

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT *Mécanique*

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

*Modélisation par la méthode des disc.
continues de déplacement des milieux
multicouches élastiques et viscoélastiques*

Proposé par :
Y. BELKACEMI

Etudié par :
M. GHOUALI

Dirigé par :
Y. BELKACEMI

PROMOTION : 1992

DEDICACES

J'offre ce présent travail à tous ceux que j'aime :

- A commencer par mes parents qui, j'espère, trouveront le fruit de leurs amours et leurs souffrances pour moi;
- A mon frère et mes soeurs, à ma famille, à mes amis, à mon entourage et tous ceux qui ont vécu avec Mohamed les pires et heureux moments de sa vie;.
- A une Algerie unie, prospère, et exemplaire;
- A tous ceux qui veulent exister pour réfléchir et progresser, et pour qui la science est vitale .

REMERCIEMENTS

"Ne connaîtra la foi que celui qui aimerait pour son frère,
ce qu'il aimerait pour soi" Hadith

"Etre bon à rien, c'est n'être bon qu'à soi" proverbe

juse de ces paroles sages et expressives pour remercier
tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail,
que cela soit de près ou de loin, ne serait-ce que par de
vives reflexions .

J'en profite pour dire un "GREAT THANKS" à mon exemplaire
promoteur Mr Y.BELKACEMI, qui a su mener à de très bonnes
fins mes sincères efforts, et dont les conseils m'étaient
et restront très bénéfiques

Cela dit, je salue vivement messieurs, Nesnes, Herour,
Sahnoun, S.GUÉRAK, pour leurs gentils conseils.

Enfin, à tous ceux qui ont voulu que Mohamed réussisse,
je citerai en particulier M.Aouchiche, M.Lebib, H.Nouioua
je dirai MILLE MERCI .

M.A.GHOUALI

- ملخص -

الهدف من الإبتاخر هو حل المسائل المتعلقة بالأوساط
التعددة الطبقات ذات تصرف مرنة خطية وتصرف
لزجة ومرنة خطية وذلك باستعمال إحدى طرق
المعادلات التفاضلية الغير مباشرة، والتي تمثل
في "طريقة الإنقطاعات الإستقرائية".

- RESUME -

L'objet de ce travail est la résolution des problèmes liés aux milieux multicouches ayant un comportement élastique lineaire et viscoélastique lineaire (fluage et relaxation), respectivement, et cela en utilisant une méthode d'équations integrales de frontière indirecte, en l'occurrence la méthode des discontinuités de déplacement .

- ABSTRACT -

This work consists in the resolution of problems referring to stratified (multi-layered) that have linear elasticity and linear viscoelasticity (creep, relaxation) behaviour by using an indirect boundary integral equations, the displacement discontinuity method one .

SOMMAIRE

I- INTRODUCTION

II- RAPPELS THEORIQUES D'ELASTICITE

II.1- ELASTICITE LINEAIRE

II.2- ELASTICITE ANISOTROPE

III- METHODE DE DISCONTINUITÉ DE DEPLACEMENT : M.D.D

III.1- INTRODUCTION

III.2- PROBLEME INTERIEUR / PROBLEME EXTERIEUR

III.3- CONVENTION DE SIGNE

III.4- METHODE DIRECTE / METHODE INDIRECTE

III.5- METHODE DE DISCONTINUITÉ DE DEPLACEMENT

III.6- CONDITIONS DE SYMETRIE

III.7- MOUVEMENT DE CORPS RIGIDE

IV- MILIEUX MULTICOUCHES .

APPLICATION DE LA M.D.D AUX MILIEUX MULTICOUCHES

IV.1- GENERALITES

IV.2- APPLICATION DE LA M.D.D AUX MULTICOUCHES

IV.3- EXEMPLES

V- VISCOELASTICITE LINEAIRE

v .1 INTRODUCTION

v .2 COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE UNIAXIAL

v .3 MATERIAUX NON VIEILLISSANT

v .4 FORMULES DE BOLTZMANN

v .5 COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE TRIDIMENSIONNEL

v .6 TRANSFORME DE LAPLACE

v .7 PRINCIPE DE CORRESPONDANCE

v .8 MODELES RHEOLOGIQUES POUR LE COMPORTEMENT

v .9 VISCOELASTIQUE UNIAXIAL

VI- APPLICATION DE LA M.D.D AUX MILIEUX MULTICOUCHES
VISCOELASTIQUES. PROBLEME DE FLUAGE ET DE RELAXATION

VI .1 PROBLEME DE FLAGE

VI .2 PROBLEME DE RELAXATION

VI .3 EXEMPLES

VII- CONCLUSION

VII- ANNEXE



I-INTRODUCTION

Representant une source d'idée ,l'ingenieur tend toujours à rendre efficaces et performantes les richesses naturelles qui l'entourent ,en exploitant au mieux celles-ci et avec les techniques les plus avancées.

En effet, c'est son esprit créatif remarquable, qui a fait de l'industrie , colonne vertèbrale de l'économie de tout pays ce qu'elle en est aujourd'hui .Plus que cela ,ce secteur se montre de plus en plus exigeant, surtout dans des domaines tels que l'aéronautique ,l'espace, la navigation, où le droit à l'erreur est impardonnable du fait que tout se calcule à la seconde ,et où l'ingenieur est amené à mettre en relief tout son savoir faire.

Ce souci a permis, entre autres, aux matériaux composites, en général ,et aux stratifiés ou multicouches, qui n'en sont qu'un cas particulier, de marquer leur présence, sinon s'imposer ,dans des applications pratiques aussi importantes que celles citées ci dessus, et cela grâce à leurs propriétés très caractéristiques, telles que, leur stabilité à la corrosion ,leur facilité de mise en oeuvre,leur grande resistance, ainsi que leur force d'adaptation , sans pour cela oublier leurs hautes performances, d'œs essentiellement, à leurs propriétés mécaniques spécifiques trop élevés, ainsi qu'à leurs remarquable isolation thermique et sonore.

Cela dit, nous allons consacrer notre étude à ce genre de matériaux ,et aux problèmes pratiques qu'ils rencontrent .

A cette fin ,on a choisi, la MDD ,méthode des discontinuités des déplacements ,comme outil numérique pour la résolution de ces problèmes en essayant d'approximer au mieux leurs solutions analytiques ,et cela à travers les solutions numériques qu'on obtient.

II-RAPPELS THEORIQUES SUR L'ELASTICITE

I-ELASTICITE LINEAIRE:

1-EQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ELASTICITE:

Supposant un corps élastique, linéaire, isotrope, défini par un domaine Ω , délimité par une frontière $\partial\Omega$.

Il existe deux façons de procéder pour la résolution d'un problème d'élasticité suivant que les déplacements sont connus ou pas.

Les équations nécessaires pour cela, sont en tout point :

1.1-Equations Déformation-déplacement :(éq cinématiques)

$$\varepsilon_{i,j} = 1/2 (U_{i,j} + U_{j,i}) \dots(1)$$

On supposera les déformations infinitésimales.

1.2-Equations Contraintes-déformations :(éq constitutives)

Définies par la célèbre loi de HOOKE :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \dots(2)$$

qui par le biais de transformations donnera:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{pp} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \dots(3)$$

λ, μ coefficients de LAME : $\lambda = 2\nu G / (1-2\nu)$; $\mu = E / 2(1+\nu)$

1.3-Equations d'équilibre: (problème d'élastostatique)

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \dots(4)$$

On est donc en présence de quinze (15) équations à quinze (15) inconnues : $6\sigma, 6\varepsilon, 3u$

Si les fonctions de déplacements ne sont pas incluses explicitement comme inconnues, on aura recours aux équations de compatibilité qui s'écrivent en notation indicielle :

$$C_{ij,km} + C_{km,ij} - \epsilon_{ik,jm} - \epsilon_{jm,ik} = 0 \quad (5)$$

et donc un système de douze (12) équations à douze (12) inconnues.

On voit que la résolution d'un problème d'élasticité revient à résoudre un système d'équations aux dérivées partielles et pour ce faire on aura besoin des conditions aux limites, qui sont, pour un problème général d'élastostatique, sous forme de trois (3) types de problèmes .

a-Problème de DIRICHLET : (ou problème du type 1)

On se donne un champ de déplacement (3 composantes) en tout point de la frontière, qui constitue les données aux limites de ce problème .

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Les inconnues du problème sont :

- Le champ de σ et de ϵ à l'intérieur du domaine et sur la frontière.
- Le champ de déplacement à l'intérieur du domaine .

b-Problème de NEWMAN : (ou problème du type 2)

Le champ de contrainte (3 composantes) est imposé en tout point de la frontière .

$$t_i = \bar{t}_i \quad \text{sur } \partial\Omega \quad ; \quad \bar{t}_i = \sigma_{ij} n_j$$

Les inconnues sont :

- ϵ_{ij}, U_i dans Ω et sur $\partial\Omega$
- σ_{ij} dans Ω

c-Problème mixte : (ou de type 3)

On considère la frontière $\partial\Omega$ composée de deux parties :

$$\partial\Omega = (\Sigma_1) \cup (\Sigma_2) \quad \text{avec } \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$$

Les données aux limites sont :

$$\begin{array}{l} t_i = \bar{t}_i \quad \text{sur } (\Sigma_1) \\ u_i = \bar{u}_i \quad \text{sur } (\Sigma_2) \end{array} \quad \text{ou bien} \quad \left[\begin{array}{l} t_i = \bar{t}_i \quad \text{sur } (\Sigma_2) \\ u_i = \bar{u}_i \quad \text{sur } (\Sigma_1) \end{array} \right]$$

Dés lors les fonctions inconnues sont :

$$\begin{array}{l} \sigma_{ij} \text{ sur } (\Sigma_2) \text{ et dans } \Omega \\ u_{ij} \text{ sur } (\Sigma_1) \text{ et dans } \Omega \end{array} \quad \text{ou bien} \quad \left[\begin{array}{l} \sigma_{ij} \text{ sur } (\Sigma_1) \text{ et dans } \Omega \\ u_{ij} \text{ sur } (\Sigma_2) \text{ et dans } \Omega \end{array} \right]$$

CAS PARTICULIERS :

i) On appelle **problème homogène** associé à un problème donné, le problème dans lequel les données dans (Ω) et les données aux limites sur $(\partial\Omega)$ sont identiquement nulles .

ii) Ainsi un problème homogène associé à un problème du type (1) est un problème du type (1) dont les données sont :

σ_{ij} est nulle sur tout le domaine .

U sont nulles en tout point de la frontière .

iii) On est en présence d'un problème mixte régulier, ou problème de **ROBIN**, si et seulement si :

-Les données aux limites sur la frontière portent soit sur t_i soit sur u_i .

-Ces données assurent que pour le problème homogène associé au problème considéré , le produit scalaire $(t_i \cdot u_i)$ est identiquement nul en tout point de la frontière $\partial\Omega$

$$t \cdot U = t U + t U + t U = 0. \quad (6)$$

La solution d'un problème homogène régulier est unique . Résoudre un problème faisant intervenir quinze (15) équations à quinze (15) inconnues n'est pas chose facile, par conséquent on optera pour une formulation du même problème en fonction d'un nombre inférieur d'équations et d'inconnues et cela suivant deux (2) approches .

Approche basée sur les déplacement :

Les inconnues principales sont les composantes du champ déplacement en substituant (3) dans (4) on obtient :

$$\lambda \varepsilon_{pp,i} + 2\mu \varepsilon_{ij,j} + f_i = 0 \quad (\mu = G) \dots (7)$$

Substitution de (1) dans (7) donne :

$$\varepsilon_{pp} = u_{p,p} \Rightarrow \varepsilon_{pp,i} = u_{p,pi} \quad (8)$$

et donc :

$$\varepsilon_{ij,j} = 1/2 (u_{i,pp} + u_{p,pi}) \quad (9)$$

$$(\lambda + \mu) u_{p,pi} + \mu u_{i,pp} + f_i = 0 \quad (10)$$

$$[(\lambda + \mu)/\mu] u_{p,pi} + u_{i,pp} + (1/\mu) f_i = 0 \quad (11)$$

Ce système s'écrit sous la forme vectorielle suivante :

$$[(\lambda + G)/\mu] \nabla (\nabla u) + \nabla^2 u + (1/G) u = 0 \quad (12)$$

Ce système est un ensemble de trois (3) équations à trois (3) inconnues u_i . Cette équation est connue sous le nom de l'équation de LAME NAVIER (en MDF de NAVIER-STOCKES)

Approche basée sur les contraintes :

Les inconnues principales sont les contraintes. En passant par les équations de compatibilité en terme de contraintes on aboutit à l'équation suivante :

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + [1/(1+\sigma)] \sigma_{pp,ij} - [\nu/(1+\nu)] \delta_{ij} \nabla^2 \sigma_{pp} = -f_{i,j} - f_{j,i} \quad (13)$$

or :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,ji} &= [(1-\nu)/(1+\nu)] \nabla^2 \sigma_{pp} \\ \sigma_{ij,ji} &= -f_{i,i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla^2 \sigma_{pp} = -[(1+\nu)/(1-\nu)] f_{i,i}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \sigma_{pp} = -[(1+\nu)/(1-\nu)] \nabla f$$

En substituant dans (13) on aboutit à :

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + [1/(1+\nu)] \sigma_{pp,ij} = -[\nu/(1-\nu)] \delta_{ij} \nabla f - f_{i,j} - f_{j,i} \quad (14)$$

connue sous le nom de l'équation de BELTERAM(1892)-MICHELL(1899)
Soient, finalement les équations de l'élastostatique en termes de contraintes

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + [1/(1+\nu)] \sigma_{pp,ij} = [\nu/(1-\nu)] \delta_{ij} \nabla f - f_{i,j} - f_{j,i} \quad (15a)$$

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (15b)$$

2-PROBLEMES D'ELASTICITE PLANE OU BIDIMENSIONNELS :

Ce sont les problèmes en déformation planes et ceux en contraintes planes qui permettent des équations encore plus simplifiées .

2.1-Etat de déformations planes :

Cet état existe, si la composante u_3 du vecteur déplacement est nulle, et les composantes u_1 et u_2 sont indépendantes de la direction (axe) X_3 on aura :

$$\epsilon_{33} = \epsilon_{13} = \epsilon_{31} = \epsilon_{23} = \epsilon_{32} = 0 \quad (16)$$

Cet état peut être visualisé en considérant une plaque mince chargé dans son plan (X_1, X_2), mais restreinte dans la direction Z .

On a, donc, pour un tel état seulement les relations suivantes:

$$\epsilon_{11} = \partial U_1 / \partial X_1 ; \quad \epsilon_{22} = \partial U_2 / \partial X_2 ; \quad \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = 1/2 [(\partial U_1 / \partial X_2) + (\partial U_2 / \partial X_1)] \quad (18)$$

APPROCHE CONTRAINTES

Equations contraintes-déformations:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Ou :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \lambda \epsilon_{pp} + 2G \epsilon_{11} \\ \sigma_{22} = \lambda \epsilon_{pp} + 2G \epsilon_{22} \\ \sigma_{12} = 2G \epsilon_{12} \end{cases} \quad (20)$$

Remarque : $\sigma_{33} = \lambda \epsilon_{PP} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ indépendant de X_3

Soit réciproquement :

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = [(1+\nu)/E][(1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}] \\ \epsilon_{22} = [(1+\nu)/E][-\nu\sigma_{11} + (1-\nu)\sigma_{22}] \\ \epsilon_{12} = \sigma_{12}/2G \end{cases} \quad (21)$$

On notera que la condition de compatibilité caractérisant un tel état est telle que :

$$(\partial^2 \epsilon_{11} / \partial X_2^2) + (\partial^2 \epsilon_{22} / \partial X_1^2) = 2(\partial^2 \epsilon_{12} / \partial X_1 \partial X_2) \quad (22)$$

qui par substitution conforme donnera le résultat suivant :

$$\nabla_1^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1/1-\nu)[(\partial f_1 / \partial X_1) + (\partial f_2 / \partial X_2)] \quad (23)$$

BELLERAMI-MICHELL en déformations planes .

2.2-Etat de contraintes planes

$$\begin{aligned} \text{On a : } \quad & \sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0 \\ & \epsilon_{31} = \epsilon_{32} = 0 \end{aligned}$$

1 APPROCHE CONTRAINTES :

Relation contraintes-deformations:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & \\ & & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\text{Soit : } \begin{cases} \epsilon_{11} = 1/E [\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}] \\ \epsilon_{22} = 1/E [\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}] \\ \epsilon_{12} = 1/2\gamma_{12} = (1/2G)\sigma_{12} \end{cases}$$

$$\text{avec } \epsilon_{33} = -\nu/E(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Pour cet état l'équation de BELLERAMI-MICELL exprimant l'équation de compatibilité en termes de contrainte est définie par:

$$\nabla_1^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1+\nu)[(\partial f_1 / \partial X_1) + (\partial f_2 / \partial X_2)] \quad (25)$$

11 APPROCHE DEPLACEMENT :

Les équations de NAVIER (STOCKES) pour une situation de contraintes planes s'écrivent :

$$\begin{cases} \nabla^2 u_1 + [(1+\nu/1-\nu)] \partial/\partial X_1 [(\partial u_1/\partial X_1) + (\partial u_2/\partial X_2)] + f_1/G = 0 \\ \nabla^2 u_2 + [(1+\nu/1-\nu)] \partial/\partial X_2 [(\partial u_1/\partial X_1) + (\partial u_2/\partial X_2)] + f_2/G = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Les conditions aux limites de type contraintes:

$$\begin{aligned} t_1 &= \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 \\ &= 2G/(1-\nu) [(\partial u_1/\partial X_1) + (\nu \partial u_2/\partial X_2)] n_1 + G [(\partial u_1/\partial X_2) + (\partial u_2/\partial X_1)] n_2 \\ t_2 &= \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 \\ &= G [(\partial u_1/\partial X_2) + (\partial u_2/\partial X_1)] n_1 + 2G/(1-\nu) [(\nu \partial u_1/\partial X_1) + (\partial u_2/\partial X_2)] n_2 \end{aligned} \quad (27)$$

3-PRINCIPE DE SUPERPOSITION :

"La résultante nette de la combinaison de deux états de sollicitations est la somme des deux états".

4-PROBLEME DE FLAMANT:

C'est le problème d'une ligne de force concentrée appliquée le long de l'axe Z perpendiculairement à la surface d'un demi plan élastique isotopique et dont la solution est un exemple de solution singulière en élastique .

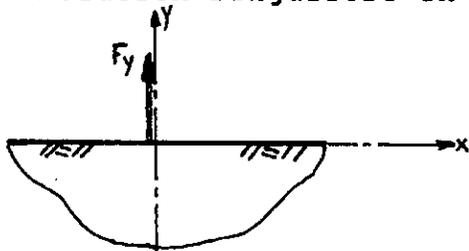


fig-3-problème de FLAMANT

On voit que les contraintes sont nulles sur la surface du plan (x,y) ,exceptée au point zero où elles sont indéterminées .Les contraintes sont singulières en ce point.

5-PROBLEME DE KELVIN (en déformation plane):

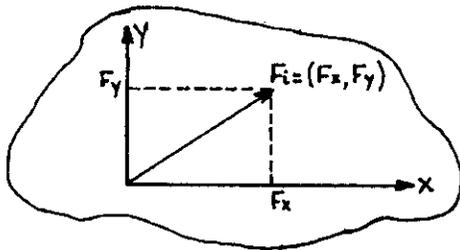


fig-4-problème de KELVIN pour un problème de déformation plane

C'est le problème d'une force concentrée en un point d'un corps infini élastique dont la solution peut servir pour obtenir des solutions analytiques à d'autres problèmes.

II-ELASTICITE ANISOTROPE:

Un corps anisotrope est un corps dont les propriétés mécaniques changent autour du point (suivant la direction).

Suivant la loi de HOOKE, il existe une relation biunivoque reliant en chaque point les six composantes du tenseur contrainte à celles du tenseur déformation, par l'intermédiaire d'une matrice symétrique, d'ordre six (06), soit donc un maximum de vingt et un (21) constantes élastiques indépendantes; un tel matériau est dit possédant des caractéristiques d'anisotropie élastique.

En général, les deux formes les plus simples d'anisotropie sont, l'orthotropie et l'isotropie transverse.

1-ORTHOTROPIE:

Un corps orthotropique peut être visualisé comme étant un prisme, composé par un réseau de trois (03) tiges mutuellement perpendiculaires, et de dimensions différentes (voir fig)

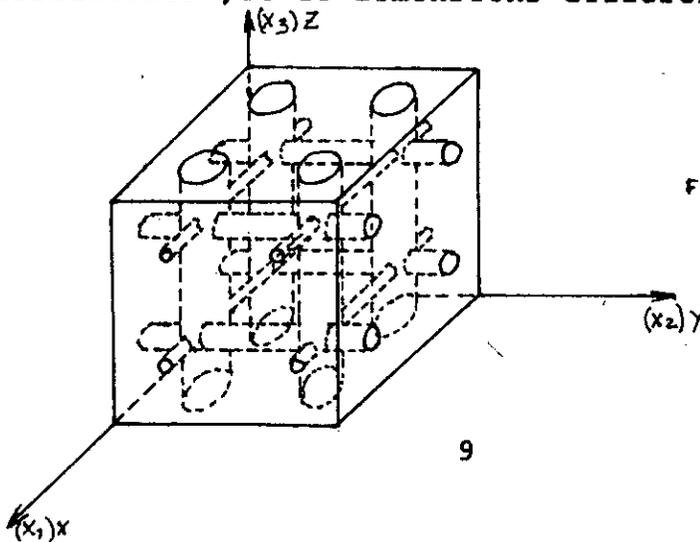


Fig- corps orthotropique

Un tel corps a des propriétés élastiques différentes suivant les (différentes) directions et donc répondra différemment aux contraintes normales et tangentielles appliquées sur chacune de ses faces .

