

## Ecole Nationale Polytechnique

### Département de Génie-Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## Thèse de Magister

Option : Construction Mécanique

Présentée par : **Boulahia Ramdane**  
Ingénieur d'état en Génie-Mécanique  
(Ecole nationale polytechnique)

---

### Vibro-isolation optimale d'un véhicule des effets du profil de la route

(Application au Camion K-66 SNVI Rouiba)

---

Soutenue le 07 Mai 1995 devant le jury composé de:

MM. M.A.Ait-Ali  
M.Ksiazek  
M.Boukabache  
N.Louam  
S.Rechak  
M.C.Souami

Professeur E.N.P  
Assistant professeur E.P Cracovie (Pologne)  
Maître de conférence E.N.P  
Maître de conférence E.N.P  
Professeur E.N.P  
Ph,D E.N.P

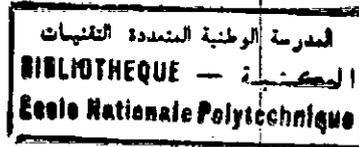
Président  
Rapporteur  
Examinateur  
Examinateur  
Examinateur  
Examinateur

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

Département de Génie-Mécanique



Thèse de Magister

Option : Construction Mécanique

Présentée par : Boulahia Ramidane  
Ingénieur d'état en Génie-Mécanique  
(Ecole nationale polytechnique)

---

Vibro-isolation optimale d'un véhicule des effets  
du profil de la route

(Application au Camion K-66 SNVI Rouiba)

---

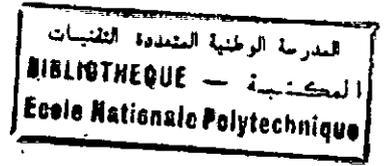
Soutenue le 07 Mai 1995 devant le jury composé de:

MM. M.A.Ait-Ali  
M.Ksiazek  
M.Boukabache  
N.Louam  
S.Rechak  
M.C.Souami

Professeur E.N.P  
Assistant professeur E.P Cracovie (Pologne)  
Maître de conférence E.N.P  
Maître de conférence E.N.P  
Professeur E.N.P  
Ph,D E.N.P

Président  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur  
Examineur

## DEDICACES



A ma mère et à mon père

A ma femme

A mes frères et soeurs

A tous ceux que j'aime

## REMERCIEMENTS



Ce travail de thèse a été proposé et dirigé par Monsieur **M.KSIAZEK** qui était enseignant au département de Génie-mécanique de l'ENP, actuellement assistant Professeur à l'institut de construction des machines de l'Ecole Nationale Polytechnique de Cracovie (Pologne).

Je lui suis très reconnaissant de m'avoir guidé et orienté dans mon travail de Magister.

J'adresse mes remerciements à Monsieur **M.AIT-ALI**, Professeur au département de Génie-mécanique de l'ENP, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Que Monsieur **N.LOUAM**, Maître de conférence au département d'électronique de l'ENP, reçoive ici l'expression de plus vive reconnaissance pour l'aide et les conseils qu'il m'a prodigués. Je le remercie vivement pour sa constante disponibilité et pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de participer à ce jury.

J'exprime mes plus vifs remerciements à Monsieur **S.RECHAK**, professeur au département de Génie-mécanique de l'ENP, pour ces qualités humaines, pour la confiance qu'il m'a porté et pour avoir accepté de participer à ce jury.

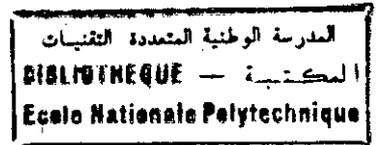
Monsieur **M.C.SOUAMI**, Maître de conférence au département de Génie-électrique; m'a fait l'honneur de siéger à ce jury. Qu'il trouve ici le témoignage de ma reconnaissance.

Que Monsieur **M.BOUKABACHE**, Maître de conférence au département de Génie-mécanique de l'ENP, soit vivement remercié d'avoir accepté de participer à ce jury.

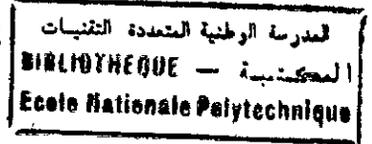
Mes remerciements vont aussi à Monsieur le Professeur **J.NEZIOL** Recteur de l'institut de construction des machines de l'Ecole Polytechnique de Cracovie (Pologne) de m'avoir accueilli dans son institut.

Je ne peux manquer de remercier mes amis **H. BENNOUR** et **AEK. MOUSSAOUI** pour leur aide et leur soutien qui m'ont permis la réalisation de cette thèse.

Enfin je ne saurais oublier l'ensemble des enseignants du département de Génie-mécanique et du département Génie-électrique de l'ENP. Je remercie particulièrement mes amis et collègues, de l'institut de Génie-mécanique de l'USTHB, qui ont su faire régner une ambiance sympathique sans laquelle ces années de travail auraient été tristes.



# TABLE DES MATIERES



## INTRODUCTION GENERALE

1

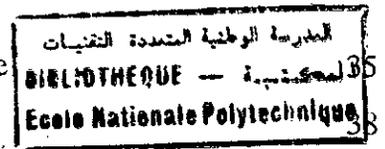
## CHAPITRE 1. MODELISATION MATHEMATIQUE DU PROFIL DE LA ROUTE

1.1. Introduction	8
1.2. Classification des profils de routes	8
1.3. Densité spectrale du profil de la route	8
1.4. Densité spectrale spatiale et temporelle	9
1.5. Bande de fréquence du profil de la route	13
1.6. Simulation d'un échantillon du profil de la route à partir de la DSP	16

## CHAPITRE 2. MODELISATION MATHEMATIQUE DU SYSTEME

2.1. Introduction	18
2.2. Le modèle mathématique	18
2.3. Coordonnées généralisées	19
2.4. Equations de Lagrange	24
2.5. Equations différentielles de mouvement	26
2.6. Détermination des forces généralisées appliquées au système	26
2.7. Représentation du système sous la forme d'état	27
2.7.1. Introduction	27
2.7.2. Représentation sous la forme d'état du système	28
2.8. Performances du camion K-66 avec les paramètres de la suspension passive donnés par la SNVI	30
2.8.1. Performance du camion K-66 sur une route à profil de type bruit blanc intégré	30
2.8.2. Performance du camion K-66 sur une route à profil de type bruit blanc filtré	34

- 2.8.3. Caractéristiques fréquentielles du véhicule
- 2.9. Conclusion



### CHAPITRE 3. APERÇU SUR LES DIFFERENTS TYPES DE SYSTEMES DE SUSPENSION DE VEHICULES

3.1. Introduction	40
3.2. Système de suspension passive conventionnelle	40
3.3. Système de suspension active	42
3.4. Système de suspension semi-active	43
3.5. Système de suspension active à commande pré-informée	44

### CHAPITRE 4. ETUDE DE L'EFFICACITE DES DIFFERENTS TYPES DE SUSPENSION SUR LES PERFORMANCES DU CAMION K-66 SNVI ROUIBA

4.1. Introduction	47
4.2. Détermination des paramètres de la suspension pour une route à profil de type bruit blanc intégré	48
4.3. Détermination des paramètres de la suspension pour une route à profil de type bruit blanc filtré	48
4.4. Algorithme de simulation	52
4.5. Etude des performances du camion K-66 sur une route à profil de type bruit blanc intégré	53
4.5.1. Détermination des paramètres optimaux du système de suspension passive	53
4.5.2. Détermination des paramètres optimaux du système de suspension active	58
4.5.3. Etude de l'efficacité d'un système de suspension semi-active	64
4.6. Performance du véhicule pour différents types de suspension sur une route à	

profil de type bruit blanc filtré	68
4.7. Caractéristiques fréquentielles du véhicule avec les différents types de suspension	70
4.8. Etude des performances du système de suspension active à commande pré-informée	73
4.9. conclusion	80
 <b>CONCLUSION GENERALE</b>	 81
 <b>ANNEXES</b>	
 <b>ANNEXE I. EQUATIONS DE LA DYNAMIQUE DU SYSTEME</b>	
I.1. Energie cinétique du système en fonction des coordonnées généralisées	A-3
I.2. Energie potentielle du système en fonction des coordonnées généralisées	A-3
I.3. La fonction de dissipation de Rayleigh en fonction des coordonnées généralisées	A-4
 <b>ANNEXE II. RAPPEL SUR LES FORCES GENERALISEES</b>	 A-5
 <b>ANNEXE III. THEORIE DE LA COMMANDE OPTIMALE STOCHASTIQUE</b>	
III.1. Théorie générale	A-9
III.1.1. Performances du système pour une perturbation de type bruit blanc intégré	A-11
III.1.2. Performance du système pour une perturbation de type bruit blanc filtré	A-12
	T-3

III.2. Technique de calcul du gain de commande K	A-13
III.3. Technique de détermination de la matrice de covariance du vecteur d'état	A-15
III.4. Etude des systèmes de suspension par approche dans le domaine fréquentiel	A-17

## ANNEXE IV. INDICE DE PERFORMANCE

IV.1. Introduction	A-20
IV.2. Indice de performance	A-20
IV.2.1. Le facteur de confort	A-20
IV.2.2. Le facteur de la course de la suspension	A-22
IV.2.3. Le facteur de la déflexion des pneus	A-24
IV.2.4. Le facteur de la force de commande	A-25
IV.3. Coefficients de pondération	A-26
IV.4. Choix des valeurs coefficients de pondération	A-26
IV.5. Forme quadratique de l'indice de performance	A-27
IV.6. Problème de claquement de la suspension	A-31
IV.7. Conclusion	A-32

## ANNEXE V. THEORIE DE LA COMMANDE PRE-INFORMEE

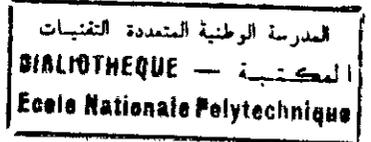
A-34

## ANNEXE VI. DONNEES NUMERIQUES DU CAMION K-66

VI.1. Caractéristiques fixes	A-38
VI.2. caractéristiques variables	A-39

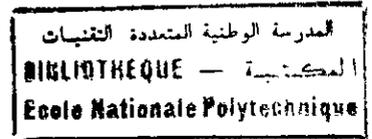
## BIBLIOGRAPHIE

# NOMENCLATURE



$A, A_c$	matrice de la dynamique du système en boucle ouverte et en boucle fermée
$A_{1, \dots, 8}$	matrices de passage
$A_i$	Travail élémentaire
$a$	coefficient de la rugosité de la route
$a_i$	dimensions longitudinales du véhicule
$B, B_x$	matrice de commande
$B_1, B_2, B_{1x}, B_{2x}$	matrice des perturbations extérieures
$b_i$	dimensions transversales du véhicule
$C$	matrice d'observation
$c$	coefficient de la rugosité de la route
$D$	fonction de dissipation de Rayleigh
$E$	espérance mathématique
$f$	fréquence
$g$	vecteur d'anticipation
$h$	vecteur de perturbation
$J_1, J_2, J_3, J_4$	indices de performance et ces différents termes
$J_{L1}, J_{T1}$	moments d'inertie du châssis-cabine par rapport à l'axe de tangage et l'axe de roulis
$J_{L2}, J_{T2}$	moment d'inertie de l'ensemble moteur-boîte de vitesse par rapport à l'axe de tangage et l'axe de roulis
$J_{m1}, J_{m2}$	moments d'inertie par rapport à l'axe de roulis de l'essieu avant et de l'essieu arrière
$K$	matrice du gain de commande
$K_i$	raideurs des ressorts, des pneus et des plots

$L$	Lagrangien
$L_i$	amortissements des amortisseurs, des pneus et des plots
$l$	l'empattement
$M_1$	masse du châssis-cabine
$M_2$	masse de l'ensemble moteur-boîte de vitesse
$m_1, m_2$	masses de l'essieu avant et de l'essieu arrière
$N, N_x$	matrices de pondérations
$Q, Q_x, Q_w, Q_{xw}, R$	matrices de pondérations
$Q_i$	forces généralisées
$q_i$	coordonnées généralisées
$S$	solution de l'équation de Riccati
$T$	énergie cinétique
$t$	temps
$V$	énergie potentielle
$v$	vitesse de déplacement
$u$	vecteur de commande
$W_0$	matrice de covariance du bruit blanc
$W_1, W_2$	vecteurs perturbations reçues par les roues avant et les roues arrière
$X$	matrice de covariance du vecteur d'état
$x$	vecteur d'état du système
$y$	vecteur de sortie
$y_{G1}$	déplacement vertical du centre de gravité de l'ensemble châssis-cabine
$y_{G2}$	déplacement vertical du centre de gravité de l'ensemble moteur-boîte de vitesse
$y_1, y_2$	déplacements des centres de gravité des essieux avant et arrière
$y_{A, \dots, L}$	déplacements verticaux des points de fixation de la suspension et du moteur sur le châssis



$Z_{1, \dots, 4}$	déplacements verticaux des points de fixation de la suspension sur les essieux
$\alpha$	constante du filtre
$\Delta$	temps d'empatement
$\delta$	fonction Dirac
$\Phi, \Phi_{hh}$	Densité spectrale et matrice de densité spectrale
$\phi_1, \psi_1$	angles de tangage et de roulis du châssis-cabine
$\phi_2, \psi_2$	angles de tangage et de roulis de l'ensemble moteur-boite de vitesse
$\psi_{m1}, \psi_{m2}$	angles de roulis de l'essieu avant et de l'essieu arrière
$\omega = 2\pi f$	fréquence (pulsation)
$\Omega$	fréquence spatiale
$\rho_1, \rho_2, \rho_3$	coefficients de pondération
$\sigma^2$	variance des irrégularités de la route
$\xi$	bruit blanc
$\tau$	temps de pré-information

## INTRODUCTION GENERALE

Très souvent dans l'étude de la dynamique des systèmes physiques, on est confronté à l'analyse de l'influence des perturbations extérieures. Ces actions peuvent se présenter comme des phénomènes non contrôlables ou aléatoires. Ce sont par exemple les irrégularités de la surface d'une route ou d'un revêtement d'aérodrome engendrant des vibrations sur les objets qui s'y déplacent. Ces vibrations sont nuisibles aussi bien pour les passagers que pour le véhicule lui même.

Le système de suspension qui constitue une partie intégrante du véhicule forme une interface entre le véhicule et son environnement. Il sert d'une part de support au véhicule , pour sa stabilité et son contrôle durant les manoeuvres, et d'autre part à sa vibro-isolation des perturbations de la surface de la route pour le confort des passagers. Ils faut noter que ces différentes tâches exigent un compromis entre plusieurs caractéristiques souvent incompatibles. La stabilité et le contrôle du véhicule exigent une suspension rigide. Mais pour que le véhicule soit insensible aux charges extérieures la suspension doit être souple. Ainsi si le confort du véhicule exige une suspension souple, sa tenue de route demande une suspension rigide.

Durant ces dernières années, les exigences de confort et de sécurité sont devenues tellement sévères, que le système traditionnel de suspension passive ne convient presque plus. Les nouveaux progrès dans la micro-électronique et dans les actionneurs électrodynamiques ont permis la naissance d'une nouvelle génération de suspensions appelées suspensions actives. Vue son caractère intelligent, la suspension active change de caractéristiques en temps réel pour s'adapter aux conditions d'opération.

La synthèse des suspensions actives a intéressé de nombreux chercheurs. Ces derniers ont ainsi été conduits à proposer diverses méthodes de conception de tels systèmes.

Le problème de la suspension active au départ, a été traité comme un problème de poursuite [1] dans lequel le servo-actionneur, tente d'emmener la position du châssis et de la roues à poursuivre la sortie d'un filtre donné.

L'analyse d'un système de suspension pour un modèle à une dimension (quart de véhicule), par l'application de la théorie de la commande optimale a été étudiée par A.G.Thompson [1] en 1976. Le modèle à une dimension est valable uniquement si l'avant et l'arrière du véhicule sont inertiuellement découplés. Pour un bon contrôle du véhicule, il est nécessaire en pratique d'utiliser un châssis long, ce qui donne un modèle non découplé. Ceci a amené A.G.Thompson et C.E.M.Pearce [2] en 1979 à prendre un modèle à deux dimensions (moitié du véhicule), ayant pour degrés de liberté le tangage et le déplacement vertical.

En 1984 Thompson [3] a repris le modèle à une dimension, sur lequel il a apporté certaines modifications d'intérêt pratique. Il a montré qu'on peut monter un système de suspension active sur un véhicule déjà existant sans apporter de modification aux éléments passifs de la suspension. Il a aussi montré que si on mesure, le déplacement relatif entre le châssis et l'essieu, au lieu de la mesure du déplacement relatif entre le châssis et le profil de la route, les performances du système ne seront que légèrement modifiées, et donne un système sous-optimal d'un grand intérêt pratique.

En 1985 [4] A Hać a fait l'étude d'un modèle à une dimension, mais il ajouté à son modèle un ressort et un amortisseur, qui constituent les éléments d'une suspension passive. En parallèle à ces éléments, il a placé l'actionneur qui donne la force de commande. Avec ce modèle, il a fait simultanément l'optimisation des systèmes de suspension passive et active.

R.S.Sharp et S.A.Hassen [5] en 1986 se sont penchés sur le développement de nouveaux systèmes de suspension. Ils ont fait une étude comparative de six modèles de suspension active, passive et semi-active. Cette étude comparative est faite sur la base des résultats théoriques obtenus pour un modèle à une dimension.

La réalisation d'une suspension active, ou semi-active consiste à placer un actionneur, en série ou en parallèle avec les éléments passifs de la suspension. L'actionneur a pour rôle de fournir la force de commande nécessaire.

En pratique, les actionneurs électro-mécaniques sont très lents. Ils ne fonctionnent que dans une bande de fréquence qui ne dépasse pas 3Hz. R.S.Sharp et S.A.Hassan en 1987 [6] ont étudié l'influence de la fréquence de réponse de l'actionneur sur les performances du système de suspension.

R.S Sharp et J.H Hassan [7] en 1988, ont fait l'étude d'un modèle de suspension basé sur des éléments très lents et un actionneur électro-pneumatique. L'élément actif de ce modèle ne fonctionne que dans une bande de fréquence qui ne dépasse pas 3 Hz.

Ce système est composé d'un élément pneumatique actif combiné à un amortisseur lent adaptable; l'élément actif est placé en série avec un ballon d'air. Ce dernier fournit la raideur nécessaire quand l'actionneur (élément actif) se bloque à une fréquence de fonctionnement qui dépasse la valeur de 3 Hz. Ils ont montré que la commande active améliore les performances du système dans une bande de fréquence limitée en fonction du coefficient d'amortissement. Quand le coefficient d'amortissement est élevé la force de commande n'est pas importante, c'est à dire que la force d'amortissement devient dominante. Mais à faible coefficient d'amortissement et sans force de commande, le système devient moins performant et très sensible aux fréquences correspondant aux fréquences propres de la roue et de l'essieu. Ils ont montré aussi qu'une commande, de bande de fréquence limitée à 3 Hz, donne une grande amélioration par rapport aux charges reçues par les roues, de l'excursion de la suspension et le confort du véhicule.

Pour le modèle de suspension à deux dimensions, c'est la roue avant qui percute l'obstacle en premier et ensuite arrive la roue arrière avec un retard  $D$ .

En 1988, N.Louam, D.A.Wilson et R.S.Sharp [8] ont exploité ce retard  $D$  pour donner à la roue arrière une vraie commande optimale.

Le modèle à trois dimensions a été étudié par Pinhas Barak et Herbert Sachs en 1985 [9]. Dans leur étude, ils ont supposé que tous les états du système sont mesurables. Ils ont fait une étude comparative de trois types de suspension active, passive et semi-active.

L'étude sur ce modèle est faite par une simulation du comportement dynamique du système sur une route à profil aléatoire. Le système de suspension semi-active, réalisé à l'aide d'un amortisseur donnant une force de forme définie au préalable, donne de meilleures performances (en terme d'accélération du siège du conducteur) comparées à celles obtenues avec un système passif conventionnel.

L'une des principales préoccupations dans cette publication est de voir les effets du mouvement de roulis sur les accélérations du siège du chauffeur. Les résultats trouvés montrent que le mouvement de roulis augmente ou diminue la valeur du RMS des accélérations du siège du conducteur, suivant la position de ce dernier par rapport au centre de gravité du châssis, d'environ 37%. L'introduction du système actif au semi-actif réduit tous les mouvements du châssis, par contre elle augmente les mouvements relatifs aux essieux.

Le modèle à trois dimensions a été étudié aussi par M.B.A Abdelhadi et D.A Crolla en 1989 [10] mais en tenant compte des problèmes d'observabilité et des erreurs de mesure des états liés au profil de la route.

Bien que ces systèmes de suspension sont performants, leurs actions n'interviennent qu'après que le véhicule ait traversé l'obstacle.

En 1992 N.Louam [11] a développé la technique de la conception de suspension active à commande pré-informée pour un modèle à deux dimensions. Elle consiste à capter de loin, le profil de la route afin que, le système de suspension puisse générer la commande nécessaire. La commande pré-informée est proposée par Bender 1968 [12] et appliquée en 1980 par A.G.Thompson, B.R.Davis et C.E.M.Pearce [13] à un modèle à une dimension

Notre travail consiste à appliquer les résultats de la théorie de la commande optimale et de la commande pré-informée [2,11,14,15,16], pour la conception d'une suspension active intelligente d'une part, et l'optimisation d'une suspension passive et d'une suspension semi-active d'autre part, pour le cas du camion K-66 (SNVI-Rouiba).

Après l'introduction, le chapitre Un est consacré à la modélisation du profil de la route.

La modélisation de notre système (véhicule) et la détermination des équations différentielles de mouvement sont faites dans le chapitre Deux.

Le chapitre Trois est consacré à la présentation des différents types de suspension.

Dans le chapitre Quatre, on expose les résultats de la simulation du comportement du camion K-66 (SNVI Rouiba), pour lequel on détermine les paramètres optimaux avec un système de suspension passive, semi-active, active et active à commande pré-informée.

## **CHAPITRE 1**

# **MODELISATION MATHEMATIQUE DU PRÓFIL DE LA ROUTE**

## 1.1. INTRODUCTION

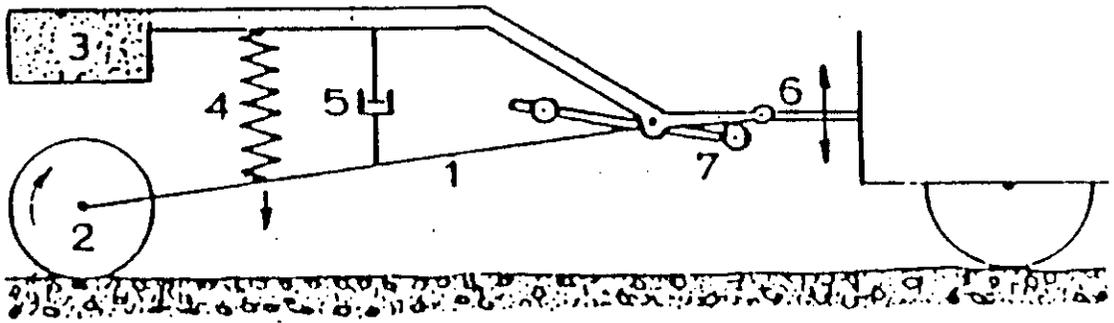
Le micro profil d'une route (ou une portion de route) comporte des irrégularités aléatoires. Ces irrégularités sont de formes et d'étendues différentes. La succession de saillies et de creux est tout à fait aléatoire, ce qui provoque des forces impulsives aléatoires agissant sur les roues du véhicule [17]. Pour étudier les oscillations aléatoires d'un corps se déplaçant sur une route comportant des irrégularités aléatoires il faut connaître les caractéristiques statistiques de la route telles que la densité spectrale et la fonction d'autocorrélation.

Les premières tentatives d'étude et d'analyse du comportement vibratoire des véhicules routiers consistent en la simulation de la réponse vibratoire à une excitation modélisée par des fonctions simples telles que la fonction sinus, triangulaire ou échelon. Le développement d'instruments précis de mesure du profil de la route et la disponibilité d'ordinateurs assez puissants, permettant la simulation des moindres détails du modèle du véhicule, ont permis des analyses plus poussées du comportement vibratoires des véhicules sur des profils réels de route [18].

## 1.2. CLASSIFICATION DES PROFILS DE ROUTES

Actuellement, il existe de nombreux moyens de mesure du profil de la route telle que l'analyseur dynamique de profil en long (APL) (figure (1-1)). L'APL, traîné par un véhicule, transmet les amplitudes verticales des irrégularités de la route par l'intermédiaire d'une masse vibrante à un appareil d'enregistrement.

Une fois le profil mesuré, il peut être classé par ces composantes fréquentielles au moyen de la densité spectrale de puissance (DSP). Pour pouvoir classer les profils de route au moyen de la DSP, il est nécessaire que le profil soit une fonction simple d'un processus aléatoire stationnaire [18].



Fig(1-1): Analyseur dynamique de profil en long.

### 1.3. DENSITE SPECTRALE DU PROFIL DE LA ROUTE

Les figures (1-2), (1-3) et (1-4) représentent un exemple de densité spectrale, de spectre et de spectre de puissance de profils de routes dont les caractéristiques sont données dans le tableau (1-1) [18].

De nombreux chercheurs [18,19,20] trouvent que ces profils peuvent être représentés dans le domaine fréquentiel par une densité spectrale de puissance de la forme suivante:

$$\phi(\Omega) = C \Omega^{-N} \quad (1-1)$$

Où:

$\Omega$  est fréquence spatiale en radian/m,

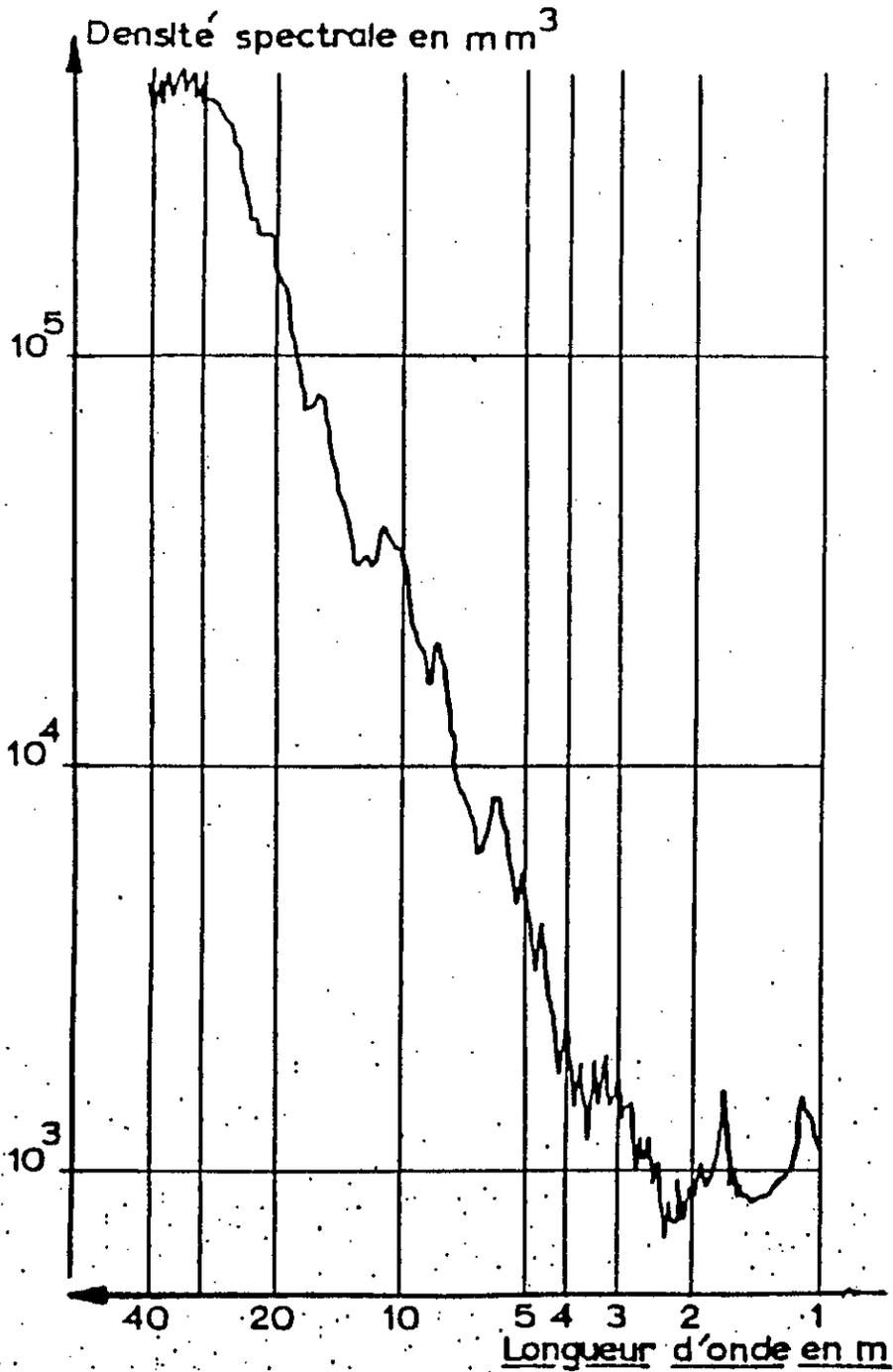
$C$  et  $N$  sont des constantes.

Les valeurs de  $C$  et  $N$  augmentent lorsque la rugosité de la route augmente[20].

