

وزارة الجامعات والبحث العلمي  
Ministère aux Universités et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT G. MECANIQUE

# PROJET DE FIN D'ETUDES

## SUJET

Etude d'un écoulement potentiel plan  
dans une contraction par la méthode  
des différences finies.

Proposé par :

A. ATEF

Etudié par :

S. OUISSAKADOUR

Dirigé par :

A. ATEF

PROMOTION

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المدرسة الوطنية المتعددة الفنون  
المكتبة - BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

فَالصَّلَاةُ  
وَالزَّكَاةُ  
وَالْحَجُّ  
وَالصَّوْمُ  
وَالْحَجُّ  
وَالصَّوْمُ  
وَالْحَجُّ  
وَالصَّوْمُ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ

## REMERCIEMENTS

المدسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

Pour commencer je tiens à remercier les membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'accepter de juger ce travail .

Mes remerciements vont également à mon promoteur pour son suivi et pour la confiance qu'il m'a accordé à la réalisation de ce travail .

Sans oublier tous les enseignants qui ont contribué à ma formation et qui m'ont marqué par leurs qualités scientifiques et humaines en particulier M<sup>r</sup> LE PROFESSEUR A.GAHMOUSSE .

## ملخص

تمثل هذه الدراسة في تحليل إنسياب كامن سطحي داخل مضيق .  
لقد إستعملنا الطريقة العددية للتفاضلات المنتهية . نتائجنأ مقارنة بالطريقة  
التحليلية الدقيقة ( التعويلات المطابقة لشفارز- كريستوفل ) كانت مقبولة .

\*\*\*\*\* SUMMARY \*\*\*\*\*  
This study consists on an analysis of plane potential flow  
in a contraction .We have used finite difference numerical  
method . Our results, compared with those of an exact  
analytical method (SCHWARZ-CHRISTOFFEL conformable  
transformation) were very acceptable  
\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\* RESUME \*\*\*\*\*  
Cette étude consiste en une analyse d'un écoulement  
potentiel plan dans une contraction; en utilisant la  
méthode numérique des différences finies . Les résultats,  
obtenus ont été comparés à ceux donnés par une méthode  
analytique exacte (transformation conforme de SCHWARZ-  
CHRISTOFFEL) ;un accord satisfaisant a été observé entre  
les résultats numériques et analytiques.

\*\*\*\*\*

SOMMAIRE

NOTATIONS .....1  
INTRODUCTION.....2

CHAPITRE I

NOTIONS DE CINEMATIQUE DES FLUIDES ET D'ÉCOULEMENT  
POTENTIEL.

1.1 LES ÉCOULEMENTS.....3  
1.2 l'équation de continuité.....3  
1.3 vorticité.....4  
1.5 ÉCOULEMENT POTENTIEL.....4  
fonction de courant et fonction potentiel.....5

CHAPITRE II

ANALYSE DES ÉCOULEMENTS POTENTIELS PLANS.

2.1 INTRODUCTION.....10  
2.2 SOLUTION ANALYTIQUE.....10  
2.2.1 méthode de séparation des variables.....  
2.2.2 méthode de superposition des écoulements...11  
2.2.3 méthode des variables complexes.....11  
- transformations conformes.....12  
- transformation de schwarz-cristoffel...13  
2.3 SOLUTIONS NUMÉRIQUES.....15  
2.3.1 la méthode intégrale.....15  
2.3.2 la méthode des éléments finis.....16  
2.3.3 la méthode des différences finis.....16  
2.4 SOLUTIONS EXPÉRIMENTALES.....16  
2.5 SOLUTIONS GRAPHIQUES.....17

## CHAPITRE III

### ANALYSE D'UN ECOULEMENT POTENTIEL PLAN DANS UNE CONTRACTION

3.1	BUT DE L'ETUDE.....	18
3.2	FORMULATION DU PROBLEME.....	19
3.3	RESOLUTION NUMERIQUE.....	21
3.3.1	méthode des différences finis.....	21
3.3.2	discrétisation de l'équation fondamentale...	23
3.4	MODELISATION ET MAILLAGE DE LA CONTRACTION.....	25
3.5	CONDITIONS AUX LIMITES.....	25
3.6	LES FONCTIONS DE COURANT ET LIGNES DE COURANT....	26
3.7	CALCUL DES VITESSES.....	29
3.8	DETERMINATION DE LA DISTRIBUTION DE PRESSION.....	30

## CHAPITRE IV

### RESULTATS ET INTERPRETATIONS.

4.1	REPRESENTATION DES LIGNES DE COURANT.....	34
4.2	REPARTITION DES VITESSES.....	36
4.3	DISTRIBUTION DE LA PRESSION.....	39
4.4	COMPARAISON AVEC LES RESULTATS DE LA METHODE....	41
	ANALYTIQUE.....	
	CONCLUSION.....	45
	<u>APPENDICES</u> .....	47
	<u>BIBLIOGRAPHIE.</u> .....	56

NOMENCLATURE

SYMBOLES	GRANDEURS
$V$	Vecteur vitesse
$u, v, w$	Composantes cartésiennes de $V$
$\phi$	Fonction potentiel de vitesse
$\psi$	Fonction de courant
$\omega$	Vorticité
$\rho$	Masse volumique
$Q$	Débit
$\theta$	Angle de la contraction
$\beta$	$(\Delta x / \Delta y)^2$ : Constante
$H, K, L_1, L_2,$ $L_3$	Dimensions de la contraction
$\epsilon$	Constante de précision
$C_p$	Coefficient de pression
$V_1, P_1$	Vitesse, Pression à l'entrée de la contraction
$A_1$	Hauteur de la section d'entrée
$p$	Pression
$F(z)$	potentiel complexe
$W(z)$	vitesse complexe
$u_r, u$	coordonnées polaires de $V$
$\zeta(\xi, \eta)$	variable complexe transformée de $z(x, y)$

INTRODUCTION



## INTRODUCTION

L'étude physique des écoulements d'un fluide est régie par des équations différentielles très complexes, la solution analytique du problème n'est établie que pour certains cas simples. Pour faciliter l'étude on utilise des hypothèses simplificatrices, selon les caractéristiques de l'écoulement et suivant des régions du champ d'écoulement, c'est dans ce cadre que la théorie des écoulements potentiels trouve son existence .

Malheureusement, l'étude analytique des écoulements reste assez difficile et même impossible pour des formes de conduites complexes, bien qu'elle donne une solution exacte du problème.

Par conséquent, on fait souvent recours aux méthodes numériques qui sont devenues pratiques avec le développement des calculateurs électroniques, et pour tester leur efficacité, on compare les résultats avec ceux obtenus des méthodes analytiques exactes ou des méthodes expérimentales si disponibles .

Le travail qu'on présente s'inscrit dans ce cadre, il consiste en l'analyse d'un écoulement potentiel plan dans une contraction, à l'aide d'une méthode numérique ( méthode des différences finis ), et faire une comparaison des résultats obtenus avec ceux d'une méthode analytique exacte ( transformation conforme de SCHWARZ-CHRISTOFFEL ).

CHAPITRE 1

NOTIONS DE CINÉMATIQUE DES FLUIDES  
ET D'ÉCOULEMENT POTENTIEL

## CHAPITRE 1

### NOTIONS DE CINEMATIQUE DES FLUIDES ET D'ÉCOULEMENT POTENTIEL

#### 1.1- LES ÉCOULEMENTS:

Les écoulements des fluides sont classés selon plusieurs critères; on dit que:

\* L'écoulement est stable lorsque les paramètres définissant cet écoulement sont indépendant du temps .

\* L'écoulement est unidimensionnel, bidimensionnel ou encore tridimensionnel lorsqu'il existe des composantes de la vitesse suivant une direction de l'espace, deux directions ou bien trois.

\* L'écoulement est rotationnel lorsque la particule fluide tourne autour de ses axes, centrés en son centre de gravité, dans le cas contraire, celui-ci est dit irrotationnel.

\* l'écoulement est uniforme si l'aire de la section transversale de la conduite ainsi que la vitesse moyenne ne varient pas suivant la direction de l'écoulement

\* l'écoulement est incompressible quand la densité est constante .

#### 1-2 L'EQUATION DE CONTINUITÉ (équation de conservation de masse):

L'écoulement d'un fluide incompressible satisfait à l'équation de continuité qui s'annonce comme suit:

$$\text{Div}(\vec{V})=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

V : vecteur vitesse de coordonnées cartésiennes u, v, w,

En réalité l'équation de continuité représente une loi de répartition du champ de vitesses bien définie.

### 1-3 VORTICITE:

En écoulement irrotationnel plan, la vorticité est définie par la relation :

$$\omega(x,y,t) = \text{ROT}(\vec{V}) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

la notion de vorticité est locale, car si  $\omega$  s'annule en un point, on dira qu'en ce point, l'écoulement est irrotationnel.

la vorticité est donc une notion physique liée à la particule fluide.

Il est important de signaler l'indépendance de la rotation du fluide de la notion de vorticité .

### 1-4 FLUIDE PARFAIT ( idéal):

Il est défini comme non visqueux, i.e que, les contraintes de cisaillement n'existent pas quand il est en mouvement.

### 1-5 ECOULEMENT POTENTIEL:

Les écoulements potentiels sont des écoulements irrotationnels, dont les composantes du vecteur vitesse sont des gradients d'une fonction appelée potentiel de vitesse.

Ils sont appliqués pour les fluides, incompressibles, parfaits dans le cas des écoulements irrotationnels, on peut appliquer l'équation de BERNOULLI à travers tout le champ de l'écoulement. Les variations de pression se déterminent après avoir calculé les vitesses.

Une grande partie des écoulements de fluides réels peut être simulée par l'écoulement potentiel, ce qui justifie l'étude de tels écoulements par la théorie potentielle.

Lors d'un écoulement de fluide réel dans une conduite on constate l'existence de deux régions :

- une couche de faible épaisseur, ou proche immédiat de la paroi, où la vitesse varie de zéro jusqu'à la vitesse libre du fluide, dans cette région, les phénomènes de viscosité sont prépondérants, cette couche s'appelle "couche limite".

- une région suffisamment éloignée de la paroi où l'effet de la viscosité se trouve très réduit, on peut considérer alors que le fluide est parfait et que l'écoulement est potentiel.

L'application de la théorie des fluides parfaits à cette région donne des résultats très conformes et très satisfaisants; d'où l'utilité et la nécessité de l'étude et de la compréhension du comportement d'un écoulement potentiel afin de mieux interpréter l'écoulement réel.

- Les équations différentielles du potentiel de vitesse sont linéaires et leurs solutions peuvent être calculées par superposition.

- A l'aide de l'équation de BERNOULLI, on peut établir la loi de répartition de la pression à travers tout le champ de l'écoulement.

#### Fonction de courant et fonction potentiel :

Soit  $\phi$  une fonction de deux variables réelles  $x$  et  $y$  sa différentielle s'écrit sous la forme :

$$d\phi = (\partial\phi/\partial x)dx + (\partial\phi/\partial y)dy$$

la condition que  $\phi$  existe et soit une différentielle totale exacte est :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$$

Pour un écoulement irrotationnel la vorticité  $\omega$  est nulle,

$$\omega = \text{Rot}(\vec{V}) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

d'où :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.2)$$

si l'on pose :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{et} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

La relation (1.1) est donc satisfaite, Dans ce cas  $\phi$  est appelée "potentiel des vitesses".

Les lignes équipotentiellles :

Les lignes équipotentiellles correspondent à une valeur constante de la fonction potentiel des vitesses  $\phi$ .

$\phi = \text{cst}$  il vient que  $d\phi = 0$  d'où on peut écrire :

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{u}{v} \quad \Leftrightarrow \quad u dx - v dy = 0 \quad (1.3)$$

La résolution de l'équation (1.3) nous donne les lignes équipotentiellles dans un plan .

FONCTION DE COURANT :

La fonction potentielle de vitesse, n'existe que pour

un écoulement irrotationnel, car elle est la conséquence d'une vorticité nulle.

Une deuxième fonction appelée "fonction courant" découle de l'équation de la continuité; On rencontre cette fonction dans les écoulements rotationnels et irrotationnels.

L'équation de continuité est :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

en posant :

$$u = \partial\psi/\partial y \quad \text{et} \quad v = -\partial\psi/\partial x$$

on aura :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}$$

$\psi$  : fonction de courant

Dans le cas d'un écoulement potentiel,  $\psi$  doit vérifier la condition  $\omega=0$  :

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

d'où on obtient:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0}$$

(1.4)

L'équation (1.4) représente l'équation de LAPLACE

La fonction de courant  $\psi$  est étroitement liée aux lignes de courant et au débit volumique.