Un matériau orthotropique a neuf (09) constantes élastiques indépendantes :

.Trois (03) constantes E_1, E_2, E_3 relient les déformations normales (ϵ_{ii}) aux contraintes normales (σ_{ii}); elles sont connues sous le nom de modules de YOUNG .

.Trois (03) autres G_1, G_2, G_3 relient les déformations tangentielles (e_{ij}) aux contraintes tangentielles (σ_{ij}); elles sont connues sous le nom de :modules de cisaillement.

.Finalement trois (03) constantes ν_1, ν_2, ν_3 , coefficients de POISSON ,reliant les déformations normales (ϵ_{ii}) dans une direction i ,aux contraintes normales dans une direction j différente .

NB : Toutes ces constantes sont des scalaires

2-ISOTROPIE TRANVERSE:

Un matériau transversalement isotrope peut être visualisé comme un matériau orthotrope ,à l'exception que deux de ses ensembles de tiges perpendiculaire composant le réseau ont la même dimension suivant deux (02) directions différentes

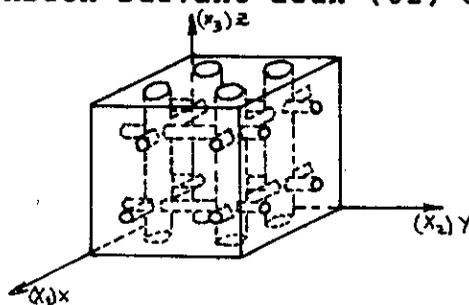


Fig - Corps isotrope transverse

L'équivalence de deux de ses directions lui permet d'avoir 5 constantes élastiques qui consistent en :

- Deux (02) modules de YOUNG
- Deux (02) coefficients de POISSON
- et un (01) module de CISAILLEMENT

Souvent , le matériau transversement isotrope est considéré comme un matériau "isotrope dans le plan" , parceque ses propriétés élastiques sont indépendantes de la direction suivant un plan .

Remarque : Un matériau isotrope est le cas limite des matériaux orthotropes et transversement isotropes , respectivement.

C'est le cas où les propriétés élastiques sont indépendantes de la direction suivant les trois plans , et les constantes élastiques se réduisent à seulement , E et ν [vu que G est fonction de ν et E ($G = E/2(1+\nu)$)] .

3-RELATIONS CONTRAINTES-DEFORMATIONS:

Partant des tests de contrainte uniaxiaux longitudinal et tangentiel respectivement , et en utilisant le principe de superposition (sommation) on aboutit aux relations contraintes déformations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= (1/E_1)\sigma_{11} - (\nu_{21}/E_2)\sigma_{22} - (\nu_{31}/E_3)\sigma_{33} \\ \epsilon_{22} &= -(\nu_{12}/E_1)\sigma_{11} + (1/E_2)\sigma_{22} - (\nu_{32}/E_3)\sigma_{33} \\ \epsilon_{33} &= -(\nu_{13}/E_1)\sigma_{11} - (\nu_{23}/E_2)\sigma_{22} + (1/E_3)\sigma_{33} \\ \epsilon_{23} &= (1/2G_{23})\sigma_{23} \\ \epsilon_{13} &= (1/2G_{13})\sigma_{13} \\ \epsilon_{12} &= (1/2G_{12})\sigma_{12} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Procédant par des changement de variable les équations (1) peuvent s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= S_{11}\sigma_{11} + S_{12}\sigma_{22} + S_{13}\sigma_{33} \\ \epsilon_{22} &= S_{21}\sigma_{11} + S_{22}\sigma_{22} + S_{23}\sigma_{33} \\ \epsilon_{33} &= S_{31}\sigma_{11} + S_{32}\sigma_{22} + S_{33}\sigma_{33} \\ \epsilon_{23} &= (1/2)S_{44}\sigma_{23} \\ \epsilon_{13} &= (1/2)S_{55}\sigma_{13} \\ \epsilon_{12} &= (1/2)S_{66}\sigma_{12} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

4-CONSTRAINTES PLANES-DEFORMATIONS PLANES:

Les relations ci-dessus (2), sont obtenues en contraintes-planes dans le plan (x,y) en posant :

$$\sigma_{13} = \sigma_{19} = \sigma_{23} = 0$$

cela conduit aux équations :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= S_{11} \sigma_{11} + S_{12} \sigma_{22} \\ \epsilon_{22} &= S_{12} \sigma_{11} + S_{22} \sigma_{22} \\ \epsilon_{12} &= (1/2) S_{66} \sigma_{12} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

avec :

$$\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0$$

et $\epsilon_{33} = S_{13} \sigma_{11} + S_{23} \sigma_{22}$

en inversant les équations (3) on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= (S_{22} \epsilon_{11} - S_{12} \epsilon_{22}) / (S_{11} S_{22} - S_{12}^2) \\ \sigma_{22} &= (-S_{12} \epsilon_{11} + S_{11} \epsilon_{22}) / (S_{11} S_{22} - S_{12}^2) \\ \sigma_{12} &= 2 \epsilon_{12} / S_{66} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Remarque : les relations contrainte-déformation, dans le plan (x,y) contiennent seulement quatre (04) constantes élastiques indépendantes .

De la même manière, ces relations sont exprimées en déformation plane en posant :

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

$$\sigma_{33} = -(S_{13} \sigma_{11} + S_{23} \sigma_{22}) / S_{33}$$

on a :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= (S_{11} - S_{13}^2 / S_{33}) \sigma_{11} + (S_{12} - S_{13} S_{23} / S_{33}) \sigma_{22} \\ \epsilon_{22} &= (S_{12} - S_{13} S_{23} / S_{33}) \sigma_{11} + (S_{22} - S_{23}^2 / S_{33}) \sigma_{22} \\ \epsilon_{12} &= S_{66} \sigma_{12} / 2 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

soit inversement :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11} \epsilon_{11} + C_{12} \epsilon_{22} \\ \sigma_{22} &= C_{12} \epsilon_{11} + C_{22} \epsilon_{22} \\ \sigma_{12} &= 2C_{66} \epsilon_{12} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Où : C_{11} , C_{22} et C_{12} sont fonctions des S_{ij}

NB : Comme pour le cas de l'élasticité isotrope ,il existe une équivalence (formele) entre l'état de contraintes planes et celui de déformations planes donc on peut passer d'un état à un autre en modifiant ,seulement, les constantes élastiques.

Remarque: Sachant que l'isotropie transverse n'est qu'un cas particulier de l'orthotropie, on procède de manière analogue à ce qui précède pour établir les relations contraintes-déformations en contraintes planes et en déformations planes, pour un corps transversement isotrope.

III METHODE DES DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT : M. D. D

1-INTRODUCTION:

Beaucoup de problèmes pratiques dans différents domaines de l'ingénieur tels que ,la mécanique des fluides ,les transferts de chaleur et de masse ,la mécanique des solides ,celle de la rupture ,l'élastostatique, l'élasticité et autres peuvent être représentés par des équations aux dérivés partielles régissant l'intérieur d'un domaine Ω délimité par un contour $\partial\Omega$, sur lequel des conditions aux limites sont prescrites: d'où le nom de problèmes aux valeurs limites.

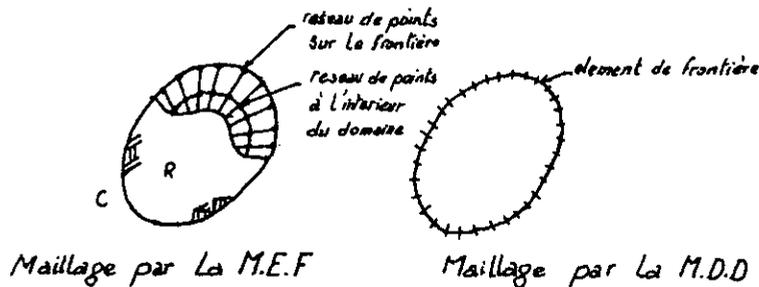
Pour approcher les solutions analytiques de ces problèmes, souvent difficiles à déterminer par une résolution directe des équations différentielles ,plusieurs méthodes numériques ont été mises en place où l'on peut noter la domination de la méthode des éléments finis(M E F), d'un degré moins celle des différences finis (D E F) en tant qu'outils numériques très puissants ,et dotées d'une haute précision et d'une souplesse étonnante.

Néanmoins , les vingt dernières années ont vu l'apparition en force d'une nouvelle technique,la méthode des éléments de frontières B E M ,généralement connue sous le nom de la méthode des équations intégrales de frontières, qui ne cesse elle aussi de s'illustrer par sa simplicité et sa variété d'application.

Ce sont, en effet RIZZO (1967), en bidimensionnel, et CRUSE (1969),en tridimensionnel,les premiers chercheurs à avoir utilisé la B.E.M pour la résolution des problèmes d'élasticité linéaire.Cette méthode se base sur la solution analytique d'un problème singulier simple qui ,une fois obtenue (la solution), sera utilisée pour construire la solution numérique pour des problèmes plus complexes.

Au contraire de la F.E.M , qui nécessite une discrétisation

totale du domaine Ω en éléments, un fait qui devient très compliqué lorsqu'il s'agit d'un domaine infini, la B.E.M se limite seulement à une subdivision de la frontière en éléments joints les uns aux autres, vu que la solution singulière vérifie l'équation différentielle gouvernant l'intérieur du domaine Ω .



En effet, les tractions t_j et les déplacements u_j , en l'absence des forces volumiques, sont reliés par l'équation intégrale de frontière comme suit :

$$c_{ij}(p) u_j(p) + \int T_{ij}(p, q) u_j(q) ds(q) = \int U_{ij}(p, q) t_j(q) ds(q) \quad (1)$$

où :

p, q sont des points se trouvant sur la frontière.

T_{ij}, U_{ij} sont les $j^{ème}$ composantes du vecteur traction et celui du déplacement en un point q dues à une charge unitaire P dans la $i^{ème}$ direction, dans un espace infini.

Le système d'équations (1) peut être réduit en un système d'équations algébriques ayant la forme :

$$A u = B t \quad (2)$$

où A et B sont des matrices exprimées par les intégrales de U_{ij} et T_{ij} (il s'agira plus tard des coefficients d'influences)

En assemblant les paramètres connus d'une part et ceux inconnus de l'autre part, on obtient :

$$M X = R \quad (3)$$

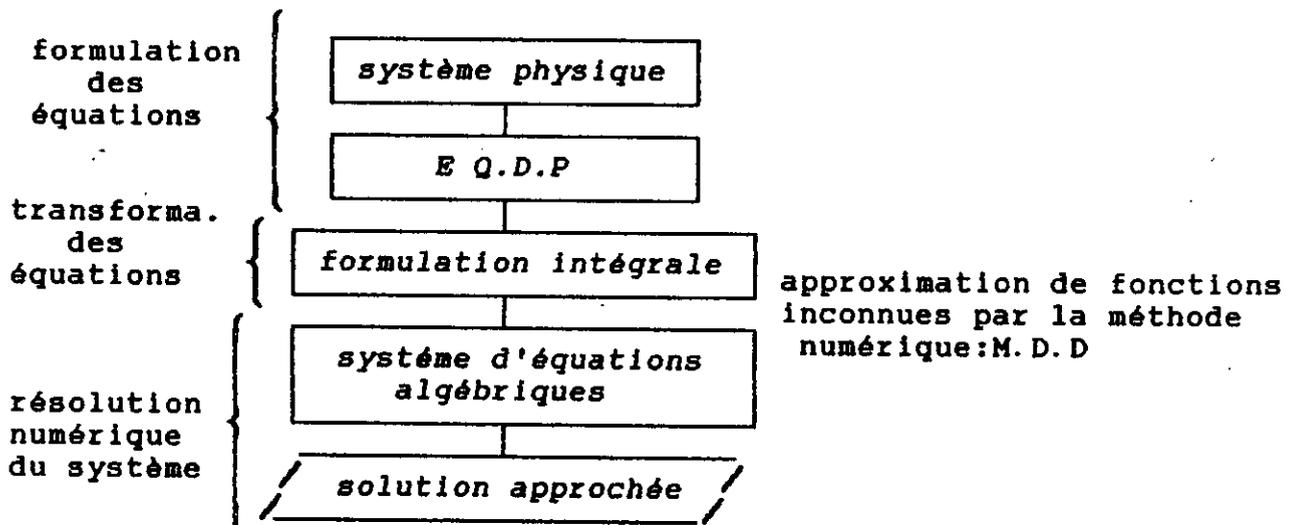
M : matrice composée des colonnes A et B .

X : matrice composée des paramètres inconnus .

R : matrice composée des paramètres connus .

En conclusion , on notera que le principe de cette méthode est la transformation des équations de volumes en relations intégrales reliant les paramètres connus à ceux inconnus, et donc réduction d'un problème tridimensionnel en un autre bidimensionnel (ou un problème bidimensionnel en un problème unidimensionnel), et ainsi l'obtention de systèmes d'équations algébriques d'ordre inférieur (de plus en plus petit) facile à résoudre.

L'âme de cette méthode peut être structurée dans l'organigramme suivant:



2-PROBLEME INTERIEUR / PROBLEME EXTERIEUR

Un problème est dit interieur quand le domaine à étudier est fini et est limité par un contour $\partial\Omega$, c'est l'exemple d'un disque. Dans le cas d'un domaine infini, exemple d'une cavité à l'intérieur d'un domaine infini, on a affaire à un problème exterieur, et c'est particulièrement à ce dernier type de problèmes que la M.E.I.F se voit utile, puisque l'étude se limite seulement à une discrétisation de la frontière puis étendre la résolution au reste du domaine.

3-CONVENTION DE SIGNE

Le contour d'un domaine fini (problème interieur) est traversé suivant le sens horaire, tandis celui d'un domaine infini (problème exterieur) est traversé selon le sens trigonométrique.

4-METHODE DIRECTE /METHODE INDIRECTE

La M.E.I.F a été développée suivant deux approches, l'une d'elles est d'origine mathématique basée sur des théorèmes classiques de la théorie du potentiel et consiste à mettre en place des équations algébriques reliant directement les paramètres aux limites inconnues a ceux connues d'où le nom de méthode directe

L'autre approche est physique et consiste à chercher d'abord la valeur des singularités, placées tout au long du contour discretisé en segments de droites, et de là, calculer les paramètres aux limites désirés, cette méthode est connue sous le nom de méthode indirecte telles que la méthode des contraintes fictives et celle des discontinuités de déplacement.

5-METHODE DES DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT :

5.1-INTRODUCTION

Une discontinuité, dans le déplacement, peut être visualisée comme étant une fissure droite (rectiligne) composée de deux surfaces (lèvres) disjointes se déplaçant relativement l'une par rapport à l'autre.

La M.D.D se base sur la solution analytique d'un problème d'une discontinuité constante dans un déplacement sur un segment de droite à l'interieur d'un domaine élastique infini.

Elle consiste à diviser (discrétiser) le segment de droite en une serie de N éléments, reliés les uns aux autres, et de considérer constante la discontinuité sur chacun de ces éléments.

Ainsi et connaissant la solution analytique pour une discontinuité élémentaire, on peut construire la solution numérique au problème donné, en sommant les effets de tous les éléments.

5.2-SOLUTION ANALYTIQUE (POUR LA M.D.D)

Soit l'équation de LAME :

$$(\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{grad}} \text{ div } u + \mu \Delta u + \vec{f} = 0 \quad (4)$$

En prenant les forces volumiques nulles ; $\vec{f} = 0$

$$\text{on a : } (\lambda + \mu) \text{grad div } U + \mu \Delta U = 0 \dots (2)$$

Cette équation, admet une solution suite à des représentations spéciales. Dans notre cas on considère la représentation de PAPKOVITCH (voir annexe) qui est :

$$\left. \begin{aligned} U &= B - (1/4)(1-\nu)^{-1} \text{grad} (OM \cdot B + \beta) \\ \text{avec } \Delta B &= 0 \quad ; \Delta \beta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

En déformation plane, selon le plan (x, y) , les composantes du champ de déplacement pour un corps élastique, isotrope et homogène s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} U_x &= B_x - (1/4)(1-\nu)^{-1} (\partial/\partial x)(xB_x + yB_y + \beta) \\ U_y &= B_y - (1/4)(1-\nu)^{-1} (\partial/\partial y)(xB_x + yB_y + \beta) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

où B_x, B_y, β sont les fonctions de PAPKOVITCH, déterminées en considérant deux cas particuliers :

- dans le premier cas on considère le plan $y=0$ libre de la traction libre
- Dans le second cas, on considère ce même plan libre de la traction normale .

Donc ceci revient à choisir B_x, B_y, β de telle façon que l'on ait sur le plan $y=0$; $\sigma_{xy}=0$ et $\sigma_{yy}=0$

En remplaçant dans les équations contraintes-déformations on a :

1) Si les fonctions de PAPKOVITCH sont telles que :

$$\left. \begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= 4(1-\nu)(\partial\phi/\partial y) \\ \beta &= 4(1-\nu)(1-2\nu)\phi \end{aligned} \right] \quad (7)$$

où $\Delta\phi = 0$; ϕ est une fonction harmonique singulière .

Les champs déplacements et contraintes correspondants seront alors :

$$\left. \begin{aligned} U_x &= -(1-2\nu)(\partial\phi/\partial x) - y(\partial^2\phi/\partial x\partial y) \\ U_y &= 2(1-\nu)(\partial\phi/\partial y) - y(\partial^2\phi/\partial y^2) \end{aligned} \right] \quad (8a)$$

et

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G [(\partial^2\phi/\partial y^2) + (\partial^3\phi/\partial y^3)] \\ \sigma_{yy} &= 2G [(\partial^2\phi/\partial y^2) + (\partial^3\phi/\partial y^3)] \\ \sigma_{xy} &= -2Gy(\partial^3\phi/\partial x\partial y^2) \end{aligned} \right] \quad (8b)$$

où G module de cisaillement

NB : Pour que l'on ait ($\sigma_{xy} = 0$) sur ($y=0$) il faut que $\partial^3\phi/\partial x\partial y^2$ soit finie sur ce même plan ($y=0$).

ii) Si les fonctions de PAPKOVITCH sont telles que :

$$\left. \begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= 4(1-\nu)(\partial\chi/\partial x) \\ \beta &= 8(1-\nu)^2 \int (\partial\chi/\partial x) dy \end{aligned} \right] \quad (9)$$

où $\Delta Z = 0$

Les champs de déplacement et de contrainte correspondants sont :

$$\left. \begin{aligned} u_x &= 2(1-\nu)(\partial\chi/\partial y) + y(\partial^2\chi/\partial y^2) \\ u_y &= (1-2\nu)(\partial\chi/\partial x) - y(\partial^2\chi/\partial x\partial y) \end{aligned} \right] \quad (10a)$$

et :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G [2(\partial^2\chi/\partial x\partial y) + y(\partial^3\chi/\partial x\partial y^2)] \\ \sigma_{yy} &= -2Gy(\partial^3\chi/\partial x\partial y^2) \\ \sigma_{xy} &= 2G [(\partial^2\chi/\partial y^2) + y(\partial^3\chi/\partial y^3)] \end{aligned} \right] \quad (10b)$$

De même que pour que ($\sigma_{yy} = 0$) sur ($y=0$) il faut que $(\partial^3 Z/\partial x\partial y^2)$ soit finie sur ce même plan .

REMARQUE : Une fonction f est dite harmonique si elle vérifie l'équation de LAPLACE soit :

$$\Delta f = 0$$

5.3-UTILISATION :

Les solutions précédentes peuvent être utilisées pour construire des solutions à certains problèmes aux valeurs limites, tel est le cas d'une discontinuité de déplacement constante, sur un segment de droite $|x| < a$, dans un corps infini .

Ce problème est résolu suivant les deux modes ,mode I et II , d'une DD correspondant respectivement à des discontinuités de déplacement normal u_y et celle du déplacement (tangentielle) transversal U_x

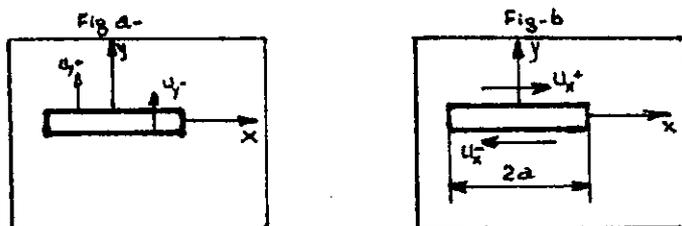


Figure-2- les deux modes d'une DD
 a) MODE I. Echevauchement des deux lèvres l'une par rapport à l'autre. ce qui est physiquement impossible.
 b) MODE II

La discontinuité de déplacement (voir CROUCH) est définie selon x et y comme :

$$\begin{aligned} D_x &= U_x(x, 0^-) - U_x(x, 0^+) = U_x^- - U_x^+ \\ D_y &= U_y(x, 0^-) - U_y(x, 0^+) = U_y^- - U_y^+ \end{aligned} \quad (11)$$

Notons que D_x, D_y sont constantes .

En mode I :

comme vu précédemment l'équation (5a) - U_y s'écrit :

$$U_y \cdot 2(1-\nu) (\partial\phi/\partial y) - y (\partial^2\phi/\partial y^2)$$

Aussi les conditions aux limites définies pour ce mode sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(x,0) &= 0 & -\infty < x < +\infty \\ U_y(x,0) &= 0 & |x| > a \\ \lim_{y \rightarrow 0^-} U_y(x,y) - \lim_{y \rightarrow 0^+} U_y(x,y) &= D_y & |x| < a \end{aligned} \quad (12)$$

Soit :

$$D_y = \begin{cases} 2(1-\nu) \left[\left. \frac{\partial}{\partial y}(\phi(x,y)) \right|_{y=0^-} - \left. \frac{\partial}{\partial y}(\phi(x,y)) \right|_{y=0^+} \right] & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad (13)$$

et l'on obtient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0^-} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0^+} = D_y / 2(1-\nu) ; \quad |x| < a \quad (14)$$

Donc le problème (aux limites) (12) est résolu facilement une fois la fonction harmonique ϕ est convenablement choisie .

