

7/95

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT *Genie Mecanique*
المدرسة الوطنية المتعددة الفنون
المكتبة - BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Etude comparative de chargement
par la méthode des singularités
sur des obstacles portants.*

Proposé par :
M^r. BOUDJEMAA, M

Etudié par :
CHABBI Ahcene
DEKOUICHE Nadin

Dirigé par :
M^r BOUDJEMAA, M.

PROMOTION
Juin 1995

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT *Genie Mecanique*

المدرسة الوطنية المتعددة الفتيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Etude comparative de chargement
par la méthode des singularités
sur des obstacles portants.*

Proposé par ;
M^r. BOUDJEMAA . M

Etudié par :
CHABBI Ahcene
BEROUICHE Nadir

Dirigé par :
M^r BOUDJEMAA . M.

PROMOTION
Juin 1995

DEDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

A ma très chère mère.
A la mémoire de mon père.
A la mémoire de mon ami Madjid.
A mes frères et soeurs.
A toute ma famille.
Et à tous mes amis

Ahcene

DEDICACES

الدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

A mes chers parents.
A mon frère et ma soeur.
A toute ma famille.

Nadir

REMERCIEMENTS

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à Monsieur **BOUDJEMAA** Mohamed enseignant à l'ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE pour l'intérêt continu qu'il a porté à notre travail et ses judicieux conseils qui furent pour nous une aide précieuse.

Nos vifs remerciements vont également à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation.

Nous remercions également l'ensemble du personnel de la bibliothèque de l'E.N.P pour son aide et son entière disponibilité.

Notre reconnaissance va enfin vers Messieurs **LAOUBI** Habib et **RABIA** Nacerddine pour l'intérêt et les précieux conseils qu'ils ont apporté à notre projet.

ملخص :

إن دراسة سريان الموائع حول الأجسام الصلبة لها أهمية كبيرة في ميكانيكا الموائع لتعدد إستعمالاتها اليومية.

إن اختيار طريقة اللوحات المحملة جاء نظراً لنتائجها الممثلة للسريان الحقيقي، هذه النتائج تزداد تقارباً باستعمال حمولات مركبة.

ABSTRACT:

The study of fluids flow around obstacles is of great importance in Fluids Mechanics for its current use.

The choose of the "PANELS METHOD" has been encouraged by its representatifs results of real flow, more the loads are complex more these results are convergents

RESUME:

L'étude des écoulements autour d'obstacles occupe un rang important dans la Mecanique Des Fluides vu les divers utilisations dans la vie quotidienne (Avions, Voitures, Turbines,...).

La METHODE DES SINGULARITES a été choisie pour ses résultats représentatifs de l'écoulement réel; ces résultats sont d'autant plus convergents que le chargement suit la complexité de l'écoulement.

SOMMAIRE

CHAPITRE I

GENERALITES.....	1
I-INTRODUCTION.....	2
I-1-DEFINITIONS ELEMENTAIRES.....	2
I-1-1-fluide	2
I-1-2-fluide parfait.....	2
I-1-3-conservation de la masse « Equation de Continuité »	2
I-1-4-rotationnel	3
I-1-5-fonction de courant.....	3
I-1-5-1-interpretation physique de la fonction de courant	4
I-1-6-potentiel de vitesse	5
I-1-7-principe de superposition	6
I-1-8-circulation.....	7
I-2- EXEMPLES D'ÉCOULEMENTS PERMANENTS DE FLUIDES EN BIDIMENSIONNEL.....	7
I-2-1-écoulement parallèle homogène.....	7
I-2-2-sources ou puits.....	8
I-2-3-vortex ou fil tourbillonnaire	9
I-2-4-doublet ou dipôle.....	9
I-2-5- tableau récapitulatif.....	11

CHAPITRE II

DEVELOPPEMENT DE LA METHODE DES SINGULARITES.....	12
II-1- INTRODUCTION INTUITIVE A LA METHODE DES SINGULARITES.....	13
II-1-1-cadre de l'étude.....	13
II-1-2-modele de SMITH.....	13
II-2- ANALYSE D'ÉCOULEMENTS AUTOUR D'OBSTACLES PAR LA METHODE DES SINGULARITES.....	15
II-2-1-analyse d'écoulements autour de profils portants.....	15
II-2-1-1-charge concentrée de sources.....	15
II-2-1-2-charge concentrée de vortex.....	17
II-2-1-3-charge concentrée de doublet.....	18
II-2-1-4-charge uniforme de sources.....	20
II-2-1-4-1-calcul de l'intégrale I.....	21
II-2-1-4-2-calcul des coefficients.....	22
II-2-1-4-3-calcul de l'intensité des singularités	23
II-2-1-4-4-expression de la vitesse tangentielle.....	25
II-2-1-5-distribution uniforme vortex.....	26

II-2-1-5-1- calcul de l'intensité des singularités.....	28
II-2-1-5-2- expression de la vitesse tangentielle.....	29
II-2-1-6- distribution uniforme de doublet.....	29
i-2-1-6-1- calcul de l'intégrale L.....	31
II-2-1-6-2- calcul des coefficients.....	32
II-2-1-6-3- calcul de l'intensité des singularités.....	34
II-2-1-6-4 expression de la vitesse tangentielle.....	35
II-2-2- analyse d'écoulements autour de profils portants.....	37
II-2-2-1-distribution linéaire de vortex.....	38
II-2-2-1-1-calcul des intégrales W et H.....	40
II-2-2-1-2- calcul de l'intensité des singularités.....	41
II-2-2-1-3- expression de la vitesse tangentielle.....	42
II-2-2-2-distribution linéaire de doublets.....	43
II-2-2-2-1- calcul des intégrales M et D.....	44
II-2-2-2-2- calcul de l'intensité des singularités.....	46
II-2-2-2-3- calcul de la vitesse tangentielle.....	47
II-2-2-3-distribution parabolique de vortex.....	48
II-2-2-3-1- calcul des intégrales W, H, C.....	50
II-2-2-3-2- calcul de l'intensité des singularités.....	50
II-2-2-3-3- expression de la vitesse tangentielle.....	51
II-2-2-4- distribution parabolique de doublets.....	52
II-2-2-4-1- calcul des intégrales M, D; R.....	53
II-2-2-4-2- calcul de l'intensité des singularités.....	54
II-2-2-4-3-expression de la vitesse tangentielle.....	55

CHAPITRE III

APPLICATION DE LA METHODE DES SINGULARITES.....	56
III-1-INTRODUCTION.....	57
III-2- CARACTERISTIQUE DE L'ECOULEMENT.....	57
III-2-1-le coefficient de pression.....	57
III-2-2-les coefficients de portance et de traînée.....	58
III-2-3-potentiel des vitesses et fonction de courant.....	59
III-3-LES PROFILS.....	60
III-3-1-cylindre fixe.....	60
III-3-2-cylindre tournant.....	62
III-3-3-rangée de cylindres.....	64
III-3-4-profil portant.....	65

CHAPITRE IV:

ELABORATION D'UN MAILLEUR.....	66
IV-1-CALCUL DES POTENTIELS DE DES VITESSES ET FONCTION DE COURANT.....	67
IV-1-1- charge uniforme de sources.....	68
IV-1-2-distribution linéaire de sources.....	69
IV-1-3-distribution parabolique de sources.....	69
IV-1-4-distribution uniforme de vortex.....	70
IV-1-5-distribution linéaire de vortex.....	70
IV-1-6 distribution parabolique de vortex.....	71
IV-1-7-distribution de uniforme de doublets.....	71
IV-1-8-distribution linéaire de doublets.....	71
IV-1-9-distribution parabolique de doublets.....	72
IV-2-CONSTRUCTION D'UN MAILLAGE:.....	72
iv-2-1-principe du maillage.....	72
IV-2-2-trace des lignes équipotentielles.....	72
...IV-2-3-trace des lignes de courant.....	73
organigramme I du maillage.....	74
organigramme II du maillage.....	74

CHAPITRE V

INTERPRETATION DES RESULTATS.....	76
V-1-CALCUL DES COEFFICIENTS DE PRESSION	
V-1-1-analyse d'écoulements autour d'un cylindre fixe	
V-1-1-1-charge concentrée de source	
V-1-1-2-charge uniforme répartie	
V-1-1-3-analyse d'écoulement autour d'une rangée de cylindres	
V-1-2-analyse d'écoulements autour d'un cylindre tournant	
V-1-3-analyse d'écoulements autour de profils d'ailes	
V-1-4-analyse d'écoulement autour d'une rangée d'aubes	
V-2-ETUDE DES MAILLAGES	
V-2-1-maillage autour d'un cylindre fixe	
V-2-2-maillage autour d'un cylindre tournant	
V-2-3-maillage autour d'une aube isolée	

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE
ANNEXE A
ANNEXE B
ANNEXE I
ANNEXE II

NOMENCLATURE

ρ	: Masse volumique du fluide
q, u_{∞}	: Vitesse de l'écoulement uniforme
u, v	: Composantes des vitesses
N	: Nombre de panneaux
Γ	: Circulation
α	: Angle d'incidence de l'écoulement
r_{ij}	: Rayon de position
δ_i	: Angle du panneau i avec l'horizontale
θ_i	: Position angulaire des sommets
$X_s(i), Y_s(i)$: Coordonnées du sommet i
$X(i), Y(i)$: Coordonnées du point de contrôle i
l_j	: Longueur du panneau j
K_j	: Intensité de la source au point j
γ_j	: Intensité du vortex au point j
μ_j	: Intensité du doublet au point j
γ_{sj}	: Intensité du vortex au sommet j
μ_{sj}	: Intensité du doublet au sommet j
R	: Rayon du cylindre
C_p	: Coefficient de pression
C_l	: Coefficient de portance
C_d	: Coefficient de traînée
V_{η}	: Vitesse normale
V_{τ}	: Vitesse tangentielle
P	: Pression locale
P_{∞}	: Pression l'infini amont
ϕ	: Fonction potentielle de vitesses
ψ	: Fonction de courant

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

CHAPITRE I GENERALITES

I-INTRODUCTION :

L'étude du repos et du mouvement des liquides et des gaz constitue la M.D.F; elle constitue l'une des branches de la M.M.C. comportant de nombreux problèmes auxquels se trouvent confronter les ingénieurs.

Ceci peut concerner par exemple, les problèmes d'écoulement des liquides dans les conduites, les canaux, les écoulements autour d'ailes ou fuselages et le calcul des compresseurs et des turbomachines.

Cette liste non exhaustive ne serait être complètement évocatrice sans parler des problèmes rencontrés en acoustique, en biomécanique, en météorologie et en conservation d'énergie.

I-1-DEFINITIONS ELEMENTAIRES:

I-1-1-FLUIDE: c'est un milieu materiel continu déformable qui s'écoule, la notion de fluide s'oppose à celle de solide, mais les deux sont constitués d'un grand nombre de particules infinitesimales qui sont solidement liées entre elles dans les solides et sont libres de se déplacer dans les fluides.

La propriété physique la plus remarquable d'un fluide est sa viscosité dynamique qui caractérise sa résistance à l'écoulement .

I-1-2-FLUIDE PARFAIT: un fluide parfait est considéré non visqueux ce qui est un état utopique de la matière car aucun fluide ne répond à cette condition.

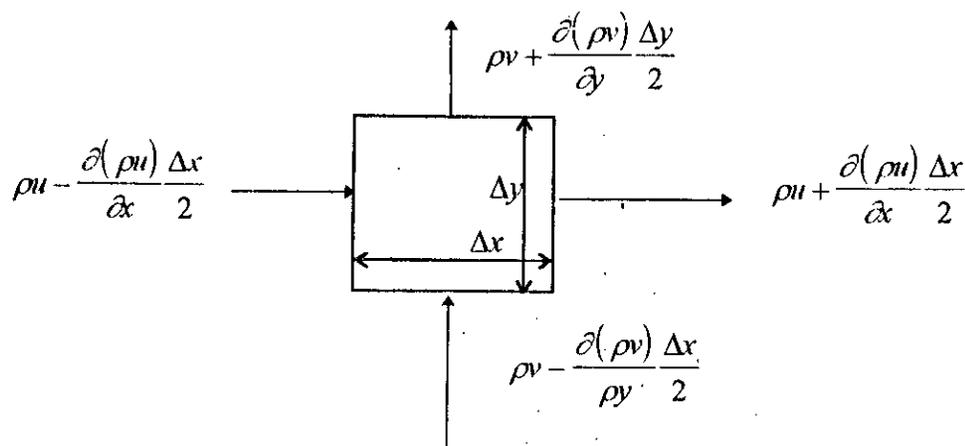
Les fluides parfaits constituent alors une fiction qu'on va utiliser comme référence pour les cas idéaux d'approche et de simulation.

I-1-3-CONSERVATION DE LA MASSE:

"EQUATION DE CONTINUTE "

On considère un élément rectangulaire dans le plan (x, y) de profondeur unitaire suivant « z » à travers lequel un fluide se déplace librement.

Le bilan de masse de fluide (entrant et sortant) doit être égal à la variation de la masse de fluide contenue dans le volume considéré $\rho dv = \rho dx dy.$



en faisant un bilan de masse on trouve:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

qui s'écrit vectoriellement sous la forme:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q}) = 0 \quad (\text{I-1})$$

L'équation de continuité d'un fluide incompressible et stationnaire s'écrit alors:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = 0 \quad (\text{I-2})$$

et s'écrit en bidimensionnel:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{I-3})$$

I-1-4-ROTATIONNEL:

Soit le vecteur $\vec{q}(u, v, w)$

Le rotationnel de ce vecteur s'écrit:

$$\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{q} = \vec{\nabla} \wedge \vec{q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\text{rot } \vec{q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{I-4})$$

On doit remarquer que la notion de rotationnalité est liée à l'élément fluide, alors que la rotation est liée à l'écoulement fluide dans sa totalité, ainsi un fluide peut tourner alors qu'il est irrotationnel (élément fluide non tournant) et un écoulement fluide peut être plan alors qu'il est rotationnel (élément fluide tournant).

I-1-5-FONCTION DE COURANT:

On considère un écoulement plan [2D], on pourra toujours trouver une fonction $\Psi(x, y, t)$ telle que :

$$u(x, y, t) = \frac{\partial \Psi(x, y, t)}{\partial y} \quad (I-5)$$

$$v(x, y, t) = -\frac{\partial \Psi(x, y, t)}{\partial x} \quad (I-6)$$

Cette fonction est la fonction de courant du domaine de vitesse $U(u, v)$, son intérêt mathématique est évident puisqu' elle nous permettra de faire face à un problème à une seule inconnue (Ψ) au lieu de deux (u, v).

il existera toujours une fonction (Ψ) du point de vue mathématique n'importe quel domaine de vitesse $U(u, v)$, mais il restera toujours à vérifier, qu'à ce champs de vitesse U correspond un écoulement réel (vérification de l'équation de continuité):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = 0 \quad (I-7)$$

La fonction de courant ne peut être déterminée que pour les écoulements bidimensionnels ou axisymétriques.

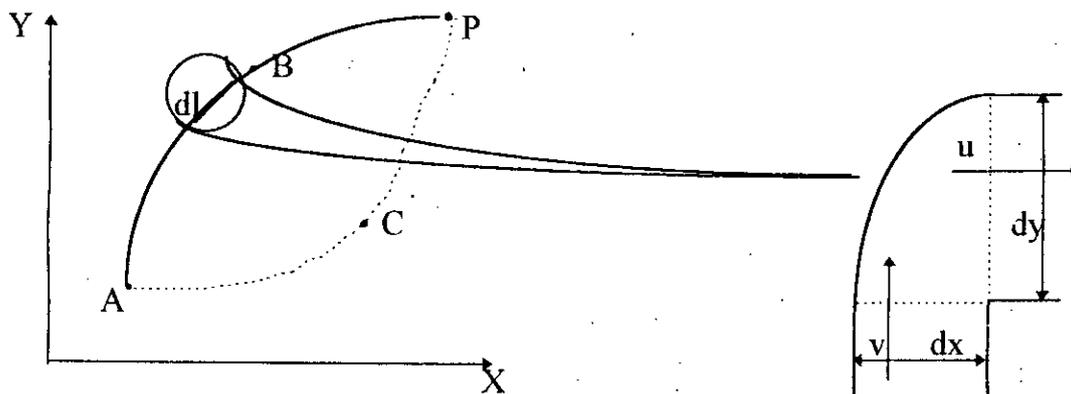
I-1-5-1-INTERPRETATION PHYSIQUE DE LA FONCTION DE COURANT:

Considérons écoulement d'une masse de fluide à travers une courbe (ABP) exprimé par unité de longueur suivant "z".

L'écoulement à travers un élément (dl) de (ABP) de gauche à droite est :

$$\rho(udy - vdx)$$

cet écoulement peut être de droite à gauche en tenant compte des signes de u et v.



L'écoulement total est donné par:

$$\int_A^B \rho(udy - vdx) \quad (\text{à travers B})$$

ceci est aussi vrai à travers (ACP) vu le principe de conservation de la masse

$$\int_A^B \rho(udy - vdx) \quad (\text{à travers C})$$

donc quelque soit le trajet entre A et P, l'intégrale est toujours vrai :

$$\int_A^P \rho(udy - vdx)$$

si $A(x_0, y_0)$; on aura $\int_{A(x_0, y_0)}^P \rho(udy - vdx) = f(x, y) \quad \forall t$

Cette fonction s'avère être exactement la fonction de courant $\Psi(x, y, t)$ définie auparavant puisque :

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy$$

et d'après les équations (I-5), (I-6) on a:

$$d\Psi = -vdx + udy$$

donc $\int_{A(x_0, y_0)}^P \rho(udy - vdx) = \int_{A(x_0, y_0)}^P \rho d\Psi = \rho_0 \Psi(x, y)$

avec ρ_0 : densité de référence pour un fluide compressible,
ou : densité du fluide même pour un fluide incompressible.

Donc l'équation de $\Psi(x, y, t)$ ainsi définie traduit une signification physique de la fonction de courant qui est un écoulement de volume, de gauche à droite à travers n'importe quel courbe reliant le point P(x,y) à un point de référence choisi $A(x_0, y_0)$ à l'instant t .

Par contre la différence entre deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) s'écrit quelque soit t:

$$\begin{aligned} \Psi(x_2, y_2) - \Psi(x_1, y_1) &= \int_A^{(x_2, y_2)} \rho(udy - vdx) - \int_A^{(x_1, y_1)} \rho(udy - vdx) \\ &= \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \rho(udy - vdx) = \Delta\Psi \end{aligned}$$

qui est écoulement de volume de gauche à droite à travers une courbe liant (x_1, y_1) à (x_2, y_2) .

REMARQUE:

L'écoulement se fera toujours suivant des lignes de courant et jamais à travers elles.

I-1-6-POTENTIEL DE VITESSE:

Le champs de vitesse de l'écoulement est irrotationnel dans les régions spatiales où :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{q} = 0$$

Cette équation donne la condition nécessaire et suffisante pour que le potentiel de vitesse Φ puisse exister; et par conséquent que la vitesse dérive d'un potentiel:

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \Phi$$

donc pour un écoulement plan irrotationnel d'un fluide incompressible

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{et} \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

et dans ce cas : $\nabla^2 \Phi = 0$ représente l'équation de continuité.

Les fonctions Φ et Ψ sont orthogonales, car pour les lignes équipotentielles:

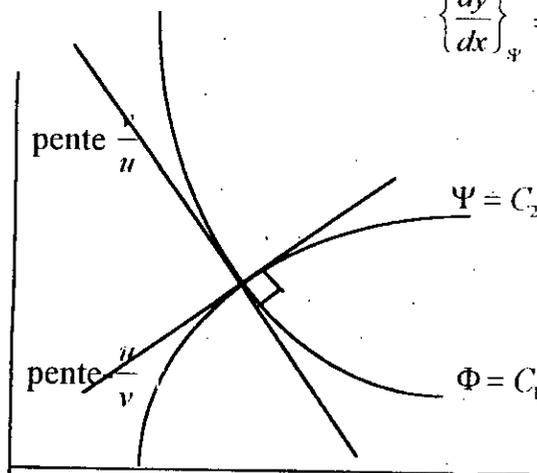
$$u dx + v dy = 0 \Rightarrow \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}_{\Phi} = -\frac{u}{v}$$

et pour les lignes de courant:

$$u dy - v dx = 0 \Rightarrow \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}_{\Psi} = \frac{v}{u}$$

d'où

$$\left\{ \frac{dy}{dx} \right\}_{\Psi} = \frac{-1}{\left\{ \frac{dy}{dx} \right\}_{\Phi}}$$



De nombreux écoulements sont similaires à des écoulements de fluide incompressible, ce qui justifie en fait toute l'étude de ces écoulements et qui restent une bonne approche de la réalité.

I-1-7-PRINCIPE DE SUPERPOSITION:

Définition: Si deux fonctions f_1 et f_2 sont des solutions de l'équation de LAPLACE, alors la fonction $f_1 + f_2$ et toute combinaison $\alpha f_1 + \beta f_2$ est aussi solution de cette équation, cette propriété est liée à la forme linéaire de l'équation de LAPLACE.

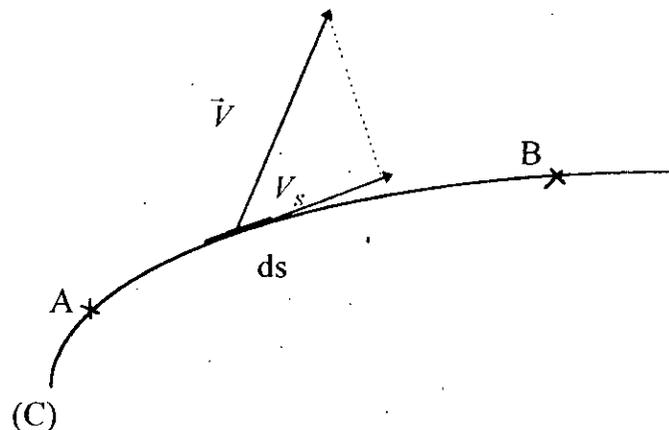
Et puisque on a pour des écoulements de fluides irrotationnels incompressibles, vérifiant l'équation de LAPLACE, donc les côtes des lignes de courant (ou celles des équipotentielles) s'ajoutent algébriquement et les vitesses se composent géométriquement.

Donc à partir de deux réseaux d'écoulement simples on peut déduire de nouveaux réseaux.

I-1-8-CIRCULATION:

Soit un champs de vecteur $V(u, v, w)$, on définit, la circulation du vecteur le long d'une ligne quelconque (C) reliant les points A et B par l'intégrale:

$$\Gamma = \int_{(C)} \vec{V} dS = \int_{(C)} \vec{V}_s dS = \int_{(C)} U dx + V dy + w dz$$



Cette intégrale peut être calculée en particulier pour un contour fermé quelconque, pour un cylindre de rayon R en rotation sur lui même avec une vitesse w

$$\Gamma = \int \vec{V} dS = \int_0^{2\pi} R d\theta w = 2\pi R w \quad \Rightarrow \Gamma = 2\pi R w.$$

I-2-EXEMPLES D'ÉCOULEMENTS PERMANENTS DE FLUIDES EN BIDIMENSIONNEL:**I-2-1- Écoulement parallèle homogène:**

Pour un écoulement uniforme parallèle selon la direction "x" avec une vitesse U_∞ la fonction de courant ψ et le potentiel de vitesse ϕ sont donnés par :

$$U_\infty = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

Ce qui nous permet d'écrire les fonctions complexes :

$$\phi = U_\infty x \text{ (fct de } x \text{ seulement)} \quad \text{et} \quad \psi = U_\infty y \text{ (fct de } y \text{ seulement)}$$

De même on peut décrire notre écoulement En coordonnées polaires par:

$$V_r = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = U_\infty \cos \theta = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_\infty \sin \theta = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta}$$

Ce qui nous permet d'avoir

$$\phi = U_\infty r \cos \theta \quad \text{et} \quad \psi = U_\infty r \sin \theta$$

I-2-2-Source ou puits:

En un point du plan (x, y), un écoulement radial, soit entrant, soit sortant, correspond à un écoulement engendré soit par une source, soit par un puits; en utilisant les coordonnées polaires (r, θ) on peut écrire pour (r≠0) avec dans la cas d'une source:

$$Q = 2\pi r V_r$$

Et la nature radiale de l'écoulement implique $V_\theta = 0$ d'où on peut écrire:

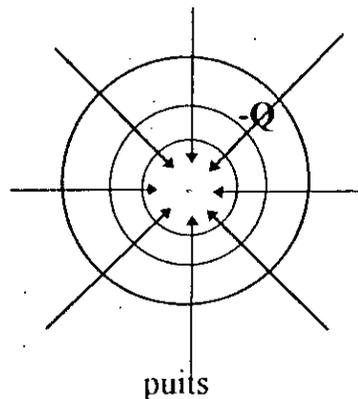
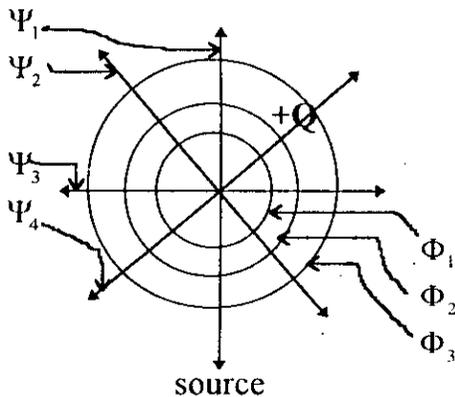
$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial r} = V_\theta = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = \frac{Q}{2\pi r} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = 0 \end{cases}$$

on trouve:

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad \text{et} \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta$$

Le puits est une source négative, donc pour obtenir les lignes de courant et les équipotentielles, il faut remplacer "+Q" par "-Q" pour obtenir à la fin:

$$\phi = -\frac{Q}{2\pi} \ln r \quad \text{et} \quad \psi = -\frac{Q}{2\pi} \theta$$



Si la source est située en un point $Q(a, b)$ dans le plan (x, y) , r est alors la distance entre la source et un point considéré quelconque $P(x, y)$, on obtient alors:

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln[(x-a)^2 + (y-b)^2]^{1/2}$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \left[\frac{y-b}{x-a} \right]$$

d'où

$$v = \frac{Q}{2\pi} \frac{y-b}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

$$u = \frac{Q}{2\pi} \frac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

I-2-3-Vortex [ou fil tourbillonnaire]:

Pour un vortex libre ou irrotationnel, les lignes de courant sont des cercles avec l'origine comme centre et les lignes équipotentielles sont des lignes radiales à partir de l'origine.

La fonction de courant ψ et le potentiel de vitesse ϕ pour le vortex peuvent être obtenus, puisque l'écoulement est irrotationnel, par:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{q} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) = 0$$

$$\text{où } V_r = 0 \quad \text{et} \quad V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

$$\text{ainsi } -\frac{\partial \psi}{\partial r} = V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad \text{et} \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

Remarque: pour tout trajet fermé qui n'inclut pas l'origine, la circulation d'un vortex irrotationnel est nulle.

I-2-4-doublet ou dipole:

C'est la superposition d'une source ``+Q`` et d'un puits ``-Q`` situés à la distance ds l'un de l'autre sur l'axe des x .

Le potentiel de vitesse d'un point P quelconque est donné par:

$$\phi = -\frac{Q}{2\pi} \ln(r+dr) + \frac{Q}{2\pi} \ln(r) = -\frac{Q}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{dr}{r}\right)$$

en faisant un développement de $\ln\left(1 + \frac{dr}{r}\right)$ on obtient

$$\ln\left(1 + \frac{dr}{r}\right) = \frac{dr}{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{r}\right)^2 + \dots$$

en négligeant les termes de second ordre et plus on obtient

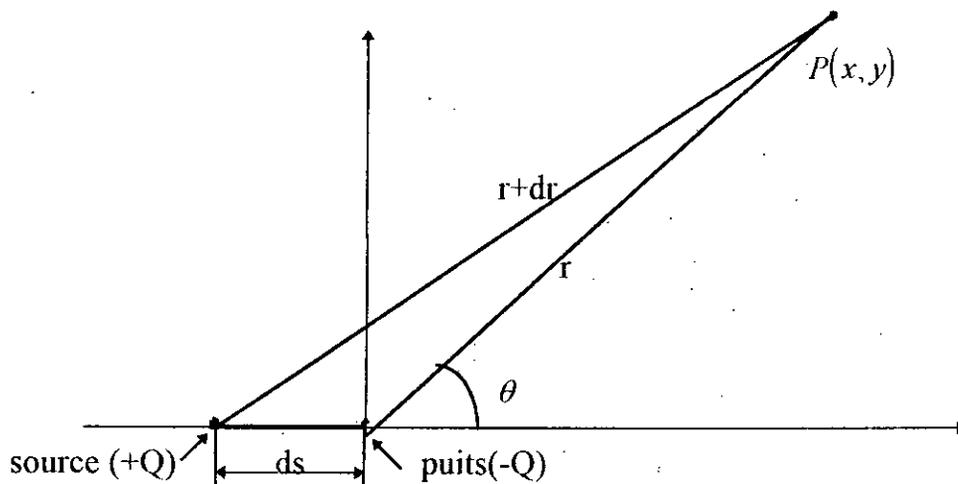
$$\phi = -\frac{Q}{2\pi} \left(\frac{dr}{r}\right) = -\frac{Q}{2\pi} \left(\frac{ds \cos\theta}{r}\right) = -\frac{\mu \cos\theta}{2\pi r}$$

où $\mu = Qds$ est l'intensité du doublet, de même:

$$\psi = \frac{\mu \sin\theta}{2\pi r}$$

et

$$\begin{cases} V_r = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = \frac{\mu \cos\theta}{2\pi r^2} \\ V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\mu \sin\theta}{2\pi r^2} \end{cases}$$



I-2-5-TABLEAU RECAPITULATIF:

Écoulement	Écoulement uniforme	Source	Vortex	Dipôle
U_r	$q \cos(\theta - \alpha)$	$\frac{k}{2 \pi r}$	0	$\frac{\mu}{2 \pi r^2} \cos \theta$
U_θ	$-q \sin(\theta - \alpha)$	0	$\frac{\gamma}{2 \pi r}$	$\frac{\mu}{2 \pi r^2} \sin \theta$
Φ	$qr \cos(\theta - \alpha)$	$\frac{k}{2\pi} \ln r$	$\frac{\gamma}{2 \pi} \theta$	$-\frac{\mu}{2 \pi r} \cos \theta$
Ψ	$qr \sin(\theta - \alpha)$	$\frac{k}{2 \pi} \theta$	$-\frac{\gamma}{2 \pi} \ln r$	$\frac{\mu}{2 \pi r} \sin \theta$

CHAPITRE II

**DEVELOPPEMENT DE LA
METHODE DES SINGULARITES**

II-1-INTRODUCTION INTUITIVE A LA METHODE DES SINGULARITES:

L'ambition de ce chapitre est d'amener le lecteur, par une démarche intuitive et pragmatique, à découvrir la *METHODE DES SINGULARITES* dans le cas d'un problème d'écoulements potentiels incompressibles autour de différents corps.

La connaissance de toutes les particularités cinématiques et dynamiques d'un écoulement de fluide nous pousse à l'étude des différentes équations régissant cet écoulement (Equation de Continuité, Equation du Mouvement, Equation d'Energie et Equation d'état).

Ces équations n'ont pas de solution analytique exacte générale et seules une douzaine de solutions particulières analytiques ont été trouvées.

Cependant plusieurs techniques approchées sont utilisées de nos jours dont l'approche numérique, cette dernière est utilisée pour solutionner des problèmes d'écoulement où l'analyse et l'outils analytique ne sont plus capables de fournir d'informations.

Plusieurs méthodes numériques de résolution des équations linéaires et non linéaires existent et parmi eux nous nous intéresserons à la méthode des singularités distribuées ou méthode des panneaux.

Cette méthode a une importance majeure dans l'industrie et spécialement dans la simulation aéronautique et son utilisation devient de plus en plus fréquente et fructueuse du fait d'une part du développement des moyens numériques de résolution et d'autre part de la convergence de la solution numérique obtenue vers la solution exacte.

II-1-1-CADRE DE L'ETUDE

Pour effectuer cette démarche intuitive, nous allons nous placer dans le cadre des écoulements stationnaires bidimensionnels et irrotationnels de fluides parfaits incompressibles.

II-1-2-MODELE DE SMITH

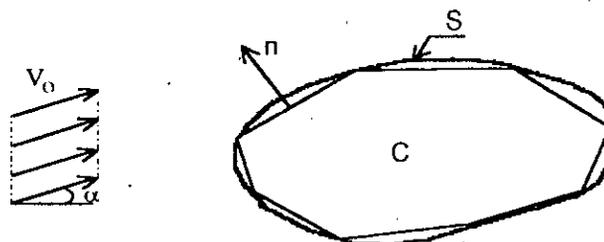


figure II.1

Soit le corps C, placé dans un écoulement uniforme de vitesse \bar{V}_0 faisant un angle α avec l'horizontale. Pour approximer l'écoulement résultant, nous distribuons sur ce corps N segments. Sur chaque segment $[Z_j, Z_{j+1}]$ est répartie une singularité de densité k_j , qu'il convient d'ajuster.

Pour effectuer cet ajustement, il faut disposer de N contraintes. Ces contraintes seront données par la condition de glissement sur la frontière S du corps C. Cette condition doit en principe, s'écrire en tout point de S mais cela n'est possible vu que nous disposons seulement de N degrés de liberté.

SMITH a proposé la solution suivante :

Si le nombre N de segments est suffisamment grand et si les segments sont convenablement disposés, alors les points μ_k , milieux des segments $[Z_j, Z_{j+1}]$ qu'on appelle "POINTS DE CONTROLE", sont proches de la frontière S. SMITH propose d'écrire la condition de glissement sur les N points μ_k .

De la même façon, si le nombre N de segments est suffisamment grand et si les segments sont convenablement disposés, la normale \bar{n}_k aux segments $[Z_j, Z_{j+1}]$ est une bonne approximation de la normale à la frontière S en un point proche de μ_k .

Ainsi SMITH propose de limiter l'écriture de la condition de glissement aux N points μ_k en utilisant les normales \bar{n}_k .

A partir de ce principe, on peut illustrer les étapes suivantes pour simuler la méthode :

① Discrétiser l'obstacle en subdivisant son contour en un nombre fini de points qu'on appellera "SOMMETS", ces sommets seront reliés par des segments de droite qu'on appellera "PANNEAUX", puis localiser en chaque milieu de panneau le "POINT DE CONTROLE" et définir ses coordonnées.

② Charger les panneaux de singularités

③ Calculer en chaque point de contrôle la vitesse normale produit par le chargement de sa singularité, notée $\Delta V_{\eta p}$. Ensuite en appliquant le principe de superposition, calculer la vitesse $V_{\eta p}$ en ce point de contrôle induit par tous les panneaux. On obtient :

$$V_{\eta p} = \sum \Delta V_{\eta p}$$

On note que $V_{\eta p}$ est la vitesse de perturbation.

A partir de ce résultat, on pourra obtenir la vitesse normale globale au point de contrôle par la superposition de la vitesse de perturbation $V_{\eta p}$ et la vitesse de l'écoulement uniforme, notée $V_{\eta cc. unif.}$, on aura donc :

$$V_{\eta} = V_{\eta p} + V_{\eta cc. unif.}$$

④ Imposer la condition de glissement de SMITH, autrement dit que la vitesse normale globale au point de contrôle soit nulle, ce qui nous permettra

d'obtenir autant de conditions que de charges de singularités donc un système d'équations linéaires.

⑤ Résoudre le système linéaire pour trouver l'intensité de chaque singularité en utilisant une méthode de résolution numérique des systèmes linéaires.

⑥ Calculer les différents paramètres de l'écoulement.

II-2-ANALYSE D'ECOULEMENT AUTOUR DE DIFFERENTS PROFILS PAR LA METHODE DES SINGULARITES

II-2-1-ANALYSE D'ECOULEMENT AUTOUR D'UN PROFIL NON PORTANT:

Soit un corps C (fig.II.2), discrétisons la frontière de ce corps pour former un polygone de N cotés, les coordonnées des sommets (X_s, Y_s) de cet obstacle étant bien définis.

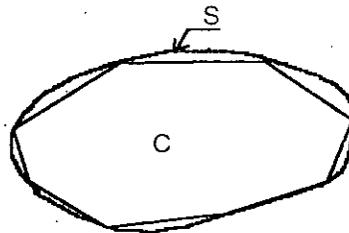


figure II.2

Discretisation d'un corps C en un polygone de N cotés

Nous proposons pour modéliser ce type d'écoulement, un chargement concentré ou uniforme de singularités. Le choix de ce type de chargement est justifié ultérieurement au paragraphe (§ II-4-2)

II-2-1-1-CHARGE CONCENTREE DE SOURCE:

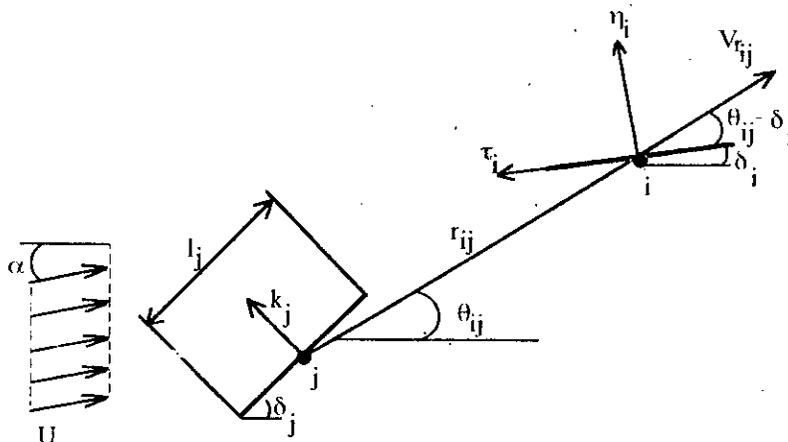


figure II.3

Influence d'une charge concentrée de source d'un panneau j sur le point de contrôle d'un panneau i

Considérons la figure (II 3), sur laquelle sont illustrés deux panneaux choisis arbitrairement i et j , chaque panneau est chargé en son point de contrôle d'une source d'intensité k_j définie par unité de longueur.

La vitesse induite par le panneau j sur le point de contrôle i suivant la normale η_i s'écrit :

$$V_{\eta_{ip}} = V_{ij} \sin(\theta_{ij} - \delta_i)$$

avec

$$V_{ij} = \frac{k_j l(j)}{2\pi r_{ij}}$$

d'où

$$V_{\eta_{ip}} = \frac{k_j l(j)}{2\pi r_{ij}} \sin(\theta_{ij} - \delta_i)$$

La vitesse induite par l'écoulement uniforme sur le point de contrôle i suivant la normale est égale à :

$$V_{\eta_{ec. unif.}} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) \quad (II.1)$$

Pour trouver la vitesse normale globale V_{η_i} , il suffit donc de superposer :

- La vitesse normale due à l'écoulement uniforme.
- La vitesse normale de perturbation ($i \neq j$).
- La vitesse normale issue de l'influence d'un panneau sur lui-même ($i = j$) car cette dernière nécessite un développement particulier dépendant du type de singularités posées, ce développement est contenu dans l'ANNEXE A.

$$\text{Soit :} \quad V_{\eta_i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{k_j l_j}{2\pi r_{ij}} \sin(\theta_{ij} - \delta_i) + \frac{k_i}{2} \quad (II.2)$$

avec :

$$\sin \theta_{ij} = \frac{y(i) - y(j)}{r_{ij}}$$

où

$$x(i) = \frac{Xs(i) + Xs(i-1)}{2}$$

$$\cos \theta_{ij} = \frac{x(i) - x(j)}{r_{ij}}$$

$$y(i) = \frac{Ys(i) + Ys(i-1)}{2} \quad (II.3)$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2}$$

1. • REMARQUE

La condition de fermeture de l'obstacle se traduit en imposant l'égalité suivante :

$$j-1 = N \quad \text{si } j=1$$

En imposant la condition de glissement qui se traduit par $V_{\eta_i} = 0$ ($i = 1, n$), et ceci afin d'ajuster l'intensité des singularités,

nous aboutissons à un système d'équations linéaires $\{A\}(k) = (B)$ à résoudre, tel que :

$$A(i, j) = \frac{\sin(\theta_{ij} - \delta_i) l_j}{r_{ij}} = \frac{((y(i) - y(j)) \cos \delta_i - (x(i) - x(j)) \sin \delta_i) \gamma_j}{(x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2}$$

$$A(i, i) = \pi$$
(II.4)

$$B(i) = 2\pi U_\infty (\sin \delta_i \cos \alpha - \cos \delta_i \sin \alpha)$$

Pour la résolution de ce système, nous avons adopté la méthode de Gauss avec pivotation maximale de lignes.

L'intensité des singularités étant déterminées, nous pouvons maintenant calculer par projection, la vitesse tangentielle en chaque panneau.

$$V_{ti} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{k_j l_j}{2\pi r_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i)$$
(II-5)

II-2-1-2-CHARGE CONCENTREE DE VORTEX:

Considérons (fig. II-4) sur laquelle sont illustrés deux panneaux i et j, chargés chacun en son point de contrôle d'un vortex d'intensité égal à γ_i et γ_j définis par unité de longueur.

