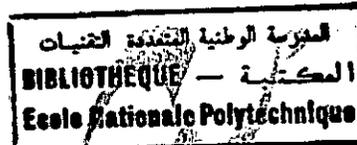


République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

15/97



المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
Ecole Nationale Polytechnique

Ecole Nationale Polytechnique

Département : Génie Mécanique

PROJET DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en Génie Mécanique

Thème

INFLUENCE DE LA GRAVITÉ DANS LA
RÉPARTITION DES CHAMPS
THERMIQUES ET HYDRIQUES EN
MILIEUX POREUX.

Proposé par :

Mr S.LARBI

Mr H.BELHANECHÉ

Étudié par :

Mr. A. HAMRANI

Mr. B. AIT BESSAI

Dirigé par :

Mr S.LARBI

Mr H.BELHANECHÉ

Promotion : septembre 1997

E.N.P. 10, AVENUE HASSEN BADI - EL-HARRACH - ALGER

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

Ecole Nationale Polytechnique

Département : Génie Mécanique

PROJET DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en Génie Mécanique

Thème

**INFLUENCE DE LA GRAVITÉ DANS LA
RÉPARTITION DES CHAMPS
THERMIQUES ET HYDRIQUES EN
MILIEUX POREUX.**

Proposé par :

Mr S.LARBI

Mr H.BELHANECHÉ

Etudié par :

Mr. A. HAMRANI

Mr. B. AIT BESSAI

Dirigé par :

Mr S.LARBI

Mr H.BELHANECHÉ

Promotion : septembre 1997

E.N.P. 10, AVENUE HASSEN BADI - EL-HARRACH - ALGER

REMERCIEMENTS

الدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Il nous tient très particulièrement à cœur d'exprimer ici notre profonde gratitude envers notre promoteur, monsieur S. LARBI pour tout l'intérêt qu'il a accordé à notre travail, pour ses encouragements continus et son soutien moral et la patience qu'il nous a accordés et enfin pour les rapports très agréables qu'il a entretenus avec nous durant la période de réalisation de notre projet.

Nos remerciements vont également à notre co-promoteur Monsieur H. BELHANECHÉ pour l'aide et le soutien morale qu'il nous a témoigné.

NOS VIFS REMERCIEMENTS VONT EGALEMENT A :

Monsieur BELAK, qui nous a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

Monsieur BENDOUR qui nous a toujours conseillé et soutenus, qu'il trouve ici l'expression de notre profonde gratitude.

L'ensemble des enseignants qui ont contribué à notre formation.

Les responsables du centres de calcul pour les facilités qu'il nous ont accordé durant la simulation, c'est très gentils merci.

Et bien sûr nous remercions tous les agent de la bibliothèque pour leur patience et le soin qu'ils nous ont accordés durant notre graduation à l'école.

Et enfin nous remerciant monsieur A. AZRAR du dépt. électronique pour son soutien et la sympathie qu'il nous a apporté, ainsi que tous ceux qui nous ont aidé durant la préparation de notre mémoire (M^r OUMAR le TOU, LOUDAS le Gentil et BADI d'Hadji) sans oublier tout nos amis étudiants en particulier Rachid

A TOUS MERCI

الدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Je dedie ce modeste travail à :

Mes très chers parents

Ames frères et soeurs

Tous mes amis

TO EVERY BODY WITH WHOME I
EXGANGED A SMILE

BOUALSEM

I dedicate this moderate work to :
The memory of my grand father Ahmed .
To my mother Fatma and father Mebrouk.
To my sisters and brothers.
To Sabbou (I wish you a long life).
To khali Ahmed et kalti Fatima , Samid and famimy and
Mr Djamel and Djamila.
To my oncle Hammou ,khalti Salika, and their sons
for all my family.

TO EVERY BODY WHOSE WHOSE I
EXCHANGED A SMILE

MOURAD

ABSTRACT

A finite element method is used in solving the system of nonlinear partial differential equations governing the two dimensional aspect of the transfer resulting from the combined effect of water movement due to gravity and to temperature gradients. The obtained numerical results are used to discuss the validity of the model.

RESUME

La méthode des éléments finis est utilisée dans la résolution du système d'équations aux dérivées partielles non linéaires qui gouvernent l'aspect bidimensionnel des transferts qui résulte de l'action combinée de la gravité et des gradients thermiques. Les résultats numériques obtenus sont utilisés dans la discussion de la validité du modèle.

ملخص :
ان طريقة الأجزاء المنتهية المستعملة في حل جملة المعادلات التفاضلية الجزئية ، غير الخطية ، تمثل هيئة ذات بعدين ، للانتقال - الحراري ، المادي - الناتج من الفعل المركب من الجاذبية ، والتغير الحراري .
ان النتائج العديدة المصطل عليها استعملت في مناقشة صلاحية النموذج .

- SOMMAIRE -

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

NOMENCLATURE.....

INTRODUCTION GENERALE..... I

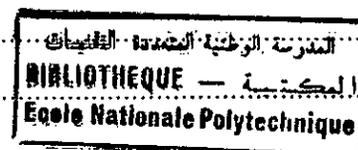
PREMIER CHAPITRE**I. GENERALITES.**

I.1 LES MILIEUX POREUX :	2
I.2 CARACTERISATION :	2
I.3 DISTRIBUTION DES DIMENSIONS DE GRAINS ET DE PORES :	3
I.4 GRANDEURS CARACTERISTIQUES LOCALES :	5
I.4.1 Concept de volume élémentaire représentatif (VER) :	5
I.5 MODELISATION DES PHENOMENES DE TRANSFERT :	7
I.6 MODES DE FIXATION D'UN CONSTITUANT FLUIDE AU SEIN DE LA MATRICE POREUSE :	7
I.6.1 L'ADSORPTION :	7
I.6.1.1 L'adsorption monomoléculaire : Caractérisée par la fixation d'une couche de molécules d'eau sur la surface des pores.	8
I.6.1.2 L'adsorption plurimoléculaire : Caractérisée par la fixation de plusieurs couches de molécules d'eau sur la première couche adsorbée.	8
I.6.2 LA CAPILLARITE :	8

DEUXIEME CHAPITRE**II. MODELISATION MATHEMATIQUE ET CONDITIONS AUX FRONTIERES.**

II.1 INTRODUCTION :	11
II.2 DESCRIPTION DU MODELE DE PHILIP ET DE VRIES :	11
II.3 HYPOTHESES :	12
II.4 EQUATION DE CONSERVATION DE LA MASSE :	13
II.4.1 Equation de transfert de masse en phase liquide :	13
II.4.2 Equation de conservation de la masse en phase vapeur :	16
II.4.3 Equation de conservation de la masse globale (liquide + vapeur) :	18
II.5 EQUATION DE CONSERVATION DE L'ENERGIE :	21
II.6 MODELE DE PHILIP ET DE VRIES SIMPLIFIE :	24
II.7 MODELE DE PHILIP ET DE VRIES GENERE :	25

II.7.1 Système d'équations découplées à deux dimensions d'espace :	26
II.8 MODELE PHYSIQUE ET MATHEMATIQUE :	27
II.8.1 Modèle physique :	27
II.8.1.1 Système fermé : (cf - figure -II-1-)	27
II.8.1.2 Système semi-ouvert : (cf - figure -II- 2 -)	28
II.9 MODELE MATHÉMATIQUE APPLIQUÉ ET CONDITIONS AUX FRONTIÈRES :	28
II.9.1 Modèle mathématique appliqué :	28
II.9.2 Conditions aux limites :	29



TROISIEME CHAPITRE

III. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

III.1 INTRODUCTION :	34
III.2 FORMULATION INTEGRALE :	35
III.3 METHODE DES RESIDUS PONDERES :	36
III.4 CHOIX DE LA FONCTION DE PONDERATION :	37
III.4.1 Méthode de Galerkin :	37
III.5 TRANSFORMATION DE LA FORME INTEGRALE :	39
III.6 DISCRETISATION EN ELEMENTS FINIS :	40
III.6.1 Approximation des inconnues :	40
III.6.1.1 Fonction de forme :	41
III.7 CRITERES DE CONVERGENCE ET ERREURS D'APPROXIMATION :	41
III.8 APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS AUX PROBLEMES DE CHAMP EN REGIME TRANSITOIRE :	43
III.8.1 Equation de la chaleur en régime transitoire :	43
III.8.1.1 La formulation intégrale :	44
III.8.1.2 Transformation de la forme intégrale :	44
III.8.1.3 Choix de la fonction de pondération :	44
III.9 METHODE DES ELEMENTS FINIS :	45
III.9.1 Conditions initiales et aux limites :	46
III.10 DISCRETISATION TEMPORELLE :	46
III.10.1 Processus de récurrence à deux points :	47
III.10.1.1 Méthode des résidus pondérés :	47
III.10.2 Méthode de récurrence à plusieurs points :	49
III.10.3 Etude de la stabilité des méthodes de récurrence à deux points :	49

III.11 RESOLUTION NUMERIQUE DE SYSTEME D'EQUATIONS NON LINEAIRES :	51
III.11.1 Equation de transfert de masse en milieux poreux	51
III.11.1.1 Formulation intégrale :	52
III.11.1.2 Transformation de l'intégrale :	52
III.11.1.3 Approximation des inconnus :	53
III.11.1.4 Choix de la fonction de pondération :	53
III.11.1.5 Discrétisation temporelle :	58
III.12 RESOLUTION NUMERIQUE :	59
III.13 STRUCTURE GENERALE DU PROGRAMME DE CALCUL :	59
III.14 ORGANIGRAMME :	60

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

QUATRIEME CHAPITRE

IV. RESULTATS ET DISCUSSION.

IV.1 PROFILS THERMIQUE :	64
IV.2 PROFILS HYDRIQUES :	65
IV.2.1 Potentiel gravitaire négligé :	65
IV.2.2 Potentiel gravitaire pris en compte :	66
IV.3 FLUX DE CHALEUR ET DE MASSE :	68

CONCLUSION.

ANNEXES (I, II, III, IV)

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

Nomenclature et notation indicielle

a : coefficient de diffusion de masse isotherme ;

a_i : variable nodale ;

A^e : aire de l'élément de référence ;

C : capacité calorifique ;

d : diamètre de l'échantillon ;

D : coefficient de diffusion de masse dans l'aire ;

D_0 : coefficient de diffusion massique isotherme global ;

D_{0e} : coefficient de diffusion massique isotherme de la phase liquide ;

D_{0v} : coefficient de diffusion massique isotherme de la phase gazeuse ;

D_T : coefficient de diffusion massique non isotherme global ;

F : fonction de pondération ;

$\{F\}$: vecteur chargement global ;

$\{F^e\}$: vecteur chargement élémentaire ;

h : enthalpie ;

I : terme source ;

J : densité de flux de masse ;

J_q : densité de flux de chaleur ;

K : conductivité hydraulique ;

$[K]$: matrice rigidité globale ;

$[K^e]$: matrice rigidité élémentaire ;

L : chaleur latente de vaporisation ;

l : longueur de l'échantillon ;

M : masse molaire ;

M_v : masse molaire de la phase vapeur ;

$[M]$: matrice masse globale ;

$[M^e]$: matrice masse élémentaire ;

N_i : fonction de forme ;

nd : nombre de noeuds

ne : nombre d'éléments

np : nombre de noeuds sur la frontière de l'échantillon ;

p_c : pression capillaire ;

p_e : potentiel de pression de l'eau ;

p_{vs} : pression de vapeur saturante ;

R : constante des gaz parfaits ;

r : rayon des pores ;

t : temps ;

t_i : échelle de temps ;

T : température ;

T_0 : température initiale ;

T_1 : température de l'extrémité froide ;

T_2 et T_3 : températures de l'extrémité chaude ;

$\{U\}$: vecteur solution approchée global ;

$\{U^e\}$: vecteur solution approchée élémentaire ;

x, z : dimensions d'espace ;

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة
CIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Lettres grecques :

α, χ : coefficients traduisant l'accumulation en phase vapeur ;

δ : coefficient de thermomigration ;

ε : porosité ;

ϕ : humidité relative ;

λ^* : conductivité thermique apparente du milieu poreux ;

ρ_l : masse volumique de la phase liquide ;

ρ_v : masse volumique de la phase vapeur ;

ρ_0 : masse volumique du milieu poreux sec ;

ρ_s : masse volumique de la phase solide ;

$(\rho c)^*$: chaleur volumique du milieu poreux ;

σ : tension interfaciale liquide - gaz ;

θ : teneur en eau volumique ;

ω : teneur en eau pondérale ;

ψ : succion ;

η, ξ : variables de référence ;

Ω^r : domaine élémentaire réel ;

Ω^f : domaine de référence ;

Ω : domaine réel global ;

Γ : frontière du domaine Ω ;

∂ : opérateur différentiel partiel ;

∇ : opérateur

$$\left(\vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \quad \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y}, \quad \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

Δ : opérateur Laplacien ;

Indices, symboles :

* : grandeur définie en milieu poreux ;

e : liquide ;

v : vapeur ;

0 : valeur initiale ;

a : air ;

q : chaleur ;

m : masse ;

c : critique ;

r : valeur de référence ;

s : surface ;

Relations :

$$a_m = a = D_0; \quad a_d = a\delta = \frac{\rho_e}{\rho_0} D_T.$$

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE.

INTRODUCTION GENERALE :

Les écoulements biphasiques en milieux poreux non saturés présentent sous l'influence de gradients thermiques modérés, un intérêt extrêmement grand dans des situations ou phénomènes naturels et dans des processus et domaines d'activités industrielles :

- Situation naturelle : l'échange d'humidité entre le sol et l'atmosphère par suite de variation de température journalière et saisonnière de la surface [II- 3].
- Processus industriels :
 1. Techniques : Génie civil; séchage des matériaux; Génie pétrole pour décrire le déroulement d'une procédure de récupération secondaire par injection d'eau .
 2. Technologique : Caloducs ; Génie chimie pour l'étude des pertes de charge ou de surface d'échange dans certaines installations (catalyseurs, extracteurs) et en hydrologie dans le domaine non saturé, pour l'étude de l'hystérésis des cycles de saturation.

La fixation de l'humidité dans les structures poreuses résulte généralement de l'action plus au moins importante de trois mécanismes physiques :

L'adsorption, la capillarité et la condensation, auxquels viennent s'associer dans certains cas les effets de la gravité sur la phase fluide.

La prépondérance plus au moins marquée de ces divers mécanismes physiques de fixation est fonction des caractéristiques structurales du milieu considéré, ainsi que des propriétés thermophysiques spécifiques.

Les différents mécanismes physiques de transfert de chaleur et de masse tels :

L'évaporation, l'évapotranspiration, la condensation et l'infiltration de l'eau à la surface et dans les sols sont provoqués par la mise en jeu de deux types d'énergies : l'énergie solaire et l'énergie gravitaire, soumettant l'eau à des processus de changements de phase et à des déplacements en phase solide, liquide ou vapeur.

Parmi les travaux qui ont été effectués dans ce sens, on trouve ceux dus à UDEL et ceux dus à PHILIP et DE VRIES.

Une partie de ces travaux consiste en l'étude monodimensionnelle des phénomènes de transfert couplé de chaleur et de la masse en milieu poreux et qui a permis de démontrer que le plus important des effets résultant du couplage est le mouvement causé par les gradients de température modérés.

Ce mouvement de l'eau appelé thermodiffusion est dû simultanément aux variations avec la température de la tension interfaciale (mouvement en phase liquide) et de la fraction massique de la vapeur d'eau (transfert en phase gazeuse).

Soumises aux conditions climatiques externes et aux conditions d'ambiance interne, les frontières du milieu poreux sont généralement le siège d'échange à la fois massique et thermique avec l'environnement.

Considérés du point de vue physique, ces échanges sont régis par les mécanismes de transfert au sein du milieu poreux, compte tenu des conditions aux limites résultant des interactions dynamique, massique et thermique entre les parois du milieu et les écoulements d'air environnants **BORIES [II- 1]**.

Lorsque l'on s'intéresse aux phénomènes de migration de l'humidité dans les sols, ou dans les milieux poreux exposés aux conditions atmosphériques, on constate que l'effet de la gravité constitue l'un des mécanismes contrôlant le transfert de masse.

C'est dans cette préoccupation que notre étude s'inscrit à fin de faire apparaître l'effet de la gravité sur la distribution des champs thermique et hydrique.

Quand l'influence de la gravité est prise en compte et la pression de la phase gazeuse supposée uniforme et constante, alors la description des phénomènes de transfert de chaleur et de masse dans les milieux poreux homogènes, isotropes non

saturés est généralement effectué à l'aide du système d'équations aux dérivées partielles non linéaires en deux dimensions de l'espace , dont la résolution est complexe.

Pour cela, dans le but de simplifier le phénomène de transfert du modèle de **PHILIP et DE VRIES [II -4]** dit **généralisé** dont les équations de transfert de chaleur et de masse sont découplées. Il est décrit par un système composé de deux types d'équations :

- ◆ Equation aux dérivées partielles linéaire pour la résolution du champ thermique.
- ◆ Equation aux dérivées partielles non linéaire pour la résolution du champ hydrique.

Le développement de notre travail est effectué dans le cadre de la présentation suivante :

- * Le premier chapitre est consacré aux généralités et aux définitions concernant le phénomène de thermomigration ainsi qu'à la description des mécanismes physiques relatifs à ce phénomène.
- * Le deuxième chapitre est relatif à la description des modèles théoriques dus à **PHILIP et DE VRIES** utilisés dans notre étude ainsi que le développement de leur modélisations mathématiques et les conditions aux limites liées à ces modèles.
- * La résolution numérique du système d'équations régissant le modèle utilisé pour notre étude fait l'objet du troisième chapitre.
- * Le quatrième chapitre concerne l'interprétation des résultats numériques obtenus de la simulation numérique.

La conclusion dégage les aspects essentiels des résultats obtenus ainsi que leur prolongement en ce qui concerne les applications industrielles.

PREMIER CHAPITRE



GENERALITES.

Dans cette première partie nous avons introduit les définitions et la terminologie essentielles pour la compréhension des concepts de base de la physique des milieux poreux, ce chapitre traite les points suivant :

- I.1 LES MILIEUX POREUX (définitions).
- I.2 CARACTERISATION.
- I.3 DISTRIBUTION DES DIMENSIONS DE GRAINS ET DE PORES .
- I.4 GRANDEURS CARACTERISTIQUES LOCALES .
- I.5 MODELISATION DES PHENOMENES DE TRANSFERT.
- I.6 MODES DE FIXATION D'UN CONSTITUANT FLUIDE AU SEIN DE LA MATRICE POREUSE.

I.1 LES MILIEUX POREUX :

On désigne communément par milieux poreux un solide compliqué délimitant et englobant des vides appelés pores. Ces vides peuvent communiquer entre eux et contenir une ou plusieurs phases fluides* pouvant s'écouler et, éventuellement, échanger entre elles et /ou avec le solide de la matière et /ou de l'énergie. La partie solide encore appelée matrice, peut être déformable mais doit avoir une certaine cohésion, ce qui exclut de notre définition les lits fluidisés constitués de particules solides tenues en suspension sous l'effet d'un écoulement du fluide industriel[†][I -2], [I-4].

La matrice solide d'un milieu poreux [I -4] peut être :

- Non consolidée : la phase solide est alors formée de grains ou de fibres non soudés entre eux (graviers, sables, limons, billes de verre et d'acier, matériaux divers ...) ; les billes de verre sont très utilisées en laboratoire pour étudier les phénomènes de transfert en milieux poreux.
- Consolidée : dans ce cas, la matrice solide compacte ne peut pas se diviser en grains ou fibres (roches calcaires, grès, argiles, bois, céramiques, poudres frittées, tissus végétaux et animaux . . .).

I.2 CARACTERISATION :

Les phénomènes qui se déroulent dans les milieux poreux dépendent de la géométrie de la matrice.

Un milieu poreux possède donc certaines caractéristiques définies par un certain nombre de grandeurs moyennes, géométriques ou statistiques telles :

*Ainsi suivant une terminologie consacrée par l'usage, on définit un milieu poreux saturé comme étant un milieu constitué par une matrice et un espace interstitiel saturé par le même fluide, et un milieu poreux non saturé celui dans l'espace interstitiel connecté et saturé par plusieurs fluides. Il est ainsi non saturé par rapport à une phase fluide de référence.

[†]C'est en cela qu'un milieu poreux se distingue par exemple d'une suspension de particules solides dans un fluide.

- ♦ La porosité : se définit comme le rapport du volume des vides au volume apparent du milieu poreux.

On distingue :

1. La porosité totale : la on tient compte des cavités occluses au sein du solide (près fermés).

$$\varepsilon_t = 1 - \frac{\text{masse volumique apparante de l'échantillon}}{\text{masse volumique du materiau constitutif}} \quad (1-1)$$

2. La porosité accessible : ou espace poreux connecté à travers lequel s'effectue l'écoulement des masses fluides.

$$\varepsilon = \frac{\text{volume des pores accessibles}}{\text{volume de l'échantillon}} \quad (1-2)$$

- ♦ La tortuosité : elle est définie par la relation :

$$\tau = \left(\frac{L_e}{L} \right)^2 \quad (1-3)$$

Rapport de la longueur moyenne réelle L_e des lignes de courant du fluide traversant l'échantillon à la longueur L de ce dernier.

Le sens physique de cette grandeur, dont on voit bien le sens dans le cas d'une modélisation de l'espace de pore par un réseau de capillaires, est cependant beaucoup moins nette dans le cas des milieux poreux réels.

- ♦ La surface spécifique :

C'est la surface limitant l'espace des pores par unité de volume du milieu poreux.

Cette grandeur, homogène à l'inverse d'une longueur joue un rôle capital dans les problèmes d'adsorption comme pour le cas de la porosité, il convient parfois de distinguer la surface spécifique accessible et la surface spécifique totale comprenant l'aire des parois des cavités occluses.

I. 3 DISTRIBUTION DES DIMENSIONS DE GRAINS ET DE PORES :

Des moyens spécifiques de mesures associées aux méthodes d'analyse statistique sont souvent mis en œuvre pour caractériser les distributions de tailles des particules (courbe granulométrique) ou des pores (courbe porosimétrique). Aussi bien pour distinguer que pour caractériser les différents milieux, on peut aussi définir : taille médiane, taille moyenne, variance, dissymétrie, aplatissement et jonction d'autocorrelation de la distribution.

Il peut comprendre également plusieurs phases :

- une phase solide constituée par la structure (squelette) du matériau ;
- une phase liquide constituée par l'eau (liquide) contenue dans les pores du matériau ;
- une phase gazeuse constituée par l'air humide (mélange d'air sec et de vapeur d'eau).

Un certain nombre d'autres grandeurs peut être définies telles :

- * la masse et le volume de la phase solide : $M_s \cdot V_s$;
- * la masse et le volume de la phase liquide : $M_e \cdot V_e$;
- * la masse et le volume de la phase gazeuse : $M_a \cdot V_a$.

La masse et le volume total du matériau seront alors :

$$M_t = M_a + M_e + M_s$$

et

$$V_t = V_a + V_e + V_s$$
(1-4)

Le matériau à l'état sec possède une masse volumique apparente définie par :

$$\rho_0 = \frac{M_s}{V_t}$$
(1-5)

La masse volumique de la phase solide est donnée par :

$$\rho_s = \frac{M_s}{V_s}$$
(1-6)

La masse volumique équivalente est exprimée par :

$$\rho^* = \frac{M_t}{V_t} = \frac{M_a + M_e + M_s}{V_a + V_e + V_s} \quad (1-7)$$

qui peut être encore exprimée :

$$\rho^* = \rho_0 \cdot \left(1 + \frac{M_e}{M_s} + \frac{M_a}{M_s} \right) \quad (1-8)$$

La masse de l'air humide pouvant être négligée devant la masse d'eau et du solide, la masse volumique équivalente se réduit alors à :

$$\rho^* = \rho_0 \left(1 + \frac{M_e}{M_s} \right) \quad (1-9)$$

Le rapport $\frac{M_e}{M_s}$ exprime la teneur en eau massique :

$$\omega_e = \frac{M_e}{M_s} \quad (1-10)$$

On peut aussi l'exprimer en termes de teneur en eau volumique :

$$\theta_e = \frac{V_e}{V_t} \quad (1-11)$$

La teneur en vapeur massique ω_v et volumique θ_v s'expriment à leur tour par :

$$\omega_v = \frac{M_v}{M_s} \quad ; \quad \theta_v = \frac{V_v}{V_t} \quad (1-12)$$

La teneur totale en humidité (phase liquide + phase gazeuse) du matériau s'exprime alors par :

$$\omega = \omega_v + \omega_e \quad (1-13)$$

Si l'on considère que la teneur en vapeur ω_v est négligeable devant ω_e alors, l'expression finale de la masse volumique équivalente du matériau se réduit à :

$$\rho^* = \rho \cdot (1 + \omega) \quad (1-14)$$

I.4 GRANDEURS CARACTERISTIQUES LOCALES :

I.4.1 Concept de volume élémentaire représentatif (VER) :

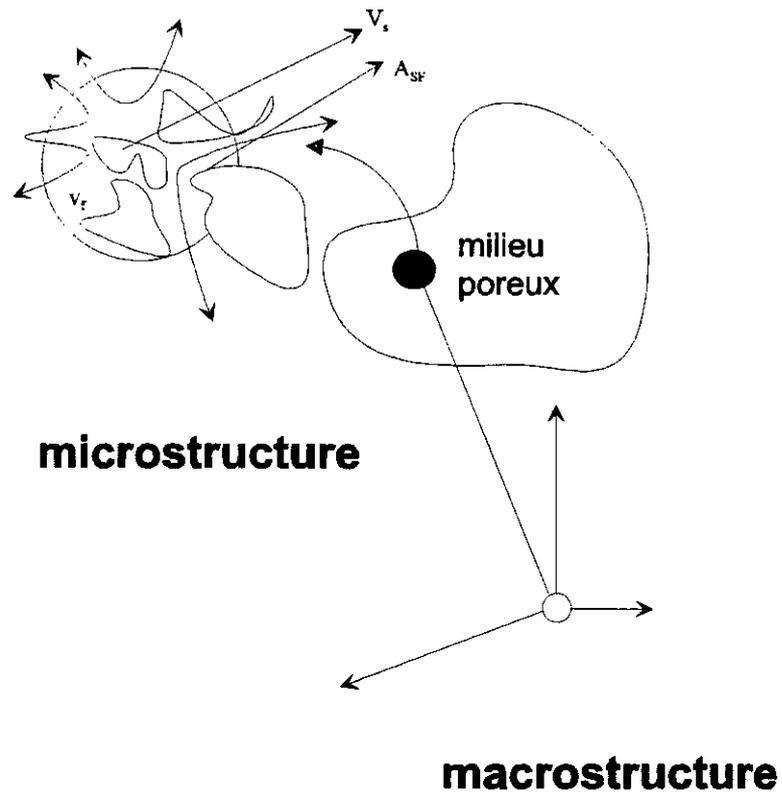
Lorsque les propriétés des structures, précédemment définies pour l'échantillon, tout entier, doivent être généralisées localement, c'est-à-dire en chaque point de celui-ci, la définition préalable d'un volume local de mesure s'impose (cf.- figure -I.1).

Sans nous attarder sur la difficulté qui existe dans le choix de la forme et des dimensions de ce volume, nous rappelons simplement qu'il doit être suffisamment grand pour être représentatif, c'est-à-dire pour permettre la caractérisation de toute propriétés, mais suffisamment petit pour que la grandeur ainsi définie conserve un caractère local [I -8], [I -1].

