

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

FORMULATION de l'
ELEMENT de FLEXION

D K T

Proposé par :

F. BELBLIDIA

Etudié par :

K. REDJDAL

Dirigé par :

F. BELBLIDIA

PROMOTION

JUILLET 92

**** R E M E R C I M E N T S ****

*Je tiens à remercier mon promoteur monsieur F. BELBLIDIA
pour son aide précieuse et son soutien constant.*

*Mes remerciements vont aussi à tous les enseignants du
département de génie mécanique.*

*Que tous ceux qui ont participé, de près ou de loin à ma
formation, trouvent ici ma vive reconnaissance.*

**** DEDICACES ****

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Je dédie ce modeste travail à :

- MES PARENTS

- MA SOEUR ET MES FRERES

- TOUTE MA FAMILLE

- TOUS MES AMIS

NOM : K. REDJDAL

PRENOM : KHELIFA

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

PROMOTEUR : F. BELBLIDIA

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE = المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Résumé :

Ce rapport présente la formulation de l'élément DKT utilisé pour l'analyse des plaques minces de formes arbitraire, cet élément à trois noeuds possède les trois ddl fondamentaux, il présente différents avantages par rapport à d'autres éléments liés à la simplicité de la formulation, son efficacité et son fiabilité.

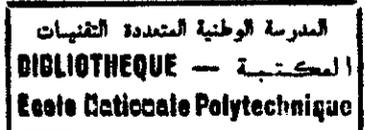
ملخص

هذا التقرير يمثل صياغة للعنصر DKT المستخدم في تحليل الهياكل الرقيقة ذات الأشكال غير المحددة، لهذا العنصر له 3 عقد، كل عقدة تحتوي على ثلاث درجات حرية أساسية للحرية، ويمثل مختلف الأحمال بالنسبة للعناصر المثلثية الأخرى وهذا مرتبة ببساطتها، فعاليتها وعولها.

ABSTRACT

this report presents the formulation of DKT element, which is utilised in the analysis of plate of arbitrary shapes, this element has 3 nodes with three fundamental degree of freedom, it presents different advantages against other elements in the features of simplicity of formulation, its efficiency and its reliability.

SOMMAIRE



| | | |
|------|---|----|
| I- | INTRODUCTION | 1 |
| II- | FORMULATION DE L'ÉLÉMENTS AVEC LA M.E.F | 3 |
| | II.1- INTRODUCTION | |
| | II.2- DÉMARCHE ÉLÉMENTS FINIS | |
| | II.3- CONDITIONS DE CONVERGENCES | |
| | II.4- ANALYSE DES ÉLÉMENTS TRIANGULAIRES À 9 DDL À L'ÉTUDE DE LA FLÉXION | |
| | II.5- TESTS DE VALIDATION ET CONVERGENCES | |
| | II.5.1- TEST AVEC UN SEUL ÉLÉMENT | |
| | II.5.2- PATCH-TEST | |
| | II.5.3- TESTS DE PRÉCISION | |
| III- | THÉORIE DE FLEXION DES PLAQUES | 14 |
| | III.1- INTRODUCTION | |
| | III.2- THÉORIE DE KIRCHHOFF-POISSON | |
| | III.2.1- HYPOTHÈSES | |
| | III.2.2- RELATIONS CINEMATIQUES | |
| | III.2.3- ÉNERGIE DE DÉFORMATION | |
| | III.3- THÉORIE DE MINDLIN-REISSNER | |
| | III.3.1- HYPOTHÈSES | |
| | III.3.2- RELATIONS CINEMATIQUES | |
| | III.3.3- ÉNERGIE DE DÉFORMATION | |
| IV- | FORMULATION DE L'ÉLÉMENT DKT | 28 |
| | IV.1- FORMULATION STANDARD DE LA MATRICE DE | |

RIGIDITE

IV.2- DISCRIPTION GÉNÉRALE

IV.3- CONCLUSION ET REMARQUES

V- PRÉSENTATION DU LOGICIEL RE_FLEX - 41

V.1- INTRODUCTION

V.2- CARACTÉRISTIQUE D'UN LOGICIEL D'ÉLÉMENTS
FINIS

V.3- ORGANISATION GÉNÉRALE DU LOGICIEL RE_FLEX

V.3.1- ENCHAINEMENT DES BLOCS

FONCTIONNELS

V.3.2- ALLOCATION DES TABLES

V.3.3- DÉSCRIPTION DES DIFFERENTS
COMMANDES

V.4- DÉSCRIPTION DES DONNÉES DU LOGICIEL RE_FLEX

V.4.1- DÉSCRIPTION GÉNÉRALE

V.4.2- EXEMPLES

VI- RESULTATS NUMERIQUES - 55

VI.1- PATCH TEST

VI.2- TEST DE ROBINSON

VI.3- TESTS DE PRÉCISIONS

VI.3.1- PLAQUE CARÉE

VI.3.2- PLAQUE LOSANGE "RHOMBIC"

VI.3.3- PLAQUE CIRCULAIRE

VII- CONCLUSION - 78

I-INTRODUCTION

La modélisation et l'analyse des systèmes formés de plaques minces constituent deux activités essentielles en calcul, des structures rencontrées en aéronautique, construction automobile, navale, nucléaire

Le développement d'éléments finis fiables et efficaces a toujours constitué un sujet de recherche actif mais les difficultés sont telles que les progrès sont lents et coûteux, les difficultés rencontrées pour obtenir des éléments finis avec cisaillement transversal (CT), ayant un nombre réduit de noeuds et de variables nodales, ont conduit plusieurs chercheurs à formuler des éléments très satisfaisants " sans mode parasite et blocage en CT "plusieurs éléments finis de plaques ont été proposés à partir de 1968 permettant d'obtenir des solutions numériques à des problèmes de plaques minces en accord avec les hypothèses de KIRCHHOFF, parmi ces éléments on a : "élément de type Kirchhoff discret ".

ODEN, WEWNER, STRICKLIN, et ses associés, et DHATT ont été les premiers à proposer l'idée d'introduction de ces hypothèses (Kirchhoff discrète), les premiers résultats numériques ont été obtenus simultanément par STRICKIN et AL et par DHATT.

L'objectif de cette étude est de présenter les aspects essentielles de la formulation de l'élément DKT (discrète Kirchhoff triangle) de commenter certains résultats et les comparer à d'autres éléments triangulaires sur le plan de la fiabilité, performances et efficacité.

Notre travail est composé de trois (03) parties, dans la première partie nous commençons par la présentation de la méthode des éléments finis (MEF), puis nous allons aborder la théorie de flexion des plaques (type MINDLIN/REISSNER, et KIRCHHOFF/POISSON) dans la deuxième partie nous commençons par la formulation de l'élément DKT puis la présentation du logiciel RE_FLEX (Recherche et Enseignement en modélisation des structures FLEXibles).

Nous terminons l'étude par une présentation de quelques résultats numériques (tests sur le DKT) et une conclusion générale.

II-FORMATION D' ELEMENTS AVEC M.E.F [1,2,10,11]

II.1- INTRODUCTION :

la méthode des éléments finis représente l'extension des méthodes matricielles à l'étude des structures continue Elle nous permet d'étudier le comportement approché d'un domaine continu en le traitant comme une structure composée d'éléments indépendants reliés entre eux uniquement par les noeuds. Pour traiter un problème par éléments finis, il existe en tout trois formulations possibles.

