

10/95

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

**ANALYSE DES EFFETS THERMIQUES
DANS UN PALIER LISSE POUR
DIFFERENTES CONDITIONS
AUX LIMITES**

Proposé par
Mr H. BELHANECHÉ
Mr S. LARBI

Etudié par
Mr DJELLIOUT Mohamed Amine
Mr OUKALI Mohamed

Dirigé par
Mr H. BELHANECHÉ
Mr S. LARBI

Promotion
- Septembre 1995 -

E.N.P 10, Avenue Hassen Badi - El Harrach - Alger

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

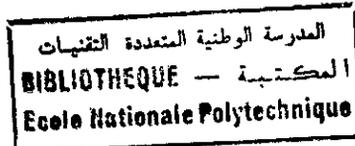
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE



PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

**ANALYSE DES EFFETS THERMIQUES
DANS UN PALIER LISSE POUR
DIFFERENTES CONDITIONS
AUX LIMITES**

**Proposé par
Mr H. BELHANECHÉ
Mr S. LARBI**

**Etudié par
Mr DJELLIOUT Mohamed Amine
Mr OUKALI Mohamed**

**Dirigé par
Mr H. BELHANECHÉ
Mr S. LARBI**

**Promotion
- Septembre 1995 -**

E.N.P 10, Avenue Hassen Badi - El Harrach - Alger

DEDICACE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Je dédis ce travail à :

- mes parents
 - ma soeur et mes deux frères
 - ma famille
 - mes amis
- ainsi qu'à la mémoire de mes grands parents

DJELLIOUT MOHAMED AMINE

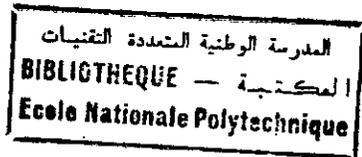
DEDICACE

Je dédis ce travail à :

- mes parents
- ma soeur et mes deux frères
- ma famille
- mes amis

ainsi qu'à la mémoire de mes grands parents

OUKALI MOHAMED



REMERCIEMENTS

Nous voudrions, au début de ce mémoire, exprimer notre profonde gratitude envers tous ceux et celles qui ont contribué de près ou de loin à notre formation, et aux résultats auxquels nous sommes parvenus.

Que M. H. BELHANECHÉ et M. S. LARBI qui nous ont été de très bon conseil, trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude et de nos remerciements les plus vifs.

Notre gratitude s'adresse également à tous les membres du centre de calcul et de la bibliothèque de l'ENP.

Si ce travail sera un jour de quelque utilité aux étudiants qui le liront, nous nous estimerons largement récompensés et soulagés des soucis qui nous ont assailli pendant sa rédaction.

Enfin nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

RESUME

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Dans cette étude on aborde le problème thermohydrodynamique du palier cylindrique de longueur finie. La théorie générale THD est présentée ainsi qu'une méthode globale de résolution par éléments finis. On étudie plus particulièrement l'influence des conditions aux limites imposées aux parois externes du palier, ainsi que l'effet des variations de l'excentricité relative et de la vitesse de rotation de l'arbre sur les caractéristiques statiques du palier. Le logiciel MEFTHD élaboré s'adapte à tout mécanisme de lubrification et servira avantagement dans toute étude dimensionnelle d'optimisation industrielle.

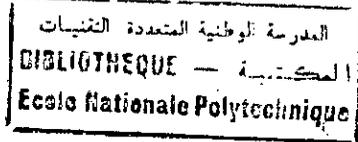
ABSTRACT

The thermohydrodynamic problem in finite length journal bearings is studied in steady state conditions. The general THD theory is presented as well as global method for resolution by the finite element method. The influence of temperature boundary conditions of the bearing outer surfaces is examined and also the influence of the relative eccentricity and the rotational velocity variations on the bearing characteristics. The software MEFTHD elaborated is adaptable to any mechanism of lubrication and can be useful advantageously in any dimensional study for industrial optimisation.

ملخص

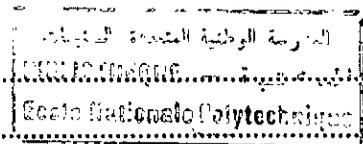
نقدم في دراستنا هذه على شرح ظاهرة ترموديناميكا الموائع في المحمل الأسطواني ذي الطول المنتهي. نعرض بعناية النظرية العامة و الطريقة المتكاملة لحل المسألة باستعمال طريقة العناصر المنتهية. ندرس باهتمام تأثير الشروط الحدية اللازمة للأسطح الخارجية للمحمل و كذا تأثيرات المركزية النسبية و سرعة دوران المحور على الخصائص السكونية للمحمل. البرنامج المنجز لهذه الدراسة مكيف لمختلف أنواع الميكانيزمات التزييتية و يصلح بفائدة في مشاريع قياس الأبعاد الأفضلية للتطبيق الصناعي.

SOMMAIRE



INTRODUCTION	1
CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	4
CHAPITRE II : EQUATIONS DE BASES	9
II.1 : Introduction	9
II.2 : Equations générales de la mécanique des milieux continus	9
II.2.1 : Loi de conservation de la masse	9
II.2.2 : Loi de conservation de la quantité de mouvement	10
II.2.3 : Loi de conservation de l'énergie	11
II.2.4 : Loi de comportement du fluide utilisé	15
II.3 : Equation générales de la mécanique des films minces visqueux	16
II.3.1 : Equation de conservation de la masse	18
II.3.2 : Equation généralisée de la mécanique des films minces visqueux	18
II.3.2.1 : Intégration des équations de NAVIER	18
II.3.2.2 : Equation de REYNOLDS généralisée	21
II.3.2.3 : Interprétation physique des différents termes de l'équation de Reynolds	23
II.4 : Equation de l'énergie dans le film lubrifiant	24
II.4.1 : Différentes formes de l'équation de l'énergie	24
II.4.2 : Equation de l'énergie des films minces visqueux	25
II.5 : Propriétés du lubrifiant	27
II.5.1 : Densité	28
II.5.2 : Conductibilité thermique	28
II.5.3 : Chaleur spécifique à pression constante	28
II.5.4 : Viscosité	28
II.5.4.1 : Formule de BARR	29
II.5.4.2 : Formule de HUGELL et CLAIRBOIS	29
II.5.4.3 : Formule de MAC COULL et WALTHER	29
II.6 : Conclusion	30
CHAPITRE III : THERMOHYDRODYNAMIQUE D'UN PALIER LISSE	31
III.1 : Introduction	31
III.2 : Géométrie et cinématique des surfaces	32

III.3 : Equation de REYNOLDS généralisée et conditions aux limites	34
III.4 : Equation de l'énergie dans les différents milieux	35
III.4.1 : Equation de l'énergie en mécanique des films minces visqueux	35
III.4.2 : Equation de la chaleur dans le coussinet	35
III.4.3 : Equation de la chaleur dans l'arbre	35
III.5 : Condition aux limites sur la température	36
III.5.1 : Les différents modes de transmission de la chaleur	36
III.5.2 : Conditions aux limites sur la surface externe du coussinet	37
III.5.3 : Conditions aux limites à l'interface entre le film et le coussinet	39
III.5.4 : Conditions aux limites à l'interface entre le film et l'arbre	41
III.5.5 : Conditions aux limites aux extrémités de l'arbre	41
III.6 : Caractéristiques statiques	42
III.6.1 : Charge et angle de calage	42
III.6.2 : Débit	43
III.6.3 : Le couple de frottement	43
III.7 : Conclusion	44
CHAPITRE IV : ANALYSE DU PHENOMENE DE LUBRIFICATION	
THERMOHYDRODYNAMIQUE LAMINAIRE PAR ELEMENTS FINIS	45
IV.1 : Introduction	45
IV.2 : Rappel	46
IV.3 : Application de la MEF à l'équation de REYNOLDS généralisée	48
IV.3.1 : Etude de la fonctionnelle associée à l'équation de REYNOLDS généralisée	48
IV.3.1.1 : Théorème de HELMHÖTZ et KORTEWEG	49
IV.3.1.2 : Calcul des variations et justification de $J(p)$	51
IV.3.1.3 : Stationnarité de $J(p)$	51
IV.3.2 : Conditions aux limites	53
IV.3.2.1 : Approche physique du problème de rupture du film lubrifiant	54
IV.3.2.2 : Conditions aux limites pour la zone de rupture	54
IV.3.3 : Discrétisation par éléments finis	57
IV.3.3.1 : Principe de l'approximation par éléments finis	57
IV.3.3.2 : Discrétisation	60
IV.3.3.3 : Élément d'approximation nodale	62
IV.3.3.4 : Élément d'approximation géométrique	63



IV.4 : Application de la MEF aux équation du champ de température	63
IV.4.1 : Forme intégrale de l'équation de l'énergie dans le film	63
IV.4.1.1 : Méthode de GALERKINE	63
IV.4.1.2 : Formulation faible	64
IV.4.2 : Forme intégrale de l'équation de la chaleur dans le massif	65
IV.4.3 : Discrétisation des formes intégrales associées aux équation de l'énergie dans le film et de chaleur dans le massif	65
IV.4.4 : Elément d'approximation	67
IV.5 : Principe et méthode de résolution	68
IV.6 : Etude de la convergence	71
IV.7 : Conclusion	73
CHAPITRE V : PRESENTATION DES RESULTATS ET VALIDATION DU PROGRAMME MEFTHD	75
V.1 : Introduction	75
V.2 : Paliers d'essais et données physiques	76
V.2.1 : Palier A, B et C	76
V.2.2 : Température du fluide recyclé	79
V.3 : Influence des conditions thermiques imposées aux parois externes du palier	80
V.4 : Comparaison théorie expérimentation (palier A)	86
V.5 : Influence de la vitesse de rotation de l'arbre	86
V.6 : Influence de l'excentricité relative	89
V.7 : Comparaison théorie expérimentation (palier B)	92
V.8 : conclusion	96
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVE	97
REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE	
ANNEXE 1 : EQUATION THERMODYNAMIQUE	
RELATION DE MAXWELL	
COEFFICIENT CALORIMETRIQUE	
ANNEXE 2 : CHANGEMENT DE VARIABLE GEOMETRIQUE	
ADIMENSIONNALISATION DE L'EQUATION DE L'ENERGIE ET ANALYSE DIMENSIONNELLE	
ANNEXE 3 : INTEGRATION DE LA FONCTION DISSIPATION A TRAVERS L'EPaisseur DU FILM	
ANNEXE 4 : JUSTIFICATION DE L'ASSOCIATION DE LA FONCTIONNELLE J(P)	

PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISES

$C=R_c-R_a$	jeu radial
C_p	chaleur spécifique du lubrifiant à pression constante
C_v	chaleur spécifique du lubrifiant à volume constante
$D_m(t)$	domaine matériel fonction de temps
$\partial D_m(t)$	frontière de $D_m(t)$
e	énergie interne massique
E	module de Young
F	intégrale fonction de la viscosité
f_i	composantes des efforts volumiques
G	intégrale fonction de la viscosité
$h=H_1-H_2$	épaisseur du film lubrifiant
H_1, H_2	hauteur des surfaces 1 et 2 du contact
h	enthalpie massique
h_a	coefficient globale d'échange à la surface de l'arbre
h_c	coefficient globale d'échange à la surface du coussinet
$,i=\partial/\partial x_i$	dérivation partielle par rapport à la $i^{\text{ème}}$ coordonnée
I, J, I_2, J_2	intégrales fonction de la viscosité
K_h	coefficient de conduction du lubrifiant
K_a	coefficient de conduction de l'arbre
K_c	coefficient de conduction du coussinet
L	longueur du palier
N	vitesse de rotation de l'arbre
$N_d = \mu_0 U^2 / K_h T_0$	nombre de dissipation
\vec{n}	vecteur normal à une surface
P	pression dans le film
$P_0 = h^2 / \mu_0 U L$	pression de référence
P_a	pression d'alimentation
$P_e = \rho_0 C_0 U C^2 / R_a K_h$	nombre de Peclet
P^e	puissance des efforts extérieurs
P^i	puissance des efforts intérieurs
q	densité surfacique de taux de chaleur

dQ/dt	taux de chaleur reçu par $D_m(t)$
Q_c	débit du lubrifiant froid
Q_r	débit du fluide recyclé
Q_{se}	débit de fluide dans la section d'entrée.
R_a	rayon de l'arbre
R_c	rayon interne du coussinet
R_e	rayon externe du coussinet
s	entropie massique
T	force surfacique sur $\partial D_m(t)$
T	température d'un point
T_a	température de la surface de l'arbre
T_{al}	température du fluide froid. Température de référence
T_r	température du fluide recyclé
T_{se}	température du fluide dans la section d'entrée
T_{IV}	température imposée
T_b	température ambiante
T_c	température de la surface interne du coussinet
t	temps
THD	thermohydrodynamique
TEHD	thermoélastohydrodynamique
\vec{U}	vecteur vitesse d'un point du film
u_1, u_2, u_3 ou	
u, v, w	composantes du vecteur vitesse
$U=R_a \omega$	vitesse linéaire de la surface de l'arbre
U_{11}, U_{12}, U_{13}	vitesse de la première surface du contact
U_{21}, U_{22}, U_{23}	vitesse de la deuxième surface du contact
v	volume massique
W	charge supporté par le palier
x_1, x_2, x_3 ou	
x, y, z	coordonnées cartésiennes
$\beta = -1/\rho(\partial\rho/\partial T)_p$	coefficient de dilatation thermique à pression constante
δ_{ij}	tenseur de Kronecker
$\eta=R_c/L$	rapport entre le rayon du coussinet et sa largeur

$\varepsilon=e/c$	excentricité relative
λ	premier coefficient de lamé
μ	viscosité dynamique du lubrifiant
ν	coefficient de Poisson
$\omega=U/R_a$	vitesse de rotation de l'arbre en rd/s
ξ	variable muette d'intégration
χ	coefficient de dilatation massique à température constante
ρ	masse volumique du lubrifiant
ϕ	angle de calage
θ	coordonnée circonférentielle



INTRODUCTION

Le déplacement relatif de deux surfaces en contact s'effectue toujours avec frottement, qu'il s'agit de glissement, roulement ou pivotement. Le frottement peut être avantageux lorsqu'on recherche l'adhérence ou l'irréversibilité, il peut être par contre nuisible lorsqu'il s'agit de rendement mécanique des machines, il constituerait si l'exécution des machines était parfaite, la totalité des résistances passives. En pratique, il constitue la majeure partie, exception faite pour les groupes turbogénérateurs modernes et quelques mécanismes particuliers, où perte moyenne d'énergie que représente le frottement est voisine de 5% de l'énergie mise en oeuvre (8 à 12% dans le cas des moteurs à combustion interne).

On définit un mécanisme lubrifié par le contact de deux corps solides en mouvement. Soumis à une charge et séparés par un film fluide, les deux solides sont caractérisés dans le voisinage du contact par leur géométrie et leur cinématique.

Les paliers hydrodynamiques ont une place importante dans l'éventail des réalisations technologiques, en particulier lorsqu'il s'agit d'arbres fortement chargés et tournant à grandes vitesses. Dans les conditions sévères de fonctionnement, l'énergie dissipée par cisaillement dans le film lubrifiant est importante, ce qui a par conséquence l'élévation de sa température. Comme la viscosité du lubrifiant décroît très rapidement lorsque la température augmente, l'échauffement entraîne une diminution importante de la portance du mécanisme et une atténuation des caractéristiques mécaniques des matériaux qui constituent les revêtements internes des coussinets, ainsi le risque d'avaries est accru. Ces deux effets montrent qu'il est très important de tenir compte du facteur température lors de la conception des pivoteries des machines modernes.

La théorie isotherme de lubrification est largement utilisée pour le calcul des performances des butées et paliers hydrodynamiques. Cependant, l'accroissement constant des

charges et des vitesses relatives rend cette théorie insuffisante pour prévoir les performances des dispositifs utilisés actuellement. Il devient nécessaire de prendre en compte les phénomènes thermiques et de prévoir leur influence sur le comportement de ces mécanismes.

Les bases scientifiques de la lubrification ne sont que légèrement antérieures à ce siècle. En 1886, REYNOLDS [1] a proposé l'équation qui régit le phénomène de portance dans un palier. Les études théoriques entre les années 1900 et 1940 ont portées d'une part sur les méthodes de résolution, et d'autre part sur les conditions aux limites associées à l'équation dite de REYNOLDS. Durant toutes ces années, la théorie isotherme a été la seule utilisée. Cependant en 1933, KINGSBURY [2] a publié une étude remarquable intitulée " heat effect in lubrication films " qui contient les concepts essentiels, qui seront développés ultérieurement.

Au début des années soixante, les équations fondamentales qui gouvernent le phénomène thermique ont été développées. Cependant, si les équations sont posées, il reste à préciser les conditions aux limites et résoudre ces équations aux dérivées partielles fortement non linéaires à cause de la relation de variation de viscosité en fonction de la température.

Deux types d'approches ont été proposées pour l'étude du phénomène en lubrification : Certain auteurs voulant prendre en compte des phénomènes précis développent des méthodes numériques sophistiquées et coûteuses, d'autres possédant des moyens de calculs limités ou mettant en avant la nécessité d'obtenir un résultat rapidement font des hypothèses simplificatrices importantes et résolvent le problème de façon analytique ou semi-analytique.

Dans l'analyse des problèmes réels de lubrification, on rencontre souvent des configurations géométriques, des contraintes extérieures et des conditions aux limites d'une grande complexité. La méthode des éléments finis que nous avons utilisé dans notre étude est d'une utilisation beaucoup plus aisée que celle des différences finies.

Dans ce travail, nous présentons au chapitre I une étude bibliographique détaillée qui montre l'évolution de l'étude concernant le problème thermohydrodynamique.

Au chapitre II, nous abordons les équations de base de la mécanique des films minces visqueux, nous insisterons particulièrement sur les équations qui régissent le comportement d'un

écoulement en régime thermohydrodynamique laminaire ainsi que l'équation de la chaleur dans les massifs.

Au chapitre III, nous appliquons les équations de la mécanique des milieux continus au problème des paliers lisses

Au chapitre IV, nous appliquons la méthode des éléments finis aux paliers. L'application d'une part du principe de minimisation de l'énergie de dissipation visqueuse dans le film et d'autre part la méthode de GALERKINE conjointement aux équations de l'énergie dans le film et de la chaleur dans les massifs permet la discrétisation du problème par éléments finis.

Enfin, le chapitre V sera consacré à la validation du programme numérique, réalisé grâce à la confrontation des résultats obtenus par notre programme à ceux relevés expérimentalement ou trouvés par l'utilisation d'autres méthodes numériques.

CHAPITRE I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

La recherche scientifique sur le problème thermique en lubrification thermohydrodynamique a commencé en 1933 avec la publication d'une étude de KINGSBURY [2], cette dernière comporte une partie expérimentale (dans laquelle l'auteur présente un viscosimètre à manchon conique) et une partie théorique basée sur les équations suivantes :

$$\mu = f(T) \quad (I.1)$$

$$\tau = \mu \frac{dU}{dy} \quad (I.2)$$

$$H = \tau(U - U_0) = -K \frac{dT}{dy} \quad (I.3)$$

Dans ces relations, T , μ , U et τ sont respectivement la température, la viscosité dynamique, la vitesse et la contrainte de cisaillement dans le film à une distance y de la paroi du coussinet, K et U_0 représentent respectivement la conductivité thermique et la vitesse du film au point où la température est maximale.

On peut remarquer que si l'on dérive la dernière équation par rapport à y en considérant τ constant on obtient :

$$\mu \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 + K \frac{d^2 T}{dy^2} = 0 \quad (I.4)$$

c'est une forme de l'équation de l'énergie satisfaisante si l'on tient compte du fait que le problème est axisymétrique.

KINGSBURY [2] résout le système d'équation en se donnant la loi de viscosité, la température T_1 sur l'arbre, la température T_2 du coussinet et la vitesse de rotation .

Dans cette étude théorique, KINGSBURY montre que la contrainte de cisaillement à la paroi du coussinet est de l'ordre de 40% de la contrainte calculée dans le cas isotherme. Il en déduit alors que l'échauffement du film provoque une réduction de la charge supportée par l'arbre de 60% par rapport à la charge calculée par la théorie isotherme pour des conditions de fonctionnement semblables.

En 1937, pour simplifier les calculs, SWIFT [3] a utilisé une viscosité moyenne effective qui selon lui permettrait de calculer de façon satisfaisante les grandeurs caractéristiques d'un palier. La question était cependant de savoir quelle valeur doit être attribuée à cette viscosité moyenne.

En admettant un coefficient de conduction K indépendant de la température et une loi simplifiée de variation de la viscosité avec la température, HAGG [4], en 1944 a proposé une solution analytique au problème de KINGSBURY [2]. Il a présenté aussi un viscosimètre à cylindres coaxiaux. Les résultats ont permis de valider les calculs et de démontrer le comportement visqueux newtonien des huiles utilisées.

D'autres approches du phénomène thermique ont été effectuées pour expliquer les phénomènes de portance mis en évidence expérimentalement durant la deuxième guerre mondiale par FOGG [5], dans le cas d'un blochet à faces parallèles. Dans ces travaux publiés en 1946, FOGG [5] attribue ces phénomènes de portance entre faces parallèles à la dilatation du fluide sous l'effet de l'échauffement. Cet effet va pendant une vingtaine d'années susciter de nombreuses recherches.

Ainsi, CAMERON et WOOD [6] en 1946, SHAW [6] en 1947 et CHARNES [6] en 1953 ont étudié avec des degrés de sophistication divers la variation de la densité avec la température.

Dès 1949, COPE [7] fait intervenir l'équation de l'énergie sous une forme simplifiée pour obtenir la température du film. Quelques années plus tard, GUILINGER et SAIBEL [8],

ZIENKIEWICZ et HUNTER [9] sont les premiers à présenter une méthode pour résoudre simultanément l'équation de REYNOLDS et l'équation de l'énergie dans le film.

En 1958, CAMERON [10] a montré que dans le cas du blochet à faces parallèles, les déformations thermiques de la surface fixe, peuvent expliquer l'effet de la portance mis en évidence par FOGG [5]. Il a mis aussi en évidence la prépondérance de la variation de la viscosité avec la température devant la variation de la masse volumique.

A la même époque, TIPEI [6] a proposé une loi de variation de température basée sur le fait que la température augmente lorsque l'épaisseur h du film décroît. Il a proposé ainsi une loi de variation de la viscosité sous la forme :

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \left(\frac{h}{h_1} \right)^a \quad (1.5)$$

où a est une constante comprise entre 0 et 1 qui, pour les gaz et les fluides isovisqueux est égale à zéro.

Ainsi dans les années 1950, les chercheurs ont essayé par des voies différentes de prendre en compte l'influence de la température sur les caractéristiques d'un contact lubrifié. VOGELPHOL [6] en de multiples occasions, a eu le mérite de rappeler que la seule approche scientifique possible pour calculer la température dans un contact lubrifié et de faire une analyse thermique complète d'un système formé par le fluide et les solides délimitant le contact. Il a publié en 1965 l'état de ces réflexions à ce sujet.

En 1962, DOWSON [11] a modifié l'équation de REYNOLDS classique afin de prendre en compte les variations de la viscosité et de la masse volumique suivant l'épaisseur du film. Il a obtenu ainsi l'équation dite de REYNOLDS généralisée qui permet avec l'équation de l'énergie, l'étude des phénomènes thermiques en lubrification hydrodynamique.

TIPEI et DEGUEURCE [12,13], ont présenté une solution thermohydrodynamique pour une épaisseur de film variant de façon exponentielle ce qui a permis de découpler l'équation de REYNOLDS [1] et de l'énergie en écrivant une relation entre la viscosité et l'épaisseur du film. De plus ils négligent le gradient axial de température.

En 1974, HUEBNER [14] a proposé de traiter l'équation de l'énergie comme une équation elliptique, ce qui a permis de prendre en compte le phénomène d'écoulement inverse qui apparaît aux excentricités élevées. une telle approche n'est pas justifiée, car l'équation de l'énergie en lubrification n'est pas une équation elliptique .

Dernièrement, SMITH et TICHY [15] ont proposé une solution analytique pour déterminer les caractéristiques thermiques d'un palier . Il se sont inspirés de l'équation de l'énergie formulée par MC CALLION [16] en considérant la viscosité constante.

Au fil des années, différentes hypothèses souvent liées aux moyens de calculs utilisés ont été publiées. Parmi les hypothèses posées, beaucoup portent souvent sur les conditions aux limites associées à l'équation de l'énergie. En effet les premières hypothèses consistent, soit à imposer la température sur l'interface film solide, soit à admettre la condition d'adiabacité.

En 1963, DOWSON et HUDSON [17,18], ont introduit dans le cas du blochet la condition d'égalité du flux de chaleur de part et d'autre de l'interface film patin fixe. Sur cette frontière, la température et le gradient de température ne sont plus imposés arbitrairement mais ils résultent de la condition de continuité du flux de chaleur.

DOWSON et MARCH [19] ont essayé d'étendre les résultats théoriques obtenus précédemment, au cas du palier cylindrique.

En reprenant les hypothèses de DOWSON, EZZAT et ROHDE [20] ont résolu le problème thermohydrodynamique dans le cas du blochet de longueur finie. Il ont imposé des conditions convectives sur la température pour les parois extérieures du patin.

HAHN et KLETTLEBROUGH [21] ont examiné des situation de complexité croissante en partant de condition isotherme jusqu'à la conduction pour chaque surface du patin.

HUEBNER [22] a proposé une solution thermohydrodynamique complète pour une butée, il a montré qu'il est souvent possible d'utiliser une solution adiabatique pour déterminer les caractéristiques de fonctionnement. Le même auteur a utilisé la méthode des éléments finis et a montré que cette méthode est avantageuse dans le cas de géométries complexes.

On peut dire ainsi, qu'à l'heure actuelle, on sait bien prendre en compte les conditions aux limites entre le film lubrifiant et les solides délimitant le contact.

D'autres auteurs ont analysé l'influence des déformations thermo-élastiques. Celle-ci est d'autant plus grande que les pressions atteintes sont importantes, c'est le cas des contacts hertiens, ou le cas des structures déformables (cas des patins à faible épaisseur).

Parallèlement à ces études théoriques, des essais ont été effectués pour valider les modèles de calculs employés. Ainsi, DOWSON, HUDSON, HUNTER et MARCH [23] ont mené une expérimentation approfondie pour un palier lisse. Ils ont montré les différents rôles joués par le fluide, l'arbre et le coussinet dans l'évacuation de la chaleur produite par dissipation visqueuse. Ils ont confirmé les faibles variations de température circonférentielle de l'arbre et axiale du coussinet.

SEIREG et EZZAT [24] ont présenté une étude expérimentale pour un palier lisse, ouvrant ainsi la voie à une approche semi-empirique du problème thermohydrodynamique. SEIREG et DANDAGE [25] ont développé cette approche pour obtenir un modèle de calcul utilisant un nombre de SOMMERFELD modifié qui permet d'utiliser les formules du modèle isotherme, il est cependant dommage que les conditions aux limites sur les température ne soient pas prises en compte dans le calcul.

En 1984, BONCOMPAIN [26] a présenté une étude numérique par différences finies pour modéliser l'écoulement thermohydrodynamique dans un palier lisse. L'auteur a tenu compte du transfert de chaleur entre différents corps en présence. Il a montré que ces conditions aux limites de type adiabatique peuvent être en première approximation utilisées pour le calcul des grandeurs globales, mais qu'elles ne permettent pas de connaître la température réelle dans le palier.

En 1985, BOUSSAID [27] a présenté à la fois une étude sur les paliers lisses en régime turbulent et sur le problème thermohydrodynamique en utilisant la méthode des éléments finis.

CHAPITRE II

EQUATIONS DE BASE

II.1. INTRODUCTION

les relations générales permettant l'analyse thermohydrodynamique d'un contact lubrifié sont déduites à partir des équations décrivant le comportement des milieux continus. Nous les présentons succinctement, puis nous les appliquons au cas particulier de la lubrification en ne prenant en compte que les termes prépondérants, ce qui permettra de définir les équations locales de la mécanique des films minces visqueux.

II.2. EQUATIONS GENERALES DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

les équations générales de la mécanique des milieux continus traduisent les lois de conservations suivantes:

- La loi de conservation de la masse
- La loi de conservation de la quantité de mouvement
- La loi de conservation de l'énergie

par ailleurs, il faudra rajouter à ces lois de conservation, des lois de comportement spécifique aux milieux et aux phénomènes étudiés.

II.2.1. LOI DE CONSERVATION DE LA MASSE

Soit $D_m(t)$ un domaine matériel de S (système étudié) que l'on suit dans son mouvement. Chaque point de sa frontière $\partial D_m(t)$ a donc la vitesse \vec{U} de la particule fluide avec laquelle il coïncide à l'instant t . Pour ce domaine la loi de conservation de la masse se traduit par l'équation

$$\frac{d}{dt} \int_{D_m(t)} \rho \, dv = 0 \quad (\text{II.1})$$

Modifions cette équation à l'aide du théorème de transport de Reynolds appliqué à l'équation de conservation de la masse, il vient alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{D_m(t)} \rho dv = \int_{D_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{D_m(t)} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (\text{II.2})$$

Le théorème de la divergence permet de transformer l'intégrale de surface du second membre, et la relation (II.2) devient :

$$\frac{d}{dt} \int_{D_m(t)} \rho dv = \int_{D_m(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{Div}(\rho \vec{u}) \right] dv = 0 \quad (\text{II.3})$$

Cette relation est valable pour tout domaine $D_m(t)$. En supposant ρ et \vec{u} continus ainsi que leur dérivées premières, il vient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{Div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (\text{II.4})$$

Cette expression représente la forme locale du principe de conservation de la masse. Elle s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.5})$$

Lorsque le fluide est incompressible on peut écrire :

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.6})$$

II.2.2. LOI DE CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

La loi de conservation de la quantité de mouvement écrite sur un domaine matériel $D_m(t)$ prélevé dans S se traduit par l'équation :

$$\frac{d}{dt} \int_{D_m(t)} \rho u_i dv = \int_{D_m(t)} f_i dv + \int_{\partial D_m(t)} \sigma_{ij} n_j dA \quad (\text{II.7})$$

qui exprime que le taux de la quantité de mouvement de $D_m(t)$ est égale aux forces appliquées sur ce domaine .

Dans cette relation, σ_{ij} représente le tenseur des contraintes s'appliquant sur $D_m(t)$ et f_i les efforts volumiques agissant sur ce même domaine .

Le théorème de transport de Reynolds appliqué à l'équation de conservation de la quantité de mouvement et celui de la divergence permettent de transformer (II.7), en :

$$\int_{D_m(t)} \left[\rho \frac{d u_i}{dt} - f_i - \left(\frac{\partial (\sigma_{ij})}{\partial x_i} \right) \right] dv = 0 \quad (\text{II.8})$$

comme le domaine $D_m(t)$ est arbitraire et l'intégrale supposée continue, on peut écrire :

$$\rho \frac{d u_i}{dt} = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{II.9})$$

Soit encore en développant le premier membre :

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{II.10})$$

Cette relation est la forme locale de la loi de conservation de la quantité de mouvement .

REMARQUE : en lubrification, la loi de conservation de mouvement et la loi de conservation de la masse permettent d'obtenir l'équation de REYNOLDS .

II.2.3. LOI DE CONSERVATION DE L'ENERGIE

La troisième loi de conservation de la mécanique des milieux continus exprime la conservation de l'énergie.

Cette loi sera appliquée successivement aux trois milieux physiques rencontrés dans notre problème : le film lubrifiant, l'arbre et le coussinet .

la formulation de cette loi est faite en négligeant les effets électriques, magnétiques et chimiques .

Soit E l'énergie d'un domaine matériel $D_m(t)$ d'un système S . Par énergie, il faut entendre la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique .

On aura donc :

$$E(D_m) = \int_{D_m(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} u_i u_i \right) dv \quad (\text{II.11})$$

$e(x_i, t)$ représente l'énergie interne massique.