Ce volume appelé volume élémentaire représentatif (VER), est tel que, si d représente l'échelle de longueur de la microstructure et L l'échelle de la longueur du milieu poreux, sa propre échelle r_0 doit satisfaire la condition suivante:

$$d \ll r_0 \ll L$$

Lorsque les propriétés locales, définies sur le VER, sont indépendantes de la position de celui-ci au sein de l'échantillon poreux, le milieu est dit homogène à une échelle qualifiée de macrostructure.



A_{SF} aire interfaciale solide-fluide
 V_f volume occupé par le fluide
 V_s volume occupé par le solide

figure I.1 volume de prise de moyenne.

I. 5 MODELISATION DES PHENOMENES DE TRANSFERT :

L'établissement des modèles mathématiques de description des phénomènes de transfert en milieux poreux s'inspire directement des méthodes qui sont traditionnellement utilisées en mécanique des milieux continus, pour rechercher les expressions locales des lois de conservation.

Vue la complexité géométrique de l'espace des pores, cette approche ne peut être mise en pratique qu'après un changement d'échelle, dans l'étape essentielle conduit à définir un niveau de description qui permet d'établir une équivalence entre le milieu réel dispersé et un milieu continu fictif [I-3], [I-7], [I-9].

En générale, l'établissement des équations aux quelles obéissent les phénomènes à l'échelle macroscopique est formellement obtenu à partir des équations microscopiques de la thermodynamique des milieux continus aux quelles sont appliquées des procédures de changement d'échelle (homogénéisation, et les moyennes volumiques) [I-8], [I-6], [I-10], [I-5].

Une fois établi, le système d'équations macroscopiques évite d'avoir à spécifier la configuration individuelle de chaque phase, et ne nécessite pour sa résolution que la connaissance des conditions aux limites sur la frontière du milieu.

I. 6 MODES DE FIXATION D'UN CONSTITUANT FLUIDE AU SEIN DE LA MATRICE POREUSE :

Un fluide peut être fixé sur une matrice poreuse par deux mécanismes fondamentaux qui sont respectivement l'adsorption et la capillarité [I-2], [I-6].

I. 6 .1 L'ADSORPTION :

Dans ce mécanisme, les molécules de vapeur sont fixées, sous forme de film, par voie chimique ou physique sur la surface interne des pores.

Les films ainsi formés, se trouvent alors en équilibre avec la vapeur dans des conditions parfois très différentes des conditions thermodynamiques classiques, ce qui a pour effet de modifier la pression de vapeur d'équilibre et l'enthalpie de changement de phase .

L'étude théorique des courbes de sorption traduisant l'augmentation de la teneur en eau de l'échantillon en fonction de l'humidité relative a conduit à distinguer entre différentes étapes dans le processus de fixation de l'humidité.

I.6.1.1 L'adsorption monomoléculaire : Caractérisée par la fixation d'une couche de molécules d'eau sur la surface des pores.

I.6.1.2 L'adsorption plurimoléculaire : Caractérisée par la fixation de plusieurs couches de molécules d'eau sur la première couche adsorbée.

Lorsque les diamètres des pores sont suffisamment petits, la condensation capillaire commence sur les ménisques formés par la jonction des couches plurimoléculaires.

I.6.2 LA CAPILLARITE :

La contribution de la capillarité dans le phénomène de fixation d'humidité sur une structure poreuse s'effectue lorsque, cette dernière est mise en contact avec la phase liquide.

L'expérience ([I -4], [I -6]) a montré que lorsqu'un liquide mouille un solide, il a tendance à s'étaler le long de sa surface.

En milieux poreux ce mécanisme de fixation d'humidité conduit à la formation d'interfaces courbes entre le liquide et la vapeur dans les pores ainsi qu'à l'existence d'une différence de pression entre les phases et l'envahissement spontané du volume des pores par la phase mouillante liquide [I - 4].

D'après l'expression $P - P_e = P_c$ caractérise ce que l'on appelle la pression capillaire, différence de pression entre le fluide non mouillant et le fluide mouillant. Dans de nombreux cas, la pression capillaire est remplacée par une autre variable notée ψ appelée « **succion** », à laquelle elle se relie par :

$$P_c = -\rho_e \cdot g \cdot \psi. \quad (1-15)$$

g : accélération de la pesanteur,

ρ_e : masse volumique de la phase liquide.

On conçoit aisément que P_c sera fonction de l'état de saturation, et comme par ailleurs, σ est une fonction de la température, alors, P_c est une fonction de la quantité de liquide occupant l'espace des pores et de la température :

$$P_c = P_c (\theta_e, T). \quad (1-16)$$

On a par la loi de Laplace :

$$P_c = \sigma \cdot \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] \quad (1-17)$$

σ : tension interfaciale liquide - gaz,

r_1, r_2 : rayons de courbure principaux.

Ou bien en fonction de la mouillabilité θ :

$$P_c = 2\sigma \cdot \frac{\cos\theta}{r} \quad (1-18)$$

r : rayon du capillaire.

REMARQUES :

Lorsque la capillarité est le mécanisme dominant de fixation du fluide, le matériau est dit « **capillaro-poreux** ». Lorsque le mécanisme dominant est l'adsorption le matériau est dit « **hygroscopique** ». En termes d'échelle caractéristique cette distinction intervient pour un diamètre moyen des pores de l'ordre ou inférieur à 10^{-7} m [I -2] :

$d \leq 10^{-7}$ m En milieux poreux hygroscopique,

$d > 10^{-7}$ m. En milieux poreux capillaro - poreux.

DEUXIEME CHAPITRE



II. MODELISATION MATHEMATIQUE ET CONDITIONS AUX FRONTIERES.

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressé aux mécanismes du phénomène de transport en milieux poreux, ce faisant nous avons introduit quelques notions de la physique de transfert de chaleur et de masse (conduction, diffusion), ainsi que les équations mathématique régissant les différents mécanismes de transferts, finalement on c'est penché sur l'un des modèles des plus répondus dans la description des phénomènes de thermomigration en milieux poreux a savoir le modèle de **PHILIP** et **DE VRIES** , en fin de chapitre nous avons introduit le modèle mathématique qui sera l'objet de résolution en chapitre III, ainsi que les condition aux frontières. En résumé, ce chapitre s'étale sur les points suivants :

II.1 Introduction.

II.2 DESCRIPTION DU MODELE DE PHILIP ET DE VRIES.

II.3 HYPOTHESES.

II.4 EQUATION DE CONSERVATION DE LA MASSE.

II.5 EQUATION DE CONSERVATION DE L'ENERGIE.

II.6 MODELE DE PHILIP ET DE VRIES SIMPLIFIE.

II.7 MODELE DE PHILIP ET DE VRIES GENERE.

II.9 MODELE MATHÉMATIQUE APPLIQUÉ ET CONDITIONS AUX FRONTIÈRES.

I. 7 INTRODUCTION :

La modélisation mathématique des phénomènes de transfert de chaleur et de masse en milieux poreux a été établie depuis plusieurs décennies, et différents modèles théoriques ont été proposés depuis. Les premières applications de ces modèles ont été utilisées pour décrire les processus d'humidification des structures, et elles permettent de prévoir les phénomènes de condensation liés au mécanisme de diffusion de la vapeur au sein des matériaux.

Cette modélisation a connue plusieurs modifications dont celle proposée par **KRISHER [II -5]** qui a pris en considération l'influence des effets capillaires sur la phase fluide condensée.

La plus importante de ces modifications était celle due respectivement à **PHILIP et DE VRIES [II -4]** en 1957 et **LUIKOV [II -6]** en 1958 qui ont conduit la modélisation vers sa forme actuelle en élaborant un modèle qui prend en considération les deux modes de transfert (liquide + vapeur) et tenant en compte des effets de couplage entre transfert de masse et transfert de chaleur.

I. 8 DESCRIPTION DU MODELE DE PHILIP ET DE VRIES :

Fondé sur l'identification du milieu poreux à un milieu continu fictif équivalent pour lequel les équations de bilan macroscopiques sont obtenues à partir d'équations de bilan microscopiques, le modèle de **PHILIP et DE VRIES** a été justifié par **WHITAKER** en 1977 en appliquant le concept de prise en moyenne sur les équations du bilan de conservation à l'échelle du pore.

Dans le cadre des hypothèses qui ont été précisées par **WHITAKER [II -7]**, le modèle de **PHILIP et DE VRIES [II -1]** apparaît comme celui dont la description des phénomènes est le plus complet.

Il est pris comme référence pour les analyses critiques conduites sur les autres modèles existants.

I.9 HYPOTHESES :

La modélisation mathématique due à **PHILIP** et **DE VRIES** est établie dans le cadre des hypothèses suivantes :

- la matrice solide constituant le milieu poreux est homogène ,indéformable et isotrope;
- l'enthalpie des différentes phases est indépendante de la pression;
- la conductivité thermique des différentes phases est constante;
- les phénomènes de gel ou d'ébullition ne sont pas pris en compte;
- la densité de la phase liquide est constante;
- les différentes phases sont continues;
- la phase gazeuse obéit à la loi des gaz parfaits;
- la pression totale de la phase gazeuse est uniforme et constante;
- le travail des forces de compression et de dissipation visqueuse est négligeable;
- la phase liquide ne contient qu'un seul constituant;
- la diffusion de la vapeur est de type moléculaire;
- les différentes phases sont en équilibre thermodynamique local;
- les phénomènes d'hystérésis sont négligeables;
- il n'y a pas de réactions chimiques au sein du milieu poreux;
- le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.

Le système d'équations du phénomène de transfert de masse et de chaleur est régi par les lois de conservations de masse et d'énergie qui sont données respectivement par :

♦ Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial(\rho_i \theta_i)}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\vec{j} \right) + I_i \quad (\text{II - a})$$

avec:

$\sum_i I_i = 0$, I_i : est un terme source ou puits (création - dissipation) de la phase i .

♦ Equation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial \left(\rho_0 h_0 + \sum_i \rho_i \theta_i h_i \right)}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\vec{j}_q + \sum_i h_i \vec{j}_i \right) \quad (\text{II - b})$$

où l'indice i prend la valeur (e) pour la phase liquide et (v) pour la phase vapeur
 ρ_i, θ_i représentent respectivement la masse volumique et la teneur en eau volumique
 (volume de liquide ou de vapeur par unité de volume du milieu poreux).

h_i, \vec{j}_i sont l'enthalpie et la densité de flux de masse de la phase i correspondante.
 J_q est la densité de flux de chaleur conductif. h_0, ρ_0 représentent respectivement
 l'enthalpie massique du solide et sa masse volumique apparente qui est donnée par
 la relation $\rho_0 = \rho_s(1 - \varepsilon)$, ε étant la porosité qui est définie comme étant le rapport
 du volume des vides accessibles sur le volume de l'échantillon, ρ_s : masse
 volumique de la phase solide.

Les équations de transfert de masse et d'énergie, les équations d'état et les
 conditions d'équilibre entre phases nous permettent d'obtenir la fermeture du
 système d'équations précédent.

Considérons l'équation de transfert de la masse et appliquons la à chaque phase i
 ($i = e$ ou v).

I.10 EQUATION DE CONSERVATION DE LA MASSE :**I.10.1 Equation de transfert de masse en phase liquide :**

Le transfert de masse en phase liquide est donné par la loi de **DARCY** pour un écoulement de liquide dans un milieu poreux. Elle est donnée par l'expression de la densité de flux de masse :

$$\bar{j}_e = - \frac{k_e}{\nu_e} \nabla \hat{p}_e \quad (2-1)$$

Avec :

k_e : la perméabilité du milieu à la phase liquide;

ν_e : la viscosité cinématique;

\hat{p}_e : c'est le potentiel de pression de l'eau qui résulte de la somme des potentiels matriciels et gravitationnels, soit :

$$\hat{p}_e = -\rho_e g z + \rho_e g \psi$$

Si le potentiel de pression est exprimé en mètre alors, on l'appelle potentiel total noté par ψ_t et donné par la relation :

$$\psi_t = \psi_m + \psi_g$$

ψ_m : potentiel matriciel;

ψ_g : potentiel gravitationnel.

Dans ce cas \bar{j}_e s'écrit :

$$\bar{j}_e = - \frac{\rho_e K_e}{\nu_e} \nabla \psi_t \quad (2-2)$$

Le potentiel matriciel est composé du potentiel d'adsorption (dû aux forces d'adhésion liquide - solide), du potentiel capillaire (dû à la courbure du ménisque), et du potentiel osmotique qui est négligé car les substances diluées dans l'eau ne sont pas prises en compte.

De ce fait, il est appelé « suction » noté ψ , et donné par :

$$\psi = -\frac{P_c}{\rho_e g} = \frac{\psi_m}{g}$$

où :

P_c : est la pression capillaire qui dépend de θ et T .

Le potentiel gravitationnel est donné par :

$$\psi_g = -gz$$

Compte tenu de ces relations, on peut écrire \vec{j}_e sous la forme :

$$\vec{j}_e = -\rho_e K \nabla(\psi - Z) \quad (2-3)$$

Avec :

$$\psi = \psi(\theta, T), \quad K = \frac{k_e g}{v_e}$$

Soit encore :

$$\vec{j}_e = -\rho_e K (\nabla\psi - \vec{k}) = -\rho_e K \nabla\psi + \rho_e K \vec{k} \quad (2-4)$$

Etant donné que :

$$\psi = \psi(\theta_e, T)$$

alors :

$$\nabla\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta_e} \right)_T \nabla\theta_e + \left(\frac{\partial\psi}{\partial T} \right)_{\theta_e} \nabla T$$

En injectant cette dernière relation dans l'équation (2-4), on obtient :

$$\vec{j}_e = -\rho_e K \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta_e} \right)_T \nabla\theta_e + \left(\frac{\partial\psi}{\partial T} \right)_{\theta_e} \nabla T - \vec{k} \right] \quad (2-5)$$

qui peut se mettre encore sous la forme :

$$\vec{j}_e = -\rho_e (D_{\theta_e} \nabla \theta_e + D_{T_e} \nabla T) + \rho_e K \vec{k} \quad (2-6)$$

Avec :

$$D_{\theta_e} = K \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta_e} \right)_T ; \quad D_{T_e} = K \left(\frac{\partial \psi}{\partial T} \right)_{\theta_e}$$

Finalement l'équation de transfert de masse (II - a) en phase liquide s'écrit :

$$\frac{\partial (\rho_e \theta_e)}{\partial t} = \left[\rho_e (D_{\theta_e} \nabla \theta_e + D_{T_e} \nabla T - K \vec{k}) \right] + I_e \quad (2-7)$$

I. 10 .2 Equation de conservation de la masse en phase vapeur :

La pression totale de la phase gazeuse étant supposée uniforme et constante, le flux de masse est de type diffusif (transfert de masse de vapeur par diffusion moléculaire).

Ce flux de masse est donné par loi de FICK, et exprimé par la relation suivante :

$$\vec{j}_v = -FD \frac{P}{P - P_v} \frac{M_v}{RT} \nabla P_v \quad (2-8)$$

où :

F : une fonction de pondération du coefficient D, elle traduit l'influence du squelette poreux et la présence de la phase liquide,

D : le coefficient de diffusion de la vapeur dans l'air sec,

P : la pression totale du gaz,

P_v : la pression de vapeur,

R : la constante des gaz parfaits.

Afin d'exprimer P_v en fonction de θ_e et de T , considérons la condition d'équilibre thermodynamique local entre les deux phases liquide et vapeur.

Cette condition est exprimée par la loi de **KELVIN** qui nous donne l'expression de la pression de vapeur à l'équilibre :

$$P_v = P_{vs} e^{\frac{M_v g \Psi}{RT}}$$

avec :

$$P_v = P_v(\theta_e, T)$$

Avec cette dernière relation, ∇P_v peut s'écrire sous la forme :

$$\nabla P_v = \left(\frac{\partial P_v}{\partial \theta_e} \right)_T \nabla \theta_e + \left(\frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_e} \nabla T$$

et par suite, \vec{j}_v devient :

$$\vec{j}_v = -\rho_e (D_{\theta_v} \nabla \theta_e + D_{T_v} \nabla T) \tag{2-9}$$

Avec :

$$D_{\theta_v} = FD \frac{P}{P - P_v} \frac{M_v}{RT} \frac{1}{\rho_e} \left(\frac{\partial P_v}{\partial \theta_e} \right)_T$$

$$D_{T_v} = FD \frac{P}{P - P_v} \frac{M_v}{RT} \frac{1}{\rho_e} \left(\frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_e}$$

Or :

$$P_v = P_{vs}(T) \cdot \phi(\theta_e, T) \quad \text{et} \quad \phi = e^{\frac{M_v g \Psi}{RT}} ;$$

ϕ : est l'humidité relative,

D'où :

$$D_{\theta_v} = FD \frac{P}{P - P_v} \left(\frac{M_v}{RT} \right)^2 \frac{g P_{vs}}{\rho_e} \phi \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta_e} \right)_T$$

$$D_{T_v} = FD \frac{P}{P - P_v} \frac{M_v}{RT} \frac{1}{\rho_e} \phi \frac{dP_{vs}}{dT} + P_{vs} \frac{M_v g}{R} \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial \psi}{\partial T} \right)_{\theta_e} - \frac{\psi}{T^2} \right]$$

Soit encore en utilisant la relation de CLAPEYRON donnée par :

$$\frac{1}{P_{vs}} \frac{dP_{vs}}{dT} = \frac{M_v L}{RT^2}$$

$$D_{T_v} = FD \frac{P}{P - P_v} \left(\frac{M_v}{RT} \right)^2 \frac{P_{vs}}{\rho_e} \phi \frac{L}{T} + FD \frac{P}{P - P_v} \left(\frac{M_v}{RT} \right)^2 \frac{g P_{vs}}{\rho_e} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial T} \right)_{\theta_e} - \frac{\psi}{T} \right] \phi$$

Dans la gamme d'humidité rencontrée en pratique, le premier terme de cette dernière relation est supérieur au second. De ce fait on peut écrire :

$$D_{T_v} = FD \frac{P}{P - P_v} \left(\frac{M_v}{RT} \right)^2 \frac{P_{vs}}{\rho_e} \phi \frac{L}{T} \quad (\text{second terme négligé})$$

En injectant la relation (2-9) dans l'équation exprimant la conservation de la masse (II-a) prise pour $i=v$ (phase vapeur) donnée par :

$$\frac{\partial(\rho_v \theta_v)}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}_v + I_v \quad (2-10)$$

on obtient :

$$\frac{\partial(\rho_v \theta_v)}{\partial t} = \nabla \left[\rho_e (D_{\theta_v} \nabla \theta_v + D_{T_v} \nabla T) \right] + I_v \quad (2-11)$$

Par ailleurs ,celle de conservation de la masse en phase liquide est donnée par l'équation (2-7) à laquelle on ajoute la condition $I_c + I_v = 0$ pour aboutir à :

$$\frac{\partial(\rho_e \theta_e)}{\partial t} = \nabla \left[\rho_e (D_{\theta_e} \nabla \theta_e + D_{T_e} \nabla T) \right] - \rho_e \frac{\partial K}{\partial Z} - I_v \quad (2-12)$$

Comme la densité de la phase liquide est constante compte tenu des hypothèses citées précédemment, alors (2-12) devient :

$$\frac{\partial \theta_e}{\partial t} = \nabla \left(D_{\theta_e} \nabla \theta_e + D_{T_e} \nabla T \right) - \frac{\partial K}{\partial Z} - \frac{I_v}{\rho_e} \quad (2-13)$$

I.10.3 Equation de conservation de la masse globale (liquide + vapeur) :

Elle est obtenue par addition des deux équations de conservation de la masse correspondantes aux phases liquide et vapeur, cela ne sera rendu possible qu'on exprimant θ_v en équivalent liquide condensé θ_v^* exprimé par :

$$\rho_v \theta_v = \rho_e \theta_v^* = \theta_e^*$$

ce qui donne :

$$\theta_v^* = \frac{\rho_v}{\rho_e} \theta_v$$

où encore :

$$\theta_v^* = \frac{\rho_v}{\rho_e} (\varepsilon - \theta_e)$$

En dérivant par rapport au temps l'expression ci-dessus, on obtient :

$$\frac{\partial \theta_v^*}{\partial t} = - \frac{\rho_v}{\rho_e} \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \frac{(\varepsilon - \theta_e)}{\rho_e} \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

En se basant sur l'hypothèse, que la phase vapeur obéit à la loi des gaz parfaits :

$$P \frac{M_v}{\rho_v} = RT$$

D'où :

$$\rho_v = P_v \frac{M_v}{RT}$$

La dérivation de ρ_v par rapport au temps nous donne :

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \frac{M_v}{R} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P_v}{T} \right)$$

En tenant compte de ces relations et en explicitant la variation de masse due à l'évolution des variables thermodynamiques P et T, l'expression de $\frac{\partial \theta^*}{\partial t}$ devient :

$$\frac{\partial \theta_v^*}{\partial t} = -\frac{\rho_v}{\rho_e} \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \frac{\varepsilon - \theta_e}{\rho_e} \frac{M_v}{R} \frac{1}{T} \left(\frac{\partial P_v}{\partial \theta_e} \right)_T \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_e} \frac{\partial T}{\partial t} \frac{P_v}{T^2} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Avec :

$$D_{\theta_v} = F \cdot D \frac{P}{P - P_v} \frac{M_v}{RT} \frac{1}{\rho_e} \left(\frac{\partial P_v}{\partial \theta_e} \right)_T$$

et

$$D_{T_v} = F \cdot D \frac{P}{P - P_v} \frac{M_v}{RT} \frac{1}{\rho_e} \left(\frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_e}$$

En considérant les deux relations ci-dessus, nous pourrions exprimer les dérivées partielles de la pression de vapeur à l'équilibre :

$$\left(\frac{\partial P_v}{\partial \theta_e} \right)_T = \frac{D_{\theta_v}}{F \cdot D \cdot \frac{P}{P - P_v} \cdot \frac{M_v}{RT}}$$

$$\left(\frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_e} = \frac{D_{T_v}}{F \cdot D \cdot \frac{P}{P - P_v} \cdot \frac{M_v}{RT}}$$

En remplaçant ces dernières relations dans l'expression de $\frac{\partial \theta_v^*}{\partial t}$, nous aboutissons à la forme finale de l'équation de conservation de masse en phase vapeur qui est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{\partial \theta_v^*}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \chi \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (D_{\theta_v} \nabla \theta_e + D_{T_v} \nabla T) + \frac{I_v}{\rho_e} \quad (2-14)$$

Avec :

$$\alpha = \frac{(\varepsilon - \theta_e) \cdot D_{\theta_v}}{F \cdot D \cdot \frac{P}{P - P_v}} - \frac{\rho_v}{\rho_e}$$

$$\chi = \frac{(\varepsilon - \theta_e) \cdot D_{T_v}}{F \cdot D \cdot \frac{P}{P - P_v}} - \frac{(\varepsilon - \theta_e) \rho_v}{\rho_e T}$$

En additionnant les deux équations (2-13) et (2-14), et l'équation de conservation de masse globale (liquide + vapeur) s'écrit :

$$(1 + \alpha) \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \chi \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (D_{\theta} \nabla \theta_e + D_T \nabla T) - \frac{\partial K}{\partial z} \quad (2-15)$$

Où :

$$D_{\theta} = D_{\theta_e} + D_{\theta_v}$$

$$D_T = D_{T_e} + D_{T_v}$$

I. 11 EQUATION DE CONSERVATION DE L'ENERGIE :

Rappelons l'expression de l'équation de l'énergie (II -b) qui s'écrit :

$$\frac{\partial \left(\rho_0 h_0 + \sum_i \rho_i h_i \theta_i \right)}{\partial t} = -\nabla \left(\bar{j}_q + \sum_i h_i \cdot \bar{j}_i \right)$$

où :

j_q : est la densité de flux de chaleur par conduction,

Cette densité de flux j_q est donnée par la loi de **Fourier** par la relation :

$$\bar{j}_q = -\lambda^* \vec{\nabla} T$$

avec :

$$\lambda^* = \lambda^*(\theta_e, T),$$

la conductivité thermique du milieu poreux qui dépend de θ_e et de T

En introduisant les indices correspondant à chaque phase, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 h_0 + \rho_e h_e \theta_e + \rho_v h_v \theta_v) = -\nabla \left(\bar{j}_q + h_e \bar{j}_e + h_v \bar{j}_v \right) \quad (2-16)$$

En appliquant l'opérateurs de dérivation pour chaque terme du premier membre et l'opérateur gradient pour les termes du second membre de l'équation précédente, nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 h_0) + \rho_e \theta_e \frac{\partial h_e}{\partial t} + h_e \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e \theta_e) + \rho_e \theta_v^* \frac{\partial h_v}{\partial t} + h_v \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e \theta_v^*) = \\ -\nabla \bar{j}_q - h_e \nabla \bar{j}_e - \bar{j}_e \nabla h_e - h_v \nabla \bar{j}_v - \bar{j}_v \nabla h_v \end{aligned} \quad (2-17)$$

L'utilisation de la loi de conservation de masse appliquée à chaque phase dans le développement de l'équation ci-dessus conduit à l'expression :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 h_0) + \rho_e \theta_e \frac{\partial h_e}{\partial t} + \rho_v \theta_v^* \frac{\partial h_v}{\partial t} = -\nabla \cdot \bar{j}_q - \bar{j}_e \nabla h_e - \bar{j}_v \nabla h_v - L I_v$$

Avec :

$$\begin{aligned} h_0 &= C_0 T, \\ h_e &= C_e T, \\ h_v &= C_v T, \\ L &= h_v - h_e, \end{aligned}$$

L : est la chaleur latente de vaporisation (chaleur due au changement de phase).

En posant :

$$(\rho C)^* = \rho_0 C_0 + \rho_e C_e \theta_e + \rho_v C_v \theta_v^*$$

$(\rho C)^*$: correspond à la chaleur volumique équivalente du milieu poreux.

En remplaçant \bar{j}_q, \bar{j}_e et \bar{j}_v par leurs expressions dans le dernier terme de l'équation de conservation d'énergie, ou encore :

$$\begin{aligned} (\rho C)^* \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla \cdot (\lambda^* \cdot \nabla T) + \rho_e C_e \nabla \cdot (D_{\theta_e} \nabla \theta_e + D_{T_e} \nabla T - K) \nabla T \\ &\quad + \rho_e C_v \nabla \cdot (D_{\theta_v} \nabla \theta_e + D_{T_v} \nabla T) \nabla T - L I_v \end{aligned} \quad (2-18)$$

Le terme source I_v est explicité par l'équation (2-14), soit :

$$I_v = \rho_e \alpha \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \rho_e \chi \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - \rho_e \nabla \cdot (D_{\theta_v} \nabla \theta_e + D_{T_v} \nabla T)$$

En injectant cette valeur de I_v dans l'expression précédente, nous aboutirons à la forme finale de l'équation de conservation de l'énergie en milieu poreux qui s'écrit :

$$\left[(\rho C)^* + \rho_e L \chi \right] \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_e L \alpha \frac{\partial \theta_e}{\partial t} = \nabla (\lambda^* \cdot \nabla T) + \rho_e L \nabla (D_{\theta_e} \nabla \theta_e + D_{T_v} \nabla T) \quad (2-19)$$

$$\rho_e C_e (D_{\theta_e} \nabla \theta_e + D_{T_e} \nabla T - K) \nabla T + \rho_e C_v (D_{\theta_v} \nabla \theta_e + D_{T_v} \nabla T) \nabla T$$

Système d'équations résultant :

Finalement, le système d'équations qui régit le modèle de **PHILIP** et **DE VRIES** est formé des deux équations (2-15) et (2-19), et donné par :

$$\frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \underbrace{\alpha \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \chi \cdot \frac{\partial T}{\partial t}}_{(a)} = \nabla \left(\underbrace{D_{\theta} \nabla \theta_e}_{(b)} + \underbrace{D_T \nabla T}_{(c)} \right) - \frac{\partial K}{\partial z}$$

$$(\rho C)^* \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla (\lambda^* \cdot \nabla T) + \rho_e L \nabla \left(\underbrace{D_{\theta_v} \nabla \theta_e + D_{T_v} \nabla T - \alpha \frac{\partial \theta_e}{\partial t} - \chi \frac{\partial T}{\partial t}}_{(d)} \right)$$

$$+ \underbrace{\rho_e C_e (D_{\theta_e} \nabla \theta_e + D_{T_e} \nabla T - K) \nabla T}_{(e)} + \underbrace{\rho_e C_v (D_{\theta_v} \nabla \theta_e + D_{T_v} \nabla T) \nabla T}_{(f)}$$

où :

(a) : représente le taux d'accumulation de masse exprimé en équivalent liquide condensé,

(b) et (c) : respectivement, densité de flux de masse (liquide + vapeur) due au gradient de teneur en eau et de la température,

(d) : une énergie (crée ou absorbée) due au processus de changement de phase,

(e) et (f) : des termes d'énergie convective propre aux phases liquide et vapeur respectivement.