- * Formulation en déplacements (méthodes des déplacements).
- * Formulations en contraintes (en forces).
- * Formulation mixte.

Pour la première formulation, on définit un champ de déplacement en supposant qu'il satisfait la compatibilité des déplacements à l'intérieur de l'élément. Ceci en choisissant une fonction déplacement permettant de définir l'état de déplacement d'une façon unique.

Donc cette formulation suppose que les conditions de compatibilité des déplacements sont satisfaits, ce qui nous amènera à poser les équations d'équilibre puis les résoudre afin de déterminer les déplacements nodaux, c'est la "Solution en déplacements".

La deuxième formulation consiste à définir un champ de contrainte de façon à assurer l'équilibre de l'élément, puis poser les équations de compatibilité des déplacements et les résoudre pour obtenir les forces (Solution en contrainte).

La troisième formulation est un mélange des deux autres, ce qui a donné naissance au concept d'élément finis hybride.

la première formulation " déplacements " présente certaines facilités par rapport aux autres (plus grande souplesse :

facilité d'approche des déplacements admissibles).

II.2- DEMARCHE ELEMENTS FINIS :

ÉTAPE 1: Elle consiste à choisir un système de coordonnées et une numérotation des noeuds appropriée pour l'élément.

ÉTAPE 2: Choisir une fonction de déplacement de tous les points de l'élément.

ÉTAPE 3: Relier les déplacements généraux de l'élément à ses déplacements nodaux.

ÉTAPE 4: Relation entre déplacements et déformations :

$$\{\epsilon\} = [B]\{\delta\} \quad (II.1)$$

où ϵ = déformation.

δ = déplacement.

ÉTAPE 5: Relation entre déformation et contraintes :

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} - (2)$$

où ϵ = déformation.

σ = contrainte.

[D] = matrice d'élasticité.

On aura :

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\} \quad (II.3)$$

L'équation (3) exprime la relation entre contraintes et déplacements.

ÉTAPE 6: Relier les charges nodales aux déplacements nodaux les contraintes internes $\{\sigma(x,y)\}$ sont remplacées par les charges nodales $\{F^e\}$ statiquement équivalentes, et ces derniers sont reliés aux déplacements nodaux. On voit calcul de l'énergie de déformation, ainsi on définit la matrice de rigidité de l'élément par :

$$[K] = \int_V [B]^t [D] [B] dv \quad (II.4)$$

ÉTAPE 7: Assemblage de matrice de rigidités élémentaires et introduction des conditions aux limites.

On aura :

$$[K_g]\{\delta\} = \{F\} \quad (II.5)$$

ÉTAPE 8: Résolution " calcul des déplacements nodaux ".

$$\{\delta\} = [K_g]^{-1} \{F\} \quad (II.6)$$

après introduction des C.L.

ÉTAPE 9: Relation entre contraintes et déplacements.

On a :

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{\delta\} \quad (\text{étape 5})$$

donc :

$$\{\sigma\} = [H] \{\delta^e\} \quad \text{avec} \quad [H] = [D] [B]$$

En générale , la matrice [H] contient des termes en x et y ,et relie donc les contraintes internes en chaque point (x,y) de l'élément aux déplacements nodaux {\delta}.

ÉTAPE 10: Calcul des valeurs et vecteurs propres.

ÉTAPE 11: Résolution dynamique.

.

.

etc.

II.3- CONDITIONS DE CONVERGENCES :

Les éléments (de type déplacement ou de type mixte) doivent vérifier certaines conditions afin d'obtenir une bonne solution. Ces conditions sont :

II.3-A- CONDITION DE COMPLÉTUDE :

Elle se traduit par les deux conditions suivantes :

1- Representation des modes rigides :

Quand prescrit aux déplacements des valeurs correspondants à un déplacement d'ensemble, on doit avoir un état de déformation nul dans l'élément et donc des forces nodales nulles .

2- Representation des états de déformations constants :

Quand on prescrit aux déplacements nodaux d'un élément des valeurs correspondants à un état de déformation constant, on doit trouver cet état de déformation à l'intérieur de l'élément.

II.3-B- COMPATIBILITÉ :

Les fonctions de déplacements sont de continuité C_{n-1} ou n est le plus grand ordre des dérivées présentes dans l'expression de l'énergie de déformation.

Après l'assemblage, il faut qu'on ait:

- Une continuité énergétique : les forces extérieures et intérieures doivent s'équilibrer.
- Une continuité géométrique : les éléments doivent rester juxtaposés.

II.4- ANALYSE DES ELEMENTS TRIANGULAIRES A 9 DDL A L'ETUDE DE LA FLEXION :

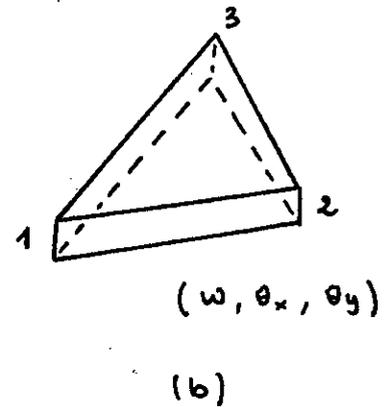
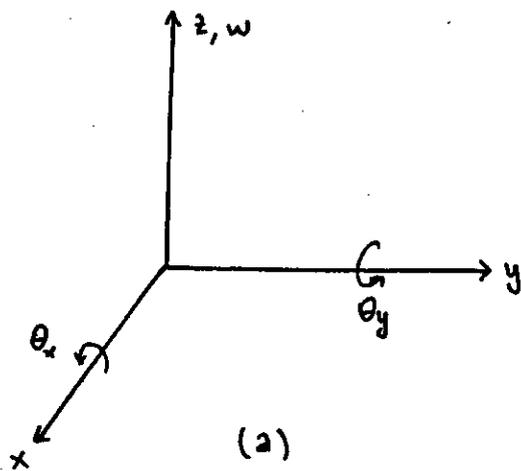


Fig (II.1)

Ces éléments possèdent 9 ddl : un déplacement transversal et deux de rotation autour de l'axe x et y au trois noeuds.

Ces éléments peuvent être classés suivant trois modèles :

- 1- Modèle déplacement basé sur la théorie de Kirchhoff des plaques minces.
- 2- Modèles contraintes hybrides basé sur la théorie de Kirchhoff.
- 3- Modèle déplacement dérivé de la théorie des plaques incluant les déformations due à l'effort tranchant.

* ÉLÉMENT DE MODÈLE DÉPLACEMENT :

La formulation de ces éléments est basée sur le principe de l'énergie potentielle minimale, ou la compatibilité requise implique trois déplacements nodaux :

Parmi ces éléments, on cite :

a- L'élément appelé A proposé par Adimi sur un polynôme incomplet .

$$w(x,y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + c_5y^2 + c_6x^3 + c_7x^2y + c_8xy^2 + c_9y^3$$

Cet élément ne respecte pas :

- La complétude : il manque le terme xy correspondant à $\omega_{xy} = \text{const}$
 - La compatibilité : pas de continuité entre éléments.
- Il ne converge que pour un très nombre d'éléments (maillage très fins).

b- L'élément proposé par Tocher appelé T basé sur un polynome complet à 9 termes obtenus en regroupant les termes en x^2y et xy^2 soit :

$$w(x,y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy + c_5x^2 + c_6y^2 + c_7x^3 + c_8(x^2y + y^2x) + c_9y^3$$

Cet élément ne respecte pas :

- La continuité de ω_n (dérivée normale discontinue).
- L'invariance géométrique .