Pour ce faire , on (notera) choisira [$\phi = \text{arctg}(y/x)$] définie par :

$$\text{arctg}(y/x) = \underline{\text{arctg}}(y/x) + k\pi \quad (\text{fonction harmonique})$$

$$\text{Avec } -\pi/2 \leq \underline{\text{arctg}}(y/x) \leq \pi/2 \quad \text{argument}$$

$$\text{et ou : } k = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, y > 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0, y < 0 \end{cases} \quad (15)$$

Soit :

$$\text{arctg}(y/x) = \begin{cases} 0 & ; x > 0, y = 0+ \\ 0 & ; x > 0, y = 0- \\ \pi & ; x < 0, y = 0+ \\ -\pi & ; x < 0, y = 0- \end{cases} \quad \text{discontinuité} \quad (16)$$

On peut construire à partir de cette fonction une autre fonction définie par :

$$h(x,y) = \text{arctg}[y/(x+a)] - \text{arctg}[y/(x-a)]$$

telle que :

$$\arctg[y/(x+a)] = \begin{cases} -\pi & \text{pour : } x < -a ; y = 0^- \\ \pi & \text{pour : } x < -a ; y = 0^+ \\ 0 & \text{pour : } x > -a ; y = 0^+ \end{cases} \quad (17a)$$

et :

$$\arctg[y/(x-a)] = \begin{cases} -\pi & \text{pour : } x < -a ; y = 0^- \\ \pi & \text{pour : } x < -a ; y = 0^+ \\ 0 & \text{pour : } x > +a ; y = 0^+ \end{cases} \quad (17b)$$

Soit en combinant les équations (17a) et (17b) on obtient une fonction $h(x)$ définie par :

$$h(x,y) = \begin{cases} 0 & ; |x| > a & y = 0^+ \\ \pi & ; |x| < a & y = 0^- \\ -\pi & ; |x| < a & y = 0^+ \end{cases} \quad (18)$$

Ainsi , en remarquant que :

$$h(x,y) \Big|_{y=0^-} - h(x,y) \Big|_{y=0^+} = \begin{cases} -2\pi & ; |x| < a \\ 0 & ; |x| > a \end{cases} \quad (19)$$

et en identifiant (19) à (14) on a sur $|x| < a$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left[h(x,y) \Big|_{y=0^-} - h(x,y) \Big|_{y=0^+} \right] &= \\ &= \frac{2(1-\nu)}{D_y} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \Big|_{y=0^-} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \Big|_{y=0^+} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

Ce qui donnera une expression de la fonction ϕ définie comme :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = (1/4\pi) [D_y / (1-\nu)] h(x,y)$$

Soit :

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= (-1/4\pi) [D_y / (1-\nu)] \{ y [\arctg(y/(x-a)) - \arctg(y/(x+a))] - \\ &\quad (x-a) \ln [(x-a)^2 + y^2]^{1/2} + (x+a) \ln [(x+a)^2 + y^2]^{1/2} \} \end{aligned} \quad (22)$$

Sachant que :

$$\int \arctg(y/(x+a)) dy = y \arctg(y/(x+a)) - (x+a) \ln [(x+a)^2 + y^2]^{1/2}$$

$$\int \arctg(y/(x-a)) dy = y \arctg(y/(x-a)) - (x-a) \ln [(x-a)^2 + y^2]^{1/2}$$

NB : La fonction ϕ ainsi déterminée est harmonique ,et produit des déplacements et des contraintes (voir équa.8a et 8b) qui disparaissent (s'annulent) à l'infini ,ces derniers ,contraintes et déplacements sont continus partout dans le domaine , excepté sur le segment $|x| < 2a$ pour les déplacements.

La fonction ϕ vérifie les conditions imposées en mode I tels que :

$$\Delta\phi = 0 \quad ; \quad \partial^2\phi/(\partial x\partial y^2) = 0 \quad (23)$$

A travers l'équation (22) ,on voit que $\phi(x,y)$ est de la forme :

$$\phi(x,y) = D_y f(x,y)$$

$$f(x,y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \{y[\arctg(y/(x-a)) - \arctg(y/(x+a))] - (x-a)\ln [(x-a)^2 + y^2]^{1/2} + (x+a)\ln [(x+a)^2 + y^2]^{1/2}\} \quad (24)$$

En remplaçant $\phi(x,y)$ par sa nouvelle expression on aura des déplacements et des contraintes ,dans l'équation (8a) et (8b) exprimés comme suit :

$$\begin{aligned} u_x &= D_y [-(1-2\nu)f_{,x} - yf_{,xy}] \\ u_y &= D_y [2(1-\nu)f_{,y} - yf_{,yy}] \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2GD_y [f_{,yy} + yf_{,yyy}] \\ \sigma_{xy} &= 2GD_y [-y.f_{,yyy}] \\ \sigma_{yy} &= 2GD_y [f_{,yy} - yf_{,yyy}] \end{aligned} \quad (25b)$$

En mode II :

Les conditions imposées pour ce mode sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x,0) &= 0 & -\infty < x < +\infty \\ U_x(x,0) &= 0 & |x| > a \\ D_x &= \lim_{x \rightarrow a} U_x - \lim_{x \rightarrow -a} U_x & |x| < a \end{aligned} \quad (26)$$

Sachant aussi d'après (13a) que :

$$u_x = 2(1-\nu)(\partial\chi/\partial y) + y(\partial^2\chi/\partial y^2)$$

En procédant identiquement au mode I on aboutit à définir χ telle que :

$$\chi(x,y) = (+1/4\pi)[D_x/(1-\nu)] \left\{ y[\arctg(y/(x+a)) - \arctg(y/(x-a))] \right. \\ \left. (x+a)\ln[(x+a)^2+y^2]^{1/2} + (x-a)\ln[(x-a)^2+y^2]^{1/2} \right\} \quad (27)$$

Soit $\chi(x,y) = D_x f(x,y)$
 où $f(x,y)$ déjà définie ci-dessus .

REMARQUE : Cette fonction vérifie également les conditions imposées pour ce mode .

$$\Delta\phi = 0 \quad \partial^3 \chi / \partial x \partial y^2 |_{y=0} = 0 \quad \text{donc finie}$$

En remplaçant $f(x,y)$ dans les équations (7a) et (7b) on peut exprimer les déplacements et contraintes comme suit :

$$u_x = D_x [2(1-\nu)f,y + y.f,yy] \quad (28a)$$

$$u_y = D_x [(1-2\nu)f,x - y.f,xy]$$

et

$$\sigma_{xx} = 2G(2f,xy + y.f,xyy)D_x$$

$$\sigma_{yy} = -2Gy.f,xyy.D_x \quad (28b)$$

$$\sigma_{xy} = 2GD_x (f,yy + yf,yyy)$$

5.4-COEXISTENCE DES DEUX MODES (MODE MIXTE):

En utilisant le principe de superposition , on obtient pour une DD constante D de composante D_x, D_y , les déplacements et les contraintes définis comme suit :

$$u_x = D_x [2(1-\nu)f,y + y.f,yy] + D_y [-(1-2\nu)f,x - yf,xy]$$

$$u_y = D_x [(1-2\nu)f,x - y.f,xy] + D_y [2(1-\nu)f,y - yf,yy] \quad (29a)$$

et

$$\sigma_{xx} = 2GD_x (2f,xy + y.f,xyy) + 2GD_y [f,yy + yf,yyy]$$

$$\sigma_{yy} = -2GD_x y.f,xyy. + 2GD_y [-y.f,yyy] \quad (29b)$$

$$\sigma_{xy} = 2GD_x (f,yy + yf,yyy) + 2GD_y [f,yy - yf,yyy]$$

REMARQUES : Il est facile de vérifier que :

Les contraintes sont continues partout sur $y=0$ sauf pour $x=+a$ où on note une discontinuité et une singularité due à la présence du terme $1/(x^2-a^2)$.

Par contre , les déplacements sont continus pour $|x|>a$, $y=0$ mais presentent une discontinuité constante $D(D_x, D_y)$ sur le segment $|x|<a$, $y=0$.

Les contraintes et les déplacements des équations (22a) et (22b) sont exprimées suivant un repère local lié directement à la discontinuité de déplacement DD .

Soit (\bar{x}, \bar{y}) ce repère local , alors on a les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} u_x &= D_x [2(1-\nu)f, \bar{y} + \bar{y}.f, \bar{y}\bar{y}] + D_y [-(1-2\nu)f, \bar{x} - \bar{y}f, \bar{x}\bar{y}] \\ u_y &= D_x [(1-2\nu)f, \bar{x} - \bar{y}.f, \bar{x}\bar{y}] + D_y [2(1-\nu)f, \bar{y} - \bar{y}f, \bar{y}\bar{y}] \end{aligned} \quad (29a)$$

Pour les déplacements

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2GD_x (2f, \bar{x}\bar{y} + \bar{y}.f, \bar{x}\bar{y}\bar{y}) + 2GD_y [f, \bar{y}\bar{y} + \bar{y}f, \bar{y}\bar{y}\bar{y}] \\ \sigma_{yy} &= -2GD_x \bar{y}.f, \bar{x}\bar{y}\bar{y}. + 2GD_y [-\bar{y}.f, \bar{y}\bar{y}\bar{y}] \\ \sigma_{xy} &= 2GD_x (f, \bar{y}\bar{y} + \bar{y}f, \bar{y}\bar{y}\bar{y}) + 2GD_y [f, \bar{y}\bar{y} - \bar{y}f, \bar{y}\bar{y}\bar{y}] \end{aligned} \quad (29b)$$

Pour les contraintes

En posant :

$$\begin{aligned} F_2(x, y) &= f, \bar{x} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\ln \nu [(\bar{x}-a)^2 + y^2] - \ln \nu [(\bar{x}+a)^2 + y^2] \right] \\ F_3(\bar{x}, \bar{y}) &= f, \bar{y} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\arctan \frac{\bar{y}^2}{(\bar{x}-a)} - \arctan \frac{\bar{y}^2}{(\bar{x}+a)} \right] \\ F_4(\bar{x}, \bar{y}) &= f, \bar{x}\bar{y} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{\bar{y}^2}{(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2} - \frac{\bar{y}^2}{(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2} \right] \\ F_5(\bar{x}, \bar{y}) &= f, \bar{x}\bar{x} = f, \bar{y}\bar{y} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{\bar{y}^2}{(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2} - \frac{\bar{y}^2}{(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2} \right] \\ F_6(\bar{x}, \bar{y}) &= f, \bar{x}\bar{y}\bar{y} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{(\bar{x}-a)^2 - \bar{y}^2}{\{(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2\}^2} - \frac{(\bar{x}+a)^2 - \bar{y}^2}{\{(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2\}^2} \right] \\ F_7(\bar{x}, \bar{y}) &= f, \bar{y}\bar{y}\bar{y} = \frac{2\bar{y}}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{(\bar{x}-a)}{\{(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2\}^2} - \frac{(\bar{x}+a)}{\{(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2\}^2} \right] \end{aligned}$$

On obtient:

$$\begin{aligned} u_x &= D_x [2(1-\nu)F_3 - yF_5] + D_y [-(1-2\nu)F_2 - yF_4] \\ u_y &= D_x [(1-2\nu)F_2 - \bar{y}F_4] + D_y [2(1-\nu)F_3 - \bar{y}F_5] \end{aligned} \quad (30a)$$

pour les déplacements

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 2GD_x [2F_4 + yF_6] + 2GD_y [-F_5 + yF_7] \\
\sigma_{yy} &= 2GD_x [-yF_6] + 2GD_y [-F_5 + yF_7] \\
\sigma_{xy} &= 2GD_x [-F_5 + yF_7] + 2GD_y [-yF_6]
\end{aligned}
\tag{30b}$$

pour les contraintes

Pour pouvoir utiliser le principe de superposition et généraliser le calcul à toutes les DD, on exprime les champs de déplacements et de contraintes suivant le repère global (x,y), on obtient alors :

$$\begin{aligned}
u_x &= D_x [-(1-2\nu)\sin\beta \bar{F}_2 + 2(1-\nu)\cos\beta \bar{F}_3 + \bar{y}(\sin\beta \bar{F}_4 - \cos\beta \bar{F}_5)] \\
&\quad + D_y [-(1-2\nu)\cos\beta \bar{F}_2 - 2(1-\nu)\sin\beta \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos\beta \bar{F}_4 + \sin\beta \bar{F}_5)] \\
u_y &= D_x [(1-2\nu)\cos\beta \bar{F}_2 + 2(1-\nu)\sin\beta \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos\beta \bar{F}_4 + \sin\beta \bar{F}_5)] \\
&\quad + D_y [-(1-2\nu)\sin\beta \bar{F}_2 + 2(1-\nu)\cos\beta \bar{F}_3 - \bar{y}(\sin\beta \bar{F}_4 - \cos\beta \bar{F}_5)]
\end{aligned}
\tag{31a}$$

Pour les déplacements .

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 2GD_x [2\cos^2\beta \bar{F}_4 + \sin 2\beta \bar{F}_5 + \bar{y}(\cos 2\beta \bar{F}_6 - \sin 2\beta \bar{F}_7)] \\
&\quad + 2GD_y [-\bar{F}_5 + \bar{y}(\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7)] \\
\sigma_{yy} &= 2GD_x [2\sin^2\beta \bar{F}_4 - \sin 2\beta \bar{F}_5 - \bar{y}(\cos 2\beta \bar{F}_6 - \sin 2\beta \bar{F}_7)] \\
&\quad + 2GD_y [-\bar{F}_5 - \bar{y}(\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7)] \\
\sigma_{xy} &= 2GD_x [\sin 2\beta \bar{F}_4 - \cos 2\beta \bar{F}_5 + \bar{y}(\cos 2\beta \bar{F}_6 + \sin 2\beta \bar{F}_7)] \\
&\quad + 2GD_y [-\bar{y}(-\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7)]
\end{aligned}
\tag{31b}$$

Pour les contraintes .

5.5-PROCEDURE NUMERIQUE :

Pour une meilleure illustration de cette procédure, on considèrera un ensemble de N segments de droites, parfaitement reliés les uns aux autres et formant une courbe quelconque comme schématisé par la figure ci-dessous

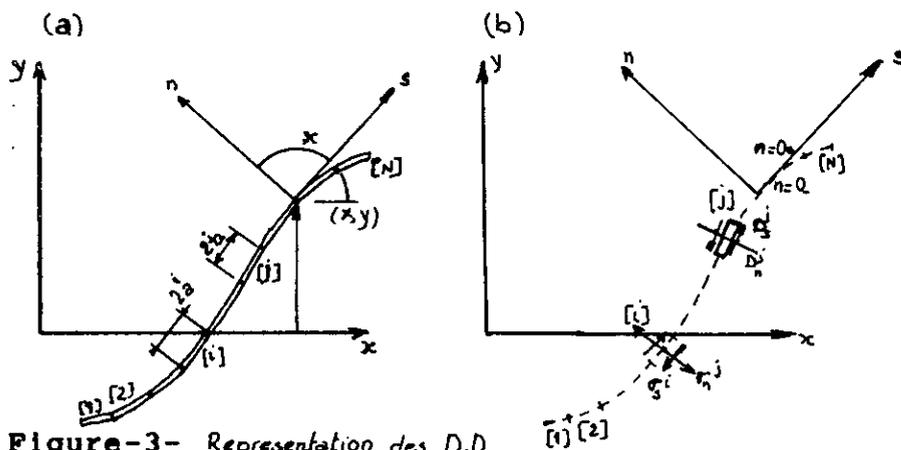


Figure-3- Representation des D.D

Chaque segment de droite représente une discontinuité de déplacement élémentaire définie suivant un repère local s, n comme le montre la figure (3b) et dont les composantes D_s et D_n sont données par les expressions :

$$\begin{aligned} D_s &= u_s^- - u_s^+ \\ D_n &= u_n^- - u_n^+ \end{aligned} \quad (32)$$

Où u_s et u_n sont les déplacements, normal et tangentiel.

Les contraintes normales et tangentielles au milieu d'un segment "i" peuvent être exprimées en fonction des composantes de la discontinuité de déplacement du "j"ème élément comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s^i &= A_{ss}^i D_s^j + A_{sn}^i D_n^j \\ \sigma_n^i &= A_{ns}^i D_s^j + A_{nn}^i D_n^j \end{aligned} \right\} \quad i=1, N \quad (33)$$

En utilisant le principe de superposition, et ainsi tenant compte de l'effet des N éléments (discontinuités) on obtient le champ de contraintes :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s^i &= \sum A_{ss}^i D_s^j + \sum A_{sn}^i D_n^j \\ \sigma_n^i &= \sum A_{ns}^i D_s^j + \sum A_{nn}^i D_n^j \end{aligned} \right\} \quad i=1, N \quad (34)$$

ou $A_{ss}^i, A_{sn}^i, A_{ns}^i$ et A_{nn}^i sont les coefficients d'influences relatifs aux contraintes sur la frontière.

De la même manière, on établit le champ déplacement :

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \sum B_{\alpha\alpha}^{ij} D_\alpha + \sum B_{\alpha n}^{ij} D_n \\ u_n &= \sum B_{n\alpha}^{ij} D_\alpha + \sum B_{nn}^{ij} D_n \end{aligned} \right\} i=1, N \quad (35)$$

ou $B_{\alpha\alpha}, B_{\alpha n}, B_{n\alpha}$ et B_{nn} sont les coefficients d'influences relatifs aux déplacements sur la frontière.

Ces deux systèmes d'équations peuvent être représentés sous la forme générale suivante :

$$\left. \begin{aligned} b_\alpha &= \sum C_{\alpha\alpha}^{ij} D_\alpha + \sum C_{\alpha n}^{ij} D_n \\ b_n &= \sum C_{n\alpha}^{ij} D_\alpha + \sum C_{nn}^{ij} D_n \end{aligned} \right\} i=1, N \quad (36)$$

Où b_α, b_n sont les conditions aux limites (contraintes et déplacements) connues, et $C_{\alpha\alpha}, C_{\alpha n}, C_{n\alpha}, C_{nn}$ sont les coefficients d'influences.

Si les conditions aux limites prescrites sont les contraintes

$(\sigma_\alpha)_0$, et $(\sigma_n)_0$, on a :

$b_\alpha = (\sigma_\alpha)_0; b_n = (\sigma_n)_0$; on a alors le système équivalent :

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_\alpha)_0 &= \sum A_{\alpha\alpha}^{ij} D_\alpha + \sum A_{\alpha n}^{ij} D_n \\ (\sigma_n)_0 &= \sum A_{n\alpha}^{ij} D_\alpha + \sum A_{nn}^{ij} D_n \end{aligned} \right\} i=1, N \quad (37)$$

Si les conditions aux limites prescrites sont les déplacements $(u_\alpha)_0$ et $(u_n)_0$ on a :

$b_\alpha = (u_\alpha)_0; b_n = (u_n)_0$; on a le système équivalent :

$$\left. \begin{aligned} (u_\alpha)_0 &= \sum B_{\alpha\alpha}^{ij} D_\alpha + \sum B_{\alpha n}^{ij} D_n \\ (u_n)_0 &= \sum B_{n\alpha}^{ij} D_\alpha + \sum B_{nn}^{ij} D_n \end{aligned} \right\} i=1, N \quad (38)$$

$$+D_n [(1-2\nu)\sin\gamma \bar{F}_z + 2(1-\nu)\cos\gamma \bar{F}_y + \bar{y}' (\sin\gamma \bar{F}_x + \cos\gamma \bar{F}_y)]$$

$$\begin{aligned}
\sigma_s^i &= 2GD_s \left[-\sin 2\gamma \bar{F}_4 - \cos 2\gamma \bar{F}_5 - \bar{y}' (-\cos 2\gamma \bar{F}_7 + \sin 2\gamma \bar{F}_8) \right] \\
&\quad + 2GD_n \left[-\bar{y}' (\sin 2\gamma \bar{F}_7 + \cos 2\gamma \bar{F}_8) \right] \\
\sigma_n^i &= 2GD_s \left[2\sin^2 \gamma \bar{F}_4 + \sin 2\gamma \bar{F}_5 - \bar{y}' (\cos 2\gamma \bar{F}_8 + \sin 2\gamma \bar{F}_7) \right] \\
&\quad + 2GD_n \left[-\bar{F}_5 + \bar{y}' (\sin 2\gamma \bar{F}_8 - \cos 2\gamma \bar{F}_7) \right]
\end{aligned} \tag{41b}$$

Où les expressions entre parenthèses représentent les coefficients d'influences (et représentent des intégrales).

Les équations (41a) et (41b) peuvent être mises sous la forme :

$$\begin{aligned}
u_s^i &= B_{ss}^i D_s^j + B_{sn}^i D_n^j \\
u_n^i &= B_{ns}^i D_s^j + D_{nn}^i D_n^j
\end{aligned} \tag{42a}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_s^i &= A_{ss}^i D_s^j + A_{sn}^i D_n^j \\
\sigma_n^i &= A_{ns}^i D_s^j + A_{nn}^i D_n^j
\end{aligned} \tag{42b}$$

B_{ss}^i par exemple représente l'effet de la $j^{\text{ème}}$ composante tangentielle de la DD, D_s^j , sur la composante tangentielle du déplacement, U_s^i , au milieu du $i^{\text{ème}}$ élément

Elément self-effects (influence de l'élément sur lui même) :

Ce sont les termes diagonaux de la matrice des coefficients d'influences.

Ils représentent l'influence d'une DD placée sur l'élément i, par exemple, sur les contraintes et les déplacements au milieu de ce même élément i.