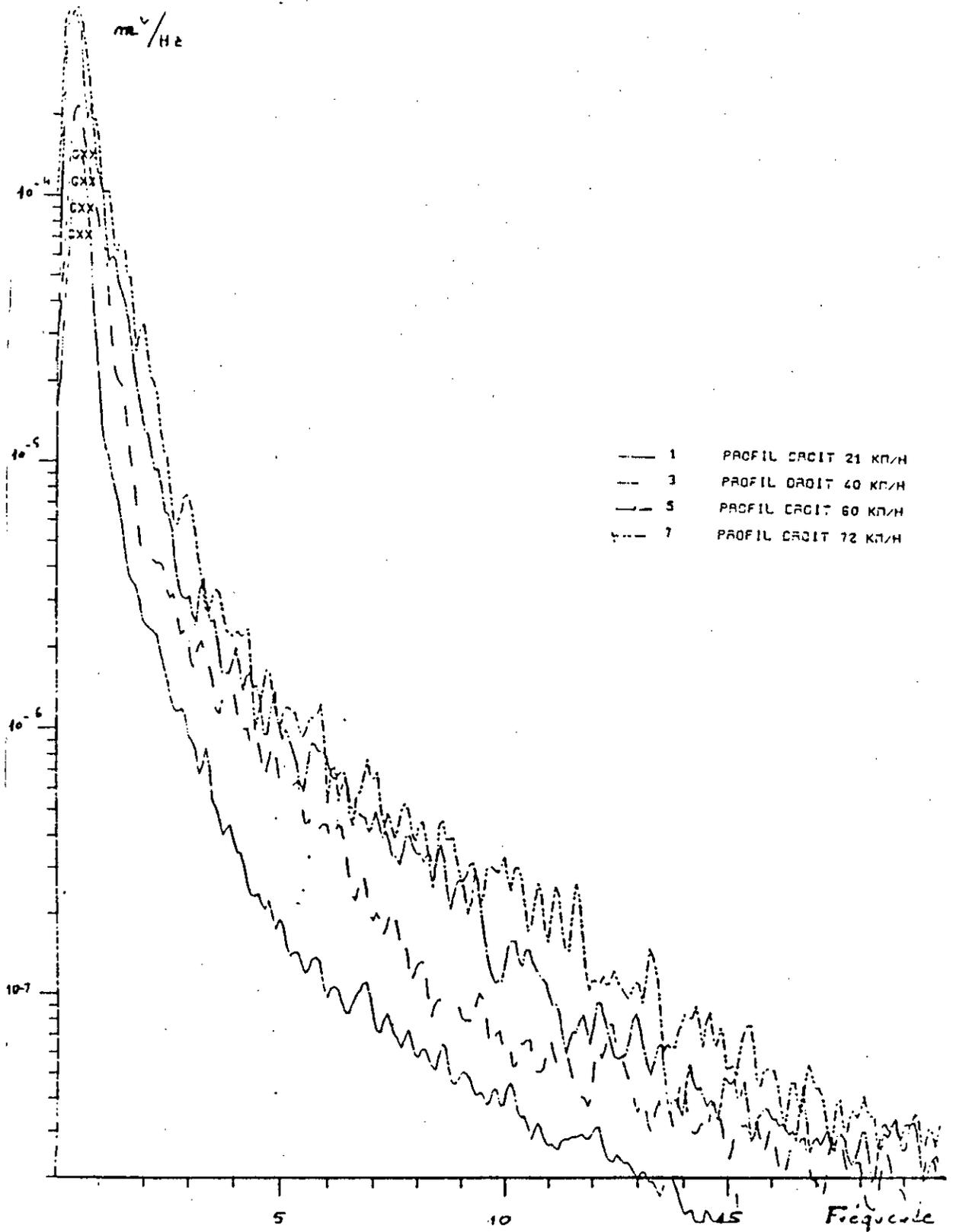
La constante  $C$  et le  $N$  correspondant sont données dans le tableau (1-1), pour différents types de route [18].

### 1.4. DENSITE SPECTRALE SPATIALE ET TEMPORELLE

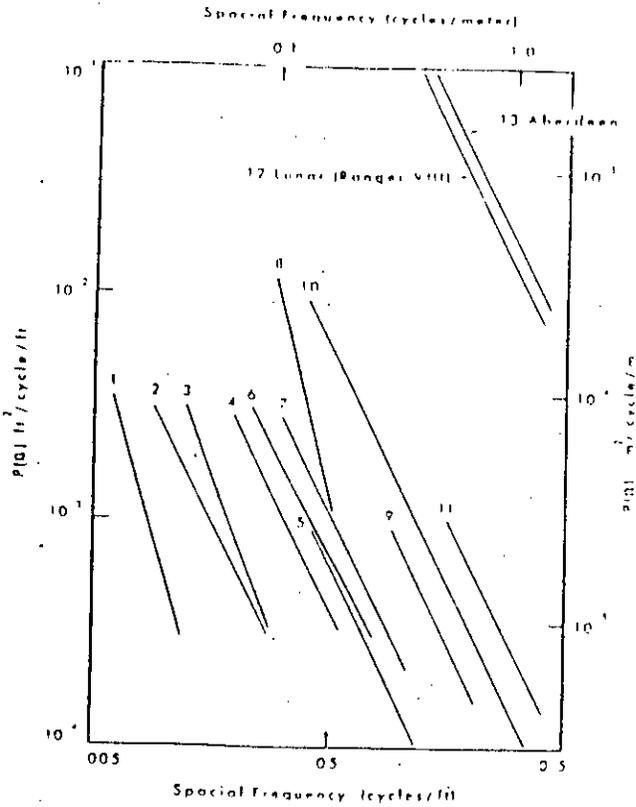
La densité spectrale de l'équation (1-1) est définie comme une fonction de la fréquence spatiale  $\Omega$  (cycle/m), qui est indépendante de la vitesse de déplacement du véhicule. Pour l'analyse des comportements du véhicule, il est souvent intéressant de faire l'étude du



Fig(1-2): Densité spectrale d'un profil d'autoroute (Document RENAULT [22]).



Fig(1-3): Spectre de profil d'une autoroute pour différentes vitesses du véhicule (Document RENAULT [22]).



Fig(1-4): Spectre de puissance de profils réels.

véhicule dans le domaine de la fréquence temporelle (cycle/s).

La conversion à la forme temporelle est faite par simple transformation en remplaçant la longueur  $x$  par  $vt$  :

où:

$x$  est la coordonnée dans le sens du déplacement du véhicule.

$v$  , la vitesse de déplacement du véhicule.

et  $t$  , le temps.

Ce qui donne:

$$\begin{aligned} \omega [\text{cyc/sec}] &= \Omega [\text{cyc/m}] \cdot v [\text{m/sec}] \\ \phi(\omega) [m^2/\text{cyc/sec}] &= \phi(\Omega) [m^2/\text{cyc/m}] \cdot \frac{1}{v} [1/\text{m/sec}] \end{aligned} \tag{1-2}$$

Tableau(1-1): valeurs de C et de N des D.S.P  
de différentes routes.

PSD Number	Description	Référence	N	C[m <sup>2</sup> /cycl/m]
1	Piste ( $\sigma=0.016$ )	NASA-TND-510	3.8	$4.3 \cdot 10^{-11}$
2	Piste 3	NACA-TN-4303	2.0	$2.2 \cdot 10^{-08}$
3	Piste 1	NACA-TN-4303	2.6	$1.9 \cdot 10^{-08}$
4	Piste 35	NACA-TN-3305	2.1	$2.7 \cdot 10^{-07}$
5	Autoroute lisse	Ref.11	2.1	$1.2 \cdot 10^{-06}$
6	Piste ( $\sigma=0.250$ )	NASA-TND-510	1.9	$6.4 \cdot 10^{-07}$
7	Piste 12	NACA-TN-3305	2.0	$2.5 \cdot 10^{-07}$
8	Piste 4(200fps)	AGARD-REP119	4.1	$2.1 \cdot 10^{-08}$
9	Piste lisse	NACA-TN-3484	2.1	$2.4 \cdot 10^{-06}$
10	Autoroute granuleuse	Ref.11	2.1	$4.4 \cdot 10^{-06}$
11	Piste rugueuse	NACA-TN-3484	2.1	$8.1 \cdot 10^{-06}$
12	Profile lunaire	Ref.5	2.0	$3.6 \cdot 10^{-04}$
13	Aberdeen	Ref.8	2.0	$1.6 \cdot 10^{-03}$

Le modèle que nous avons adopté est un modèle à 3 dimensions (voir chapitre 2).

L'analyse de notre modèle exige la connaissance de la matrice de la densité spectrale d'entrées aléatoires du profil. Il est alors impératif de trouver la matrice de la densité spectrale correspondant au modèle du véhicule à quatre roues qui se déplace à vitesse constante V.

### 1.5. BANDE DE FREQUENCE DU PROFIL DE LA ROUTE

La densité spectrale de l'équation (1-1) qui modélise le profil de la route d'amplitude Gaussienne [10] n'est pas valable pour les faibles fréquences. Pour pallier à cet inconvénient

l'équation (1-1) a subi une légère modification de façon que la densité spectrale  $\phi(\Omega)$  reste constante pour  $\Omega < \Omega_0$ . Ainsi elle prendra la forme suivante:

$$\phi(\Omega) = \frac{C}{\alpha^2 + \Omega^2} \quad (1-3)$$

où

$\alpha$  est une constante qui permet de donner des valeurs finies à la densité spectrale pour de faibles valeurs de la fréquence spatiale.

La densité spectrale du profil de la route donné par A.Hac [4,23], de la forme (1-3), est exprimée dans le domaine spatiale par l'équation suivante:

$$\phi(\Omega) = \frac{a\sigma^2}{\pi} \frac{1}{a^2 + \Omega^2} \quad (1-4)$$

où

$\Omega$  est la fréquence spatiale,

$a$  le coefficient de la rugosité de la route,

$\sigma^2$  est la variance des irrégularités de la route.

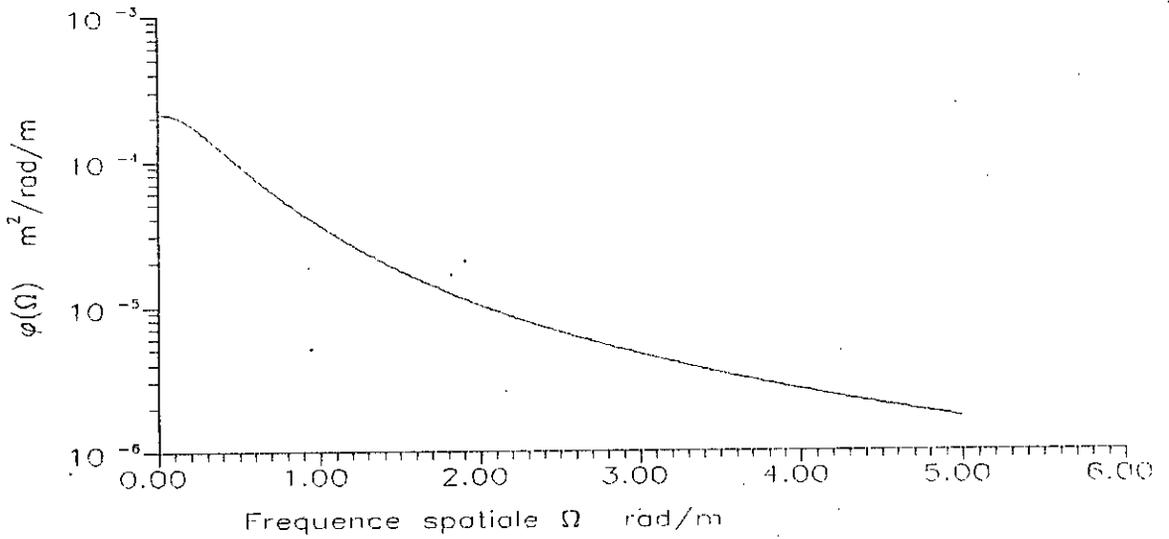
En utilisant les transformations données par l'équation (1-2) la densité spectrale (1-4), (dans le domaine temporel), prend la forme suivante:

$$\phi(\omega) = \frac{av\sigma^2}{\pi} \frac{1}{a^2v^2 + \omega^2} \quad (1-5)$$

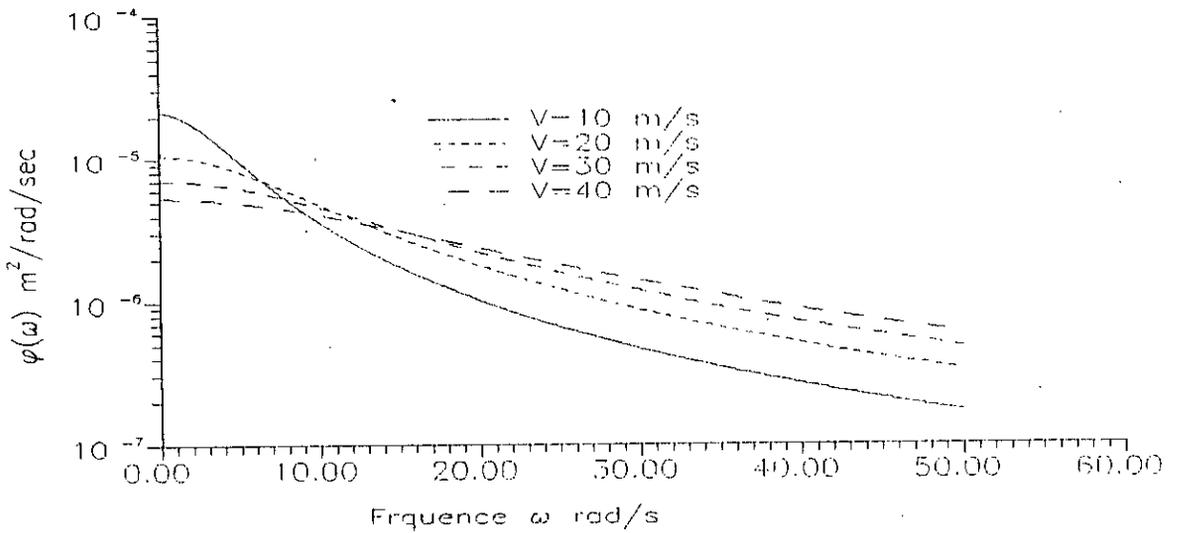
où

$\omega$  est la fréquence temporelle et  $v$  est la vitesse de déplacement du véhicule

Les figures (1-5) et (1-6) donnent la densité spectrale de puissance d'une route pavée ( $\sigma^2 = 300 \text{ mm}^2$ ,  $a = 0.45 \text{ m}^{-1}$ ) respectivement dans le domaine spatiale est dans le domaine temporel pour différentes vitesses de déplacement du véhicule.



Fig(1-5): Densité spectrale de puissance en fonction de la fréquence spatiale.



Fig(1-6): Densité spectrale de puissance en fonction de la fréquence temporelle.

En pratique, les systèmes de suspension filtrent les rugosités de la route qui ont de très faibles fréquences. De ce fait la bande de fréquence consignée pour l'étude du profil de la

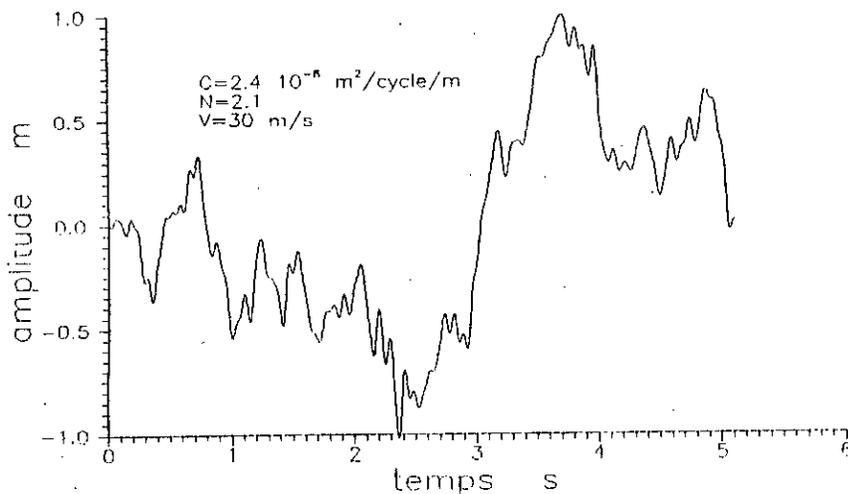
route est de 0.25 à 15 Hz [5,24]. Par ailleurs, les performances du véhicule ne sont pas modifiées pour les irrégularités de fréquences n'appartenant pas à cette bande [5,24].

### 1.5. SIMULATION D'UN ECHANTILLON DU PROFIL DE LA ROUTE A PARTIR DE LA DSP

Lorsque l'étude d'un phénomène aléatoire n'est pas possible analytiquement ou lorsque l'étude est faite dans le domaine temporel, il est nécessaire d'avoir un échantillon de profil comme une fonction du temps ou de l'espace mais non sous sa forme spectrale.

Un tel échantillon, considéré comme un processus Gaussien stationnaire, peut être déterminé au moyen de la IDFT (la transformée de Fourier discrète inverse) à partir de la DSP. Cet échantillon sera utilisé pour la simulation de la réponse du système en temps réel.

La simulation de l'échantillon de la figure (1-7), basée sur les considérations théoriques données dans [25,26], est faite à partir de la DSP de l'équation (1-1) avec  $C=2.4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{cycle}/\text{m}$  et  $N=2.1$  correspondant à une piste lisse du tableau (1-1).



Fig(1-7): Echantillon simulé d'un bruit blanc intégré

## **CHAPITRE 2**

### **MODELISATION MATHEMATIQUE DU SYSTEME**

### 3.1. INTRODUCTION

Le modèle utilisé dans notre étude, donné par les figures (2-1), (2-2) et (2-3), représente un véhicule à deux essieux. Ce type de véhicule est produit par la SNVI de Rouiba. Nous prenons le type K-66 de la SNVI pour notre application numérique.

### 2.2. LE MODELE MATHEMATIQUE

L'objet de notre étude est de construire une suspension qui minimise l'accélération du châssis, l'excursion du système de suspension et les déflexions des roues. Pour ce faire, supposons que [9,10]:

- Le châssis-cabine (masse suspendue) est considéré rigide avec trois degrés de liberté: Le déplacement vertical, le tangage et le roulis;

- Le moteur (parfaitement équilibré) est supposé comme masse rigide fixée au châssis à l'aide d'appuis élastiques de caractéristiques linéaires (plot de suspension);

- Les suspensions avant et arrière sont composées chacune d'une suspension primaire et d'une suspension secondaire. La masse de la suspension primaire comporte les deux roues, l'essieu et les accessoires (frein,...). La roue est modélisée par un ressort linéaire(Hooke) et un amortisseur linéaire (coefficient d'amortissement constant) parallèles.

La suspension secondaire comporte un ressort linéaire et un amortisseur linéaire agissant en parallèle et connectés au châssis à l'aide de liaisons rigides.

On suppose aussi que les roues sont en contact permanent avec le sol et que les forces agissant sur les côtés du véhicules (forces latérales) sont négligeables ce qui nous permet de ne pas tenir compte du mouvement de lacet.

On néglige les forces longitudinales dues aux interactions roues-sol ainsi que les forces aérodynamiques liées à la vitesse et à la géométrie du véhicule.

L'hypothèse du châssis rigide est justifiée par le fait que la bande de fréquence des irrégularités de la route est 0-15 Hz, et qu'on général les modes propres des vibrations de

flexion se produisent pour le châssis au delà de cette bande.

Afin de pouvoir linéariser le système, on admet que tous les mouvements du véhicule par rapport à sa position d'équilibre statique sont très petits.

De plus, le véhicule est supposé se déplacer à vitesse constante sur une route droite à profil aléatoire.

Le profil de la route est supposé stationnaire et érgodique et considéré comme un processus Gaussien (normal).

Les figures (2-1), (2-2) et (2-3) décrivent le modèle étudié avec les paramètres cités ci-dessus.

Avec:

$M_1$ : masse du châssis-cabine;

$J_{L1}$ : moment d'inertie du châssis-cabine par rapport à l'axe de tangage;

$J_{T1}$ : moment d'inertie du châssis-cabine par rapport à l'axe de roulis;

$M_2$ : masse de l'ensemble moteur-boîte de vitesse;

$J_{L2}$ : moment d'inertie de l'ensemble moteur-boîte de vitesse par rapport à l'axe de tangage;

$J_{T2}$ : moment d'inertie de l'ensemble moteur-boîte de vitesse par rapport à l'axe de roulis;

$m_1$ : Masse de l'essieu avant,

$m_2$ : Masse de l'essieu arrière

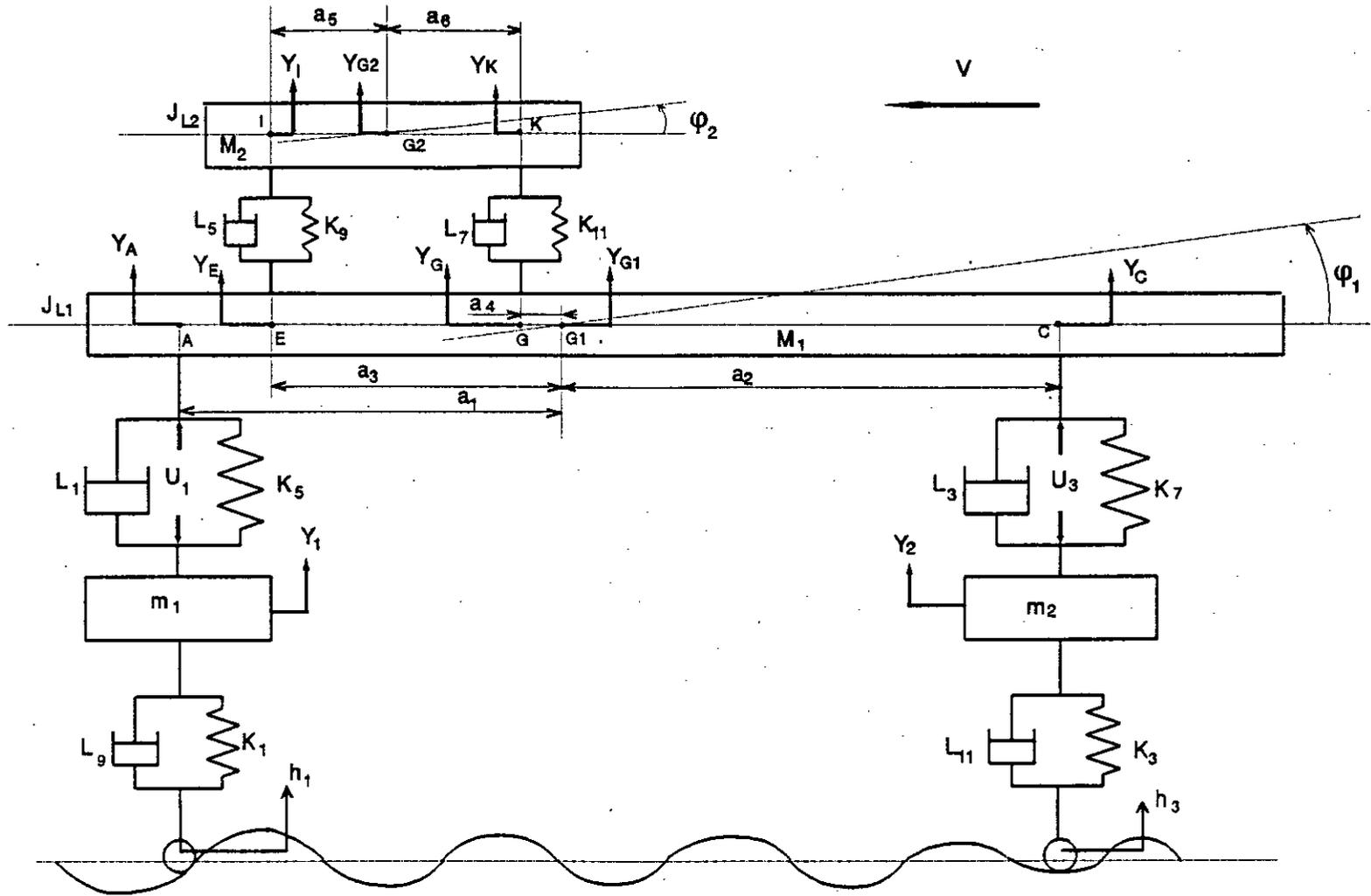
### 2.3. COORDONNEES GENERALISEES

La configuration du modèle mathématique du véhicule est définie de manière univoque à l'aide des coordonnées généralisées:

$$\mathbf{q}^T = [y_{G1}, \phi_1, \psi_1, \gamma_1, \psi_{m1}, \gamma_2, \psi_{m2}, \gamma_{G2}, \phi_2, \psi_2] \quad (2-1)$$

qui décrivent complètement les positions du système.

Les coordonnées généralisées sont supposées finies, continues et différentiables par rapport



Fig(2-1) Vue longitudinale du camion K-66

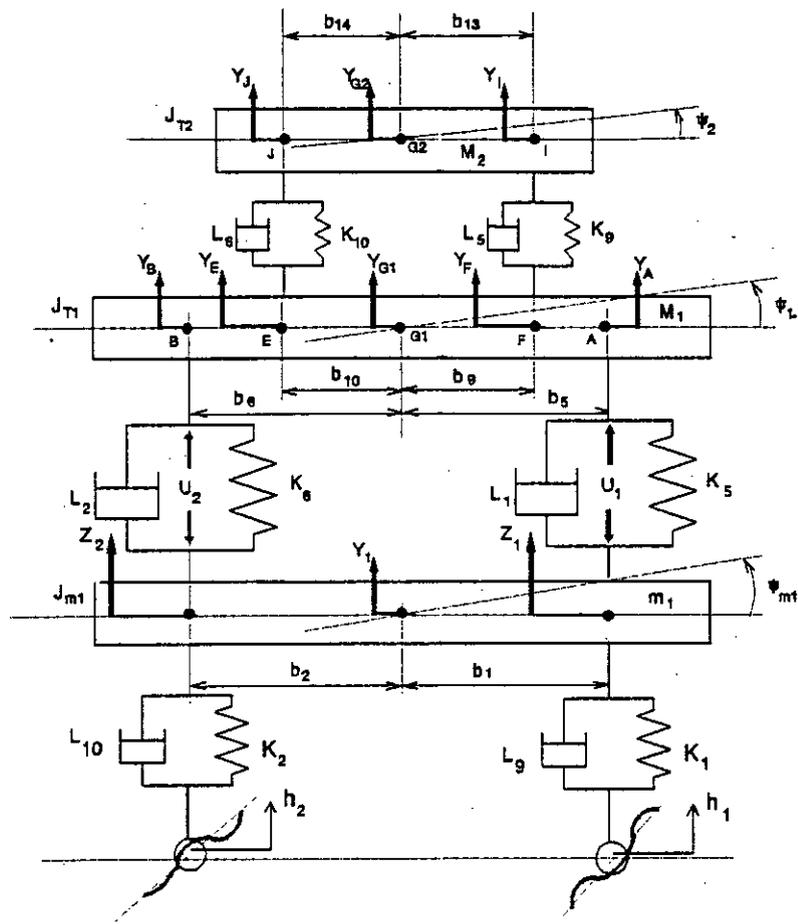


Fig (2-2) Vue de l'avant du camion K-66

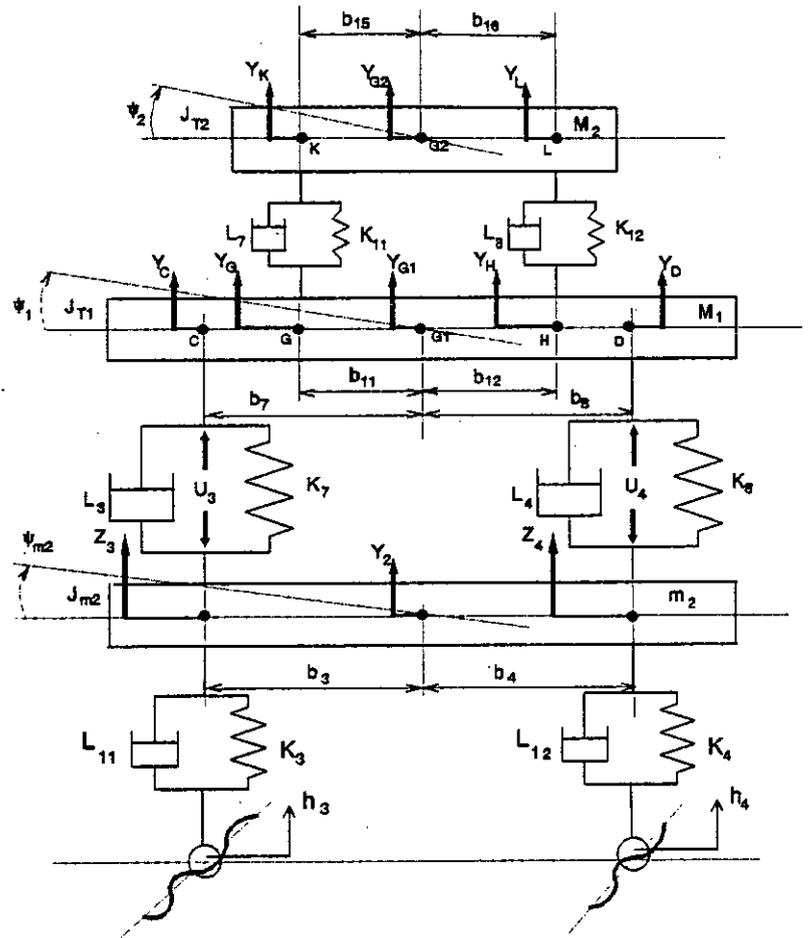


Fig (2-3) Vue de l'arriere du camion K-66

au temps. Ainsi, le système possède dix degrés de liberté qui sont:

$q_1=y_{G1}(t)$ : déplacement vertical du centre de gravité du châssis-cabine par rapport à sa position d'équilibre statique;

$q_2=\phi_1(t)$ : angle de tangage du châssis-cabine;

$q_3=\psi_1(t)$ : angle de roulis du châssis-cabine;

$q_4=y_1(t)$ : déplacement vertical du centre de gravité de l'essieu avant par rapport à sa position d'équilibre statique;

$q_5=\psi_{m1}(t)$ : angle de roulis de l'essieu avant;

$q_6=y_2(t)$ : déplacement vertical du centre de gravité de l'essieu arrière par rapport à sa position d'équilibre statique;

$q_7=\psi_{m2}(t)$ : angle de roulis de l'essieu arrière;

$q_8=y_{G2}(t)$ : déplacement vertical du centre de gravité de l'ensemble moteur-boîte de vitesse par rapport à sa position d'équilibre statique;

$q_9=\phi_2(t)$ : angle de tangage de l'ensemble moteur boîte de vitesse;

$q_{10}=\psi_2(t)$ : angle de roulis de l'ensemble moteur boîte de vitesse;

A partir des figures (2-1), (2-2) et (2-3) on détermine les coordonnées des points de fixation du moteur et celles des éléments de la suspension, en fonction des coordonnées généralisées et on obtient les relations suivantes:

essieu avant:

$$z_1=y_1+b_1\psi_{m1} \qquad z_2=y_1-b_2\psi_{m1} \qquad (2-2)$$

essieu arrière:

$$z_3=y_2+b_3\psi_{m2} \qquad z_4=y_2-b_4\psi_{m2} \qquad (2-3)$$

châssis:

$$\begin{aligned}
 y_A &= y_{G_1} - a_1 \phi_1 + b_5 \psi_1 & y_B &= y_{G_1} - a_1 \phi_1 - b_6 \psi_1 \\
 y_C &= y_{G_1} + a_2 \phi_1 + b_7 \psi_1 & y_D &= y_{G_1} + a_2 \phi_1 - b_8 \psi_1 \\
 y_E &= y_{G_1} - a_3 \phi_1 + b_9 \psi_1 & y_F &= y_{G_1} - a_3 \phi_1 - b_{10} \psi_1 \\
 y_G &= y_{G_1} - a_4 \phi_1 + b_{11} \psi_1 & y_H &= y_{G_1} - a_4 \phi_1 - b_{12} \psi_1
 \end{aligned} \tag{2-4}$$

moteur:

$$\begin{aligned}
 y_I &= y_{G_2} - a_5 \phi_2 + b_{13} \psi_2 & y_J &= y_{G_2} - a_5 \phi_2 - b_{14} \psi_2 \\
 y_K &= y_{G_2} + a_6 \phi_2 + b_{15} \psi_2 & y_L &= y_{G_2} + a_6 \phi_2 - b_{16} \psi_2
 \end{aligned} \tag{2-5}$$

ou bien sous la forme matricielle comme suit:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ 1 & -b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \psi_{m_1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & b_3 \\ 1 & -b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ \psi_{m_2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2-6}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} y_A \\ y_B \\ y_C \\ y_D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & b_5 \\ 1 & -a_1 & -b_6 \\ 1 & a_2 & b_7 \\ 1 & a_2 & -b_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{G_1} \\ \phi_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} y_E \\ y_F \\ y_G \\ y_H \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -a_3 & b_9 \\ 1 & -a_3 & b_{10} \\ 1 & -a_4 & b_{11} \\ 1 & -a_4 & -b_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{G_1} \\ \phi_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2-7}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} y_I \\ y_J \\ y_K \\ y_L \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -a_5 & b_{13} \\ 1 & -a_5 & -b_{14} \\ 1 & a_6 & b_{15} \\ 1 & a_6 & -b_{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{G_2} \\ \phi_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2-8}$$

Les expressions matricielles ci-dessus permettent le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées généralisées.

