

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en Génie Mécanique

Projet de Fin d'Etudes

Thème :

ETUDE ET DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES D'UN PALIER HYBRIDE

Proposé par :

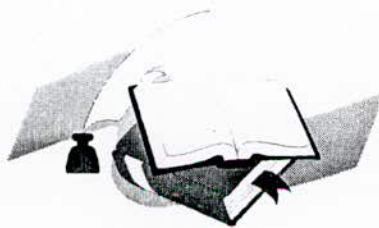
Mr. H. BELHANECHÉ
Mr. S. LARBI

Etudié :

Mr BOUCIDER RAMDANE
Mr BERRIANI MOULOUD

Dirigé par :

Mr H. BELHANECHÉ
Mr S. LARBI



Promotion Septembre 1997
E.N.P. 10, Avenue Hassse n Badi El-Sarrach Alger

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en Génie Mécanique

Projet de Fin d'Etudes

Thème :

ETUDE ET DETERMINATION
DES CARACTERISTIQUES
D'UN PALIER HYBRIDE

Proposé par :

Mr. H. BELHANECHÉ
Mr. S. LARBI

Etudié :

Mr BOUCIDER RAMDANE
Mr BERRIANI MOULOUD

Dirigé par :

Mr H. BELHANECHÉ
Mr S. LARBI



Promotion Septembre 1997
E.N.P. 10, Avenue Hassse n Badi El-Sarrach Alger

REMERCIEMENT

Nous tenons très sincèrement et à fond de coeur, d'exprimer notre gratitude grandiose envers notre promoteur, Monsieur H. BELHANECHÉ pour tout l'intérêt qu'il a accordé à notre travail pour ces encouragements continus, ces conseils et son soutien moral, et la patience qu'il nous a accordé, ainsi que pour les discussions utiles que nous avons eues.

Nos vives gratitudee sont également à notre co-promoteur Monsieur S.LARBI pour son aide et son soutien moral et sa patience.

Nos vifs remerciements sont également à :

Monsieur MADANI, d'avoir faciliter notre travail au département, ~~on~~ lui gré d'avoir accepter de présider le jury de cette thèse.

Monsieur BOUDJAMAA d'avoir accepter d'examiner cette thèse.

L'ensemble des enseignants qui ont contribués à notre formation.

Les responsables du centre de calcul pour les facilitées qu'il nous ont accordé durant la simulation.

Ainsi que les agents de la bibliothèque et spécialement Krimo et Salah pour leur patience et le soin qu'ils nous ont accorder durant notre graduation à l'école.

Et enfin nous remercions Messieurs BADAOUI, OUKALI, pour leur soutien et sympathie qu'ils nous ont apporté, ainsi que tous ceux qui nous ont aidé durant la préparation de notre mémoire (Salah, Nadjib, Sofiane et Ahmed...).

Sans oublier nos amis en particulier Toufik, Ali, Samir....

Abstract :

A finite difference method is used in solving elliptic type partial differential equation, characterizing the pressure distribution in lubricated film. The obtained numerical results for the pressure are used to determine the statical and dynamical behavior of hybrid bearing with several recess.

Resumé :

La méthode des différences finis est utilisée pour la résolution de l'équation au dérivée partiel de type elliptique qui caractérise le champ de pression dans le film lubrifiant. Nous obtenons les résultats numériques, pour les pressions, utilisés pour la détermination de l'aspect statique et dynamique d'un palier hybride à plusieurs alvéoles

ملخص

أُستعملت طريقة الفروق المحددة لحل المعادلات ذات المشتقات الجزئية من النوع قطع ناقص والمفصلة بحقل الضغط في المحببة غير سميكة لمادة تشحيم أو تزييت. نتحصل على نتائج عددية لقيمة الضغط، نستعمل هذه لتعديد الخصائص الساكنة والديناميكية لحامل محببتين ذو عدد محرف.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

CHAPITRE II : EQUATIONS DE BASES

| | |
|---|----|
| II.1 : Introduction | 06 |
| II.2 : Equations générales de la mécanique des milieux continus | 06 |
| II.2.1 : Loi de conservation de la masse | 08 |
| II.2.2 : Loi de conservation de la quantité de mouvement | 09 |
| II.2.3 : Loi de comportement du fluide | 10 |
| II.3 - Equations générales de la mécanique des films minces visqueux | 12 |
| II.3.1 : Equation de conservation de la masse | 13 |
| II.3.2 : Equation généralisée de la mécanique des films minces visqueux | 13 |
| II.3.2.1 : Intégration des équations de NAVIER | 16 |
| II.3.2.2 : Equation de REYNOLDS généralisée | 19 |
| II.3.2.3 : Interprétation physique des différents termes de l'équation de Reynolds | 21 |
| II.4 : Propriétés du lubrifiant | 21 |
| II.5 : Viscosité | 21 |
| II.6 : Conclusion | 22 |

CHAPITRE III : COMPORTEMENT GLOBAL D'UN PALIER HYBRIDE

| | |
|---|----|
| III.1 : Généralités | 23 |
| III.2 : Systèmes de régulations | 23 |
| III.2.1 : Les capillaires | 24 |
| III.2.2 : Les orifices | 26 |
| III.3 : Conclusion | 26 |
| III.4 : Description d'un palier hybride | 27 |
| III.5 : Géométrie et cinématique des surfaces | 29 |
| III.5.1 - Equation de reynolds généralisée et condition aux limites | 32 |
| III.6 : Régime d'écoulement en film mince | 34 |
| III.6.1 : Régime laminaire | 35 |
| III.6.2 : Régime non laminaire | 36 |
| III.6.2.1 : Analyse de Constantineuscu | 37 |
| III.7 : Conclusion | 39 |
| III.8 : Caractéristiques statiques | 40 |
| III.8.1 : Charge et angle de calage | 40 |
| III.8.2 : Débit | 41 |

| | |
|---|----|
| III.9 : Caractéristiques dynamiques | 43 |
| III.9.1 : Coefficient de raideur et d'amortissement | 43 |
| III.9.2 : Stabilité d'un palier | 46 |
| III.10 : Conclusion | 48 |

CHAPITRE IV : METHODES DE RESOLUTION

| | |
|--|----|
| IV.1 : Introduction | 49 |
| IV.2 : Description et résolution | 49 |
| IV.2.1 : Conditions aux limites | 52 |
| IV.3 : Algorithme de programme | 53 |
| IV.3.1 : Comportement statique | 53 |
| IV.3.2 : Comportement dynamique | 55 |
| IV.4 : Critère de convergence | 57 |
| IV.5 : Conclusion | 60 |

CHAPITRE V PROGRAMME REPRESENTATION DES RESULTATS.

| | |
|--|----|
| V.1 : Introduction | 61 |
| V.2 : Choix des données | 62 |
| V.2.1 : Choix d'une base de donnée | 62 |
| V.3 : Influence de la vitesse | 65 |
| V.4 : Conclusion | 70 |
| Conclusion général et perspective | 71 |
| Annexes | |
| Références bibliographiques | |

PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISES

| | |
|-------------------------------|---|
| $c = R_c - R_a$ | jeu radial |
| $D_m(t)$ | domaine matériel fonction de temps |
| ∂D | frontière de $D_m(t)$ |
| E | module de Young |
| F | intégrale fonction de la viscosité |
| f_i | composantes des efforts volumiques |
| G | intégrale fonction de la viscosité |
| G_x, G_z | coefficients de viscosité |
| $h = H_1 - H_2$ | épaisseur du film lubrifiant |
| H_1, H_2 | hauteur des surfaces 1 et 2 du contact |
| $i = \partial / \partial x_i$ | dérivation partielle par rapport à la $i^{\text{ème}}$ coordonnée |
| I, J, I_2, J_2 | intégrales fonction de la viscosité |
| L | Longueur du palier |
| N | vitesse de rotation de l'arbre |
| \rightarrow n | vecteur normal à une surface |
| P | pression dans de film |
| P_a | pression dans l'alvéole |
| P_s | pression d'alimentation (ou pression de référence) |
| q_t | débit global |
| $q_{1,2}$ | débites de lubrifiant dans les deux sens circonférentiel |
| q_3 | débit du fluide dans le sens axial |
| R_a | rayon de l'arbre |
| R_c | rayon interne du coussinet |
| R | Rayon moyen de palier |
| t | temps |
| $u_1, u_2, u_3, \text{ ou}$ | |
| u, v, w | composantes du vecteur vitesse dans le film |

| | |
|---|--|
| U_{11}, U_{12}, U_{13} | vitesse de la première surface du contact |
| U_{21}, U_{22}, U_{23} | vitesse de la deuxième surface du contact |
| v | volume massique |
| W | charge supporté par le palier |
| x_1, x_2, x_3 ou | |
| x, y, z | coordonnées cartésiennes |
| δ_{ij} | symbole de Kronecker |
| $\beta = \frac{Pa}{Ps}$ | pression adimensionnée de l'alvéole |
| | rendement d'un palier |
| $\varepsilon = e/c$ | excentricité relative |
| λ | premier coefficient de lamé |
| μ | viscosité dynamique du lubrifiant |
| ν | coefficient de Poisson |
| $\omega = U/R$ | vitesse de rotation de l'arbre en rd/s |
| ξ | variable muette d'intégration |
| ρ | masse volumique du lubrifiant |
| ϕ | angle de calage |
| θ | coordonnée circonférentielle |
| $\Lambda = \frac{\omega\mu R^2}{c_2 P_s}$ | paramètre de vitesse |
| L_a | Longueur de l'alvéole |
| γ | amplitude, angulaire qui définit la largeur de l'alvéole |

INTRODUCTION

Afin de réduire le frottement entre deux surfaces en mouvement relatif, il est intéressant de les séparer par un fluide lubrifiant. Celui-ci doit être un liquide ou un gaz .

La portance nécessaire pour séparer les deux surfaces peut être créée:

- 1.)-soit par le mouvement relatif des surfaces formant un espace convergent (portance hydrodynamique);
- 2.)-soit par une source de pression extérieure au mécanisme (portance hydrostatique).

Quel que soit le phénomène mise en jeu ,l'épaisseur minimale du film doit être plus grande que la hauteur des aspérités des surfaces sinon on est en présence de lubrification mixte.

La détermination des caractéristiques de fonctionnement des paliers et butées hydrodynamique et hydrostatique est une opération délicate, Il intervient en effet un nombre important de paramètres tant géométriques ,dynamiques que physiques. En particulier, la viscosité, du fluide joue un rôle déterminant, celle-ci varie considérablement avec la température et la pression. Par ailleurs le régime d'écoulement est laminaire ou turbulent .

Le calcul des caractéristiques statiques et dynamiques sera traitée pour une géométrie simple et en régime isotherme (viscosité uniforme à l'intérieure du film).En fait, l'analyse isotherme ne permet d'obtenir des résultats acceptables que lorsque l'énergie dissipée par cisaillement dans le lubrifiant est faible et conduit à un

échauffement et une diminution de viscosité peu importante, ce qui est en particulier le cas pour l'eau.[6]

Pour les paliers industriels, il est nécessaire d'utiliser des modèles de calcul plus compliqué de type thermohydrodynamique et élasto-hydrodynamique prenant en compte respectivement les échanges thermiques et les déformations.[6]

Dans ce travail, nous présentons au chapitre I une étude bibliographique détaillée qui montre l'évolution de l'étude concernant la lubrification des paliers.

Au chapitre II, nous présentons les équations de base de la mécanique des films minces visqueux, nous insisterons particulièrement sur les équations qui régissent le comportement d'un écoulement en régime laminaire .

Au chapitre III, nous appliquons les équations de la mécanique des milieux continus au problème des paliers hybrides, et nous présentons les équations qui régissent l'écoulement d'un palier hybride en régime laminaire et non -laminaire .

Au chapitre IV, nous appliquons la méthode des différences finis aux paliers hybrides.

Enfin, le chapitre V nous présentons les résultats obtenus et nous les comparons avec ceux obtenus par ailleurs.

Chapitre I

Etude bibliographique

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

L'étude de la lubrification s'insère dans ce qu'il est convenu d'appeler la mécanique des films minces visqueux ,revient à Osborne Reynolds (1842-1912) [15], qui dans un article publié, en 1886, établit les bases de la lubrification hydrodynamique.

O.Reynolds présente les hypothèses de base de la lubrification hydrodynamique.

Compte tenu de ces hypothèses , les équations de Navier et Stokes [11] seront simplifiées et intégrées en supposant qu'il n y a pas de glissement entre le fluide et les surfaces du contact, O.Reynolds obtient le champ de vitesse dans le fluide,ces expressions reportées dans l'équation de continuité , intégrée à travers l'épaisseur de film et donne l'equation de Reynolds en regime laminaire.

O.Reynolds a proposé une solution de cette équation dans le cas des paliers infiniment long,et en utilisant des développements en série [6].Cependant, une telle intégration est très laborieuse,et la solution n'est acceptable que dans le cas des paliers peu chargés. Cette théorie de la lubrification hydrodynamique présentée par O.Reynolds , n'a été utilisée qu'a partir du début de XX ème siècle pour le calcul des butées et des paliers.

Dans le cas des paliers , les progrès ont été moins rapides. En 1904 , A.Sommerfeld (1868-1951) utilise un changement de variables judicieux et présente une solution analytique de l'équation de Reynolds dans le cas du palier infiniment long [13].

Cependant, les conditions aux limites proposées ne tiennent pas compte de la rupture du film dans le palier et la pression ainsi obtenue est négative dans la zone divergente , ce qui ne correspond pas à la réalité physique.

En 1932, Swift (1894-1960) [16], puis Stieber en 1933, présente indépendamment des conditions aux limites à la sortie du film plus représentative de la réalité. Ils écrivent que dans la zone divergente du palier, le film se rompt le long d'une frontière déterminée par les conditions supplémentaires suivantes:

1)- le long de la frontière de la pression, la pression prend la valeur de la pression saturante du fluide.

2)- le gradient de pression s'annule.

Ces conditions qui respectent la continuité du débit à la sortie du film sont dites conditions aux limites de Reynolds et sont universellement utilisées aujourd'hui pour le calcul des paliers soumis à des charges constantes.

Une méthode numérique de résolution de l'équation de Reynolds utilisant cette condition, a été proposée par Christopherson dès 1941.

En 1931, Albert Kinsbury [17] (1863-1943) obtient une solution approchée à l'équation de Reynolds en utilisant une méthode basée sur l'analogie électrique.

En 1953, Ocvirk (1913-1967) présente une méthode approchée pour le calcul des paliers courts [6]. Il propose de négliger dans l'équation de Reynolds le gradient de pression circonférenciel devant le gradient de pression axial. La solution est analytique et utilise les conditions aux limites de Gumbel. Les résultats obtenus sont pratiquement exacts pour les paliers dont le rapport (L/D) de la longueur au diamètre est inférieur à 0.25, cependant, cette méthode est encore utilisée aujourd'hui, dans le cas des charges variables pour des paliers de rapport (L/D) de l'ordre de 0.5. car elle simplifie considérablement les calculs.

Enfin, les premières solutions numériques ont été proposées par Cameron,[27] et Wood en 1949, puis par Pinkus, Raimondi et Boyd en 1958.

L'utilisation de fluides lubrifiants très peu visqueux ainsi que l'augmentation des vitesses entraînent des changements de régime dans l'écoulement du film lubrifiant. Ce phénomène constaté par M. Couette dès 1890, dans le cas de l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux, puis analysé par G.I. Taylor [18], en 1923, a été mis en évidence dans les paliers par Donald Wilcock [28], en 1928.

L'étude de ces phénomènes non-laminaires (tourbillons de Taylor et turbulence) a été effectuée récemment, cependant pour certaines applications, cryogéniques par exemple, de nombreux problèmes restent à résoudre. Pour cela plusieurs chercheurs ont proposés des méthodes de calcul pour ces phénomènes non-laminaires.

Stuart,[20] développe une théorie non-linéaire pour caractériser le régime des tourbillons de Taylor.

En 1964 Di. Prima, utilise cette théorie pour déterminer la vitesse moyenne du fluide ainsi que la contrainte moyenne de cisaillement[1].

Tao [21] a calculé les caractéristiques de fonctionnement d'un système en régime turbulent.

A partir de 1969 Hirs [26] développe une méthode pour le calcul des caractéristiques de fonctionnement d'un système au régime turbulent .

Constantinescu [19] a utilisé la notion de la longueur de mélanges en turbulence qui fait intervenir la vitesse moyenne due au phénomène aléatoire qu'est la turbulence .

Ng et Pan [22] ont développé une étude linéaire basée sur la loi de paroi où apparaît la notion de viscosité turbulente.

L'existence de la lubrification hydrostatique était connue avant le début de ce siècle, ainsi L.d Girald en 1865 démontra le principe de la séparation des surfaces et de la réduction des frottements par injection d'huile sous pression,[6].

Aujourd'hui , les systèmes hydrostatiques sont utilisés dans les machines outils de précision et les appareils de mesure ainsi que dans le cas où le mouvement relatif des surfaces ne permet pas de créer une portance suffisante pour assurer un bon fonctionnement du mécanisme(palier hybride).

L'étude de ce type de palier constitue simultanément l'étude des paliers hydrostatiques et hydrodynamiques.

En 1976, Rohde et Ezzat [9], ont fait l'étude de l'aspect dynamique d'un palier hybride.

En 1985, Boussaid [2] a utilisé la méthode des éléments finis pour étudier l'effet d'inertie aux bords des alvéoles.

Chaomleffel [1], a fait le même travail en étudiant l'influence des forces d'inertie en lubrification hybride.

En 1985, Y.s Chen.Wu.Xie ont fait l'étude de la stabilité d'un palier hybride à plusieurs alvéoles.

Chapitre II

Equations de base

II.1-INTRODUCTION

Les relations générales permettant l'analyse isotherme de la lubrification en introduisant simultanément :

les deux effets hydrodynamique et hydrostatique d'un contact lubrifié découlent des équations qui tracent le comportement des milieux continus. Nous les présentons sous la forme simplifiée qui correspond à notre cas.

II.2-EQUATIONS GENERALES DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Les équations générales de la mécanique des milieux continus traduisent les lois de conservation suivantes:

- 1)-La loi de conservation de la masse :
- 2)-La loi de conservation fondamentale de la dynamique
- 3)-La loi de conservation de l'énergie pour un fluide Newtonien
- 4)-les lois de comportement rhéologique pour un fluide Newtonien

II.2.1-LOI DE CONSERVATION DE LA MASSE:

Soit $D_m(t)$ un domaine matériel de S (système étudié) que l'on suit dans son mouvement, chaque point de sa frontière $\partial D_m(t)$ à la vitesse u de la particule fluide avec laquelle coïncide à l'instant t . Pour ce domaine la loi de conservation de la masse se traduit par l'équation:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_m(t)} \rho dv = 0 \quad (\text{II.1})$$

Dans cette équation ρ est la masse volumique, v est le volume de domaine

matériel de système étudié, dans l'équation (II.1) peut être développé en utilisant le théorème de transport de Reynolds, ce qui donne:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_m(t)} \rho dv = \int_{D_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{\nu} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (\text{II.2})$$

le théorème de la divergence permet de transformer l'intégrale de surface du second membre, et la relation (II.2) devient:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_m(t)} \rho dv = \int_{D_m(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{Div}(\rho \vec{u}) \right] dv = 0 \quad (\text{II.3})$$

cette relation est valable quelque soit le domaine $D_m(t)$. En supposant ρ et u continus ainsi que leur dérivées premières, ce qui donne:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{Div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (\text{II.4})$$

cette expression représente la forme locale du principe de conservation de la masse, elle peut être écrite aussi sous la forme suivante:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.5})$$

pour un fluide incompressible on peut écrire :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.6})$$

II-2-2-LOI DE CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

La loi de conservation de quantité de mouvement écrite pour un domaine matériel $D_m(t)$ prélevé dans S se traduit par l'équation

$$\frac{d}{dt} \int_{D_m(t)} \rho u_i dv = \int_{D_m(t)} f_i dv + \int_{D_m(t)} \sigma_{ij} n_j dA \quad (\text{II. 7})$$

qui exprime que le taux de quantité de mouvement de $D_m(t)$ est égal aux forces appliquées sur ce domaine (forces volumiques et surfaciques), où σ_{ij} représente le tenseur des contraintes s'appliquent sur $D_m(t)$, et f_i les efforts volumiques agissant sur ce même domaine.

En appliquant respectivement les théorèmes de transport de Reynolds et de la divergence, l'équation (II.7) se transforme en :

$$\int_{D_m(t)} \left[\rho \frac{Du_i}{Dt} - f_i - \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) \right] dv = 0 \quad (\text{II.8})$$

où D/Dt est la dérivée particulière.

comme le domaine $D_m(t)$ est arbitraire et l'intégrale supposé continu, on peut écrire:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{II.9})$$

soit encore en développant le premier membre :

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{II.10})$$

cette relation est la forme locale de la loi de conservation de quantité de mouvement.

II.2.3.LOI DE COMPORTEMENT DE FLUIDE

Dans cette étude, nous supposons que le fluide utilisé est un fluide visqueux Newtonien :

$$\tau = \sigma_{xy} = \mu \frac{\partial V}{\partial y} \quad (\text{II.12})$$

où μ est un coefficient caractéristique de fluide appelé viscosité dynamique .supposé constant.

Dans le cas général, pour un fluide Newtonien , la relation qui lie le tenseur des contraintes σ_{ij} au tenseur des taux de déformations ε_{ij} s'écrit:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= (-p + \lambda\theta)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \theta &= \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

où θ est le taux de dilatation cubique λ , μ les deux coefficients de Lamé qui dans le cas des fluides correspondent aux coefficients de viscosité.

Pour un fluide incompressible $\theta = 0$ et le second coefficient de viscosité n'intervient plus.

II.3-EQUATION GENERALES DE LA MECANIQUE DES FILMS

MINCES VISQUEUX

En mécanique des films minces visqueux, le système étudié est formé de deux solides, séparés par un film mince de lubrifiant dont l'épaisseur est très faible devant les autres dimensions ainsi l'une des dimensions du contact est privilégiée par rapport aux deux autres.

Le choix d'un système d'axes (fig.II.1) tel que l'épaisseur du film soit toujours mesurée selon (O, X_2) , impose la négligence de la courbure générale du film, ainsi $X_2 = H_i(X_1, X_3, t)$ avec $(i=1,2)$.

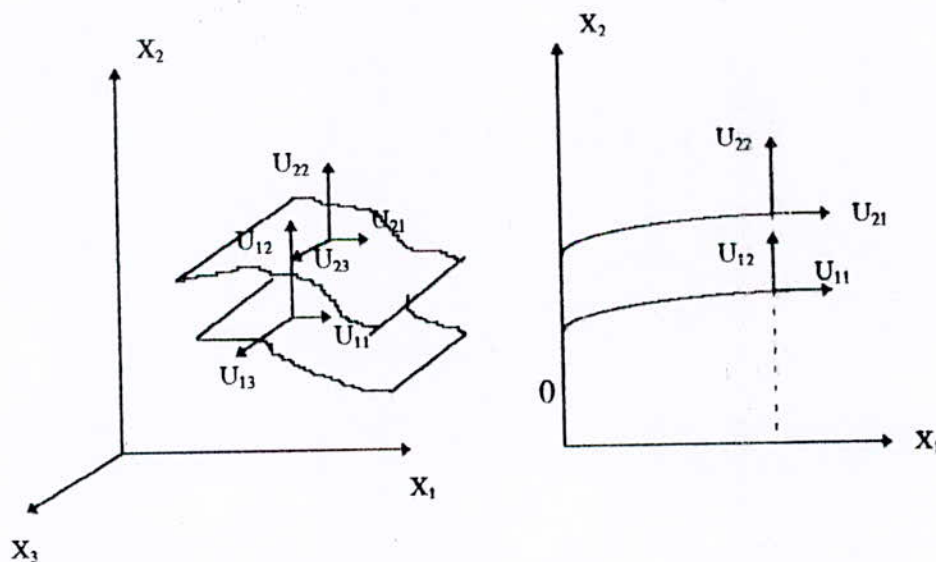


fig.II.1: Système d'axes

Si l'on suppose qu'il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact, la vitesse du fluide à la paroi est égale à la vitesse de celle-ci au point considéré. cette condition peut s'écrire:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= U_{11} & u_2 &= U_{12} & u_3 &= U_{13} & \text{pour } H &= H_1 \\
 u_1 &= U_{21} & u_2 &= U_{22} & u_3 &= U_{23} & \text{pour } H &= H_2
 \end{aligned}
 \tag{II.14}$$

L'épaisseur du film représentée par $H=H_2 - H_1$ est toujours petite devant les autres dimensions du contact.