Les éléments self-effects sont obtenus en évaluant (41a), (42b)

pour $\bar{x}'=0$, $\bar{y}'=0$, $\gamma=\beta-\beta=0$ on obtient alors (pour un élément i):

$$\begin{aligned}
u_s^i &= D_{ss}^i [2(1-\nu)\bar{F}_3(0,0)] + D_{nn}^i [-(1-2\nu)\bar{F}_2(0,0)] \\
u_n^i &= D_{ns}^i [2(1-\nu)\bar{F}_3(0,0)] + D_{nn}^i [(1-2\nu)\bar{F}_2(0,0)]
\end{aligned} \tag{43a}$$

$$\sigma_s^i = 2GD_s [-\bar{F}_s(0,0)] \quad (43b)$$

$$\sigma_n^i = 2GD_n [-\bar{F}_s(0,0)]$$

Tout calcul fait on obtient :

$$F_z(0,0) = 0$$

$$F_s(0,0^+) = -\frac{1}{4(1-\nu)}$$

$$F_s(0,0^-) = \frac{1}{4(1-\nu)}$$

$$F_s(0,0^+) = \frac{1}{2\pi(1-\nu)a^i} \quad ; a^i = \text{demi largeur de l'élément } i$$

Soit :

$$\begin{aligned} u_{i^+} &= (-1/2)D_{i^+} & ; & \quad u_{i^-} = (+1/2)D_{i^-} \\ u_{n^+} &= (-1/2)D_{n^+} & ; & \quad u_{n^-} = (+1/2)D_{n^-} \end{aligned} \quad (44a)$$

$$\sigma_s^i = \frac{GD_s}{\pi(1-\nu)a^i} \quad ; \quad \sigma_n^i = \frac{GD_n}{\pi(1-\nu)a^i} \quad (44b)$$

Donc :

$$B_{sn}^{ii} = B_{ns}^{ii} = 0 \quad ; B_{ss}^{ii} = B_{nn}^{ii} = \pm 1/2 \quad \text{pour } \bar{y}' = 0_{\pm} \quad (45a)$$

$$A_{sn}^{ii} = A_{ns}^{ii} = 0 \quad ; A_{ss}^{ii} = A_{nn}^{ii} = \frac{G}{\pi(1-\nu)a^i} \quad (45b)$$

On voit donc que les éléments self-effects relatifs aux déplacements, B_{ss}^{ii} et B_{nn}^{ii} sont égaux, mais sont discontinus cela est dûe à la présence de la DD .

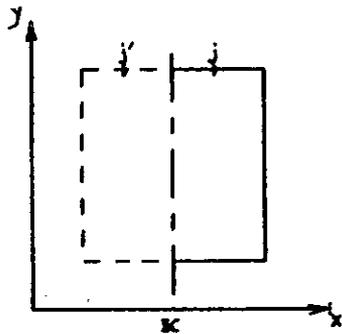
Pour simplifier les calculs et éviter cette discontinuité on adoptera la convention de signe vue précédement , donc pour les deux cas de problèmes $y=0$ est rapprochée par des valeurs négatives ($y=0_-$) on aura alors pour la suite du calcul :

$$\boxed{B_{ss}^{ii} = B_{nn}^{ii} = + 1/2} \quad (46)$$

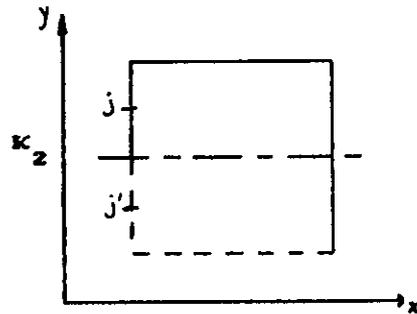
6-CONDITIONS DE SYMETRIE :

On parlera de symétrie pour un solide par rapport à un axe, quand les propriétés élastiques ,la configuration géométrique et les conditions aux limites de ce solide sont toutes symétriques par rapport à cet axe .

L'utilisation de la symétrie pour la résolution des problèmes d'élasticité par la M.D.D est d'une extrême importance ,quand on sait que le système d'équations est réduit de moitié (cas de la simple symetrie) -fig 5- a ,b ,ou de quart (cas de la double symetrie) -fig 6-

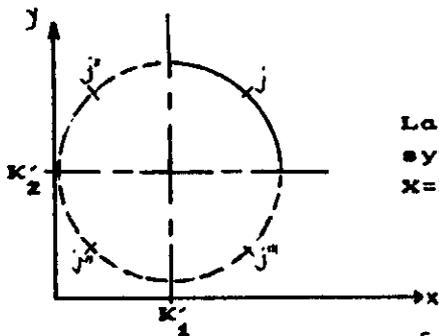


a) $x=k_1$ est un axe de symétrie pour la structure.



b) $y=k_2$ est un axe de symétrie pour la structure.

figure-5



La structure presente une double symetrie par rapport aux axes $x=k'_1$ et $y=k'_2$.

figure-6

Etant symétriques, l'élément j et son image j' auront des DD tangentiellees égales (en valeurs algébriques) mais de signe opposées ,tandis que les DD normalees sont égales et de même signe .ceci se traduit par les égalités suivantes :

$$D_n^j = D_n^{j'} \quad \sigma_n^j = \sigma_n^{j'} \quad U_n^j = U_n^{j'}$$

$$D_n^j = -D_n^{j'} \quad \sigma_n^j = -\sigma_n^{j'} \quad U_n^j = -U_n^{j'}$$

Remarques:

1-Ces résultats sont incorporés dans le calcul numérique pour l'utilisation d'un maximum d'éléments, en disposant que d'un minimum de zones mémoires

2-Comme on le verra ultérieurement, une double symétrie empêchera le mouvement de corps rigide.

7-MOUVEMENT DE CORPS RIGIDE :

Lorsqu'un solide est soumis à des sollicitations, il y a création de contraintes et de déformations due à la présence de déplacements relatifs (des différentes parties du solide).

Toutefois, il existe un type de mouvements relatifs qui n'en crée rien (ni contraintes, ni déplacements) conduisant ainsi un mouvement d'ensemble du solide ; c'est le mouvement de corps rigide (translation, rotation, du solide).

Un tel mouvement a des effets néfastes, qu'il faut éviter, sur la qualité de la solution du problème, lors du calcul numérique.

Pour la M.D.D, ces mouvements sont facilement éliminés, suivant le type de problème à considérer.

Par exemple, pour un problème intérieur, des conditions aux limites bien imposées suffisent à empêcher ce mouvement. Pour les problèmes extérieurs, il faut considérer des éléments (un minimum de deux éléments) "additionnels" à l'intérieur de la frontière Ω , auxquels on impose des déplacements (u_s, u_n) nuls ; cela va empêcher le mouvement d'ensemble de la région extérieur.

IV MILIEUX MULTICOUCHES

APPLICATION DE LA M.D.D AUX MULTICOUCHES

I- GENERALITES

Bien que destinée à résoudre des problèmes d'élasticité plane pour des corps homogènes, et isotropes, la M.D.D peut rigoureusement être adaptée pour des milieux non homogènes, présentant des propriétés mécaniques (élastiques) qui changent avec le point en tenant compte de quelques considérations.

Ainsi, et pour mieux faciliter la mise en équation du comportement de tels domaines (non homogènes), il est conseillé de les partager en plusieurs couches homogènes isotropes ayant chacune ses propres constantes élastiques (E, ν, G) et liées les unes aux autres par des "extensions" de frontières (à l'intérieur du domaine) ou interfaces.

On peut énoncer la définition d'un multicouche comme étant:
"Un empilement de monocouches (ou strates) isotropes, et parfaitement soudées les unes aux autres ."

La dernière hypothèse entraîne la continuité des contraintes et des déplacements le long des interfaces monocouche / monocouche .

II- APPLICATION DE LA M.D.D AUX MULTICOUCHES.

On considère un milieu composé de deux régions finies (Ω_1) et (Ω_2) homogènes, isotropes et linéairement élastiques, dont les contours ($\partial\Omega_1$) et ($\partial\Omega_2$) sont traversés dans le sens horaire

Ces deux régions, finies, sont liées par une interface, sur laquelle les systèmes de coordonnées (s_1, n_1) et (s_2, n_2), liés respectivement à Ω_1 et Ω_2 sont directement opposés comme l'indique la figure-1 ci-après.

La résolution du problème aux limites illustré ci-dessus est traité en considérant les conditions aux limites sur les frontières "libres" , $(\partial\Omega_1)$ et $(\partial\Omega_2)$, respectivement , ainsi que les conditions de continuité sur l'interface.

Ces dernières s'expriment pour chaque point Q se trouvant sur l'interface comme :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s^{(1)}(Q) &= \sigma_s^{(2)}(Q) \\ \sigma_n^{(1)}(Q) &= \sigma_n^{(2)}(Q) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Pour les contraintes, et

$$\left. \begin{aligned} u_s^{(1)}(Q) &= -u_s^{(2)}(Q) \\ u_n^{(1)}(Q) &= -u_n^{(2)}(Q) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

pour les déplacements.

Remarque:

La résolution numérique de ce problème , par la méthode des discontinuités de déplacement, consiste à diviser les contours $(\partial\Omega_1)$ et $(\partial\Omega_2)$ (l'interface comprise) en N_1 et N_2 éléments, respectivement, sur chacun desquels on associe des discontinuités de déplacements D_s et D_n .

Notre but, est de déterminer les discontinuités de déplacement D_s et D_n sur chacun des $N_1+N_2=N$ éléments de la frontière de telle façon que les conditions aux limites ,et celles de continuités soient satisfaites pour le milieu considéré.

Procédant de la même manière qu'au chap (III), les contraintes pour chaque élément du contour $(\partial\Omega_1)$ peuvent être écrites comme:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s^{(1)} &= \sum A_{ss}^{(1)} \cdot D_s^{(1)} + \sum A_{sn}^{(1)} \cdot D_n^{(1)} \\ \sigma_n^{(1)} &= \sum A_{ns}^{(1)} \cdot D_s^{(1)} + \sum A_{nn}^{(1)} \cdot D_n^{(1)} \end{aligned} \right\} i = \overline{1, N} \quad (3)$$

Ainsi que sur le contour ($\partial\Omega_2$) elles s'expriment comme :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s^{(2)} &= \sum A_{ss}^{(2)} \cdot D_s^{(2)} + \sum A_{sn}^{(2)} \cdot D_n^{(2)} \\ \sigma_n^{(2)} &= \sum A_{ns}^{(2)} \cdot D_s^{(2)} + \sum A_{nn}^{(2)} \cdot D_n^{(2)} \end{aligned} \right\} i = \overline{1, N} \quad (4)$$

Tandis que les déplacements pour chaque élément du contour ($\partial\Omega_1$) sont données par :

$$\left. \begin{aligned} u_s^{(1)} &= \sum B_{ss}^{(1)} \cdot D_s^{(1)} + \sum B_{sn}^{(1)} \cdot D_n^{(1)} \\ u_n^{(1)} &= \sum B_{ns}^{(1)} \cdot D_s^{(1)} + \sum B_{nn}^{(1)} \cdot D_n^{(1)} \end{aligned} \right\} i = \overline{1, N} \quad (5)$$

Ceux du contour ($\partial\Omega_2$) sont données par :

$$\left. \begin{aligned} u_s^{(2)} &= \sum B_{ss}^{(2)} \cdot D_s^{(2)} + \sum B_{sn}^{(2)} \cdot D_n^{(2)} \\ u_n^{(2)} &= \sum B_{ns}^{(2)} \cdot D_s^{(2)} + \sum B_{nn}^{(2)} \cdot D_n^{(2)} \end{aligned} \right\} i = \overline{1, N} \quad (6)$$

Remarque:

IL faut noter que les propriétés élastiques (E, ν, G) changent en passant d'une region à l'autre .Un fait qu'il faut prendre en considération lors du calcul des coefficients d'influences.

Les équations (3)-(6) peuvent être utilisées pour écrire un système "général" de $2N$ équations algébriques à $2N$ discontinuités de déplacements inconnues pour le milieu en question :

$$\left. \begin{aligned} b_s^i &= \sum C_{ss}^{ij} \cdot D_s^j + \sum C_{sn}^{ij} \cdot D_n^j \\ b_n^{i(2)} &= \sum C_{ns}^{ij} \cdot D_s^j + \sum C_{nn}^{ij} \cdot D_n^j \end{aligned} \right\} \overline{i=1,N} \quad (7)$$

Où, les N_1 premières valeurs de D_s^j et D_n^j représentent les N_1 valeurs de D_s^j et D_n^j , et les N_2 valeurs restantes, celles de D_s^j et D_n^j .

Pour résoudre le système (7), on est amené à faire parcourir un élément "i" quelconque, se trouvant sur la frontière, suivant 3 cas:

1^{er} cas: L'élément se trouve sur le contour libre ($\partial\Omega_1$):

Suivant que les contraintes, ou les déplacements qui sont prescrites on obtient:

i) Contraintes prescrites : $\sigma_s^{i(1)} = (\sigma_s)_0$; et $\sigma_n^{i(1)} = (\sigma_n)_0$

$$b_s^i = (\sigma_s)_0 ; \quad b_n^i = (\sigma_n)_0 \quad (8a,b)$$

$$C_{ss}^{ij} = \begin{cases} A_{sn}^{ij(1)} & j \leq N_1 \\ 0 & N_1+1 \leq j \leq N \end{cases} \quad (8c)$$

De la même manière on obtient C_{sn}^{ij} , C_{ns}^{ij} , C_{nn}^{ij} .

ii) Déplacements prescrits : $u_s^{i(1)} = (u_s)_0$; et $u_n^{i(1)} = (u_n)_0$

$$b_s^i = (u_s)_0 ; \quad b_n^i = (u_n)_0 \quad (9a,b)$$

$$C_{ss}^{ij} = \begin{cases} B_{sn}^{ij(1)} & j \leq N_1 \\ 0 & N_1+1 \leq j \leq N \end{cases} \quad (9c)$$

De la même manière on obtient C_{sn}^{ij} , C_{ns}^{ij} , C_{nn}^{ij} .

2^{ème} cas : L'élément se trouvant sur le contour libre ($\partial\Omega_2$)

On procède de la même façon que précédemment, à l'exception du changement des propriétés élastiques en (E_2, ν_2, G_2) , ainsi que les éléments influençants, ie, j variant de de $(N+1)$ à N

Exemple: Si les conditions aux limites sont les contraintes

$$\text{On a : } \sigma_s^{(2)} = (\sigma_s)_0 \text{ ; et } \sigma_n^{(2)} = (\sigma_n)_0$$

$$b_s = (\sigma_s)_0 \text{ ; } b_n = (\sigma_n)_0 \quad (10a,b)$$

$$C_{ss}^{ij} = \begin{cases} 0 & j \leq N_1 \\ A_{ss}^{(2)} & N_1+1 \leq j \leq N \end{cases} \quad (10c)$$

Même chose pour $C_{ns}^{ij}, C_{sn}^{ij}, C_{nn}^{ij}$.

3^{ème} cas: c'est le cas le plus délicat; l'élément se trouvant sur l'interface doit satisfaire quatre (04) conditions de continuité :

- deux (02) conditions concernant les contraintes (σ_s, σ_n) ;
- et les deux (02) autres les déplacements (u_s, u_n) .

Supposant ,maintenant que l'élément "i" se trouve sur l'une des deux interfaces ,il existe un autre élément (fictif) "i*" qui lui est coincident et appartenant a l'autre interface .

Pour mener à bien la mise en équation du système (7) on imposera deux conditions de continuité ,par exemple celles concernant les contraintes, à l'un des deux éléments ,tandis que les deux autres (celles des déplacements) sont imposées à l'autre élément .

Donc le cas où l'élément "i" appartient à l'interface du contour $(\partial\Omega_1)$, les deux conditions de continuité des contraintes sont données par :

$$\begin{aligned} \sigma_e^{(1)} - \sigma_e^{*(2)} &= 0 \\ \sigma_n^{(1)} - \sigma_n^{*(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Les quantites $b_e^i, b_n^i, C_{ee}^{ij}$, ect ,dans (7) sont :telles que :

$$b_e^i = \sigma_e^{(1)} - \sigma_e^{*(2)} = 0 \quad (12a)$$

$$b_n^i = \sigma_n^{(1)} - \sigma_n^{*(2)} = 0 \quad (12b)$$

$$C_{ee}^{ij} = \begin{cases} A_{ee}^{ij(1)} & j \leq N_1 \\ -A_{ee}^{ij(2)} & N_1+1 \leq j \leq N \end{cases} \quad (12c)$$

De la même façon on obtient $C_{en}^{ij}, C_{ne}^{ij}, C_{nn}^{ij}$.

On renforce les conditions sur l'interface par les deux conditions de continuité des déplacements concernant le second élément .

En considérant à présent que l'élément "i" appartient à l'interface du contour $(\partial\Omega_2)$ (tandis que "i" se trouve sur $(\partial\Omega_1)$, on a les conditions suivantes :

$$u_e^{*(1)} + u_e^{(2)} = 0 \quad (13)$$

$$u_n^{*(1)} + u_n^{(2)} = 0$$

Soit i

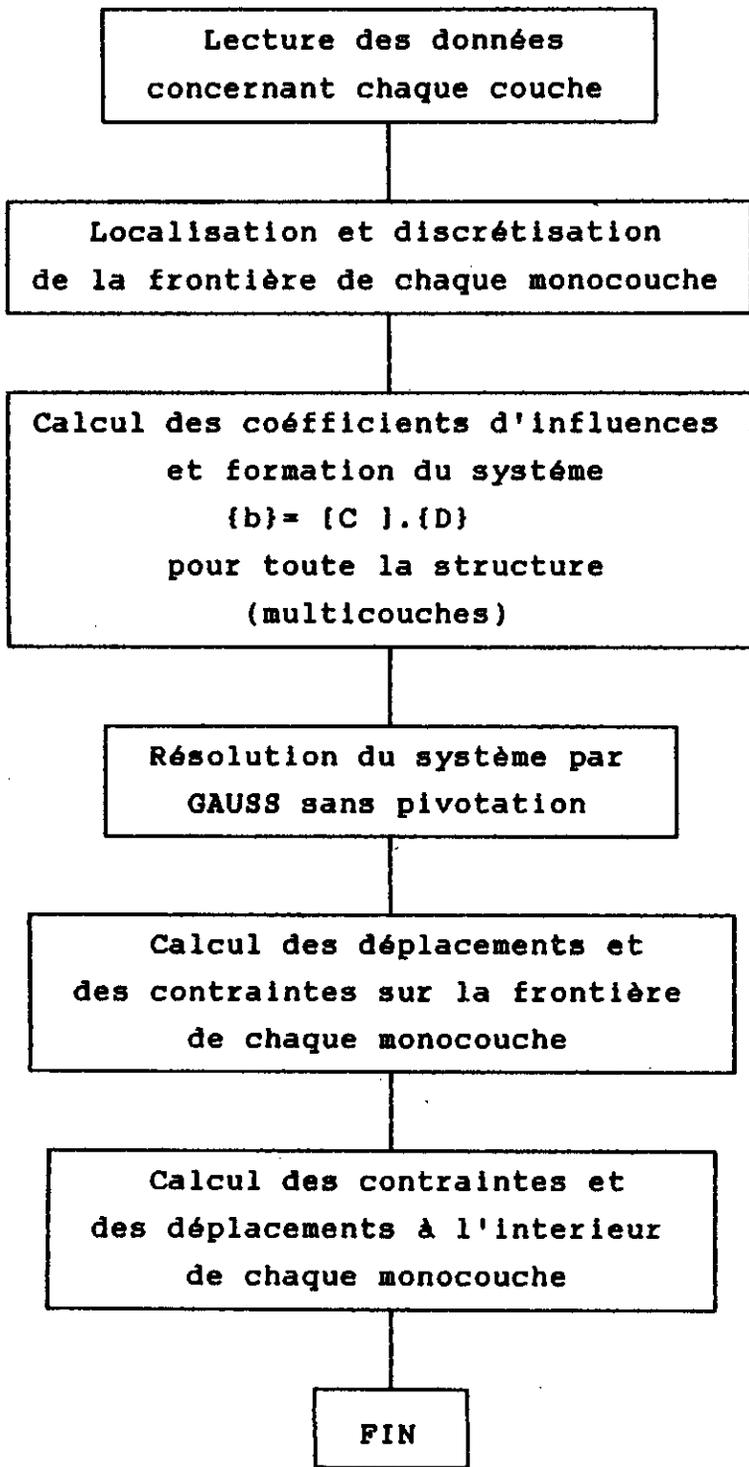
$$b_e^i = u_e^{*(1)} + u_e^{(2)} = 0 \quad (14a)$$

$$b_n^i = u_n^{*(1)} + u_n^{(2)} = 0 \quad (14b)$$

$$C_{ee}^{ij} = \begin{cases} B_{ee}^{ij(1)} & j \leq N_1 \\ B_{ee}^{ij(2)} & N_1+1 \leq j \leq N \end{cases} \quad (14c)$$

De la même façon on écrit C_{en}^{ij} , C_{ns}^{ij} , C_{nn}^{ij} .

Se basant sur l'algorithme ci-dessus, on a pu mettre en place un logiciel pour la résolution des problèmes d'élasticité pour les corps non homogènes, et dont l'organigramme est donnée ci-après :

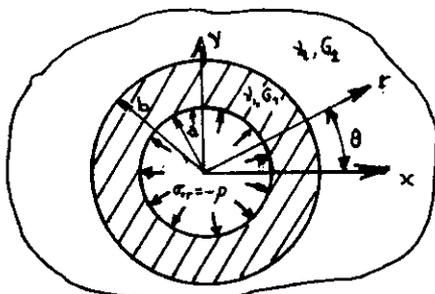


EXEMPLES

EXEMPLE 1:

Un anneau (ν_1, G_1) dont le rayon interne $r=a$ est soumis à une compression radiale $\sigma_{rr} = -P$.

Cet anneau est à l'intérieur d'un trou d'une plaque infinie (ν_2, G_2) non sollicitée à l'infini comme schématisée par la figure-1.