Le passage d'un système à l'autre peut se faire aisément par calcul numérique en utilisant les matrices de passage ci-dessous.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & b_5 \\ 1 & -a_1 & -b_6 \\ 1 & a_2 & b_7 \\ 1 & a_2 & -b_8 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -a_3 & b_9 \\ 1 & -a_3 & -b_{10} \\ 1 & -a_4 & b_{11} \\ 1 & -a_4 & -b_{12} \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -a_5 & b_{13} \\ 1 & -a_5 & -b_{14} \\ 1 & a_6 & b_{15} \\ 1 & a_6 & b_{15} \\ 1 & a_6 & -b_{16} \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ 1 & -b_2 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & b_3 \\ 1 & -b_4 \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

## 2.4. EQUATIONS DE LAGRANGE

Pour obtenir les équations du mouvement nous avons utilisé les équations de Lagrange de seconde espèce [5,7].

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (2-11)$$

(i=1,n)

Où

L=T-V, Lagrangien,

T: L'énergie cinétique,

V: L'énergie potentielle,

D: La fonction de dissipation de Rayleigh,

Q: Les forces généralisées.

L'énergie cinétique T a pour expression:

$$\begin{aligned}
 T = & \left( \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} J_{m_1} \dot{\psi}_{m_1}^2 \right) + \left( \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} J_{m_2} \dot{\psi}_{m_2}^2 \right) + \left( \frac{1}{2} M_1 \dot{y}_{G_1}^2 \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} J_{L_1} \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} J_{t_1} \dot{\psi}_1^2 \right) + \left( \frac{1}{2} M_2 \dot{y}_{G_2}^2 + \frac{1}{2} J_{L_2} \dot{\phi}_2^2 + \frac{1}{2} J_{t_2} \dot{\psi}_2^2 \right)
 \end{aligned} \tag{2-12}$$

tandis que l'énergie potentielle V est donnée par:

$$\begin{aligned}
 V = & \frac{1}{2} K_1 (Z_1 - h_1)^2 + \frac{1}{2} K_2 (Z_2 - h_2)^2 + \frac{1}{2} K_3 (Z_3 - h_3)^2 \\
 & + \frac{1}{2} K_4 (z_4 - h_4)^2 + \frac{1}{2} K_5 (y_A - Z_1)^2 + \frac{1}{2} K_6 (y_B - Z_2)^2 \\
 & + \frac{1}{2} K_7 (y_C - Z_3)^2 + \frac{1}{2} K_8 (y_D - Z_4)^2 + \frac{1}{2} K_9 (y_I - y_E)^2 + \\
 & \frac{1}{2} K_{10} (y_J - y_F)^2 + \frac{1}{2} K_{11} (y_K - y_G)^2 + \frac{1}{2} K_{12} (y_L - y_H)^2
 \end{aligned} \tag{2-13}$$

et la fonction de dissipation de Rayleigh est exprimée par:

$$\begin{aligned}
 D = & \frac{1}{2} L_1 (\dot{y}_A - \dot{z}_1)^2 + \frac{1}{2} L_2 (\dot{y}_B - \dot{z}_2)^2 + \frac{1}{2} L_3 (\dot{y}_C - \dot{z}_3)^2 + \frac{1}{2} L_4 (\dot{y}_D - \dot{z}_4)^2 \\
 & + \frac{1}{2} L_5 (\dot{y}_I - \dot{y}_E)^2 + \frac{1}{2} L_6 (\dot{y}_J - \dot{y}_F)^2 + \frac{1}{2} L_7 (\dot{y}_K - \dot{y}_G)^2 + \frac{1}{2} L_8 (\dot{y}_L - \dot{y}_H)^2 \\
 & + \frac{1}{2} L_9 (\dot{z}_1 - \dot{h}_1)^2 + \frac{1}{2} L_{10} (\dot{z}_2 - \dot{h}_2)^2 + \frac{1}{2} L_{11} (\dot{z}_3 - \dot{h}_3)^2 + \frac{1}{2} L_{12} (\dot{z}_4 - \dot{h}_4)^2
 \end{aligned} \tag{2-14}$$

Les expressions de T, V et D exprimées en coordonnées généralisées  $q_i (i=1,10)$  sont données en l'annexe I.

## 2.5. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DE MOUVEMENT

L'application de l'équation de Lagrange (2-11) et des expressions de T, V et D données en annexe I, nous conduit au système d'équations différentielles suivant:

$$M\ddot{q} + L\dot{q} + Kq = Q + K_h h + L_h \dot{h} \quad (2-15)$$

où

M de dimension (10x10) est la matrice d'inertie,

L de dimension (10x10) est la matrice dissipation,

K de dimension (10x10) est la matrice rigidité,

Le vecteur Q de dimension (10x1) est l'ensemble des forces généralisées, que nous déterminerons au paragraphe suivant.

Le vecteur h de dimension (4x1) est formé par l'ensemble des excitations reçues par le véhicule sur les quatres roues et dues au micro-profil de la route,

$K_h$  de dimension (10x4) est la matrice de rigidité forcée,

et  $L_h$  de dimension (10x4) est la matrice d'amortissement forcé.

## 2.6. DETERMINATION DES FORCES GENERALISEES APPLIQUEES AU SYSTEME

Appliquons les démarches de l'annexe II pour tous les  $q_i (i=1, \dots, 10)$  pour la détermination des forces généralisées du système.

A titre d'exemple nous prendrons  $q_1$  et nous déterminerons la force généralisée dans cette direction:

$$\begin{aligned} q_1 &= y_{G_1} & \delta A_1 &= Q_1 \delta q_1 = Q_1 \delta y_{G_1} \\ & & &= (u_1 + u_2 + u_3 + u_4) \delta y_{G_1} \end{aligned} \quad (2-16)$$

Alors:

$$Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta y_{G_1}} = u_1 + u_2 + u_3 + u_4. \quad (2-17)$$

$Q_1$  est le premier terme du vecteur  $Q$ .

Tous les éléments du vecteur  $Q$  sont fonction des forces de commande  $u_i$  ; soit:

$$Q = Ru \quad (2-18)$$

La matrice  $R$  est de dimension (10x4), le vecteur  $u$  est de dimension 4.

En introduisant la forme (2-18) du vecteur forces généralisées, l'équation matricielle (2-15) prend la forme suivante:

$$M\ddot{q} + L\dot{q} + Kq = Ru + K_h h + L_h \dot{h} \quad (2-19)$$

## 2.7. REPRESENTATION DU SYSTEME SOUS LA FORME D'ETAT

### 2.7.1. Introduction

La théorie de la commande optimale stochastique citée en annexe III, consiste à optimiser un système dynamique représenté dans l'espace d'état, en minimisant l'indice de performance quadratique donné en annexe IV.

Pour cette raison on est amené à;

- Transformer le système d'équations différentielles d'ordre deux (2-19) à la forme d'état.
- Présenter les différents termes de l'indice de performance (annexe IV) sous la forme quadratique en fonction des variables d'état.

### 2.7.2. Représentation sous la forme d'état du système

En écriture matricielle (notation standard), le système peut être écrit sous la forme suivante.

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_1 h + B_2 \dot{h} \quad (2-20)$$

$$y = Cx \quad (2-21)$$

Avec:

A: Matrice dynamique du système;

B: Matrice de commande.

C: Matrice d'observation.

et  $x(t)$  est le vecteur d'état du système.

Soit le système (2-19) d'équations différentielles d'ordre deux, multipliant cette équation par  $M^{-1}$  (si  $M^{-1}$  existe), on obtient:

$$\ddot{q} + M^{-1}L\dot{q} + M^{-1}Kq = M^{-1}Ru + M^{-1}K_h h + M^{-1}L_h \dot{h} \quad (2-22)$$

Posons en suite:

$$x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

Où,

$x$  est un vecteur à  $2n$  éléments (composantes de  $q$  et  $\dot{q}$  réunis). Dans notre cas  $n=10$ .

On a par dérivation:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}L\dot{q} - M^{-1}Kq + M^{-1}Ru + M^{-1}K_h h + M^{-1}L_h \dot{h} \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

Soit;

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}L \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}R \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}K_h \end{bmatrix} h + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}L_h \end{bmatrix} \dot{h} \quad (2-25)$$

d'une façon condensée;

$$\dot{x} = A_x x + B_x u + B_{x1} h + B_{x2} \dot{h} \quad (2-26)$$

où;

$$A_x = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

est une matrice de dimension (20x20);

$$B_x = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}R \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

une matrice de dimension (20x4);

$$B_{x1} = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}K_h \end{bmatrix} \quad (2-29)$$

une matrice de dimension (20x4), et

$$B_{x2} = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}C_h \end{bmatrix} \quad (2-30)$$

une matrice de dimension (20x4).

Et en négligeant l'amortissement des pneus [4,23], la matrice  $B_{x2}$  s'annule et on aura:

$$\dot{x} = A_x x + B_x u + B_{x1} h \quad (2-31)$$

## 2.8. PERFORMANCES DU CAMION K-66 AVEC LES PARAMETRES DE LA SUSPENSION PASSIVE DONNES PAR LA SNVI

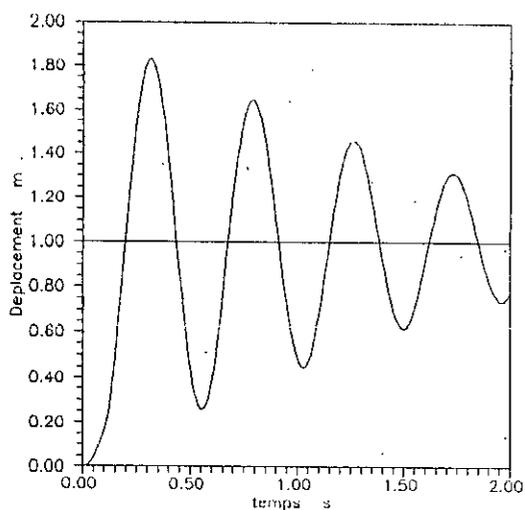
### 2.8.1. Performance du camion K-66 sur une route à profil bruit blanc intégré

Les performances du camion, doté d'un système de suspension passif de caractéristiques données par la SNVI (Rouiba), sont déterminées par la simulation sur micro-ordinateur du comportement transitoire du camion pour une excitation échelon unité (voir paragraphe III.1.1 de l'annexe III). Pour un modèle linéaire de perturbation correspondant à un bruit blanc intégré, la valeur quadratique moyenne de n'importe quel signal de sortie du système est reliée à la valeur de l'intégrale des carrés du signal de cette même sortie résultant d'une entrée échelon unité [2,28].

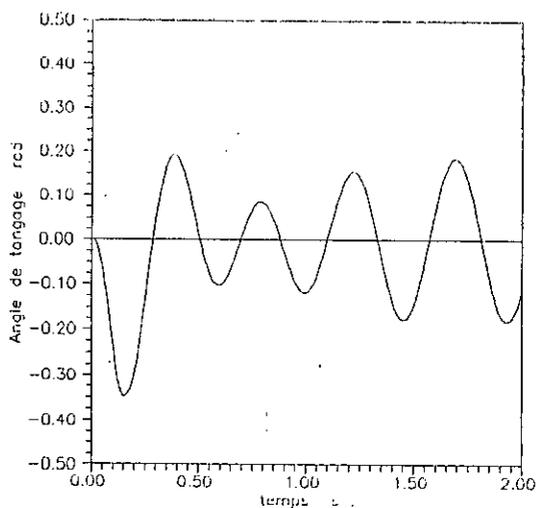
Le comportement du véhicule uniformément chargé est donné par la figure (2-1). Sur cette figures sont représentées les caractéristiques essentielles du véhicule;

les figures (a) et (b) représentent respectivement le déplacement vertical du centre de gravité et l'angle de tangage du châssis, tandis que les figures (c) et (d) donnent les déplacement des points de fixation de la suspension sur les essieux et le châssis. Ces déplacements caractérisent l'espace de fonctionnement de la suspension. Le confort du véhicule est une qualité relative aux accélérations du châssis qui sont représentées sur les figures (e) et (f).

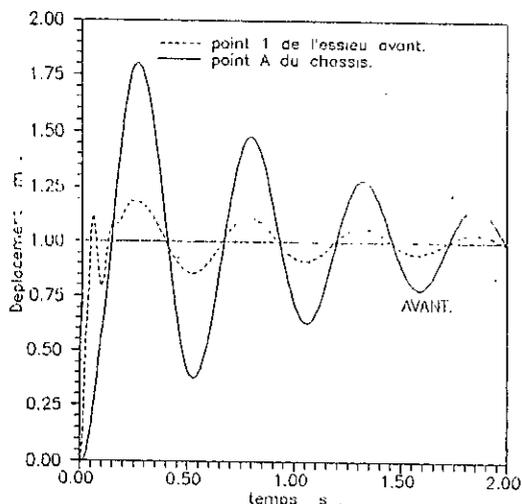
Le tableau (2-1) donne les performances (voir paragraphe IV.2.1 de l'annexe IV) du camion uniformément chargé pour différentes valeurs des coefficients de pondération. Dans ce tableau, les termes  $J_1$ ,  $J_2$  et  $J_3$  sont constants. Ils ne dépendent pas des coefficients de pondération. Seul l'indice de performance global  $J$  qui en dépend. Ce tableau servira par la suite à comparer les performances des différents types de suspension pour différentes valeurs des coefficients de pondération.



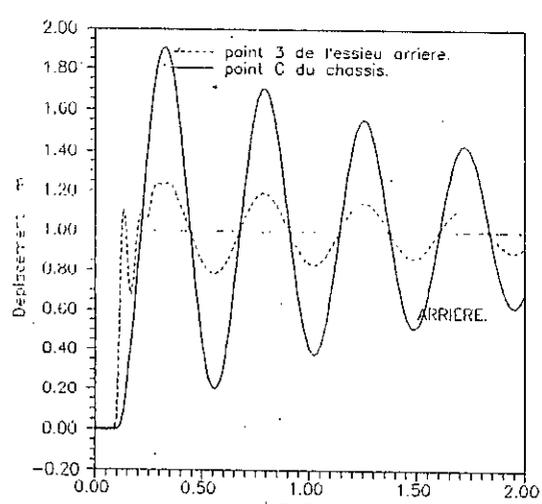
(a) Déplacement du centre de gravité du chassis.



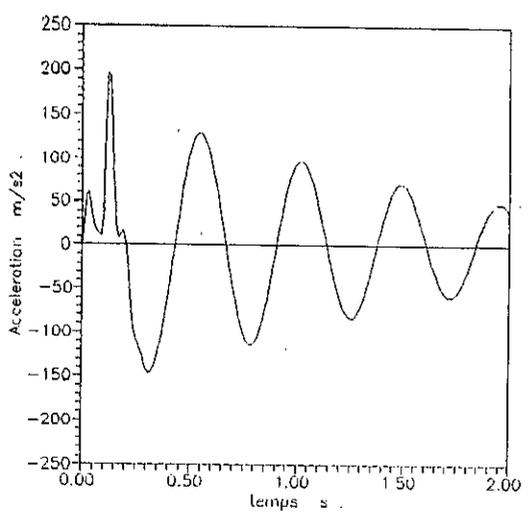
(b) Angle de tangage du chassis.



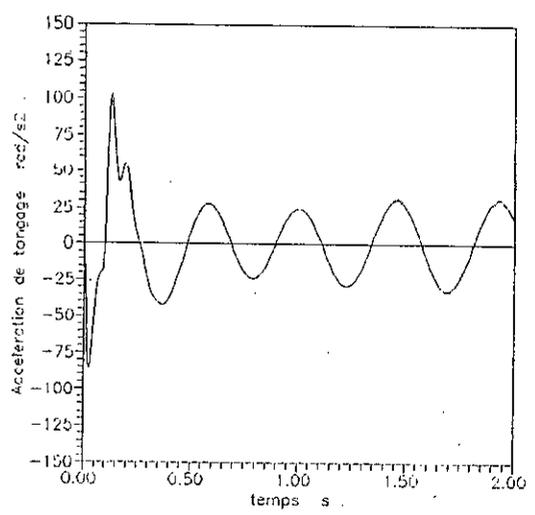
(c) Deplacement des points A et 1 du vehicule.



(d) Deplacement des points C et 3 du vehicule.



(e) Accelération du centre de gravité du chassis.



(f) Accelération de tangage du chassis.

**Fig(2-1): Performance du camion uniformément chargé avec les paramètres de la SNVI**  
 A et c sont les points de fixation de la suspension avant et arrière sur le châssis  
 1 et 3 sont les points de fixation de la suspension sur l'essieu avant et sur l'essieu arrière.

Tableau (2-1): Performance du camion uniformément charge avec les paramètres de la SNVI pour une excitation echelon unité

$\rho_1 10^4$	$\rho_2 10^5$	$K_{av} N/m$	$K_{ar} N/m$	$L_{av} Ns/m$	$L_{ar} Ns/m$	$J_1/10^3$	$J_2/10^{-2}$	$J_3/10^{-2}$	$J/10^4$
0.1	0.1	150000	400000	2500	5000	8.8683	16.963	2.7307	0.9311
	1	"	"	"	"	"	"	"	1.1769
	5	"	"	"	"	"	"	"	2.2691
	10	"	"	"	"	"	"	"	3.6345
1	0.1	"	"	"	"	"	"	"	1.0838
	0.5	"	"	"	"	"	"	"	1.1931
	1	"	"	"	"	"	"	"	1.3296
	5	"	"	"	"	"	"	"	2.4219
	10	"	"	"	"	"	"	"	3.7872
5	0.1	"	"	"	"	"	"	"	1.7626
	1	"	"	"	"	"	"	"	2.0084
	5	"	"	"	"	"	"	"	3.1006
	10	"	"	"	"	"	"	"	4.4660
10	0.1	"	"	"	"	"	"	"	2.6110
	1	"	"	"	"	"	"	"	2.8568
	5	"	"	"	"	"	"	"	3.9491
	10	"	"	"	"	"	"	"	5.3144

### 2.8.2. Performance du camion K-66 sur une route à profil bruit blanc filtré

L'étude des performances du véhicule avec le système de suspension passive réel (SNVI) est faite sur un profil bruit blanc filtré de la forme suivante [4,27]:(voir III.1.2 annexe III)

$$\Phi(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{av}{\omega^2 + a^2v^2} \quad (2-32)$$

Avec

$\sigma^2$  la variance des irrégularités de la route,

$v$  la vitesse de déplacement du véhicule,

et  $a$  est le coefficient qui caractérise le type de route.

Cette forme de la densité spectrale, utilisée par Hac [4], est de la même forme que celle donnée au chapitre 1 .

Pour les mêmes coefficients de performance que ceux utilisés par Hac [4] ( $\rho_1=10^4$ ,  $\rho_2=10^5$  et  $\rho_3=10^8$ ), nous avons calculé les différents termes de l'indice de performance du véhicules pour différents états du camion, en utilisant les techniques données à l'annexe III, pour une route pavée de paramètres  $a=0,45m^{-1}$ ,  $\sigma^2=300mm^2$  et pour une vitesse  $V=20m/s$  (voir tableau (2-2))

Tableau(2-2): Performance du camion K-66, avec la suspension réelle (SNVI) sous ses différents états, sur une route pavée.

	$J1/10^6$ $mm^2/s^4$	$J2/10mm^2$	$J3mm^2$	$J4/10^5N^2$	$J/10^6$
nu	435.020	110.00	282.08	0	474.23
vide	205.830	141.45	327.12	0	252.68
ch à l'avant	88.186	198.60	395.49	0	147.59
ch à l'arrière	88.007	199.19	397.47	0	147.67
unf chargé	84.449	202.90	405.41	0	145.28

### 2.8.3. Caractéristiques fréquentielles du véhicule

L'étude dans le domaine fréquentiel du système de suspension passive se fait au moyen de la fonction de transfert tirée à partir du système d'équations d'état (2-20) et (2-21) (voir paragraphe III.4 annexe III) [27,29].

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B_1 \quad (2-33)$$

La perturbation provenant de la route est transmise par l'intermédiaire des quatre roues du véhicule. De ce fait la matrice de densité spectrale d'entrée est définie comme suit [27,31,33]:

$$\Phi_{hh}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & e^{-i\omega \frac{l}{v}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e^{-i\omega \frac{l}{v}} \\ e^{i\omega \frac{l}{v}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & e^{i\omega \frac{l}{v}} & 0 & 1 \end{bmatrix} \Phi(\omega) \quad (2-34)$$

Avec:

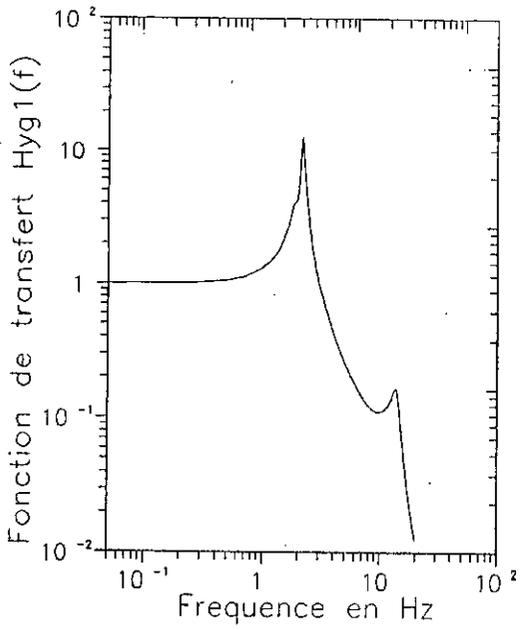
l: l'empattement (distance entre les roues avant et arrière )

v: la vitesse de déplacement du véhicule

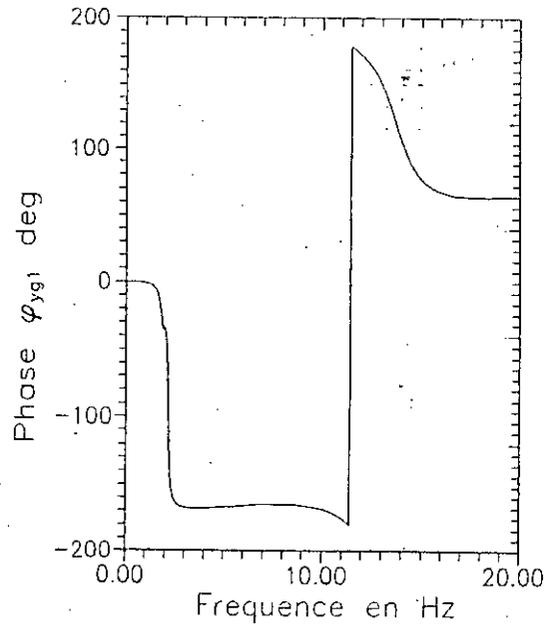
Nous nous limitons au cas du véhicule uniformément chargé, les autres cas de chargement présentent des caractéristiques similaires.

La figure (2-6) représente les différentes réponses fréquentielles à une perturbation bruit blanc filtré de la forme (2-32).

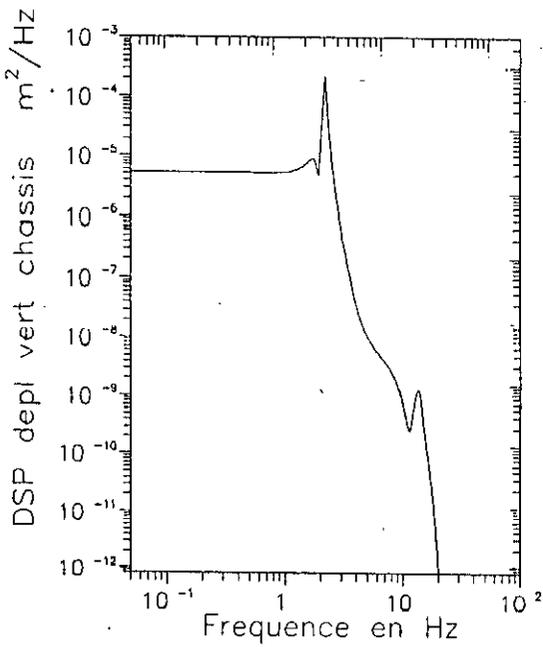
Les figures (a) et (b) représentent le module et la phase de la fonction de transfert correspondant au centre de gravité du châssis. Les figures (c) et (d) représentent respectivement la DSP du déplacement vertical et la DSP de l'angle de tangage du châssis, par contre les figures (e) et (f) représentent les DSP des accélérations vertical et de tangage du châssis. Les figures (g) et (h) nous présentent les DSP de déplacement relatif des points de fixation de la suspension avant et arrière (course de la suspension).