Les lignes de courants correspondent à des valeurs constantes de la fonction de courant ( $\psi = \text{cte}$ ) d'où :

$$d\psi = (\partial\psi / \partial x)dx + (\partial\psi / \partial y)dy = 0$$

$$\equiv -vdx + udy = 0$$

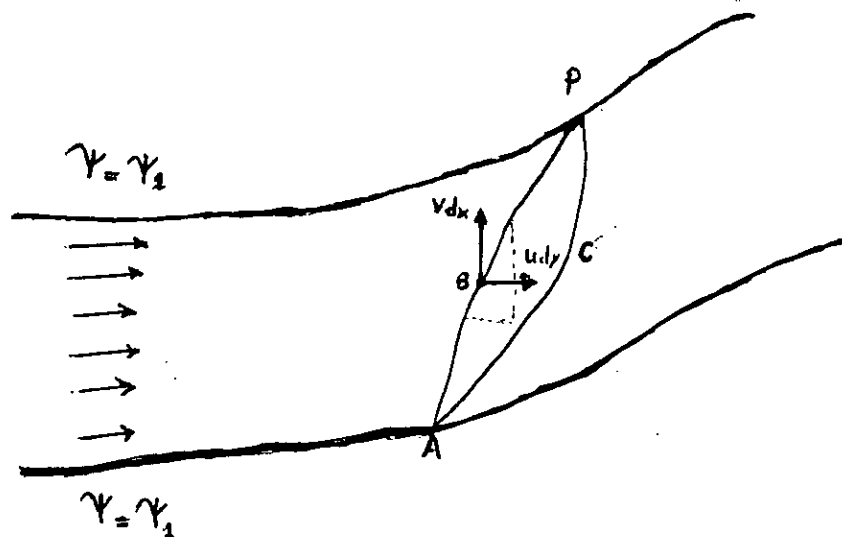
On tire l'équation d'une ligne de courant dans le plan

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\psi} = \frac{v}{u}$$

#### INTERPRETATION PHYSIQUE DE LA FONCTION DE COURANT:

-La différence entre deux lignes de courant donne le débit volumique du fluide circulant entre ces deux lignes .

-Cette assertion peut être justifiée en considérant deux lignes de courants et deux lignes ou surfaces de contrôles ,ABP et ACP (voir fig.1.1).



- fig 1.1 -



-Considérons l'écoulement à travers les courbes ABP et ACP la masse étant conservée ,le débit massique s'écrit sous la forme :

$$Q = \int_A^P \rho(udy - vdx)$$

avec

$udy - vdx = d\psi \equiv$  différentielle totale

Les courbes ABP et ACP sont arbitraires ,quelque soit le chemin emprunté entre A et P, donc :

$$\oint_A^P \rho(udy - vdx) = \oint_A^P \rho(udy - vdx)$$

Donc:

$$\int_A^P udy - vdx = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

donc:

$$Q = \int_A^P udy - vdx = \psi_2 - \psi_1 \quad [2]^*$$

\* [2] : Indique le numéro de la référence , voir bibliographie .

CHAPITRE 2

ANALYSE DES ECOULEMENTS  
POTENTIELS PLANS

## CHAPITRE 2

### ANALYSE DES ÉCOULEMENTS POTENTIELS PLANS

#### 2 - 1 INTRODUCTION

Le but de l'analyse des écoulements est de connaître la distribution des paramètres d'écoulement. On peut ainsi définir les positions des particules à tout instant (les lignes de courant), le champ des vitesses et la distribution de la pression.

Toute étude se basera généralement sur l'établissement :

- de l'équation de la continuité
- des équations de la dynamique ou les équations de mouvement
- l'équation d'énergie (s'il y a apport de chaleur, variation de température, ...)

La résolution complète du système d'équations analytiques est impossible jusqu'à nos jours, pour cela différentes techniques approximatives sont utilisées; il est plus adéquat aussi de faire intervenir le potentiel de vitesse ou la fonction de courant  $\psi$  liés directement au champ de vitesses.

#### 2 - 2 SOLUTIONS ANALYTIQUES

##### 2.2.1 METHODE DE SEPARATION DES VARIABLES

soit à résoudre :

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{avec} \quad \phi = \phi(x, y)$$

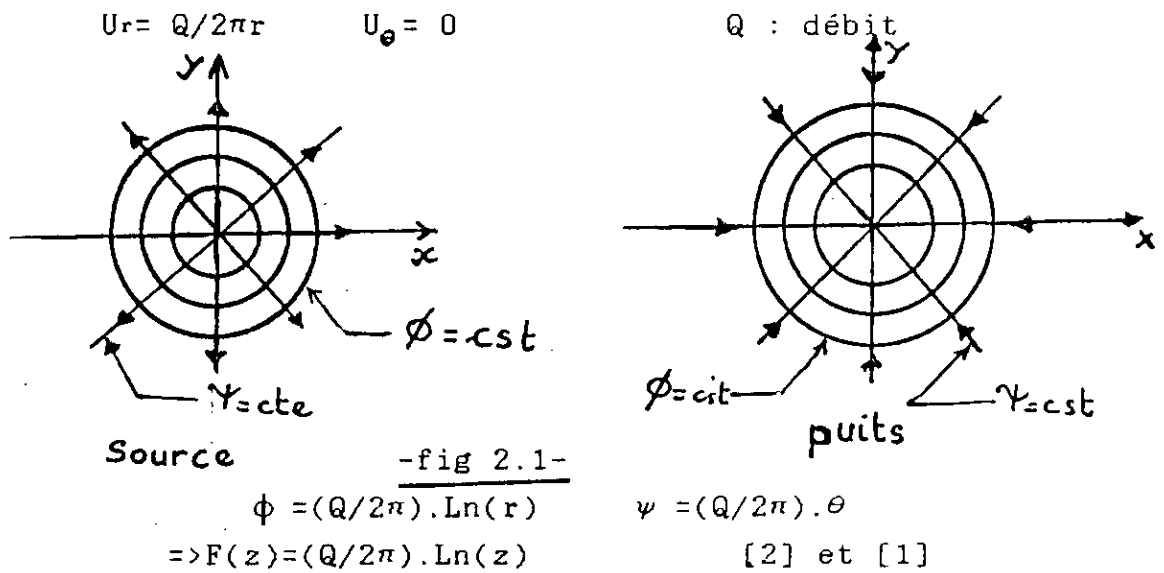
on cherche s'il existe une solution de la forme :

$$\phi(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$

En introduisant le laplacien de  $\phi$

par les expressions suivantes de  $\psi$  et  $\phi$  ;

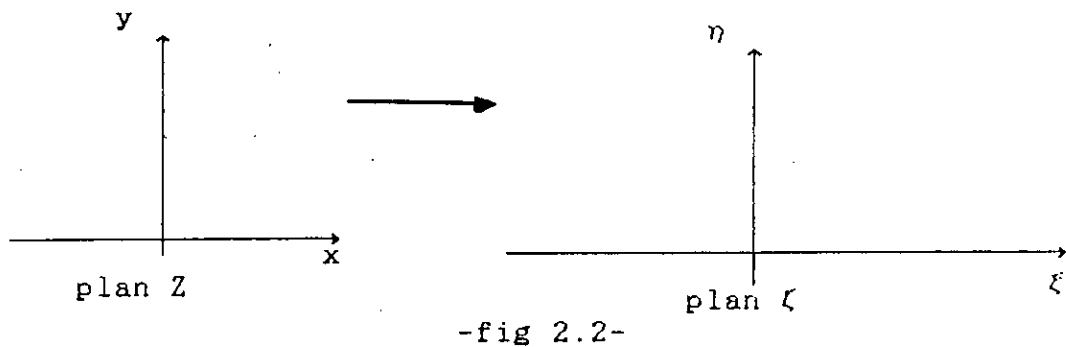
$U_r, U_\theta$  : vitesses radiale et tangentielle respectivement



Transformations conformes :

Les méthodes des transformations conformes traitent les problèmes pratiques des écoulements du fluide ,de la théorie des champs électrostatiques ,magnétiques et autres ,ainsi que la théorie de l'élasticité .

Elles permettent de transformer un écoulement inconnu pratique ,en un autre plus simple ou déjà connu



Soit  $z(x,y)$  et  $\zeta(\xi,\eta)$ :

$\zeta = g(z)$  est une fonction analytique qui fait correspondre à chaque point  $z(x,y)$  du plan réel, un point  $\zeta(\xi,\eta)$  du plan complexe, ainsi les transformés des équipotentiels et des lignes de courant forment un nouveau réseau d'équipotentiels et de lignes de courant.

Exemple :

\*  $g(z) = z+h = \zeta$  ( $h=a+i.b$ ) c'est une translation parallèle à  $h$ .

\*  $g(z) = z \cdot \exp(i.\alpha) = \zeta$  ( $\alpha$  réel) c'est une rotation autour de l'origine d'angle  $\alpha$ .

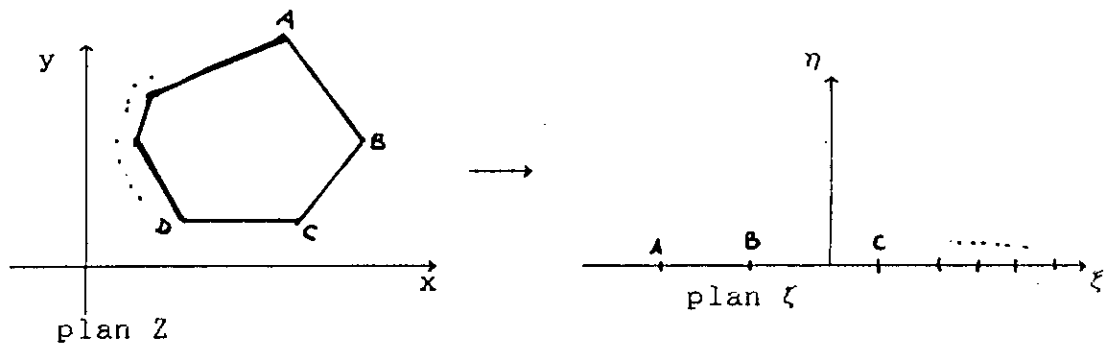
\*  $g(z) = a.z = \zeta$  ( $a = \rho \cdot \exp(i.\alpha)$ ) c'est une homothétie par rapport à l'origine et de rapport  $\rho$ , suivie d'une rotation autour de l'origine d'angle  $\alpha$ .

\*  $g(z) = -b^2/z = \zeta$  ( $b$  réel) c'est une inversion de puissance  $b^2$  par rapport à l'axe réel.

[1]

Transformation de SCHWARZ-CHRISTOFFEL :

soit deux complexes  $z=x+i.y$  et  $\zeta=\xi + i.\eta$



-fig 2.3-

Cette méthode de SCHWARZ-CHRISTOFFEL transforme l'intérieur d'un polygone à  $n$  sommets, dans le plan  $z$  en le demi-plan supérieur de  $\zeta$ , où le transformé de chaque

sommet du polygone  $M(x,y)$  est un point de l'axe réel dans le plan  $(\xi,\eta)$ .

Soient  $z_1, z_2, \dots, z_n$  les affixes respectifs de  $M_1, M_2, \dots, M_n$  sommets du polygone dans le plan  $z$ , soit  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$  les affixes de leurs transformés dans le plan  $\zeta$ .

Si  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , sont les angles au sommets intérieurs du polygone, alors la transformation qui nous permet de passer du plan  $(x,y)$  au plan  $(\xi,\eta)$  est donnée sous forme différentielle par :

$$\frac{dz}{d\zeta} = k (\zeta_1 - \zeta)^{(\alpha_1/\pi)-1} \cdot (\zeta_2 - \zeta)^{(\alpha_2/\pi)-1} \cdot \dots \cdot (\zeta_n - \zeta)^{(\alpha_n/\pi)-1}$$

[1]

où  $k$  est une constante complexe arbitraire à calculer suivant les données du problème.

Exemple :

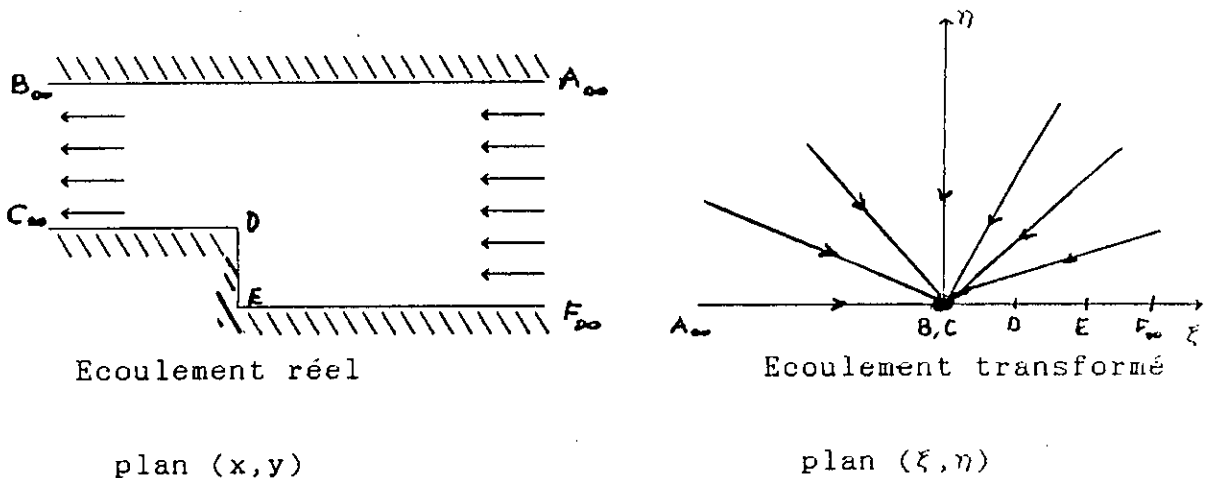


Fig. 2.4.

- La solution ainsi déterminée dans le plan  $\zeta$ , peut

être ramenée au plan réel par la transformée inverse .

- Dans le cas échéant ,cette transformation peut être paramétrée .

[1] et [2]

## 2. 3 SOLUTIONS NUMERIQUES

- Quand les écoulements potentiels comportent des frontières irrégulières ,les méthodes classiques ne permettent pas de résoudre ces problèmes de façon générale on a alors recours aux méthodes numériques .

Il existe trois approches numériques :

-Méthode intégrale avec singularités distribuées .

-Méthode des éléments finis .

