simplicité.



*Figure VI.1: sections transversales de volutes.*

## VI.2-Définition des paramètres géométriques de la volute :

### VI.2.1-Rayon de base $R_3$ :

Une distance minimale doit être maintenue entre la roue et le bec de la volute . Pour limiter l'interaction du sillage des aubages avec celui-ci (figure VI.2 ) , cette distance est en fonction du diamètre de la roue et la vitesse spécifique de la pompe et constitue un compromis entre les fluctuations de pression et le rendement. Dans la pratique, on peut employer le rapport approximatif :  $R_3 / R_2 = 1.05 \div 1.10$  .

### VI.2.2-Largeur $b_3$ au rayon de base :

La largeur  $b_3$  à l'entrée de la volute doit être un peu plus grande que la largeur  $b_2$  à la sortie de la roue, pratiquement on prend :  $b_3 / b_2 = 1.05 \div 1.30$

Les valeurs inférieures de  $b_3 / b_2$  se rapportent aux pompes à vitesse spécifique élevée.

### VI.2.3-Définition du divergent :

Le divergent est la partie terminale de la volute, dans lequel intervient la transformation de l'énergie cinétique du fluide en énergie de pression.

Cette partie commence par un élément de transition, court raccordant la section terminale de la volute a une section circulaire, qui se prolonge par une partie conique, divergente, plus au moins longue selon la section qui se lie à la tubulure de refoulement où la vitesse finale que l'on désire est réalisée.

L'angle d'élargissement du divergent  $\delta'$  peut être évalué par la formule empiriques suivante (réf.2):

$$\delta' = 15 - 0.5 Cu_3 \quad (VI.1)$$

Avec  $Cu_3$  est la vitesse moyenne d'écoulement du fluide en sortie de volute.

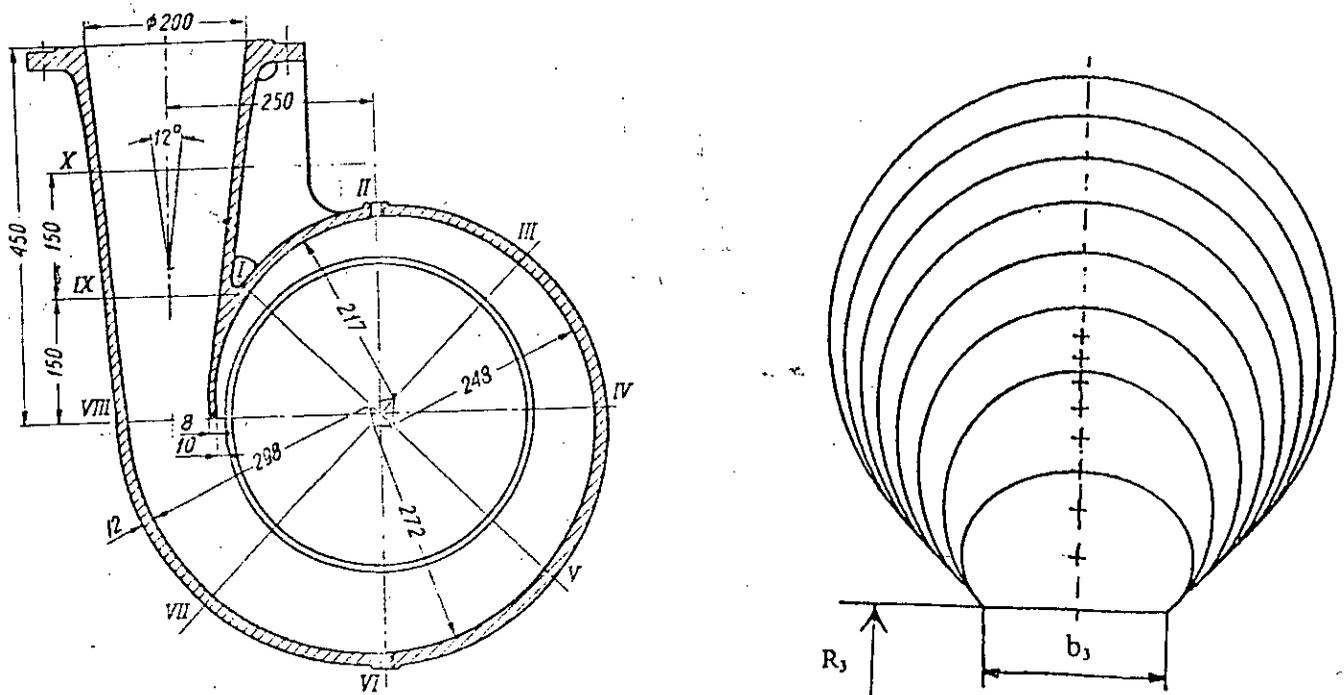


Figure VI.3 : Définition géométrique de la volute

### VI.3-Calcul et tracé de la volute :

Le calcul peut se faire suivant l'un des deux principes suivants :