Connaissant la solution analytique d'un tube simple entourant une paroi et qui est définie par (voir TIMOSHENKO-FLUGGE):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= A - B r^{-2} & ; & \quad \sigma_{\theta\theta} = A + B r^{-2} \\ u_{rr} &= \frac{1+\nu}{E} \left[A (1-2\nu) r + B r^{-1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (15a, b, c)$$

On établit la solution analytique à notre problème en formulant que :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^1 &= A_1 - B_1 r^{-2} \\ \sigma_{\theta\theta}^1 &= A_1 + B_1 r^{-2} \\ u_{rr}^1 &= \frac{1+\nu}{E} \left[A_1 (1-2\nu) r + B_1 r^{-1} \right] \end{aligned} \right\} \quad a \leq r \leq b \quad (16a, b, c)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^2 &= A_2 - B_2 r^{-2} \\ \sigma_{\theta\theta}^2 &= A_2 + B_2 r^{-2} \\ u_{rr}^2 &= \frac{1+\nu}{E} \left[A_2 (1-2\nu) r + B_2 r^{-1} \right] \end{aligned} \right\} \quad b \leq r \quad (17a, b, c)$$

Et tenant compte des conditions aux limites et celles de continuité on obtient les contraintes suivantes (voir CROUCH) :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{1-a^2/b^2} \left[\left(p \frac{a^2}{b^2} - p' \right) - (p-p') \frac{a^2}{r^2} \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{1-a^2/b^2} \left[\left(p \frac{a^2}{b^2} - p' \right) + (p-p') \frac{a^2}{r^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad a \leq r \leq b \quad (18a, b)$$

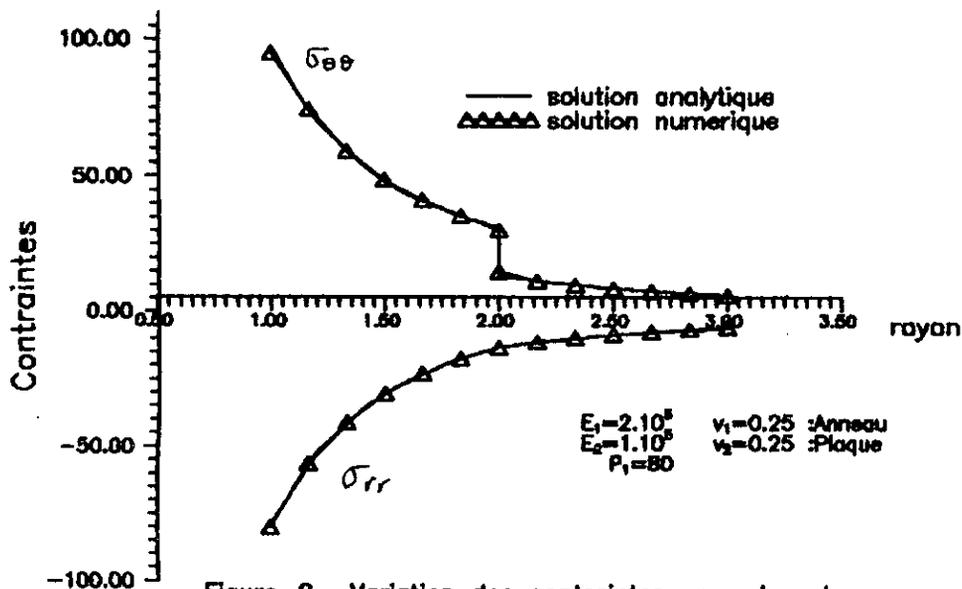
$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= - p' \frac{b^2}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= + p' \frac{b^2}{r^2} \end{aligned} \right\} r \geq b \quad (19a,b)$$

$$\text{où } p' = \frac{2(1-\nu_1) p \cdot a^2/b^2}{2(1-\nu_1) + (G_1/G_2 - 1)(1-a^2/b^2)} \quad (20)$$

La solution numérique à ce problème est obtenue pour le cas :

$$a/b=1/2 ; \nu_1=\nu_2=0.25 ; G_1/G_2=E_1/E_2=2 ; \text{ et } p/G_1=10^{-8}$$

Tenant compte de la double symétrie on décritise entre 0 et $\pi/2$, le contour $r=a$ et les deux parties de l'interface $r=b$, en 20 éléments chacun. La figure-2 révèle la précision avec laquelle les résultats numériques convergent vers la solution analytique.



On remarque qu'à l'encontre des contraintes normales qui sont continues les contraintes tangentielles ne le sont pas et présentent une discontinuité au niveau de l'interface, ceci se traduit par le fait que les deux lèvres d'une discontinuité sous pression ne se déforment pas de la même manière , donc

pour deux discontinuités parallèles, les déformations ϵ_{xx} et donc les contraintes tangentielles sont discontinues en passant d'une DD à une autre (pour plus de détails voir annexe)

Toutefois on note que les contraintes tendent vers la valeur nulle imposée par hypothèse (chargement nul à l'infini), et qu'à partir de l'interface elles deviennent symétriques un fait assuré par les conditions de continuité.

EXEMPLE 2: Tube frette

L'exemple précédent peut être traité pour le cas où le rayon externe de l'anneau a une valeur supérieure à b, et égale à $b + \delta r$.

On doit comprimer l'anneau pour permettre son montage sur le trou de la plaque.

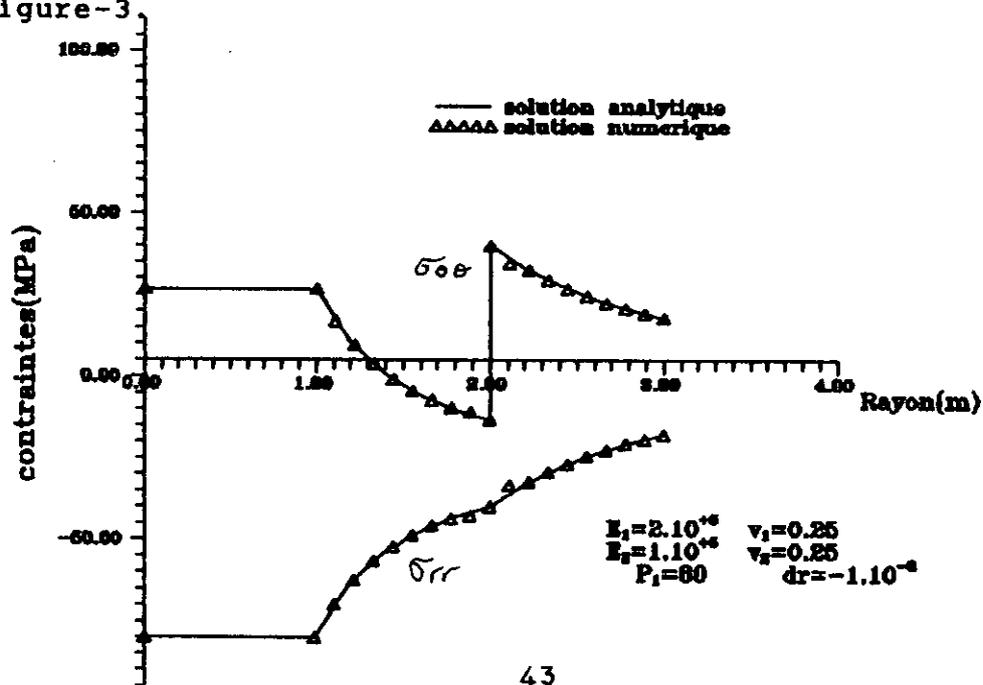
Ce problème admet comme solutions analytiques celles des équations (1) et (2), seulement p' est défini comme :

$$p' = \frac{2(1-\nu_1) p \cdot a^2/b^2 + 2G_1(1-a^2/b^2) \cdot \delta r/b}{2(1-\nu_1) + (G_1/G_2 - 1)(1-a^2/b^2)} \quad (21)$$

La solution numérique à ce problème est obtenue en remplaçant la condition de continuité (4.b) pour le déplacement normal par :

$$u_n^{(1)}(Q) - \delta r = -u_n^{(2)}(Q) \quad (22)$$

Pour $\frac{\delta r}{r} = -0.5 \cdot 10^{-3}$, on obtient les résultats donnés par la figure-3



On remarque que pour les mêmes données que l'exemple précédent

la solution numérique et celle analytique coïncident.

en effet, on voit que le jeu radial existant fait que la décroissance de $\sigma_{\theta\theta}$ est plus prononcée pour assurer les conditions de frettage .

Exemple 3 : anneau frette dans un autre anneau (fig.5)

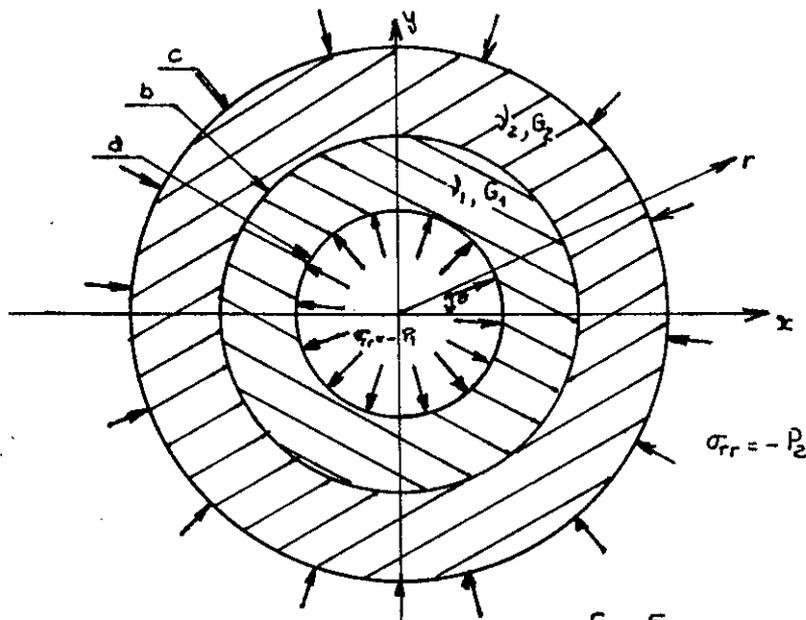


Fig-5

La solution analytique est définie par :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= A_1 - B_1 \cdot r^{-2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= A_1 + B_1 \cdot r^{-2} \end{aligned} \right\} a \leq r \leq b$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= A_2 - B_2 \cdot r^{-2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= A_2 + B_2 \cdot r^{-2} \end{aligned} \right\} b \leq r \leq c$$

$$A_1 = -P_1 + B_1 \cdot a^{-2}$$

$$B_1 = \frac{-P_2 + P_1}{(a^{-2} - b^{-2})} + B_2 \frac{c^{-2} - b^{-2}}{(a^{-2} - b^{-2})}$$

$$B_2 = \frac{-P_1(1-\nu_1) + P_2 \frac{G_1}{G_2}(1-\nu_1) - \frac{P_2 - P_1}{(a^{-2} - b^{-2})}(a^{-2}b(1-\nu_1) + b^{-1})}{\left[(c^{-2} - b^{-2})((1-\nu_1)a^{-2}b + b^{-1}) + \left(\frac{G_1}{G_2}c^{-2}(1-\nu_2)b + \frac{G_1}{G_2}b^{-1} \right) \right]}$$

$$A_2 = -P_2 + B_2 c^{-2}$$

i) On maintient les mêmes propriétés élastiques que celles de l'exemple précédent soit:

$$\nu_1 = \nu_2 = 0.25 ; \quad E_1/E_2 = 2 ;$$

$$\text{On prend } E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa} ; \quad P_1/G_1 = 10^{-3}$$

le rayon interne de l'anneau (1) ($1 \leq r \leq 2$) est soumis à une compression radiale; le rayon externe de l'anneau (2) ($2 \leq r \leq 3$) n'est pas chargé ($P_2 = 0$).

La figure-4 illustre les résultats numériques obtenues :

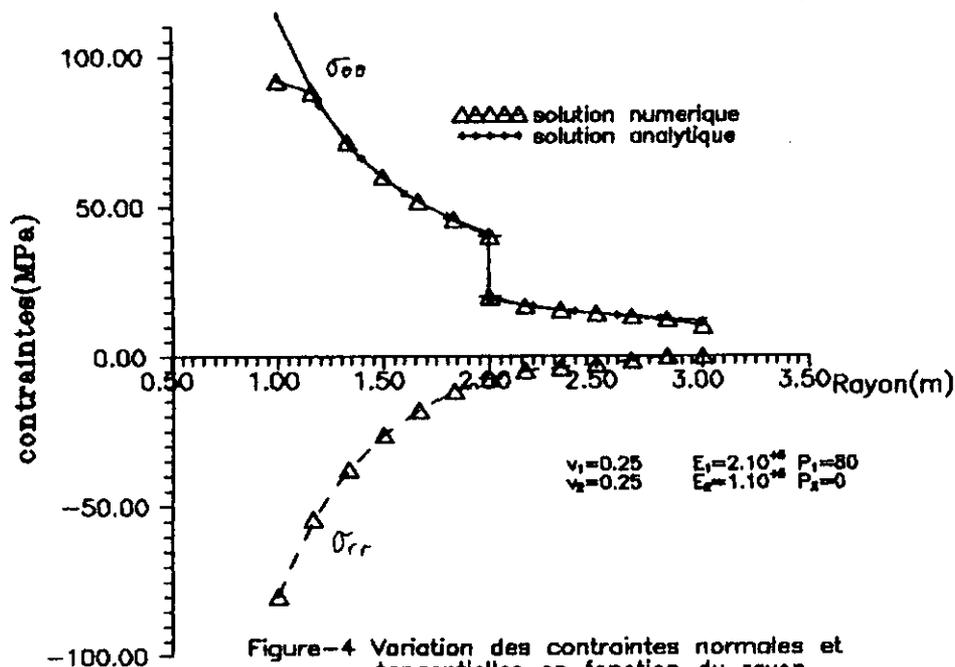


Figure-4 Variation des contraintes normales et tangentielles en fonction du rayon

On remarque la même allure que l'exemple 1, à l'exception que σ_{rr} atteint la valeur nulle au point $r=3$ (rayon externe de l'anneau 2) suivant les conditions aux limites imposées.

VISCOELASTICITE LINEAIRE

I-INTRODUCTION

Dans les équations d'états de certains nombre de corps ,un nouveau facteur intervient :le temps.

En effet, la loi de comportement du corps est décrite par la relation fonctionnelle suivante :

$$F(\sigma, \epsilon, t) = 0 \quad (1)$$

cette relation trouve sa forme la plus simple si l'on lie deux milieux qui s'interpenètrent mutuellement, l'un admettant comme modèle celui d'un corps élastique, et l'autre d'un fluide visqueux: le nouveau milieu obtenu s'appelle milieu viscoélastique. Cela dit, la théorie des milieux viscoélastiques consiste à généraliser deux domaines se développant séparément suivant deux théories à savoir :

- i) La théorie de l'élasticité linéaire (loi de HOOKE)
- ii) La théorie des liquides visqueux (loi de NEWTON)

II-COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE UNIAXIAL :

Il existe deux expériences fondamentales pour la description du comportement viscoélastique uniaxial qui sont :

1 EXPERIENCE DE FLUAGE :

Consiste à soumettre une éprouvette à une charge simple définie :

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t-t_0) \quad (2)$$

où $H(x)$ est dite fonction d'HEAVISIDE définie par :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (3)$$

L'évolution de déformation ϵ en fonction du temps est :

$$\epsilon(t) = \sigma_0 J(t_0, t; \sigma_0) \quad (4)$$

Où J représente fonction de fluage donnée par :

Conclusion: Un matériau est dit viscoélastique si sous l'action d'une charge constante il manifeste l'existence de déformations différés et cela quelque soit le niveau de charge inférieur à la limite de rupture.

REMARQUES:

1-Le comportement du matériau est viscoélastique linéaire s'il existe une correspondance fonctionnelle linéaire entre la contrainte $\sigma(t)$ et la déformation $\epsilon(t)$.

2-Le principe de superposition reste applicable pour les matériaux viscoélastiques linéaires.

3-Quand $\lim J(t, t_0)$ est finie, le matériau est asymptotiquement stable ; il est dit solide.

Lorsque $\lim J(t, t_0)$ augmente indéfiniment avec le temps on parlera de fluide.

III-MATERIAUX NON VIEILLISSANT :

Ce sont les matériaux dont les propriétés mécaniques n'évoluent pas avec le temps ; l'âge du matériaux n'intervient pas.

Pour ce type de matériaux , les fonctions J et R ne dépendent que d'une seule variable .

IV-FORMULES DE BOLTZMANN :

Partant de l'intégrale de STIELTJES , connue aussi sous le nom de l'intégrale héritaire (voir FLUGGE), et définie par :

$$F(t) = \int g(\tau, t) \partial h / \partial \tau(\tau) d\tau \tag{9}$$

Intégrons par parties on obtient :

$$F(t) = h(t) g(t, t) \Big|_{-\infty}^t - \int_{-\infty}^t h(\tau) \partial g / \partial \tau(\tau, t) d\tau \tag{10}$$

On obtient ainsi les formules de BOLTZMANN qui sont :

pour le cas du fluage :

$$\epsilon(t) = \sigma(t) J(0) - \int \sigma(\tau) \partial J / \partial \tau(\tau, t) d\tau \tag{11}$$

pour le cas de relaxation :

$$\sigma(t) = \epsilon(t) R(0) - \int \epsilon(\tau) \partial R / \partial \tau(\tau, t) d\tau \tag{12}$$

Ou bien en utilisant le produit de convolution de RIEMANN

$$\epsilon(t) = DJ(t) / Dt * \sigma(t) \tag{13}$$

$$\sigma(t) = DR(t) / Dt * \epsilon(t)$$

(voir NOWACKI)

PRINCIPE DE SUPERPOSITION DE BOLTZMANN:

Ce principe reste la base des équations mathématiques de la théorie des corps viscoélastiques linéaires, il s'énonce comme :
"Si un cycle de contraintes $\sigma_1(t)$ provoque la déformation $\epsilon_1(t)$ et le cycle $\sigma_2(t)$ la déformation $\epsilon_2(t)$, la somme des cycles $\sigma_1(t)+\sigma_2(t)$ entraîne la déformation de $\epsilon(t)=\epsilon_1(t)+\epsilon_2(t)$."

V-COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE TRIDIMENSIONNEL

Lorsqu'il s'agit d'une sollicitation tridimensionnelle on est amené à définir :

-Une matrice de fonctions de fluage [J] qui pour une sollicitation tridimensionnelle en contraintes:

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}^c H(t-\tau) \quad (14)$$

La réponse en déformation est définie par :

$$\epsilon_{ij}(t) = J_{ijkl}(t-\tau) \sigma_{kl}^o \quad (\text{avec sommation sur les indices}) \quad (15)$$

-Une matrice des fonctions de relaxation [R] qui pour une sollicitation tridimensionnelle en déformations:

$$\epsilon_{ij}(t) = \epsilon_{ij}^c H(t-\tau) \quad (16)$$

la réponse en contraintes est définie par :

$$\sigma_{ij}(t) = R_{ijkl}(t-\tau) \epsilon_{kl}^o \quad (\text{avec sommation sur les indices}) \quad (17)$$

Ainsi la relation (13) s'écrit pour le cas tridimensionnel :

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}(t) &= DJ_{ijkl} / Dt * \sigma_{kl}(t) \\ \sigma_{ij}(t) &= DR_{ijkl} / Dt * \epsilon_{kl}(t) \end{aligned} \quad (18)$$

VI-TRANSFORME DE LAPLACE :

La transformé de LAPLACE remplace le calcul dans l'algèbre de la convolution de RIEMANN. Elle est définie pour une fonction quelconque f, comme :

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L} \{ f(t) \} = \langle f, e^{-st} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (19)$$

Nous pouvons, ainsi écrire les différents paramètres d'un problème viscoélastique en transformé de LAPLACE .

Données inconnues :

- Forces volumiques : $f(t) \longrightarrow f(\phi)$ (20)

- Conditions aux limites :

$$u_i(t) = \bar{u}_i(t) \longrightarrow u_i(s) = \bar{u}_i(\phi) \quad (21)$$

$$t_i(t) = \bar{t}_i(t) \longrightarrow t_i(s) = \bar{t}_i(\phi) \quad (22)$$

avec $\bar{t}_i = \bar{\sigma}_{ij} \cdot n_j$

Equations : Pour un problème statique, les équations en transformé de LAPLACE sont :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij,j} + \bar{f}_i &= 0 & (a) \\ \bar{\epsilon}_{ij} &= (1/2)(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) & (b) \\ \bar{\sigma}_{ij} &= \bar{\lambda} \cdot \bar{\epsilon}_{ii} \delta_{ij} + 2\bar{\mu} \bar{\epsilon}_{ij} & (c) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Remarques :

1- Les équations (23) sont similaires à celles d'un problème d'élasticité linéaire (si le type de conditions limites ne varie pas dans le temps).

2- $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$ dans l'équation (23c) sont juste des fonctions qui symbolisent les coefficients de POISSON, pour le problème viscoélastique correspondant .

VII- PRINCIPE DE CORRESPONDANCE :

Pour résoudre un problème viscoélastique on pourra :

- Se servir de la solution correspondante du problème élastique.
- Prendre l'écriture transposée, en remplaçant dans l'expression de la solution élastique :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda} &\text{ par } \lambda(\phi) \\ \bar{\mu} &\text{ par } \mu(\phi) \\ \bar{f} &\text{ par } f(\phi) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

etc...

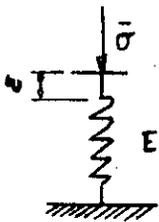
On obtient la transformé de LAPLACE de la solution viscoélastique et en prenant son inverse, on obtient la solution dans l'espace temps .

VIII- MODELES RHEOLOGIQUES POUR LE COMPORTEMENT
VISCOELASTIQUE UNIAxiaL :

Le but est de construire les équations d'état et étudier les lois physiques ayant trait au comportement des matériaux visco-élastiques linéaires .