Compte tenu de la forme particulière du contact, les équations de la mécanique des milieux continus peuvent se simplifier considérablement, car certains termes sont négligeables devant les autres. Pour déterminer l'ordre de grandeur des termes des différentes équations, une analyse dimensionnelle est nécessaire.

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_1 &= \frac{x_1}{L}, \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2}{L}, \quad \bar{x}_3 = \frac{x_3}{L}, \quad \bar{t} = \frac{tV}{L} \\
 \bar{u} &= \frac{u}{V}, \quad \bar{v} = \frac{vL}{VH}, \quad \bar{w} = \frac{w}{V}, \quad \bar{p} = p \frac{H}{\mu VL}
 \end{aligned}
 \tag{II.15}$$

Dans ces expressions L et V sont respectivement la dimension et la vitesse caractéristique selon OX_1 et OX_3 , H et VH/L celles suivant X_2 ; L/V définit l'ordre de grandeur du temps.

REMARQUE:

La vitesse caractéristique, V peut être définie de plusieurs façons, en lubrification hydrodynamique, V sera la vitesse d'une des parois du contact, dans ce cas et généralement la pression sans dimension sera :

$$\bar{P} = \frac{P}{P_s}$$

où P_s est la pression référence qui sera dans notre études la pression d'alimentation ,et la vitesse caractéristique sera par ailleurs:

$$V = \frac{P_s H^2}{\mu_0 L}$$

La dimension caractéristique L peut être choisit selon (O, X_2) et dans un contact dont les parois sont courburées, cette dimension sera généralement le rayon moyen, et sera appliquée dans l'étude des paliers hybrides.

L'équation (II.5) s'écrit sous la forme sans dimension:

$$\frac{V \cdot \rho_0}{L} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho \bar{u}_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho \bar{u}_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho \bar{u}_3) \right] = 0 \quad (\text{II.16})$$

On constate que tous les termes ont le même ordre de grandeur, sauf dans des cas particuliers simples, il faudra toujours utiliser l'équation complète de conservation de masse.

II.3.1. EQUATION GENERALISEE DE LA MECANIQUE DES FILMS MINCES VISQUEUX

II.3.1.1. INTEGRATION DES EQUATIONS DE NAVIER

L'analyse dimensionnelle de l'équation de conservation de la quantité de mouvement conduit aux équations de Navier simplifiées (Annexe.I)

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial P}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)\end{aligned}\tag{II.17}$$

Dans ces équations :

-régime est permanent;

-les forces massiques f_i sont négligées;

-l'épaisseur de film H_2-H_1 est très faible devant les autres dimensions, avec

$(H_2-H_1)/L$ est approximativement égale à 10^{-3} ;

-les forces d'inertie dans le fluides, sont négligeables devant les forces de viscosité et de pression.

Pour intégrer les équations (II.17) (Annexe.I.) compte tenu des conditions aux limites décrites en (II.14), il est commode de poser:

$$\begin{aligned}I &= \int_{H_1}^{x_2} \frac{\xi d\xi}{\mu(x_1, \xi, x_3, t)} \\ J &= \int_{H_1}^{x_2} \frac{d\xi}{\mu(x_1, \xi, x_3, t)}\end{aligned}\tag{II.18}$$

Pour $x_1 = H_1$ $I=J=0$

et pour $X_2=H_2$ les intégrales I et J prennent les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned}I(H_2) = I_2 &= \int_{H_1}^{H_2} \frac{x_2 dx_2}{\mu(x_1, t)} \\ J(H_2) = J_2 &= \int_{H_1}^{H_2} \frac{dx_2}{\mu(x_1, t)}\end{aligned}\tag{II.19}$$

il vient alors :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial P}{\partial x_1} \left(I - J \frac{I_2}{J_2} \right) + \frac{U_{21} - U_{11}}{J_2} J + U_{11} \\ u_3 &= \frac{\partial P}{\partial x_3} \left(I - J \frac{I_2}{J_2} \right) + \frac{U_{23} - U_{13}}{J_2} J + U_{13} \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

de plus l'équation de conservation de la masse permet d'obtenir :

$$u_2 = - \int_{H_1}^{x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) dx_2 + U_{12} \quad (\text{II.21})$$

L'équation (II.5) de conservation de la masse s'écrit après intégration à travers l'épaisseur du film:

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx_2 + \int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho U_i) dx_2 = 0 \quad (\text{II.22})$$

on peut transformer cette équation en se servant de la formule de dérivation des intégrales qui s'écrit en prenant pour argument la fonction $F(x_1, x_2, x_3, t)$:

$$\begin{aligned} \int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_2 &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{H_1}^{H_2} F dx_2 - F(x_1, H_2, x_3, t) \frac{\partial H_2}{\partial x_i} \\ &\quad + F(x_1, H_2, x_3, t) \frac{\partial H_1}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

avec $i=1,3$

Par ailleurs, pour $i=2$ on peut intégrer directement

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho U_2) dx_2 = \rho_2 U_{22} - \rho_1 U_{12} \quad (\text{II.24})$$

où ρ_1 et ρ_2 sont respectivement les valeurs de la masse volumique du fluide sur les parois 1 et 2

Compte tenu des relations (II.14), (II.22), (II.23), II.24), il vient alors:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{H_1}^{H_2} \rho U_1 dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{H_1}^{H_2} \rho U_3 dx_2 - \rho_2 U_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \rho_2 U_{23} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + \\ & \rho_1 U_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \rho_1 U_{13} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \rho_2 U_{22} - \rho_1 U_{12} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{H_1}^{H_2} \rho dx_2 - \\ & \rho_2 \frac{\partial H_2}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial H_1}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (II.25)$$

les deux premiers termes peuvent être explicité grâce à l'expression des vitesses u_1 et u_2 données par (II.20) en intégrant par partie et en posant au préalable:

$$\begin{aligned} R &= \int_{H_1}^{x_2} \rho(x_1, \xi, x_3, t) d\xi \\ F &= \frac{I}{J} \int_{H_1}^{H_2} \frac{R}{\mu} dx_2 \\ G &= \int_{H_1}^{H_2} \frac{R}{\mu} \left(x_2 - \frac{I_2}{J_2} \right) dx_2 = \int_{H_1}^{H_2} \frac{R x_2}{\mu} dx_2 - I_2 F \end{aligned} \quad (II.26)$$

il vient alors :

$$\begin{aligned} \int_{H_1}^{H_2} \rho U_1 dx_2 &= R_2 U_{21} - \frac{\partial P}{\partial x_1} G - (U_{21} - U_{11}) F \\ \int_{H_1}^{H_2} \rho U_3 dx_2 &= R_2 U_{23} - \frac{\partial P}{\partial x_3} G - (U_{23} - U_{13}) F \end{aligned} \quad (II.27)$$

où R_2 et la valeur que prend la fonction R à la paroi 2 .

En regroupant les différents termes, on obtient l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée qui s'écrit:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} \left(G \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(G \frac{\partial P}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_1} [U_{21}(R_2 - F) + U_{11}F] - \rho_2 U_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \\
\rho_1 U_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} [U_{23}(R_2 - F) + U_{13}F] &- \\
\rho_2 U_{23} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + \rho_1 U_{13} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} + \frac{\partial R_2}{\partial t} &- \\
\rho_2 \frac{\partial H_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial H_1}{\partial t} + \rho_2 U_{22} + \rho_1 U_{12} &
\end{aligned}
\tag{II.28}$$

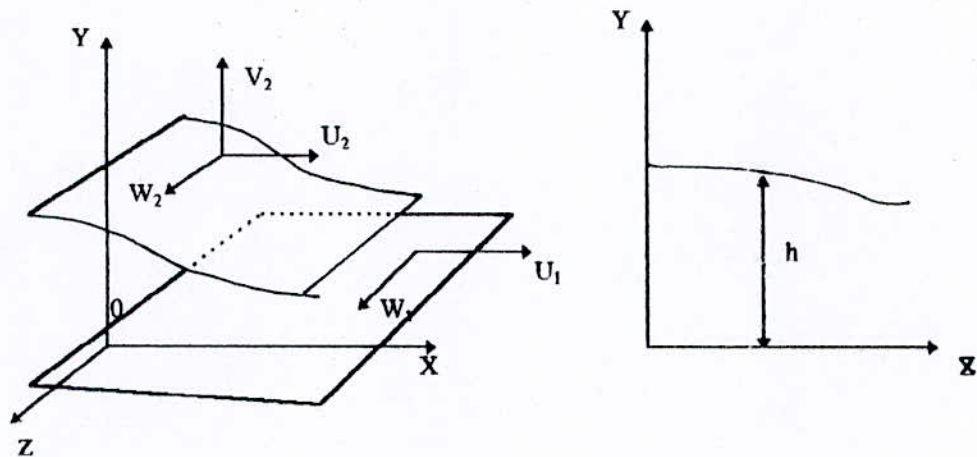
II.3.1.2-EQUATION DE REYNOLDS GENERALISEE

Généralement en lubrification la vitesse d'une paroi du contact est tangente à cette paroi, l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée se simplifie car en plaçant l'origine du système d'axes sur cette paroi, on peut poser $H_1=0$ et $H_2=h$ (fig.II.2).

En utilisant les coordonnées cartésiennes XYZ, les conditions aux limites sur la vitesse s'écrivent :

sur la paroi 1, pour $y = 0$ $u = U_1$; $v = 0$; $w = W_1$

sur la paroi 2, pour $y = h$ $u = U_2$; $v = V_2$; $w = W_2$



(Fig.II.2) système d'axes

Le choix du système d'axes impose à la vitesse V_1 de la paroi (1) dans la direction Y d'être identiquement nulle. Les vitesses u , v et w du fluide s'écrivent alors:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{\partial P}{\partial x} \left(I - \frac{I_2 J}{J_2} \right) + \frac{U_2 - U_1}{J_2} + U_1 \\
 v &= - \int_0^y \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dy \\
 w &= \frac{\partial P}{\partial z} \left(I - \frac{I_2 J}{J_2} \right) + \frac{W_2 - W_1}{J_2} + W_1
 \end{aligned}
 \tag{II.29}$$

où dans ces relations :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^y \frac{\xi}{\mu} d\xi \\
 J &= \int_0^y d\xi
 \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_0^h \frac{y}{\mu} dy$$

$$J_2 = \int_0^h \frac{dy}{\mu}$$
(II.30)

Des expressions précédentes, découlent les contraintes de cisaillement dans le fluide

L'équation de Reynolds généralisée par Dowson en 1962 s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial P}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} [U_2(R_2 - F) + U_1 F] - \rho_2 U_{21} \frac{\partial h}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} [W_2(R_2 - F) + W_1 F] - \rho_2 W_2 \frac{\partial h}{\partial z} \\ &+ \frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial h}{\partial t} + \rho_2 V_2 \end{aligned}$$
(II.31)

où les fonctions R, F, G et R₂ sont définies par :

$$R = \int_0^y \rho(x, \xi, z, t) d\xi$$

$$F = \frac{1}{J_2} \int_0^h \frac{R}{\mu} dy$$

$$G = \int_0^h \frac{Ry}{\mu} dy - I_2 F$$

$$R_2 = \int_0^h \rho dy$$
(II.32)

Ces relations doivent être utilisées par l'étude des contacts .

Les relations qui donnent les variations de la masse volumique et de viscosité avec la température, dans le cas des liquides la masse volumique est généralement

supposé constante, cependant dans l'analyse isotherme la viscosité est supposé constante (§ II.5), (§ II.6), (§ II.7).

II.3.2.3. INTERPRETATION PHYSIQUE DES DIFFERENTS TERMES DE L'EQUATION DE REYNOLDS

Dans cette équation ;

-le terme

$$\frac{\partial}{\partial x} [U_2(R_2 - F) + U_1 F] - \frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial P}{\partial x} \right)$$

représente la variation de débit massique dans la direction X pour une section de dimension h suivant Y et unité suivant Z.

-le terme :

$$\frac{\partial}{\partial z} [W_2(R_2 - F) + W_1 F] - \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial P}{\partial z} \right)$$

représente la variation de débit massique dans la direction Z pour une section de dimension h suivant Y et unité suivant X.

Dans les deux expressions ci dessus, le terme correspond au débit dû au déplacement des parois (écoulement de Couette), le second terme correspond au débit dû au gradient de pression (écoulement de Poiseuille).

-le terme :

$$-\rho_2 \left(U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + W_2 \frac{\partial h}{\partial z} - V_2 \right)$$

représente la variation du débit massique dans la direction Y; et les trois termes de cette expression caractérisent respectivement l'effet de l'inclinaison dans la direction Z et la vitesse dans la direction Y

-le terme :

$$\frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial h}{\partial t}$$

caractérise l'effet transitoire dû à la compressibilité du fluide .

II.4- PROPRIETES DU LUBRIFIANT

Le lubrifiant assure la réduction des effets néfastes dûs aux frottements protéger les surfaces contre la corrosion chimique et la corrosion de contact (fretting corrosion), répartir les pressions de contact et évacuer la chaleur dissipée, ainsi pour les huiles on doit choisir celles qui respectent un bon pouvoir mouillant [4], pour éviter le contact solide-solide (régime mixte et onctueux)[11]. Les propriétés physico-chimique doivent être choisis en fonction de nombreux paramètres, les plus influant; la température, la pression et le taux de cisaillement.

II.5- VISCOSITE

Dans les systèmes hydrauliques, et d'une manière générale, chaque fois qu'un lubrifiant est employé, c'est principalement la viscosité qui conditionne les pertes par frottement, le rendement mécanique , la capacité de charge, l'épaisseur de film, et dans beaucoup de cas l'existence de l'usure. Donc la viscosité caractérise l'aptitude physique d'un fluide à assurer la lubrification sous des conditions définies de vitesse, de charge et de température.

En général, les fluides ont une viscosité qui dépend très largement de la température, cette variation qui au voisinage de 20°C est de 2.5 % par degré. pour l'eau, est de 10 à 15% par degré pour les huiles minérales . Ces dernières décroît de façon quasi-exponentielle avec la température et croit de façon quasi-exponentielle avec la pression, cette variation peut être approchée localement par:

$$\mu = \mu_0 \exp(\alpha(p - p_0) - \beta(T - T_0)) \quad (\text{II.33})$$

où α est le coefficient de piezo-viscosité, β est le coefficient de thermo-viscosité, μ_0 est la viscosité dynamique pour la pression p_0 et la température T_0 .

$(10^{-8} < \alpha < 5 \cdot 10^{-8}) \text{ pas}^{-1}$, et $\beta \approx 4.5 \cdot 10^{-2} \text{ C}^\circ$ pour une huile qui a tendance paraffinique.

La relation (II.33.) traduit une chute très rapide de viscosité dynamique aux basses températures puis plus lente aux températures élevées.

II.6 CONCLUSION

Les équations des films minces visqueux peuvent s'appliquer à n'importe quel type de contact lubrifié par un fluide newtonien, par ailleurs, l'analyse fine de ce type de problème nécessite la contribution d'un grand nombre de paramètres qui rendent l'étude très compliquée et même très rarement la solution analytique, de cette difficulté, il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques, qui permettent de prévoir le comportement réel d'un contact.

Ainsi les méthodes numérique parmi les quelles on choisit la méthode des différences finies permettent de résoudre la quasi-totalité des problèmes hydrostatiques et hydrodynamique.

Chapitre III

Comportement global d'un palier hybride

III. 1-GENERALITES

On dit que le régime est hybride lorsqu'en plus de l'effet hydrostatique vient se superposer un effet hydrodynamique dû à la vitesse relative de déplacement des surfaces.

Si l'une des deux surfaces est lisse, l'autre par contre est pourvue d'un ou plusieurs cavités encore appelées, alvéoles . Celles -ci sont alimentées par un générateur de pression, cette alimentation en fluide peut s'effectuer de deux façon (figIII.1).

-1) Une alimentation à débit constant, seulement valable pour les fluides incompressible, elle est constituée par une pompe à débit constant, placée entre le réservoir et l'alvéole. Ce dispositif est peu employé car en pratique un palier (hybride ou hydrostatique) comporte au moins une alvéole, il faut soit plusieurs pompes , soit un système complexe de réglage de débit .

- 2) Une alimentation à pression constante qui a aussi pour but d'augmenter la rigidité de palier . C'est la solution couramment employée car elle permet d'alimenter facilement plusieurs alvéoles, à l'aide d'une seule pompe .

III.2 . SYSTEMES DE REGULATION

Lorsqu'il y a rupture d'équilibre engendrée par une variation de charge, le système de régulation doit assurer une génération d'une force correctrice qui ramène le dispositif vers un autre état d'équilibre. En d'autre terme, il faut que la charge supportée soit fonction de l'épaisseur du film, avec la contrainte supplémentaire appelée raideur :

$$\lambda = \frac{3W}{h} \frac{1}{1 - \frac{p_a}{Q} \frac{\partial Q}{\partial p_a}} \quad (\text{III.3})$$

avec:

$$W = K_W p_a$$

$$Q = K_Q \frac{h^3}{\mu} p_a$$

où K_W et K_Q sont des coefficients uniquement fonction de la géométrie et p_a représente la pression dans l'alvéole. Et le report de la relation (III.2) dans (III.3) permet d'écrire :

$$\lambda = \frac{3W}{h} (1 - \beta) \quad (\text{III.4})$$

où $\beta = \frac{p_a}{p_s}$ et p_s la pression d'alimentation ($0 < \beta < 1$).

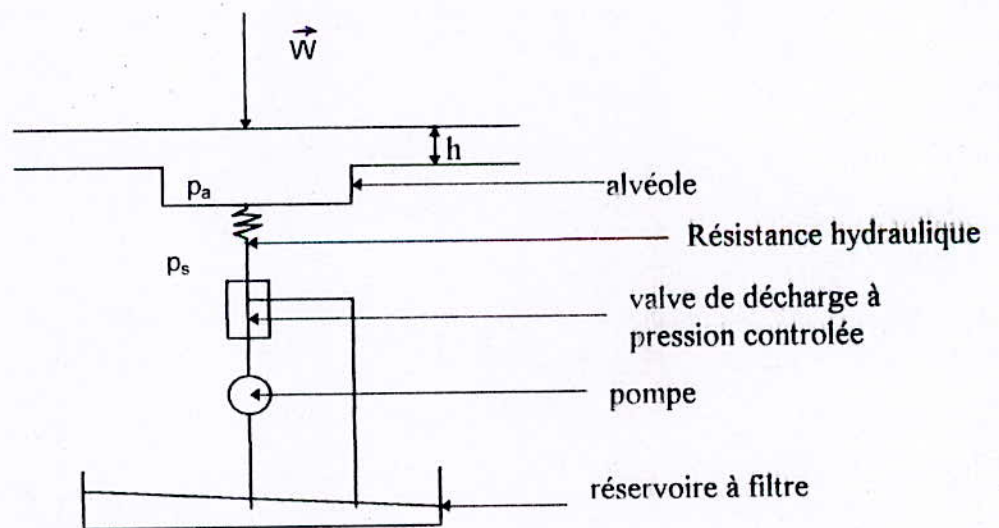


Fig.III.1.Schéma de principe de la régulation d'une butée

III.2.2- LES ORIFICES

Le débit à travers un orifice est donné par :

$$Q_r = C_d \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_s - p_a)} \quad (\text{III.5})$$

où C_d est un coefficient de perte de charge voisier de 0,7.

La raideur dans le cas d'une butée infiniment longue et avec le rapport de la relation (III.5) dans (III.3) conduit à :

$$\lambda = \frac{3W}{h} \frac{2(1-\beta)}{2-\beta} \quad (\text{III.6})$$

Cette relation montre que la raideur d'une butée réglée par orifice est légèrement supérieur à celle obtenue avec un capillaire

III.3-CONCLUSION

Les différentes méthodes de régulation peuvent donner de grandes différences dans les caractéristique d'un palier.

Dans un palier où la variation de température est considérable, la compensation par capillaire est justifiée[1].

La rigidité peut être augmentée dans une certaine mesure si les capillaires sont remplacés par des orifices.

III.4-DESCRIPTION D'UN PALIER HYBRIDE

Un palier hybride (ou hydrostatique) est généralement constitué par des alvéoles réparties régulièrement sur la périphérie du coussinet [1]. Dans certains cas, les alvéoles peuvent être placées, sur l'arbre. On trouve deux types de paliers, suivant que les alvéoles sont découplées ou non par des rainures axiales (fig III.2). Si celles-ci possèdent l'avantage de désaccoupler les alvéoles et de mieux irriguer le palier, par contre elles augmentent le débit de fuite et peuvent introduire, de l'air dans le palier lorsque la vitesse de rotation de l'arbre est importante.

La pression dans les alvéoles est constante, l'évolution de la pression dans le film mince est décrite par l'équation de Reynolds.

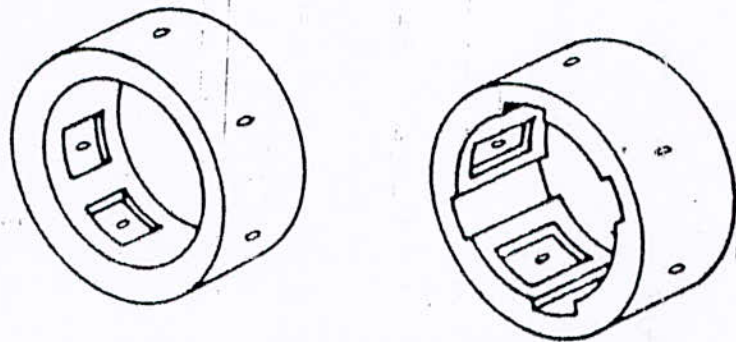


fig III.1 schéma de palier hydrostatique

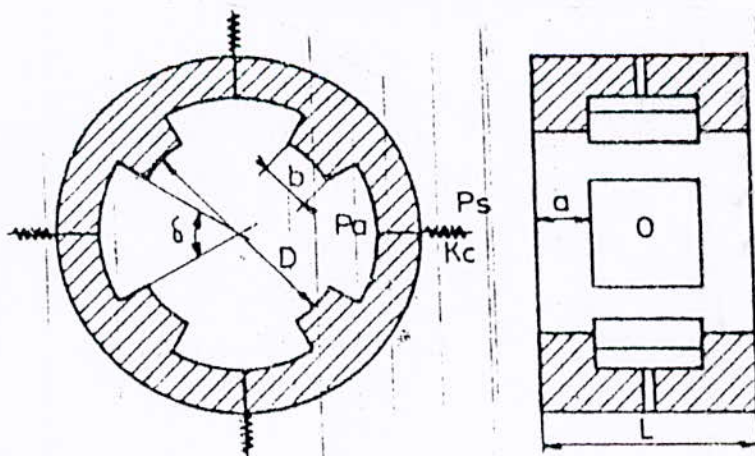


Fig. III.2-Géométrie d'un palier hybride

La variation importante et brutale de l'épaisseur du film au bord de l'alvéole, provoque des accélérations importantes du fluide . Ceci a pour conséquence l'apparition d'une chute de pression à la sortie des alvéoles aussi bien dans le sens axial que dans le sens circonférenciel [1].