La convergence de cet element est problematique, elle depend des conditions aux limites.

c- L'élément (z_0) proposé par Zienkiwicz basé sur un champ incomplet du troisième degré exprimé en coordonnées barycentriques (coordonnées d'aire) cet élément ne respect pas la continuité des pentes normales (ω_n) mais il converge de façon continue.

d- L'élément T10 proposé par Tocher basé sur un polynome complet du troisième degré et donc 10 coordonnées généralisées à partir de 10 ddl (fig.2).

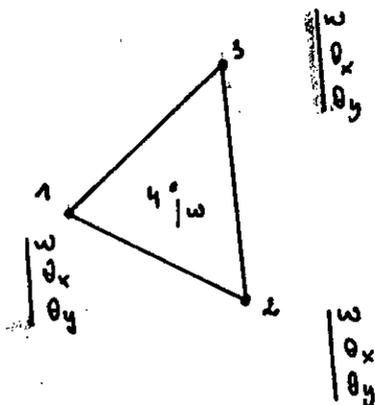


Fig (11.2)

Le degré de liberté du noeud 10 est éliminé par condensation.

e- L'élément conforme ZA proposé par Zienkiwicz à partir de l'élément non-conforme ZO. Malheureusement, il est moins précis que l'élément initial.

d- L'élément HCT proposé par Clough et Tocher est basé sur une subdivision en trois triangles, dans chaque sous-élément, on utilise une approximation incomplète du troisième degré à 9 termes (soit 27 ddl pour l'élément complet), parmi ces 27 ddl, 18 sont éliminés en écrivant les conditions de compatibilité entre ces sous-éléments d'une part et d'autre part par condensation de façon à aboutir au triangle habituel de 9 ddl.

La formulation implique des manipulations algébriques fastidieuses et l'élément est dit trop rigide.

g- L'élément BCIZ1 proposé par Zienkiwicz ne respecte pas la compatibilité.

- L'élément BCIZ1 convergence problématique.

- L'élément A9 dérivée du BCIZ1, polynôme incomplet.

II.5- TESTS DE VALIDATION ET PERFORMANCES DES ELEMENTS :

L'objectif général des tests numériques est d'évaluer les résultats obtenus par un code de calcul utilisant un élément particulier. Ces tests permettent :

- de vérifier la satisfaction des critères de convergence.
- d'évaluer la précision de l'élément (déplacement, contraintes, fréquences propres, ...) pour les problèmes donnés.
- de vérifier la bonne programmation.

Le choix du type et du nombre de tests est très important pour une bonne validation des codes.

On distingue les tests :

- avec un seul élément.
- avec plusieurs éléments (patch-test).
- avec différents maillages (test de précision).

II.5.1- TESTS AVEC UN SEUL ÉLÉMENT .

II.5.1.1- MODES RIGIDES ET PARASITES :

Un élément (de type déplacement ou de type mixte) défini par sa matrice $[K]$ devrait idéalement pouvoir représenter l'état de déformation nulle ou d'énergie interne nulle (mode ou mouvement de corps rigide).

Différentes possibilités existent pour vérifier cet aspect parmi les quelle on cite :

* Calcul des valeurs et vecteurs propres de $[K]$:

- Le nombre des valeurs propres nulles doit être égal au nombre de modes rigides. En deux dimensions et coordonnées cartésiennes, $m_r=3$ (deux translations, une rotation) ; en trois, $m_r=6$ (trois translations , trois rotations)
- Le nombre de λ nuls supérieur à m_r définit le nombre de modes dits parasites (à énergie interne nulle). Ces modes parasites doivent disparaître après assemblage de plusieurs éléments pour éviter la singularité de $[K]$
- Les valeurs propres de l'élément doivent être indépendantes du système de coordonnées choisi pour le calcul de $[K]$ (élément géométriquement isotrope).

II.5.1.2- MODES ASSOCIÉS AUX DÉFORMATIONS CONSTANTES :

Pour respecter le critère de convergence, l'élément doit de plus représenter exactement l'état de déformations ou contraintes constantes . La matrice $[K]$ de rigidité est associée à l'expression variationnelle (travail virtuel interne d'un élément déplacement ou mixte). La relation (II.8) peut être utilisée pour vérifier la représentation de l'état de déformations (ou contraintes) constantes.

$$\{f_{int}\} = \int_V [B]^t \{\sigma\} dv \quad (II.7)$$

$$[K] \{U_n\} = \{f_{int}\} \quad (II.8)$$

- Pour un état de contrainte $\{\sigma\}$ choisi (par exemple $\langle\sigma\rangle = \langle 1 \ 0 \ 0 \ . \ . \ . \rangle$)
On calcul $\{f_{int}\}$ par (II.7), ensuite on résoud (II.8), après introduction des conditions aux limites homogènes pour éliminer les modes rigides. La solution $\{U_n\}$ obtenue doit être compatible avec la solution théorique. Et :

$$\{\sigma\}_{cal.} = [D] [B] \{U_n\} \quad (II.9)$$

Devra être égale à $\{\sigma\}$ choisi.

II.5.2- PATCH-TESTS :

On peut vérifier par différents tests numériques la représentation des états de déformations nulles et constantes sur un ensemble d'éléments (patch, en anglais).

Ces tests complètent ceux qui concernent un élément et leurs objectifs sont de vérifier :

- Les étapes de la programmation relatives à l'assemblage de plusieurs éléments .
- La stabilité de la solution $\{U\} = [K]^{-1}\{f\}$
ou non existence de modes parasites (dus à l'intégration numérique réduite ou sélective ou à la non cohérence des champs déplacements/contraintes en formulation mixte).
- La capacité d'éléments non-compatibles ou non standards à représenter les états de déformation constante pour

des maillages quelconques.

Un patch-test peut être effectué de plusieurs façons. La forme "B", dite cinématique, est la plus simple, elle implique les étapes suivantes :

a- choix du domaine :

Un maillage quelconque est choisi de façon à avoir au moins un noeud à l'intérieur du domaine .

Exemple :

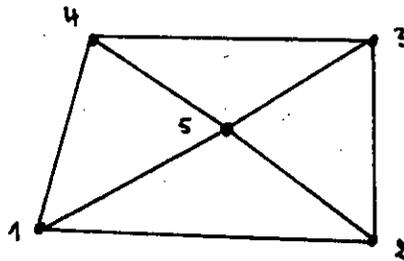


Fig (II.3)

b-Définition d'un champ de déplacements $U(x)$ qui traduit un état de déformations désirées (constantes ou non)

$$U(x) = P_m(x) \quad (II.10)$$

P_m = polynôme d'ordre m

c-Introduction des conditions aux limites (déplacements), sur tous les noeuds du contour du domaine.

$$U_c = P_m(x_c) \quad (II.11)$$

d- Assemblage puis résolution du problème

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (II.12)$$

On dit que l'élément passe le patch-test si :

$$U(x_i) = P_m(x_i)$$

ou x_i représentent les coordonnées des noeuds internes et

si les déformations calculées correspondent aux déformations théoriques choisies.