1°) Modèles types : (en viscoélasticité)

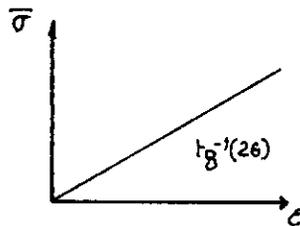
a- Le ressort ; matériau linéaire élastique (solide)



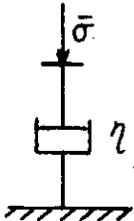
Sa loi de comportement est decrite par :

$$\bar{\sigma} = E \bar{\epsilon} \quad (25)$$

Modèle de HOOKE :



b- L'amortisseur : matériau viscoélastique linéaire



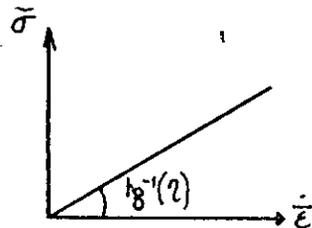
Sa loi de comportement :

$$\bar{\sigma} = \eta \dot{\bar{\epsilon}} \quad (26)$$

Remarques :

- Un fluide est en continuelle déformation
- C'est un modèle qui dissipe de l'énergie

Modèle de NEWTON :



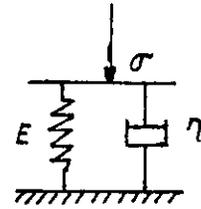
$$\text{-Fonction de Fluage : } J(t) = \frac{1}{\eta} H(t) \quad (27)$$

$$\text{-Fonction de relaxation : } R(t) = \eta \delta(t) \quad (28)$$

$\delta(t)$:impulsion de DIRAC

2°) Modèles composés :

a-Modèle de VOIGT : solide viscoélastique



-L'équation décrivant le comportement est :

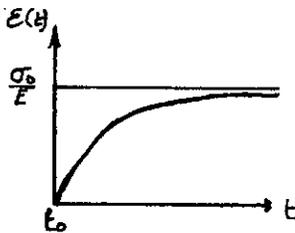
$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) \quad (29)$$

-Sa fonction de Fluage : $J(t) = \frac{1}{E}(1 - \exp(-E t_0/\eta))H(t) \quad (31)$

-Sa fonction de relaxation : $R(t) = EH(t) + \eta\delta(t) \quad (32)$

Sa réponse en déformation : $\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}(1 - \exp(-t/\lambda))H(t) \quad (33)$

λ : temps de retardation .



Réponse en déformation pour l'expérience du Fluage du modèle de VOIGT.

Remarque : ce modèle présente une déformation asymptotiquement stable.

b-Modèle de MAXWELL : fluide viscoélastique



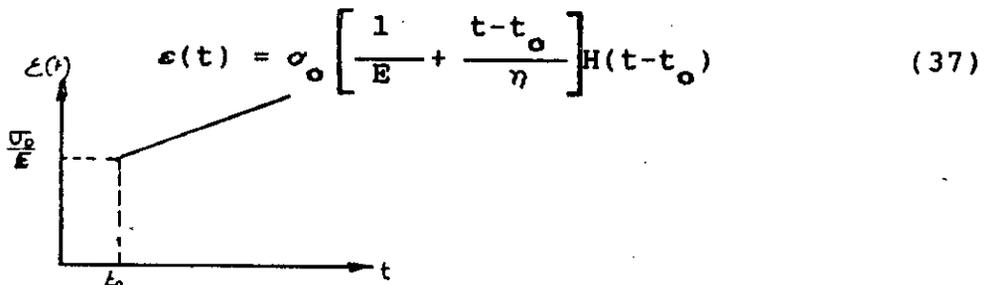
Sa loi de comportement :

$$\frac{\sigma(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta} = \dot{\varepsilon}(t) \quad (34)$$

-Sa fonction de Fluage : $J(t) = \frac{1}{E}(1+t)H(t) \quad (35)$

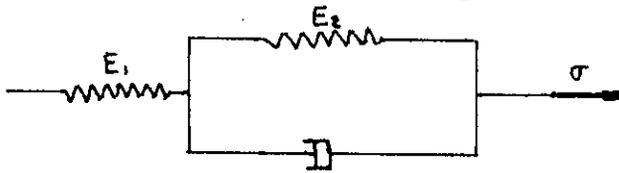
-Sa fonction de relaxation : $R(t) = E \exp(-E.t/\eta).H(t) \quad (36)$

Pour l'essai de Fluage, on a la réponse en déformation :



Réponse en déformation pour l'essai du Fluage du modèle de MAXWELL.

Modèle du solide à trois paramètres :



Ce modèle est décrit par la relation :

$$\sigma \left[\frac{E_1 + E_2}{E_2} \right] + \frac{\eta}{E_2} \dot{\sigma} = \eta \dot{\epsilon} + E_1 \epsilon \quad (38)$$

qu'on peut réécrire sous la forme :

$$\sigma + P_1 \dot{\sigma} = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon} \quad (39)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{\eta}{E_1 + E_2} \\ q_0 &= \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \\ q_1 &= \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

en passant par la transformé de LAPLACE :

$$\bar{\sigma} (1 + P_1 s) = (q_0 + q_1 s) \bar{\epsilon} \quad (41)$$

équivalent à : $\bar{P} \bar{\sigma} = \bar{Q} \bar{\epsilon}$

la transformé de LAPLACE pour la fonction de Fluage est :

$$\bar{J} = \frac{\bar{\epsilon}}{s \bar{\sigma}} = \frac{\bar{P}}{s \bar{Q}} \quad (42)$$

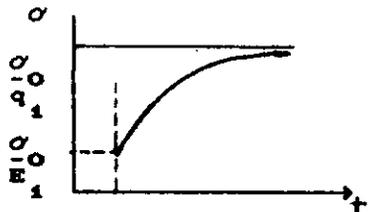
$$\text{celle de relaxation est : } \bar{R} = \frac{\bar{Q}}{s \bar{P}} \quad (43)$$

Soit donc en utilisant les inverses :

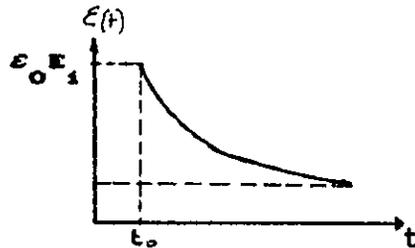
$$J(t) = \left[\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} (1 - \exp(-E_2 t / \eta)) \right] \cdot H(t) \quad (44)$$

$$R(t) = \left[\frac{E_1}{E_1 + E_2} \right] \cdot \left[E_2 + E_1 \exp \left[- \frac{E_1 + E_2}{\eta} t \right] \right] \cdot H(t) \quad (45)$$

les expériences fondamentales (de viscoélasticité) pour ce modèle révèlent les représentations ci-dessous :



Essai de Fluage
réponse en déformation



Essai de relaxation
réponse en contrainte

Remarques :

- 1-Ce modèle présente une élasticité instantanée, due à la présence du ressort en série avec le modèle de VOIGT .
- 2-Il présente une déformation asymptotiquement stable .

IX-APPLICATION DE LA M.D.D AUX PROBLEMES VISCOELASTIQUES:

A cette fin ,le principe de correspondance nous sera d'une grande utilité .

En effet ,le passage par le problème élastique correspondant nous facilitera la tâche (problème déjà traité par la M.D.D) avant de passer à la transformé de LAPLACE ,où la difficulté se met en évidence.

1-PROBLEME DE FLUAGE

Les conditions aux limites sont: $t_i(\omega) = \bar{t}_i(\omega) = [H(t)] \cdot t_i^c$ (46)
en tout point de Ω

Cela se traduit numériquement par: $\{\sigma_i(\omega)\} = [H(\omega)] \cdot \{\sigma_0\}$ (47)

Avec: $[H(t)] = [I] \cdot H(t)$ (48)

[I] étant la matrice Identité

-LE problème élastique correspondant formule:

$$\{\sigma_c\} = [A] \cdot \{D\} \quad (49)$$

$[A]$ peut être décomposée sous la forme:

$$[A] = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} [A]^* \quad (50)$$

Où $[A]^*$ est une matrice à coefficients géométriques seulement.

En supposant qu'elle est inversible, l'équation (49) s'écrit:

$$\{D\}_\bullet = \frac{2\pi(1-\nu_\bullet)}{G_\bullet} [A]^{*-1} \{\sigma_c\}_\bullet \quad (51)$$

La transformé de LAPLACE de l'équation (51) est :

$$\{\bar{D}(s)\} = \frac{2\pi(1-\bar{\nu}(s))}{sG(s)} [A]^{*-1} \{\bar{\sigma}_c(s)\} \quad (52)$$

Notre but c'est de trouver les D.D viscoélastiques, pour cela on inverse l'équation (49); sachant que :

$$\{\bar{\sigma}_c(s)\} = \frac{1}{s} [I] \{\sigma_c^0\} \quad (53)$$

On obtient alors :

$$\{\bar{D}(t)\}_v = 2\pi [A]^{*-1} \{\sigma_c^0\} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1-\bar{\nu}(s)}{sG(s)} \right\} \quad (54)$$

Les contraintes à l'intérieur du corps viscoélastique, pour le cas du fluage, sont identiques à celles du problème élastique correspondant.

On a:

$$\{\sigma_m\}_\bullet = \frac{G_\bullet}{2\pi(1-\nu_\bullet)} [K]^* \{D\}_\bullet \quad (55)$$

Où $[K]^*$ est une matrice à coefficients géométriques seulement.

D'après l'équation (48), on peut réécrire l'équation (52) :

$$\{\sigma_m\}_c = [K]^* [A]^{*-1} \{\sigma_c\}_\bullet \quad (56)$$

Soit en passant par la transformé de LAPLACE et son inverse :

$$\{\sigma_m(s)\} = [K]^* [A]^{*-1} \{\sigma_c(s)\} \quad (57)$$

Cependant les déplacements à l'intérieur du corps dues à un élément de frontière " i " sont données par:

$$\{u(t)\}_v = \frac{1}{2} [A]^{*-1} \{\sigma_c^0\} \mathcal{L}^{-1} \left\{ [\bar{W}(s)]_i \right\} \quad (58)$$

Où
$$[\bar{W}(s)]_i = \frac{1}{sG(s)} [\bar{M}(s)]_i \quad (59)$$

La matrice $[\bar{M}(s)]$ est donnée par :

$$[M(s)] = \begin{bmatrix} \frac{-(1-2\nu(s))\sin\beta_i \bar{F}_2 + 2(1-\nu(s))}{\cos\beta_i \bar{F}_3 + \bar{y}_i (\sin\beta_i \bar{F}_4 - \cos\beta_i \bar{F}_5)} & \frac{-(1-2\nu(s))\cos\beta_i \bar{F}_2 - 2(1-\nu(s))}{\sin\beta_i \bar{F}_3 - \bar{y}_i (\cos\beta_i \bar{F}_4 + \sin\beta_i \bar{F}_5)} \\ \frac{(1-2\nu(s))\cos\beta_i \bar{F}_2 + 2(1-\nu(s))}{\sin\beta_i \bar{F}_3 - \bar{y}_i (\cos\beta_i \bar{F}_4 + \sin\beta_i \bar{F}_5)} & \frac{-(1-2\nu(s))\sin\beta_i \bar{F}_2 + 2(1-\nu(s))}{\cos\beta_i \bar{F}_3 + \bar{y}_i (\sin\beta_i \bar{F}_4 - \cos\beta_i \bar{F}_5)} \end{bmatrix}$$

Donc inverser $[W(s)]$ revient à inverser :

$$\frac{1-2\nu(s)}{sG(s)} ; \quad \frac{1-\nu(s)}{sG(s)} ; \quad \frac{1}{sG(s)}$$

En posant :

$$\left. \begin{aligned} FI1 &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1-2\nu(s)}{sG(s)} \right\} \\ FI2 &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1-\nu(s)}{sG(s)} \right\} \\ FI3 &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{sG(s)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Remarque : les fonctions FI dépendent du modèle choisi.

L'équation (48) nous donne :

$$[A] \quad \{\sigma_c\}_o = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \{D\}_o \quad (61)$$

En utilisant le principe de superposition pour toutes les DD, les déplacements seront définies comme :

$$\{u(\omega)\}_v = [W(\omega)] \frac{G}{1-\nu} \{D\}_o \quad (62)$$

De même les équations (51) et (54) s'écrivent comme :

$$\{D(\omega)\}_v = FI2 \frac{G_o}{(1-\nu_o)} \quad (63)$$

$$\{\alpha(\omega)\}_v = [K]^* \{D\}_o \frac{G_o}{2\pi(1-\nu_o)} \quad (64)$$

2-PROBLEMES DE RELAXATION

-les conditions aux limites sont : $u_i(\omega) = \bar{u}_i(\omega) = H(\omega) \cdot u_i^c$ (65)
en tout point de Ω

-Cela se traduit numériquement par : $\{u_c\} = [H(\omega)] \cdot \{u_c\}$ (66)

-Le problème élastique correspondant est :

$$\{u_c\} = [B] \cdot \{D\} \quad (67)$$

-Les solutions élastiques sont : $\{D\} = [B]^{-1} \cdot \{u_c\}$ (68)

L'écriture transposée de l'équation (68) est :

$$\{D(\omega)\} = [B(\omega)]^{-1} \cdot \{u_c(\omega)\} \quad (69)$$

Neanmoins la matrice [B] ne peut être décomposée en un produit de deux termes , l'un géométrique seulement et l'autre élastique seulement , respectivement.

Vu que la matrice [B] ne fait intervenir comme terme élastique que le coefficient ν_c , on restreindra notre étude aux matériaux ayant une fonction $\nu(\omega)$, correspondante de ν_c , constante on a :

$$\nu_c = \nu_v = \bar{\nu}(\omega) = \text{cste.}$$

L'inverse de l'équation (69) s'écrit alors comme :

$$\{D(\omega)\}_v = [B]^{-1} \cdot \{u_c(\omega)\} = [B]^{-1} \{u_i\} \quad (70)$$

$$\boxed{\{D(\omega)\}_v = \{D\}_c} \quad (71)$$

-Calcul des déplacements:

-Les déplacements sont données par :

$$\{u(\omega)\} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)_v} [M]_v \cdot \{D\}_v \quad (72)$$

Remarque :

Les D.D et les déplacements sont identiques à ceux du problème élastique correspondant , du fait que $\nu_c = \nu_v = \text{cste.}$

-Calcul des des contraintes :

-Le problème élastique correspondant:

$$\{\sigma\} = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \cdot [A]^* \cdot \{D\} \quad (73)$$

-L'écriture transposée est :

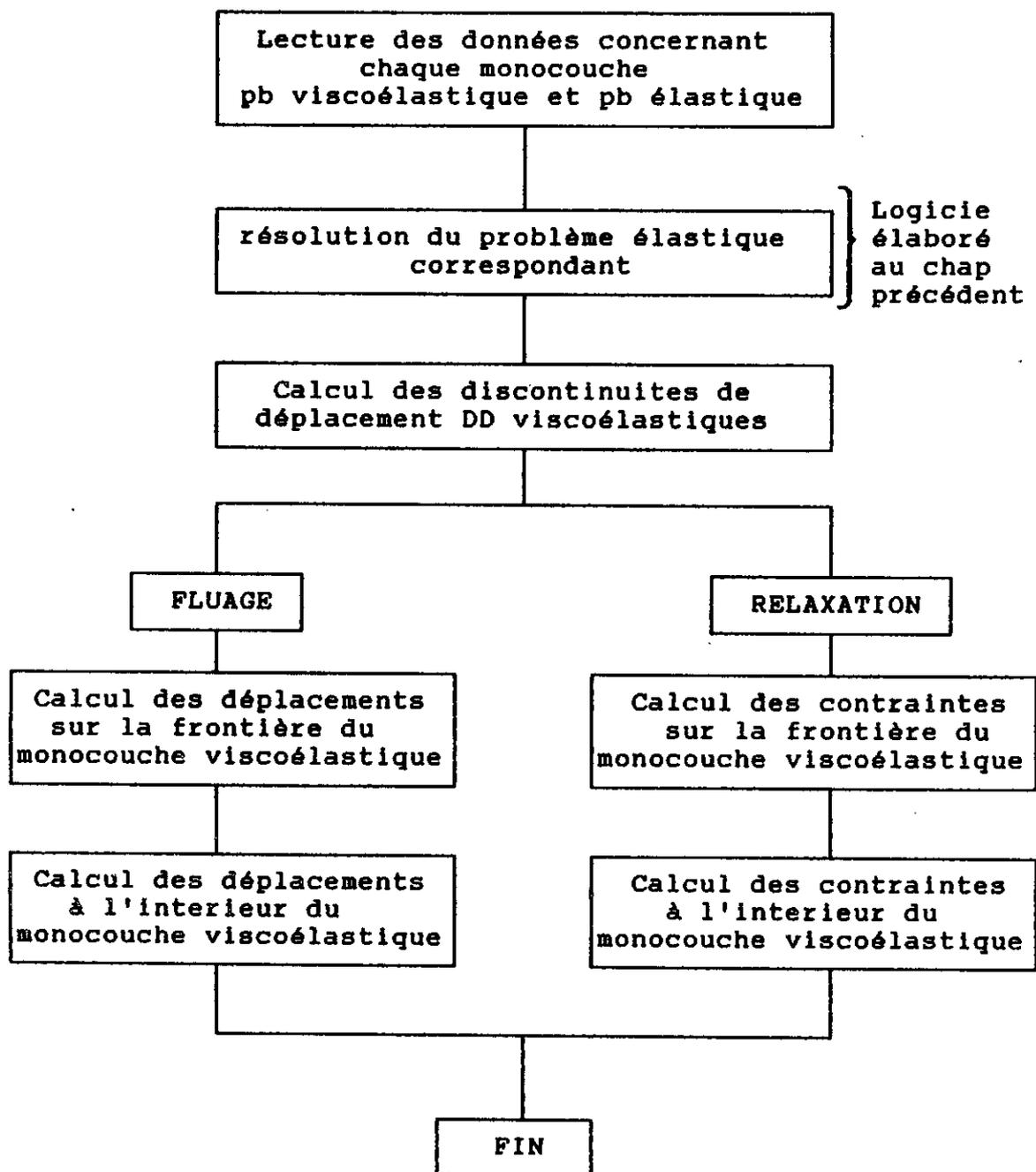
$$\{\bar{\sigma}(s)\} = \frac{\bar{G}(s)}{2\pi(1-\nu(s))} [A]^* \{\bar{D}(s)\} \quad (74)$$

Soit donc en inversant l'équation (74), l'expression des contraintes suivante :

$$\{\sigma(s)\} = \frac{1}{2\pi(1-\nu)} [A]^* \{D\}_v \mathcal{L}^{-1} \{\bar{G}(s)\} \quad (75)$$

Un logiciel a été mis en place pour la résolution des problèmes de fluage et de relaxation pour des milieux non homogènes viscoélastiques .

L'algorithme de ce logiciel est résumé par l'organigramme de figure de la page suivante .



Organigramme pour le calcul des problèmes de FLUAGE et de RELAXATION

EXEMPLES

Pour illustrer l'application de la M.D.D aux milieux multicouches viscoélastiques, on adoptera deux types de comportement :

Comportement type 1:

pour lequel on considère les monocouches ayant un comportement élastique en dilatation et un comportement solide à 3 paramètres en cisaillement on a alors :

$K = \text{cste}$; module de dilatation volumique (voir annexe)

- La fonction correspondante à G , module de cisaillement, est:

$$G = \frac{\sigma_{xy}}{2\varepsilon_{xy}} \quad (76)$$

on a de l'équation (39) : $\bar{G}(\phi) = \frac{\bar{Q}(\phi)}{2\phi P(\phi)}$ (77)

Pour un solide à trois paramètres on les relations:

$$\bar{Q} = \frac{1}{\phi} + P_1 \phi \quad \text{et} \quad \bar{Q} = q_0/\phi + q_1 \phi \quad (78a, b)$$

- La fonction correspondante à ν est :

En élasticité on a : $\nu = \frac{1}{2} \frac{3K-2G}{3K+G}$ (79)

soit $\bar{\nu}(\phi) = \frac{1}{2} \frac{3K-2\bar{G}(\phi)}{3K+\bar{G}(\phi)}$ (80)

les fonctions FI correspondants sont alors :

$$FI1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1-2\bar{\nu}(\phi)}{\phi \bar{G}(\phi)} \right\} = \left\{ \frac{6P_1}{q_1+6KP_1} \right\} \cdot \left\{ \exp(-Ct) + \frac{B}{C} (1-\exp(-Ct)) \right\} \quad (81)$$

$$FI2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1-\bar{\nu}(\phi)}{\phi \bar{G}(\phi)} \right\} = \left[\frac{4P_1}{q_0} - \frac{4}{q_0} \right] \exp(-Dt) + \frac{4}{q_0} - \left\{ \frac{18KP_1}{(6KP_1+q_1)q_1} \right\} \left\{ \frac{B^2}{DC} + \frac{(B-D)^2}{D(D-C)} \exp(-Dt) + \frac{(B-C)^2}{C(C-D)} \exp(-Ct) \right\} \quad (82)$$

$$F13(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\Delta G(s)} \right\} = \frac{2}{q_0} + \frac{2P_1}{q_1} - \frac{2}{q_0} \exp(-Dt) \quad (83)$$

Avec :

$$q_0 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \quad (a) \quad ; B = \frac{1}{P_1} \quad (d)$$

$$P_1 = \frac{\eta}{E_1 + E_2} \quad (b) \quad ; C = \frac{q_0 + 6K}{q_1 + 6K} \quad (e) \quad (84)$$

$$q_1 = \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \quad (c) \quad ; D = \frac{q_0}{q_1} \quad (f)$$

Tout calcul fait, et en inversant (77) on obtient :

$$G(t) = \frac{E_1}{2} \exp\left(\frac{-t}{P_1}\right) + \frac{q_1}{2} (1 - \exp\left(\frac{-t}{P_1}\right)) \quad (85)$$

D'où :

$$G(0) = G_0 = 0.5 \frac{E_1}{2} \quad (86)$$

$$\nu(0) = \nu_0 = \frac{1}{2} \frac{3K - E_1}{3K + E_1/2}$$

Soit finalement le problème élastique correspondant suivant :

$E = E_1 (1 + \nu_0)$ $\nu = \nu_0$ $K = \frac{E}{3(1 - 2\nu_0)}$	(87)
---	------

Comportement type 2

Pour ce genre de comportement, on considèrera les monocouches viscoélastiques ayant un coefficient de POISSON constant, et un comportement de solide à 3 paramètres en cisaillement on a alors :

$$\nu_v = \bar{\nu}(s) = \text{cste} \quad (88)$$

$$G(0) = 0.5 E_1$$

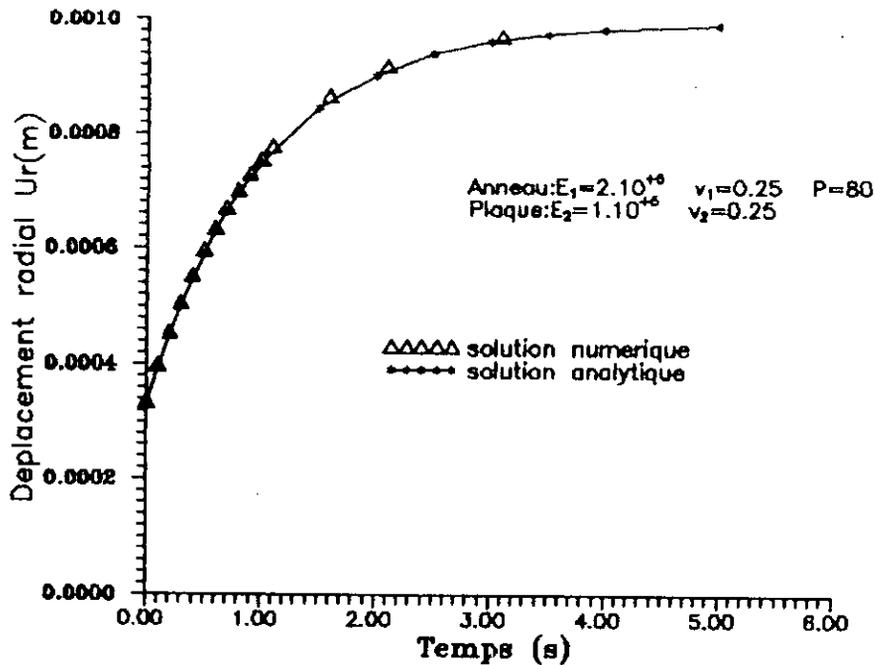


Figure-6- Variation du déplacement radial U_r en fonction du temps : cas de l'anneau à l'intérieur d'une plaque infinie.