Ce phénomène modifie la répartition de pression à travers le film mince décrite par l'équation de Reynolds ,appelé effet d'inertie et qui sera négligé plus en s'éloignant de la zone où la variation brutale de section (fig.III.3).

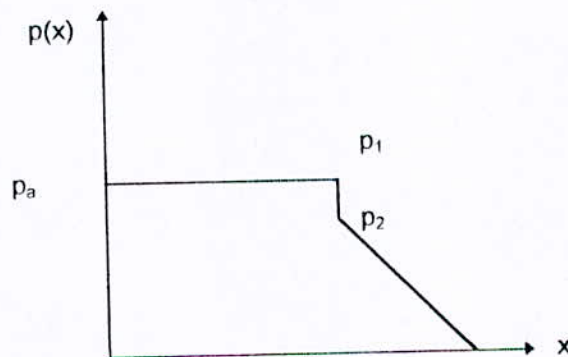
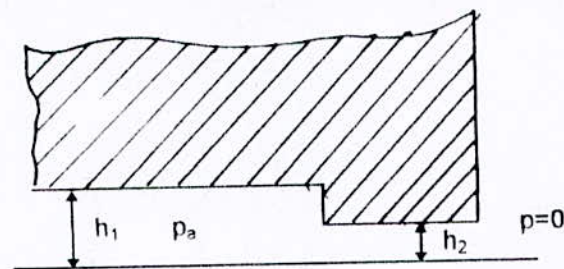


Fig.III.3.Schématization du raccordement alvéole-film mince et répartition de pression

L'importance des forces de viscosité de fluide vis à vis des forces d'inertie de fluide est caractérisé par le rapport adimensionnée défini par:

$$\frac{\rho U c}{\mu} \left(\frac{c}{R} \right)$$

où ρ et μ sont respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique, R et c le rayon et le jeu radial du palier, U la vitesse linéaire de l'axe en Rotation.

III .5. GEOMETRIE ET CINEMATIQUE DES SURFACES

Un palier lisse (Annex II) (fig.III.2) est constitué d'un coussinet, de centre O_c et de rayon R_c , et d'un arbre de centre O_a et de rayon R_a . Sous l'action de la charge les centres O_c et O_a ne coïncident pas, la distance $O_c O_a$ est l'excentricité e

L'angle que fait la ligne des centres $O_c O_a$ avec la direction de la charge est l'angle de calage ϕ . Si les axes du coussinet et de l'arbre sont parallèles (palier aligné) et si l'on néglige les déformations élastiques des surfaces sous l'effet de la température et de la pression, ces deux paramètres sont suffisants pour repérer le positionnement de l'arbre à l'intérieur du coussinet.

Les rayons étant très voisins ($R_a / (R_c - R_a) \approx 10^3$) on peut, en négligeant la courbure du film, développer le coussinet ou l'arbre et l'assimiler à un plan (fig.III.4)

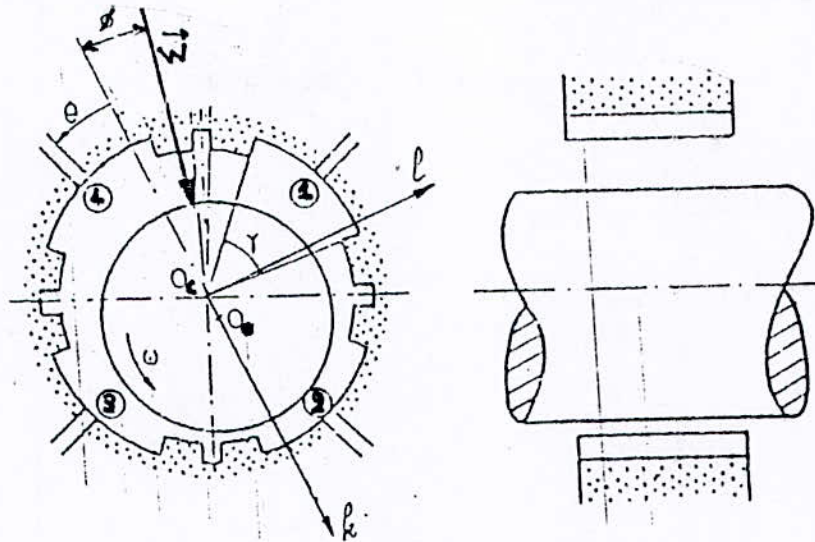


Fig .III.4.a. Section droite d'un palier hybride

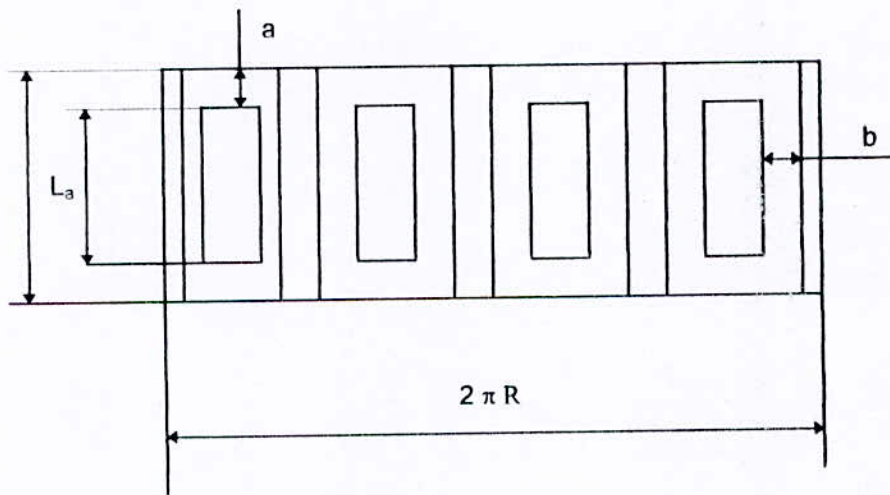


Fig .III.4.b. Palier hybride avec les notations possibles

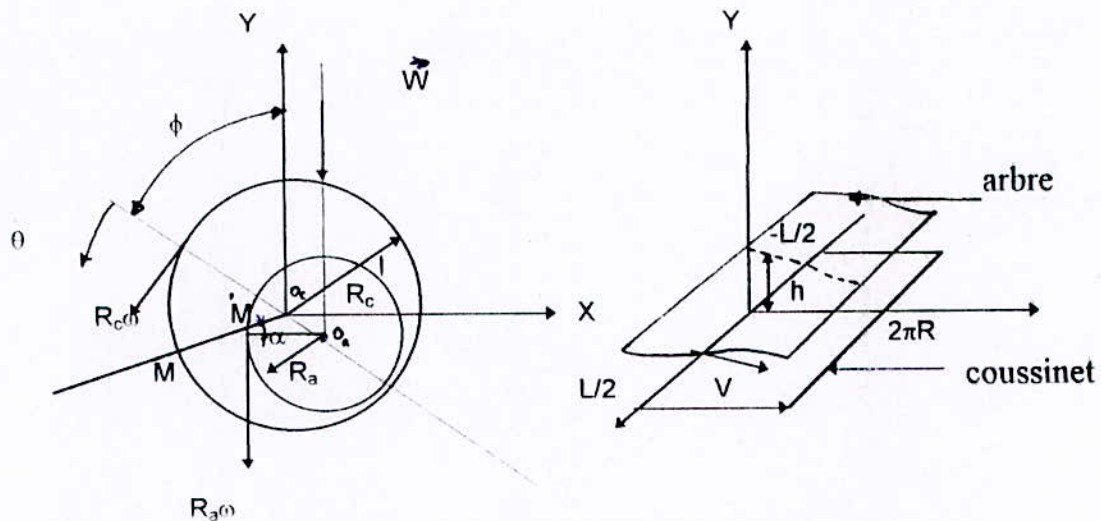


Fig.III.5. Palier développé

Compte tenu de ces hypothèses (AnnexII) l'épaisseur du film a pour expression :

$$h = c(1 + \varepsilon \cos\theta) \quad (\text{III.7})$$

soit sous forme sans dimension :

$$\bar{h} = \frac{h}{c} = 1 + \varepsilon \cos\theta \quad (\text{III.8})$$

Dans ces relations :

$c = R_c - R_a$ est le jeu radial imposé par l'usinage.

$\varepsilon = e/c$ est l'excentricité relative, elle varie de 0 à 1.

$\theta = \frac{x}{R_a}$ est la coordonnée angulaire .

Dans le repère associé à la figure(III.5), dont le plan XOZ est confondu avec la surface développée du coussinet et en considérant qu'il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois, les conditions aux limites sur la vitesse sont :

$$\text{sur } y = 0; U_1 = 0; V_1 = W_1$$

$$\text{sur } y = h; U_2 = R_a \omega_a \cos \alpha; V_2 = R_a \omega_a \sin \alpha; W_2 = 0$$

où α représente la pente de la courbe $h(x)$.

$$\text{tg} \alpha = \frac{dh}{dx} = \frac{l}{R_a} \frac{dh}{d\theta} = -\frac{e}{R_a} \sin \theta$$

la quantité e/R_a étant très petite, on peut effectuer un développement et se limiter au 1^{er} ordre:

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx \frac{dh}{dx}; \quad \cos \alpha \approx 1$$

dans ces condition:

$$U_1 = 0$$

$$U_2 = R_a \omega_a; \quad V_2 = U_2 \frac{dh}{dx}$$

III.5.1 - EQUATION DE REYNOLDS GENERALISEE ET CONDITIONS AUX LIMITES

Pour les conditions de géométrie et de vitesse définies précédemment et dans le cas d'un régime stationnaire établi, l'équation de Reynolds généralisée (II.31) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \rho \frac{\partial}{\partial x} U [h - F]$$

l'intégrale G est définie par la relation (II.32) et l'intégrale F est définie en (II.31).

Nous devons résoudre cette équation en tenant compte des conditions aux limites, ces dernières s'écrivent dans le cas d'un fluide incompressible :

-dans l'alvéole la pression doit être constante :

$$p(\theta_a, z) = p_a$$

où p_a est la pression dans l'alvéole :

-sur les bords du coussinet

$$p(\theta, L/2) = p(\theta, -L/2) = 0$$

Dans le cas où le palier comporte des rainures axiales sur le coussinet on suppose que la pression dans la rainure est la pression de milieu ambiant:

$$p(\theta_r, z) = 0$$

où θ_r est le domaine angulaire qui détermine la position de la rainure.

III.6- REGIME D'ÉCOULEMENT EN FILM MINCE

En lubrification par film mince, on peut rencontrer plusieurs types d'écoulement :

- Le régime laminaire dans lequel les filets fluides suivent la géométrie du contact ; on rencontre ce type d'écoulement pour des faibles vitesses de déplacement du fluide ou pour des viscosités de fluide importantes.

-Le régime turbulent où règne une agitation désordonnée des particules fluides; les grandes vitesses de déplacement et les faibles viscosités favorisent ce type d'écoulement . La transition entre ces deux régimes s'effectue lorsque le nombre sans dimension de Reynolds atteint une valeur critique - le nombre de Reynolds habituellement retenu:

$$\Re_c = \rho \frac{u}{\mu} c \quad (\text{III.12})$$

où ρ est la masse volumique du fluide, μ est la viscosité dynamique du fluide, c est le jeu radial, ou épaisseur du film lubrifiant .

Taylor montre qu'il peut se produire un autre régime d'écoulement, celui-ci se produit à partir de l'écoulement laminaire, sous certaines conditions cinématiques, c'est le régime tourbillonnaire, le critère de transition utilisé en lubrification est défini par:

$$T = \Re_c \sqrt{\frac{c}{R}} \quad (\text{III.13})$$

lorsque le nombre T atteint la valeur de 41, la formation des tourbillons apparaît, cette théorie a été vérifiée et confirmée expérimentalement.

III.6.1-REGIME LAMINAIRE

En régime laminaire et dans le cas d'un film mince visqueux, l'évolution de la pression dans un contact est décrite par l'équation de Reynolds. Cette équation établie en (II,32) peut être réécrite sous les hypothèses supplémentaires :

- adhérence du fluide aux parois
- écoulement laminaire isotherme
- milieu continu

soit alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\rho(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 6h \frac{\partial}{\partial z} [\rho(U_1 + U_2)] + 12\rho V_2 \quad (\text{III.14})$$

la répartition de vitesse s'écrit :

-selon la direction x

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) + U_1 \frac{h-y}{h} + U_2 \frac{y}{h} \quad (\text{III.15})$$

-selon la direction z

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-h) \quad (\text{III.16})$$

III .6.2-REGIME NON-LAMINAIRE

Différents auteurs [1], ont proposé des méthodes de calcul pour décrire les régimes d'écoulement non- laminaire.

Bien que les démarches soient défférentes, plusieurs auteurs aboutissent à une relation semblable, en introduisant dans l'équation de continuité, les relations obtenues sur les vitesses [1]. ils obtiennent :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} G_x \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} G_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{U}{2} \frac{\partial h}{\partial x}$$

G_x et G_z sont des coefficients de viscosités.

d'après Constantinescu et Voht (1970) :

$$G_x = \frac{l}{(12 + 0.0136 \Re_e^{0.9})}$$

et

$$G_z = \frac{l}{(12 + 0.043 \Re_e^{0.96})}$$

$$\Re_e = \frac{\rho U_l h}{\mu}$$

Suivant la démarche de constantinescu [19] ou Elorde[3], les solutions des équations de quantité de mouvement moyennent diverses hypotheses sont :

$$u_m = - \frac{h^2}{\mu} G_x \frac{\partial p}{\partial x} + U_l$$

$$w_m = - \frac{h^2}{\mu} G_z \frac{\partial p}{\partial z}$$

et par conséquent:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} G_x \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} G_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) = -\frac{U_1}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial U_1}{\partial x} + V_1 \quad (\text{III.18})$$

l'analyse habituellement retenue est celle de Constantinescu

III.6.2.1-Analyse de Constantinescu

Partant de l'hypothèse de Prandtl en considérant séparément les écoulements suivant x et z Constantinescu pose en écrivant les contraintes turbulentes de Reynolds :

$$\begin{aligned} -\rho \overline{u'v'} &= \rho^2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right| \\ -\rho \overline{w'v'} &= \rho^2 \frac{\partial \overline{w}}{\partial y} \left| \frac{\partial \overline{w}}{\partial y} \right| \end{aligned}$$

u' et v' sont les fluctuations de vitesse.

Compte tenu de la sous couche laminaire, il démontre que les vitesses sont des fonctions quasi-linéaires de gradient de pression ; il propose alors pour les coefficients

G_x et G_z

- *Écoulement de poiseuille du au gradient de pression :*

$$G_x = G_z = \frac{6.8}{(\Re_{ep})^{0.681}}$$

$$\text{ou} \quad \Re_{ep} = \rho \frac{v_m h}{\mu} \quad (\text{III.19})$$

$$\text{et} \quad v_m = \sqrt{u_m^2 + w_m^2}$$

Dans le cas du régime laminaire $G=1/12$ les valeurs numériques des coefficients G_x et G_z sont très voisines suivant que l'on utilise le modèle de Constantinescu ou Elrode

Il est bien entendu que, dans le cas de modèle de Constantinescu, on doit choisir si l'écoulement est de type Couette ou Poiseuille. Ce choix est fait à partir des valeurs de G_z ; l'écoulement le plus dominant est du type pour lequel la valeur de G_z est minimal [7].

Le choix des coefficients de viscosités entraîne une discontinuité lors du passage du régime laminaire au turbulent, Nicolas [10] propose une linéarisation des variations de G pour les valeurs du nombre de Reynolds comprises entre 1000 et 2000. La transition s'effectue ainsi d'une manière progressive.

REMARQUE: Selon Constantinescu les relations semi-empiriques des coefficients de viscosité sont valables pour des valeurs de nombre de Reynolds comprises entre 2000 et 100000.

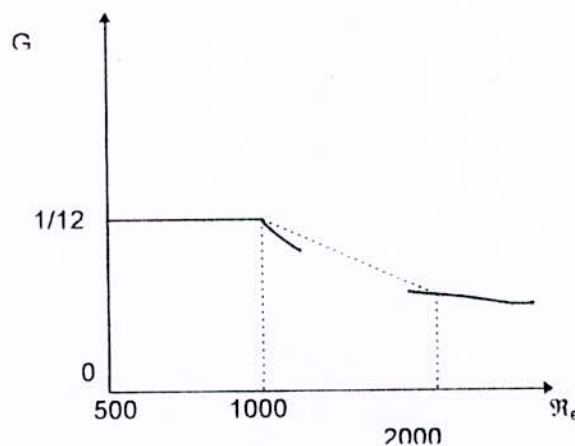


Fig. III.6 - Interpolation entre le régime laminaire et le régime turbulent

III.7-CONCLUSION

Dans un palier, il existe trois régimes d'écoulement, le régime laminaire, le régime tourbillonnaire et le régime turbulent.

Dans un palier à exentricité non-nulle (chargé) ces trois régimes peuvent exister simultanément, cependant les critères de transition entre ces trois régimes ne sont définis que de manière expérimentale et parfois sont pratiquement connus.

Les résultats expérimentaux de quelques auteurs confirment que ; l'apparition de régime tourbillonnaire augmente l'énergie dissipée dans le palier.

III.8- CARACTERISTIQUES STATIQUES

Les caractéristiques statiques sont données pour une position de l'arbre stable et concernent le débit d'alvéoles et l'angle de calage et la charge, ces derniers sont imposés en direction initialement.

III.8.1-CHARGE ET ANGLE DE CALAGE

La charge et l'angle de calage sont obtenus par intégration du champ de pression sur la surface du palier. A l'équilibre dans le système repère (o,k,l) (fig III .1), on a :

$$\begin{aligned} W_k &= \int_s p \cos \theta ds = W \cos \theta \\ W_l &= -\int_s p \sin \theta ds = W \sin \theta \end{aligned} \quad (III.21)$$

d'ou

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{W_k^2 + W_l^2} \\ \phi &= \arctg(-W_l / W_k) \end{aligned} \quad (III.22)$$

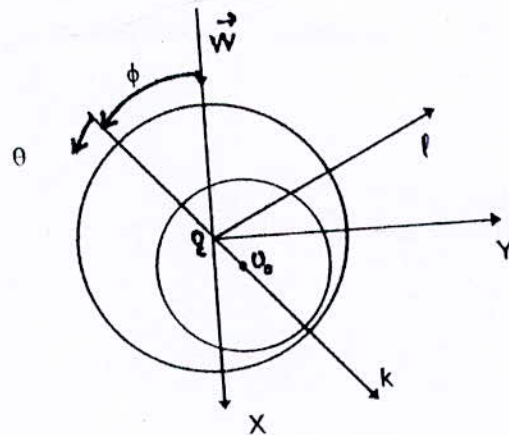


Fig. III.7. Angle de calage

III.8.2-DEBIT

Le débit du palier résulte de celui des alvéoles. Le débit d'une alvéole est obtenu en intégrant la vitesse normale à la frontière le long de la section de sortie :

$$q_t = 2(q_1 + q_2 + q_3)$$

Dans le cas général

$$q_t = \int \left(-\frac{h^3}{\mu} G \frac{\partial p}{\partial n} + \delta_{ij} \frac{Uh}{2} \right) dl \quad (\text{III.23})$$

où $\frac{\partial p}{\partial n}$ représente le gradient de pression selon une direction normale à la frontière de la frontière de l'alvéole et δ_{ij} un coefficient égale à 0 ou 1 selon que la normale est colinéaire à l'axe oz ou à l'axe ox.

Le débit totale doit être égale au débit de la résistance hydraulique placée en amont de l'alvéole.

les débits sont donnés par les relations suivantes et respectivement dans les deux sens circonférentiel, et axial (fig.III.8)

$$q_i = \int_0^{L/2} \left(\frac{hU}{2} - G_x \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{h^2}{\mu R} \right) dz \quad i = 1, 2$$

$$q_3 = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \left(-G_z \frac{\partial p}{\partial z} \frac{h^2}{\mu} \right) R dz$$
(III.24)

où G_x, G_z sont les coefficients de viscosité dans les deux sens circonférentiel et axial, L est la longueur de l'alvéole, $\theta_{i+1} - \theta_i = \gamma$ représente l'amplitude circonférentielle de l'alvéole i .

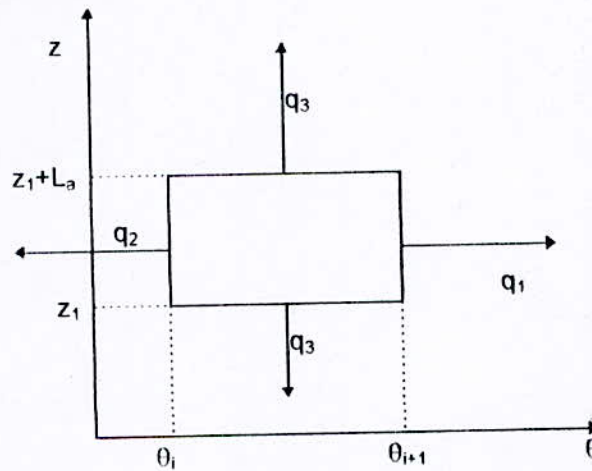


Fig.III.8-Débits axial et circonférentiel

III.9 - CARACTERISTIQUES DYNAMIQUES

En régime permanent, pour des conditions de fonctionnement données, le centre de l'arbre occupe une position définie soit par l'excentricité et l'angle de calage (ϵ, ϕ) (Annexe IV) soit par ses coordonnées cartésiennes (x, y) .

Les deux surfaces sont séparées par un film fluide qui peut être caractériser par une raideur et un amortissement .

III.9.1- COEFFICIENT DE RAIDEUR ET D'AMORTISSEMENT

soit un arbre soumis à une forces $F(x_0, y_0)$ tel que:

$$\vec{F}_0 + \vec{W}_0 = 0$$

si le centre de l'arbre est déplacé de sa position d'équilibre, le film fluide exerce une force qui va dépendre de la nouvelle position du centre de l'arbre (x, y) et de sa vitesse (\dot{x}, \dot{y}) (fig. III.9).

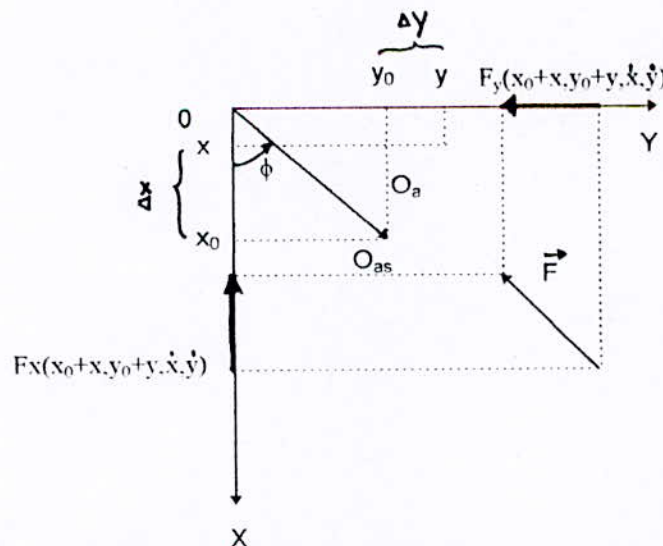


Fig. III.9-Système de coordonnées

Si l'on limite à des petits déplacements

$$x = x_0 + \Delta x$$

$$y = y_0 + \Delta y$$

et à des petites vitesses de déplacement x et y on peut écrire :

$$F_x(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, \dot{x}, \dot{y}) = F_x(x_0, y_0, 0, 0) + \Delta x \frac{\partial F_x}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial F_x}{\partial y} + x \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} + y \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}}$$

$$F_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, \dot{x}, \dot{y}) = F_y(x_0, y_0, 0, 0) + \Delta x \frac{\partial F_y}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial F_y}{\partial y} + x \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} + y \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}}$$

(III.25)

La force élémentaire $\vec{f} = \vec{F} - \vec{F}_0$ est alors donnée par :

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = -[a_{i,j}] \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} - [b_{i,j}] \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} \quad \text{(III.26)}$$

Les coefficients a_{ij} et b_{ij} respectivement les coefficients de raideur et d'amortissement du palier. $F_x(x_0, y_0, 0, 0)$ et $F_y(x_0, y_0, 0, 0)$ sont les composantes de la résultante des forces de pression en position d'équilibre. Elle valent respectivement f_0 et 0.