#### VI.3.1-Principe de la conservation du moment cinétique :

D'après ce principe on démontre que la vitesse  $Cu$  à l'intérieur de la volute est inversement proportionnelle au rayon  $r$  :

$$\chi = r Cu = R_2 Cu_2 = \text{constante} \quad (\text{VI.2})$$

Le débit assuré dans la section élémentaire  $dA = b(r) \cdot dr$  est donné par :

$$dQ = Cu \cdot dA = \frac{\chi}{r} b(r) \cdot dr \quad (\text{VI.3})$$

Soit en intégrant sur toute la section débitante de  $R_3$  à  $R_0$  :

$$Q_\theta = \chi \int_{R_3}^{R_0} b(r) \frac{dr}{r} \quad (\text{VI.4})$$

Ce débit doit être égal à celui sortant de la roue depuis le bec de volute jusqu'à la section considérée ( fraction du débit total de la pompe ), soit :

$$Q_\theta = \frac{\theta}{360} Q \quad (\text{VI.5})$$

En égalant ces deux dernières relations et en réalisant l'intégration, on détermine le rayon  $R_0$  de la spirale .

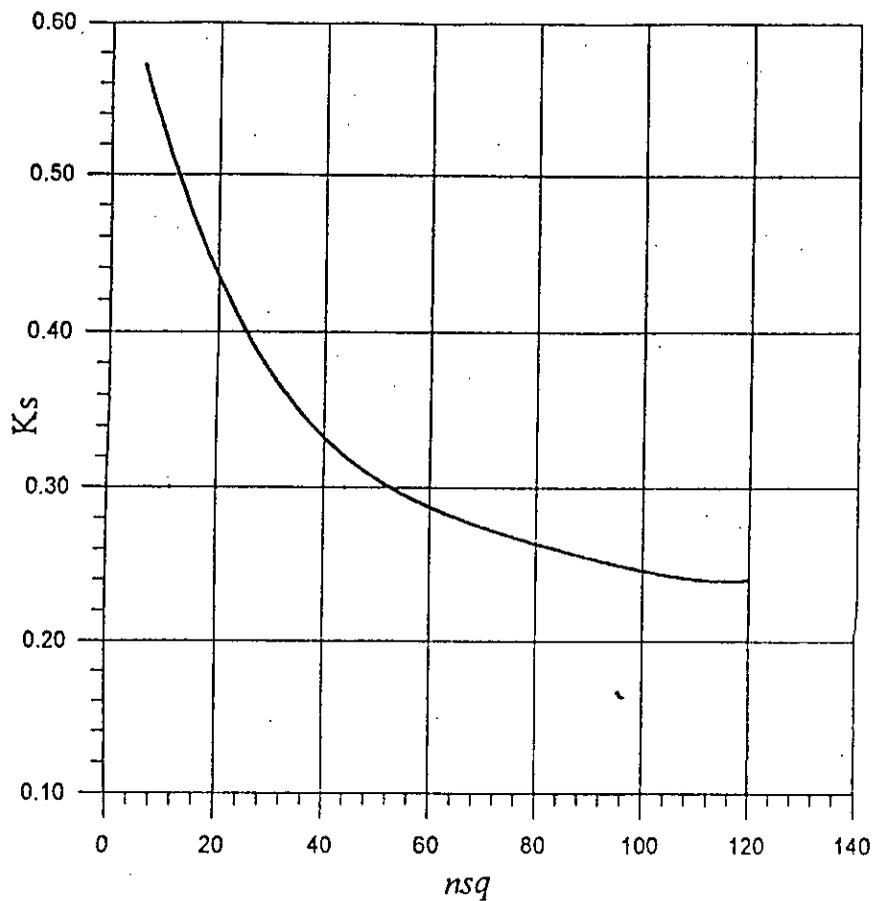
### VI.3.2-Principe basé sur la supposition d'une vitesse d'écoulement constante :

L'hypothèse d'une vitesse moyenne d'écoulement constante est appliquée au calcul des volutes spirales de section transversale quelconque .