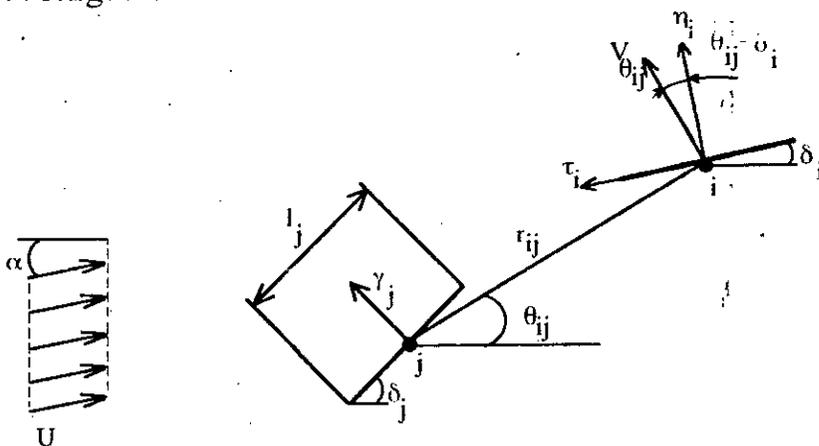


figure II-4

Influence d'une charge concentrée de vortex d'un panneau j sur le point de contrôle d'un panneau i

Comme précédemment (§ II-2-1-1), on calcule les différents termes de la vitesse normale globale.

La vitesse induite par le panneau j sur le panneau i suivant la normale η_i est :

$$V_{\eta_{ij}} = \frac{\gamma_j l_j}{2\pi r_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_j)$$

La vitesse induite par l'écoulement uniforme reste la même, soit :

$$V_{\eta \text{ ec.unif.}} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha)$$

➤ L'influence du panneau sur lui même suivant la normale pour un vortex est nulle (voir annexe A).

La vitesse normale globale qui en résulte est alors :

$$V_{\eta_i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j l_j}{2\pi r_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i) \quad (\text{II-6})$$

avec : $\sin\theta_{ij}, \cos\theta_{ij}, r_{ij}, x(i), y(i)$: définis précédemment par l'équation (II-3)

La condition de glissement sur la frontière de l'obstacle impose que $V_{\eta_i} = 0$ ($i = 1, n$), on aboutit alors pour le calcul des intensités des singularités au système $\{A\}(\gamma) = (B)$

$$A(i, j) = \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i) l_j}{r_{ij}} = \frac{((x(i) - x(j)) \cos \delta_i - (y(i) - y(j)) \sin \delta_i) l_j}{(x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2}$$

$$A(i, i) = 0 \quad (\text{II-7})$$

$$B(i) = 2\pi U_{\infty} (\sin \delta_i \cos \alpha - \cos \delta_i \sin \alpha)$$

La valeur des singularités étant connue, nous pouvons calculer la vitesse tangentielle :

$$V_{\tau_i} = -U_{\infty} \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \frac{k_j l_j}{2\pi r_{ij}} \sin(\theta_{ij} - \delta_i) + \frac{\gamma_i}{2} \quad (\text{II-8})$$

II-2-1-3-CHARGE CONCENTREE DE DOUBLET:

De la même façon que pour une source ou un vortex, la vitesse normale globale V_{η_i} sera (fig.II-5) :

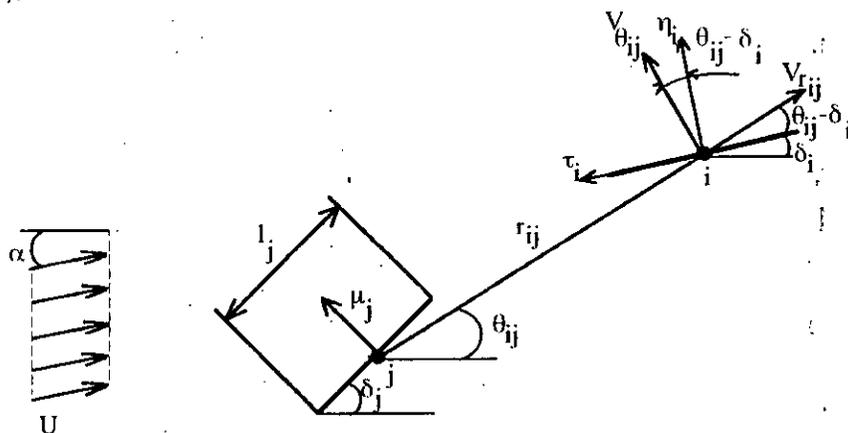


figure II-5

Influence d'une charge concentrée de doublet d'un panneau j sur le point de contrôle d'un panneau i

La vitesse normale induite par le panneau j sur le point de contrôle i, sera:

$$V_{n_{ij}} = V_{r_{ij}} \sin(\theta_{ij} - \delta_i) + V_{\theta_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i)$$

or :

$$V_{r_{ij}} = \frac{\mu_j}{2\pi r_{ij}^2} \cos \theta_{ij} \quad \text{et} \quad V_{\theta_{ij}} = \frac{\mu_j}{2\pi r_{ij}^2} \sin \theta_{ij}$$

$$V_{n_{ij}} = \frac{\mu_j}{2\pi r_{ij}^2} (\cos \theta_{ij} \sin(\theta_{ij} - \delta_i) + \sin \theta_{ij} \cos(\theta_{ij} - \delta_i))$$

d'où

$$V_{n_{ij}} = \frac{\mu_j}{2\pi r_{ij}^2} \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)$$

- La vitesse normale due à l'écoulement uniforme :

$$V_{n_{ec.unif.}} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha)$$

- La vitesse normale induite par l'influence du panneau sur lui même nécessite un développement particulier établi en ANNEXE B.

Finalement, on peut écrire :

$$V_{n_i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\mu_j l_j}{2\pi r_{ij}^2} \sin(2\theta_{ij} - \delta_j) \quad (\text{II-9})$$

avec: $\sin \theta_{ij}, \cos \theta_{ij}, r_{ij}, x(i), y(i)$: définis précédemment par l'équation(II-3)

La condition de glissement sur la frontière de l'obstacle impose que $\eta_i = 0$ ($i = 1, n$), pour aboutir finalement à un système d'équation linéaire $\{A\}(\mu) = (B)$ qu'on résoud par la méthode de gauss avec:

$$A(i, j) = \frac{\sin(2\theta_{ij} - \delta_i) l_j}{r_{ij}^2} = \frac{(2 \sin \theta_{ij} \cos \theta_{ij} \cos \delta_i - (\cos^2 \theta_{ij} - \sin^2 \theta_{ij}) \sin \delta_i) l_j}{2\pi r_{ij}^2}$$

$$A(i, i) = 0 \quad (\text{II-10})$$

$$B(i) = 2\pi U_{\infty} (\sin \delta_i \cos \alpha - \cos \delta_i \sin \alpha)$$

La valeur des singularités étant connue, nous pouvons calculer la vitesse tangentielle :

$$V_{t_i} = -U_{\infty} \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\mu_j l_j}{2\pi r_{ij}^2} \cos(2\theta_{ij} - \delta_j) \quad (\text{II-11})$$

II-2-1-4- DISTRIBUTION UNIFORME DE SOURCES:

Soit un panneau j chargé d'une distribution uniforme de sources d'intensités k_j par unité de longueur. (fig.II-6)

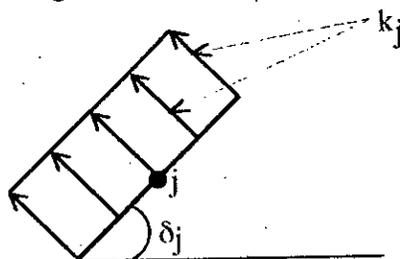


figure II-6

Distribution uniforme de sources sur un panneau j

Considérons un élément différentiel dS_j sur le panneau j et étudions son influence sur un point de contrôle i . (fig.II-7)

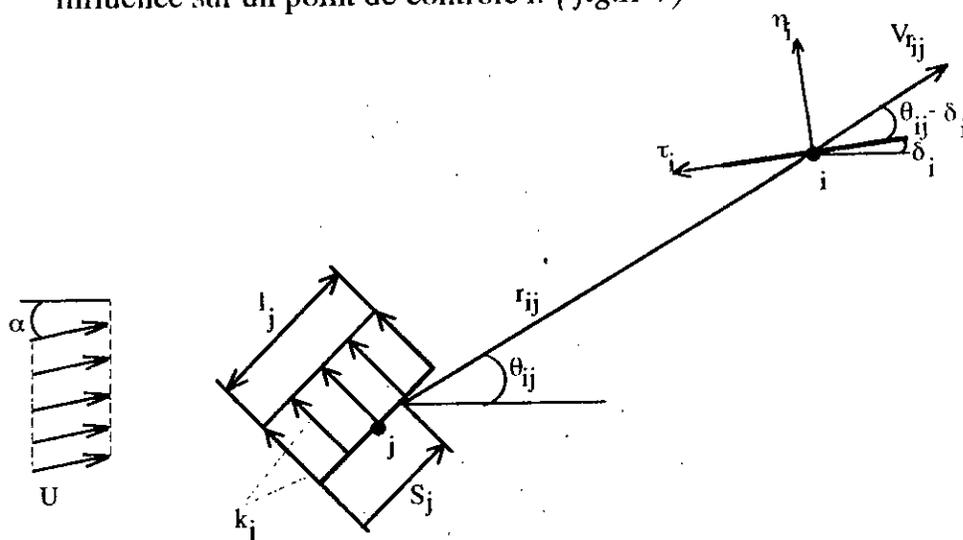


figure II-7

Influence d'un panneau j chargé uniformément de sources sur un point de contrôle i

Au point de contrôle i de coordonnées $(x(i), y(i))$, chaque élément différentiel dS_j du panneau j induit une vitesse normale dV_{η_i} qui s'exprime :

$$dV_{\eta_i} = \frac{k_j \sin(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j$$

r_{ij} représente la distance qui sépare le point de contrôle i et un point situé sur le panneau j , soit :

$$r_{ij} = \sqrt{(x(i) - x_j)^2 + (y(i) - y_j)^2}$$

avec :

$$\begin{aligned} x(i) &= \frac{Xs(i) + Xs(i-1)}{2} & \text{et} & & x_j &= Xs(j-1) + S_j \cos \delta_j \\ y(i) &= \frac{Ys(i) + Ys(i-1)}{2} & & & y_j &= Ys(j-1) + S_j \sin \delta_j \end{aligned}$$

Un passage à une intégrale le long du panneau j est nécessaire pour donner la vitesse normale induite par tout le panneau sur le point de contrôle i, en conséquence nous aurons donc l'expression de la vitesse qui sera :

$$V_{ni} = \int_0^{l_j} \frac{k_j \sin(\theta_{ij} - \delta_j)}{2\pi r_{ij}} dS_j$$

La vitesse induite par l'écoulement uniforme selon la normale η_i reste toujours la même et est égale à :

$$V_{\eta \text{ ec.unif.}} = -U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)$$

et la vitesse induite par l'influence du panneau sur lui même et développé en ANNEXE A.

La vitesse normale globale s'exprimera alors :

$$V_{ni} = -U_\infty \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j \neq i}^N \int_0^{l_j} \frac{k_j \sin(\theta_{ij} - \delta_j)}{2\pi r_{ij}} dS_j + \frac{k_i}{2} \quad (II+12)$$

On pose :

$$I = \int_0^{l_j} \frac{\sin(\theta_{ij} - \delta_j)}{r_{ij}} dS_j$$

II-2-1-4-1-CALCUL DE L'INTEGRALE I:

Pour le calcul de I, remarquons que les termes de l'intégrale sont fonction de S_j, il est donc nécessaire de développer ces termes.

nous savons que :

$$x_j = Xs(j-1) + S_j \cos \delta_j$$

$$y_j = Ys(j-1) + S_j \sin \delta_j$$

$$r_{ij}^2 = (x(i) - Xs(j-1) - S_j \cos \delta_j)^2 + (y(i) - Ys(j-1) - S_j \sin \delta_j)^2$$

$$\sin \theta_{ij} = \frac{y(i) - Ys(j-1) - S_j \sin \delta_j}{r_{ij}} \quad \text{et} \quad \cos \theta_{ij} = \frac{x(i) - Xs(j-1) - S_j \cos \delta_j}{r_{ij}}$$

De plus :

$$\sin(\theta_{ij} - \delta_j) = \sin \theta_{ij} \cos \delta_j - \cos \theta_{ij} \sin \delta_j$$

Ainsi l'intégrale I s'écrira :

$$I = \int_0^{l_j} \frac{\left((y(i) - Y_s(j-1) - S_j \sin \delta_j) \cos \delta_i - (x(i) - X_s(j-1) - S_j \cos \delta_j) \sin \delta_i \right)}{\left((y(i) - Y_s(j-1) - S_j \sin \delta_j)^2 + (x(i) - X_s(j-1) - S_j \cos \delta_j)^2 \right)} dS_j \quad (II-13)$$

Afin de pouvoir calculer cette intégrale, mettons la sous la forme :

$$I = \int_0^{l_j} \frac{I_1 S_j + I_2}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4} dS_j \quad (II-14)$$

Les coefficients I_1, I_2, I_3 et I_4 sont fonctions des deux panneaux associés aux points de contrôles i et j et à chaque fois ils se répètent, il suffit donc de calculer cette intégrale en fonction de ces coefficients ensuite remplacer pour chaque cas les valeurs des coefficients appropriées.

Pour des raisons de commodités de calculs, nous poserons le dénominateur de l'intégrale I sous la forme :

$$r_{ij}^2 = S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4 = (S_j - I_3)^2 + I_4 - I_3^2$$

Le calcul de cet intégrale est effectué en ANNEXE I pour donner le résultat:

PREMIER CAS : $I_4 - I_3^2 = 0$

$$I = I_1 \ln \left(\frac{|I_j - I_3|}{|-I_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left(\frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) \quad (II-15)$$

SECOND CAS : $I_4 - I_3^2 > 0$

$$I = \frac{I_1}{2} \ln \left(\frac{|(I_j - I_3)^2 + I_4 - I_3^2|}{I_4} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4 - I_3^2}} \left(\arctg \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4 - I_3^2}} - \arctg \frac{-I_3}{\sqrt{I_4 - I_3^2}} \right) \quad (II-16)$$

II-2-1-4-2-CALCUL DES COEFFICIENTS:

Les calculs des coefficients I_1, I_2, I_3 et I_4 se font par identification entre la forme de l'intégrale de l'équation (II-13) et celle de l'équation (II-14).

$$I = \int_0^{l_j} \frac{\left((y(i) - Y_s(j-1) - S_j \sin \delta_j) \cos \delta_i - (x(i) - X_s(j-1) - S_j \cos \delta_j) \sin \delta_i \right)}{\left((y(i) - Y_s(j-1) - S_j \sin \delta_j)^2 + (x(i) - X_s(j-1) - S_j \cos \delta_j)^2 \right)} dS_j = \int_0^{l_j} \frac{I_1 S_j + I_2}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4} dS_j$$

d'où

$$\begin{aligned} (y_i - Y_s(j-1) - S_j \sin \delta_j) \cos \delta_i - (x_i - X_s(j-1) - S_j \cos \delta_j) \sin \delta_i &= I_1 S_j + I_2 \\ (\sin \delta_i \cos \delta_j - \sin \delta_j \cos \delta_i) S_j + ((y_i - Y_s(j-1)) \cos \delta_i - (x_i - X_s(j-1)) \sin \delta_i) &= I_1 S_j + I_2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (x(i) - X_s(j-1) - S_j \cos \delta_j)^2 + (y(i) - Y_s(j-1) - S_j \sin \delta_j)^2 &= S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2 \\ S_j^2 - 2((x(i) - X_s(j-1)) \cos \delta_j + (y(i) - Y_s(j-1)) \sin \delta_j) S_j + (x(i) - X_s(j-1))^2 + (y(i) - Y_s(j-1))^2 &= S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2 \end{aligned}$$

En identifiant, nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} I_1 &= \sin \delta_i \cos \delta_j - \sin \delta_j \cos \delta_i \\ I_2 &= (y(i) - Y_s(j-1)) \cos \delta_i - (x(i) - X_s(j-1)) \sin \delta_i \\ I_3 &= (x(i) - X_s(j-1)) \cos \delta_j + (y(i) - Y_s(j-1)) \sin \delta_j \\ I_4^2 &= (y(i) - Y_s(j-1))^2 + (x(i) - X_s(j-1))^2 \\ I_4^2 - I_3^2 &= ((x(i) - X_s(j-1)) \sin \delta_j - (y(i) - Y_s(j-1)) \cos \delta_j)^2 \end{aligned} \tag{II-17}$$

• REMARQUE

($I_4^2 - I_3^2$ étant un carré parfait le cas où ($I_4^2 - I_3^2$) < 0 ne se présentera jamais, c'est la raison pour laquelle ce cas n'a pas été développé.

II-2-1-4-3-CALCUL DE L'INTENSITE DES SINGULARITES:

En considérant les deux cas cités précédemment pour la valeur du terme ($I_4^2 - I_3^2$), l'ajustement des singularités se fera en imposant la condition de glissement, $V_{\eta_i} = 0$ ($i = 1, N$), sur la frontière S du corps C (fig.III-1). Soit :

$$V_{\eta_i} = -U_\infty \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \frac{k_j \sin(\theta_j - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j + \frac{k_i}{2} = 0$$

- PREMIER CAS : ($I_4^2 - I_3^2$) = 0

En substituant l'expression de l'intégrale I de l'équation (II-15), la vitesse normale globale devient alors :

$$\begin{aligned} V_{\eta_i} &= -U_\infty \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \frac{k_j}{2\pi} \left(I_1 \ln \left(\frac{|l_j - l_3|}{|-l_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left(\frac{1}{l_j - l_3} + \frac{1}{l_3} \right) \right) + \frac{k_i}{2} = 0 \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^N k_j \left(I_1 \ln \left(\frac{|l_j - l_3|}{|-l_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left(\frac{1}{l_j - l_3} + \frac{1}{l_3} \right) \right) + \pi k_i &= 2\pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha) \end{aligned}$$

Les intensités des singularités seront déterminées en résolvant le système d'équations linéaires $[A](k) = (B)$ où :

$$A(i, j) = I_1 \ln \left(\frac{|I_j - I_3|}{|-I_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left(\frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right)$$

$$A(i, i) = \pi \tag{II-18}$$

$$B(i) = 2\pi U_\infty (\sin \delta_i \cos \alpha - \cos \delta_i \sin \alpha)$$

- SECOND CAS : $(I_4^2 - I_3^2) > 0$

De la même façon que pour le premier cas, on substitue l'expression de l'intégrale I de l'équation (II-16), afin d'obtenir l'expression de la vitesse normale globale.

$$V_{\eta i} = -U_\infty \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{k_j}{2\pi} \left(\frac{I_1}{2} \ln \left(\frac{|(I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2|}{I_4^2} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) + \frac{k_i}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N k_j \left(\frac{I_1}{2} \ln \left(\frac{|(I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2|}{I_4^2} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) + \pi k_i = 2\pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)$$

Ce système se met sous la forme $[A](k) = (B)$, ce qui permet de déterminer l'intensité k_j des singularités ($j = 1, N$), avec :

$$A(i, j) = \frac{I_1}{2} \ln \left(\frac{|(I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2|}{I_4^2} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right)$$

$$A(i, i) = \pi$$

$$B(i) = 2\pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)$$

II-2-1-4-4-EXPRESSION DE LA VITESSE TANGENTIELLE:

L'intensité des singularités étant déterminées, nous pouvons maintenant calculer par projection, la vitesse tangentielle en chaque panneau.

$$V_{\tau i} = -U_{\infty} \cos(\delta_i - \alpha) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int_0^{l_j} \frac{k_j \cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j + 0 \quad (\text{II-20})$$

On pose :

$$J = \int_0^{l_j} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} dS_j \quad (\text{II-21})$$

avec :

$$\cos(\theta_{ij} - \delta_i) = \cos\theta_{ij} \cos\delta_i + \sin\theta_{ij} \sin\delta_i$$

Cette intégrale est de la même forme que l'intégrale I déjà calculer, son calcul est effectué en ANNEXE I et suivant la valeur du terme $(I_4^2 - I_3^2)$ on obtient l'expression de l'intégrale I, il suffit donc de redéfinir les coefficients I_1, I_2, I_3 et I_4 qui se fera par identification. Nous trouvons :

$$\begin{aligned} I_1 &= -\cos\delta_i \cos\delta_j - \sin\delta_j \sin\delta_i \\ I_2 &= (y(i) - Ys(j-1))\sin\delta_i + (x(i) - Xs(j-1))\cos\delta_i \\ I_3 &= (x(i) - Xs(j-1))\cos\delta_j + (y(i) - Ys(j-1))\sin\delta_j \\ I_4^2 &= (y(i) - Ys(j-1))^2 + (x(i) - Xs(j-1))^2 \\ I_4^2 - I_3^2 &= ((x(i) - Xs(j-1))\sin\delta_j - (y(i) - Ys(j-1))\cos\delta_j)^2 \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

Finalement, la vitesse tangentielle s'exprime de la façon suivante :

- PREMIER CAS : $I_4^2 - I_3^2 = 0$

$$V_{\tau i} = -U_{\infty} \cos(\delta_i - \alpha) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{k_j}{2\pi} \left(I_1 \ln \left(\frac{|l_j - I_3|}{|-I_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left(\frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) \right) \quad (\text{II-23})$$

- SECOND CAS : $I_4^2 - I_3^2 > 0$

$$V_{\tau i} = -U_{\infty} \cos(\delta_i - \alpha) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{k_j}{2\pi} \left(\frac{I_1}{2} \ln \left(\frac{|(l_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2|}{I_4^2} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\arctg \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \arctg \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) \quad (\text{II.24})$$

II-2-1-5-DISTRIBUTION UNIFORME DE VORTEX:

Soit un panneau j chargé d'une distribution uniforme de vortex d'intensités γ_j par unité de longueur.

Considérons un élément différentiel dS_j sur le panneau j et étudions son influence sur un point de contrôle i. (fig.II-8)

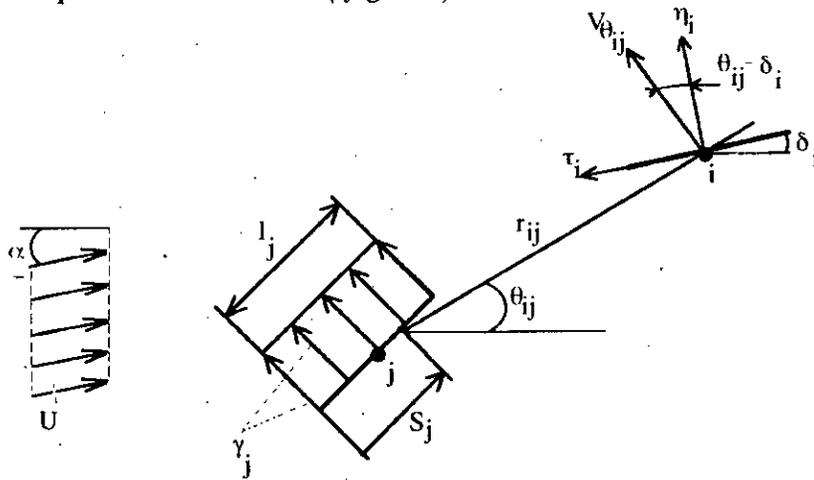


figure II.8

Influence d'un panneau j chargé uniformément de vortex sur un point de contrôle i

Au point de contrôle i de coordonnées $(x(i), y(i))$, chaque élément différentiel dS_j du panneau j induit une vitesse normale dV_{η_i} qui s'exprime :

$$dV_{\eta_i} = \frac{\gamma_j \cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j$$

r_{ij} représente la distance qui sépare le point de contrôle i et un point situé sur le panneau j, soit :

$$r_{ij} = \sqrt{(x(i) - x_j)^2 + (y(i) - y_j)^2}$$

avec :

$$x(i) = \frac{Xs(i) + Xs(i-1)}{2} \quad \text{et} \quad x_j = Xs(j-1) + S_j \cos \delta_j$$

$$y(i) = \frac{Ys(i) + Ys(i-1)}{2} \quad y_j = Ys(j-1) + S_j \sin \delta_j$$

Un passage à une intégrale le long du panneau j est nécessaire pour donner la vitesse normale induite par tout le panneau sur le point de contrôle i, en conséquence nous aurons donc l'expression de la vitesse qui sera :

$$V_{\eta_{ip}} = \int_0^{l_j} \frac{\gamma_j \cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j$$

REMARQUE:

L'influence du panneau sur lui même suivant la normale donne une vitesse nulle (voir ANNEXE A).

La vitesse induite par l'écoulement uniforme selon la normale η_i reste toujours la même et est égale à :

$$V_{\eta_{ec.unif.}} = - U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha)$$

La vitesse normale globale s'exprimera alors :

$$V_{\eta_i} = - U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=i}^N \int_0^{l_j} \frac{\gamma_j \cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j + 0 \quad (II-25)$$

L'intégrale de l'équation (II.25) peut s'écrire sous la forme :

$$W = \frac{\gamma_j}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} dS_j \quad (II-26)$$

On voit bien que l'intégrale W de l'équation (II-26) est de la même forme que l'intégrale J de l'équation (II-21), le calcul de W est identique à celui de J, nous aurons donc :

$$\begin{aligned} I_1 &= -\cos\delta_i \cos\delta_j - \sin\delta_j \sin\delta_i \\ I_2 &= (y(i) - Ys(j-1))\sin\delta_i + (x(i) - Xs(j-1))\cos\delta_i \\ I_3 &= (x(i) - Xs(j-1))\cos\delta_j + (y(i) - Ys(j-1))\sin\delta_j \\ I_4^2 &= (y(i) - Ys(j-1))^2 + (x(i) - Xs(j-1))^2 \\ I_4^2 - I_3^2 &= ((x(i) - Xs(j-1))\sin\delta_j - (y(i) - Ys(j-1))\cos\delta_j)^2 \end{aligned} \quad (II-27)$$

On trouve que la vitesse normale globale se met sous la forme :

- PREMIER CAS : $I_4^2 - I_3^2 = 0$

$$V_{\eta_i} = - U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=i}^N \frac{\gamma_j}{2\pi} \left(I_1 \ln \left(\frac{|I_j - I_3|}{|-I_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left(\frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) \right) + 0 \quad (II-28)$$

- SECOND CAS : $I_4^2 - I_3^2 > 0$

$$V_{\eta_i} = - U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=i}^N \frac{\gamma_j}{2\pi} \left(\frac{I_1}{2} \ln \left(\frac{(I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2}{I_4^2} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\arctg \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \arctg \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) \quad (II-29)$$

II-2-1-5-1- CALCULS DE L'INTENSITE DES SINGULARITES

En considérant les deux cas cités précédemment pour la valeur du terme $(I_4^2 - I_3^2)$, l'ajustement des singularités se fera en imposant la condition de glissement, $V_{\eta i} = 0$ ($i = 1, N$), sur la frontière S du corps C (fig.II.1). Soit :

$$V_{\eta i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int_0^{l_j} \frac{\gamma_j \cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} ds_j = 0$$

- PREMIER CAS : $I_4^2 - I_3^2 = 0$

On impose la condition de glissement sur l'expression de la vitesse normale globale de l'équation (II.28) :

$$\begin{aligned} V_{\eta i} &= -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\gamma_j}{2\pi} \left(I_1 \ln \left(\frac{|l_j - I_3|}{|-I_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left(\frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) \right) = 0 \\ \Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \gamma_j \left(I_1 \ln \left(\frac{|l_j - I_3|}{|-I_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left(\frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) \right) &= 2\pi U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) \end{aligned}$$

Les intensités des singularités seront déterminées en résolvant le système d'équations linéaires $[A](k) = (B)$ où :

$$\begin{aligned} A(i, j) &= I_1 \ln \left(\frac{|l_j - I_3|}{|-I_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left(\frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) \\ A(i, i) &= 0 \end{aligned} \tag{II.30}$$

$$B(i) = 2\pi U_{\infty} (\sin \delta_i \cos \alpha - \cos \delta_i \sin \alpha)$$

- SECOND CAS : $I_4^2 - I_3^2 > 0$

De la même façon que pour le premier cas, on impose la condition de glissement sur l'expression de la vitesse normale globale de l'équation (II-29) :

$$\begin{aligned} V_{\eta i} &= -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\gamma_j}{2\pi} \left(\frac{I_1}{2} \ln \left(\frac{(l_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2}{I_4^2} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\arctg \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \arctg \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) = 0 \\ \Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \gamma_j \left(\frac{I_1}{2} \ln \left(\frac{(l_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2}{I_4^2} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\arctg \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \arctg \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) &= 2\pi U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) \end{aligned}$$

Ce système se met sous la forme $[A](k) = (B)$, ce qui permet de déterminer l'intensité k_j des singularités ($j = 1, N$), avec :

$$A(i, j) = \frac{I_1}{2} \ln \left(\frac{|(l_j - I_3)|^2 + I_4^2 - I_3^2}{I_4^2} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \quad (\text{II-31})$$

$$A(i, i) = 0$$

$$B(i) = 2\pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)$$

II-2-1-5-2- EXPRESSION DE LA VITESSE TANGENTIELLE:

L'expression de la vitesse tangentielle est directement obtenue par projection.

$$V_{r,i} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int_0^{l_j} \frac{\gamma_j \sin(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j + \frac{\gamma_i}{2} \quad (\text{II-32})$$

L'expression de l'intégrale de l'équation (II.32) est de la même forme que l'intégrale I de l'équation (II-14), les expressions des coefficients I_1, I_2, I_3 et I_4 seront celles du système (II-17).

Suivant la valeur du terme $(I_4^2 - I_3^2)$ la vitesse tangentielle sera donnée par :

- PREMIER CAS : $I_4^2 - I_3^2 = 0$

$$V_{r,i} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\gamma_j}{2\pi} \left(I_1 \ln \left(\frac{|l_j - I_3|}{|-I_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left(\frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) \right) + \frac{\gamma_i}{2} \quad (\text{II.33})$$

- SECOND CAS : $I_4^2 - I_3^2 > 0$

$$V_{r,i} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\gamma_j}{2\pi} \left[\frac{I_1}{2} \ln \left(\frac{|(l_j - I_3)|^2 + I_4^2 - I_3^2}{I_4^2} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right] + \frac{\gamma_i}{2} \quad (\text{II-34})$$

II-2-1-6- DISTRIBUTION UNIFORME DE DOUBLET:

Considérons toujours deux panneaux i et j , sur ce dernier une distribution uniforme de doublets d'intensité μ_j , par unité de longueur, est appliquée. (fig II-9)

Etudions l'influence de cette distribution sur le point de contrôle i , prenons alors un élément différentiel dS_j et calculons la vitesse induite $dV_{\eta_{ip}}$ par cet élément suivant la normale η_i .

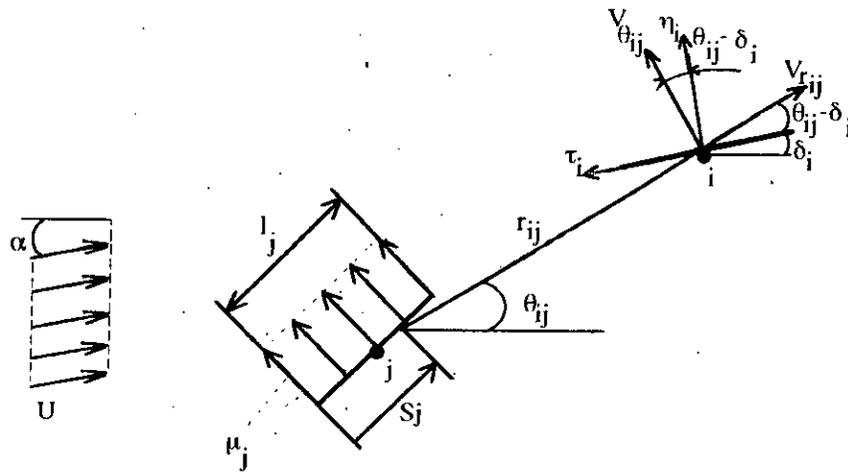


figure II-9

Influence d'un panneau j chargé uniformément de doublets sur un point de contrôle i

$$dV_{\eta_{ip}} = dV_{r_{ij}} \sin(\theta_{ij} - \delta_i) + dV_{\theta_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i) \quad (\text{II-35})$$

Nous savons que :

$$dV_{r_{ij}} = \frac{\mu_j \cos \theta_{ij}}{2\pi r_{ij}^2} dS_j \quad \text{et} \quad dV_{\theta_{ij}} = \frac{\mu_j \sin \theta_{ij}}{2\pi r_{ij}^2} dS_j$$

Donc l'équation (II-35) devient :

$$dV_{\eta_{ip}} = \frac{\mu_j \cos \theta_{ij}}{2\pi r_{ij}^2} \sin(\theta_{ij} - \delta_i) dS_j + \frac{\mu_j \sin \theta_{ij}}{2\pi r_{ij}^2} \cos(\theta_{ij} - \delta_i) dS_j$$

$$\Rightarrow dV_{\eta_{ip}} = \frac{\mu_j}{2\pi r_{ij}^2} \sin(2\theta_{ij} - \delta_i) dS_j$$

Pour le calcul de la vitesse normale $V_{\eta_{ip}}$ induite par le panneau j sur le point de contrôle i, il faut passer par une intégrale le long de tout le panneau j.

$$V_{\eta_{ip}} = \int_0^{l_j} dV_{\eta_{ip}} = \int_0^{l_j} \frac{\mu_j \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}^2} dS_j$$

$$V_{\eta_{ip}} = \frac{\mu_j}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{\sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j$$

Posons :

$$L = \int_0^{l_j} \frac{\sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j \quad (\text{II-36})$$

REMARQUE:

L'influence du panneau sur lui même suivant la normale est développer en ANNEXE B.

La vitesse induite par l'écoulement uniforme selon la normale η_i reste toujours la même et est égale à :

$$V_{\eta, \text{ec.unif.}} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha)$$

La vitesse normale globale s'exprimera alors :

$$V_{\eta i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \frac{\mu_j \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}^2} dS_j \quad (\text{II-37})$$

II-2-1-6-1-CALCUL DE L'INTEGRALE L :

On sait que :

$$\sin(2\theta_{ij} - \delta_i) = 2 \sin \theta_{ij} \cos \theta_{ij} \cos \delta_i - (\cos^2 \theta_{ij} - \sin^2 \theta_{ij}) \sin \delta_i$$

avec :

$$r_{ij}^2 = (x(i) - Xs(j-1) - S_j \cos \delta_j)^2 + (y(i) - Ys(j-1) - S_j \sin \delta_j)^2$$

$$\sin \theta_{ij} = \frac{y(i) - Ys(j-1) - S_j \sin \delta_j}{r_{ij}} \quad \text{et} \quad \cos \theta_{ij} = \frac{x(i) - Xs(j-1) - S_j \cos \delta_j}{r_{ij}}$$

D'après ces équations, on remarque que l'intégrale L est fonction uniquement de S_j et peut se mettre sous la forme :

$$L = \int_0^{l_j} \frac{(I_1 S_j^2 - 2I_2 S_j + I_5)}{(S_j^2 - 2I_3 + I_4)^2} dS_j \quad (\text{II-38})$$

Les coefficients I_1, I_2, I_3, I_4 et I_5 seront déterminés ultérieurement par identification de l'expression de L de l'équation (II-37) et celle de l'équation (II-39).

$$L = I_1 \int_0^{l_j} \frac{S_j^2}{(S_j^2 - 2I_3 + I_4)^2} dS_j - 2I_2 \int_0^{l_j} \frac{S_j}{(S_j^2 - 2I_3 + I_4)^2} dS_j + I_5 \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{(S_j^2 - 2I_3 + I_4)^2}$$

Soit :

$$L_1 = \int_0^{l_j} \frac{S_j^2}{(S_j^2 - 2I_3 + I_4)^2} dS_j, \quad L_2 = \int_0^{l_j} \frac{S_j}{(S_j^2 - 2I_3 + I_4)^2} dS_j$$

$$\text{et} \quad L_3 = \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{(S_j^2 - 2I_3 + I_4)^2}$$

Mettons le dénominateur de ces intégrales sous la forme:

$$(S_j^2 - 2I_3 + I_4)^2 = ((S_j - I_3)^2 + I_4 - I_3^2)^2$$

Notons que les termes I_3 et I_4 restent identiques à ceux du paragraphe (§ II-2-1-4).

A partir de là, le calcul des intégrales L_1 , L_2 et L_3 est effectué en ANNEXE II suivant la valeur du terme $(I_4^2 - I_3^2)$ pour donner le résultat suivant:

- PREMIER CAS : $I_4^2 - I_3^2 = 0$

$$L = -I_1 \left(\frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + (I_2 - I_1 I_3) \left(\frac{1}{(I_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(I_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) (I_5 - 2I_2 I_3 + I_1 I_3^2)$$

(II-39)

- SECOND CAS : $I_4^2 - I_3^2 > 0$

$$L = \frac{I_1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) + (I_2 - I_1 I_3) \left(\frac{1}{((I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} - \frac{1}{I_4^2} \right) + \frac{(I_5 + 2I_1 I_3^2 - 2I_2 I_3 - I_1 I_4^2)}{2(I_4^2 - I_3^2)^{3/2}} \left(\left(\frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right)$$

(II.40)

avec : $a = \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}}$ et $b = \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}}$

II-2-1-6-2- CALCUL DES COEFFICIENTS:

En comparaison avec les coefficients calculés au paragraphe (§ II-2-1-4-2), les valeurs de I_3 et I_4 restent inchangées.

Pour les coefficients I_1 , I_2 et I_5 , on identifie les numérateurs des expressions de L données par les équations (II-35) et (II-38) afin de déterminer leurs expressions. Soit :

$$L = \int_0^{I_j} \frac{\sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j = \int_0^{I_j} \frac{(I_1 S_j^2 - 2I_2 S_j + I_5)}{(S_j^2 - 2I_3 + I_4^2)^2} dS_j$$

$$\Rightarrow r_{ij}^2 \sin(2\theta_{ij} - \delta_i) = I_1 S_j^2 - 2I_2 S_j + I_5$$

$$\Rightarrow r_{ij}^2 \left(2 \sin \theta_{ij} \cos \theta_{ij} \cos \delta_i - (\cos^2 \theta_{ij} - \sin^2 \theta_{ij}) \sin \delta_i \right) = I_1 S_j^2 - 2I_2 S_j + I_5$$

$$\Rightarrow r_{ij}^2 \left(2 \left(\frac{y(i) - Ys(j-1) - S_j \sin \delta_j}{r_{ij}} \right) \left(\frac{x(i) - Xs(j-1) - S_j \cos \delta_j}{r_{ij}} \right) \cos \delta_i - \left(\left(\frac{x(i) - Xs(j-1) - S_j \cos \delta_j}{r_{ij}} \right)^2 - \left(\frac{y(i) - Ys(j-1) - S_j \sin \delta_j}{r_{ij}} \right)^2 \right) \sin \delta_i \right) = I_1 S_j^2 - 2I_2 S_j + I_5$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} & 2 \left((y(i) - Ys(j-1))(x(i) - Xs(j-1)) \right. \\ & \left. - \left((x(i) - Xs(j-1))\sin\delta_j + (y(i) - Ys(j-1))\cos\delta_j \right) Sj + \sin\delta_j \cos\delta_j Sj^2 \right) \cos\delta_i \\ & - \left(\left((x(i) - Xs(j-1))^2 - (y(i) - Ys(j-1))^2 \right) \right. \\ & \left. - 2 \left((x(i) - Xs(j-1))\cos\delta_j - (y(i) - Ys(j-1))\sin\delta_j \right) Sj + (\cos^2\delta_j - \sin^2\delta_j) Sj^2 \right) \sin\delta_i \\ & = I_1 Sj^2 - 2I_2 Sj + I_3 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \left(2\sin\delta_j \cos\delta_j \cos\delta_i - (\cos^2\delta_j - \sin^2\delta_j) \sin\delta_i \right) Sj^2 \\ - 2 \left(\left((x(i) - Xs(j-1))\sin\delta_j + (y(i) - Ys(j-1))\cos\delta_j \right) \cos\delta_i \right. \\ \left. - \left((x(i) - Xs(j-1))\cos\delta_j - (y(i) - Ys(j-1))\sin\delta_j \right) \sin\delta_i \right) Sj \\ + 2(y(i) - Ys(j-1))(x(i) - Xs(j-1))\cos\delta_i - \left((x(i) - Xs(j-1))^2 - (y(i) - Ys(j-1))^2 \right) \sin\delta_i \\ = I_1 Sj^2 - 2I_2 Sj + I_3$$

$$\Rightarrow I_1 = 2\sin\delta_j \cos\delta_j \cos\delta_i - (\cos^2\delta_j - \sin^2\delta_j) \sin\delta_i \\ I_2 = \left((x(i) - Xs(j-1))\sin\delta_j + (y(i) - Ys(j-1))\cos\delta_j \right) \cos\delta_i \\ - \left((x(i) - Xs(j-1))\cos\delta_j - (y(i) - Ys(j-1))\sin\delta_j \right) \sin\delta_i \\ I_3 = 2(y(i) - Ys(j-1))(x(i) - Xs(j-1))\cos\delta_i \\ - \left((x(i) - Xs(j-1))^2 - (y(i) - Ys(j-1))^2 \right) \sin\delta_i$$

$$\Rightarrow I_1 = \sin 2\delta_j \cos\delta_i - \cos 2\delta_j \sin\delta_i \\ I_2 = (x(i) - Xs(j-1))(\sin\delta_j \cos\delta_i - \cos\delta_j \sin\delta_i) \\ + (y(i) - Ys(j-1))(\cos\delta_j \cos\delta_i + \sin\delta_j \sin\delta_i) \\ I_3 = 2(y(i) - Ys(j-1))(x(i) - Xs(j-1))\cos\delta_i \\ - \left((x(i) - Xs(j-1))^2 - (y(i) - Ys(j-1))^2 \right) \sin\delta_i$$

$$\Rightarrow I_1 = \sin(2\delta_j - \delta_i) \\ I_2 = (x(i) - Xs(j-1))\sin(\delta_j - \delta_i) + (y(i) - Ys(j-1))\cos(\delta_j - \delta_i) \\ I_3 = 2(y(i) - Ys(j-1))(x(i) - Xs(j-1))\cos\delta_i \\ - \left((x(i) - Xs(j-1))^2 - (y(i) - Ys(j-1))^2 \right) \sin\delta_i \quad (II.41)$$

$$I_3 = (x(i) - Xs(j-1))\cos\delta_j + (y(i) - Ys(j-1))\sin\delta_j$$

$$I_4^2 = (y(i) - Ys(j-1))^2 + (x(i) - Xs(j-1))^2$$

$$I_4^2 - I_3^2 = \left((x(i) - Xs(j-1))\sin\delta_j - (y(i) - Ys(j-1))\cos\delta_j \right)^2$$

- PREMIER CAS : $I_4^2 - I_3^2 = 0$

En annulant l'expression de la vitesse V_{η_i} donnée par l'équation (II-42), on obtient le système linéaire $[A](\mu) = (B)$ où :

$$A(i, j) = -I_1 \left(\frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + (I_2 - I_1 I_3) \left(\frac{1}{(I_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(I_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) (I_5 - 2I_2 I_3 + I_1 I_3^2)$$

$$A(i, i) = L(i, i) \quad (\text{v. ANNEXE B})$$

(II.43)

$$B(i) = 2\pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)$$

- SECOND CAS : $I_4^2 - I_3^2 > 0$

De la même façon que précédemment, on annule la vitesse normale donnée cette fois-ci par l'équation (II-43), les termes du système seront par conséquent :

$$A(i, j) = I_1 \frac{1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) + (I_2 - I_1 I_3) \left(\frac{1}{((I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} - \frac{1}{I_4^2} \right)$$

$$+ \frac{(I_5 + 2I_1 I_3^2 - 2I_2 I_3 - I_1 I_4^2)}{(I_4^2 - I_3^2)^{3/2}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right)$$

$$A(i, i) = L(i, i) \quad (\text{v. ANNEXE B})$$

(II.45)

$$B(i) = 2\pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)$$

II-2-1-6-4- EXPRESSION DE LA VITESSE TANGENTIELLE:

L'expression de la vitesse tangentielle V_{τ_i} est établie par projection sur l'axe τ_i tangent au panneau i , de la vitesse due à l'écoulement uniforme et de la vitesse de perturbation et de l'influence du panneau sur lui-même (ANNEXE B).

$$V_{\tau_i} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int_0^{l_j} \frac{\mu_j \cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}^2} dS_j + \text{terme}(i=j) \quad (\text{II-46})$$

Posons :

$$H = \int_0^{l_j} \frac{\cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j \quad (\text{II-47})$$

On voit bien que l'intégrale H peut se mettre sous la forme de l'intégrale L donnée par l'équation (II-37), pour la définir il suffit seulement de redéfinir les coefficients I_1 , I_2 et I_5 par identification de l'expression de H (eq.II-47) et de l'expression de L (eq.II-38).