En identifiant les systèmes (III.26) et (III.27), on obtient les coefficients dynamiques:

$$\begin{aligned}
 a_{ij} &= -\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{o_{as}} \\
 b_{ij} &= -\left(\frac{\partial \dot{F}_i}{\partial \dot{x}_j}\right)_{o_{as}}
 \end{aligned}
 \tag{III.27}$$

le premier indice indique la direction de la force tandis que le second indique celle de déplacement ou de la vitesse de déplacement .

III.9.2. STABILITE D'UN PALIER

La stabilité d'une position d'équilibre d'un palier peut être définie à partir des équations du mouvement de l'arbre dans le coussinet [9], pour un rotor rigide de masse $2m$ supporté par deux paliers identiques, celles -ci s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= -a_{xx}x - b_{xx}\dot{x} - a_{xy}y - b_{xy}\dot{y} \\
 m\ddot{y} &= -a_{yx}x - b_{yx}\dot{x} - a_{yy}y - b_{yy}\dot{y}
 \end{aligned}
 \tag{III.28}$$

On cherche alors une solution harmonique du type

$$\begin{aligned}
 x &= Xe^{\lambda t} \\
 y &= Ye^{\lambda t}
 \end{aligned}$$

où $\lambda = \alpha + i\beta$ est une fréquence complexe .

C'est le signe du coefficient α qui détermine la stabilité de fonctionnement :

si $\alpha < 0$, le régime est stable

si $\alpha > 0$, le régime n'est pas stable

Pour trouver la valeur limite du régime stable, nous allons chercher la solution du système sous une forme purement harmonique $\alpha = 0$, $\lambda = i\beta$.

L'introduction de ce type de solution dans les équations (III.29) conduit au système homogène:

$$\begin{bmatrix} -m\beta^2 + a_{xx} + i\beta b_{xy} & a_{xy} + i\beta b_{yy} \\ a_{yx} + i\beta b_{yx} & -m\beta^2 + a_{yy} + i\beta b_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{III.29})$$

L'annulation des parties réelles et imaginaires du déterminant de ce système permet d'évaluer la fréquence d'instabilité β et la masse critique M .

On obtient deux équations couplées et avec la partie imaginaire et réelle successivement :

$$\begin{aligned} M\beta^2 &= \frac{a_{xx}b_{yy} + a_{yy}b_{xx} - a_{yx}b_{xy} - a_{xy}b_{yx}}{b_{xx} + b_{yy}} \\ eI\beta^2 &= \frac{(a_{xx} - M\beta^2)(a_{yy} - M\beta^2) - a_{yx}a_{xy}}{b_{yy}b_{xx} - b_{xy}b_{yx}} \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

REMARQUE : La prise en compte de la compressibilité du fluide dans les alvéoles et dans les conduits d'alimentation rend les coefficients dynamiques dépendants de la fréquence d'excitation. Ceci a été étudié théoriquement par Rohde et Ezzat [9]. D'autre part, ils montrent l'existence d'une fréquence limite au-delà de laquelle le comportement du palier est différent. Après cette valeur limite, lorsque la fréquence d'excitation augmente, la raideur directe croît tandis que l'amortissement et la raideur croisée diminuent.

III.10-CONCLUSION

Nous avons vu que le type de régulation conditionnait la raideur d'un système hybride. Si la turbulence est due au gradient de pression (cas des paliers hydrostatiques) ou à la vitesse relative des surfaces (cas des paliers hydrodynamique).cette approche donnée au (§III.5.2.1) permet de limiter la quantité des coefficients qui doivent être conservés dans les calculs numériques .

Le champ de pression dans la région où le filme est mince, peut être déterminé par l'équation de Reynolds (III.14).On retiendra l'approche semi-empirique de Constantinescu dans laquelle les coefficient G_x et G_z sont celles donnés par (III.19) et (III.20).

L'analyse exacte d'un système rotor-paliers est donc très complexe puisqu'elle nécessite la résolution simultanée des équations relative au comportement hydrodynamique de chaque type de palier. Cette étude peut néanmoins être largement simplifié si on suppose le rotor parfaitement rigide et si on se limite aux petits déplacements, au voisinage d'une position d'équilibre statique.

La première hypothèse qui correspond au cas d'un rotor rigide, permet de comparer entre elles différentes configurations de palier, tandisque la seconde hypothèse, qui correspond à la théorie linéaire, permet d'étudier la stabilité d'un point d'équilibre [9].

Chapitre IV

Discritisation et méthodes de résolution

IV.1-INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous présentons la résolution du problème de lubrification Hybride et isotherme, avec un fluide incompressible en écoulement laminaire et non-laminaire dans un palier hybride, par la méthode des différences finis.

Pour cela on développe le palier, et on découpe le domaine ainsi obtenu, on peut alors, en tenant compte des différentes conditions aux limites dans chaque cas puis on transforme l'équation de Reynolds en un système algébrique non-linéaire à résoudre .

La méthode des différences finis offre des avantages par rapport à la méthode des éléments finis., c'est une technique, déjà ancienne, de mise en œuvre simple permet de résoudre la quasi totalité des problèmes hydrodynamique et hydrostatique. Elle est très largement développée dans la littérature tant du point de vue mathématique tant de point de vue d'utilisation .

Pour cette résolution numérique on a établi un programme de calcul et aux regard des hypothèses décrites précédemment pour le mode de résolution et pour le calcul de champ de pression, et les variables qui dépendent de ce dernier.

IV.2-DISCRITISATION ET RESOLUTION

Un organigramme du programme est représenté sur la figure(IV.3).Dans le programme principal,on définit un certain nombre de constantes et on fait appel à plusieurs sous programmes nous allons très brièvement décrire le mode de résolution retenu pour calculer le champ de pression.

On développe le palier dans le sens circonférentiel (fig.IV.1) et en partageant le domaine ainsi obtenu en un certain nombre de rectangles élémentaires ; les variables continues et sans dimension θ et z sont alors remplacées par des variables discrètes i et j

Les formules d'approximation sont de type centrés tel que :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{i,j} = \frac{f(i+1,j) - f(i-1,j)}{2\Delta\theta} \quad (\text{IV.1})$$

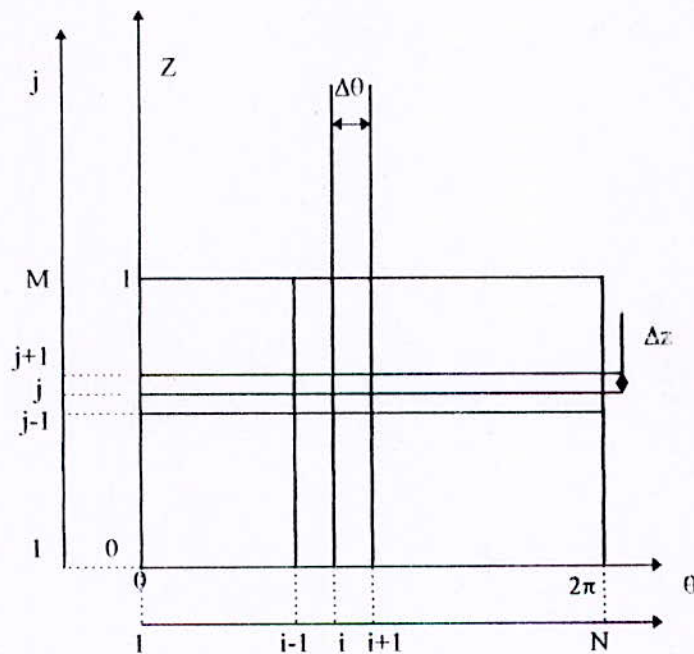


Fig.IV.1-Palier développé

où $\Delta\theta$ est appelé le pas dans le sens des x , qui est constant pour les deux directions i et j .

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right)_{i,j} = \frac{f(i+1,j) - 2f(i,j) + f(i-1,j)}{\Delta\theta^2} \quad (\text{IV.2})$$

et la discrétisation selon la direction axiale :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{i,j} = \frac{f(i, j+1) - f(i, j-1)}{2\Delta z} \quad (\text{IV.3})$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{i,j} = \frac{f(i, j+1) - 2f(i, j) + f(i-1, j)}{\Delta z^2} \quad (\text{IV.4})$$

où f représente chaque fonction continue à discrétiser dans l'équation.

L'équation de Reynolds adimensionnée (Annexe.IV) est discrétisée et rendue par l'apport des approximations ci-dessus sous forme :

$$p_{i,j} + A_i p_{i+1,j} + B_i p_{i-1,j} + C_i p_{i,j+1} + D_i p_{i,j-1} + E_i = 0 \quad (\text{IV.5})$$

dans cette expression ces coefficients dépendent:

- de l'épaisseur du film et ses dérivées
- des coefficients G_{ij} et de leurs dérivées
- de la pression sur la frontière .

L'écriture de la relation (IV.5) pour tous les points internes au domaine conduit à un système non-linéaire par rapport à la variable pression, système qui peut se mettre sous la forme :

$$[A]\{p\}=\{s\} \quad (\text{IV.4})$$

où les coefficients A_{ij} dépendent en outre, par l'intermédiaire des coefficients G_{ij} , de la pression p aux points internes au domaine et les coefficients s_i de la pression sur la frontière (conditions aux limites).

IV.2.1-CONDITIONS AUX LIMITES

Les secteurs comportent une alvéole au moins pour chacun, et ils sont séparés par fois, l'un par l'autre par des rainures axiales.

Les frontières des alvéoles peuvent coïncider ou non avec le maillage. Si le maillage ne concorde pas on suppose la frontière de l'alvéole confondue avec la maille la plus proche (fig.IV.2).

Les conditions aux limites sont :

-de type Dirichlet, pression imposée, aux extrémités libres du palier ($z=\pm l/2$); aux frontières communes avec les rainures axiales et les alvéoles. On notera que la pression sur le pourtour des alvéoles n'est pas connue a priori.

-de type périodique, continuité de la pression et de sa dérivée circonférentielle, lorsque le palier ne comporte pas de rainure axiale.

REMARQUE :

Si une fois la pression est négative lors de calcul, elle sera prise comme nulle.

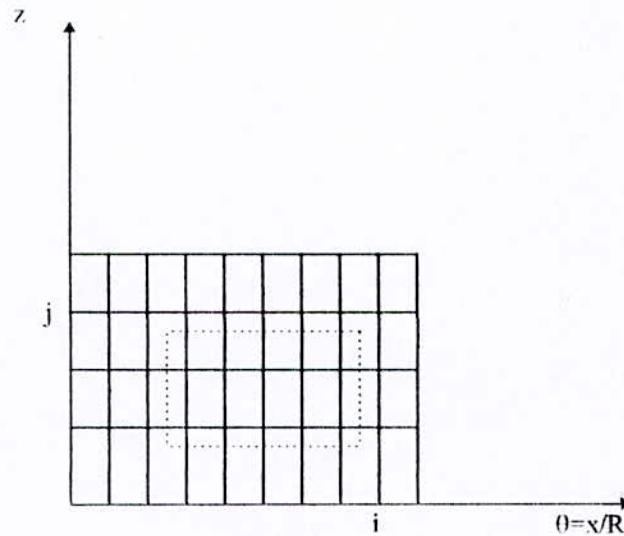


Fig. IV.2-Frontière de l'alvéole

IV.3-ALGORITHME DE PROGRAMME

IV.3.1-COMPORTEMENT STATIQUE

L'étude du comportement statique d'un palier peut être abordée sous plusieurs angles parmi lesquels nous envisageons :

Pour une direction de charge imposée, dans notre cas parallèle à l'axe ($O_c - X$), et une excentricité donnée, on recherche les caractéristiques statique (ou dynamique).

Cette approche est couramment utilisée lorsque l'on veut déterminer l'évolution des caractéristiques de fonctionnement en fonction de la charge appliquée.

Pour déterminer le fonctionnement du palier caractérisé par sa géométrie et la pression d'alimentation des chambres, il faut d'abord initialiser :

- 1)-les pressions dans les alvéoles et les portées.
- 2)-les coefficients de viscosité

puis connaissant les pressions, on en déduit le débit du fluide d'alimentation et le module de la portance . L'organigramme du programme est fourni (figIV.3). trois processus itératifs sont enclavés les uns dans les autres:

- en premier, pour des pressions de chambre et un angle de calage donnés, on détermine les champs de pressions, ainsi que G_x et G_z ;
- en deuxième, on détermine les pressions de chambre pour que les débits d'injection et de sortie chambre soient égaux;
- en troisième, on détermine l'angle de calage pour que la direction de la portance soit celle choisie.

A chacun de ces processus itératifs correspond un critère de convergence portant sur :

- les pressions dans les chambres ,
- l'angle de calage.
- le champ de pression.
- les coefficients G_x , G_z .

IV.3.2-COMPORTEMENT DYNAMIQUE

En régime stationnaire le centre de l'arbre occupe une position d'équilibre caractérisée par ces coordonnées x et y . En régime dynamique le mouvement de centre de l'arbre décrit une orbite située à l'intérieure d'un cercle dont le rayon est égal au jeu radial.

Sa position vis à vis du centre de coussinet, peut être repérée (Annexe.IV):

-par ses coordonnées cartésiennes :

$$\vec{O_a O} = x \vec{X} + y \vec{Y}$$

-par ses coordonnées polaires:

$$\vec{O_a O} = e \vec{k} ; \quad \phi = (\vec{X}, \vec{k})$$

le choix du système de coordonnées est dicté par la nature du problème à résoudre .Si on utilise les variables (ϵ, ϕ) le calcul des coefficients dynamiques peut par fois être réduit.

Dans l'algorithme de notre problème le calcul des coefficients dynamiques, dans du champ de pression, nécessite l'emploi d'une méthode d'approche .

L' approche adoptée pour notre étude est celle de différentiation numérique que nous allons maintenant présenter:

-Différentiation numérique

Les dérivées étant discrétisées et calculées par des différences finis. On utilise les paramètres (ϵ, ϕ) , la démarche est la suivante:

1)-recherche de la position d'équilibre statique ;celle ci étant caractérisée par une excentricité relative ϵ_0 et un angle de calage ϕ_0 .

2)-calcul des dérivées $(\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial \epsilon})$ et $(\frac{\partial \bar{F}_l}{\partial \epsilon})$; l'équation est résolue pour une position du centre de l'arbre défini par:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$$

$$\phi = \phi_0$$

l'intégrale du champ de pression permet de calculer les composantes adimensionnées (Annexe.IV) de la force hydrodynamique correspondante à ces positions, ces forces représentent l'action du fluide sur l'arbre s'écrivent en O_n centre de la section médiane :

$$\vec{F}_h \begin{cases} F_x = \int p \cos\theta ds \\ F_y = \int p \sin\theta ds \end{cases}$$

et par changement de base (Annexe.IV) F_k et F_l sont déduites .

En utilisant les différences finies:

$$\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial \varepsilon} = \frac{\bar{F}_k(\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon, \phi_0, \varepsilon = 0) - \bar{F}_k(\varepsilon_0, \phi_0, \varepsilon = 0)}{\Delta\varepsilon}$$

$$\frac{\partial \bar{F}_l}{\partial \varepsilon} = \frac{\bar{F}_l(\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon, \phi_0, \varepsilon = 0) - \bar{F}_l(\varepsilon_0, \phi_0, \varepsilon = 0)}{\Delta\varepsilon}$$

3)-calcul des dérivées $\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial \phi}$ et $\frac{\partial \bar{F}_l}{\partial \phi}$, le processus est semblable au précédent,

mais en maintenant ε constant ($\varepsilon = \varepsilon_0$) et l'on considère la valeur :

$$\phi = \phi_0 + \Delta\phi$$

soit alors :

$$\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial \phi} = \frac{\bar{F}_k(\varepsilon_0, \phi_0 + \Delta\phi, \varepsilon = 0) - \bar{F}_k(\varepsilon_0, \phi_0, \varepsilon = 0)}{\Delta\phi}$$

$$\frac{\partial \bar{F}_l}{\partial \phi} = \frac{\bar{F}_l(\varepsilon_0, \phi_0 + \Delta\phi, \varepsilon = 0) - \bar{F}_l(\varepsilon_0, \phi_0, \varepsilon = 0)}{\Delta\phi}$$

4)-calcul des dérivées $\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial \varepsilon/\omega}$ et $\frac{\partial \bar{F}_l}{\partial \varepsilon/\omega}$. L'équation de Reynolds est résolue

dans le cas où $\varepsilon = \varepsilon_0$; $\phi = \phi_0$ et $\varepsilon/\omega \neq 0$, on en déduit :

$$\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial \varepsilon/\omega} = \frac{\bar{F}_k(\varepsilon_0, \phi_0, \varepsilon/\omega) - \bar{F}_k(\varepsilon_0, \phi_0)}{\varepsilon/\omega}$$

$$\frac{\partial \bar{F}_l}{\partial \varepsilon/\omega} = \frac{\bar{F}_l(\varepsilon_0, \phi_0, \varepsilon/\omega) - \bar{F}_l(\varepsilon_0, \phi_0)}{\varepsilon/\omega}$$

IV.4-CRITERES DE CONVERGENCES

Le système (IV.4) est résolu par la méthode de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation en tenant, pour l'itération (k+1), les coefficients de viscosités et les pressions à la frontière des alvéoles calculés à partir de champ de pression déterminé à l'itération (k).

Le choix de coefficient de sur-relaxation optimal, n'est pas aisée. Certains auteurs proposent des relations empiriques basées sur les résultats théoriques, citons la relation que nous adapterons:

$$\Omega = 2 - \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{1}{M^2} + \frac{1}{N^2}}$$

où M et N est le nombre de points retenus sur la discrétisation. Ce coefficient doit être compris entre 1.5 et 1.85.

Le champ de pression est initialisé de façon arbitraire pour notre étude la pression dans la zone de film mince est initialisée à partir de la pression p_a de l'alvéole et qui est supposée constante et pas la même dans chaque alvéole.

On itère sur le système "linéaire" (IV.3) jusqu'à ce que l'erreur relative moyenne :

$$e_r = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{p_{ij}^{(k+1)} - p_{ij}^{(k)}}{\bar{p}_{ij}^{(k)}} \right|$$

soit compatible avec le nombre d'itérations, (soit inférieure à 7).

Le choix d'une nouvelle valeur de pression alvéole est déterminé après avoir calculé la valeur $\bar{p}^{(k)}$ par la continuité de débit, la nouvelle valeur:

$$p_{ai}^{(k+1)} = \Omega_0 p_{aic}^{(k+1)} + (1 - \Omega_0) p_{ai}^{(k)}$$

où Ω_0 est un coefficient de sous-relaxation choisi entre 0.3 et 1.
et l'erreur moyenne pour cette itération:

$$e_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{p_{aic}^{(k)} - p_{ai}^{(k)}}{\bar{p}_{ai}^{(k)}} \right|$$

IV.5 - CONCLUSION

Si la finesse d'arrêt a peu d'influence sur le débit et la pression dans les alvéoles, il en est autrement pour l'angle de calage et les coefficients dynamiques croisés. Ainsi, le calcul des caractéristiques dynamiques d'un palier hybride demande des temps de calculs parfois très importants.

La méthode de différentiation numérique impose le choix d'incrément de déplacement et de vitesse suffisamment petits pour rester dans le cadre de la théorie linéaire, afin d'engendrer des perturbations significatives devant les erreurs numériques et d'approximation. Elle est d'un emploi commode car l'on résout toujours la même équation.

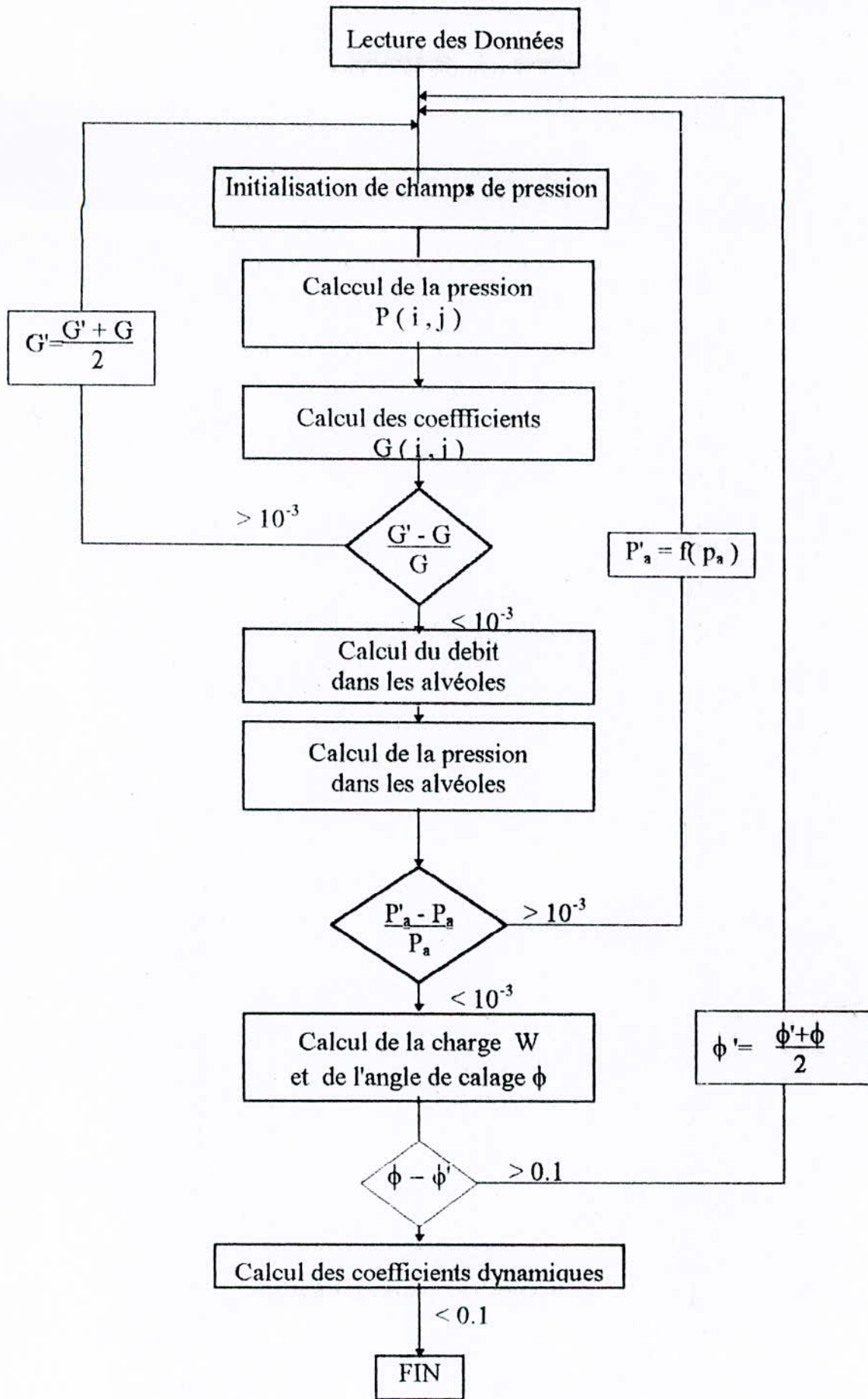


Fig. IV.3-Organigramme

Chapitre V

présentation des résultats et validation de programme

V.1- INTRODUCTION :

Dans ce chapitre nous allons présenter les résultats numériques obtenus sur un palier hybride pour des données bien déterminées [6]. Ces résultats concernent le cas d'un palier non chargé (position centrée), et chargé, seront comparé avec les résultats théoriques obtenus par D.Nicolas et Frêne [6].