La forme "B" est adaptée à l'évaluation des performances pour les modes constants et non-constants (modes supérieurs). La forme "A" relative à la vérification de l'état de déformations constantes. (la forme A est un cas particulier de B)

Dans les formes "A" et "B" et pour des états de déformations constantes, il n'y a pas de sollicitations appliquées, on peut également considérer un assemblage d'éléments et des sollicitations aux noeuds du contour en accord avec un état de contraintes constantes: C'est la forme "C" du patch-test (dit mécanique). Dans cette situation, on prend en compte le minimum de conditions aux limites permettant d'éliminer les mouvements de corps rigide.

II.5.3- TEST DE PRÉCISION D'UN ÉLÉMENT :

Les performances des éléments sont classiquement évaluées en comparant les solutions numériques obtenues par éléments finis à des solutions théorique de références ou à des résultats expérimentaux lorsque ceux-ci sont disponibles .

On compare par exemple :

- Un déplacement (flèche au centre) ou une rotation maximum.
- Une norme en déplacement, par exemple :

$$e_w^2 = \int (\omega_{ef} - \omega_{exact})^2 dA \quad (II.13)$$

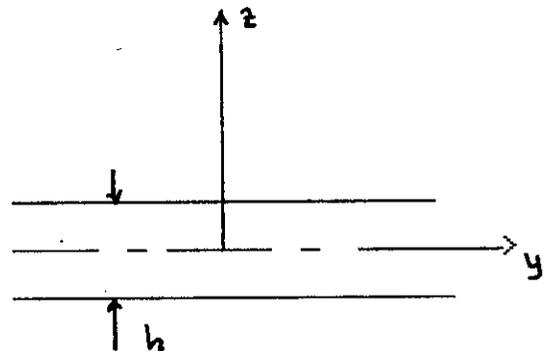
- Des efforts résultants en des points particuliers.
- L'énergie potentielle totale .

III. THEORIE DE FLEXION DES PLAQUES [1,3,4,6,7,8,9]

III.1-INTRODUCTION

*- On appelle plaque un solide limité par deux plans parallèles distants de h est par une surface fermée normale à ces plans.

Fig (III.1)



Le plan équidistant des deux plans est le plan moyen .

** - Les propriétés de flexion d'une plaque dépendent en grande partie de la grandeur de son épaisseur par rapport aux autres dimensions de ce fait les plaques peuvent être classées en trois groupes :

- les plaques minces avec faibles flèches.
- les plaques minces avec grandes flèches.
- les plaques épaisses

Les plaques minces avec faibles flèches obéissent aux hypothèses:

- Le rapport de l'épaisseur de la plaque h sur la petite dimension latérale doit être inférieur à $1/5$.
- les flèches w de la plaque doivent être faibles par rapport à son épaisseur soit: $w/l < 1/h$.

III.1-THEORIE DE KIRCHHOFF-POISSON

III.1.1-HYPOTHESES

La théorie de kirchhoff se base sur les les hypothèses suivantes :

1. Les forces extérieures peuvent être considérées comme appliquées au plan moyen et normales à celui-ci (y compris le poids propre de la plaque).

2. la contrainte σ_z sur tout élément parallèle au plan moyen peut être négligée par rapport à σ_x et σ_y , on aura donc :

$$\sigma_z = 0 \quad (\text{III.1})$$

3. le plan moyen ne subit aucune contraction ni extension lors de la flexion de la plaque. Le déplacement d'un point du plan moyen se réduit donc à sa seule composante normale w , on aura :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

4. les normales au plan moyen avant la flexion restent perpendiculaires à celui-ci après la flexion, cela revient à négliger l'effet de cisaillement, on aura :

$$\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \quad (\text{III.3})$$

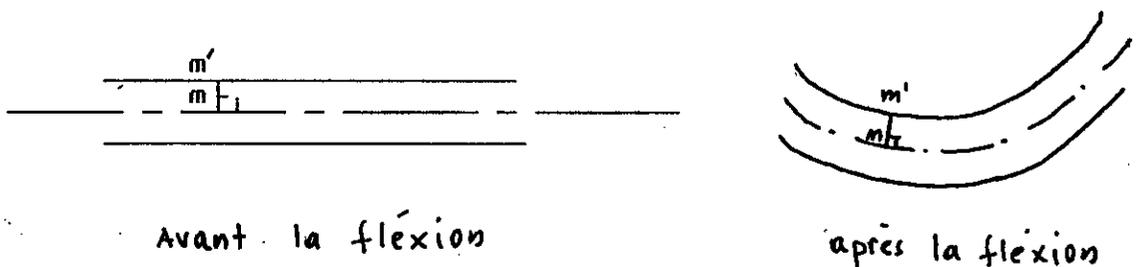


Fig (III.2)

III.1.2-ETUDE DE LA FLEXION PURE

Selon les hypothèses faites, les relations de déformations déplacements se réduisent à :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{III.4})$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{III.7})$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{III.5})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.8})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{III.6})$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.9})$$

On se ramène donc à un état de déformation plane d'après l'équation (III.7) :

$$w = w(x, y) \quad (\text{III.10})$$

En intégrant les équations (II.8) et (II.9) il vient que :

$$u = -z \frac{\partial u}{\partial x} + u_0(x, y) \quad (\text{III.11})$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y) \quad (\text{III.12})$$

Mais selon l'hypothèse (3) de Kirchhoff d'où :

$$u_0 = v_0 = 0$$

$$u = -z \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{et} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$(\text{III.13})$$

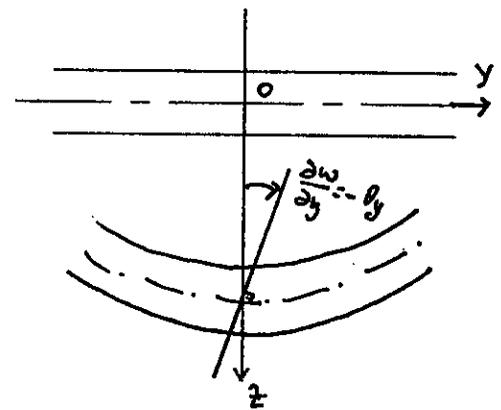
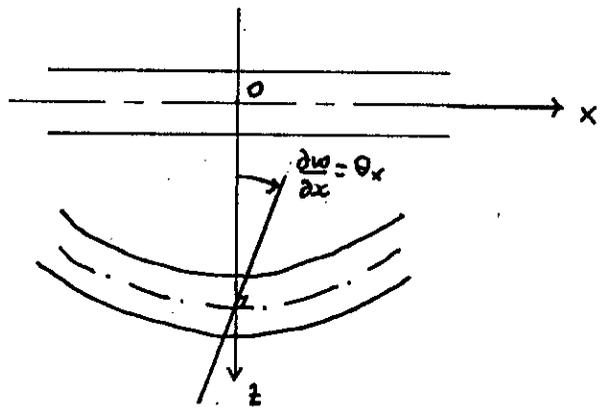


Fig. (III.2)

En substituant les équations (III.10) et (III.11) dans les équations (III.4) (III.5), (III.6) on obtient :

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{III.14})$$

$$\epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{III.15})$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{III.16})$$