-Méthode des différences finies .

### 2.2.1 LA METHODE INTEGRALE :

-Elle crée les formes du corps et les champs des écoulements en sommant un grand nombre de distributions des singularités telle que sources ,cones d'avancement ,vortex .....

Ces singularités peuvent être distribuées soit à l'intérieur ou à la surface du corps .

Les forces des singularités sont exprimées par une équation intégrale qui exprime le fait que la forme du corps doit être des lignes de courant ,par conséquent cette technique utilise des superpositions , elle ne peut être applicable pour les champs d'écoulements non linéaires tels que les couches limites ou les écoulements arbitrairement visqueux.

### 2.2.2 LA METHODE DES ELEMENTS FINIS :

- Elle est applicable pour toutes équations aux

dérivées partielles, dans le domaine de la physique ou de la technologie, elle approxime les variables inconnues (fonction de courant, potentiel de vitesse, pression, température,....), par des expressions algébriques valides pour des petites régions appelées "éléments finis", les coefficients des équations algébriques se déterminent par la minimisation des erreurs résiduelles sur tout le champ de l'écoulement .

La méthode des éléments finis fût et est encore le sujet de grands travaux de recherches en analyse numérique, cette technique bien qu'elle soit récente, elle est très utilisée .

### 2.2.3 LA METHODE DES DIFFERENCES FINIS :

- Elle approxime les dérivées partielles des équations physiques par des différences entre des valeurs nodales séparées par une distance finie .

L'équation aux dérivées partielles est donc remplacée par une série d'équations algébriques selon le nombre de noeuds .

Ces équations sont linéaires pour un écoulement potentiel et non linéaires pour les écoulements visqueux, dans la majorité des cas La solution s'obtient par itérations .

## 2. 3 SOLUTIONS EXPERIMENTALES :

### 2.3.1 METHODE ANALOGIQUE (RHEOELECTRIQUE) :

- Etant donné un milieu conducteur (électrolyte) ,on le limite par des frontières imperméables de même formes



géométriques que celle de l'écoulement qu'on veut étudier .

Des frontières sont en matière conductrice et le reste en matière non conductrice .

On relie ensuite à des sources de tension électrique constante les surfaces conductrices ,qui représentent les lignes équipotentielles de l'écoulement aux limites. Un champ de conduction électrique s'établit ainsi dans l'électrolyte qu'on peut étudier au moyen d'une sonde avec laquelle on reperera les lignes équipotentielles . En permutant les parois conductrices et isolantes on relève les lignes de courant.

#### 2.4 SOLUTIONS GRAPHIQUES

c'est une méthode qui consiste à tracer un ensemble suffisamment serré des lignes de courant et d'équipotentielles dont les côtes varient en progression arithmétique de même raison. Pour les deux familles, nous obtenons un réseau de courbes orthogonales formant des mailles assimilables à des carrés curvilignes. A partir de ce réseau on peut tracer d'autres lignes en joignant les centres des carrés (point de rencontre des diagonales), ce procédé constitue la méthode de PRASIL.

Il s'agit là d'une méthode faisant largement appel à l'habileté du dessinateur car elle nécessite de nombreuses retouches pour rectifier les tracés .

CHAPITRE 3

---

ANALYSE D'UN ECOULEMENT POTENTIEL  
PLAN DANS UNE CONTRACTION

## CHAPITRE 3

### ANALYSE D'UN ECOULEMENT POTENTIEL PLAN DANS UNE CONTRACTION

#### 3.1 BUT DE L'ETUDE :

Le but de cette étude est d'analyser un écoulement potentiel plan dans une contraction de forme géométrique particulière (voir figure 3.1) .

L'analyse consiste à déterminer la représentation des lignes de courant dans la contraction ,la répartition des vitesses et la distribution de la pression sur les parois .

L'étude d'un écoulement réel peut être faite en deux parties :

-une étude des couches limites sur les zones proches des parois (voir § 1.5) qui va tenir compte de la viscosité et des contraintes de cisaillement;c'est la théorie des couches limites,

-une étude de la région suffisamment éloignée de la paroi où on va négliger l'effet de la viscosité, le fluide peut être considéré comme parfait et on peut utiliser la théorie des écoulements potentiels,les méthodes analytiques restent assez complexes d'où le recours aux méthodes numériques .

La répartition de pression étant déterminée, donnera les conditions pour l'étude des couches limites .

Afin de mieux apprécier l'efficacité de la méthode numérique utilisée, les résultats de celle-ci seront comparés à ceux que donnerait la solution analytique exacte appliquée à ce problème. [7]

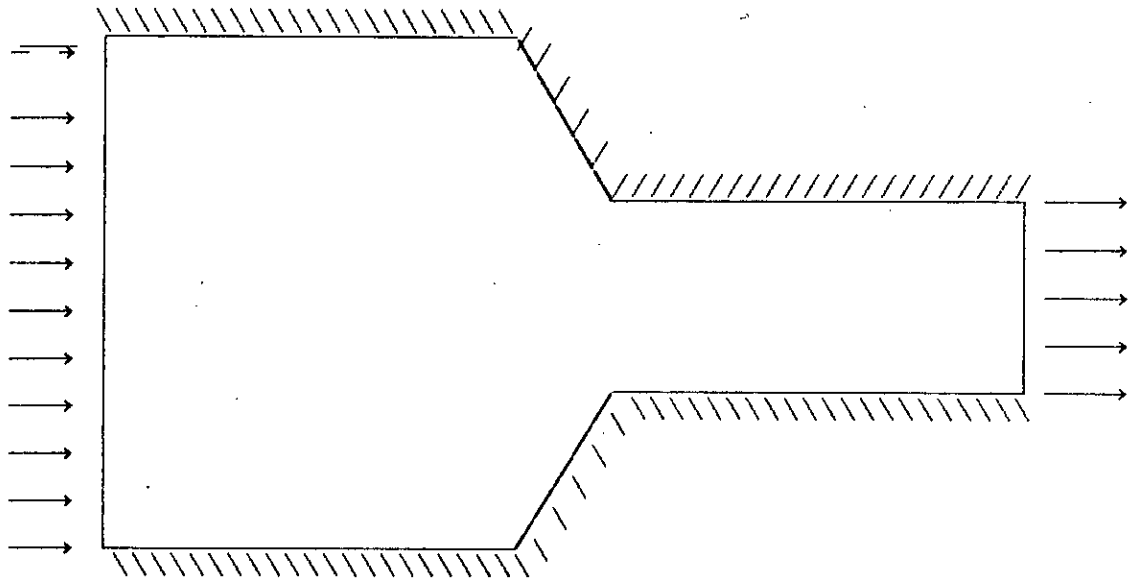


FIG 3.1 -forme de la contraction-

### 3.2.FORMULATION DU PROBLEME

A cause de la symétrie, l'étude sera faite uniquement sur la partie inférieure de la contraction.

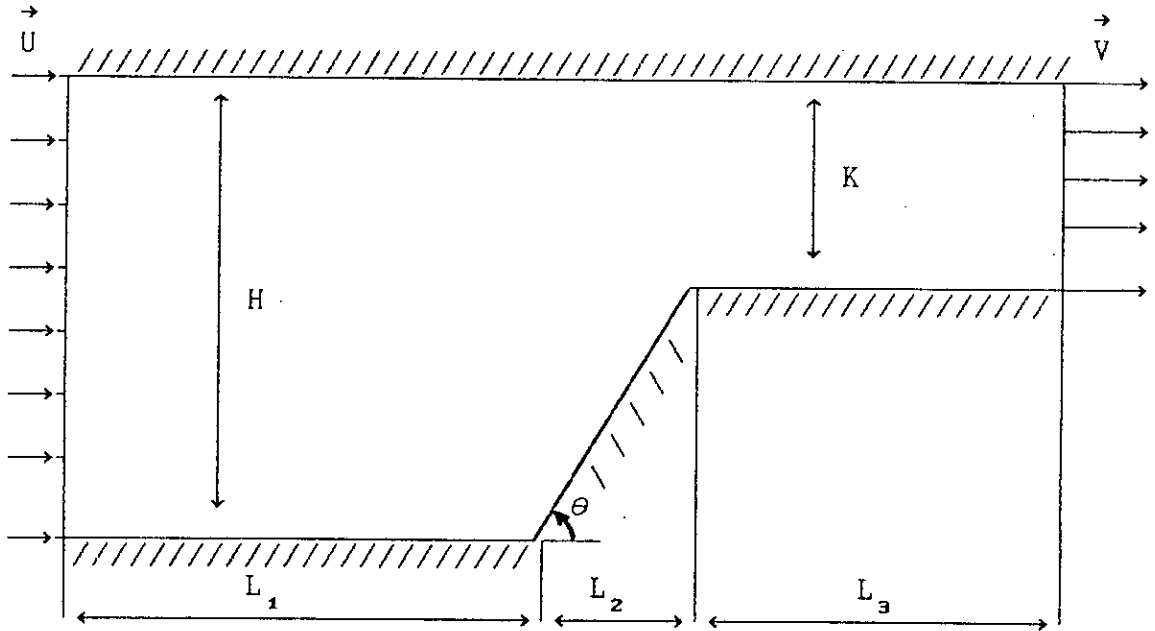
Le problème consiste en une contraction formée par deux parois solides comme le montre la figure (3.2).

On suppose que le fluide s'écoulant à travers cette contraction est un fluide parfait incompressible; ainsi, la théorie des écoulements potentiels s'appliquera parfaitement à son étude.

Le fluide abordera l'entrée de la contraction avec la vitesse uniforme  $U$ . Il en sortira avec la vitesse  $V$  uniforme et égale à  $(H/K)U$  (conservation du débit).

La géométrie de la contraction est illustrée dans la figure 3.2

$\theta$  (angle de la contraction)  $\simeq \pi/3$  (60°)  
 $L_1=1\text{m}$  ,  $L_2=0.4\text{m}$  ,  $L_3=1\text{m}$  ,  $H=1\text{m}$  ,  $K=0.3\text{m}$



-fig 3.2-

- La contraction à étudier -

L'écoulement étant bidimensionnel et potentiel, on pourra représenter les lignes de courants après avoir résolu numériquement l'équation de LAPLACE :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

Le champ des vitesses sera donné par la relation :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La répartition de la pression sur les parois peut être déduite à partir des résultats précédents (équation de BERNOULLI),  $p + (1/2)\rho V^2 + \rho g z = P_1 + (1/2)\rho V_1^2 + \rho g z_1$

Ces résultats numériques seront comparés avec ceux fournis par la solution analytique ,ainsi qu'avec les résultats de l'hypothèse d'un écoulement unidimensionnel.

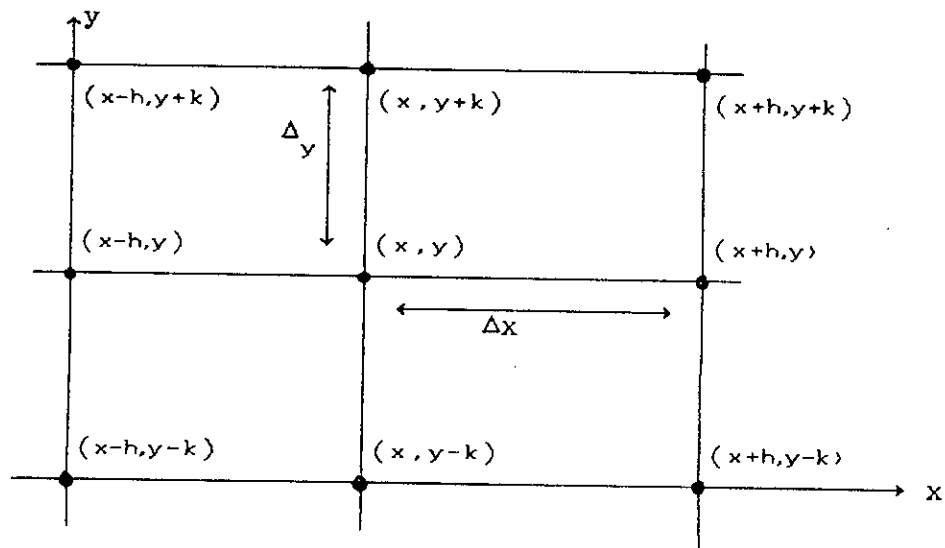
### 3.3 RESOLUTION NUMERIQUE :

#### 3.3.1 METHODE DES DIFFERENCES FINIES .

On note ici pour la simplicité,  $U=U(x,y)$  ,on suppose que U a un nombre suffisant de dérivées partielles .Les valeurs de U aux points  $(x,y)$  et  $(x+h,y+k)$  sont liées par le développement de TAYLOR (fig 3.3 ).

$$U(x+h,y+k) \simeq U(x,y) + (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}) U(x,y) + \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{2!} (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^2 U(x,y) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^{n-1} U(x,y) + R_n$$



- fig.3.3 -

- représentation du modèle discret -

La méthode est basée sur le remplacement des dérivées partielles dans l'équation différentielle par les rapports correspondants de différences finies.