Ayant validés nos résultats pour l'exemple précédent et pour lequel on a établi la solution analytique, on s'est proposé de voir le comportement de quelques problèmes et pour lesquels les solutions analytiques sont difficiles à établir.

ii) Pour le même cas de figure on a :

anneau élastique : $E_1 = 12500 \text{ MPa}$, $\nu_1 = 0.25$; $P_1 = 5 \text{ MPa}$

plaque viscoélastique dont le comportement est de type 2

$E_2 = 6500 \text{ MPa}$; $\nu_2 = 0.25$; $\nu_v = \nu_2 = 0.25$

le modèle rhéologique correspondant: $E_1 = E_2 = 5000 \text{ MPa}$, $\eta = 5000$

On obtient les résultats numériques illustrés par la figure-7 .On remarque la même allure que celle de l'exemple précédent et où le comportement asymptotique stable se met en évidence .

De plus, on a les relations liant les fonctions FI suivantes :

$$FI1 = (1 - 2\nu_v) FI3 \quad (89)$$

$$FI2 = (1 - \nu_v) FI3$$

Où :

$$FI3 = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\Delta G(\Delta)} \right\} = \frac{2}{q_0} + \left[\frac{2P_1}{q_1} - \frac{2}{q_0} \right] \exp(-Dt) \quad (90)$$

FLUAGE :

Exemple 1 : anneau fretté dans une plaque infinie non chargée ($P_z=0$).

i) anneau élastique, plaque présentant un comportement viscoélastique typel (voir ci-dessus)

-Données concernant l'anneau : $\nu_1 = 0.25$, $E_1 = 2.10^{+5}$; $P_1 = 80$

-Données élastiques concernant la plaque: $\nu_2 = 0.25$, $E_2 = 1.10^{+5}$

La solution analytique pour la plaque est obtenue en considérant la transformé de LAPLACE, et son inverse, des équations (IV.16,c) et (IV.17,c) on obtient alors :

$$u(r,t) = \frac{\sigma^* r^{-1}}{b^{-2} q_1} (1 - \exp(-\frac{q_0}{q_1} t)) - \frac{\sigma^* r^{-1} P_1}{b^{-2} q_1} \exp(-\frac{q_0}{q_1} t)$$

σ^* étant la valeur élastique ($t=0$) sur l'interface

La solution numérique correspondante est donnée par la fig-6 On remarque que celle-ci tend vers la solution analytique et où la valeur du déplacement est égale à celle élastique à $t=0$ on observe aussi que le matériau est asymptotiquement stable un fait qui s'explique par son comportement solide.

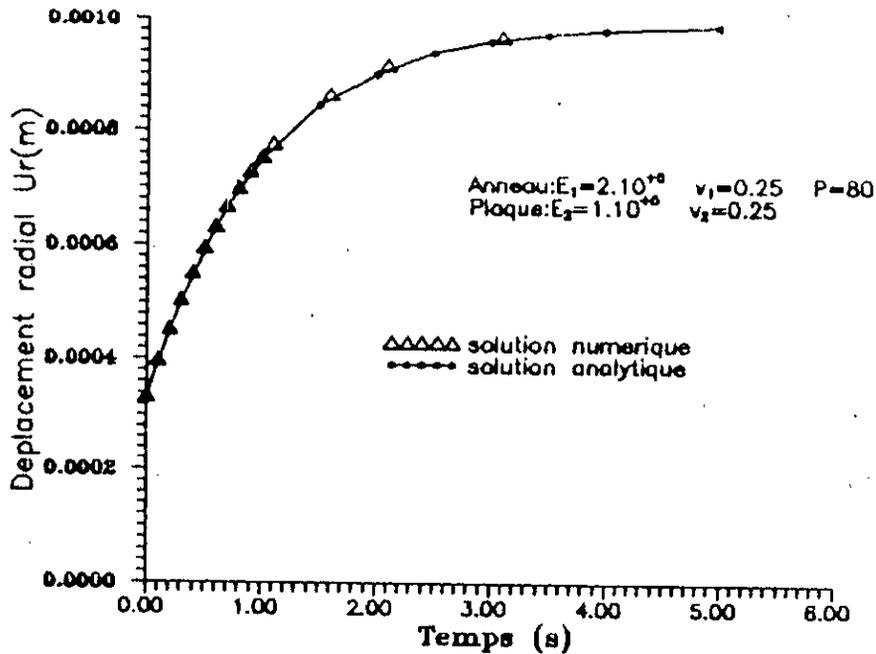


Figure-6 - Variation du déplacement radial U_r en fonction du temps : cas de l'anneau à l'intérieur d'une plaque infinie.

Ayant validés nos résultats pour l'exemple précédent et pour lequel on a établi la solution analytique, on s'est proposé de voir le comportement de quelques problèmes et pour lesquels les solutions analytiques sont difficiles à établir.

ii) Pour le même cas de figure on a :
 anneau élastique : $E_1 = 12500 \text{ MPa}$, $\nu_1 = 0.25$; $P_1 = 5 \text{ MPa}$
 plaque viscoélastique dont le comportement est de type 2
 $E_2 = 6500 \text{ MPa}$; $\nu_2 = 0.25$; $\nu_v = \nu_2 = 0.25$
 le modèle rhéologique correspondant : $E_1 = E_2 = 5000 \text{ MPa}$, $\eta = 5000$

On obtient les résultats numériques illustrés par la figure-7 . On remarque la même allure que celle de l'exemple précédent et où le comportement asymptotique stable se met en évidence .

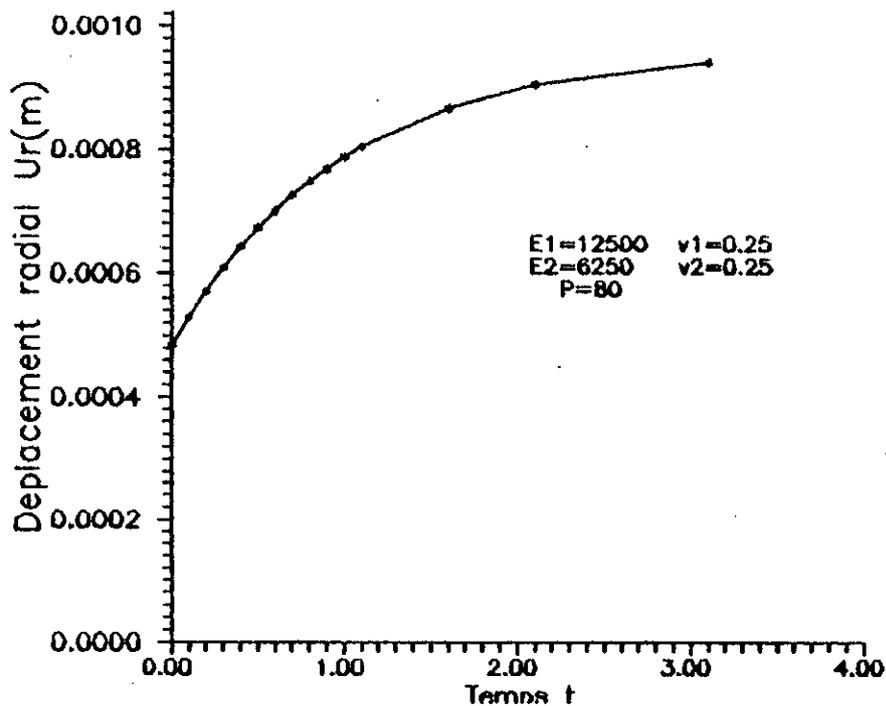


Fig-7-variation du déplacement radial en fonction du temps pour le cas d'un anneau élastique à l'intérieur d'une plaque viscoélastique infinie.

iii) anneau présentant un comportement viscoélastique type I la plaque infinie est élastique

Avec les mêmes données élastiques que celles de l'exemple (i) On observe alors la solution numérique ci-dessous figure-8

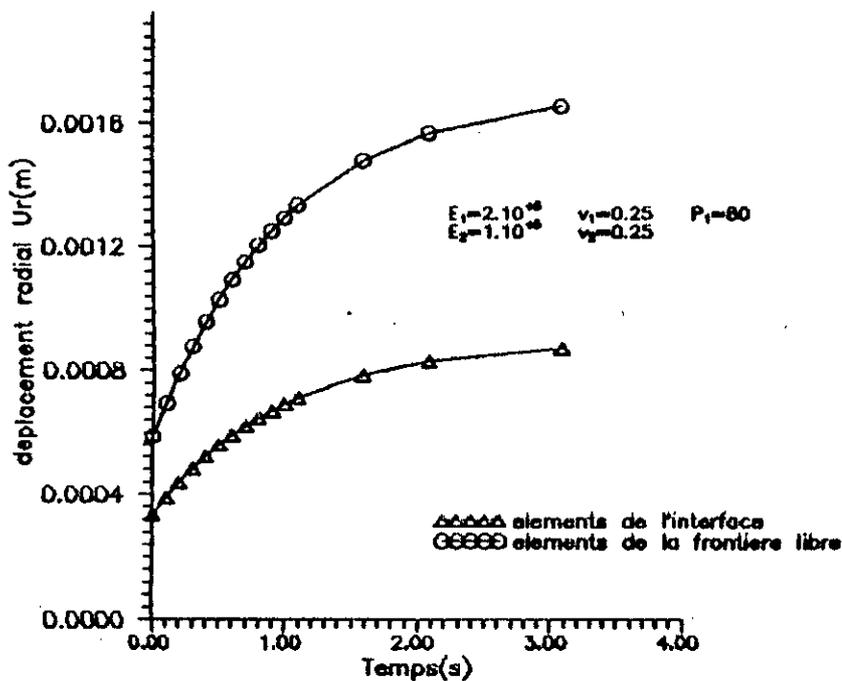


Figure-8- Variation du déplacement radial en fonction du temps

Exemple 2 : anneau frette dans un autre anneau

1) L'anneau intérieur est élastique, celui extérieur est viscoélastique type1

On prend comme données élastiques :

$$E_1=12500 ; E_2=6500 ; \nu_1=\nu_2=0.25$$

$$P_1=5 ; P_2=2P_1$$

l'anneau extérieur présente un comportement type1

On a alors la solution numérique ci-dessous figure-9 :

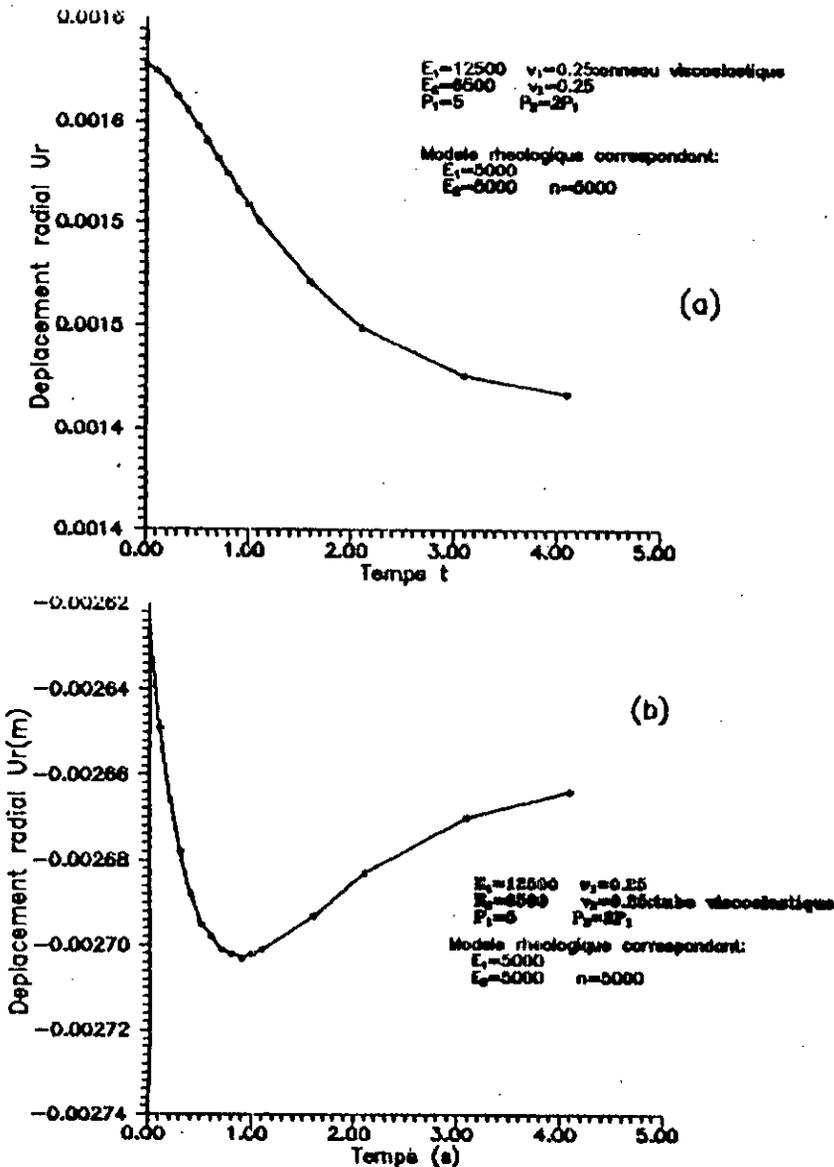


Fig-9—Variation du déplacement radial U_r en fonction du temps sur l'interface(a) et sur la surface libre de l'anneau extérieur viscoélastique(b)

ii) L'anneau intérieur présente un comportement type1, celui extérieur est élastique :

On obtient la solution numérique schématisée par la figure-10

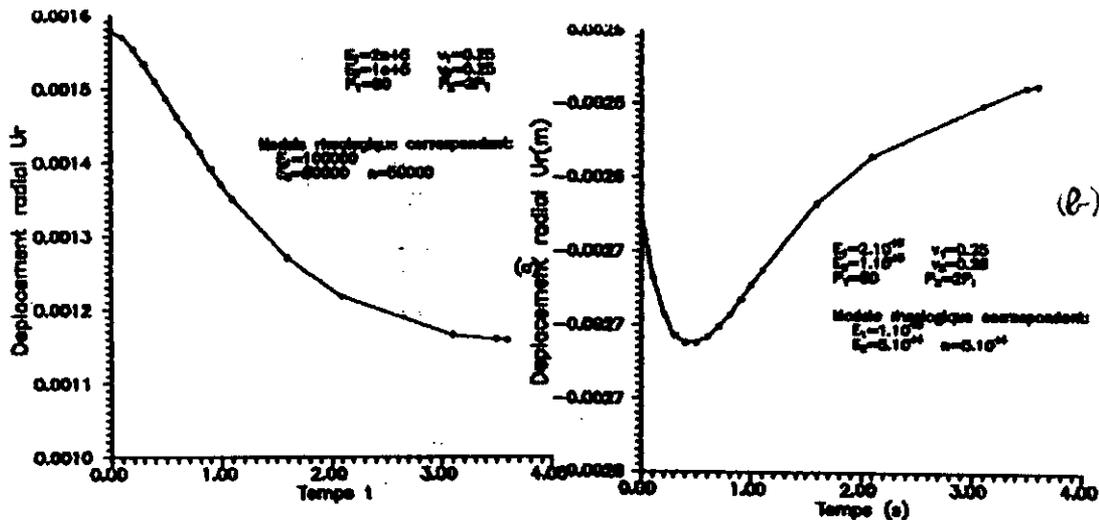


Fig-10-Variation du déplacement radial U_r en fonction du temps sur l'interface(a) et sur la surface libre (b)

RELAXATION :

Exemple 1 :anneau à l'intérieur d'une cavité

L'anneau est élastique, tandis que la plaque, présente un comportement viscoélastique type2 .

les données concernant l'anneau : $E_1=2.10^5$; $\nu_1=0.25$; $P_1=80$

les données concernant la plaque: $E_2=1.10^5$; $\nu_2=0.25$; $P_2=0$

la solution analytique est définie comme :

$$\sigma(r,t) = - \frac{q_1 u^* r^{-2}}{b^{-1}} (1 - \exp(-\frac{1}{P_1} t)) - \frac{q_0 u^* r^{-2}}{P_1 b^{-1}} \exp(-\frac{1}{P_1} t)$$

Où u^* est la valeur du déplacement à l'interface du problème élastique correspondant

La solution numérique obtenue est comparée à la solution analytique dans la figure-11 ci-dessous :

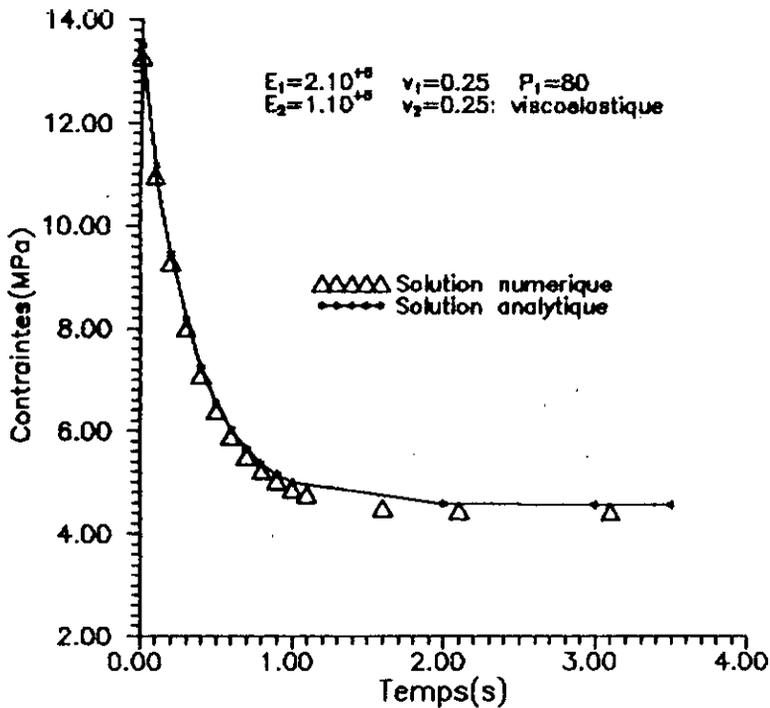


Figure-11-relaxation:variation des contraintes normales en fonction du temps au niveau de l'interface pour le cas de l'anneau/cavite

On voit que la solution numérique converge vers la solution analytique pour une discrétisation en 20 éléments de l'interface.

Exemple 2 : Anneau frette dans un autre.

L'anneau intérieur est élastique, tandis que celui extérieur est viscoélastique type 2.

On a le même problème élastique que celui du cas du fluage. on obtient alors les résultats présentés par la figure-12

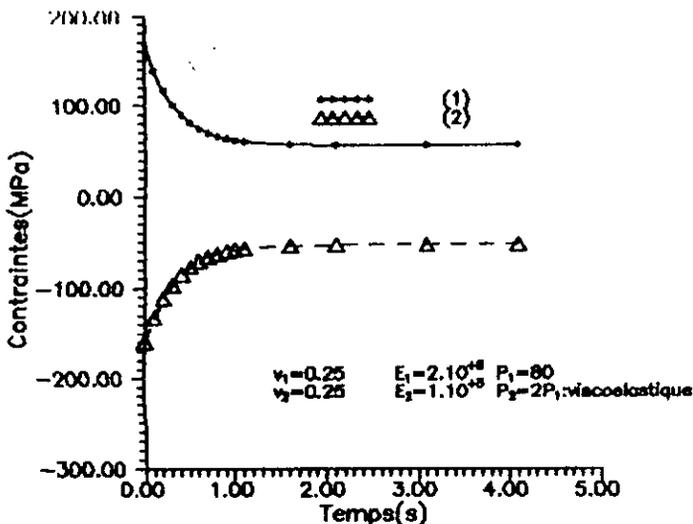


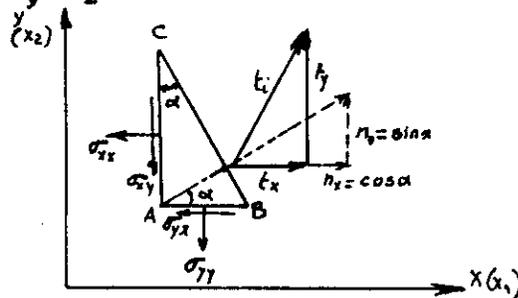
Figure-12- Relaxation:Variation des contraintes normales en fonction du temps sur l'interface (1) et la surface libre (2) de l'anneau viscoélastique.