Si le transfert des phases est contrôlé par la diffusion moléculaire et la capillarité, alors les termes d'énergie convective (e) et (f) sont négligeables [II -2].

Dans ce cas, (**RECAN [II -7]**) les équations précédentes se résument :

$$(A) \begin{cases} (1 + \alpha) \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \chi \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(D_\theta \nabla \theta_e + D_T \nabla T) - \frac{\partial K}{\partial z} \\ \left[(\rho C)^* + \rho_e \cdot L \cdot \chi \right] \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_e \cdot L \alpha \frac{\partial \theta_e}{\partial t} = \nabla(\lambda^* \cdot \nabla T) + \rho_e L \nabla(D_{\theta_v} \nabla \theta_e + D_{T_v} \nabla T) \end{cases}$$

Ce système d'équations est celui dont on se propose de tester la validité en tant que modèle de description des processus de transfert en milieu poreux, soit d'un processus d'évaporation ou de condensation.

I.12 MODELE DE PHILIP ET DE VRIES SIMPLIFIE :

Ce modèle est obtenu à partir du modèle complet précédent à qui nous ajoutons les deux hypothèses suivantes :

- ◆ Le transfert d'énergie dû au transfert de masse est négligeable (les termes convectifs (e) et (f) négligeables).
- ◆ La variation locale de la teneur en vapeur d'eau condensée est négligeable (paramètres faisant intervenir α et χ négligeables), autrement dit la masse liquide est prépondérante par rapport à celle de la vapeur .

Le système d'équations qui régit ce modèle est donné par :

$$\frac{\partial \theta_e}{\partial t} = \nabla(D_\theta \nabla \theta_e + D_T \nabla T) - \frac{\partial K}{\partial z}$$

$$(\rho C)^* \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda^* \cdot \nabla T) + \rho_e L \nabla(D_{\theta_v} \nabla \theta_e + D_{T_v} \nabla T)$$

Les coefficients K , D_θ , D_T , D_{θ_v} , D_{T_v} , $(\rho C)^*$ et λ^* étant des fonctions de la teneur en humidité θ_e et de la température T .

Ce système d'équations est fréquemment utilisé pour la description des phénomènes de séchage, mais, comme il a été souligné par **BORIES [II -2]**, la simplification précédente peut être pénalisante et même conduire dans certains cas à un système qui ne décrit pas les phénomènes.

Pour palier aux problèmes posés par les variations éventuelles de volume du matériau en cours d'humidification, les équations de conservation de masse et d'énergie sont souvent exprimées en fonction de la teneur en eau pondérale notée ω (au lieu de la teneur en eau volumique θ_e).

La relation qui nous permet de relier ces deux variables entre elles est donnée par l'expression :

$$\omega = \frac{\rho_e}{\rho_0} \theta_e$$

où :

ρ_0 : représente la masse volumique apparente du matériau qui est supposée invariable .

Dans ce cas, le système d'équations utilisé s'écrit en fonction de ω et de T sous la forme :

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla (\mathbf{a}_m \nabla \omega + \mathbf{a}_d \nabla T) - \frac{\rho_e}{\rho_0} \frac{\partial K}{\partial z} \\ (\rho C)^* \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla [L \rho_0 \mathbf{a}_m \nabla \omega + (\lambda^* + L \rho_0 \mathbf{a}_d) \nabla T] \end{array} \right.$$

Avec :

$$\mathbf{a}_m = D\theta; \quad \mathbf{a}_d = \frac{\rho_e}{\rho_0} D_T.$$

I.13 MODELE DE PHILIP ET DE VRIES GENERE :

Des travaux [?] ont montrés que la chaleur due au changement de phase est négligeable devant celle due à la conduction. Si l'on considère également que la conductivité thermique apparente λ^* est constante, le précédent se réduit alors à :

$$(C) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla(a_m \nabla \omega + a_d \nabla T) - \frac{\rho_e \partial K}{\rho_0 \partial z} \\ \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^* \Delta T \end{array} \right.$$

$$\alpha^* = \frac{\lambda^*}{(\rho C)^*}$$

I.13.1 Système d'équation découplé à deux dimensions d'espace :

A deux dimensions d'espace (x,z), l'opérateur de dérivation $\bar{\nabla}$ s'écrit :

$$\bar{\nabla} = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Si l'on admet que l'écoulement se fait dans le plan (x , z), le système d'équation s'écrit sous la forme :

$$(C') \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_d \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_m \frac{\partial \omega}{\partial z} + a_d \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{\rho_e \partial K}{\rho_0 \partial z} \\ \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^* \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \end{array} \right.$$

Le système d'équations ci-dessus représente le modèle mathématique utilisé dans notre étude.

I. 14 MODELE PHYSIQUE ET MATHEMATIQUE :

I. 14 .1 Modèle physique :

Nous avons opté pour des systèmes bidirectionnels et ce, afin de faire apparaître l'effet gravitationnel sur les distributions des champs thermique et hydrique .

Par ailleurs , notre analyse portera sur deux systèmes physique, l'un fermé (voire figure -II-1-) et l'autre semi-ouvert (voire figure -II-2-) .

Nous allons à présent d'écrire chacun des deux systèmes choisis .

I.14.1.1 Système fermé : (cf - figure -II-1-)

Ce système est caractérisé par une surface latérale imperméable et adiabatique ($J_m=0$, $J_q=0$) de sorte qu'elle ne permet aucun transfert de masse ou de chaleur , une extrémité fermée en $x=0$ maintenue a une température constante ($J_m=0$, $T=T_1$) et une autre extrémité fermée en $x = L$ maintenue également à une température imposée ($J_m=0$, $T=T_2$).

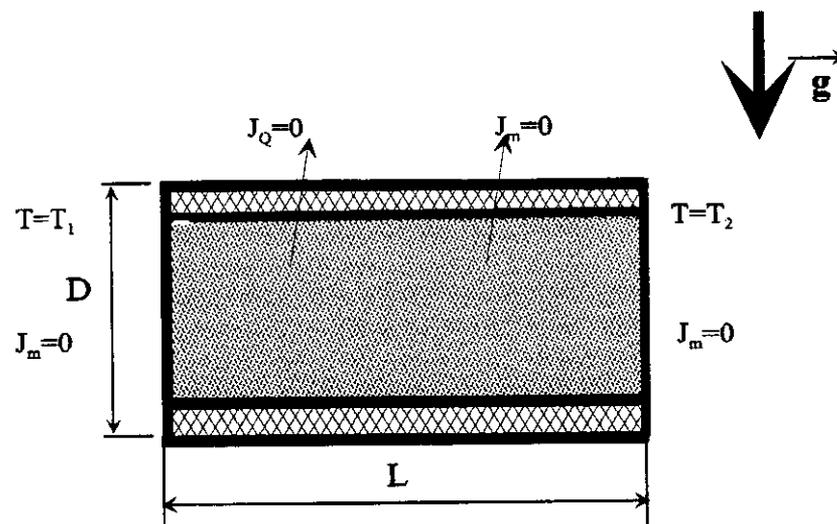


Figure -II-1- système fermé

I.14.1.2 Système semi-ouvert : (cf. -II- 2 -)

Ce système diffère du système fermé par le fait que son extrémité ouverte en $x=0$ qui est en contact avec un air régulé en humidité et en température ($J_m \neq 0, T=T_1$), l'autre extrémité étant maintenue à une température constante ($J_m=0, T=T_2$)

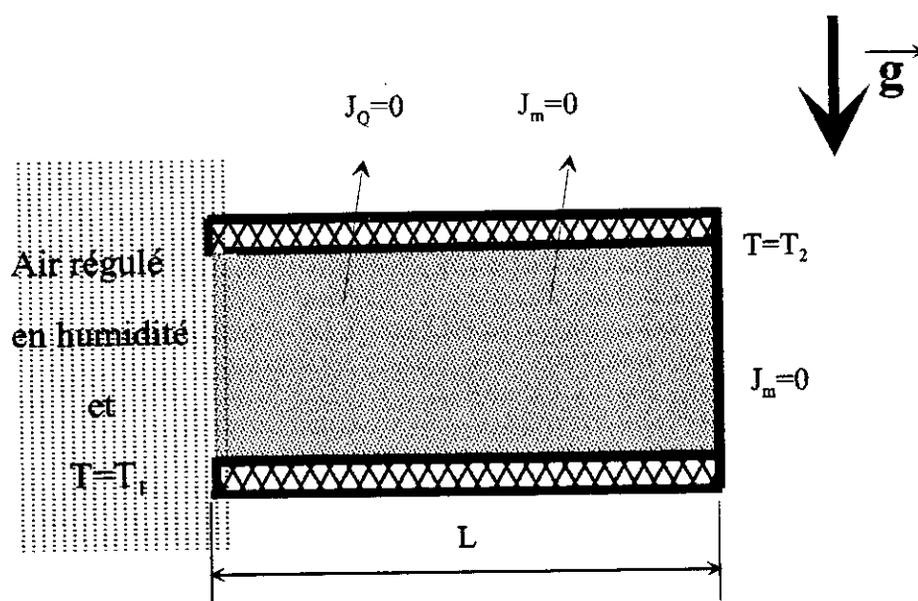


Figure -II-2- Système semi-ouvert

I. 15 MODELE MATHEMATIQUE APPLIQUE ET CONDITIONS AUX FRONTIERES :

I. 15 .1 Modèle mathématique appliqué :

Le système d'équations découplées (C') est un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires qui prend en compte l'influence de la gravité sur la répartition des champs thermique et hydrique.

Il peut être encore explicité en fonction des coefficients de diffusion a_i et de thermomigration δ_i , (déterminés expérimentalement [II-3]) sous la forme :

Il peut être encore explicité en fonction des coefficients de diffusion a_i et de thermomigration δ_i , (déterminés expérimentalement [II-3]) sous la forme :

$$(C'') \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \omega}{\partial x} + a\delta \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a \frac{\partial \omega}{\partial z} + a\delta \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{\rho_e}{\rho_0} \frac{\partial K}{\partial z} \\ \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha * \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \end{array} \right.$$

I.15.2 Conditions aux limites :

La résolution numérique du système d'équations aux dérivées partielles non linéaires et découplées (C'') nécessite l'utilisation de l'outil numérique d'où la nécessité de préciser les conditions initiales et aux limites .

Nous admettons que l'écoulement est plan et qu'il est soumis à l'action de la résultante des forces orthogonales qui correspondent à l'effet des gradients thermiques au voisinage des faces où la température est imposée ainsi qu'à la force due au champ de gravitation suivant (oz).

Les conditions initiales et aux limites correspondent à celles utilisées de l'expérience à savoir :

- ◇ la température régnant initialement dans l'échantillon qui est uniforme et égale à celle de l'une des extrémités pour le système fermé , et égale à celle de l'air circulant dans la veine dans le système semi-ouvert . Les surfaces latérales des deux systèmes physiques considérés sont isolées dans le but de ne permettre aucun transfert de masse ou de chaleur .

◇ L'humidité est répartie uniformément dans l'échantillon à l'instant initial ($\omega = \omega_0$).

La densité de flux de chaleur consiste en celle de flux conductif seulement (celle due au changement de phase négligée par hypothèse), elle est donnée par la loi de FOURIER exprimée par :

$$\vec{j}_q = -\lambda^* \vec{\nabla} T$$

La densité de flux de masse est la somme des densités de flux de masse en phases liquide et vapeur. Elle est exprimée par la relation :

$$W = -\rho_0 \left[\left(a \frac{\partial \omega}{\partial x} + a\delta \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \left(a \frac{\partial \omega}{\partial z} + a\delta \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right]$$

a) **Conditions aux limites correspondantes au système fermé** : (cf.figure-1-)

a-1) **Conditions sur la frontière x** :

Pour : $t > 0,$

$$x=0 \quad \left| \begin{array}{l} T = T_1 \\ \\ j_m = -a \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{x=0} - a\delta \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \end{array} \right.$$

$$x=L \quad \left| \begin{array}{l} T = T_2 \\ \\ j_m = -a \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{x=L} - a\delta \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \end{array} \right.$$

A-2) Conditions sur la frontière z :

pour : $t > 0,$

$$z = 0 \left| \begin{array}{l} j_q = \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \\ j_m = -a \frac{\partial \omega}{\partial z} \Big|_{z=0} - a\delta \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \end{array} \right.$$

$$z = D \left| \begin{array}{l} j_q = \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=D} = 0 \\ j_m = -a \frac{\partial \omega}{\partial z} \Big|_{z=D} - a\delta \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=D} = 0 \end{array} \right.$$

b) Conditions aux limites correspondantes au système semi-ouvert :

b-1) Conditions sur la frontière x :

Pour : $t > 0,$

$$x = 0 \left| \begin{array}{l} T = T_0 = T_a \\ j_m = -a \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{x=0} - a\delta \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \dot{m}(t) \end{array} \right.$$

$$x = L \left| \begin{array}{l} T = T_3 \\ j_m = -a \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{x=L} - a\delta \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \end{array} \right.$$

b-2) Conditions sur la frontière z :

Pour : $t > 0,$

$$z = 0 \quad \left| \begin{array}{l} j_q = \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \\ j_m = -a \frac{\partial \omega}{\partial z} \Big|_{z=0} - a\delta \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \end{array} \right.$$

$$z = D \quad \left| \begin{array}{l} j_q = \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=D} = 0 \\ j_m = -a \frac{\partial \omega}{\partial z} \Big|_{z=D} - a\delta \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=D} = 0 \end{array} \right.$$

avec :

$$\dot{m}(t) = \frac{dm(t)}{dt} = \frac{1}{\rho_0 S} \cdot \frac{dM(t)}{dt}$$

$M(t)$: loi exprimant la masse d'eau condensée ou évaporé en fonction du temps ,

ρ_0 : la masse volumique de l'échantillon de milieu poreux ,

S : section de passage de la vapeur d'eau .

TROISIEME CHAPITRE**III. Résolution Numérique des équations aux dérivées partielles.**

III.1 Introduction.

III.2 FORMULATION INTEGRALE

III.3 METHODE DES RESIDUS PONDERES

III.4 CHOIX DE LA FONCTION DE PONDERATION

III.5 TRANSFORMATION DE LA FORME INTEGRALE

III.6 DISCRETISATION EN ELEMENTS FINIS

III.7 CRITERES DE CONVERGENCE ET ERREURS D'APPROXIMATION

III.8 APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS AUX PROBLEMES DE CHAMP EN REGIME TRANSITOIRE

III.9 METHODE DES ELEMENTS FINIS

III.10 DISCRETISATION TEMPORELLE

III.11 RESOLUTION NUMERIQUE DE SYSTEME D'EQUATIONS NON LINEAIRES

III.12 RESOLUTION NUMERIQUE

I.16 INTRODUCTION :• **position du problème :**

Notre problème consiste à trouver une fonction inconnue $U(x, z)$ satisfaisant à un certain ensemble d'équations différentielles :

$$A(U) = \begin{Bmatrix} A_1(U) \\ A_2(U) \\ A_3(U) \\ \dots\dots\dots \\ A_n(U) \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

A l'intérieur d'un domaine (volumique, surfacique, ...) Ω et à un certains nombres de conditions aux frontières associées.

$$B(U) = \begin{Bmatrix} B_1(U) \\ B_2(U) \\ B_3(U) \\ \dots\dots\dots \\ B_n(U) \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

le long des frontières Γ du domaine (CF. figure III-1).

L'approche par éléments finis, consiste à chercher la solution sous la forme :

$$U = \hat{U} = \sum_1^r N_i a_i = N \cdot a \quad (3.3)$$

N_i :sont les fonctions de formes définies à l'aide de variables indépendantes.

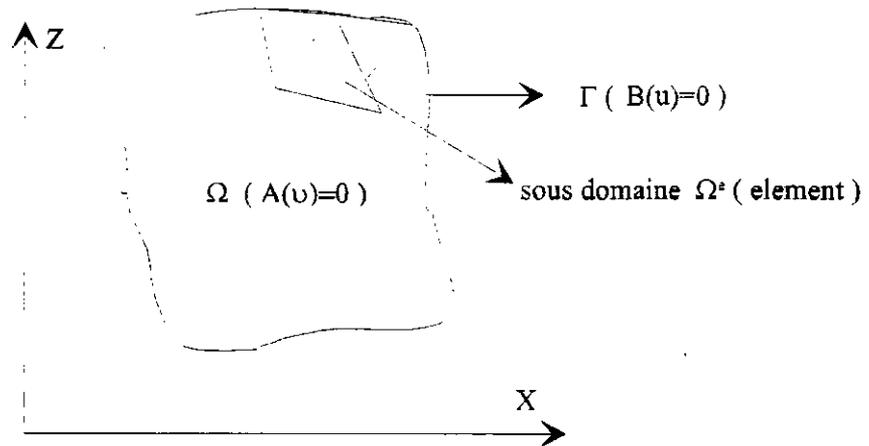


Figure (III -1) Domaine Ω et frontière Γ du problème .

Dans la suite de l'exposé on mettra l'accent sur la méthode sus citée en suivant deux dimensions d'espace.

I. 17 FORMULATION INTEGRALE :

La méthode des éléments finis, discrétise une formulation intégrale pour conduire à un système d'équations *Algébriques* qui fournit une solution approchée du problème [III -3].

Nous allons tenter d'écrire les équations qui définissent les paramètres U_i sous une forme intégrale :

$$\int_{\Omega} G_i(u) d\Omega + \int_{\Gamma} g_i(u) d\Gamma = 0, \quad (i = 1, n) \quad (3.4)$$

où : G_i et g_i désignent des fonctions ou des opérateurs connus.

Les formes intégrales de ce genre permettront d'obtenir l'approximation élément par élément et d'effectuer ainsi l'assemblage pour obtenir la solution globale.

Notons au passage que deux procédures bien distinctes permettent de conduire à de telles formes intégrales de l'approximation :

- la première consiste en la détermination de *fonctionnelles variationnelles* dont on cherche à exprimer la *stationnarité* ;
- la seconde est *la méthode des résidus pondérés*, que nous tacherons d'étudier en détail dans la suite de notre exposé.

I. 18 METHODE DES RESIDUS PONDERES :

La méthode des éléments finis s'applique au delà de la mécanique des structures, on conçoit donc la nécessité d'une approche plus générale de la formulation des équations élémentaires.

Supposons que l'on a choisi à priori une fonction d'approximation, cette fonction ne satisfera généralement pas à l'équation différentielle du système, et la substitution dans cette équation entraînera l'apparition d'un **résidu*** (R).

Afin d'aboutir à de meilleurs solutions on s'efforcera donc de minimiser l'intégrale des résidus portant sur le domaine concerné [III -8].

On peut augmenter la puissance de cette méthode en associant une fonction de **pondération** à la **fonction résidus**, et en minimisant leur produit, il sera même possible de construire cette nouvelle fonction de façon à obtenir un minimum nul.

$$\int R \cdot \psi \cdot dr = 0 \quad (3.5)$$

ψ : étant la fonction de pondération.

* La méthode d'approximation justifie ainsi son nom de méthode des résidus pondérés .

I. 19 CHOIX DE LA FONCTION DE PONDERATION :

Suivant le choix de la fonction de pondération $\psi(x, z)$, différentes formulations de la méthode des résidus pondérés seront obtenues à savoir :

- La méthode de collocation par :
⇒ points,
⇒ sous domaines.
- La méthode des moindres carrés.
- La méthode de Galerkin ou de Ritz* :

Dans ce qui suit nous porterons un intérêt particulier à la méthode de Galerkin pour le choix de la fonction de pondération.

I. 19 .1 Méthode de Galerkin :

La méthode de Galerkin est de loin la méthode la plus utilisée[†], elle consiste à choisir comme fonctions de pondérations des résidus, les fonctions de forme (ou de base) initiales.

$\psi \in \langle N \rangle$, ou éventuellement d'autres, combinaisons peuvent être envisagées comme par exemple :

$\psi = \delta U(x, z, t)$: Variation des fonctions $U(x, z, t)$.

$\psi = \langle P \rangle$: Fonctions de base de l'approximation non nodale .

* Si l'on utilise la notion de fonctionnelle .

† Cette méthode conduit fréquemment (mais pas toujours !) à des matrices symétriques : c'est pour cette raison que nous l'adopterons presque exclusivement .

Afin de mieux décrire la méthode des résidus pondérés d'après le critère de Galerkin, nous considérons l'équation différentielle suivante :

$$\mathcal{D}(U) = 0 \quad (*)$$

$\mathcal{D}(\)$: Opérateur différentiel.

U : Variable libre.

Il s'agit d'approcher cette variable par \hat{U} sous la forme de l'équation (2.3), c'est-à-dire, par une combinaison linéaire de n fonctions de déforme N_i ayant pour coefficients les déplacements des degrés de liberté correspondants. En substituant \hat{U} dans l'équation (*) on obtient le résidu :

$$R = \mathcal{D}(\hat{U}) \neq 0 \quad (3.6)$$

En suivant la méthode de Galerkin, les fonctions de déforme N_i joueront le rôle de fonction de pondération, nous aurons donc les n équations :

$$\int_{\Omega} N_i \mathcal{D}(\hat{U}) d\Omega = 0 \quad (3.7)$$

L'équation (2.7) concerne les points intérieurs au domaine Ω , sans référence à des conditions de frontières.

Les conditions aux frontières pourront être introduites en intégrant l'équation (2.7) par parties, ce qui donnera des expressions intégrales pour le domaine et ses frontières (voir plus loin).

Il est bon de révéler certaines caractéristiques de la méthode des résidus pondérés telle que nous l'avons vue. Tout d'abord, on voit que la valeur d'une intégrale pondérée de la solution approchée de l'équation différentielle pertinente peut caractériser un certain type de comportement de manière approchée.

Il existe en mécanique en général (milieux continus ..) un certain nombre de formes d'équations différentielles possibles, et par conséquent il existe plusieurs formes intégrées.

Remarquons également le rôle de l'intégration par parties, sans cette intégration la méthode des résidus pondérés ne tiendrait compte que du domaine intérieur à l'élément. Avec l'intégration, on génère des intégrales de surface qui permettent de faire intervenir les conditions aux frontières [III -7], [III --8].

I.20 TRANSFORMATION DE LA FORME INTEGRALE :

Soit un système physique régi par un système d'équations aux dérivées partielles de la forme :

$$L(U) - g = 0 \quad (3.8)$$

Sur un domaine Ω associe aux conditions aux limites :

$$B(U) - h = 0 \quad (3.9)$$

Sur la frontière Γ .

On a l'intégrale :

$$\int_{\Omega} (L(U) - g)\psi(x,z)d\Omega + \int_{\Gamma} (B(U) - h)\bar{\psi}(x,z)d\Gamma = 0 \quad (3.10)$$

$$\forall \psi, \bar{\psi}$$

La relation (3-10) est la formulation intégrale normale ou forte.

Le seul inconvénient de cette méthode est qu'elle nous impose une classe de continuité du second ordre pour le choix de $U(x, z, t)$. Pour remédier à ce problème, on utilisera la méthode de transformation de Green, à savoir, la forme intégrale faible qui représente les avantages suivants :

1. Ordre maximum des dérivées de U qui apparaissent dans la forme intégrale diminue (les conditions de dérivabilité de U sont moins fortes);

2. Certaines des conditions aux limites qui apparaissent dans la forme faible peuvent être prises en compte dans la formulation intégrale, au lieu d'être satisfaites identiquement par U .

L'intégration par parties fait apparaître des dérivées de ψ donc les conditions de dérivabilité de ψ augmentent, de plus, ψ peut satisfaire des conditions sur une partie de la frontière de manière à faire disparaître certains termes de contour.

I. 21 DISCRETISATION EN ELEMENTS FINIS :

Notre étude portera sur l'application de la méthode des éléments finis à deux dimensions d'espace, pour se faire on utilisera une discrétisation en éléments triangulaires* (Cf. annexe I).

I. 21 .1 Approximation des inconnues :

Les méthodes d'approximation des problèmes de milieux continus reposent toutes sur le choix de fonctions de forme (ou fonctions test) convenables.

Soit la fonction $U(x, z, t)$ définie et continue sur un domaine Ω , dont on ne connaît les valeurs exactes qu'en certains noeuds (x_i, z_i) :

$$U(x_i, z_i) = U_{ex}(x_i, z_i) = U_i, \quad i = 1, n \quad (3.11)$$

* Le choix de cet élément a été fait dans le souci d'augmenter la précision de la méthode .

L'approximation nodale de la fonction $U(x, z, t)$ sera :

$$\left. \begin{aligned} U(x, z, t) &= N_1(x, z)U_1(t) + N_2(x, z)U_2(t) + \dots + N_n(x, z)U_n(t) \\ U(x, z, t) &= \sum_{i=1}^n N_i(x, z)U_i(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

$$U(x, z, t) = \langle N \rangle \cdot \{U\} \quad (3.13)$$

I.21.1.1 Fonction de forme *

Il est clair que dans le cas plan, l'élément le plus simple envisageable est le triangle, définie avec seulement trois noeuds.

Les fonctions de forme pour le cas d'un élément linéaire s'écrivent :

$$N_i^e = \frac{1}{2A_e} (\alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e z) \quad (3.14)$$

$2A_e$: représente dans cette l'équation la valeur du déterminant de la matrice $[P]$;

A_e : représente l'aire du triangle.

$$\alpha_i^e = X_j Z_k - X_k Z_j \quad , \quad \beta_i^e = Z_j - Z_k \quad , \quad \gamma_i^e = X_k - X_j \quad (3.14a)$$

$$(i, j, k = 1, 2, 3)$$

Les indices (i, j, k) se permutent dans l'ordre naturel.

Les dérivées, ont les caractéristiques suivantes :

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial X} = \frac{\beta_i^e}{2A_e} \quad , \quad \frac{\partial N_i^e}{\partial Z} = \frac{\gamma_i^e}{2A_e} \quad (3.14b)$$

* Voir annexe I pour plus de détails .

I. 22 CRITERES DE CONVERGENCE ET ERREURS D'APPROXIMATION :

La méthode des éléments finis fournit une solution approchée qui converge vers la solution exacte lorsque l'on diminue la taille des éléments. La donnée des fonctions de forme revient à limiter le nombre de degrés de liberté ; (en réalité infini) du système, et le vrai minimum de l'énergie peut ne jamais être atteint, quelle que soit la finesse de la subdivision. Pour que le critère de la convergence soit garanti vers le résultat correct ; certaines conditions simples doivent être remplies.

Nous énoncerons donc, une condition nécessaire de convergence du développement dite « de complétude » qui peut englober toutes les autres conditions.