La vitesse moyenne d'écoulement dans la volute est calculée au moyen de la formule :

$$C_{u3} = K_s \sqrt{2gH} \quad (\text{VI.6})$$

$K_s$  étant un coefficient expérimental tenant compte de la répartition non uniforme de vitesse et des pertes de frottement. La liaison entre le coefficient  $K_s$  et la vitesse spécifique  $nsq$  de la pompe est représentée sur la figure VI.4



**Figure VI.4 :** liaison entre le coefficient  $K_s$  et la vitesse spécifique  $nsq$

Après avoir calculé la valeur de  $Cu_3$ , on calcule la section de la volute pour un angle au centre  $\theta$  quelconque au moyen de la relation :

$$S_{\theta} = \frac{\theta}{360} \frac{Q}{Cu_3} \quad (VI.7)$$

#### VI.4-Application:

On utilise les paramètres géométriques de la roue dimensionnée précédemment, pour déterminer la géométrie de la volute.

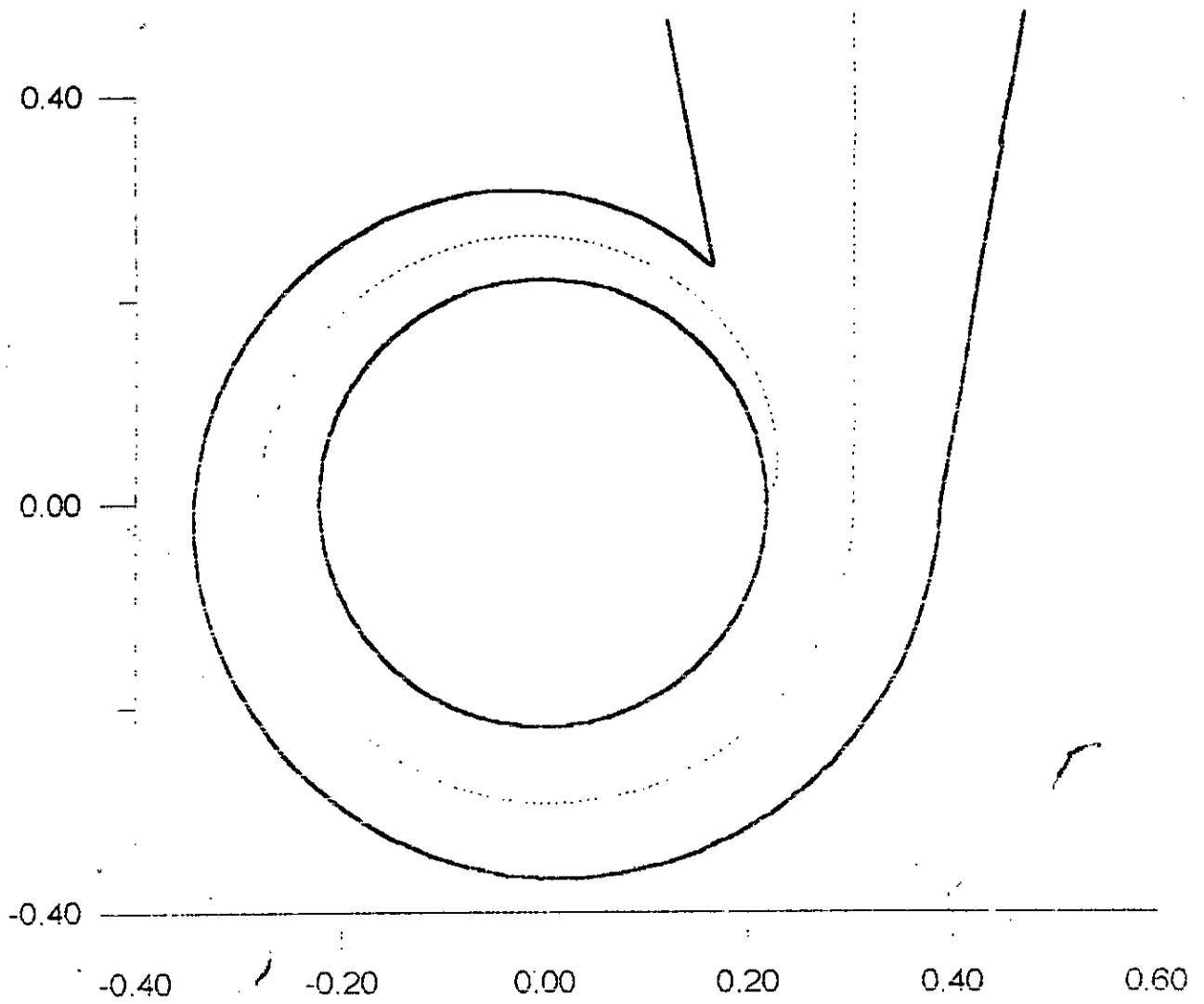


Figure VI.5 : Vue de face de la volute (Echelle en m)

## CONCLUSION

## CONCLUSION

Le présent travail représente la synthèse de plusieurs ouvrages dont leurs principales sources sont des résultats expérimentaux suivis de quelques hypothèses permettant de résoudre certains problèmes rencontrés dans le domaine de la mécanique des fluides. Ce travail nous a permis de dimensionner une pompe à partir d'un cahier de charges donné, aussi que les tracés hydraulique de la roue et de la volute.

L'ensemble des paramètres d'études de ce présent travail, doivent être calibrés de façon conséquente, à travers une expérimentation numérique adaptée, qui doit nous permettre d'avoir le prototype du modèle le mieux adapté, qui sera soumis à une batterie d'expérience sur banc d'essai. Il serait souhaitable alors, de compléter ce présent travail par une étude expérimentale sur un banc d'essai.

**ANNEXES**

**A.1- Gradient d'une fonction scalaire  $\phi$ :**

La fonction  $\phi(r, \theta, z)$  a pour gradient le vecteur suivant:

$$\vec{\text{grad}}\phi = \begin{pmatrix} \frac{\delta\phi}{\delta r} \\ \frac{\delta\phi}{r\delta\theta} \\ \frac{\delta\phi}{\delta Z} \end{pmatrix}$$

**A2- Divergence:**

Soit le vecteur:

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_z \end{pmatrix}$$

On définit la divergence de  $\vec{V}$  par le scalaire:

$$\text{div}\vec{V} = \frac{\delta V_r}{\delta r} + \frac{\delta V_\theta}{r\delta\theta} + \frac{\delta V_z}{\delta Z}$$

**A3- Différentielle totale:**

Soit la fonction des coordonnées et du temps:

$$\phi = \phi(r, \theta, z, t)$$

La différentielle totale de  $\phi$  sera donnée par:

$$d\phi = \frac{\delta\phi}{\delta r} dr + \frac{\delta\phi}{r\delta\theta} d\theta + \frac{\delta\phi}{\delta Z} dz$$

#### A.4- Mouvement relatif:

Ecrivons l'irrotationnalité de l'écoulement absolu:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{C} = \vec{0}$$

en coordonnées cylindriques, cette relation vectorielle s'écrit:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\delta C_a}{\delta \theta} - \frac{\delta C_u}{\delta Z} \\ \frac{\delta C_r}{\delta Z} - \frac{\delta C_u}{\delta r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\delta(r C_u)}{\delta r} - \frac{1}{r} \frac{\delta C_r}{\delta \theta} = 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

En remplaçant chaque composante de la vitesse absolue par sa valeur en fonction des composantes relatives et d'entraînement:

$$\vec{C} = \vec{U} + \vec{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_r \\ W_u \\ W_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_r \\ C_u \\ C_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_r \\ \omega r + W_u \\ W_a \end{bmatrix}$$

Le système (1) s'écrit:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\delta W_a}{\delta r} - \frac{\delta W_u}{\delta Z} \\ \frac{\delta W_r}{\delta Z} - \frac{\delta W_a}{\delta r} \\ 2\omega + \frac{1}{r} \frac{\delta(r W_u)}{\delta r} - \frac{1}{r} \frac{\delta W_r}{\delta \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Et on observant que le rotationnel de  $\vec{U}$  s'écrit:

$$\vec{rot}\vec{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{bmatrix}$$

Le système (2) peut s'écrire:

$$\vec{rot}\vec{C} = \vec{rot}\vec{W} + 2\vec{\omega}$$

Ou encore:

$$\vec{rot}\vec{W} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\delta W a}{\delta r} - \frac{\delta W u}{\delta Z} = 0 \\ \frac{\delta W r}{\delta Z} - \frac{\delta W a}{\delta r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\delta(r W u)}{\delta r} - \frac{1}{r} \frac{\delta W r}{\delta \theta} = -2\omega \end{bmatrix}$$

Le mouvement relatif est donc rotationnel.