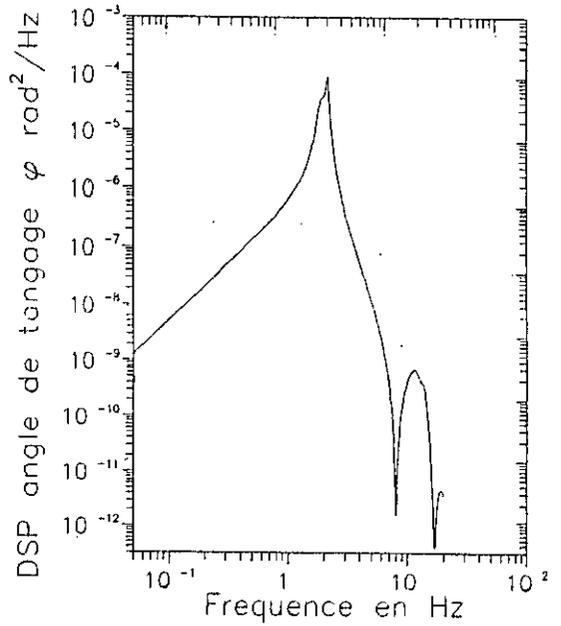
Fig(2-2-a)



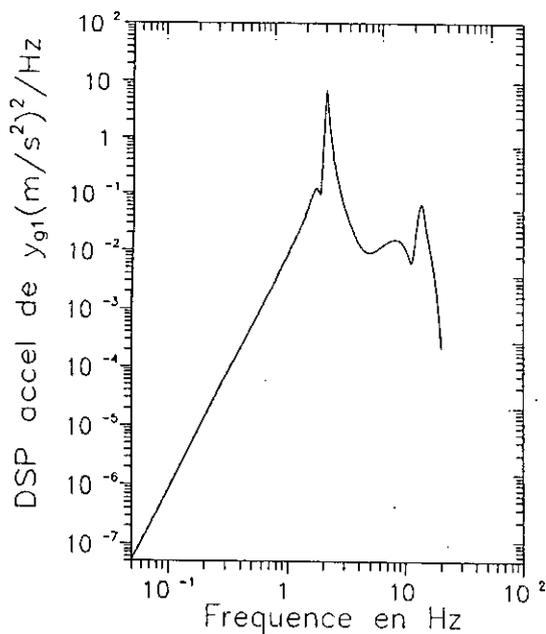
Fig(2-2-b)



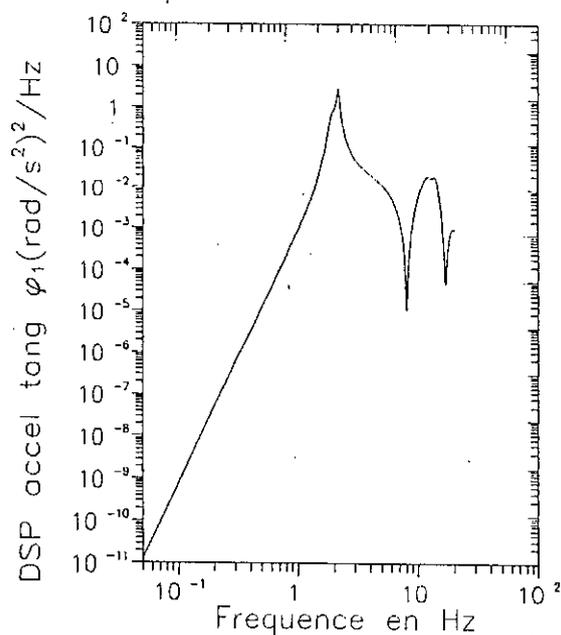
Fig(2-2-c)



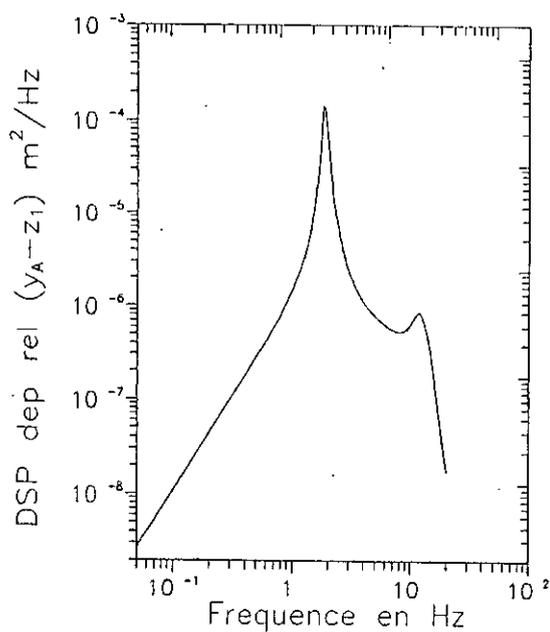
Fig(2-2-d)



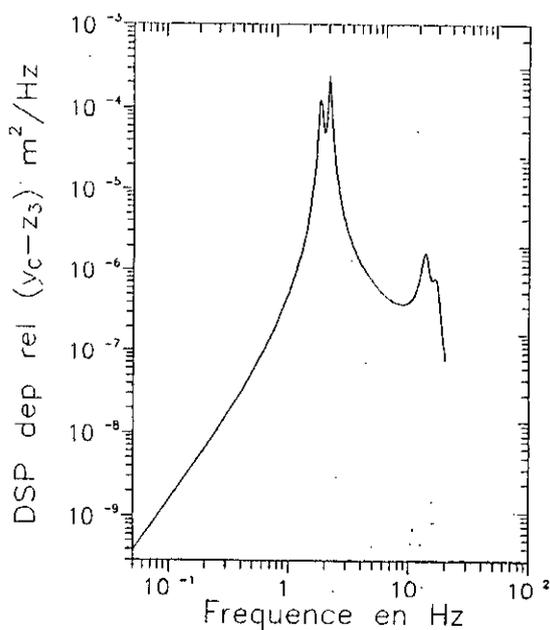
Fig(2-2-e)



Fig(2-2-f)



Fig(2-2-g)



Fig(2-2-h)

Fig(2-2): Caractéristiques fréquentielles du camion uniformément chargé sur une route pavée

(  $a=0,45\text{ m}^{-1}$  ,  $\sigma^2=300\text{ mm}^2$  ,  $v=20\text{ m/s}$  )

## 2.9. CONCLUSION

Nous avons, dans ce chapitre, présenté les différentes caractéristiques du véhicule doté de la suspension donnée par la SNVI. L'étude des performances du véhicule est faite dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel pour deux types de profils de la route:

- profil de type bruit blanc intégré
- profil de type bruit blanc filtré

Le but de notre travail consiste à améliorer les performances du véhicule (le confort, la course de la suspension et la déflexion des pneus), se basant sur les présents résultats de simulation en utilisant des systèmes de suspension récents tels que les systèmes de suspension active et active à commande pré-informé.

## **CHAPITRE 3**

### **APERÇU SUR LES DIFFERENTS TYPES DE SUSPENSION DE VEHICULES**

### 3.1. INTRODUCTION

Réduire les effets des irrégularités de la route nécessite la construction de systèmes de suspension permettant de protéger le véhicule contre les vibrations et par conséquent augmenter son confort et sa sécurité.

Le besoin de développer de nouveaux systèmes de suspension pour les véhicules futurs, a encouragé l'application de techniques modernes d'optimisation. Ces techniques permettent de faire une approche analytique de trois problèmes d'optimisation de trois types suspension;

- système de suspension passive conventionnelle
- système de suspension active par régulation
- système de suspension semi-active par régulation
- système de suspension active par commande pré-informée

### 3.2. SYSTEME DE SUSPENSION PASSIVE CONVENTIONNELLE

La suspension passive ne nécessite aucun apport de puissance. Les paramètres de la suspension sont choisis de telle sorte à minimiser un indice de performance préalablement défini.

Pour illustrer de façon simplifiée les techniques d'optimisation utilisées, considérons tout d'abord le modèle simple à une seule dimension représentant un quart de voiture (figure 3-1). les équations du mouvement d'un tel système s'écrivent sous la forme matricielle comme suit:

$$M\ddot{x} + L\dot{x} + Kx = L_h\dot{h} + K_h h \quad (3-1)$$

où

$M$ : la matrice d'inertie,

$L$ : la matrice de dissipation,

$K$ : la matrice de rigidité,

$L_h$ : la matrice de d'amortissement forcé,

et  $K_h$  est la matrice de rigidité forcée.

L'indice de performance de ce modèle est défini comme suit:

$$J = \langle \ddot{x}^2 \rangle + \rho_1 \langle (x_2 - x_1)^2 \rangle + \rho_2 \langle (x_1 - h)^2 \rangle \quad (3-2)$$

Où:  $\langle \rangle$  désigne la variance.

$\langle \ddot{x}^2 \rangle$  est la valeur quadratique moyenne de l'accélération du châssis (elle caractérise le confort du véhicule);

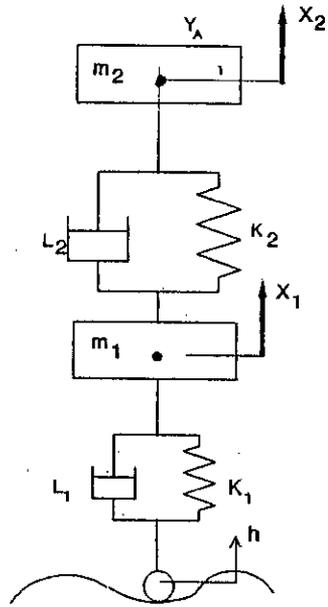
$\langle (x_2 - x_1)^2 \rangle$  est la valeur quadratique moyenne du déplacement relatif entre le châssis et l'axe de la roue. Ce terme caractérise la course de la suspension;

$\langle (x_1 - h)^2 \rangle$  est la valeur quadratique moyenne de la déflexion du pneu, c'est le terme qui limite les forces impulsives que subit la roue. Réduire ce terme revient à augmenter la sécurité du véhicule.

$\rho_1$  et  $\rho_2$  sont les coefficients de pondération [1,2,4].

Si le système de suspension passive recherché n'a pas de configuration spécifiée, il peut être déterminé par la technique de Wiener-Höpf [30].

La technique de Wiener-Höpf se base sur la détermination de l'ordre et des paramètres de la fonction de transfert du système qui minimise le critère de performance (3-2).



Fig(3-1): Modèle simple de suspension passive

### 3.3. SYSTEME DE SUSPENSION ACTIVE

Le système de suspension active peut être obtenu par l'application de la théorie moderne de la commande optimale [1,3,4].

Les éléments de la suspension passive du modèle à une dimension de la figure(3-1) sont remplacés par un actionneur qui donne une force  $u$  appliquée entre l'axe de la roue et le châssis. Le modèle de la figure(3-1) est ainsi modifié pour donner le modèle de la figure(3-2).

Ce modèle est d'équation de mouvement suivante:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + B_1 h(t) \quad (3-3)$$

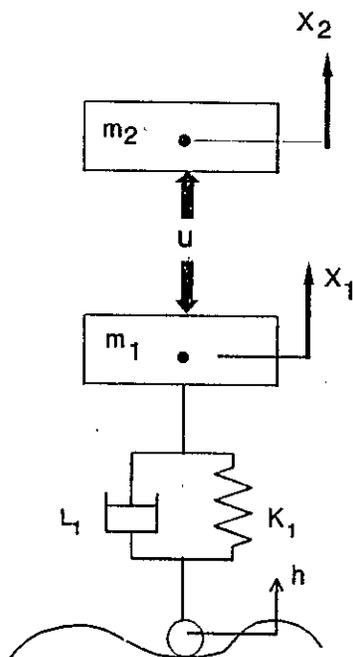
où

$x(t)$  est Le vecteur d'état.

$u(t)$ , Le vecteur de commande.

$h(t)$ , Le vecteur perturbation.

les matrices  $A, B$  et  $B_1$  sont constantes.



Fig(3-2): Modèle simple d'une suspension active de véhicule.

L'optimisation du système consiste à déterminer la force de commande  $u$  qui minimise l'indice de performance.

$$J = \langle \ddot{x}^2 \rangle + \rho_1 \langle (x_2 - x_1)^2 \rangle + \rho_2 \langle (x_1 - h)^2 \rangle + \rho_3 \langle u^2 \rangle \quad (3-4)$$

La technique d'optimisation est exposée en détail dans l'annexe III.

### 3.4. SYSTEME DE SUSPENSION SEMI-ACTIVE

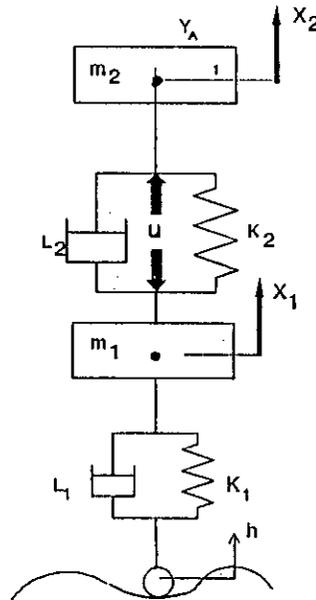
Le modèle à une dimension de la figure(3-1) est légèrement modifié par l'application de la force de commande  $u$ , donnée par un actionneur placé en parallèle avec les éléments passifs de la suspension (ressort, amortisseur), pour donner le modèle représenté à

la figure (3-3).

L'analyse de ce modèle a donné la forme d'équation d'état que celle donnée par (3-3) pour le système de suspension active.

L'étude ce modèle a été étudié par A Hac [4] en 1985.

En utilisant la même forme de l'indice de performance (3-4), la suspension semi-active se fait en suivant les même démarche données pour le système de suspension active.



Fig(3-3): Modèle simple d'une suspension semi-active de véhicule.

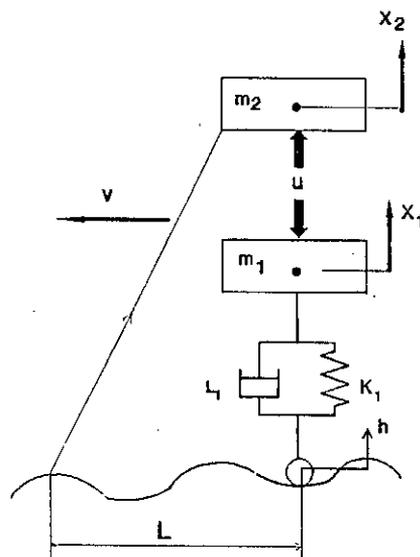
### 3.5. SYSTEME DE SUSPENSION ACTIVE A COMMANDE PRE-INFORMEE

La figure (3-4) représente le modèle simple d'un quart de véhicule doté de suspension à commande pré-informée [11,12,13,16].

Ce type de suspension utilise un capteur qui permet de détecter les irrégularités du profil de la route sur une distance  $L$  au devant du véhicule.

La connaissance du profil sur une distance  $L$  permet de donner une meilleure force de commande  $u$ , dite commande pré-informée, qui minimise l'indice de performance (3-4) et donne une amélioration des performances du système.

La notion de la suspension active à commande pré-informée est exposée à l'annexe V.



Fig(3-4): Modèle simple d'une suspension active à commande pré-informée

## **CHAPITRE 4.**

# **ETUDE DE L'EFFICACITE DES DIFFERENTS TYPES DE SUSPENSION SUR LES PERFORMANCES DU CAMION K-66 SNVI ROUIBA**

## 4.1. INTRODUCTION

La technique de la commande optimale stochastique, utilisée par la majorité des auteurs cités dans la bibliographie, est avantageuse par rapport aux techniques spectrales classiques.

Les techniques spectrales classiques exigent un développement analytique très poussé. Ce développement devient très compliqué pour les systèmes à plusieurs degrés de liberté. Par ailleurs, la technique de la commande optimale stochastique, qui est une analyse dans le domaine d'état, est plus adaptée au calcul numérique comparativement à la technique spectrale.

Dans l'analyse de la suspension du véhicule, on suppose que:

- a- le système est linéaire
- b- le vecteur de commande résultant est une fonction linéaire de toutes les variables d'état
- c- tous les états du système sont mesurables
- d- la dynamique de l'actionneur donnant la force de commande est négligeable

Ces hypothèses rendent le système idéal. En pratique, les performances du système se dégradent pour les raisons suivantes [2,4,10,24]:

- 1- la dynamique de l'actionneur, qui donne la force de commande, influe considérablement sur la dynamique du système et en particulier dans la région des hautes fréquences.
- 2- Les états ne sont pas complètement mesurables et les erreurs de mesure sont inévitables.

#### 4.2. DETERMINATION DES PARAMETRES DE LA SUSPENSION POUR UNE ROUTE A PROFIL DE TYPE BRUIT BLANC INTEGRE

Dans le cas d'un profil continu aléatoire de densité spectrale de puissance (DSP) représentée par un bruit blanc intégré (1-1), les différents termes de l'indice de performance pour le cas de notre modèle (annexe IV) se calculent, en utilisant la technique donnée au paragraphe II.1.1 de l'annexe II, comme suit [1,2,28];

$$\langle y_r(t)^2 \rangle = cv \int_0^{\infty} y_s(t)^2 dt \quad (4-1)$$

$y_r(t)$  est une sortie d'une excitation aléatoire et  $y_s(t)$  est la même sortie correspondant à une entrée échelon unité.  $C$  est le coefficient de la rugosité de la route et  $v$  est la vitesse de déplacement du véhicule.

#### 4.3. DETERMINATION DES PARAMETRES DE LA SUSPENSION POUR UNE ROUTE A PROFIL DE TYPE BRUIT BLANC FILTRE

L'étude du comportement du système, sur une route à profil de type bruit blanc filtré, se fait en suivant la technique donnée aux paragraphes III.1.2, III.2 et III.3 de l'annexe III.

Le profil de la route  $h(t)$  de densité spectrale de la forme suivante (voir annexe III).

$$\Phi(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{aV}{\omega^2 + a^2V^2} \quad (4-2)$$

est la solution de l'équation suivante [4,14]:

$$\dot{h}(t) = -2aVh(t) + I\xi(t) \quad (4-3)$$

Où;

$V$  est la vitesse de déplacement du véhicule

$I$ , la matrice identité de dimension (4x4)  
 $a$ , le coefficient de la rugosité de la route  
 et  $\sigma^2$ , la variance des irrégularités de la route.

En introduisant la notation suivante:

$$A_w = -2aVI \quad ; \quad B_w = I(4x4) \quad (4-4)$$

l'équation (4-2) s'écrit comme suit;

$$\dot{h}(t) = A_w h(t) + B_w \xi(t) \quad (4-5)$$

$\xi(t)$  est un bruit blanc de moyenne zéro et de covariance

$$E\{\xi(t), \xi^T(\tau)\} = W_0 \delta(t-\tau) \quad (4-6)$$

avec  $\delta$  est la fonction Dirac,

et  $W_0$  est la matrice de covariance du bruit blanc.

L'introduction de la corrélation entre les quatre perturbations  $h_i(t)$   $i=1,4$  dans l'optimisation du système actif rend le problème très compliqué et fait encore l'objet de recherche [10]. Dans notre travail, on détermine la loi de commande optimale sans tenir compte de l'effet de la corrélation.

Ainsi  $W_0$  de l'équation (4-6) peut se mettre sous la forme suivante:

$$W_0 = 2\sigma^2 aVI \quad (4-7)$$

Après avoir déterminé la matrice de gain de commande  $K$  et la matrice de covariance  $X$  du vecteur d'état  $x(t)$ , il est facile de déterminer, pour notre modèle, les termes  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  et  $J_4$  de l'indice de performance  $J$ . Ainsi, la valeur quadratique moyenne des accélérations du châssis  $J_1$  peut être déterminée, en utilisant le système d'équations différentielle de mouvement du système (2-31) comme suit;

$$J_1 = \sum_{i=1}^{24} \sum_{j=1}^{24} [A_c(11,i)A_c(11,j) + \frac{1}{2}(a_2 - a_1)A_c(12,i)A_c(12,j) + \frac{1}{4}(b_5 - b_6 + b_7 - b_8)A_c(13,i)A_c(13,j)]X(i,j) \quad (4-8)$$

Où;

$$A_c = A - BK \quad (4-9)$$

est la matrice de la dynamique du système en boucle fermée.

De la même manière, on détermine les autres termes de l'indice de performance:

$$J_2 = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^{24} \sum_{j=1}^{24} Q_{J_2}(K,i) Q_{J_2}(K,j) X(i,j) \quad (4-10)$$

Où

$Q_{J_2}$  est une matrice de dimension (4x24) telle que:

$[Q_{J_2}]_{ij} = SA_6 \quad i=1,\dots,4 \quad j=1,\dots,7$  tandis que les autres éléments sont nuls.

$$J_3 = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^{24} \sum_{j=1}^{24} Q_{J_3}(K,i) Q_{J_3}(K,j) X(i,j) \quad (4-11)$$

Où:

$Q_{J_3}$  est une matrice de dimension (4x24) telle que:

$[Q_{J_3}]_{ij} = S[A_8]_{kj} \quad i=1,\dots,4 \quad j=1,\dots,24 \quad k=1,\dots,24$  tandis que les autres éléments sont nuls.

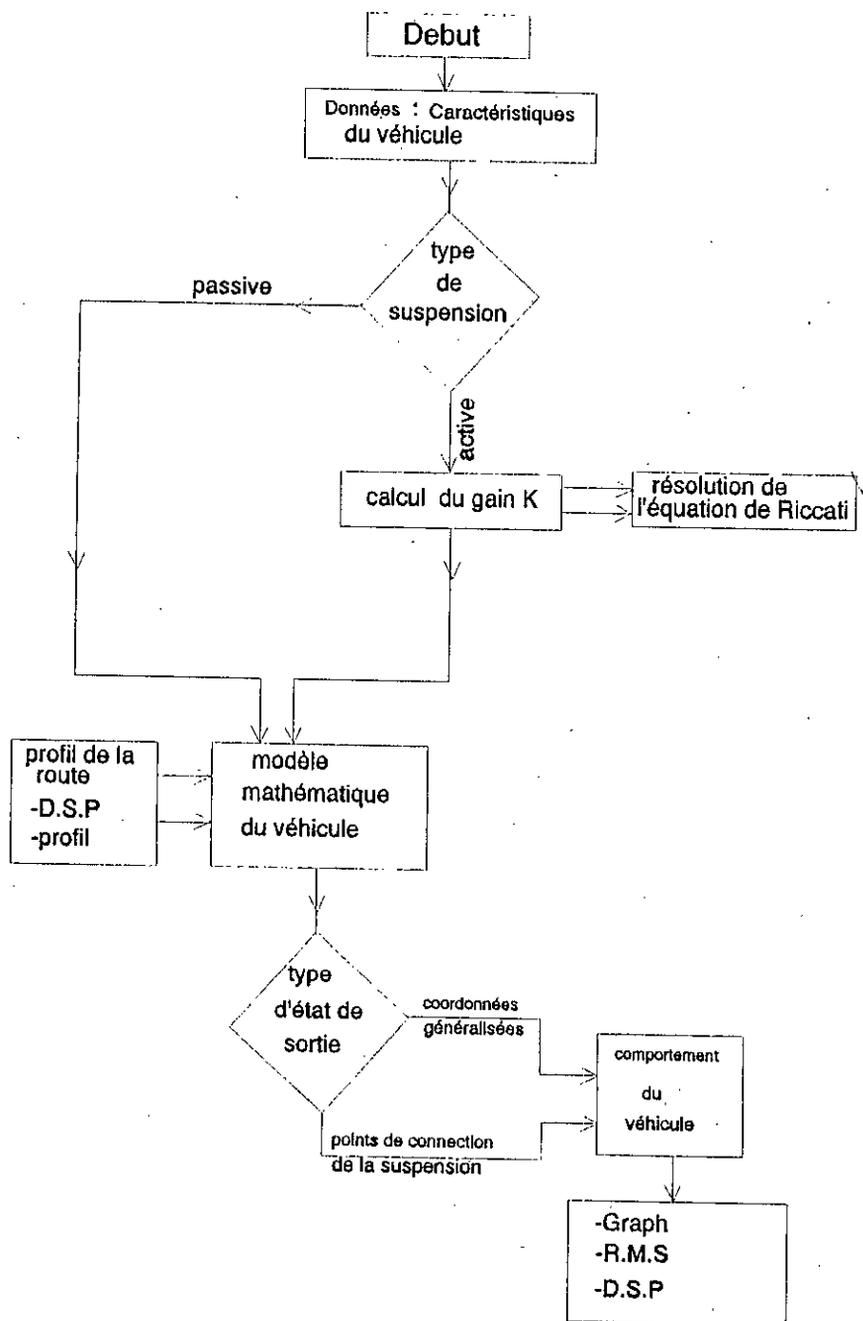
les matrices  $A_6$ ,  $A_8$  et  $S$  sont définies dans l'annexe V

$$J_4 = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^{24} \sum_{j=1}^{24} K(k,i) K(k,j) X(i,j) \quad (4-12)$$

et en fin l'indice de performance total se calcule comme suit;

$$J = J_1 + \rho_1 J_2 + \rho_2 J_3 + \rho_3 J_4 \quad (4-13)$$

## 4.4. ALGORITHME DE SIMULATION



## 4.5. ETUDE DES PERFORMANCES DU CAMION K-66 SUR UNE ROUTE A PROFIL DE TYPE BRUIT BLANC INTEGRE

### 4.5.1: Détermination des paramètres optimaux du système de suspension passive

La technique de la commande optimale stochastique énoncée à l'annexe III est applicable aussi bien pour l'optimisation des systèmes passifs que pour les systèmes actifs.

Pour les systèmes passifs il suffit de prendre le coefficient de pondération  $\rho_3$  très élevé ou bien annuler la matrice  $B_x$  (2-28) du système d'équations d'état (2-31).

La recherche des paramètres optimaux de la suspension (raideur, amortissement) se fait en fixant un paramètre et en faisant varier l'autre.

Pour la détermination de la raideur des ressorts, on tient compte du rapport entre la raideur des ressorts avant et arrière qui est égale à 2,71. Ce rapport est nécessaire pour obtenir approximativement l'égalité entre la valeur propre de tangage et celle du déplacement vertical, comme il permet de donner approximativement la même déformation statique aux ressorts avant et arrière [9].

Le choix des paramètres optimaux se fait sur la base de l'indice de performance. Les valeurs optimales sont celles qui minimisent l'indice de performance.

Les figures de (4-1) et (4-2) montrent la variation de l'indice de performance et de ses différents termes en fonction de la raideur et de l'amortissement des éléments passifs de la suspension pour différents coefficients de pondération. Dans le tableau (4-1) sont donnés les paramètres qui minimisent l'indice de performance pour différents coefficients de pondération.

On remarque, d'après ce tableau que les paramètres qui donnent la meilleure performance sont:

$$\rho_1=0.110^4 \quad , \quad \rho_2=10^5$$

$$K_5=K_6=10000N/m$$

$$K_7=K_8=27100N/m$$

$$L_1=L_2=L_3=L_4=5000Ns/m$$

mais ces valeurs ne sont pas acceptables du point de vue pratique car elles donnent une très grande déformation statique qui est de l'ordre de 0,73 m [4,38].

Pour minimiser la déformation statique on est obligé de prendre:

$$K_5=K_6=30000N/m$$

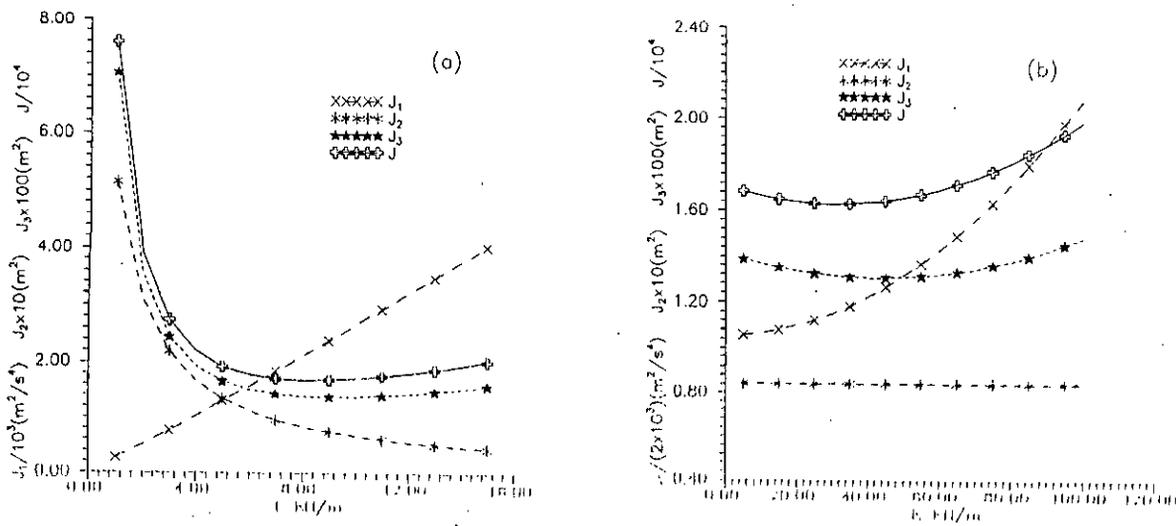
$$K_7=K_8=81300N/m$$

bien que l'indice de performance globale est beaucoup plus élevé.

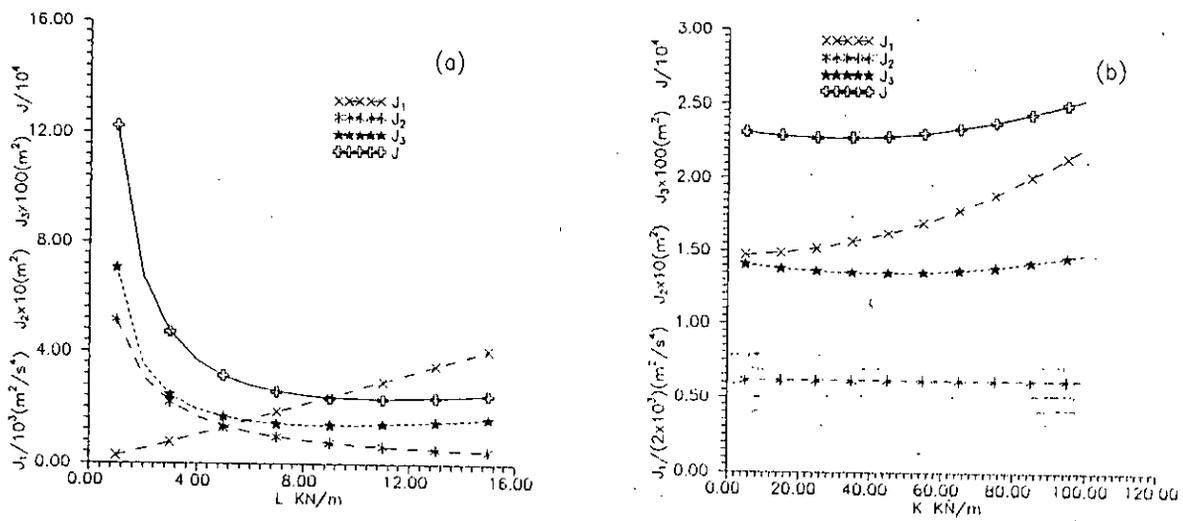
Pour des considérations techniques, ces paramètres sont faibles, et demeurent loin de la réalité pratique. Quoi que le modèle étudié est à trois dimension représentant le véhicule complet, plusieurs effets fondamentaux d'interaction entre le véhicule et le sol sont négligés.

La simulation du comportement du véhicule avec les paramètres du système de suspension passif optimal est donnée par la figure (4-5). Cette figure montre clairement les améliorations des performances du véhicule comparées à celles du véhicule doté de suspension réelle. On remarque d'après ces figures que les éléments passifs optimaux ont permis d'une part, de réduire considérablement les amplitudes des différentes réponses et du système et d'amortir plus rapidement les oscillations des réponses transitoires du système d'autre part.

Pour les mêmes coefficients de pondération que ceux du tableau (2-1), le tableau (4-1) montre bien les améliorations des performances du camion doté d'une suspension passive optimale par rapport à celles de la suspension réelle.