$\{ \varepsilon \} = -z \{ k \}$, {k} vecteur courbure

soient alors :

$$\frac{1}{\rho_x} = - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = k_x \quad (\text{III.17})$$

ou k_x : courbure du plan moyen dans le plan XZ

$$\frac{1}{\rho_y} = - \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = k_y \quad (\text{III.18})$$

ou k_y : courbure du plan moyen dans le plan YZ

$$\frac{1}{\rho_z} = - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = k_{xy} \quad (\text{III.19})$$

ou k_z : courbure du plan moyen dans le plan XY

N.B : Une courbure est considérée positive si elle convexe vers le bas , la flèche est négative, ceci implique le signe moins (-)

III.1.3- RELATIONS CONTRAINTES COURBURES :

En utilisant les formules de la loi de HOOKE généralisée pour un état de contraintes, on se ramène à des relations entre contraintes et courbures.

$$\varepsilon_x = \frac{(\sigma_x - \nu_x \sigma_y)}{E_x} \quad (\text{III.20})$$

$$\varepsilon_y = \frac{(\sigma_y - \nu_y \sigma_x)}{E_y} \quad (\text{III.21})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \quad (\text{III.22})$$

ce qui donne :

$$\sigma_x = \frac{E_x \varepsilon_x}{(1 - \nu_x \nu_y) + \frac{\nu_x E_x E_y}{(1 - \nu_x \nu_y)}} \quad (\text{III.23})$$

$$\sigma_y = \frac{E_y \varepsilon_y}{(1 - \nu_x \nu_y) + \frac{\nu_y E_x E_y}{(1 - \nu_x \nu_y)}} \quad (\text{III.24})$$

$$\tau_{xy} = G_{xy} \gamma_{xy} \quad (\text{III.25})$$

En introduisant les courbures de la plaque on obtient:

$$\sigma_x = \frac{-(E_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2})}{(1-\nu_x \nu_y) + \frac{\nu_x E_y}{(1-\nu_x \nu_y)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} z \quad (\text{III.26})$$

$$\sigma_y = \frac{-(E_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})}{(1-\nu_x \nu_y) + \frac{\nu_y E_x}{(1-\nu_x \nu_y)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} z \quad (\text{III.27})$$

$$\tau_{xy} = -2 G_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{III.28})$$

Avec :

- E_x, E_y : modules de Young dans le sens X et Y respectivement.
- ν_x, ν_y : coefficients de poisson dans les deux dimensions X et Y
- G : module d'élasticité transversale.

Dans le cas d'un matériaux isotrope :

$$E_x = E_y = E \quad \text{et} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

(III.29)

d'où $\{\sigma\} = -z [c] \{k\}$ (III.30)

avec $\{k\}$ = vecteur constant

III.1.4 - DETERMINATION DE L'ENERGIE DE DEFORMATION

l'énergie de deformation U_f est donnée par :

$$U = U_f = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^t \{\epsilon\} dv = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^t \{\epsilon\} dv$$

en utilisant les relations (II.16) et (II.30) on aura :

$$U = \frac{1}{2} \int_V -z \{k\}^t [c] (-z) \{k\} dv$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V z^2 \{k\}^t [c] \{k\} dv$$

avec $dv = dx dy dz \implies U = \frac{1}{2} \int_V \{k\}^t [c] \{k\} ds \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz$

D'où :

$$U = \frac{E h^3}{24(1-\nu^2)} \iint_s \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (III.31)$$

III.2- THEORIE DE MINDLIN - REISSNER

Dans la théorie de Kirchhoff, la formulation de l'élément plaque exige une continuité C_1 , chose qui est difficile à réaliser pour formulation assez simple conduisant à des résultats satisfaisants.

La théorie de MINDLIN REISSNER permet de formuler les éléments tenant compte des déformations de cisaillement dues à l'effort tranchant mais qui n'exige qu'une continuité C_0 .

III.2.1 HYPOTHESES

La théorie de MINDLIN REISSNER est basée sur les hypothèses :

a- hypothèse de la contrainte plane, exprimée par:

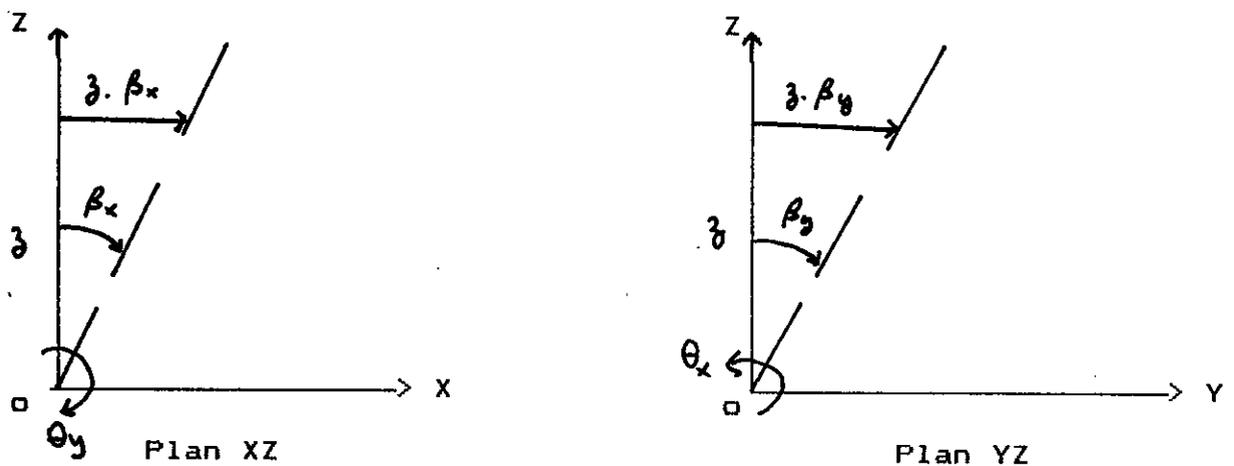
$$\sigma_z = 0 \quad (\text{III.32})$$

b- Les sections planes avant déformation restent planes après déformation ceci se traduit par

$$u = z \beta_x(x, y, z) \quad (\text{III.33})$$

$$v = z \beta_y(x, y, z)$$

β : rotation d'une fibre initialement normale au plan moyen



-Fig (III.2.1)-

* On n'impose pas que les sections normales au plan moyen restent perpendiculaires à ce dernier après déformation.

c- Le déplacement est uniforme à travers l'épaisseur de la plaque.

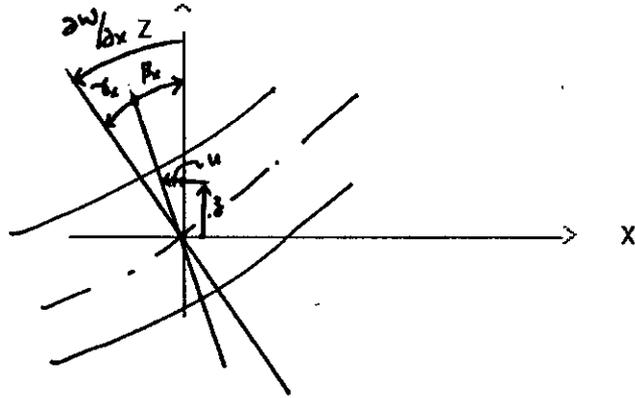
$$w = w(x, y) \quad (\text{III.34})$$

d- les rotations sont uniformes à travers l'épaisseur de la plaque.

$$\beta = \beta (x , y) \quad (III.35)$$

e- On néglige la rotation autour de l'axe z : $\beta_z = 0$

Fig.(III.2.2)



$$\text{On a :} \quad \gamma_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \quad \gamma_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \quad (III.36)$$

Avec : γ : déformation de cisaillement

N.B La présence des efforts internes de cisaillement font diminuer la déformation en diminuant la rotation de la normale, ceci est du au fait que les efforts internes sont développés pour permettre au corps d'être dans un état le plus stable possible c'est à dir ayant la plus petite énergie de déformation.