Soit P^e la puissance des efforts extérieurs s'appliquant sur $D_m(t)$ on a :

$$P^e = \int_{D_m(t)} f_i u_i dv + \int_{\partial D_m(t)} T_i u_i dA \quad (\text{II.12})$$

Dans cette relation T_i représente la composante du vecteur des forces surfaciques agissant sur le domaine $D_m(t)$

soit dQ/dt le taux de chaleur reçu par $D_m(t)$:

On peut poser pour une partie $D_m(t)$ découpée dans S :

$$\frac{dQ(D)}{dt} = \int_{\partial D_m(t)} q dA \quad (\text{II.13})$$

Ainsi q est une densité surfacique de taux de chaleur reçu par conduction à travers $\partial D_m(t)$ et traduit les échanges à travers $D_m(t)$. Par ailleurs, la loi de FOURIER concernant la transmission de chaleur suppose que :

$$q = -q_i n_i = \frac{\partial(KT)}{\partial x_i} n_i \quad (\text{II.14})$$

où K est le coefficient de conduction du milieu considéré .

La loi de conservation de l'énergie se traduit par l'équation :

$$\frac{dE(D)}{dt} = P^e + \frac{dQ(D)}{dt} \quad (\text{II.15})$$

ou en explicitant :

$$\frac{d}{dt} \int_{D_m(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} u_i u_i \right) dv = \int_{D_m(t)} f_i u_i dv + \int_{\partial D_m(t)} (T_i u_i + q) dA \quad (\text{II.16})$$

le théorème de l'énergie cinétique qui s'écrit :

$$\frac{d}{dt} E(D) = P^e + P^i \quad (\text{II.17})$$

permet de simplifier l'équation (II.16) .

Dans la relation (II.17), $E(D)$ est l'énergie cinétique de $D_m(t)$, P^e la puissance des efforts extérieurs s'exerçant sur $D_m(t)$ et P^i la puissance des efforts intérieurs qui s'exprime par :

$$P^i = - \int_{D_m(t)} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv \quad (\text{II.18})$$

où ε_{ij} désigne le tenseur des taux de déformation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.19})$$

Le théorème de l'énergie se traduit alors par l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{D_m(t)} \frac{1}{2} \rho u_i u_i dv = & - \int_{D_m(t)} \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} dv \\ & + \int_{D_m(t)} f_i u_i dv + \int_{\partial D_m(t)} T_i u_i dA \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

retranchant (II.20) de (II.16), il vient, en tenant compte de (II.14) :

$$\frac{d}{dt} \int_{D_m(t)} \rho e dv = \int_{D_m(t)} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv - \int_{\partial D_m(t)} q_i n_i dA \quad (\text{II.21})$$

soit en transformant l'intégrale de surface en intégrale de volume à l'aide du théorème de la divergence :

$$\frac{d}{dt} \int_{D_m(t)} \rho e dv = \int_{D_m(t)} \left(\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \right) dv \quad (\text{II.22})$$

si l'on admet que les intégrantes sont continues, l'équation aux dérivées partielles associées à (II.22) s'écrit :

$$\rho \frac{de}{dt} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (\text{II.23})$$

En portant la loi de Fourier (II.14) dans (II.23), on obtient enfin :

$$\rho \frac{de}{dt} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.24})$$

Cette expression représente une forme très commode de l'équation de l'énergie, mais elle ne fait pas apparaître explicitement la température qui intervient dans l'énergie interne massique e .

Considérons le milieu comme un milieu bi-paramétrique, dont l'énergie interne massique e est un potentiel thermodynamique fonction des variables v et T ($v=1/\rho$) où v est le volume massique. (annexe 1).

soit donc :

$$e = e(v, T) \quad (\text{II.25})$$

alors

$$\frac{de}{dt} = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v \frac{dT}{dt} + \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T \frac{dv}{dt} \quad (\text{II.26})$$

Or, on sait que la chaleur spécifique C_v du fluide à volume constant est définie par :

$$C_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v \quad (\text{II.27})$$

et

$$\left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v T - P \quad (\text{II.28})$$

En revenant aux variables ρ et T , il vient :

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho C_v \frac{dT}{dt} + \left[T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho - P \right] \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

le terme $\rho d/dt (1/\rho)$ peut être transformé en se servant de l'équation de conservation de la masse :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (\text{II.29})$$

l'équation de l'énergie s'écrit alors :

$$\rho C_v \frac{dT}{dt} = \left[P - T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_\rho \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.30})$$

Cette équation est très générale et peut s'appliquer à différents milieux physiques .

Il faut noter qu'elle s'applique particulièrement bien lorsque on traite le cas des fluides incompressibles, car alors :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

et l'équation (II.30) se réduit à :

$$\rho C_v \frac{dT}{dt} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.31})$$

Si le fluide n'est pas incompressible, on peut trouver une autre forme de l'équation de l'énergie en faisant intervenir l'enthalpie massique h :

$$h = e + \frac{P}{\rho} \quad (\text{II.32})$$

soit

$$e = h - \frac{P}{\rho} \quad (\text{II.33})$$

repreons alors l'équation (II.24) et exprimant le terme du premier membre

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho \frac{dh}{dt} - \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (\text{II.34})$$

Choisissons l'enthalpie comme une fonction de la température et de la pression alors (annexel) :

$$\frac{dh}{dt} = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dt} + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T \frac{dP}{dt} \quad (\text{II.35})$$

avec

$$\left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\rho} (1 - T \beta) \quad (\text{II.36})$$

où β est le coefficient de dilatation thermique donné par :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (\text{II.37})$$

par définition :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P = C_p \quad (\text{II.38})$$

où C_p est la chaleur spécifique à pression constante, il vient ainsi :

$$\rho \frac{dh}{dt} = \rho C_p \frac{dT}{dt} + (1 - T \beta) \frac{dP}{dt} \quad (\text{II.39})$$

portons ce résultat dans (II.34) en tenant compte de (II.24), alors :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = T \beta \frac{dP}{dt} + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho} \right) - \frac{dP}{dt} + \sigma_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.40})$$

Cette forme de l'équation de l'énergie est plus particulièrement utilisée lorsque la masse volumique ρ du lubrifiant est variable, comme par exemple dans le cas des gaz.

II.2.4. LOI DE COMPORTEMENT DU FLUIDE UTILISE

Dans cette étude nous supposons que le fluide utilisé est un fluide visqueux newtonien. Il satisfait donc aux hypothèses de linéarité, d'homogénéité et d'isotropie. Il faut cependant noter que de nombreux fluides ont des lois de comportement qui s'écartent de ces hypothèses. Cependant dans le cas étudié ici, l'huile lubrifiante d'un palier a généralement le comportement d'un fluide visqueux

newtonien, dont la loi de comportement s'écrit :

$$\sigma_{ij} = (-P + \lambda\theta)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{II.41}$$

où

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

représente le tenseur de taux de déformation, θ le taux de dilatation cubique, λ et μ les deux coefficients de Lamé, appelés encore dans le cas des fluides coefficients de viscosité .

II.3. EQUATIONS GENERALES DE LA MECANIQUE DES FILMS MINCES VISQUEUX

En mécanique des films minces visqueux, le milieu étudié est formé de deux solides, séparés par un film mince de lubrifiant dont l'épaisseur est très faible devant les autres dimensions. Ainsi l'une des dimensions du contact est privilégiée par rapport aux deux autres .

Si l'on néglige la courbure générale du film, le système d'axes orthonormés peut être choisi de telle sorte que le plan X_1OX_3 soit parallèle au film. Dans ces conditions , les surfaces de contact peuvent être représentées dans ce repère par les équations $H_1(X_1, X_3, t)$ et $H_2(X_1, X_3, t)$.

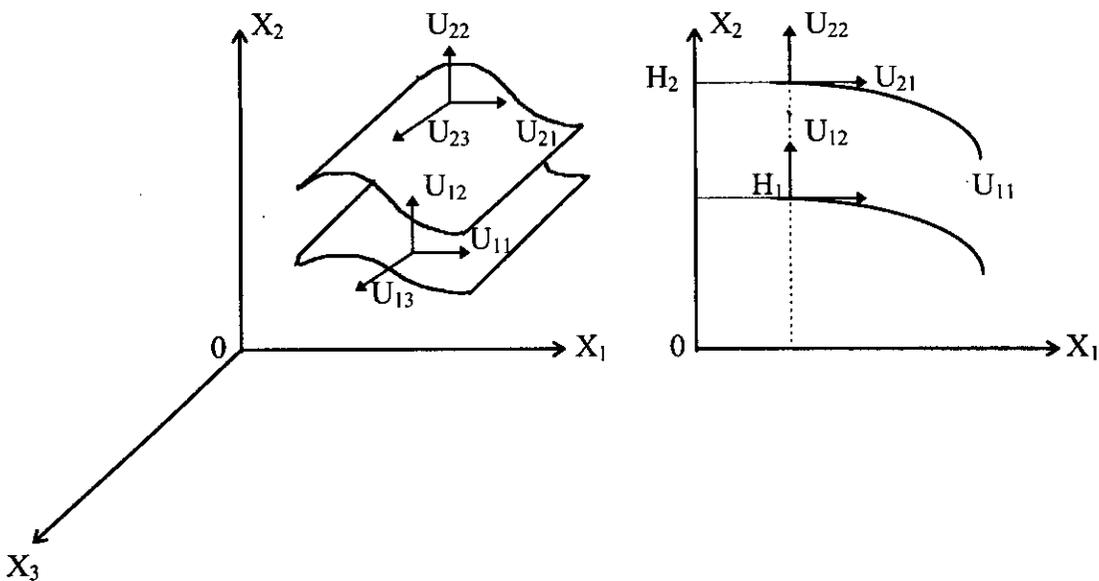


fig.II.1: Système d'axes

Si l'on suppose qu'il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact, la vitesse du fluide à la paroi est égale à la vitesse de celle ci au point considéré. cette condition peut s'écrire :

$$\begin{aligned} U_1=U_{11} \quad V_1=U_{12} \quad W_1=U_{13} \quad \text{pour } H=H_1 \\ U_2=U_{21} \quad V_2=U_{22} \quad W_2=U_{23} \quad \text{pour } H=H_2 \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

L'épaisseur du film représentée par $H=H_2-H_1$ est toujours petite devant les autres dimensions du contact .

Compte tenu de la forme particulière du contact, les équations de la mécanique des milieux continus peuvent se simplifier considérablement, car certains termes sont négligeables devant les autres .

Pour déterminer l'ordre de grandeur des termes des différentes équations, une analyse dimensionnelle est nécessaire .

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 = \frac{x_1}{L} ; \bar{x}_2 = \frac{x_2}{H} ; \bar{x}_3 = \frac{x_3}{L} ; \bar{t} = t \frac{V}{L} \\ \bar{U}_1 = \frac{U_1}{V} ; \bar{V}_1 = V_1 \frac{L}{VH} ; \bar{W}_1 = \frac{W_1}{V} ; \\ \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0} ; \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0} ; \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} ; \bar{T} = \frac{T}{T_0} \\ \bar{C}_p = \frac{C_p}{C_{p0}} ; \bar{K} = \frac{K}{K_0} ; \bar{\beta} = \frac{\beta}{\beta_0} \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

Dans ces expressions L et V sont respectivement la dimension et la vitesse caractéristique selon les axes OX_1 et OX_3 , H et VH/L celles suivant X_2 ; L/V , μ_0 , λ_0 , ρ_0 , T_0 , C_{p0} , K_0 et β_0 définissent respectivement l'ordre de grandeur du temps, de la viscosité dynamique, du coefficient de viscosité, de la masse volumique, de la température, de la chaleur massique, du coefficient de conduction et enfin du coefficient de dilatation calorimétrique du fluide .

Ce changement de variables conduit à poser pour la pression

$$\bar{P} = P \frac{H^2}{\mu_0 VL}$$

Par ailleurs un paramètre d'échelle $\varepsilon=H/L$ est mis en évidence en mécanique des film minces visqueux, il est de l'ordre de 10^{-3} .

II.3.1. EQUATION DE CONSERVATION DE LA MASSE

L'équation (II.5) s'écrit sous la forme sans dimension :

$$\frac{V \rho_0}{L} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho U_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho U_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho U_3) \right] = 0 \quad (\text{II.44})$$

On constate que tous les termes ont le même ordre de grandeur. Ainsi, sauf dans des cas particuliers simples, il faudra toujours utiliser l'équation complète de conservation de la masse.

II.3.2. EQUATION GENERALISEE DE LE MECANIQUE DES FILMS MINCES VISQUEUX

II.3.2.1. INTEGRATION DES EQUATIONS DE NAVIER

L'analyse dimensionnelle de l'équation de conservation de la quantité de mouvement conduit aux équations de NAVIER simplifiées :

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) \quad (\text{II.45})$$

Dans ces équations :

- Les forces massiques F_i sont négligées.
- L'épaisseur du film $H_2 - H_1$ est très faible devant les autres dimensions $(H_2 - H_1)/L$ est approximativement égale à 10^{-3} .
- les forces d'inertie dans le fluide, sont négligeables devant les forces de viscosité et de pression.

Pour intégrer les équations (II.44) compte tenu des conditions aux limites décrites en (II.42), il est commode de poser :

$$I = \int_{H_1}^{x_2} \frac{\xi d\xi}{\mu(x_1, \xi, x_3, t)} \quad (\text{II.46})$$

$$J = \int_{H_1}^{x_2} \frac{d\xi}{\mu(x_1, \xi, x_3, t)}$$

pour $x_2 = H_1$ $I = J = 0$

et pour $x_2 = H_2$ les intégrales I et J prennent les valeurs suivantes :

$$I(H_2) = I_2 = \int_{H_1}^{H_2} \frac{x_2 dx_2}{\mu(x_i, t)}$$

$$J(H_2) = J_2 = \int_{H_1}^{H_2} \frac{dx_2}{\mu(x_i, t)} \quad (\text{II.47})$$

Il vient alors :

$$U_1 = \frac{\partial P}{\partial x_1} \left(I - J \frac{I_2}{J_2} \right) + \frac{U_{21} - U_{11}}{J_2} J + U_{11}$$

$$U_3 = \frac{\partial P}{\partial x_3} \left(I - J \frac{I_2}{J_2} \right) + \frac{U_{23} - U_{13}}{J_2} J + U_{13} \quad (\text{II.48})$$

De plus l'équation de conservation de la masse permet d'obtenir :

$$U_2 = - \int_{H_1}^{x_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) dx_2 + U_{12} \quad (\text{II.49})$$

L'équation (II.5) de conservation de la masse s'écrit après intégration à travers l'épaisseur du film :

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial P}{\partial t} dx_2 + \int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho U_i) dx_2 = 0 \quad (\text{II.50})$$

On peut transformer cette équation en se servant de la formule de dérivation des intégrales qui s'écrit en prenant pour argument une fonction $F(x_1, H_1, x_3, t)$:

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_2 = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{H_1}^{H_2} F dx_2 - F(x_1, H_2, x_3, t) \frac{\partial H_2}{\partial x_i}$$

$$+ F(x_1, H_1, x_3, t) \frac{\partial H_1}{\partial x_i} \quad (\text{II.51})$$

avec $i = 1$ ou 3

Par ailleurs, pour $i = 2$ on peut intégrer directement

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho U_2) dx_2 = \rho_2 U_{22} - \rho_1 U_{12} \quad (\text{II.52})$$

Ou ρ_1 et ρ_2 sont respectivement les valeurs de la masse volumique du fluide sur les parois 1 et 2.

Compte tenu des relations (II.42), (II.50), (II.51), (II.52), il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{H_1}^{H_2} \rho U_1 dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{H_1}^{H_2} \rho U_3 dx_2 - \rho_2 U_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \rho_2 U_{23} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + \\ & \rho_1 U_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \rho_1 U_{13} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} + \rho_2 U_{22} - \rho_1 U_{12} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{H_1}^{H_2} \rho dx_2 - \\ & \rho_2 \frac{\partial H_2}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial H_1}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.53})$$

Les deux premiers termes peuvent être explicités grâce à l'expression des vitesses U_1 et U_3 données par (II.47) en intégrant par partie et en posant au préalable :

$$\begin{aligned} R &= \int_{H_1}^{x_2} \rho(x_1, \xi, x_3, t) d\xi \\ F &= \frac{I}{J_2} \int_{H_1}^{H_2} \frac{R}{\mu} dx_2 \\ G &= \int_{H_1}^{H_2} \frac{R}{\mu} \left(x_2 - \frac{I_2}{J_2} \right) dx_2 = \int_{H_1}^{H_2} \frac{R x_2}{\mu} dx_2 - I_2 F \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

Il vient alors :

$$\int_{H_1}^{H_2} \rho U_1 dx_2 = R_2 U_{21} - \frac{\partial P}{\partial x_1} G - (U_{21} - U_{11}) F$$

$$\int_{H_1}^{H_2} \rho U_3 dx_2 = R_2 U_{23} - \frac{\partial P}{\partial x_3} G - (U_{23} - U_{13}) F \quad (\text{II.55})$$

où R_2 est la valeur que prend la fonction R à la parois 2 .

En regroupant les différents termes, on obtient l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée qui s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(G \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(G \frac{\partial P}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} [U_{21}(R_2 - F) + U_{11}F] - \rho_2 U_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} +$$

$$\rho_1 U_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} [U_{23}(R_2 - F) + U_{13}F] -$$

$$\rho_2 U_{23} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + \rho_1 U_{13} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} + \frac{\partial R_2}{\partial t} -$$

$$\rho_2 \frac{\partial H_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial H_1}{\partial t} + \rho_2 U_{22} - \rho_1 U_{12}$$

(II.56)

II.3.2.2. EQUATION DE REYNOLDS GENERALISEE

Généralement en lubrification la vitesse d'une paroi du contact est tangente à cette paroi, l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée se simplifie car en plaçant l'origine du système d'axe sur cette paroi on peut poser $H_1 = 0$ et $H_2 = h$ (fig. II.2).

En utilisant les coordonnées cartésiennes XYZ , les conditions aux limites sur la vitesse s'écrivent :

sur la paroi 1 , pour $y = 0$ $U = U_1$; $V = 0$; $W = W_1$

sur la paroi 2 , pour $y = h$ $U = U_2$; $V = V_2$; $W = W_2$

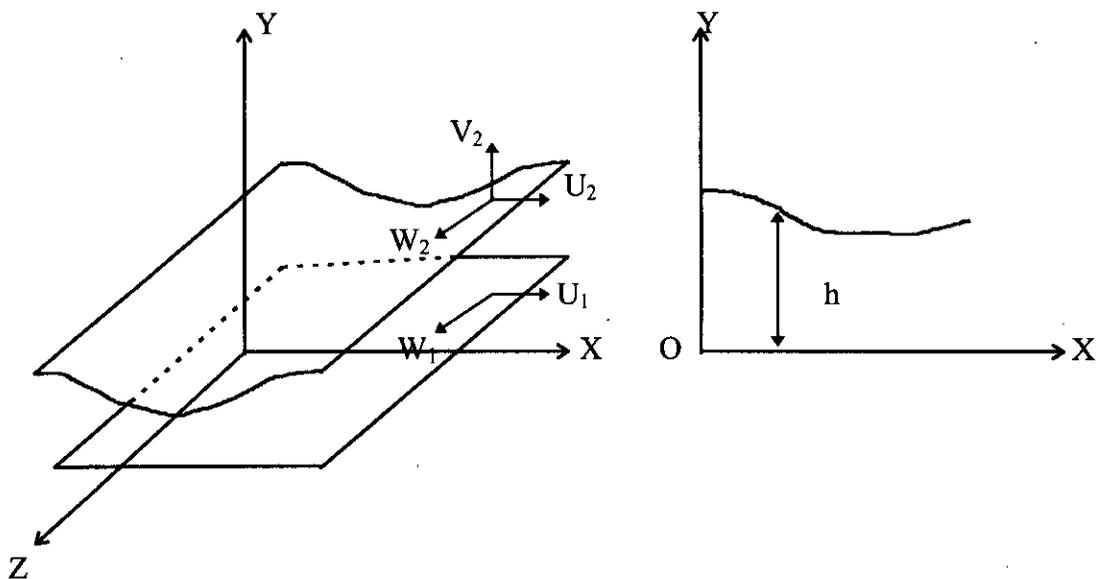


fig. II.2 système d'axes

Le choix du système d'axes impose à la vitesse \bar{V}_1 de la paroi 1 dans la direction y d'être identiquement nulle .

Les vitesses u , v et w du fluide s'écrivent alors :

$$U = \frac{\partial P}{\partial x} \left(I - \frac{I_2 J}{J_2} \right) + \frac{U_2 - U_1}{J_2} J + U_1$$

$$V = - \int_0^y \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dy$$

$$W = \frac{\partial P}{\partial z} \left(I - \frac{I_2 J}{J_2} \right) + \frac{W_2 - W_1}{J_2} J + W_1 \tag{II.57}$$

dans ces relations

$$I = \int_0^y \frac{\xi}{\mu} d\xi \qquad J = \int_0^y \frac{d\xi}{\mu}$$

$$I_2 = \int_0^h \frac{y}{\mu} dy \qquad J_2 = \int_0^h \frac{dy}{\mu} \tag{II.58}$$

Des expressions précédentes, on déduit les contraintes de cisaillement dans le fluide :

$$\tau_{xy} = \left(y - \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{U_2 - U_1}{J_2}$$

$$\tau_{yz} = \left(y - \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{W_2 - W_1}{J_2} \tag{II.59}$$

L'équation de Reynolds généralisée par Dowson en 1962 s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial P}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} [U_2 (R_2 - F) + U_1 F] - \rho_2 U_2 \frac{\partial h}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} [W_2 (R_2 - F) + W_1 F] - \rho_2 W_2 \frac{\partial h}{\partial z} \\ &+ \frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial h}{\partial t} + \rho_2 V_2 \end{aligned} \tag{II.60}$$

où les fonctions R, F, G et R₂ sont définies par :

$$R = \int_0^y \rho(x, \xi, z, t) d\xi$$

$$F = \frac{I}{J_2} \int_0^h \frac{R}{\mu} dy$$

$$G = \int_0^h \frac{Ry}{\mu} dy - I_2 F$$

$$R_2 = \int_0^h \rho dy \quad (\text{II.61})$$

Ces relations doivent être utilisées pour l'étude des contacts dans lesquels on tient compte de l'effet thermique. Il faut de plus :

- L'équation de continuité pour calculer le champ de vitesse U_i dans le fluide .
- L'équation de l'énergie pour calculer la température dans le fluide .
- Les relations qui donnent les variations de la masse volumique et de viscosité avec la température . Dans le cas des liquides , la masse volumique est généralement supposée constante

Il faut par ailleurs connaître avec précision les conditions aux limites sur la température .

II.3.2.3. INTERPRETATION PHYSIQUE DES DIFFERENTS TERMES DE L'EQUATION DE REYNOLDS

Dans cette équation ;

- Le terme :

$$\frac{\partial}{\partial x} [U_2 (R_2 - F) + U_1 F] - \frac{\partial}{\partial x} (G \frac{\partial P}{\partial x})$$

représente la variation du débit massique dans la direction x pour une section de dimension h suivant y et unité suivant z .

- Le terme :

$$\frac{\partial}{\partial z} [W_2 (R_2 - F) + W_1 F] - \frac{\partial}{\partial z} (G \frac{\partial P}{\partial z})$$

représente la variation du débit massique dans la direction z pour une section de dimension h suivant y et unité suivant x .

Dans les deux expressions ci-dessus, le premier terme correspond au débit dû au déplacement des parois (écoulement de Couette), le second terme correspond au débit dû au gradient de pression (écoulement de Poiseuille).

- Le terme :

$$-\rho_2 \left(U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + W_2 \frac{\partial h}{\partial z} - V_2 \right)$$

représente la variation du débit massique dans la direction y ; Les trois termes de cette expression caractérisent respectivement l'effet de l'inclinaison dans la direction x , de l'inclinaison dans la direction z et de la vitesse dans la direction y .

- Le terme :

$$\frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial h}{\partial t}$$

caractérise l'effet transitoire dû à la compressibilité du fluide .

La connaissance du champ de pression et du champ de vitesse permet de calculer les caractéristiques statiques (portance, débit et couple de frottement) et dynamique du mécanisme .

II.4. EQUATION DE L'ENERGIE DANS LE FILM LUBRIFIANT

II.4.1. DIFFERENTES FORMES DE L'EQUATION DE L'ENERGIE

L'introduction de la loi de comportement du fluide dans l'équation de l'énergie, permet d'écrire cette dernière sous la forme :

$$\rho C_v \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \lambda \theta^2 - T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_p \theta + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (\text{II.62})$$

Cette équation est la forme générale de l'équation de l'énergie dans le cas d'un fluide newtonien .

Si de plus on considère que le fluide est incompressible, et que le coefficient de conduction K est constant, on obtient alors :

$$\rho C_v \frac{dT}{dt} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (\text{II.63})$$

Dans le cas où l'évolution n'est pas incompressible, on préférera la forme (II.40) car :

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = -P \theta + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$$

Le terme

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho} \right) - \rho \theta$$

devient

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho} \right) - P \theta = \frac{dP}{dt} - \frac{P}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} + P \theta \right)$$

L'équation (II.40) prend la forme

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = T \beta \frac{dP}{dt} + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.64})$$

Cette dernière formulation de l'équation de l'énergie est commode lorsque l'on veut tenir compte de la variation de la masse volumique à l'intérieur du film, car elle fait apparaître le terme :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

qui est un terme connu .

Dans le cas où l'on néglige la variation de ρ on a :

$$C_v = C_p$$

De même lorsque le milieu est un solide, on a évidemment avec une très bonne approximation $C_p = C_v$.

II.4.2. EQUATION DE L'ENERGIE DES FILMS MINCES VISQUEUX

Dans le cadre de la mécanique des films minces visqueux, l'équation de l'énergie se simplifie très sensiblement. Pour mettre en évidence les termes prépondérants devant les autres, nous pouvons écrire cette équation avec les variables sans dimension définies par les relations (II.43). L'équation de l'énergie (II.64) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
P_e \overline{\rho C_p} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) &= \beta_0 T_0 N_d \overline{\beta T} \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + U_i \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(K \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_2} \right) + \frac{\lambda_0}{\mu_0} N_d \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} \right) \\
&+ \varepsilon^2 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\bar{K} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\bar{K} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} \right) \right] \\
&+ N_d \bar{\mu} \left[\left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{U}_3}{\partial x_2} \right)^2 \right. \\
&+ 2 \varepsilon^2 \left[\left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{U}_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] \\
&+ N_d \bar{\mu} \varepsilon^2 \left[\left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{U}_3}{\partial x_1} \right)^2 \right. \\
&+ 2 \left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{U}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{U}_3}{\partial x_2} \right) \\
&+ N_d \bar{\mu} \varepsilon^4 \left[\left(\frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_3} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{II.65}$$

Dans cette relation, le nombre de Peclet P_e et le nombre de dissipation N_d s'écrivent respectivement :

$$P_e = \frac{\rho_0 C_p U H^2}{K_0 L}$$

$$N_d = \frac{\mu_0 U^2}{K_0 T_0}$$

En négligeant dans l'équation (II.65) tous les termes multipliés par ε^2 et par ε^4 , et compte tenu de l'équation (II.45) qui permet d'écrire :

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_2} = 0$$

l'équation de l'énergie s'écrit (Annexe 2)

$$\begin{aligned}
 \overline{P_e} \overline{\rho C_p} \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} \right) = \overline{\beta_0 T_0 N_d} \overline{\beta T} \left(\frac{\partial \overline{P}}{\partial t} + \overline{U}_1 \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_1} + \overline{U}_3 \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_3} \right) \\
 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(K \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_2} \right) + N_d \overline{\mu} \left[\left(\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{U}_3}{\partial x_2} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{II.66}$$

En revenant aux variables dimensionnées dans l'équation (II.66), il vient :

$$\begin{aligned}
 \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \beta T \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} + U_3 \frac{\partial P}{\partial x_3} \right) \\
 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + \mu \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{II.67}$$

L'équation (II.67) est la forme particulière de l'équation de l'énergie appliquée aux films minces .

La signification des différents termes de cette équation est la suivante :

$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$: terme caractérisant l'accumulation d'énergie.

$\rho C_p U_j \frac{\partial T}{\partial x_j}$: terme caractérisant l'énergie de convection.

$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_2} \right)$: terme caractérisant l'énergie de conduction.

$\mu \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right)^2 \right]$: terme caractérisant l'énergie de dissipation visqueuse.

$\beta T \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} + U_3 \frac{\partial P}{\partial x_3} \right)$: terme caractérisant l'énergie développée par compression qui est

nulle dans le cas d'un fluide incompressible

II.5. PROPRIETES DU LUBRIFIANT

Les propriétés physico-chimiques des huiles lubrifiantes varient en fonction de nombreux paramètres. Les plus souvent retenus sont : la température, la pression et le taux de cisaillement. Nous nous attacherons plus particulièrement à rappeler l'influence de la température sur divers grandeurs physiques caractérisant une huile lubrifiante .

II.5.1. DENSITE

La densité augmente avec le poids moléculaire et est plus élevée pour les bases naphthéniques. Pour les bases paraffiniques, une relation a été établie, qui permet de calculer la variation de densité avec la température, elle s'écrit :

$$d_T = d_0 - aT \quad (\text{II.68})$$

Dans cette formule, d_0 est la densité à la température de 0°C , T est la température en $^\circ\text{C}$ et a un paramètre qui selon la nature de l'huile varie entre 0,00064 et 0,00066

II.5.2. CONDUCTIBILITE THERMIQUE

La conductibilité thermique varie avec la température et peut être calculer par la relation :

$$K = \frac{0.101}{d_{15}} (51 - 0.00054 T) \quad (\text{II.69})$$

Dans cette formule, K est la conductibilité thermique exprimée en $\text{Kcal/m.h.}^\circ\text{C}$.
 d_{15} la densité à 15°C et T la température en $^\circ\text{C}$

II.5.3. CHALEUR SPECIFIQUE A PRESSION CONSTANTE

La chaleur spécifique dépend elle aussi de la température ; elle peut être donnée par la relation :

$$C_p = \frac{1}{\sqrt{d_{15}}} (0.402 + 0.00081 T) \quad (\text{II.70})$$

Dans cette formule, C_p est la chaleur spécifique exprimée en $\text{Kcal/Kg.}^\circ\text{C}$, d_{15} la densité à 15°C et T la température en $^\circ\text{C}$.

II.5.4. VISCOSITE

De toutes les propriétés physiques à considérer en lubrification hydrodynamique, la viscosité est la plus importante. Dans les systèmes hydrauliques, et d'une manière générale, chaque fois qu'un lubrifiant est employé, c'est principalement la viscosité qui conditionne les pertes par frottement, le rendement mécanique, la capacité de charge, l'épaisseur du film, et dans beaucoup de cas l'existence de l'usure .

la viscosité caractérise l'aptitude physique d'un fluide à assurer la lubrification sous des conditions définies de vitesse, de charge et de température .

En général, les fluides ont une viscosité qui dépend très largement de la température. Cette variation qui, au voisinage de 20°C est de 2,5 % par degré pour l'eau, peut atteindre 10 à 15 % par degré pour les huiles minérales .

Cette variation est décroissante, la viscosité chute très rapidement aux basses températures puis plus lentement aux températures élevées.

Différentes formules ont été proposées pour décrire cette variation de la viscosité avec la température.

II.5.4.1. FORMULE DE BARR

Elle s'exprime sous la forme :

$$[\log(v + 0.8)]^{0.3} = A + \frac{B}{T} \quad (\text{II.71})$$

Dans cette formule, T est la température absolue ($T = T^{\circ}\text{C} + 273$), A et B sont des constantes spécifiques de l'huile et v est la viscosité cinématique en centistokes (mm^2/s).

II.5.4.2. FORMULE DE HUGEL ET CLAIRBOIS

Elle s'écrit :

$$\text{Log}(\mu + a) \cdot (T + b) = c \quad (\text{II.72})$$

Dans cette formule, μ est la viscosité dynamique en millipoiseuille (mPl ou mPa.s), T est la température absolue, a , b et c sont des constantes caractéristiques de l'huile.

II.5.4.3. FORMULE DE MAC COULL ET WALTHER

Elle s'exprime sous la forme :

$$\text{LogLog}(v + a) = m \text{Log } T + n \quad (\text{II.73})$$

Dans cette formule v est la viscosité cinématique en centistokes (mm^2/s), T est la température absolue et m , n sont des constantes spécifiques de l'huile. La constante a ajoutée à la viscosité cinématique prend la valeur 0,6 pour toutes les huiles de viscosité supérieure à 1,5 centistokes pour des huiles de viscosité inférieure, elle prend les valeurs :

0,65 entre 1 et 1,5 centistokes

0,70 entre 0,7 et 1 centistokes

0,75 entre 0,4 et 0,7 centistokes

C'est cette formule qui a été retenue par l'ASTM (american society for testing materials), car si l'on porte sur un graphe en abscisse le logarithme népérien de la température et en ordonnée le

Log Log de la viscosité cinématique, la courbe représentative de la variation de la viscosité avec la température est une droite. Ainsi, connaissant la viscosité d'une huile à deux températures, il est facile d'en déduire la viscosité à toutes températures .