Dans un repère lié à l'origine (0,0) (voir fig -3.3-)

on note :

D'après l'équation (3.1) ( $h = \Delta x$  ,  $k = \Delta y$  )

$(x, y) \equiv (i\Delta x, j\Delta y) \equiv (i, j)$

$$U(x+\Delta x, y) = U((i+1)\Delta x, j\Delta y) = U_{i+1, j}$$

$$\approx U_{i, j} + \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dots$$

$$U(x-\Delta x, y) = U((i-1)\Delta x, j\Delta y) = U_{i-1, j}$$

$$\approx U_{i, j} - \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dots$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{U_{i+1, j} - U_{i, j}}{\Delta x} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{U_{i, j} - U_{i-1, j}}{\Delta x} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i-1, j} - 2U_{i, j} + U_{i+1, j}}{\Delta x^2} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{U_{i+1, j} - U_{i-1, j}}{2\Delta x} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \approx \frac{U_{i+1, j+1} - U_{i-1, j+1} - U_{i+1, j-1} + U_{i-1, j-1}}{4\Delta x \Delta y}$$

- La méthode des différences finies est applicable pour les équations différentielles aux dérivées partielles linéaires de la forme :

$$\sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + CU + D = 0$$

On va l'appliquer pour l'équation de base dans notre étude qui est l'équation de LAPLACE, et ceci pour la détermination des dérivées partielles. [3]

### 3.3.2 DISCRETISATION DE L'EQUATION FONDAMENTALE.

- Notre équation différentielle de base est l'équation de LAPLACE:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.6)$$

- pour connaître les vitesses et les pressions le long du canal convergent, il faut avoir les valeurs de la fonction de courant  $\psi$ .

- On fait un maillage du champ de la contraction suivant le modèle de la figure 3.4.

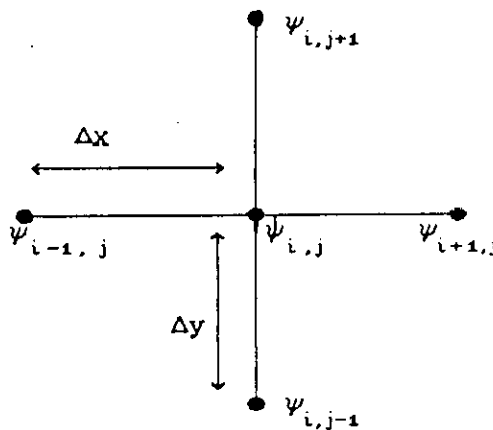


figure 3.4

- une grille d'un maillage rectangulaire -

- Le repérage des noeuds se fait par les indices  $i$  et  $j$  indiquant ainsi la position spatiale  $(x,y)$ , donc les valeurs de la fonction de courant seront :



soit  $(x_0, y_0)$  origine du repère

$$\psi_{i,j} = \psi(x_0 + i \cdot \Delta x, y_0 + j \cdot \Delta y).$$

j suivant (oy) et i suivant (ox)

l'approximation algébrique de la dérivée partielle  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  est:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \approx \frac{\psi(x + \Delta x, y) - \psi(x, y)}{\Delta x}$$

la seconde dérivée sera :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{\psi(x + \Delta x, y) - \psi(x, y)}{\Delta x} - \frac{\psi(x, y) - \psi(x - \Delta x, y)}{\Delta x} \right]$$

avec les notations indicielles on aura :

$$\frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x} [\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}]$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{i,j}}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x^2} [\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}]$$

Ces formulations sont exactes quand  $\Delta x \longrightarrow 0$ , or ce n'est pas le cas pour  $\Delta x$  fini.

De même suivant y :

$$\frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial y} \approx \frac{1}{\Delta y} [\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}]$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{i,j}}{\partial y^2} \approx \frac{1}{\Delta y^2} [\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}] \quad (3.7)$$

- Avec ces notations nos formules deviennent facilement exploitables sur ordinateur.

- En remplaçant (3.5) et (3.7) dans l'équation de LAPLACE (3.6), on obtient :

$$2(1+\beta)\psi_{i,j} \approx \psi_{i,j+1} + \psi_{i+1,j} + \beta \left[ \psi_{i,j-1} + \psi_{i-1,j} \right]$$

avec  $\beta = (\Delta x / \Delta y)^2$  qui dépend des dimensions du maillage choisi .

pour  $\Delta x = \Delta y$  , on aura  $\beta = 1$  et  $\psi_{i,j}$  sera une moyenne arithmétique de  $\psi$  aux points voisins .

$$\psi_{i,j} \approx \frac{1}{4} \left[ \psi_{i,j+1} + \psi_{i+1,j} + \psi_{i,j-1} + \psi_{i-1,j} \right] \quad (3.7)$$

### 3.4 MODELISATION ET MAILLAGE DE LA CONTRACTION .

- On recouvre notre conduite par un maillage rectangulaire ( $\Delta x, \Delta y$ ), le choix de  $\Delta x$  et  $\Delta y$  doit prendre en considération les dimensions imposées et la forme de la conduite.

- On essaie de situer les noeuds aux frontières le plus proche possible des limites de notre contraction, car sur ces noeuds qu'on va appliquer les conditions aux limites.

- On fait un maillage aussi raffiné que possible, pour une meilleure représentation du champ de l'écoulement.

Le maillage de la contraction est illustrée sur la figure (3.5).

- Pour les données indiquées sur la figure (3.2) précédente on a choisi :  $\Delta x = \Delta y = 0.05$  m donc 49 noeuds suivant (ox) et 21 noeuds suivant (oy) (figure.3.5) .

### 3.5 CONDITIONS AUX LIMITES .

- Pour commodité et aussi pour référence , on suppose que la fonction de courant  $\psi(x,y)$  est nulle le long de la paroi inférieure .

Or le débit du fluide rentrant

$$Q = U.H = 10.1.0 = 10 \text{ m}^2/\text{s} \text{ par unité de largeur}$$

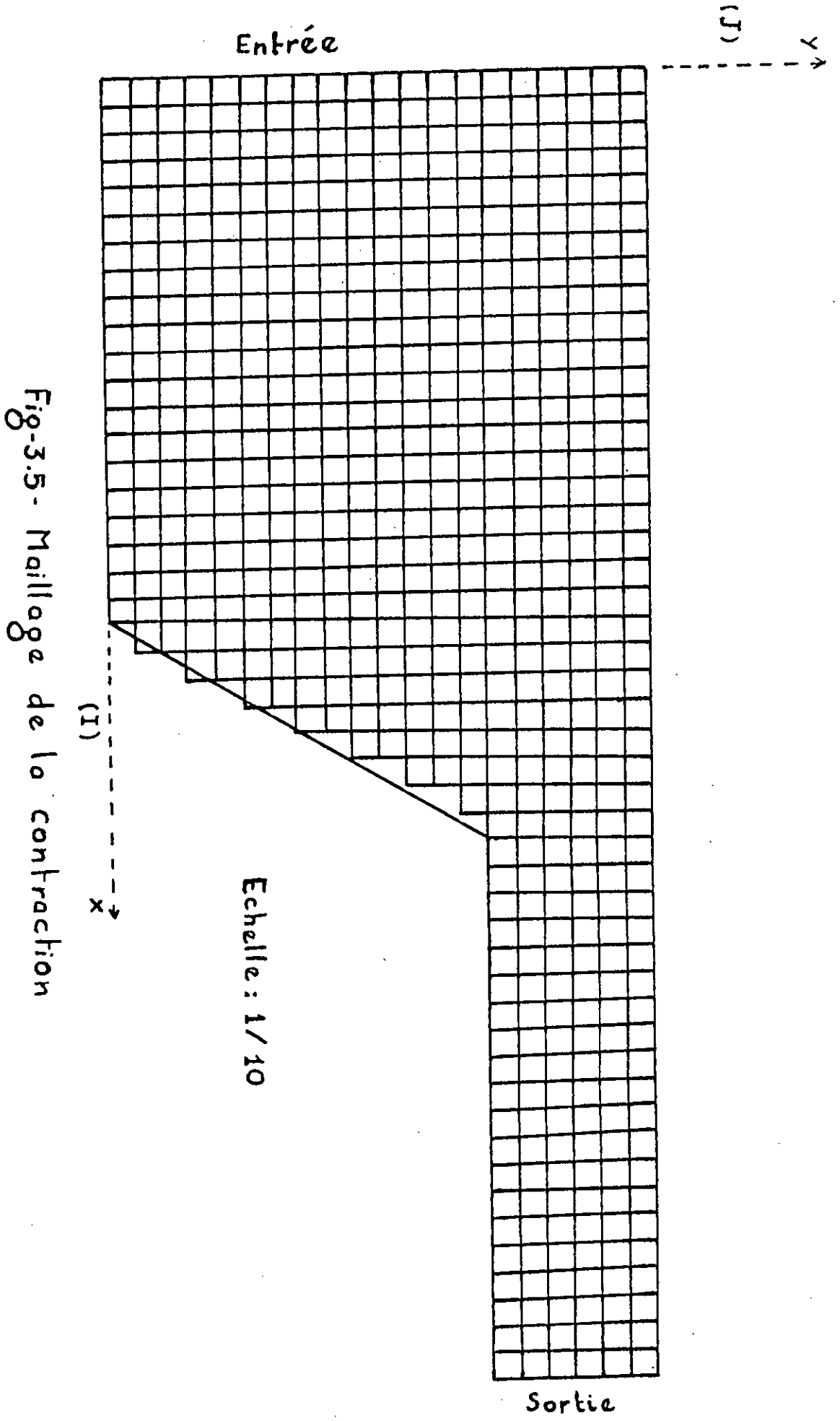


Fig-3.5 - Maillage de la contraction

Echelle : 1/10

et  $\psi(x,y)$  sur la paroi supérieure sera donc

$$Q = \psi_2 - \psi_1.$$

Avec :  $\psi_2$  sur la paroi supérieure

et  $\psi_1$  sur la paroi inférieure

Or

$$\psi_1 = 0$$

$$\text{Donc } \psi_2(i,j) = Q = 10 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\psi(i,j) = 10 \text{ sur la paroi supérieure}$$

$$\psi(i,j) = 0 \text{ sur la paroi inférieure}$$

Il existe aussi des conditions aux limites à l'entrée et à la sortie d'après la supposition d'un écoulement uniforme, la fonction de courant est répartie linéairement entre les parois inférieures et supérieures .

Ces conditions aux limites seront utilisées pour le calcul des fonctions de courant  $\psi(x,y)$ .

### 3.6 LES FONCTIONS DE COURANT ET LES LIGNES DE COURANT :

- la formule algébrique :

$$2(1+\beta)\psi(i,j) \simeq \psi(i,j+1) + \psi(i+1,j) + \beta[\psi(i,j-1) + \psi(i-1,j)].$$

où  $\beta = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2$  dépend des dimensions de la maille .

- pour notre cas :  $\beta = 1.$  (  $\Delta x = \Delta y$  )

- l'équation deviendra :

$$\psi(i,j) \simeq 1/4 [\psi(i,j+1) + \psi(i,j-1) + \psi(i-1,j) + \psi(i+1,j)] \quad (3.7)$$

-Le calcul des  $\psi(i,j)$  se fait avec un processus itératif sur l'équation (3.7) .

- On aura  $n$  boucles , où dans chaque boucle on calcule  $\psi(i,j)$  à l'aide de l'équation (3.7) pour tous les noeuds intérieurs.

-  $n$  dépend de la précision imposée entre la valeur de

$\psi(i,j)$  calculée à l'itération (k-1) et celle calculée à l'itération k.

- Pour notre cas la précision est  $\epsilon = 10^{-3}$ .

- les valeurs initiales de  $\psi(i,j)$ , ont été choisies avec une variation linéaire dans le domaine de 0 à  $10 \text{ m}^2/\text{s}$ , Ceci pour accélérer la convergence .

- Le programme qui calcule les valeurs nodales de  $\psi(i,j)$  est élaboré en langage Fortran 77 (voir l'appendice), on présentera l'organigramme dans la figure (3.7). Le nombre d'itérations a atteint 128.