III.2.2-RELATIONS CINEMATIQUES

III.2.2.1-RELATIONS DEFORMATIONS-DEPLACEMENTS

Dans la théorie de Mindlin on se donne un modèle de déplacement basé sur la trois variables indépendantes, le déplacement transversal $w(x,y)$ et deux rotations $\beta_x(x,y)$ et $\beta_y(x,y)$.

Le champs de déplacement s'exprime en fonction de ces trois variables par les relations suivantes :

$$u = z \beta_x (x , y) \quad v = z \beta_y (x , y) \quad w = w (x , y) \quad (III.37)$$

Le tenseur de déformation s'écrit :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = z \beta_{x,x} & \gamma_{xy} &= z (\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) \\
\varepsilon_y &= z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} = z \beta_{y,y} & \gamma_{xz} &= \beta_x + w_{,x} \\
\varepsilon_z &= 0 & \gamma_{yz} &= \beta_y + w_{,y}
\end{aligned}$$

(III.38)

Le tenseur de déformation est composé :

A- D'une déformation de flexion .

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix} \quad \text{(III.39)}$$

$$\{\varepsilon\} = z \{k\} \quad k$$

{k} est le vecteur courbure

B- D'une déformation de cisaillement

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + w_{,x} \\ \beta_y + w_{,y} \end{Bmatrix} \quad \text{(III.40)}$$

III.2.2.2-RELATIONS CONTRAINTES-DEFORMATIONS

En utilisant la loi de HOOK généralisée pour un

matériau isotrope, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.41})$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.42})$$

III.2.3-DETERMINATION DE L ENERGIE DE DEFORMATION

L'énergie de déformation est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{ \sigma \}^t \{ \varepsilon \} dv$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\{ \sigma \}_f^t \{ \varepsilon \}_f + \{ \sigma \}_c^t \{ \gamma \}) dv = U_f + U_c$$

(III.43)

U_f : Energie de déformation de flexion.

U_c : Energie de déformation de cisaillement.

III.2.3.1-DETERMINATION DE L ENERGIE DE FLEXION

$$U_f = \frac{1}{2} \int \{ \sigma \}_f^t \{ \varepsilon \} dv = \frac{1}{2} \int \{ \varepsilon \}_f^t [C] \{ \varepsilon \} dv$$

EN utilisant les relations précédentes on aura :

$$U_f = \frac{1}{2} \iint_S \{k\}^t \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 [c] dz \right] \{k\} dx dy$$

$$U_f = \frac{E h^3}{24(1-\nu)} \iint_S \left\{ \begin{matrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{matrix} \right\}^t \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{matrix} \right\} dx dy$$

$$U_f = \frac{E h^3}{24(1-\nu^2)} \iint_S (\beta_{x,x})^2 + (\beta_{y,y})^2 + 2\nu \beta_{x,x} \beta_{y,y} + \frac{1-\nu}{2} (\beta_{x,y} + \beta_{y,x})^2 dx dy$$

(III.44)

III.3.2.2-DETERMINATION DE L ENERGIE DE CISAILLEMENT

$$\text{On a : } U_c = \int_V \{\sigma\}_c^t \{\gamma\} dv = \frac{1}{2} \iint_S \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma\}^t dz \right]^t \{\gamma\} ds$$

$$\text{soit } \{q\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma\}_c dz$$

$$\text{D'ou } U_c = \frac{1}{2} \int \{d\}^t \{\gamma\} dx dy$$

Pour pouvoir déterminer q on doit adapter une certaine distribution des contraintes de cisaillement a travers l'épaisseur de la plaque.

$$\text{si } \{\sigma\} = \{\text{const}\}, \quad \{q\} = h [c]_c \{\gamma\}$$

D'une façon générale on a : $\{q\} = [c]_\gamma \{\gamma\}$

avec : $[c]_\gamma = k h [c]_c$ où k est un facteur correctif dépend du choix de la répartition des contraintes de cisaillement.

Ainsi l'énergie de cisaillement peut se mettre sous la forme suivantes :

$$U = \frac{1}{2} \int \{\gamma\}^t [c]_\gamma \{\gamma\} dx dy = \frac{G h k}{2} \int \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} dx dy$$

Pour un matériau isotrope : $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$$\text{D'où } U_c = \frac{E k h}{4(1+\nu^2)} \int_s \left[(w_{,x} + \beta_x)^2 + (w_{,y} + \beta_y)^2 \right] dx dy \quad (\text{III.45})$$

IV- FORMULATION DE L ELEMENT DKT [1,2,5]

IV.1-INTRODUCTION

La recherche internationale sur la formulation d'éléments finis de plaques et l'évaluation de leurs performances a été depuis 1965 et encore 1992, une des plus actives dans le domaine du calcul des structures par éléments finis.

Les caractéristiques essentielles des théories de plaques, dites du premier ordre, communément associées aux noms de REISSNER MINDLIN (plaques épaisses) et de KIRCHHOFF (plaques minces).

Les difficultés rencontrées pour obtenir des éléments finis avec cisaillement transversal (CT), ayant un nombre réduit de noeuds et de variables nodales, ont conduit plusieurs chercheurs à formuler des éléments très satisfaisants (sans mode parasites et blocage en CT) parmi ces éléments on cite : les éléments de KIRCHHOFF sous forme discrète.

ODEN, WENPNER, STRINCLIN et DHATT [1,5] ont été les premiers des 1968 à proposer l'idée d'introduction des hypothèses de KIRCHHOFF sous formes discrète pour pallier aux problèmes posés par la formulation d'éléments simples et conformes basés sur la théorie des plaques minces de KIRCHHOFF, les premiers résultats numériques ont été obtenus simultanément par STRINCLIN ET AL et par DHATT.

IV.2- FORMULATION STANDARD DE LA MATRICE DE RIGIDITE

Pour les plaques minces, les déformations de cisaillements et donc de l'énergie de cisaillement U_c sont négligeables par rapport à l'énergie de flexion U_f la matrice de rigidite de l'élément DKT pour l'analyse des plaques minces est basée simplement sur l'expression de l'énergie de déformation.

$$U_f = \int_A [K]^t [D_f] [K] dx dy \quad (IV.1)$$

L'équation (IV.1) ne contient que les premières dérivées de β_x et β_y et il est relativement facile d'établir des fonctions d'interpolation qui satisfassent la compatibilité exigée.