Les coefficients I_3 et I_4 demeurent inchangés (dénominateur identique). Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \cos(2\delta_j - \delta_i) \\
 I_2 &= (x(i) - Xs(j-1))\cos(\delta_j - \delta_i) - (y(i) - Ys(j-1))\sin(\delta_j - \delta_i) \\
 I_5 &= 2(y(i) - Ys(j-1))(x(i) - Xs(j-1))\sin\delta_i \\
 &\quad + \left((x(i) - Xs(j-1))^2 - (y(i) - Ys(j-1))^2 \right) \cos\delta_i
 \end{aligned}
 \tag{II.48}$$

suivant la valeur du terme $(I_4^2 - I_3^2)$ la vitesse tangentielle sera donné par:

- PREMIER CAS : $I_4^2 - I_3^2 = 0$

$$V_{\eta_i} = - U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\mu_j}{2\pi} \left(\begin{aligned} & -I_1 \left(\frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + (I_2 - I_1 I_3) \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right) \\ & - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) (I_5 - 2I_2 I_3 + I_1 I_3^2) \end{aligned} \right) + \text{terme}(i = j)
 \tag{II-49}$$

- SECOND CAS : $(I_4^2 - I_3^2) > 0$

$$V_{\eta_i} = - U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\mu_j}{2\pi} \left(\begin{aligned} & I_1 \frac{1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\arctg\left(\frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \arctg\left(\frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) \\ & + (I_2 - I_1 I_3) \left(\frac{1}{((l_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} - \frac{1}{I_4^2} \right) \\ & + \frac{(I_5 + 2I_1 I_3^2 - 2I_2 I_3 - I_1 I_4^2)}{(I_4^2 - I_3^2)^{3/2}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} (\arctg(b) - \arctg(a)) \right) \end{aligned} \right) + \text{terme}(i = j)
 \tag{II.50}$$

II-2-2-ANALYSE D'ÉCOULEMENT AROUND D'UN PROFIL PORTANT

Considérons un écoulement autour d'un cylindre de longueur infinie (fig II.10).

En superposant le potentiel de vitesses ϕ_1 d'un écoulement uniforme et le potentiel de vitesses ϕ_2 d'un vortex de circulation Γ , où :

$$\phi_1 = qr \cos(\theta - \alpha) \quad \text{et} \quad \phi_2 = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

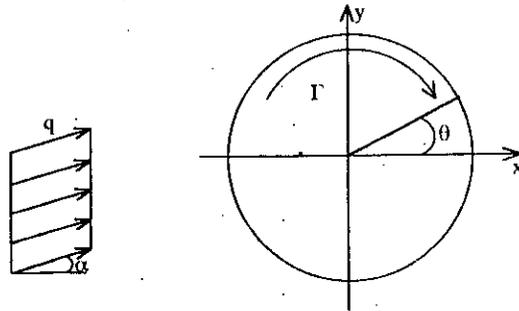


figure II.10

Écoulement uniforme et vortex (négatif) autour d'un cylindre en rotation

La vitesse sur le cylindre, qui est tangente au cylindre, a pour expression :

$$U_\theta = -\left(2q \sin(\theta - \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi r}\right) \quad (\text{II-51})$$

Le signe négatif provient du sens de rotation du cylindre (CW).

Pour une circulation nulle, deux points de stagnation apparaissent à :

$$\theta_1 = \alpha \quad \text{et} \quad \theta_2 = \pi + \alpha$$

En faisant augmenter la circulation, les deux points d'arrêt se déplacent le long de la surface du cylindre tel que :

$$\theta_1 = \alpha + \arcsin\left(-\frac{\Gamma}{4\pi qr}\right) \quad \text{et} \quad \theta_2 = \pi + \alpha - \theta_1$$

Pour une valeur singulière de Γ , les deux points de stagnation coïncideront de sorte que :

$$\theta = \alpha - \frac{\pi}{2} \quad \text{avec} \quad \Gamma = -4\pi qr$$

Le problème qui se pose est de modéliser la circulation afin d'analyser les écoulements autour de profils portants, pour cela faisons, par analogie, le bilan des efforts appliqués sur un panneau chargé de singularités.

La portance et le résultat d'une circulation qui est l'équivalent d'un moment, alors pour le cas d'une distribution uniforme (fig II-11).



figure II.11
Réduction d'une distribution uniforme au point de contrôle

Si on fait une réduction au point de contrôle on aura uniquement un vecteur au centre et un moment réduit nul car le point de contrôle est aussi le centre de gravité de la charge.

Donc tout autre distribution non uniforme peut simuler les écoulement autour de corps portants. en fait les corps sans portance ne sont pas de grande utilité dans la réalité, mais on s'intéresse plutôt aux profils portants qui trouvent leurs application dans plusieurs domaines tels que l'aéronautique et l'aviation etc....

Choisissons une distribution LINEAIRE ou PARABOLIQUE qui engendre une portance, et faisons une comparaison entre ces deux distributions pour l'application de la méthode des singularités

Utilisons d'abord la plus simple "distribution LINEAIRE"

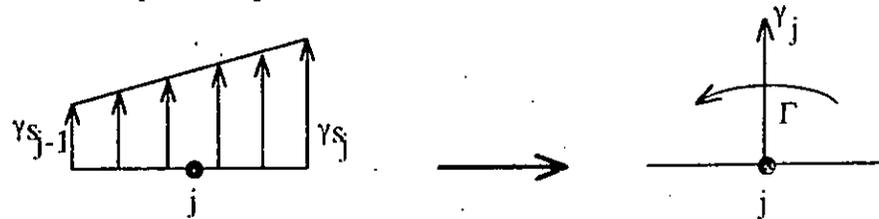


figure II.12
Réduction d'une distribution linéaire au point de contrôle.

$$\gamma(j) = \gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} S_j \quad (II.5)$$

II-2-2-1-DISTRIBUTION LINEAIRE DE VORTEX:

Pour une distribution linéaire de vortex (fig.II.13), le cheminement pour établir l'expression des vitesses est identique à la distribution uniforme de vortex (§-2-1-5) à la différence que dans ce cas la charge n'est plus constante mais elle est fonction de S_j.

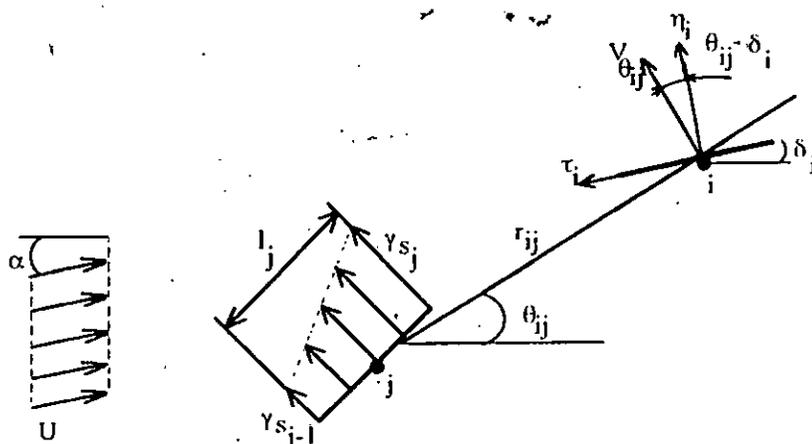


figure II.13

Influence d'un panneau j chargé linéairement de vortex sur un point de contrôle i

L'expression de la vitesse normale globale sera :

$$V_{\eta_i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \left(\gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} S_j \right) \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j$$

Qui peut se mettre sous la forme:

$$V_{\eta_i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \left(\gamma_s(j-1) \int_0^{l_j} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} \int_0^{l_j} S_j \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j \right) \quad (\text{II-53})$$

En posant:

$$W(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} dS_j \quad \text{et} \quad H(i, j) = \int_0^{l_j} S_j \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} dS_j \quad (\text{II-54})$$

L'équation (II-53) s'écrira alors :

$$V_{\eta_i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left(\left(W(i, j) - \frac{H(i, j)}{l_j} \right) \gamma_s(j-1) + \frac{H(i, j)}{l_j} \gamma_s(j) \right) \quad (\text{II-55})$$

La condition de glissement impose $V_{\eta_i} = 0$ qu'on peut l'écrire sous la forme matricielle $[A](\gamma_s) = [B]$.

On développe la somme de $j=1$ à $j=N+1$, pour éviter la double sommation de la distribution du premier panneau, le point $N+1$ est confondu avec le point 1 donc:

$$\begin{aligned} (i, N+1) &= W(i, 1) \\ H(i, N+1) &= H(i, 1) \\ l_{N+1} &= l_1 \end{aligned} \quad (\text{II-56})$$

De plus le nombre d'inconnues du système, pour une distribution linéaire, est de $N+1$ alors que nous disposons que de N équations, une condition supplémentaire est alors à imposer, c'est la condition de *KUTTA* :

$$\gamma_s(N+1) = -\gamma_s(1) \quad (\text{II-57})$$

REMARQUE:

L'influence du panneau sur lui même (i=j) exige un developpement particulier qui se trouve en ANNEXE A

II-2-2-1-1- CALCUL DES INTEGRALES W et H:

• L'intégrale W (eq.II.54) n'est autre que l'intégrale J (eq.II.21) déjà calculée en annexe I qui nous le resultat suivant les termes $I_4^2 - I_3^2$

PREMIER CAS : $I_4^2 - I_3^2 = 0$

$$(i, j) = I_1 \ln \left(\frac{|l_j - I_3|}{|-I_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left(\frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) \quad (\text{II-58})$$

SECOND CAS : $I_4^2 - I_3^2 > 0$

$$(i, j) = \frac{I_1}{2} \ln \left(\frac{(l_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2}{I_4^2} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\text{arctg} \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \text{arctg} \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \quad (\text{II-59})$$

avec les coefficients etant définis comme suit:

$$I_1 = -\cos \delta_i \cos \delta_j - \sin \delta_j \sin \delta_i$$

$$I_2 = (y(i) - Y_s(j-1)) \sin \delta_i + (x(i) - X_s(j-1)) \cos \delta_i$$

$$I_3 = (x(i) - X_s(j-1)) \cos \delta_j + (y(i) - Y_s(j-1)) \sin \delta_j$$

$$I_4^2 = (y(i) - Y_s(j-1))^2 + (x(i) - X_s(j-1))^2$$

$$I_4^2 - I_3^2 = ((x(i) - X_s(j-1)) \sin \delta_j - (y(i) - Y_s(j-1)) \cos \delta_j)^2$$

• Calculs de l'intégrale H est donné en ANNEXE I pour donner le resultat suivant le terme $I_4^2 - I_3^2$

PREMIER CAS : $I_4^2 - I_3^2 = 0$

$$H(i, j) = I_1 l_j - (I_1 I_3^2 + I_2 I_3) \left(\frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + (I_2 + 2I_1 I_3) \ln \left(1 - \frac{l_j}{I_3} \right) \quad (\text{II-60})$$

SECOND CAS : $I_4^2 - I_3^2 > 0$

$$H(i, j) = I_1 I_j + \left(I_1 I_3 + \frac{1}{2} I_2 \right) \ln \left(\frac{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2}{I_4^2} \right) + \frac{(2I_1 I_3^2 + I_2 I_3 - I_1 I_4^2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \quad (\text{II.61})$$

Les coefficients étant définis comme suit :

$$\begin{aligned} I_1 &= -\cos \delta_i \cos \delta_j - \sin \delta_i \sin \delta_j \\ I_2 &= (y(i) - Y_s(j-1)) \sin \delta_i + (x(i) - X_s(j-1)) \cos \delta_i \\ I_3 &= (x(i) - X_s(j-1)) \cos \delta_j + (y(i) - Y_s(j-1)) \sin \delta_j \\ I_4^2 &= (y(i) - Y_s(j-1))^2 + (x(i) - X_s(j-1))^2 \\ I_4^2 - I_3^2 &= ((x(i) - X_s(j-1)) \sin \delta_j - (y(i) - Y_s(j-1)) \cos \delta_j)^2 \end{aligned}$$

II-2-2-1-2- CALCULS DE L'INTENSITE DES SINGULARITES:

Afin d'établir le système qui nous permettra de déterminer l'intensité des singularités, il suffit d'imposer la condition de glissement sur le contour S de l'obstacle (fig. II-1)

$$V_{\eta_i} = -U_\infty \sin(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left(\left(W(i, j) - \frac{H(i, j)}{l_j} \right) \gamma_s(j-1) + \frac{H(i, j)}{l_j} \gamma_s(j) \right) = 0.$$

$$\sum_{j=1}^N \left(\left(W(i, j) - \frac{H(i, j)}{l_j} \right) \gamma_s(j-1) + \frac{H(i, j)}{l_j} \gamma_s(j) \right) = 2\pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^N A(i, j) \gamma_s(j) = 2\pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha).$$

En imposant les conditions (II.56) et (II.57), on définit les matrices du système qui nous permettent de déterminer l'intensité des singularités, soit :

$$\begin{aligned} \Lambda(i,1) &= W(i,2) - \frac{H(i,2)}{l_2} - \frac{H(i,1)}{l_1} \\ \Lambda(i,n) &= W(i,1) - \frac{H(i,1)}{l_1} + \frac{H(i,N)}{l_N} \\ \Lambda(i,j) &= W(i,j+1) - \frac{H(i,j+1)}{l_{j+1}} + \frac{H(i,j)}{l_j} \\ \Lambda(i,i) &= W(i,i+1) - \frac{H(i,i+1)}{l_{i+1}} + \frac{H(i,i)}{l_i} \quad (\text{H et W pour } i = j \text{ développé es en ANNEXE A}) \end{aligned} \quad (\text{II.62})$$

$$B(i) = 2\pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)$$

III-4-2-1-3- EXPRESSION DE LA VITESSE TANGENTIELLE:

On établit l'expression de la vitesse tangentielle soit:

$$V_{\tau i} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \left(\gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} S_j \right) \frac{\sin(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j \quad (\text{II-63})$$

REMARQUE:

L'influence du panneau sur lui même ($i=j$) exige un développement particulier qui se trouve en ANNEXE A

L'intégrale de l'équation (II-63) étant de forme identique à celle donnée par l'équation (II-53), la seule différence réside dans la définition des coefficients.

Ceci étant, la vitesse tangentielle s'écrit alors :

$$\begin{aligned} V_{\tau i} &= -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left(\left(W(i,j) - \frac{H(i,j)}{l_j} \right) \gamma_s(j-1) + \frac{H(i,j)}{l_j} \gamma_s(j) \right) \\ V_{\tau i} &= -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \Lambda(i,j) \gamma_s(j) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Lambda(i,1) &= W(i,2) - \frac{H(i,2)}{l_2} - \frac{H(i,1)}{l_1} \\ \Lambda(i,n) &= W(i,1) - \frac{H(i,1)}{l_1} + \frac{H(i,N)}{l_N} \\ \Lambda(i,j) &= W(i,j+1) - \frac{H(i,j+1)}{l_{j+1}} + \frac{H(i,j)}{l_j} \\ \Lambda(i,i) &= W(i,i+1) - \frac{H(i,i+1)}{l_{i+1}} + \frac{H(i,i)}{l_i} \quad (\text{H et W pour } i = j \text{ en annexe A}) \end{aligned}$$

Les coefficients étant quand à eux définis par :

$$I_1 = \sin \delta_i \cos \delta_j - \sin \delta_j \cos \delta_i$$

$$I_2 = (y(i) - Y_s(j-1)) \cos \delta_i - (x(i) - X_s(j-1)) \sin \delta_i$$

$$I_3 = (x(i) - X_s(j-1)) \cos \delta_j + (y(i) - Y_s(j-1)) \sin \delta_j$$

$$I_4^2 = (y(i) - Y_s(j-1))^2 + (x(i) - X_s(j-1))^2$$

$$I_4^2 - I_3^2 = ((x(i) - X_s(j-1)) \sin \delta_j - (y(i) - Y_s(j-1)) \cos \delta_j)^2$$

II-2-2-2- DISTRIBUTION LINEAIRE DE DOUBLETS:

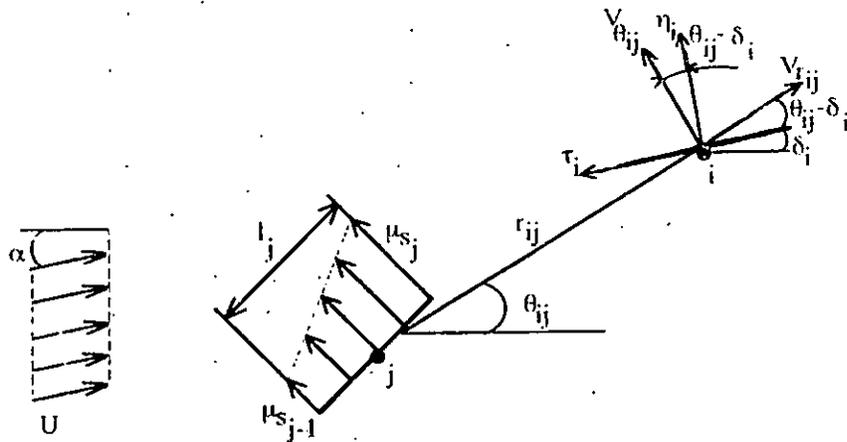


figure III.14

Influence d'un panneau j chargé linéairement de doublets sur un point de contrôle i

Pour une distribution linéaire de doublets (fig.II.14), les étapes de la formulation sont identiques à celles de la distribution linéaire de vortex

Les expressions des vitesses sont identiques à celles données par une distribution uniforme à la différence que l'intensité des singularités est fonction de la variable d'intégration S_j, en effet :

$$\mu(j) = \mu_s(j-1) + \frac{\mu_s(j) - \mu_s(j-1)}{l_j} S_j$$

L'expression de la vitesse normale globale est :

$$V_{\eta_i} = -U_\infty \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \frac{\mu(j) \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}^2} dS_j$$

$$V_{\eta_i} = -U_\infty \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \left(\mu_s(j-1) + \frac{\mu_s(j) - \mu_s(j-1)}{l_j} S_j \right) \frac{\sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}^2} dS_j$$

$$V_{\eta i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left(\mu_s(j-1) \int_0^{l_j} \frac{\sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dSj + \frac{\mu_s(j) - \mu_s(j-1)}{l_j} \int_0^{l_j} \frac{Sj \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dSj \right) \quad (II.64)$$

Posons :

$$M(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{\sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dSj \quad \text{et} \quad D(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{Sj \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dSj$$

L'expression de la vitesse normale aura pour forme:

$$V_{\eta i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[\left(M(i, j) - \frac{D(i, j)}{l_j} \right) \mu_s(j-1) + \frac{D(i, j)}{l_j} \mu_s(j) \right]$$

II-2-2-2-1- CALCUL DES INTEGRALES M et D:

On reconnaît l'intégrale M comme étant l'intégrale L donnée par l'équation (II-35) dont le calcul a été fait, qui se trouve en ANNEXE II

.calcul l'intégrale D:

L'intégrale D peut s'écrire :

$$D(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{Sj \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dSj = \int_0^{l_j} \frac{Sj (I_1 Sj^2 - 2I_2 Sj + I_5)}{(Sj^2 - 2I_3 + I_4^2)^2} dSj$$

$$D(i, j) = I_1 \int_0^{l_j} \frac{Sj^3}{(Sj^2 - 2I_3 + I_4^2)^2} dSj - 2I_2 \int_0^{l_j} \frac{Sj^2}{(Sj^2 - 2I_3 + I_4^2)^2} dSj + I_5 \int_0^{l_j} \frac{Sj}{(Sj^2 - 2I_3 + I_4^2)^2} dSj$$

$$D(i, j) = I_1 L_4 - 2I_2 L_1 + I_5 L_2 \quad (II.65)$$

Les intégrales L₁ et L₂ ont déjà été calculées donné en ANNEXE II).
Le calcul de l'intégrale D(i,j) est effectué en ANNEXE II pour donner le resultat

PREMIER CAS : $I_4^2 - I_3^2 = 0$

$$\begin{aligned}
 D(i, j) = & \frac{I_1}{4} \ln \left(\frac{I_j - I_3}{I_3} \right)^4 - (3I_1 I_3 - 2I_2) \left(\frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) \\
 & - \frac{1}{2} (3I_1 I_3^2 - 4I_2 I_3 + I_5) \left(\frac{1}{(I_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right) \\
 & - \frac{1}{3} (I_1 I_3^3 - 2I_2 I_3^2 + I_5 I_3) \left(\frac{1}{(I_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right)
 \end{aligned} \tag{II.66}$$

et

$$\begin{aligned}
 M(i, j) = & -I_1 \left(\frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + (I_2 - I_1 I_3) \left(\frac{1}{(I_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right) \\
 & - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(I_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) (I_5 - 2I_2 I_3 + I_1 I_3^2)
 \end{aligned} \tag{II.67}$$

SECOND CAS : $I_4^2 - I_3^2 > 0$

$$\begin{aligned}
 M(i, j) = & \frac{I_1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) \\
 & + (I_2 - I_1 I_3) \left(\frac{1}{((I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} - \frac{1}{I_4^2} \right) \\
 & + \frac{(I_5 + 2I_1 I_3^2 - 2I_2 I_3 - I_1 I_4^2)}{2(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\left(\frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right)
 \end{aligned} \tag{II.68}$$

$$\begin{aligned}
 D(i, j) = & \frac{I_1}{4} \ln \left(\frac{I_j^2 - 2I_3 I_j + I_4^2}{I_4^2} \right)^2 \\
 & + \frac{3I_1 I_3 - 2I_2}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) \\
 & + \frac{1}{2} (I_1 I_4^2 - 4I_1 I_3^2 + 4I_2 I_3 - I_5) \left(\frac{1}{\left((I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2 \right)} - \frac{1}{I_4^2} \right) \\
 & + \frac{(4I_1 I_3^3 + I_5 I_3 - 4I_2 I_3^2 + 2I_2 I_4^2 - 3I_1 I_3 I_4^2)}{2(I_4^2 - I_3^2)^3} \left(\left(\frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right) \\
 & \text{avec } a = \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \text{ et } b = \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}}
 \end{aligned} \tag{II.69}$$

II-2-2-2-2-CALCUL DE L'INTENSITE DES SINGULARITES:

En imposant la condition de glissement sur la frontière, en plus des conditions données par les équations (II.56) et (II.57) on aura alors :

$$\begin{aligned}
 M(i, N+1) &= M(i, 1) \\
 D(i, N+1) &= D(i, 1) \quad \text{et} \quad \mu_s(N+1) = -\mu_s(i) \\
 l_{N+1} &= l_1
 \end{aligned} \tag{II.70}$$

$$V_{\eta_i} = 0$$

$$V_{\eta_i} = -U_\infty \sin(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left(\left(M(i, j) - \frac{D(i, j)}{l_j} \right) \mu_s(j-1) + \frac{D(i, j)}{l_j} \mu_s(j) \right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^N \left(\left(M(i, j) - \frac{D(i, j)}{l_j} \right) \mu_s(j-1) + \frac{D(i, j)}{l_j} \mu_s(j) \right) = 2\pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^N A(i, j) \mu_s(j) = 2\pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)$$

qui nous permettent de déterminer l'intensité des singularités, soit:

$$\begin{aligned}
 \Lambda(i,1) &= M(i,2) - \frac{D(i,2)}{l_2} - \frac{D(i,1)}{l_1} \\
 \Lambda(i,n) &= M(i,1) - \frac{D(i,1)}{l_1} + \frac{D(i,N)}{l_N} \\
 \Lambda(i,j) &= M(i,j+1) - \frac{D(i,j+1)}{l_{j+1}} + \frac{D(i,j)}{l_j} \\
 \Lambda(i,i) &= M(i,i+1) - \frac{D(i,i+1)}{l_{i+1}} + \frac{D(i,i)}{l_i} \quad (M \text{ et } D \text{ pour } i = j \text{ dé finisenANNEXE B}) \\
 B(i) &= 2\pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)
 \end{aligned} \tag{II.71}$$

II-2-2-2-3- EXPRESSION DE LA VITESSE TANGENTIELLE:

L'expression de la vitesse tangentielle pour ce type de distribution:

$$V_{\tau i} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \left(\mu_s(j-1) + \frac{\mu_s(j) - \mu_s(j-1)}{l_j} S_j \right) \frac{\cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}^2} dS_j$$

Qui peut se mettre sous la forme:

$$V_{\tau i} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left(\begin{aligned} & \mu_s(j-1) \int_0^{l_j} \frac{\cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j \\ & + \frac{\mu_s(j) - \mu_s(j-1)}{l_j} \int_0^{l_j} S_j \frac{\cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j \end{aligned} \right) \tag{II.72}$$

On remarque que les deux intégrales de l'expression (II-72) sont de la même forme que les intégrales M et D, il faudra uniquement redéfinir les coefficients l_1 , l_2 et l_3 , à leur tour ces coefficients sont déjà définis par le système (II-48).

Nous pouvons directement écrire l'expression de la vitesse tangentielle, soit :

$$V_{\tau i} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \Lambda(i,j) \mu_s(j) \tag{II-73}$$

avec $\Lambda(i,j)$ définit par le système (II-71)

II-2-2-3- DISTRIBUTION PARABOLIQUE DE VORTEX:

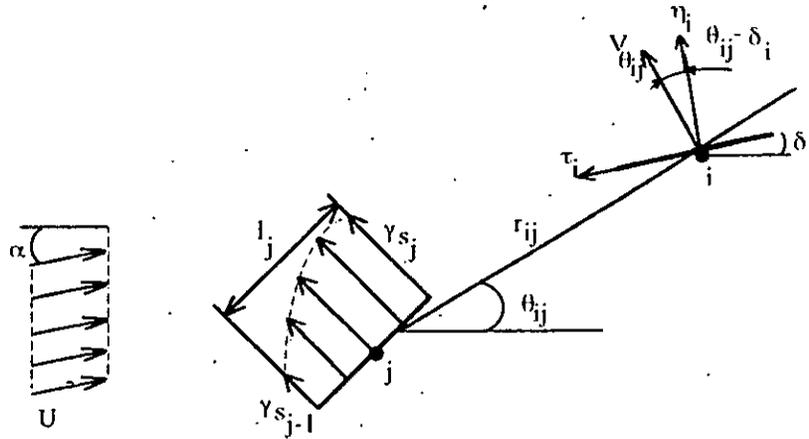


figure II-15

Influence d'un panneau j chargé paraboliquement de vortex sur un point de contrôle i

Pour une distribution parabolique de vortex (fig II-15), la méthodologie pour établir l'expression des vitesses est identique à celle de la distribution linéaire de vortex (§ II.2.2.1), à la différence on a un terme en plus Sj^2 (variable d'intégration), puisque le chargement s'écrit sous la forme.:

$\gamma(j) = ASj^2 + BSj + C$ avec A, B, C: sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites.

$$\begin{aligned} -\gamma(j) \Big|_{Sj=0} &= \gamma_s(j-1) \\ 2-\gamma(j) \Big|_{Sj=l_j} &= \gamma_s(j) \\ 3-\frac{d}{dS_j} \gamma(j) \Big|_{Sj=l_j} &= 0 \end{aligned}$$

Les trois conditions nous donnent:

$$A = \frac{\gamma_s(j-1) - \gamma_s(j)}{l_j^2}, B = 2 \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j}, C = \gamma_s(j-1)$$

on aura alors:

$$\gamma(j) = \gamma_s(j-1) + 2 \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} Sj + \frac{\gamma_s(j-1) - \gamma_s(j)}{l_j^2} Sj^2$$

L'expression de la vitesse normale globale sera alors:

$$V_{\eta_i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \left[\frac{\gamma_s(j-1) - \gamma_s(j)}{l_j^2} Sj^2 + 2 \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} Sj + \gamma_s(j-1) \right] \frac{\cos(\theta_{ij} - \gamma_i)}{2\pi r_{ij}} dSj$$

$$V_{\eta_i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \left(\gamma_s(j-1) \int_0^{l_j} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j + 2 \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} \int_0^{l_j} \frac{S_j \cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j \right. \\ \left. + \frac{\gamma_s(j-1) - \gamma_s(j)}{l_j^2} \int_0^{l_j} \frac{S_j^2 \cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j \right) \quad (II.74)$$

En posant:

$$(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} dS_j, \quad H(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{S_j \cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} dS_j$$

et

$$C(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{S_j^2 \cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} dS_j \quad (II.75)$$

On aura l'expression de V tel que:

$$V_{\eta_i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left(\left(W(i, j) - 2 \frac{H(i, j)}{l_j} + \frac{C(i, j)}{l_j^2} \right) \gamma_s(j-1) \right. \\ \left. + \left(2 \frac{H(i, j)}{l_j} - \frac{C(i, j)}{l_j^2} \right) \gamma_s(j) \right) \quad (II.76)$$

La condition de glissement impose:

$V_{\eta_i} = 0$, ce qui nous permet d'avoir une équation matricielle sous la forme $[A](\gamma_s) = [B]$.

On développe la somme de $j=2$ à $N+1$ pour éviter la double sommation de la distribution du premier panneau, le point $N+1$ est confondu avec le point 1 avec:

$$W(i, N+1) = W(i, 1)$$

$$H(i, N+1) = H(i, 1) \quad (II.77)$$

$$C(i, N+1) = C(i, 1)$$

$$\gamma_s(N+1) = \gamma_s(1) \quad \text{condition de KUTTA} \quad (II.78)$$

$$l_{N+1} = l_1$$

REMARQUE:

Le calcul de l'influence du panneau sur lui-même ($i=j$) exige un développement particulier est donné en ANNEXE A.

II-2-2-3-1- CALCUL DES INTEGRALES W, H, C:

L'integrale W,H sont déjà calculées en ANNEXE I, pour l'intégrale C(i,j), il est effectué de même en ANNEXE I pour donner le résultat suivant le terme $I_4^2 - I_3^2$

PREMIER CAS : $I_4^2 - I_3^2 = 0$

$$C(i, j) = I_1 \frac{I_j^2}{2} + (2I_1 I_3 + I_2)_j + (3I_1 I_3^2 + 2I_2 I_3) \ln \left[\frac{|I_j - I_3|}{|I_3|} \right] - (I_1 I_3^3 + I_2 I_3^2) \left[\frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right] \quad (II-79)$$

DEUXIEME CAS : $I_4^2 - I_3^2 > 0$

$$C(i, j) = I_1 \frac{I_j^2}{2} + (2I_1 I_3 + I_2)_j + \left(2I_1 I_3^2 + I_2 I_3 - \frac{I_1 I_4^2}{2} \right) \ln \left[\frac{|I_j^2 - 2I_3 I_j + I_3^2|}{|I_4^2|} \right] + \frac{4I_1 I_3^3 + 2I_2 I_3^2 - 3I_1 I_3 I_4^2 - I_2 I_4^2}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left[\arctg \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \arctg \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right] \quad (II-80)$$

les coefficients étant définis comme suit :

$$I_1 = -\cos \delta_i \cos \delta_j - \sin \delta_i \sin \delta_j$$

$$I_2 = (y(i) - Y_s(j-1)) \sin \delta_i + (x(i) - X_s(j-1)) \cos \delta_j$$

$$I_3 = (x(i) - X_s(j-1)) \cos \delta_j + (y(i) - Y_s(j-1)) \sin \delta_i$$

$$I_4^2 = (y(i) - Y_s(j-1))^2 + (x(i) - X_s(j-1))^2$$

$$I_4^2 - I_3^2 = ((x(i) - X_s(j-1)) \sin \delta_j - (y(i) - Y_s(j-1)) \cos \delta_j)^2$$

II-2-2-3-2- CALCUL DE L'INTENSITE DES SINGULARITES:

Afin d'établir le système qui nous permettra de déterminer l'intensité des singularités, il suffit d'imposer la condition de glissement sur le contour S de l'obstacle (fig II-1):

$$V_{\eta_i} = 0 \Rightarrow V_{\eta_i} = -U_\infty \sin(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left(\left(W(i, j) - 2 \frac{H(i, j)}{l_j} + \frac{C(i, j)}{l_j^2} \right) \gamma_s(j-1) + \left(2 \frac{H(i, j)}{l_j} - \frac{C(i, j)}{l_j^2} \right) \gamma_s(j) \right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^N \left(\left(W(i, j) - 2 \frac{H(i, j)}{l_j} + \frac{C(i, j)}{l_j^2} \right) \gamma_s(j-1) + \left(2 \frac{H(i, j)}{l_j} - \frac{C(i, j)}{l_j^2} \right) \gamma_s(j) \right) = 2\pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)$$

En imposant les conditions (II-77) et (II-78), on définit les matrices du système qui nous permet de déterminer l'intensité des singularités:

$$\begin{aligned}
 A(i,1) &= W(i,2) - 2 \frac{H(i,2)}{l_2} + \frac{C(i,2)}{l_2^2} - \left(2 \frac{H(i,1)}{l_1} - \frac{C(i,1)}{l_1^2} \right) \\
 A(i,n) &= W(i,1) - 2 \frac{H(i,1)}{l_1} + \frac{C(i,1)}{l_1^2} + \left(2 \frac{H(i,N)}{l_N} - \frac{C(i,N)}{l_N^2} \right) \\
 A(i,j) &= W(i,j+1) - 2 \frac{H(i,j+1)}{l_{j+1}} + \frac{C(i,j+1)}{l_{j+1}^2} + \left(2 \frac{H(i,j)}{l_j} - \frac{C(i,j)}{l_j^2} \right) \quad (II-81) \\
 A(i,i) &= W(i,i+1) - 2 \frac{H(i,i+1)}{l_{i+1}} + \frac{C(i,i+1)}{l_{i+1}^2} + \left(2 \frac{H(i,i)}{l_i} - \frac{C(i,i)}{l_i^2} \right) \quad (H, W \text{ et } C \text{ pour } (i=j))
 \end{aligned}$$

développés en ANNEXE A)

$$B(i) = 2\pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)$$

II-2-3-3-3- EXPRESION DE LA VITESSE TANGENTIELLE:

De façon analogue au (§-2-1-3) on établit l'expression de la vitesse tangentielle:

$$V_{t,i} = - U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \left(\gamma_s(j-1) + 2 \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} S_j + \frac{\gamma_s(j-1) - \gamma_s(j)}{l_j^2} S_j^2 \right) \frac{\sin(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j$$

(II.82)

REMARQUE:

Le calcul de l'influence du panneau sur lui même (i=j) exige un développement particulier est donné en ANNEXE A.

L'intégrale de l'équation (II-82) étant de forme identique à celle donnée par l'expression (II-74); la seule différence réside dans la définition des coefficients, ceci étant, l'expression de la vitesse tangentielle se met sous la forme:

$$\begin{aligned}
 V_{t,i} &= - U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left(\left(W(i,j) - 2 \frac{H(i,j)}{l_j} + \frac{C(i,j)}{l_j^2} \right) \gamma_s(j-1) + \left(2 \frac{H(i,j)}{l_j} - \frac{C(i,j)}{l_j^2} \right) \gamma_s(j) \right) \\
 V_{t,i} &= - U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N A(i,j) \gamma_s(j)
 \end{aligned}$$

avec:

A(i,j) déjà déterminé par le système (II-81)

Les coefficients étant définis par:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sin \delta_i \cos \delta_j - \sin \delta_j \cos \delta_i \\
 I_2 &= (y(i) - Y_s(j-1)) \cos \delta_i - (x(i) - X_s(j-1)) \sin \delta_i \\
 I_3 &= (x(i) - X_s(j-1)) \cos \delta_j + (y(i) - Y_s(j-1)) \sin \delta_j \\
 I_4^2 &= (y(i) - Y_s(j-1))^2 + (x(i) - X_s(j-1))^2 \\
 I_4^2 - I_3^2 &= ((x(i) - X_s(j-1)) \sin \delta_j - (y(i) - Y_s(j-1)) \cos \delta_j)^2
 \end{aligned}$$

II-2-2-4- DISTRIBUTION PARABOLIQUE DE DOUBLET:

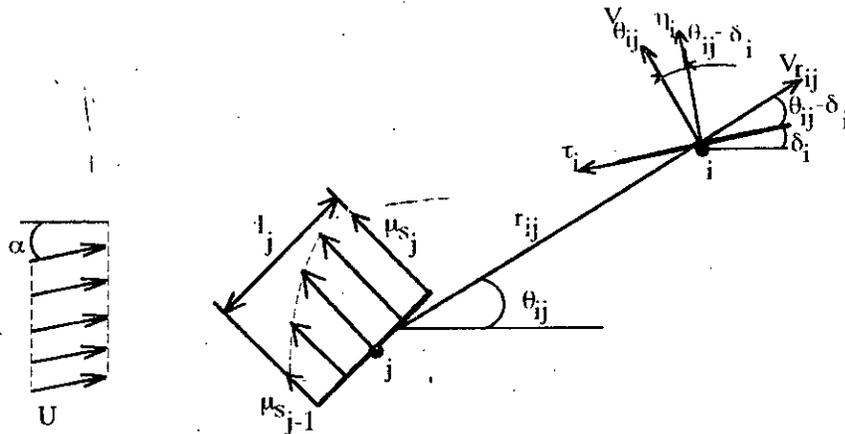


figure II-19

Influence d'un panneau j chargé paraboliquement de doublets sur un point de contrôle

Pour une distribution parabolique de doublet (fig II-9), les étapes de la formulation sont identiques à celle de distribution linéaire de doublet (§-II-4-2-2), les expressions des vitesses sont identiques à celles données par une distribution linéaire doublet, à la différence on a une intégration en plus, tel que:

$$\mu(j) = \mu_s(j-1) + 2 \frac{\mu_s(j) - \mu_s(j-1)}{l_j} S_j + \frac{\mu_s(j-1) - \mu_s(j)}{l_j^2} S_j^2$$

L'expression de la vitesse normale globale est donnée par:

$$V_{ni} = -U_\infty \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \frac{\mu(j) \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}^2} dS_j$$

Qui peut se mettre sous la forme:

$$V_{\eta_i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left(\mu_s(j-1) \int_0^{l_j} \frac{\sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j + 2 \frac{\mu_s(j) - \mu_s(j-1)}{l_j} \int_0^{l_j} \frac{S_j \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j + \frac{\mu_s(j-1) - \mu_s(j)}{l_j^2} \int_0^{l_j} \frac{S_j^2 \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j \right) \quad (II.82)$$

En posant:

$$M(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{\sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j, \quad D(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{S_j \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j$$

et

$$R(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{S_j^2 \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j \quad (II.83)$$

On aura l'expression de la vitesse normale:

$$V_{\eta_i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[\left(M(i, j) - 2 \frac{D(i, j)}{l_j} + \frac{R(i, j)}{l_j^2} \right) \mu_s(j-1) + \left(2 \frac{D(i, j)}{l_j} + \frac{R(i, j)}{l_j^2} \right) \mu_s(j) \right]$$

REMARQUE:

L'influence du panneau sur lui même ($i=j$) exige un développement particulier des integrales M,D et R qui sont donnés en ANNEXE B pour les coefficients sont déterminer au (§-II-2-1-6-2) et sont donner par le système(II-48).