L'extrapolation n'est valable qu'entre 0°C et 130°C. Au delà de ces température, les mesures deviennent nécessaires .

Si l'on veut prendre en compte de façon très précise ces variations, il est souhaitable de disposer d'un prélevé expérimental de la viscosité en fonction de la température pour la plage de température dans laquelle on désire utiliser l'huile .

II.6. CONCLUSION

Les équations de la thermohydrodynamique des films minces visqueux peuvent s'appliquer à n'importe quel type de contact lubrifié par un fluide newtonien. Cependant, le problème général fait intervenir un grand nombre de paramètres qu'il est difficile de prendre en compte dans toute leur généralité : géométrie et cinématique du contact, condition aux limites, propriétés physiques des composants...

Aussi nous limiterons l'étude au cas particulier important du palier lisse .

CHAPITRE III

THERMOHYDRODYNAMIQUE DES PALIERS LISSES

III.1. INTRODUCTION

Dans un palier hydrodynamique, un film d'huile sépare totalement l'arbre du coussinet (fig.III.1). En fonctionnement, les centres du coussinet et de l'arbre ne coïncident pas, il existe un coin d'huile convergent-divergent.

Le lubrifiant est entraîné dans cet espace convergent par la rotation de l'arbre ; il y a création d'un champ de pression qui s'oppose à la charge et assure l'équilibre. Au démarrage et à faible vitesse, la portance hydrodynamique est très faible ; il peut y avoir contact entre l'axe et le coussinet, dans ce cas, le palier fonctionne en régime de lubrification semi-fluide ou mixte.

Nous nous limiterons dans cette étude au régime hydrodynamique établi, nous supposerons aussi que l'écoulement du fluide à travers le palier est laminaire.

En 1958 CAMERON [10] a mis en évidence la prépondérance de la variation de la viscosité avec la température devant la variation de la masse volumique. aussi dans cette étude nous prendrons en compte la variation de viscosité en fonction de la température et nous négligerons celle de la masse volumique.

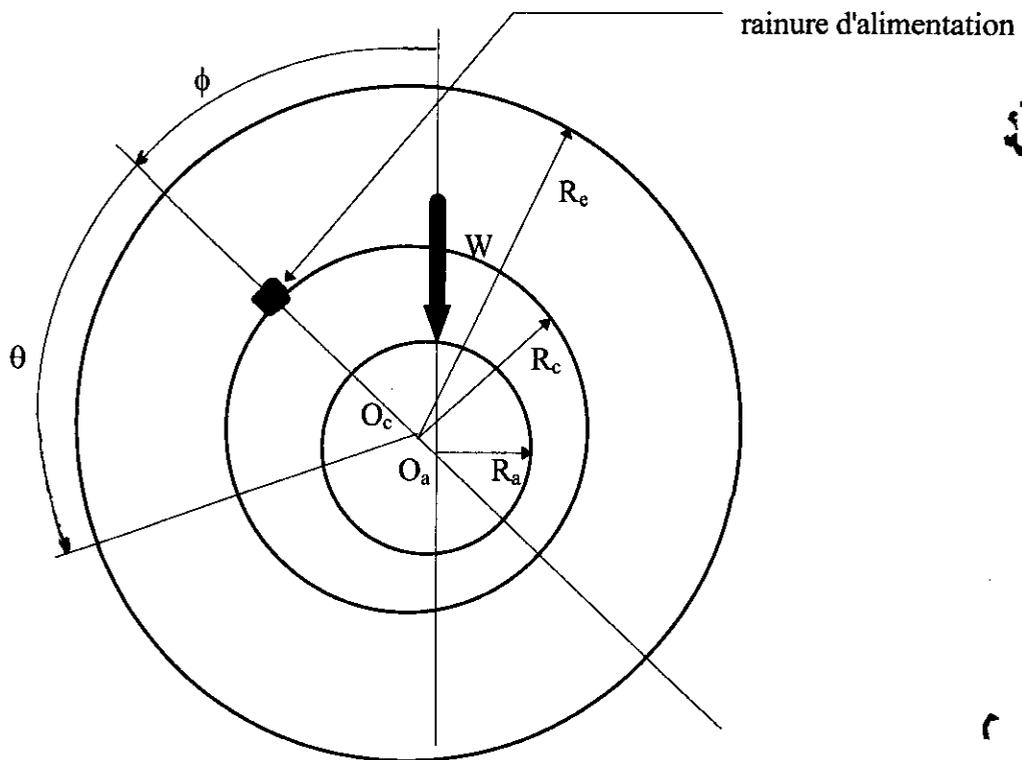


fig.III.1 schéma d'un palier lisse

III.2. GEOMETRIE ET CINEMATIQUE DES SURFACES

Un palier lisse (fig.III.1) est constitué d'un coussinet, de centre O_c et de rayon R_c , et d'un arbre de centre O_a et de rayon R_a . Sous l'action de la charge les centres O_c et O_a ne coïncident pas. La distance O_cO_a est l'excentricité e .

L'angle que fait la ligne des centres O_cO_a avec la direction de la charge est l'angle de calage ϕ . Si les axes du coussinet et de l'arbre sont parallèles (palier aligné) et si l'on néglige les déformations élastiques des surfaces sous l'effet de la température et de la pression, ces deux paramètres sont suffisants pour repérer le positionnement de l'arbre à l'intérieur du coussinet.

Les rayons R_c et R_a étant très voisins ($R_a/(R_c-R_a) \approx 10^3$), On peut, en négligeant la courbure du film, développer le coussinet ou l'arbre et l'assimiler à un plan (fig.III.2).

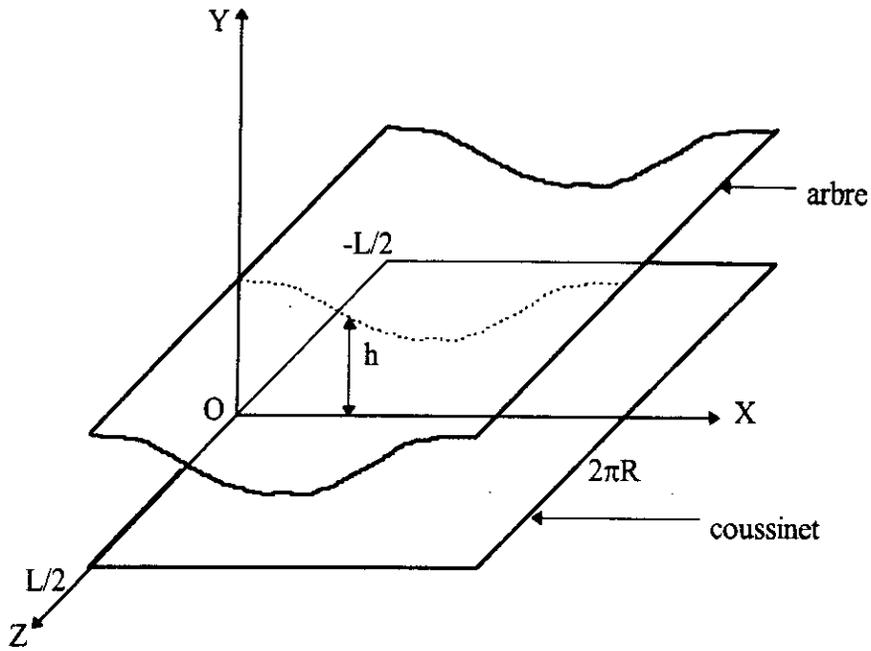


fig.III.2: palier développé

Compte tenu de ces hypothèses, l'épaisseur du film a pour expression :

$$h = c(1 + \varepsilon \cos\theta) \tag{III.1}$$

soit sous forme sans dimension

$$\bar{h} = \frac{h}{c} = 1 + \varepsilon \cos\theta \tag{III.2}$$

Dans ces relations :

$c = R_c - R_a$ est le jeu radial imposé par l'usinage.

$\varepsilon = e/c$ est l'excentricité relative, elle varie de 0 à 1.

$\theta = x/R_a$ est la coordonnée angulaire.

Dans le repère associé à la figure III.2, dont le plan XOZ est confondu avec la surface développée du coussinet et en considérant qu'il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois, les conditions limites sur la vitesse sont :

sur le coussinet : $Y=0$; $U_1=0$; $V_1=0$; $W_1=0$

(III.3)

sur l'arbre : $Y=h$; $U_2=U=\omega R_a$; $V_2=0$; $W_2=0$

III.3. EQUATION DE REYNOLDS GENERALISEE ET CONDITIONS AUX LIMITES

Pour les conditions de géométrie et de vitesse définies précédemment et dans le cas d'un régime stationnaire établi, l'équation de Reynolds généralisée (II.60) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial P}{\partial z} \right) = U \frac{\partial}{\partial x} \left(h - \frac{I_2}{J_2} \right) \quad (\text{III.4})$$

L'intégrale G est définie par la relation (II.61) et les intégrales I_2 et J_2 sont définies en (II.58). Nous devons résoudre cette équation en tenant compte des conditions aux limites, ces dernières s'écrivent dans le cas d'un fluide incompressible :

- Dans la rainure d'alimentation parallèle à l'axe du palier qui est généralement situé à l'intérieur d'un domaine angulaire défini par $\theta_a \in [-\pi/2, \pi/2]$ on écrira :

$$P(\theta_a, z) = P_a$$

si l'alimentation se fait à une pression P_a

$$\text{- sur les bords du coussinet : } P\left(\theta, \frac{L}{2}\right) = P\left(\theta, -\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$\text{- sur la frontière du film : } P(\theta_s, z) = 0$$

où θ_s , abscisse de fin de l'arc actif est déterminée par la condition :

$$\text{pour } \theta = \theta_s, \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$$

Par ailleurs, avec l'hypothèse de non glissement entre le fluide et les parois du contact, le champ des vitesses dans le film s'écrit :

$$P = \frac{\partial P}{\partial x} \left(I - \frac{I_2}{J_2} \right) - \frac{J}{J_2} U_1 + U_1$$

$$V = - \int_0^y \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dy$$

$$W = \frac{\partial P}{\partial z} \left(I - \frac{I_2}{J_2} \right) \quad (\text{III.5})$$

III.4. EQUATION DE L'ENERGIE DANS LES DIFFERENTS MILIEUX

III.4.1. EQUATION DE L'ENERGIE DE LA MECANIQUE DES FILMS MINCES VISQUEUX

Appliquons l'équation de l'énergie écrite en (II.67) au cas du palier lisse défini par la figure (III.1) et en supposant que :

- Le régime d'écoulement est stationnaire,
- La variation de la masse volumique avec la température est négligeable, ainsi le coefficient de compressibilité β est nul,
- Le coefficient K de conduction est constant.

Dans ces conditions et en utilisant les variables x, y, z , l'équation (II.67) se réduit à :

$$\rho C_p (U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} + W \frac{\partial T}{\partial z}) = K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu [(\frac{\partial U}{\partial y})^2 + (\frac{\partial W}{\partial y})^2] \quad (III.6)$$

III.4.2. EQUATION DE LA CHALEUR DANS LE COUSSINET

Au sein du coussinet, les phénomènes thermiques sont régis par l'équation de l'énergie (II.64) dans laquelle il faut annuler le champ des vitesses. il vient alors :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = K (\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}) \quad (III.7)$$

Cette équation est l'équation de la chaleur .

En régime permanent :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

l'équation (III.7) devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (III.8)$$

III.4.3. EQUATION DE LA CHALEUR DANS L'ARBRE

Au sein de l'arbre, les transferts thermiques sont aussi régis par l'équation (II.64) en régime permanent, mais cette fois le champ des vitesses n'est pas nul .

On peut donc écrire l'équation de la chaleur dans l'arbre sous la forme :

$$K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \rho C_p \left(U_a \frac{\partial T}{\partial x} + V_a \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (\text{III.9})$$

Dans cette relation U_a et V_a représentent la vitesse d'un point de l'arbre suivant respectivement les directions x et y .

Les équations de l'énergie (III.6) et de la chaleur (III.8) et (III.9) sont des équations aux dérivées partielles du second ordre dont l'inconnu est la température. Pour la résolution de ces équations, il est nécessaire de définir les conditions aux limites sur la température approchant au mieux la réalité physique.

III.5. CONDITIONS AUX LIMITES SUR LA TEMPERATURE

III.5.1. LES DIFFERENTS MODES DE TRANSMISSION DE CHALEUR

Maintenant les équations fondamentales qui gouvernent le phénomène thermique sont en place. Cependant, si les équations sont posées, il reste à préciser les conditions aux limites et à résoudre ces équations.

Si on sait que la production de la chaleur à l'intérieur du film se fait par dissipation visqueuse, le mode d'évacuation de cette chaleur du palier n'a pas été facile à mettre en oeuvre. En effet au fil des années, différentes approches souvent liées aux moyens de calculs utilisés ont été publiées.

De notre côté nous pensons que la combinaison des trois modes de transfert (conduction, convection et rayonnement) peut avoir lieu simultanément sur les différentes interfaces rencontrées dans le palier.

Rappelons brièvement les lois ou formules associées à ces différents modes de transfert.

- La conduction exprime la densité de flux de chaleur $q_i n_i$ qui traverse un élément de surface unité, elle obéit à la loi de Fourier :

$$q_i n_i = -K \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i \quad (\text{III.10})$$

- Le rayonnement obéit à la loi de Stefan-Boltzmann, la densité de flux de chaleur émis par une surface d'aire unité s'écrit :

$$q_i n_i = \varepsilon \sigma T^4 \quad (\text{III.11})$$

où T représente la température absolue de la surface rayonnante, ε le facteur d'émission et σ la constante de Stefan-Boltzmann ($\sigma=5,6688 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$).

si l'on considère une masse gazeuse à une température T_2 qui échange de la chaleur avec une paroi rayonnante à température T_1 , on peut écrire la densité de flux de chaleur sous la forme :

$$q_i n_i = h_r (T_1 - T_2) = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} + \frac{1}{F_{12}}} \quad (\text{III.12})$$

h_r est le coefficient d'échange par rayonnement et s'exprime en $\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$, il dépend fortement de T_1 et T_2 .

F_{12} est le facteur de forme qui est égale à l'unité pour une surface convexe. nous aurons ainsi :

$$q_i n_i = h_r (T_1 - T_2) = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad (\text{III.13})$$

- La convection est un mode de transfert d'énergie qui correspond à l'action combinée de la conduction et du mouvement du fluide. Ce mécanisme a lieu à l'intérieur d'une couche limite thermique et son étude est très délicate.

On peut cependant approcher la quantité de chaleur évacuée par convection à l'aide de la loi de Newton qui s'exprime sous la forme :

$$q_i n_i = h_c (T_1 - T_2) \quad (\text{III.14})$$

h_c est le coefficient de convection et s'exprime en $\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$. Il caractérise l'échange de chaleur.

III.5.2. CONDITIONS AUX LIMITES SUR LA SURFACE EXTERNE DU COUSSINET

Sur les surfaces externes du coussinet S_f et S_{lc} (fig.III.3) trois types de conditions peuvent être employées :

1) la surface est à température fixée T_f

ainsi sur S_f :

$$T|_{r=R_e} = T_f$$

(III.15)

et sur S_{lc} :

$$T|_{z=L/2} = T_f$$

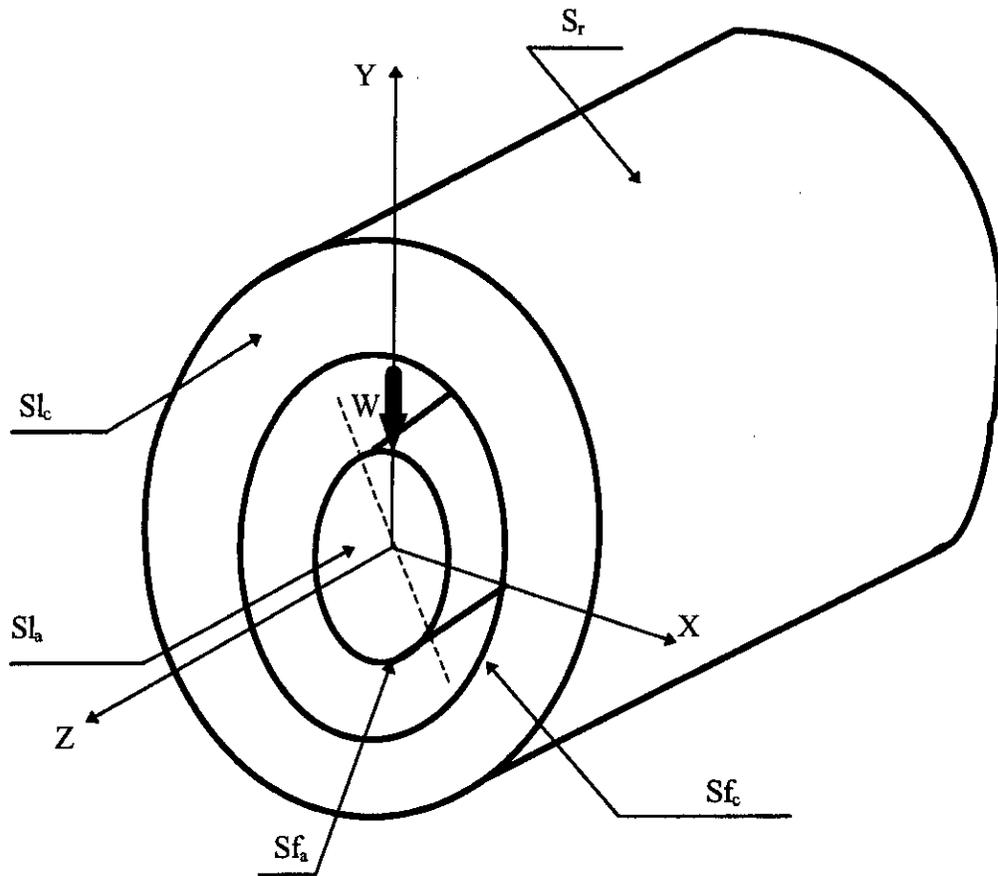


fig.III.3: différentes surfaces du palier

c'est un cas idéal qui suppose que cette surface est maintenue à cette température T_f par un écoulement extérieur au palier .

2) Il y a convection et rayonnement sur ces surfaces. On a l'habitude de regrouper les lois de rayonnement thermique et de convection. Ainsi, étant donné une paroi de température de surface T_1 , de facteur d'émission ε_1 en contact avec un fluide à température T_2 de facteur d'émission ε_2 , h_c et h_r étant les coefficients d'échanges superficiels par convection et rayonnement. On peut écrire pour le flux de chaleur :

$$q_i n_i = h_r (T_1 - T_2) + h_c (T_1 - T_2) = (h_r + h_c) (T_1 - T_2) = h (T_1 - T_2) \quad (\text{III.16})$$

h est le coefficient global d'échange superficiel. Il est essentiellement fonction de la vitesse du fluide et des températures T_1 et T_2 .

On peut donc écrire sur S_r :

$$K_c \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_c} = -h(T_c|_{r=R_c} - T_b) \quad (\text{III.17})$$

et sur S_{fc} :

$$K_c \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\pm L/2} = -h(T_c|_{z=\pm L/2} - T_b) \quad (\text{III.18})$$

Dans cette relation :

k_c est le coefficient de conduction du coussinet

h est le coefficient global d'échange, il varie avec la température

R_c est le rayon externe du coussinet

T_b est la température ambiante

T_c est la température dans le coussinet

3) les surfaces S_i ou S_r peuvent être isolées.

C'est le cas limite de 2) pour lequel h_c tend vers zéro et :

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (\text{III.19})$$

sur cette paroi n représente la coordonnée normale à la paroi. C'est une condition du type adiabatique.

Naturellement ces trois conditions peuvent être combinées pour une paroi donnée afin d'approcher au mieux la situation réelle.

III.5.3. CONDITIONS AUX LIMITES A L'INTERFACE ENTRE LE FILM ET LE COUSSINET

L'interface S_{fc} entre le film et le coussinet est baignée par le film lubrifiant ; totalement dans la zone active du film et en partie seulement dans la zone inactive où règne un mélange de lubrifiant, de vapeur saturante et d'air.

Sur cette interface, différents types de conditions ont été écrites. Nous les classerons en deux groupes.

Le premier groupe comprend toutes les conditions aux frontières qui ne nécessitent pas la résolution de l'équation de la chaleur dans le coussinet, ce sont chronologiquement les premières qui ont été écrites. Le second groupe prendra en compte les conditions qui nécessitent la résolution de cette équation.

- Premier groupe de conditions aux limites.

1) Sur S_{fc} la température est imposée à une valeur T_i :

Ainsi :

$$T|_{r=R_c} = T_i \quad (\text{III.20})$$

c'est bien entendu la condition la plus simple à mettre en oeuvre, c'est pourquoi elle a été employée par les premiers chercheurs qui ont étudié le problème thermohydrodynamique.

Une telle condition peut difficilement se justifier d'un point de vue physique.

2) Sur S_{fc} le gradient de température est nul.

C'est la condition dite "adiabatique", elle s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial y}|_{y=h} = 0 \quad (\text{III.21})$$

Certains auteurs se sont servis largement de cette condition. Elle suppose qu'en chaque point de l'interface, aucun flux de chaleur ne pénètre dans le coussinet considéré comme un isolant parfait.

- deuxième groupe de conditions aux limites.

Pour ce type de conditions, On traduit la continuité du flux de chaleur. Comme l'épaisseur du film est très faible, l'écoulement est tout entier situé à l'intérieur de la couche limite thermique et on peut admettre que seule la transmission de chaleur par conduction intervient.

Dans ces conditions, on peut écrire :

$$K_h \frac{\partial T_h}{\partial y} \Big|_{y=h} = K_c \frac{\partial T_c}{\partial r} \Big|_{r=R_c} \quad (\text{III.22})$$

certains auteurs supposent que le flux de chaleur est radial dans le coussinet. Dans notre étude on ne fera aucune hypothèse sur ce sujet.

Dans les relations précédantes :

K_h est le coefficient de conduction dans le film qu'on suppose constant.

R_c est le rayon intérieur du coussinet.

T_h est la température dans le film lubrifiant.

T_c est la température dans le coussinet.

III.5.4. CONDITIONS AUX LIMITES A L'INTERFACE ENTRE LE FILM ET L'ARBRE

Pour cette interface, les conditions précédemment présentées, de type température imposée et adiabaticité ont été utilisées. Cependant la condition la plus réaliste est, comme nous l'avons dit au paragraphe précédent, la condition de continuité du flux de chaleur transmis par conduction.

Cependant l'arbre étant en rotation rapide, ce flux est indépendant de la coordonnée angulaire θ .

Ces conditions s'écrivent :

$$K_h \frac{\partial T_h}{\partial y} \Big|_{y=0} = K_a \frac{\partial T_a}{\partial r} \Big|_{r=R_a} \quad (\text{III.23})$$

T_a est la température dans l'arbre.

et pour un rayon donné R_i on a une température constante mais qui n'est pas imposée :

$$T|_{r=R_i} = T \quad (\text{III.24})$$

III.5.5. CONDITIONS AUX LIMITES AUX DEUX EXTREMITES DE L'ARBRE

1) Au deux extrémités de l'arbre, on peut supposer la température connue et égale à une température légèrement supérieure à celle du lubrifiant froid entrant dans le palier, afin de tenir compte du réchauffement du fluide rejeté sur les faces latérales du palier. On posera par exemple :

$$T|_{z=\pm L/2} = (1,1 \div 1,2) T_{al} \quad (\text{III.25})$$

où T_{al} est la température d'alimentation.

2) La condition écrite ci-dessus a l'inconvénient d'être trop rigide. La température des extrémités de l'arbre est figée, quelles que soient les conditions de fonctionnement. Il vaut mieux se servir de d'une condition de type convection et rayonnement. On écrira alors :

$$K_a \frac{\partial T_a}{\partial z} \Big|_{z=\pm L/2} = -h (T_a|_{z=\pm L/2} - T_b) \quad (\text{III.26})$$

dans cette relation :

K_a est le coefficient de conduction de l'arbre.

h est le coefficient global d'échange .

III.6. CARACTERISTIQUES STATIQUES

III.6.1. CHARGE ET ANGLE DE CALAGE

La charge et l'angle de calage sont obtenus par intégration du champ de pression sur la surface du palier. A l'équilibre dans le système repère (o,k,l) (figIII.4), on a :

$$W_k = -\int_s P \cos\theta \, dS = W \cos\phi$$

$$W_l = -\int_s P \sin\theta \, dS = W \sin\phi \quad (\text{III.27})$$

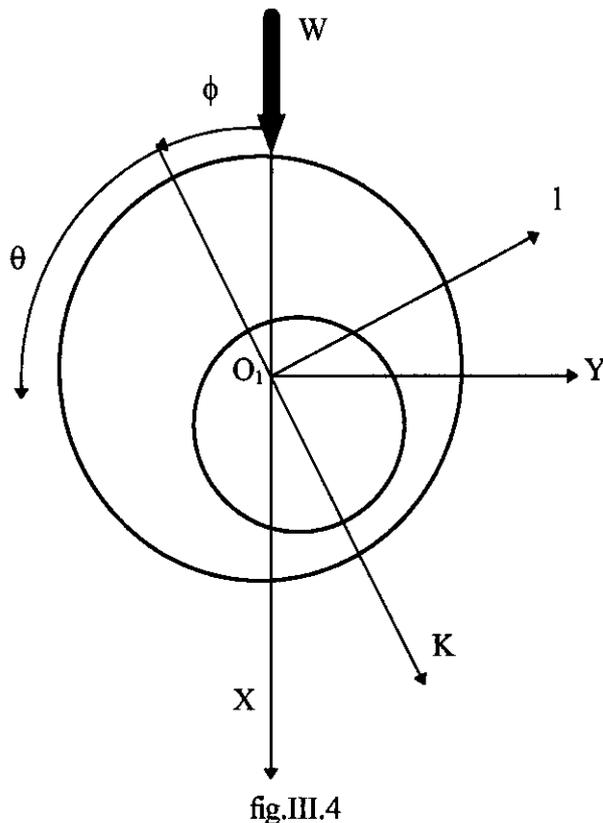


fig.III.4

d'ou

$$W = \sqrt{W_k^2 + W_l^2} \quad (\text{III.28})$$

, et

$$\phi = \arctg\left(-\frac{W_l}{W_k}\right) \quad (\text{III.29})$$

III.6.2. DEBIT

Le débit du palier résulte de celui de la rainure. Le débit est obtenu en intégrant la vitesse normale à la frontière le long de la section de sortie. Ce débit trouve son importance le fait que sa valeur est la même que celle du débit alimentant le palier.

Vu la symétrie du mécanisme, les débits volumiques q_1 et q_2 sortant des deux surfaces du palier sont égaux. Ainsi on ne détermine que le débit q_2 sortant de la face correspondant à l'abscisse $x_3=L/2$. En intégrant la composante W de la vitesse du fluide suivant la surface $x_3=L/2$, on obtient :

$$q_2 = \int_0^{2\pi R} \int_0^h W|_{z=L/2} dy dx \quad (\text{III.30})$$

le débit axial total q vaut le double de q_2 on a donc

$$q = 2 \int_0^{2\pi R} \int_0^h W|_{z=L/2} dy dx \quad (\text{III.31})$$

III.6.3. LE COUPLE DE FROTTEMENT

On s'intéresse particulièrement au couple de frottement sur l'arbre, puisqu'il nous permet de déterminer la puissance dissipée par le palier.

L'état de contrainte de cisaillement permettant le calcul du couple de frottement sur l'arbre s'obtient à partir des équations (II.59). En remarquant que la somme des contraintes tangentielles τ_{yz} est nulle, en raison de la symétrie du contact et en tenant compte des conditions aux limites sur la vitesse du fluide (III.3) il vient :

$$\tau_{xy} = \left(y - \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{U}{J_2} \quad (\text{III.32})$$

Dans la partie active du film, c'est à dire jusqu'à ce que la répartition de pression devient nulle, le couple résistant s'écrit :

$$C = \int_{ra} R \tau_{xy(y=h)} dS \quad (\text{III.33})$$

III.7. CONCLUSION

L'équation de Reynolds est une équation aux dérivées partielles du second ordre de types elliptique qui n'admet pas (sauf dans quelques cas simples) de solution analytique.

Plusieurs chercheurs ont essayé de résoudre cette équation en négligeant soit, l'effet de la température soit, l'effet de l'écoulement axial.

Pour les paliers de longueur finie, différentes méthodes de calcul ont été proposé : analogie électrique, méthodes variationnelles, développement en série et méthodes numériques. Les méthodes actuellement utilisées sont pour la plupart des méthodes numériques.

CHAPITRE IV

ANALYSE DU PHENOMENE DE LUBRIFICATION THERMOHYDODYNAMIQUE LAMINAIRE PAR ELEMENTS FINIS

IV.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous présentons la résolution du problème de lubrification thermohydrodynamique, avec un fluide incompressible en écoulement laminaire dans un palier lisse, par la méthode des éléments finis.

Pour ce, on établit la formulation intégrale du problème posé à partir de la minimisation d'une fonctionnelle pour l'équation de Reynolds généralisée et de la méthode résiduelle de Galerkin pour les équations de l'énergie et de la chaleur, en tenant compte des différentes conditions aux limites dans chaque cas. Puis, on aborde la discrétisation des formes intégrales en utilisant une approximation par éléments finis, ce qui permet d'aboutir à un système algébrique non linéaire à résoudre.

La méthode des éléments finis offre bien des avantages par rapport à la méthode, plus commune, des différences finies, on peut citer :

- La possibilité de formuler la solution qui décrit complètement le problème pour un élément individuel avant assemblage, ce qui ramène le problème complexe à une série de problèmes plus simples.
- Une meilleure généralisation d'un point de vue géométrique.
- Une bonne adaptation à la présence de discontinuités géométriques.
- La possibilité de prendre en considération toutes les conditions aux limites envisagées.
- Une résolution globale du problème avec la méthode de substitution incrémentale, ce qui élimine les problèmes de convergence numérique.

IV.2. RAPPEL

L'analyse thermohydrodynamique requiert la résolution simultanée des trois équations aux dérivées partielles non linéaires :

- l'équation généralisée de Reynolds,
- l'équation de l'énergie dans le film,
- l'équation de Fourier pour le transfert de chaleur dans le massif.

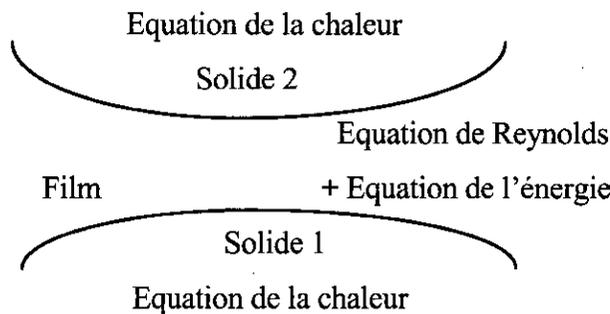


Fig.IV.1: Domaine de résolution

Pour un fluide incompressible en régime établi celles-ci s'écrivent :

1. L'équation de Reynolds généralisée

C'est une équation aux dérivées partielles elliptique dont l'inconnue principale est la pression

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(U_2 h - (U_2 - U_1) \frac{I_2}{J_2} \right) - U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + V_2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(W_2 h - (W_2 - W_1) \frac{I_2}{J_2} \right) - W_2 \frac{\partial h}{\partial z} \tag{IV.1}$$

avec

$$I_2 = \int_0^h \frac{\xi}{\mu} d\xi \qquad J_2 = \int_0^h \frac{d\xi}{\mu} \tag{IV.2}$$

$$F = \rho \frac{I_2}{J_2} \qquad G = \rho \int_0^h \frac{y^2}{\mu} dy - I_2 F$$

Dans le cas du palier cylindrique (fig.IV.2), Ra et Rc étant très voisins, on peut négliger la courbure du film et développer le coussinet (ou l'arbre) et l'assimiler à un plan.