Puisque β_x et β_y sont des variables de l'équation (IV.1) il est nécessaire de lier les rotations de la normale au plan moyen et le déplacement transversal w (qui n'apparaît pas dans l'équation précédente (IV.1) ceci peut se faire avec les considérations suivantes :

a- L'élément triangulaire doit avoir que 9 ddl qui sont : le déplacement transversal w et les rotations ϑ_x et ϑ_y aux noeuds situés aux sommets du triangle .

b- la solution du KIRCHHOFF étant connue (pour les plaques minces) les rotations nodales doivent être :

$$\vartheta_x = + w_{,y} \quad \text{et} \quad \vartheta_y = - w_{,x}$$

c- Les éléments modèles des plaques minces étant gouvernés par la théorie de KIRCHHOFF , les hypothèses de cette théorie peuvent être imposées à n'importe quel point discret de la plaque .

d- la compatibilité de β_x et β_y ne devra pas être perdue .

La formulation de l'élément DKT présenté dans [3] est basée sur :

1- les rotations β_x et β_y varient quadratiquement sur l'élément :

$$\beta_x = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{xi} \quad \beta_y = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{yi} \quad (IV.2)$$

ou β_{xi} , β_{yi} sont les valeurs nodales aux sommets et aux milieux des cotés du triangle (voir fig.V.1) , $N_i(\xi,\eta)$ sont des fonctions de formes qui sont en fonction des coordonnées barycentriques ξ et η .

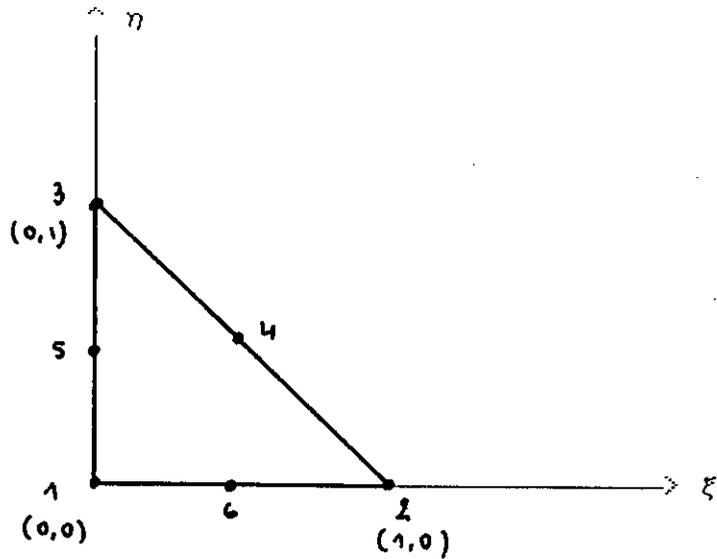


Fig.IV.1 - élément de reference pour DKT

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 2(1-\xi-\eta) \left(\frac{1}{2} - \xi - \eta \right) & N_4 &= 4\xi\eta \\
 N_2 &= \xi(2\xi-1) & N_5 &= 4\eta(1-\xi-\eta) \\
 N_3 &= \eta(2\eta-1) & N_6 &= 4\xi(1-\xi-\eta)
 \end{aligned}
 \tag{IV.3}$$

2- l'hypothèse de KIRCHHOFF aux noeuds sommets :

$$\beta_{xi} = \vartheta_{yi} \quad \beta_{yi} = \vartheta_{xi} \quad i=1,3 \quad \tag{IV.4}$$

3- L'hypothèse de KIRCHHOFF aux noeuds milieux sous la forme :

$$\beta_{sk} = -w_{,sk} \tag{IV.5}$$

où s représente la direction du coté dont k est le milieu avec k=4,5,6

En considerant une variation cubique de $w(s)$ le long du coté [5]:

$$w_{,sk} = - \frac{3}{l_{ij}} (w_i - w_j) - \frac{1}{4} (w_{,si} - w_{,sj}) \quad (IV.6)$$

k est le milieu du coté ij de longueur l_{ij}

4- Une variation lineaire de β_n est imposée le long des cotés .

$$\beta_{nk} = \frac{1}{2} (\beta_{ni} - \beta_{nj}) = - \frac{1}{2} (w_{,ni} + w_{,nj}) \quad (IV.7)$$

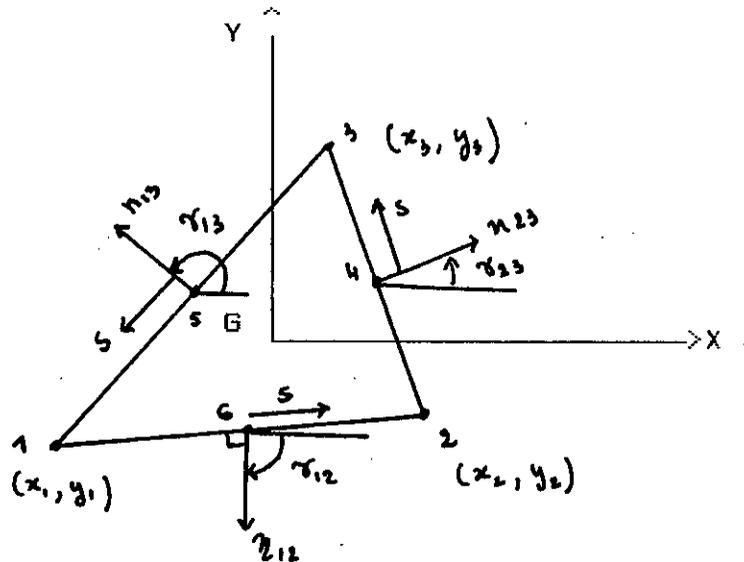


Fig.(IV.2)- GEOMETRIE POUR DKT

$$l_{ij} = \sqrt{(x_{ij}^2 + y_{ij}^2)}$$

$$x_{ij} = x_i - x_j$$

$$y_{ij} = y_i - y_j$$

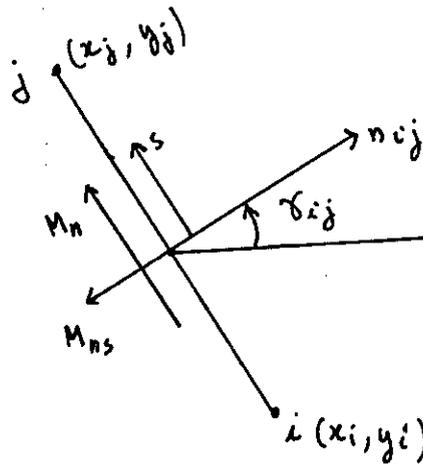


Fig (IV.3)

$$r_{ij} = (x, \eta_{ij})$$

$$e = \frac{s}{l_{ij}}$$

$$x = x_i - e x_{ij}$$

$$y = y_i - e y_{ij}$$

$$c = \cos \gamma_{ij} = - \frac{y_{ij}}{l_{ij}}$$

$$s = \sin \gamma_{ij} = \frac{x_{ij}}{l_{ij}}$$

$$x_k = \frac{x_i + x_j}{2}$$

$$y_k = \frac{y_i + y_j}{2}$$

Plusieurs techniques peuvent être utilisées pour obtenir les expressions de $\beta_x(\xi, \eta)$ et $\beta_y(\xi, \eta)$ en fonction des variables nodales $\langle U_n \rangle$ et pour obtenir la

$$\langle U_n^t \rangle = \langle w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, w_3, \theta_{x3}, \theta_{y3} \rangle$$

Les rotations β_s et β_n sont reliées à β_x et β_y par :

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_n \\ \beta_s \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

ou $c = \cos(x, n_{ij})$

$s = \sin(x, n_{ij})$

En utilisant les équations (IV.2)-(IV.8), on obtient β_x et β_y :

$$\beta_x = H_x^t(\xi, \eta) U_n \quad (\text{IV.9})$$

$$\beta_y = H_y^t(\xi, \eta) \cdot U_n$$

où H_x et H_y sont des vecteurs à neuf composantes.

ces composantes sont fonctions de N_i , $i=1,6$, et les coordonnées des noeuds.