II-2-2-4-1- CALCUL DES INTEGRALES M,D ET R:

Les intégrales M,D sont déjà calculés en ANNEXE II et de même pour R(i,j) qui est calculé en ANNEXE II pour donner le resultat suivant:

PREMIER CAS : $l_4^2 - l_3^2 = 0$

$$R(i, j) = l_1 l_j + 2(2l_1 l_3 - l_2) \ln \left(\frac{l - l_3}{l_3} \right) + [6l_3(l_2 - l_1 l_3) - l_5] \left[\frac{1}{l_j - l_3} + \frac{1}{l_3} \right] + [l_3(3l_2 l_3 - 2l_1 l_3^2 - l_5)] \left[\frac{1}{(l_j - l_3)^2} + \frac{1}{l_3^2} \right] + \frac{l_3^2}{3} [2l_2 l_3 - l_1 l_3^2 - l_5] \left[\frac{1}{(l_j - l_3)^3} + \frac{1}{l_3^3} \right] \quad (II.84)$$

SECOND CAS : $I_4^2 - I_3^2 > 0$

$$\begin{aligned}
 R(i, j) = & I_1 i_j + (2I_1 I_3 - I_2) \ln \left(\frac{I_j^2 - 2I_3 I_j - I_4^2}{I_4^2} \right) \\
 & + \frac{\left(6I_1 I_3 I_4^2 - 4I_1 I_3^4 - \frac{3}{2} I_1 I_4^4 - 3I_2 I_4^2 I_3 + 2I_2 I_3^3 + \frac{I_3 I_4^2}{2} \right)}{(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right] \\
 & + (2I_3 I_4^2 I_1 - I_3^3 - I_2 I_4^2 + 4I_2 I_3^2 - I_5 I_3) \left(\frac{1}{(I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2} - \frac{1}{I_4^2} \right) \\
 & + \frac{4I_1 I_3^4 - 2I_3^2 I_4^2 I_1 + \frac{I_4^2 I_1}{2} + 3I_2 I_4^2 I_3 + \frac{I_5}{2} (2I_3^2 - I_4^2)}{I_4^2 - I_3^2} \left(\frac{I_j - I_3}{(I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2} + \frac{I_3}{I_4^2} \right)
 \end{aligned}$$

(II.85)

II-2-2-4-2- CALCUL DE L'INTENSITE DES SINGULARITES :

En imposant la condition de glissement sur les frontières en plus les conditions donnés par les equations (II-51) et (II-52) doivent être appliquées pour ce type de distribution ; ces conditions s'écrivent dans ce cas:

$$\begin{aligned}
 R(i, N+1) &= R(i, 1) \\
 D(i, N+1) &= D(i, 1) \quad \text{et} \quad \gamma_s(N+1) = \gamma_s(1) \\
 M(i, N+1) &= M(i, 1)
 \end{aligned}$$

(II.86)

On aura alors:

$$V_{\eta i} = - U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left(\left(M(i, j) - 2 \frac{D(i, j)}{I_j} + \frac{R(i, j)}{I_j^2} \right) \mu_s(j-1) + \left(2 \frac{D(i, j)}{I_j} - \frac{R(i, j)}{I_j^2} \right) \mu_s(j) \right) = 0$$

Ce qui nous permet d'avoir l'égalité:

$$\sum_{j=1}^N A(i, j) \mu_s(j) = 2\pi U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha)$$

Ce qui nous permet d'avoir les matrices du système qui nous permettent de déterminer l'intensité des singularités soit:

$$\begin{aligned}
 A(i,1) &= M(i,2) - 2 \frac{D(i,2)}{l_2} + \frac{R(i,2)}{l_2^2} - \left(2 \frac{D(i,1)}{l_1} - \frac{R(i,1)}{l_1^2} \right) \\
 A(i,n) &= M(i,1) - 2 \frac{D(i,N)}{l_N} + \frac{R(i,1)}{l_1^2} + \left(2 \frac{D(i,N)}{l_N} - \frac{R(i,N)}{l_N^2} \right) \\
 A(i,j) &= M(i,j+1) - 2 \frac{D(i,j+1)}{l_{j+1}} + \frac{R(i,j+1)}{l_{j+1}^2} + \left(2 \frac{D(i,j)}{l_j} - \frac{R(i,j)}{l_j^2} \right) \quad (\text{II.87}) \\
 A(i,i) &= M(i,i+1) - 2 \frac{D(i,i+1)}{l_{i+1}} + \frac{R(i,i+1)}{l_{i+1}^2} + \left(2 \frac{D(i,i)}{l_i} - \frac{R(i,i)}{l_i^2} \right)
 \end{aligned}$$

(M, D et R pour $i = j$ définis en ANNEXE B)

$$B(i) = 2\pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)$$

II-2-2-4-3- EXPRESSION DE LA VITESSE TANGENTIELLE:

L'expression de la vitesse tangentielle est donnée par

$$V_{ti} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \left(\mu_s(j-1) + 2 \frac{\mu_s(j) - \mu_s(j-1)}{l_j} S_j + \frac{\mu_s(j-1) - \mu_s(j)}{l_j^2} S_j^2 \right) \frac{\cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}^2} dS_j$$

Qui peut se mettre sous la forme:

$$V_{ti} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left(\mu_s(j-1) \int_0^{l_j} \frac{\cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j + 2 \frac{\mu_s(j) - \mu_s(j-1)}{l_j} \int_0^{l_j} \frac{S_j \cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j + \frac{\mu_s(j-1) - \mu_s(j)}{l_j^2} \int_0^{l_j} \frac{S_j^2 \cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j \right) \quad (\text{II.88})$$

On remarque que les trois intégrales sont de la même forme que les intégrales (II-83) tel que:

$$V_{ti} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N A(i,j) \mu_s(j)$$

Où $A(i,j)$ est défini en (II-87)

CHAPITRE III

APPLICATION DE LA METHODE DES SINGULARITES

III-1-INTRODUCTION:

Dans ce chapitre, nous allons appliquer la méthode des singularités et ses idées de bases à des profils de formes connues (cylindres, aubes) afin d'étudier l'influence des différents paramètres et obtenir les caractéristiques de l'écoulement (coefficients de portance et traînée, les lignes de courant et équipotentielles...) et finalement représenter cet écoulement par le tracé des lignes équipotentielles et des lignes de courants autour des profils.

III-2-CARACTERISTIQUES DE L'ECOULEMENT:

III-2-1-LE COEFFICIENT DE PRESSION:

En Aérodynamique comme en d'autres domaines, plusieurs paramètres adimensionnels sont établis tels que le nombre de Mach « M », le nombre de Reynolds « Re » et d'autres, afin de leur donner un sens comparatif et c'est de ce point de vue qu'a été introduit le coefficient de pression « Cp » au lieu de la pression elle-même.

Son expression est de la forme :

$$Cp = \frac{P - P_{\infty}}{q_{\infty}} \quad (\text{III-1})$$

avec :

$$q_{\infty} = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2$$

* ρ_{∞} : masse volumique du fluide à l'infini amont

et où * p_{∞} : pression à l'infini amont.

* U_{∞} : vitesse à l'infini amont

Cette définition est générale, elle est utilisée en Aérodynamique comme pour un écoulement incompressible que pour un écoulement hypersonique.

Pour un écoulement incompressible, le coefficient de pression peut être donné en fonction des vitesses seulement.

En considérant un écoulement de fluide autour d'un obstacle quelconque avec P_{∞} la pression en un point assez loin en amont de l'obstacle et U_{∞} la vitesse en ce point et P la pression en un point proche de l'obstacle avec V la vitesse du fluide en ce point.

L'équation de Bernoulli nous permet d'écrire :

$$P_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 = P + \frac{1}{2} \rho V^2$$

$$\Rightarrow P - P_{\infty} = \frac{1}{2} \rho (U_{\infty}^2 - V^2)$$

qu'on substitue dans l'équation (III-1) pour obtenir:

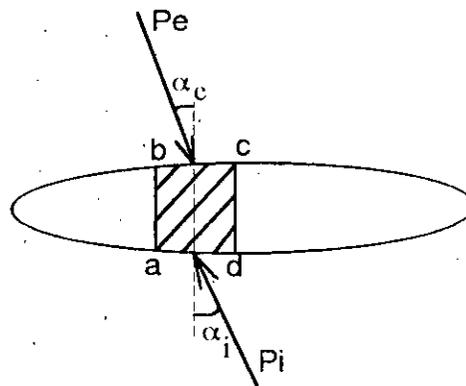
$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = \frac{\frac{1}{2} \rho (U_\infty^2 - V^2)}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2}$$

d'où:
$$C_p = 1 - \left(\frac{V}{U_\infty} \right)^2 \quad (\text{III-2})$$

Cette forme d'écriture n'est valable que pour les écoulements de fluides incompressibles, on remarque de cette équation qu'aux points de stagnation ($V=0$) le C_p est maximal et est égal à (1) et que pour $V > U_\infty$ le C_p prend des valeurs négatives.

III-2-2-COEFFICIENTS DE PORTANCE ET DE TRAINEE :

Considérons un profil C (fig.III-1), faisons un bilan des forces qui s'exercent sur un élément $abcd$ de largeur dx .



$$ds_e = bc$$

$$ds_i = ad$$

figure III-1

Bilan des forces s'exerçant sur un élément $abcd$ d'un profil

Par projection suivant la verticale :

$$dR = P_e ds_e \cos \alpha_e - P_i ds_i \cos \alpha_i$$

$$dR = (P_e - P_i) dx$$

$$\text{or } P_e - P_i = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 (C_{p_e} - C_{p_i})$$

$$\Rightarrow R = -\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \int_0^l (C_{p_i} - C_{p_e}) dx$$

avec C_{p_e} et C_{p_i} respectivement les coefficients de pression de la surface supérieure (extrados) et de la surface inférieure (intrados).

On définit alors le coefficient de portance C_l par :

$$Cl = \frac{1}{l} \int_0^l (C_{p_i} - C_{p_e}) dx \quad (\text{III-3})$$

Dans le cas particulier où le profil est de forme cylindrique (fig.III-2).

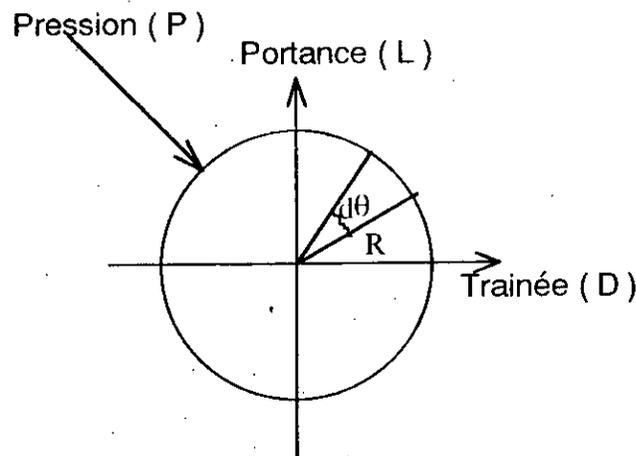


figure III-2

Portance et traînée sur un profil cylindrique

L'expression de la portance et de la traînée sont obtenues par intégration le long de toute la surface :

$$L = - \int_0^{2\pi} P \cdot R \sin \theta \, d\theta \quad \text{et} \quad D = - \int_0^{2\pi} P \cdot R \cos \theta \, d\theta$$

Les coefficients de portance et de traînée sont alors déduits :

$$Cl = - \int_0^{2\pi} C_p \cdot R \sin \theta \, d\theta \quad \text{et} \quad Cd = - \int_0^{2\pi} C_p \cdot R \cos \theta \, d\theta \quad (\text{III-4})$$

III-2-3- POTENTIEL DES VITESSES ET FONCTION DE COURANT:

Le potentiel de vitesses en chaque point est obtenu en superposant le potentiel de vitesses dû à l'écoulement uniforme et celui dû à la perturbation créée par l'obstacle.

Suivant le type de singularités (source, vortex, doublet), dont est chargé l'obstacle, le potentiel de vitesses correspondant est différent et est donné par le tableau (§-I-2-5).

La fonction de courant est obtenue de la même façon que le potentiel de vitesse.

D'après les formules données par le tableau (§-I-2-5), il apparaît qu'il est important de bien définir la valeur de l'angle θ_{ij} et le rayon r_{ij} .

Soit un point P de coordonnées (x, y) où nous désirons calculer le potentiel de vitesses (fig III-3).

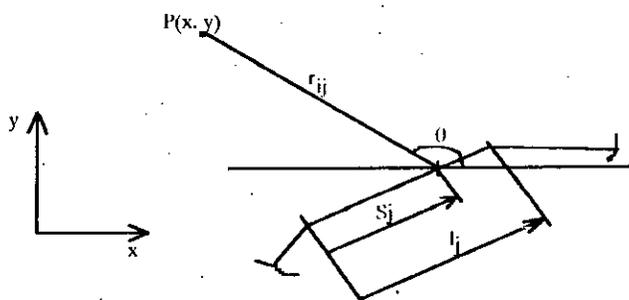


figure III-3

Influence d'une distribution de charge sur un panneau au point P

On aura :

$$\theta_{ij} = \arctg \frac{y - y_j}{x - x_j} \quad \text{et} \quad r_{ij}^2 = (x - x_j)^2 + (y - y_j)^2$$

$$\text{où} : \begin{cases} x_j = Xs(j-1) + S_j \cos \delta_j \\ y_j = Ys(j-1) + S_j \sin \delta_j \end{cases} \quad (\text{III-5})$$

III-3-PROFILS:

III-3-1-CYLINDRE FIXE:

L'écoulement autour d'un cylindre fixe est obtenu en combinant entre un écoulement parallèle homogène et un doublet.

Sachant que pour l'écoulement parallèle homogène on a:

$$\begin{cases} V_r = U_\infty \cos \theta \\ V_\theta = -U_\infty \sin \theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Psi_p = U_\infty r \sin \theta \\ \Phi_p = U_\infty r \cos \theta \end{cases} \quad (\text{III-6})$$

tandis que pour l'écoulement de doublet on a:

$$\begin{cases} V_r = \frac{-\mu \cos \theta}{2 \pi r^2} \\ V_\theta = \frac{-\mu \sin \theta}{2 \pi r^2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Psi_d = \frac{-\mu \sin \theta}{2 \pi r} \\ \Phi_d = \frac{\mu \cos \theta}{2 \pi r} \end{cases} \quad (\text{III-7})$$

D'après le principe de superposition de LAPLACE:

$$\begin{cases} \Psi_{c.f} = \Psi_p + \Psi_d = U_\infty r \sin \theta - \frac{\mu}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r} \\ \Phi_{c.f} = \Phi_p + \Phi_d = -U_\infty r \cos \theta - \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r} \end{cases} \quad \text{(III-8)}$$

et puisque on a pour $r = R$: $\Psi_{c.f} = 0$ donc

$$\mu = 2\pi R^2 U_\infty$$

d'où

$$\begin{cases} \Psi_{c.f} = U_\infty r \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \theta \\ \Phi_{c.f} = U_\infty r \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \theta \end{cases} \quad \text{(III-9)}$$

à partir du système (III-9) on obtient:

$$\begin{cases} V_r = U_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \theta \\ V_\theta = U_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \theta \end{cases} \quad \text{(III-10)}$$

Les points de stagnation correspondent à $V_r = V_\theta = 0$, on trouve leurs coordonnées respectives en (r, θ) suivantes:

point S_1 : $(r = R, \theta = 0)$

point S_2 : $(r = R, \theta = \pi)$

Et puisqu'il s'agit d'un écoulement de fluide incompressible, le Coefficient de Pression est donné par l'équation (III-2).

Sachant que pour $r=R$: $V_r = 0$ et $V_\theta = -2U_\infty \sin \theta$ donc $V = V_\theta$

$$\begin{aligned} \text{on a : } Cp &= 1 - \left(\frac{V_\theta}{U_\infty}\right)^2 = 1 - (2 \sin \theta)^2 \\ Cp &= 1 - 4 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad \text{(III-11)}$$

La discrétisation du cylindre se fait en coordonnées polaires pour une localisation des sommets avec le nombre de panneaux N désiré voir figure (III-5).

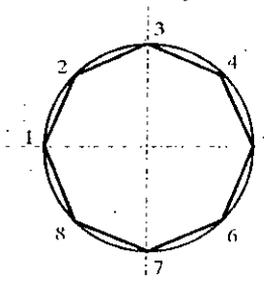


figure III-5
Discrétisation d'un cylindre en 8 panneaux

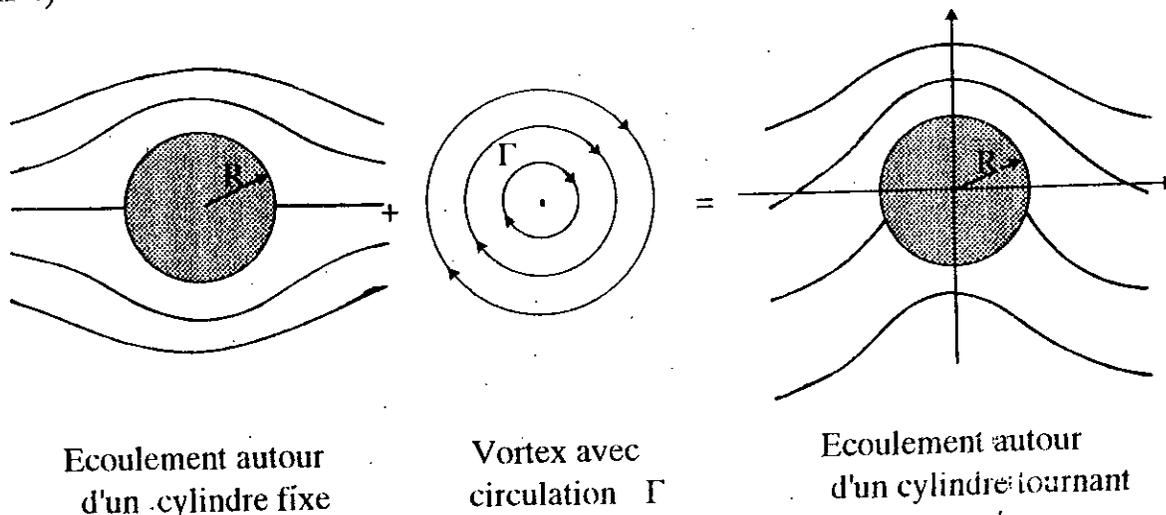
$$\theta_i = \pi - \frac{2\pi}{N}(i-1) \quad \text{avec } i = 1, N$$

Les coordonnées des sommets sont égales à :

$$Xs(i) = r \cos \theta_i \quad \text{et} \quad Ys(i) = r \sin \theta_i$$

III-3-2-CYLINDRE TOURNANT:

L'écoulement autour d'un cylindre tournant s'obtient par la combinaison d'un vortex, d'un doublet et d'un écoulement parallèle homogène; donc ça revient à combiner l'écoulement de vortex et celui d'un cylindre non tournant, voir figure (III-4)



à partir des équations régissant l'écoulement vortex on a:

$$\begin{cases} V_r = 0 \\ V_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Psi_v = \frac{\Gamma}{2\pi r} \ln \frac{r}{R} \\ \Phi_v = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \Gamma \text{ dans le sens} \\ \text{des aiguilles} \\ \text{d'une montre} \end{array} \right) \quad \text{(III-12)}$$

D'après le principe de superposition :

$$\begin{cases} \Psi_{ct} = U_\infty r \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R} \\ \Phi_{ct} = -U_\infty r \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \end{cases} \quad \text{(III-13)}$$

A partir du système (III-13) on écrit:

$$\begin{cases} V_r = U_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \theta \\ V_\theta = U_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases} \quad (\text{III-14})$$

pour localiser les points de stagnation à partir du système (III-14) et de la condition $V_r = V_\theta = 0$, et en prenant $r = R$ on obtient :

$$\begin{cases} \theta' = \arcsin\left(\frac{-\Gamma}{4\pi R U_\infty}\right) \\ \theta'' = \pi - \arcsin\left(\frac{-\Gamma}{4\pi R U_\infty}\right) \end{cases} \quad (\text{III-15})$$

Et puisque Γ est positive donc les deux points de stagnation se trouveront dans le 3^{ème} et 4^{ème} quadrant du cylindre.

Ce résultat n'est valable que pour $\frac{\Gamma}{4\pi R U_\infty} < 1$.

Si $\Gamma = 4\pi R U_\infty$, il n'y aura qu'un seul point de stagnation situé sur la surface du cylindre au point $S\left(R, \frac{-\pi}{2}\right)$.

Dans le cas où $\Gamma > 4\pi R U_\infty$, le système d'équations (III-15) n'aura plus de signification, donc en revenant à la première équation du système (III-14) en

prenant $r \neq R$, on trouve $V_r = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta' = \frac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ \theta'' = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

qu'on substitue dans la deuxième équation du système (III-14) pour obtenir à la fin avec $\theta'' = -\frac{\pi}{2}$

$$r = \frac{\Gamma}{4\pi U_\infty} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi U_\infty}\right)^2 - R^2} \quad (\text{III-16})$$

La valeur minimale de "r" n'est pas acceptable puisqu'elle se situe à l'intérieur de l'obstacle.

Le coefficient de pression pour le cylindre tournant est donné en remplaçant V_θ avec $r = R$ du système (III-14) dans l'équation (III-2), d'où on obtient :

$$C_p = 1 - \left(\frac{V_\theta}{U_\infty}\right)^2 = 1 - \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R U_\infty}\right)^2 \quad (\text{III-17})$$

Les coordonnées des sommets dans ce cas sont donnés par:

$$\theta_i = \pi - \left(\frac{2\pi}{N}(i-1) + \theta' \right) \quad \text{avec } i = 1, N$$

Les coordonnées des sommets sont égales à :

$$Xs(i) = r \cos \theta_i \quad \text{et} \quad Ys(i) = r \sin \theta_i$$

III-3-3- RANGEE DE CYLINDRES FIXES:

Soient deux cylindres de même rayon r disposés verticalement et distant d'une longueur L (fig.III-6).

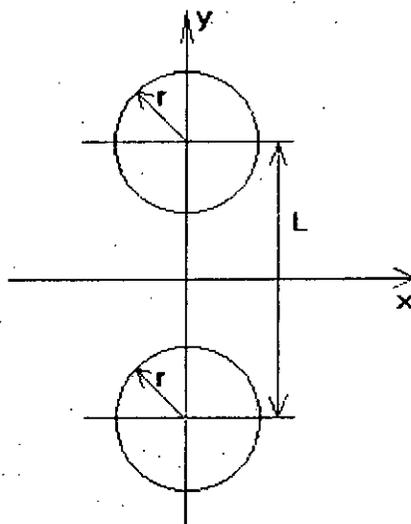


figure III-6

Discretisation d'une rangée de cylindres

Le principe reste le même que pour un cylindre isolé à la différence que l'ordonnée des centres des cylindres est de $\pm L/2$, nous aurons alors :

$$\begin{cases} Xs(i) = r \cos \theta_i & \text{et} & Ys(i) = -\frac{L}{2} + r \sin \theta_i & i = 1, N \\ Xs(i) = r \cos \theta_i & \text{et} & Ys(i) = \frac{L}{2} + r \sin \theta_i & i = N+1, 2N \end{cases}$$

où

$$\theta_i = \pi - \left(\frac{2\pi}{N}(i-1) + \theta' \right) \quad \text{avec } i = 1, 2N$$

III-3-4 PROFIL D'AILE:



figure III-7

Un profil d'aile présente une partie arrondie à l'avant et une pointe F à l'arrière appelée *BORD DE FUITE* (fig.III-7), le *BORD D'ATTAQUE* A est le point de contact du profil avec le cercle de centre F.

Un profil d'aile présente deux surfaces, une surface supérieure appelée *EXTRADOS* et une surface inférieure appelée *INTRADOS*.

La forme des profils étant normalisée (NACA), la discrétisation en N panneaux se fait en introduisant les coordonnées des points disponibles dans les tables.

Les profils d'ailes étant des corps portants, la distribution de singularités ne devra pas être homogène et peut être **linéaire** ou **parabolique**.

Lors de la détermination des intensités des singularités, une condition supplémentaire doit être introduite, c'est la condition de *KUTTA-JOUKOWSKI* qui consiste dans notre cas à ce que le bord de fuite soit un point d'arrêt.

CHAPITRE IV

**ELABORATION D'UN MAILLEUR
PAR LA METHODE DES SINGULARITES**

IV-1-CALCUL DES POTENTIELS DE VITESSES ET DES FONCTIONS DE COURANT:

Considérons un point P de coordonnées (x_0, y_0) appartenant au plan (fig.IV.1), le potentiel de vitesses et la fonction de courant en ce point seront respectivement déterminés en superposant le potentiel de vitesses et la fonction de courant de l'écoulement uniforme et le potentiel de vitesses et la fonction de courant résultants du chargement des singularités sur tous les panneaux de l'obstacle.

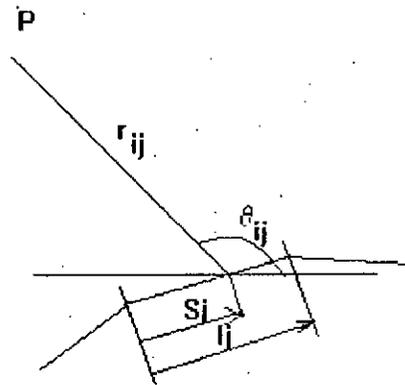


figure IV.1

Influence d'une distribution de singularités sur un panneau j en un point P

Il se dégage alors que les expressions du potentiel de vitesses et de la fonction de courant devront être établies en fonction du type de singularités et du type de chargement. Il est intéressant de rappeler les potentiels de vitesses et les fonctions de courant, correspondant aux types de singularités.

	Écoulement Uniforme	Source	Vortex	Dipôle
U_r	$q \cos(\theta - \alpha)$	$\frac{k}{2\pi r}$	0	$\frac{\mu}{2\pi r^2} \cos \theta$
U_θ	$-q \sin(\theta - \alpha)$	0	$\frac{\gamma}{2\pi r}$	$\frac{\mu}{2\pi r^2} \sin \theta$
ψ	$q r \sin(\theta - \alpha)$	$\frac{k}{2\pi} \theta$	$-\frac{\gamma}{2\pi} \ln r$	$\frac{\mu}{2\pi r} \sin \theta$
ϕ	$q r \cos(\theta - \alpha)$	$\frac{k}{2\pi} \ln r$	$\frac{\gamma}{2\pi} \theta$	$-\frac{\mu}{2\pi r} \cos \theta$

IV-1-1-DISTRIBUTION UNIFORME DE SOURCES:

Par définition on a:

$$\phi(x_0, y_0) = \phi_{cc.unif.} + \sum_{j=1}^N \phi_{ij}$$

et (IV.1)

$$\psi(x_0, y_0) = \psi_{cc.unif.} + \sum_{j=1}^N \psi_{ij}$$

- Le potentiel de vitesses et la fonction du courant dus à l'écoulement uniforme restera quelque soit le type de chargement et le type de singularités égales à:

$$\begin{aligned} \phi_{cc.unif.} &= U_{\infty} x_0 \cos \alpha + U_{\infty} y_0 \sin \alpha \\ \psi_{cc.unif.} &= U_{\infty} y_0 \cos \alpha - U_{\infty} x_0 \sin \alpha \end{aligned} \quad (IV.2)$$

- Le potentiel de vitesses et la fonction de courant dus au chargement uniforme de sources sont égaux à :

$$\phi(i, j) = \frac{k(j)^{1/2}}{2\pi} \int_0^1 \ln r_{ij} dS_j$$

et (IV.3)

$$\psi(i, j) = \frac{k(j)^{1/2}}{2\pi} \int_0^1 \theta_{ij} dS_j$$

En substituant l'équation (IV.2) et (IV.3) dans (IV.1) on trouve :

$$\phi(x_0, y_0) = U_{\infty} x_0 \cos \alpha + U_{\infty} y_0 \sin \alpha + \sum_{j=1}^N \frac{k(j)^{1/2}}{2\pi} \int_0^1 \ln r_{ij} dS_j$$

et (IV.4)

$$\psi(x_0, y_0) = U_{\infty} y_0 \cos \alpha - U_{\infty} x_0 \sin \alpha + \sum_{j=1}^N \frac{k(j)^{1/2}}{2\pi} \int_0^1 \theta_{ij} dS_j$$

Les termes θ_{ij} et r_{ij} sont définis par les équations (III-5).

REMARQUE :

Pour le calcul des intégrales, nous utiliserons la méthode d'intégration numérique de **SIMPSON**.

V-1-2-DISTRIBUTION LINEAIRE DE SOURCES:

Dans ce type de distribution on l'intensité de la singularités dépend de la variable d'intégration S_j (fig.IV.2), d'où la différence de la distribution uniforme :

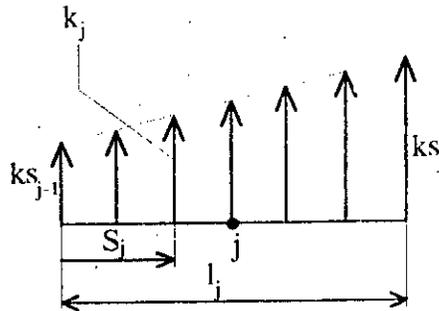


figure IV.2

Soit une intensité :

$$k_j = k_s(j-1) + \frac{k_s(j) - k_s(j-1)}{l_j} S_j$$

Alors les expressions du potentiel de vitesses et de la fonction de courant se mettent sous la forme :

$$\phi(x_0, y_0) = U_\infty x_0 \cos \alpha + U_\infty y_0 \sin \alpha + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} k_j \ln r_{ij} dS_j \quad (IV.5)$$

et

$$\psi(x_0, y_0) = U_\infty y_0 \cos \alpha - U_\infty x_0 \sin \alpha + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} k_j \theta_{ij} dS_j$$

V-1-3-DISTRIBUTION PARABOLIQUE DE SOURCE:

La différence qui réside entre les expressions du potentiel de vitesses et de la fonction de courant de ce type de distribution et de la distribution linéaire est que l'intensité de la singularité à un terme en plus de la variable d'intégration S_j^2 (fig IV.3):

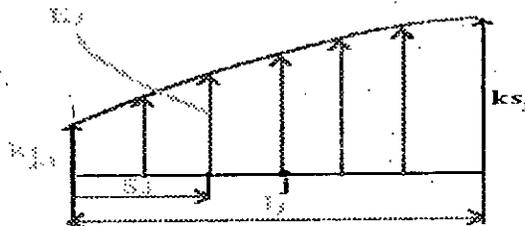


figure IV.3

soit une intensité :

$$k_j = k_s(j-1) + 2 \frac{k_s(j) - k_s(j-1)}{l_j} S_j - \frac{k_s(j) - k_s(j-1)}{l_j^2} S_j^2$$

Les expressions du potentiel de vitesse et de la fonction de courant se mettent sous la forme :

$$\phi(x_0, y_0) = U_\infty x_0 \cos \alpha + U_\infty y_0 \sin \alpha + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} k_j \ln r_{ij} dS_j$$

et (IV.6)

$$\psi(x_0, y_0) = U_\infty y_0 \cos \alpha - U_\infty x_0 \sin \alpha + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} k_j \theta_{ij} dS_j$$

IV-1-4-DISTRIBUTION UNIFORME DE VORTEX:

Pour ce type de distribution on a :

$$\phi(x_0, y_0) = \phi_{cc.unif.} + \sum_{j=1}^N \phi_{ij}$$

et

$$\psi(x_0, y_0) = \psi_{cc.unif.} + \sum_{j=1}^N \psi_{ij}$$

On a pour $\phi_{cc.unif.}$ et $\psi_{cc.unif.}$ est le même qu'au (§ IV.1.1) la différence on a pour le potentiel vitesse et la fonction du courant dus au distribution uniforme de vortex (donné par le tableau)

$$\phi_{ij} = \frac{\gamma(j)}{2\pi} \int_0^{l_j} \theta_{ij} dS_j$$

et

$$\psi_{ij} = -\frac{\gamma(j)}{2\pi} \int_0^{l_j} \ln r_{ij} dS_j$$

Finalement on trouve:

$$\phi(x_0, y_0) = U_\infty y_0 \sin \alpha + U_\infty x_0 \cos \alpha + \sum_{j=1}^N \frac{\gamma(j)}{2\pi} \int_0^{l_j} \theta_{ij} dS_j$$

et (IV.7)

$$\psi(x_0, y_0) = U_\infty y_0 \cos \alpha - U_\infty x_0 \sin \alpha - \sum_{j=1}^N \frac{\gamma(j)}{2\pi} \int_0^{l_j} \ln r_{ij} dS_j$$

IV-1-5-DISTRIBUTION LINEAIRE DE VORTEX:

De la même façon qu'au paragraphe (§ IV.1.2), on obtient l'expression de l'intensité des singularités, soit :

$$\gamma_j = \gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} S_j$$

D'où :

$$\phi(x_0, y_0) = U_\infty y_0 \sin \alpha + U_\infty x_0 \cos \alpha + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \gamma_j \theta_{ij} dS_j$$

(IV.8)

et

$$\psi(x_0, y_0) = U_\infty y_0 \cos \alpha - U_\infty x_0 \sin \alpha - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \gamma_j \ln r_{ij} dS_j$$

IV-1-7-DISTRIBUTION PARABOLIQUE DE VORTEX:

De la même façon qu'au paragraphe (§ IV.3), on calcul l' expression de l'intensité des singularités. Soit:

$$\gamma_j = \gamma_s(j-1) + 2 \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} S_j - \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j^2} S_j^2$$

d'où :

$$\phi(x_0, y_0) = U_\infty y_0 \sin \alpha + U_\infty x_0 \cos \alpha + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \gamma_j \theta_{ij} dS_j$$

(IV.9)

et

$$\psi(x_0, y_0) = U_\infty y_0 \cos \alpha - U_\infty x_0 \sin \alpha - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \gamma_j \ln r_{ij} dS_j$$

IV-1-8-DISTRIBUTION UNIFORME DE DOUBLET:

En se référant au tableau et en procédant de la même façon que précédemment, on obtient les expressions suivantes :

$$\phi(x_0, y_0) = U_\infty x_0 \cos \alpha + U_\infty y_0 \sin \alpha - \sum_{j=1}^N \frac{\mu(j)}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{\cos \theta_{ij}}{r_{ij}} dS_j$$

(IV.10)

et

$$\psi(x_0, y_0) = U_\infty y_0 \cos \alpha - U_\infty x_0 \sin \alpha + \sum_{j=1}^N \frac{\mu(j)}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{\sin \theta_{ij}}{r_{ij}} dS_j$$

IV-1-9-DISTRIBUTION LINEAIRE DE DOUBLET:

Dans ce type de distribution, l'intensité des singularités est exprimée par la relation :

$$\mu_j = \mu_s(j-1) + \frac{\mu_s(j) - \mu_s(j-1)}{l_j} S_j$$

Les expressions du potentiel de vitesses et de la fonction de courant sont alors :

$$\phi(x_0, y_0) = U_\infty y_0 \sin \alpha + U_\infty x_0 \cos \alpha - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \frac{\mu_j \cos \theta_{ij}}{r_{ij}} dS_j$$

(IV.11)

et

$$\psi(x_0, y_0) = U_\infty y_0 \cos \alpha - U_\infty x_0 \sin \alpha + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \frac{\mu_j \sin \theta_{ij}}{r_{ij}} dS_j$$

IV-1-1-DISTRIBUTION PARABOLIQUE DES DOUBLETES:

Dans ce type de distribution, l'intensité des singularités exprimée par la relation :

$$\mu_j = \mu_s(j-1) + 2 \frac{\mu_s(j) - \mu_s(j-1)}{l_j} S_j - \frac{\mu_s(j) - \mu_s(j-1)}{l_j^2} S_j^2$$

Les expressions du potentiel de vitesses et de la fonction de courant sont alors:

$$\phi(x_0, y_0) = U_\infty y_0 \sin \alpha + U_\infty x_0 \cos \alpha - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \frac{\mu_j \cos \theta_{ij}}{r_{ij}} dS_j$$

(IV.12)

et

$$\psi(x_0, y_0) = U_\infty y_0 \cos \alpha - U_\infty x_0 \sin \alpha + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \frac{\mu_j \sin \theta_{ij}}{r_{ij}} dS_j$$

IV-2-CONSTRUCTION D'UN MAILLAGE PAR LES LIGNES EQUIPOTENTIELLES ET LES LIGNES DE COURANT:

IV-2-1-PRINCIPE DU MAILLAGE:

Le potentiel de vitesses et la fonction de courant étant calculables en tous points en utilisant la formulation basée sur la méthode des singularités, l'idée est de construire la ligne équipotentielle et la ligne de courant à partir d'un point P de coordonnées (x_0, y_0) bien choisies, puis en choisissant un incrément on boucle pour tracer les lignes équipotentielles et les lignes de courant suivantes jusqu'à certaines limites fixant le domaine à mailler.

IV-2-2-TRACE DES LIGNES EQUIPOTENTIELLES:

Une ligne équipotentielle étant construite en joignant les points ayant le même potentiel de vitesses, pour le tracé de celle-ci, considérons un point quelconque $P(x_0, y_0)$ où l'on calcule son potentiel de vitesses, on cherche alors dans un proche périmètre à ce point, un autre point $M(x_1, y_1)$ ayant le même potentiel de vitesses, en

répétant successivement cette démarche nous obtiendrons ainsi une ligne équipotentielle.

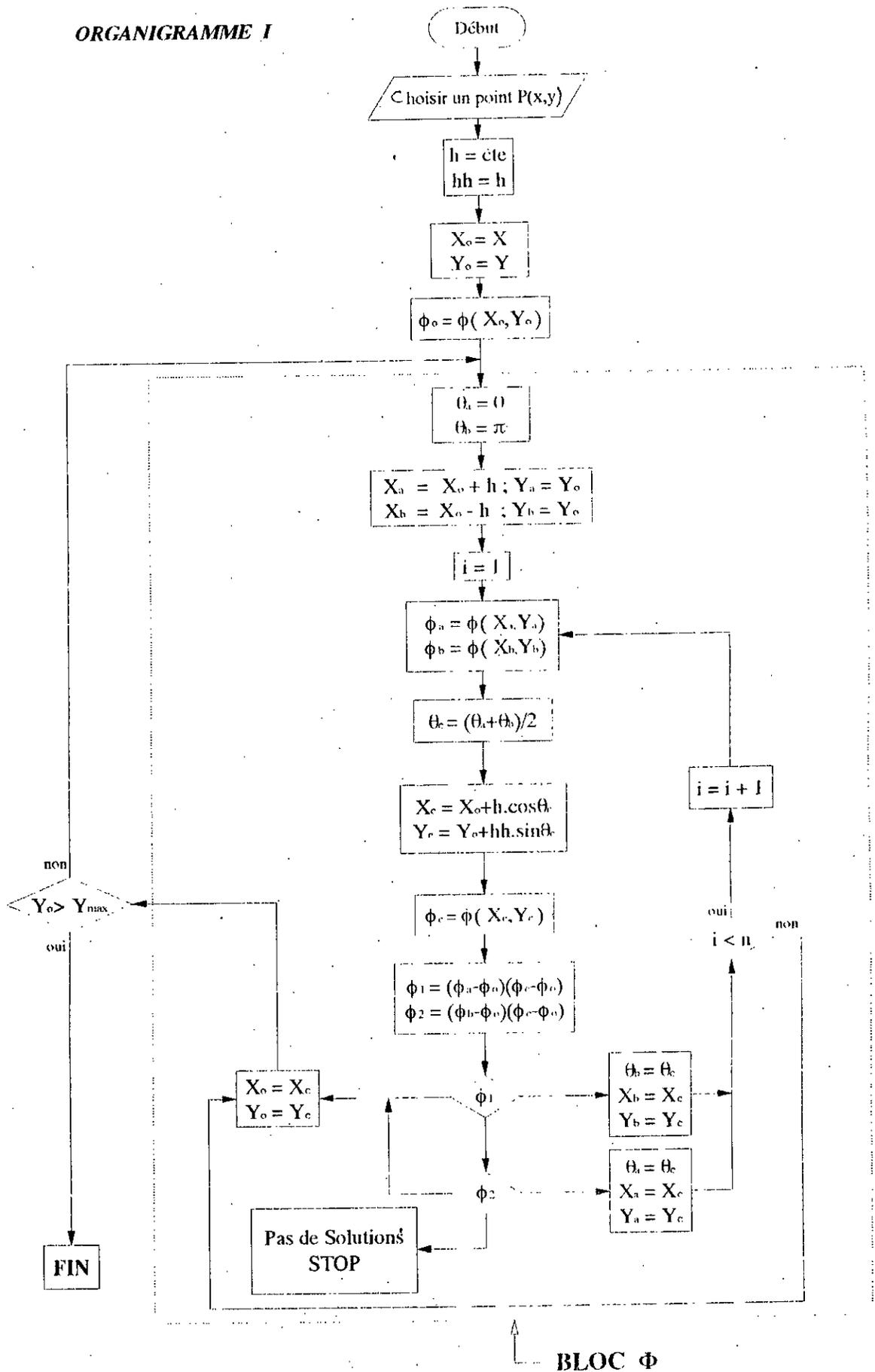
Pour la recherche du point $M(x_1, y_1)$, dans un certain périmètre, qui a le même potentiel de vitesses que le point $P(x_0, y_0)$, on utilisera la méthode de dichotomie.