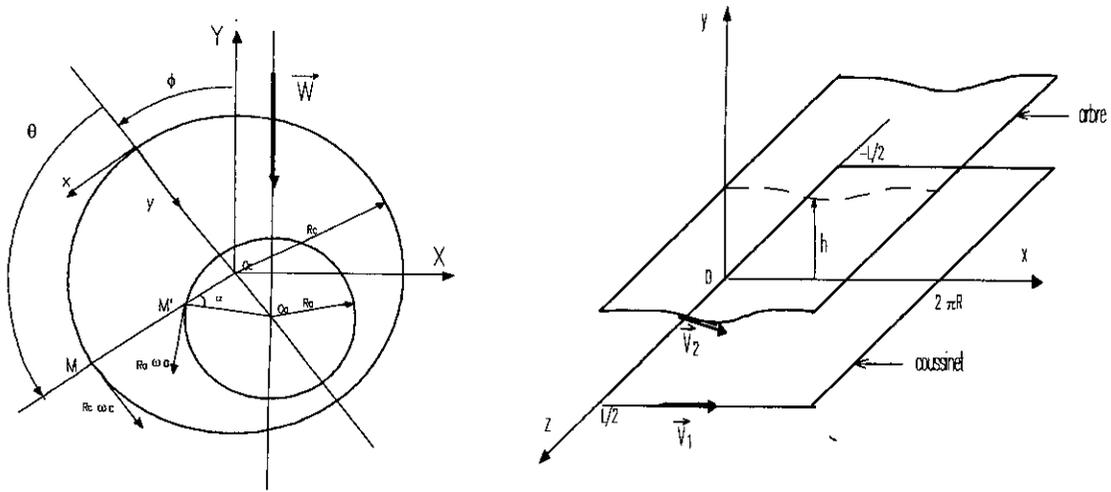


Fig.IV.2: Palier développé

Les conditions cinématiques relatives aux surfaces s'écrivent:

$$U_1 = R_c \omega_c ; V_1 = W_1 = 0$$

$$U_2 = R_a \omega_a \cos \alpha ; V_2 = R_a \omega_a \sin \alpha ; W_2 = 0 \tag{IV.3}$$

où α représente la pente de la courbe $h(x)$.

$$\text{tg} \alpha = \frac{dh}{dx} = \frac{1}{R_a} \frac{dh}{d\theta} = -\frac{e}{R_a} \sin \theta \tag{IV.4}$$

La quantité e/R_a étant très petite, on peut effectuer un développement et se limiter au 1^{er} ordre :

$$\cos \alpha \approx 1 ; \sin \alpha \approx \alpha = \frac{dh}{dx} \tag{IV.5}$$

Dans ces conditions :

$$U_1 = R_c \omega_c$$

$$U_2 = R_a \omega_a ; V_2 = U_2 dh/dx \tag{IV.6}$$

et l'équation de Reynolds généralisée s'écrit alors:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(U_2 h - (U_2 - U_1) \frac{F}{\rho} \right) \tag{IV.7}$$

2. L'équation de l'énergie

C'est une équation aux dérivées partielles parabolique à valeur initiale dans laquelle la coordonnée x joue le rôle du temps dans les problèmes non stationnaires.

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (\text{IV.8})$$

k , ρ , et c_p sont, respectivement, la conductibilité, la masse volumique et la chaleur spécifique du fluide.

3. L'équation de la chaleur

C'est une équation aux dérivées partielles elliptique.

$$k_m \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \rho_m c_v \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (\text{IV.9})$$

k_m , ρ_m , et c_v sont, respectivement, la conductibilité, la masse volumique et la chaleur spécifique du massif.

IV.3. APPLICATION DE LA M.E.F A L'EQUATION DE REYNOLDS GENERALISEE

IV.3.1. ETUDE DE LA FONCTIONNELLE ASSOCIEE A L'EQUATION DE REYNOLDS GENERALISEE

Pour un fluide incompressible, la fonctionnelle associée à l'équation de Reynolds généralisée s'écrit :

$$J(p) = \int_{\Omega} \left[-\frac{G}{\rho} \nabla p \cdot \nabla p + 2 \left(h \bar{U}_2 + \frac{F}{\rho} (\bar{U}_1 - \bar{U}_2) \right) \nabla p + 2p \frac{\partial h}{\partial t} \right] d\Omega - 2 \int_{\Gamma_q} p \bar{Q} \cdot \bar{n} d\Gamma \quad (\text{IV.10})$$

Dans cette expression :

$p = p(x,z)$ est la variable pression

∇ (nabla) représente l'opérateur gradient

\bar{U}_i est le vecteur vitesse relié à la surface i de composantes U_i, W_i suivant les deux directions x, z respectivement.

Ω est le domaine de résolution dont la frontière Γ se décompose en deux parties:

Γ_p où la pression est connue

Γ_q où le débit est imposé

\bar{n} étant la normale unitaire à Γ_q et $q = \bar{Q} \cdot \bar{n}$ le débit normal à la frontière Γ_q

Cette fonctionnelle est obtenue en utilisant le théorème d'Helmholtz et Korteweg [28], sous les conditions ci dessous:

- 1- Le fluide est newtonien
- 2- Les forces d'inertie et de masse sont négligeables devant ceux de pression et de viscosité
- 3- Les variations de pression à travers l'épaisseur du film sont petites
- 4- L'écoulement est laminaire
- 5- Le film est continu entre les surfaces en contact.

Le calcul des variations permet aussi de la déduire. On l'abordera plus tard pour justifier son association à l'équation de Reynolds généralisée avec les conditions aux limites de type Dirichlet et Neuman.

IV.3.1.1. THEOREME D'HELMHOLTZ ET KORTEWEG

Considérons le volume fluide V (fig.IV.3) limité d'une part par deux plaques (Ω) et (Ω') dont la cinématique est donnée, et d'autre part par une surface latérale (S) . Les conditions aux limites sont telles que la pression sur (S_1) , une partie de (S) , est imposée tandis que sur (S_2) , le complément de (S_1) par rapport à (S) , le champ de vitesse est connu (donc le débit).

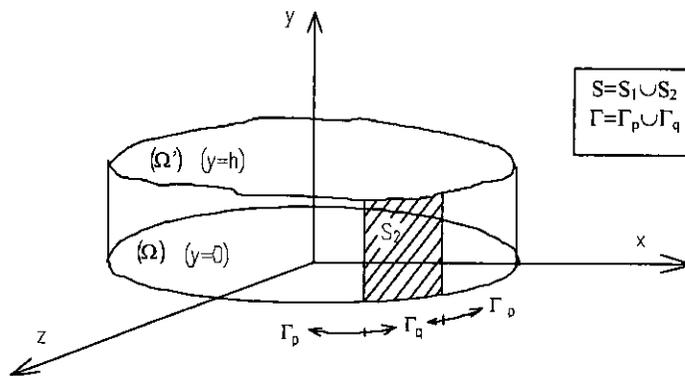


Fig.IV.3: Volume fluide V

D'après le théorème d'Helmholtz et Korteweg [28], l'énergie représenté par l'intégrale:

$$J(p) = \int_V \phi dV + 2 \int_{S_1} p \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad (\text{IV.11})$$

doit être minimale.

\vec{n} est le vecteur unitaire normal à S_1 ,

\vec{u} le vecteur vitesse avec

$$u = \frac{\partial p}{\partial x} \left(I - I_2 \frac{J}{J_2} \right) + \frac{U_2 - U_1}{J_2} J + U_1 \quad (\text{IV.12})$$

$$w = \frac{\partial p}{\partial z} \left(I - I_2 \frac{J}{J_2} \right) + \frac{W_2 - W_1}{J_2} J + W_1$$

ϕ la fonction de dissipation qui, en mécanique des films minces visqueux et incompressibles s'écrit:

$$\phi = \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (\text{IV.13})$$

$J(p)$ peut également s'écrire :

$$J(p) = \int_V \phi \, dV + 2 \int_S p \bar{u} \cdot \bar{n} \, dS - 2 \int_{S_2} p \bar{u} \cdot \bar{n} \, dS \quad (\text{IV.14})$$

ou après intégration selon l'épaisseur du film (Annexe 3)

$$J(p) = \int_{\Omega} \left[\frac{G}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{G}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 + \frac{(U_2 - U_1)^2}{J_2} + \frac{(W_2 - W_1)^2}{J_2} \right] d\Omega \quad (\text{IV.15})$$

$$+ 2 \int_{\Gamma} p \bar{Q} \cdot \bar{n} \, d\Gamma - 2 \int_{\Gamma_q} p \bar{Q} \cdot \bar{n} \, d\Gamma$$

avec

$$Q_x = \int_0^h u \, dy = h U_2 - \frac{G}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - (U_2 - U_1) \frac{F}{\rho} \quad (\text{IV.16})$$

$$Q_y = \int_0^h w \, dy = h W_2 - \frac{G}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - (W_2 - W_1) \frac{F}{\rho}$$

La quantité $\vec{Q} \cdot \vec{n}$ représente le débit normal à la frontière Γ , ce débit est connu sur Γ_q et est égal à \bar{q} .

Notons que les quantités, $(U_2 - U_1)^2/J_2$ et $(W_2 - W_1)^2/J_2$ sont indépendantes de la pression et peuvent donc être ignorées lors de la minimisation de $J(p)$.

Par ailleurs, le théorème de Green permet d'écrire :

$$\int_{\Gamma} p \bar{Q} \cdot \bar{n} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} (p Q_x) + \frac{\partial}{\partial z} (p Q_z) \right] d\Omega \quad (\text{IV.17})$$

et l'intégration de l'équation de continuité donne pour un fluide incompressible :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} = - \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{IV.18})$$

Ainsi $J(p)$ devient,

$$\begin{aligned}
 J(p) = \int_{\Omega} [& -\frac{G}{\rho} (\frac{\partial p}{\partial x})^2 - \frac{G}{\rho} (\frac{\partial p}{\partial z})^2 + 2hU_2 \frac{\partial p}{\partial x} + 2hW_2 \frac{\partial p}{\partial z} \\
 & - 2\frac{F}{\rho} (U_2 - U_1) \frac{\partial p}{\partial x} - 2\frac{F}{\rho} (W_2 - W_1) \frac{\partial p}{\partial z} + 2p \frac{\partial h}{\partial t}] d\Omega \quad (IV.19) \\
 & - 2 \int_{\Gamma_q} \bar{q} p d\Gamma
 \end{aligned}$$

IV.3.1.2. CALCUL DES VARIATIONS ET JUSTIFICATION DE J(P)

De par sa structure, l'équation de Reynolds, pour un fluide incompressible, est semblable aux équations de champ qui gouvernent beaucoup de problèmes physiques. A ce titre, elle peut donc être considérée comme l'équation d'Euler-Lagrange d'une certaine fonctionnelle $J(p)$ à être stationnaire.

Celle-ci peut être obtenue par le calcul des variations [29], mais l'ayant obtenue par le théorème d'Helmholtz et Korteweg, on se contentera dans l'annexe 4 de justifier son association à l'équation de Reynolds généralisée et pour les conditions aux limites du type Dirichlet et Neuman.

Citons ici que d'autres méthodes permettent d'arriver à la formulation intégrale telle que celles des résidus pondérés, particulièrement la méthode de Galerkin.

L'intérêt porté ici sur les deux méthodes précédentes se retrouve dans l'interprétation physique de la fonctionnelle $J(p)$ qui représente une énergie.

L'équation dimensionnelle de $J(p)$ donne :

$$[J(p)] = ML^2T^{-3} = \text{Watt} \quad (IV.20)$$

IV.3.1.3. STATIONARITE DE J(P)

En régime hydrodynamique établi laminaire, lorsque seule la surface supérieure (l'arbre) est animée d'une vitesse de translation U suivant x , la fonctionnelle $J(p)$ s'écrit :

$$J(p) = \int_{\Omega} [-\frac{G}{\rho} (\frac{\partial p}{\partial x})^2 - \frac{G}{\rho} (\frac{\partial p}{\partial z})^2 + 2(h - \frac{F}{\rho})U \frac{\partial p}{\partial x}] d\Omega - 2 \int_{\Gamma_q} \bar{q} p d\Gamma \quad (IV.21)$$

$J = J(p ; p_x ; p_z)$ avec la notation de Newton où :

$$\begin{aligned}
 p_x &= \frac{\partial p}{\partial x} \\
 p_z &= \frac{\partial p}{\partial z}
 \end{aligned} \quad (IV.22)$$

On a alors, en première variation,

$$\delta J(p) = \frac{\partial J}{\partial p} \delta p + \frac{\partial J}{\partial p_x} \delta (p_x) + \frac{\partial J}{\partial p_z} \delta (p_z) + \dots \quad (IV.23)$$

où $\delta p, \delta p_x, \delta p_z$ sont, respectivement, les variations virtuelles de p, p_x, p_z ,
et

$$\frac{\partial J}{\partial p} = -2 \int_{\Gamma_v} \bar{q} \, d\Gamma$$

$$\frac{\partial J}{\partial p_x} = \int_{\Omega} \left(-2 \frac{G}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2U \left(h - \frac{F}{\rho} \right) \right) d\Omega \quad (IV.24)$$

$$\frac{\partial J}{\partial p_z} = \int_{\Omega} \left(-2 \frac{G}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) d\Omega$$

soit, en tenant compte du fait que la fonctionnelle doit être stationnaire :

$$\begin{aligned} \delta J(p, p_x, p_z) = \int_{\Omega} \left[-2 \frac{G}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) - 2 \frac{G}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \delta \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \right. \\ \left. + 2U \left(h - \frac{F}{\rho} \right) \delta \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] d\Omega - 2 \int_{\Gamma_v} \bar{q} \delta p \, d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (IV.25)$$

$\delta J(p, p_x, p_z)$ représente aussi la forme intégrale faible $W(p)$ de type Galerkinge de l'équation de Reynolds généralisée qui s'obtient par pondération des résidus et s'écrit:

$$\begin{aligned} W(p) = \int_{\Omega} \left[- \frac{G}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta p) - \frac{G}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (\delta p) + U \left(h - \frac{F}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\delta p) \right] d\Omega \\ - \int_{\Gamma_v} \bar{q} \delta p \, d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (IV.26)$$

Lorsque le contour Γ est constitué de segments Γ_z , parallèle à l'axe x, et Γ_x parallèle à l'axe z (fig.IV.4), cette équation peut être formulée de la manière suivante :

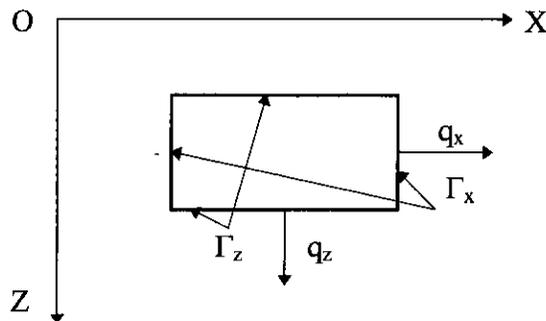


Fig.IV.4: Domaine de pression

$$\begin{aligned}
 W(p) = \int_{\Omega} & \left(-\frac{G}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta p) - \frac{G}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (\delta p) \right) d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} U \left(h - \frac{F}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\delta p) d\Omega \\
 & + \int_{\Gamma_{q_x}} \bar{q}_x \delta p dz - \int_{\Gamma_{q_z}} \bar{q}_z \delta p dx
 \end{aligned}
 \tag{IV.27}$$

où

$$\begin{cases}
 \bar{q}_x = -\frac{G}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + U \left(h - \frac{F}{\rho} \right) \\
 \bar{q}_z = -\frac{G}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}
 \end{cases}
 \tag{IV.28}$$

IV.3.2. CONDITIONS AUX LIMITES

Pour un fluide incompressible, les conditions aux limites sur la frontière Γ du domaine d'intégration Ω (fig.IV.5) portent sur la pression et le débit volumique (ou sur le gradient de pression) et s'écrivent:

$$p = p_0 \qquad \text{sur } \Gamma_p
 \tag{IV.29}$$

$$\vec{n} \left[h \vec{U}_2 - \frac{F}{\rho} (\vec{U}_2 - \vec{U}_1) - \frac{G}{\rho} \Delta p \right] = \bar{q} \quad \text{sur } \Gamma_q$$

où \vec{n} est le vecteur normal unitaire, \bar{q} le débit normal par unité de largeur et \vec{U}_i ($i=1,2$) les vecteurs vitesses associées aux deux surfaces.

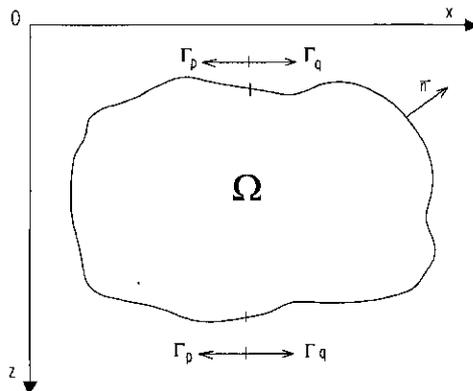


Fig.IV.5: Domaine d'intégration

IV.3.2.1. APPROCHE PHYSIQUE DU PROBLEME DE RUPTURE DU FILM LUBRIFIANT

Selon la nature physique du problème étudié (géométrie, cinématique,...), la pression calculée peut être inférieure à la pression atmosphérique en certains points de Ω . Ces dépressions vont entraîner une rupture du film selon trois processus possibles [30] :

- a) de l'air, ou du gaz, en provenance de l'atmosphère ambiante peut s'introduire dans la région en dépression jusqu'à ce que la pression dans cette zone devient égale à la pression ambiante,
- b) les gaz dissous dans le lubrifiant sont expulsés de celui-ci jusqu'à ce que la pression équilibre la pression de saturation,
- c) si la pression est inférieure à la pression de vapeur, il y a vaporisation à la température ambiante sous pression réduite et génération de bulles de vapeur qui peuvent implorer et entraîner une détérioration des surfaces.

La troisième situation, fréquemment rencontrée dans les machines hydrauliques, existe aussi en lubrification mais on observe plus couramment les deux premiers processus.

Les études expérimentales [30] montrent que dans la zone de rupture, la pression est constante et égale ou légèrement inférieure à la pression atmosphérique car le lubrifiant étant souvent en contact avec l'extérieur, la pression atmosphérique et la pression de vapeur saturante sont voisines.

IV.3.2.2. CONDITIONS AUX LIMITES POUR LA ZONE DE RUPTURE

Lorsque la pression est donnée sur la frontière de Ω , une condition suffisante pour qu'il n'y ait pas rupture du film lubrifiant est que le second membre de l'équation de Reynolds reste négatif en tout point Ω . dans le cas contraire, il peut y avoir rupture. Ceci est couramment observé dans les paliers lisses en régime permanent [30] où la géométrie du film est convergente puis divergente.

Pour définir ces conditions et les prendre en compte dans le programme numérique, on a adopté la modélisation assez fine, qui découle des travaux de Floberg [31,32,33], Elrod et Adamms [34], et Bayada [35]. Le domaine d'intégration Ω est divisé en deux régions. Une région Ω^o où le film est rompu et la pression constante, celle-ci est prise comme référence, et un domaine Ω^+ où il y a génération de pression ($p > 0$). Σ^- et Σ^+ représentent respectivement les frontières où il y a reconstitution et rupture du film lubrifiant (fig.IV.6).

Elrod suppose que la région Ω° où le film est rompu est non seulement déterminée par la condition $p = 0$, mais introduit un paramètre $\beta(x, z)$ qui représente le pourcentage de lubrifiant contenu dans le volume élémentaire de hauteur h qui entoure le point M :

$$M \in \Omega^\circ \Leftrightarrow \beta(x,z) < 1 \text{ et } p(x,z) = 0$$

$$M \in \Omega^+ \Leftrightarrow \beta(x,z) = 1 \text{ et } p(x,z) > 0$$

(IV.30)

Il suppose en outre que dans la région Ω° le fluide peut être considéré comme un milieu homogène, les surfaces Σ^- et Σ^+ représentent des surfaces de discontinuités pour la pression et la fonction $\beta(x,z)$. L'équation de continuité est valable en tout point Ω° et Ω^+ et il y a conservation du débit massique à travers les surfaces de discontinuité Σ^- et Σ^+ [36].

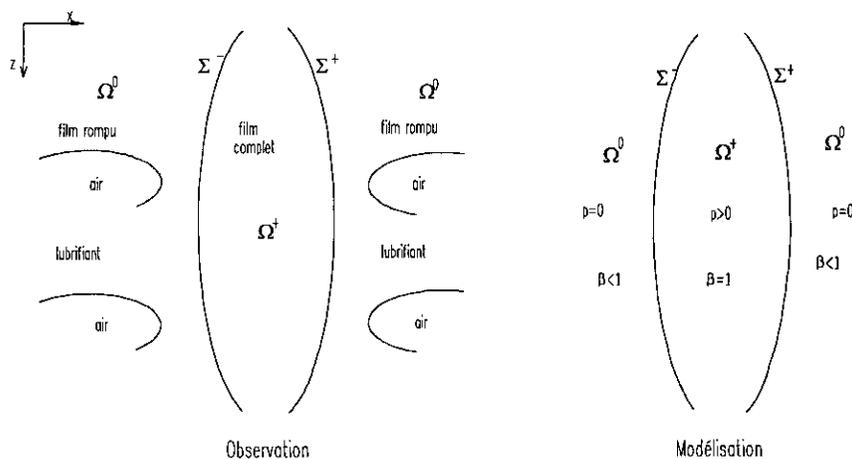


Fig.IV.6: Représentation du film lubrifiant

a) Domaine Ω^+ ,

L'intégration de l'équation de continuité au travers de l'épaisseur du film lubrifiant donne l'équation de Reynolds et la fonctionnelle $J(p)$.

b) Domaine Ω° ,

L'intégration de l'équation de continuité au travers de l'épaisseur h , compte tenu que la pression est nulle dans cette région et qu'un volume élémentaire ne contient que le pourcentage β de fluide, permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [\rho \beta h U_2 - \rho \beta \frac{I_2}{J_2} (U_2 - U_1)] \\ + \frac{\partial}{\partial z} [\rho \beta h W_2 - \rho \beta \frac{I_2}{J_2} (W_2 - W_1)] = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho \beta h) \end{aligned} \quad (IV.31)$$

c) Le long des interfaces Σ^- et Σ^+ ,

On écrit la conservation du débit massique élémentaire :

$$[\rho \beta V_n] = 0 \quad (IV.32)$$

où $[f(M)]$ désigne le saut subi par la grandeur f lorsque l'on traverse la frontière Σ en un point M dans le sens défini par la normale \vec{n} . V_n représente la projection sur la normale \vec{n} [36] de la vitesse relative \vec{V} du milieu par rapport à la frontière Σ .

$$\vec{U} = \vec{V} + \vec{W} \quad (IV.33)$$

où \vec{W} désigne le champ des vitesses de Σ dans son mouvement propre.

L'équation (IV.32) peut donc également s'écrire:

$$\int_0^h \rho \beta \vec{U} \cdot \vec{n} \, dy = \int_0^h \rho \beta \vec{W} \cdot \vec{n} \, dy \quad (IV.34)$$

Soit encore, si U_n et W_n représentent respectivement la projection sur la normale des vitesses \vec{U} et \vec{W} et si $\partial p / \partial n$ est le gradient de pression dans la direction normale à la frontière

$$\rho h (\beta - 1) \left(\frac{U_n}{2} - W_n \right) + G \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (IV.35)$$

En régime permanent les surfaces Σ^- et Σ^+ sont fixe ($W_n = 0$) et on peut écrire:

$$\rho h (\beta - 1) \frac{U_n}{2} + G \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (IV.36)$$

Cette équation permet de déterminer les conditions aux limites le long des frontières Σ :

a) à la reconstitution, le long de Σ^- , comme le gradient de pression est positif, la relation montre qu'il y a discontinuité dans la fonction $\beta(x,z)$ et dans le gradient de pression.

b) à la rupture du film, le long de Σ^+ , le gradient de pression étant négatif, la relation (IV.36) montre que celui-ci doit être nul et la fonction β égale à l'unité.

Le lieu des interfaces Σ est déterminé au cours de la résolution; d'un point de vue mathématique, nous sommes en présence d'un problème à frontière libre.

Dans le cas du palier lisse, les conditions de fonctionnement adoptés sont telle que le film lubrifiant se reforme au niveau des rainures d'alimentation. Par suite la frontière Σ^- est déterminée, seul Σ^+ demeure inconnue du problème, or la pression et sa dérivée normal s'annulent le long de cette frontière et la prise en compte de ces conditions, appelées très souvent conditions aux limites de Reynolds,

$$p = \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma^+ \quad (\text{IV.37})$$

s'effectue directement en utilisant l'algorithme proposé par Christopherson [37] dont la convergence à été récemment démontrée [38,39]. Il suffit de résoudre le système linéaire par une méthode itérative et d'annuler chaque terme de pression négatif ainsi que la dérivée normale correspondante dès que celui-ci est calculé.

IV.3.3. DISCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS

L'équation intégrale (IV.27) constitue un modèle mathématique représentant le comportement du système physique continu. Elle n'admet pas de solution analytique, cependant une solution approchée peut être envisagée en utilisant l'une des méthodes d'approximation numérique.

La méthode des éléments finis apparaît comme l'une des méthodes d'approximations par sous-domaines (fig.IV.7) et consiste à utiliser une approximation par éléments finis des fonctions inconnues pour discrétiser la forme intégrale associé au problème, puis à résoudre le système d'équations algébriques ainsi obtenu (fig.IV.8).

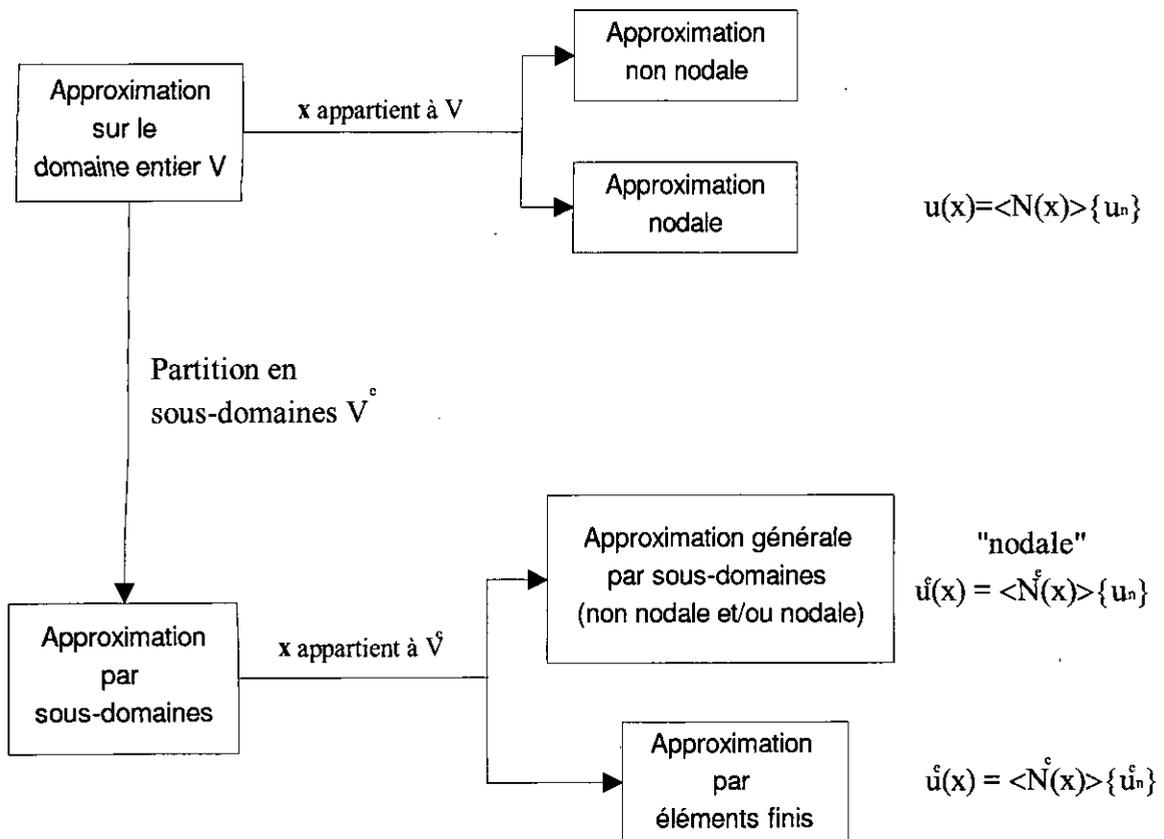


Fig.IV.7: Méthodes d'approximation

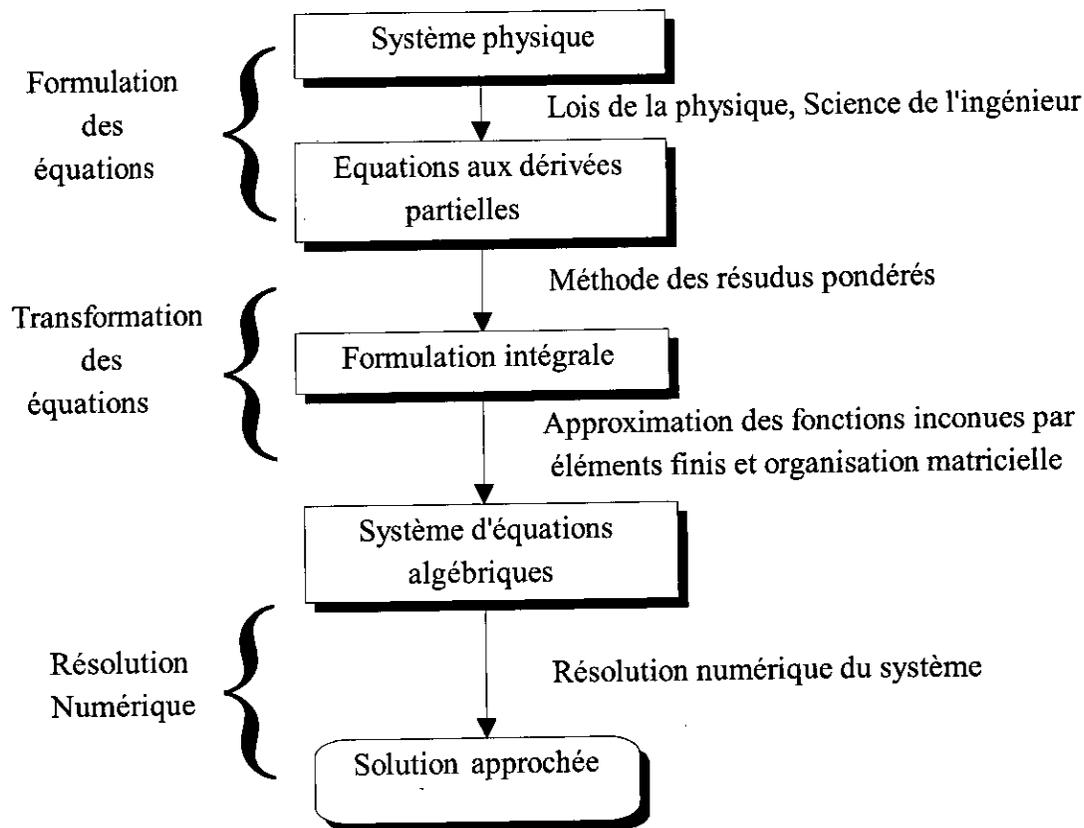


Fig.IV.8: Transformation des équations d'un système physique

IV3.3.1. PRINCIPE DE L'APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS

Un modèle mathématique d'un système physique fait intervenir plusieurs variables ou fonctions dites exactes $u_{ex}(x)$. Celles-ci sont représentées par des fonctions « approchées » $u(x)$ telles que la différence :

$$e(x) = u(x) - u_{ex}(x) \quad (IV.38)$$

soit assez « petite » pour l'objectif visé.

Le principe consiste à approximer la fonction cherchée indépendamment sur des sous domaines constituant le domaine d'intégration. Deux étapes sont nécessaires [40] :

a) Discrétisation géométrique du domaine d'intégration :

On identifie un ensemble de sous-domaines Ω^e appelés éléments et constituant une partition du domaine Ω , chaque élément est défini par ces noeuds géométriques.

b) Approximation de la fonction inconnue sur chaque élément :

On définit une fonction approchée $u^e(x)$ différente sur chaque élément Ω^e par la méthode d'approximation nodale en posant :

$$u^e(x) = \langle N^e \rangle \{ P_n^e \} \quad (IV.39)$$

où $\{ P_n^e \}$ sont les variables nodales et représentent les valeurs inconnues de la fonction exacte $u_{ex}(x)$ en n points de l'élément appelées noeuds d'interpolation dont les coordonnées sont appelées coordonnées nodales.