Il est nécessaire qu'une valeur constante de la dérivée d'ordre « m » puisse être obtenue sur le domaine de l'élément (dans le cas où la forme intégrale fait apparaître des dérivées d'ordre « m »), lorsque la taille de chaque élément tend vers zéro [III -8].

La puissance de la méthode des éléments finis réside dans le fait, qu'elle offre les moyens (par le biais de la formulation et du maillage) de réduire selon le besoin, l'erreur d'approximation et contrôle ainsi l'ordre de précision [III -5].

- **Evaluation d'erreur :**

L'erreur d'approximation de la méthode des éléments finis est pratiquement donnée par le corollaire suivant [III -5] :

$$\|\hat{U} - U_{ex}\| = \|e\| \leq C \cdot h^{k+1-m} \cdot \|U_{ex}\| \quad (3.14c)$$

où :

C : coefficient indépendant de l'élément,

h : taille de l'élément,

k : degré du polynôme d'interpolation,

m : ordre de dérivées apparaissant dans l'expression des variables nodales.

m=1 : problèmes de la classe C^0 ,

m=2 : problèmes de la classe C^1 .

Pour améliorer la précision de la méthode nous pouvons soit :

⇒ Diminuer la taille de l'élément, ce qui a pour conséquence l'augmentation du nombre d'éléments (technique dite de raffinement des maillages).

⇒ Augmenter le degré du polynôme d'interpolation, ce qui se fait par :

→ augmentation du nombre de noeuds de l'élément (*interpolation de Lagrange*),

→ augmentation du nombre de variables nodales pour chaque noeud en conservant le nombre de noeuds de l'élément (*interpolation d'Hermite*).

I.23 APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS AUX PROBLEMES DE CHAMP EN REGIME TRANSITOIRE :

La formulation qui sera développée dans cette partie s'applique d'une manière identique à tous les problèmes du type :

- conduction de chaleur ;
- infiltration à travers les milieux poreux ;
- écoulement irrotationnel de fluides parfaits ;
- répartition de potentiel électrique (ou magnétique) ;
- torsion des arbres prismatiques ;
- lubrification des paliers ...etc.

Nous avons noté aux paragraphes précédents « la formulation faible » ainsi que le principe de formulation « des résidus pondérés » avec le choix de « Galerkin » pour la fonction de pondération (*se rapporter aux paragraphes précédents*).

Dans les paragraphes suivants, nous allons généraliser ces approches, en commençant d'abord par l'équation de la chaleur en régime transitoire, puis par l'équation d'infiltration à travers les milieux poreux (dans le deuxième cas, l'équation est non linéaire).

I.23.1 Equation de la chaleur en régime transitoire :

Dans le (chapitre II) nous avons vu que l'équation de transfert de chaleur en régime transitoire à deux dimensions d'espace s'écrivait :

$$(\rho c) \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} \right) \quad (3.15)$$

Sous une forme condensée ; elle est donnée par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (\alpha)^* \cdot \nabla^2 T \quad (3.15a)$$

I.23.1.1 La formulation intégrale :

$$\int_{\Omega} \Psi(x, z, t) \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha^* \cdot \nabla^2 T \right) \cdot d\Omega = 0 \quad (3.15b)$$

I.23.1.2 Transformation de la forme intégrale :

On utilisant la technique de l'intégration par partie nous obtenons l'expression suivante :

$$\int_{\Omega} \left[\Psi_e \frac{\partial T_e}{\partial t} + \alpha^* \left(\frac{\partial \Psi_e}{\partial X} \frac{\partial T_e}{\partial X} + \frac{\partial \Psi_e}{\partial Z} \frac{\partial T_e}{\partial Z} \right) \right] \cdot d\Omega^e = \alpha^* \int_{\Gamma} \Psi_e \left[\frac{\partial T_e}{\partial X} \bar{n}_x + \frac{\partial T_e}{\partial Z} \bar{n}_z \right] d\Gamma^e \quad (3.15c)$$

Ψ_e : fonction de pondération au niveau local.

T_e : température locale (variable primaire) [III -5].

Et la quantité :

$$q_n^e = \alpha^* \left[\frac{\partial T_e}{\partial X} \bar{n}_x + \frac{\partial T_e}{\partial Z} \bar{n}_z \right]$$

représente la condition à la limite naturelle, de la on note q_n par (variable secondaire) [III -5].

I.23.1.3 Choix de la fonction de pondération :

On se référants à la méthode de Galerkinge, la fonction de pondération sera :

$$\Psi_e = N_i^e(x, z) \quad (3.16a)$$

I. 24 METHODE DES ELEMENTS FINIS :

L'interpolation par éléments finis au niveau d'un élément Ω^e est de la forme :

$$T_e(x, z, t) = \sum_{i=1}^r T_i^e(t) \cdot N_i^e(x, z) \quad (3.16b)$$

En substituant les équations (3.16a) et (3.16b) dans l'équation (3.15c),

(cf. annexe I pour les détails de calculs) :

$$\sum_{j=1}^r \left\{ \left(\int_{\Omega} N_i^e N_j^e dx dz \right) \frac{\partial T_j^e}{\partial t} + \left[\int_{\Omega} \alpha^* \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial X} \frac{\partial N_j^e}{\partial X} + \frac{\partial N_i^e}{\partial Z} \frac{\partial N_j^e}{\partial Z} \right) dx dz \right] T_j^e \right\} = \int_{\Gamma^e} \Psi_e q_n^e d\Gamma_e \quad (3.17)$$

Sous une forme matricielle, on obtient :

$$[M^e] \cdot \{\dot{U}^e\} + [K^e] \cdot \{U^e\} = \{F^e\} \quad (3.17a)$$

ou sous forme :

$$M\dot{U} + KU = F \quad (3.17b)$$

en variables de participation modales :

$$m_i \dot{z}_i + k_i z_i = F_i \quad (3.17c)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 M_{ij}^e &= \int_{\Omega^e} N_i^e N_j^e dx dz \\
 K_{ij}^e &= \alpha^* \cdot \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \right) dx dz \quad (3.17d) \\
 F_i^e &= \alpha^* \cdot \int_{\Gamma^e} N_i^e \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \cdot \bar{n}_x + \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \cdot \bar{n}_z \right) T_i^e \cdot d\Gamma_e = P_i^e
 \end{aligned}$$

I.24.1 Conditions initiales et aux limites :

Les conditions imposant à une fonction ou à ses dérivées de respecter certaines valeurs aux frontières sont connues sous le nom de conditions forcées aux frontières équation(3.9) .

On distingue généralement deux types de conditions aux limites (cf. II.9.2)

→ Conditions dites de Dirichlet* .

→ Conditions dites de Neumann† .

Ce dernier type de conditions est généralement formulé comme suit

$$\frac{\partial U}{\partial n} + \alpha U = F_{\Gamma}$$

sur la frontière Γ ou est imposée cette condition.

Si $\alpha \neq 0$, cette condition est dite de Cauchy.

Si $\alpha = 0$, cette condition est alors dite de Neumann.

* Communément connues sous le vocable de conditions aux frontières **essentiels** : ce type de conditions intervient dans la spécification du domaine , espace (ex. condition cinématique , thermique , géométrique ...)

† Aussi connues sous le nom de conditions aux frontières naturelles : ce types de conditions s'obtient à partir d'une fonctionnelle (ex. condition cinétique ...)

I.25 DISCRETISATION TEMPORELLE :

A présent, nous allons faire une discrétisation par éléments finis à partir d'une fonction test, au domaine temporel, pour aboutir à une expression **récurrente***. Il est bien évident que cette méthode permet d'obtenir la plus part des méthodes classiques d'approximations du domaine temporel.

Pour des considérations de stabilité, il sera commode d'intervenir sur les équations scalaires en fonction des participations modales du type (3.17c) [III -8].

Pour simplifier le problème avant d'aboutir à la méthode générale et faciliter ainsi la compréhension de certaines notions comme la stabilité (point de départ, lissage, etc.), nous allons d'abord étudier le processus de récurrence à deux points, puis le généraliser.

I.25.1 Processus de récurrence à deux points †:

I.25.1.1 . Méthode des résidus pondérés :

Le temps étant considéré comme une variable indépendante, le procédé habituel de discrétisation nous permet d'écrire :

$$U = \hat{U} = \sum N_i(t) U_i \quad (3.18)$$

U_i : paramètres nodaux U au temps i ,

N_i : fonction de forme.

Considérons un « élément » typique de temps de longueur Δt , U_i prenant les valeurs N_n et U_{n+1} ;

* Etant donné l'étendu infini de la dimension temps, nous considérerons des intervalles finis de temps en répétant les calculs pour les intervalles suivants avec de nouvelles conditions initiales, ce qui conduit à un processus pas-à-pas.

† Pour les problème du premier ordre (tel la conduction de chaleur...)

les fonctions d'interpolation en approximation linéaire sont:

$$N_i(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} & \text{pour } (t_{i-1} < t < t_i) \\ \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} & \text{pour } (t_i < t < t_{i+1}) \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (3.19)$$

Leurs dérivées par rapport au temps :

$$\dot{N}_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_i - t_{i-1}} = \frac{1}{\Delta t} & \text{sur } (t_{i-1} < t < t_i) \\ \frac{-1}{t_{i+1} - t_i} = \frac{-1}{\Delta t} & \text{sur } (t_i < t < t_{i+1}) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.19a)$$

$$\text{soit : } t_i - t_{i-1} = t_{i+1} - t_i = \Delta t$$

En utilisant les coordonnées réduite : $\zeta = \frac{t}{\Delta t}$ ($0 \leq \zeta \leq 1$)

$$N_i(\zeta) = \begin{cases} \zeta & \text{pour } (t_{i-1} < t < t_i) \\ 1 - \zeta & \text{pour } (t_i < t < t_{i+1}) \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (3.19b)$$

D'où, l'équation classique obtenue par la méthode des résidus pondérés (on supposant que le domaine entier d'étude est confondu avec celui d'un élément)

[III -5].

$$\int_0^1 \psi_j [M(U_n \dot{N}_n + U_{n+1} \dot{N}_{n+1}) + K(U_n N_n + U_{n+1} N_{n+1}) - f] d\zeta = 0 \quad (3.20)$$

Le problème considéré étant du type à valeurs initiale, on suppose connue l'un des paramètres U_n .

La relation de récurrence s'écrit donc :

$$\left(K \int_0^1 \psi_j \zeta d\zeta + M \int_0^1 \psi_j \frac{d\zeta}{\Delta t} \right) \cdot U_{n+1} + \left(K \int_0^1 \psi_j (1-\zeta) d\zeta - M \int_0^1 \psi_j \frac{d\zeta}{\Delta t} \right) \cdot U_n + \int_0^1 \psi_j f d\zeta = 0 \quad (3.21)$$

D'une manière générale, on obtient l'équation suivante, quelque soit la fonction de pondération :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{M}{\Delta t} + K\theta \right) U_{n+1} + \left(-M\Delta t + K(1-\theta) \right) U_n + \bar{f} = 0 \\ & \theta = \frac{\int_0^1 \psi_j \zeta d\zeta}{\int_0^1 \psi_j d\zeta} \\ & \bar{f} = \frac{\int_0^1 \psi_j f d\zeta}{\int_0^1 \psi_j d\zeta} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dans l'équation (3.21) [II-5], on reconnaît une série classique de formules de différences finis avec une modification dans l'utilisation d'un terme de chargement pondéré.

I.25.2 Méthode de récurrence à plusieurs points :

Il est possible d'étendre l'idée qui permet de définir des relations de récurrence par un procédé de pondération à des domaines de dimensions « $n\Delta t$ » en utilisant une interpolation d'ordre supérieure [II-8].

I.25.3 Etude de la stabilité des méthodes de récurrence à deux points :

Comme nous l'avons signalé pour l'étude de la stabilité, il est commode d'utiliser l'équation en variables de participations nodale équation (3.17c).

Etant donné que toute réponse d'un système peut être écrite sous la forme suivante :

$$U = \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle \cdot \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Pour le cas d'une réponse libre, l'équation (3.22) de récurrence devient :

$$\left(\frac{M_i}{\Delta t} + K_i \theta \right) (z_i)_{n+1} + (-M_i \Delta t + K_i (1 - \theta)) (z_i)_n = 0 \quad (3.24)$$

On pose :

$$(z_i)_{n+1} = \varpi (z_i)_n \quad (3.25)$$

qui est l'équation caractéristique du processus.

En substituant l'équation (3.25) dans (3.24), on obtient l'expression suivante :

$$\varpi = \frac{1 - K_i (1 - \theta) \cdot \Delta t / M_i}{1 + K_i \theta \cdot \Delta t / M_i} \quad (3.26)$$

◇ **Remarques :**

- $|\varpi| > 1$ correspond à une réponse sans borne : cette situation ne reflète en aucun cas la réalité des choses du fait que, généralement les phénomènes qu'on observe dans la nature sont amortis [III -8].
- $\varpi < 0$ dans ce cas un comportement oscillant apparaît, et qui, évidemment n'est pas souhaité.

Si l'on impose que : $|\varpi| < 1$ (*) ;

alors le second membre de l'équation (3.26) doit être plus grand que (-1).

soit $\omega_i = \frac{K_i}{M_i}$ la valeur propre correspondant au mode (i), on peut écrire la

condition (*) sous la forme :

$$\omega_i \cdot \Delta t (2\theta - 1) > -2 \quad (3.27)$$

Cette condition (3.27) est satisfaite si ($\theta \geq \frac{1}{2}$) on aura alors un processus inconditionnellement stable.

Si : $0 < \theta < \frac{1}{2}$, alors la stabilité est conditionnée par :

$$\omega_i \cdot \Delta t < \frac{2}{1 - 2\theta} \quad (3.28)$$

Pour notre étude on appliquera la méthode de Galerkin qui prend une valeur

$(\theta = \frac{2}{3})^*$.

* Le choix de cette valeur est motivé par le fait que cette valeur de θ conduit à un résultat où presque toutes les oscillations et les erreurs sont supprimées. Dans le même ordre d'idée Lambert suggère avec un raisonnement différent une valeur optimale : $\theta \cong 0.878$.

I.26 RESOLUTION NUMERIQUE DE SYSTEME D'EQUATIONS NON LINEAIRES :

Il existe dans la nature différents problèmes pour lesquels on ne peut garder la linéarité communément introduite dans la modélisation de ces phénomènes.

Pour considérer le cas de notre étude, il est essentiel d'élargir le champs d'application du processus de résolution numérique précédemment décrit.

Les paramètres physiques supposés indépendants de U dans un modèle linéaire, tels que le module d'Young, les coefficients de conductivité thermique et de viscosité, etc. ...deviennent des fonctions de U_n , c'est par exemple le cas dans les écoulements en milieux poreux non saturés et qui fera objet d'une étude numérique dans cette partie.

I.26.1 Equation de transfert de masse en milieux poreux :

L'équation de transfert de masse en milieux poreux a été décrite au chapitre précédent, et se met sous la forme (n équations) suivante :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla [a \cdot \nabla \omega + a \delta \cdot \nabla T] - \nabla \left(\frac{\rho_e}{\rho_0} K \cdot \nabla Z \right)$$

Cette équation non fortement non linéaire peut être résolue par la méthode des éléments finis associée au critère de Galerkin. Les fonctions d'interpolations de ω et T sur chaque élément sont du type linéaire.

Les coefficients a et $a\delta$ dépendants de ω et T sont à leurs tour interpolés de façon linéaire aussi.

I.26.1.1 Formulation intégrale :

Par la méthode des résidus pondérés, on a l'expression suivante :

$$\int_{\Omega^e} \Psi^e(x, z) \cdot \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial t} - \nabla \cdot \left[a \cdot \nabla \omega + a \delta \cdot \nabla T - K \frac{\rho_e}{\rho_0} \cdot \nabla Z \right] \right\} d\Omega^e = 0 \quad (3.29)$$

En développant d'avantage l'expression précédente pour faciliter la transformation, on obtient :

$$\int_{\Omega^e} \Psi_e \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \Psi_e \frac{\partial}{\partial X} \left(a \frac{\partial \omega}{\partial X} + a \delta \frac{\partial T}{\partial X} \right) d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \Psi_e \frac{\partial}{\partial Z} \left(a \frac{\partial \omega}{\partial Z} + a \delta \frac{\partial T}{\partial Z} - K \frac{\rho_e}{\rho_0} \right) d\Omega^e = 0 \quad (3.30)$$

I.26.1.2 Transformation de l'intégrale :

On intégrant par parties l'équation (3.30) et en arrangeant les différents termes, on obtient directement l'expression condensée suivante :

$$\int_{\Omega^e} \Psi_e \frac{\partial \omega_e}{\partial t} d\Omega^e + \int_{\Omega^e} a \left[\frac{\partial \Psi_e}{\partial X} \cdot \frac{\partial \omega_e}{\partial X} + \frac{\partial \Psi_e}{\partial Z} \cdot \frac{\partial \omega_e}{\partial Z} \right] d\Omega^e + \int_{\Omega^e} a \delta \left[\frac{\partial \Psi_e}{\partial X} \cdot \frac{\partial T_e}{\partial X} + \frac{\partial \Psi_e}{\partial Z} \cdot \frac{\partial T_e}{\partial Z} \right] d\Omega^e + \int_{\Omega^e} S \frac{\partial \Psi_e}{\partial Z} d\Omega^e = \underbrace{\int_{\Gamma^e} \Psi_e (a \cdot \nabla \omega + a \delta \cdot \nabla T - S) d\Gamma^e}_I \quad (3.31)$$

dont les termes sont physiquement reconnaissables .

Le terme **I**: représente le flux de masse à la frontière Γ_e .

I.26.1.3 Approximation des inconnus :

Par la méthode des éléments finis, on a les approximations linéaires suivantes sur un élément Ω^e du domaine :

$$T^e(x, z, t) = \sum_{i=1}^3 N_i^e(x, z) \cdot T_i^e(t) = \langle N \rangle \cdot \{T\}$$

$$\omega^e(x, z, t) = \sum_{i=1}^3 N_i^e(x, z) \cdot \omega_i^e(t) = \langle N \rangle \cdot \{\omega\}$$

I.26.1.4 Choix de la fonction de pondération :

Par la méthode de Galerkin, on choisit la fonction de pondération, donc :

$$\Psi(x, z) = N_i(x, z),$$

Ce qui conduit à écrire l'équation (3.31) sous la forme :

$$\underbrace{\int_{\Omega^e} \{N\} \cdot \langle N \rangle \cdot \left\{ \frac{\partial \omega^e}{\partial t} \right\} d\Omega^e}_{I_1} + \underbrace{\int_{\Omega^e} \left[\left\{ \frac{\partial N}{\partial X} \right\} \cdot \left\langle \frac{\partial N}{\partial X} \right\rangle + \left\{ \frac{\partial N}{\partial Z} \right\} \cdot \left\langle \frac{\partial N}{\partial Z} \right\rangle \right] \cdot [a \cdot \{\omega\} + a\delta \cdot \{T\}] d\Omega^e}_{I_2} +$$

$$\underbrace{\int_{\Omega^e} S \cdot \left\{ \frac{\partial N}{\partial Z} \right\} d\Omega^e}_{I_3} = \underbrace{\int_{\Gamma^e} \{N\} \cdot \left[\left\langle \frac{\partial N}{\partial X} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial N}{\partial Z} \right\rangle \right] \cdot (a \cdot \{\omega\} + a\delta \cdot \{T\}) d\Gamma^e}_{I_4} + \int_{\Gamma^e} S \cdot \{N\} d\Gamma^e$$

Ceci peut se mettre sous forme d'un système de n équations du type :

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\int_{\Omega^e} N_i^e \cdot \sum_j N_j^e \frac{\partial \omega_j^e}{\partial t} d\Omega^e}_{I_1} + \underbrace{\int_{\Omega^e} a \left[\frac{\partial N_i^e}{\partial X} \sum_j \frac{\partial N_j^e}{\partial X} \cdot \omega_{ji}^e + \frac{\partial N_i^e}{\partial Z} \sum_j \frac{\partial N_j^e}{\partial Z} \cdot \omega_j^e \right] d\Omega^e}_{I_2} + \\
& \underbrace{\int_{\Omega^e} a \delta \left[\frac{\partial N_i^e}{\partial X} \sum_j \frac{\partial N_j^e}{\partial X} \cdot T_{ji}^e + \frac{\partial N_i^e}{\partial Z} \sum_j \frac{\partial N_j^e}{\partial Z} \cdot T_{ji}^e \right] d\Omega^e}_{I_2} + \underbrace{\int_{\Omega^e} S \cdot \frac{\partial N_i^e}{\partial Z} d\Omega^e}_{I_3} = \\
& \underbrace{\int_{\Gamma^e} N_i^e \cdot \left[a \cdot \left(\sum_j \frac{\partial N_j^e}{\partial X} \cdot \omega_{ji}^e + \sum_j \frac{\partial N_j^e}{\partial Z} \cdot \omega_j^e \right) + a \delta \left(\sum_j \frac{\partial N_j^e}{\partial X} \cdot T_{ji}^e + \sum_j \frac{\partial N_j^e}{\partial Z} \cdot T_{ji}^e \right) \right] d\Gamma^e}_{I_4} + \int_{\Gamma^e} S \cdot N_i^e d\Gamma^e
\end{aligned}$$

On aura alors à évaluer les différentes intégrales I_1, I_2, I_3, I_4 .

◇ **Intégrale I_1 :**

$$I_1 = \int_{\Omega^e} N_i^e \sum_j N_j^e \frac{\partial \omega_j^e}{\partial t} d\Omega^e = \sum_j \int_{\Omega^e} N_j^e N_j^e d\Omega^e \dot{\omega}_j^e$$

Les dérivées par rapport au temps sont définies comme moyennes pondérées

des dérivées* : $\frac{\partial U}{\partial t}$

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial t} = \frac{\int N_i \frac{\partial \omega}{\partial t} d\Omega}{\int N_i d\Omega} = \dot{\omega}_j$$

On pose :

$$I_1 = \sum_j \Pi \dot{\omega}_j.$$

Avec :

$$\Pi = \int_{\Omega^e} N_i^e N_j^e d\Omega^e$$

d'où :

$$I_1 = \begin{cases} \frac{A}{12} & i \neq j \\ \frac{A}{6} & i = j \end{cases} \quad (\text{Cf. Annexe I pour les détails}).$$

A : étant l'air de l'élément de référence.

I_1 est donc une matrice avec :

$$\begin{array}{ll} \frac{A}{6} & \text{sur la diagonale} \\ \frac{A}{12} & \text{sur l'extr - diagonale} \end{array}$$

◇ Intégrale I_2 :

En général ; on peut écrire I_2 :

$$I_2 = \int_{\Omega^e} B \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial X} \cdot \sum_j \frac{\partial N_j^e}{\partial X} + \frac{\partial N_i^e}{\partial Z} \cdot \sum_j \frac{\partial N_j^e}{\partial Z} \right) d\Omega^e$$

$$I_2 = \sum_j \int_{\Omega^e} B \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial X} \cdot \frac{\partial N_j^e}{\partial X} + \frac{\partial N_i^e}{\partial Z} \cdot \frac{\partial N_j^e}{\partial Z} \right) d\Omega^e$$

Or on a que :

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial X} \cdot \frac{\partial N_j^e}{\partial X} + \frac{\partial N_i^e}{\partial Z} \cdot \frac{\partial N_j^e}{\partial Z} = C_{ij} \quad (\text{Cf. Annexe I})$$

$$I_2 = \sum_j I_{2_{ij}}$$

$$I_{2_{ij}} = \int_{\Omega^e} B C_{ij} d\Omega^e$$

Discrétisation du paramètre B :

$$B = \sum_i B_i^e N_i^e$$

$$I2_{ij} = \int_{\Omega^e} \sum_i B_i^e N_i^e C_{ij}^e d\Omega^e$$

$$I2_{ij} = \sum_i \int_{\Omega^e} B_i^e N_i^e C_{ij}^e d\Omega^e$$

◇ Intégrale I₃ :

$$I_3 = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial Z} \cdot S^e d\Omega^e$$

$$S^e = \sum_j S_j^e \cdot N_j^e$$

$$I_3 = \sum_j \left[\int_{\Omega^e} N_j^e \cdot \frac{\partial N_i^e}{\partial Z} d\Omega^e \right] S_j^e$$

◇ Intégrale I₄ :

$$I_4 = \int_{\Gamma^e} N_i^e \left[a^e \left(\sum_i \frac{\partial N_j^e}{\partial X} \omega_i^e + \sum_i \frac{\partial N_j^e}{\partial Z} \omega_i^e \right) + (a\delta)^e \left(\sum_i \frac{\partial N_j^e}{\partial X} T_i^e + \sum_i \frac{\partial N_j^e}{\partial Z} T_i^e \right) \right] d\Gamma^e + \int_{\Omega^e} S^e N_i^e d\Omega^e$$

I_4 : désigne le flux de masse traversant la frontière Γ_e .

Nous obtenons ainsi le système :

$$[I1] \cdot \{\dot{w}\} + [I2(a)] \cdot \{w\} + [I2(a\delta)] \cdot \{T\} + [I3] \cdot \{S\} = \{I4\}.$$

Comme $\{T\}$ est obtenue à partir de l'équation de la chaleur (voir précédant)
alors en arrangeant l'équation précédente on peut écrire :

$$[M]\{\dot{\omega}\} + [K]\{\omega\} = \{F\} \quad (3.32)$$

l'équation (3.32) ainsi obtenue est un système non linéaire car :

$$M = M(\omega, T)$$

D'ou pour lineariser (Cf. annexe II) cette équation on utilisera l'une des techniques décrites.

La méthode incrémentale modifiée suivant le schéma :

$$U_{m+\theta} = (1-\theta)U_m + \theta U_{m+1}$$

est l'une des méthode décrite, nous obtenons dans ce cas le système suivant :

$$\left[M^{m+\theta} \right] \{ \dot{\omega} \} + \left[K^{m+\theta} \right] \{ \omega \} = \{ F^{m+\theta} \}. \quad (*)$$

Dont les paramètres physiques seront évalués à l'instant ($m+\theta$) pour l'itération en cour suivant le schéma :

$$G\left(T^{m+\theta}, \omega^{m+\theta}\right) = (1-\theta)G\left(T^m, \omega^m\right) + \theta G\left(T^{m+1}, \omega^{m+1}\right)$$

donc l'équation (*) est une équation linéaire du premier ordre que l'on résolu comme le cas de l'équation de la chaleur.

I.26.1.5 Discrétisation temporelle :

On obtient à partir de l'équation (*), (Cf. paragraphe III. 10) :

$$\left[\frac{M^{m+\theta}}{\Delta t} + K^{m+\theta} \cdot \theta \right] \{ \omega^{m+1} \} + \left(k^{m+\theta} (1-\theta) - \frac{M^{m+\theta}}{\Delta t} \right) \{ \omega^m \} = \{ F^{m+\theta} \}$$
$$\{ F^{m+\theta} \} = \{ I_4^{m+\theta} \} - [I_2^{m+\theta}] \{ T^{m+1} \}$$

Equation dont la forme générale s'écrit :

$$[A] \cdot X = \{B\}$$

◇ Remarque :

Lors de l'évaluation des matrices à (m+1) on aura besoin avant l'obtention de T^{m+1} , et ω^{m+1} à calculer les coefficients physiques à (m+θ) qui nécessitent, la connaissance des inconnues T^{m+1} , ω^{m+1} . Pour notre cas découplé la connaissance de T^{m+1} ne pose pas de problème, mais dans l'évaluation où encore la pré - évaluation de ω^{m+1} , on utilise le schéma prévisionnel [III -2].

$$\omega^{m+1} = \omega^m + \left(\omega^m - \omega^{m-1} \right) \left[\frac{\Delta t_m}{\Delta t_{m-1}} \right]$$

I.27 RESOLUTION NUMERIQUE :

Pour la résolution du système linéaire $AX=B$, On utilisera la technique d'optimisation dite méthode du gradient conjugué avec prèconditionnement de la matrice A , cf. annexe III.