#### A5- Intégration numérique par la méthode des trapèzes:

Soit  $f(x)$  une fonction numérique, définie et continûment dérivable sur l'intervalle  $[a, b]$ . L'intégrale:

$$F = \int_a^b f(x) dx$$

peut être calculer par:

$$F = \frac{(b-a)}{2n} \sum_{i=1}^{n+1} t_i f(x_i)$$

Avec:

$n$ : nombre de segments;

$t=1$  pour  $i=1$  ou  $n+1$ ;

$t=2$  autrement.

#### A.6- Résolution des équations par la méthode de Wegstein:

Soit une fonction  $F(x)$ , linéaire de degré supérieure à 2 ou non linéaire. On forme l'équation :

$$x = f(x).$$

Et on donne une solution initiale approchée  $x_0$ , après on calcule les termes suivants:

$$x_1 = f(x_0)$$

$$\Delta = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

$$\alpha = \frac{1}{1 - \Delta}$$

Si:  $|x_1 - x_0| \leq \varepsilon$  on s'arrête, si non on continue, où  $\varepsilon$  est la précision du calcul désirée.

#### A.7-Courbe de Bézier:

Considérons les points de la ligne polygônale de la figure ci-dessous, on appelle courbe de Bézier; la courbe qui passe par les extrémités de la ligne polygônale ; dont les segments droites qui passent par les extrémités sont tangents a cette courbe, l'ordre de cette courbe étant égale au nombre de sommets (ou pôle) de polygone moins un.

Les coordonnées des points de la courbe sont déterminées en calculant le centre de gravité des sommets ponderés pour un paramètre  $t$  variant de 0 à 1.

Le poids  $P$  du sommet  $R_i$  est calculé par la fonction de Bernstein d'ordre  $n$ :

$$P(R_i) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$$

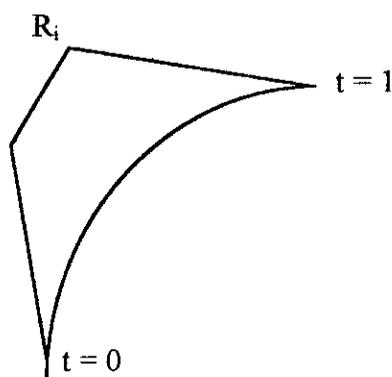
où  $C_n^i$  est le coefficient binomial:

$$C_n^i = n! / i! (n-i)!$$

Le poids  $R(t)$  est calculé par :