$\langle N^e \rangle$ sont les fonctions d'interpolation sur l'élément e déterminées de manière à ce que la fonction approchée $u^e(x)$ coïncide avec la fonction exacte $u_{ex}(x)$ aux noeuds d'interpolations, soit

$$u(x_i) = u_{ex}(x_i) = u_i \quad i=1,n \quad (IV.40)$$

ou encore

$$N_j(\mathbf{x}_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad i, j = 1, n. \quad (IV.41)$$

Les fonctions approchées $u^e(x)$ sur chaque sous-domaine Ω^e sont construites de manière à être continues sur Ω^e et elles satisfont des conditions de continuité entre les différents sous-domaines.

V.3.3.2 DISCRETISATION

Pour pouvoir opérer sur un élément nous remplaçons la forme intégrale globale W par la somme de formes intégrales W^e dites élémentaires. $NELT$ étant le nombre total d'éléments du domaine de pression, on peut écrire :

$$W(p) = \sum_{e=1}^{nel} W^e(p^e) = 0 \quad (IV.42)$$

avec

$$\begin{aligned} W^e(p^e) = & \int_{\Omega^e} \left\{ -\frac{G}{\rho} \frac{\partial p^e}{\partial x} + U \left(h - \frac{I_2}{J_2} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial x} (\delta p^e) \, dx dz \\ & + \int_{\Omega^e} \left\{ -\frac{G}{\rho} \frac{\partial p^e}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (p^e) \right\} \, dx dz \\ & + \int_{\Gamma_{qx}^e} \bar{q}_x^e \delta p^e \, dz + \int_{\Gamma_{qz}^e} \bar{q}_z^e \delta p^e \, dx \end{aligned} \quad (IV.43)$$

où

$$\bar{q}_x^e = -\frac{G}{\rho} \frac{\partial p^e}{\partial x} + U \left(h - \frac{I_2}{J_2} \right) \quad ; \quad \bar{q}_z^e = -\frac{G}{\rho} \frac{\partial p^e}{\partial z} \quad (IV.44)$$

Si l'élément n'est pas adjacent à une rainure, les deux intégrales curvilignes sont nulles.

En utilisant l'approximation par éléments finis,

$$p^e = \langle N \rangle \{P_n^e\} \quad ; \quad \delta p^e = \langle N \rangle \{\delta P_n^e\} \quad (IV.45)$$

où $\langle N \rangle$ représente l'ensemble des n fonctions de forme permettant l'approximation de la fonction p sur l'élément, on obtient la forme intégrale suivante de W^e discrétisée :

$$\begin{aligned} W^e(p^e) = & \langle \delta P_n \rangle \int_{\Omega^e} -\frac{G}{\rho} \left\{ \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} + \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} \right\} \{P_n\} \, dx dz \\ & + \langle \delta P_n \rangle \int_{\Omega^e} U \left(h - \frac{I_2}{J_2} \right) \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \, dx dz \\ & + \langle \delta P_n \rangle \left(\int_{\Gamma_{qx}^e} \bar{q}_x^e \{N\} \, dz - \int_{\Gamma_{qz}^e} \bar{q}_z^e \{N\} \, dx \right) \end{aligned} \quad (IV.46)$$

Comme $\langle N \rangle$ est nul en tout point extérieur à Ω^e et comme $\langle P_n^e \rangle$ ne fait intervenir que les variables nodales de l'élément Ω^e , chaque terme W^e se calcule à partir des seules variables liées à l'élément e . Cette propriété contribue au succès de la méthode des éléments finis en raison de la nature répétitive des calculs.

Sous forme matricielle l'équation précédente s'écrit :

$$W^e(p^e) = \langle \delta P_n^e \rangle ([K^e] \{P_n^e\} + \{f_v^e\} + \{f_s^e\}) \quad (\text{IV.47})$$

où

$$[K^e] = \int_{\Omega^e} -\frac{G}{\rho} \left\{ \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial N}{\partial z} \right\rangle \left\langle \frac{\partial N}{\partial z} \right\rangle \right\} dx dz \quad (\text{IV.48})$$

est la matrice fluidité élémentaire dont chaque terme représente un débit dû à l'écoulement de Poiseuille sur l'élément.

$$\{f_v^e\} = \int_{\Omega^e} U \left(h - \frac{I_2}{J_2} \right) \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle dx dz \quad (\text{IV.49})$$

est le vecteur sollicitation de volume élémentaire correspondent à un débit dû à l'écoulement de Couette sur l'élément.

$$\{f_s^e\} = \int_{\Gamma_{q_x}} \bar{q}_x^e \{N\} dz - \int_{\Gamma_{q_z}} \bar{q}_z^e \{N\} dx \quad (\text{IV.50})$$

est le vecteur sollicitation de surface élémentaire correspondent au débit imposé à la frontière de l'élément.

La forme intégrale globale de pression se construit par addition des formes élémentaires

$$W(p) = \sum_{e=1}^{nelt} W^e(p^e) = \sum_{e=1}^{nelt} \langle \delta P_n^e \rangle ([K^e] \{P_n^e\} + \{f_v^e\} + \{f_s^e\}) \quad (\text{IV.51})$$

Cette équation étant valable quelle que soit la variation virtuelle δP_i , on peut écrire:

$$W(p) \equiv \langle \delta P_n \rangle ([K] \{P_n\} + \{F_v\} + \{F_s\}) = 0 \quad (\text{IV.52})$$

où pour le champ de pression :

$[K]$ est la matrice globale,

$\{F_v\}$ est le vecteur global des sollicitations de volume,

$\{F_s\}$ est le vecteur global des sollicitations de surface,

$\{P_n\}$ est le vecteur global de toutes les variables nodales,

$\langle \delta P_n \rangle$ est le vecteur global de toutes les variables nodales virtuelles.

IV.3.3.3. ELEMENT D'APPROXIMATION NODALE.

L'équation précédente devant être résolue simultanément avec l'équation de l'énergie, la connaissance du champ de vitesse donc de la valeur des gradients de pression en chaque noeud est intéressante, ce qui conduit au choix de l'élément d'Hermite de type semi C^1 à quatre noeuds (fig.IV.9) [40].

Les variables nodales sont la pression ainsi que ses deux dérivées dans les deux directions.

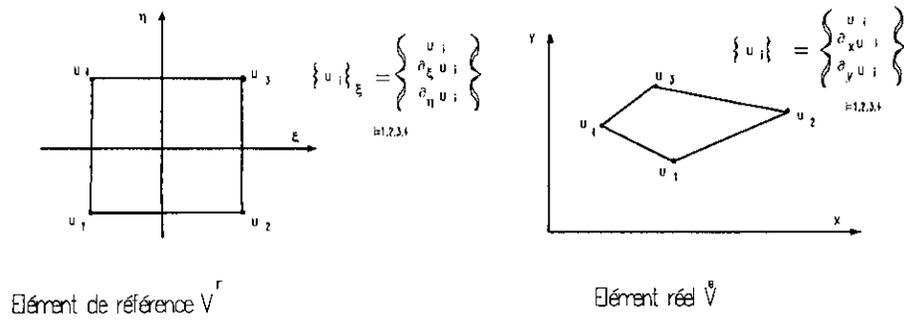


Fig.IV.9: Elément d'approximation nodale

La pression et ses dérivées intervenant comme inconnues nodales, on remarque que:

- Le calcul des débits et des sauts de pression qui font intervenir les gradients de la fonction approchée ne nécessite aucune interpolation entre les noeuds, les inconnues nodales étant la valeur de la fonction ainsi que ses deux dérivées en x et en z.
- L'équation de Reynolds étant résolue en coordonnées cartésiennes, le raccordement dans le cas des géométries fermées telles que le palier cylindrique par exemple permet par simple identification nodale d'assurer la continuité de la pression et de ses dérivées.

IV.3.3.4. ELEMENT D'APPROXIMATION GEOMETRIQUE

Les variables nodales étant ici les coordonnées des points nodales. Ceci pour le passage de l'élément réel vers l'élément parent et vis vers ça. On a choisit l'élément simple de Lagrange à quatre noeuds (fig.IV.10) [40].

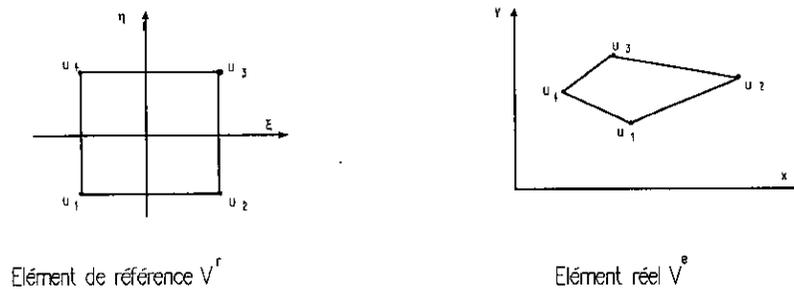


Fig.IV.10: Elément d'approximation géométrique

IV.4. APPLICATION DE LA M.E.F AUX EQUATIONS DU CHAMP DE TEMPERATURE

IV.4.1. FORME INTEGRALE DE L'EQUATION DE L'ENERGIE DANS LE FILM

L'équation de l'énergie est une équation aux dérivées partielles parabolique à valeur initiales dans laquelle la coordonnée x joue le rôle du temps dans les problèmes non stationnaires.

La non linéarité résulte de la dépendance du champ des vitesses et de la viscosité vis à vis de la température.

L'opérateur n'étant pas auto-adjoint, il n'existe pas de fonctionnelle associée à cette équation. On peut cependant construire une équation intégrale en utilisant l'une des méthodes des résidus pondérés, à savoir celle de Galerkin [29].

IV.4.1.1. METHODE DE GALERKINE

Les équations décrivant le phénomène physique peuvent s'écrire :

$$A(T) = \rho C_p \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

$$B(T) = T - \bar{T} = 0 \quad \text{Condition de Dirichlet le long de } \Gamma_T \quad (\text{IV.53})$$

$$B(T) = k \frac{\partial T}{\partial n} - \bar{q} = 0 \quad \text{Condition de Neuman le long de } \Gamma_q$$

où

Ω est le domaine occupé par le film fluide

$\Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_q$ est la frontière délimitant le domaine Ω

T et \bar{q} sont les valeurs imposées de la température et du flux de chaleur à travers les frontières, respectivement,

\vec{n} désigne la direction normale à Γ .

$A(T)$ et $B(T)$ devant être nuls sur Ω et Γ respectivement, on peut écrire:

$$\int_{\Omega} \varphi A(T) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\varphi} B(T) d\Gamma = 0 \quad (\text{IV.54})$$

où φ et $\bar{\varphi}$ sont des fonctions arbitraires de la température.

Cette équation est équivalente aux deux équations différentielles définissant le problème physique, c'est sa formulation intégrale par la méthode des résidus pondérés.

Galerkin propose de prendre $\varphi = -\delta\bar{T}$, sans que l'on perde rien en généralité (puisque φ et $\delta\bar{T}$ sont arbitraires). $\delta\bar{T}$ représente une variation virtuelle.

La forme intégrale de Galerkin s'écrit alors :

$$W(T) = \int_{\Omega} \left\{ -\frac{\partial T}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right\} \delta T d\Omega - \int_{\Omega} \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \delta T d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{q} \delta T d\Gamma = 0 \quad (IV.55)$$

ceci en supposant que la condition $T = \bar{T}$ sur Γ_T est automatiquement satisfaite par le choix de la fonction T qui pour raison d'intégrabilité doit être de classe C^2 .

IV.4.1.2. FORMULATION FAIBLE

Afin de diminuer l'ordre de dérivabilité de $T(x,y,z)$, on intègre par partie le terme de conduction dans les trois directions. On obtient alors la forme intégrale faible de Galerkin qui s'écrit :

$$W(T) = \int_{\Omega} \left\{ k \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial (\delta T)}{\partial y} + \rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) \delta T \right\} d\Omega - \int_{\Omega} \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \delta T d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{q} \delta T d\Gamma = 0 \quad (IV.56)$$

Dans cette équation :

- u, v, w, μ et q sont fonction de la température.
- $T \in C^1$; $T = \bar{T}$ et $\delta T = 0$ sur Γ_T

IV.4.2. FORME INTEGRALE DE L'EQUATION DE LA CHALEUR DANS LE MASSIF

Le même procédé conduit à la forme intégrale de Galerkin suivante :

$$W(T) = \int_{\Omega} \delta T \{ k_m \Delta T - \rho C_v \vec{U} \cdot \nabla T \} d\Omega - \int_{\Gamma_q} \delta T \left(k_m \frac{\partial T}{\partial n} - \bar{q} \right) d\Gamma = 0 \quad (IV.57)$$

et après intégration par partie du terme de conduction, on obtient la forme intégrale faible qui s'écrit :

$$W(T) = \int_{\Omega} \delta T \{ -k_m \nabla^T \delta T \cdot \nabla T - \rho_m C_v \vec{U} \cdot \nabla T \} d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{q} \delta T d\Gamma = 0 \quad (IV.58)$$

$$T \in C^1 ; T = \bar{T} \text{ et } \delta T = 0 \text{ sur } \Gamma_T$$

IV.4.3. DISCRETISATION DES FORMES INTEGRALES FAIBLES ASSOCIEES AUX EQUATIONS DE L'ENERGIE DANS LE FILM ET DE LA CHALEUR DANS LE MASSIF

Nous avons adopté un même principe de discrétisation pour le champ de température aux deux équations de l'énergie et de la chaleur vue qu'elles sont similaires au terme de dissipation visqueuse près.

Comme pour le champ de pression, on utilise une approximation par éléments finis. Soit NELTF le nombre total d'éléments dans le film et NELTM celui dans le massif. On peut écrire :

$$W_F(T) = \sum_{e=1}^{neltf} W_F^e(T^e) = 0 \quad \text{et} \quad W_M(T) = \sum_{e=1}^{neltm} W_M^e(T^e) = 0 \quad (\text{IV.59})$$

où les formes intégrales élémentaires s'écrivent :

$$\begin{aligned} W_F^e(T^e) = \int_{\Omega^e} \left\{ k \frac{\partial T^e}{\partial y} \frac{\partial (\delta T^e)}{\partial y} + \rho C_p (u \frac{\partial T^e}{\partial x} + v \frac{\partial T^e}{\partial y} + w \frac{\partial T^e}{\partial z}) \delta T^e \right\} d\Omega \\ - \int_{\Omega^e} \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \delta T^e d\Omega + \int_{\Gamma_q^e} \bar{q} \delta T^e d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.60})$$

et

$$W_M^e(T^e) = \int_{\Omega^e} \delta T^e \left\{ -k_m \nabla^T \delta T^e \cdot \nabla T^e - \rho_m C_v \vec{U} \cdot \nabla T^e \right\} d\Omega + \int_{\Gamma_q^e} \bar{q} \delta T^e d\Gamma = 0 \quad (\text{IV.61})$$

En posant pour l'approximation nodale sur chaque élément Ω^e ,

$$T^e = \langle N \rangle \{ T_n^e \} \quad ; \quad \delta T^e = \langle N \rangle \{ \delta T_n^e \} \quad (\text{IV.62})$$

où $\langle N \rangle$ représente l'ensemble des n fonctions de forme permettant l'approximation locale du champ de température, on obtient :

a) la forme intégrale discrétisée de l'équation de l'énergie dans le film,

$$\begin{aligned} W_F^e(T^e) = \langle \delta T_n^e \rangle \int_{\Omega^e} \left\{ k \left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle \left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle + \rho C_p (u \{N\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle + v \{N\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle + w \{N\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial z} \right\rangle) \right\} \{ \delta T_n^e \} d\Omega \\ - \langle \delta T_n^e \rangle \int_{\Omega^e} \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \{ N \} d\Omega + \langle \delta T_n^e \rangle \int_{\Gamma_q^e} \bar{q} \{ N \} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.63})$$

qui sous forme matricielle s'écrit :

$$W_F^e(T^e) = \langle \delta T_n^e \rangle \left([K^e] \{ T_n^e \} + \{ f_v^e \} + \{ f_s^e \} \right) = 0 \quad (\text{IV.64})$$

où :

$$[K^e] = \int_{\Omega^e} \left\{ k \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle + \rho C_p (u \{N\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle + v \{N\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle + w \{N\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial z} \right\rangle) \right\} d\Omega \quad (IV.65)$$

est la matrice thermique élémentaire du fluide dont chaque terme représente une énergie transmise par transfert due au déplacement du fluide et par conduction.

$$\{f_v^e\} = \int_{\Omega^e} -\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \{N\} d\Omega \quad (IV.66)$$

est le vecteur sollicitation de volume correspondant à l'énergie de dissipation visqueuse.

$$\{f_s^e\} = \int_{\Gamma_s^e} \bar{q} \{N\} d\Gamma \quad (IV.67)$$

est le vecteur sollicitation de surface correspondant au flux de chaleur.

Dans ces expressions u, v, w sont les vitesses en un point donné du fluide et on peut utiliser les mêmes fonctions de formes pour les calculer en fonction des vitesses nodales calculés par intégration suivant l'épaisseur du film conformément aux équations (II.57).

b) la forme intégrale discrétiser de l'équation de la chaleur dans le massif,

$$\begin{aligned} W_M^e(T^e) = \langle \delta T_n^e \rangle \int_{\Omega^e} & \left\{ -k_m \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle + \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial z} \right\rangle \right) \right. \\ & + \rho_m C_v (u \{N\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle + v \{N\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle + w \{N\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial z} \right\rangle) \left. \right\} \langle T_n^e \rangle d\Omega \quad (IV.68) \\ & + \langle \delta T_n^e \rangle \int_{\Gamma_s^e} \bar{q} \{N\} d\Gamma \end{aligned}$$

qui sous forme matricielle s'écrit :

$$W_M^e(T^e) = \langle \delta T_n^e \rangle \left([K^e] \{T_n^e\} + \{f_v^e\} + \{f_s^e\} \right) \quad (IV.69)$$

où

$$\begin{aligned} [K^e] = \int_{\Omega^e} & \left\{ -k_m \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle + \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial z} \right\rangle \right) \right. \\ & + \rho_m C_v (u \{N\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle + v \{N\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle + w \{N\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial z} \right\rangle) \left. \right\} d\Omega \quad (IV.70) \end{aligned}$$

est la matrice thermique du solide dont chaque terme représente une énergie transmise par conduction et par convection due au déplacement du solide.

$$\{f_s^e\} = \int_{\Gamma_s^e} \bar{q} \{N\} d\Gamma \quad (IV.71)$$

est le vecteur sollicitation de surface correspondant à l'énergie échangée à la frontière du solide.

Dans ces expressions u , v et w sont les vitesses en un point donné du solide .

L'assemblage des deux formes intégrales $W_F(T)$ et $W_M(T)$ permet d'aboutir à un système d'équations algébriques pour le champ de température :

$$W(T) = W_F(T) + W_M(T) \quad (IV.72)$$

$$W(T) \equiv [K] \{T_n\} + \{F_v\} + \{F_s\} = 0 \quad (IV.73)$$

Le calcul de toutes ces quantités élémentaires nécessite évidemment le choix d'un élément de référence.

IV.4.4. ELEMENT D'APROXIMATION

Les équations intégrales mettant en cause la température n'exige qu'une continuité de classe C^0 , ce qui nous permet de choisir l'élément d'approximation le plus simple afin de gagner en espace mémoire et en temps de calcul, d'où le choix de l'élément tridimensionnel isoparamétrique à huit noeuds avec un degré de liberté par noeud (fig.IV.11).

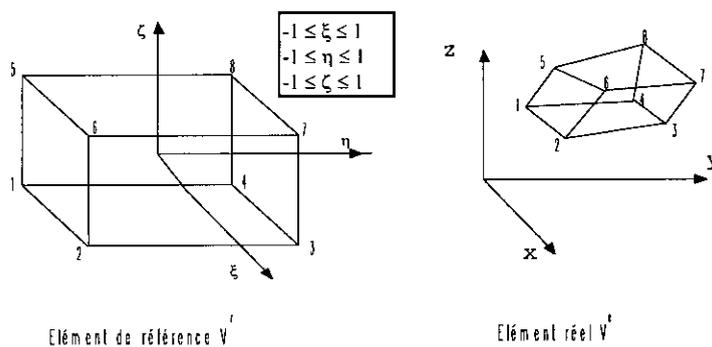


Fig.IV.11: Elément d'approximation isoparamétrique

Cet élément est aussi utilisé pour l'approximation nodale par éléments finis du champ de vitesse dans le film et pour la transformation géométrique entre les éléments réels et l'élément de référence.

IV.5. PRINCIPE ET METHODE DE RESOLUTION

Le calcul et l'assemblage des matrices et vecteurs élémentaires puis la résolution du système d'équations algébriques obtenu est une étape importante dans l'analyse par éléments finis.

Pour le calcul intégrale des différents termes des matrices et vecteurs élémentaires nous avons utilisé la méthode de Gauss qui permet de calculer exactement un polynôme de degré $m=2r-1$ sur l'élément de référence et où r est le nombre de points de Gauss [40].

L'assemblage des matrices et vecteurs élémentaires se fait en les additionnant après expansion.

Deux méthodes de résolution peuvent être adoptées selon qu'on résout d'abord l'équation de Reynolds pour le champ de pression puis les deux équations de l'énergie et de la chaleur qui déterminent le champ de température ou qu'on assemble le tout en un seul système algébrique à résoudre par une méthode itérative.

ALGORITHME I

L'organigramme schématique donné figure (IV.12) est lié à la première méthode citée ci dessus. Un champ de température initial, fixé a priori, permet de déterminer la viscosité en chaque point du film. L'équation de Reynolds discrétisée (IV.52) peut alors être résolue par une méthode itérative jusqu'à convergence sur l'angle de calage. Le champ des vitesses dans le film est alors calculé et un nouveau champ de température est déterminé par la résolution du système d'équations algébriques (IV.73); ces nouvelles valeurs de température sont utilisées pour l'itération suivante. Le processus itérative est arrêté lorsque la différence relative entre les températures obtenues pour deux itérations successives est inférieure à 0,01 %.

ALGORITHME II

Le traitement simultané des trois équations régissant le problème permet d'aboutir par assemblage des équations matricielles (IV.52) et (IV.73) à un seul système non linéaire à résoudre:

$$[K] \{U\} = \{F\} \quad (IV.74)$$

où $[K]$ est la matrice globale obtenue par assemblage des matrices élémentaires de fluidité, d'énergie dans le film et de chaleur dans le massif.

$\{U\}$ est le vecteur qui comprend les inconnues de pression et de température,

$\{F\}$ le vecteur sollicitation qui contient des composantes de flux et de débit.

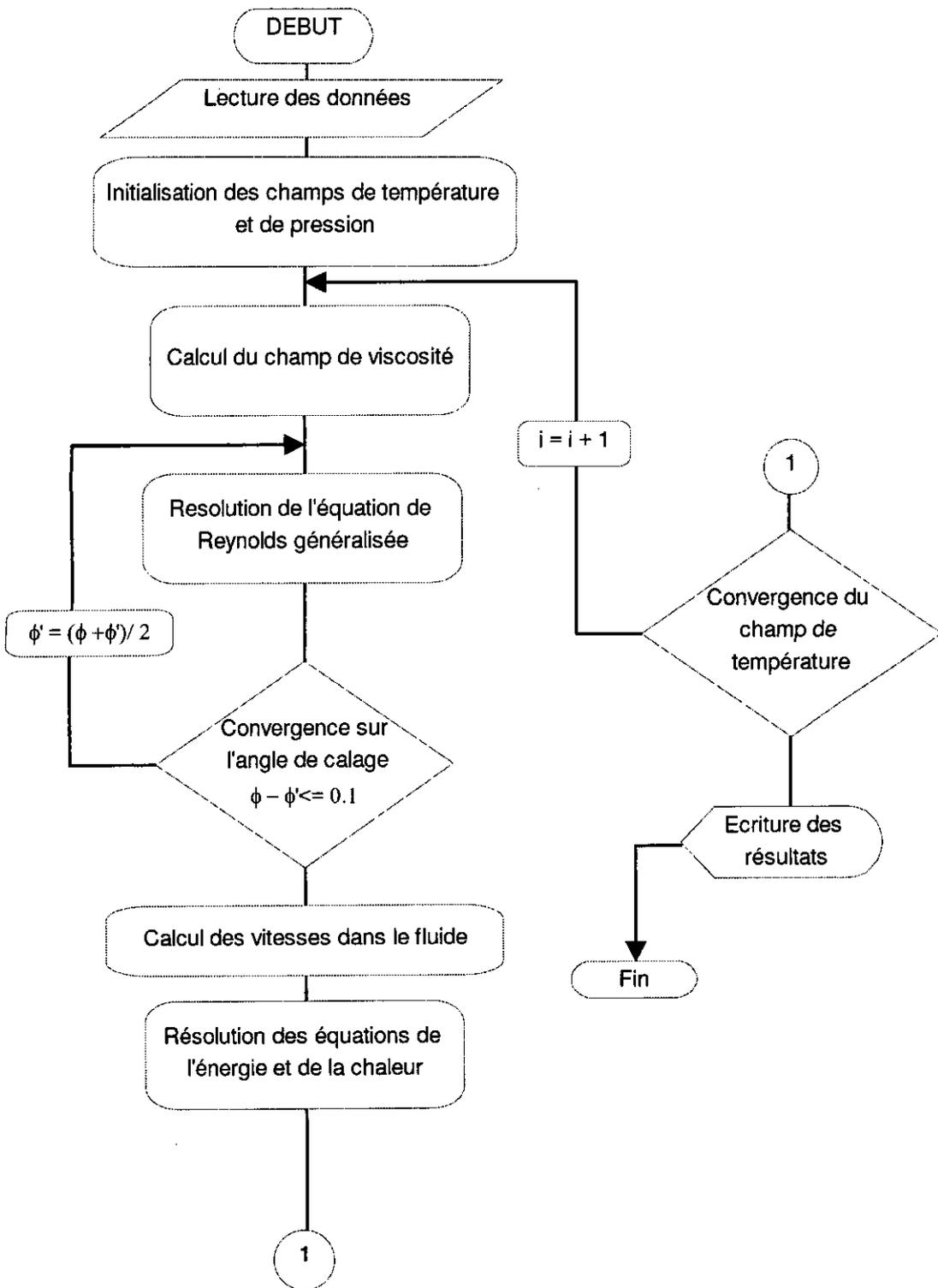


Fig.IV.12: Organigramme du programme de calcul correspondant à l'algorithme I

Le stockage de la matrice $[K]$ en « ligne de ciel » permet de gagner en espace mémoire.

Cette matrice ainsi que le vecteur sollicitation étant non linéaire, un processus itératif est nécessaire pour obtenir la solution. Parmi les méthodes disponibles, on a opté pour la méthode de substitution incrémentale. Celle-ci consiste à construire une suite de solutions $\{U^0\}, \{U^1\}, \dots, \{U^i\}$; $\{U^i\}$ étant calculée à partir de $\{U^{i-1}\}$ en résolvant le système linéaire :

$$[K(U^{i-1})] \{U^i\} = \{F(U^{i-1})\}; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{IV.75})$$

ce qui peut s'écrire sous forme incrémentale en introduisant le résidu $\{R^i\}$.

$$\begin{aligned} \{R^i\} &= \{R(U^{i-1})\} = \{F(U^{i-1})\} - [K(U^{i-1})] \{U^{i-1}\} \\ [K(U^{i-1})] \{\Delta U^i\} &= \{R^i\} \\ \{U^i\} &= \{U^{i-1}\} + \Omega \{\Delta U^i\} \end{aligned} \quad (\text{IV.76})$$

Le vecteur $\{U^{i-1}\}$ étant connu, nous pouvons construire les matrices élémentaires $[k(u^{i-1})]$ ainsi que les vecteurs élémentaires $\{f(u^{i-1})\}$ puis les assembler pour obtenir $[K(U^{i-1})]$ et $\{F(U^{i-1})\}$ et enfin résoudre le système linéaire en $\{\Delta U^i\}$ par la méthode directe de Gauss.

Ω est le facteur de sur-relaxation, qui permet d'améliorer la vitesse de convergence, sa valeur dépend de la forme de la matrice $[K]$ et est déterminée par expérimentation numérique.

Ainsi, partant d'une viscosité de référence μ_0 , on résout le problème ce qui permet d'obtenir un champ de pression donc de vitesse et un champ de température et une nouvelle valeur de viscosité en tout point du domaine de résolution. La convergence du processus itératif est atteinte à l'itération i lorsque la norme entre deux solutions :

$$\|n\| = \sqrt{\frac{\langle \Delta U^i \rangle \langle \Delta U^i \rangle}{\langle U^i \rangle \langle U^i \rangle}} \quad \text{est inférieur à } 0,001. \quad (\text{IV.77})$$

L'algorithme correspondant à (IV.76) est donné figure (IV.13) ci-dessous.

Calculer une solution approchée $\{U^0\}$, éventuellement nulle.

$i = 1, 2, \dots$ (pour chaque itération)

pour chaque élément

Extraire les valeurs $\{u^{i-1}\}$ de $\{U^{i-1}\}$

Calculer $[k(u^{i-1})]$ et $\{f(u^{i-1})\}$

Calculer le résidu élémentaire

$$\{r\} = \{f\} - [k]\{u^{i-1}\}$$

Assembler comme dans un problème linéaire

$[k]$ dans $[K]$

$\{r\}$ dans $\{R\}$

Résoudre comme dans un problème linéaire :

$$[K]\{\Delta U^i\} = \{R^i\}$$

Construire la nouvelle estimation de la solution :

$$\{U^i\} = \{U^{i-1}\} + \Omega \{\Delta U^i\}$$

Calculer la norme $\|n\|$ de $\{\Delta U^i\}$

Tester la convergence

Fig.IV.13: Algorithme II ; Méthode de substitution incrémentale

IV.6. ETUDE DE LA CONVERGENCE

L'erreur d'approximation en tout point x de l'élément Ω^e est définie par :

$$e(x) = u(x) - u_{ex}(x) \quad (IV.78)$$

L'erreur au point ξ de l'élément de référence est :

$$e(\xi) = u(\xi) - u_{ex}(\xi) \quad (IV.79)$$

En deux points x et ξ qui se correspondent dans la transformation géométrique, les erreurs $e(x)$ et $e(\xi)$ prennent la même valeur.

Pour caractériser l'erreur Strang [41] donne l'expressions suivante :

$$|e|_s \leq cl^{n-s} |u_{ex}(\mathbf{x})|_n \quad (\text{IV.80})$$

où

- c dépend du type d'élément et de l'approximation utilisée ;
- la base polynomiale de l'approximation est complète jusqu'à l'ordre $n-1$;
- l est la dimension maximale de l'élément
- les dérivées de l'approximation $u(\mathbf{x})$ jusqu'à l'ordre s sont bornées ;
- $|u_{ex}(\mathbf{x})|_n$ est la norme de $u_{ex}(\mathbf{x})$ définie par

$$|u_{ex}(\mathbf{x})|_n = \text{Maximum sur } \Omega^e \text{ de } |D^n(u(\mathbf{x}))|$$

$$\text{où } D^n(u(\mathbf{x})) = \frac{\partial^n u(\mathbf{x})}{\partial^a x \partial^b y \partial^c z} \quad \begin{cases} a+b+c = n \\ a, b, c, s \geq 0 \end{cases} \quad (\text{IV.81})$$

On constate que pour améliorer la précision de l'approximation nous devons :

- soit diminuer l , donc la dimension de chaque élément en augmentant le nombre d'éléments nécessaires pour représenter le domaine entier Ω ,
- soit augmenter n , c'est à dire augmenter l'ordre du polynôme d'approximation ce qui implique une augmentation du nombre de variables nodales ou de degrés de liberté de chaque élément, ceci peut se faire :
 - par augmentation du nombre de noeuds d'interpolation de chaque élément (famille des éléments de type Lagrange),
 - par augmentation du nombre de variables nodales en chaque noeud en conservant le même nombre de noeuds (famille des éléments du type Hermite).