Dans les deux cas nous représenterons l'influence de la vitesse de rotation sur l'excentricité relative ,et sur les caractéristiques statiques et dynamiques du palier.

V.2-RESULTATS ET DISCUSSION

On souhaite étudier un palier hybride tournant à une vitesse de 500 (tr/mn) et 1000 (tr/mn) contrôlé par des orifices (palier a) et, un autre palier contrôlé par des capillaires (palier b), (fig V.1, 2) et dont les données sont si dessous:

| | D (mm) | L (mm) | c (mm) | L _a (mm) | $\mu \cdot 10^{-3}$ (pas.s) | ρ (Kg/m ³) | p _s (bar) | S _r /S _t | Orifice d _o (mm) C _d | | capillaire l _c (mm) r _c (mm) | |
|----------|-----------|-----------|-----------|------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------|--------------------------------|---|------|---|-----|
| Palier a | 305 | 305 | 0.277 | 254 | 0.215 | 915 | 2.90 | 0.60 | 15.5 | 0.71 | | |
| Palier b | 120 | 100 | 0,100 | 64 | 85 | 1000 | 12 | 0.6 | | | 58 | 0.6 |

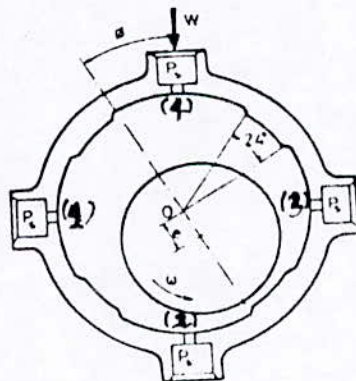


Fig. V.1- Palier étudié

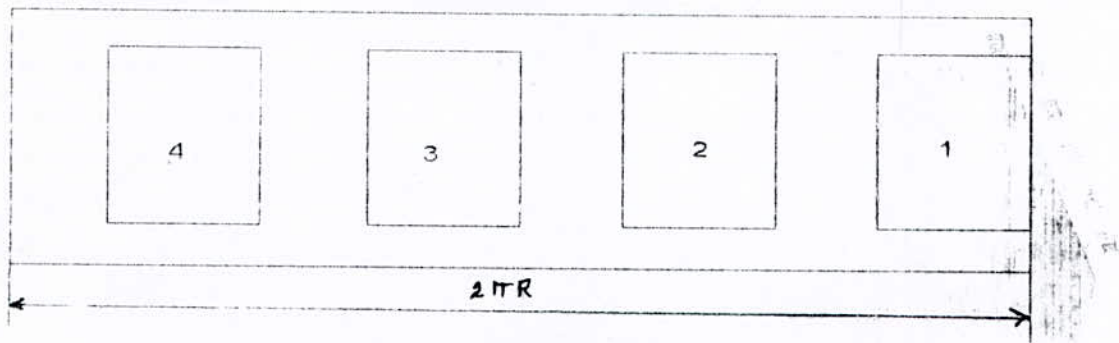


Fig V.2-Palier développé

Une comparaison montre que (fig.V.3a,b), (figV.4) les pressions dans les alvéoles (2), (3) et (4) sont très influencées par la vitesse de rotation, la pression dans l'alvéole (2) peut être supérieure à la pression d'alimentation (fig.V.3b). Dans ce cas le débit dans la résistance hydraulique est inversé: refoulement de l'alvéole vers la pompe. Ceci est dû au fait que l'épaisseur du film lubrifiant en amont de l'alvéole étant supérieure à celle de l'aval, le débit résultant de la vitesse des surfaces est négatif et supérieure en valeur absolue, à celui dû à la pression.

Par contre dans le cas de l'alvéole supérieure (4), l'épaisseur à l'entrée étant toujours inférieure à celle de la sortie, le débit de Couette s'additionne au débit de Poiseuille, on observe donc une chute de pression.

Le même raisonnement pour l'alvéole (3), et dans le cas de l'alvéole (1) il y a compensation entre le phénomène observé pour l'alvéole (2) et l'augmentation de l'épaisseur du film lubrifiant dû à l'existence d'un angle de calage.

On notera que le débit global du palier hybride, qui varie légèrement avec l'excentricité, est également peu sensible à la vitesse de rotation (fig.V.5.a,b)

La rotation de l'arbre engendre un angle de calage car dans ce cas il existe une portance hydrodynamique dans la zone où le jeu radial est petit. Cet effet hydrodynamique accroît la portance, comme on voit bien dans la figure (V.6,7,8).

La portance hydrostatique apparaît lorsqu'on fait augmenter la pression d'alimentation, la non linéarité de la courbe (Fig.V.9). Est dû à l'utilisation de l'orifice.

Pour les mêmes données présentées ci-dessus le tableau (V.1) représente des résultats qui permettent de prévoir le rôle de la turbulence, les résultats de quelques auteurs qui permettent d'apprécier le rôle de l'effet d'inertie à la sortie des alvéoles éliminé par nos hypothèses de calcul, de l'excentricité et de la vitesse de rotation.

Tableau V.1 : Caractéristiques statiques.

| | | N = 500 tr/mn $\varepsilon = 0$ | | | N = 500 tr/mn $\varepsilon = 0.5$ | | |
|---|---------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| | | laminaire | Non-laminaire sans effet d'inertie | Non-laminaire avec effet d'inertie | laminaire | Non-laminaire sans effet d'inertie | Non-laminaire avec effet d'inertie |
| Pa ₁ (bar) | Résultats obtenus | 0,29 | 1,56 | - | 0,296 | 1,43 | - |
| | Résultats d'autres auteurs [14] | 0,24 | 1,65 | 2,15 | 0,17 | 1,50 | 2,05 |
| Pa ₂ (bar) | Résultats obtenus | 0,29 | 1,56 | - | 1,22 | 2,53 | - |
| | Résultats d'autres auteurs [14] | 0,24 | 1,65 | 2,15 | 0,84 | 2,54 | 2,72 |
| Pa ₃ (bar) | Résultats obtenus | 0,29 | 1,56 | - | 0,295 | 1,43 | - |
| | Résultats d'autres auteurs [14] | 0,24 | 1,65 | 2,15 | 0,17 | 1,51 | 2,09 |
| Pa ₄ (bar) | Résultats obtenus | 0,29 | 1,56 | - | 0 | 1,03 | - |
| | Résultats d'autres auteurs [14] | 0,24 | 1,65 | 2,15 | 0 | 1,11 | 1,70 |
| W (N) | Résultats obtenus | 0 | 0 | - | 3671,74 | 8990,82 | - |
| | Résultats d'autres auteurs [14] | 0 | 0 | - | 4896 | 8457 | 6202 |
| Q _t (m ³ /s).10 ⁻³ | Résultats obtenus | 19,6 | 9,33 | - | 9,15 | 9,083 | - |
| | Résultats d'autres auteurs [14] | 13,15 | 9,21 | 7,68 | 9,6 | 8,86 | 7,5 |
| ϕ (°) | Résultats obtenus | 0 | 0 | - | 4,41 | 6,32 | - |
| | Résultats d'autres auteurs [14] | 0 | 0 | - | 3,6 | 6,9 | 5,2 |

En fait, l'effet d'inertie à la sortie de des alvéoles accroît la pression dans les alvéoles et réduit le débit du palier.

Si on impose le régime laminaire pour ces mêmes données, les résultats sont moins éloignés (tableau V.1) pour les caractéristiques statiques avec les résultats d'autres auteurs [14], par contre pour les résultats dynamiques, ils sont très éloignés, et l'hypothèse laminaire conduit à des résultats inacceptables, cela est dû à la compressibilité du lubrifiant.

Tableau V.2 : Caractéristiques dynamiques.

| | | N = 500 tr/mn $\epsilon = 0$ | | | N = 500 tr/mn $\epsilon = 0.5$ | | |
|----------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| | | laminaire | Non-laminaire sans effet d'inertie | Non-laminaire avec effet d'inertie | laminaire | Non-laminaire sans effet d'inertie | Non-laminaire avec effet d'inertie |
| | | | | | | | |
| A_{xx} 10^7 N/m | Résultats obtenus | 6,60 | 8,10 | - | 3,41 | 8,06 | - |
| | Résultats d'autres auteurs [6] | 1,91 | 2,95 | 3,70 | 1,91 | 5,97 | 4,66 |
| A_{xy} 10^7 N/m | Résultats obtenus | 0,06 | 0,04 | - | 0,14 | 0,39 | - |
| | Résultats d'autres auteurs [6] | 0,01 | -0,11 | 0,09 | 0,09 | 0,69 | 0,23 |
| A_{yy} 10^7 N/m | Résultats obtenus | 6,58 | 8,06 | - | 2,40 | 6,69 | - |
| | Résultats d'autres auteurs [6] | 1,91 | 3,01 | 3,70 | 1,91 | 5,95 | 4,70 |
| A_{yx} 10^7 N/m | Résultats obtenus | -0,05 | -0,03 | - | -0,08 | -0,24 | - |
| | Résultats d'autres auteurs [6] | 0,01 | 0,00 | -0,05 | -0,09 | -0,71 | -0,41 |
| C_{xx} 10^4 N.s/m | Résultats obtenus | 9,60 | 8,20 | - | 2,17 | 8,20 | - |
| | Résultats d'autres auteurs [6] | 1,07 | 4,88 | 6,26 | 1,06 | 8,57 | 8,10 |
| C_{xy} 10^4 N.s/m | Résultats obtenus | -1,01 | 0,09 | - | 0,53 | 0,02 | - |
| | Résultats d'autres auteurs [6] | -0,060 | -0,12 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | -0,95 |
| C_{yy} 10^4 N.s/m | Résultats obtenus | 2,15 | 1,90 | - | 1,99 | 2,13 | - |
| | Résultats d'autres auteurs [6] | 1,07 | 4,88 | 6,31 | 1,07 | 8,16 | 8,10 |
| C_{yx} 10^4 N.s/m | Résultats obtenus | -0,00 | -0,06 | - | 0,19 | 0,053 | - |
| | Résultats d'autres auteurs [6] | +0,00 | -0,10 | -0,26 | 0,00 | 0,00 | 0,83 |

Tableau V.3 : Caractéristiques dynamiques.

| | N = 500 tr/mn $\varepsilon = 0.5$ | N = 1000 tr/mn $\varepsilon = 0.5$ |
|---------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| | Non-laminaire | Non-laminaire |
| A_{xx} $10^7 \cdot \text{N/m}$ | 8,06 | 4,7 |
| A_{xy} $10^7 \cdot \text{N/m}$ | 0,39 | 2,4 |
| A_{yy} $10^7 \cdot \text{N/m}$ | 6,69 | 5,7 |
| A_{yx} $10^7 \cdot \text{N/m}$ | - 0,24 | - 1,5 |
| C_{xx} $10^4 \cdot \text{N.s/m}$ | 8,2 | 10,5 |
| C_{xy} $10^4 \cdot \text{N.s/m}$ | 0,024 | 0,07 |
| C_{yy} $10^4 \cdot \text{N.s/m}$ | 2,13 | 5,6 |
| C_{yx} $10^4 \cdot \text{N.s/m}$ | 0,053 | 0,01 |

Dans le cas d'un palier ($\varepsilon \neq 0$), l'angle de calage reste très faible ($\phi < 6^\circ$), car la surface des alvéoles est importante et la viscosité du lubrifiant faible.

En ce qui concerne les termes croisés de raideurs, on remarque que pour une excentricité nulle, et une vitesse de rotation faible, ils sont très petits mais différents de 0 (tableau V.2,3), cela est dû à la compressibilité du fluide lubrifiant et aux erreurs numériques, et à la précision du test d'arrêt lors de calcul itératif de la pression dans les alvéoles.

Ces résultats montrent que les coefficients dynamiques varient peu avec l'excentricité relative tant que celle-ci demeure relativement faible, dans quelques références [1,6], elle est inférieure à 0,4.

La répartition des champs de pression dans le sens circonférentielle est donnée par la figure (V.10,11). La pression dans les alvéoles est supposée constante et on voit que la pression décroît sur les portées, et l'existence de l'angle de calage dans le cas d'un palier chargé crée une dissymétrie sur la répartition de champs de pression dans le sens circonférentiel. Dans le cas d'un palier centré (non chargé) (fig.V.12), la répartition de champ de pression est symétrique dans le palier, l'angle de calage est nulle.

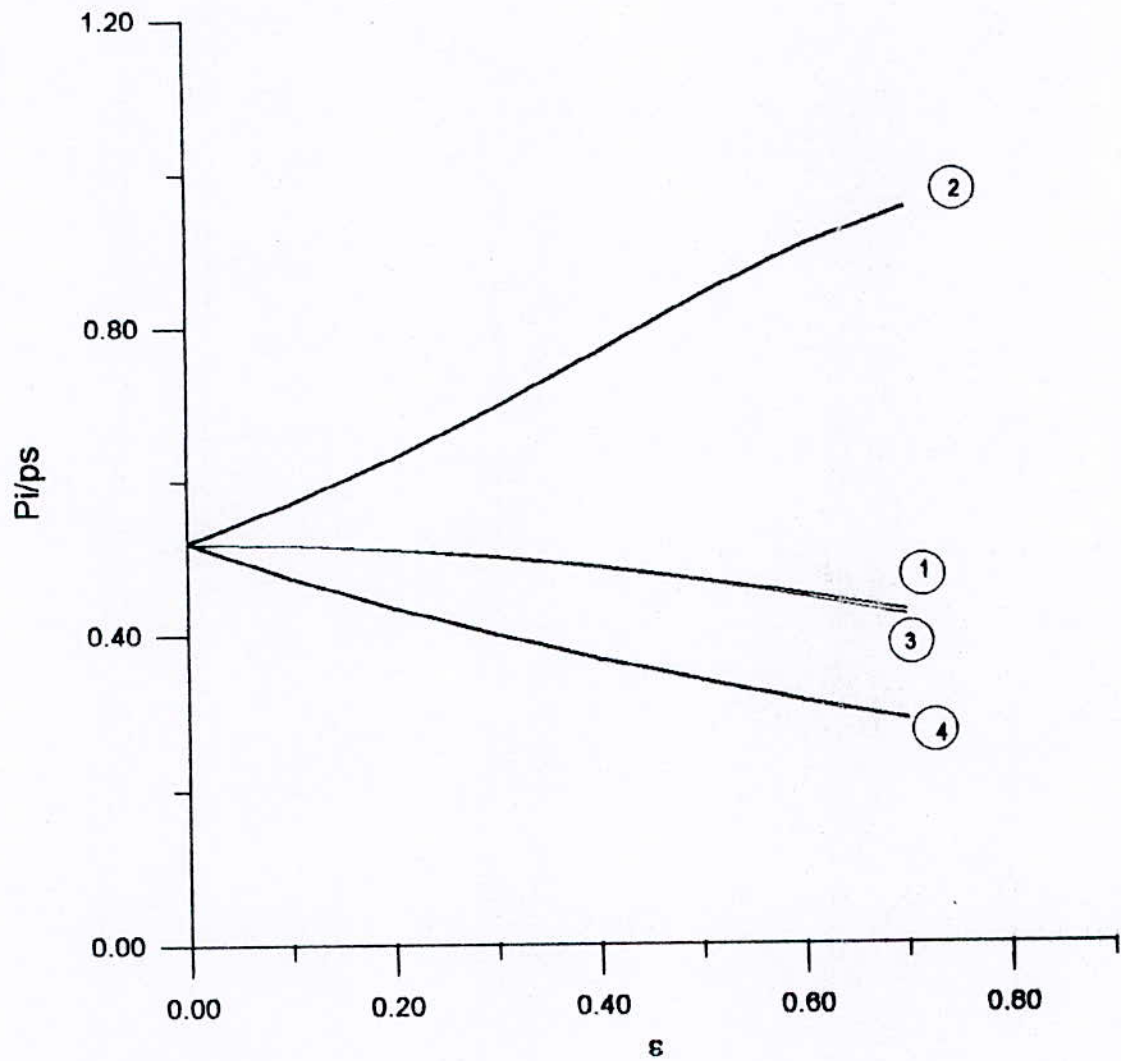


fig.v.3.a.variation de la pression dans les alvéoles en fonction de l'excentricité

(palier "a", $N=500\text{tr/mn}$)

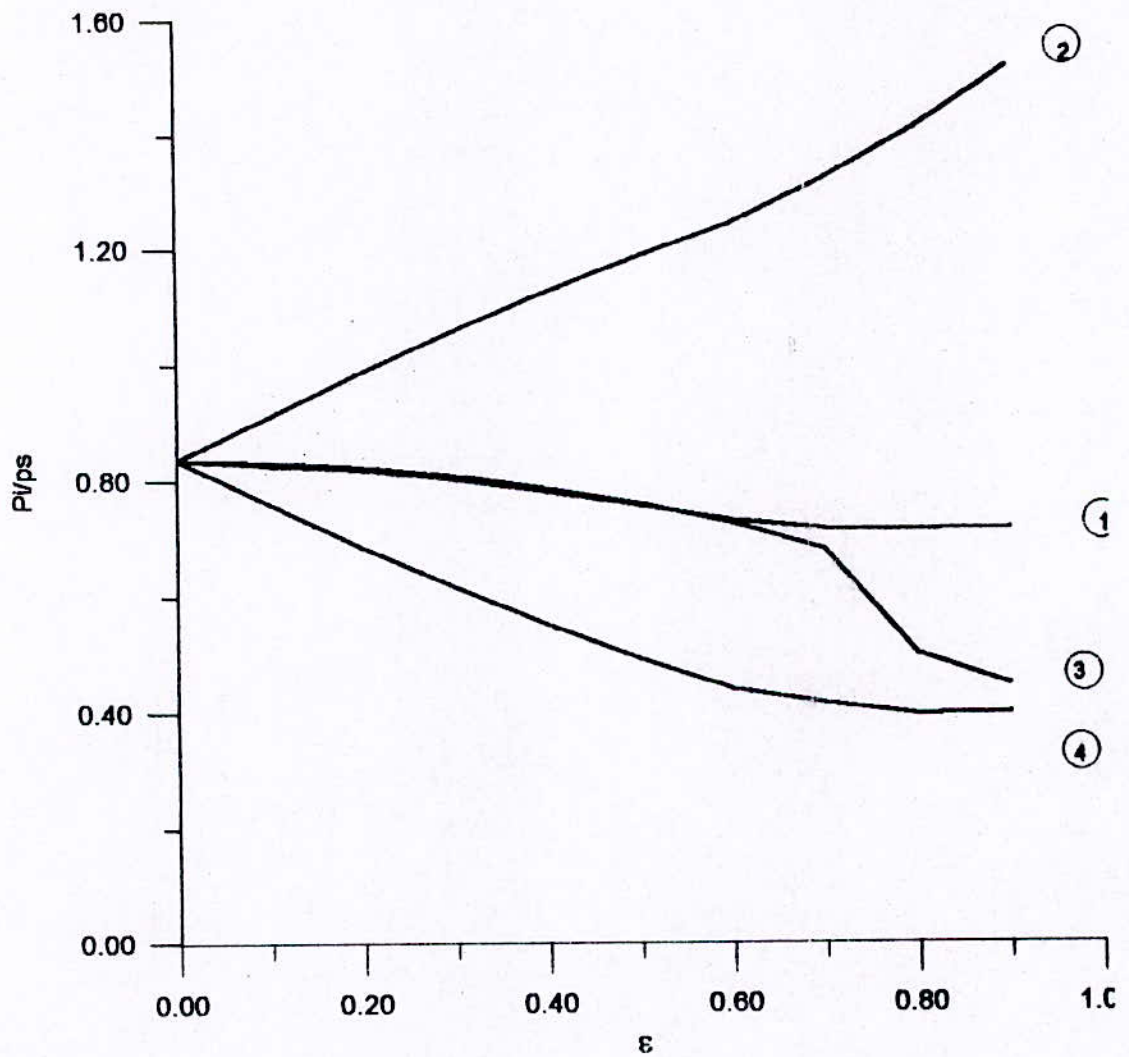


fig.v.3.b.variation de la pression dans les alvéoles en fonction
de l'excentricité (palier "b", N=500tr/mn,ps=12 bar)

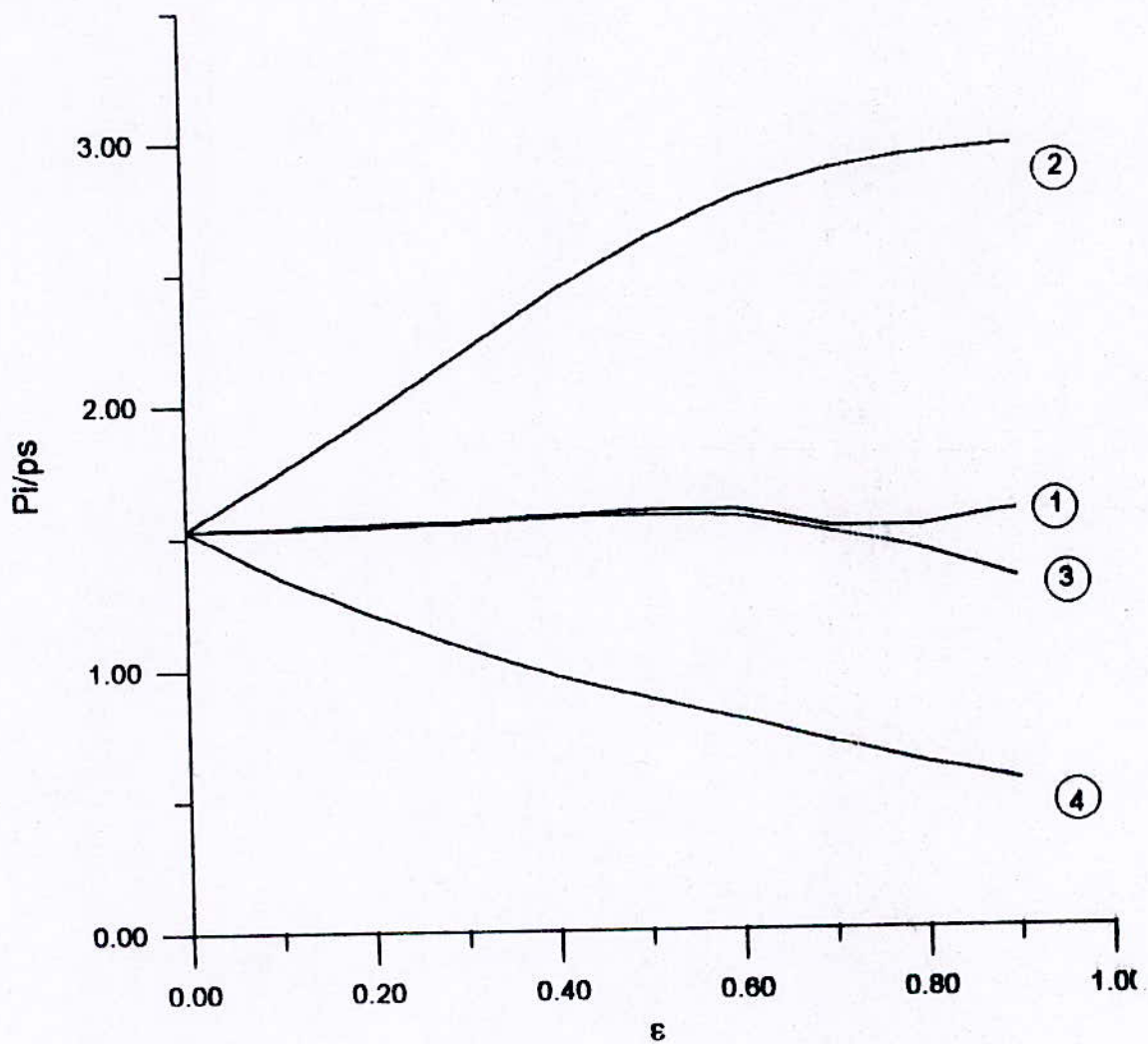


fig.V.4: variation de la pression dans les alvéoles en fonction de l'excentricité ($N=1000\text{tr/mn}$, $p_s=3.\text{bar}$).