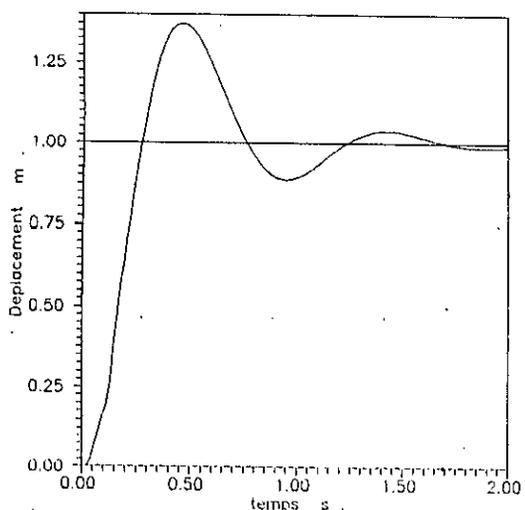
Fig(4-1): variation de l'indice de performance et ses différents termes en fonction de la raideur et de l'amortissement de la suspension pour  $\rho_1 = 1 \cdot 10^4$   $\rho_2 = 10 \cdot 10^5$



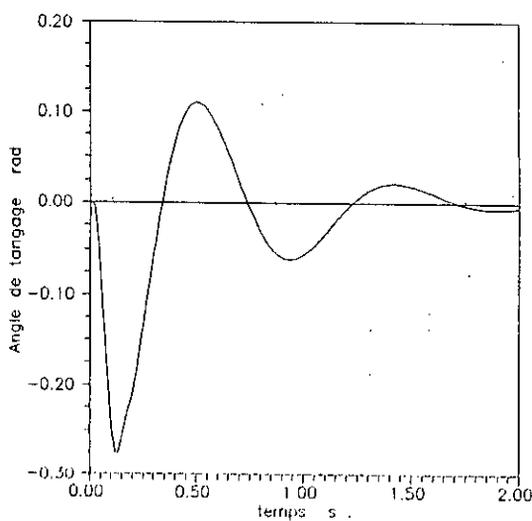
Fig(4-2): variation de l'indice de performance et ses différents termes en fonction de la raideur et de l'amortissement de la suspension pour  $\rho_1 = 10 \cdot 10^4$   $\rho_2 = 10 \cdot 10^5$

Tableau(4-1): Caractéristiques optimales du système passif en fonction des coefficients de pondération.

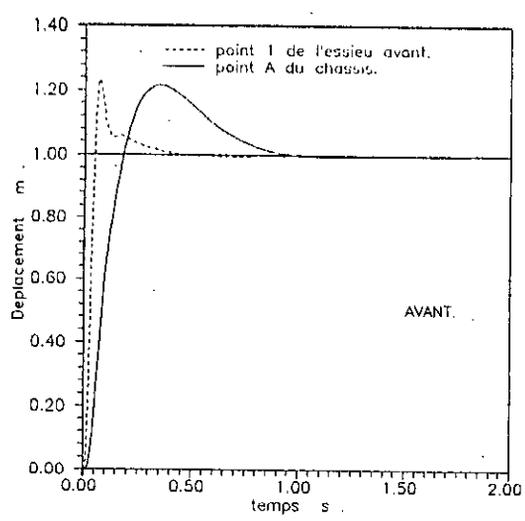
$\rho_1 10^4$	$\rho_2 10^5$	$K[N/m]$	$L[Ns/m]$	$J_1/10^3$	$J_2/10^{-2}$	$J_3/10^{-2}$	$J_4$	$J/10^4$
0.1	0.1		2000					
	1	10000	5000	1.3209	13.4640	1.6297		0.3085
	5	25000	7000	1.9860	9.6247	1.3555		0.8859
	10	30000	8000	2.3007	8.4231	1.3158		1.5543
1	0.1		8000					
	0.5		6000					
	1	10000	6000	1.5889	11.2310	1.4838		0.4195
	5	15000	6000	1.1646	10.5770	0.8459		0.6451
	10	30000	8000	2.3007	8.4231	1.3158		1.6301
5	0.1		11000					
	1		8000					
	5	25000	10000	2.7695	6.7375	1.3345		1.2811
	10	30000	10000	2.8156	6.7374	1.3275		1.9459
10	0.1		15000					
	1		14000					
	5	25000	12000	3.3041	5.6131	1.4000		1.5917
	10	30000	11000	3.0781	6.1241	1.3558		2.2760



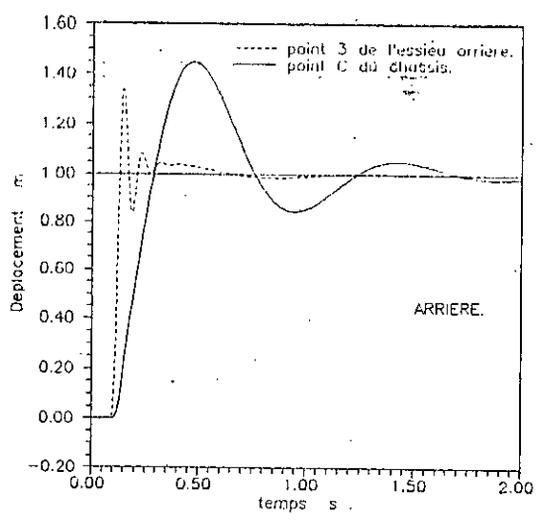
(a) Déplacement du centre de gravité du châssis.



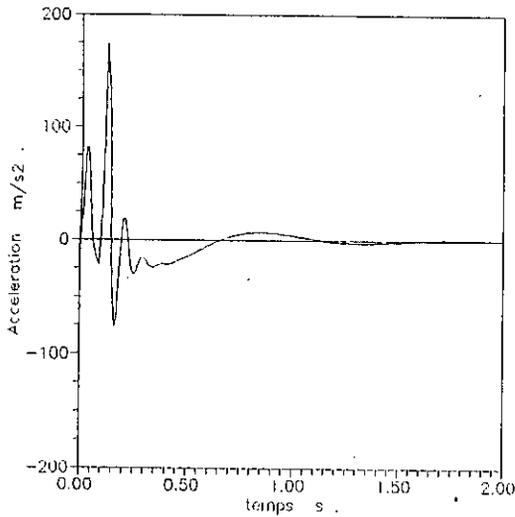
(b) Angle de tangage du châssis.



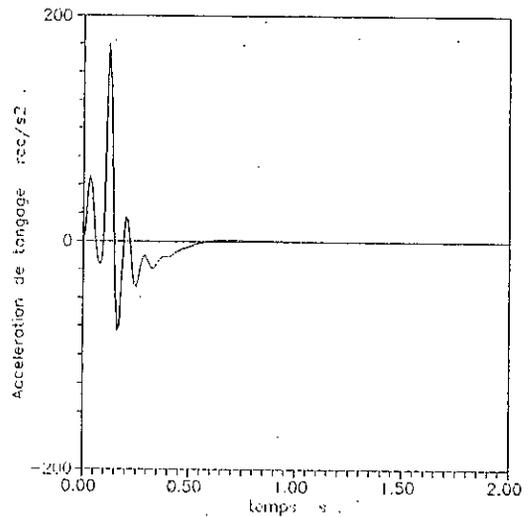
(c) Déplacement des points A et 1 du véhicule.



(d) Déplacement des points C et 3 du véhicule.



(e) Accélération du centre de gravité du châssis.



(f) Accélération de tangage du châssis.

Fig(4-3): Performance du camion uniformément chargé avec les paramètres passifs optimaux A et C les points de fixation de la suspension avant et arrière sur le châssis 1 et 3 les points de fixation de la suspension sur les essieux avant et arrière.

#### 4.5.2. Détermination des paramètres optimaux du système de suspension active

La détermination des paramètres du système actif exige le choix des coefficients de pondération qui minimisent l'indice de performance globale.

En premier, nous négligerons les éléments passifs de la suspension, ce qui nous donnera un système purement actif.

Pour le système actif, le choix du coefficient de pondération  $\rho_3$  qui minimise l'indice de performance est lié à la force de commande. Ce dernier doit être bien choisi pour avoir un système actif avec le minimum de dépense d'énergie.

Les figures de (4-4) et (4-5) nous montrent la variation de l'indice de performance

globale en fonction de  $\rho_3$  pour différents valeurs de  $\rho_1$  et  $\rho_2$ .

Nous remarquons à partir de ces courbes que l'indice de performance est minimum pour des valeurs de  $\rho_3 < 10^{-7}$  avec la force de commande maximale, ce qui correspond bien à un système actif.

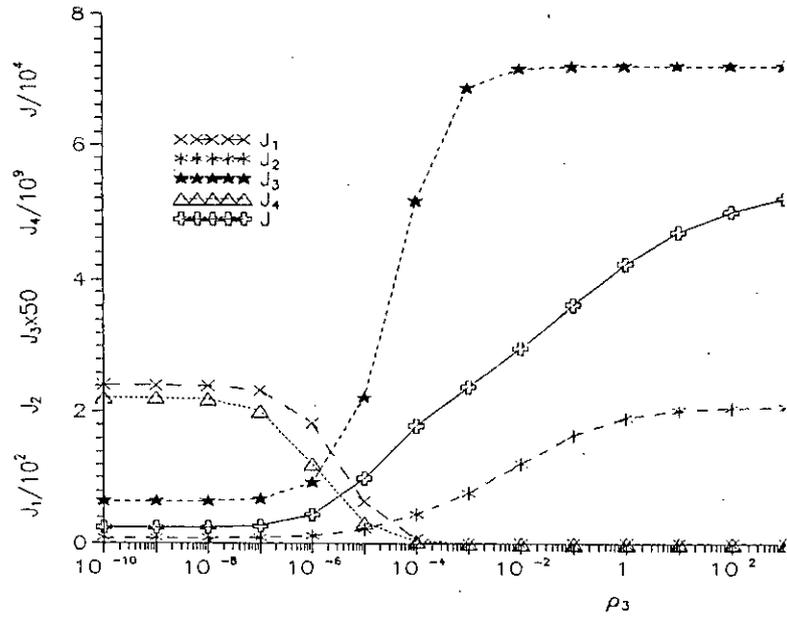
Pour  $\rho_3 > 10^{-2}$ , la force de commande est très faible et dans ce cas le système devient passif avec un indice de performance beaucoup plus élevé.

Les valeurs des coefficients de pondération  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  et  $\rho_3$ , pour la simulation le comportement du véhicule uniformément chargé sont choisis des figures (4-5) et (4-5) et du tableau (4-2).

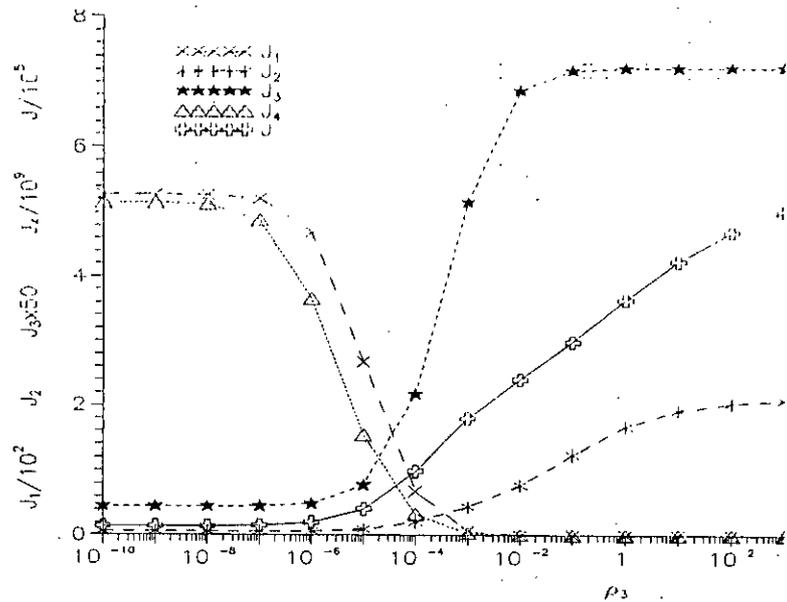
-  $\rho_3$  est pris égal à  $10^{-8}$ , valeurs qui correspondent à la limite entre la suspension active et passive.

-  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont égaux respectivement à  $10^4$  et  $10^5$ , valeurs qui donnent aux termes  $J_2$  et  $J_3$  de l'indice de performance, pour le véhicule uniformément chargé, des valeurs très proche de celles données par [1,2].

Les améliorations des performances du véhicule uniformément chargé doté de suspension active, comparées à celles des cas de suspension passive réelle et passive optimale, sont bien illustrées sur les courbes de la figure (4-6). on remarque de ces figures que le système actif contrôle bien les oscillations du châssis cependant, il donne de plus grandes amplitudes aux oscillations des essieux, ce qui conforme aux observations données dans [1].



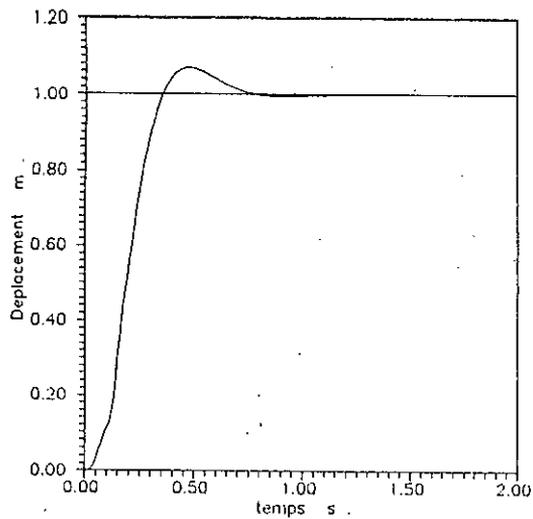
Fig(4-4): variation de l'indice de performance et ses différents termes en fonction de  $\rho_3$  pour  $\rho_1 = 10^4$   $\rho_2 = 10^5$



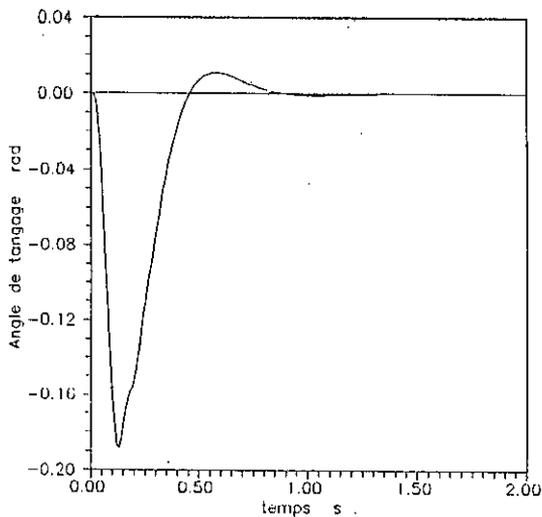
Fig(4-5): variation de l'indice de performance et ses différents termes en fonction de  $\rho_3$  pour  $\rho_1 = 10^4$   $\rho_2 = 10^5$

Tableau(4-2): Caractéristiques optimales du système actif en fonction des coefficients de pondération pour  $\rho_3=10^{-08}$ .

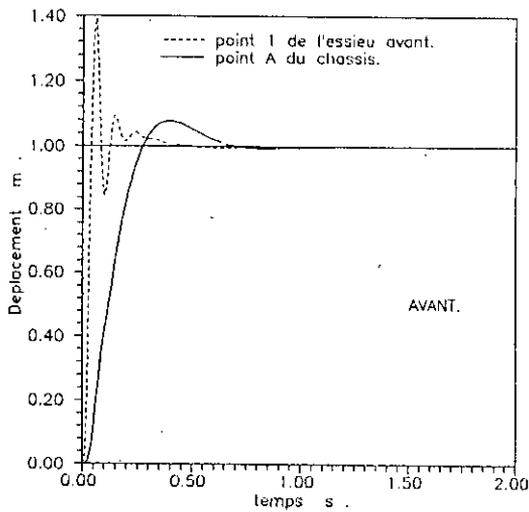
$\rho_1 10^4$	$\rho_2 10^5$	$K[N/m]$	$L[Ns/m]$	$J_1/10^3$	$J_2/10^{-2}$	$J_3/10^{-2}$	$J_4/10^9$	$J/10^4$
0.1	0.1	0	0	0.0590	18.9750	3.2996	0.3987	0.0582
	1	0	0	0.2025	11.9980	1.3968	1.5489	0.1734
	5	0	0	0.3715	9.3396	0.9273	3.0709	0.5132
	10	0	0	0.4572	10.2500	0.8054	3.9140	0.8656
1	0.1	0	0	0.1275	10.5520	2.1995	1.0773	0.1413
	0.5	0	0	0.1970	9.1454	1.5121	1.6098	0.1880
	1	0	0	0.2409	8.4753	1.2748	2.0086	0.2383
	5	0	0	0.3857	7.4716	0.9253	3.2833	0.5792
	10	0	0	0.4641	7.5352	0.8123	4.0293	0.9381
5	0.1	0	0	0.3236	5.7430	1.3515	3.0025	0.3360
	1	0	0	0.3665	5.5378	1.1604	3.3898	0.4329
	5	0	0	0.4398	5.7374	0.9499	3.9960	0.8098
	10	0	0	0.4932	6.1134	0.8411	4.4614	1.2006
10	0.1	0	0	0.4944	4.1978	1.3017	4.7248	0.4869
	1	0	0	0.4907	4.3130	1.2051	4.7231	0.6056
	5	0	0	0.4981	4.8327	1.0058	4.7193	1.0407
	10	0	0	0.5264	5.3130	0.8847	4.9159	1.4736



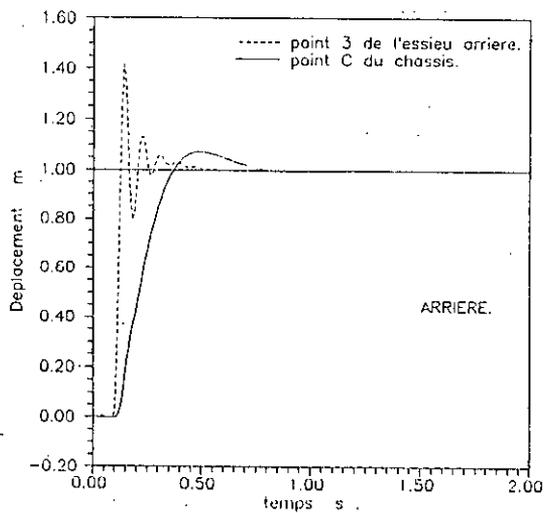
(a) Déplacement du centre de gravité du chassis.



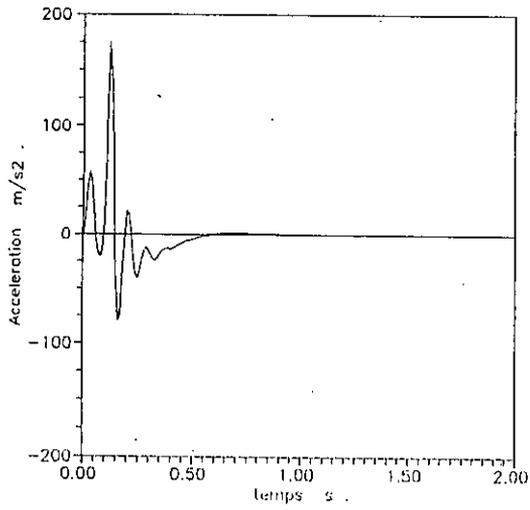
(b) Angle de tangage du chassis.



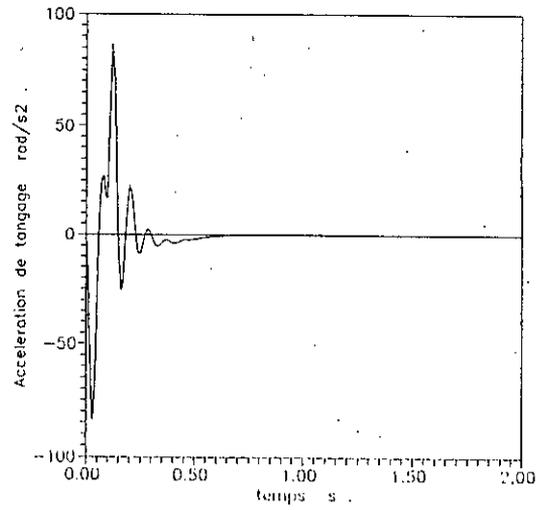
(c) Déplacement des points A et 1 du véhicule.



(d) Déplacement des points C et 3 du véhicule.



(e) Accélération du centre de gravité du châssis.



(f) Accélération de tangage du châssis.

Fig(4-6): Performance du camion uniformément chargé doté de suspension active.

A et C les points de fixation de la suspension avant et arrière sur le châssis  
1 et 3 les points de fixation de la suspension sur les essieux avant et arrière.

### 4.5.3. Etude de l'efficacité du système de suspension semi-active

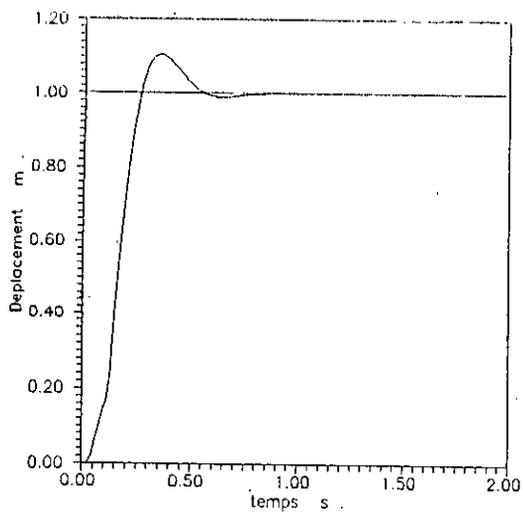
Dans le but de réaliser un compromis entre les avantages et les inconvénients des systèmes de suspension actives et passives, nous avons procédé à l'analyse d'un système de suspension semi-active. Ce système de suspension est formé par le système passif réel (donné par la SNVI) et d'un actionneur donnant une force de commande parallèle à ce dernier.

Pour l'analyse de l'efficacité de ce système, nous avons pris les mêmes valeurs des coefficients de pondération utilisés pour le calcul du gain de commande du système de suspension active.

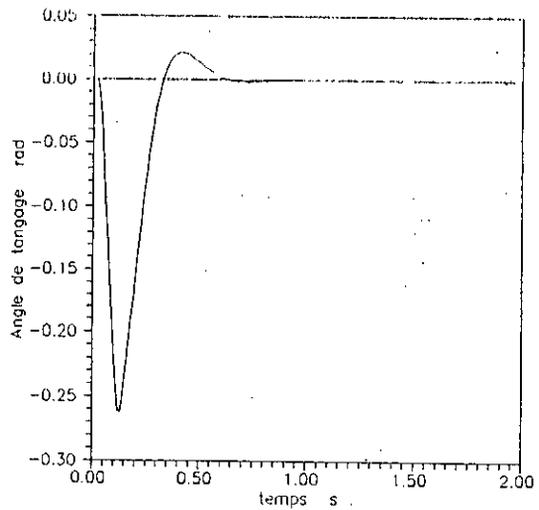
Les courbes de simulation du comportement du véhicule uniformément chargé doté d'un système de suspension semi-active sont données par les courbes de la figure (4-7) et dans le tableau (4-3). La comparaison de ces résultats avec les résultats donnés par les courbes de la figure (2-1) et tableau (2-1) pour le système de suspension passive et avec la figure (4-6) et le tableau (4-2) pour le système de suspension active, nous permet de déduire que les performances du système semi-actif sont meilleurs que celles du système passif bien qu'elles restent moins bonnes que celles du système actif. Nous remarquons aussi que le système semi-actif contrôle bien les oscillations des essieux, et donne une légère augmentation aux amplitudes des accélérations et des déplacements du châssis.

Tableau (4-3): Performance du camion uniformément chargé doté d'un système de suspension semi-active

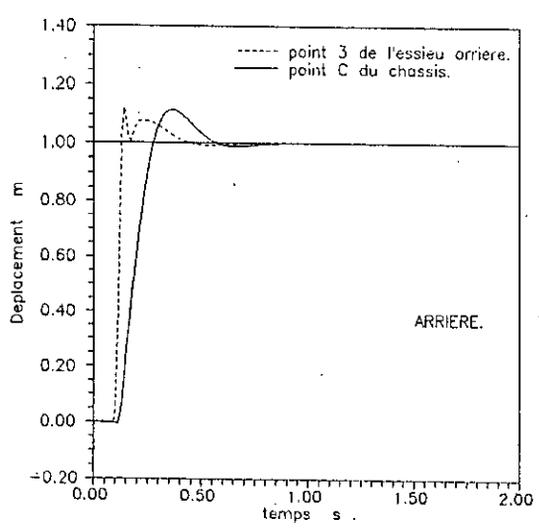
$\rho_1 10^4$	$\rho_2 10^5$	$K_{av} N/m$	$K_{ar} N/m$	$L_{av} Ns/m$	$L_{ar} Ns/m$	$J_1/10^3$	$J_2/10^{-2}$	$J_3/10^{-2}$	$J_4/10^9$	$J/10^4$
0.1	0.1	150000	400000	2500	5000	12.136	16.350	2.9957	13.378	1.2733
	1	"	"	"	"	7.5184	11.025	1.3686	8.2789	0.9080
	5	"	"	"	"	5.8781	8.8410	0.9251	6.5229	1.0657
	10	"	"	"	"	6.2570	9.3652	0.8564	6.8687	1.4476
1	0.1	"	"	"	"	7.2789	10.150	2.0974	7.5641	0.8579
	0.5	"	"	"	"	6.0676	8.8884	1.4852	6.2047	0.7761
	1	"	"	"	"	5.5460	8.2720	1.2622	5.7202	0.7692
	5	"	"	"	"	4.8846	7.3690	0.9240	5.3821	1.0296
	10	"	"	"	"	5.0145	7.4593	0.8120	5.7995	1.3939
5	0.1	"	"	"	"	3.6480	5.6802	1.3397	3.8265	0.6660
	1	"	"	"	"	3.4810	5.4937	1.1575	3.7238	0.7422
	5	"	"	"	"	3.6803	5.7073	0.9498	4.0562	1.1324
	10	"	"	"	"	4.0300	6.0877	0.7413	4.5913	1.5533
10	0.1	"	"	"	"	2.5542	4.1744	1.2997	3.7035	0.6895
	1	"	"	"	"	2.6293	4.2934	1.2046	3.6305	0.8163
	5	"	"	"	"	3.0363	4.8173	1.0061	3.7200	1.2921
	10	"	"	"	"	3.4510	5.2990	0.8850	4.1088	1.7641



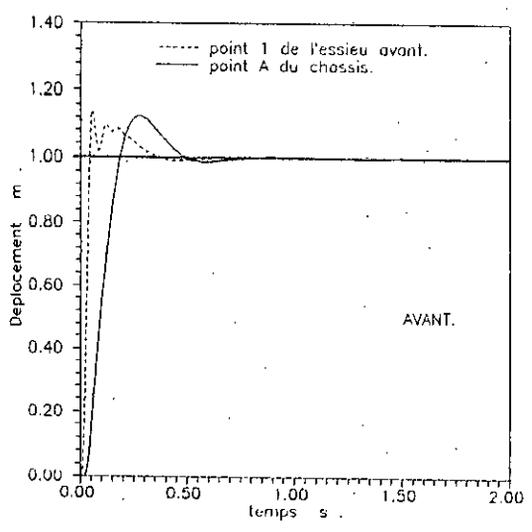
(a) Déplacement du centre de gravité du chassis.



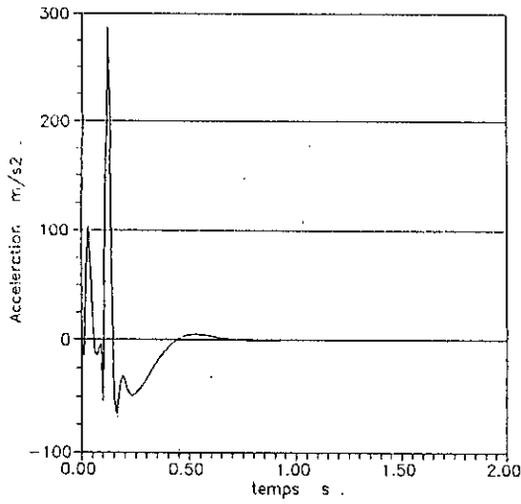
(b) Angle de tangage du chassis.



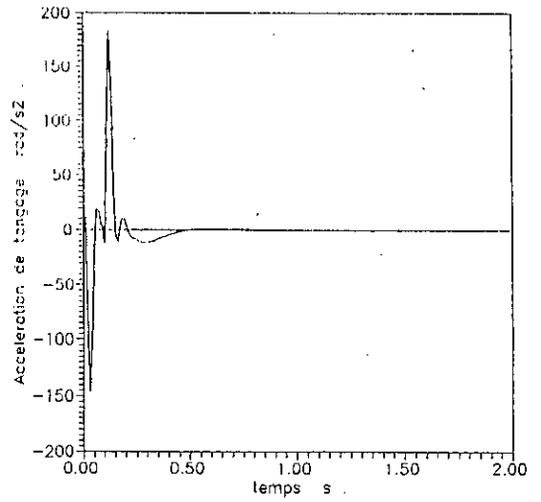
(d) Déplacement des points C et 3 du véhicule.



(c) Déplacement des points A et 1 du véhicule.



(e) Accelération du centre de gravité du châssis.



(f) Accelération de tangage du châssis.

Fig(4-7): Performance du camion uniformément chargé doté de suspension semi-active  
 A et C les points de fixation de la suspension avant et arrière sur le châssis  
 1 et 3 les points de fixation de la suspension sur les essieux avant et arrière.

#### 4.6. PERFORMANCE DES DIFFERENTS TYPES DE SUSPENSION POUR UNE ROUTE A PROFIL DE TYPE BRUIT BLANC FILTRE

L'étude des performances du véhicule avec les différents types de suspension est faite sur un profil de bruit blanc filtré de la forme (4-2):

Cette forme de la densité spectrale, utilisée par Hac [4], est de la même forme que celle donnée au chapitre 1 .