La convergence monotone de la solution approchée vers la solution exacte lorsque la taille de l'élément tend vers zéro reste cependant sujette aux deux conditions suivantes :

Base polynomiale complète

Pour que les erreurs sur u et sur toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre s tendent vers zéro il faut utiliser une base polynomiale au moins complète jusqu'à l'ordre s pour la construction des fonctions d'interpolation. Ceci est d'ailleurs la condition d'intégrabilité de W^c .

Continuité entre éléments

Pour pouvoir écrire $W = \sum W^e$, il faut que la fonction approchée u sur l'ensemble du domaine d'intégration Ω satisfait les conditions de dérivabilités de la forme intégrale W : u et toutes ces dérivées jusqu'à l'ordre m qui apparaissent dans W doivent être bornées.

Si u et ses dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$ sont continues sur les éléments et les frontières entre éléments, la condition précédente est satisfaite et on dit que l'élément est conforme. Un élément est dit non conforme lorsqu'il ne satisfait pas les conditions de continuité requises. Dans ce cas

$$W = \sum W^e + W^d \quad (\text{IV.82})$$

où W^d est un terme dû aux discontinuités entre éléments, qui n'apparaît pas dans les termes W^e . Pour que la convergence de la solution approchée soit correcte, il faut que W^d soit nul, ou borné et tende vers zéro avec la taille des éléments, en pratique ceci peut être vérifié grâce à la technique du « Patch test » [40].

Dans les formes intégrales (IV.27), (IV.56), (IV.58) seules les fonctions cherchées et leurs dérivées premières apparaissent dans le calcul des W^e , ainsi il suffit de disposer d'éléments assurant une continuité C^0 pour que les conditions précédentes soient vérifiées.

Pour le champ de température, l'élément tri-linéaire choisi présente une base polynomiale complète d'ordre 1 et assure la continuité C^0 , c'est à dire la continuité de la fonction de température $T(x,y,z)$ entre les éléments.

Pour le champ de pression, l'élément cubique (quadrilatère 4 noeuds semi- C^1) choisi assure la continuité C^0 et n'est pas complet, cependant sa base polynomiale est complète jusqu'à l'ordre 1 assurant ainsi une continuité local C^1 pour la fonction de pression $P(x,z)$.

Deux autres types d'erreurs existent :

a) Erreur de discrétisation géométrique

Lorsque la frontière du domaine Ω est constituée par des courbes ou des surfaces plus complexes que celles qui définissent les frontières des éléments (c'est le cas pour le massif du palier cylindrique avec l'élément tri-linéaire choisi), une erreur est inévitable. Cette erreur est appelée erreur de discrétisation géométrique. Elle peut être réduite en diminuant la taille des éléments, ou en utilisant des éléments de la famille Lagrange à frontières plus complexes.

b) Erreur due à l'intégration numérique

L'intégration exacte des matrices élémentaires et des vecteurs sollicitation nécessite l'intégration exacte de chacun de leurs termes. Ceci n'est possible avec la puissante méthode d'intégration de Gauss choisie que si les termes sont des polynômes, ce qui est en général le cas lorsque la matrice jacobienne est constante.

Le choix du nombre de points d'intégration dépend du type d'élément utilisé et de la matrice élémentaire qu'on construit. En pratique on choisit le plus souvent un nombre de points aussi faible que possible pour diminuer le volume de calcul. Cependant il existe, pour chaque type d'élément, un nombre minimum de points d'intégration en dessous duquel la matrice $[K]$ reste singulière malgré l'introduction des conditions aux limites.

Pour l'élément isoparamétrique trilinéaire à 8 noeuds, il faut un minimum de $2 \times 2 \times 2$ points d'intégration.

Pour l'élément quadrilatéral de type Hermite à 4 noeuds, il faut 3×3 points d'intégration.

IV.7 CONCLUSION

Nous avons tenu en présentant la résolution par Eléments Finis du problème Thermohydrodynamique pour le palier lisse de garder l'aspect de généralisation. En effet la même démarche est à suivre pour l'étude de tout mécanisme de lubrification régit par les trois équations de bases. L'application de la méthode de Galerkin et le principe de discrétisation étants les mêmes, seuls changent la géométrie du mécanisme et les conditions aux limites. Ce qui est par ailleurs, facilement repérable dans le code de calcul.

Ainsi, l'application de la méthode des éléments finis aux problèmes de lubrification thermohydrodynamique permet de prédire le comportement physique des mécanismes de lubrification et par suite aide à la réalisation optimale.

CHAPITRE V

PRESENTATION DES RESULTATS ET VALIDATION DU PROGRAMME MEFTHD

V.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous présentons les résultats théoriques obtenus avec le programme thermohydrodynamique MEFTHD, élaboré au cours de cette étude, tout en les comparant aux résultats théoriques obtenus par R. Boncompain et Frêne [26,42,43] avec un programme aux différences finies et aux valeurs expérimentales obtenues par Ferron [44].

Parmi les différents paramètres qui conditionnent le fonctionnement du palier nous avons plus particulièrement étudié l'effet des variations de excentricité relative et de la vitesse de rotation de l'arbre sur les caractéristiques du palier.

Par ailleurs l'influence des conditions aux limites posées aux surfaces externes du palier (fig.III.3) a été examinée en choisissant successivement:

- a) Une paroi en convection avec un faible coefficient
- b) Une paroi en convection avec un coefficient assez élevé
- c) Une paroi à température imposée

On a aussi pris en considération l'effet du rayonnement en l'intégrant avec l'effet de convection. En effet on peut considérer le coefficient d'échange globale comme étant la somme des deux coefficients de convection et de rayonnement.

Pour chaque cas étudié les paramètres suivants ont été calculés:

- la pression et la température dans le film lubrifiant ainsi que la température dans le coussinet,
- la température moyenne du fluide recyclé,
- la température moyenne du fluide à l'entrée du convergent,

- le rapport entre le débit de fluide recyclé et le débit de fluide entrant dans le convergent,
 - les pourcentages de chaleur évacués respectivement par le lubrifiant, le coussinet et l'arbre.

Par ailleurs, la "viscosité équivalente" constante, qui, dans le cas d'un calcul isotherme donnerait, pour des conditions de fonctionnement identiques, la même charge que celle obtenue par le calcul thermohydrodynamique a été calculée pour chacun des cas étudiés.

V.2. PALIERS D'ESSAI ET DONNEES PHYSIQUES

V.2.1. PALIERS A , B et C.

Le palier d'essai réalisé par Ferron et Frêne [45,46] est constitué de deux bagues, l'une représentant l'arbre l'autre le coussinet. Ce système permet de modifier facilement le diamètre du palier, son jeu radial et le rapport L/D de la longueur au diamètre. Le palier est alimenté en lubrifiant par l'intermédiaire de trois orifices qui débouchent dans une rainure axiale dont l'amplitude circonférentielle est de 18 degrés et la longueur de 70 mm.

Les autres données expérimentales, relatives aux deux paliers A et B qui serviront pour la validation du programme MEFTHD par comparaison des résultats avec ceux obtenus par Boncompain avec un programme aux différences finies TEHD « ThermoElastoHydroDynamique », qui tient aussi compte de l'effet thermoélastique dans les solides, et avec ceux obtenus expérimentalement par Ferron sont les suivantes.

Rayon du palier	$R = 50 \text{ mm}$
Rayon externe du coussinet	$R_e = 100 \text{ mm}$
Longueur du palier	$L = 80 \text{ mm}$
Jeux radiaux	$C_A = 145 \text{ }\mu\text{m}$ $C_B = 123 \text{ }\mu\text{m}$
Viscosité de l'huile à 40°C	$\mu_0 = 0,028 \text{ Pa.s}$
Coefficient de thermoviscosité	$\beta = 0,034/^\circ\text{K}$
Masse volumique de l'huile à 40°C	$\rho = 860 \text{ kg/m}^3$
Chaleur spécifique de l'huile	$C_p = 2.000 \text{ J/kg}^\circ\text{K}$
Conductivité thermique de l'huile	$K_h = 0,13 \text{ W/m}^\circ\text{K}$
Conductivité thermique de l'air	$K_s = 0,025 \text{ W/m}^\circ\text{k}$

Conductivité thermique du coussinet	$K_c = 45 \text{ W/m}^\circ\text{K}$ (A et B)
Conductivité thermique de l'arbre	$K_a = 45 \text{ W/m}^\circ\text{K}$
Coefficient de convection du coussinet	$h_c = 80 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{K}$ (A et B)
Coefficient de convection de l'arbre	$h_a = 100 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{K}$
Température ambiante	$T_b = 45 \text{ }^\circ\text{C}$ (A et B)
Température d'alimentation	$T_0 = 40 \text{ }^\circ\text{C}$ (A et B)
Pression d'alimentation	$p_0 = 70.10^3 \text{ Pa}$
Vitesse de rotation de l'arbre	$500 < N < 5000 \text{ tr/mn}$

Pour tous les essais, les paliers A et B ont été alimenté avec l'huile ISO VG-32 dont la variation de la viscosité avec la température est présentée en variable logarithmique sur la figure V.1.

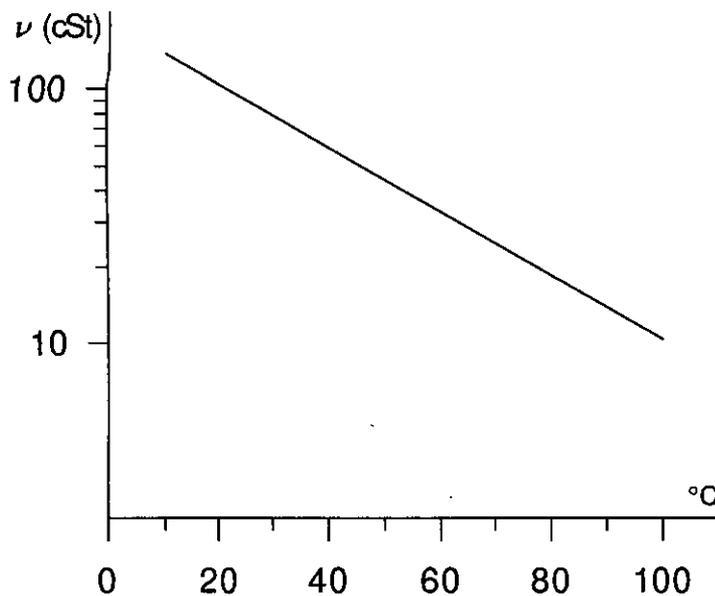


Fig.V.1 : Variation de la viscosité cinématique en fonction de la température

Dans la gamme de température utilisée, la viscosité suit la loi suivante :

$$\mu = \frac{D}{AT^3 + BT^2 + CT + 1} \quad (\text{V.1})$$

où T est la température en degrés Celsius

A, B, C, D sont des constantes qui dépendent du type d'huile utilisé

μ est la viscosité en Poiseuille (Pa.s)

Dans notre cas :

$$A = -1.13 \cdot 10^{-5}$$

$$B = 1.6 \cdot 10^{-3}$$

$$C = -6.84 \cdot 10^{-2}$$

$$D = 3.485 \cdot 10^{-3}$$

Le palier C, utilisé pour présenter une analyse des effets thermiques, est supposé alimenté par l'huile ISO VG-320 dont la viscosité est fonction de la température suivant la loi :

$$\mu = \mu_0 e^{-\beta(T-T_0)} \quad (V.2)$$

Les données physiques qui changent pour ce palier sont les suivantes :

Longueur du palier	$L = 100 \text{ mm}$
Jeux radial	$C_C = 100 \text{ } \mu\text{m}$
Viscosité de l'huile à 33°C	$\mu_0 = 0,323 \text{ Pl}$
Coefficient de thermoviscosité	$\beta = 0,034/^\circ\text{K}$
Coefficient de convection du coussinet	$50 \text{ W/m}^2\text{K} \leq hc \leq 600 \text{ W/m}^2\text{K}$
Masse volumique de l'huile à 33°C	$\rho = 850 \text{ kg/m}^3$
Conductivité thermique du coussinet	$K_c = 51,9 \text{ W/m } ^\circ\text{K}$
Température ambiante	$T_b = 23 \text{ }^\circ\text{C}$
Température d'alimentation	$T_{al} = 33 \text{ }^\circ\text{C}$

V.2.2. TEMPERATURE DU FLUIDE RECYCLE

La température du fluide au niveau du dispositif d'alimentation (rainure) est généralement supérieure à celle du lubrifiant d'alimentation. Ceci est dû au fait qu'une partie du lubrifiant entrant dans le convergent n'est pas évacuée latéralement mais fait le tour du palier en s'échauffant et se mélange avec le lubrifiant froid d'alimentation (fig.V.2). Pour évaluer la température réelle d'alimentation nous supposerons celle-ci constante dans la section d'entrée et nous prendrons pas en compte la production de chaleur par dissipation dans la rainure d'alimentation ainsi que les transferts par conduction dans cette même zone. Le bilan du débit de fluide et du flux de chaleur dans la zone d'entrée permet alors d'écrire :

a) l'équation de conservation du débit sous la forme :

$$Q_{se} = Q_e + Q_r \quad (V.3)$$

où Q_0 est le débit du lubrifiant froid. Q_r le débit de fluide recyclé et Q_{se} le débit à l'entrée du contact. Les débits Q_0 et Q_r sont calculables à partir du champ de vitesse dans le film.

b) la conservation du flux de chaleur

$$Q_r T_r + Q_e T_e = Q_{se} T_{se} \quad (V.4)$$

Dans cette relation T_e est la température connue du lubrifiant froid et T_r la valeur moyenne de la température du lubrifiant recyclé.

La température T_{se} cherchée à ainsi pour expression :

$$T_{se} = \frac{Q_r}{Q_{se}} T_r + \left(1 - \frac{Q_r}{Q_{se}}\right) T_e \quad (V.5)$$

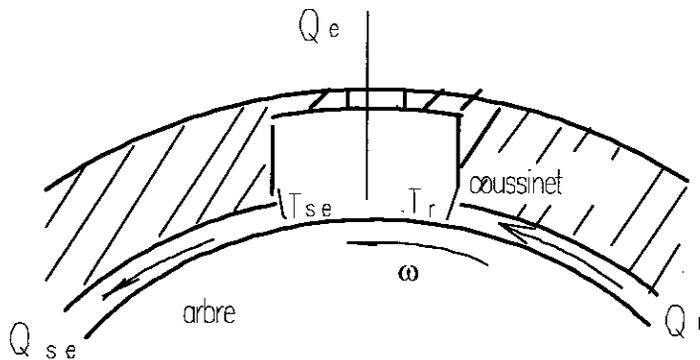


Fig.V.2: Schéma du mode d'alimentation

V.3. INFLUENCE DES CONDITIONS THERMIQUES IMPOSEES AUX PAROIS EXTERNES DU PALIER

Pour cette étude, l'excentricité relative ε du palier C a été fixée à 0,8 et la vitesse de rotation ω de l'arbre à 2.000 tr/mn.

L'examen des cartes des isothermes (fig.V.3 et fig.V.5) montre que l'influence de la condition thermique imposée aux parois externes du palier, sur la circulation du film de chaleur est importante. Sur ces cartes, l'épaisseur du film est représentée en variable adimensionnelle, c'est pourquoi cette épaisseur est constante quelque soit la section du film envisagée. De plus, les échelles ne sont évidemment pas les mêmes pour le film et le coussinet.

Dans le cas où le coefficient de convection h_c est le plus faible (fig.V.3) la paroi externe du coussinet agit comme une véritable barrière thermique et, seul au droit du point de température maximale le coussinet évacue radialement de la chaleur. c'est le fluide qui emmène par convection la plus grosse partie de la chaleur (71%)(tableau I), l'arbre évacue encore une large part (23,8%) et le coussinet seulement 0,7 %. Une partie du flux de chaleur circule circonférentiellement dans le coussinet et contribue à augmenter la température du fluide à l'entrée du convergent. Cette augmentation est due d'ailleurs en grande partie à la température élevée du fluide recyclé, dont le débit atteint 20 % du débit total à l'entrée du palier.

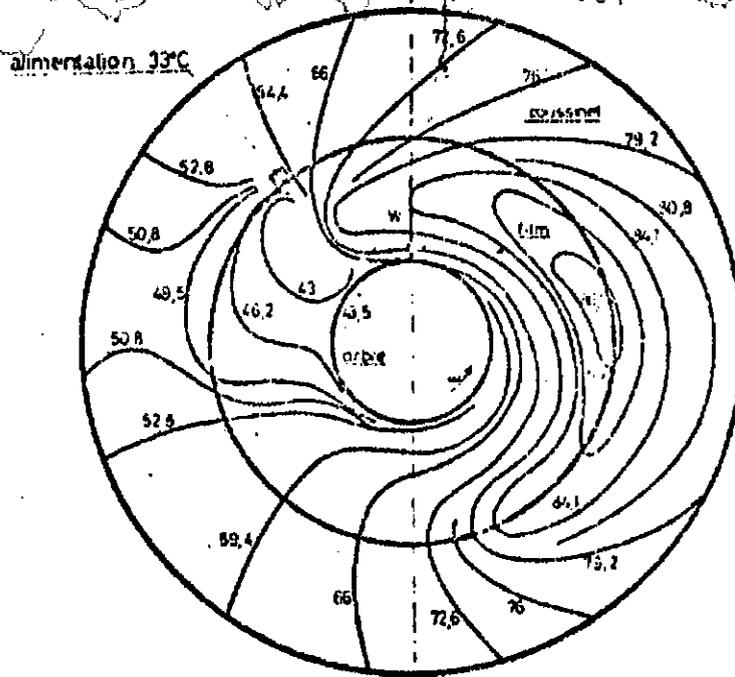


fig.V.3 : isotherme dans le plans de symétrie du palier ($\epsilon=0.8$, $\omega=2000$ tr/mn, $h_c=56.6$ W/m²°C)

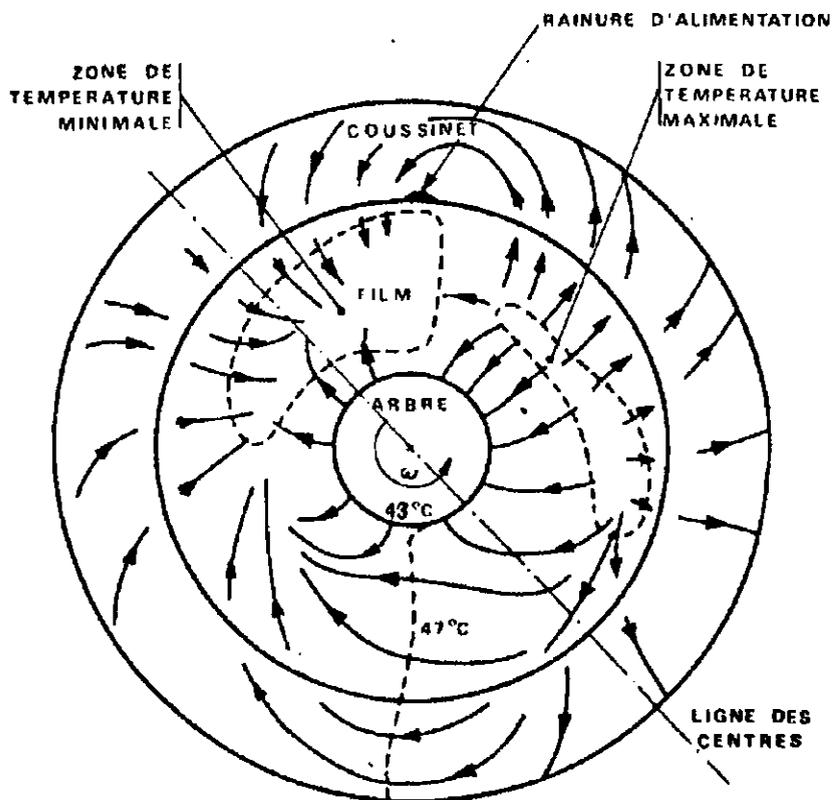


fig.v.4 : isotherme dans le plan de symétrie du palier ($\epsilon=0.8$, $\omega=2000$ tr/mn, température imposée 23°c)

Tableau I : Caractéristiques du palier en fonction des différentes conditions imposées

Différents conditions à la paroi externe du coussinet	Convection $h_c = 56,8 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$	Convection $h_c = 568 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$	Température imposée $T = 23^\circ\text{C}$
Température maximale atteinte par la surface du coussinet en $^\circ\text{C}$	86	84,5	80
Viscosité équivalente en Poiseuille	0,134	0,147	0,160
Pourcentage de chaleur évacuée par:			
- le fluide	71	64,7	59,8
- l'arbre	28,3	29,7	30,1
- le coussinet	0,7	5,6	10,1
Charge supportée en daN	23420	25501	27973
Angle de calage	40,36	40,26	40,09
Température du fluide recyclé en $^\circ\text{C}$	68,1	54,8	46
Température du fluide à l'entrée du palier en $^\circ\text{C}$	39,6	37,1	35,4
Rapport entre débit recyclé et débit total	0,187	0,187	0,187
Position angulaire du point de température maximale	240°	180°	180°

Les lignes de flux, tracés sur la figure V.4 sont déduites de la carte des isothermes. Ces lignes de flux coupent orthogonalement la surface de l'arbre car cette surface est une

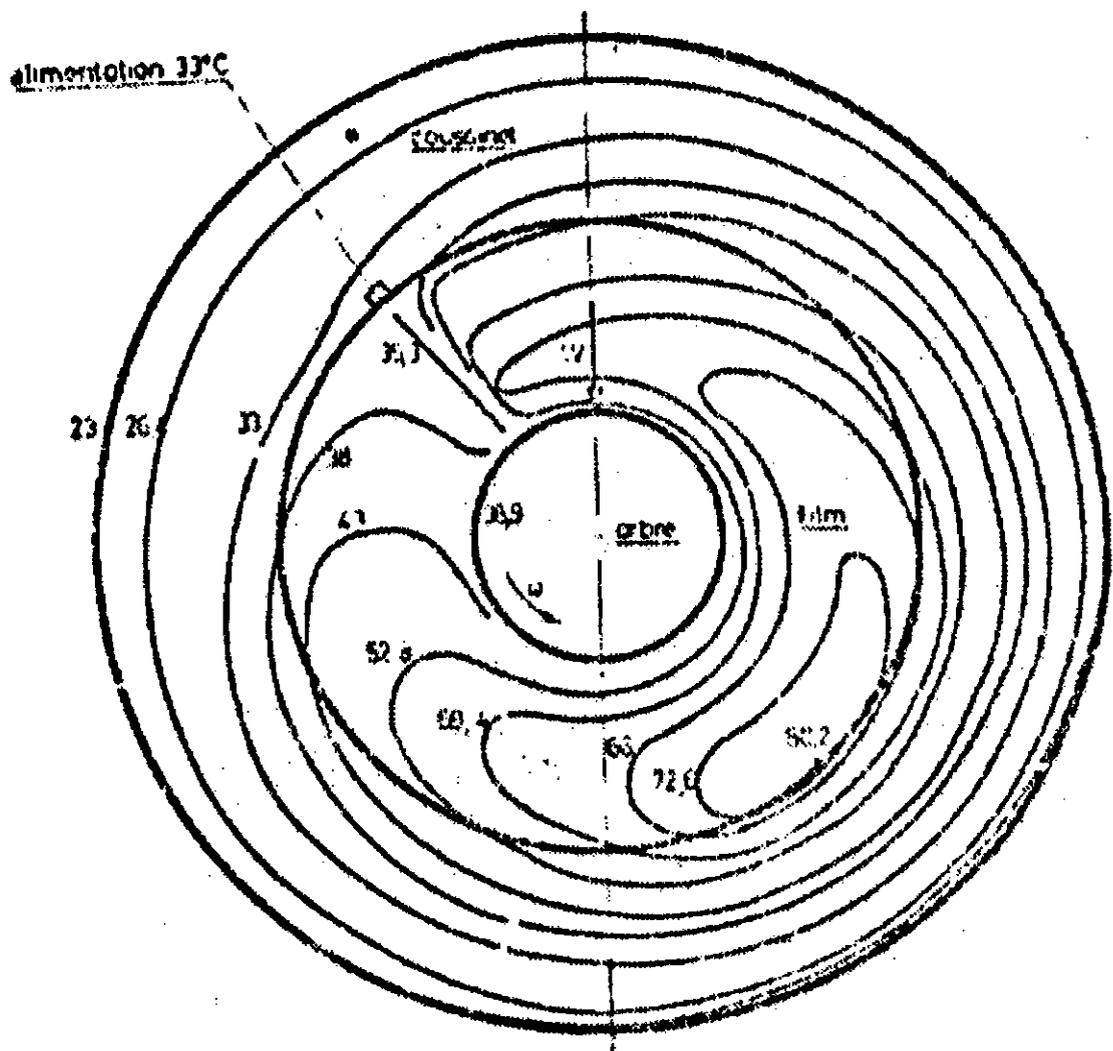


fig.V.5 : lignes de flux de chaleur dans le plan médian du palier($\epsilon=0.8$, $\omega=2000$ tr/mn)

isotherme. Dans le film, deux zones peuvent être distinguées. Dans la première qui correspond à la partie la plus froide du film, l'arbre et le coussinet donnent de la chaleur au fluide. Dans la seconde qui correspond à la partie la plus chaude du film, le fluide cède de la chaleur à l'arbre et au coussinet. Ainsi, l'arbre et le coussinet du palier transportent une partie de la chaleur générée par cisaillement dans le film de la zone la plus chaude vers la zone la plus froide du fluide.

L'augmentation du coefficient de convection ainsi que le fait d'imposer une température ambiante (fig.V.5), à la paroi extérieure du coussinet, facilite l'évacuation de la chaleur dans celui-ci ; le pourcentage ainsi évacué atteint 10 % dans ce dernier cas. Ce fait se traduit par des isothermes qui deviennent plus circulaires.

La conséquence de cette évacuation plus aisée de la chaleur est une baisse générale des températures, aussi bien dans le film, que dans le coussinet. On note par ailleurs, le déplacement du point de température maximale qui se rapproche de la section d'épaisseur minimale du film. Ainsi, quand la chaleur s'évacue difficilement dans le coussinet, le fluide continue à s'échauffer après avoir dépassé la section où le cisaillement du film est maximal. On remarque aussi le resserrement des isothermes dans le film, au voisinage de la surface de l'arbre. Ceci traduit le fort gradient thermique qui règne près de cette surface, et explique le rôle important joué par l'arbre dans l'évacuation de la chaleur produite. Cet effet est dû à la température choisie pour la surface de l'arbre.

A l'élévation importante de la température correspond une baisse très sensible de la pression (fig.V.6) de la charge supportée et de la viscosité équivalente qui passe de 0,323 $\mathcal{P}l$ dans le cas isotherme à 0,134 $\mathcal{P}l$ dans le cas où le coefficient de convection est le plus faible.

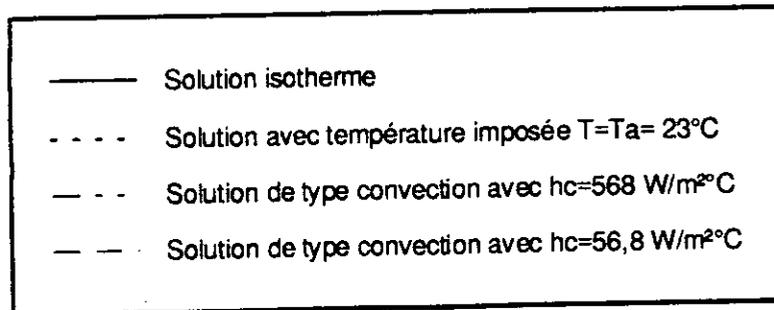
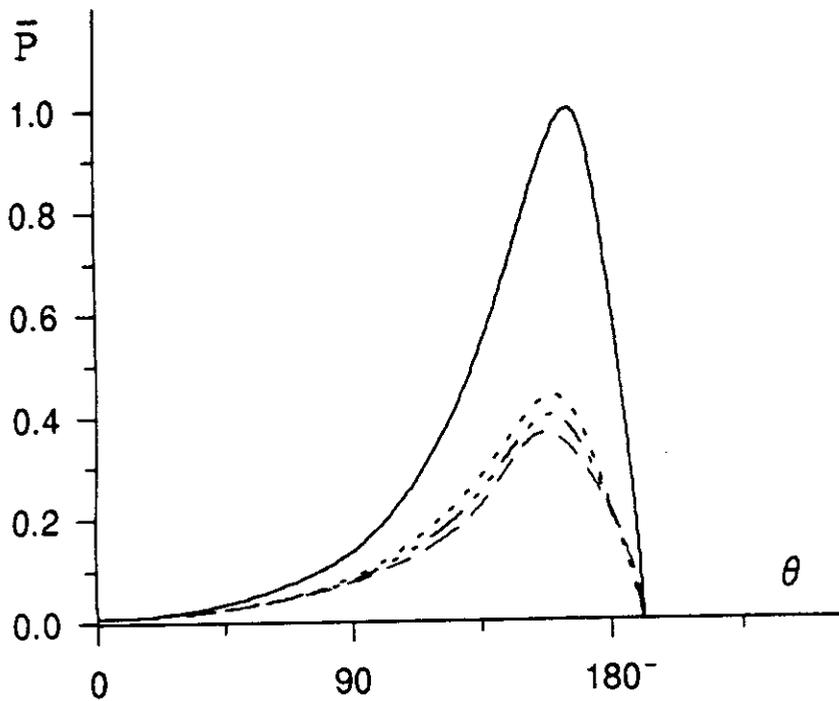


Fig.V.6 : Courbes de pression dans le plan de symétrie pour différentes conditions à la paroi externe du coussinet.

V.4.COMPARAISON THEORIE-EXPERIMENTATION (PALIER A)

La figure V.7 montre la variation de la température à la surface interne du coussinet dans le plan de symétrie du palier

- la courbe I à été obtenue expérimentalement pour une excentricité de 0,8 et un jeu radial de 145 μ m. La température maximale atteinte est de 51,5°C pour une abscisse $\theta = 267^\circ$ [46].

- La courbe II est issue des calculs effectués à partir du programme MEFTHD dans les mêmes conditions. La température maximale atteinte est de 55,6°C et cette courbe se situe toujours au dessus de la courbe expérimentale.

- La courbe III provient des résultats obtenus numériquement par Boncompain à l'aide de son programme thermohydrodynamique, qui tient compte des déformations thermo-élastiques des massifs en présence [26].

L'écart de température constaté au voisinage de la rainure d'alimentation est due à la modélisation . En effet, sur le dispositif d'essai, le fluide d'alimentation refroidit le coussinet dans la zone de la rainure, ce phénomène n'est pas pris en compte pour le calcul. Toutefois, cette différence de température de l'ordre de 2 à 3°C n'entraîne qu'une très faible modification de la charge supportée car dans cette zone la pression hydrodynamique est faible.

Les courbes de pression obtenues dans les mêmes conditions sont présentées figure V.8. Le maximum de pression est de 3 MPa et la charge correspondante est de 8.000 N.

On note que les résultats obtenus par la Méthode des Eléments finis sont en bon accord avec l'expérience

V.5. INFLUENCE DE LA VITESSE DE ROTATION DE L'ARBRE

L'excentricité relative du palier C étant fixée à $\varepsilon = 0,8$ et la condition à la paroi externe du coussinet étant du type convection avec un coefficient $h_c = 56,8 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$, nous avons fait varier la vitesse de rotation de l'arbre entre 500 et 5.000 tr/mn

La température à l'entrée du convergent (fig.V.9) s'élève légèrement lorsque la vitesse augmente. Ceci est essentiellement dû à l'élévation de la température du fluide recyclé car le débit de ce fluide varie peu ; il passe de 16 % à 500 tr/mn à 19,5 % à 3.000 tr/mn.