ANNEXE

VECTEUR TRACTION : (contrainte)

Les contraintes peuvent être représentées par un vecteur appelé vecteur traction et note comme :

$t = (t_x, t_y, t_z)$ voir fig.ci-dessous



VECTEUR TRACTION EN CONTRAINTE PLANE .

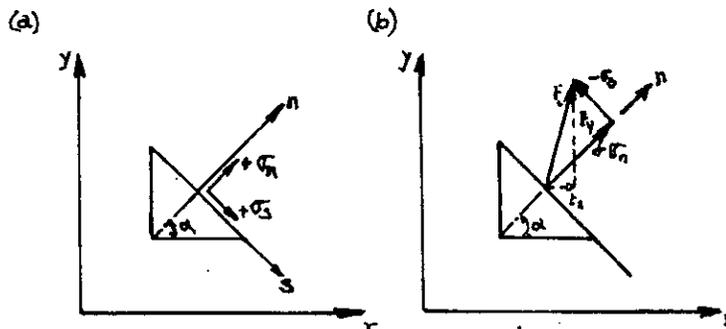
Les composantes du vecteur traction sont reliées aux composantes de la contrainte (et le vecteur unitaire normal) comme suit :

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (\text{en notation indicielle}).$$

$$t_x = \sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{yx} \sin \alpha \quad (1) \text{ ou } n_x = \cos \alpha, n_y = \sin \alpha$$

$$t_y = \sigma_{xy} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha$$

Il est plus commode de considérer les composantes (du vecteur traction) agissant perpendiculairement et parallèlement sur le plan BC ; Ces composantes sont appelées : contrainte normale et contrainte tangentielle .



A travers la fig 2-2 on voit que les contraintes normale et tangentielle sont reliées aux composantes du vecteur traction comme suit :

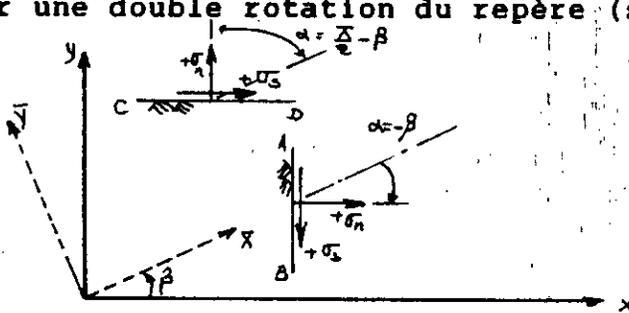
$$\begin{aligned}\sigma_s &= t_x \sin \alpha - t_y \cos \alpha \\ \sigma_n &= t_x \cos \alpha + t_y \sin \alpha\end{aligned}\quad 1-2$$

En combinant avec (1) on obtient :

$$\begin{aligned}\sigma_s &= (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ \sigma_n &= \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + 2\sigma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha\end{aligned}\quad (1.3)$$

CAS PARTICULIERS :

Pour faciliter les calculs on adoptera les deux cas (particuliers) suivant lesquels le vecteur normal est en premier lieu parallèle à l'axe (XX'), puis dans le second cas il l'est par rapport à l'axe (YY') comme schématisée ci-dessous (ceci se résume par une double rotation du repère (s,n))



Suivant la valeur de α on aboutira aux résultats suivants :

Dans le premier cas on a $\alpha = -\beta$ et on a en comparaison avec la figure 1 :

$$\begin{aligned}[\sigma_n]_{\alpha} &= -\beta = \sigma_{xx} \\ [\sigma_s]_{\alpha} &= -\beta = -\sigma_{xy}\end{aligned}\quad (1.4)$$

Les équations (2.3) deviennent alors :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma_{xx} \cos^2 \beta + 2\sigma_{xy} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{yy} \sin^2 \beta \\ \sigma_{xy} &= (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin \beta \cos \beta + \sigma_{xy} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)\end{aligned}\quad (1.5)$$

De la même manière, le deuxième cas est définie par une valeur $\alpha = \pi/2 - \beta$

$$\begin{aligned}[\sigma_n]_{\alpha} &= (\pi/2) - \beta = \sigma_{yy} \\ [\sigma_s]_{\alpha} &= (\pi/2) - \beta = -\sigma_{yx}\end{aligned}$$

et les équations (1-3) deviennent alors :

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= \sigma_{xx} \sin^2 \beta + 2\sigma_{xy} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{yy} \cos^2 \beta \\ \sigma_{xy} &= (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin \beta \cos \beta + \sigma_{xy} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)\end{aligned}\quad (1.6)$$

Remarquons que $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$

On a finalement :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{xx} \cos^2 \beta + 2\sigma_{xy} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{yy} \sin^2 \beta \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{xx} \sin^2 \beta + 2\sigma_{xy} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{yy} \cos^2 \beta \\ \sigma_{xy} &= (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin \beta \cos \beta + \sigma_{xy} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \end{aligned} \right\} (1.7)$$

LA LOI DE HOOKE GENERALISEE:

La théorie classique de l'élasticité est basée sur la généralisation de la loi de HOOKE, qui établit que ;

En chaque point d'un corps linéairement élastique, les composantes du tenseur contrainte $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ sont reliés linéairement aux composantes du tenseur déformation $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$, soit

$$\sigma_{ij} = C \epsilon_{ij}$$

ou C défini les propriétés élastiques du corps .

Les relations contraintes déformations pour un corps linéairement élastique, isotrope peuvent être écrites :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= (1/E) [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \epsilon_{yy} &= (1/E) [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\ \epsilon_{zz} &= (1/E) [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \end{aligned} \right\}$$

Soit en inversant :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= (2G/1-2\nu) [(1-\nu)\epsilon_{xx} + \nu(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})] \\ \sigma_{yy} &= (2G/1-2\nu) [(1-\nu)\epsilon_{yy} + \nu(\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz})] \\ \sigma_{zz} &= (2G/1-2\nu) [(1-\nu)\epsilon_{zz} + \nu(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})] \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{xy} &= (1/2G)\sigma_{xy} & ; & & \epsilon_{xz} &= (1/2G)\sigma_{xz} & ; & & \epsilon_{yz} &= (1/2G)\sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} &= 2G \epsilon_{xy} & ; & & \sigma_{xz} &= 2G \epsilon_{xz} & ; & & \sigma_{yz} &= 2G \epsilon_{yz} \end{aligned}$$

E : module de YOUNG .

ν : coefficient de POISSON .

G : module de cisaillement .

Où $G = E / 2(1+\nu)$.

POTENTIEL DE GREEN :

Dans le cas de la déformation élastique , la déformation élastique est réversible. Par contre dans le cas de la déformation hyperélastique , l'existence de la fonction ϕ montre que pour tout cycle :

$$\oint_c \delta\phi = \oint_c \delta Q = 0.$$

tout comme l'état élastique , l'état hyperélastique dépend du matériaux et des conditions du processus de déformation .

→ certains résultats importants de la théorie de l'élasticité sont valables pour des corps en état de déformation élastique ; Néanmoins , sous sa forme actuelle , la théorie de l'élasticité est encore une théorie des corps en état hyperélastique .

L'idée de considérer un potentiel élastique est due à G. GREEN KIRCHHOFF a construit le potentiel ϕ par une voie purement formelle en partant du postulat de la dépendance linéaire entre les tensions et les déformations .

Corps hyperélastique .

$$\phi = \phi (\epsilon_{ij}; x_i) \quad i = \overline{1,3} \quad ; j = \overline{1,3} \quad \text{potentiel de GREEN}$$

Sa forme souligne le caractère réversible de la déformation

On obtient à l'aide des formules de GREEN

$$\sigma_{ii} = \partial\phi / \partial\epsilon_{ii} \quad ; \sigma_{ij} = \partial\phi / \partial\epsilon_{ij}$$

ou bien encore :

$\sigma_{ij} = \partial\phi / \partial\epsilon_{ij}$ les formules de GREEN donnant le contenu de la loi physique $\sigma_{ij} = \tau_{ij}(\epsilon_{hk}, x, T)$ pour des corps hyperélastiques linéaires .

$$d\phi = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$$

l'existence du potentiel élastique pour des corps possédant des propriétés de symétrie élastique doit conduire à une (1) diminution du nombre de coefficients .

-Corps hyperélastiques anisotropes : nombre de coefficients de rigidité se réduisent de 21 à 3

-Si le corps possède un plan de symétrie les coefficients d'élasticité sont de $(21-8=13)$ 13 constantes.

-Si le corps est orthotrope les coefficients élastiques distincts sont de 21-8-4= 9

REPRESENTATION DE NEWBER-PAPKOVITCH:

La représentation de Papkovitch est une manière de représenter le champs de déplacement u solution de l'équation de Lamé en fonction de certaines fonctions vérifiant des conditions prescrites.

Considérons la représentation de la solution de l'équation de Lamé suivante :

$$\vec{u} = \vec{B} + \vec{u}_0$$

où B est la solution de l'équation de Poisson vectorielle

$$\Delta B + \mu f = 0$$

et U_0 est un vecteur correctif .

Cherchons u_0 sous la forme suivante :

$$\vec{u}_0 = \text{grad } F$$

Pour trouver l'équation à laquelle satisfait f , portons :

$$\vec{u} = \vec{B} + \text{grad } F$$

En tenant compte que B est solution de l'équation précédente

$$\Delta \vec{u} = -\mu^{-1} f + \text{grad } \Delta F \quad ; \quad \text{div } \vec{u} = \text{div } B + \Delta F$$

L'équation de BELTRAMI.MICHEL devient, pour $0 < \nu < 0.5$

$$\text{grad } (\Delta F + (1/2)(1-\nu) \text{div } B) = 0$$

Il suffit d'avoir comme solution pour cette équation:

$$\Delta F = -(1/2)(1-\nu)^{-1} \text{div } B \quad (**)$$

Evaluons $\Delta (\text{OM} . B)$, on a d'abord :

$$\Delta (\text{OM} . B) = (\delta_{kj} \frac{\partial}{\partial k} B_k + \kappa \frac{\partial}{\partial k} B_k) = 2 \text{div } B + \text{OM} . \Delta B$$

d'où en tenant compte de () on a :

$$\operatorname{div} \vec{B} = (1/2)\Delta (\vec{OM} \cdot \vec{B}) + (1/2)\mu^{-1} (\vec{OM} \cdot \vec{B})$$

En remplaçant maintenant cette équation dans (**) on obtient :

$$\Delta [F + (1/4)(1-\nu)^{-1} (\vec{OM} \cdot \vec{B})] = -(1/4)(1-\nu)^{-1} \mu^{-1} (\vec{OM} \cdot \vec{f})$$

D'où en notant que :

$$F + (1/4)(1-\nu)^{-1} (\vec{OM} \cdot \vec{B}) = -(1/4)(1-\nu)^{-1} B_0$$

On obtient :

$$\Delta B_0 = \mu^{-1} (\vec{OM} \cdot \vec{f})$$

et l'on a :

$$F = -(1/4)(1-\nu)^{-1} (\vec{OM} \cdot \vec{B} + B_0)$$

le terme correctif est ainsi trouvé, et la solution u admet la représentation suivante :

$$\vec{u} = \vec{B} - (1/4)(1-\nu)^{-1} \operatorname{grad} (\vec{OM} \cdot \vec{B} + B_0)$$

avec : $\Delta \vec{B} = -\mu^{-1} \vec{f}$, $\Delta B_0 = \mu^{-1} (\vec{OM} \cdot \vec{f})$

Cette représentation est connue sous le nom de représentation de PAPKOVITCH .

Dans le cas de forces volumiques nulles elle s'écrit :

$$\vec{u} = \vec{B} - (1/4)(1-\nu)^{-1} \operatorname{grad} (\vec{OM} \cdot \vec{B} + B_0)$$

$$\Delta \vec{B} = 0 ; \quad \Delta B_0 = 0$$

CALCUL DES CONTRAINTES TANGENTIELLES SUR LA FRONTIERE :

En utilisant la loi de HOOKE

$$\sigma_{xx} = \frac{2G}{1-2\nu} \left[(1-\nu)\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy} \right] \quad (1)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{2G}{1-2\nu} \left[\nu \varepsilon_{xx} + (1-\nu) \varepsilon_{yy} \right] \quad (2)$$

En substituant (2) dans (1) on obtient :

$$\sigma_{xx} = \frac{2G}{1-\nu} \varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{yy} \quad (3)$$

Cette relation est un moyen de calcul de la contrainte tangentielle sur les deux lèvres. On aura sur la lèvre positive et celle négative respectivement :

$$\sigma_{xx}^+ = \frac{2G}{1-\nu} \varepsilon_{xx}^+ + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{yy}^+ \quad (4)$$

$$\sigma_{xx}^- = \frac{2G}{1-\nu} \varepsilon_{xx}^- + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{yy}^- \quad (5)$$

En utilisant les égalités :

$$\varepsilon_{xx}^+ = \frac{\partial u_x^+}{\partial x} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{xx}^- = \frac{\partial u_x^-}{\partial x} \quad (7)$$

Pour le premier et le dernier point des deux lèvres de la discontinuité .

et

forward difference:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad x=\bar{x} = \frac{f(x^{i+1}) - f(x^i)}{x^{i+1} - x^i}$$

backward difference:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad x=\bar{x} = \frac{f(x^i) - f(x^{i-1})}{x^i - x^{i-1}}$$

difference finie centrale

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad x=\bar{x} = \frac{f(x^{i+1}) - f(x^{i-1})}{x^{i+1} - x^{i-1}} \quad (8)$$

Pour les autres éléments

Cependant, pour des éléments présentant une inclinaison différentes, les uns aux autres, on aura un problème pour le calcul de :

$$\frac{\partial u_x^+}{\partial x} = \frac{\partial u^+}{\partial s} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_x^-}{\partial x} = \frac{\partial u_s^-}{\partial s}$$

Dans ce cas on donne les formules suivantes :

$$(u_s^+)_{s=s^i} = u_s^{i-1} \cos(\beta - \beta^{i-1}) + u_n^{i-1} \sin(\beta - \beta^{i-1})$$

$$(u_s^+)_{s=s^i} = u_s^{i+1} \cos(\beta - \beta^{i+1}) - u_n^{i+1} \sin(\beta - \beta^{i+1})$$

soit donc

$$\frac{\partial u_x^+}{\partial x} = \frac{\partial u_s^+}{\partial s} = \left[u_s^{i+1} \cos(\beta - \beta^{i+1}) - u_s^{i-1} \cos(\beta - \beta^{i-1}) \right] / \Delta s - \left[u_n^{i+1} \sin(\beta - \beta^{i+1}) - u_n^{i-1} \sin(\beta - \beta^{i-1}) \right] / \Delta s$$

$$\frac{\partial u_x^-}{\partial x} = \frac{\partial u_s^-}{\partial s} = \left[u_s^{i+1} \cos(\beta - \beta^{i+1}) - u_s^{i-1} \cos(\beta - \beta^{i-1}) \right] / \Delta s - \left[u_n^{i+1} \sin(\beta - \beta^{i+1}) - u_n^{i-1} \sin(\beta - \beta^{i-1}) \right] / \Delta s$$

où

$$\Sigma \Delta s = a \cos(\beta - \beta^{i-1}) + 2a + a \sin(\beta - \beta^{i+1})$$

c'est la projection de la distance dans la direction $\vec{x}=s_i$ entre les milieux des éléments $i-1$ et $i+1$.

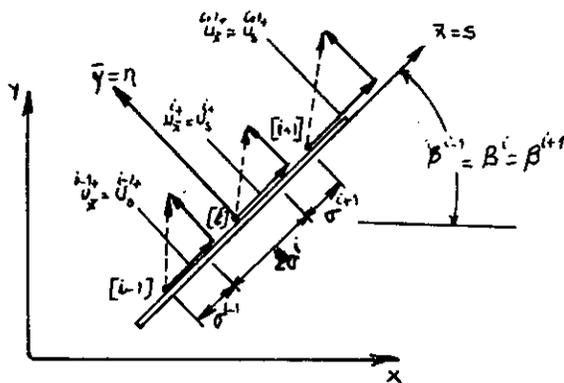


Figure -a élément d'égalles inclinaisons

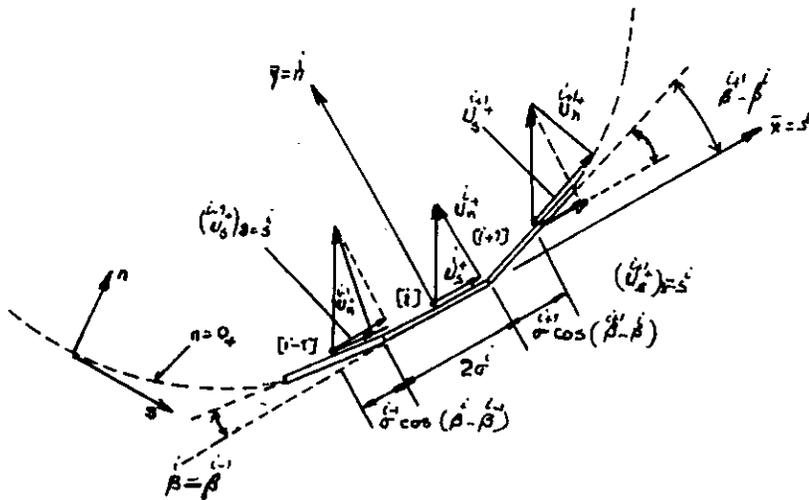


Figure -b élément d'inclinaisons différentes

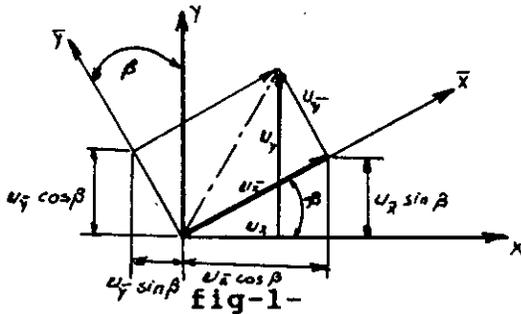
CHANGEMENT DE COORDONNEES :

Pour l'étude d'un corps, défini par un ensemble d'éléments il est plus intéressant de travailler suivant deux repères, en l'occurrence, le repère local et l'autre global .

Tandis que le repère local est propre à chaque élément, ne donnant que les informations (coordonnées, déplacement, ...) concernant cet élément en question, le second, le repère global est lié à tout l'ensemble du corps (de la structure) et son intérêt se trouve lors de l'utilisation du principe de superposition, d'où l'obligation de passer du repère local au celui global, lors du calcul, pour généraliser ainsi les résultats .

Ainsi et se référant à la figure ci-dessous, caractérisant un élément muni d'un repère local (x, y) de déplacement $u(x, y)$

pour lequel on veut connaître le déplacement $u(u_x, u_y)$ suivant le repère global (x, y)



cela est donné comme suit :

$$u_x = u_{\bar{x}} \cos \beta - u_{\bar{y}} \sin \beta$$

$$u_{\bar{y}} = u_{\bar{x}} \sin \beta + u_y \cos \beta$$

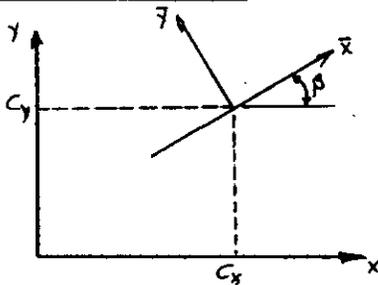
reciproquement :

$$u_{\bar{x}} = u_x \cos \beta + u_y \sin \beta$$

$$u_{\bar{y}} = -u_x \sin \beta + u_y \cos \beta$$

De la même manière, les contraintes sont exprimées dans l'un ou l'autre des deux repères .(Une étude plus détaillée est donnée dans la partie index)

Pour les coordonnées :



$$X = (x - C_x) \cos \beta - (y - C_y) \sin \beta$$

$$Y = (x - C_x) \sin \beta + (y - C_y) \cos \beta$$

Figure-2

VI- CONCLUSION

On a pu démontrer à travers notre étude pour les milieux multicouches leurs qualités mécaniques remarquables, en mettant en évidence leurs façons de réagir aux différentes sollicitations auxquelles ils ont été soumis, et cela pour un comportement élastique linéaire et viscoélastique linéaire (fluage et relaxation) successivement. Un fait qui confirme leurs utilisation accentuée dans les domaines sensibles de la vie quotidienne.

L'utilisation de la méthode des discontinuités de déplacement nous a permis l'obtention de résultats qui satisfont les solutions analytiques correspondantes. Ceci révèle une de plus les caractéristiques numériques (qualité de la solution, précision, convergence, ...) de cette méthode.

Enfin, on tient à signaler QU'en ce qui concerne la visco-élasticité on a pas pu présenter toutes les solutions analytiques par faute du facteur temps qui s'est illustré de nouveau, mais cette fois ci en limitant nos modestes moyens.

BIBLIOGRAPHIE

CROUCH.S.L.: Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method

CROUCH.S.L.-STRAFIELD :Boundary element method in solid mechanics.

FLUGGE : Viscoelasticity.

GAY : Matériaux composites

KERGUIGNAS :Résistance des matériaux

PARTON - PERLIN : Théorie mathématiques de l'élasticité

SALENÇON : Viscoélasticité

SOLOMON :Elasticité linéaire

TIMSHENKO : Plaques et coques

TSAI : Introduction to composites matériels

NOWACKI : viscoelasticity