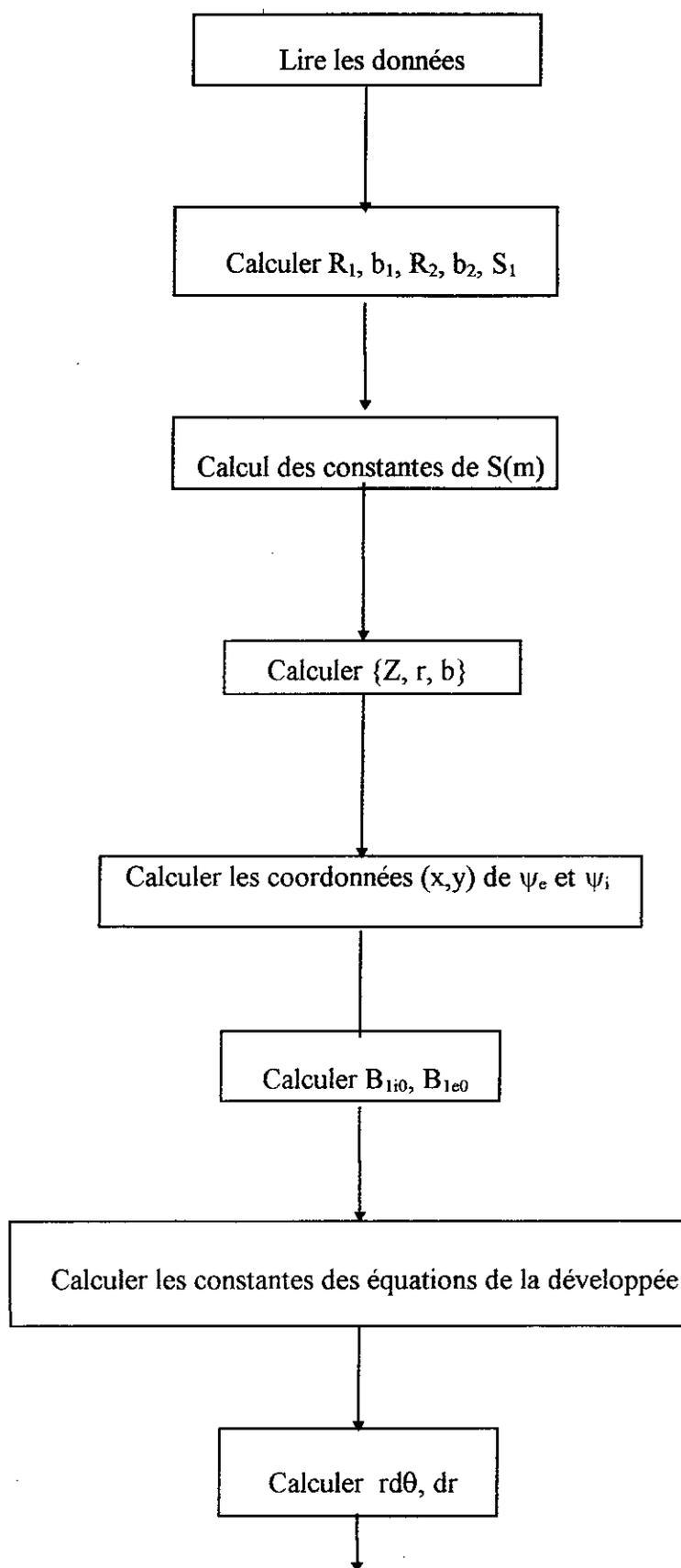
$$R(t) = \sum P(R_i) R_i$$

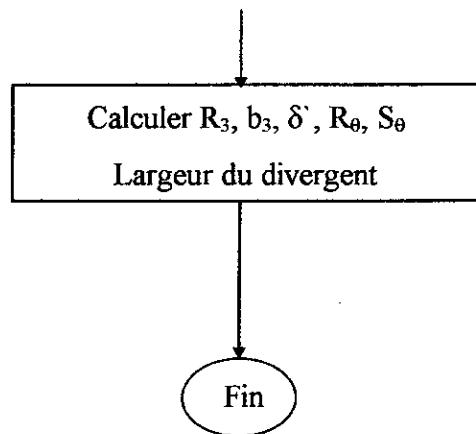
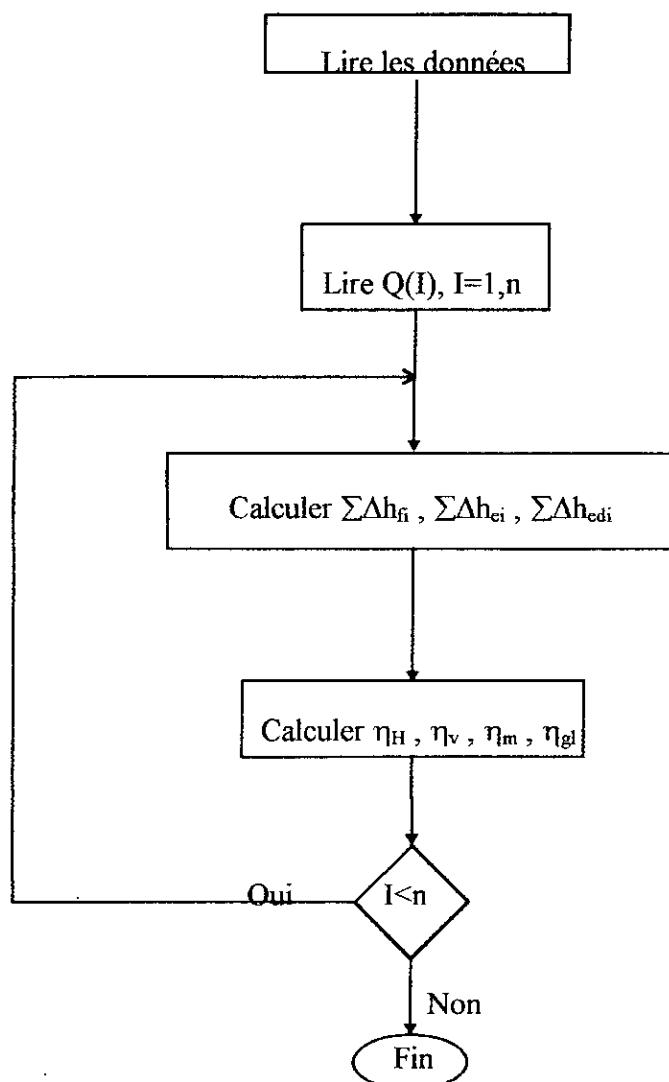
Le segment de la courbe est tracé point par point en faisant varier  $t$  de 0 à 1.