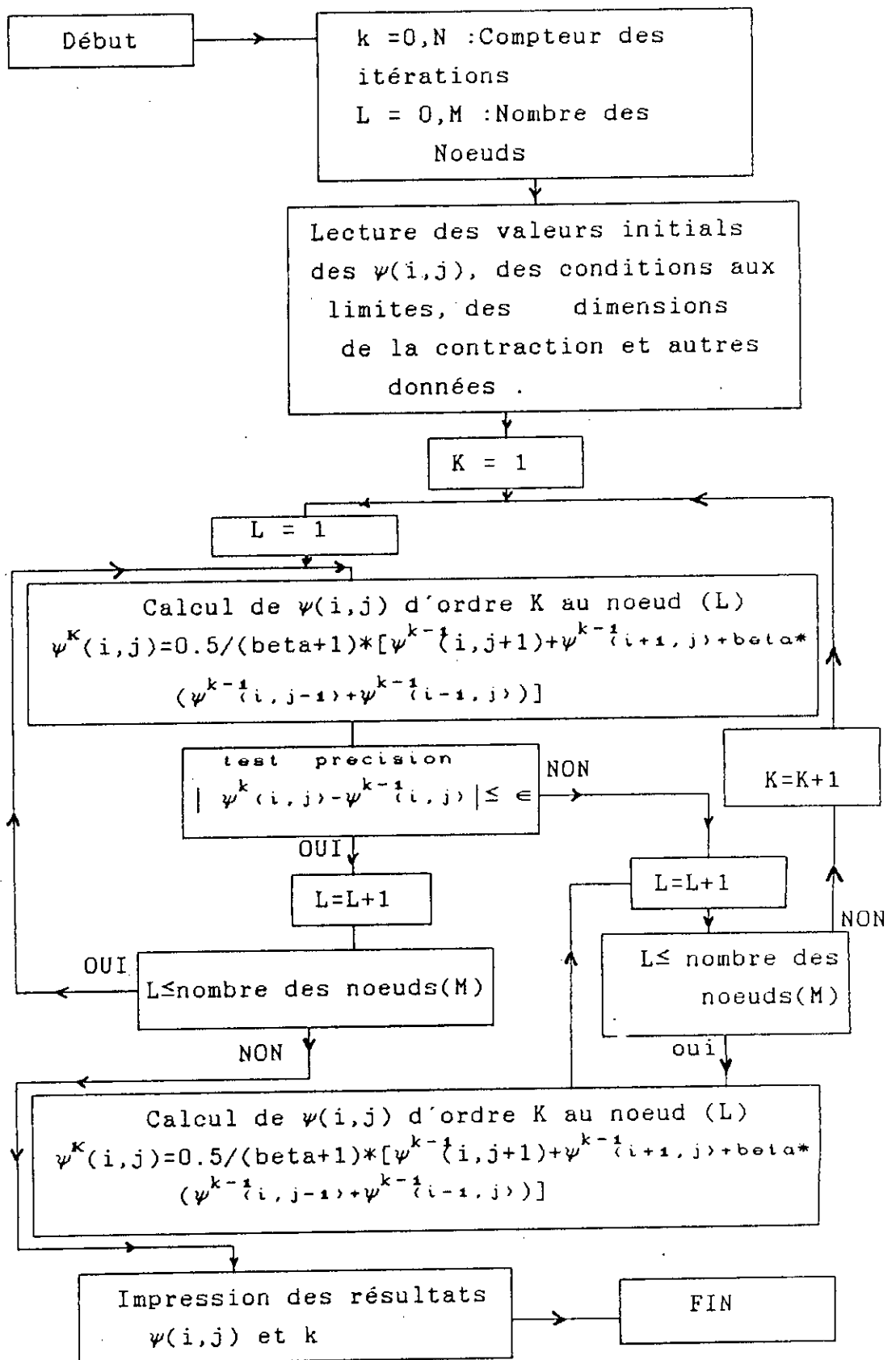


Fig-3.7- Organigramme de calcul des  $\psi(i,j)$  aux points nodaux

- les résultats numériques des valeurs de la fonction de courant  $\psi(i,j)$  obtenus, peuvent être exploités pour dégager des résultats pratiques pour l'ingénieur.

- Dans notre cas on va utiliser ces résultats pour représenter les lignes de courant, qui vont faciliter l'interprétation de l'écoulement et aussi pour déterminer le champ des vitesses et la distribution des pressions dans la contraction.

### 3.7 CALCUL DES VITESSES :

- Pour calculer la pression sur les parois supérieures et inférieures nous avons besoin de la connaissance des valeurs de la vitesse à travers le champ de l'écoulement .

les vitesses suivant  $x$  et  $y$  sont exprimées par :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

on a utilisé la méthode de la centrée pour les noeuds internes

$$u(i,j) \simeq \frac{\psi(i,j+1) - \psi(i,j-1)}{2 \cdot \Delta y}$$

$$v(i,j) \simeq \frac{\psi(i-1,j) - \psi(i+1,j)}{2 \cdot \Delta x}$$

-Calcul du module de la vitesse résultante au noeud :

$$V(i,j) = [u(i,j)^2 + v(i,j)^2]^{1/2}$$

- Calcul de l'angle d'orientation de la vitesse:

$$\theta(i,j) = \text{Arctang}\left(\frac{v(i,j)}{u(i,j)}\right) \quad [\text{radian}]$$

- On fait un programme qui calcule  $u(i,j)$ ,  $v(i,j)$  et

{ $V(i,j)$  module et l'angle  $\theta(i,j)$ }, il est présenté en appendice (voir aussi organigramme figure(3.8) ).

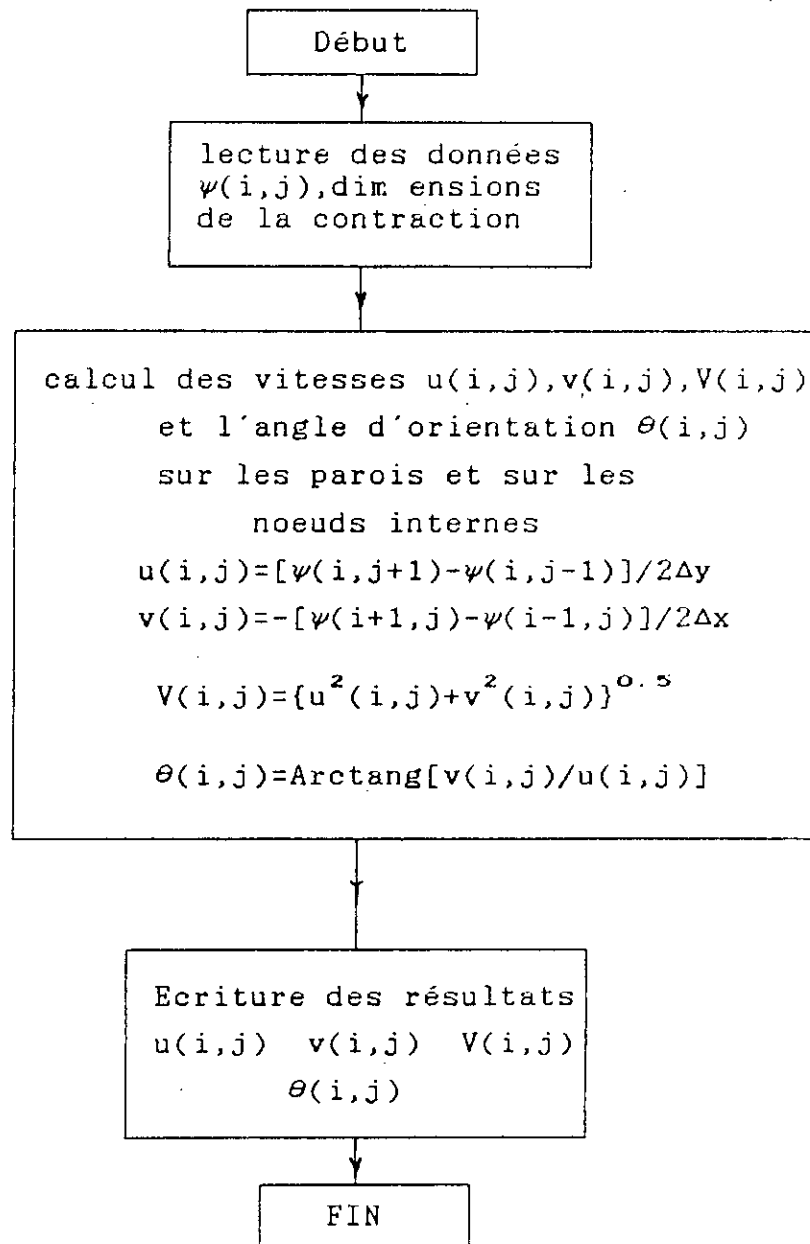


Fig-3.8-  
- Organigramme pour la détermination-  
du champ des vitesses

### 3.8 DETERMINATION DE LA DISTRIBUTION DE PRESSION:

- Une autre fonction nécessaire comme donnée dans l'analyse des couches limites sur les parois est la distribution de pression le long de ces parois .



- Si on note  $P_1$  et  $V_1$  : la pression et la vitesse à l'entrée ( $j = 1$ ) .

en appliquant l'équation de BERNOULLI et en négligeant l'effet de la gravitation; la pression se calcule en chaque point par :

$$P(i,j) + 1/2\rho V^2(i,j) = P_1 + 1/2\rho V_1^2$$

- On peut exprimer  $P$  en un coefficient adimensionnel et on aura :

$$C_p = \frac{p(i,j) - P_1}{1/2 \rho V_1^2} = 1 - \left[ \frac{V(i,j)}{V_1} \right]^2$$

$C_p$  : coefficient de pression

- Donc on aura besoin des valeurs de la vitesse précédemment calculées .

le programme établi est présenté en appendice, il calcule la pression le long des parois inférieures et supérieures, et aussi la distribution de la pression pour une approximation unidimensionnelle de l'écoulement , en utilisant l'équation de continuité .  $V_1.A_1 = V(x). A(x)$  par unité de largeur où  $A(x)$  représente la hauteur de la contraction dans la section qui a pour abscisse  $x$  .

le coefficient de pression unidimensionnel sera :

$$C_p(\text{unidi}) = 1 - (A_1/A(i,j))^2.$$

On présente l'organigramme dans la figure (3.9) .

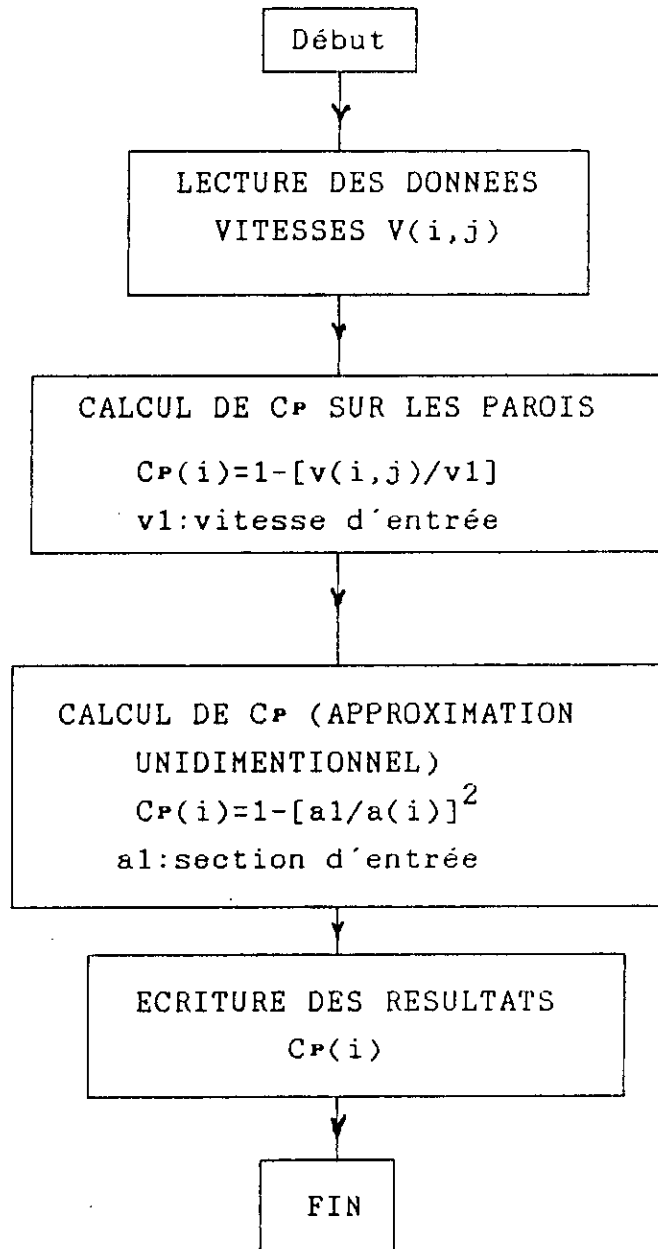


Fig -3.9-  
organigramme pour le calcul  
de la distribution de pression.

CHAPITRE 4.

RESULTATS ET INTERPRETATIONS.

## CHAPITRE 4

### RESULTATS ET INTERPRETATIONS.

#### 4.1. REPRESENTATION DES LIGNES DE COURANT.

On rappelle que le long d'une ligne de courant, la fonction de courant  $\psi$  est constante .

Pour tracer les différentes lignes de courant qui existent dans un champ d'écoulement plan, c'est à dire pour  $\psi = \text{cst}$  (exemple  $\psi = 1, 2, 3, 4, \dots$ ), on a utilisé un logiciel appelé <surfer>, qui détermine les positions de ( $\psi = \text{cst}$ ) par interpolation entre les valeurs de  $\psi$  calculées aux noeuds et il trace par suite la courbe reliant ces points ( fig 4.1 ) .

On remarque que les lignes de courant sont courbées en amont et en aval des régions voisines des coins (voir figure .4.1.), et surtout dans la région proche de la paroi inférieure , ceci indique clairement que l'écoulement est bidimensionnel, le champ des vitesses est non uniforme (voir fig.4.2) et aussi l'existence de gradients de pression dans la conduite).

Les lignes de courant  $\psi = 0$  et  $\psi = 10$  représentent la forme de la contraction, vu que idéalement il y'a glissement du fluide au niveau des parois .

La déformation des lignes de courant indique l'existence :

- des vitesses à deux composantes ( $u, v$ ), (écoulement bi-dimensionnel).
- un gradient de pression pour devier l'écoulement et déformer les lignes de courant .
- ces déformations existent avant même d'atteindre la contraction, ceci a pour cause l'existence d'un gradient de pression anticipé .