Il nous a semblé pour ce tracé, que la description des étapes à suivre serait plus claire en établissant un organigramme. (v. *Organigramme I*)

IV-2-3-TRACE DES LIGNES DE COURANT:

Le tracé des lignes de courant se fait de façon identique à celui des lignes équipotentielles à la différence que la recherche du prochain point se fait dans le premier et quatrième cadran. (v. *Organigramme II*)

ORGANIGRAMME I



CHAPITRE V

INTERPRETATION DES RESULTATS

V-I- CALCUL DES COEFFICIENTS DE PRESSION

V-I-1- ANALYSE DE L'ECOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE FIXE:

V-I-1-1- Charge concentrée de source:

On considère une distribution de source avec charge concentrée au milieu de chaque panneau. On applique la méthode des singularités qui nous donne le résultat illustré par la figure (V-1).

On voit bien pour les deux points de stagnation sont bien déterminés $\theta=0^\circ$ et $\theta=180^\circ$ avec ($C_p=1$), la méthode approche la solution analytique. La courbe est symétrique, ceci explique qu'on a un écoulement non-portant ($\Gamma=0$) et la somme des intensités source égale à la somme des intensités puits.

Pour un nombre de panneaux ($N=8$), on remarque qu'on s'éloignant de part et d'autre des deux points de stagnation on constate une légère différence entre la courbe analytique et celle de la méthode des singularités, ceci est du aux variations rapides des vitesses, et au passage du régime accéléré vers un régime décéléré.

Pour une bonne convergence, il faut une bonne discretisation de l'obstacle en augmentant le nombre de panneaux, pour $N=16$ et 32 , on remarque une bonne convergence de la méthode vers la solution analytique.

V-I-1-2- Charge uniformément répartie:

Le résultat est illustré dans la figure(V-2). On remarque toujours qu'on a une courbe symétrique ($\sum K_i = 0$), pour $N=8$, les valeurs de c_p obtenus par la méthode des singularités correspond point par point à la courbe théorique, donc pour conclure si on s'intéresse aux valeurs des coefficients de pression, il est préférable d'adopter une distribution uniforme, parce que ce chargement ne nécessite pas un nombre de panneaux important et il permet d'avoir des solutions plus précises que dans le cas d'un chargement concentré

V-I-1-3- ANALYSE DE L'ECOULEMENT AUTOUR D'UNE RANGEE DE CYLINDRE :

Pour ce cas, le résultat est représenté par les figures (V-3)et (V-4), pour un nombre de panneaux $N=32$ et 40 , on voit toujours une symétrie de la courbe à cause de la symétrie géométrique des cylindres. On a les coefficients de pression, pour une rangée de cylindres inférieurs au C_p du cylindre isolé du fait que les deux obstacles adjacents forment une contraction (la section d'entrée diminue), impliquant une augmentation des vitesses au col.

V-I-2- ANALYSE D'ÉCOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE TOURNANT:

On remarque à partir des figures (V-5-a ,V-5-b , V-6 , V-7 , V-8 et V-9), que les courbes des coefficients de pression ne sont plus symétriques et cela est dû à la présence de la circulation qui tend à accélérer les particules dans la partie supérieure du cylindre, et inversement pour la partie inférieure, les points de stagnations sont parfaitement déterminés.

On remarque avec les différents chargements (linéaire fig (V-5-b ,V-7 ,V-9)) où parabolique fig (V-5-a ,V-6 ,V-8)) une convergence proportionnelle de la solution obtenue par la méthode des singularités vers la solution analytique pour des nombres de panneaux allant de 16 à 64. Et qu'on peut expliquer par le fait qu'une augmentation du nombre des panneaux donne une meilleur discrétisation de l'obstacle surtout là où la vitesse atteint des valeurs importantes avec des variations brutales ; $\theta \in [60^\circ, 120^\circ]$.

A partir des figures (V-10) et (V-11), on remarque que la courbe obtenue par la méthode des singularités avec un chargement parabolique se superpose sur celle obtenue avec un chargement linéaire à l'exception des variations du C_p dans l'intervalle d'angle : $\theta \in [60^\circ, 120^\circ]$, où on remarque une légère différence entre les deux courbes. Dans ce domaine d'exception, le chargement parabolique donne une meilleure convergence que le chargement linéaire car le chargement parabolique étant plus complexe, il discrétise au mieux l'écoulement autour de l'obstacle surtout là où les variations de vitesse sont importantes.

V-I-3- ANALYSE D'ÉCOULEMENT AUTOUR D'UN PROFILS D'AILES:

On applique la méthode des singularités distribuées sur un profil N.A.C.A. 4412, pour deux angles d'incidences $\alpha=2^\circ$ et $\alpha=16^\circ$, et on fait une comparaison entre les deux chargements avec la courbe expérimentale.

$\alpha=2^\circ$

Pour cette angle le résultat est illustré dans la (fig V-12), on remarque une assez bonne concordance entre la méthode des singularités et le résultat expérimental. Le point de stagnation est bien déterminé $C_p=1$ sur le bord d'attaque. En faisant la comparaison entre les deux chargements on remarque qu'on n'a pas une grande différence de la distribution des c_p , on observe une accélération des particules sur l'extrados et une décélération sur l'intrados, on remarque également une bonne concordance entre la courbe de la méthode des singularités et la courbe expérimentale.

On remarque une légère différence dans la zone situé 25% de la corde sur l'extrados due au changement brusque du profil et on remarque également que la courbe obtenue par la méthode des singularités est un peu inférieure à la courbe expérimentale ceci due à l'hypothèse de travail choisie pour l'écoulement

potentiel où l'effet de la viscosité est négligeable, cette viscosité qui tend à faire diminuer la vitesse.

$$\alpha = 16^\circ$$

Le résultat est illustré dans la figure (V-13), En comparant les deux courbes obtenues par un chargement parabolique et linéaire avec la courbe expérimentale, on remarque que les deux courbes se superposent, le point de stagnation $C_p=1$ n'est plus situé sur le bord d'attaque et est déplacé sur l'intrados dû à l'accroissement de l'angle d'incidence.

On outre on remarque en ce qui concerne l'intrados que la courbe obtenue à la méthode des singularités est identique à celle obtenue expérimentalement du fait que dans cette partie de l'aube l'écoulement obtenu est voisin de l'écoulement expérimental à cause du faible gradient de la pression. Tandis que sur l'extrados la différence entre la courbe obtenue par la méthode des singularités et la courbe expérimentale apparaît à cause de phénomènes de décollements de la couche limite, les décollements de la couche limite vont gêner l'écoulement tout en réduisant la vitesse.

V-I-4- ANALYSE DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR D'UNE RANGÉE DE PROFILS D'AILES:

Nous considérons pour une rangée d'aubes uniquement l'écoulement à travers deux aubes, c'est à dire un canal, on pourra ensuite pour étudier l'écoulement dans une grille d'aube en extrapolant le résultat obtenu.

A partir des figures (V-14, V-15, V-16, V-17), on remarque que les courbes obtenues par la méthode des singularités avec un chargement parabolique et un autre linéaire sont identiques point par point pour les deux angles.

En ce qui concerne la rangée d'aubes, la contraction de la section d'entrée du canal crée un effet de blocage qui a pour conséquence d'augmenter la vitesse. En comparant les résultats de la méthode et le résultat expérimental d'une aube isolée on remarque que les C_p distribués sur l'extrados de l'aube inférieure ainsi que ceux de l'intrados de l'aube supérieure sont plus faibles que ceux de l'extrados et l'intrados de l'aube isolée à cause de l'augmentation de la vitesse due au blocage, notons que l'influence de la variation de l'angle d'attaque à travers une rangée d'aubes agit de manière identique que celle étudiée pour un écoulement à travers une aube isolée.

A partir des figures (V-14), (V-15), (V-18) et (V-19), on compare les C_p de la rangée d'aubes et ceux de l'aube isolée pour différents valeurs de la distance entre les deux bords d'attaque, on remarque que cette distance a une importance primordiale dans la comparaison car en augmentant cette distance les C_p de la rangée d'aubes tendent vers ceux de l'aube isolée.

V-II- ETUDE DES MAILLAGES:

V-II-1- MAILLAGE AUTOUR D'UN CYLINDRE FIXE:

la figure (V-20) représente le maillage d'un écoulement autour d'un cylindre fixe.

On remarque que les lignes de courant et les lignes équipotentiels sont symétriques par rapport aux deux axes passants par le centre du cylindre, car le fluide étant parfait donc non visqueux, le coefficient de traînée (C_d) sera nul, de même puisque le cylindre étant fixe, donc non portant, le coefficient de portance (C_l) sera aussi nul.

On remarque aussi que les deux points de stagnation sont bien déterminés sur le cylindre.

Les lignes de courant et équipotentiels décrivent parfaitement l'écoulement à cause d'un choix judicieux des paramètres de calcul, on voit bien que ses lignes contournent le cylindre de part et d'autre, ce qui est en concordance avec la condition de glissement ou de non pénétration des particules fluide dans le cylindre.

V-II-2- MAILLAGE AUTOUR D'UN CYLINDRE TOURNANT:

Les figures (V-21), (V-22) et (V-23) représentent le maillage d'un écoulement autour d'un cylindre tournant obtenu par un chargement parabolique (deux premières figures) et par un chargement linéaire (dernière figure).

Le maillage raffiné est obtenu par un choix de calcul plus précis (incrément plus petit dans le calcul des lignes de courant et lignes équipotentiels).

On remarque aussi que le maillage est symétrique par rapport à l'axe vertical seulement, car le fluide étant toujours parfait le coefficient de traînée est comme pour le cylindre fixe nul, alors que le coefficient de portance est au contraire du cylindre fixe non nul.

L'explication qu'on peut donner c'est que la circulation Γ du cylindre tournant diminue la pression dans la partie supérieure du cylindre et la augmente dans la partie inférieure et c'est cette variation de pression qui génère une force transversale qu'on représente par le coefficient de portance.

V-II-3- MAILLAGE AUTOUR D'UNE AUBE ISOLEE:

Les figures (V-24), (V-25), et (V-26) représentent le maillage obtenu par des chargements des singularités sur un profil d'aube isolée.

On remarque que les différents maillages suivant le chargement et l'angle d'incidence donne une bonne approche de l'écoulement réel (surtout pour de faibles incidences).

Les points de stagnation sont parfaitement déterminés et ils se déplacent suivant l'angle d'incidence sur l'intrados ou sur l'extrados.

Le maillage converge dans les zones où les variations de vitesses et de pression sont régulières.

CONCLUSION GENERALE:

Cette étude de la méthode des singularités pour différents chargements nous a permis de comparer différents résultats obtenus et spécialement dans le cas des profils portants.

La première conclusion qu'on peut avoir concernant les coefficients de pression est que le chargement parabolique donne des résultats plus précis que ceux du chargement linéaire, alors que pour le maillage, les deux chargements donnent des résultats semblables.

En ce qui concerne les différents paramètres de calcul, on a pu conclure que le nombre de panneaux a une influence importante sur les résultats car plus le nombre de panneaux est important plus la discrétisation de l'obstacle est meilleure et surtout dans le cas où les variations de pression sont brutales, de même pour le chargement des singularités, les chargements de forme quelconque dans le cas portant (parabolique, cubique, sinusoidale.....) permettent d'avoir une discrétisation plus proche de la réalité.

On peut conclure aussi que le choix de la circulation resté libre et qu'il n'y a pas de valeurs particulières pour discrétiser l'écoulement autour d'obstacles portants, alors il y'aura autant d'écoulements potentiels correspondants à une infinité de choix de la circulation.

Comme on peut conclure que la distribution des C_p pour une rangée d'aubes tend vers la distribution des C_p pour une aube isolée ce qui nous permet d'adopter des coefficients de correction entre l'aube isolée et la rangée d'aubes.

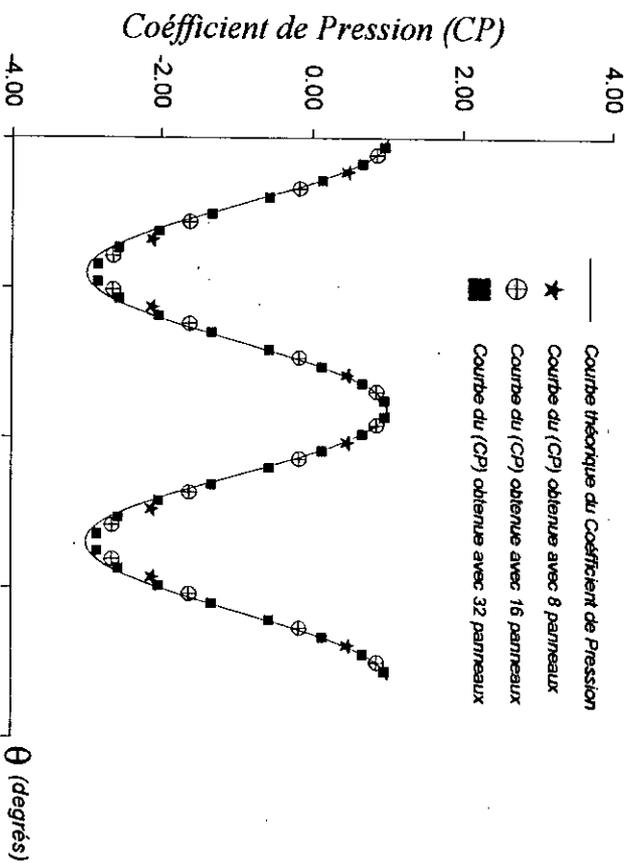


FIGURE V-1: Distribution du Coefficient de Pression sur un cylindre fixe pour une charge concentrée de sources.

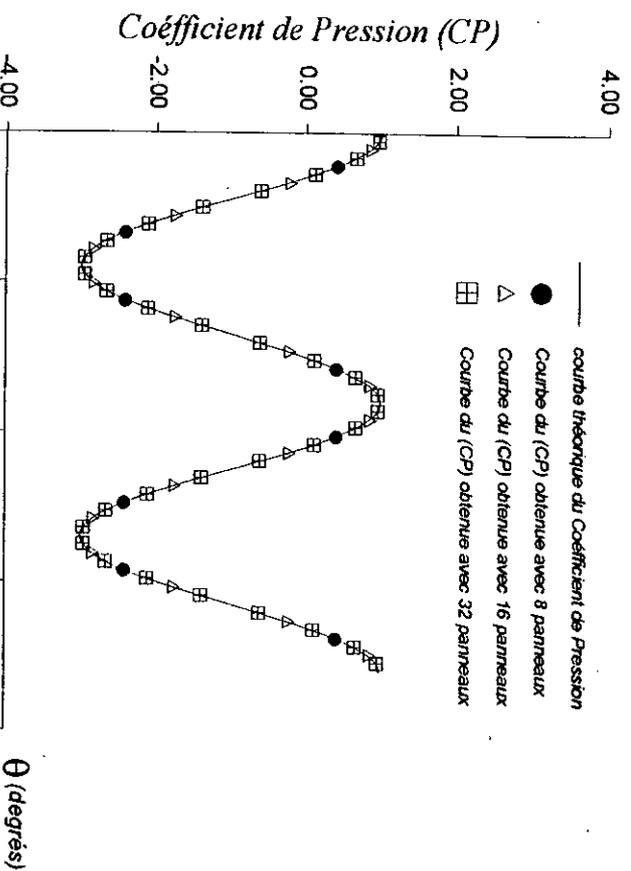


FIGURE V-2: Distribution du coefficient de pression sur un cylindre fixe pour une charge répartie de sources.

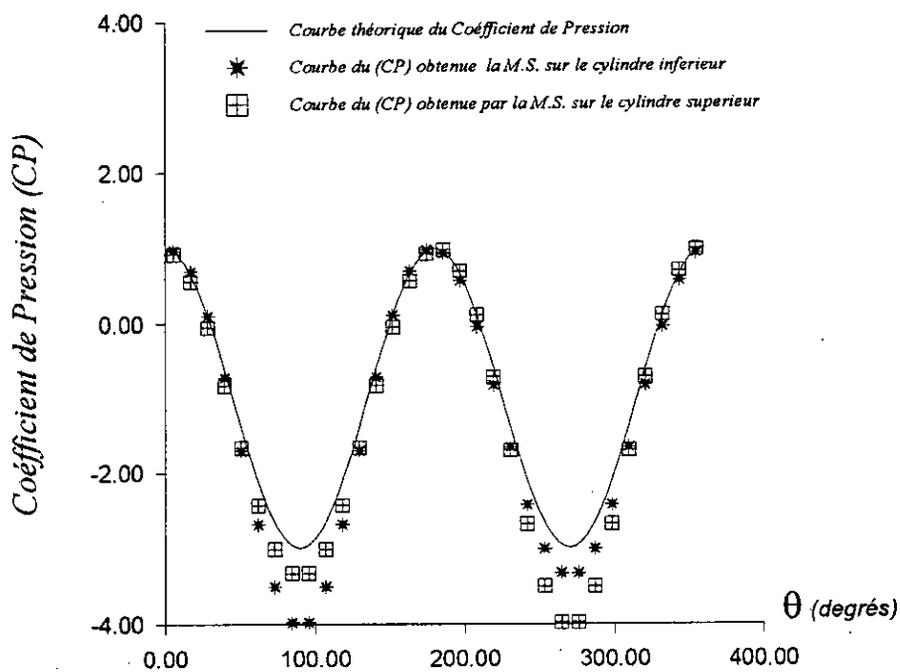


FIGURE V-3: Distribution du (CP) sur une rangée de deux cylindres avec 32 panneaux chacun.

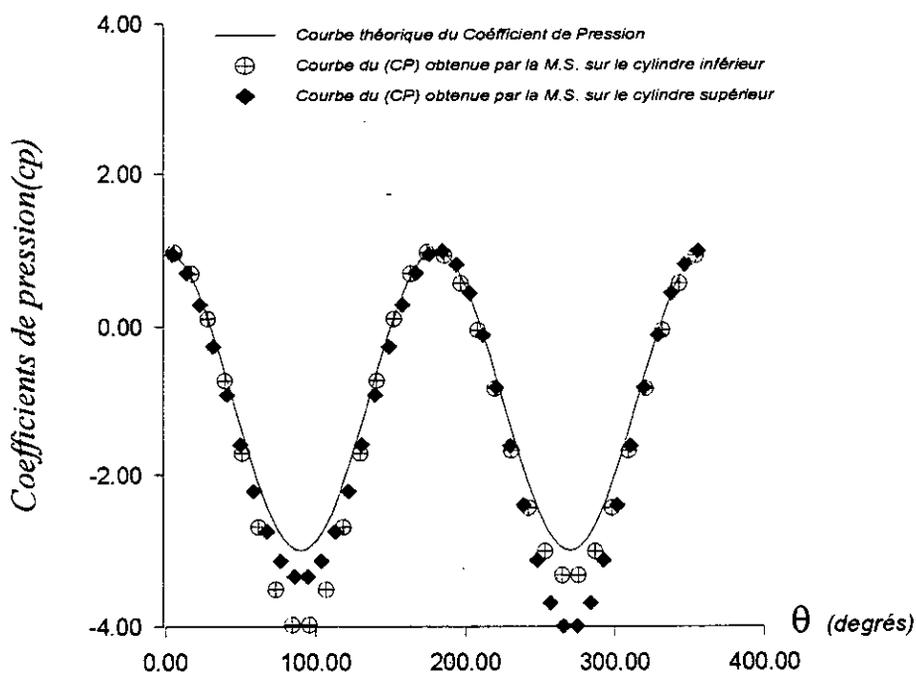


FIGURE V-4: Distribution du (CP) sur une rangée de deux cylindres avec 40 panneaux chacun

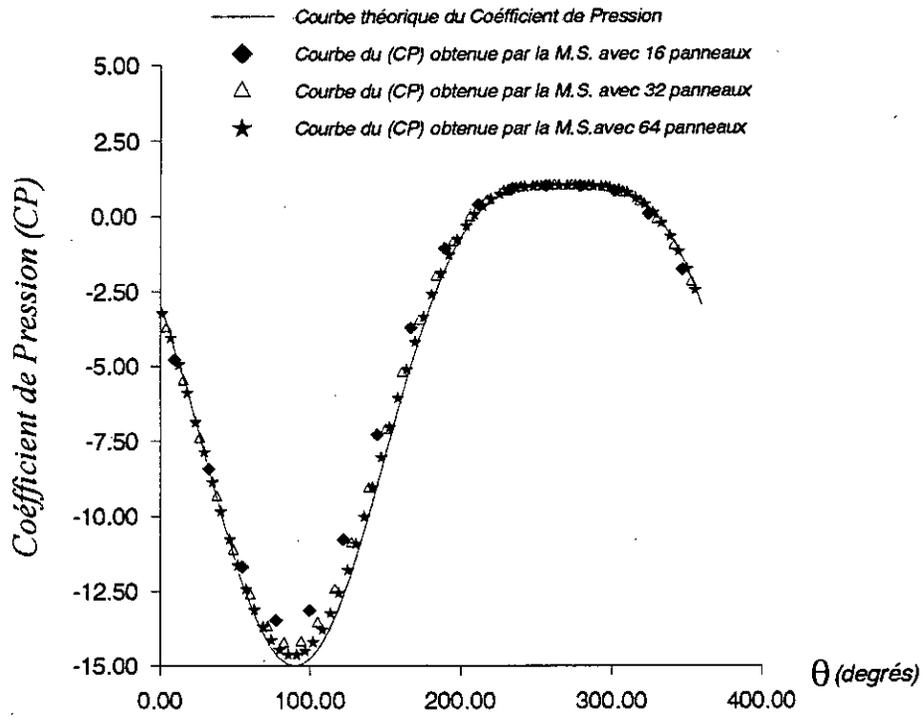


FIGURE V-5-a: Distribution du coefficient de pression sur un cylindre tournant pour une circulation égale à $4 \cdot \pi \cdot r \cdot U$ (comparaison des résultats obtenus par un chargement parabolique de vortex avec différents nombre de panneaux et la courbe théorique du (CP))

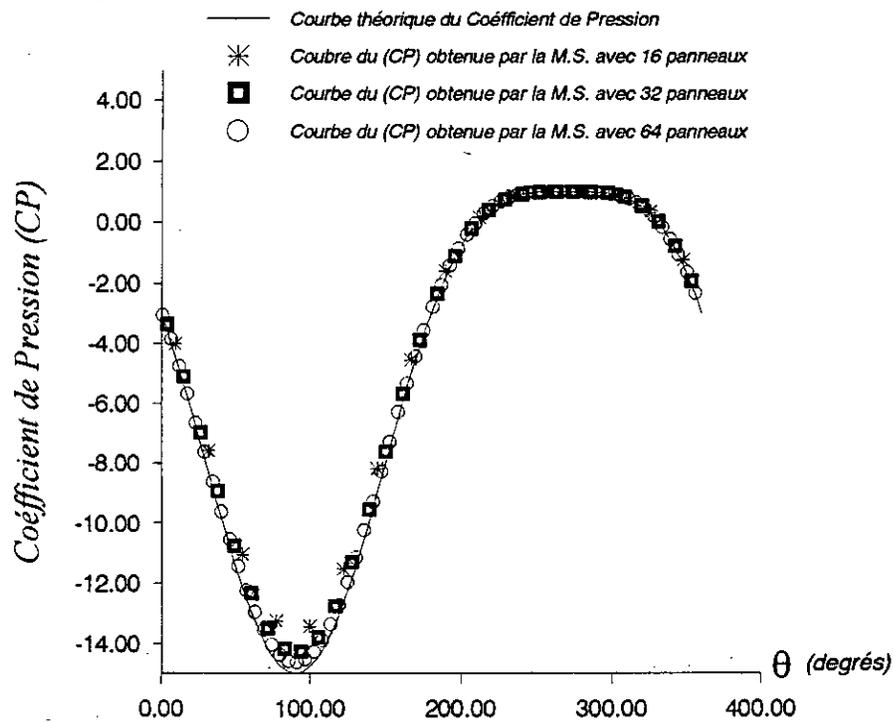


FIGURE V-5-b: Distribution du coefficient de pression sur un cylindre tournant pour une circulation égale à $4 \cdot \pi \cdot r \cdot U$ (comparaison des résultats obtenus par un chargement linéaire de vortex avec des différents nombre de panneaux et la courbe théorique du (CP))

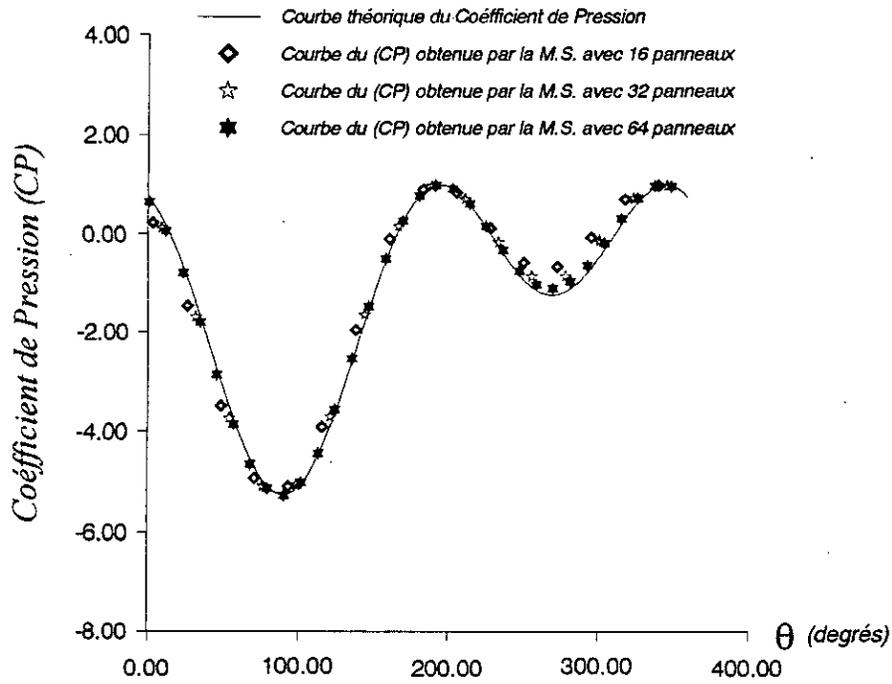


FIGURE V-6 : Distribution du coefficient de pression sur un cylindre tournant pour une circulation égale à $\pi \cdot r \cdot U$ (comparaison des résultats obtenus par un chargement parabolique de vortex avec des différents nombre de panneaux et la courbe théorique du (CP))

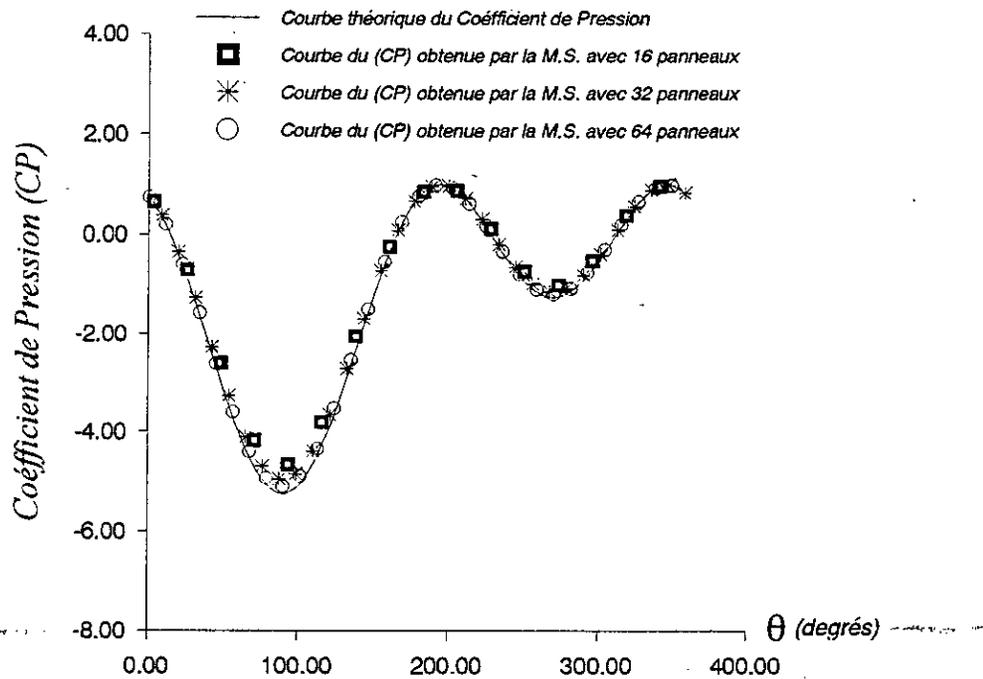


FIGURE V 7: Distribution du coefficient de pression sur un cylindre tournant pour une circulation égale à $\pi \cdot r \cdot U$ (comparaison des résultats obtenus par un chargement linéaire de vortex avec des différents nombre de panneaux et la courbe théorique du (CP))

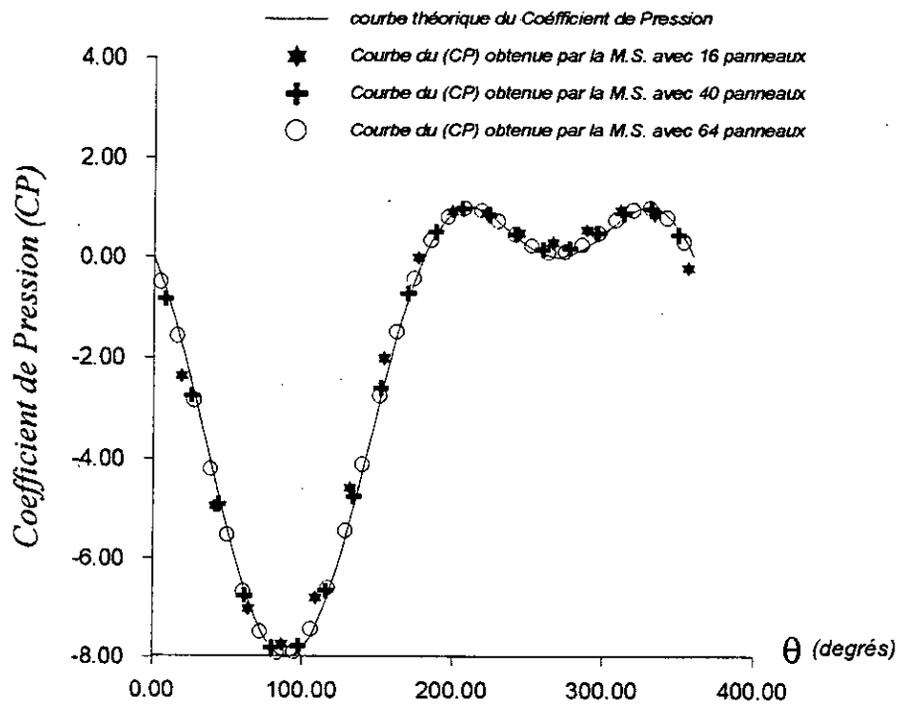


FIGURE V-8: Distribution du coefficient de pression sur un cylindre tournant pour une circulation égale à $2.\pi.r.U$
 (Comparaison des résultats obtenus par un chargement parabolique de vortex avec différents nombre de panneaux et la courbe théorique du (CP))

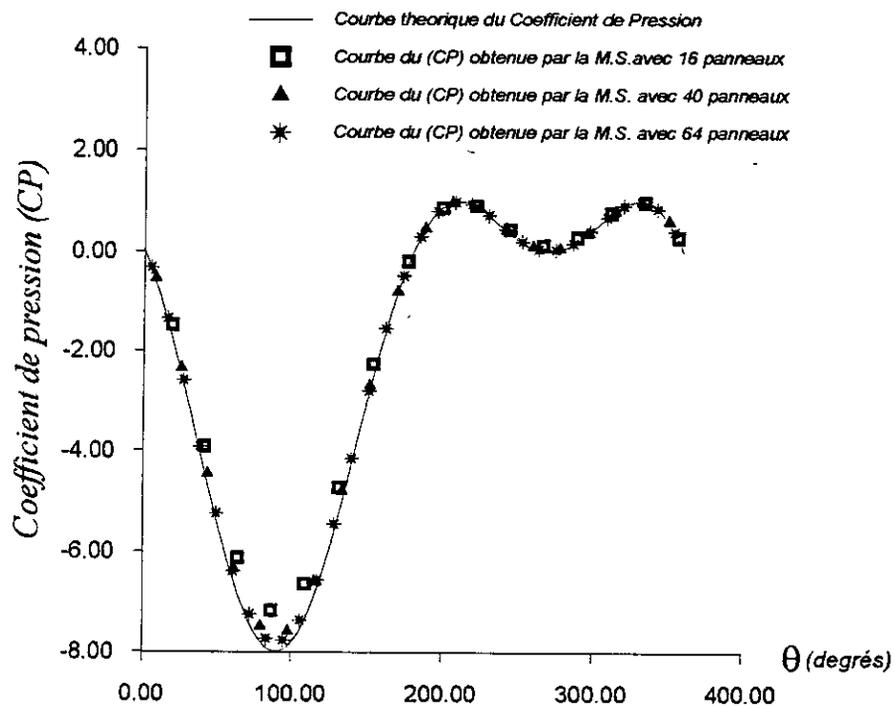


FIGURE V-9: Distribution du coefficient de pression sur un cylindre tournant pour une circulation égale à $2.\pi.r.U$
 (Comparaison des résultats obtenus par un chargement linéaire de vortex avec des différents nombre de panneaux et la courbe théorique du (CP))

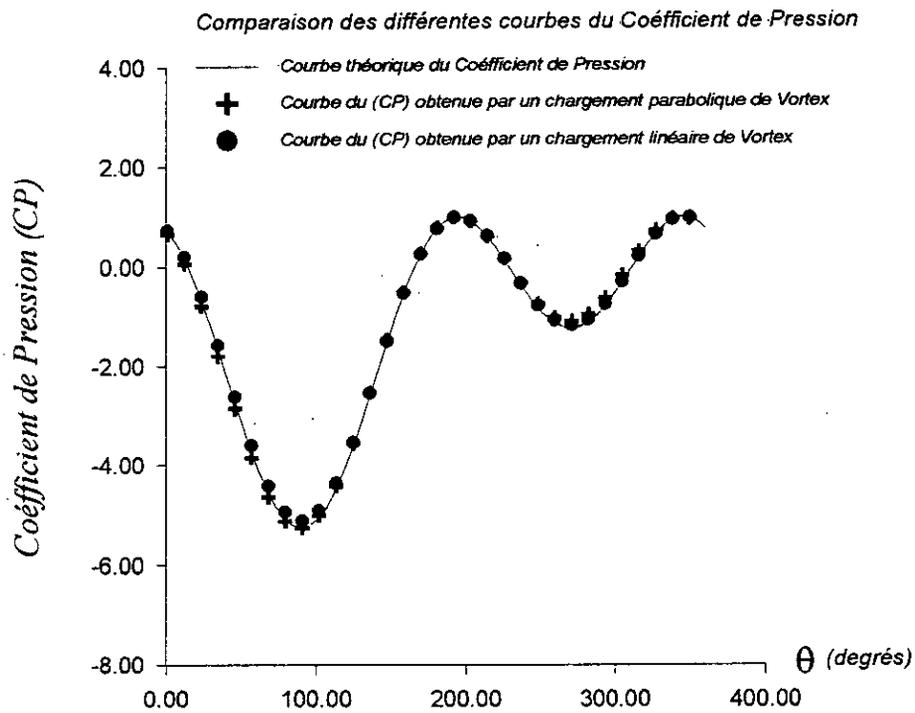


FIGURE V-10: Distribution des Coefficients de Pression pour un cylindre tournant (64 panneaux) avec une circulation égale à $\pi \cdot r \cdot U$

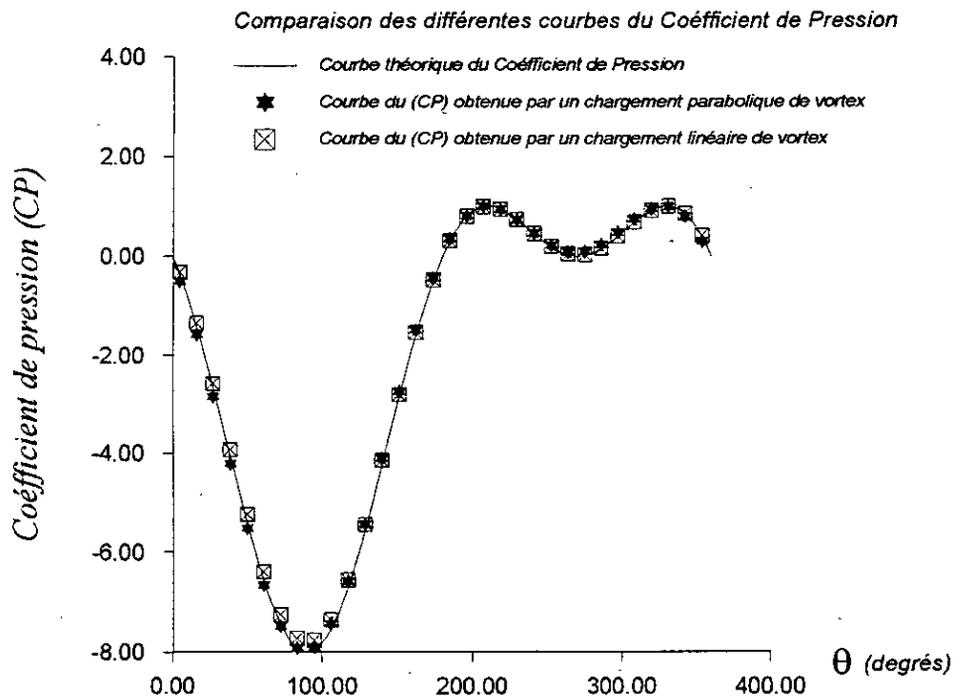


FIGURE V-11: Distribution des Coefficients de Pression pour un cylindre tournant (64 panneaux) avec une circulation égale à $2 \cdot \pi \cdot r \cdot U$

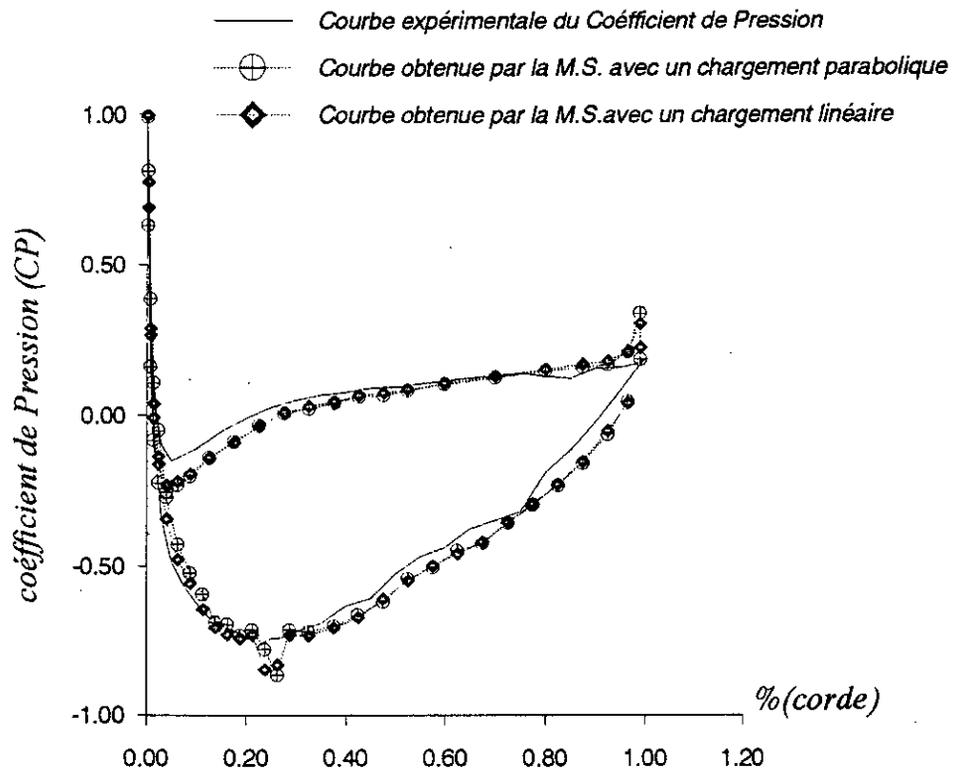


FIGURE V-12:
 Distribution des coefficients de pression sur un profil
 N.A.C.A. 4412 avec ($\alpha = 2^\circ$)