QUATRIEME CHAPITRE



IV. RESULTATS ET DISCUSSION.

IV.1 PROFILS THERMIQUE.

IV.2 PROFILS HYDRIQUES.

IV.2.1 Potentiel gravitaire négligé.

IV.2.2 Potentiel gravitaire pris en compte.

IV.3 FLUX DE CHALEUR ET DE MASSE.

Dans le but d'évaluer l'influence de l'effet bidimensionnel induit par la gravité et les interactions thermiques, deux événements ont été simulés, l'un pour $w_0=0,02\%$, et l'autre pour $w_0=7\%$.

Pour notre cas de simulation, nous avons pris une enceinte de section rectangulaire, de longueur L et de hauteur $H = d$.

IV.1 PROFIL THERMIQUE :

Les profils thermiques obtenus par simulation numériques pour différents temps sont représentés sur les figures (IV-I- 1) à (IV-I- 19), on note que :

- Ces profils se présentent sous formes d'isothermes verticales à valeurs constantes suivant l'axe des ordonnées et en variation linéaires suivant l'axe des abscisses, selon lequel on a provoqué le gradient de température.
- L'évolution du profil thermique suit deux régimes clairement distincts montrés sur les figures sus-citées, qui sont les suivants :

1. Régime transitoire :

Ce régime commence à partir de l'instant initial $t = 0$ (s) et arrive à sa fin au environ de 2 jours, a partir de cette date on a instauration du régime stationnaire.

Pour cette première phase le profil des isothermes évolue d'une manière instable, présentant ainsi des pics au niveau de la paroi chaude, illustrés par une distribution irrégulière des isothermes au sein de la cellule (Cf. figures (IV-I-1), (IV-I-2), ..., (IV-I-11)), puis le front chaud se déplace a travers la structure poreuse jusqu'à atteindre la paroi froide.

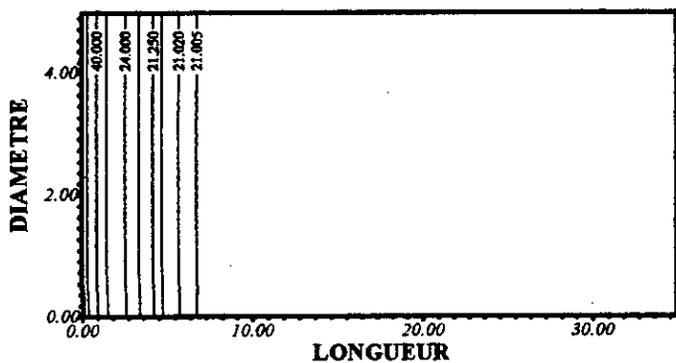
2. Régime permanent :

Ce régime est caractérisé par la stabilité des profils isothermes Cf. fig(IV-I-12;..., 19), ce qui induit un flux de chaleur constant suivant (ox).

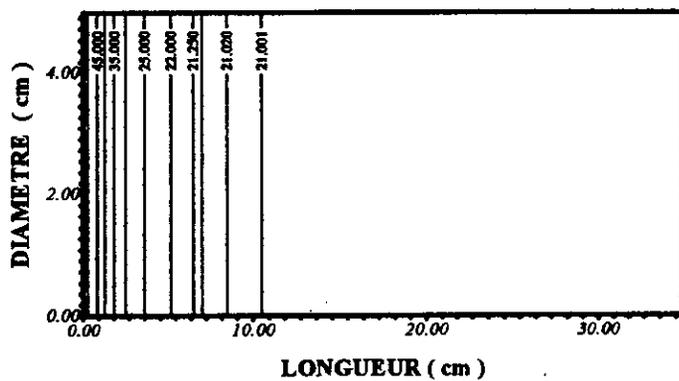
Résultat :

En comparaison avec les profils obtenue par PRAT [III-1], qui a fait remarquer l'existence d'un décalage d'une même isotherme de $0.1\text{ }^{\circ}\text{c}$ par rapport à la verticale (notre cas d'étude) dans la zone chaude. Ce qui nous permet de confirmer la validité de l'hypothèse qui stipule que le transfert de chaleur est pratiquement monodimensionnel suivant l'axe des abscisses.

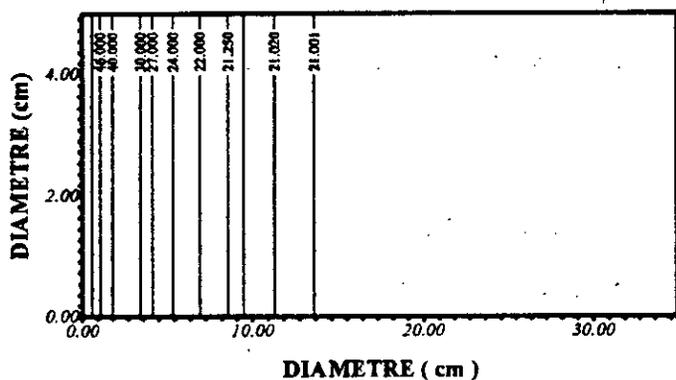
FIG(IV-I-1) ISOTHERMES après t = 5 mn.



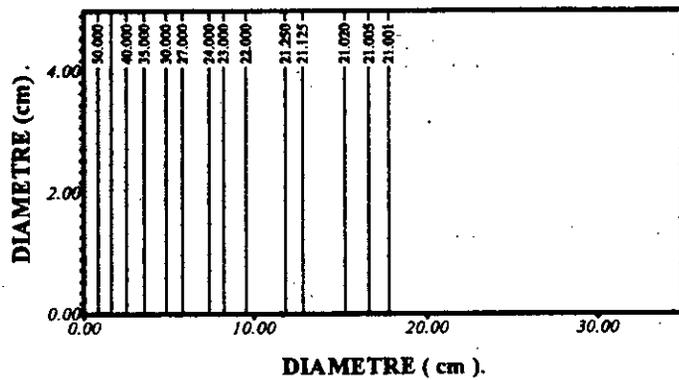
FIG(IV-I-2) ISOTHERME APRES t = 15 mn.



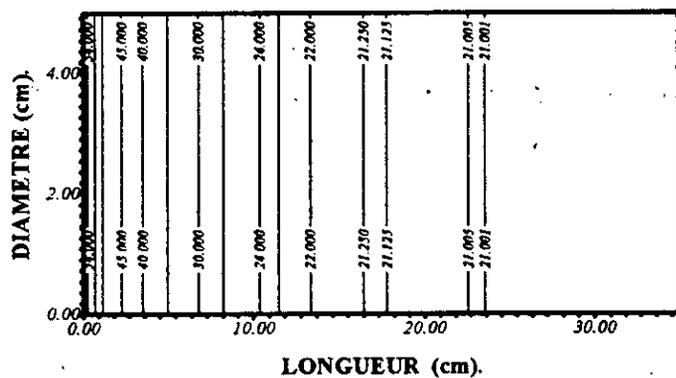
FIG(IV-I-3) ISOTHERMES après t = 30 mn.



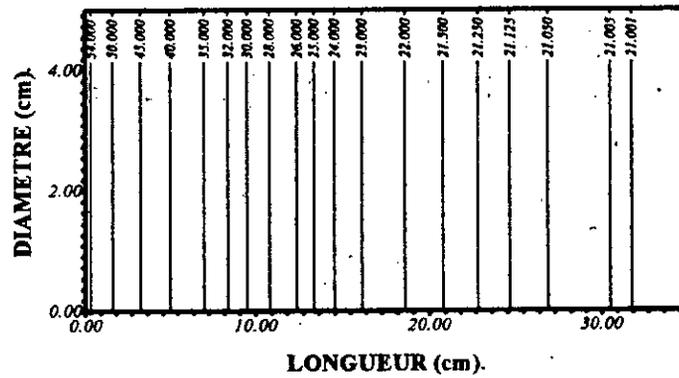
FIG(IV-I-4) ISOTHERMES après t = 1 heure.



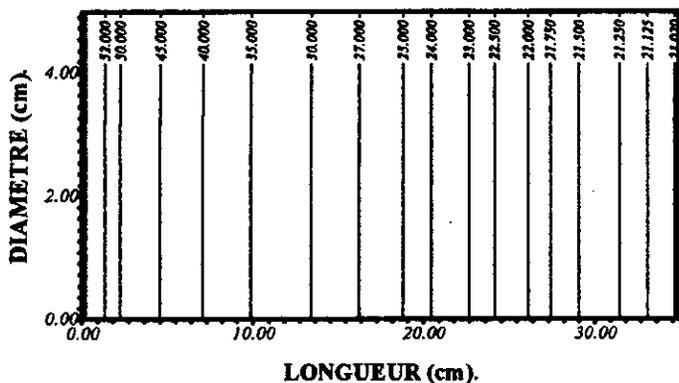
FIG(IV-I-5) ISOTHERMES après t = 2 heures.



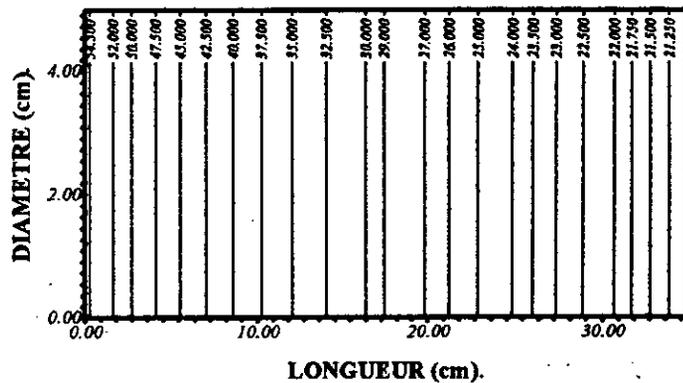
FIG(IV-I-6) ISOTHERME après t = 4 heures.



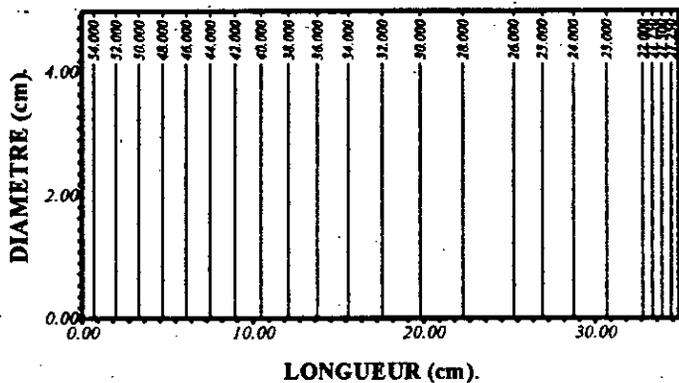
FIG(IV-I-7) ISTHERME après t = 8 heures.



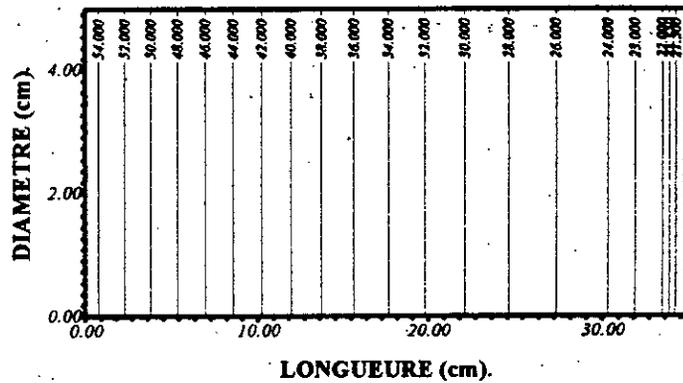
FIG(IV-I-8) ISOTHERME après t = 12 heures.



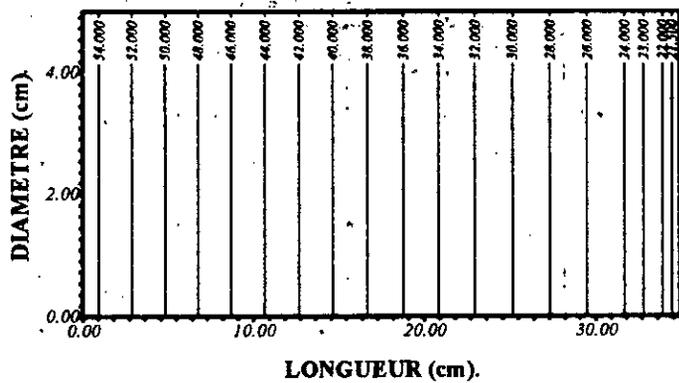
FIG(IV-I-9) ISOTHERMES après t = 18 heures.



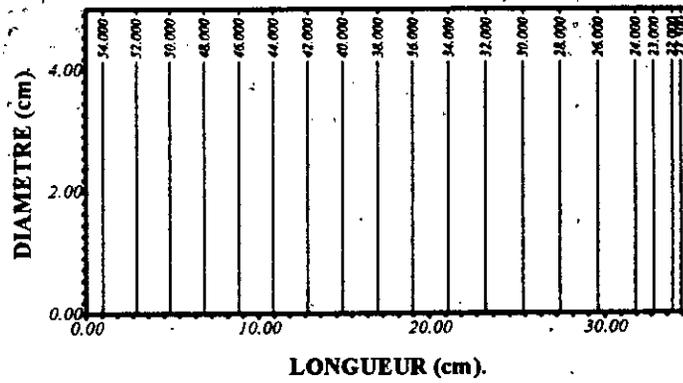
FIG(IV-I-10) ISOTHERMES après t = 1 jours.



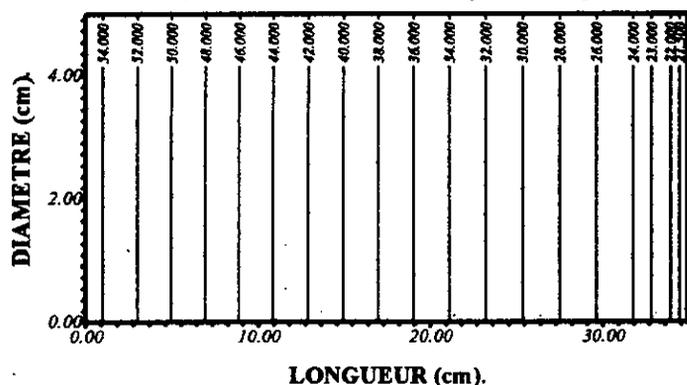
FIG(IV-I-11) ISOTHERMES après t = 2 jours.



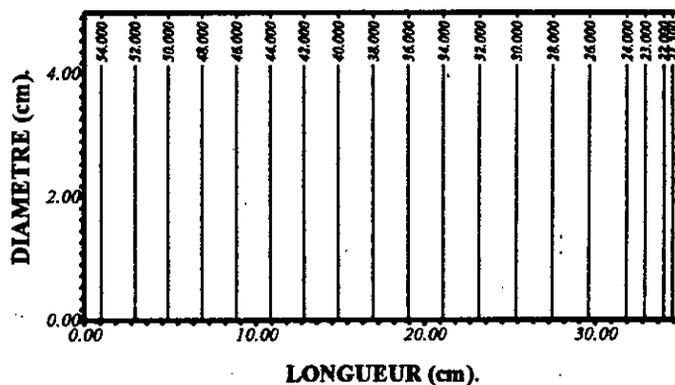
FIG(IV-I-12) ISOTHERMES après t = 6 jours.



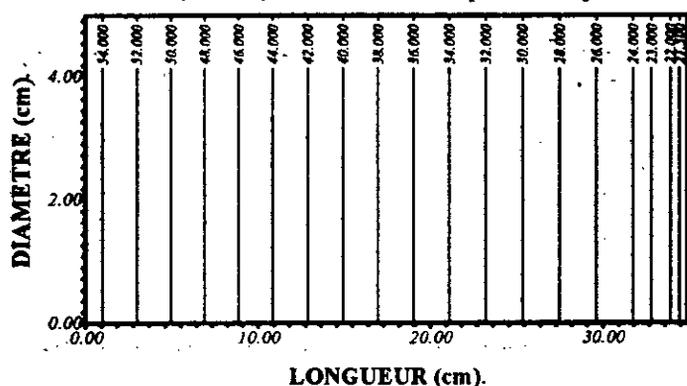
FIG(IV-I-14) ISOTHERMES après t = 10 jours.



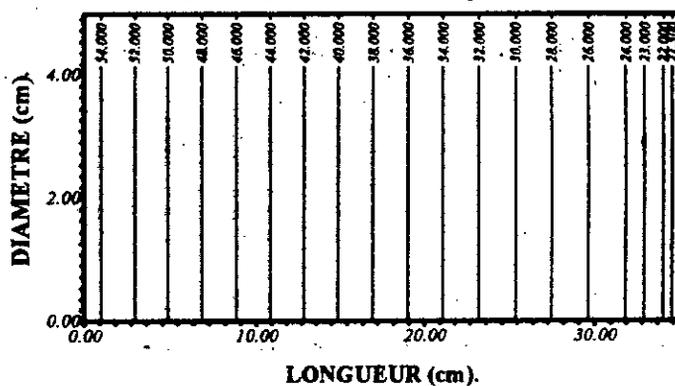
FIG(IV-I-15) ISOTHERMES après t = 15 jours.



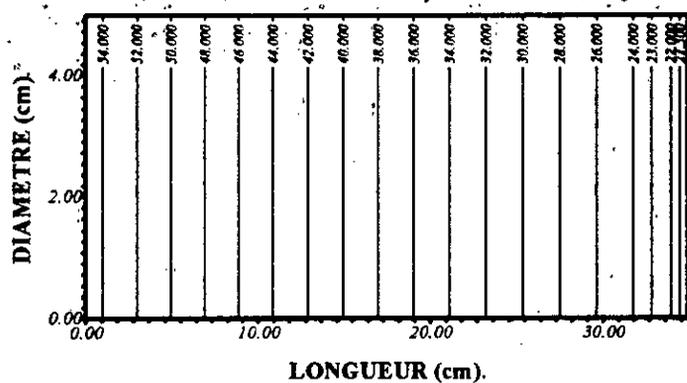
FIG(IV-I-16) ISOTHERMES après t = 22 jours.



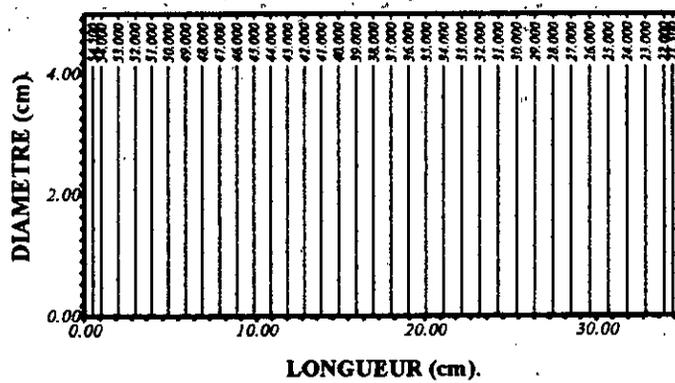
FIG(IV-I-17) ISOTHERMES après t = 1 mois.



FIG(IV-I-18) ISOTHERMES après t = 1 mois, 12 jours.



FIG(IV-I-19) ISOTHERME après t = 2 mois, 25 jours.



IV.2 PROFILS HYDRIQUES :

Pour illustrer l'effet de la gravité sur la distribution du champs hydriques, nous avons considéré trois cas de simulation qui sont précisés dans le tableau ci-dessous. Les résultats numériques obtenues sont représentés sur les figures : Fig.(IV-III-1) à Fig.(IV-III-7) et Fig.(IV-IV).

Cas traité	A	B	C
Conditions initiales	$w_0=11.2\%$	$w_0=7\%$	$w_0=0.02\%$
Conditions aux limites			
$x=0$	$j_m=0$	$j_m=0$	$j_m=m(t)$
	$T=55^\circ\text{c}$	$T=55^\circ\text{c}$	$T=30^\circ\text{c}$
$x=1$	$j_m=0$	$j_m=0$	$j_m=0$
	$T=21^\circ\text{c}$	$T=21^\circ\text{c}$	$T=10^\circ\text{c}$

VALIDATION DU PROGRAMME :

Sur les figures(IV-III-I .a,b et c) sont rapportés les résultats obtenus par notre programme fig.(IV-III-a et c) et ceux obtenus par Prat[III-1]. On remarque que les résultats obtenus sont cohérents avec un petit décalage pour des fortes teneurs en humidité, ceci est dû au fait que Prat a étudié le cas du modèle complet et couplé, alors que notre cas d'étude correspond au cas généré découplé.

IV-2-1 Potentiel gravitaire négligé :

Dans le cas B, nous remarquons que les iso-humidités sont des verticales et que l'évolution est comme suite :

- Evolution d'une zone humide à partir de la paroi froide.

Nous avons considéré (03) de figures pour les instants $t=2$ minutes, $t=1$ Heure et $t=2$ Heurs respectivement.

On voit bien que pour le cas semi-ouvert, nous avons une forte teneur en humidité dans le matériau CF. fig.(IV-III-2,3,4).

IV-2-2 Potentiel gravitaire pris en compte :

Pour les cas A et B, nous voyons clairement que les iso-humidités sont des courbes qui présentent une inclinaison par rapport à celles dans le cas sans effet de gravité, elles sont illustrées par les figures(IV-III-2-b,3-b).

Sur la figure (IV-III-b) apparaît une distribution des teneurs en humidité qui montre précisément l'aspect bidimensionnel des transferts résultants de l'action combinée du mouvement vertical dû à la gravité et du mouvement horizontal dû aux gradients thermiques. Cette même combinaison cause une zone de forte teneur en humidité en bas et à l'extrémité froide de la cellule.

Matériau initialement sec :

Sur les figures (IV-III-5,6,7) sont rapportés les résultats relatifs au cas C.

Après 40 heures, nous remarquons que l'effet de la gravité n'apparaît pas du fait que les iso-humidités sont des verticales pour les deux cas avec ou sans effet de gravité. On remarque que l'évolution des iso-humidités est lente avec de faibles teneurs en humidité.

La figure (IV-III-0) montre l'évolution de la teneur en eau moyenne en fonction du temps pour un certain nombre de points pris à l'intérieur de l'échantillon avec et sans effet de gravité respectivement.

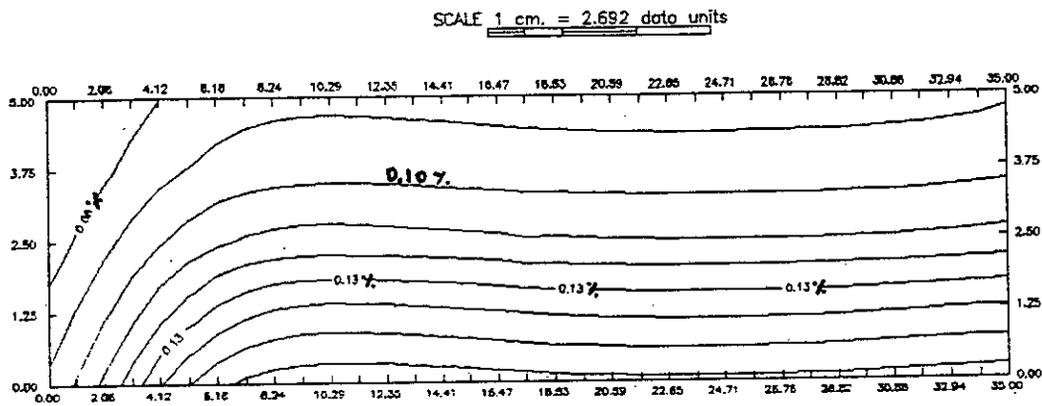
IV-3 FLUX DE CHALEUR ET DE MASSE :

Sur la figure (IV-IV) sont représentés les flux de masse pour les deux phases liquide et vapeur, on note :

Pour de fortes teneurs en humidité, nous remarquons la prédominance de transfert de masse en phase liquide par contre le transfert de masse en phase vapeur reste modéré.