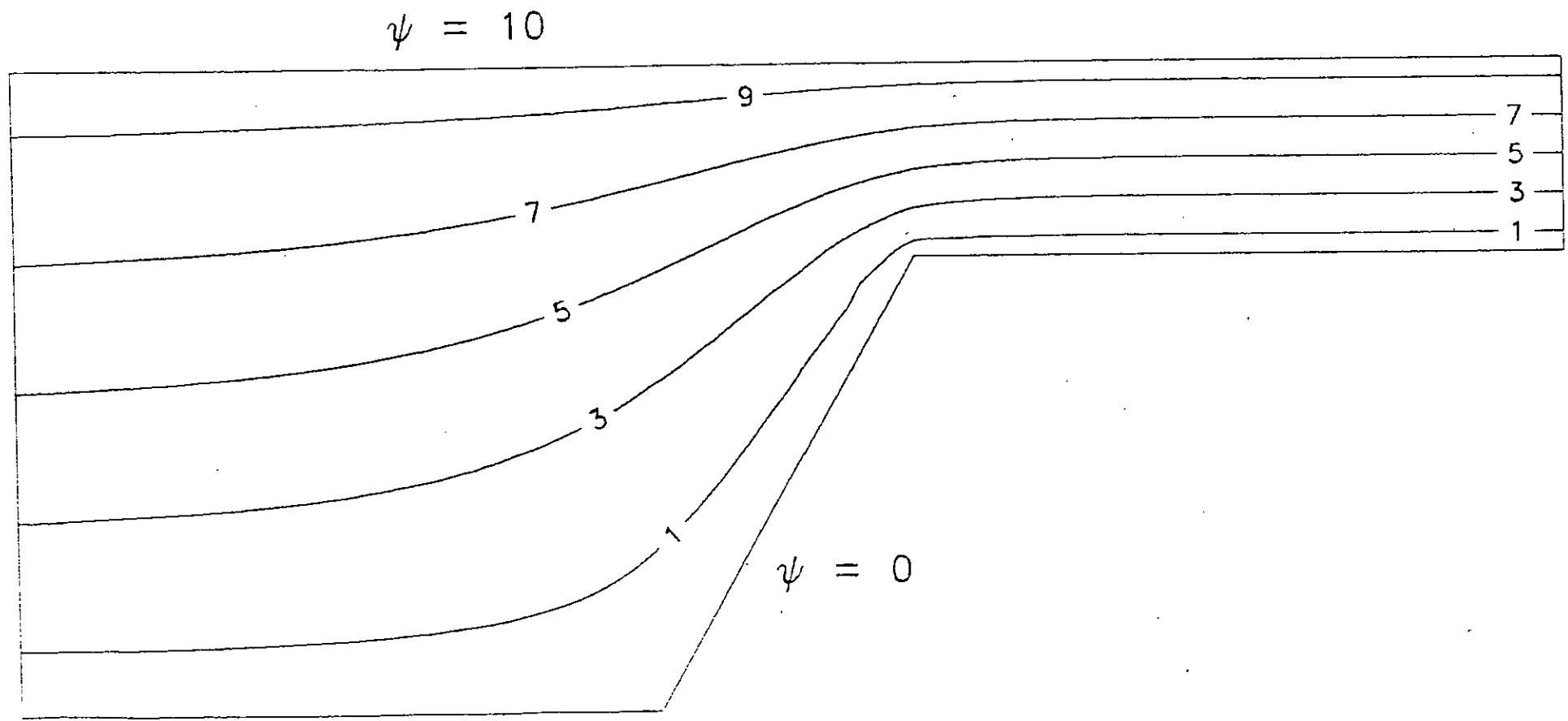


Fig. -4.1-  
Representation des Lignes de Courant

## 4.2. REPARTITION DES VITESSES

---

Le graphe de la répartition des vitesses sur tout le domaine de la contraction a été réalisé à l'aide du logiciel <SURFER>, qui à partir des vitesses (module et direction) calculées aux noeuds, a permis de représenter sur le graphe le sens, le module et la direction des vecteurs vitesses avec l'échelle indiquée (voir fig 4.2).

Sur le graphe de la répartition des vecteurs vitesses (figure 4.2) on voit clairement la variation du module et de la direction des vitesses, ce qui montre l'aspect bidimensionnel de l'écoulement.

Les vecteurs vitesses sont déviés avant d'arriver à la partie convergente, ceci a pour cause l'existence d'un gradient de pression, les vitesses à la sortie sont uniformes.

Sur la zone proche de la paroi supérieure, l'augmentation des vitesses est régulière et monotone.

La zone proche de la paroi inférieure est très perturbée, à l'entrée il y a une décélération et la vitesse atteint la valeur minimale au premier coin, ce dernier est un point singulier (voir figure 4.3), avant ce point il y a une augmentation de pression ce qui engendre un ralentissement de l'écoulement, or ceci n'est pas désiré puisque la contraction est destinée à accélérer l'écoulement, on peut conclure qu'une entrée courte et courbée en ce coin est conseillée.

Après ce premier coin c'est à dire dans la zone convergente, on a une accélération qui devienne très brusque au second coin, il est aussi un point singulier (figure 4.3), juste après on a un gradient important de pression et défavorable qui, ce qui engendre un décollement automatique de la couche limite dans le cas réel.

Un bord arrondi en ce coin va certainement améliorer la situation.

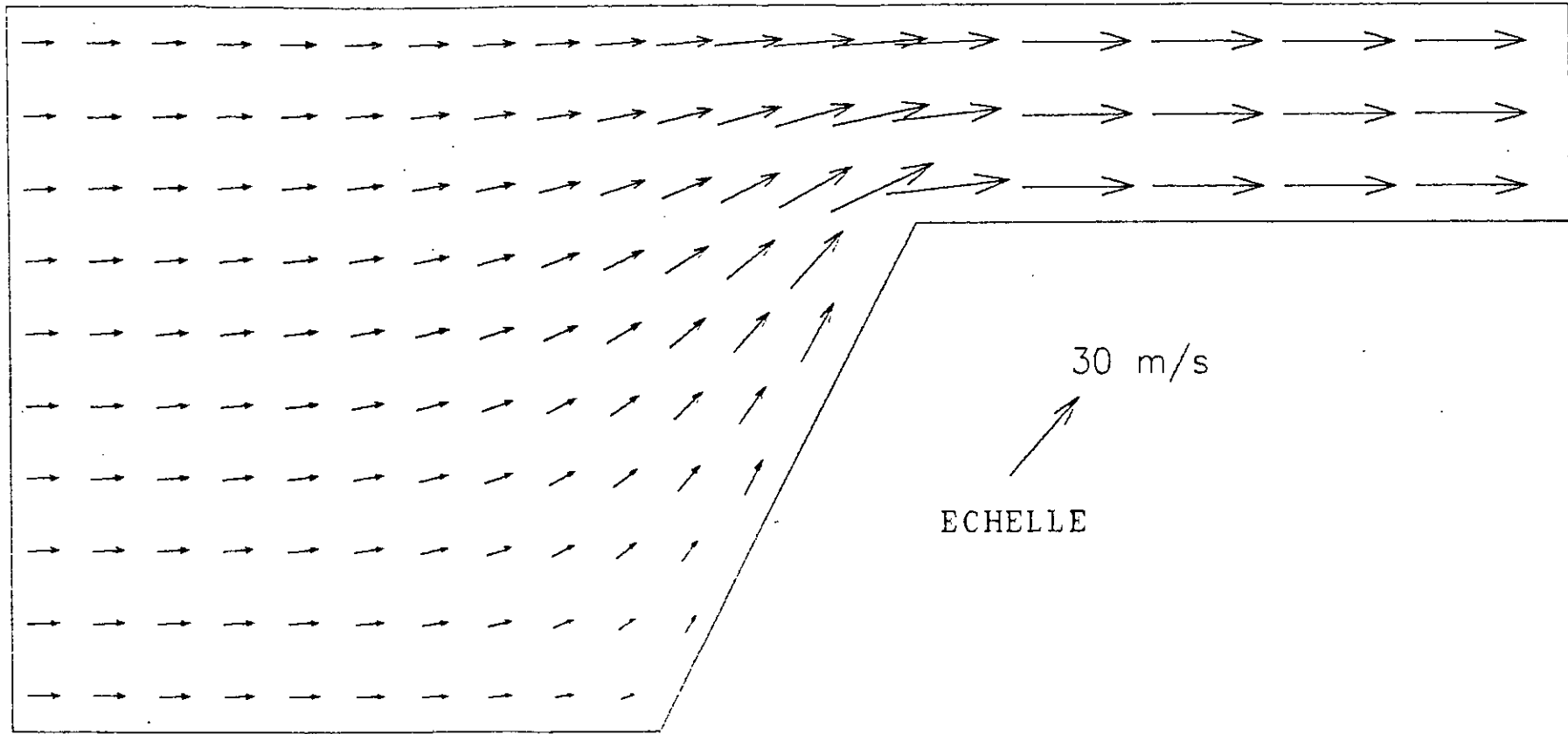
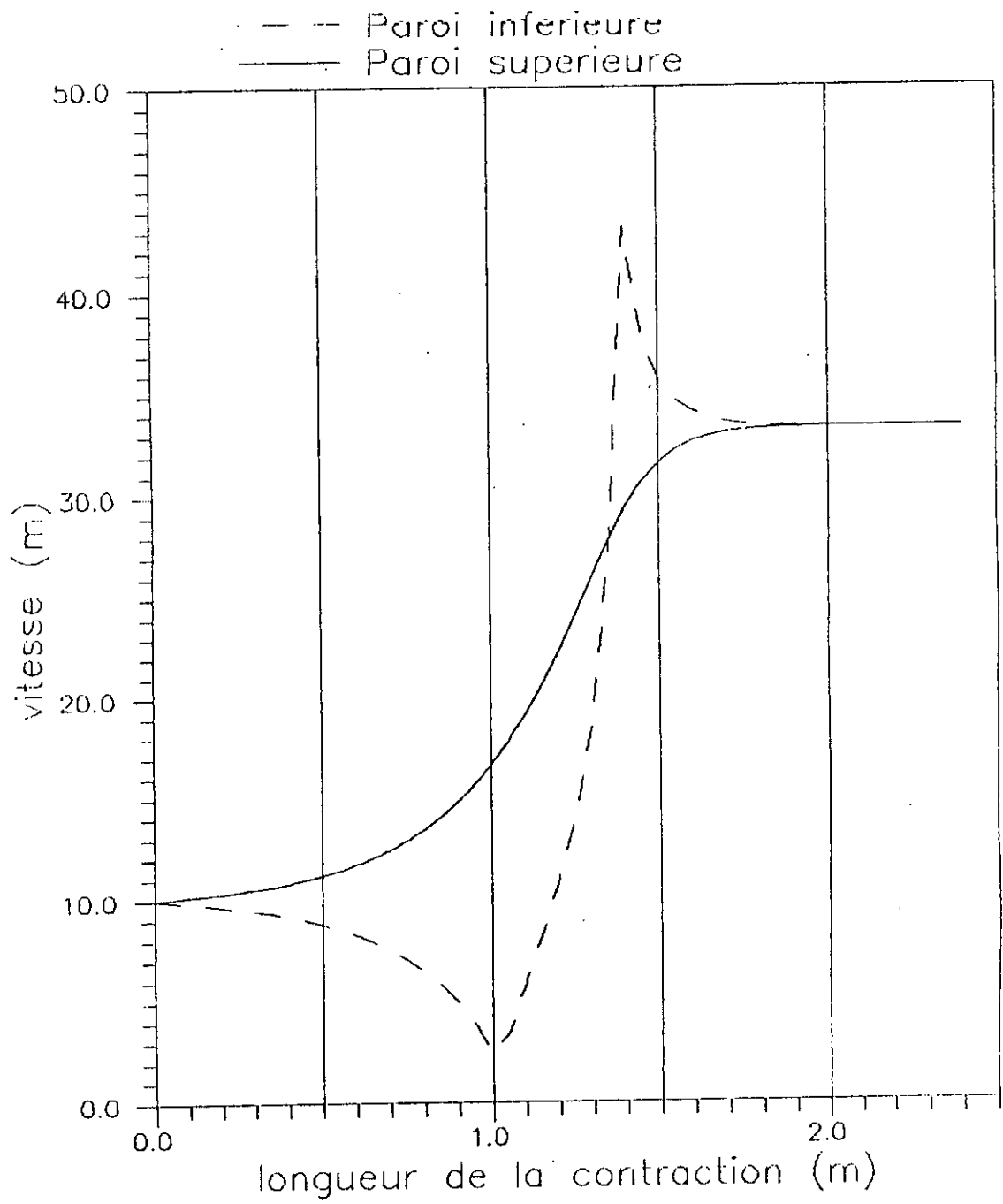


Fig. -4.2-  
Repartition des Vecteurs Vitesses



Fig(4.3)  
 repartition des vitesses  
 sur les parois



#### 4.3. DISTRIBUTION DE LA PRESSION .

Le graphe de la variation du coefficient de pression  $C_p$

[  $C_p = \frac{P - P_1}{(1/2)\rho V_1^2}$  avec  $P_1$  et  $V_1$ , conditions à l'entrée ] en

fonction de la longueur du canal a été calculé pour la paroi inférieure et la paroi supérieure et pour une approximation unidimensionnelle (voir figure 4.4).

En analysant ce graphe , on remarque qu'il y'a une grande différence entre la variation de  $c_p$  sur la paroi supérieure et la paroi inférieure .

Sur la paroi supérieure la variation du coefficient de pression  $C_p$  est monotone (continuellement décroissante), donc une détente et une accélération du fluide tout au long de cette paroi.

Sur la paroi inférieure, le coefficient de pression  $C_p$  subit trois évolutions différentes :

- dans la section d'entrée, la pression augmente pour atteindre son maximum au premier point ( $V = V_{min}$ ), dans cette zone on a un gradient de pression défavorable, d'où le risque de décollement de la couche limite . Pour éviter cet effet, on recommande une entrée très courte , et une contraction rapide (convergent brusque ), avec un coin arrondi .

- Une détente brusque dans la partie convergente, et la pression atteint son minimum en second coin , une compression rapide juste en aval de ce point causera certainement un décollement de la couche limite, et des perturbation qui engendrent des pertes, on propose que ce coin sera plus arrondi .