Pour les mêmes coefficients de performance que ceux utilisés par Hac [4] ( $\rho_1=10^4$  ,  $\rho_2=10^5$  et  $\rho_3=10^8$  pour le système passif  $10^{-8}$  pour le système actif), nous avons calculé les différents termes de l'indice de performance du véhicule pour différents types de suspension, en utilisant les techniques données à l'annexe III.

Tableau(4-4): Performance du véhicule sur une route pavée

type de suspension	$J_1/10^6$ $mm^2/s^4$	$J_2/100$ $mm^2$	$J_3/10$ $mm^2$	$J_4/10^6$ $N^2$	$J/10^6$
passive réelle (S.N.V.I)	84.4490	20.2900	40.5410	0	145.2800
passive optimale	18.8450	5.2929	16.5150	0	40.6530
active	9.9757	5.2721	17.1240	36.9950	32.7470
semi-active	10.6270	5.0990	16.8540	41.4270	32.9940

Les tableaux (4-4) et (4-5) donnent les performances du véhicule uniformément chargé se déplaçant respectivement sur une route pavée ( $\sigma^2=300 \cdot 10^{-6} m^2$  ,  $a=0.4 m^{-1}$  ) à la vitesse  $v=20m/s$  et sur une route goudronnée ( $\sigma^2=9 \cdot 10^{-6} m^2$  ,  $a=0.15 m^{-1}$  ) à une vitesse de  $30 m/s$ .

Tableau(4-5): Performance du véhicule sur une route goudronnée

type de suspension	$J_1/10^5$ $mm^2/s^4$	$J_2/10$ $mm^2$	$J_3$ $mm^2$	$J_4/10^5$ $N^2$	$J/10^5$
passive réelle (S.N.V.I)	16.7160	4.1316	7.2827	0	28.136
passive optimale	3.0136	1.2947	2.6000	0	6.9083
active	1.5771	1.2143	2.6343	5.8989	5.4846
semi-active	1.7030	1.1521	2.6258	8.2903	5.5638

Nous remarquons d'après ces résultats que le système actif est toujours plus performant que les systèmes passif réel et passif optimal. Le système semi-actif présente des qualités intermédiaires, mais exige une force de commande plus élevée que celle donnée pour le système actif. Ceci est dû aux effets des éléments passifs de la suspension.

Les résultats donnés dans les deux tableaux ci-dessus, sont de même ordre de grandeurs que ceux donnés par Hac [4]. Ce qui nous permet de confirmer la validité des paramètres des suspensions que nous avons déterminés.

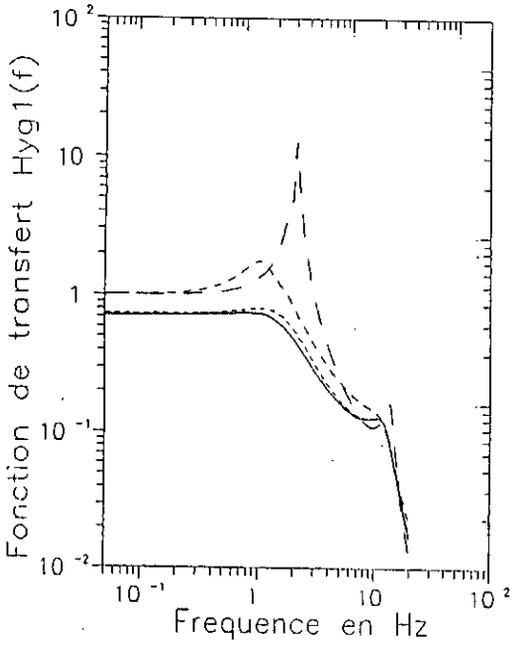
#### 4.7. CARACTERISTIQUES FREQUENTIELLES DU SYSTEME POUR DIFFERENTS TYPES DE SUSPENSION

La simulation du comportement du véhicule, doté de différents types de suspension, dans le domaine fréquentiel est faite au moyen de la fonction de transfert de l'équation (III-31) (annexe III). Les différentes densités spectrales de sortie sont obtenues au moyen de l'équation (II-32)(annexe III). Nous utiliserons la même matrice de densité spectrale d'entrée que celle utilisée dans la simulation dans le domaine fréquentiel du système passif (voir 2.3.8 chapitre 2).

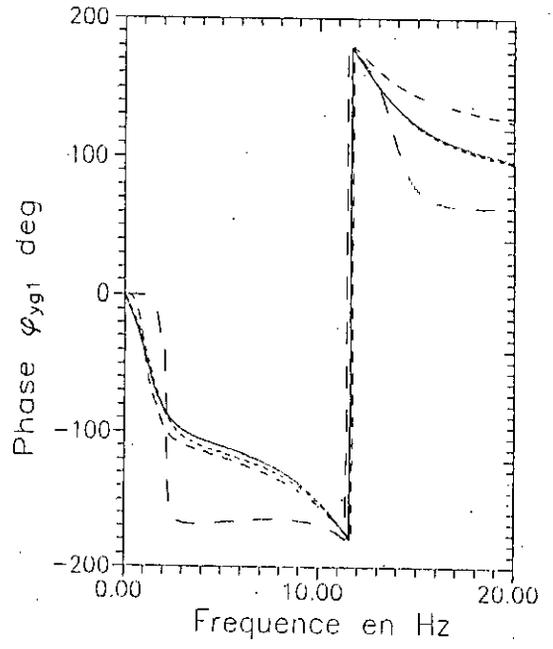
Sur la figure (4-8), on remarque que les performances du véhicule se sont améliorées par l'utilisation des systèmes de suspension passive optimale, semi-active et active.

Le système de suspension passive optimale donne des améliorations importantes des performances du véhicule. Cependant, comme nous l'avons déjà mentionné, ce système est très souple et ne peut être pratiquement utilisé. Nous remarquons sur les figures (a) jusqu'à (h) que les système de suspension passive optimale, semi-active et active ont réduit considérablement les pics dus à la raisonance.

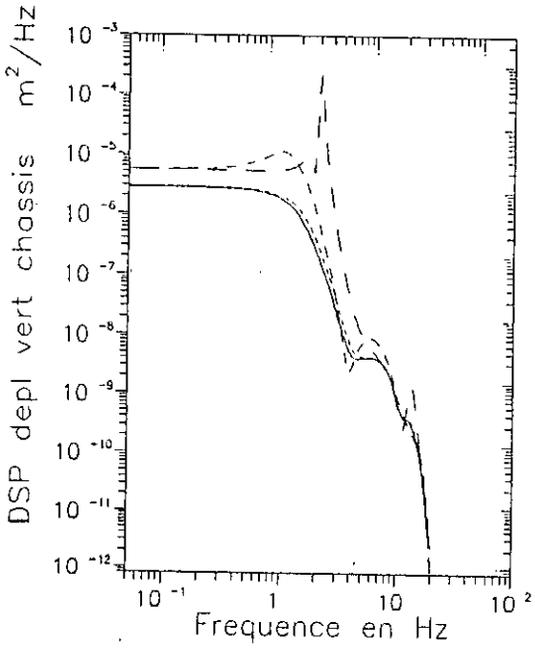
En fin nous tenons à signaler que les résultats que nous avons obtenus concordent bien avec les résultats donnés par la publication [31,32].



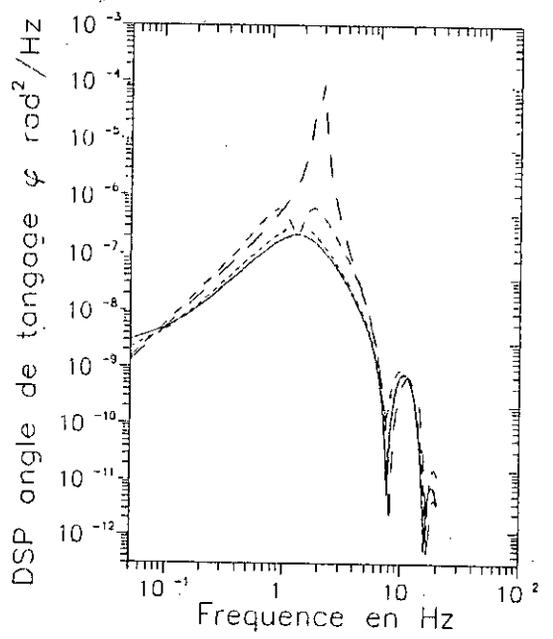
Fig(4-8-a)



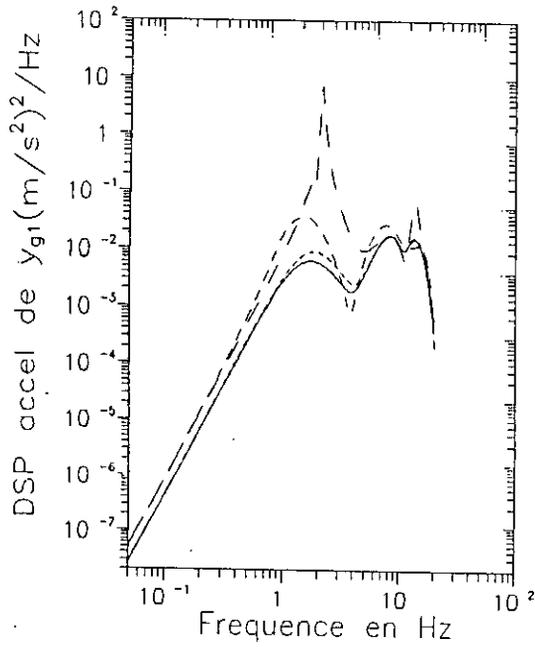
Fig(4-8-b)



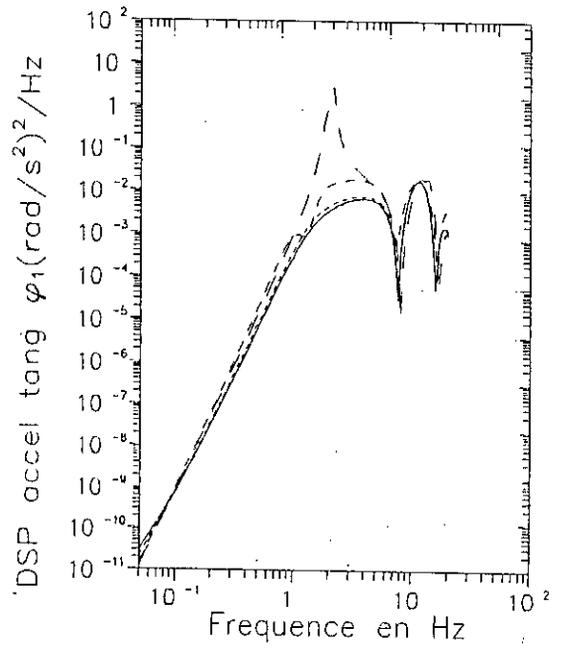
Fig(4-8-c)



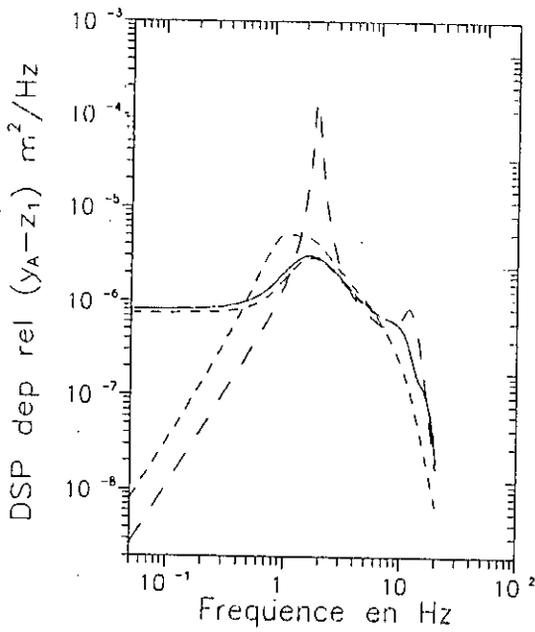
Fig(4-8-d)



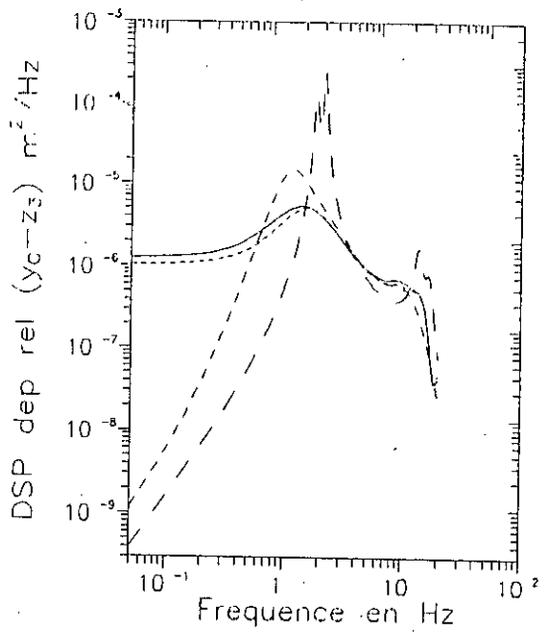
Fig(4-8-e)



Fig(4-8-f)



Fig(4-8-g)



Fig(4-8-h)

Fig(4-8): Caractéristiques fréquentielles du camion uniformément chargé doté de différents types de suspension

— — — passive, - - - - - passive optimale, - - - - - semi-active, ——— active

#### 4.8. ETUDE DES PERFORMANCES DU SYSTEME DE SUSPENSION ACTIVE A COMMANDE PRE-INFORMEE

L'équation différentielle du mouvement vertical du véhicule est donnée par le système d'équations (2-31). La commande optimale est déterminée dans le but de minimiser l'indice de performance (III-21) de l'annexe III qui peut être représenté sous la forme suivante:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x_q^T \ u^T] \begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_q \\ u \end{bmatrix} dt \quad (4-14)$$

où  $x_q(t)$  est le vecteur augmenté:

$$x_q(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ h(t) \end{bmatrix} \quad (4-15)$$

Le vecteur  $x(t)$  de dimension (20x1) représente les états du système et  $h(t)$ , est le vecteur de perturbation de dimension (4x1) provenant du profil de la route.

Le développement de notre indice de performance a montré que la matrice  $N$  de dimension (24x4) est de la forme suivante:

$$N = \begin{bmatrix} N_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-16)$$

la matrice  $N_x$  est de dimension (4x20)

L'indice de performance (4-14) peut être alors développé à la forme suivante:

Ce qui nous permet d'écrire:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T \quad h^T \quad u^T] \begin{bmatrix} Q_x & Q_{xw} & N \\ Q_{xw}^T & Q_w & 0 \\ N^T & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ h \\ u \end{bmatrix} dt \quad (4-17)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q_x x + u^T R u + h^T Q_w h + 2x^T Q_{xw} h + 2x^T N u) dt \quad (4-18)$$

Cette forme de l'indice de performance est identique à celle de (V-2) de l'annexe V.

La détermination de la trajectoire d'état (voir annexe V) nécessite la détermination du vecteur [11]

$$g_{\tau}(t) = \int_t^{t+\tau} e^{A_c^T(s-t)} M h(s) ds \quad t \geq 0 \quad (4-19)$$

$$g_{\tau}(t+\tau) = 0$$

Le vecteur de perturbation  $h(t)$  pour le cas de notre modèle est formé de quatre perturbations;  $h_1(t)$  et  $h_2(t)$  reçues par les roues avant,  $h_3(t)$  et  $h_4(t)$  reçues par les roues arrière.

Puisque notre système est linéaire et invariant dans le temps l'équation (4-19) peut s'écrire comme suit [11]:

$$g_{\tau}(t) = \int_t^{t+\tau} e^{A_c^T(s-t)} M w_1(s) ds + \int_t^{t+\tau} e^{A_c^T(s-t)} M w_2(s) ds \quad (4-20)$$

où

$$w_1(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad w_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_3(t) \\ h_4(t) \end{bmatrix} \quad (4-21)$$

En pratique les perturbations reçues par les roues arrière sont des répliques de celles reçues par les roues avant mais avec un retard

$$\Delta = \frac{l}{v} \quad (4-22)$$

où,  $l$  est l'empattement et  $v$  est la vitesse de déplacement du véhicule.

Ainsi, l'actionneur arrière peut être contrôlé par les informations reçues par le capteur avant. Ceci donne davantage de temps de pré-information. Le vecteur  $g_\tau(t)$  de l'équation (4-20) peut se calculer comme suit:

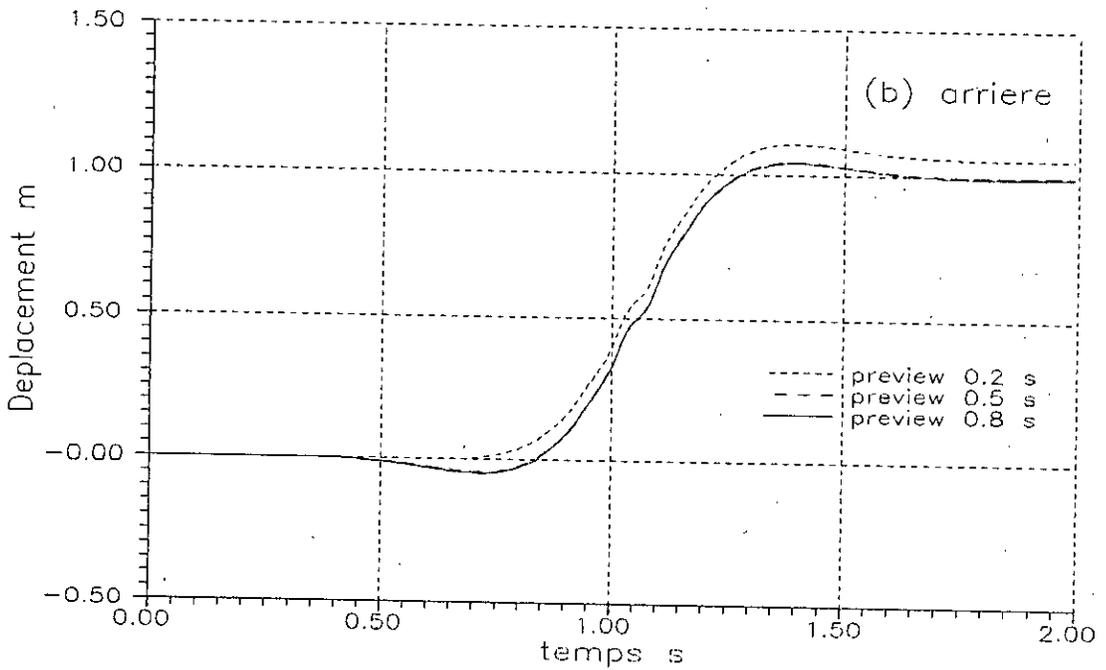
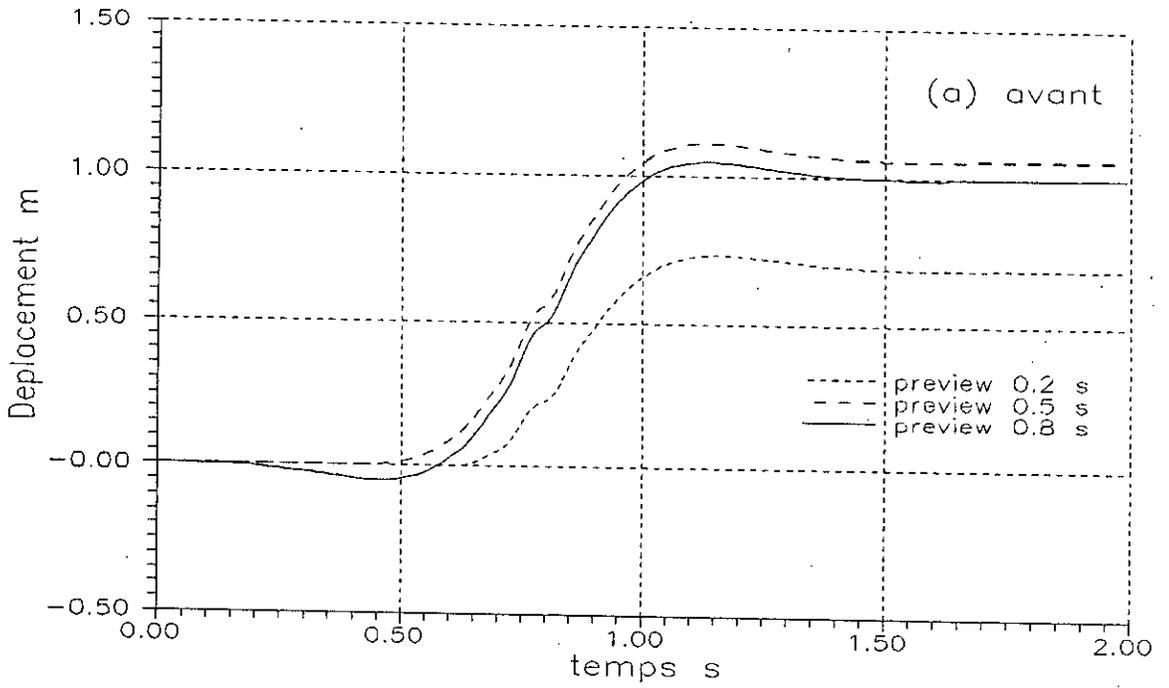
$$g_\tau(t) = \int_t^{t+\tau} e^{A_c^T(s-t)} M w_1(s) ds + \int_t^{t+\tau+\Delta} e^{A_c^T(s-t)} M w_2(s) ds \quad (4-23)$$

L'application de la suspension active à commande pré-informée sur camion K-66 nous a conduit aux résultats suivants:

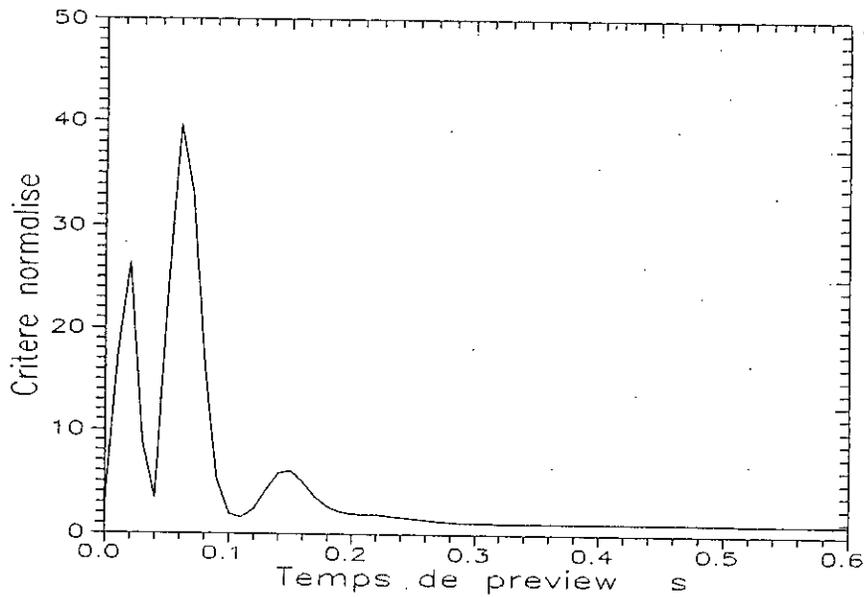
La figure (4-9) est la réponse du châssis à l'excitation échelon unité pour différentes valeurs du temps de pré-information pour  $\rho_1=10^4$ ,  $\rho_2=10^5$  et  $\rho_3=10^{-8}$  qui se déplace à une vitesse de 10 m/s.

On remarque que pour un temps de pré-information inférieur à 0.8 seconde, la commande pré-informée induit une erreur statique sur la réponse de l'avant du châssis, par contre à l'arrière, cette erreur n'est remarquée que pour un temps de pré-information inférieur à 0.5 seconde.

Les performances du système de suspension à commande pré-informée sont fonction du temps de pré-information (figure (4-10)). Sur cette figure on remarque que le critère de performance globale est faible pour un temps de pré-information supérieur à 0.35 seconde. Cependant le critère de performance globale se dégrade énormément pour un temps de pré-information inférieur à 0.1 s.



Fig(4-9): Déplacements verticaux du châssis:  
 (a) avant (b) arrière.



Fig(4-10): Variation du critère de performance en fonction du temps de preview pour un échelon unité

Le comportement du véhicule (camion K-66) représenté par la figure (4-11) (a) jusqu'à (f), est obtenu par simulation du camion doté d'un système de suspension active à commande pré-informée pour un temps de pré-information de 0.8 seconde et sans éléments passifs de la suspension.

Le système de suspension active à commande pré-informée révèle des performances meilleures que celles données par les autres types de suspension.

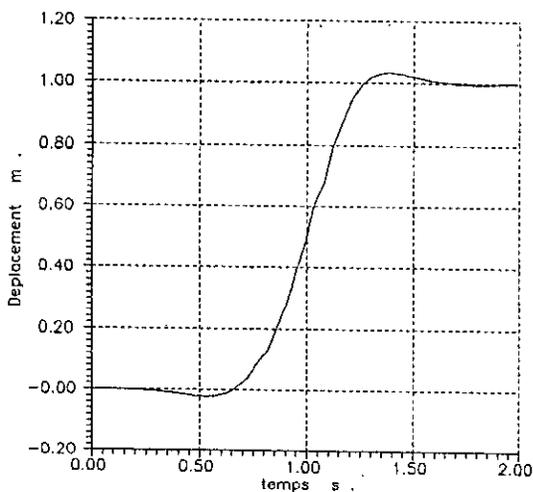
La comparaison de la figure (4-11) à la figure (4-6) correspondant au système de suspension active et à la figure (4-7) correspondant à au système de suspension semi-active nous conduit aux constatations suivantes:

Les réponses relatives au centre de gravité du châssis et des points de fixation de la suspension sur le châssis ont de plus faibles dépassements.

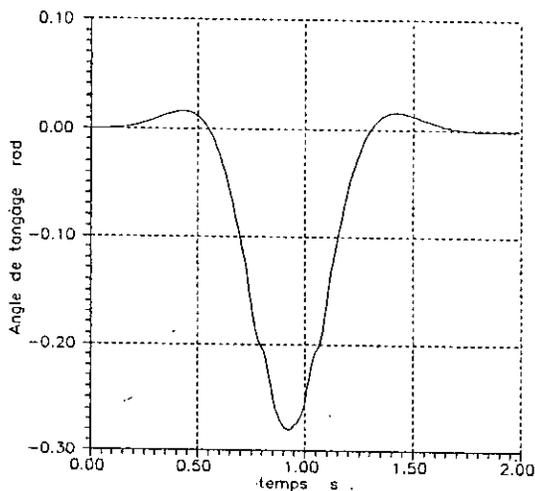
Les accélérations de déplacement vertical et de tangage du châssis (figure (4-11) (e) et (f)) sont considérablement réduites comparées à celles données par la suspension active et semi-active.

Par ailleurs nous signalons que le système de suspension active à commande pré-informée augmente l'angle de tangage du châssis (figure (4-11) (b)). Ceci peut être expliqué par le fait qu'au moment où les roues arrière se préparent à franchir l'obstacle, les roues avant l'ont déjà franchi. Par conséquent, l'angle de tangage est amplifié par le fait que l'avant du véhicule est soulevé vers l'arrière cependant l'arrière du véhicule s'est abaissé pour se préparer à franchir l'obstacle.

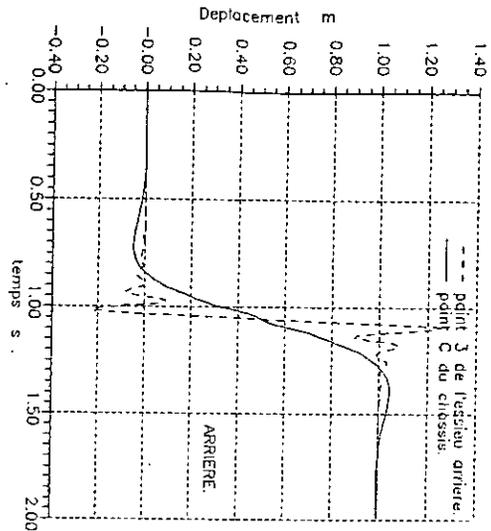
La simulation du comportement du camion avec le système de suspension active à commande pré-informée, en gardant les éléments passifs de la suspension, a donné des performances identiques à celles données par le même système dépourvu d'éléments passifs. Ce résultat est très important, du point de vue pratique, du fait qu'on puisse monter de tel système sur un véhicule existant.



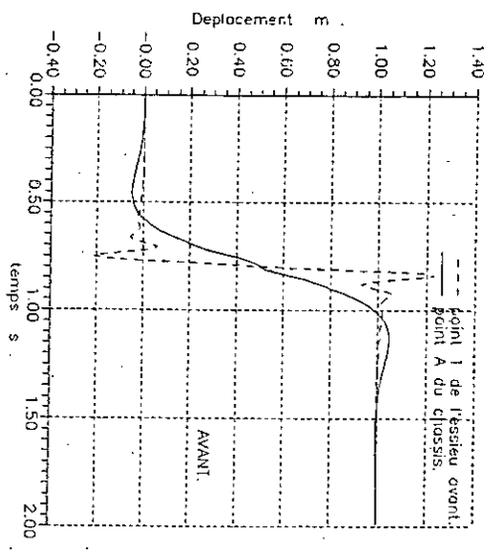
(a) Déplacement du centre de gravité du châssis.