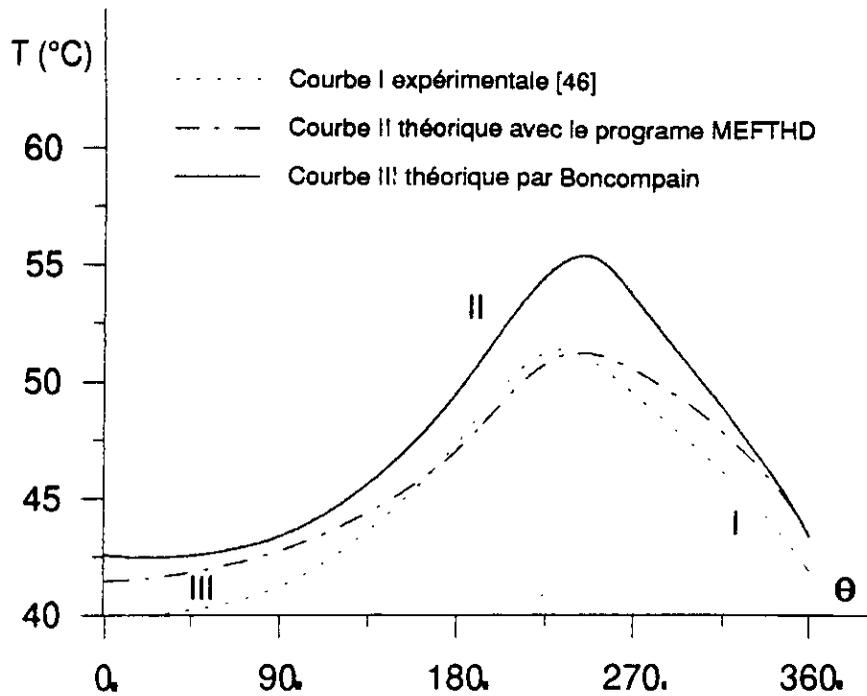


Fig.V.7 : Variation de la température de la surface interne du coussinet dans le plan médian en fonction de la coordonné circonférentielle ($N=2000$ tr/mn) .

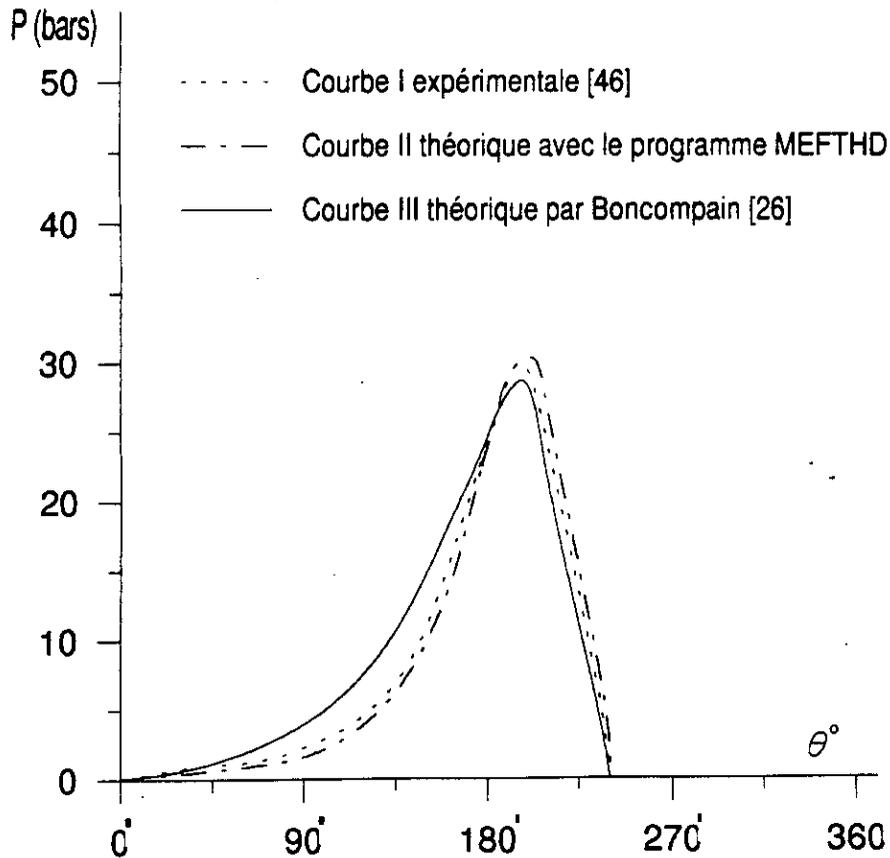


Fig.V.8 : Variation de la pression en fonction de la coordonné circonférentielle

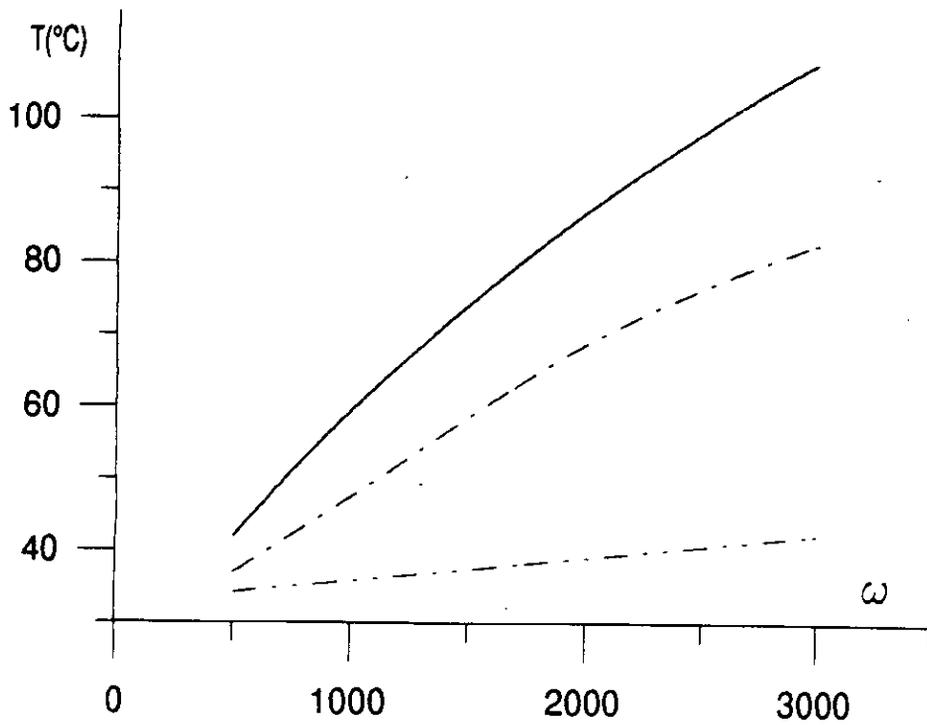


Fig.V.9 : ———— Température maximale atteinte par la surface du coussinet
 - - - - - Température du fluide recyclé
 - · - · - Température du fluide à l'entrée du palier

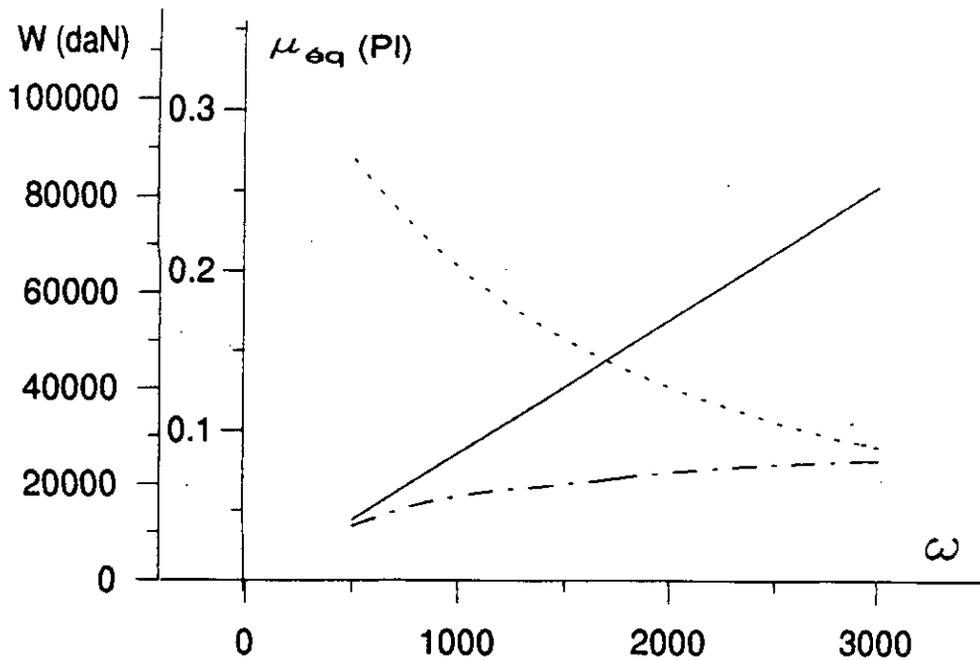


Fig.V.10 : - · - · - Viscosité équivalente
 ———— Charge réelle, solution isotherme avec $\mu = 0,323 \text{ Pa}$
 - - - - - Charge réelle, solution thermohydrodynamique

Lorsque la vitesse de rotation de l'arbre augmente, on note un accroissement de la température maximale atteinte par la surface du coussinet (fig.V.9). Ceci est justifié par l'élévation de la quantité de chaleur produite par cisaillement. On note de plus que la position angulaire de ce point de température maximale est invariante, elle se situe toujours au voisinage de 240°C .

La figure V.10 montre la forte influence de l'élévation de température sur la viscosité équivalente qui décroît fortement. Ceci correspond à la faible augmentation de la charge avec la vitesse dont la variation est beaucoup plus faible que ne le prévoient les calculs isothermes.

Par ailleurs, on constate que les transferts de chaleur sont peu modifiés par la variation de la vitesse (fig.V.11). Le fluide emmène par convection de 66 à 77 % de la chaleur, l'arbre de 21 à 30 %, la contribution du coussinet restant toujours très faible.

V.6. INFLUENCE DE L'EXCENTRICITE RELATIVE

La vitesse de rotation de l'arbre est fixée à $\omega = 2.000$ tr/mn et on impose toujours la condition de convection avec $h_c = 56,8$ W/m² °C à la paroi externe du coussinet. Nous avons fait varier l'excentricité relative du palier C de 0,15 à 0,95.

La figure V.12 montre que la température maximale atteinte par la surface interne augmente légèrement avec l'excentricité. En effet, l'accroissement de excentricité se traduit par une importante élévation de la puissance dissipée par cisaillement dans la zone d'épaisseur minimale du film. Mais l'effet de cette augmentation est limité par la diminution très importante du débit de fluide recyclé (fig.V.13), ce qui entraîne une baisse de la température moyenne du fluide à l'entrée du convergent (fig.V.12). De ce fait, l'élévation générale des températures se retrouve limitée et en particulier la température maximale atteinte par la surface extérieure du coussinet.

Par ailleurs, la diminution de la température à l'entrée du convergent se traduit par une augmentation sensible de la viscosité équivalente, ainsi que le montre la figure V.13.

On note que la variation de l'excentricité relative n'entraîne aucune variation de la position angulaire du point où la température est maximale.

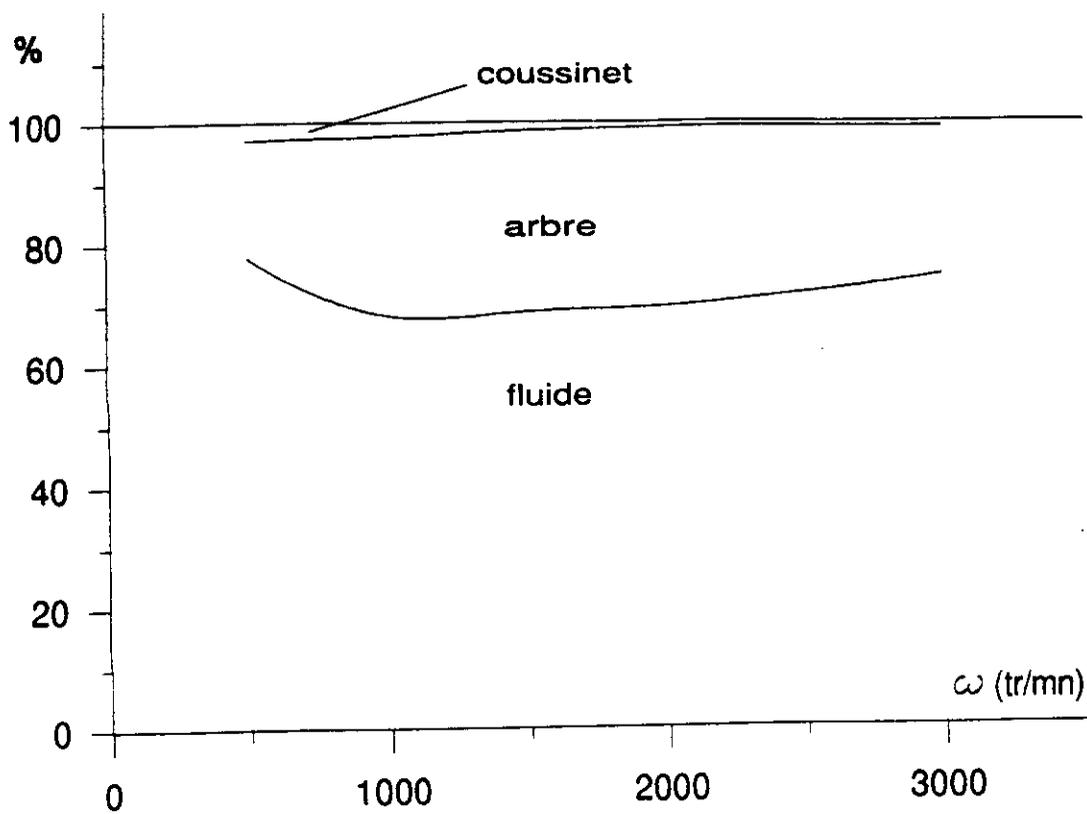


Fig.V.11 : Pourcentage de chaleur évacuée par les différent éléments

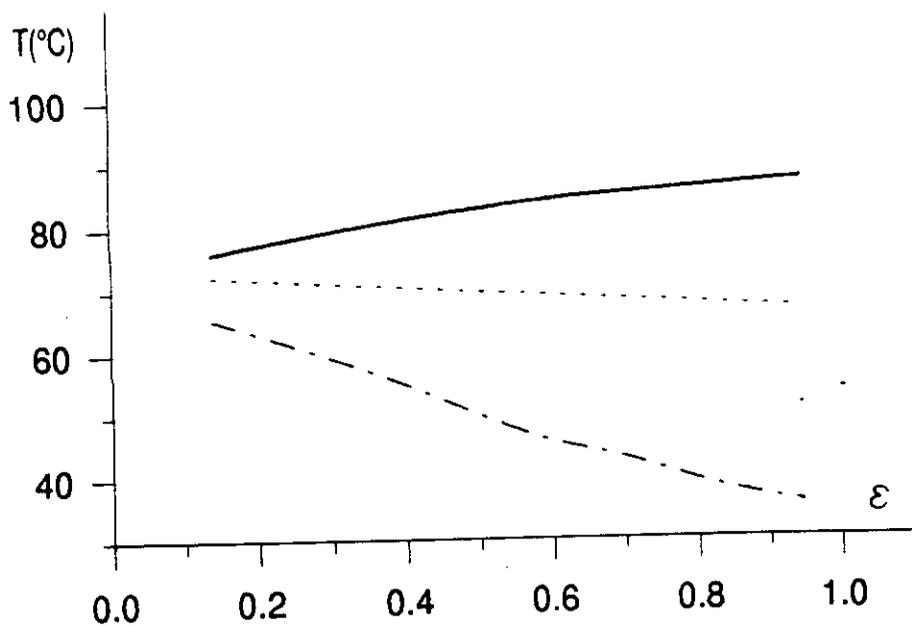


Fig.V.12 : ——— Température maximale atteinte par la surface interne du coussinet
 Température du fluide recyclé
 - - - Température du fluide à l'entrée du palier

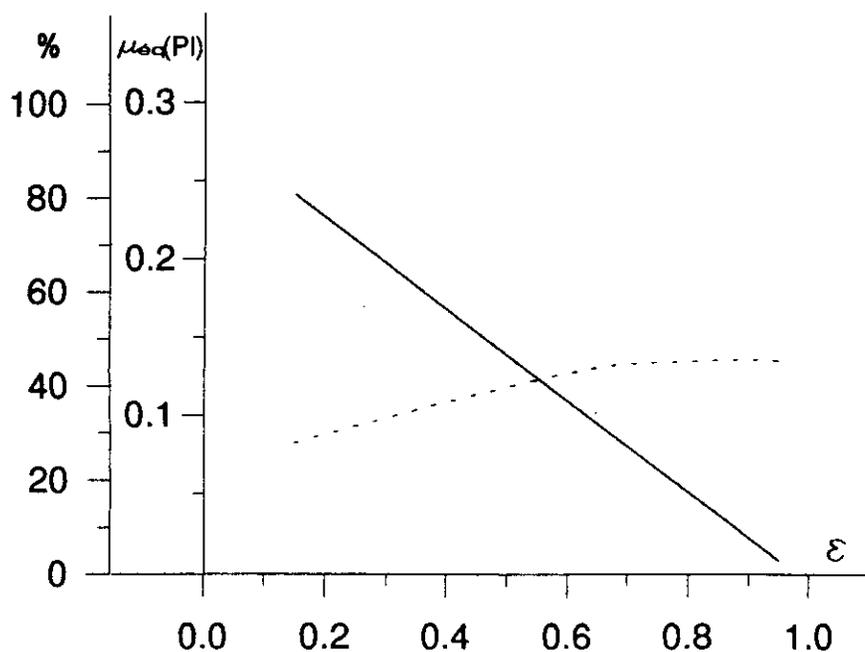


Fig.13 : ——— Rapport entre débit de fluide recyclé et débit de fluide à l'entrée du palier
 - - - - - Viscosité équivalente

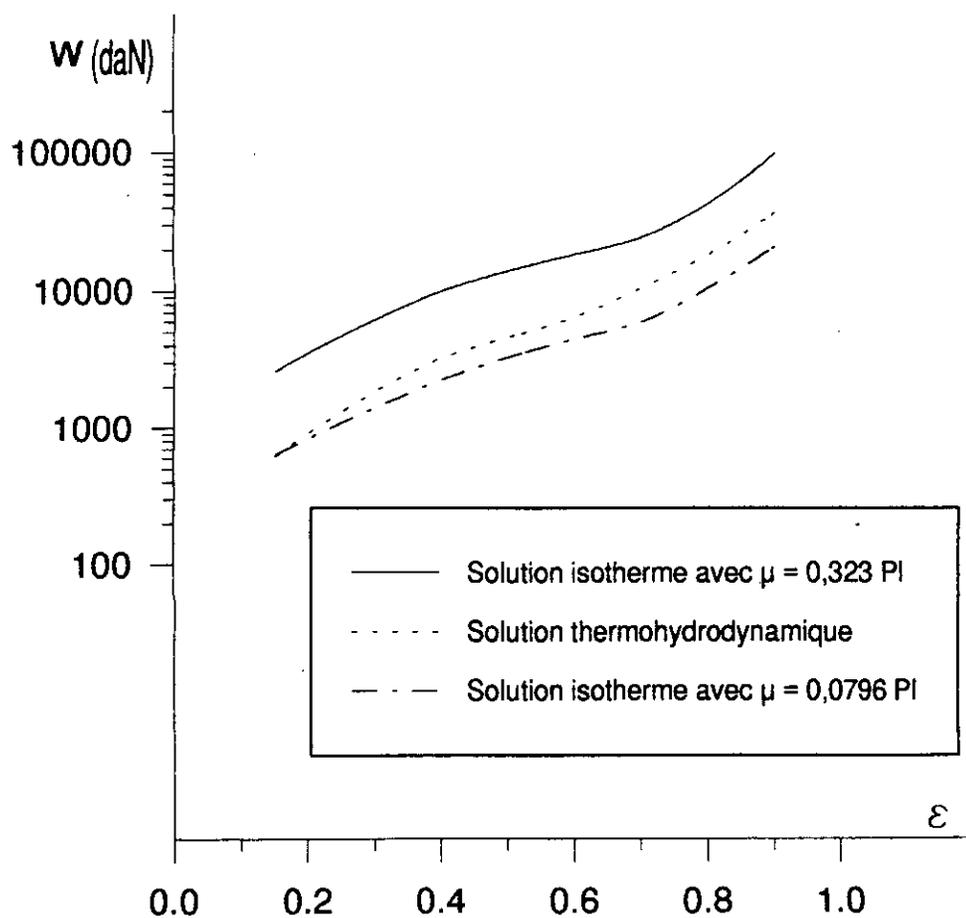


Fig.14 : Charge réelle

La figure V.14 représente la charge réelle en fonction de l'excentricité dans le cas isotherme avec la viscosité du fluide frais et dans le cas thermohydrodynamique.

Par ailleurs, la courbe de charge résultant d'un calcul isotherme effectué avec la viscosité équivalente la plus faible ($\mu = 0,08$ valeur calculée pour $\varepsilon = 0,15$) a été portée sur cette figure.

La différence entre ces courbes montre l'importance de la notion de viscosité équivalente et sa variation avec les conditions de fonctionnement du palier, en particulier avec l'excentricité.

La figure V.15 montre la part croissante que prend l'arbre dans l'évacuation de la chaleur lorsque l'excentricité augmente. En effet, le gradient de température à la surface de l'arbre croît de façon très sensible avec l'excentricité. Par contre au niveau de la surface du coussinet ce gradient reste toujours très faible.

V.7. COMPARAISON THEORIE-EXPERIMENTATION (PALIER B)

Les résultats expérimentaux [26,46] ont été obtenues pour des vitesses de rotation de 2.000 tr/mn et 4.000 tr/mn et l'excentricité de manière à obtenir une plage de variation des charges allant de 2.000 à 10.000 N.

Les figures V.16 et V.17 montrent respectivement la variation de la pression maximale et de la charge en fonction de l'excentricité relative.

On note l'augmentation très rapide de ces deux grandeurs en fonction de l'excentricité à vitesse constante, et on constate une très bonne concordance entre théorie et expérimentation avec cependant des valeurs théoriques légèrement inférieures aux valeurs expérimentales à fortes excentricités.

La figure V.18 représente les variations du débit sans dimension du lubrifiant. On constate que les résultats expérimentaux sont en bon accord avec les calculs théoriques pour des excentricités relatives comprises entre 0,3 et 0,5, en revanche, on note de légères différences à forte et faible excentricités de fonctionnement.

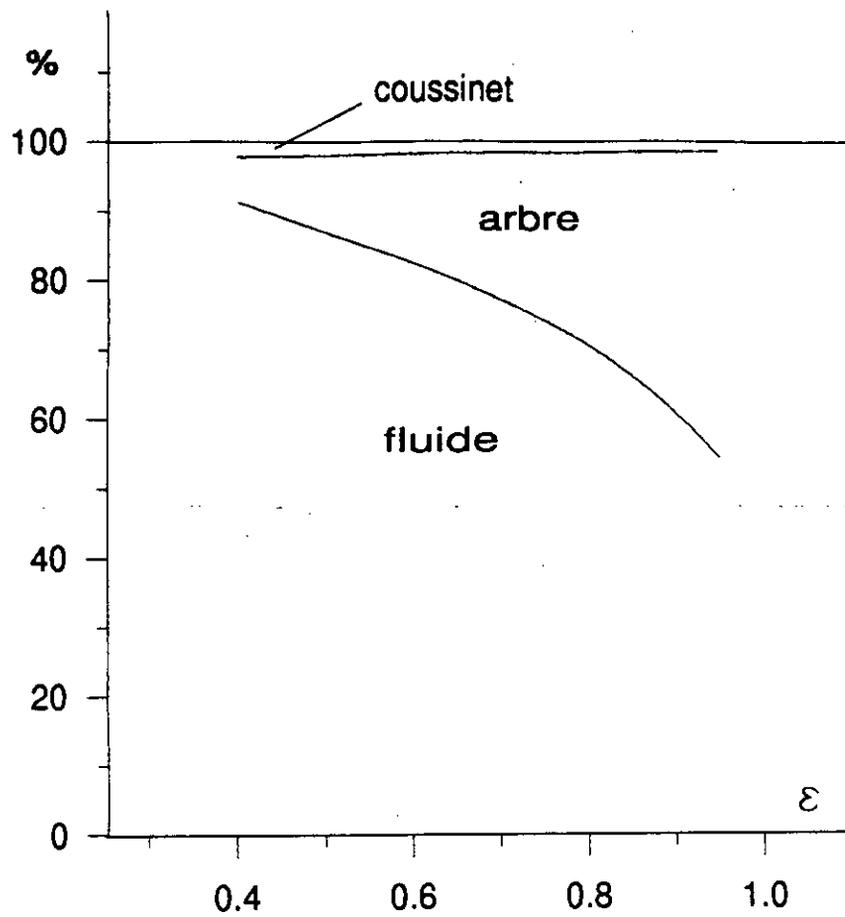


Fig.V.15 : Pourcentage de chaleur évacuée par les différents éléments

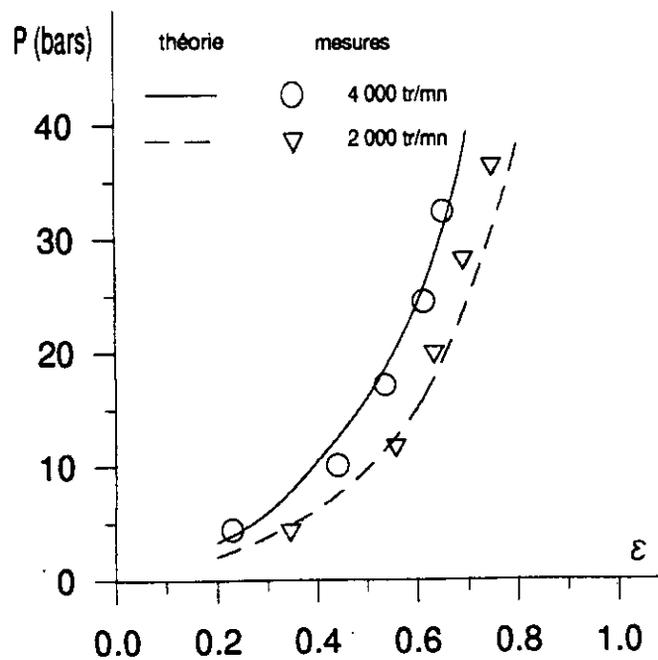


Fig.V.16 : Pression maximale dans le film en fonction de l'excentricité relative
Comparaison théorie-mesures

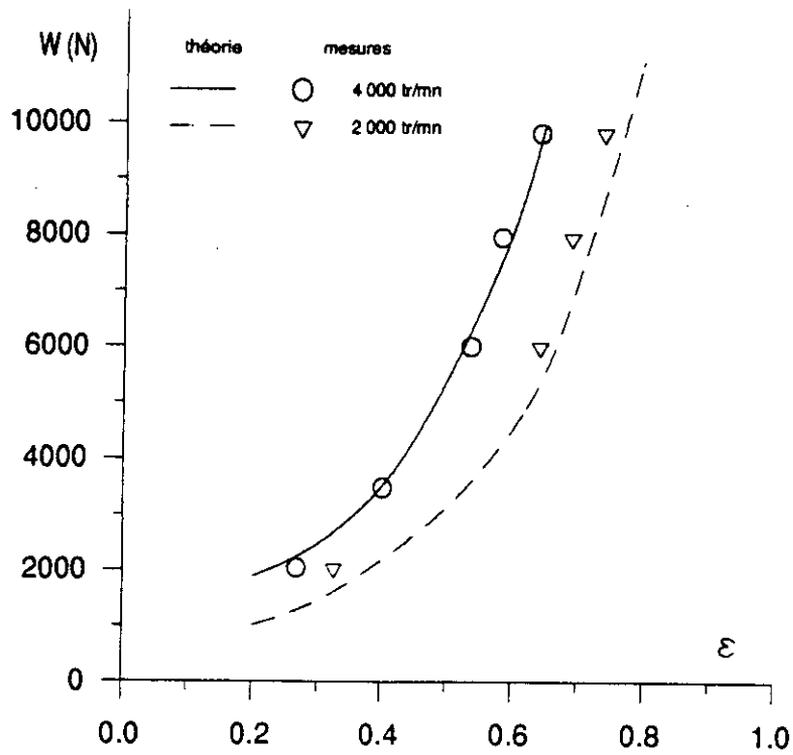


Fig.V.17 : Charge en fonction de l'excentricité relative
Comparaison théorie-mesures

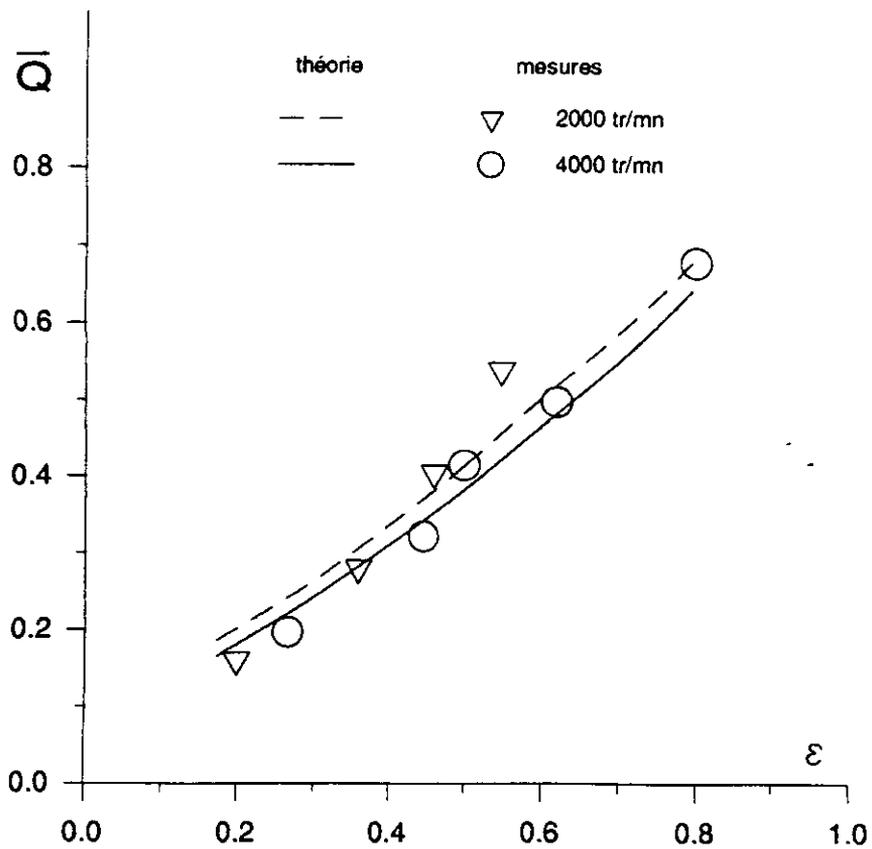


Fig.V.18 : Débit sans dimension en fonction de l'excentricité relative
Comparaison théorie-mesures.

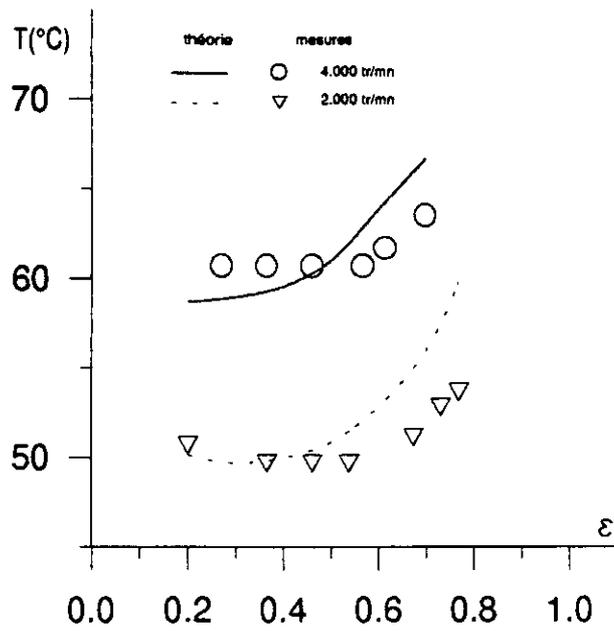


Fig.V.19 : Température maximale de la surface interne du coussinet
 Comparaison théorie-mesures

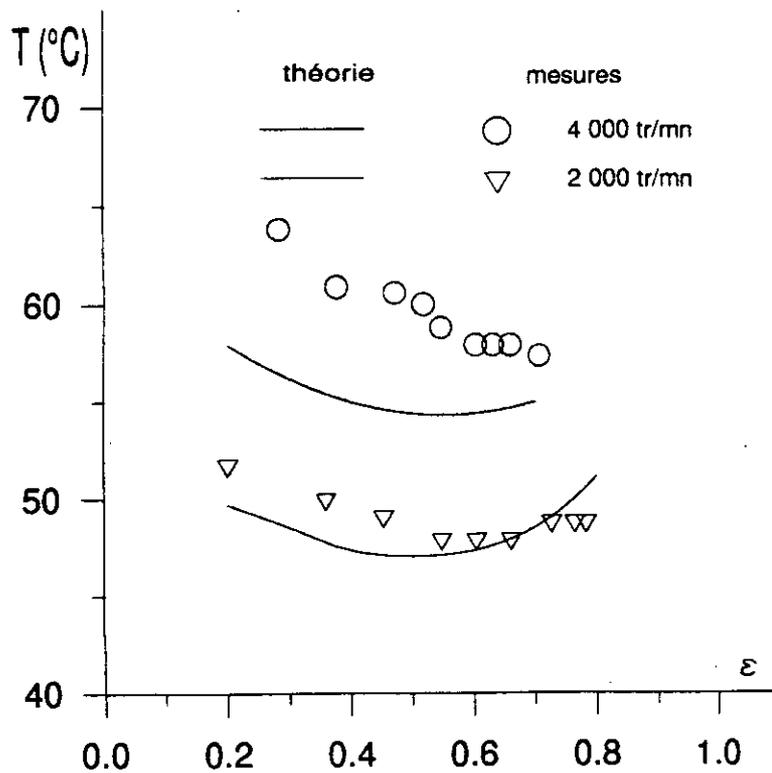


Fig.V.20 : Température maximale atteinte par l'arbre en fonction de l'excentricité
 Comparaison théorie-mesures

Les figures V.19 et V.20 montrent respectivement les températures maximales atteintes par la surface interne du coussinet et la surface de l'arbre pour deux vitesses de rotation de 2.000 tr/mn et 4.000 tr/mn en fonction de l'excentricité relative.