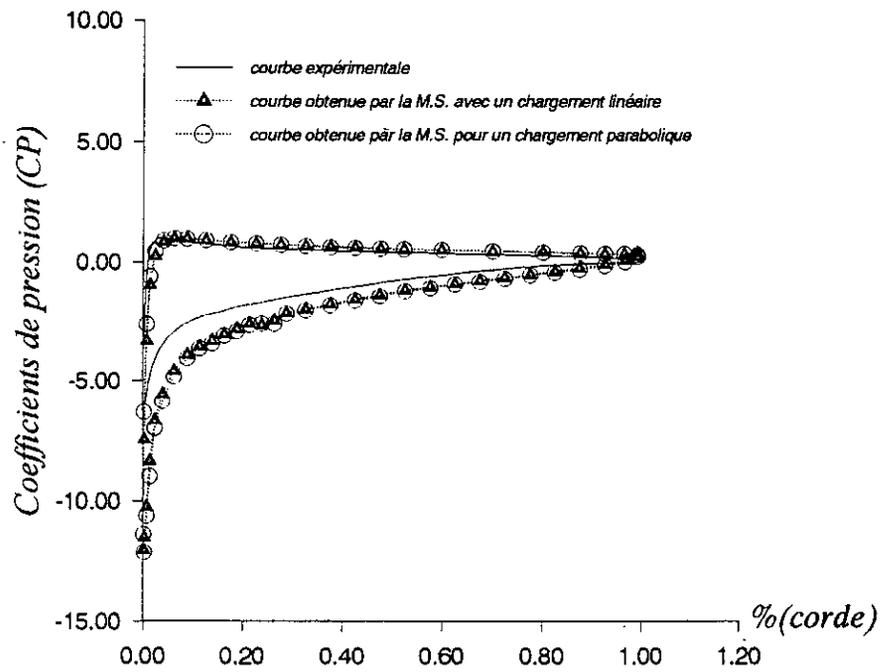


FIGURE V-13:
 Distribution des coefficients de pression sur un profil
 N.A.C.A. 4412 avec ($\alpha = 16^\circ$)

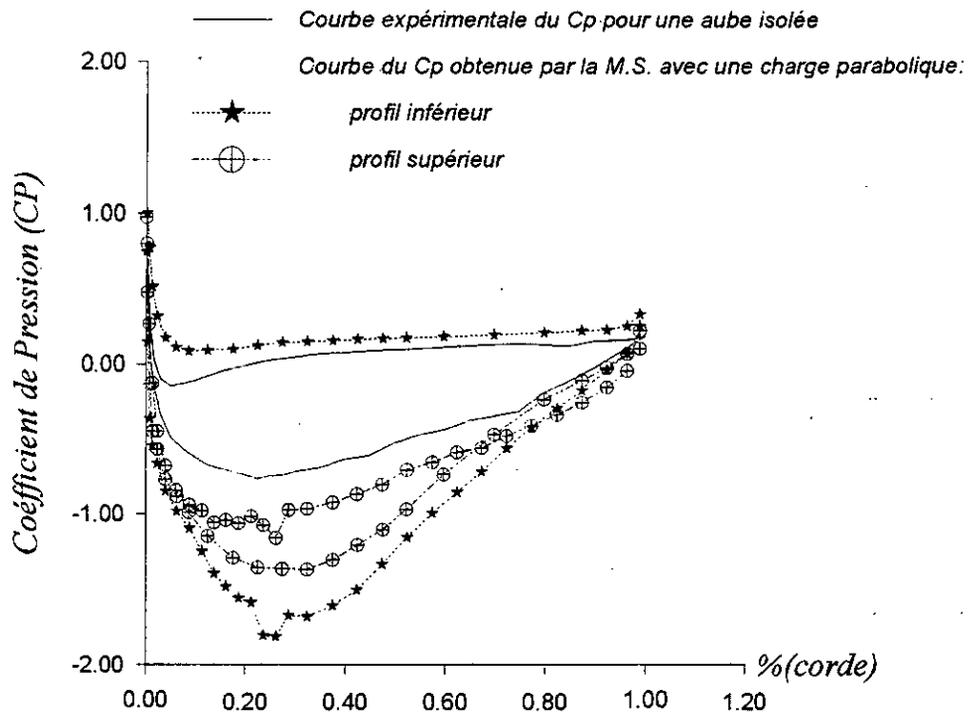


FIGURE V-14:
 Distribution des Coefficients de Pression pour une rangée d'aubes
 N.A.C.A. 4412 avec ($\alpha = 2^\circ$)
 (Distance entre les deux bords d'attaque égale à 30% corde)

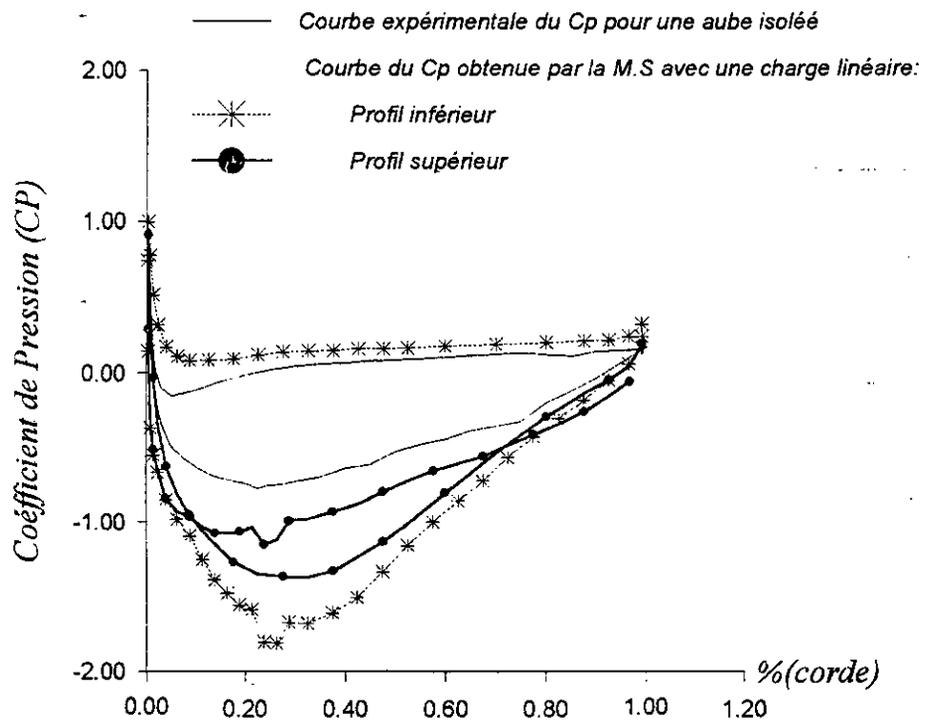


FIGURE V-15:
 Distribution des Coefficients de Pression pour une rangée d'aubes
 N.A.C.A. 4412 avec ($\alpha = 2^\circ$)

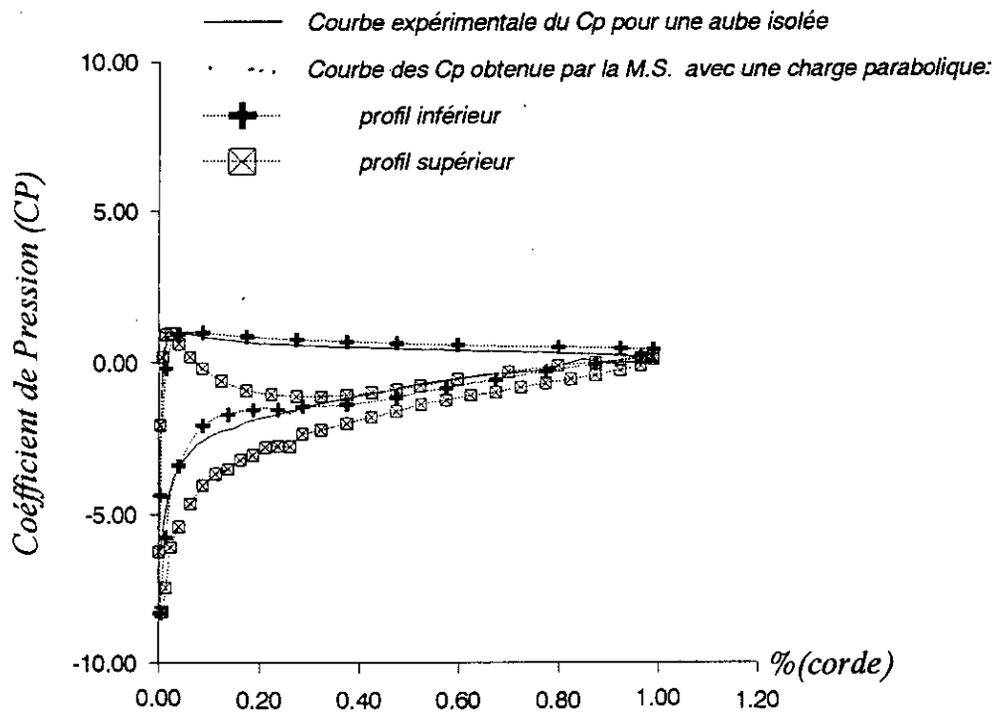


FIGURE V-16:
 Distribution des Coefficients de Pression pour une rangée d'aubes
 N.A.C.A. 4412 avec ($\alpha=16^\circ$)

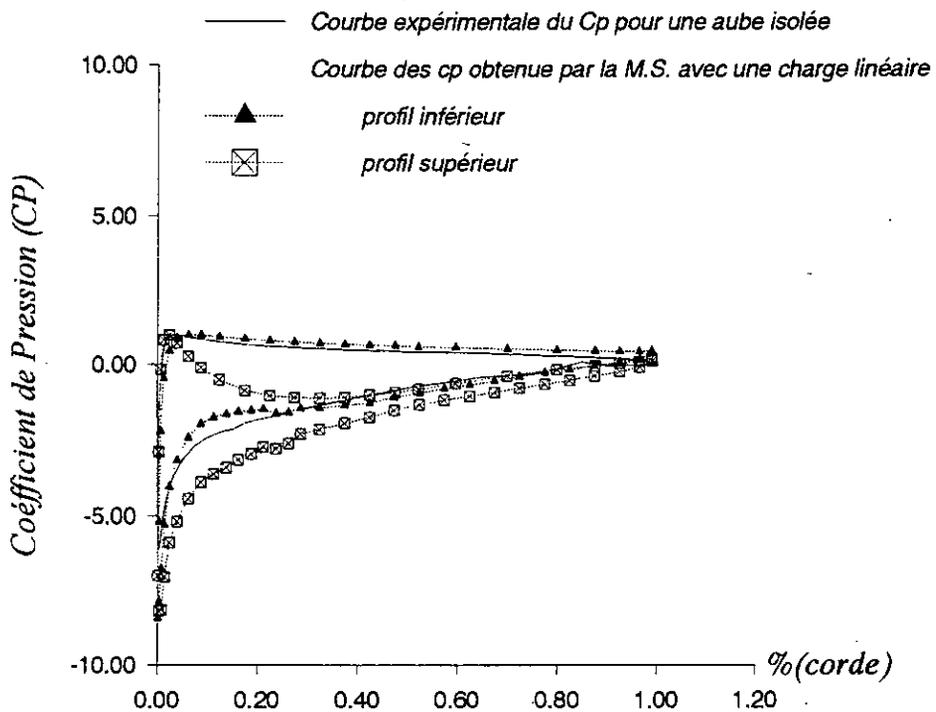


FIGURE V-17:
 Distribution des Coefficients de Pression sur une rangée d'aubes
 N.A.C.A. 4412 avec ($\alpha=16^\circ$)

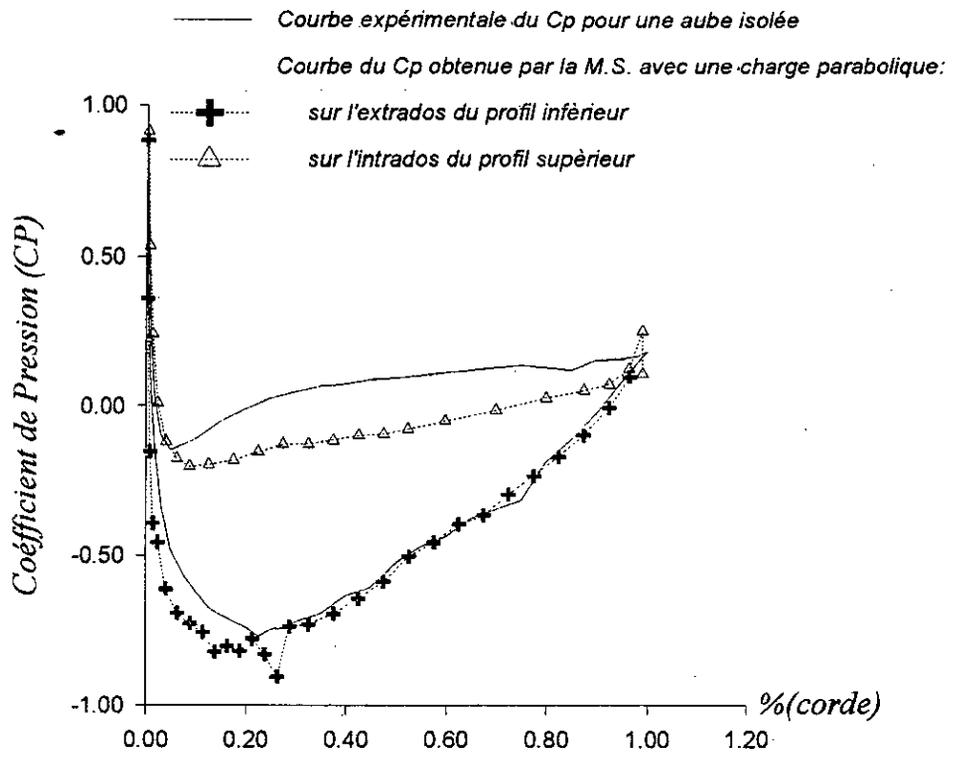


FIGURE V-18:
 Distribution des Coefficients de Pression pour une rangée d'aubes
 N.A.C.A. 4412 avec ($\alpha = 2^\circ$)
 (Distance entre les deux bords d'attaque égale à 60% corde)

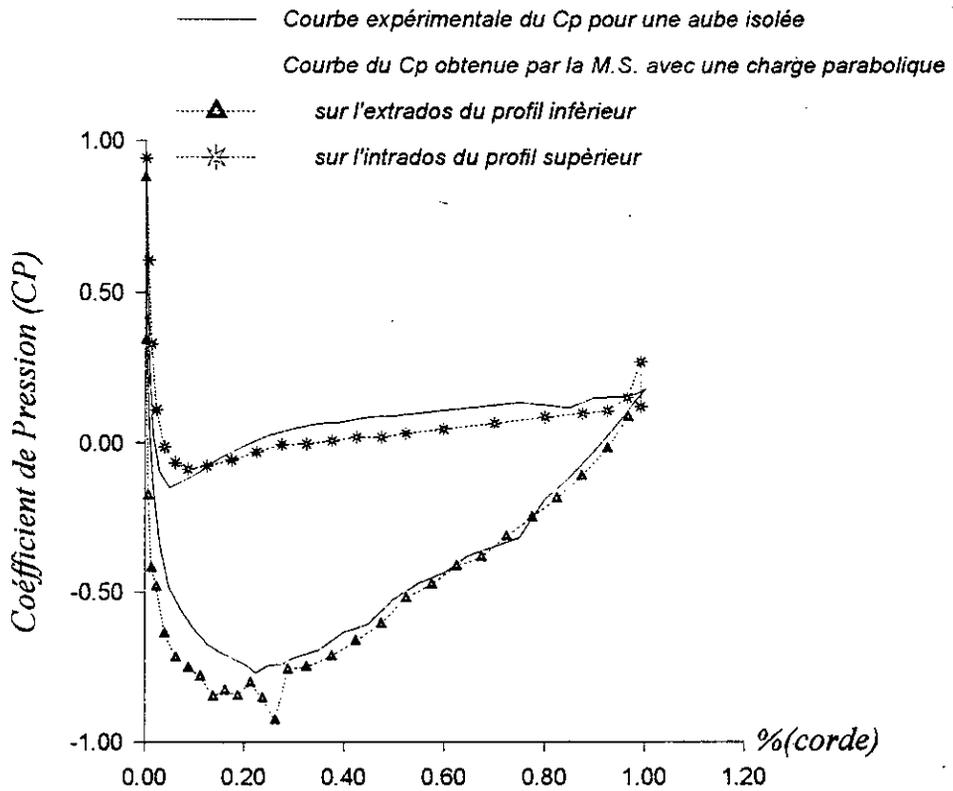


FIGURE V-19:
 Distribution des Coefficients de Pression pour une rangée d'aubes
 N.A.C.A. 4412 avec ($\alpha = 2^\circ$)
 (Distance entre les deux bords d'attaque égale à 150% corde)

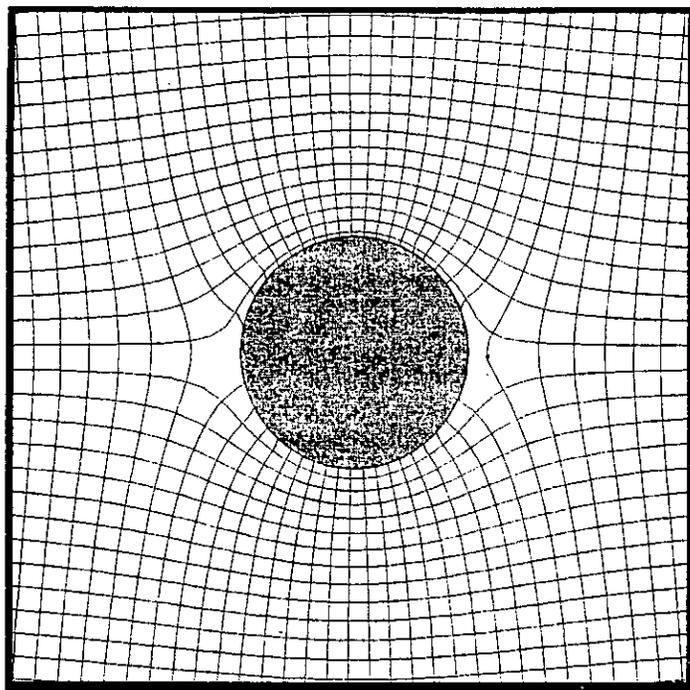


FIGURE V-20
Maillage d'un écoulement autour d'un cylindre fixe

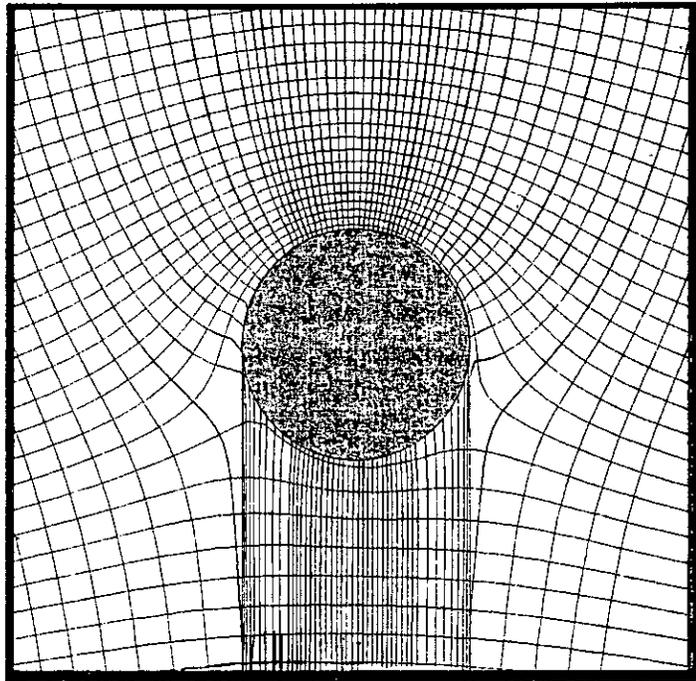


FIGURE V-21
Maillage raffiné d'un écoulement autour d'un cylindre tournant
(Chargement parabolique)

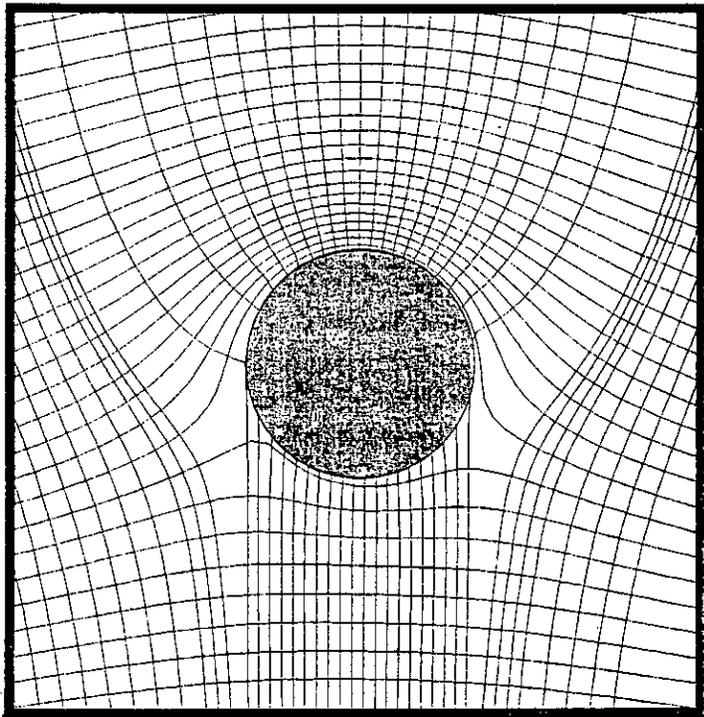


FIGURE V-22
Maillage d'un écoulement autour d'un cylindre tournant
(Chargement parabolique)

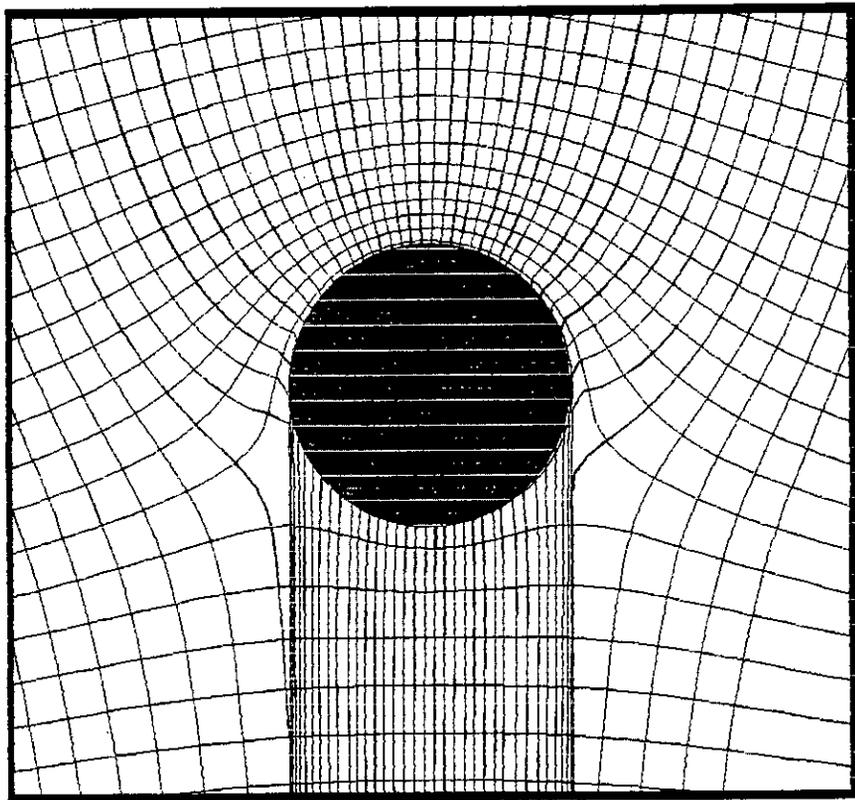


FIGURE V-23 -

*Maillage d'un écoulement autour d'un cylindre tournant
(Chargement linéaire)*

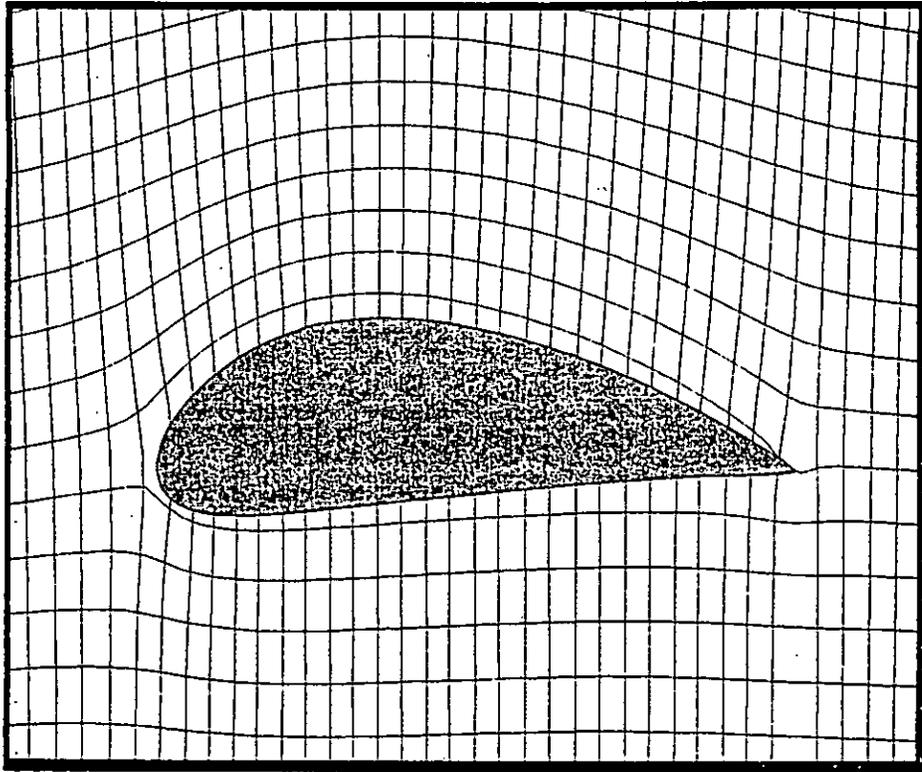


FIGURE V-24

*Maillage d'un écoulement autour d'une aube isolée
N.A.C.A. 4412 avec une charge parabolique pour ($\alpha=0^\circ$)*

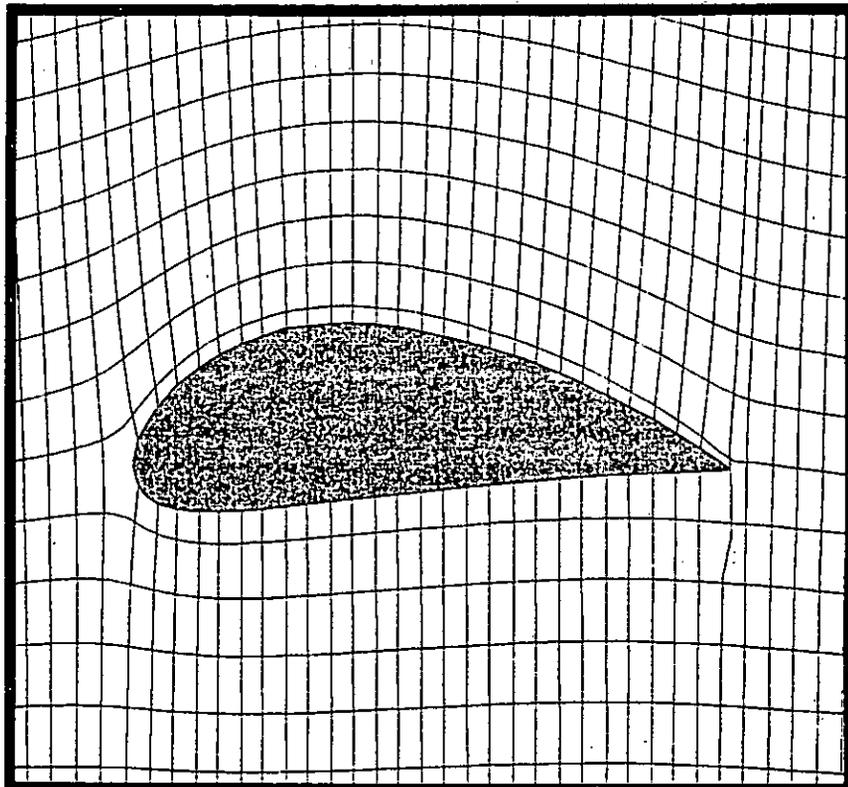


FIGURE V-25

*Maillage d'un écoulement autour d'une aube isolée
N.A.C.A. 4412 avec une charge linéaire pour ($\alpha=0^\circ$)*

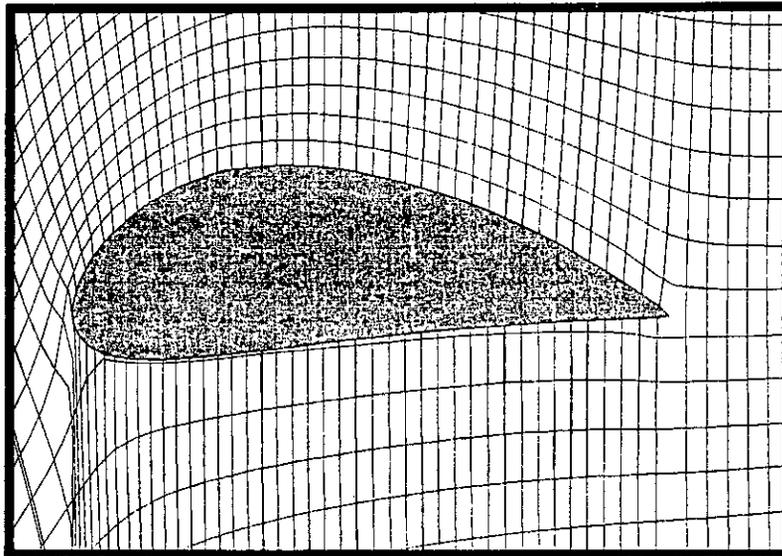


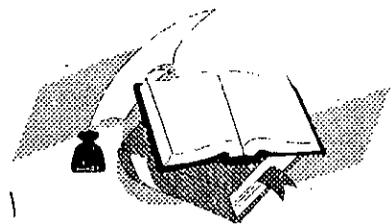
FIGURE V-26

Maillage d'un écoulement autour d'une aube isolée

N.A.C.A. 4412 avec une charge parabolique pour ($\alpha=10^\circ$)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] : **ABBOTT, J.H and A.E VON DOENHOFF** : « Theory Of Wings Sections »
McGRAN HILL Book Company NEW YORK 1949
; also, Dover Publications ,Inc, NEW YORK 1959
- [2] : **ANDERSON , JOHN.D, JR** : « Introduction to Flight »
Mc GRAN HILL Book Company NEW YORK 1978
- [3] : **ANDERSON, D . A , J.C. TANNEHILL , R.H. PLETCHER** :
« Complutational Fluid Mechanics And Heat Transfert » 1984
Hemisphere Publishing Corporation , NEW YORK
- [4] : **BRUN, E.A, MARTINOT-LAGARDE et A , MATHIEU , J**
« Mécanique Des Fluides » Tome 2
PARIS DUNOD 1968
- [5] : **DOUGLAS, GASIOREK, SWAFFIELD** : « Fluid Mechanics »
Second Edition
- [6] : **DEMIDOVITCH, B** : « Element De Calcul Numerique »
Edition MIR MOSCOU 1987
- [7] : **FOX ,J.F** - « An Introduction to Engineering Fluid Mechenics »
Second Edition LONDON MACMILLAN 19
- [8] : **Mc CROMICK .BARNES W**: « Aerodynamics, Aeronautics and Flight
Mechanics » WILLY 1979
- [9] : **OLSON ,M.R** : « Essentiels Of Enginëering Mechanics »
Third Edition Intext Edicational Publishers NEW YORK
- [10] : **REBUFFET,P** : « Aerodynamique Experimentale » Tome 1
Troisieme Edition Paris DUNOD 1969
- [11] : **THWAITES ,B** : « Incompressible Aerodynamics »
OXFORD 1960
- [12] : **NECERDDINE. R et NOUIOUA. M. :**
« Etude Comparative De La Méthode Des Singularités Distribuées Appliquée Aux
Ecoulements Autour D'Obstacles »
E.N.P P.F.E 1993
- [13] : **LAOUBI,M et ROUBI,M :**
« Analyse D'Ecoulement Autour D'Obstacles Et Elaboration D'un Mailleur Par
La Méthode Des Singularités »
E.N.P P.F.E 1994



ANNEXE A

**INFLUENCE D'UN PANNEAU SUR LUI MEME
DANS LE CAS D'UNE DISTRIBUTION
DE SOURCES OU DE VORTEX**

A.I INFLUENCE D'UN PANNEAU SUR LUI MEME LE CAS D'UNE DISTRIBUTION UNIFORME DE SOURCE:

pour déterminer l'influence d'un panneau chargé uniformément de source sur lui-même, considérons un volume de contrôle au voisinage de la source de longueur Δx et de hauteur infinitésimale (fig.A.1) et faisons un bilan.

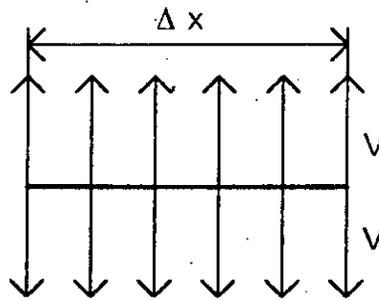


figure A.1

le flux total accumulé à travers le volume de contrôle est égal au flux sortant, soit:

$$k_i \Delta x = V \Delta x + V \Delta x$$

$$\Rightarrow k_i = 2V$$

$$\Rightarrow V = \frac{k_i}{2}$$

la nature radiale d'une source entraîne que le flux l' est aussi, l'influence d'un panneau sur lui-même sera donc nulle suivant sa tangente et égale à $k_i/2$ suivant sa normale.

A.II.1 INFLUENCE D'UN PANNEAU SUR LUI MEME DANS LE CAS D'UNE DISTRIBUTION UNIFORME DE VORTEX:

De la même façon que précédemment, nous établissons un bilan pour une distribution uniforme de vortex.

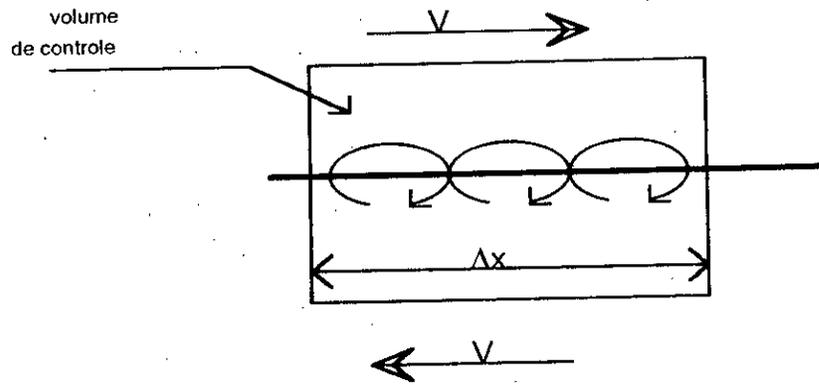


figure A.2

$$\gamma_i \Delta x = 2 V \Delta x$$

$$\Rightarrow V = \frac{\gamma_i}{2}$$

A l'inverse d'une source, l'influence d'un panneau vortex sur lui-même sera nulle suivant sa normale et égale à $\gamma_i / 2$ suivant sa tangente.

A-II-2 INFLUENCE D'UN PANNEAU SUR LUI MEME DANS LE CAS D'UNE DISTRIBUTION LINEAIRE :

On a les coefficients I_1, I_2, I_3, I_4^2 qui sont définis par:

$$I_1 = -\cos\delta_i \cos\delta_j - \sin\delta_i \sin\delta_j$$

$$I_2 = (Y(i) - Y_s(j-1)) \sin\delta_i + (X(i) - X_s(j-1)) \cos\delta_i$$

$$I_3 = (X(i) - X_s(j-1)) \cos\delta_j + (Y(i) - Y_s(j-1)) \sin\delta_j$$

$$I_4^2 = (Y(i) - Y_s(j-1))^2 + (X(i) - X_s(j-1))^2$$

(1)

L'influence du panneau sur lui même ($i = j$) se traduit en posant $\delta_i = \delta_j$

$$\text{On a : } \begin{cases} \sin\delta_i = \frac{Y(i) - Y_s(j-1)}{I_j/2} \Rightarrow Y(i) - Y_s(j-1) = \frac{I_j}{2} \sin\delta_i & (1) \\ \cos\delta_i = \frac{X(i) - X_s(j-1)}{I_j/2} \Rightarrow X(i) - X_s(j-1) = \frac{I_j}{2} \cos\delta_i & (2) \end{cases}$$

On remplace (1) et (2) dans (1)

$$I_1 = -1$$

$$I_2 = l_j/2$$

$$I_3 = l_j/2$$

$$I_4^2 = l_j/4$$

On a $I_4^2 - I_3^2 = 0$ donc on va calculer W et H

$$\text{On a : } \left\{ \begin{array}{l} W(i, j) = I_1 \ln \left[\frac{|l_j - I_3|}{|-I_3|} \right] - (I_1 I_3 + I_2) \left[\frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right] \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H(i, j) = I_1 l_j - (I_1 I_3^2 + I_2 I_3) \left(\frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + (I_2 + 2I_1 I_3) \ln \left[\frac{|l_j - I_3|}{|-I_3|} \right] \end{array} \right. \quad (4)$$

On remplace I_1, I_2, I_4 dans les équations (3) et (4)

$$\Rightarrow \begin{cases} W(i, j) = 0 \\ H(i, j) = -l_j \end{cases}$$

A-II-3 - INFLUENCE D'UN PANNEAU SUR LUI MEME DANS LE CAS D'UNE DISTRIBUTION PARABOLIQUE:

Dans ce cas il nous reste à calculer le troisième terme $C(i, j)$ puisque les deux termes $W(i, j)$ et $H(i, j)$ sont identique à ceux définis précédemment

Pour :

$I_4^2 - I_3^2 = 0$ on a :

$$C(i, j) = I_1 I_j^2 / 2 + (2I_1 I_3 + I_2) I_j + (3I_1 I_3^2 + 2I_2 I_3) \ln \left[\frac{|I_j - I_3|}{|-I_3|} \right] - (I_1 I_3^3 + I_2 I_3^2) \left[\frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right] \quad (5)$$

On replace I_1, \dots, I_4^2 dans l'équation (5) on trouve :

$$C(i, j) = -I_j^2$$

ANNEXE - B -
INFLUENCE D'UN PANNEAU SUR LUI MEME DANS LE CAS
D'UNE DISTRIBUTION DE DOUBLETS .

**B.I. INFLUENCE D'UN PANNEAU SUR LUI MEME DANS LE CAS
D'UNE DISTRIBUTION UNIFORME DE DOUBLET:**

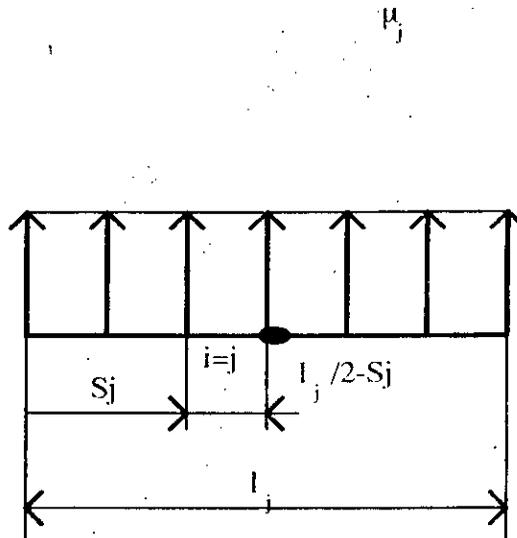


figure B-I-1

B.I.1 INFLUENCE DANS L'EXPRESSION DE LA VITESSE

NORMALE:

$$L(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{\sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j$$

L'influence du panneau sur lui même ($i = j$) se traduit en posant $\theta_{ij} = \delta_j$ soit :

$$L(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{\sin \theta_{ii}}{r_{ii}^2} dS_j \quad (1.1)$$

Pour des raisons de commodités pour le calcul de cette intégrale, mettons la sous la forme suivante:

$$L(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{I_1 S_j + I_2}{(S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4)^2} dS_j \quad (1.2)$$

D'après la figure (B-I-1), il apparaît que :

$$r_{ij} = \frac{l_j}{2} - S_j \Rightarrow r_{ij}^2 = \left(\frac{l_j}{2} - S_j\right)^2 = \left(\frac{l_j}{2} - S_j\right)^2 - (S_j - I_3)^2 + I_3^2 + I_4^2$$

La condition (I.3) n'est vérifiée que pour $I_4^2 - I_3^2 = 0$, cette condition supplémentaire limitera le calcul de L uniquement au cas : $I_4^2 - I_3^2 = 0$

• **Calcul de intégrale L:**

$$\begin{aligned} L(i,j) &= \int_0^{l_j} \frac{\sin \theta_{ij}}{r_{ij}^2} dS_j = \int_0^{l_j} \frac{I_1 S_j + I_2}{(S_j - I_3)^3} dS_j = I_1 \int_0^{l_j} \frac{S_j}{(S_j - I_3)^3} dS_j + I_2 \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^3} \\ &= I_1 \int_0^{l_j} \frac{S_j - I_3 + I_3}{(S_j - I_3)^3} dS_j + (I_2 + I_1 I_3) \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^3} \\ &= I_1 \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^2} + (I_2 + I_1 I_3) \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^3} = I_1 \left(-\frac{1}{(S_j - I_3)} \right) \Big|_0^{l_j} + (I_2 + I_1 I_3) \left(-\frac{1}{2(S_j - I_3)^2} \right) \Big|_0^{l_j} \end{aligned}$$

Finalement:

$$L(i,j) = -I_1 \left(\frac{1}{(l_j - I_3)} + \frac{1}{I_3} \right) - \frac{I_2 + I_1 I_3}{2} \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right) \quad (I.4)$$

• **DETERMINATION DES COEFFICIENTS I_1, I_2 et I_3**

La détermination des coefficients se fait en identifiant les équations (I.1) et (I.2)

avec $I_3 = I_4$.