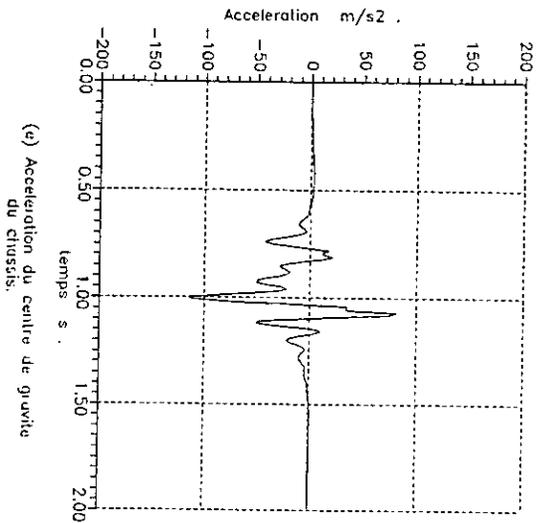
(b) Angle de tangage du châssis.



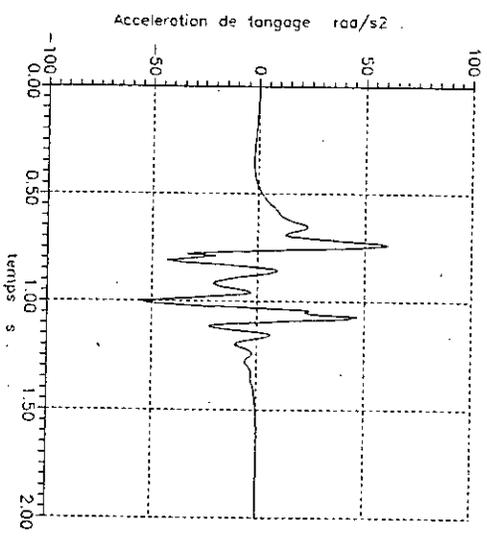
(d) Deplacement des points C et 3 du vehicule.



(c) Deplacement des points A et 1 du vehicule.



(v) Acceleration du centre de gravite du chassis.



(l) Acceleration de tangage du chassis.

Fig(4-11): Performance du camion uniformément chargé doté de suspension active à commande pré-informée

A et C les points de fixation de la suspension avant et arrière sur le châssis 1 et 3 les points de fixation de la suspension sur les essieux avant et arrière.

## 4.9. CONCLUSION

L'optimisation des différents types de suspension, a montré que le système de suspension passif réel adopté par la SNVI n'est pas optimal. Les paramètres passifs optimaux que nous avons déterminés ont donné de meilleurs performances. Mais nous notons que pour des raisons technologiques ces paramètres sont pratiquement inutilisés.

L'analyse du comportement du véhicule pour les trois types de suspension à montré que:

- le système de suspension à commande pré-informée est plus performant comparé aux systèmes actif et semi-actif

- le système semi-actif est avantageux du fait qu'il donne des performances très proches de ceux des systèmes actif et actif à commande pré-informée et donne un meilleur contrôle des oscillations des essieux.

## **CONCLUSION GENERALE**

La théorie de la commande optimale stochastique est très utilisée pour l'analyse de la dynamique des véhicules et en particulier l'analyse des systèmes actifs de suspension.

Elle donne la possibilité de calcul du comportement du véhicule pour tous les types de suspension (active, active à commande pré-informée, passive et semi-active).

Notre travail a été consacré à l'application de la technique de la commande optimale stochastique pour l'optimisation des différents types de systèmes de suspension (actif et passif) pour un véhicule à deux essieux.

L'application d'une telle technique nous a conduit à:

- 1/ modéliser le système complexe du véhicule par un système à dix degrés de liberté. Le modèle est obtenu en faisant de nombreuses restrictions sur la base de simplifications objectives (voir chapitre 2). Nous n'avons tenu compte que des mouvements qui agissent directement sur la suspension;
- 2/ développer l'indice de performance qui se compose de plusieurs termes regroupant les qualités désirées du véhicule;
- 3/ présenter sous la forme d'état le système d'équations différentielles de mouvement;
- 4/ donner la forme quadratique à l'indice de performance en fonction des variables d'état.

Dans notre travail, nous n'avons pas tenu compte de la dynamique de l'actionneur, et on a supposé que tous les états du système sont mesurables.

Finalement, nous pouvons faire les conclusions suivantes:

- a/ Améliorer les qualités vibratoires du véhicule par un système passif entraîne à l'utilisation d'une suspension très souple de raideur très faible. Cette suspension présente un inconvénient majeur du point de vue déformation statique.

b/ L'utilisation d'une suspension purement active sans éléments passifs présente de meilleures performances. Cependant, ce type de suspension pose en pratique le problème de l'équilibre statique et elle exige un apport d'énergie très important.

c/ le système actif à commande pré-informée est le système qui donne le plus d'avantages, il permet d'une part de réduire les oscillations des essieux et de mieux contrôler les accélérations et les déplacements du châssis.

d/ l'étude d'un système de suspension semi-actif, formé d'éléments passifs réels et d'un actionneur donnant la force de commande, nous a permis de réaliser un compromis entre les avantages et les inconvénients des systèmes passifs et actifs de suspension. Le système de suspension semi-actif présente des performances intermédiaires entre le système passif et le système actif. Avec un tel système les problèmes de la déformation et de l'équilibre statique sont évités. Le système semi-actif présente un intérêt très pratique. La réalisation de tel système peut se faire sur n'importe quel véhicule sans apporter aucune modification aux éléments passifs de la suspension

# **ANNEXES**

## **ANNEXE I**

### **EQUATIONS DE LA DYNAMIQUE DU SYSTEME**

## I.1. ENERGIE CINETIQUE DU SYSTEME EN FONCTION DES COORDONNEES GENERALISEES

$$\begin{aligned}
 T = & \left( \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} J_{m_1} \dot{\psi}_{m_1}^2 \right) + \left( \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} J_{m_2} \dot{\psi}_{m_2}^2 \right) + \left( \frac{1}{2} M_1 \dot{y}_{G_1}^2 \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} J_{L_1} \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} J_{I_1} \dot{\psi}_1^2 \right) + \left( \frac{1}{2} M_2 \dot{y}_{G_2}^2 + \frac{1}{2} J_{L_2} \dot{\phi}_2^2 + \frac{1}{2} J_{I_2} \dot{\psi}_2^2 \right)
 \end{aligned}
 \tag{I-1}$$

## I.2. ENERGIE POTENTIELLE DU SYSTEME EN FONCTION DES COORDONNEES GENERALISEES

$$\begin{aligned}
 V = & \frac{1}{2} K_1 (y_1 + b_1 \psi_{m_1} - h_1)^2 + \frac{1}{2} K_2 (y_1 - b_2 \psi_{m_2} - h_2)^2 + \frac{1}{2} K_3 (y_2 + b_3 \psi_{m_2} - h_3)^2 \\
 & + \frac{1}{2} K_4 (y_2 - b_4 \psi_{m_2} - h_4)^2 + \frac{1}{2} K_5 (y_{G1} - a_1 \phi_1 + b_5 \psi_1 - y_1 - b_1 \psi_{m_2})^2 \\
 & + \frac{1}{2} K_6 (y_{G1} a_1 \phi_1 - b_6 \psi_1 - y_1 + b_2 \psi_{m_1})^2 + \frac{1}{2} K_7 (y_{G1} + a_2 \phi_1 + b_7 \psi_1 - y_2 - b_3 \psi_{m_2})^2 \\
 & + \frac{1}{2} K_8 (y_{G1} + a_2 \phi_1 - b_8 \psi_1 - y_2 + b_4 \psi_{m_2})^2 \\
 & + \frac{1}{2} K_9 (y_{G2} - a_5 \phi_2 + b_{13} \psi_{m_2} - y_{G1} + a_3 \phi_1 - b_9 \psi_1)^2 \\
 & + \frac{1}{2} K_{10} (y_{G2} - a_5 \phi_2 - b_{14} \psi_2 - y_{G1} + a_3 \phi_1 + b_{10} \psi_1)^2 \\
 & + \frac{1}{2} K_{11} (y_{G2} + a_6 \phi_2 + b_{15} \psi_2 - y_{G1} + a_4 \phi_1 - b_{11} \psi_1)^2 \\
 & + \frac{1}{2} K_{12} (y_{G2} + a_6 \phi_2 - b_{16} \psi_2 - y_{G1} + a_4 \phi_1 + b_{12} \psi_1)^2
 \end{aligned}
 \tag{I-2}$$

### I.3. FONCTION DE DISSIPATION DE RAYLEIGH EN FONCTION DES COORDONNEES GENERALISEES

$$\begin{aligned}
 D = & \frac{1}{2}L_1(\dot{\gamma}_{G1} - a_1\dot{\phi}_1 + b_5\psi_1 - \dot{\gamma}_1 - b_1\psi_{m2})^2 + \frac{1}{2}L_2(\dot{\gamma}_{G1} - a_1\dot{\phi}_1 - b_6\psi_1 - \dot{\gamma}_1 + b_2\psi_{m1})^2 \\
 & + \frac{1}{2}L_3(\dot{\gamma}_{G1} + a_2\dot{\phi}_1 + b_7\psi_1 - \dot{\gamma}_2 - b_3\psi_{m2})^2 + \frac{1}{2}L_4(\dot{\gamma}_{G1} + a_2\dot{\phi}_1 - b_8\psi_1 - \dot{\gamma}_2 + b_4\psi_{m2})^2 \\
 & + \frac{1}{2}L_5(\dot{\gamma}_{G2} - a_5\dot{\phi}_2 + b_{13}\psi_{m2} - 1\dot{\gamma}_{G1} + a_3\dot{\phi}_1 - b_9\psi_1)^2 \\
 & + \frac{1}{2}L_6(\dot{\gamma}_{G2} - a_5\dot{\phi}_2 - b_{14}\psi_2 - \dot{\gamma}_{G1} + a_3\dot{\phi}_1 + b_{10}\psi_1)^2 \\
 & + \frac{1}{2}L_7(\dot{\gamma}_{G2} + a_6\dot{\phi}_2 + b_{15}\psi_2 - \dot{\gamma}_{G1} + a_4\dot{\phi}_1 - b_{11}\psi_1)^2 \\
 & + \frac{1}{2}L_8(\dot{\gamma}_{G2} + a_6\dot{\phi}_2 - b_{16}\psi_2 - \dot{\gamma}_{G1} + a_4\dot{\phi}_1 + b_{12}\psi_1)^2 \\
 & + \frac{1}{2}L_9(\dot{\gamma}_1 + b_1\psi_{m1} - \dot{h}_1)^2 + \frac{1}{2}L_{10}(\dot{\gamma}_1 - b_2\psi_{m1} - \dot{h}_2) \\
 & + \frac{1}{2}L_{11}(\dot{\gamma}_2 + b_3\psi_{m2} - \dot{h}_3)^2 + \frac{1}{2}L_{12}(\dot{\gamma}_2 - b_4\psi_{m2} - \dot{h}_4)^2
 \end{aligned}$$

(I-3)

## **ANNEXE II**

### **RAPPEL SUR LES FORCES GENERALISEES**

Le travail élémentaire d'une force  $\vec{F}$  est donnée par:

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{s} \quad (\text{II-1})$$

où:

$\delta \vec{s}$  est un déplacement virtuel.

$\delta \vec{s} = \delta \vec{r}$ ,  $\delta \vec{r}$  est l'accroissement élémentaire du rayon vecteur du point d'application de la force  $\vec{F}$ .

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} \quad (\text{II-2})$$

Considérons un système mécanique auquel sont appliquées les forces  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ . Supposons que ce système possède  $s$  degré de libertés et que sa position soit donnée par les coordonnées généralisées  $[q_1, \dots, q_s]$ .

Communiquons au système un déplacement virtuel tel que la coordonnée  $q_1$  acquière l'accroissement  $\delta q_1$ , les autres coordonnées restant inchangées.

Chaque rayon vecteur  $\vec{r}_k (k=1, \dots, n)$  des points du système acquiert alors l'accroissement élémentaire:

$$(\delta \vec{r}_k)_1 \quad [\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s)]$$

L'accroissement  $(\delta \vec{r}_k)_1$  se calcule comme la différentielle partielle par rapport à  $q_1$ :

$$(\delta \vec{r}_k)_1 = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 \quad (\text{II-3})$$

Calculons maintenant la somme des travaux élémentaires, que nous désignons  $\delta A_1$ , de toutes les forces appliquées au système agissant sur le déplacement considéré:

$$\begin{aligned}\delta A_1 &= \vec{F}_1 \cdot (\delta \vec{r}_1)_1 + \vec{F}_2 \cdot (\delta \vec{r}_2)_1 + \dots + \vec{F}_n \cdot (\delta \vec{r}_n)_1 \\ &= \vec{F}_1 \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1} \delta q_1 + \vec{F}_2 \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \vec{F}_n \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_1} \delta q_1\end{aligned}\quad (\text{II-4})$$

Qui peut s'écrire aussi sous la forme:

$$\delta A_1 = Q_1 \cdot \delta q_1$$

Où

$$Q_1 = \sum_k \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\quad (\text{II-5})$$

désigne la force généralisée correspondant à la coordonnée généralisée  $q_1$ .

En communiquant au système un autre déplacement virtuel indépendant, pour lequel seule la coordonnée  $q_2$  change, on obtient pour le travail élémentaire de toutes les forces du système sur ce déplacement l'expression:

$$\begin{aligned}\delta A_2 &= Q_2 \cdot \delta q_2 \\ Q_2 &= \sum_k \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}\end{aligned}\quad (\text{II-6})$$

Pour le cas général:

$$\begin{aligned}\delta A_i &= Q_i \cdot \delta q_i \\ Q_i &= \sum_k \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \quad \begin{matrix} i=1,s \\ k=1,n \end{matrix}\end{aligned}\quad (\text{II-7})$$

## **ANNEXE III**

# **THEORIE DE LA COMMANDE OPTIMALE STOCHASTIQUE**

### III.1. THEORIE GENERALE

La dynamique du système peut être décrite par le système d'équations suivant:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_1 h(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (\text{III-1})$$

où

$x(t)$  est Le vecteur d'état.

$u(t)$ , Le vecteur de commande.

$y(t)$ , Le vecteur de sortie.

$h(t)$ , Le vecteur perturbation, supposé bruit blanc de moyenne nulle et de matrice de covariance  $W$ .

les matrices  $A(n \times n)$ ,  $B(n \times p)$ ,  $B_1(n \times q)$  et  $C(m \times n)$  sont constantes.

L'indice de performance est de la forme suivante:

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left( \int_0^T [x^T(t) \ u^T(t)] \begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt \right) \quad (\text{III-2})$$

où  $E$  désigne la valeur de l'espérance. les matrices  $Q$  et  $R$  sont symétriques,  $Q$  est définie non négative et  $R$  est définie positive, et on suppose que tous les états du systèmes sont mesurables.

Sous les conditions suivantes:

- La paire  $(A,B)$  définit un système stabilisable. Un système est dit stabilisable, si tous ces modes incontrôlables sont stables [15].

- La paire  $(A,C)$  définit un système détectable. un système est dit détectable si tous ces modes instables sont observables.

Le vecteur de commande  $u(t)$  qui minimise l'index de performance (III-2) est donné par [2,10,39,40].

$$u(t) = -Kx(t) \quad (\text{III-3})$$

Où  $K$  est le gain de commande constant qui est donné par:

$$K = R^{-1}(N^T + B^T P) \quad (\text{III-4})$$

Où  $P$  est une matrice symétrique, définie positive, solution de l'équation matricielle de Riccati donnée par:

$$-P(A - BR^{-1}N^T) - (A - BR^{-1}N^T)^T P + PBR^{-1}B^T P - (Q - NR^{-1}N^T) = 0 \quad (\text{III-5})$$

Le comportement du système dans l'espace d'état peut être décrit par la matrice de covariance du vecteur d'état  $x(t)$

$$X(t) = E[x(t)x^T(t)] \quad (\text{III-6})$$

où  $E$  désigne l'espérance mathématique.

La matrice constante de covariance  $X(t)$  est la solution de l'équation de Lyapunov [4,23];

$$(A - KB)X + X(A - KB)^T + B_1 W B_1^T = 0 \quad (\text{III-7})$$

Une fois la matrice de covariance  $X(t)$  est déterminée, l'indice de performance (III-2) est facilement calculé

Cette technique est valable aussi bien pour les systèmes actifs que pour les systèmes passifs. Pour les systèmes passifs il suffit de négliger la matrice du gain de commande  $K$ .

### III.1.1. Performances du système pour une perturbation bruit blanc intégré

Dans le cas d'un profil continu aléatoire de densité spectrale de puissance (DSP) représentée par un bruit blanc intégré, la DSP du signal temporel d'entrée appliquée au système de suspension est de la forme suivante [1,2]

$$\phi(\omega) = \frac{cv}{\omega^2} \quad (\text{III-8})$$

avec;

c: coefficient de la rugosité du profil de la route

v: la vitesse de déplacement du véhicule

Pour un système linéaire de perturbation correspondant à un bruit blanc intégré, la valeur quadratique moyenne de n'importe quel signal de sortie du système est reliée à la valeur de l'intégrale des carrés du signal de cette même sortie résultant d'une entrée échelon unité.

Donc, si  $y_r(t)$  est la sortie d'une excitation aléatoire et  $y_s(t)$  est la sortie correspondant à une entrée échelon unité, la valeur quadratique moyenne de la réponse  $y_r(t)$  sera [1,2]

$$\langle y_r^2(t) \rangle = cv \int_0^{\infty} y_s^2(t) dt \quad (\text{III-9})$$

Pour une vitesse donnée  $v$ , l'équation (III-9) montre que si le système est optimal pour une entrée échelon unité, il l'est aussi pour un signal d'entrée aléatoire de la forme donnée par l'équation (III-8) [1].

L'équation (III-9) est valable uniquement si l'intégrale du membre de droite converge. Cette condition exige que la réponse transitoire  $y_r(t)$  décroisse asymptotiquement vers zéro. Ceci est le cas des forcés, des accélérations, des vitesses et des déplacements relatifs des systèmes de suspension [2].

L'équation (III-9) est très utile pour le calcul des valeurs quadratiques de différentes sorties par la simulation numérique, puisque il est plus simple de générer une fonction échelon unité déterministe que de générer un signal de caractéristiques aléatoires [1,2]

### III.1.2. Performance du système pour une perturbation de type bruit blanc filtré.

la perturbation  $h(t)$  du profil de la route qui n'est pas un bruit blanc mais un processus Gaussien stationnaire. Elle présente un problème pour l'application de la technique de la commande optimale.

Cette difficulté est évitée en utilisant un filtre de forme [4,10,23].

La densité spectrale du processus Gaussien stationnaire est approximée par la formule suivante[4,14]:

$$\phi(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{aV}{\omega^2 + a^2V^2} \quad (\text{III-10})$$

Où;

$\sigma^2$  est la variance des irrégularités de la route

$V$ , la vitesse de déplacement du véhicule

et  $a$ , le coefficient qui caractérise le type de route.

Le processus  $h(t)$  de densité spectrale (III-10) est un bruit blanc filtré obtenu à l'aide du filtre de forme suivant:

$$\dot{h}(t) = -aVIh(t) + I\xi(t) \quad (\text{III-11})$$

Où;

$\xi(t)$ , un bruit blanc (m/s)

et  $I$ , la matrice identité

En introduisant la notation suivante:

$$A_w = -2aVI \quad ; B_w = I \quad (\text{III-12})$$

l'équation (III-11) s'écrit comme suit;

$$\dot{h}(t) = A_w h(t) + B_w \xi(t) \quad (\text{III-13})$$

En combinant les équation (III-1)(donnons l'indice x aux éléments de (III-1)) et (III-13)) nous obtenons le nouveau système d'équations d'état suivant:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_{xl} \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_x \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ B_w \end{bmatrix} \xi \quad (\text{III-14})$$

En définissant le nouveau vecteur

$$x_q = \begin{bmatrix} x \\ h \end{bmatrix} \quad (\text{III-15})$$

et les nouvelles matrices

$$A = \begin{bmatrix} A & B_{xl} \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_w \end{bmatrix} \quad (\text{III-16})$$

$\xi(t)$  est un bruit blanc de moyenne zéro et de covariance

$$E\{\xi(t) \xi^T(\tau)\} = W_0 \delta(t-\tau) \quad (\text{III-17})$$

le système d'équation (III-14) de paramètres (III-16) constitue un système augmenté.

## III.2. TECHNIQUE DE CALCUL DU GAIN DE COMMANDE K

Comme il a été montré au paragraphe III.1, le calcul de la matrice de commande  $K$  exige la résolution de l'équation matricielle de Riccati (III-5).

Généralement, les algorithmes de résolution de l'équation de Riccati sont faits pour le calcul du gain des systèmes à perturbation bruit blanc de la forme (III-1).

Par contre notre système, décrit par le système d'équation (III-4), contient l'équation d'état de la perturbation  $h(t)$  qui n'est pas un bruit blanc mais un bruit blanc filtré qui est un processus Gaussien stationnaire.

Pour éviter la divergence et l'instabilité de l'algorithme de résolution de l'équation de Riccati, le système doit être complètement contrôlable [4,10]. Ceci implique que tous les états du système puissent être modifiés par le vecteur de commande  $u$ .

Les états, du système (III-14) décrivant le processus Gaussien associé à la perturbation  $h(t)$ , sont incontrôlables [4,10].

Pour éviter ce problème les matrices  $A$  et  $P$  de l'équation (III-5) de dimensions  $((n+q) \times (n+q))$  doivent être subdivisées chacune en quatre matrices de dimensions  $(n \times n)$ ,  $(n \times q)$ ,  $(q \times n)$  et  $(q \times q)$  comme suit [4]:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xw} \\ Q_{xw}^T & Q_{ww} \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xw} \\ P_{xw} & P_{ww} \end{bmatrix} \quad (\text{III-18})$$

avec  $Q$  et  $P$  symétriques.

De la même manière, la matrice  $N$  de dimensions  $((n+q) \times p)$  est subdivisée en deux matrices de dimension  $(n \times p)$  et  $(q \times p)$ ;

$$N = \begin{bmatrix} N_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III-19})$$

En introduisant les nouvelles matrices (III-18), (6-19) et (III-16) dans l'équation (III-5), on obtient les équations suivantes [9,23]:

$$\begin{aligned}
& -P_{xx}(A_x - B_x R^{-1} N_x^T) - (A_x - B_x R^{-1} N_x^T)^T P_{xx} + P_{xx} B_x R^{-1} B_x^T P_{xx} \\
& - (Q_{xx} - N_x R^{-1} N_x^T) = 0
\end{aligned} \tag{III-20}$$

$$-P_{xw} A_w - \left[ (A_x - B_x R^{-1} N_x^T) - P_{xx} B_x R^{-1} B_x^T \right] P_{xw} - (P_{xx} B_{xl} + Q_{xw}) = 0 \tag{III-21}$$

$$-A_w^T P_{xw}^T - P_{xw}^T \left[ (A_x - B_x R^{-1} N_x^T) - B_x R^{-1} B_x^T P_{xx} \right] - (B_{xl}^T P_{xx} + Q_{xw}^T) = 0 \tag{III-22}$$

$$P_{ww} A_w + A_w^T P_{ww} + (P_{xw}^T B_{xl} + B_{xl}^T P_{xw} + Q_{ww} + P_{xw}^T B_x R^{-1} B_x^T P_{xw}) = 0 \tag{III-23}$$

Le gain de commande de l'équation (III-4) s'écrit alors sous la forme suivante :

$$K = R^{-1} \left[ (N_x^T + B_x^T P_{xx}); B_x^T P_{xw} \right] \tag{III-24}$$

L'équation (III-20) est l'équation de Riccati d'inconnue  $P_{xx}$ . Les équations (III-21) et (III-22) sont des équations linéaires matricielles d'inconnues  $P_{xw}$  et  $P_{xw}^T$ . Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes ces équations, il suffit de résoudre les deux premières puisque l'inconnue  $P_{ww}$  n'apparaît pas dans la formule du gain de commande (III-24)

### III.3. TECHNIQUE DE DETERMINATION DE LA MATRICE DE COVARIANCE DU VECTEUR D'ETAT

L'étude des performances du système nécessite la détermination de la matrice de covariance du vecteur d'état en résolvant l'équation de Lyapunov (III-7).

Les algorithmes de résolution d'une telle équation exigent que les valeurs propres de la matrice  $A$  de la dynamique du système aient des parties réelles négatives.

Pour un système physique réel ayant comme perturbation un bruit blanc, cette condition est vérifiée pour la raison que le système est amorti [4]. Cependant elle n'est pas

vérifiée pour le cas de notre système décrit par l'équation (III-14) de vecteur d'état élargi par l'excitation  $h(t)$ .

Pour éviter ce problème on est amené à appliquer la technique donnée par les publications [4,23] comme suit;

La matrice de covariance  $X$  de l'équation (III-7) de dimension  $((n+q) \times (n+q))$  est subdivisée en quatre matrices de dimensions  $(n \times n)$ ,  $(n \times q)$ ,  $(q \times n)$  et  $(q \times q)$  et la matrice  $K$  de dimension  $(p \times (n+q))$  en deux matrices de dimension  $(p \times n)$  et  $(p \times q)$ ;

$$X = \begin{bmatrix} X_{xx} & X_{xw} \\ X_{xw}^T & X_{ww} \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} K_x & K_w \end{bmatrix} \quad (\text{III-25})$$

En introduisant ces deux matrices dans l'équation (III-7), la résolution de cette dernière est remplacée par la résolution consécutive des équations suivantes:

$$A_w X_{ww} + X_{ww} A_w^T + B_w W B_w^T = 0 \quad (\text{III-26})$$

$$(A_x - B_x K_x) X_{xw} + X_{xw} A_w^T + (B_{x1} - B_x K_w) X_{ww} = 0 \quad (\text{III-27})$$

$$(A_x - B_x K_x) X_{xx} + X_{xx} (A_x - B_x K_x)^T + [(D_x - B_x K_w) X_{xw}^T + X_{xw} (B_{x1} - B_x K_w)^T] = 0 \quad (\text{III-28})$$

La première et la dernière de ces équations sont des équations de Lyapunov avec respectivement les inconnues  $X_{ww}$  et  $X_{xx}$ . La deuxième est une équation linéaire matricielle d'inconnue  $X_{xw}$ .

### III.4. ETUDE DES SYSTEMES DE SUSPENSION PAR APPROCHE DANS LE DOMAINE FREQUENTIEL

Le système d'équations (III-1) peut s'écrire dans le domaine fréquentiel à l'aide de la transformée de Laplace comme suit:

$$\begin{aligned} X(i\omega) &= (i\omega I - A_c)^{-1} B_{x1} h(s) \\ Y(i\omega) &= CX(i\omega) \end{aligned} \quad (III-29)$$

où

$$A_c = A - B_x K \quad (III-30)$$

d'où la fonction de transfert;

$$H(i\omega) = C(i\omega I - A_c)^{-1} B_{x1} \quad (III-31)$$

La matrice des densités spectrales des réponses des différentes sorties  $\Phi_y(\omega)$  est donnée en fonction de la matrice de densité spectrale d'entrée  $\Phi_{hh}$  [27,31,32,33].

$$\Phi_y(\omega) = H(\omega) \Phi_{hh} H^*(\omega) \quad (III-32)$$

La diagonale de la matrice  $\Phi_y(\omega)$  est formée des densités spectrales des différentes sorties, les autres éléments sont leurs cross-densités spectrales.

La valeur quadratique moyenne de n'importe quelle sortie  $y$  est donnée par [36,41]:

$$\sigma_y^2 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_x(\omega) d\omega \quad (III-33)$$

l'indice de performance s'écrit dans ce cas sous la forme suivante:

$$J = \sigma_x^2 + \rho_1 \sigma_{x_2-x_1}^2 + \rho_2 \sigma_{x_1-h}^2 + \rho_4 \sigma_u^2 \quad (III-34)$$

Le choix des paramètres de la suspension et de la force de commande se fait, de la même manière que dans le cas précédent, de telle sorte qu'ils minimisent l'indice de performance  $J$ .

Le comportement du système de suspension passive est étudié, de la même façon que celui du système de suspension active, en remplaçant la matrice  $A_c$  par la matrice  $A$  du système en boucle ouverte.

**ANNEXE IV**

**INDICE DE PERFORMANCE**

## IV.1. INTRODUCTION

Le système de suspension est optimisé quand les normes concernant le confort, la tenue de la route et l'espace de fonctionnement de la suspension sont respectées.

## IV.2. INDICE DE PERFORMANCE

L'indice de performance est défini par la somme des variances pondérées, des trois grandeurs pertinentes qui sont le confort, la tenue de la route et la course de fonctionnement de la suspension.

### IV.2.1. Le facteur de confort

Le facteur de confort du véhicule est donné par la valeur efficace (RMS) des accélérations [35]. De ce fait, augmenter le confort du véhicule revient à limiter l'accélération du châssis. Dans le cas de notre modèle, ce terme prendrait la forme suivante:

$$J_1 = E(\ddot{y}_A^2 + \ddot{y}_B^2 + \ddot{y}_C^2 + \ddot{y}_D^2) / 4 = E(I_1) / 4 \quad (\text{IV-1})$$

Où:

$$I_1 = [\ddot{y}_A^2 + \ddot{y}_B^2 + \ddot{y}_C^2 + \ddot{y}_D^2] = [\ddot{y}_A \quad \ddot{y}_B \quad \ddot{y}_C \quad \ddot{y}_D] \begin{bmatrix} \ddot{y}_A \\ \ddot{y}_B \\ \ddot{y}_C \\ \ddot{y}_D \end{bmatrix} \quad (\text{IV-2})$$

Ce dernier est constitué de la moyenne des variances des accélérations de quatre points du châssis; puisque, l'accélération du centre de gravité du châssis n'est pas suffisante pour décrire le comportement dynamique du châssis (à cause des mouvements de tangage et

de roulis).