On constate que les variations de la température de la surface de l'arbre sont relativement faibles en fonction de l'excentricité, par contre la température maximale de la surface interne du coussinet croît nettement avec l'excentricité.

Remarque: Les résultats expérimentaux apparemment troublants pour les faibles excentricités, qui indiquent que la température maximale atteinte par l'arbre est supérieure à celle du coussinet s'explique par le fait que l'arbre du palier d'essai étant guidé par des roulements à contacts obliques ceux-ci dissipent une certaine quantité d'énergie qui vient perturber la mesure des températures.

V.8. CONCLUSION

Les résultats théoriques montrent que :

- le gradient de température à travers et suivant le film lubrifiant est important,
- la chaleur circule de la zone la plus chaude vers la zone de la rainure d'alimentation. Ce phénomène est dû à la convection dans le fluide, à la conduction dans le coussinet et à la rotation de l'arbre,
- la plus grande partie de la chaleur générée par cisaillement est évacuée par l'écoulement du fluide.

La comparaison entre la théorie et l'expérimentation a permis de valider les hypothèses et le programme numérique MEFTHD.

CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES

Depuis des temps très anciens, l'homme s'est passionné pour la création de machines et a, dès lors, compris que la lubrification des surfaces en mouvement relatif était l'une des clés de sa démarche inventive.

Notre travail qui rentre dans le cadre de la lubrification basse pression en tribologie répond avantageusement au sujet ainsi posé.

Après l'établissement des équations de bases régissant le phénomène thermohydrodynamique laminaire en régime stationnaire, nous avons abordé sa modélisation en éléments finis.

La méthode des éléments finis permet principalement grâce à la souplesse dans le maillage, de traiter le cas de géométries aux contours complexes et de prendre en compte des discontinuités dans la géométrie ou dans les propriétés physiques du fluide. En effet, le code de calcul que nous avons développé aux prix d'un effort de conception important permet de traiter une grande variété de problèmes de lubrification par une simple modification des données et peut s'intégrer efficacement dans des logiciels d'études dynamiques ou de dimensionnement industriel.

La démarche suivie dans l'application de la méthode des éléments finis au problème posé, à savoir, la formulation intégrale des équations de Reynolds généralisée de l'énergie et de la chaleur par minimisation de fonctions scalaires si possible ou par application de la méthode résiduelle de Galerkin, puis la discrétisation nodale et géométrique, l'assemblage et la résolution, est conseillée dans toute étude de ce type, principalement pour la résolution d'équations aux dérivées partielles tenant compte de conditions aux limites précisées.

La comparaison entre théorie et expérimentation a permis de valider les hypothèses ainsi que le programme de calcul. Aussi nous retiendrons de cette étude qui permet de définir le champ de température dans le film et dans le massif les importantes conclusions suivantes :

- la relation viscosité-température a une grande influence sur la distribution des températures,
- la variation de la température à travers le film est importante,
- le fluide emmène par convection la plus grande partie de la chaleur produite, l'arbre en évacue encore une large part, mais par contre le coussinet ne participe que très peu au transfert de chaleur,
- le fonctionnement du palier à forte excentricité permet d'augmenter la charge supportée. Cependant l'augmentation de excentricité reste sujette à la température maximale qu'atteindrait le revêtement intérieur du coussinet,
- la vitesse de rotation n'augmente que légèrement la portance au dépend d'une élévation importante de la température de la surface interne du coussinet,
- les conditions aux limites sur la température peuvent être très variées, elles dépendent de l'environnement et de l'implantation du palier. Le refroidissement de la surface externe du coussinet pourrait être un moyen intéressant pour augmenter la portance du palier.

En raison de sa structure modulaire notre code de calcul s'apprête efficacement à des éventuelles extensions telles que, la prise en compte des phénomènes transitoires ou de l'effet thermoélastique dû à la déformabilité des massifs en contact.

Comme complément à cette délicate étude nous proposons l'établissement d'une banque de données rassemblant les différents types de paliers industriels afin d'utiliser ce code de calcul comme outil d'étude en industrie.

Enfin, bien qu'il n'existe pas à l'heure actuelle de théorie rigoureuse sur le phénomène thermohydrodynamique en régime turbulent, un compromis peut être entrepris pour une éventuelle étude numérique du sujet.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] REYNOLDS O. " On the theory of lubrication and its application to M . Beauchamp tower's experiments ".
- [2] KINGSBURY A. " Heat effect in lubricating films ". Mechanical engineering, n°55.
- [3] SWIFT W.H. " Theory and experiment applied to journal bearing design ". IME of the general on lubrication and lubricants.
- [4] HAGG A.G. " Heat effects in lubricating films ". Journal of applied mechanics n°11
- [5] FOGG A." Fluid film lubrication of parallel thrust surfaces ".
- [6] DOWSON D." History of tribology ". 1979 Longmans.
- [7] COPE W.F." The hydrodynamical theory of film lubrication ".
- [8] SAIBEL E , GUILINGER W. " The effect of heat conductance on slider bearing characteristics". ASME (1958).
- [9] HUNTER W.B , ZIENKIEWICZ O.C." Effects of temperature variation across the lubricants films in the theory of hydrodynamic lubrication ". Journal of mechanical engineering science, vol.2, (1960).
- [10] CAMERON A." The viscosity wedge ". ASME (1958).
- [11] DOWSON D." A generalized Reynolds equation for fluid film lubrication ".
- [12] TIPEI N. , DEGUEURCE B. " A solution of thermohydrodynamic problem for exponential lubricating films ". GMC . rapport interne (1972).
- [13] TIPEI N. , DEGUEURCE B. " A solution of thermohydrodynamic problem for exponential lubricating films ". ASLE transaction. Vol .17, n°2 (1974).
- [14] HUEBNER K.H. " Application of finite element method to thermohydrodynamic lubrication ". J.Num.Meth.Eng., vol .8 (1974).
- [15] SMITH R.N. , TICHY J.A." An analytical solution for the thermal characteristics of journal bearings ". ASME, vol 103, juillet (1981).
- [16] MC CALLION A. , YOUSSEF F. , LLOYD T." The analysis of thermal effects in a full journal bearings ". ASME , vol.92, (1970)

-
- [17] DOWSON D. , HUDSON J.D." Thermohydrodynamic analysis of the infinite slider bearing : part I the plane inclined slider bearing ". IME , (1963).
- [18] DOWSON D. , HUDSON J.D." Thermohydrodynamic analysis of the infinite slider bearing : part II the parallel surface bearing ". IME , (1963).
- [19] DOWSON D. , MARCH C.N."A thermohydrodynamic analysis of journal bearing". IME , vol, 181, (1966).
- [20] EZZAT H.A. , ROHDE S.M." A study of the thermohydrodynamic performance of finite slider bearings ". GMC rapport interne, (1972).
- [21] HAHN E. J. , KETTLEBOROUGH G. F. " Solution for the pressure and the temperature in a infinite slider bearing of arbitrary profile ". ASME, (1967).
- [22] HUEBNER H." A three dimensional thermohydrodynamic analysis of sector thrust bearings ". ASLE transaction, vol.17, (1974).
- [23] DOWSON D. HUDSON , HUNTER , MARCH " An experimental investigation of the thermal equilibrium of steadily loaded journal bearing ". Inst. Mech. Eng., vol.181, (1966).
- [24] SIEREG A. , EZZAT H." Thermohydrodynamic phenomena in fluid film lubrication". Journal of lubrication technology. (1973).
- [25] SIEREGA. , DANDAGE S." Empirical design procedure for the thermohydrodynamic behaviour of journal bearing ". ASME n°81.
- [26] BONCOMPAIN R. " Les paliers lisse en régime thermohydrodynamique . Aspects théoriques et expérimentaux ". Thèse de doctorat-es-sciences présentée devant l'université de Poitiers, (1984).
- [27] BOU-SAID B." La lubrification à basse pression par la méthode des éléments finis - application aux paliers " Thèse de doctorat-es-sciences présentée devant l'université de Lyon. (1985).
- [28] NICOLAS D." Les paliers hydrodynamiques soumis à un torseur de force quelconque". Thèse de docteur-ingenieur Lyon (1972).
- [29] ZIENKIEWICZ O. C. " The finite element methode in structural and continius mechanics ". Mc Grow Hill (1967).
- [30] COLE F.A. , HUGHES C. " Oil flow and film extent in complete journal bearing ". Proc. Inst. Mech. Eng., 170, (1956).
- [31] FLOBERG L. , JACOBSSON. " The finite journal bearing , considering vaporisation ". Trans. Chalevers. University Tech. 190 Göteborg , (1957).

- [32] FLOBERG L." On hydrodynamic lubrication with special reference to subcavity pressures and number of streamers in cavitation regions ". Stockholm, (1965).
- [33] FLOBERG L." Cavitation boundary conditions with regard to the number of streamers and tensile strenght of the liquid ".
- [34] ERROD H.G. , ADAMS M.L." A computer program for cavitation and saturation problems ".
- [35] BAYADA G." Modilisation of a cavitation problem ". Euro. Mech. Colloquium n°124 on Hydrodynamic lubrication of bearings, Torino,Italy, October 1979
- [36] GERMAIN P." Mécanique des milieux continus ". Masson, (1972).
- [37] CHRISTOPHERSON R.G." A new mathematical method for the solution of oil film lubrication problems ". Proc. Inter. Mech. Eng. vol 145, (1941).
- [38] CRYER C.W." The method of Christopherson for solving free boundary problems ". Tech. Raport. University Wisconsin (1969).
- [39] BAYADA G." Inéquations variationnelles à conditions aux limites périodiques ". Thèse présentée devant l'université de Lyon (1972).
- [40] DHATT G. , TOUZOUT G." Une présentation de la méthode des élément finis ". Maloine S.A , (1981).
- [41] STRANG G. , FIX O.J." Analysis of the finite element method ". Prentice Hall , New Jersy, (1973).
- [42] FRENE J." Régime d'écoulement non laminaire en films minces ". Thèse de doctorat-es-sciences. Université de Lyon, (1974).
- [43] BONCOMPAIN R. , FRENE J." Modification de la portance due à l'effet thermique dans les paliers lisses et détermination des cartes de température ". Convention d'étude EDF et INSA n°1089
- [44] FERRON J." Contribution à l'étude des phénomènes thermiques dans les paliers hydrodynamiques ".thèse de doctorat du troisième cycle. Université de Poitier, (1982).
- [45] FERRON J. , FRENE J." Etude thermohydrodynamique des paliers lisses, construction d'une machine d'essai ". Compte rendu de fin d'étude, (1980).
- [46] FERRON J. , FRENE J. " Etude thermohydrodynamique des paliers lisses, résultats expérimentaux ". Compte rendu de fin d'étude, (1982).

ANNEXE 1

- EQUATION THERMODYNAMIQUE D'ETAT
- RELATION DE MAXWELL
- COEFFICIENT CALORIMETRIQUE

I. EQUATION THERMODYNAMIQUE D'ETAT

les équations issues des lois de conservation de la mécanique des milieux continus et l'équation qui traduit le second principe ne suffisent pas pour tous les paramètres intervenant dans un processus thermodynamique. Il est donc nécessaire de rajouter des lois de comportement caractérisant le milieu étudié. En plus de loi de comportement purement mécanique qui relie le tenseur des contraintes et le tenseur des taux de déformations, il faut adjoindre la loi de comportement thermodynamique encore appelée équation thermodynamique d'état.

Dans les cas de mélange de fluides chimiquement inertes, (pas de réactions chimiques), et sous une seule phase, cette équation indique que l'énergie interne massique e est définie à partir de l'entropie massique s et du volume massique v (milieu bi-paramétrique), soit :

$$e = e(s, v) \quad (1)$$

de plus, entre les variables d'état e , s et v , il existe la relation différentielle :

$$de = Tds - Pdv \quad (2)$$

Dans cette relation T Représente la température absolue et P la pression.

On montre par ailleurs que la connaissance de la fonction $e=e(s,v)$, permet de définir les fonction $T(s,v), P(s,v), \dots$ Autrement dit, tout paramètre d'état est calculable à partir de la donnée de deux autres variables d'états.

II. RAPPEL SUR LES DIFFERENTIELLES TOTALES

En thermodynamique toutes les grandeurs peuvent être classées en deux groupes : fonction d'état et les fonction de transformation.

La valeur d'une fonction d'état (e par exemple), est déterminée univoquement par les paramètres de cet état (P, v, T). Pour déterminer la variation d'une fonction d'état, il suffit donc de connaître les valeurs de ces paramètres aux points initial et final de transformation.

La variation d'une fonction de transformation (travail, chaleur) dépend de la façon dont s'accomplit la transformation subie par le système thermodynamique.

La propriété caractéristique d'une fonction d'état est que sa différentielle est une différentielle totale.

Comme on l'a vu au paragraphe I, il s'agira essentiellement d'une fonction d'état de deux variables de la forme $Z = f(x, y)$ telles que :

$$dZ = \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_x dy \quad (3)$$

On sait d'après le théorème de Schwarz (analyse mathématique) que :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} \quad (4)$$

c'est à dire que la valeur d'une dérivée mixte ne dépend pas de l'ordre dans laquelle on effectue la dérivation.

Ainsi, si la différentielle d'une fonction quelconque $Z=f(x, y)$ est écrite sous la forme :

$$dZ = Pdx + Qdy \quad (5)$$

et si la différentielle de la fonction Z est une différentielle totale alors la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (6)$$

Considérons la relation (3) pour Z constant. Alors $dZ = 0$ et :

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_x dy = 0 \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_z = 0$$

on peut écrire encore cette relation sous la forme :

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial Z} \right)_y = -1 \quad (8)$$

on établit ainsi une relation entre les dérivées des fonctions :

$$z(x, y), x(y, z), y(x, z)$$

On peut encore obtenir de l'équation (3) une relation souvent utile. En effet, dérivons cette équation par rapport à x à condition qu'un paramètre quelconque d'état soit constant, il vient :

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_x \frac{dy}{dx}$$

à ξ constant ceci peut s'écrire :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_\xi = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_\xi \quad (9)$$

Tous ces résultats sont nécessaire pour établir les relations de Maxwell et calculer les coefficients calorimétriques.

III. RELATIONS DE MAXWELL

Elles sont déduites de l'équation thermodynamique d'état (2) et en faisant intervenir la notion de fonction d'état.

Désignons par x et y deux variables d'état choisies parmi les quatre grandeurs P , v , T et S . La pression, le volume massique, la température absolue et l'entropie massique, étant des variables d'état leur différentielles totales, ainsi :

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial e}{\partial y} \right)_x dy$$

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)_x dy \quad (10)$$

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_x dy$$

portons les relations (10) dans l'équation (2), il vient :

$$\left(\frac{\partial e}{\partial x} \right)_y = T \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_y - P \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_y \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial e}{\partial x} \right)_y = T \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)_x - P \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_y \quad (12)$$

De plus comme les dérivées croisées de e doivent être égales, on obtient :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_x \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_y - \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_x \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_x - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial v}{\partial v}\right)_x \quad (13)$$

En remplaçant dans (13) x et y successivement par P et S , v et S , P et T , v et T , on obtient respectivement :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial S}\right)_P = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_S = -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_v \quad (15)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \quad (16)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial S}\right)_T = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_v \quad (17)$$

C'est quatre équations constituent les relations dites de Maxwell et sont à la base de la définition des coefficients calorimétriques.

IV. COEFFICIENTS CALORIMÉTRIQUES

IV.1. CALCUL DE L'ÉNERGIE INTERNE

Considérons l'énergie interne massique e comme étant fonction de v et de T , alors par différentiation :

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T dv \quad (18)$$

Cherchons à exprimer à l'aide des coefficients calorimétriques et de loi de transformation du fluide les deux termes suivants :

$$\left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T$$

pour ce faire, substituons v à x et T à y dans l'équation (11), il vient :

$$\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T - P \quad (19)$$

Par ailleurs, l'équation de Maxwell (17) indique :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v$$

la relation (19) devient ainsi :

$$\left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - P \quad (20)$$

d'autre part et par définition :

$$C_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v \quad (21)$$

On peut donc réécrire l'équation différentielle (18) de la façon suivante :

$$de = C_v dT + \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - P \right] dv \quad (22)$$

Ainsi la connaissance du coefficient calorimétrique C_v et de la loi d'évolution $P(T,v)$ permet de définir la différentielle de l'énergie interne massique.

IV.2. CALCUL DE L'ENTHALPIE

L'enthalpie massique h est définie à partir de l'énergie interne par :

$$h = e + Pv \quad (23)$$

soit en différentiant :

$$dh = de + Pd v + v dP$$

L'équation thermodynamique d'état (2) peut alors s'exprimer par :

$$dh = T dS + v dP$$

en supposant de plus que $h=h(T,P)$, il vient en différentiant :

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T dP \quad (24)$$

et on obtient de la même façon que pour l'énergie interne :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T + v \quad (25)$$

Compte tenu de la relation de Maxwell (16) on peut encore écrire :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T = v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P \quad (26)$$

de plus, et par définition de C_p :

$$C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P \quad (27)$$

par ailleurs, le coefficient de dilatation thermique β est défini par :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (28)$$

A l'aide de ces définition on peut écrire :

$$dh = C_p dT + v(1 - T\beta)dv \quad (29)$$

Ainsi, la connaissance du coefficient calorimétrique C_p et de la loi d'évolution $v(T,P)$ permet de définir la différentielle de l'enthalpie massique.

I.V.3. RELATION ENTRE C_p et C_v

Dérivant la relation (23) par rapport à la température et à pression constante, il vient :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_p + P \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (30)$$

soit d'après la définition de C_p :

$$C_p = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_p + P \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (31)$$

on a de plus par définition :

$$C_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v$$

Il faut donc calculer $(\partial e / \partial T)_p$ en fonction de $C_v = (\partial e / \partial T)_v$.

Pour ce faire, servons nous de la relation (9) dans laquelle on remplace respectivement : Z par e, x par T, ξ par P, y par v, il vient ainsi :

$$\left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v + \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (32)$$

la relation (19) permet de remplacer le terme $(\partial e / \partial v)_T$ dans l'équation précédente et ainsi :

$$\left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_p = C_v + [T \left(\frac{\partial S}{\partial v} \right)_T - P] \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (33)$$

Portant ce dernier résultat dans l'équation (31), on obtient en définitive :

$$C_p = C_v + T \left(\frac{\partial S}{\partial v} \right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (34)$$

soit compte tenu de la relation de Maxwell (17) :

$$C_p - C_v = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (35)$$

On peut encore expliciter cette différence entre C_p et C_v en faisant intervenir les deux coefficients habituels :

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (36)$$

$$\chi = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T$$

Pour ce faire, il faut calculer le terme $(\partial P / \partial T)_v$ qui intervient dans la relation (35) en fonction de χ .

Le résultat (8) permet d'écrire :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_p = -1 \quad (37)$$

soit

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = - \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p / \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \quad (38)$$

et en fonction de (36), on peut écrire :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = \beta / \chi$$

La relation (35) entre C_p et C_v peut alors s'écrire sous la forme classique :

$$C_p - C_v = T \beta^2 / \rho \chi \quad (39)$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de C_p et $T\beta^2/\rho\chi$ pour quelques substances :

substance	C_p cal/g.°c	$T\beta^2/\rho\chi$ cal/g.°c
Huile SAE 30	0,4	0,096
Eau	1	0,005
Acier	0,12	$1,3 \cdot 10^{-6}$

Ainsi pour l'eau et l'acier la différence entre C_p et C_v est faible. Par contre pour l'huile la différence est de l'ordre de 25% et doit être prise en compte .

ANNEXE 2

- CHANGEMENT DE VARIABLES GEOMETRIQUES
- ADIMENSIONNALISATION DE L'EQUATION DE L'ENERGIE
ET ANALYSE DIMENSIONNELLE

I. CHANGEMENT DE VARIABLE GEOMETRIQUE

Il est commode de faire subir aux équations du système une transformation qui adimensionnalise les différentes grandeurs qui apparaissent dans les équations et qui transforme le domaine occupé par le film en un parallépipède rectangle.

posons :

$$\begin{aligned} \theta &= x/R & x &= R\theta \\ \bar{y} &= y/L & \text{ou} & y = \bar{y}h & (1) \\ \bar{z} &= z/L & z &= \bar{z}L \end{aligned}$$

De plus, l'épaisseur du film h n'est dans le cas considéré ici, qu'une fonction de x , posons :

$$\bar{h} = h/c \quad \text{ou} \quad h = C\bar{h}$$

et

$$y = C\bar{h}\bar{y}$$

on posera de plus :

$$v = \frac{R}{L} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{C}{R}$$

on a en définitive, les formules de transformation suivantes :

$$\begin{aligned} \theta &= x/R & x &= R\theta \\ \bar{y} &= y/h & \text{ou} & y = C\bar{h}\bar{y} & (2) \\ \bar{z} &= z/L & z &= \bar{z}L \end{aligned}$$

et le domaine fluide réel se transforme en un parallépipède rectangle que l'on dénommera "domaine de référence".

II. ADIMENSIONALISATION ET ANALYSE DIMENSIONNELLE

Reprenons la forme développée en (I.64) pour l'équation de l'énergie en négligeant le coefficient de compressibilité β , il vient alors

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = K \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

posons :

$$\phi = 2\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$$

ϕ est appelée fonction de dissipation et en coordonnées rectangulaire elle s'exprime pour une évolution incompressible par :

$$\begin{aligned} \frac{\phi}{\mu} = & 2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Portons dans cette expression de ϕ les changement de variables indiquées en (II.43) :

$$\begin{aligned} \frac{\phi}{\mu} = & 2 \frac{U^2}{R^2} \left[\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta^*} \right)^2 + \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{U^2}{C^2} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \eta^2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta^*} \right)^2 \\ & + \frac{U^2}{C^2} \left(v \eta^2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} + \frac{1}{h} \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} \right)^2 + \frac{U^2}{R^2} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \theta^*} + v \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \quad (3)$$

le terme

$$K \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}$$

devient :

$$K \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} = \frac{K T_0}{R^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \theta^{*2}} + \frac{1}{\eta^2} \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + v^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

et le premier membre de l'équation (1) s'écrit

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \frac{\rho C_p T_0 U}{R} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta^*} + \frac{\bar{V}}{h} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + v \bar{W} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) \quad (5)$$

En multipliant l'équation de l'énergie par C^2/KT_0 on fait apparaître le nombre de Péclet :

$$P_e = \frac{\rho C_p U C^2}{RK} \quad (6)$$

et le nombre de dissipation :

$$N_d = \frac{\mu U^2}{K T_0} \quad (7)$$

il vient ainsi :

$$\begin{aligned} P_e \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta^*} + \frac{\bar{V}}{h} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + v \bar{W} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right] &= \eta^2 \left[\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \theta^{*2}} + \frac{1}{\eta^2} \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + v^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \right] \\ &+ 2 N_d \eta^2 \bar{\mu} \left[\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta^*} \right)^2 + \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &+ N_d \bar{\mu} \left[\left(\frac{1}{h} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \eta^2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta^*} \right)^2 + \left(v \eta^2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} + \frac{1}{h} \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (8) \\ &+ N_d \eta^2 \bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \theta^*} + v \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right)^2 \end{aligned}$$

Or $h=C/R$ est petit, de l'ordre de 10^{-3} dans les paliers courant, ainsi en négligeant les termes ayant pour facteur h^2 et les puissances supérieures de h , il reste :

$$P_e \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta^*} + \frac{\bar{V}}{h} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + v \bar{W} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right] = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + N_d \frac{\bar{\mu}}{h^2} \left[\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (9)$$

Dans le cas stationnaire, le terme

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t}$$

s'annule et l'on obtient la forme de l'équation de l'énergie dont nous nous sommes servis.

ANNEXE 3

**INTEGRATION DE LA FONCTION DISSIPATION
A TRAVERS L'ÉPAISSEUR DU FILM**

Soit à calculer

$$\int_0^h \phi \, dy$$

où

$$\phi = \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]$$

et

$$u = \frac{\partial P}{\partial x} \left(I - I_2 \frac{J}{J_2} \right) + \frac{U_2 - U_1}{J_2} J + U_1$$

$$w = \frac{\partial P}{\partial z} \left(I - I_2 \frac{J}{J_2} \right) + \frac{W_2 - W_1}{J_2} J + W_1$$

avec

$$I = \int_0^y \frac{\xi}{\mu} \, d\xi \quad J = \int_0^y \frac{d\xi}{\mu}$$

$$I_2 = \int_0^h \frac{y}{\mu} \, dy \quad J_2 = \int_0^h \frac{dy}{\mu}$$

Occupons nous du premier terme $\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$.

on a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} \left(\frac{\partial I}{\partial y} - \frac{I_2}{J_2} \frac{\partial J}{\partial y} \right) + \frac{U_2 - U_1}{J_2} \frac{\partial J}{\partial y}$$

or

$$\frac{\partial I}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \frac{\xi}{\mu} \, d\xi = \frac{y}{\mu}$$

$$\frac{\partial J}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \frac{d\xi}{\mu} = \frac{1}{\mu}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 \left[\frac{y^2}{\mu} + \left(\frac{I_2}{J_2} \right)^2 \frac{l}{\mu} - \frac{y}{\mu} \right] \\ &+ \left(\frac{U_2 - U_1}{J_2} \right)^2 \frac{l}{\mu} + 2 \frac{U_2 - U_1}{J_2} \frac{\partial P}{\partial x} \left(\frac{y}{\mu} - \frac{I_2}{J_2} \frac{l}{\mu} \right) \end{aligned}$$

soit en intégrant

$$\begin{aligned} \int_0^h \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 \left[\int_0^h \frac{y^2}{\mu} dy + \frac{I_2^2}{J_2} - 2 \frac{I_2}{J_2} \right] \\ &+ \frac{(U_2 - U_1)^2}{J_2} + 2 \frac{U_2 - U_1}{J_2} \frac{\partial P}{\partial x} \left(I_2 - \frac{I_2}{J_2} J_2 \right) \end{aligned}$$

et en simplifiant

$$\int_0^h \mu \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 dy = \frac{G}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \frac{(U_2 - U_1)^2}{J_2}$$

de même, on peut écrire:

$$\int_0^h \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy = \frac{G}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \frac{(W_2 - W_1)^2}{J_2}$$

et finalement, on a:

$$\int_0^h \Phi dy = \frac{G}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \frac{G}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 + \frac{(U_2 - U_1)^2}{J_2} + \frac{(W_2 - W_1)^2}{J_2}$$

ANNEXE 4

**JUSTIFICATION PAR LE CALCUL DES VARIATION DE
L'ASSOCIATION DE LA FONCTIONNELLE J(P) A L'EQUATION DE
REYNOLDS GENERALISEE AVEC LES CONDITIONS AUX LIMITES
DU TYPE DIRICHLET ET NEUMAN.**

Considérons la fonctionnelle

$$J(p) = \int_{\Omega} H(p, p_x, p_z) dx dz$$

où

$$p_x = \frac{\partial p}{\partial x} \quad ; \quad p_z = \frac{\partial p}{\partial z}$$

Le but du calcul des variations est de déterminer parmi l'ensemble des fonctions $p(x,z)$ celle qui rend $J(p)$ stationnaire. Soit P^* cette fonction et P_0 une fonction approchant P^* sur tout le domaine d'intégration Ω .

Posons :
$$\delta P = P^* - P_0 = \eta \Phi(x,z)$$

Dans cette expression δ représente le symbole variationnel, Φ une fonction arbitraire de x et de z et η une quantité positive qui tend vers zéro lorsque P_0 tend vers P^* .

$J(p)$ est dite stationnaire lorsque :

$$\delta J(p) = \int_{\Omega} \delta H(p, p_x, p_z) dx dz = 0$$

La variation virtuelle δH est donnée par :

$$\delta H = H(P^*, P^*_x, P^*_z) - H(P, P_x, P_z)$$

soit

$$\delta H = H(P+\eta \Phi, P_x+\eta \Phi_x, P_z+\eta \Phi_z) - H(P, P_x, P_z)$$

En négligeant les termes du second ordre, le développement en série de Taylor donne :

$$\delta H = \eta \left[\frac{\partial H}{\partial p} \phi + \frac{\partial H}{\partial p_x} \phi_x + \frac{\partial H}{\partial p_z} \phi_z \right]$$

soit encore

$$\delta H = \eta \left[\phi \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial H}{\partial p_x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi \frac{\partial H}{\partial p_z} \right) - \phi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial p_x} \right) - \phi \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H}{\partial p_z} \right) \right]$$

$\delta J(p)$ s'écrit alors :

$$\delta J(p) = \eta \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial p_x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H}{\partial p_z} \right) \right] \phi \, dx dz + \eta \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial H}{\partial p_x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi \frac{\partial H}{\partial p_z} \right) \right] dx dz$$

Le théorème de Green permet de transformer la deuxième intégrale qui figure dans le membre de droite de l'équation précédente en une intégrale curviligne.

$$\delta J(p) = \eta \int_{\Omega} \left[\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial p_x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H}{\partial p_z} \right) \right] \phi \, dx dz + \eta \int_{\Gamma} \phi \left[\frac{\partial H}{\partial p_x} dx - \frac{\partial H}{\partial p_z} dz \right]$$

Appliquons ces résultats à la fonctionnelle

$$J(p) = \int_{\Omega} \left[-\frac{G}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 - \frac{G}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 + 2U \frac{\partial p}{\partial x} \left(h - \frac{F}{\rho} \right) \right] dx dz - 2 \int_{\Gamma_q} \bar{q} p \, d\Gamma$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \delta J(p) = & \eta \int_{\Omega} \phi \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(U h - U \frac{F}{\rho} \right) \right] dx dz \\ & + \eta \int_{\Gamma} \phi \left[\left(2 \frac{G}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - 2U \left(h - \frac{F}{\rho} \right) \right) dz - \left(2 \frac{G}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) dx \right] - 2 \int_{\Gamma_q} \bar{q} p \, d\Gamma \end{aligned}$$

Comme la fonction $p(x,z)$ est connue sur une partie Γ_p de la frontière Γ (paragraphe IV.3.1), la fonction Φ est nulle sur cette frontière et par conséquent, la deuxième intégrale de l'équation précédente est nulle sauf sur Γ_q .

Ainsi $J(p)$ sera stationnaire quel que soit la fonction Φ admissible lorsque les relations suivantes seront satisfaites:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = U \frac{\partial}{\partial x} \left(h - \frac{F}{\rho} \right) \quad \text{sur } \Omega$$

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{U} \left(h - \frac{F}{\rho} \right) - \frac{G}{\rho} \Delta p \right) = \bar{q} \quad \text{sur } \Gamma_q$$

$$p = p_0 \quad \text{sur } \Gamma_p$$

Ce qui montre que la stationarité de $J(p)$ conduit à l'équation de Reynolds généralisée et aux équations représentant les conditions aux limites sur le débit et la pression.