Comparaison des résultats obtenus avec ceux obtenus par Prat.
Modèle Fermé.

$$w_0 = 11,2\%$$



- A -

5 z cm

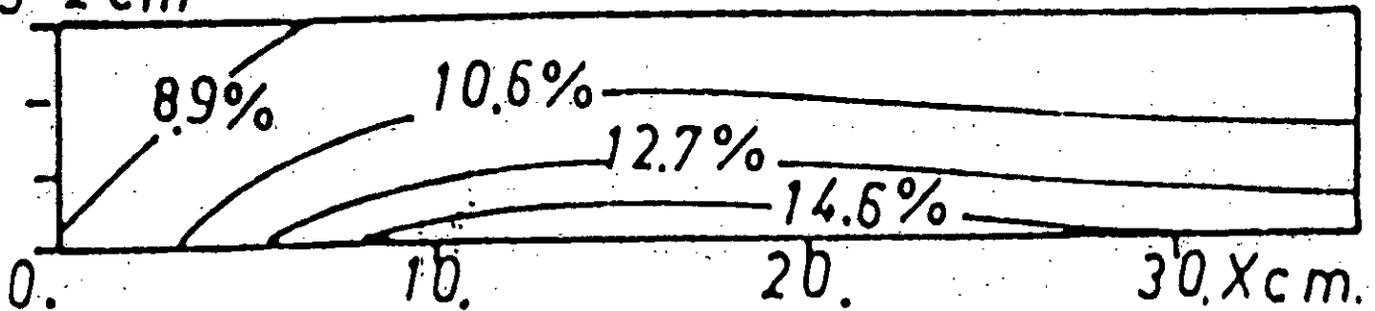


FIG. 7. Moisture content distribution ($w_0 = 11.2\%$):

- 8 -

SO-HUMIDITE POUR T=1heur

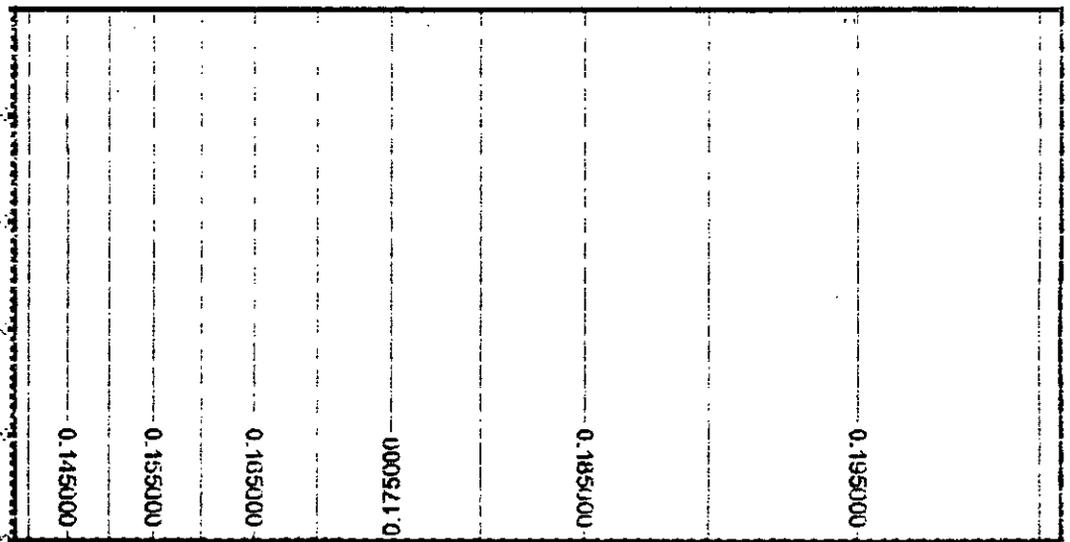
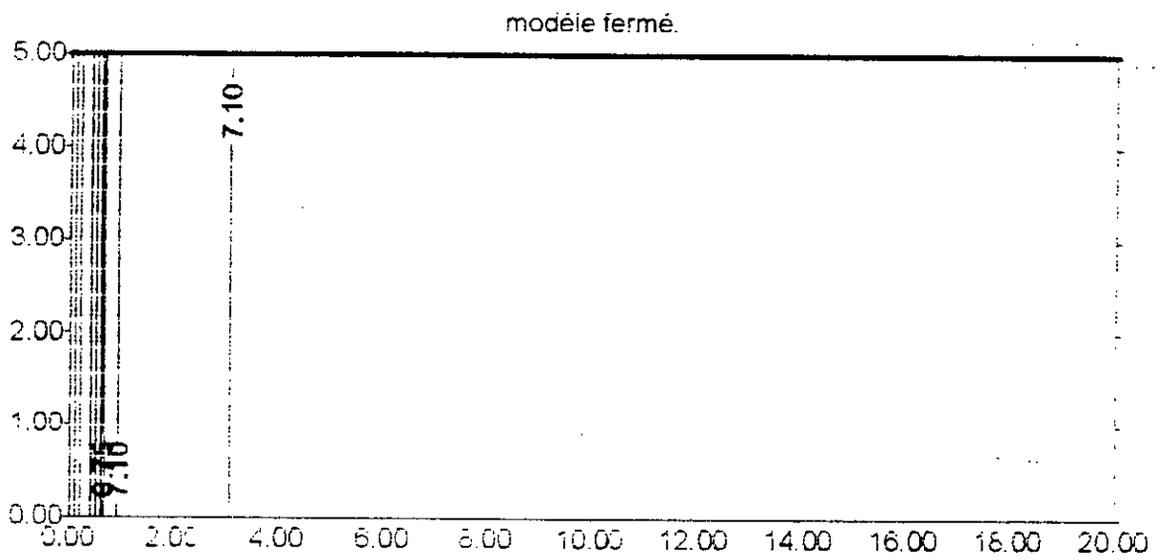


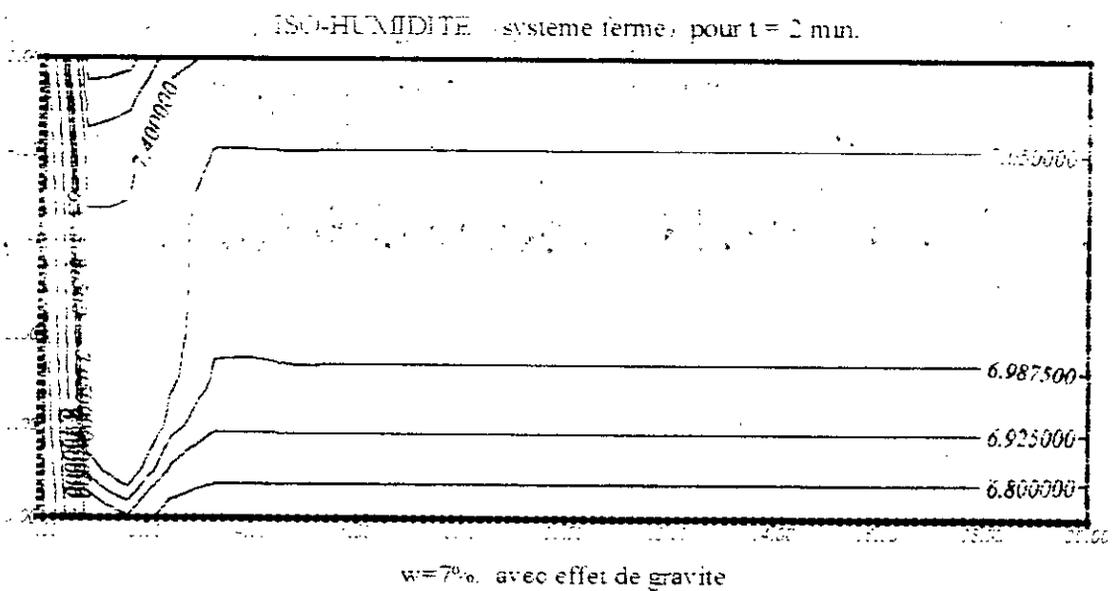
Fig (IV - III - 1)

w=11.2%, SANS EFFET DE GRAVITE

- 2 -



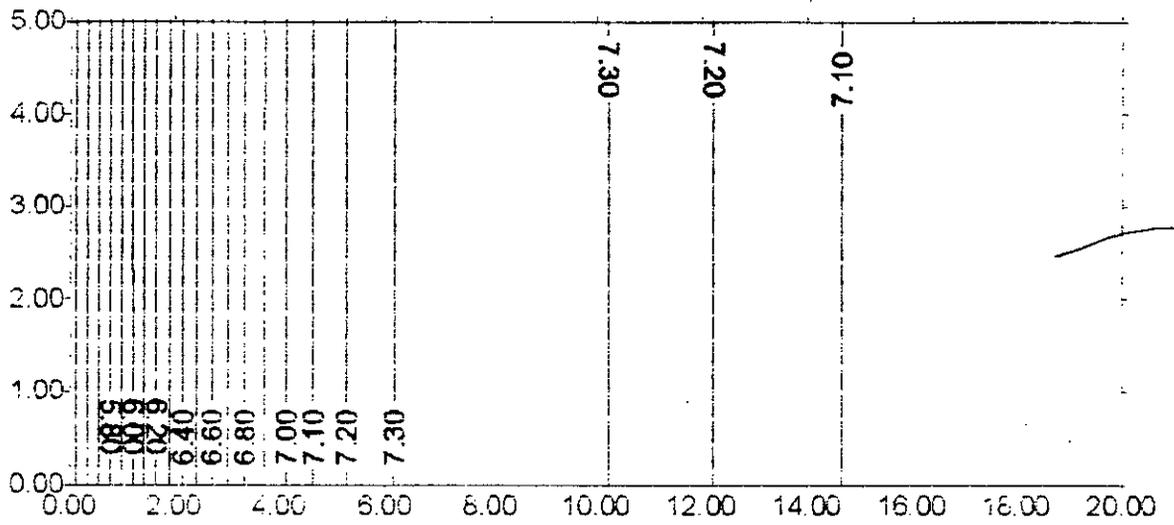
- A -



w=7% avec effet de gravite

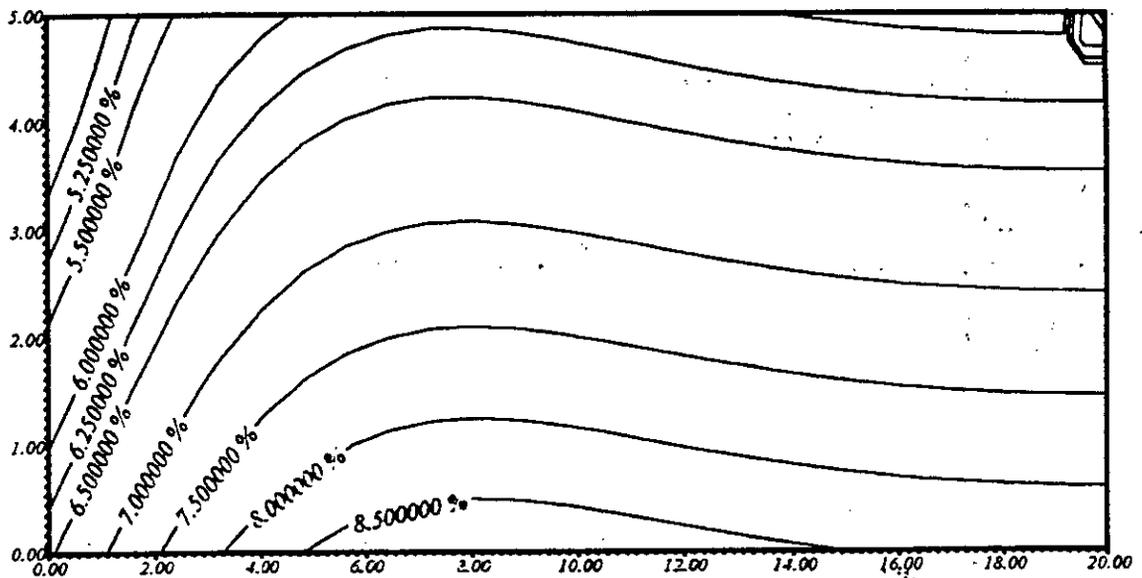
- B -

Modèle fermé.
 $w_0 = 7\%$.



- A -

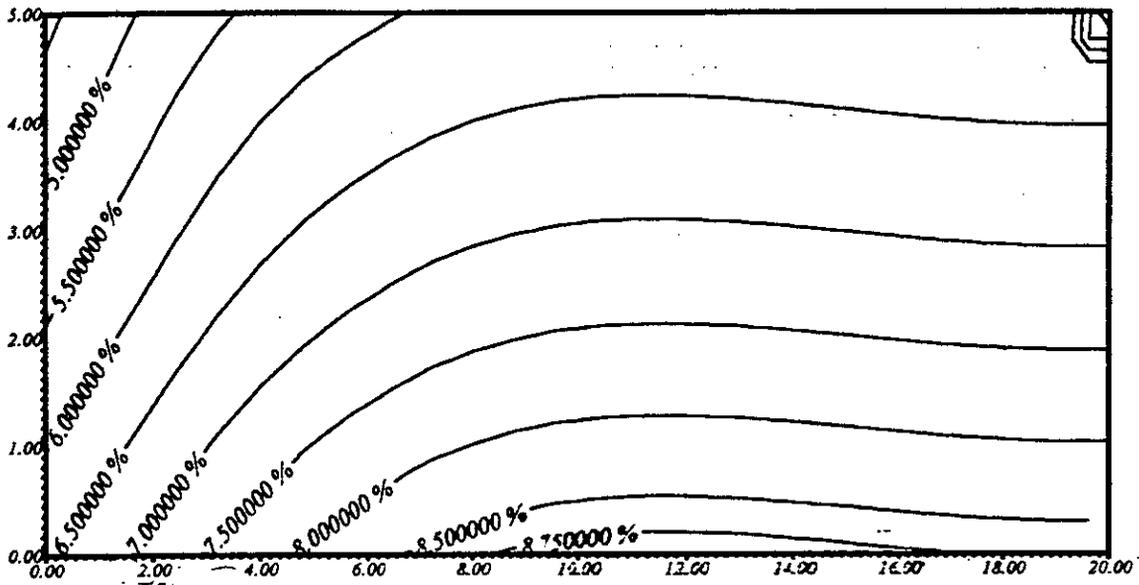
Conditions : $w = 7\%$, avec effet de gravité.



(b) : Iso-Humidité au temps $t = 1$ heure.

- B -

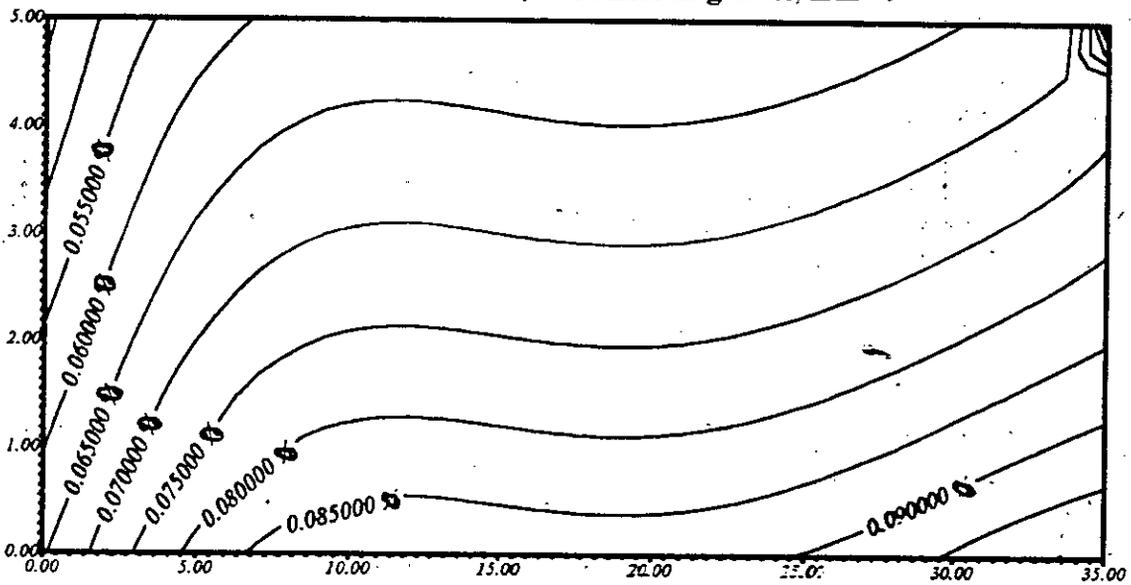
Conditions : $w=7\%$, avec effet de gravité, $L/H=4$.



(a) : Iso-Humidité au temps $t=2$ heures.

- A -

Conditions : $w=7\%$, avec effet de gravité, $L/H=7$

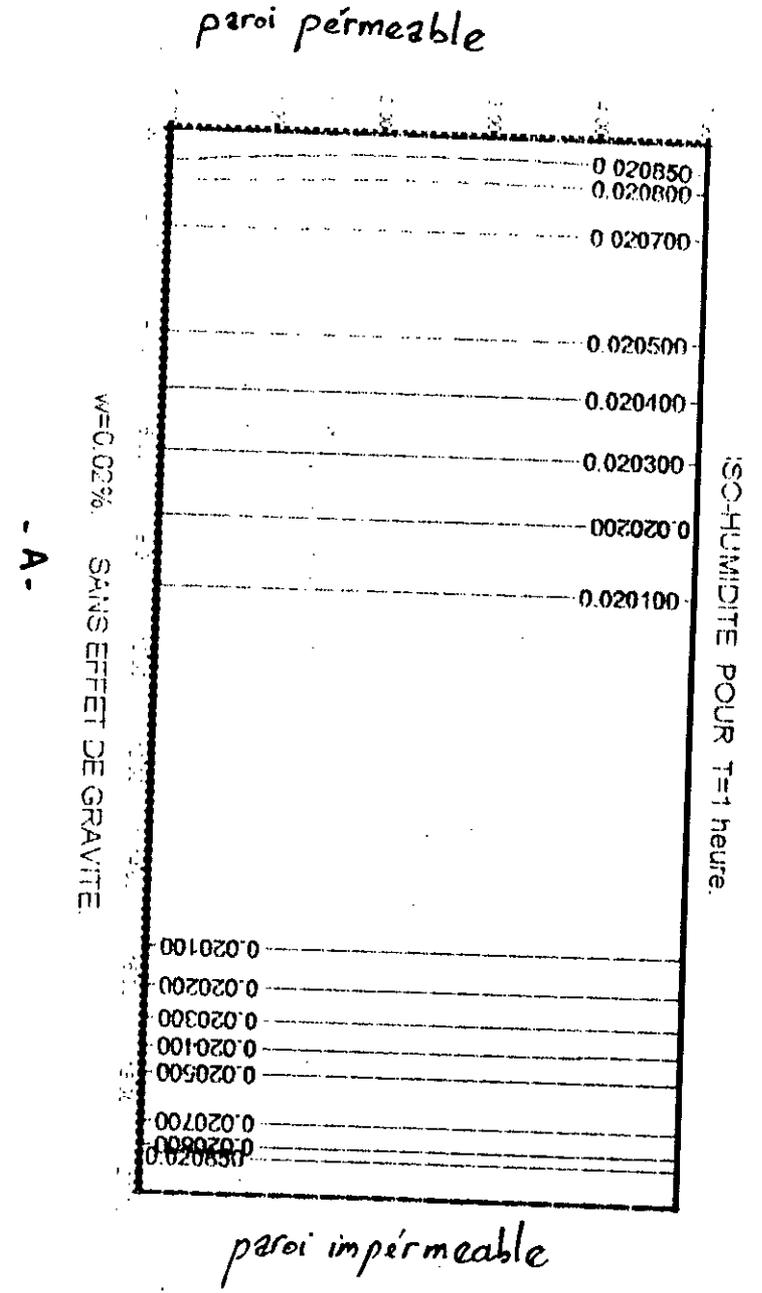
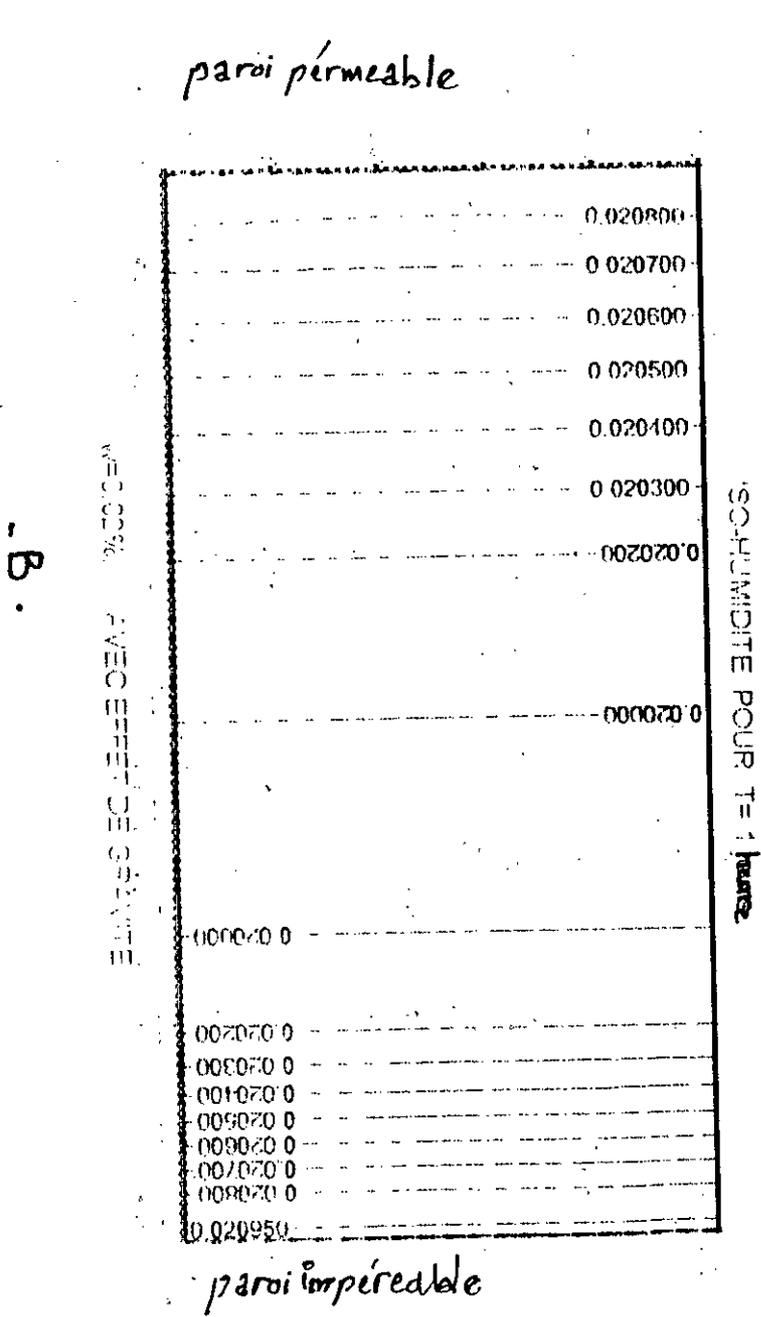


(b) : Iso-Humidité au temps $t=2$ heures.

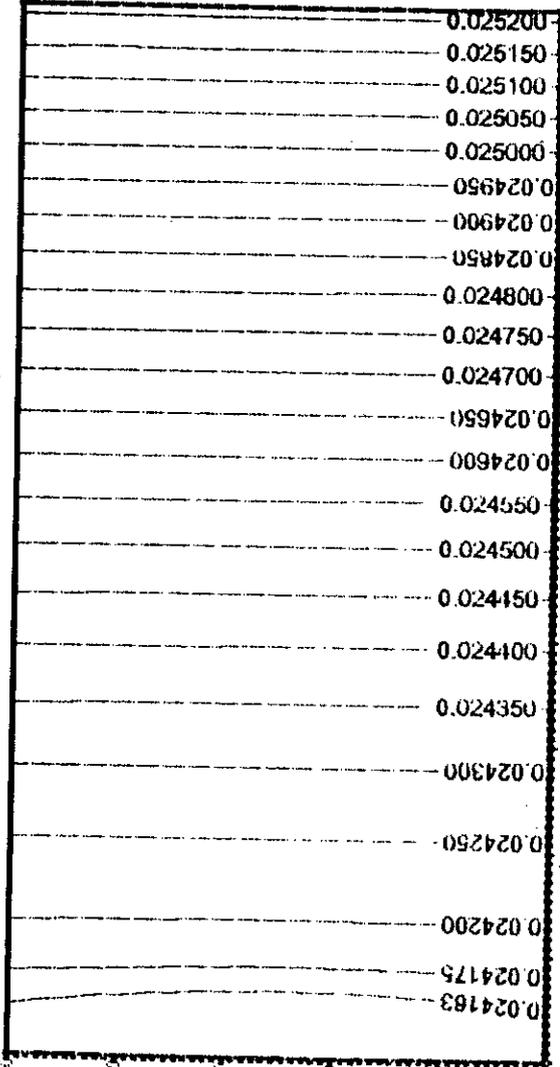
- B -

Fig (IV - III - 4)

Fig (IV-III.5)



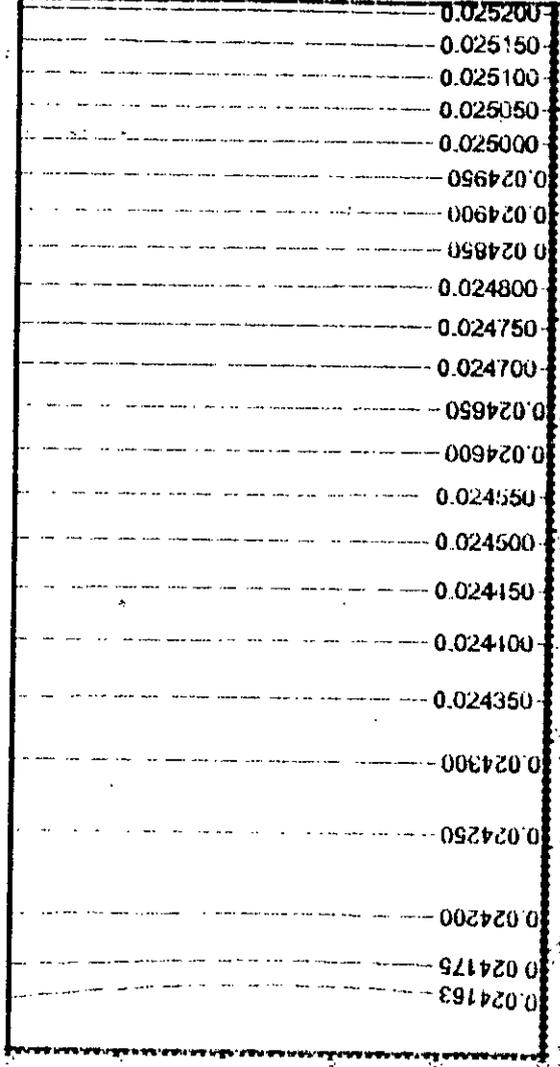
ISO-HUMIDITE POUR T= 1 jours.



w=0.02% SANS EFFET DE GRAVITE.

- A -

ISO-HUMIDITE POUR T= 1 jours.

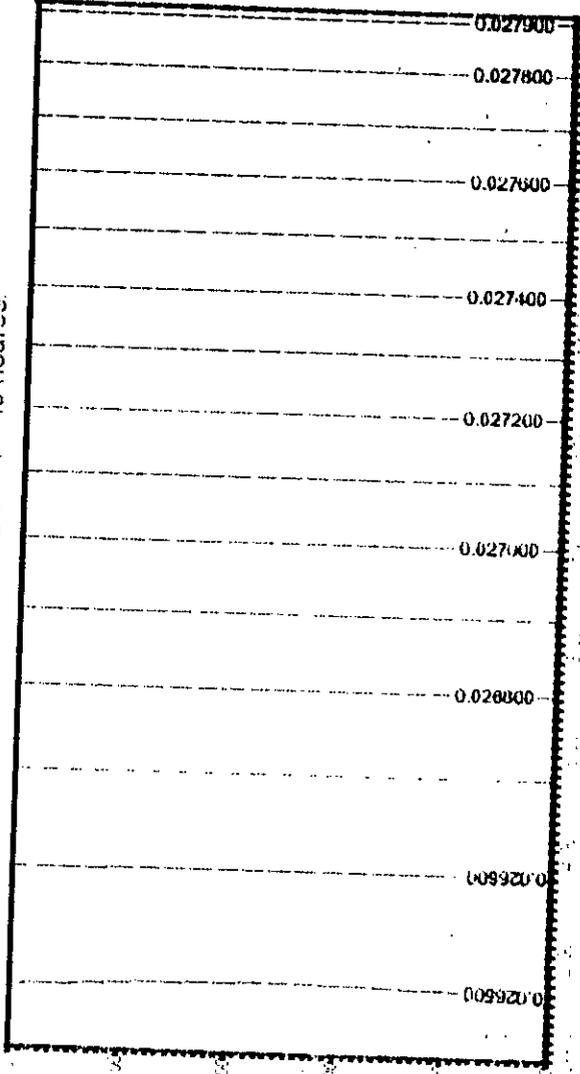


w=0.02% AVEC EFFET DE GRAVITE.