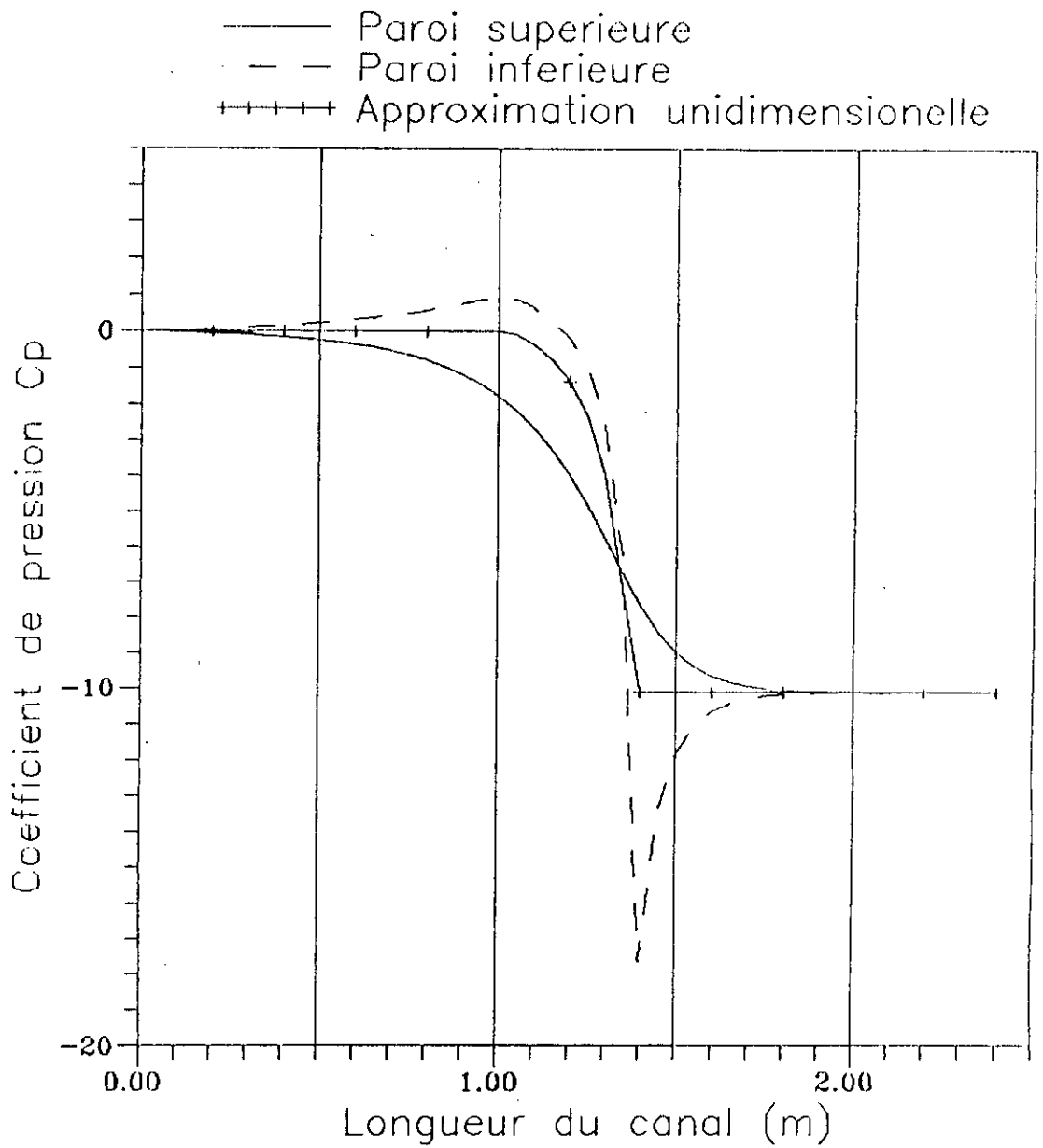


Fig-4.4-  
Distribution du coefficient Cp  
le long du canal

- Au delà de ce deuxième coin, un accroissement brusque de la pression favorise le risque de décollement de la couche limite, pour y remédier, on propose une section de sortie plus longue pour que la compression soit plus régulière, et la vitesse plus uniforme à la sortie .

- en ce qui concerne la représentation unidimensionnelle (fig.4.4), on voit clairement que la courbe représentative de la répartition de pression ne peut approximer les deux autres, de même nature, relatives aux parois supérieure et inférieure et plus particulièrement cette dernière : donc une conception de la contraction ne peut être représentée avec une approximation à une dimension.

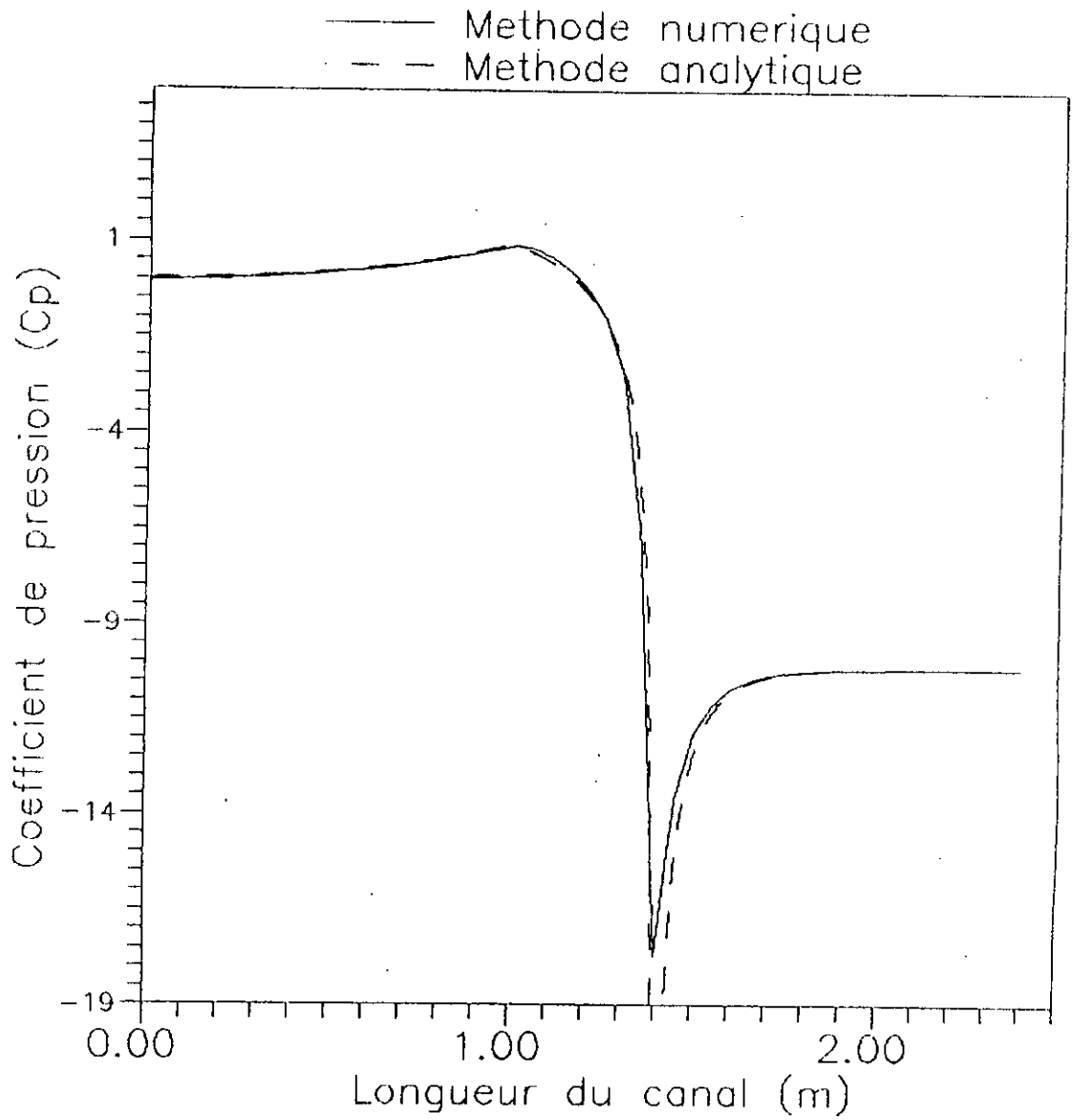
#### 4.4.COMPARAISON DES RESULTATS OBTENUS

##### PAR LES METHODES ANALYTIQUE ET NUMERIQUE.

-La méthode analytique, utilisée pour la comparaison était celle des variables complexes ( transformation conforme de SCHWARZ CHRISTOFFEL, voir 2.2.3 ). [1,5,2]

-Concernant les résultats analytiques obtenus par cette méthode, une étude détaillée est mentionnée en ref [7] .

- On a ramené les résultats de cette méthode appliquée à la même contraction et on a fait une superposition des deux courbes de la répartition de la pression sur les parois ( voir figure 4.5 et 4.6 ).



- Fig. 4.5 -

Repartition de la pression  
sur la paroi inferieure

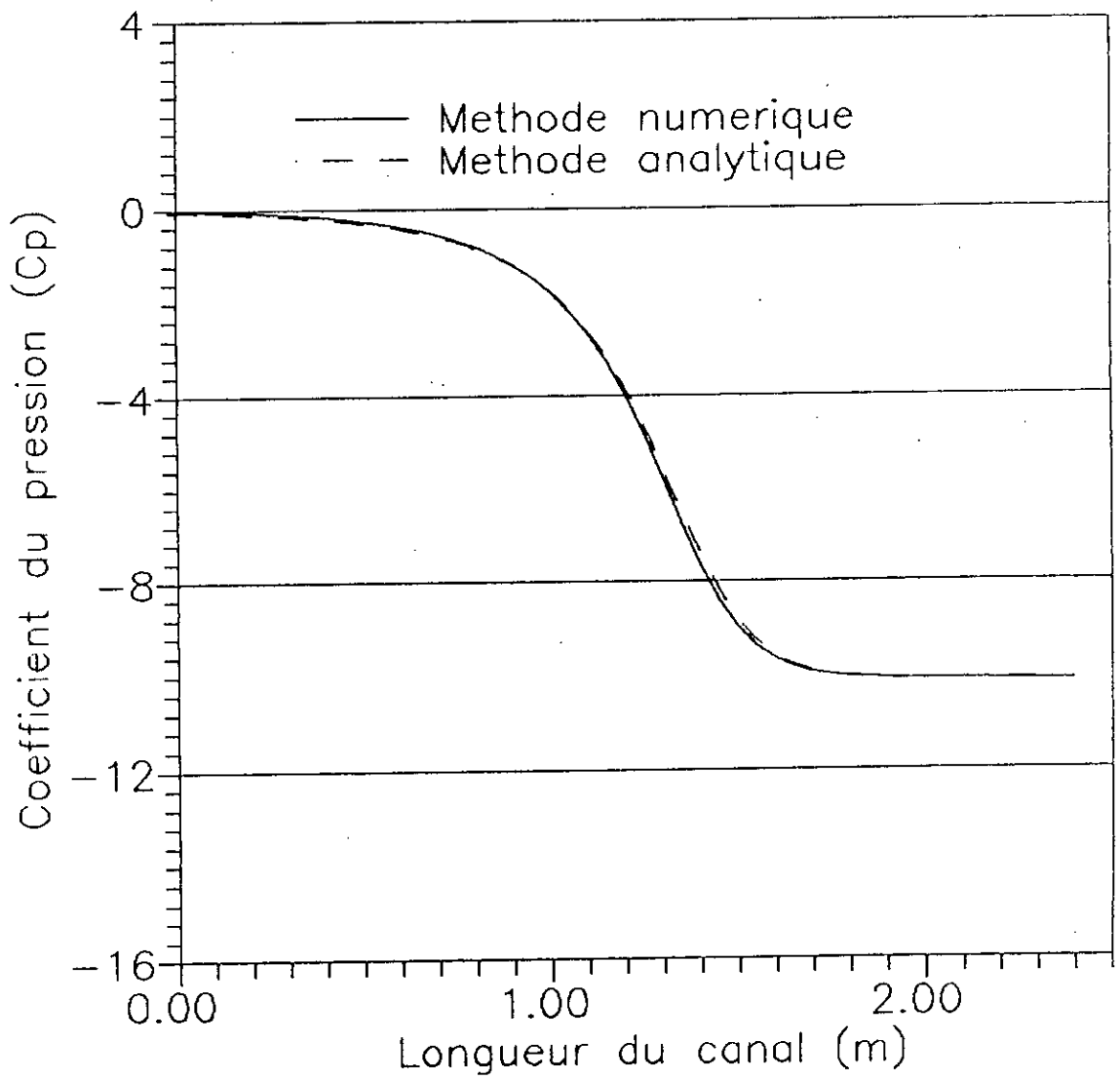


Fig-4.6-  
 Repartition de la pression  
 sur la paroi superieure

- On remarque que les courbes sont très proches, ce qui prouve que la méthode numérique des différences finies est convenable, efficace et très intéressante, car ses résultats sont satisfaisants .

- Pour la figure (4.5) de la paroi inférieure, les deux courbes sont quasiment confondues sauf au deuxième coin, ceci a pour cause le maillage qui n'était pas très fin, ni même la l'approximation des frontières n'était bonne, et par conséquent, on n'a pas eu la valeur exacte de  $C_p$  pour ce point, un maillage très fin ne peut qu'améliorer la situation .

- La méthode numérique a donné des résultats très satisfaisants, d'où son efficacité bien qu'elle soit simple ,pratique, universelle et son temps de calcul est très court .