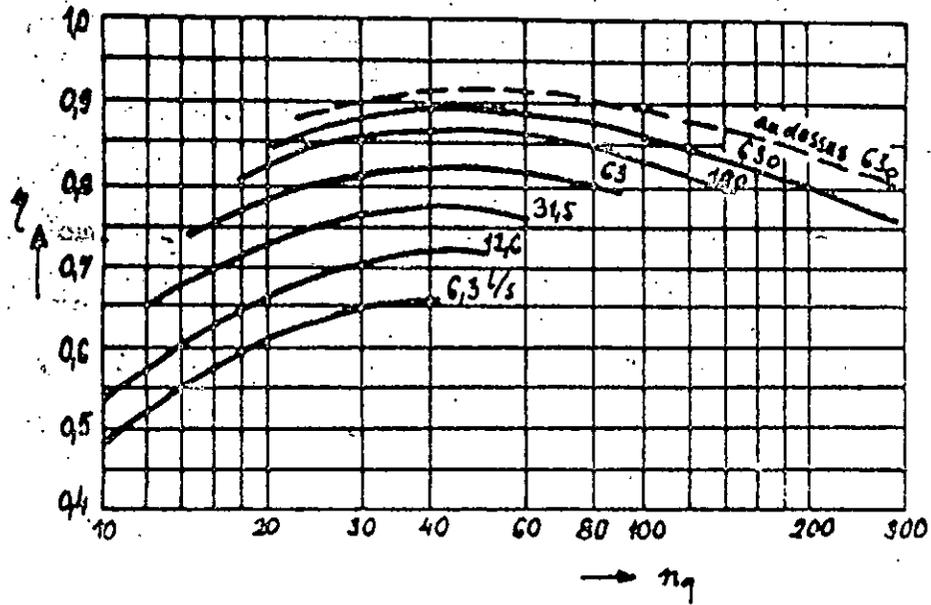
*Association d'une courbe de Bézier.*

## A.8- Organigramme de dimensionnement:



**A7- Organigramme de calcul des pertes:**

## A.8-Abaque du rendement global:



**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

[1]- A.T.TROSKOLANSKY : « Les turbopompes : ' Théorie. Tracé. Construction ' »

1977 - Edition Eyrozzes - Paris.

[2]- A. THUMA : « Machines hydrauliques »

1990 - Office des publications universitaires.

[3]- R. OUZIAUX et J. FERRIER : « Mécanique des fluides appliquée »

1972 - Edition. DUNOD - Paris.

[4]- M. SEDILLE : « Turbomachine hydraulique et thermique » Tome II

1976 - Edition Masson - Paris.

[5]- R. COMOLET : « Mécanique expérimentale des fluides »

1982 - Edition Masson - Paris.

[6]- J. POULAIN : « Fonctionnement des pompes ». Article. 1996.

[7]- J. POULAIN : « Problèmes mécaniques particuliers ». Article. 1997.

[8]- A.GOURDIN, M. BOUMAH RAT: « Méthodes numériques appliquées ».

1989 - Edition Technique et documentation-Lavoisier.

[9]- P.SCHWEIZER : « Infographie ».

1987- Presses polytechniques romandes.

[10]- B. NEKRASSOV: « cours d'hydraulique ».

1968- Edition Mir.

[11]- BOUSSICAUD: « Le calcul des pertes de charge».

1980- Numéro spécial C.F.P.

[12]- A.LANCASTRE: « Manuel d'hydraulique général».

1982- Edition Eyrolles.

[13]- R.REY: « Dimensionnement des turbomachines ».

1994- ENSAM.

[14]- A.DUPONT: « Hydraulique urbaine».

1979- Edition Eyrolles.

[15]- A.J.STEPANOFF: « pompes centrifuges, et pompes hélices ».

1961- Edition Dunod-Paris.