- B -

Fig (IV-III - 6)

SO-HUMIDITE POUR T = 40 heures



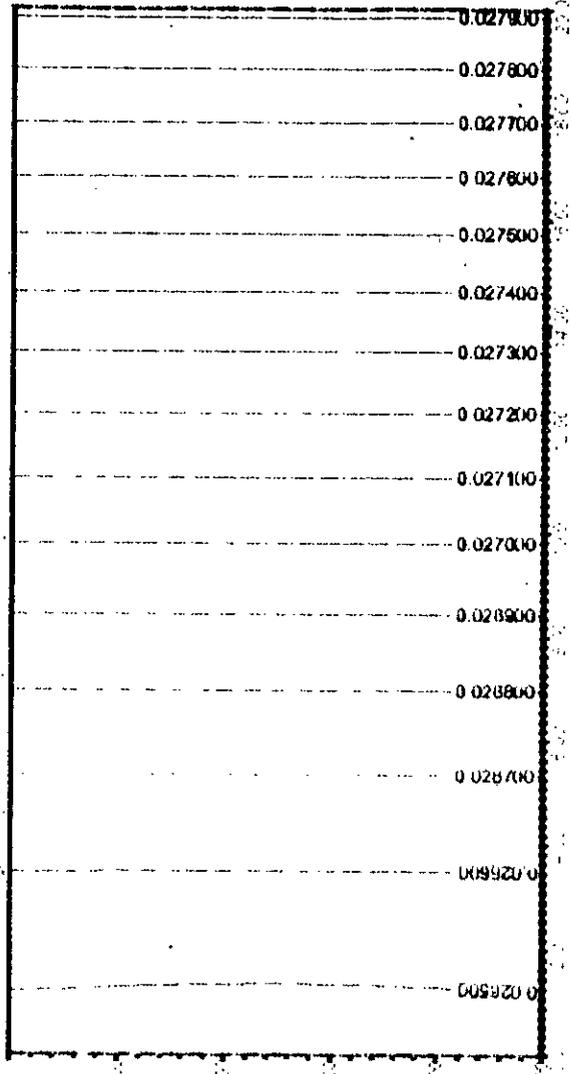
SANS EFFET DE GRAVITE

- A -

paroi perméable

paroi imperméable

SO-HUMIDITE POUR T = 40 heures



AVEC EFFET DE GRAVITE

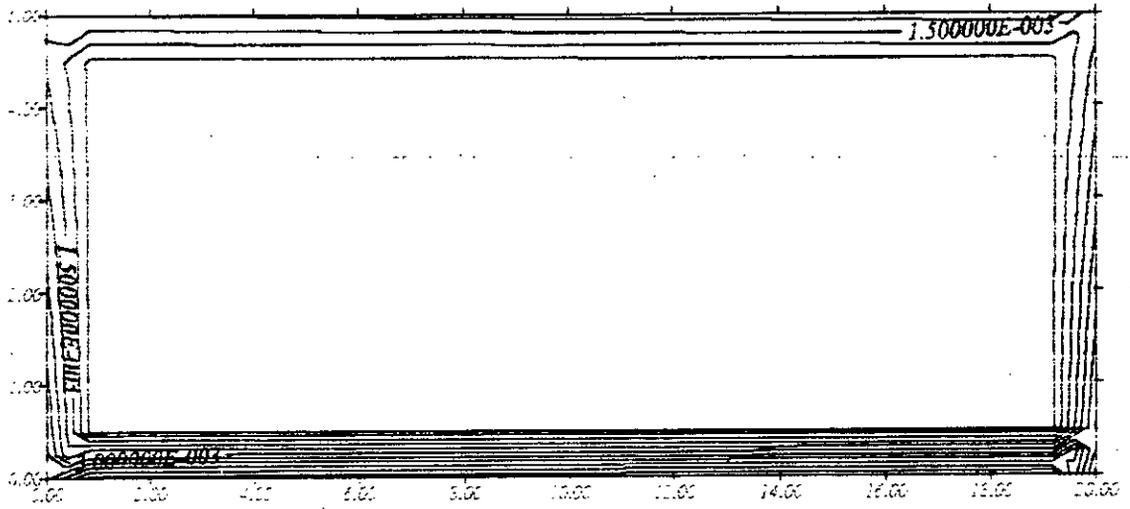
- B -

paroi perméable

paroi imperméable

Fig (IV - III - 7)

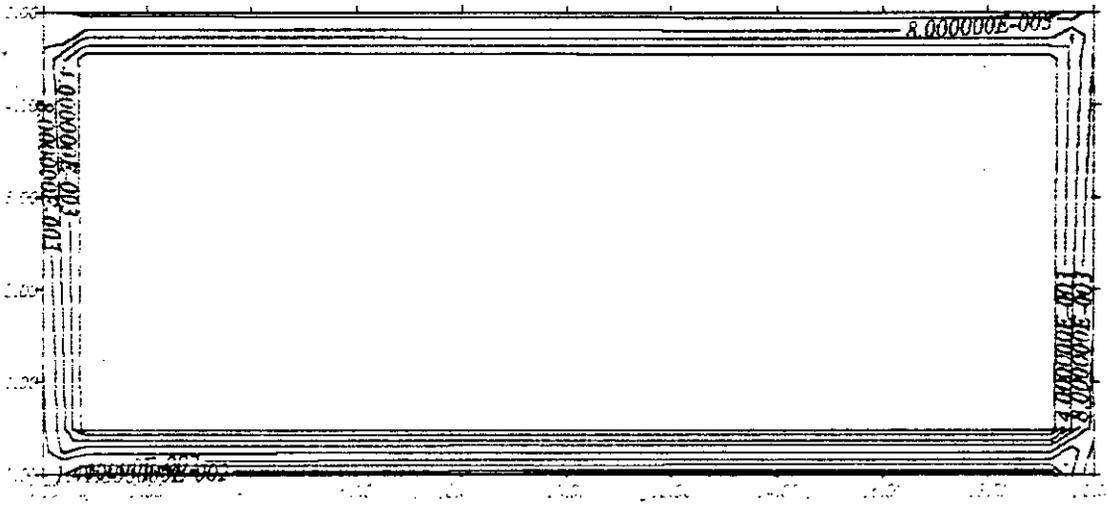
iso-flux ed masse en phase vapeur pour $t = 2 \text{ min.}$



modèle fermé $w = 7\%$

- A -

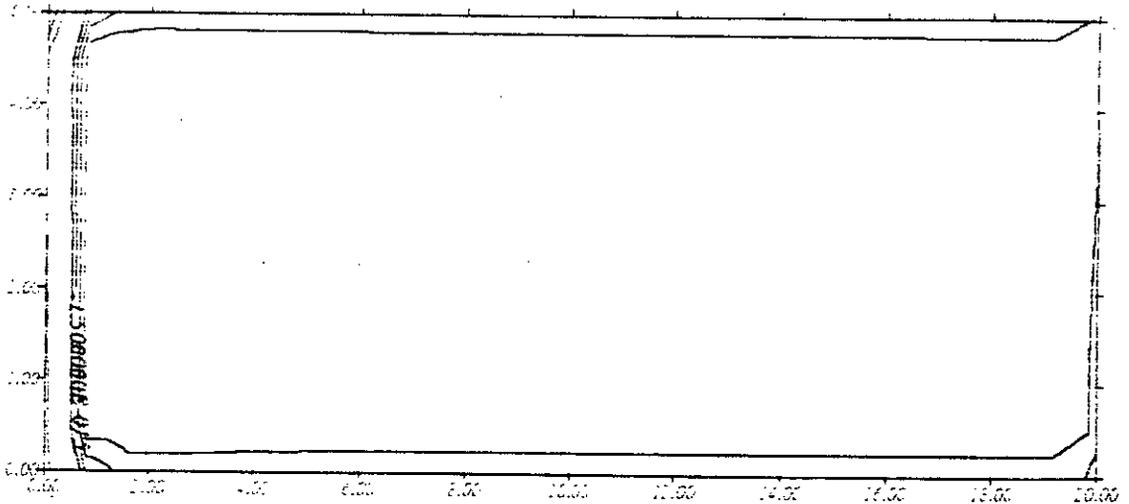
iso-flux de masse en phase vapeur pour $t = 1 \text{ heure}$



modèle fermé $w = 7\%$

- B -

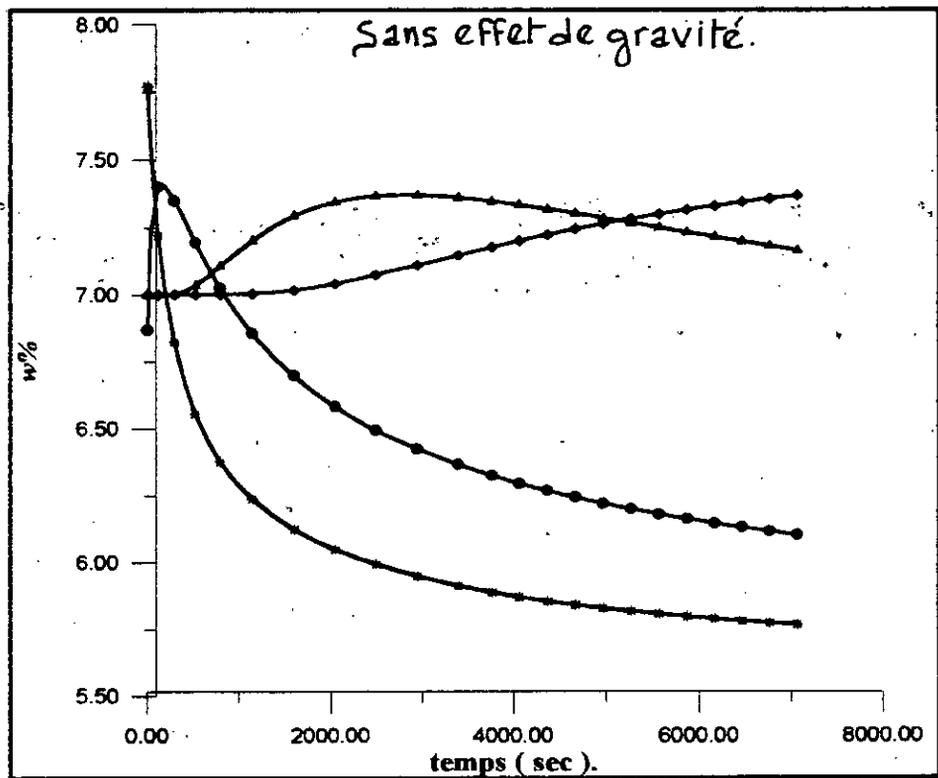
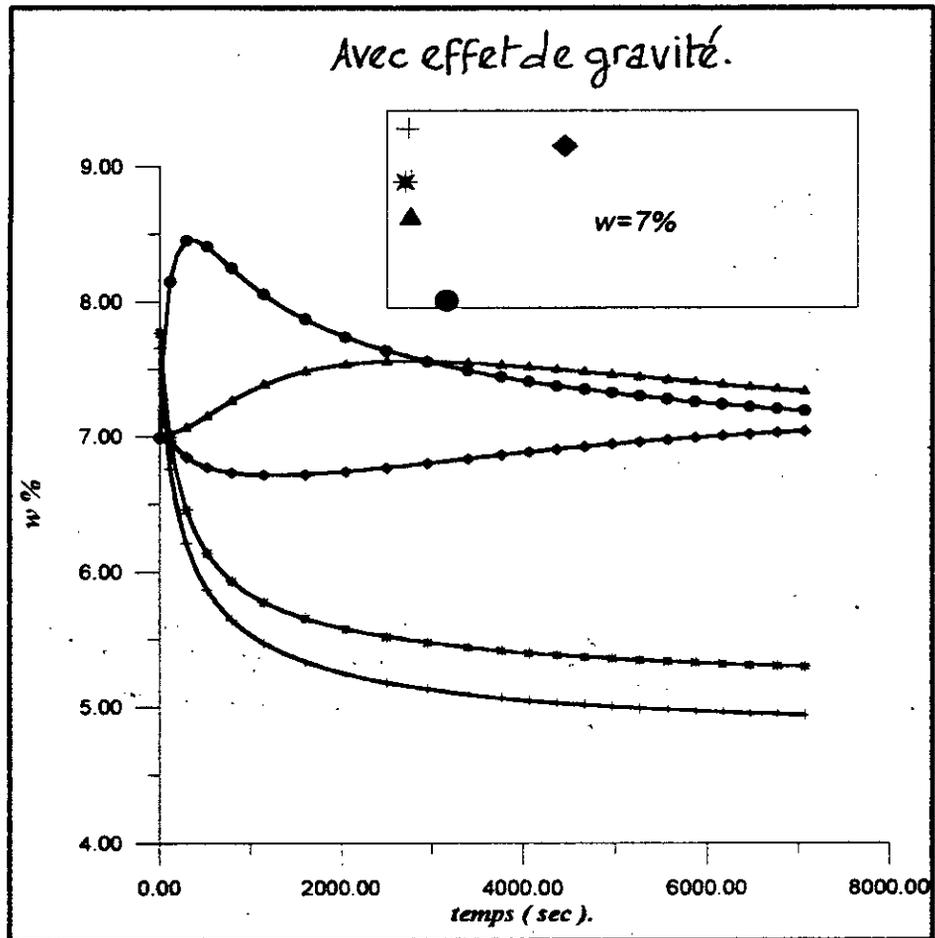
iso-flux de masse en phase liquide pour $t = 1 \text{ heure}$



modèle fermé $w = 7\%$

- C -

Fig (IV - IV - 1)



FIGURE(IV-III-0)

Evolution de la teneur en humidité en fonction du temps, en certains points de la cellule.

CONCLUSION.

CONCLUSION GENERALE

Le travail présenté dans ce mémoire, concerne l'étude de l'influence de la gravité sur la distribution des champs thermique et hydrique en milieux poreux, il nous a permis :

- ◆ D'élaborer un code de calcul bidimensionnel par la méthode des éléments finis pour résoudre le problème de transfert découplé chaleur - masse dans une enceinte à section rectangulaire. Ce code a été validé par comparaison des résultats obtenus avec ceux obtenus par PRAT [III-1]
 - ◆ De mettre en évidence l'effet de la gravité pendant la thermomigration .
 - ◆ D'évaluer l'influence des mécanismes au travail et à démontrer les particularités des transferts dans des échantillons expérimentaux, résultant de l'action combinée de la gravité et du mouvement d'eau dû aux gradients thermiques.
 - ◆ En vu du bilan proposé ici, l'état actuelle de notre analyse suggère de compléter ce travail, en envisageant plusieurs extensions :
 - * Les phénomènes d'hystérésis en présence des gradients thermiques ;
 - * L'effet tridimensionnel causé par la forme géométrique de l'échantillon ;
 - * L'effet induit par la structure particulière de la cellule.
-

ANNEXES

FONCTION D'INTERPOLATION :• **FAMILLE D'ÉLÉMENTS TRIANGULAIRES :**

Il n'est pas nécessaire d'évoquer la supériorité des triangles du point de vue précision, sur les autres éléments géométriques utilisés par la méthode des éléments finis, mais, nous allons nous limiter à développer le formalisme de calcul associé à cette élément.

• **POLYNOMES D'INTERPOLATION :**

Par l'interpolation linéaire de LAGRANGE, on a :

$$P(x,y) = C_0 + C_1x + C_2y,$$

qui est le polynôme de LAGRANGE associé à cette élément.

>

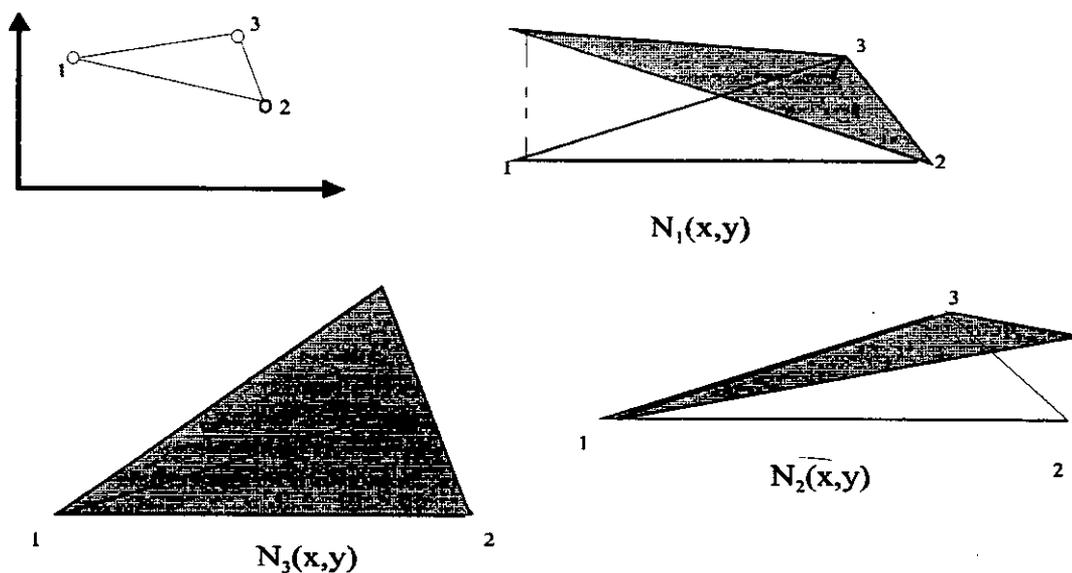


figure (I-1) : allure des fonctions de forme

L'approche d'une grandeur $U(x, y)$ discrétisée (cf. annexe IV) en élément triangulaires s'écrit :

$$U_e = C_0^e + C_1^e x + C_2^e y.$$

Au niveau de chaque noeud on a :

$$U_i^e \equiv U_e(x_i, y_i) = C_0^e + C_1^e x_i + C_2^e y_i ; \quad i=1,3$$

U_i^e : variables modales.

Sous forme explicite on écrit :

$$\begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \\ U_3^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1^0 \\ C_2^0 \\ C_3^0 \end{Bmatrix} \quad (I)$$

- Les noeuds sont comptés dans le sens des aiguilles d'une montre.

On résolvant (I) pour les (C_i^e), on obtient l'approximation modale :

$$U_e = \sum_{i=1}^3 U_i^e N_i^e(x, y),$$

U_i^e : variables modales.

N_i^e : fonctions de formes.

$$N_i^e(x, y) = \frac{1}{2A_i} (\alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e y)$$

$$2A_e = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_i^e = x_j x_k - x_k y_j;$$

$$\beta_i^e = y_j - y_k; \quad i \neq j \neq k$$

$$\gamma_i^e = x_k - x_j;$$

$$i, j, k = 1, 2, 3.$$

Les indices de α_i^e, β_i^e et γ_i^e se permutent dans l'ordre naturel,

donc, si : α_i^e est pour $i=1$,

alors : $j=2, k=3$

$$\alpha_1^e = x_2 y_3 - x_3 y_2;$$

$$\beta_1^e = y_2 - y_3;$$

$$\gamma_1^e = x_3 - x_2;$$

Les fonctions de forme étant linéaires en x et en y, alors, les dérivées de celle-ci sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} &= \frac{\beta_i^e}{2A_e}; \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} &= \frac{\gamma_i^e}{2A_e}. \end{aligned} \quad (II)$$

On a que :

$$\int_{\Omega^e} N_i^e d\Omega^e = \begin{cases} \int_{\Omega^e} N_1^e d\Omega^e \\ \int_{\Omega^e} N_2^e d\Omega^e \\ \int_{\Omega^e} N_3^e d\Omega^e \end{cases}$$

TRANSFORMATION DU DOMAINE D'INTEGRATION :

L'intégrale de volume sur Ω^e est remplacée par celle de volume sur l'élément de référence Ω^r [III -2] :

$$\int_{\Omega^e} \dots d\Omega^e = \int_{\Omega^r} \dots \det(J) d\xi d\eta d\zeta.$$

tel que :

ξ, η et ζ : sont les variables de l'élément de référence ;

J : est le Jacobien dont le déterminant est donné pour un élément triangulaire à trois noeuds par :

$$\det(J) = 2A^e = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) ;$$

A^e : l'aire de l'élément réel.

En deux dimensions, les limites d'intégration en ξ pour l'élément de référence classique triangulaire sont :

$$\int_{\xi=0}^{\xi=1} \int_{\eta=0}^{\eta=1-\xi} \dots \det(J) d\eta d\xi ;$$

Les fonctions de forme de cet élément de référence sont :

$$\left\{ \begin{matrix} N_1^r \\ N_2^r \\ N_3^r \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} N^r \\ N_2^r \\ N_3^r \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1-\xi-\eta \\ \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} ;$$

et leurs dérivées sont données par :

$$\left\{ \frac{\partial N_i^r}{\partial \xi} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial N_1^r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_2^r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_3^r}{\partial \xi} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} ; \quad \left\{ \frac{\partial N_i^r}{\partial \eta} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial N_1^r}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_2^r}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_3^r}{\partial \eta} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\} .$$

Comme on a que :

$$\int_{\xi=0}^{\xi=1} \int_{\eta=0}^{\eta=1-\xi} (1-\xi-\eta) \det(J) d\eta d\xi = \int_{\xi=0}^{\xi=1} \int_{\eta=0}^{\eta=1-\xi} \xi \det(J) d\eta d\xi =$$

$$\int_{\xi=0}^{\xi=1} \int_{\eta=0}^{\eta=1-\xi} \eta \det(J) d\eta d\xi = \frac{A}{3} .$$

Alors :

$$\int_{\Omega^e} N_i^e d\Omega^e = \begin{cases} \int_{\Omega^e} N_1^e d\Omega^e = \frac{A}{3} \\ \int_{\Omega^e} N_2^e d\Omega^e = \frac{A}{3} \\ \int_{\Omega^e} N_3^e d\Omega^e = \frac{A}{3} \end{cases}$$

EVALUATION DES MATRICES ELEMENTAIRES :

Soit K_{ij} les éléments de la matrice [K], définis comme suit :

$$k_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) dx dy$$

$$k_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \nabla N_i^e \cdot \nabla N_j^e d\Omega^e$$

En utilisant (II), on peut écrire [III-5] :

$$k_{ij}^e = \frac{1}{4A_e^2} (\beta_i^e \beta_j^e + \gamma_i^e \gamma_j^e) \left(\int_{\Omega^e} dx dy \right);$$

$$k_{ij}^e = \frac{1}{4A_e} (\beta_i^e \beta_j^e + \gamma_i^e \gamma_j^e).$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{23}^e \\ k_{31}^e & k_{32}^e & k_{33}^e \end{bmatrix}$$

avec :

$$k_{11}^e = \frac{1}{4A_e} \left((y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2 \right);$$

$$k_{22}^e = \frac{1}{4A_e} \left((y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2 \right);$$

$$k_{33}^e = \frac{1}{4A_e} \left((y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 \right);$$

$$k_{12}^e = k_{21}^e = \frac{1}{4A_e} \left[(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) - (x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \right];$$

$$k_{13}^e = k_{31}^e = \frac{1}{4A_e} \left[(y_3 - y_2)(y_2 - y_1) - (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) \right];$$

$$k_{23}^e = k_{32}^e = \frac{1}{4A_e} \left[(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) - (x_3 - x_1)(x_1 - x_2) \right].$$

De même, soit [M] une matrice dont les éléments sont définis par :

$$M_{ij}^e = \int_{\Omega^e} N_i \cdot N_j d\Omega^e$$

$$M_{ij}^e = \begin{cases} \frac{A_e}{12} & i \neq j \\ \frac{A_e}{6} & i = j \end{cases}$$

RESOLUTION DES SYSTEMES NON LINEAIRES :

Soit l'équation non linéaire suivante :

$$[K(U)]U = F. \quad (*)$$

Les différentes techniques que nous allons décrire, reposent sur notre capacité à résoudre des systèmes linéaires d'une façon répétitive jusqu'à ce que l'on obtienne la convergence.

Dans le choix d'une méthode de résolution on doit tenir compte de plusieurs facteurs à savoir :

1. le type de non linéarité ;
2. l'existence d'une ou plusieurs solutions ;
3. la disponibilité d'une méthode de construction d'une solution approchée ;
4. la précision et la rapidité de convergence.

La méthode adoptée pour notre cas d'étude est la méthode incrémentale.

DESCRIPTION DE LA METHODE INCREMENTALE :

La convergence vers une solution exacte n'est souvent pas garantie d'une manière explicite par la majorité des méthodes numériques utilisées, ce qui pose une grande difficulté pour un certain nombre de problèmes particuliers où la convergence est difficile à atteindre. Pour remédier à ce problème, on va utiliser cette méthode dite incrémentale qui consiste en l'utilisation d'un certain nombre de procédures, eux mêmes reposent sur le fait que souvent la solution $\{U\}$ est connue lorsque les termes du vecteur chargement $\{f\}$ sont nuls. Dans de telles circonstances, il est commode d'étudier le comportement de $\{U\}$ lorsqu'on incrémente le vecteur $\{f\}$.

En utilisant une telle méthode avec un incrément adéquat pour , on peut atteindre la convergence.

Pour bien détailler, réécrivons l'équation (*) sous la forme :

$$P(u) + \lambda f_0 = 0, \quad P(u) = K(u) \cdot u = K \cdot u$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dP}{du} \right) \cdot \frac{du}{d\lambda} + f_0 \equiv (K_T) \cdot \frac{du}{d\lambda} + f_0 = 0.$$

Ou encore :

$$\frac{du}{d\lambda} = -K_T(u)^{-1} \cdot f_0,$$

Qui est le système d'équation à résoudre. Ceci étant un problème classique d'analyse numérique pour lequel on peut appliquer de nombreuses méthodes numérique de résolution dont on dispose. La plus simple de ces méthode est celle d'EULER dont l'algorithme est le suivant :

$$U_{m+1} - U_m = -K_T(U_m)^{-1} F_0 \Delta\lambda_m$$

$$\Rightarrow U_{m+1} - U_m = -(K_T)_m^{-1} \Delta F_m$$

$$\text{avec:} \quad \begin{cases} \lambda_{m+1} = \lambda_m + \Delta\lambda_m \\ F_{m+1} = F_m + \Delta F_m \end{cases}$$

AMELIORATION DE LA METHODE :

On peut calculer U_{m+1} en utilisant l'approximation améliorée de la méthode incrémentale dont l'algorithme est le suivant :

$$U_{m+1} - U_m = -(K_T)_{m+\theta}^{-1} \Delta F_m$$

avec:

$$\begin{cases} (K_T)_{m+\theta} = K_T(U_{m+\theta}) \\ U_{m+\theta} = (1-\theta)U_m + \theta U_{m+1} \\ 0 < \theta < 1. \end{cases}$$

RESOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATION PAR LA METHODE D'OPTIMISATION :

PRINCIPE :

Soit à résoudre le système d'équation $A X = b$,

X^* : Vecteur solution

Définissons le résidu $r = b - A X$ et la forme quadratique :

$$E(x) = \frac{1}{2} (x - x^*)^t \cdot A \cdot (x - x^*)$$

$$E(x) = \frac{1}{2} x^t A x - x^t b + \frac{1}{2} x^{*t} A x^* \quad (1)$$

$$\text{mais: } x = A^{-1}(b - r)$$

$$x^* = A^{-1}b$$

$$E(x) = \frac{1}{2} r^t A^{-1} r \quad (2)$$

$E(x)$ étant une forme quadratique défini positive, dont le minimum unique se trouve au point annulant le gradient de $E(x)$.

$$\nabla E(x) = \left\{ \frac{\partial E(x)}{\partial x} \right\} = -(b - Ax) = -r.$$

MORALITE :

La solution x^* du système $A x = b$ correspond au vecteur minimisant $E(x)$.

DIRECTION DE DESCENTE ET CHOIX OPTIMAL DU PAS :

• DIRECTION DE DESCENTE :

Si $E(x)$ est continu et continûment différentiable, alors au voisinage du point $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, on a le développement de TAYLOR :

$$E(x^{(k)} + \Delta x) = E(x^{(k)}) + \Delta x \nabla E(x^{(k)}) + \dots \quad (4)$$

Si Δx est faible on peut négligé les autres termes d'ordre supérieur.

Si :

$$\Delta x \cdot \Delta E(x^{(k)}) < 0 \quad (5)$$

alors:
$$E(x^{(k)} + \Delta x) < E(x^{(k)}) \quad (6)$$

Une direction vérifiant l'inéquation (5) est dite « **direction de descente** » au point x^k pour la fonction $E(x)$.

• **METHODE DE DESCENTE :**

Parmi les méthodes de minimisation d'une fonction $E(x)$, les méthodes de descente ont pour formule générale :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} p^{(k)} \quad (7)$$

$p^{(k)}$: direction au point x^k ;

$\alpha^{(k)}$: pas de descente à définir.

◇ **Pas de descente optimal :**

On cherche la valeur du pas $\alpha^{(k)}$ minimisant $E(x^{(k+)})$ dans la direction de descente $p^{(k)}$, soit :

$$\frac{\partial E(x^{(k+)})}{\partial \alpha^{(k)}} = 0$$

on obtient :

$$\alpha^{(k+1)} = \frac{p^{(k)t} r^{(k)}}{p^{(k)t} . A . p^{(k)}}$$

Moralité :

Algorithme de la méthode des descentes avec un pas optimum [] :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{P^{(k)t} r^{(k)}}{P^{(k)t} \cdot A \cdot P^{(k)}} P^{(k)}$$

$$r^{(k)} = b^{(k)} - A x^{(k)}$$

k : indice de l'itération.