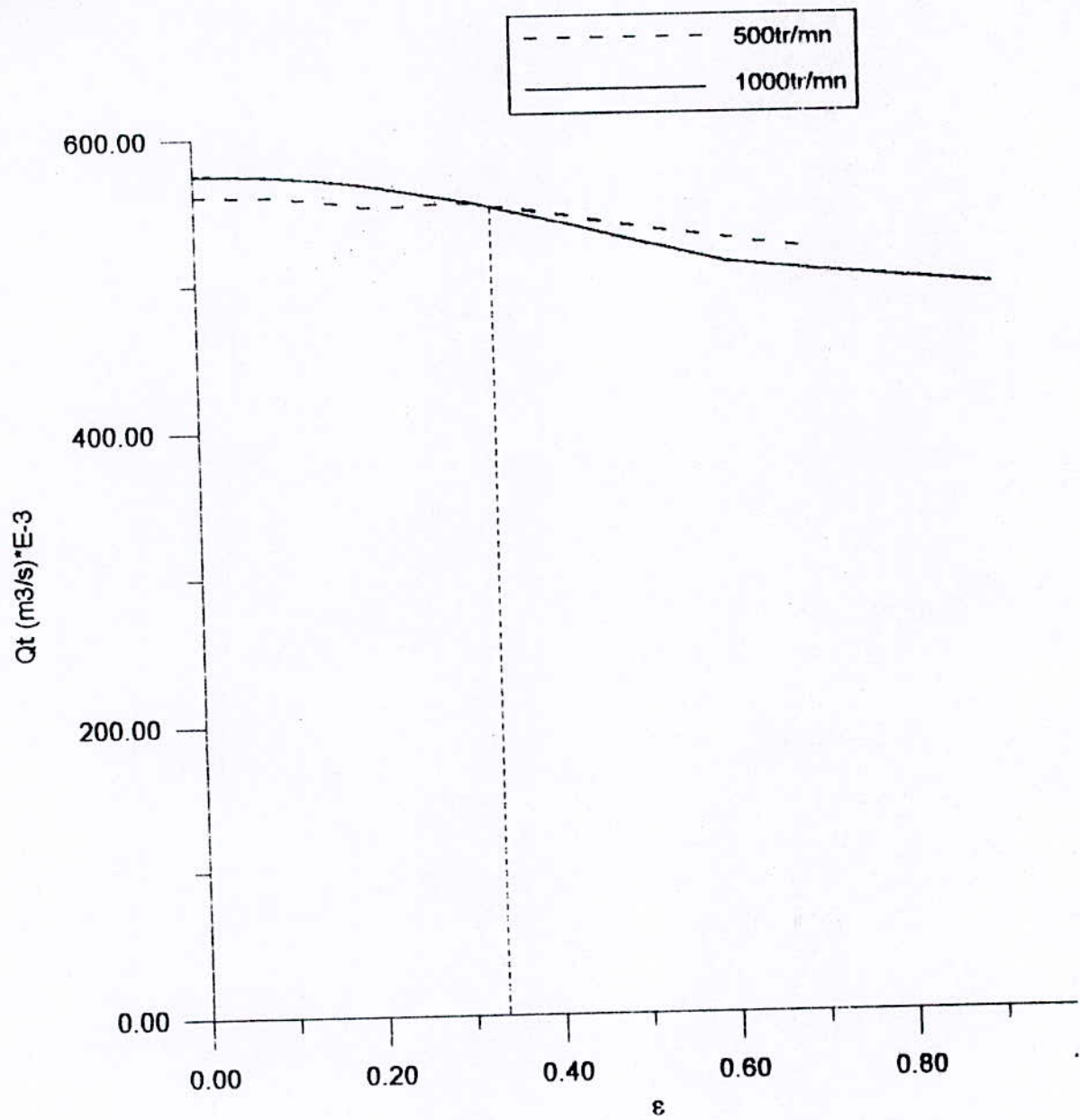


Fig.v.5.a : variation de debit en fonction de l'excentricité

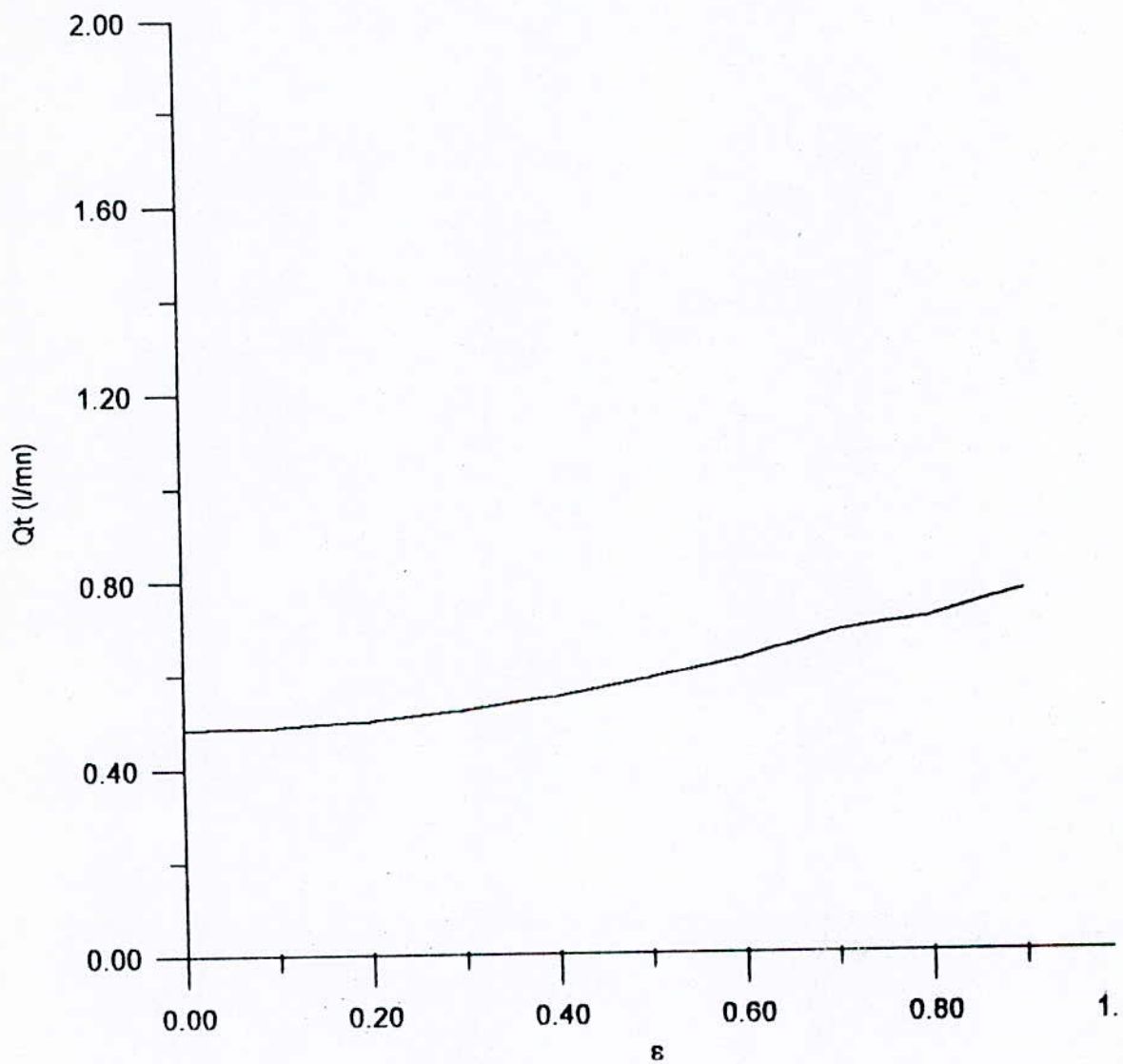


fig.V.5.b.variation de debit en fonction de l'excentricité
(palier "b", $N=500\text{tr/mn}$, $p_s=12\text{ bar}$)

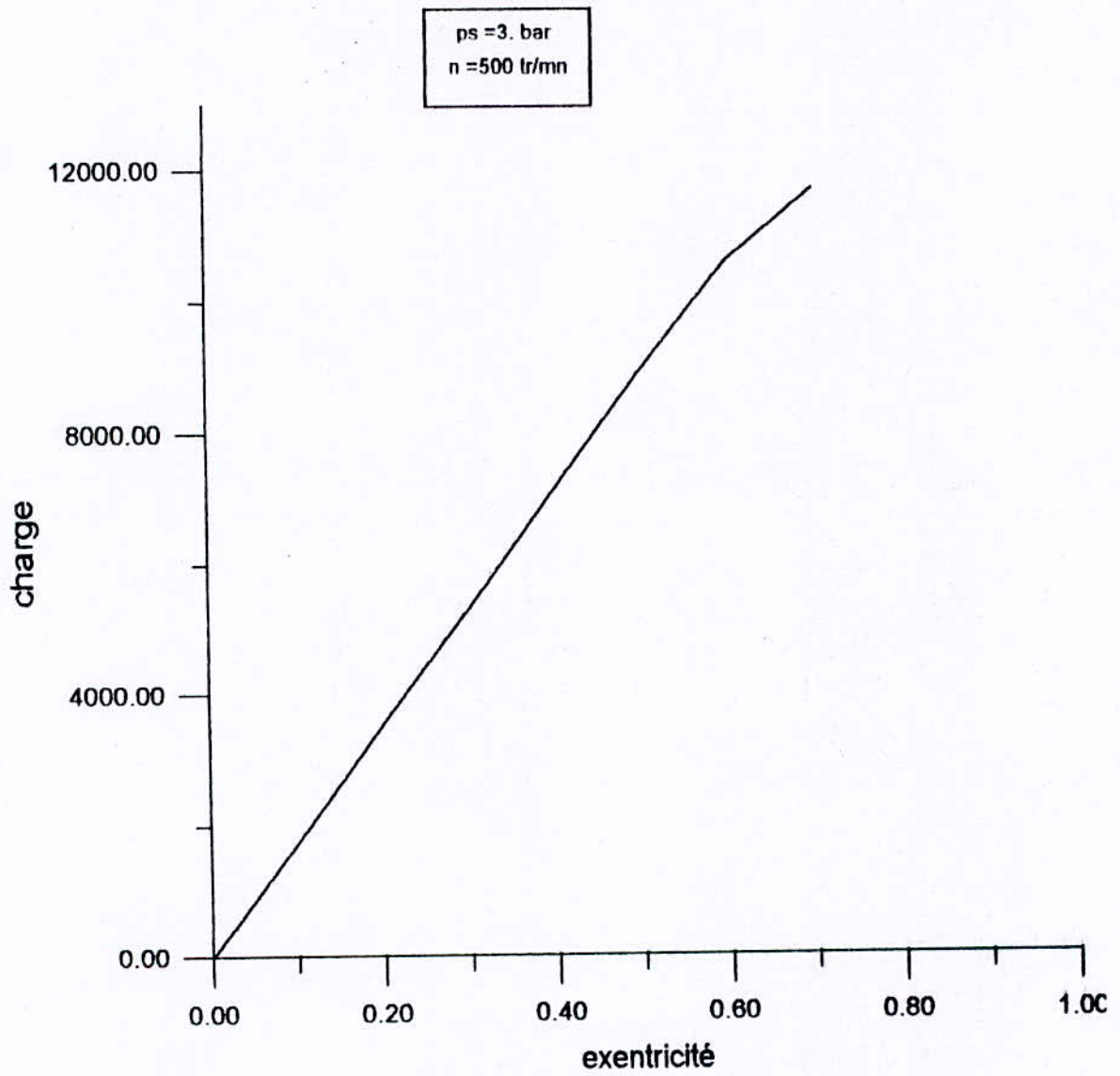


fig.V.6 : variation de la charge en fonction de l'excentricité

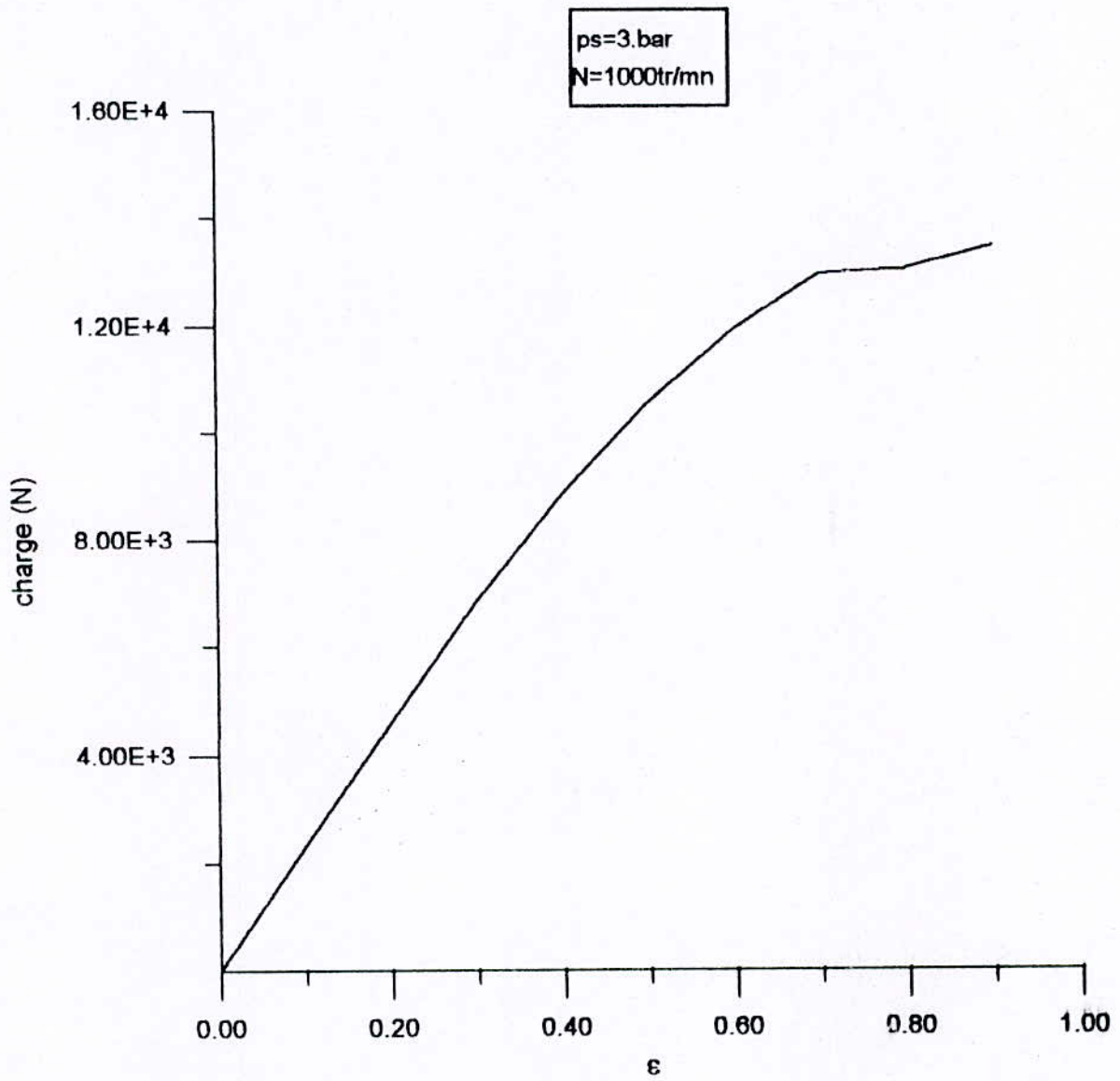


fig.V.7 : variation de la charge en fonction de l'excentricité

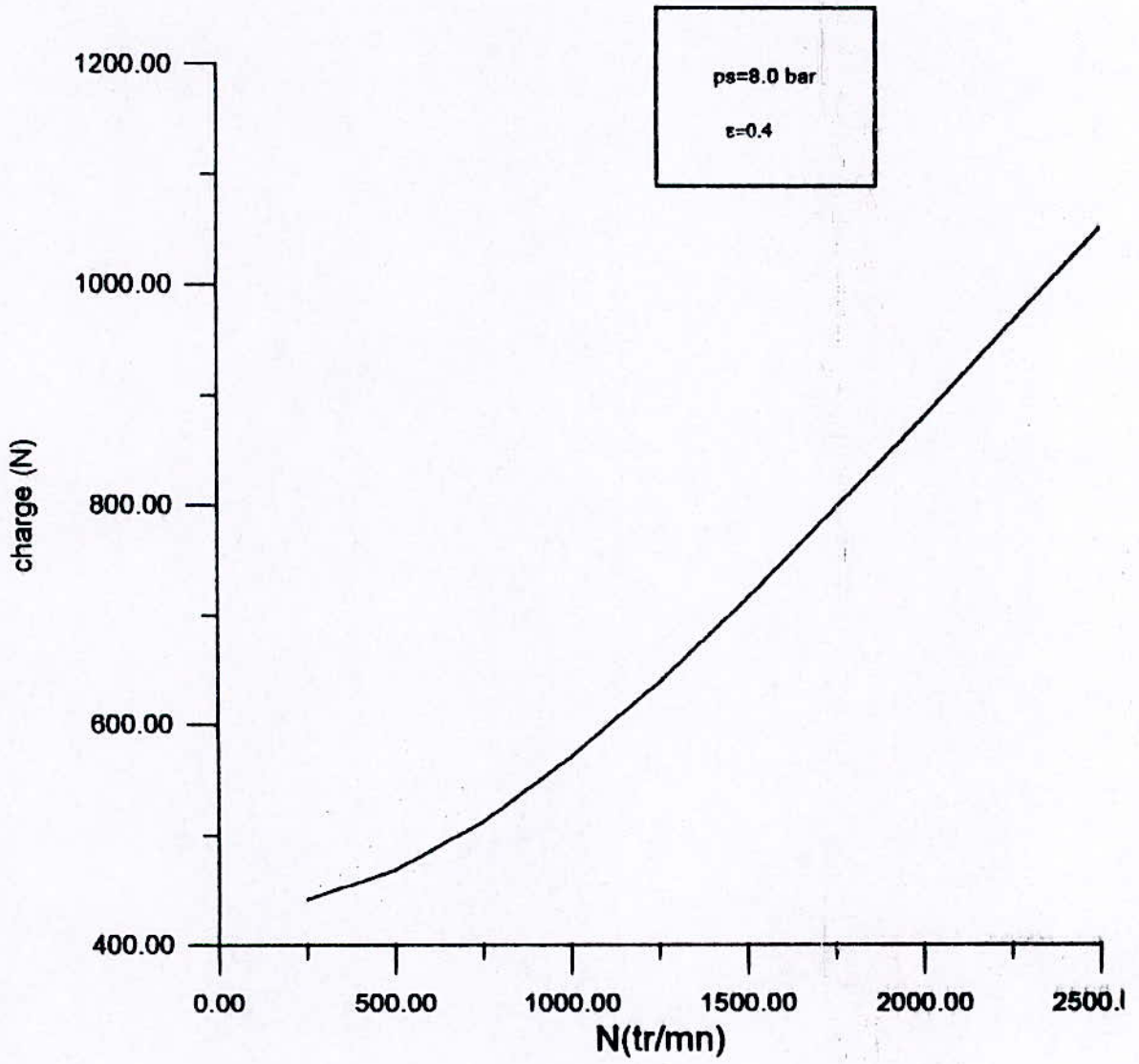


fig.V.8 : variation de la charge en fonction de la vitesse de rotation

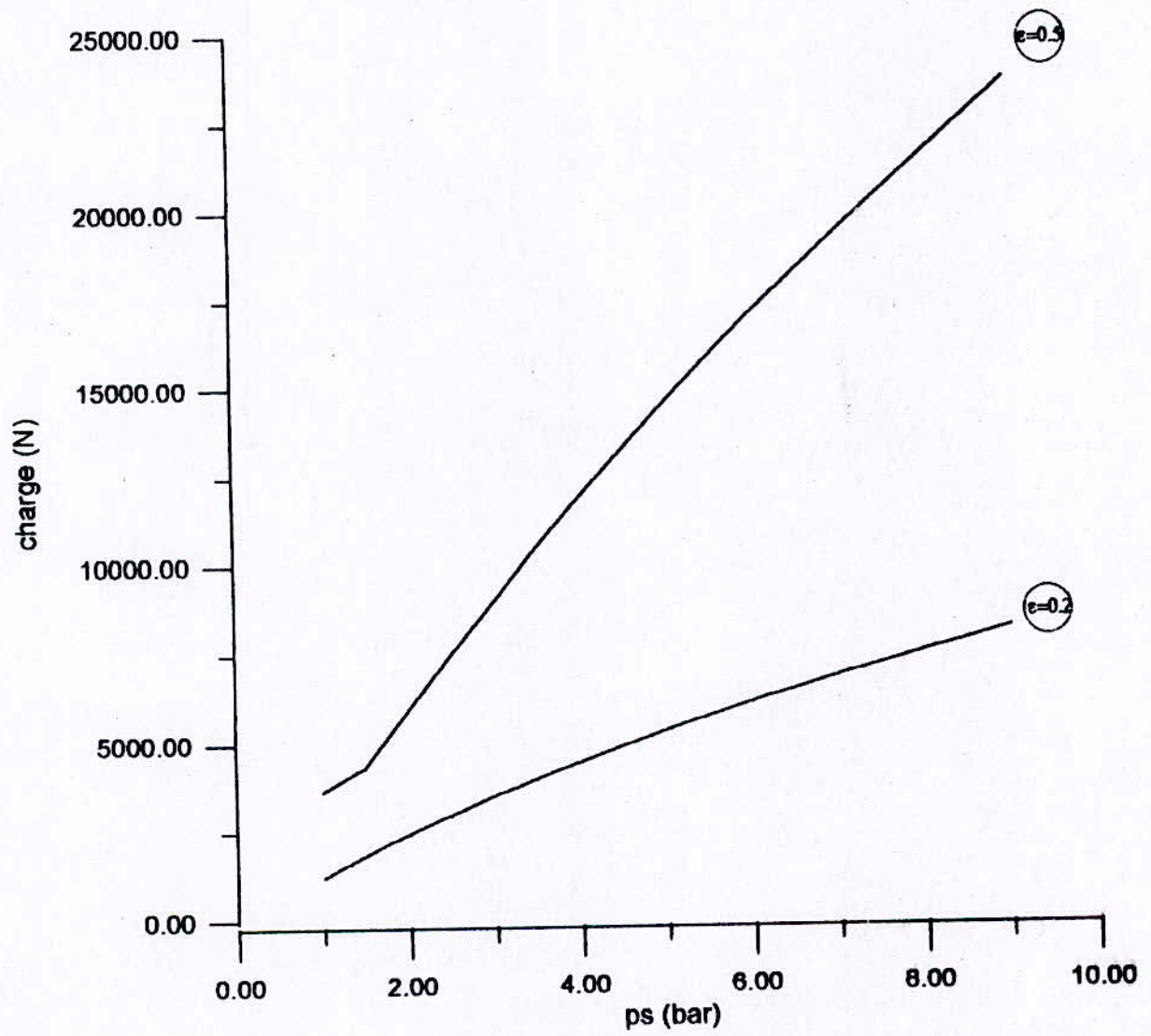


fig.V.9 : variation de la charge en fonction de la pression d'alimentation
(N=500 tr/mn)