On obtient alors:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\sin \delta_j \\ I_2 &= y(i) - Y_s(j-1) \\ I_3 &= \frac{l_i}{2} \end{aligned} \quad (I.5)$$

B.1.2 INFLUENCE DANS L'EXPRESSION DE LA VITESSE

TANGENTIELLE

$$H(i,j) = \int_0^{l_j} \frac{\cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j$$

L'influence du panneau sur lui même se traduit en posant $\theta_{ij} = \delta_j$, soit:

$$H(i,j) = \int_0^{l_j} \frac{\cos \theta_{ij}}{r_{ij}^2} dS_j \quad (I.6)$$

Pour des raisons de commodités pour le calcul de cette intégrale, mettons la sous la forme suivante :

$$H(i,i) = \int \frac{I_1 S_j + I_2}{(S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2)} dS_j \quad (I.7)$$

On remarque que l'expression de H donnée par l'équation (I.7) est identique à l'expression de L donnée par l'équation (I.2), le calcul sera alors identique à la différence des coefficients qu'il faudra redéfinir en identifiant les équations (I.6) et (I.7).

$$H(i,i) = -I_1 \left(\frac{1}{(l_j - I_3)} + \frac{1}{I_3} \right) - \frac{I_2 + I_1 I_3}{2} \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right)$$

avec:

$$I_1 = -\cos \delta_j$$

$$I_2 = x(i) - X_s(j-1)$$

$$I_3 = \frac{l_j}{2}$$

(I.8)

B.II. INFLUENCE D'UN PANNEAU SUR LUI MEME DANS LE CAS D'UNE DISTRIBUTION LINEAIRE DE DOUBLET:

Il est important de rappeler que la condition (I.3) est aussi à imposer pour ce type de distribution

B.II.1 Influence dans l'expression de la vitesse normale:

$$M(i,j) = \int_0^l \frac{\sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j \quad D(i,j) = \int_0^l \frac{S_j \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j$$

L'influence du panneau sur lui même (i = j) se traduit en posant $\theta_{ij} = \delta_i$, soit:

$$M(i, i) = \int_0^l \frac{\sin \theta_{ii}}{r_{ii}^2} dS_j \quad (II, 1)$$

$$D(i,i) = \int_0^l \frac{S_j \sin \theta_{ii}}{r_{ii}^2} dS_j \quad (II, 2)$$

On remarque que l'intégrale M n'est autre que l'intégrale L calculée précédemment, calculons alors uniquement D.

Intégrale se met sous la forme :

$$D(i,i) = \int_0^l \frac{(I_1 S_j + I_2) S_j}{(S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4)^{3/2}} dS_j \quad (II, 3)$$

avec: $I_4 - I_3^2 = 0$

$$\begin{aligned} D(i, i) &= \int_0^l \frac{S_j \sin \theta_{ii}}{r_{ii}^2} dS_j = \int_0^l \frac{(I_1 S_j + I_2) S_j}{(S_j - I_3)^3} dS_j = I_1 \int_0^l \frac{S_j}{(S_j - I_3)^3} dS_j + I_2 \int_0^l \frac{S_j}{(S_j - I_3)^3} dS_j \\ &= \frac{I_1}{3} \int_0^l \frac{3S_j^2 - 6I_3 S_j + 3I_3^2}{(S_j - I_3)^3} dS_j + (2I_1 I_3 + I_2) \int_0^l \frac{S_j}{(S_j - I_3)^3} dS_j - I_1 I_3^2 \int_0^l \frac{S_j}{(S_j - I_3)^3} dS_j \\ &= \frac{I_1}{3} \int_0^l \frac{3S_j^2 - 6I_3 S_j + 3I_3^2}{(S_j - I_3)^3} dS_j + (2I_1 I_3 + I_2) \int_0^l \frac{S_j - I_3}{(S_j - I_3)^3} dS_j - (2I_1 I_3^2 + I_2 I_3 - I_1 I_3^2) \int_0^l \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^3} \end{aligned}$$

$$D(i, i) = \frac{I_1}{3} \int_0^{l_j} \frac{3S_j^2 - 6I_3 S_j + 3I_3^2}{(S_j - I_3)^3} dS_j + (2I_1 I_3 + I_2) \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^3} - (I_1 I_3^2 + I_2 I_3) \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^3}$$

$$= \frac{I_1}{3} \left(\ln(S_j - I_3)^3 \Big|_0^{l_j} \right) + (2I_1 I_3 + I_2) \left(-\frac{1}{(S_j - I_3)^2} \Big|_0^{l_j} \right) + (I_1 I_3^2 + I_2 I_3) \left(-\frac{1}{2(S_j - I_3)} \Big|_0^{l_j} \right)$$

Finalement :

$$D(i, i) = \frac{I_1}{3} \ln \left(\frac{(l_j - I_3)^3}{|I_3^3|} \right) + (2I_1 I_3 + I_2) \left(\frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) - \frac{1}{2} (I_1 I_3^2 + I_2 I_3) \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right) \quad (II-4)$$

Les coefficients ont déjà été déterminés et sont donnés par le système (I.5)

B.II.2 INFLUENCE DANS L'EXPRESSION DE LA VITESSE

TANGENTIELLE:

$$J(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{\cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j \quad K(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{S_j \cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j$$

L'influence du panneau sur lui même se traduit en posant $\theta_{ij} = \delta_i$, soit :

$$J(i, i) = \int_0^{l_j} \frac{\cos \theta_{ii}}{r_{ii}^2} dS_j \quad (II.5)$$

$$K(i, i) = \int_0^{l_j} \frac{S_j \cos \theta_{ii}}{r_{ii}^2} dS_j \quad (II.6)$$

Ces intégrales peuvent s'écrire sous la forme :

$$J(i, i) = \int_0^{l_j} \frac{I_1 S_j + I_2}{(S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4)^3} dS_j$$

$$K(i, i) = \int_0^{l_j} \frac{(I_1 S_j + I_2) S_j}{(S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4)^3} dS_j$$

Le calcul de ces intégrales est identique à celui des intégrales M et D, il faudra uniquement définir les coefficients qui sont quant à eux déjà établis et donnés par le système (I.8).

B.III. INFLUENCE D'UN PANNEAU SUR LUI MEME DANS LE CAS D'UNE DISTRIBUTION PARABOLIQUE DE DOUBLET:

B-III .1 Influence dans l'expression de la vitesse normale:

$$M(i,j) = \int_0^{l_j} \frac{I_1 \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j \quad D(i,j) = \int_0^{l_j} \frac{I_2 S_j \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j$$

et

$$R(i,j) = \int_0^{l_j} \frac{I_3 S_j^2 \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j$$

L'influence du panneau sur lui même (i, j) $\Rightarrow \theta_{ij} = \delta_i$. On remarque que M et D sont déjà calculée précédemment, calculons alors uniquement R avec:

$$R(i,i) = \int_0^{l_j} \frac{I_3 S_j^2 \sin \theta_{ii}}{r_{ii}^2} dS_j \quad (\text{III-1})$$

Intégrale R se met sous la forme

$$R(i,i) = \int_0^{l_j} \frac{(I_1 S_j + I_2) S_j^2}{(S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4)^2} dS_j \quad (\text{III.2})$$

$$= I_1 \int_0^{l_j} \frac{S_j^3}{(S_j - I_3)^3} dS_j + I_2 \int_0^{l_j} \frac{S_j^2}{(S_j - I_3)^3} dS_j$$

$$R(i,j) = I_1 \left[\int_0^{I_j} \frac{S_j^3 - 3I_3 S_j^2 + 3I_3^2 S_j - I_3^3}{(S_j - I_3)^3} dS_j + 3I_3 \int_0^{I_j} \frac{S_j^2}{(S_j - I_3)^3} dS_j - 3I_3^2 \int_0^{I_j} \frac{S_j}{(S_j - I_3)^3} dS_j + I_3^3 \int_0^{I_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^3} \right] \\ + I_2 \int_0^{I_j} \frac{S_j^2}{(S_j - I_3)^2} dS_j$$

$$R(i,j) = I_1 \left[\int_0^{I_j} dS_j + \left(3I_3 + \frac{I_2}{I_1} \right) \int_0^{I_j} \frac{S_j^2}{(S_j - I_3)^3} dS_j - 3I_3^2 \int_0^{I_j} \frac{S_j - I_3}{(S_j - I_3)^3} dS_j + (I_3^3 - 3I_3^3) \int_0^{I_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^3} \right]$$

$$I_1 \left\{ I_j + \frac{1}{3} \left(3I_3 + \frac{I_2}{I_1} \right) \left[\ln \frac{|S_j - I_3|^3}{|-I_3|} \right] - 2 \left(3I_3 + \frac{I_2}{I_1} \right) I_3 \left[\frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right] - \left(3I_3 + \frac{I_2}{I_1} \right) \frac{I_3^2}{2} \left[\frac{1}{(I_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right] \right.$$

$$\left. - I_3^3 \left[\frac{1}{(I_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right] \right\}$$

$$I_1 I_j + \frac{1}{3} (I_1 I_3 + I_2) \ln \left[\frac{|S_j - I_3|^3}{|-I_3|} \right] - 2I_3 (I_1 I_3 + I_2) \left[\frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right] - 3(I_1 I_3 + I_2) \frac{I_3}{2} \left[\frac{1}{(I_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right]$$

$$- I_3^3 \left[\frac{1}{(I_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right]$$

d'où

$$R(i,j) = I_1 I_j + \frac{1}{3} (I_1 I_3 + I_2) \ln \left[\frac{|S_j - I_3|^3}{|-I_3|} \right] + \left[3I_3^2 (1 - 2I_1) - 2I_2 I_3 \right] \left[\frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right] - \left(3 \frac{I_1 I_3^3}{2} + \frac{I_2 I_3^2}{2} \right) \left[\frac{1}{(I_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right] \quad \dots(III.3)$$

détermination des coefficients I_1, I_2 et I_3 :

La détermination des coefficients se fait en identifiant les équations (III. 1)

et (III 2)

$$I_1 = -\sin\delta_j$$

avec $I_3 = I_4$, on obtient alors : $I_2 = y(i) - Y_s(j-1)$

$$I_3 = \frac{I_1}{2}$$

B.III.2 Influence dans l'expression de la vitesse tangentielle :

$$\text{On a : } N(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{\cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j \text{ et } P(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{S_j \cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j$$

$$\text{et } T(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{S_j^2 \cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j$$

L'influence du panneau sur lui même se traduit on posant $\theta_j = \delta_i$

$$N(i, i) = \int_0^{l_i} \frac{\cos\theta_{ii}}{r_{ii}^2} dS_j \quad , P(i, i) = \int_0^{l_i} \frac{S_j \cos\theta_{ii}}{r_{ii}^2} dS_j$$

$$\text{et } T(i, i) = \int_0^{l_i} \frac{S_j^2 \cos\theta_{ii}}{r_{ii}^2} dS_j$$

Le calcul de ces intégrales est identique à celui des intégrales M, D et R il faudra uniquement identifier les coefficients.

ANNEXE I

CALCUL DES INTEGRALES $I(i,j)$, $H(i,j)$, $C(i,j)$

I-1 calcul l'integrale I:

PREMIER CAS : $I_4^2 - I_3^2 = 0$

$$I = \int_0^{I_j} \frac{I_1 S_j + I_2}{(S_j - I_3)^2} dS_j = I_1 \int_0^{I_j} \frac{(S_j - I_3 + I_3)}{(S_j - I_3)^2} dS_j + I_2 \int_0^{I_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^2}$$

$$I = I_1 \int_0^{I_j} \frac{S_j - I_3}{(S_j - I_3)^3} dS_j + (I_1 I_3 + I_2) \int_0^{I_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^2}$$

$$I = I_1 \ln |S_j - I_3| \Big|_0^{I_j} + (I_1 I_3 + I_2) \left(-\frac{1}{S_j - I_3} \right) \Big|_0^{I_j}$$

Finalement :

$$I = I_1 \ln \left(\frac{|I_j - I_3|}{|-I_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left(\frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right)$$

SECOND CAS : $I_4^2 - I_3^2 > 0$

$$I = \int_0^{I_j} \frac{I_1 S_j + I_2}{(S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2} dS_j = I_1 \int_0^{I_j} \frac{S_j}{(S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2} dS_j + I_2 \int_0^{I_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2}$$

$$I = \frac{I_1}{2} \int_0^{I_j} \frac{2(S_j - I_3) + 2I_3}{(S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2} dS_j + I_2 \int_0^{I_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2}$$

$$I = \frac{I_1}{2} \int_0^{I_j} \frac{2(S_j - I_3)}{(S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2} dS_j + (I_1 I_3 + I_2) \int_0^{I_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2}$$

$$I = \frac{I_1}{2} \ln |(S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2| \Big|_0^{I_j} + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{I_4^2 - I_3^2} \int_0^{I_j} \frac{dS_j}{\left(\frac{S_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right)^2 + 1}$$

$$I = \frac{I_1}{2} \ln |(S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2| \Big|_0^{I_j} + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{S_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \Big|_0^{I_j}$$

Finalement:

$$I = \frac{I_1}{2} \ln \left(\frac{|(I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2|}{I_4^2} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right)$$

I-2 CALCUL L'INTEGRALE H(i,j):

PREMIER CAS : $I_4 - I_3^2 = 0$

$$\begin{aligned}
H(i,j) &= \int_0^{l_j} \frac{S_j \cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j = \int_0^{l_j} \frac{S_j(I_1 S_j + I_2)}{(S_j - I_3)^2} dS_j = I_1 \int_0^{l_j} \frac{S_j^2}{(S_j - I_3)^2} dS_j + I_2 \int_0^{l_j} \frac{S_j}{(S_j - I_3)^2} dS_j \\
&= I_1 \int_0^{l_j} \frac{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_3^2 - I_3^2 + 2I_3 S_j}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_3^2} dS_j + I_2 \int_0^{l_j} \frac{(S_j - I_3) + I_3}{(S_j - I_3)^2} dS_j \\
H(i,j) &= I_1 \int_0^{l_j} dS_j + I_1 I_3 \int_0^{l_j} \frac{2(S_j - I_3) + I_3}{(S_j - I_3)^2} dS_j + I_2 I_3 \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^2} + I_2 \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{S_j - I_3} \\
&= I_1 \int_0^{l_j} dS_j + (I_1 I_3^2 + I_2 I_3) \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^2} + (I_2 + 2I_1 I_3) \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{S_j - I_3} \\
H(i,j) &= I_1 S_j \Big|_0^{l_j} + (I_1 I_3^2 + I_2 I_3) \left(-\frac{1}{S_j - I_3} \right) \Big|_0^{l_j} + (I_2 + 2I_1 I_3) \ln(S_j - I_3) \Big|_0^{l_j}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$H(i,j) = I_1 l_j - (I_1 I_3^2 + I_2 I_3) \left(\frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + (I_2 + 2I_1 I_3) \ln \left(1 - \frac{l_j}{I_3} \right)$$

SECOND CAS : $I_4^2 - I_3^2 > 0$

$$H(i, j) = \int_0^{I_j} \frac{S_j \cos(\theta_j - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j = \int_0^{I_j} \frac{S_j(I_1 S_j + I_2)}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j = \int_0^{I_j} \frac{I_1 S_j^2 + I_2 S_j}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j$$

$$\begin{aligned} H(i, j) &= I_1 \int_0^{I_j} \frac{S_j^2}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j + I_2 \int_0^{I_j} \frac{S_j}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j \\ &= I_1 \int_0^{I_j} \frac{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2 - I_4^2 + 2I_3 S_j}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j + \frac{1}{2} I_2 \int_0^{I_j} \frac{2S_j + 2I_3 - 2I_3}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(i, j) &= I_1 \int_0^{I_j} dS_j + 2I_1 I_3 \int_0^{I_j} \frac{S_j}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j - I_1 I_4^2 \int_0^{I_j} \frac{dS_j}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} \\ &\quad + \frac{1}{2} I_2 \int_0^{I_j} \frac{2(S_j - I_3)}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j + I_2 I_3 \int_0^{I_j} \frac{dS_j}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(i, j) &= I_1 S_j \Big|_0^{I_j} + 2I_1 I_3 \left(\frac{1}{2} \int_0^{I_j} \frac{2(S_j - I_3)}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j + I_3 \int_0^{I_j} \frac{dS_j}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} \right) - I_1 I_4^2 \int_0^{I_j} \frac{dS_j}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} \\ &\quad + \frac{1}{2} I_2 \int_0^{I_j} \frac{2(S_j - I_3)}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j + I_2 I_3 \int_0^{I_j} \frac{dS_j}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} \end{aligned}$$

$$H(i, j) = I_1 \int_0^{I_j} dS_j + \left(I_1 I_3 + \frac{1}{2} I_2 \right) \int_0^{I_j} \frac{2(S_j - I_3)}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j + (2I_1 I_3^2 + I_2 I_3 - I_1 I_4^2) \int_0^{I_j} \frac{dS_j}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2}$$

$$H(i, j) = I_1 S_j \Big|_0^{I_j} + \left(I_1 I_3 + \frac{1}{2} I_2 \right) \ln(S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2) \Big|_0^{I_j} + \frac{(2I_1 I_3^2 + I_2 I_3 - I_1 I_4^2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{S_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \Big|_0^{I_j}$$

$$\begin{aligned} H(i, j) &= I_1 I_j + \left(I_1 I_3 + \frac{1}{2} I_2 \right) \ln \left(\frac{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2}{I_4^2} \right) \\ &\quad + \frac{(2I_1 I_3^2 + I_2 I_3 - I_1 I_4^2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \end{aligned}$$

I-3 CALCUL L'INTEGRALE C(i,j):

PREMIER CAS : $I_4 - I_3^2 = 0$

$$C(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{Sj^2 \cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} dSj = \int_0^{l_j} \frac{Sj^2 (I_1 Sj + I_2)}{(Sj - I_3)^2} dSj$$

$$C(i, j) = I_1 \int_0^{l_j} \frac{Sj^3}{(Sj - I_3)^2} dSj + I_2 \int_0^{l_j} \frac{Sj^2}{(Sj - I_3)^2} dSj$$

$$C(i, j) = I_1 \int_0^{l_j} \frac{Sj^3 - 2I_3 Sj^2 + I_3^2 Sj}{(Sj - I_3)^2} dSj + 2I_1 I_3 \int_0^{l_j} \frac{Sj^2}{(Sj - I_3)^2} dSj - I_1 I_3^2 \int_0^{l_j} \frac{Sj}{(Sj - I_3)^2} dSj + I_2 \int_0^{l_j} \frac{Sj^2}{(Sj - I_3)^2} dSj$$

$$C(i, j) = I_1 \int_0^{l_j} Sj dSj + (2I_1 I_3 + I_2) \int_0^{l_j} \frac{Sj^2}{(Sj - I_3)^2} dSj - I_1 I_3^2 \int_0^{l_j} \frac{Sj}{(Sj - I_3)^2} dSj$$

$$C(i, j) = I_1 \frac{l_j^2}{2} + (2I_1 I_3 + I_2) \int_0^{l_j} \frac{Sj^2 - 2I_3 Sj + I_3^2}{(Sj - I_3)^2} dSj + 2I_3 (2I_1 I_3 + I_2) \int_0^{l_j} \frac{Sj}{(Sj - I_3)^2} dSj - I_3^2 (2I_1 I_3 + I_2) \int_0^{l_j} \frac{dSj}{(Sj - I_3)^2} - I_1 I_3^2 \int_0^{l_j} \frac{Sj}{(Sj - I_3)^2} dSj$$

$$C(i, j) = I_1 \frac{l_j^2}{2} + (2I_1 I_3 + I_2) l_j + (3I_1 I_3^2 + 2I_2 I_3) \int_0^{l_j} \frac{Sj}{(Sj - I_3)^2} dSj - I_3^2 (2I_1 I_3^2 + I_2) \int_0^{l_j} \frac{dSj}{(Sj - I_3)^2}$$

$$C(i, j) = I_1 \frac{l_j^2}{2} + (2I_1 I_3 + I_2) l_j + (3I_1 I_3^2 + 2I_2 I_3) \int_0^{l_j} \frac{Sj - I_3}{(Sj - I_3)^2} dSj + (3I_1 I_3^3 + 2I_2 I_3^2) \int_0^{l_j} \frac{dSj}{(Sj - I_3)^2} - I_3^2 (2I_1 I_3^2 + I_2) \int_0^{l_j} \frac{dSj}{(Sj - I_3)^2}$$

$$C(i, j) = I_1 \frac{l_j^2}{2} + (2I_1 I_3 + I_2) l_j + (3I_1 I_3^2 + 2I_2 I_3) \left[\ln |Sj - I_3| \right] + (I_1 I_3^3 + I_2 I_3^2) \left[-\frac{1}{Sj - I_3} \right]_0^{l_j}$$

$$C(i, j) = I_1 \frac{l_j^2}{2} + (2I_1 I_3 + I_2) l_j + (3I_1 I_3^2 + 2I_2 I_3) \ln \left| \frac{l_j - I_3}{-I_3} \right| - (I_1 I_3^3 + I_2 I_3^2) \left[\frac{1}{l_j - I_3} - \frac{1}{-I_3} \right]$$

SECOND CAS : $I_4^2 - I_3^2 > 0$

$$C(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{S_j^2 \cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} dS_j = \int_0^{l_j} \frac{S_j^2 (I_1 S_j + I_2)}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j$$

$$C(i, j) = I_1 \int_0^{l_j} \frac{S_j^3}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j + I_2 \int_0^{l_j} \frac{S_j^2}{(S_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} dS_j$$

on pose:

$$C(i, j) = I_1 T_4 + I_2 T_1$$

$$T_4 = \int_0^{l_j} \frac{S_j^3}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j = \int_0^{l_j} S_j dS_j + \int_0^{l_j} \frac{2I_3 S_j^2 - I_4^2 S_j}{(S_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} dS_j$$

$$T_4 = \frac{l_j^2}{2} + 2I_3 \int_0^{l_j} \frac{S_j^2}{(S_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} dS_j - I_4^2 \int_0^{l_j} \frac{S_j}{(S_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} dS_j$$

d'où

$$C(i, j) = I_1 \frac{l_j^2}{2} + (2I_1 I_3 + I_2) \int_0^{l_j} \frac{S_j^2}{(S_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} dS_j - I_1 I_4^2 \int_0^{l_j} \frac{S_j}{(S_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} dS_j$$

$$C(i, j) = I_1 \frac{l_j^2}{2} + (2I_1 I_3 + I_2) \int_0^{l_j} \frac{S_j^2 - 2I_3 S_j + 2I_3 S_j + I_4^2 - I_4^2}{(S_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} dS_j$$

$$- \frac{I_1 I_4^2}{2} \int_0^{l_j} \frac{S_j}{(S_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} dS_j$$

$$C(i, j) = I_1 \frac{l_j^2}{2} + (2I_1 I_3 + I_2) \int_0^{l_j} dS_j + 2I_3 (2I_1 I_3 + I_2) \int_0^{l_j} \frac{S_j}{(S_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} dS_j - I_1 I_4^2 \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} - \frac{I_1 I_4^2}{2} \int_0^{l_j} \frac{2(S_j - I_3) + 2I_3}{(S_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} dS_j$$

$$C(i, j) = I_1 \frac{l_j^2}{2} + (2I_1 I_3 + I_2) l_j + \left(2I_1 I_3^2 + I_2 I_3 - \frac{I_1 I_4^2}{2} \right) \int_0^{l_j} \frac{2(S_j - I_3) + 2I_3}{(S_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} dS_j - (2I_1 I_3 I_4^2 + I_2 I_4^2) \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)}$$

$$C(i, j) = I_1 \frac{l_j^2}{2} + (2I_1 I_3 + I_2) l_j + \left(2I_1 I_3^2 + I_2 I_3 - \frac{I_1 I_4^2}{2} \right) \int_0^{l_j} \frac{2(Sj - I_3)}{(Sj - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} dSj$$

$$+ (4I_1 I_3^3 + 2I_2 I_3^2 - 3I_1 I_3 I_4^2 - I_2 I_4^2) \int_0^{l_j} \frac{dSj}{Sj^2 - 2I_3 Sj + I_4^2}$$

$$C(i, j) = I_1 \frac{l_j^2}{2} + (2I_1 I_3 + I_2) l_j + \left(2I_1 I_3^2 + I_2 I_3 - \frac{I_1 I_4^2}{2} \right) \left[\ln \left| \frac{l_j^2 - 2I_3 l_j + I_4^2}{I_4^2} \right| \right]$$

$$+ \frac{4I_1 I_3^3 + 2I_2 I_3^2 - 3I_1 I_3 I_4^2 - I_2 I_4^2}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right]$$

ANNEXE II

CALCUL DES INTEGRALES $L(i,j)$, $M(i,j)$, $D(i,j)$, $R(i,j)$

II-1 CALCUL L'INTEGRALE L :

PREMIER CAS : $(I_4^2 - I_3^2) = 0$

$$\bullet L_1 = \int_0^{l_j} \frac{S_j^2}{(S_j - I_3)^4} dS_j = \int_0^{l_j} \frac{(S_j - I_3)^2 + 2I_3 S_j - I_3^2}{(S_j - I_3)^4} dS_j$$

$$L_1 = \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^2} + 2I_3 L_2 - I_3^2 L_3 = - \frac{1}{S_j - I_3} \Big|_0^{l_j} + 2I_3 L_2 - I_3^2 L_3$$

$$L_1 = - \left(\frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + 2I_3 L_2 - I_3^2 L_3$$

$$\bullet L_2 = \int_0^{l_j} \frac{S_j}{(S_j - I_3)^4} dS_j = \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \frac{2(S_j - I_3)}{(S_j - I_3)^3} dS_j + I_3 L_3$$

$$L_2 = - \frac{1}{2(S_j - I_3)^2} \Big|_0^{l_j} + I_3 L_3$$

$$L_2 = - \frac{1}{2(l_j - I_3)^2} + \frac{1}{2I_3^2} + I_3 L_3$$

$$\bullet L_3 = \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^4} = - \frac{1}{3(S_j - I_3)^3} \Big|_0^{l_j}$$

$$L_3 = - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right)$$

Finalement, on établit :

$$L = I_1 L_1 - 2I_2 L_2 + I_3 L_3$$

$$L = I_1 \left(- \left(\frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + 2I_3 L_2 - I_3^2 L_3 \right) - 2I_2 \left(- \frac{1}{2(l_j - I_3)^2} + \frac{1}{2I_3^2} + I_3 L_3 \right) + I_3 \left(- \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) \right)$$

$$L = -I_1 \left(\frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + (I_2 - I_1 I_3) \left(\frac{1}{(I_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(I_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) (I_5 - 2I_2 I_3 + I_1 I_3^2)$$

- SECOND CAS : $I_4^2 - I_3^2 > 0$

$$\bullet L_1 = \int_0^{I_j} \frac{Sj^2}{\left((Sj - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2 \right)^2} dSj = \int_0^{I_j} \frac{Sj^2 - 2I_3 Sj + I_4^2}{\left((Sj - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2 \right)^2} dSj + 2I_3 L_2 - I_4^2 L_3$$

$$L_1 = \int_0^{I_j} \frac{dSj}{(Sj - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2} + 2I_3 L_2 - I_4^2 L_3 = \frac{1}{I_4^2 - I_3^2} \int_0^{I_j} \frac{dSj}{\left(\frac{Sj - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right)^2 + 1} + 2I_3 L_2 - I_4^2 L_3$$

$$L_1 = \frac{1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \arctg \left(\frac{Sj - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \Big|_0^{I_j} + 2I_3 L_2 - I_4^2 L_3$$

$$L_1 = \frac{1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\arctg \left(\frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \arctg \left(\frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) + 2I_3 L_2 - I_4^2 L_3$$

$$\bullet L_2 = \int_0^{I_j} \frac{Sj}{\left((Sj - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2 \right)^2} dSj = \frac{1}{2} \int_0^{I_j} \frac{2(Sj - I_3)}{\left((Sj - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2 \right)^2} dSj + I_3 L_3$$

$$L_2 = - \frac{1}{2 \left((Sj - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2 \right)} \Big|_0^{I_j} + I_3 L_3$$

$$L_2 = - \frac{1}{2 \left((I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2 \right)} + \frac{1}{2I_4^2} + I_3 L_3$$

$$\bullet L_3 = \int_0^{I_j} \frac{dSj}{\left((Sj - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2 \right)^2} = \frac{1}{(I_4^2 - I_3^2)^2} \int_0^{I_j} \frac{dSj}{\left(\left(\frac{Sj - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right)^2 + 1 \right)^2}$$

Faisons un changement de variables, en posant :

$$s = \frac{Sj - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \Rightarrow ds = \frac{dSj}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}}$$

Nous aurons alors :

$$L_3 = \frac{1}{(I_4 - I_3)^{\frac{3}{2}}} \int_a^b \frac{ds}{(s^2 + 1)^2} \quad \text{avec} \quad a = \frac{-I_3}{\sqrt{I_4 - I_3^2}} \quad \text{et} \quad b = \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4 - I_3^2}}$$

Posons encore $p = \int_a^b \frac{ds}{(s^2 + 1)^2}$ et intégrons cette expression par parties.

$$\text{Soit :} \quad u = \frac{1}{s^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{-2s}{(s^2 + 1)^2} ds$$

$$dv = ds \quad \Rightarrow \quad v = s$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{ds}{s^2 + 1} &= \int_a^b u dv = uv - \int_a^b v du \\ &= \frac{s}{s^2 + 1} \Big|_a^b - \int_a^b \left(-\frac{2s^2}{(s^2 + 1)^2} \right) ds = \frac{s}{s^2 + 1} \Big|_a^b + 2 \int_a^b \frac{s^2 + 1}{(s^2 + 1)^2} ds - 2 \int_a^b \frac{ds}{(s^2 + 1)^2} \\ \Rightarrow \int_a^b \frac{ds}{(s^2 + 1)^2} &= \frac{1}{2} \frac{s}{s^2 + 1} \Big|_a^b + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{ds}{s^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{s}{s^2 + 1} \Big|_a^b + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(s) \Big|_a^b \\ \Rightarrow p &= \frac{1}{2} \left(\frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \end{aligned}$$

L'expression de L_3 sera donc :

$$L_3 = \frac{1}{(I_4 - I_3)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right)$$

$$\text{avec} \quad a = \frac{-I_3}{\sqrt{I_4 - I_3^2}} \quad \text{et} \quad b = \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4 - I_3^2}}$$

Finalement l'intégrale L se mettra sous la forme :

$$L = I_1 \frac{1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) + 2I_3 I_1 L_2 - I_1 I_3^2 L_3$$

$$- 2I_2 \left(- \frac{1}{2 \left((l_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2 \right)} + \frac{1}{2I_4^2} + I_3 L_3 \right)$$

$$+ I_5 \frac{1}{(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right)$$

Après toutes substitutions, on trouve l'expression suivante :

$$L = \frac{I_1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right)$$

$$+ (I_2 - I_1 I_3) \left(\frac{1}{\left((l_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2 \right)} - \frac{1}{I_4^2} \right)$$

$$+ \frac{(I_5 + 2I_1 I_3^2 - 2I_2 I_3 - I_1 I_4^2)}{2(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\left(\frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right)$$

avec :

$$a = \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \quad \text{et} \quad b = \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}}$$

II-2 CALCUL L'integrale D(i,j) :

PREMIER CAS : $I_4^2 - I_3^2 = 0$

$$\begin{aligned}
 L_4 &= \frac{1}{4} \int_0^{I_j} \frac{4Sj^3 - 12I_3 Sj^2 + 12I_3^2 Sj - 4I_3^3}{(Sj - I_3)^4} dSj + 3I_3 L_1 - 3I_3^2 L_2 + I_3^3 L_3 \\
 &= \frac{1}{4} \ln(Sj - I_3)^4 \Big|_0^{I_j} + 3I_3 L_1 - 3I_3^2 L_2 + I_3^3 L_3 \\
 L_4 &= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{Sj - I_3}{I_3}\right)^4 + 3I_3 L_1 - 3I_3^2 L_2 + I_3^3 L_3
 \end{aligned}$$

avec L_1 , L_2 et L_3 définis au paragraphe (§ II.4.1.6.1).

$$\begin{aligned}
 L_4 &= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{I_j - I_3}{I_3}\right)^4 + 3I_3 \left(-\left(\frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3}\right) + 2I_3 L_2 - I_3^2 L_3 \right) \\
 &\quad - 3I_3^2 \left(-\frac{1}{2(I_j - I_3)^2} + \frac{1}{2I_3^2} + I_3 L_3 \right) + I_3^3 \left(-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{(I_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) \right) \\
 L_4 &= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{I_j - I_3}{I_3}\right)^4 + 3I_3 \left(-\left(\frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3}\right) + 2I_3 \left(-\frac{1}{2(I_j - I_3)^2} + \frac{1}{2I_3^2} + I_3 \left(-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{(I_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) \right) \right) \right) \\
 &\quad - I_3^2 \left(-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{(I_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) \right) \\
 &\quad - 3I_3^2 \left(-\frac{1}{2(I_j - I_3)^2} + \frac{1}{2I_3^2} + I_3 \left(-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{(I_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) \right) \right) + I_3^3 \left(-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{(I_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) \right) \\
 L_4 &= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{I_j - I_3}{I_3}\right)^4 - 3I_3 \left(\frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + 3I_3^2 \left(-\frac{1}{2(I_j - I_3)^2} + \frac{1}{2I_3^2} \right) \\
 &\quad + I_3^3 \left(-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{(I_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) \right)
 \end{aligned}$$

En substituant les expressions de L_1 , L_2 et L_4 dans l'équation (III.63), l'intégrale D s'écrit alors :

$$D(i, j) = I_1 \left[\begin{aligned} & \frac{1}{4} \ln \left(\frac{l_j - l_3}{I_3} \right)^4 - 3I_3 \left(\frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + 3I_3^2 \left(-\frac{1}{2(l_j - I_3)^2} + \frac{1}{2I_3^2} \right) \\ & + I_3^3 \left(-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) \right) \\ & - 2I_2 \left(-\left(\frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + 2I_3 \left(-\frac{1}{2(l_j - I_3)^2} + \frac{1}{2I_3^2} + I_3 \left(-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) \right) \right) \right) \\ & + I_5 \left(-\frac{1}{2(l_j - I_3)^2} + \frac{1}{2I_3^2} + I_3 \left(-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) \right) \right) \end{aligned} \right]$$

Finalement :

$$D(i, j) = \frac{I_1}{4} \ln \left(\frac{l_j - I_3}{I_3} \right)^4 - (3I_1 I_3 - 2I_2) \left(\frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) \\ - \frac{1}{2} (3I_1 I_3^2 - 4I_2 I_3 + I_5) \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right) \\ - \frac{1}{3} (I_1 I_3^3 - 2I_2 I_3^2 + I_5 I_3) \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right)$$

$$\text{et } M(i, j) = -I_1 \left(\frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + (I_2 - I_1 I_3) \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right) \\ - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) (I_5 - 2I_2 I_3 + I_1 I_3^2)$$

SECOND CAS : $I_4^2 - I_3^2 > 0$

$$L_4 = \frac{1}{4} \int_0^{I_j} \frac{4Sj^3 - 12I_3Sj^2 + 4(I_4^2 + 2I_3^2)Sj - 4I_3I_4^2}{(Sj^2 - 2I_3Sj + I_4^2)^2} dSj + 3I_3L_1 - (I_4^2 + 2I_3^2)L_2 + I_3I_4^2L_3$$

$$= \frac{1}{4} \ln(Sj^2 - 2I_3Sj + I_4^2) \Big|_0^{I_j} + 3I_3L_1 - (I_4^2 + 2I_3^2)L_2 + I_3I_4^2L_3$$

$$L_4 = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{I_j^2 - 2I_3I_j + I_4^2}{I_4^2}\right)^2 + 3I_3L_1 - (I_4^2 + 2I_3^2)L_2 + I_3I_4^2L_3$$

avec L_1 , L_2 et L_3 définis au paragraphe (§ II.4.1.6.1).

$$L_4 = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{I_j^2 - 2I_3I_j + I_4^2}{I_4^2}\right)^2 + 3I_3 \left(\frac{1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}}\right) \right) + 2I_3L_2 - I_4^2L_3 \right.$$

$$\left. - (I_4^2 + 2I_3^2) \left(-\frac{1}{2((I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} + \frac{1}{2I_4^2} + I_3L_3 \right) \right.$$

$$\left. + I_3I_4^2 \left(\frac{1}{(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right) \right) \right)$$

Après toutes substitutions L_4 peut se mettre sous la forme :

$$L_4 = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{I_j^2 - 2I_3 I_j + I_4^2}{I_4^2} \right)^2 + 3I_3 \left[\frac{1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) \right. \\ \left. + 2I_3 \left[\frac{1}{2 \left((I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2 \right)} + \frac{1}{2I_4^2} + \right. \right. \\ \left. \left. I_3 \left(\frac{1}{(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right) \right) \right] \right] \\ \left. - I_4^2 \left(\frac{1}{(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right) \right) \right] \right) \\ - (I_4^2 + 2I_3^2) \left[\frac{1}{2 \left((I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2 \right)} + \frac{1}{2I_4^2} + \right. \\ \left. + I_3 \left(\frac{1}{(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right) \right) \right] \\ + I_3 I_4^2 \left[\frac{1}{(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right) \right]$$

ou de façon condensée:

$$L_4 = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{I_j^2 - 2I_3 I_j + I_4^2}{I_4^2} \right)^2 + \frac{3I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) \\ + \frac{(I_4^2 - 4I_3^2)}{2} \left(\frac{1}{\left((I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2 \right)} - \frac{1}{I_4^2} \right) \\ + \frac{(4I_3^3 - 3I_3 I_4^2)}{2(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\left(\frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right)$$

En substituant les expressions de L_1 , L_2 et L_4 dans l'équation l'intégrale D s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 D(i, j) = & I_1 \left(\frac{1}{4} \ln \left(\frac{I_j^2 - 2I_3 I_j + I_4^2}{I_4^2} \right) + \frac{3I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) \right) \\
 & + \frac{(I_4^2 - 4I_3^2)}{2} \left(\frac{1}{((I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} - \frac{1}{I_4^2} \right) \\
 & + \frac{(4I_3^3 - 3I_3 I_4^2)}{2(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\left(\frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right) \\
 - 2I_2 & + 2I_3 \left(\frac{1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2((I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} + \frac{1}{2I_4^2} \right. \\
 & \left. + \frac{I_3}{2(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\left(\frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right) \right) \\
 - \frac{I_4^2}{2(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} & \left(\left(\frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right) \\
 + I_5 & \left(- \frac{1}{2((I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} + \frac{1}{2I_4^2} \right. \\
 & \left. + \frac{I_3}{2(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\left(\frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right) \right)
 \end{aligned}$$

Finalement:

$$\begin{aligned}
 M(i, j) = & \frac{I_1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) \\
 & + (I_2 - I_1 I_3) \left(\frac{1}{((I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} - \frac{1}{I_4^2} \right) \\
 & + \frac{(I_5 + 2I_1 I_3^2 - 2I_2 I_3 - I_1 I_4^2)}{2(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\left(\frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(i, j) = & \frac{I_1}{4} \ln \left(\frac{l_j^2 - 2I_3 l_j + I_4^2}{I_4^2} \right) \\
& + \frac{3I_1 I_3 - 2I_2}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) \\
& + \frac{1}{2} (I_1 I_4^2 - 4I_1 I_3^2 + 4I_2 I_3 - I_5) \left(\frac{1}{((l_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} - \frac{1}{I_4^2} \right) \\
& + \frac{(4I_1 I_3^3 + I_5 I_3 - 4I_2 I_3^2 + 2I_2 I_4^2 - 3I_1 I_3 I_4^2)}{2(I_4^2 - I_3^2)^3} \left(\left(\frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right)
\end{aligned}$$

II-3 CALCUL L'INTEGRALE R(i,j) :