Résultat :

les méthodes de descente se différencient donc par le choix de la direction de descente $p^{(k)}$.

- **METHODE DU GRADIENT :**

Pou ce cas, on choisit :

$$P^{(k)} = -\nabla E(x^{(k)}) = r^{(k)}$$

On prend pour direction $p^{(k)}$, celle qui réalise la plus grande diminution ponctuelle de $E(x)$.

$r^{(k)}$ et $p^{(k)}$ sont dans ce cas-ci colinéaires.

Algorithme [III-1] :

$$\left. \begin{array}{l} x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{r^{(k)t} r^{(k)}}{r^{(k)t} \cdot A \cdot r^{(k)}} r^{(k)} \\ \text{avec:} \\ r^{(k)} = b - A \cdot x^{(k)} \\ \text{test d'arrêt:} \\ \left| \frac{r^{(k+1)} - r^{(k)}}{r^{(k)}} \right| < \varepsilon. \end{array} \right\} k = 0, \quad k_{\max}$$

• **METHODE DU GRADIENT CONJUGUE :**

Dans cette méthode, on choisit des directions $p^{(k)}$ orthogonales au sens de la métrique de A, on parle alors de directions A - conjuguées vérifiant :

$$p^{(k)t} \cdot A \cdot p^{(k-1)} = 0, \quad \forall k$$

Le choix de cette méthode est justifier par le fait que c'est la direction qui minimise le plus $E(x^{(k+)})$ à l'itération (k+1) voir [III-3] pour la démonstration.

1. Résumé de l'algorithme de la méthode du gradient conjugué :

Etant données A, b, k_{\max} , $x^{(0)}$ et ε :

1)

$$\begin{aligned} r^{(0)} &= b - A \cdot x^{(0)} \\ p^{(0)} &= r^{(0)} \end{aligned}$$

2)

$$\left. \begin{aligned} \alpha^{(k)} &= \frac{p^{(k)t} \cdot r^{(k)}}{p^{(k)t} \cdot A \cdot p^{(k)}} \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \alpha^{(k)} p^{(k)} \\ r^{(k+1)} &= b - A x^{(k+1)} \\ \beta^{(k)} &= \frac{r^{(k+1)t} \cdot r^{(k+1)}}{r^{(k)t} \cdot r^{(k)}} \\ p^{(k+1)} &= r^{(k+1)} + \beta^{(k)} p^{(k)} \end{aligned} \right\} k = 0, \quad k_{\max}$$

Test d'arrêt :

$$\frac{\|r\|}{\|b\|} < \varepsilon.$$

• **PRECONDITIONNEMENT D'UNE MATRICE :**

Comme la vitesse de convergence des méthodes de descente augmente quand le conditionnement $\text{cond}(A)^1$ de la matrice A tend vers 1 [III-1], l'idée de base du préconditionnement est de remplacer la résolution du système $Ax = b$ par celle du système équivalent :

$$C^{-1}.A.x = C^{-1}.b,$$

ou $\text{cond}(C^{-1}.A)$ est plus proche de 1 ; le mieux serait de choisir $C^{-1}=A^{-1}$.

En pratique, on choisit C proche de A et facilement inversible.

Si on définit :

$$S^{(k)} = C^{-1}.r^{(k)}$$

alors, on peut écrire l'algorithme pour la méthode du gradient conjugué avec préconditionnement [III-2] :

Etant données $A, b, k_{\max}, x^{(0)}$ et ε :

1)

$$r^{(0)} = b - A.x^{(0)}$$

$$C.p^{(0)} = r^{(0)}$$

$$s^{(0)} = p^{(0)}$$

¹ $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$
 $\|A\|$: norme de A .

2) DESCENTE :

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha^{(k)} &= \frac{r^{(k)t} \cdot S^{(k)}}{P^{(k)t} \cdot A \cdot P^{(k)}} \\
 X^{(k+1)} &= X^{(k)} + \alpha^{(k)} P^{(k)} \\
 r^{(k+1)} &= b - AX^{(k+1)} \\
 CS^{(k+1)} &= r^{(k+1)} \\
 \beta^{(k+1)} &= \frac{r^{(k+1)t} \cdot S^{(k+1)}}{r^{(k)t} S^{(k)}} \\
 P^{(k+1)} &= S^{(k+1)} + \beta^{(k+1)} P^{(k)}
 \end{aligned} \right\} k = 0, \overline{k_{\max}}$$

Test d'arrêt :

$$\frac{\|r\|}{\|b\|} < \varepsilon.$$

Remarque :

Le programme informatique PDERESOL relatif à cette méthode avec préconditionnement par la méthode de CHOLEVSKY est joint en annexe III.

Sous programme informatique [PDERESOL] de la méthode du gradient**conjuguée avec préconditionnement de la matrice [A]=L*U :**

```

SUBROUTINE PDERESOL(A,B,X,N)           :: A,B Paramètres d'entrée
  IMPLICIT REAL*4 (A-H,O-Z)           :: X0 Solution initiale
  DIMENSION A(N,N),X(N),B(N),L(N,N),U(N,N) ::
  DATA itermax,aepsilon/100,0.0001/   :: Initialisations
  ***** Factorisation de la matrice A=L*U *****
  CALL PDEFAC(A,L,U,N)                 :: Factorisation en L*U
  Calcul des paramètres P(i) R(i)      :: Calcul des résidus et des pas
  CALL RESIDUS(A,B,R,X,N,Norm)         :: des descentes .
  ***** Calcul du paramètre intermédiaire S(i) *****
  CALL PDESOLUTION(S,L,U,R,N)          :: Résolution du système ;
  num=0.                                :: [C].S=R
  do 10 i=1,n                           ::
  p(i)=s(i)                              :: P0 pas des descentes.
  num=num+s(i)*r(i)                       ::
10  continue                               ::
  do 100 nbi=1,itermax                   ::
  den=0.                                   ::
  do 20 i=1,n                             ::
  c=0.                                     ::
  do 30 j=1,n                             ::
  c=c+a(i,j)*p(j)                         ::
30  continue                               ::
  den=den+p(i)*c                           ::
20  continue                               ::
  pasopt=num/den                          :: pasopt : pas optimale de
  do 40 i=1,n                             :: descente
  x(i)=x(i)+pasopt*p(i)                   :: Solution du système.
40  continue                               ::
  ***** Calcul des paramètres pour une itération suivante *****
  CALL RESIDUS(A,B,R,X,N,Norm)           ::
  if(norm.le.aepsilon) goto 200          :: Test d'arrêt des itérations
  CALL PDESOLUTION(S,L,U,R,N)           :: Résolution matricielle du
  numb=0.                                 :: système : [C].S=R
  do 50 i=1,n                             ::
  numb=numb+r(i)*s(i)                     ::
50  continue                               ::
  bet=numb/num                             ::
  num=numb                                  ::
  do 60 i=1,n                             ::
  p(i)=s(i)+bet*p(i)                       ::
60  continue                               ::
100 continue                               ::
200 continue                               ::
  RETURN                                  ::
  END                                      ::

```

```

***** SOUS PROGRAMME DE CALCUL DES RESIDUS *****
SUBROUTINE RESIDUS(A,B,R,X,N,Norm)
DIMENSION A(N,N),X(N),R(N),B(N)
  norm=0.
  do 1 i=1,n
    r(i)=b(i)
    do 2 j=1,n
      r(i)=r(i)-a(i,j)*x(j)
2    continue
    norm=norm+r(i)*r(i)
1  continue
  RETURN
  END

```

```

**** SOUS PROGRAMME DE FACTORISATION INCOMPLETE DE CHOLEVSKY ***
SUBROUTINE PDEFAC(A,L,U,N)
  do 10 i=1,n
    l(i,i)=1.
    ll=i-1
    l2=i+1
    do 20 j=i,n
      tt1=0.
      do 30 k=1,ll
        tt1=tt1+l(i,k)*u(k,j)
30    continue
      u(i,j)=a(i,j)-tt1
20    continue
      do 40 j=l2,n
        tt2=0.
        do 50 k=1,ll
          tt2=tt2+l(j,k)*u(k,i)
50    continue
        l(j,i)=(a(j,i)-tt2)/u(i,i)
40    continue
10    continue
  RETURN
  END

```

```

***** SOUS PROGRAMME DE RESOLUTION DU SYSTEME (L*U).X=B *****
SUBROUTINE PDESOLUTION(X,L,U,B,N)
***** Résolution du système L*z=B *****
  x(1)=b(1)/l(1,1)
  do 10 i=2,n
    kk=i-1
    sx=0.
    do 20 j=1,kk
      sx=sx+x(j)*l(i,j)
20    continue
    x(i)=(b(i)-sx)/l(i,i)
10    continue

```

```
***** Résolution du système U.x=y *****  
      x(n)=x(n)/u(n,n)  
      do 30 i=n-1,1,-1  
        sx=0.  
        do 40 j=i+1,n  
          sx=sx+x(j)*u(i,j)  
40     continue  
        x(i)=(x(i)-sx)/u(i,i)  
30     continue  
      RETURN  
      END  
*****
```

Programme informatique de la discrétisation de l'échantillon en l'éléments triangulaire :

I. Repérage des noeuds :

Le sous programme **PDEGEOM** a pour taches de :

- Subdiviser l'échantillon en éléments rectangulaires de dimensions qui peuvent être variables selon les données introduites dans les vecteurs $\mathbf{dx}(i)$, $\mathbf{dy}(j)$ ($i=1, nx$, $j=1, ny$).

nx : nombre de pas suivant ox , ny : nombre de pas suivant oy

ce qui faciliteras le repérage des noeuds par se même programme et dont les coordonnées seront stockées dans les vecteurs $\mathbf{coorx}(i)$, $\mathbf{coory}(j)$ (resp).

- Subdiviser les rectangles précédents en sous éléments triangulaires par repérage de leurs noeuds dans la matrice $\mathbf{nl}(nd,3)$ suivant le schéma ;

$\mathbf{NL}(\text{ numéro de l'élément , } 1^{\text{er}} \text{ noeud, } 2^{\text{ième}} \text{ noeud, } 3^{\text{ième}} \text{ noeud })$

nd : nombre de noeuds total .

- Repérage des noeuds des frontières dans la matrice $\mathbf{nfr}(4,nf)$ suivant le schéma ;

$$\mathbf{NFR} \left\{ \begin{array}{l} - \text{noeuds de la première frontière } i=1, nx+1 \\ - \text{noeuds de la deuxième frontière } j=1, ny+1 \\ - \text{noeuds de la troisième frontière } i=1, nx+1 \\ - \text{noeuds de la quatrième frontière } j=1, ny+1 \end{array} \right.$$

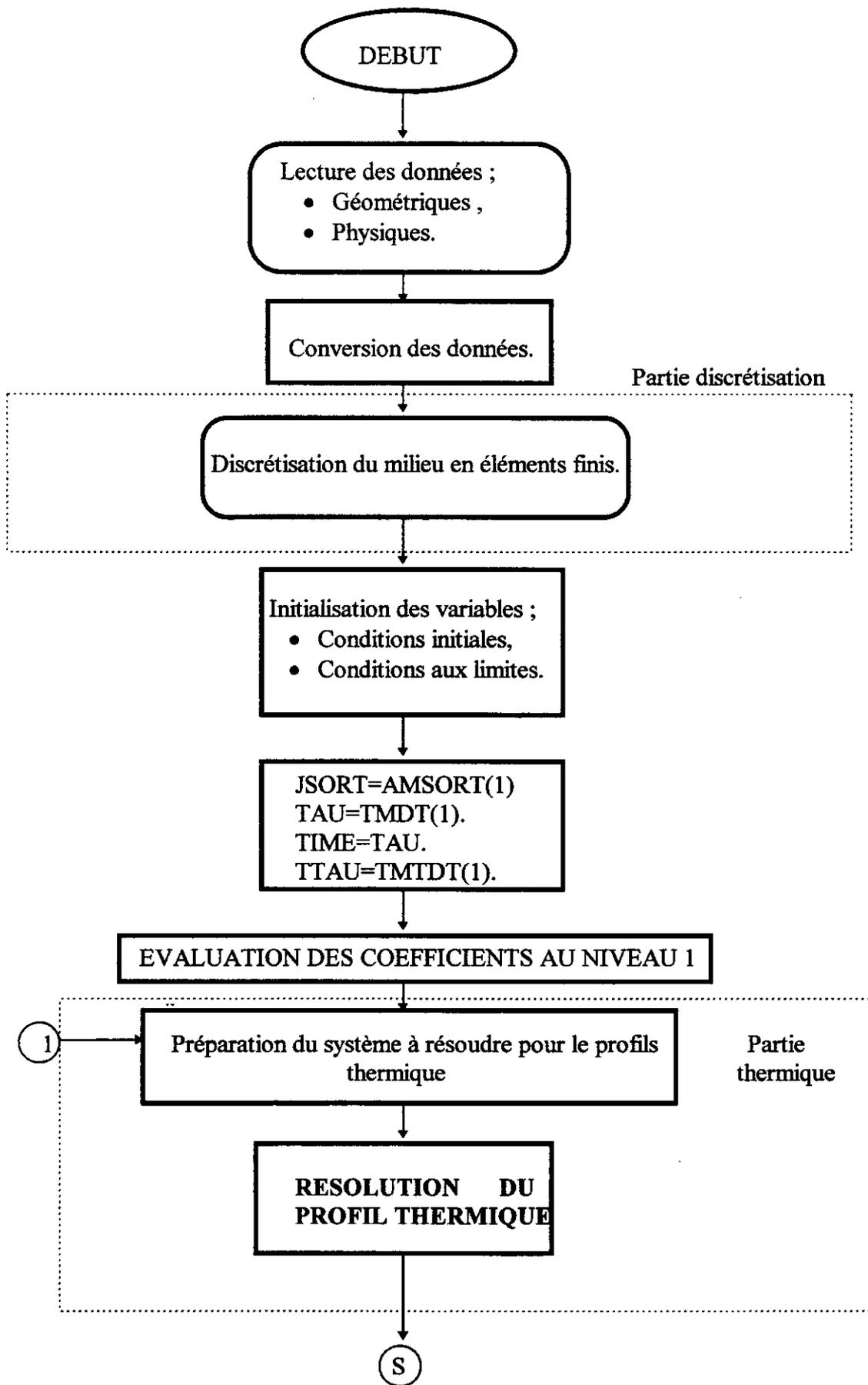
Ainsi on obtiendra la discrétisation en éléments finis de géométrie triangulaire suivant le schéma de la figure (IV-1).

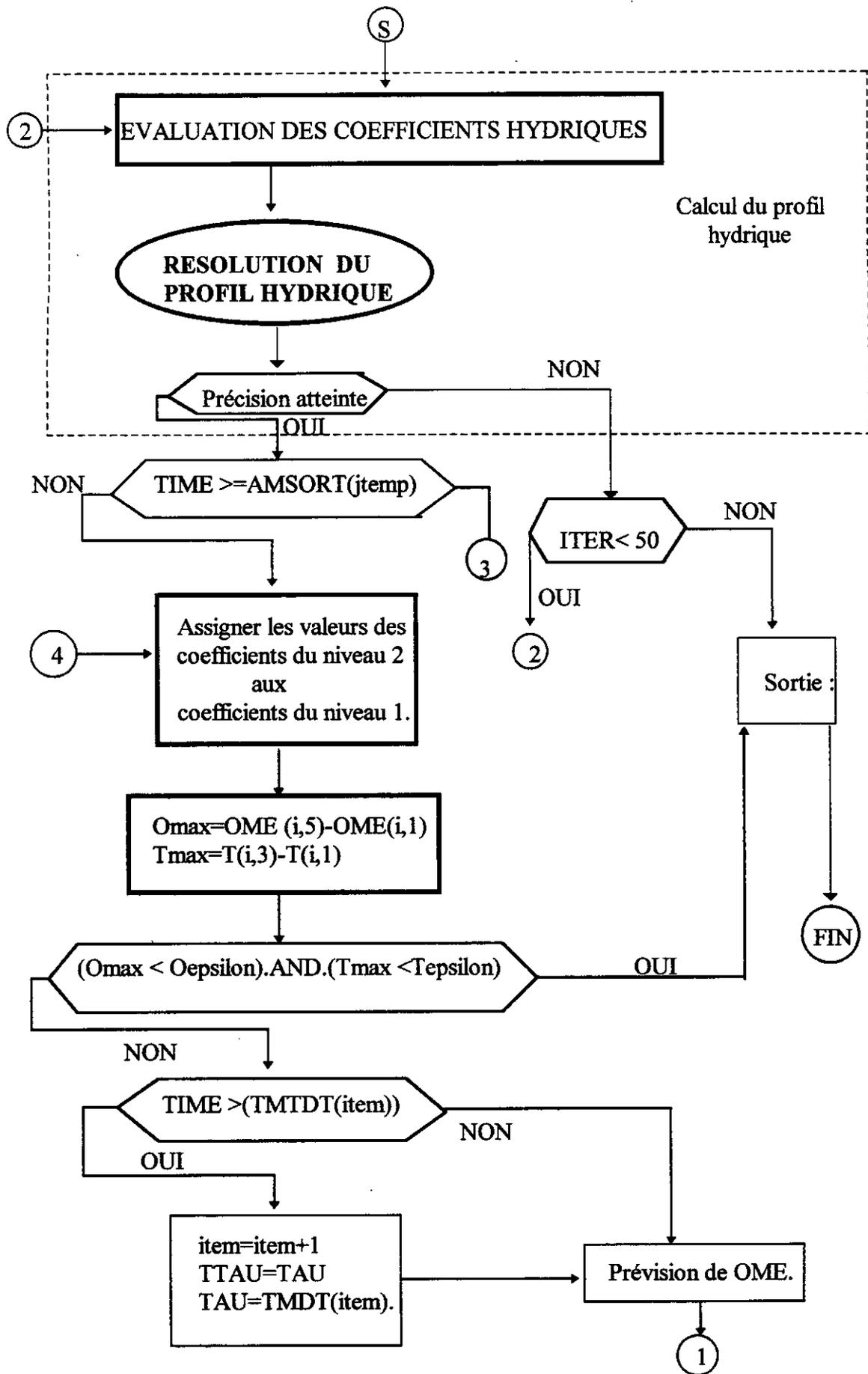
```

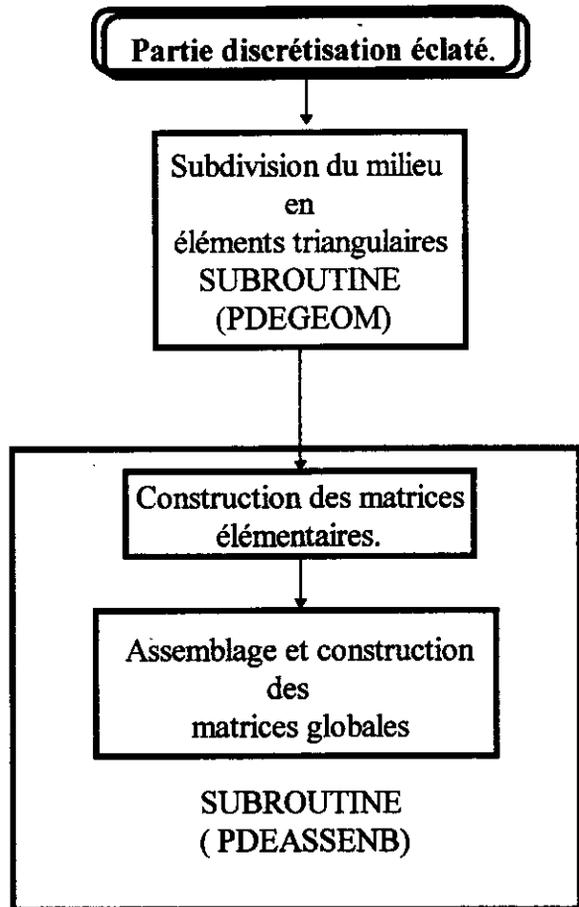
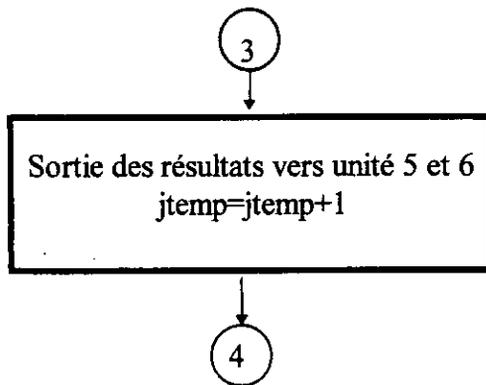
SUBROUTINE PDEGEOM(DX,DY,NL,NX,NY,NE,NP,ND,NFR,COORX,COORY,NDP)
  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
  dimension DX(nx),DY(ny),NL(nd,3),COORX(nx+1),COORY(ny+1),NDP(nf),NFR(4,nf)
    ne=2*nx*ny
    np=2*(nx+ny)
    nx1=nx+1
    ny1=ny+1
    nx2=2*nx
    ny2=2*ny
    nd=nx1*ny1
  ***** Détermination des coordonnées des noeuds NL(i,j) *****
    nl(1,1)=1
    nl(1,2)=nx1+2
    nl(1,3)=nx1+1
    nl(2,1)=1
    nl(2,2)=2
    nl(2,3)=nx1+2
    k=3
    do 10 iy=1,ny
      l=iy*nx2
      m=(iy-1)*nx2
      if(nx.eq.1) goto 30
      do 20 n=k,1,2
        do 40 i=1,3
          nl(n,i)=nl(n-2,i)+1
40      nl(n+1,i)=nl(n-1,i)+1
20      continue
30      if(ny.eq.1) go to 10
          do 50 i=1,3
            nl(l+1,i)=nl(m+1,i)+nx1
50      nl(l+2,i)=nl(m+2,i)+nx1
10      k=l+3
  ***** Détermine X(i) , Y(i) *****
    l=0
    yc=0.
    do 70 j=1,ny1
      xc=0.
      do 80 i=1,nx1
        l=l+1
        coorx(l)=xc
        coory(l)=yc
80      xc=xc+dx(i)
70      yc=yc+dy(j)
  ***** Détermine NDP(i) vecteurs noeuds indépendants *****
    fr=1
    n=0
    do 90 k=1,nx1
      n=n+1
      ndp(n)=n
      nfr(fr,k)=ndp(n)
90      continue

```

```
fr=fr+1
do 100 k=1,ny1
n=n+1
ndp(n)=ndp(n-1)+nx1
nfr(fr,k)=ndp(n-1)
100 continue
ndp(n)=ndp(n-1)
fr=fr+1
do 110 k=1,nx1
n=n+1
ndp(n)=ndp(n-1)-1
nfr(fr,k)=ndp(n-1)
110 continue
ndp(n)=ndp(n-1)
fr=fr+1
do 120 k=1,ny1
n=n+1
ndp(n)=ndp(n-1)-nx1
nfr(fr,k)=ndp(n-1)
120 continue
RETURN
END
*****
```





CHAPITRE I : Généralités

- [I -1] **Bear, J. (1972)**
Dynamics of fluids in porous media.
American E/Sevier publishing company.
- [I -2] **Bories, S. et Prat, M. (1996)**
Transferts de chaleur dans les milieux poreux.
Techniques de l'ingenieur, traité genie énergétique, **B8250.**
- [I -3] **Bories, S. (1985)**
Fragment de description de la physique des transferts thermiques dans les sous-sols.
La houille blanche, Vol. 3/4, pp. 211-219.
- [I -4] **Bories, S. (1982)**
Principes physiques de l'évaporation, transferts de chaleur et de masse entre un matériaux poreux et l'atmosphère. Humidité dans le bâtiment.
Collège international des sciences de la construction. PP. 13-31.
- [I -5] **Coussy, O. (1991)**
Mecanique des milieux poreux
Edition Technique, Paris.
- [I -6] **Crapiste, GH, Rothstein, E et Whitaker, S. (1986)**
A general closure scheme for the method of volume averaging, Chem. Enging. Sci. 41, pp. 227-235.

- [I -6] **Daian, J.F. (1986)**
*processus de condensation et de transferts d'eau dans un matériaux
micro et macro poreux.*
Thèse de doctorat d'état, USM de Grenoble.
- [I -7] **Dagan, G. (1990)**
Flow and transport in porous formations.
Springer Verlag, New York.
- [I -8] **De Vries, D.A. (1987)**
The theory of heat and moisture transfer in porous media revisited.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 30, N°7, pp. 1343-1350.
- [I -9] **Marle, CM. (1967)**
Les écoulements monophasiques en milieu poreux.
Revue de l'institut Français de pétrole, pp. 1471-1509.
- [I -10] **Marle, CM. (1984)**
*Les écoulements polyphasiques en milieu poreux : de l'échelle des
pores à l'échelle macroscopiques.*
Annales des mines, pp. 1-6.
- [I -11] **QUINTARD, M, et WHITAKER, S. (1993)**
*Transport in order and disordered porous media : volume averaged
equation, closure problems and comparison with experiments.*
Chem. Enging. SCI. 48, pp. 2537-2564.

CHAPITRE II : Modélisation des phénomènes de transfert en milieux poreux

[II -1] **Bacon, G. (1982)**

Simulation numérique des transferts de chaleur et de masse dans un milieu poreux non saturé.

Colloque sur les transferts de chaleur et de masse dans un milieu poreux non saturé, Lausanne.

[II -2] **Bories, S. (1984)**

Transfert de chaleur et de masse dans les matériaux. Analyse critique des différents modèles mathématiques utilisés. Humidité dans le bâtiment.

Collège international des sciences de la construction. PP. 13-31.

[II -3] **Crausse, P. (1983)**

Etude fondamentale des transferts couplés de chaleur et d'humidité en milieu poreux non saturé.

Thèse de doctorat d'état, INP de Toulouse.

[II -4] **De Vries, D.A. and J. Philip. (1957)**

Moisture movement in porous materials under temperature gradient.

Trans. Ame. Geoph. Union, Vol.38, PP. 222-232.

[II -5] **Krisher, O. et Kroll, K.**

Bases scientifiques de la technique du séchage.

(Traduction du Centre Technique des Industries Aérauliques et Thermiques.)

- [II -6] **Luikov, A. V. (1966)**
Heat and mass transfer in capillary porous bodies.
Pergamon Press.
- [II -7] **Recan, M. (1982)**
Simulation numérique du comportement thermique et hydrique d'un sol nu. Application à l'étude de l'évaporation par télédétection.
Thèse de Docteur Ingénieur, INP de Toulouse.

CHAPITRE III

- [III -1] **Crausse, P. (1983)**
Etude fondamentale des transferts couplés de chaleur et d'humidité en milieu poreux non saturé.
Thèse de doctorat d'état, INP de Toulouse.
- [III -2] **Boumahrat, M. et Gourdin, A. (1993)**
Méthodes numériques appliquées.
Edition O. P. U.
- [III -3] **Dhat, Touzot (1981)**
Une présentation de la méthode des éléments finis.
Edition Maloine.
- [III -4] **Lascaux, P. et Theodor, R. (1987)**
Analyse numérique matricielle appliquée aux sciences de l'ingénieur.
Tome 2, Edition Masson.

- [III -5] **Mathews, J. N. (1992)**
Numerical methods for mathematics, science and engineering.
Prentice - Hall, International Edition.
- [III -6] **Matthew, N. O. and Sadiku. (1992)**
Numerical techniques in electromagnetic.
C. R. C. Press, INC.
- [III -7] **Reddy, J. N. (1986)**
Applied functional analysis and variationnal methods in engineering.
M C Graw Hill, International Edition.
- [III -8] **Zienkiewicz, O. C. (1979)**
La méthode des éléments finis.
Edition M C Graw Hill.
- [III -9] **numerical recipes (fortran). (1990).**
The art of scientific computing. 1st and 2nd part.