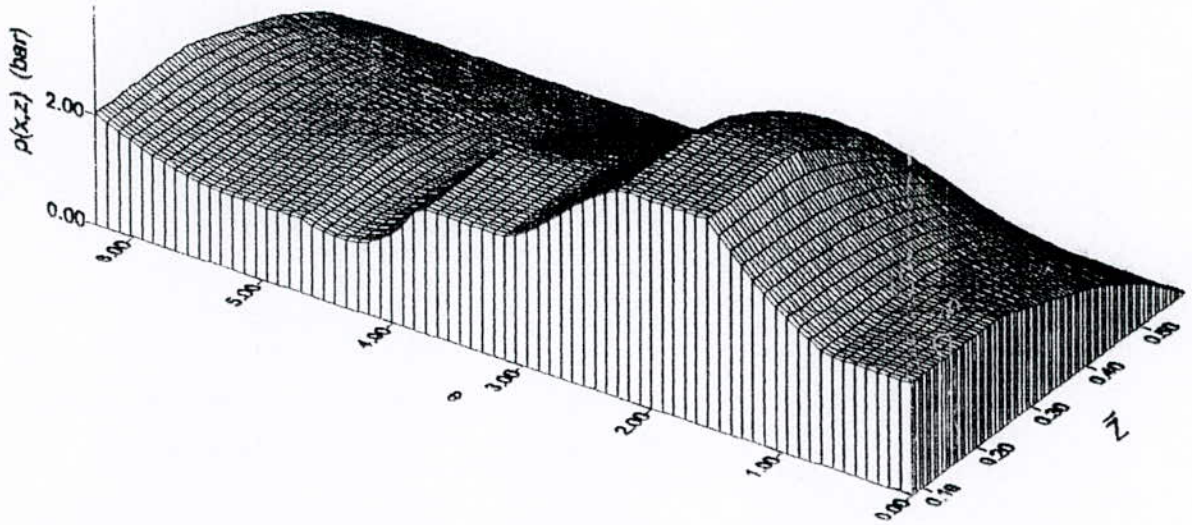
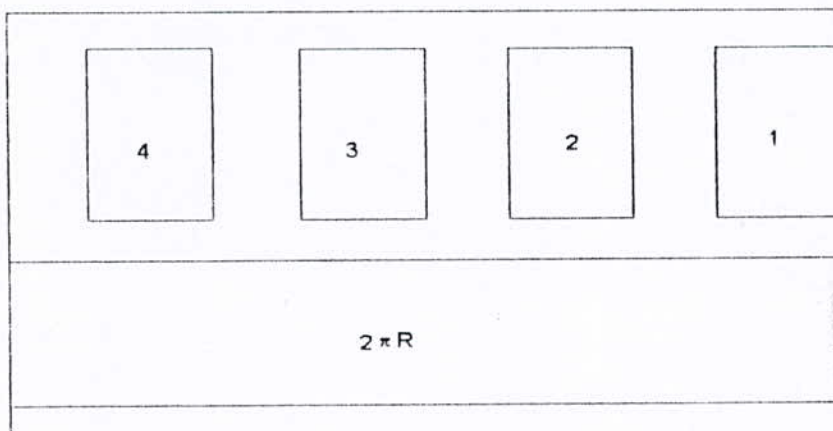


fig.10 champs de pression dans le palier ($N=500\text{tr/mn}$, $p_s=6.\text{bar}$, $\epsilon=0.4$)



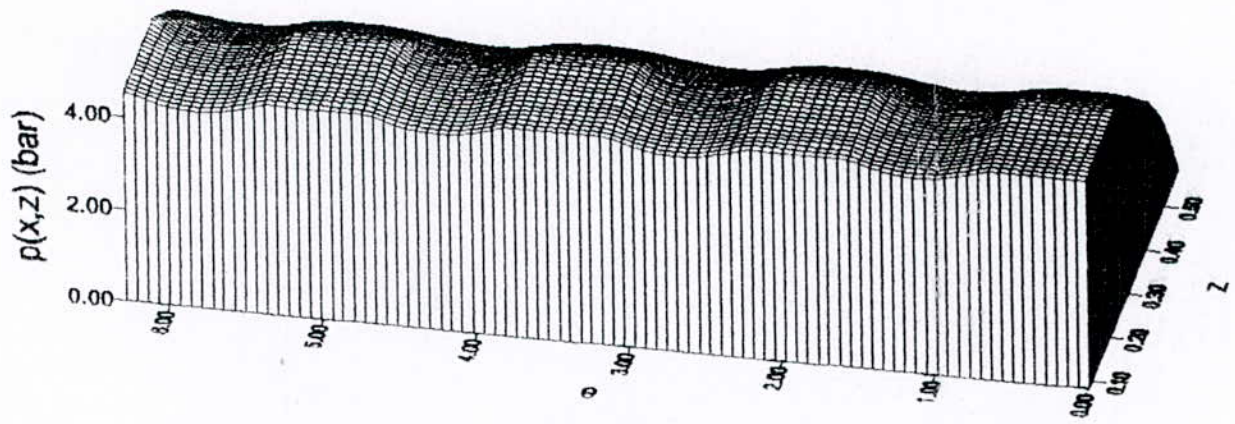
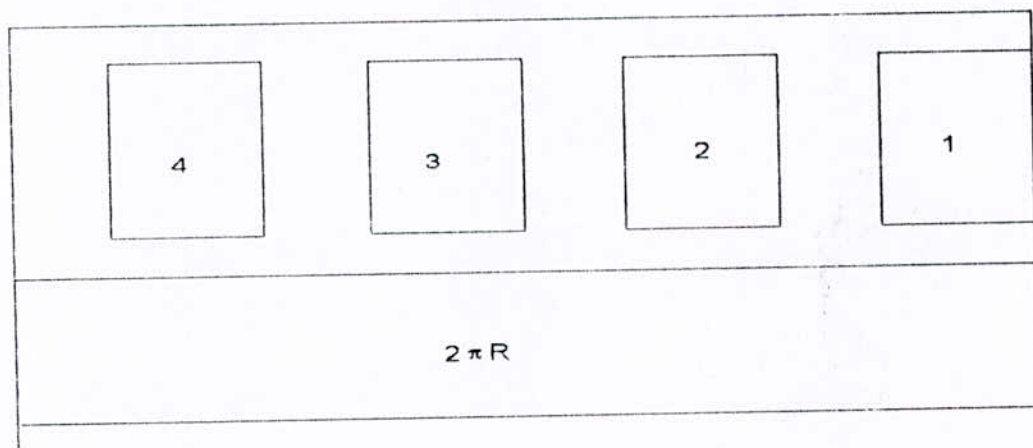


fig.V11 variation de la pression en fonction x et z

$e = 0.0$, $n = 500$. tr/mn , $p_s = 6$. bar



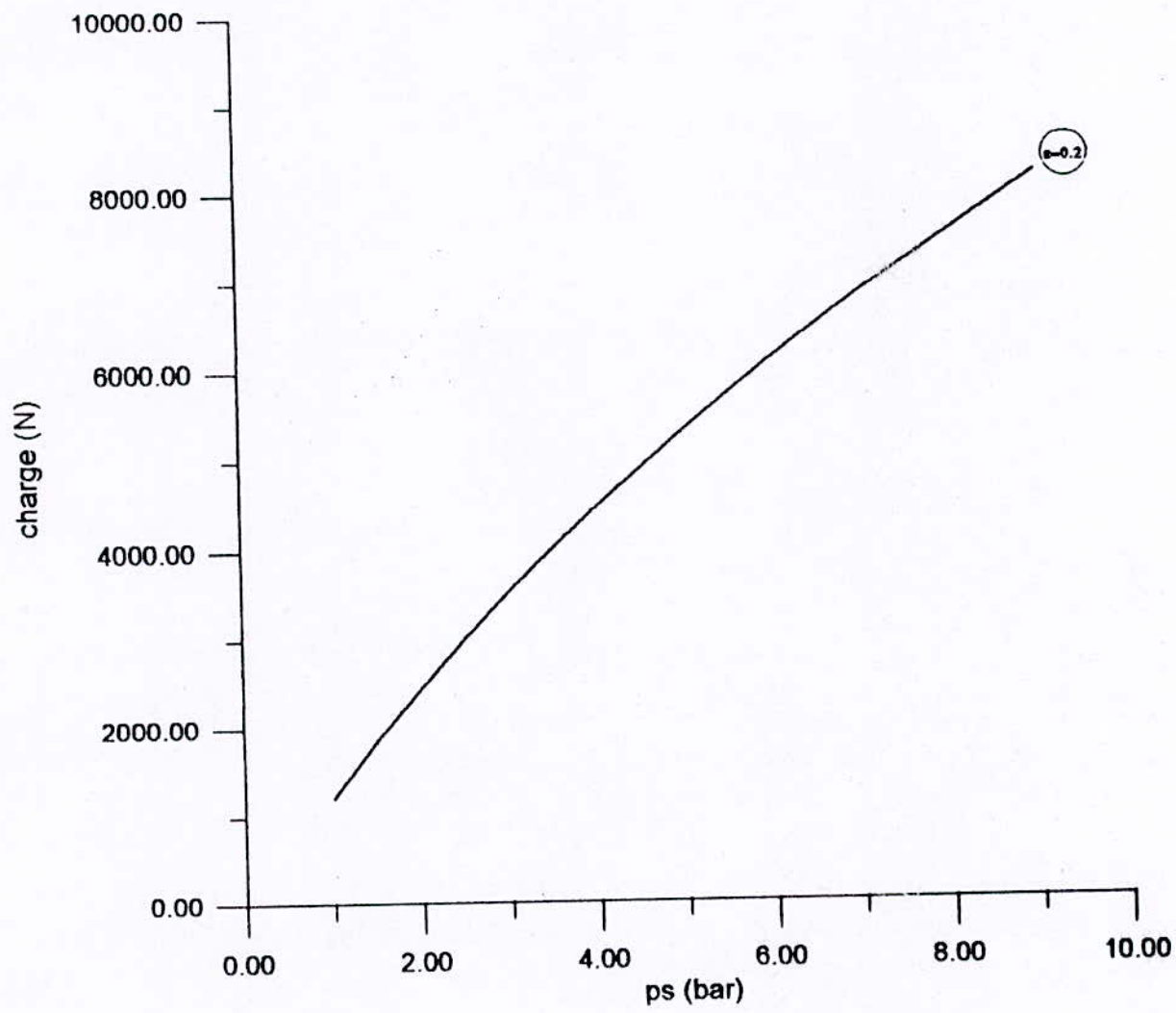


fig.V.12 : variation de la charge en fonction de la pression d'alimentation

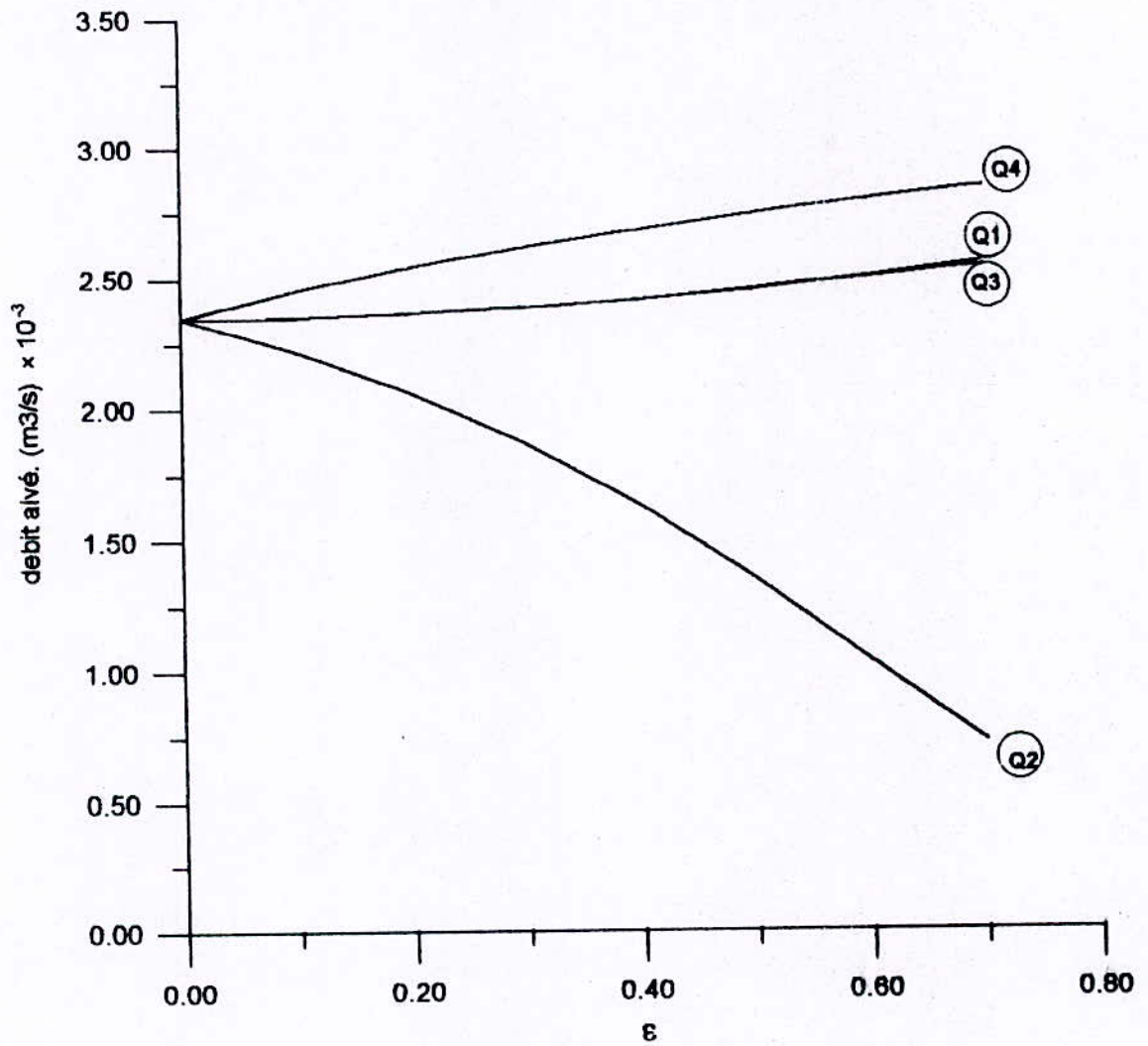


fig.V.13 : variation de debit dans les alvéoles en fonction de l'excentricité (N=500tr/mn,ps=3.bar)

V.3- CONCLUSION :

Les caractéristiques statiques et le comportement du palier hybride sont assez bien décrits par les résultats de notre programme, bien qu'il existe un écart considérable au niveau des coefficients dynamiques cet écart est dû à l'aspect dynamique dépend de la compressibilité du lubrifiant dans les chambres et les conduits d'alimentation.

Sous les conditions d'une grande fréquence d'excitation, les coefficient de raideur et d'amortissement deviennent intimement liés à ces conditions. Et l'écart est très important, ceci confirme l'hypothèse d'écart dûs aux méthodes numériques [7].

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVE

Des travaux théoriques et expérimentaux ont été effectués sur le comportement du palier hydrodynamiques, et hydrostatiques.

Les travaux sur les paliers hybrides (où il existe une source à pression positive et une portance hydrodynamique due à la vitesse de rotation) ont pris la grande part, car la vitesse des turbo-machines dans l'industrie a connu une grande augmentation.

Les paliers hybrides sont utilisés principalement dans l'industrie nucléaire pour le guidage d'arbres de pompe verticaux fonctionnant en position centrée. Ces paliers ont été utilisés sur des broches d'aléseuses et de rectifieuses de grande précision.

L'utilisation d'un lubrifiant de faible viscosité a conduit à des régimes d'écoulement non-laminaire et à des discontinuités de pression à la sortie des alvéoles.

Les modèles de calculs permettant de caractériser les régimes d'écoulements non-laminaires et proposés suite à une recherche bibliographique, sont fondé grâce à des essais. Nous nous sommes proposés de vérifier la grandeur d'écart entre l'utilisation de ce modèle par une approche numérique dans laquelle nous utilisons la méthode des différences finis et les approches utilisés par d'autres auteurs.

Les résultats des autres auteurs choisis sont celles les plus proches des résultats obtenus par l'expérience.

En lubrification hybride, l'écoulement du fluide est dû au gradient de pression et à la vitesse de déplacement relative des surfaces. Lorsque le palier est chargé, on retrouve à grande excentricité, le comportement des paliers lisses où intervient seulement l'effet hydrodynamique, on remarque alors une génération de pression hydrodynamique sur les portées interalvéoles.

A faible excentricité, le comportement est semblable à celui du palier en position centrée. Toutefois, la présence d'un angle de calage crée une dissymétrie de la pression dans les alvéoles situées de part et d'autre de la ligne des charges.

Les résultats obtenus avec notre programme de calcul montrent une bonne concordance aux limites des hypothèses posées, effectivement les écarts trouvés pour un milieu de fonctionnement bien déterminé revient particulièrement aux effets d'inertie, et aux méthodes de convergence utilisées dans le calcul numérique, ces dernières traduisent le grand écart trouvé sur les coefficients dynamiques.

Le grand écart entre les auteurs, pour les mêmes hypothèses et les mêmes données justifie ce fait.

Rappelons, ainsi que l'équation de Reynolds n'est résolue que sur les portées axiales et circonférentielles où l'épaisseur de film est petites devant les autres dimensions du contact.

Le choix des modèles empiriques pour caractériser le régime d'écoulement non laminaire justifie aussi bien cet écart.

Des approches analytiques, qui ne sont pas mentionnées, peuvent être faites, dans le cas où l'arbre du palier hybride est en position centrée [1], donnant des résultats voisins de ceux obtenus par notre calcul, cette concordance est justifiée par la prise en compte dans ces deux méthodes des mêmes modèles empiriques. Toutefois, une hypothèse supplémentaire est faite dans l'approche analytique les variations de la pression sont linéaires dans le sens axial et dans le sens circonférentiel.

Conclusion générale

Enfin, l'introduction des modèles proposés par Constantinescu dans notre programme de calcul permet de prévoir le comportement de palier hybride en régime non-laminaire avec un intervalle de confiance satisfaisant. Néanmoins, pour compléter cette étude il serait souhaitable de montrer l'influence des effets d'inertie à la sortie des lavées sur les pressions, le couple de frottement et sur la puissance dissipée dans le palier . . .

ANNEXES

Annexe.I

Integration des equations de navier simplifiées en regime laminaire .

L'equation de Navier et stoks peut être simplifiées en posant pour chaque démarche un ensemble d'hypothèse .

Dans ces hypothèse ou la pression ne varie pas dans l'epaisseur du film , et le coefficient caracterisant l'importance des termes d'inertie sera negligé , et on peut negligier les effets d'inertie devant les effets de viscosité.

Dans ce cas et en revenant aux variables dimmensionnées, les équations de Navier réduites s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \end{array} \right. \quad (A1.1)$$

Pour intégrer ces equations , on fait l'hypothèse suivante :

- La viscosité ne varie pas suivant l'épaisseur du film : $\mu = \mu (x_1 , x_3)$
physiquement la viscosité dépend de la température et de la pression : $\mu = \mu (p , T)$

En conséquence , p et T ne sont pas fonction de x_2 .

$p \neq p (x_2)$: déjà dit dans les équations de Navier réduites.

$T \neq T (x_2)$: nouvelle hypothèse $T = T (x_1 , x_3)$

Il vient alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} = \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \end{cases} \quad (\text{AI.2})$$

REMARQUE:- la vitesse u_2 a disparu,

- le second coefficient de viscosité λ a été éliminé par la simplification avec le facteur d'échelle ε .

L'intégration du système (AI . 2) compte tenu des conditions limites (fig.AI .1)

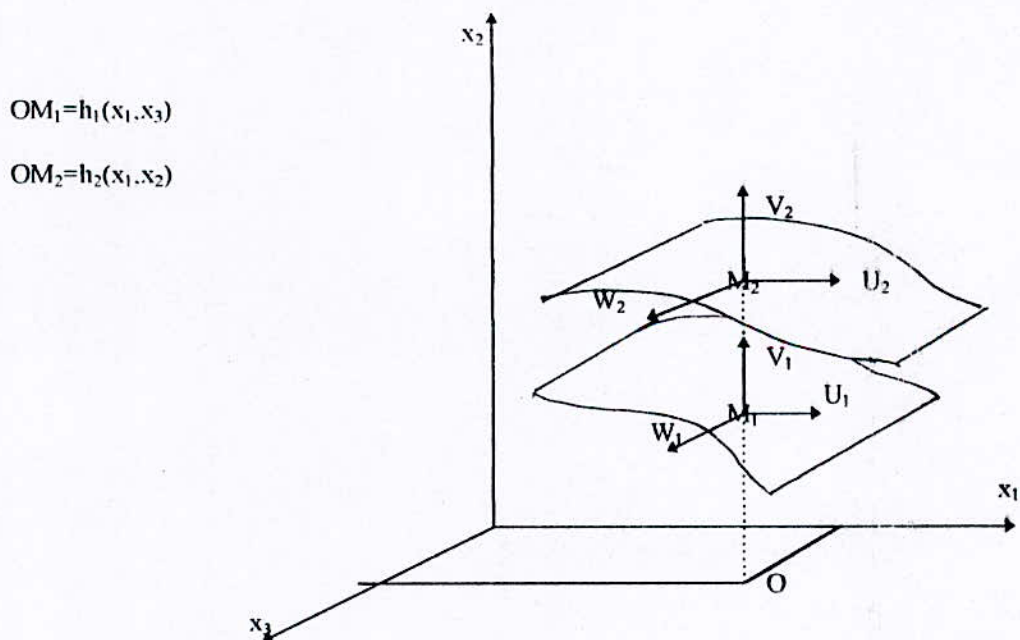


Fig A 1.1 - Géométrie et cinématique du contact

$$\begin{array}{ll}
 & u_1 = U_1 \\
 x_2 = h_1(x_1, x_3) & u_2 = V_1 \\
 & u_3 = W_1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & u_1 = U_2 \\
 x_2 = h_2(x_1, x_3) & u_2 = V_2 \\
 & u_3 = W_2
 \end{array}$$

conduit à :

$$u_1 = \frac{l}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \left(x_2^2 - x_2(h_1 + h_2) + h_1 h_2 \right) + \left(\frac{U_1 - U_2}{h_1 - h_2} \right) (x_2 - h_1) + U_1$$

[Ecoulement de Poiseuille] [Ecoulement de Couette]

(A1.3)

$$u_3 = \frac{l}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} \left(x_2^2 - x_2(h_1 + h_2) + h_1 h_2 \right) + \left(\frac{W_1 - W_2}{h_1 - h_2} \right) (x_2 - h_1) + W_1$$

(A1.4)

La répartition de vitesse u_2 selon l'épaisseur de film x_2 est obtenue à partir de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho u_3}{\partial x_3} = 0$$

(A1.5)

u_2 est inconnue mais ses valeurs limites aux parois sont v_1 et v_2 .

En intégrant l'équation de continuité à travers le film, on obtient :

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} dx_2 + \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} dx_2 + \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho u_3}{\partial x_3} dx_2 + \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx_2 = 0 \quad (\text{A1.6})$$

Physiquement, la masse volumique ρ dépend de la température T et de la pression p : $\rho = \rho(T, p)$.

Or nous avons vu précédemment que T et p étaient indépendants de x_2 .
en conséquence ρ est indépendant de x_2 .