## CONCLUSION

Cette étude a montré que la méthode numérique des différences finies est très efficace, pratique, simple et rapide pour l'étude des écoulements potentiels, en plus elle s'adapte aisément à n'importe quelle forme de la conduite; elle est donc universelle.

Elle permet d'obtenir des résultats avec un degré acceptable de précision. D'où son importance comme un moyen alternatif aux méthodes analytiques qui ne sont capables de donner des solutions exactes que pour quelques cas simples, ceci en plus de leurs difficultés d'applications.

Aussi on doit citer l'importance de la théorie potentielle, du moment qu'elle a contribué énormément dans la simplification de l'étude de l'écoulement.

Dans notre cas de la contraction, en utilisant la théorie des écoulements potentiels, on a étudié le comportement de l'écoulement dans la zone qui n'est pas en contact direct avec les parois.

Toute-fois cette recherche doit être complété par une étude des couches limites, dont la participation de notre étude permet déjà de connaître la distribution de la pression sur les parois, qui est nécessaire à une telle étude comme facteurs d'influence.

Les résultats qu'on a obtenu ont montré :

-l'aspect bi-dimensionnel de l'écoulement représenté par les lignes de courant et la distribution des vitesses

-La différence très nette dans le comportement de l'écoulement entre la paroi supérieure et la paroi inférieure; sur la première l'écoulement est régulier, la pression diminue graduellement et la vitesse augmente de la même façon, tandis que sur la seconde, l'écoulement est très perturbée et elle se compose de trois phases :

- A l'entrée l'écoulement est décélérée (ralentissement) ce qui n'est pas désirée et la vitesse atteint son minimum d'une façon brusque au premier coin (point de stagnation) . [7]

- Dans la partie convergente l'écoulement est accéléré mais on a un gradient de pression très grand au second coin ce qui engendre un décollement certain de la couche limite dans le cas réel .

- A la sortie l'écoulement est décéléré, on a une compression brusque, ce qui peut causer des perturbations à l'écoulement .

- Enfin la représentation unidimensionnelle nous montre qu'on ne peut approximer l'écoulement par une telle simplification .

Il est donc important de tenir compte de tous ces éléments dans la conception de la contraction ; où il est conseillé d'avoir une entrée courte suivie d'une contraction rapide et une sortie plus longue, et les arêtes vives doivent être remplacé par des arrondis .





APPENDICES

```

ce programme 'val' prépare les
valeurs initiales et les conditions
aux limites, ces résultats seront
stokeés dans un fichier data
'don2.dat', et ils seront utilisées
pour le calcul des valeurs
de la fonction de courant 'psi',
le fichier donné : 'don1.dat'
c      ***** lecture données *****
      dimension psi(100,100)
ceccc  psi :fonction de courant
ceccc  L1,L2,L3,K,H:sont des dimensions du canal
ceccc  U:vitesse d'entree, dx,dy:pas du maillage
      real k,l1,l2,l3
      open(unit=6,file='don1.dat',status='unknown')
      open(unit=7,file='don2.dat',status='unknown')
      print*, 'on lit les données'
      read(6,*) dx,dy,h,k,l1,l3,u,l2
ceccc  beta:constante
      beta=(dx/dy)**2
      x1=((l1+l2+l3)/dx)
ceccc  m,m1,m2,n,n1:nombres des noeuds
      m=x1+1
      x2=(l1/dx)
      m1=x2+1
      x3=((l1+l2)/dx)
      m2=x3+1
      x4=(h/dy)
      n=x4+1
      x5=((h-k)/dy)
      n1=x5+1
      write(6,*) m,m1,m2,n,n1
c      ***** calcul des psi initials *****
      do 40 i=1,m1
      do 20 j=1,n
psi(i,j)=(j-1)*u*dy
20    continue
40    continue
      do 80 i=m1+1,m2-1
      mm=2*(i-m1)
      do 60 j=mm,n
psi(i,j)=(j-mm)*u*(n-1)/(n-mm)*dy
60    continue
80    continue
      do 120 i=m2,m
      do 100 j=n1,n
psi(i,j)=(j-n1)*dy*u*h/k
100   continue
120   continue
      do 300 i=1,m1
      do 200 j=1,n
write(7,*) i,j,psi(i,j)
200   continue
300   continue
      do 540 i=m1+1,m2-1
      m1=2*(i-m1)
      do 541 j=m1,n
ceccc  impression des resultats *****
write(7,*) i,j,psi(i,j)
541   continue
print*, 'qsd'

```

```
540  continue
      print*, 'wxc'
      print*, 'm2=', m2
      print*, 'mm=', mm
      do 86 i=m2, m
        print*, 'aze'
        do 87 j=n1, n
          write(7,*) i, j, psi(i, j)
87      continue
        print*, 'ghj'
86      continue
      stop
      end
```

```

c      le programme "psi7" calcule les fonctions
c      de courant "psi(i,j)"
c      à travers le champ de l'écoulement par la
c      méthode des différences finis :
c      'don1.dat', 'don2.dat':entrées des données
c      'res.dat':fichier résultat des 'psi(i,j)'
c
c      -----
c      logical verif
c      teta:l'angle du convergant
c      psi :fonction de courant
c      L1,L2,L3,K,H:sont des dimensions du canal
c      U:vitesse d'entrée, dx,dy:pas du maillage
c      beta:constante
c      m,m1,m2,n,n1:nombres de noeuds
c      real l1,l2,l3,dx,dy,h,k,teta,u
c      integer n,n1,m,m1,m2
c      dimension psi(100,100)
c      open(unit=6,file='don1.dat',status='unknown')
c      open(unit=7,file='don2.dat',status='unknown')
c      open(unit=9,file='don3.dat',status='unknown')
c      open(unit=8,file='res.dat',status='unknown')
c      -----
c      lecture data -----
c      print*, 'on lit les données'
c      read(6,*) dx,dy,h,k,l1,l3,u,l2,m,m1,m2,n,n1
c      print*,l2,m,m1,n
c      print*, 'lire psi'
c      do 20 i=1,m
c      if (i.le.m1) then
c      m1=1
c      else if(i.lt.m2) then
c      m1=2*(i-m1)
c      else
c      m1=n1
c      endif
c      do 10 j=m1,n
c      read(7,*) nn,nnn,psi(i,j)
c      print*, i,j,psi(i,j)
c      10 continue
c      20 continue
c      beta=(dx/dy)**2
c      -----
c      *****partie calcul*****
c      -----
c      ki:nombre d'itérations
c      ki=0
c      verif=.false.
c      -----
c      test sur la précision -----
c      58 if (.not.verif) then
c      print*, 'not'
c      verif=.true.
c
c      do 40 i=2,m-1
c      if (i.le.m1) then
c      ms=2
c      else if(i.lt.m2) then
c      ms=2*(i-m1)+1
c      else
c      ms=n1+1
c      endif
c      do 30 j=ms,n-1
c      if(verif) then
c      -----
c      calcul avec test -----
c      w=psi(i,j)
c      psi(i,j)=0.5/(beta+1)*(psi(i,j+1)+psi(i+1,j)+
c      1 beta*(psi(i,j-1)+psi(i-1,j)))
c      -----
c      test sur la précision -----

```





```

      jj=2*(i-m1)
do 100  j=jj+2,n-1
      uu(i,j)=(psi(i,j+1)-psi(i,j-1))/(2*dy)
      vv(i,j)=-((psi(i+1,j)-psi(i-1,j))/(2*dx))
      ang(i,j)=(atan(vv(i,j)/uu(i,j)))*180./ppi
      vit(i,j)=sqrt(uu(i,j)**2+vv(i,j)**2)
100  continue
cccccccccccccccccccccc petit canal ccccccccccccccccccccccc
      else if(i.eq.m2-1) then
      jr=2*(i-m1)
do 105  j=jr+1,n-1
      uu(i,j)=(psi(i,j+1)-psi(i,j-1))/(2*dy)
      vv(i,j)=-((psi(i+1,j)-psi(i-1,j))/(2*dx))
      ang(i,j)=(atan(vv(i,j)/uu(i,j)))*180./ppi
      vit(i,j)=sqrt(uu(i,j)**2+vv(i,j)**2)
105  continue
      else
      vit(i,n1)=(psi(i,N1+1)-psi(i,n1))/dy
      ang(i,n1)=0.

do 110 j=n1+1,n-1
      uu(i,j)=(psi(i,j+1)-psi(i,j-1))/(2*dy)
      vv(i,j)=-((psi(i+1,j)-psi(i-1,j))/(2*dx))
      ang(i,j)=(atan(vv(i,j)/uu(i,j)))*180./ppi
      vit(i,j)=sqrt(uu(i,j)**2+vv(i,j)**2)
110  continue
endif
90  continue
cccccccccccccccccccccc fin calcul ccccccccccccccccccccccc
cccccccccccccccccccccc print resultat ccccccccccccccccccccccc
do 130 ji=2,m-1,2
      x=(ji-1)*dx
      if (ji.le.m1) then
      md=1
      else if(ji.lt.m2-1) then
      md=2*(ji-m1)+2
      else if(ji.eq.m2-1) then
      md=2*(ji-m1)+1
      else
      md=n1
      endif
do 140 j=md+1,n-1,2
      y=(j-1)*dy
      write(9,*) x,y,vit(ji,j),ang(ji,j)
140  continue
130  continue
print*, 'fin'
stop
END

```





```

uu(i,j)=(psi(i,j+1)-psi(i,j-1))/(2*dy)
vv(i,j)=- (psi(i+1,j)-psi(i-1,j))/(2*dx)
ang(i,j)=(atan(vv(i,j)/uu(i,j)))*180./ppi
vit(i,j)=sqrt(uu(i,j)**2+vv(i,j)**2)
120   continue
cccccccccccccccccccccccccccc canal convergent ccccccccccccccccccccccccc
else if(i.lt.m2-1) then
  jj=2*(i-m1)
  do 100  j=jj+2,n-1
    uu(i,j)=(psi(i,j+1)-psi(i,j-1))/(2*dy)
    vv(i,j)=- (psi(i+1,j)-psi(i-1,j))/(2*dx)
    ang(i,j)=(atan(vv(i,j)/uu(i,j)))*180./ppi
    vit(i,j)=sqrt(uu(i,j)**2+vv(i,j)**2)
100   continue
cccccccccccccccccccccccccc petit canal ccccccccccccccccccccccccccccccc
else if(i.eq.m2-1) then
  jr=2*(i-m1)
  do 105  j=jr+1,n-1
    uu(i,j)=(psi(i,j+1)-psi(i,j-1))/(2*dy)
    vv(i,j)=- (psi(i+1,j)-psi(i-1,j))/(2*dx)
    ang(i,j)=(atan(vv(i,j)/uu(i,j)))*180./ppi
    vit(i,j)=sqrt(uu(i,j)**2+vv(i,j)**2)
105   continue
else
  vit(i,n1)=(psi(i,N1+1)-psi(i,n1))/dy
  ang(i,n1)=0.
do 110 j=n1+1,n-1
  uu(i,j)=(psi(i,j+1)-psi(i,j-1))/(2*dy)
  vv(i,j)=- (psi(i+1,j)-psi(i-1,j))/(2*dx)
  ang(i,j)=(atan(vv(i,j)/uu(i,j)))*180./ppi
  vit(i,j)=sqrt(uu(i,j)**2+vv(i,j)**2)
110   continue
endif
90   continue
do 200 ii=m1+1,m2-2
  jj=2*(ii-m1)
  vit(ii,jj)=vit(ii-1,jj)
  ang(ii,jj)=ang(ii-1,jj)
  vit(ii,jj+1)=vit(ii-1,jj+1)
  ang(ii,jj+1)=ang(ii-1,jj+1)
200   continue
  jf=2*(m2-1-m1)
  vit(m2-1,jf)=vit(m2-2,jf)
  ang(m2-1,jf)=ang(m2-2,jf)

cccccccccccccccccccccccccc fin calcul ccccccccccccccccccccccccccc
cccccccccccccccccccccccccc
cccccccccccccccccc calcul pression ccccccccccccccccccccccccccc
do 400 i=1,m
  v1=10.
  a1=1.
  x=(i-1)*dx
  cp(i)=1-(vit(i,n)/v1)**2
  if(i.le.m1) then
    md=1
  else if(i.le.m2-1) then
    md=2*(i-m1)
  else
    md=n1
  endif
  print*, 'i md', i, md
  cp1(i)=1-(vit(i,md)/v1)**2
  a(i)=a1-(md-1)*dy
  cp2(i)=1-(a1/a(i))**2

```



REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE

- [1] R.L.PANTON ,WILEY & SONS , 'Incompressible flow' ,1984.
- [2] REUBEN.M.OLSON , 'Essentials of engineering fluid'  
third ed. Intext Educational Publishers NEW YORK.
- [3] BRICE CARNAHAN ,H.A.LUTHER ,JAMES O.W.ILKES ,  
WILEY & SONS inc., 'Applied Numericals Methods' ,  
NEW YORK 1969.
- [4] F.M.WHITE ,MC GRAW-HILL , 'Fluid Mechanics' ,1986.
- [5] L.M.MILNE THOMSON 'Theoretical Hydrodynamics'  
5<sup>th</sup> ed. Macmillan New York 1968 .
- [6] M.H.VAVRA 'Aerothermodynamics and Flow in  
Turbomachines'.Jhon WILEY & sons inc  
NEW YORK 1960 .
- [7] H.ARAR ,N.SI-CHAIB , 'Etude comparative d'un écoulement  
potentiel plan dans une  
contraction' ,Projet de fin  
d'études ,en USTHB I.G.MECANIQUE ,Promotion juillet 92