En utilisant la matrice  $A_1$  de passage aux coordonnées généralisées de l'équation (2-9) on aura:

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_A \\ \ddot{y}_B \\ \ddot{y}_C \\ \ddot{y}_D \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} \ddot{y}_{G_1} \\ \ddot{\Phi}_1 \\ \ddot{\Psi}_1 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{13} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-3})$$

En utilisant l'équation d'état (2-31), on obtient:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{13} \end{bmatrix} = [A_{ij}] x + [B_{ik}] u + [B_{1k}] h + [B_{2k}] \dot{h} \quad (\text{IV-4})$$

$i=11,12,13$   
 $j=1,\dots,20$   
 $k=1,\dots,4$

On remarque, d'après l'équation de mouvement (2-31), que  $B_{1ik}$  et  $B_{2ik}$  sont nuls et l'expression ci-dessus devient:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{13} \end{bmatrix} = [A_{ij}] x + [B_{ik}] u \quad (\text{IV-5})$$

$i=11,12,13$   
 $j=1,\dots,20$   
 $k=1,\dots,4$

D'où on tire;

$$I_1 = \{ [A_{ij}] x + [B_{ik}] u \} A_1' A_1 \{ [A_{ij}] x + [B_{ik}] u \} \quad (\text{IV-6})$$

$i=11,12,13$   
 $j=1,\dots,20$   
 $k=1,\dots,4$

L'introduction du facteur 1/4 dans l'équation (IV-1), d'après [23], est nécessaire pour pouvoir utiliser les coefficients de pondération de la publication [4].

#### IV.2.2. Le facteur de la course de fonctionnement de la suspension

Il est donné par la valeur efficace des déplacements relatifs entre le châssis et les roues du véhicule. C'est le terme qui limite la course de fonctionnement de la suspension.

$$J_2 = E(y_A - z_1)^2 + (y_B - z_2)^2 + (y_C - z_3)^2 + (y_D - z_4)^2 / 4 = E\{I_2\} / 4 \quad (IV-7)$$

Où:

$$I_2 = [(y_A - z_1)^2 + (y_B - z_2)^2 + (y_C - z_3)^2 + (y_D - z_4)^2] \\ = [(y_A - z_1), (y_B - z_2), (y_C - z_3), (y_D - z_4)] \begin{bmatrix} (y_A - z_1) \\ (y_B - z_2) \\ (y_C - z_3) \\ (y_D - z_4) \end{bmatrix} \quad (IV-8)$$

Avec:

$$\begin{bmatrix} y_A - z_1 \\ y_B - z_2 \\ y_C - z_3 \\ y_D - z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_A \\ y_B \\ y_C \\ y_D \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad (IV-9)$$

On pose:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-10})$$

En fonction des variables d'état  $x$  de l'équation (2-23) et des matrices de passage  $A_1$ ,  $A_3$  et  $A_4$  données par les équations (2-9) et (2-10) le vecteur de l'équation (IV-10) s'écrit comme suit:

$$\begin{bmatrix} y_A - z_1 \\ y_B - z_2 \\ y_C - z_3 \\ y_D - z_4 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} [A_1(4x3)] & [0(4x4)] \\ [0(4x3)] & \begin{bmatrix} [A_4(2x2)] & [0(2x2)] \\ [0(2x2)] & [A_5(2x2)] \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-11})$$

En posant:

$$A_6 = \begin{bmatrix} [A_1(4x3)] & [0(4x4)] \\ [0(4x3)] & \begin{bmatrix} [A_4(2x2)] & [0(2x2)] \\ [0(2x2)] & [A_5(2x2)] \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-12})$$

On peut écrire:

$$I_2 = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7] A_6' S' S A_6 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-13})$$

### IV.2.3. Le facteur de la déflexion des pneus

C'est la valeur efficace des déplacements relatifs entre les axes des roues et la surface de la route. Il est préférable de garder ce terme petit pour éviter les pertes de contact entre les roues et la surface de la route, et éviter l'application de force impulsive au système [1,4].

$$J_3 = E[(z_1 - W_1)^2 + (z_2 - W_2)^2 + (z_3 - W_3)^2 + (z_4 - W_4)^2]/4 = E(I_3)/4 \quad (IV-14)$$

Où:

$$I_3 = [(z_1 - h_1)^2 + (z_2 - h_2)^2 + (z_3 - h_3)^2 + (z_4 - h_4)^2] \\ = [(z_1 - h_1) \quad (z_2 - h_2) \quad (z_3 - h_3) \quad (z_4 - h_4)] \begin{bmatrix} (z_1 - h_1) \\ (z_2 - h_2) \\ (z_3 - h_3) \\ (z_4 - h_4) \end{bmatrix} \quad (IV-15)$$

En fonction des variables d'état et des matrices de passage en coordonnées généralisées on obtient:

$$\begin{bmatrix} z_1 - h_1 \\ z_2 - h_2 \\ z_3 - h_3 \\ z_4 - h_4 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} A_4(2x2) & [0(2x2)] & & \\ [0(2x2)] & A_5(2x2) & [0(4x4)] & \\ & [0(4x4)] & & [I(4x4)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} \quad (IV-16)$$

Où:

$I$  est la matrice identité.

et  $S$  est donnée par l'équation (IV-10).

En posant:

$$A_7 = \begin{bmatrix} A_4(2x2) & [0(2x2)] \\ [0(2x2)] & A_5(2x2) \end{bmatrix} \quad (\text{IV-17})$$

On aura:

$$I_3 = [(z_1 - h_1)^2 + (z_2 - h_2)^2 + (z_3 - h_3)^2 + (z_4 - h_4)^2]$$

$$= \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_7 & [0(4x4)] \\ [0(4x4)] & [I(4x4)] \end{bmatrix}^T S^T S \begin{bmatrix} A_7 & [0(4x4)] \\ [0(4x4)] & [I(4x4)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-18})$$

#### IV.2.4. Le facteur de la force de commande

C'est la valeur efficace des forces de commande du système. C'est le terme qui limite la force de commande et par suite le coût de la suspension.

$$J_4 = E \{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2\} / 4 = E\{I_4\} / 4 \quad (\text{IV-19})$$

Où:

$$I_4 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$$

$$= [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-20})$$

### IV.3. COEFFICIENTS DE PONDERATION

Chaque terme de l'indice de performance est pondéré par un coefficients. C'est une constante sur laquelle on peut agir pour favoriser la qualité que l'on juge nécessaire. Les ordres de grandeurs de ces coefficients sont choisis de telle sorte que tous les termes de l'indice de performance aient le même ordre de grandeur si tous ces termes sont de même importances.

L'indice de performance est la somme des différents termes pondérés.

$$J = J_1 + \rho_1 J_2 + \rho_2 J_3 + \rho_3 J_4 = E(I)/4 \quad (IV-21)$$

Où  $\rho_1, \rho_2$  et  $\rho_3$  sont les coefficients de pondération.

Le coefficient de pondération relatif à l'accélération est pris égal à un. Il n'y a pas de perte de généralité de l'indice de performance si ce coefficient est pris égal a un [1].

L'utilisation de ce critère introduit indirectement des contraintes sur l'amplitude et la durée des pics des forces  $u_i$ , sur la déformation dynamique des pneus et sur les déplacements relatifs entre les roues et le chassis.

### IV.4. CHOIX DES VALEURS DES DIFFERENTS COEFFICIENTS DE PONDERATION

Pour un signal aléatoire de fonction de distribution de probabilité Gaussienne, la valeur approximative du rapport  $\frac{\rho_2}{\rho_1}$  est tirée à partir de la comparaison de  $\delta_w$  à  $\delta_s$  [1].

Où:

$\delta_s$  est la déformation statique des pneus, calculée a partir du poids supporté par les roues et de leur raideur.

$\delta_w$  est la distance maximale permise aux déplacements des roues. Elle représente l'espace dans lequel la roue peut se déplacer. Ce dernier est limité par la position où la roue est à l'équilibre et la position du stop-choc [1].

Pour empêcher la dégradation de la suspension et la perte de contact entre les roues et le sol pour au moins 99,7% du temps, les conditions nécessaires sont  $3\sigma_w < \delta_w$  et  $3\sigma_t < \delta_t$ , où  $\sigma_w$  et  $\sigma_t$  sont respectivement les RMS des déplacements relatifs des roues au châssis et la déformation dynamique des pneus.

Les intégrales des carrées des valeurs de l'indice de performance sont proportionnelles aux carrées des valeurs moyennes. De là, l'estimation du rapport  $\rho_2/\rho_1$  est donnée par [1]:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left[ \frac{\delta_w}{\delta_t} \right]^2 \quad (\text{IV-22})$$

Cette estimation est basée sur la supposition que l'optimisation est obtenue quand les quatre termes de l'équation (IV-21) auront séparément des amplitudes similaires.

La détermination des valeurs adéquates des différents coefficients de pondération exige une certaine recherche qui se base, d'après [1], sur les simulations répétées de la réponse transitoire du système.

#### IV.5. FORME QUADRATIQUE DE L'INDICE DE PERFORMANCE

Pour pouvoir utiliser la théorie de la commande optimale (annexe III), l'indice de performance de l'équation (IV-21) doit être exprimé sous la forme quadratique suivante:

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left\{ \int_0^T [x^T(t) \quad u^T(t)] \begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt \right\} \quad (\text{IV-23})$$

Où:

$E$  : désigne l'espérance mathématique.

La théorie de la commande optimale stochastique n'est applicable que si la perturbation extérieure est un bruit blanc. Par ailleurs, ce problème peut être évité en utilisant un filtre qui reçoit comme entrée un bruit Gaussien et sa sortie donne un bruit blanc. Le bruit dans ce cas, peut être modélisé par un système d'équations d'état. Ces équations font augmenter le système d'équations d'état. Un nouveau vecteur d'état  $x_q$  est ainsi défini, tel que:

$$x_q = \begin{bmatrix} x \\ h \end{bmatrix} \quad (\text{IV-24})$$

Où:  $x$  et  $h$  sont respectivement le vecteur d'état et le vecteur de perturbation du système d'équations (2-26)

Cette transformation forme un système augmenté.

Ce point est traité plus en détail au chapitre quatre.

En fonction de ce vecteur  $x_q$  et du vecteur  $u$ , on exprime les différents termes de l'indice de performance ( $I_1, I_2, I_3$  et  $I_4$ ).

$$I_1 = \begin{bmatrix} x_q \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{ij}, [0(3,4)], B_{ik} \end{bmatrix}^T A_1^T A_1 \begin{bmatrix} A_{ij}, [0(3,4)], B_{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_q \\ u \end{bmatrix} \quad (\text{IV-25})$$

$i=11,12,13$   
 $j=1,\dots,20$   
 $k=1,\dots,4$

On pose:

$$A_{JI} = \begin{bmatrix} A_{ij}, [0(3,4)], B_{ik} \end{bmatrix}^T A_1^T A_1 \begin{bmatrix} A_{ij}, [0(3,4)], B_{ik} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-26})$$

$i=11,12,13$   
 $j=1,\dots,20$   
 $k=1,\dots,4$

$$I_2 = \begin{bmatrix} x_q \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A'_6 S' S A_6 & [0(7,21)] \\ [0(21,7)] & [0(21,21)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_q \\ u \end{bmatrix} \quad (\text{IV-27})$$

On pose:

$$A_{J2} = \begin{bmatrix} A'_6 S' S A_6 & [0(7,21)] \\ [0(21,7)] & [0(21,21)] \end{bmatrix} \quad (\text{IV-28})$$

D'après l'équation (IV-15);

$$I_3 = [(z_1 - h_1)^2 + (z_2 - h_2)^2 + (z_3 - h_3)^2 + (z_4 - h_4)^2] \begin{bmatrix} (z_1 - h_1) \\ (z_2 - h_2) \\ (z_3 - h_3) \\ (z_4 - h_4) \end{bmatrix} \quad (\text{IV-29})$$

$$= [(z_1 - h_1) \quad (z_2 - h_2) \quad (z_3 - h_3) \quad (z_4 - h_4)] \begin{bmatrix} (z_1 - h_1) \\ (z_2 - h_2) \\ (z_3 - h_3) \\ (z_4 - h_4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1 - h_1 \\ z_2 - h_2 \\ z_3 - h_3 \\ z_4 - h_4 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} A_7 & [0(4x4)] \\ [0(4x4)] & [I(4x4)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-30})$$

En fonction du nouveau vecteur  $x_q$  et de  $u$  on aura:

$$\begin{bmatrix} z_1 - h_1 \\ z_2 - h_2 \\ z_3 - h_3 \\ z_4 - h_4 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} [0(4x3)] & A_7 & [0(4,21)] \\ [0(4x2I)] & [I(4x4)] & [0(4x4)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_q \\ u \end{bmatrix} \quad (\text{IV-31})$$

on pose:

$$A_8 = \begin{bmatrix} [0(4x3)] & A_7 & [0(4x2I)] \\ [0(4x2I)] & [I(4x4)] & [0(4x4)] \end{bmatrix} \quad (\text{IV-32})$$

On aura:

$$I_3 = \begin{bmatrix} x_q \\ u \end{bmatrix}^T A_8^T S^T S A_8 \begin{bmatrix} x_q \\ u \end{bmatrix} \quad (\text{IV-33})$$

On pose:

$$A_{J3} = A_8^T S^T S A_8 \quad (\text{IV-34})$$

Et,

$$\begin{aligned} I_4 &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \\ &= \begin{bmatrix} x_q \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [0(24x24)] & [0(24x4)] \\ [0(4x24)] & [I(4x4)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_q \\ u \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV-35})$$

On pose:

$$A_{J4} = \begin{bmatrix} [0(24x24)] & [0(24x4)] \\ [0(4x24)] & [I(4x4)] \end{bmatrix} \quad (\text{IV-36})$$

L'indice de performance de l'équation (IV-21) est déterminé à partir de l'équation suivante:

$$I = I_1 + \rho_1 I_2 + \rho_2 I_3 + \rho_3 I_4 \quad (\text{IV-37})$$

Ce qui donne:

$$A_J = \frac{1}{4}A_{J1} + \frac{1}{4}\rho_1 A_{J2} + \frac{1}{4}\rho_2 A_{J3} + \frac{1}{4}\rho_3 A_{J4} \quad (\text{IV-38})$$

L'indice de performance sous sa forme quadratique prend la forme suivante:

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left( \int_0^T \begin{bmatrix} x_q^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix} [A_J] \begin{bmatrix} x_q(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt \right) \quad (\text{IV-39})$$

Par identification les matrices  $Q$ ,  $R$  et  $N$  de l'équation (IV-23), peuvent être tirées de la matrice  $A_J$ . En effet on a:

$$A_J = \begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \quad (\text{IV-40})$$

Avec:

$$\begin{aligned} Q(24 \times 24) &= [(A_J)_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, 24 \\ j=1, \dots, 24}} \\ R(4 \times 4) &= [(A_J)_{ij}]_{\substack{i=25, \dots, 28 \\ j=25, \dots, 28}} \\ N(24 \times 4) &= [(A_J)_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, 24 \\ j=25, \dots, 28}} \end{aligned} \quad (\text{IV-41})$$

#### IV.6. PROBLEME DE CLAQUEMENT DE LA SUSPENSION

Lors du déplacement du véhicule sur une route comportant des irrégularités aléatoires, il est possible que certains termes de l'indice de performance du véhicule dépassent le niveau tolérable, il y aura alors un claquement de la suspension.

Si on considère le déplacement relatif de la suspension (la course)  $y_r(t)$  comme une fonction aléatoire, le problème de la probabilité de claquement de la suspension est alors équivalent à celui de la probabilité de dépassement  $y_r(t) \geq y_{r0}$

Où:  $y_{r0}$  désigne la course libre de la suspension.

La fonction  $y_r(t)$  est obtenue lors de la simulation numérique du comportement du véhicule sur une route à profil aléatoire  $h(t)$ .

En considérant que la distribution de  $y_r(t)$  est une distribution normale, on peut trouver l'espérance mathématique  $m_{yr}$  et l'écart type  $\sigma_{yr}$ .

Connaissant les paramètres de la loi normale, nous déterminons la probabilité pour que le déplacement relatif  $y_r(t)$  dépasse la valeur  $y_{r0}$  [17]:

$$P(y_r(t) \geq y_{r0}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{yr}} \int_{t_1}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_{yr}^2}} dt = F(\infty) - F(t_1) \quad (\text{IV-42})$$

$$t_1 = \frac{y_{r0} - m_{yr}}{\sigma_{yr}}$$

Où:

$F(t)$  est la fonction de répartition.

Le problème de dépassement de la course de la suspension est un cas particulier. Le problème du dépassement peut se généraliser aux caractéristiques définissant les performances du véhicule.

#### IV.7. CONCLUSION

L'indice de performance ainsi défini, est avantageux du point de vue technique. Il permet d'imposer des restrictions sur certaines qualités comme limiter la probabilité que certaines caractéristiques dépassent les normes imposées. Ceci concerne essentiellement les

termes  $J_2$  et  $J_4$  de l'indice de performance qui sont limités par la course de fonctionnement de la suspension et des possibilités technologiques.

L'indice de performance est composé de contraintes imposées indirectement sur les performance du système [4].

**ANNEXE V**

**THEORIE DE LA COMMANDE PRE-INFORMEE**

La force de commande optimale pré-informée développée, dans les références [11,13,16], pour un système dynamique régit par l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_1 h(t) \quad (V-1)$$

et qui minimise l'indice de performance

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T [u^T R u + 2x^T N u + 2x^T Q x + 2x^T S h + h^T P h] dt \quad (V-2)$$

est donnée par [11,13,16]:

$$u(t) = -Kx(t) - R^{-1} B^T g(t) \quad (V-3)$$

où K est le gain de commande donné par la formule (III-4).

Le vecteur g(t) est donné par

$$g(t) = \int_t^{\infty} e^{A_c^T (s-t)} M h(s) ds \quad t > 0 \quad (V-4)$$

C'est la solution de l'équation différentielle:

$$\dot{g}(t) = -A_c^T g(t) - M h(t) \quad (V-5)$$

avec

$$g(0) = \int_0^{\infty} e^{A_c^T s} M h(s) ds \quad (V-6)$$

où

$$A_c = A - BK \quad ; \quad M = PB_1 + S$$

La trajectoire du vecteur d'état du système devient:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) - BR^{-1}B^T g(t) + B_1 h(t) \quad (V-7)$$

Nous remarquons que le calcul de  $g(t)$  dans (V-4) qui donne la solution optimale à horizon infini, exige la connaissance préalable du profil  $h(t)$  de l'instant  $t$  à l'infini.

En pratique, on peut générer une solution, sous optimale à horizon de pré-information fini dans le temps de durée  $\tau$  de la forme suivante [11,16]:

$$u_\tau(t) = -Kx_\tau(t) - R^{-1}B^T g_\tau(t) \quad (V-8)$$

$K$  est toujours le gain de commande de l'équation (II-4)

Le vecteur  $g_\tau(t)$  est donnée alors par

$$g_\tau(t) = \int_t^{t+\tau} e^{A_c^T(s-t)} M h(s) ds \quad t \geq 0 \quad (V-9)$$

La trajectoire sous-optimale du vecteur d'état est

$$\dot{x}_\tau(t) = A_c x_\tau(t) - BR^{-1}B^T g_\tau(t) + B_1 h(t) \quad (V-10)$$

La durée  $\tau$  de préview, nécessaire à la commande pré-informée sous optimale, qui ne peut être déterminé qu'empiriquement, est approximée par cinq fois la constante de temps associée au pôle dominant du système en boucle fermée [16].

**ANNEXE VI**

**DONNÉES NUMÉRIQUES DU CAMION K-66**

## VI.1. CARACTERISTIQUE FIXES

-Dimension à partir du centre de gravité suivant l'axe transversal du camion

	1	2	3	4	5	6	7	8
b(i)	0.8325	0.8325	0.7650	0.7650	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000

9	10	11	12	13	14	15	16
0.2650	0.2650	0.2650	0.2650	0.2650	0.2650	0.2650	0.2650

-Caractéristiques des roues

	Raideur [N/m]	Amortissement [Ns/m]
-Roues avant	$K(1)=K(2)=516000$	$L(9)=L(10)=500$
-Roues arrière	$K(3)=K(4)=1113500$	$L(11)=L(12)=1000$

-Caractéristiques de la suspension

	Raideur [N/m]	Amortissement [Ns/m]
Suspension avant	$K(5)=K(6)=150000$	$L(1)=L(2)=2500$
Suspension arrière	$K(7)=K(8)=400000$	$L(3)=L(4)=5000$

- Caractéristiques des plots de suspension

$$\text{Raideur} \quad K(9)=K(10)=K(11)=K(12)=700000 \text{ N/m}$$

$$\text{Amortissement} \quad L(9)=L(10)=L(11)=L(12)=5000 \text{ Ns/m}$$

-Dimensions suivant l'axe longitudinal du moteur

$$a(5)=0.4100 \text{ m}$$

$$a(6)=0.2900 \text{ m}$$

-masse de l'essieu avant  $m_1=233 \text{ Kg}$

-masse de l'essieu arrière  $m_2=410 \text{ Kg}$

-masse du moteur  $M_2=400 \text{ Kg}$

-moment d'inertie de roulis de l'essieu avant  $J_{u1}=120 \text{ Kgm}^2$

-moment d'inertie de roulis de l'essieu arrière  $J_{u2}=160 \text{ Kgm}^2$

-moment d'inertie de tangage du moteur  $J_{T2}=100 \text{ Kgm}^2$

-moment d'inertie de roulis du moteur  $J_{L2}=150 \text{ Kgm}^2$

## VI.2. CARACTERISTIQUES VARIABLES

Les caractéristiques du châssis sont fonction des différents états du véhicule,

- $M_1$ : masse du châssis,

- $J_{L1}$ : moment d'inertie de roulis du châssis,

- $J_{T1}$ : moment d'inertie de tangage du châssis,

- $a_1, a_2, a_3$  et  $a_4$  sont les positions des points de fixation de la suspension sur le châssis

	$M_1$ Kg	$JL_1$ Kgm <sup>2</sup>	$JT_1$ Kgm <sup>2</sup>	a(1) m	a(2) m	a(3) m	a(4) m
véhicule nu	1349	1400	300	0.660	1.940	1.360	0.660
véhicule vide	2267	2400	500	1.300	1.300	2.000	1.300
véhicule chargé à l'avant	4407	5800	900	1.58	1.070	2.230	1.530
véhicule chargé à l'arrière	4407	4700	900	1.79	0.810	2.490	1.790
véhicule uniformément chargé	4407	5400	900	1.90	0.700	2.600	1.900

## **BIBLIOGRAPHIE**

- [1] Thompson.A.G. "An Active Suspension with Optimal Linear State Feedback", Vehicle System Dynamics, Vol 5,1976 pp.187-203.
- [2] A.G.Thompson and C.E.M.Pearce, "An Optimal Suspension for an Automobile on a Rendu Rohart", Society of Automotive Engineers Inc., Paper No. 790478, 1979.
- [3] Thompson.A.G. "Optimal and Suboptimal linear Active Suspension for Road Vehicles", Vehicle System Dynamics, 13(1984), pp.61-72.
- [4] Hać.A, " Suspension optimisation of a 2-DOF Vehicle model using a Stochastic Optimal Control Technique". J.Sound and Vibration, Vol.100(3),1985,pp.343-357.
- [5] R.S.Sharp, and S.A.Sassan., "The relative performance capability of passive, active and semi-active car suspension systems". Proc. Instn. Mech. Engrs., 1986 200D3, pp 219-228.
- [6] R.S.Sharp and S.A.Hassan, " On the performance Capabilites of Active Automobile Suspension Systems of Limited Bandwidth ", Vehicle System Dynamics, 16(1987), pp.213-225.
- [7] R.S.Sharp and J.H.Hassan, "Performance predictions for a pneumatic active car suspension system", Proc. Instn. Mech. Engrs, Vol 202 No.D4(1988).
- [8] N.Louam, D.A.Wilson and R.S.Sharp. " Optimal Control of a Vehicle Suspension Incorporating the Time Delay between Front and Rear Wheel inputs", Vehicle System Dynamics, 17(1988), pp. 317-336.
- [9] Pinhas Barak and Herbert Sachs, "On The optimal Ride Control of a Dynamic Model For an Automotive Vehicle System". Proceeding of ninth IAVSD Symposium, 1985, pp.15-29.

- [10] N.B.A. Abdel hady and D.A.Crolla, "Theoretical Analysis of Active Suspension performance Using a four-wheel Vehicle model", Proc. Instn. Mech. Engrs, Vol 203(1989), pp.125-135.
- [11] N.Louam, D.A.Wilson and R.S.Sharp., "Optimisation and Performance Enhancement of Active Suspensions for Automobiles under Preview of the Road", Vehicle System Dynamics, 21(1992). pp.39-53.
- [12] E.K. Bender. , " Optimum Linear Preview Control With Application to Vehicle Suspension " Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering, June 1968, pp.213-221.
- [13] A.G.Thompson., B.R.Devis and C.E.M Pearce., "An Optimal Linear Active Suspension With Finite Road Preview" Society of Automotive Engineers, Inc., Paper N°800520, 1980
- [14] R.S.Sharp and S.A.Hassan, "Performance and design considerations for dissipative Semi-active suspension systems for automobiles" , Proc. Instn. Mech. Engrs, Vol201 No.D2(1987),pp.149-153.
- [15] D.A.Wilson, R.S.Sharp, and S.A.Hassan, "The Application of linear optimal Control Theory to the Design of Active Automotive Suspensions", Vehicle System Dynamics, 15(1986), pp.105-118.
- [16] N.Louam, "Commande pré-informée". Journal of technology E.N.P, series B et C, volume 10. N°1 (1994), pp.17-28.
- [17] V.A Svetlickij. Traduit du Russe par Albert Coubat "Vibrations aleatoires des systèmes mécaniques". Edition Technique et Documentation Paris 1980.
- [18] Bruce D. Van Deusen., " Analytical Techniques for Designing Riding Quality Into Automotive Vehicles" SAE Transactions, paper N° 670021, 1967.

- [19] L.J. Howell., " Power Spectral Analysis of Vehicle Vibration Using The NASTRAN Computer Program " SAE Transactions, paper N° 740328, 1974.
- [20] C.J.Dodds and J.D.Robson. "The description of Road Surface Roughness". Journal of Sound and Vibration 31(2).1973, pp. 175-183.
- [21] Julius s., Bendat and Allan G.Piersol. "Engineering Application of Correlation and Spectral Analysis", John Wiley & Sons, 1980.
- [22] F.Gelineau et D.Florentin " Confort vibratoire ". RENAULT Véhicules industriels. Novembre 1991.
- [23] Aleksander Hać, "Stochastic Optimal Control of Vehicles With Elastic Body and Active Suspension". Journal of Dynamic systems, Measurement, and Control, Vol.108, June 1986, pp.106-110.
- [24] R.S.Sharp and S.Aly Hassen "The Fundamentals of Passive Automotive Suspension System Design" Dynamics in Automotive Engineering April 1984.
- [25] André Preumont., "Vibrations aléatoires et analyse spectrale. "Presses Polytechniques et universitaires Romandes, Paris, 1990.
- [26] Cebon,D. and Newland,D.E. "The artificial generation of road surface topography by the inverse FFT method." Eighth Int. Association for vehicle Dynamics Symposium on The dynamics of vehicles on roads and on railway tracks 1983. (Ed.J.Karl Hedrick) 1983, pp.29-42 (Swets and Zeitlinger, Lisse).
- [27] P.K.Sinha., D.N.Wormley. and J.K.Hedrick., "Rail Passenger Vehicle Lateral Dynamic Performance Improvement Through Active Control. " Transactions of the ASME Vol. 100, December 1978, pp.270-283.
- [28] Thompson.A.G. "Quadratic Performance Indices and Optimum Suspension Design", Proc.Instrn.Mech.Engrs, Vol 187 9/1973. pp.129.139.

- [29] J.Ch.Gille, P.Decaulne et M.Péligrin., "Dynamique de la commande linéaire." Dunod, Paris, 1989.
- [30] J.K. Hendrick., " Some Optimal Control Techniques Applicable to Suspension System Design. " ASME Technical Papers, Vol.73-ICT-55, 1973, pp. 1-12.
- [31] M.A.Dokainish and M.M.Elmadany., "Random Reponse of Tractor Semitrailer System", Vehicle System Dynamics 9(1980), pp.87-111.
- [32] J.Anoly., S.Sankar., "A New Concept in Semi-Active Vibration Isolation.", Journal of Sound and Vibration, ASME, July 9, 1986. paper N° 86-DET-28.
- [33] M.M. El Madany and Z.S. El Razaz., " Performance of Activity Suspended Cabs in Highway trucks-Evaluation and Optimisation ", Journal of Sound and Vibration (1988) 126(3).423-435.
- [34] C.W. deSilva., " Optimal Input Design for The Dynamic Testing of Mechanical Systems. "Journal of Dynamic Systems, Mesurment, and Control, June 1987, Vol.109 pp.111-119.
- [35] Larry F.Stikleather., "Review of Ride Vibration Standards and Tolerance criteria. "SAE Transactions, paper N° 760413, 1976.
- [36] Ryba,D., " Improvements in Dynamic Characteristics of Automobile Suspension Systems", Vehicle System Dynamics, 3(1974), pp.17-46.
- [37] R.C. Redfield and D.C.Karnopp., "Performance Sensitivity of an Actively Damped Vehicle Suspension to Feedback Variation" Transactions of the ASME Journal of Dynamics Systems, measurement, and control, March 1989, Vol.111 pp 51-60.
- [38] R.M.Goodall and W.Kertüm "Active Suspension in Ground Transportations A Review of the State-of-the-Art and Future Potentiel". Vehicle System Dynamics 12(1983), pp.225-257.

- 
- [39] Bryson, A.E., and Ho, Y.C, "Applied Optimal Control. Optimisation, Estimation, and Control, J. Wiley, New York, 1975.
- [40] Bernard Friedland. "Control System Design. An Introduction to State-Space Methods". Mc Graw-Hill 1987.
- [41] D. Ryba, "Possible Improvements in Ride Comfort". Vehicle System Dynamics 2(1973), pp.1-32.
- [42] A.G Grace, A.J Laub, J.N Little, and C.Thompson "Control System Toolbox for use with MATLAB". The MathWorks, Inc. Octobre 30, 1990.