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} dx_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{h_1}^{h_2} \rho u_1 dx_2 - \rho u_1(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \rho u_1(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x_1}$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} dx_2 = \rho \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 = \rho (v_2 - v_1)$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho u_3}{\partial x_3} dx_2 = \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{h_1}^{h_2} \rho u_3 dx_2 - \rho u_3(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x_3} + \rho u_3(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x_3}$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx_2 = \frac{\partial \rho}{\partial t} [x_2]_{h_1}^{h_2} = \frac{\partial \rho}{\partial t} (h_2 - h_1) \quad (\text{A1.6})$$

L'équation de continuité devient :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} (h_2 - h_1)^3 \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} (h_2 - h_1)^3 \right] = \\
& 6 \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\rho (U_1 + U_2) (h_2 - h_1) \right] - 12 \rho U_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \\
& + 12 \rho U_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + 6 \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\rho (W_1 + W_2) (h_2 - h_1) \right] \\
& - 12 \rho W_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_3} + 12 \rho W_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_3} + 12 \rho (V_2 - V_1) + 12 \frac{\partial \rho}{\partial t} (h_2 - h_1)
\end{aligned}
\tag{AI.7}$$

Si on place l'origine du système d'axes sur l'une des parois du contact (fig.AI.2), on obtient l'équation de Reynolds qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\rho}{\mu} H^3 \frac{\partial p}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\rho}{\mu} H^3 \frac{\partial p}{\partial x_3} \right] = 6 \rho (U_1 - U_2) \frac{\partial H}{\partial x_1} \\
& + 6 \rho (W_1 - W_2) \frac{\partial H}{\partial x_3} + 6 H \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\rho (U_1 + U_2) \right] + 6 H \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\rho (W_1 - W_2) \right]
\end{aligned}
\tag{AI.8}$$

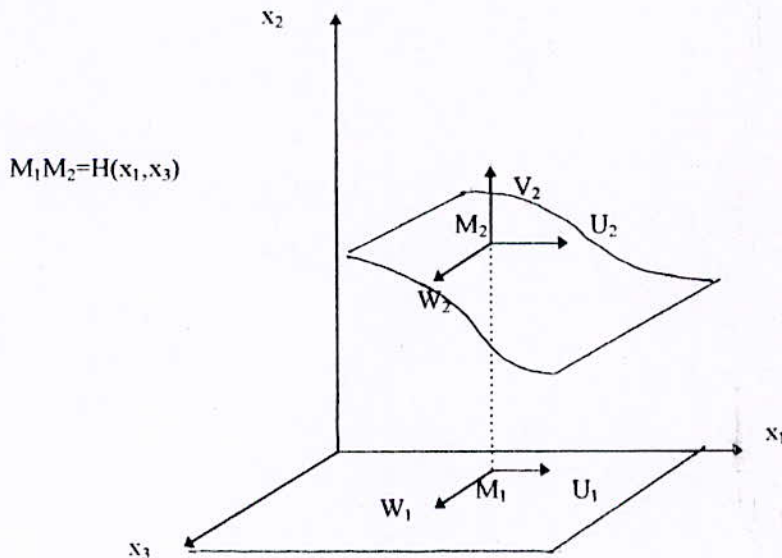


Fig.AI.2-Système d'axes lié à l'une des parois.

Annexe.II

Épaisseur du film lubrifiant

Considérons une section droite du palier (Fig.A.II.1.2). Un point M appartenant à la surface du coussinet sera repéré par la coordonnée angulaire $\theta : \theta = (\vec{O_c A}, \vec{O_c A})$; L'épaisseur du film est :

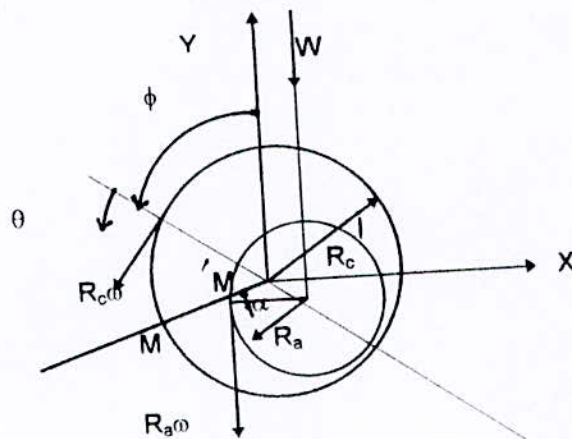


Fig AII.1 - Section droite du palier

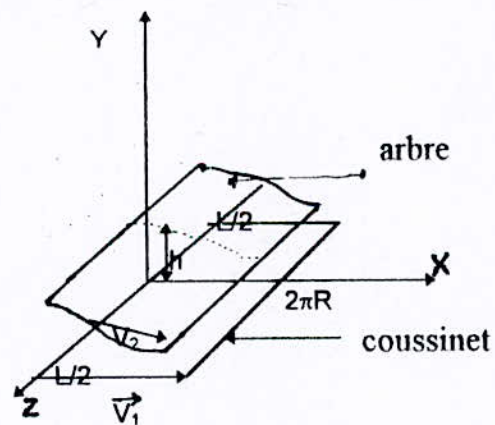


Fig .AII.2- Palier développé

où: $h = O_c M - O_c M'$
 $h = R_c - O_c M' = R_a + c - O_c M'$

En appliquant la règle des sinus au triangle Oa M'Oc il vient :

$$\frac{O_a M'}{\sin(O_a O_c M')} = \frac{e}{\sin \alpha} = \frac{R_a}{\sin(M' O_a O_c)} = \frac{R_a}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{R_a}{\sin \theta}$$

d'où

$$\sin \alpha = \frac{e}{R} \sin \theta$$

et $O_c M' = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin(O_c O_a M')$

Or $(O_c O_a M') = \theta - \alpha = \theta - \arcsin\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)$

donc $O_c M' = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin\left(\theta - \arcsin\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)\right)$

En développant le sinus nous obtenons :

$$O_c M' + R_a \sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)^2} - e \cos \theta$$

La quantité e/R_a est très petite devant l'unité (de l'ordre de 10^{-3})

On peut donc négliger le terme $(e / R_a \sin \theta)^2$ devant 1.

Il vient alors:

$$h = c (1 + \varepsilon \cos \theta)$$

où l'excentricité relative : $\varepsilon = e / c$ varie de 0 à 1.

Annexe. III

Caractéristiques de fonctionnement d'une butée infiniment longue

L'écoulement en film mince peut être traduit par l'équation de Reynolds (Annexe.I)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho}{\mu} h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\rho}{\mu} h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \\ 6h \frac{\partial h}{\partial x} \left[\rho (U_1 - U_2) \right] + 6 \frac{\partial h}{\partial z} \left[\rho (W_1 - W_2) \right] \\ + 6h \frac{\partial}{\partial x} \rho (U_1 + U_2) + 6h \frac{\partial}{\partial z} \rho (W_1 + W_2) \\ + 12 \rho V_2 + 12 h \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{A.III.1})$$

L'application de celle-ci à une butée plane infiniment longue (figure A II . 1) avec les hypothèses suivantes ,

- fluide incompressible ,
- profondeur de l'alveole grande devant l'épaisseur constante du film mince $H \gg h$.

- vitesse de la paroi inférieure $U_1 = 0$
- vitesse de la paroi supérieure $U_2 = U$
- écoulement unidirectionnel $w_1 = w_2 = 0$

s'écrit :

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = 0 \quad (\text{A III . 2})$$

où p est la pression dans le film.

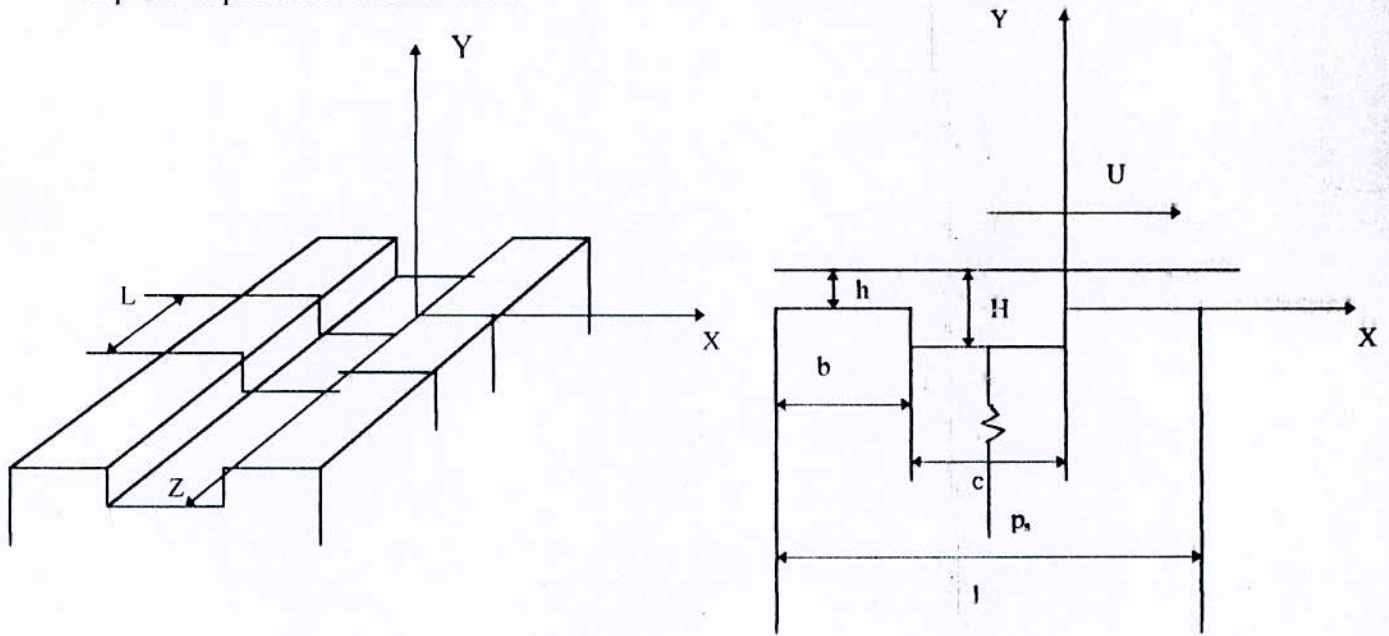


Fig. A.III.1 - Schématisation d'une butée plane infiniment longue

L'intégration de cette équation compte tenu des conditions limites, donne:

$$\begin{array}{ll} x = 0 & p = P_a \\ x = b & p = 0 \end{array} \quad (\text{A.III.3})$$

$$p = P_a \left(1 - \frac{x}{b} \right) \quad \text{Pour } 0 < x < b \quad (\text{A.III.4})$$

$$p = \frac{P_a}{b} (c + b + x) \quad \text{Pour } -(c + b) \leq x \leq -c$$

La répartition de pression est donc la suivante (fig.A.III.2)

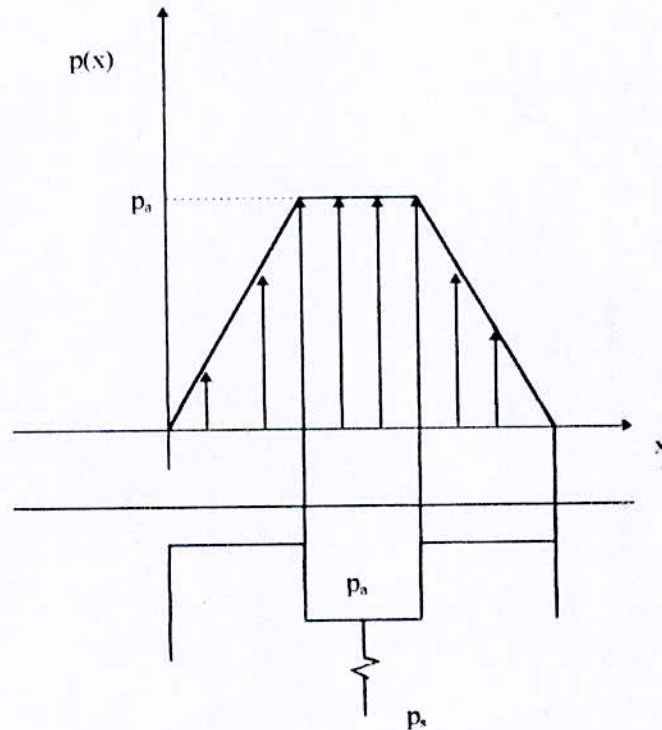


Fig.A.III.2. Répartition de pression

La charge supportée pour une longueur L du contact s'écrit :

$$W = L \int p \, dx = L \int_{L_1} p_a \, dx + L \int_{L_2} p \, dx$$

où L_1 est la longueur de l'alvéole et L_2 la longueur des portées.

$$W = P_a L (b + c) = P_a L (1 - b) = K_w P_a \quad (\text{A III .5})$$

où K_w est le coefficient de charge fonction uniquement de la charge du système .

$$K_w = \left(1 - \frac{b}{l}\right) \quad \text{avec } K = 0 \div 1$$

La répartition de vitesse dans le contact est obtenue par intégration des équations de Navier simplifiées qui se traduisent dans le cas unidirectionnel à :

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{A.III.6})$$

d'où l'expression de la vitesse u selon l'épaisseur du film :

$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} y(y-h) + \frac{y}{h} U \quad (\text{A.III.7})$$

Le débit de fluide Q qui sort du contact est obtenu en intégrant le champ de vitesse :

$$Q = L \int_0^h u(x=b) dy - L \int_0^h u(x=b-c) dy = L \frac{h^3 p_a}{6\mu b} = \frac{w h^3}{s \mu} K_Q \quad (\text{A.III.8})$$

qui peut encore s'écrire :

$$Q = K_Q \frac{h^3}{\mu} p_a$$

où K_Q représente le coefficient de débit .

$$K_Q = \frac{L}{6bK_w}$$

ANNEXE IV

Formules de changement de base et adimensionnement

IV.1-EQUATION DE REYNOLDS SANS DIMENSION ET PARAMETRAGE

L'équation de Reynolds modifié en régime dynamique s'écrit:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{\mu} G_x \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} G_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \left[\frac{\omega}{2} \frac{\partial h}{\partial \theta} + x \cos \theta + y \sin \theta \right]$$

où $\theta = \frac{x}{R}$ (fig. IV.1) et ω la vitesse angulaire de rotation.

On utilise la coordonnée angulaire θ dont l'origine est situé sur l'axe (k). L'épaisseur h du film lubrifiant est donné par:

$$h = c (1 + \varepsilon \cos \theta)$$

le changement de variable :

$$x = e \cos \phi$$

$$y = e \sin \phi$$

$$\theta = \theta + \phi$$

l'équation conduit à :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{\mu} G_x \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} G_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \left[\left(\frac{\omega}{2} - \dot{\phi} \right) \frac{\partial h}{\partial \theta} + \dot{e} \cos \theta \right]$$

avec l'écriture en variables sans dimension; en posant:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{p}{p_s} & \bar{w} &= \frac{w\mu R}{c^2 p_s} & \bar{x} &= \frac{x}{c} \\ \bar{z} &= \frac{z}{R} & \bar{u} &= \frac{u\mu R}{c^2 p_s} & \bar{y} &= \frac{y}{c} \\ \bar{h} &= \frac{h}{c} & \bar{t} &= \frac{tp_s}{R^2 \mu \left(\frac{c^2}{\mu}\right)} & \bar{x} &= \frac{xc^3 p_s}{\mu R^2} \\ \bar{\varepsilon} &= \frac{\varepsilon}{c} & \bar{F}_i &= \frac{F_i}{R^2 p_s} & \bar{y} &= \frac{yc^3 p_s}{\mu R^2} \end{aligned}$$

et l'équation sans dimension :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h}{\mu} G_x \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h}{\mu} G_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\omega \mu R^2}{c^2 p_s} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) - \phi \frac{\partial h}{\partial \theta} + \varepsilon \cos \theta \right]$$

où le terme $\frac{\omega \mu R^2}{c^2 p_s} = \Lambda$ caractérise l'importance de l'effet hydrodynamique vis à vis de l'effet hydrostatique.

Pour les débits et en posant $\bar{q} = q \frac{\mu}{c^2 p_s}$

circonférentiel

$$\bar{q}_i = \int_0^{L/2R} \left(\frac{h\Lambda}{2} - G_x \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{h}{\mu} \right) d\bar{z}$$

axial:

$$\bar{q}_3 = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left(-G_z \frac{\partial p}{\partial z} \frac{h}{\mu} \right) d\theta$$

Pour les vitesses:

$$\bar{u} = 6G_x \bar{y}(\bar{y}-\bar{h}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + \frac{\Lambda \bar{y}}{\bar{h}}$$

$$\bar{w} = 6G_z \bar{y}(\bar{y}-\bar{h}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}$$

d'où la vitesse moyenne selon l'épaisseur de film:

$$\bar{u}_m = -G_x \bar{h}^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + \frac{\Lambda}{2}$$

$$\bar{w}_m = -G_z \bar{h}^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}$$

pour les pressions dans les alvéoles celles-ci est obtenues par égalité des débits :

pour un capillaire

$$Q_a = \pi \frac{d_c^4}{128c^3 l_c} (1 - \bar{p}_a)$$

pour orifice

$$Q_a = \pi \frac{d_o^2 C_d \mu}{4c^3} \left(\frac{2}{\rho p_s} \right)^{1/2} \sqrt{(1 - \bar{p}_a)}$$

et la pression alvéole sera ainsi sans dimension.

IV.2-COEFFICIENTS DYNAMIQUES

Soit les relations suivantes:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_k \\ F_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{kk} & A_{kl} \\ A_{lk} & A_{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ l \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{kk} & C_{kl} \\ C_{lk} & C_{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{k} \\ \dot{l} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} k \\ l \end{Bmatrix} = [P] \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_k \\ F_l \end{Bmatrix} = [P] \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}$$

où

$$[P] = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

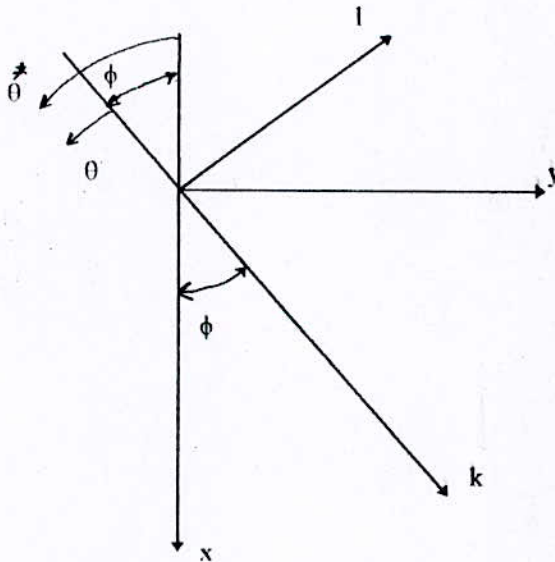


Fig. IV.1 -Paramétrage

En utilisant les relation de transformations des composantes d'un tenseur du second ordre dans un changement de base, tel que:

$$\begin{cases} A_{xx} = A_{kk} \cos^2 \phi + A_{ll} \sin^2 \phi - (A_{lk} + A_{kl}) \sin \phi \cos \phi \\ A_{xy} = A_{kl} \cos^2 \phi - A_{lk} \sin^2 \phi + (A_{kk} + A_{ll}) \sin \phi \cos \phi \\ A_{yx} = A_{lk} \cos^2 \phi - A_{kl} \sin^2 \phi + (A_{kk} - A_{ll}) \sin \phi \cos \phi \\ A_{yy} = A_{ll} \cos^2 \phi + A_{kk} \sin^2 \phi + (A_{kl} + A_{lk}) \sin \phi \cos \phi \end{cases} \quad (IV.7)$$

et des relations semblables pour les termes d'amortissements.

L'écriture en variables sans dimensions est alors , en posant:

$$\bar{A}_{ij} = A_{ij} \frac{c}{\rho_s R^2}$$

$$\bar{C}_{ij} = C_{ij} \frac{c^3}{\mu_s R^2}$$

ainsi connaissant les tenseurs raideurs et amortissements dans le repère (k,l) on peut en déduire ceux relatifs à tout autre repère par simple changement de base.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Chaomleffel, J., P. "Influence des forces d'inertie en lubrification hybride" thèse de docteur ingénieur, I.N.S.A Lyon, dec. 1983 .
- [2] Bou-said, B., "La lubrification à basse pression par la methode des élément finis, application aux paliers, "thèse de docteur ingénieur, I.N.S.A Lyon, . dec. 1983 .
- [3] Elrod, HC, NG, Cw. "A theorie of turbulent fluid film and its application to bearings", ASME journal of bearings technology, vol. 89 18/03/67, PP346-362.
- [4] Leloup L., "Etude de la lubrification et calcul des paliers " Dunod, 1978.
- [5] Ouziaux R., Perrier J., "Mecanique des fluides appliqués. " Dunod 1978.
- [6] Freine J., Nicolas D., Degueurceb B., Berth D., Godet M., "La lubrification hydrodynamique paliers et butées, Eyrolles, collection de la direction des études et recherches de E.D.F, 1990 .
- [7] "Lubrification hydrodynamique ", polycopié du laboratoire de mecanique des contacts, departement G.M.D, I.N.S.A de Lyon, 1978 .
- [8] S. Ajana-Boutalab "Etude des paliers hydrostatiques en regime turbulent, limite de validité d'un modele classique" Revue francaise de mecanique, N° 1986-1 Bulletin S.F.M.
- [9] S. M. Rohd, H. A. Ezzat "On the dynamique behavior of hybrid journal bearings" A.S.M.E. journal of lubrication technology PP 90-94 january 1976
- [10] B. Bousaid, J.P. Chaomleffel "hybrid journal bearings, theoretical and experimental results", vol. 111, pp 205-269, april 1989 journal of tribology.
- [11] A. Artiles, H. Heshmat "Analysis of starved journal bearings temperatures including temperature and cavitation " effets". vol.107 ,pp 1-13 january 1985
- [12] Michel aublen "Systemes mecaniques, theorie et dimensionnement ".(Lubrification hydrodynamique et hydrostatique) Dunod 92.
- [13] cours de monsieur Belhaneche 5ém année "mecanique de contact ". E.N.P.

- [14] Daniel nicolas "Butées et paliers hydrostatiques " technique de l'ingénieur B.673.
- [15] O. Reynolds "Theory of lubrication and its application to M. Beauchamp tower's experiment"
- [16] Swift W.H. "Theory and experiment applied journal bearings design" I.M.E. of the general on lubrication and lubricats.
- [17] Kingshury A. "Heat effect in lubricating films " mechanical engineering, n° 55.
- [18] Tylor G. I. "Stability of viscous liquid contained between two rotating cylinders" phil .traus. series A, vol. 223, p.289-343, 1923.
- [19] Constantinescu V. N. Galetuses "Operating characteristics of journal bearings in turbulent inertial flow" Traus A.S.M.E. journal of lubrication technology . april 1982. vol. 104,p 174-179.
- [20] Stuart J.T. "On the non-linear mechanics of hydrodynamique stability" journal of fluid mechanics, vol.4,part 1, p. 1-21, 1958.
- [21] Tso L.N. "A theory of lubrication in shart jornal bearings with turbulent flow" Traus A.S.M.E. vol. 80, N°4 ,p.1734-1740, 1958.
- [22] N.G. C.W. et Pan C.H."A linearized turbulent lubrication theory " J. of basic engineering, Traus . A.SME., serie D,vol. 87,N° 3, p.675-688,1965.
- [23] Elrod Jr. and Ng. C.W. "A theory for turbulent fluid film and its application to bearings ". A.S.M.E. jornal of lubrication technology, p.346-362,1967.
- [24] Ho. M.K. and Vohr J.H. "Application of energy model of turbulence to calculation of lubricant flow ". Traus A.S.M.E., jornal of lubrication technology, vol.96, N° 1, p.95-402, 1974.
- [25] Jones W.P., Lauder B.E., "The calculation of low-Reynolds number phenomena with a two equation model of turbulence ". heat and mass transfert, 16, p.1189, 1973.
- [26] Hirs G.G "A systematic study of turbulent film flow ".traus. A.S.M.E. journal of lubrication technology, vol. 95 ,N°1 ,p.118-126, 1974.
- [27] Cameron A. "The viscosity wedge " A.S.M.E. (1958).
- [28] Wilcock D.F. "Turbulence in high speed journal bearings " trans. A.S.M.E., vol. 72, N°3, p. 825-839, 1950