On a :

$$R(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{Sj^2 \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dSj = \int_0^{l_j} \frac{Sj^2 (I_1 Sj^2 - 2I_2 Sj + I_5)}{(Sj^2 - 2I_3 Sj + I_4^2)^2} dSj$$

$$R(i, j) = I_1 \int_0^{l_j} \frac{Sj^4}{(Sj^2 - 2I_3 Sj + I_4^2)^2} dSj - 2I_2 \int_0^{l_j} \frac{Sj^3}{(Sj^2 - 2I_3 Sj + I_4^2)^2} dSj + I_5 \int_0^{l_j} \frac{Sj^2}{(Sj^2 - 2I_3 Sj + I_4^2)^2} dSj$$

$$R(i, j) = I_1 L_5 - 2I_2 L_4 + I_5 L_1 \quad (II-3)$$

Les integrales L_1 et L_4 ont été déjà calculée dans $D(i, j)$ et $L(i, j)$, donc on va calculer L_5 suivant la valeur du terme $I_4^2 - I_3^2$:

PREMIER CAS : $I_4^2 - I_3^2 = 0$

$$L_5 = \int_0^{l_j} \frac{Sj^4}{(Sj - I_3)^2} dSj = \int_0^{l_j} \frac{Sj^4 - 4I_3 Sj^2 + 6I_3^2 Sj^2 - 4I_3^3 Sj + I_3^4}{(Sj - I_3)^2} dSj + 4I_3 I_4 - 6I_3^2 L_4 + 4I_3^3 I_2 - I_3^4 I_3$$

$$\begin{aligned}
L_5 = & l_j + 4I_3 \ln \left(\left| \frac{l_j - I_3}{-I_3} \right| \right) - 12 \left(\frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) - 6I_3^2 \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^2} + \frac{1}{I_3^2} \right) - \frac{4}{3} I_3^4 \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) \\
& + 6I_3^2 \left(\frac{1}{(l_j - I_3)} + \frac{1}{I_3} \right) + 4I_3^3 \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^2} + \frac{1}{I_3^2} \right) + 2I_3^4 \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) + \frac{I_3^4}{3} \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right)
\end{aligned}$$

Donc finalement $R(i,j)$ s'écrit:

$$R(i,j) = I_1 l_j + 2(2I_1 I_3 - I_2) \ln \left(\left| \frac{l_j - I_3}{-I_3} \right| \right) + [6I_3(l_2 - I_1 I_3) - I_5] \left(\frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) \\ + [I_3(3I_2 I_3 - 2I_1 I_3^2 - I_5)] \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right) + \frac{I_3^2}{3} (2I_2 I_3 - I_1 I_3^2 - I_5) \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^3} - \frac{1}{I_3^3} \right)$$

SECOND CAS : $I_4^2 - I_3^2 > 0$

on a:

$$L_5 = \int_0^{l_j} \frac{Sj^4}{(Sj^2 - 2I_3 Sj + I_4^2)^2} dSj = \int_0^{l_j} \frac{Sj^4 - 2I_3 Sj^3 + I_4^2 Sj^2}{(Sj^2 - 2I_3 Sj + I_4^2)^2} dSj + 2I_3 I_4 - I_4^2 L_1$$

$$L_5 = \int_0^{l_j} \frac{Sj^2}{Sj^2 - 2I_3 Sj + I_4^2} dSj + 2I_3 I_4 - I_4^2 L_1$$

$$L_5 = l_j + I_3 \int_0^{l_j} \frac{2(Sj - I_3)}{Sj^2 - 2I_3 Sj + I_4^2} dSj - I_4^2 \int_0^{l_j} \frac{dSj}{Sj^2 - 2I_3 Sj + I_4^2} + 2I_3^2 \int_0^{l_j} \frac{dSj}{Sj^2 - 2I_3 Sj + I_4^2} + 2I_3 I_4 - I_4^2 L_1$$

$$L_5 = l_j + I_3 \ln \left(\frac{(l_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)}{I_4^2} \right) + \frac{2I_3^2 - I_4^2}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right)$$

$$\left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{(l_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)}{I_4^2} \right) + \left(\frac{I_4^2 - 4I_3^2}{2} \right) \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} - \frac{1}{I_4^2} \right) \right) \\ + 2I_3 \left(\frac{4I_3^3 - 3I_3 I_4^2}{2(I_4^2 - I_3^2)} \left(\frac{l_j - I_3}{(l_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} + \frac{I_3}{I_4^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \frac{I_3 I_4^2 - I_3^3}{(I_4^2 - I_3^2)^2} \left(\operatorname{arctg} \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) \\ - I_4^2 \left(\frac{I_4^2}{(I_4^2 - I_3^2)^2} \left(\operatorname{arctg} \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \left(\frac{I_3}{(l_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} - \frac{I_3}{I_4^2} \right) \right) \\ \left. + \left(\frac{2I_3^2 - I_4^2}{2(I_4^2 - I_3^2)} \right) \left(\frac{l_j - I_3}{(l_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} + \frac{I_3}{I_4^2} \right) \right)$$

après substitution on trouve:

$$L_5 = l_j + 2I_3 \ln \left(\frac{(l_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)}{I_4^2} \right) + \left(\frac{4I_3^3 - 2I_3^2 I_4^2 + \frac{1}{2} I_4^2}{(I_4^2 - I_3^2)} \right) \left(\frac{l_j - I_3}{(l_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} + \frac{I_3}{I_4^2} \right)$$

$$+ \left(\frac{6I_3^2 I_4^2 - 4I_3^4 - \frac{3}{2} I_4^4}{(I_4^2 - I_3^2)^2} \right) \left(\operatorname{arctg} \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right)$$

$$+ (2I_3 I_4^2 - I_3^3) \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} - \frac{1}{I_4^2} \right)$$

en substituant les expressions de L_5 , L_4 et L_1 dans l'équation (II-3) on obtient :

$$R(i, j) = I_1 \left[l_j + 2I_3 \ln \left(\frac{(l_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)}{I_4^2} \right) + \left(\frac{4I_3^3 - 2I_3^2 I_4^2 + \frac{1}{2} I_4^2}{(I_4^2 - I_3^2)} \right) \left(\frac{l_j - I_3}{(l_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} + \frac{I_3}{I_4^2} \right) \right.$$

$$+ \left(\frac{6I_3^2 I_4^2 - 4I_3^4 - \frac{3}{2} I_4^4}{(I_4^2 - I_3^2)^2} \right) \left(\operatorname{arctg} \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right)$$

$$\left. + (2I_3 I_4^2 - I_3^3) \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} - \frac{1}{I_4^2} \right) \right]$$

$$- 2I_2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{(l_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)}{I_4^2} \right) + \left(\frac{I_4^2 - 4I_3^2}{2} \right) \left(\frac{1}{(l_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} - \frac{1}{I_4^2} \right) \right.$$

$$+ \left(\frac{4I_3^3 - 3I_3 I_4^2}{2(I_4^2 - I_3^2)} \right) \left(\frac{l_j - I_3}{(l_j - I_3)^2 + (I_4^2 - I_3^2)} + \frac{I_3}{I_4^2} \right)$$

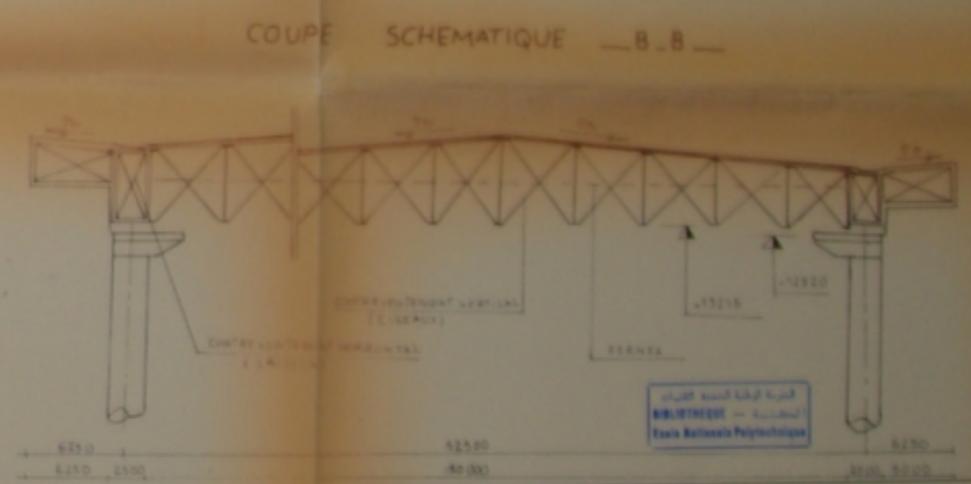
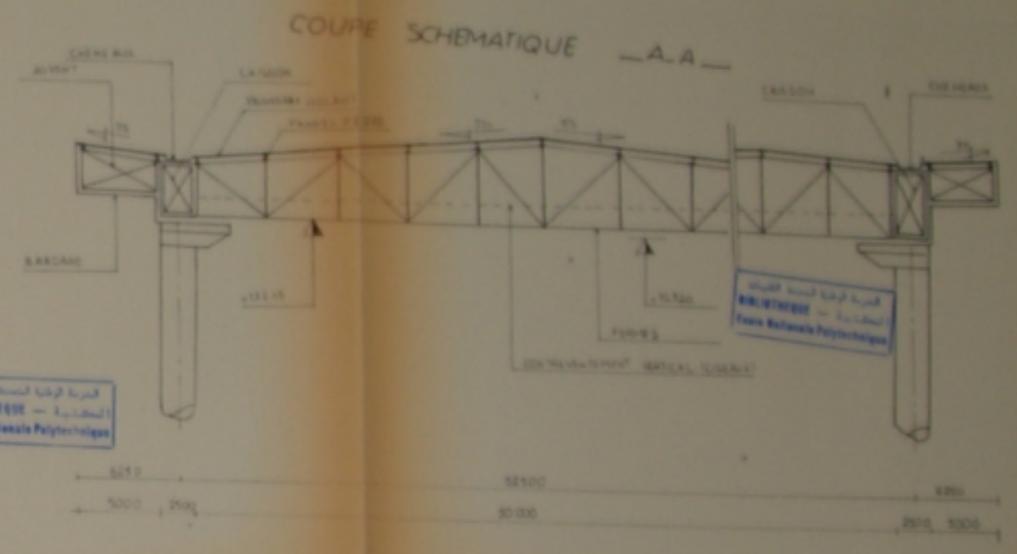
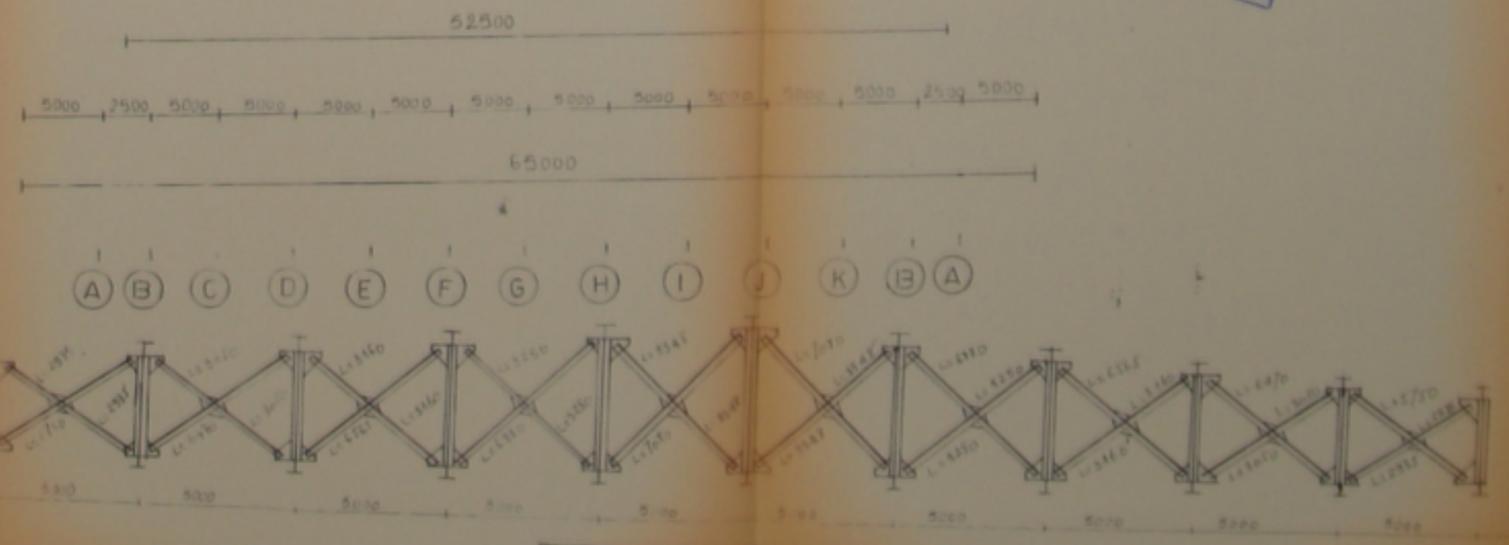
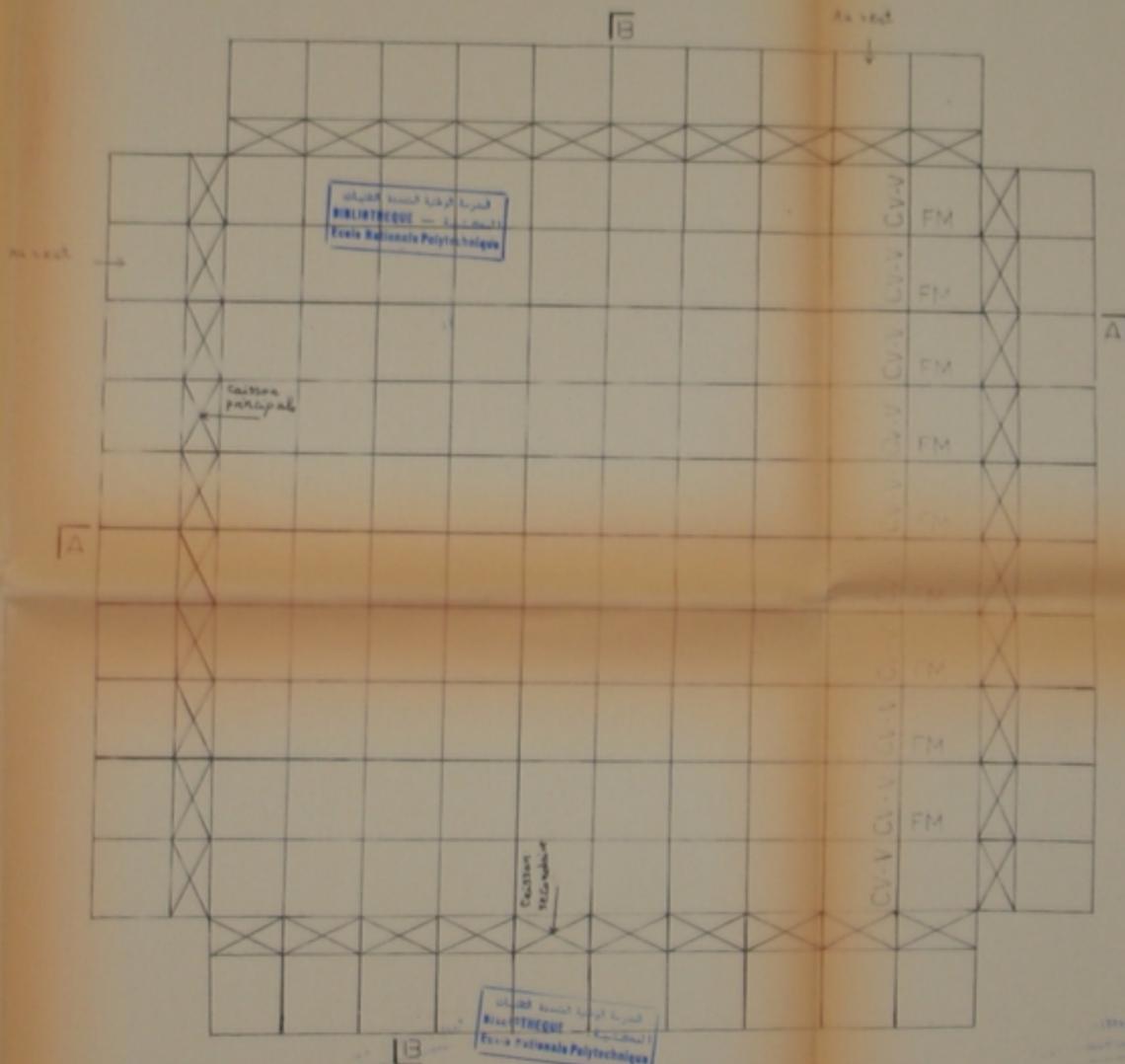
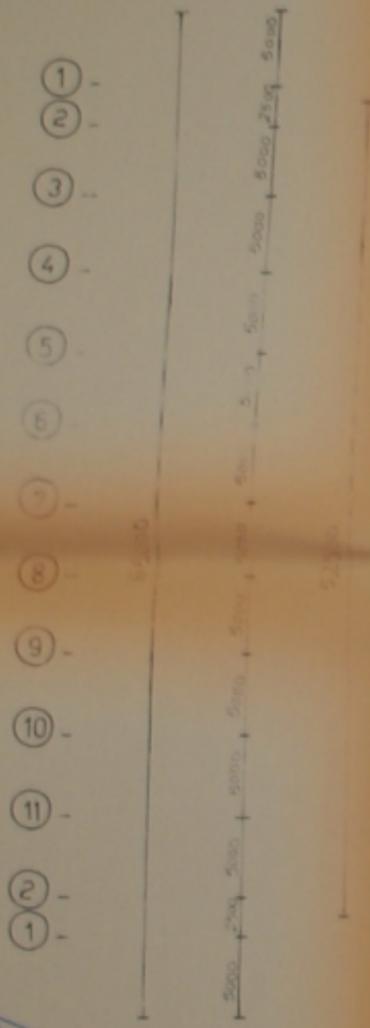
$$\left. + \frac{3}{2} \frac{I_3 I_4^2 - I_3^3}{(I_4^2 - I_3^2)^2} \left(\operatorname{arctg} \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right] + I_5 I_4$$

Finalement on obtient:

$$\begin{aligned}
R(i, j) = & I_1 I_j + (2I_1 I_3 - I_2) \pi \left(\frac{I_j^2 - 2I_3 I_j - I_4^2}{I_4^2} \right) \\
& + \frac{\left(6I_1 I_3^2 I_4^2 - 4I_1 I_3^4 - \frac{3}{2} I_1 I_4^4 - 3I_2 I_4^2 I_3 + 2I_2 I_3^3 + \frac{I_5 I_4^2}{2} \right)}{(I_4^2 - I_3^2)^3} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right] \\
& + (2I_3 I_4^2 I_1 - I_3^3 - I_2 I_4^2 + 4I_2 I_3^2 - I_5 I_3) \left(\frac{1}{(I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2} - \frac{1}{I_4^2} \right) \\
& + \frac{4I_1 I_3^4 - 2I_3^2 I_4^2 I_1 + \frac{I_4^2 I_1}{2} + 3I_2 I_4^2 I_3 + \frac{I_5}{2} (2I_3^2 - I_4^2)}{I_4^2 - I_3^2} \left(\frac{I_j - I_3}{(I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2} + \frac{I_3}{I_4^2} \right)
\end{aligned}$$

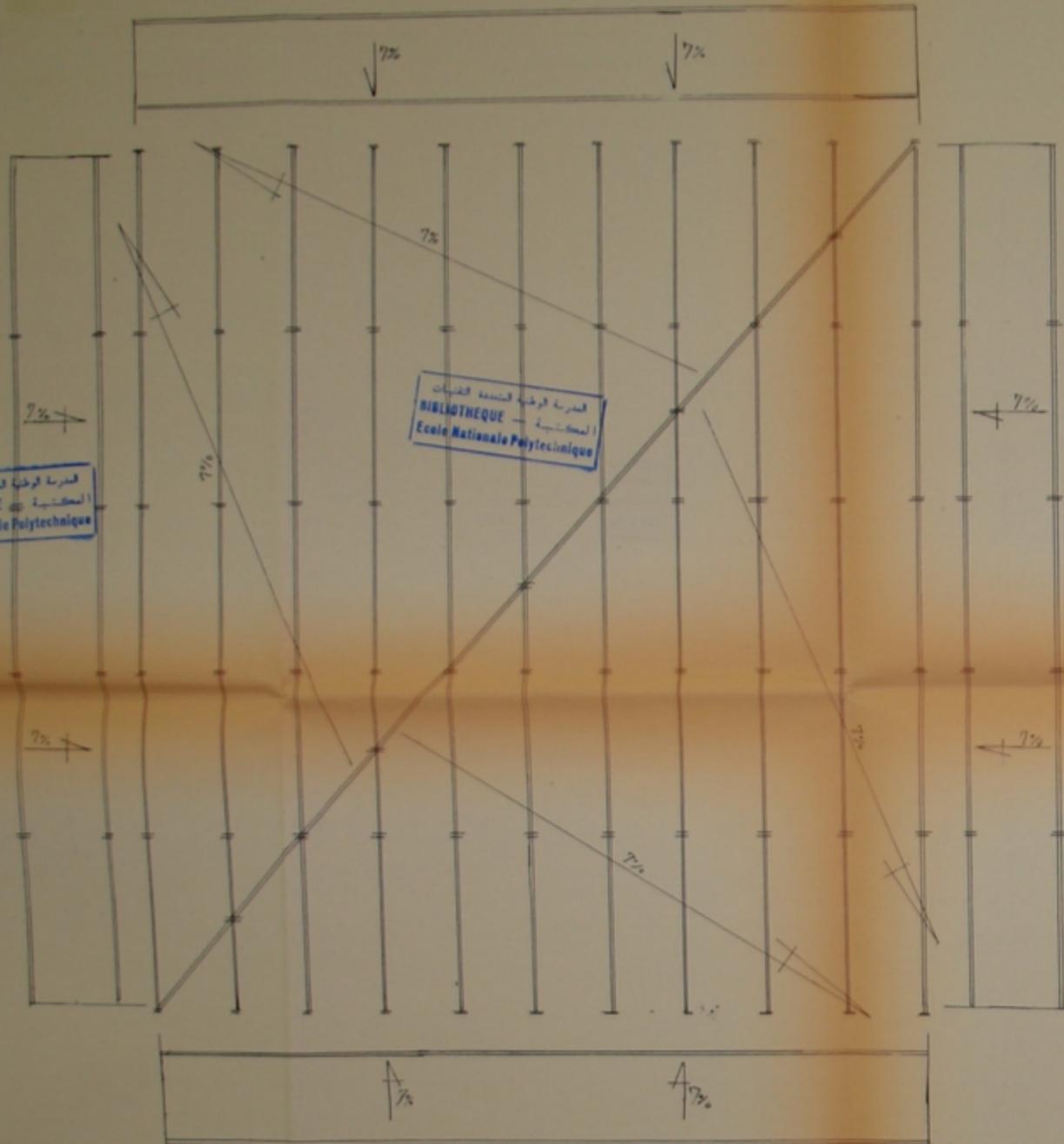
317
26/10094

VUE EN PLAN DE LA COUVERTURE
schéma de repérage éch 1/250

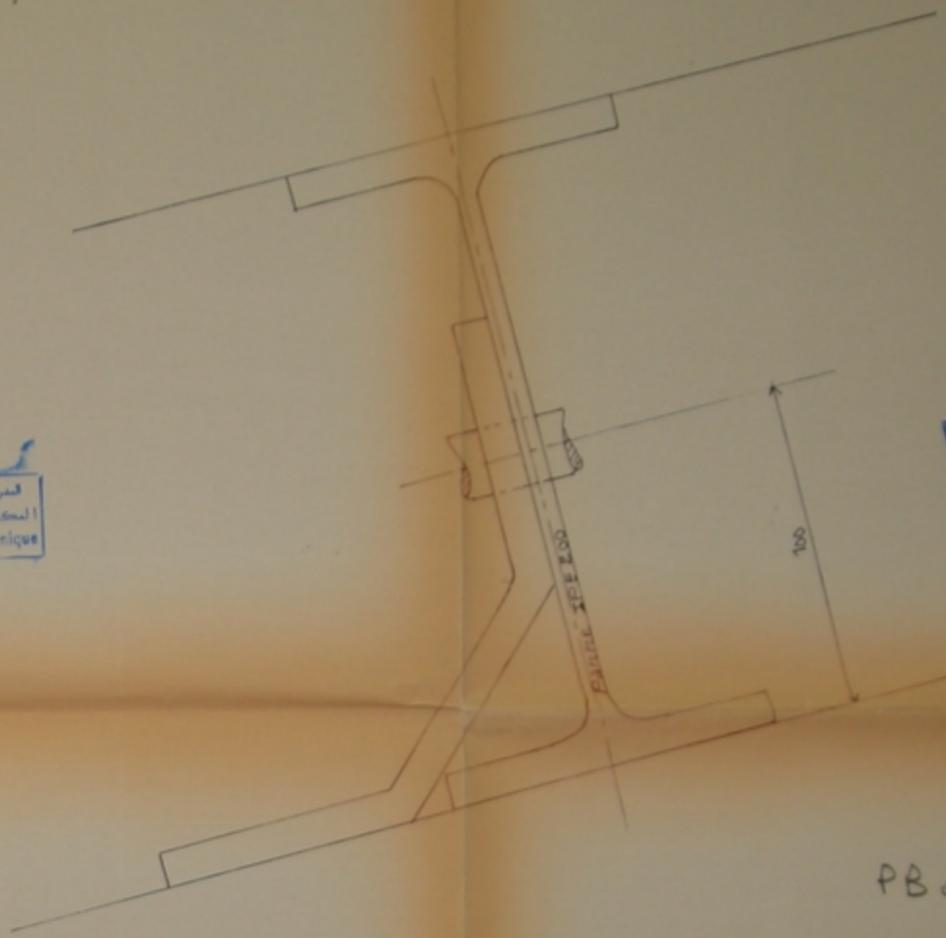


Ecole nationale polytechnique	
département de Genie - civil	
projet de fin d'études promotion 94-95	calcul et conception d'une salle omnisport en C-M sur des appuis en B-A
Proposé par C.T.C	
dirigé par: L. LEFKI	éch 1/125
étudié par:	1/250
S-IBRAHIMI H-BOUHOUCHE	désignation N:03
Vue en plan de la couverture	
- Ciseaux	
- Coupes schématiques	

المكتبة
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique



POSE DES PANNES SUR FERMES éch 1/250



PB 007/95
N° 03

المدرسة الوطنية للتكنولوجيا
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية للتكنولوجيا
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

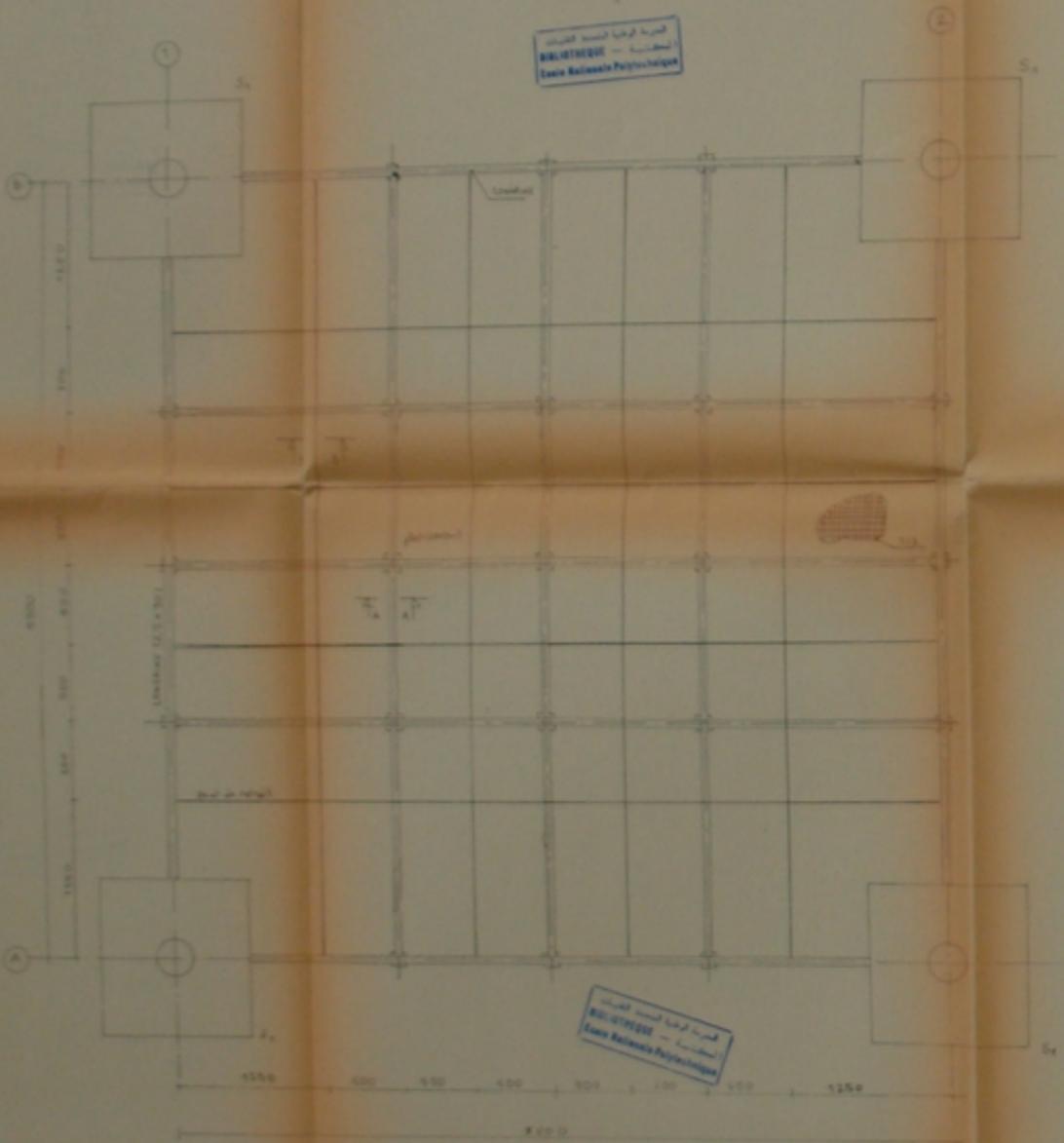
المدرسة الوطنية للتكنولوجيا
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية للتكنولوجيا
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية للتكنولوجيا
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية للتكنولوجيا
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

ecole nationale polytechnique	
département de Genie - civil	
projet de fin d'études promotion: 94 95	calcul et conception d'une salle omnisport en C-M sur des appuis en IB-A
proposé Par C.T.C	
dirigé Par: L-LEFKI	éch 1/250
étudié Par: S-IBRAHIMI H-BOUHOUCHE	désignation N°: 04
Pose des Pannes sur fermes	

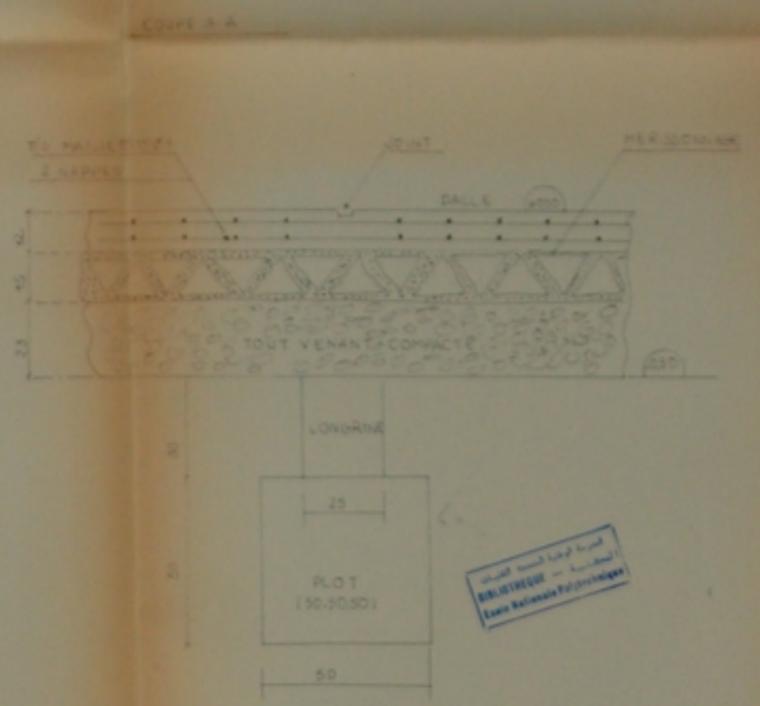


المعهد الوطني للتكنولوجيا
BIBLIOTHÈQUE - المكتبة
École Nationale Polytechnique

المعهد الوطني للتكنولوجيا
BIBLIOTHÈQUE - المكتبة
École Nationale Polytechnique

المعهد الوطني للتكنولوجيا
BIBLIOTHÈQUE - المكتبة
École Nationale Polytechnique

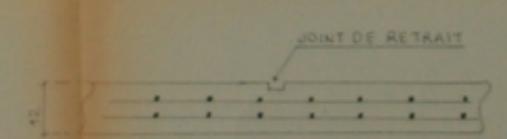
المعهد الوطني للتكنولوجيا
BIBLIOTHÈQUE - المكتبة
École Nationale Polytechnique



المعهد الوطني للتكنولوجيا
BIBLIOTHÈQUE - المكتبة
École Nationale Polytechnique

المعهد الوطني للتكنولوجيا
BIBLIOTHÈQUE - المكتبة
École Nationale Polytechnique

COUPE B-B



المعهد الوطني للتكنولوجيا
BIBLIOTHÈQUE - المكتبة
École Nationale Polytechnique

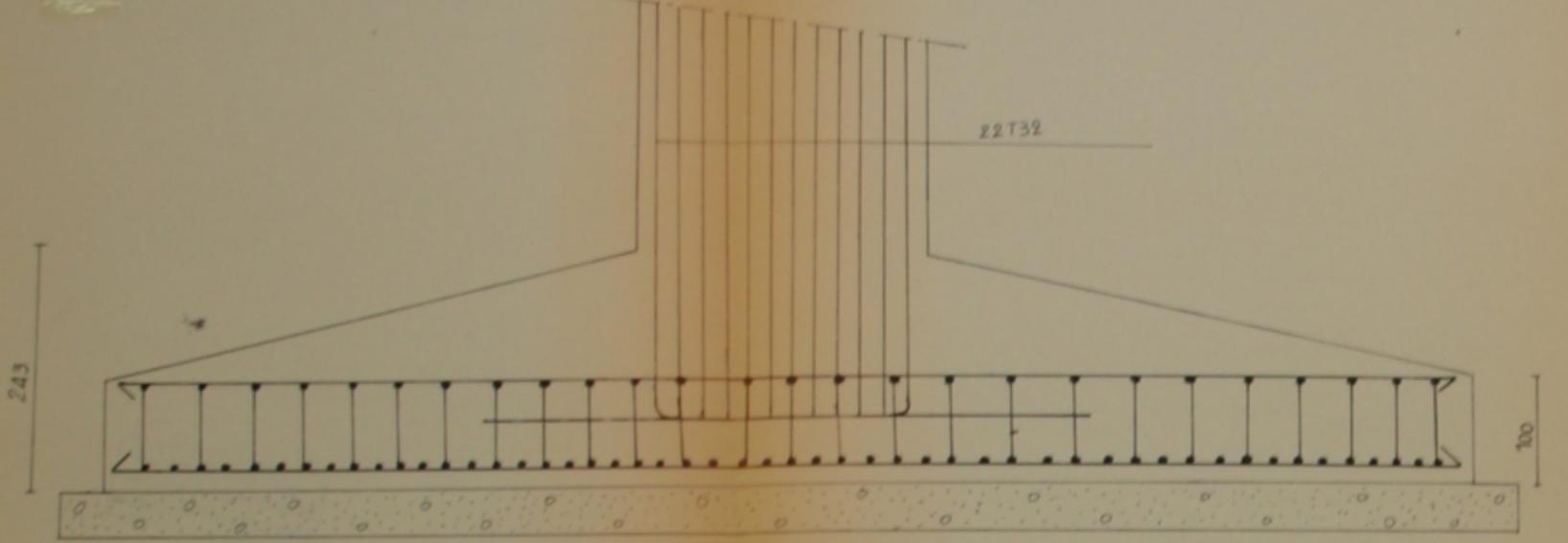
المعهد الوطني للتكنولوجيا
BIBLIOTHÈQUE - المكتبة
École Nationale Polytechnique

NDIA
BETON ARME DOSE A 300KG/M³ C/30
BETON DE PROPRETE DOSE A 200KG/M³ C/25
BETON DES RESERVATIONS DOSE A 400KG/M³ C/40
PREVOIR DES JOINTS DE RETRAIT TOUT LES 20M

PB.007/95

N34

école nationale polytechnique	
departement de Genie - Civil	
projet de fin d'études promotion: 94-95	calcul et conception d'une salle omnisport en C-M sur des appuis en B-A
proposé par C.T.C	
dirigé par: L-LEFKI	éch 1/200
étudié par: S. BRAHINI H. BOUHOUCHE	désignation N°: 05 Implantation et coupes

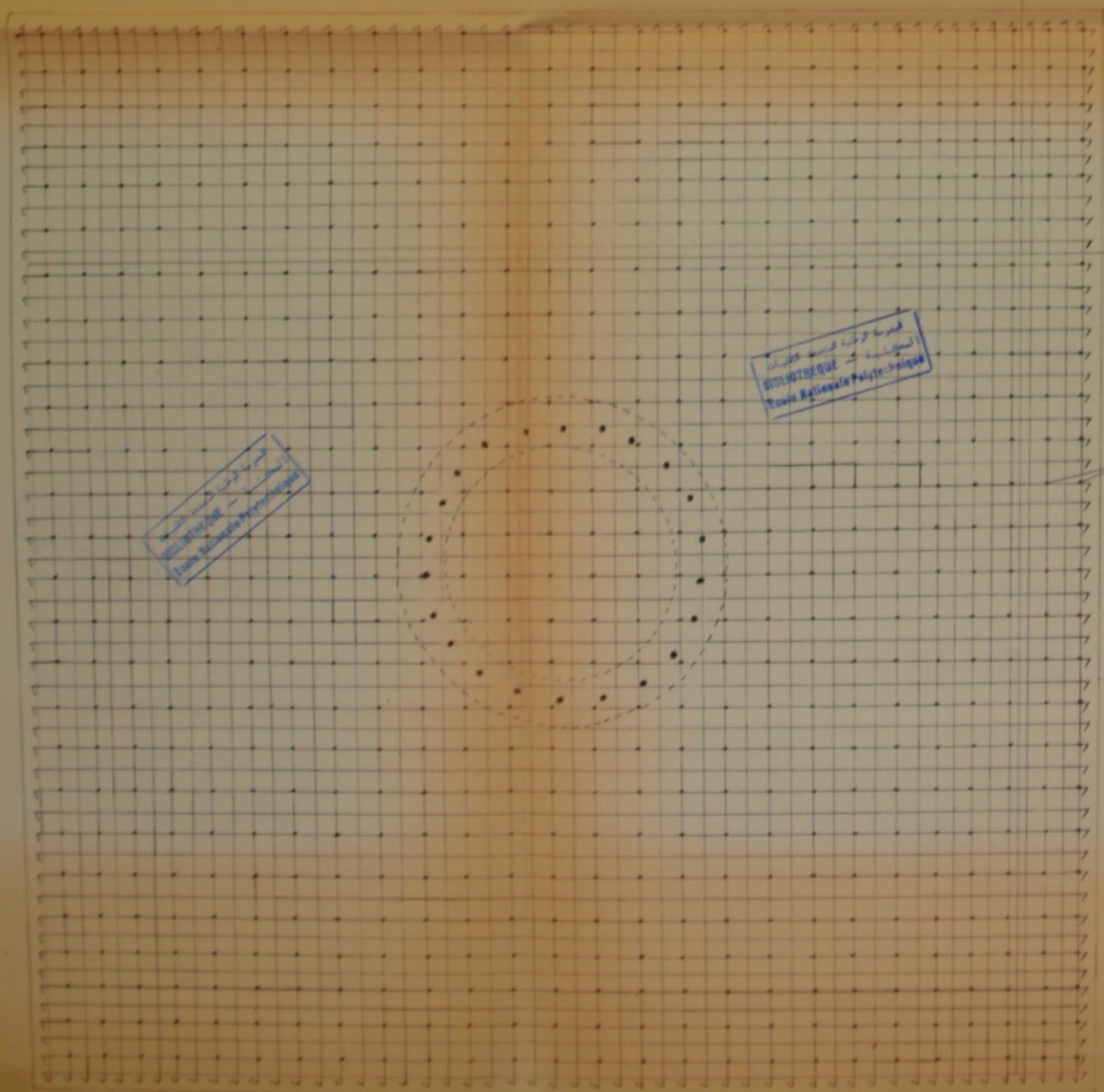


المكتبة - المكتبة
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

المكتبة - المكتبة
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

52 T 32 (esp = 20cm)

المكتبة - المكتبة
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique



المكتبة - المكتبة
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

المكتبة - المكتبة
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

52 T 32 (esp = 20cm)

26 T 20

المكتبة - المكتبة
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PB 007/95
N: 5

école nationale polytechnique	
département de Genie - civil	
projet de fin d'études promotion: 94 95	calcul et conception d'une salle omnisport en C-M sur des appuis en B-A
proposé par C.T.C	
dirigé par: L-LEFKI	éch 1/25
étudié par: S-IBRAHIMI H-BOUHOUCHE	désignation N°: 06
Fondations	