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{x1} = 1.5(a_6 N_6 - a_5 N_5) \\ H_{x2} = b_5 N_5 - b_6 N_6 \\ H_{x3} = N_1 - c_5 N_5 - c_6 N_6 \\ H_{x4} = 1.5(a_4 N_6 - a_6 N_5) \\ H_{x5} = b_6 N_5 - b_4 N_6 \\ H_{x6} = N_2 - c_6 N_6 - c_4 N_4 \\ H_{x7} = 1.5(a_5 N_5 - a_6 N_6) \\ H_{x8} = b_6 N_6 - b_5 N_5 \\ H_{x9} = N_3 - c_6 N_6 - b_5 N_5 \end{array} \right. \quad (\text{IV.10})$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 H_{y1} = 1.5(d_6 N_6 - d_5 N_5) \\
 H_{y2} = -N_1 + e_5 N_5 + e_6 N_6 \\
 H_{y3} = -H_{x2} \\
 H_{y4} = 1.5(d_4 N_4 - d_6 N_6) \\
 H_{y5} = -N_2 + e_6 N_5 - e_4 N_4 \\
 H_{y6} = -H_{x2} \\
 H_{x7} = 1.5(d_5 N_5 - d_6 N_6) \\
 H_{x8} = -N_3 + e_6 N_6 + e_5 N_5 \\
 H_{x9} = -H_{x2}
 \end{array} \right. \quad (IV.11)$$

Avec :

$$a_k = - \frac{x_{ij}}{l_{ij}}$$

$$b_k = \frac{3 x_{ij} y_{ij}}{4 l_{ij}^2}$$

$$c_k = \frac{x_{ij}^2 - 2 y_{ij}^2}{4 l_{ij}^2}$$

$$d_k = - \frac{y_{ij}}{l_{ij}} \quad (\text{IV.12})$$

$$e_k = \frac{y_{ij}^2 - 2 x_{ij}^2}{4 l_{ij}^2}$$

$$l_{ij}^2 = x_{ij}^2 + y_{ij}^2$$

où $k=4,5,6$ pour les cotés $ij=23,31,12$ respectivement
L'évaluation de la matrice de rigidité suit les procédures standards de la méthode des éléments finis.

On a :

$$K = B U$$

où B est la matrice de transformation déformations-déplacements

$$B(\xi, \eta) = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31}^t H_{x,\xi}^t - y_{12}^t H_{x,\eta}^t \\ - x_{31}^t H_{y,\xi}^t - x_{12}^t H_{x,\eta}^t \\ - x_{31}^t H_{x,\xi}^t - x_{12}^t H_{x,\eta}^t + y_{31}^t H_{y,\xi}^t - y_{12}^t H_{y,\eta}^t \end{bmatrix}$$

et $2A = x_{31} y_{12} - x_{12} y_{31}$

Des relations (IV.10) et (IV.11) on obtient [3] :

$$H_{y,\xi} = \begin{bmatrix} t_6(1-2\xi) + \eta(t_5 - t_6) \\ 1 + r_6(1-2\xi) - \eta(r_5 + r_6) \\ -q_6(1-2\xi) + \eta(q_5 + q_6) \\ -t_6(1-2\xi) + \eta(t_4 + t_6) \\ -1 + r_6(1-2\xi) + \eta(r_4 - r_6) \\ -q_6(1-2\xi) - \eta(q_4 - q_6) \\ -\eta(t_4 + t_5) \\ \eta(r_4 - r_5) \\ -\eta(q_4 - q_5) \end{bmatrix}$$

$$H_{x,\xi} = \begin{bmatrix} p_6(1-2\xi) + \eta(p_5 - p_6) \\ q_6(1-2\xi) - \eta(q_5 + q_6) \\ r_6(1-2\xi) - \eta(r_5 + r_6) - 4 + 6(\xi + \eta) \\ -p_6(1-2\xi) + \eta(p_4 + p_6) \\ r_6(1-2\xi) + \eta(p_4 - p_6) \\ +r_6(1-2\xi) + \eta(r_4 - r_6) + 6\xi - 2 \\ -\eta(-p_4 + p_5) \\ \eta(q_4 - q_5) \\ -\eta(-r_4 + r_5) \end{bmatrix}$$

$$H_{x,\eta} = \begin{bmatrix} p_5(1-2\eta) + \xi(p_5-p_6) \\ q_5(1-2\eta) - \xi(q_5+q_6) \\ r_5(1-2\eta) - \xi(r_5+r_6) - 4 + 6(\xi+\eta) \\ \xi(p_4+p_6) \\ \eta(q_4-q_6) \\ -\xi(r_6-r_4) \\ -\xi(p_4+p_5) + p_5(1-2\eta) \\ \xi(q_4-q_5) + q_5(1-2\eta) \\ r_5(1-2\eta) + \xi(r_4-r_5) + 6\eta - 2 \end{bmatrix}$$

$$H_{y,\eta} = \begin{bmatrix} t_5(1-2\eta) + \xi(t_5-t_6) \\ r_5(1-2\eta) - \xi(r_5+r_6) + 1 \\ -q_5(1-2\eta) + \xi(q_5+q_6) \\ \xi(t_4+t_6) \\ \eta(r_4-r_6) \\ -\xi(q_6-q_4) \\ -\xi(t_4+t_5) + t_5(1-2\eta) \\ \xi(r_4-r_5) + r_5(1-2\eta) - 1 \\ -q_5(1-2\eta) + \xi(q_4-q_5) \end{bmatrix}$$

Avec :

$$p_k = - \frac{6 x_{ij}}{l_{ij}^2} = 6 a_k$$

$$t_k = - \frac{6 y_{ij}}{l_{ij}^2} = 6 d_k$$

$$q_k = \frac{3 x_{ij} y_{ij}}{l_{ij}^2} = 4 b_k$$

$$r_k = \frac{3 y_{ij}^2}{l_{ij}^2}$$

$k = 4, 5, 6$ pour $ij = 23, 31, 12$ respectivement.

La matrice de rigidite de l'élément DKT devient :

$$K_{dkt} = 2 A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} B^t D_f B d\xi d\eta$$

Pour $[D_f]$ constante, $[K]$ est obtenue exactement avec 3 points d'integration de HAMMER [1].

Lorsque les variables nodales, $\{U_n\}$ sont connues, on peut évaluer les courbures les moments et les contraintes planes par :

$$\{M\} = [H_f] \{k\}$$

$$\{k\} = [B] \{U_n\}$$

$$\{\sigma(\xi, \eta, z)\} = z[H]\{k\} \quad \text{avec } z = \pm \frac{h}{2} \quad \text{sur les faces}$$

$$\{k\} = \langle \beta_{x,x} \quad \beta_{y,y} \quad \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \rangle$$

Sur les cotes ou aux sommets, les contraintes sont discontinues d'un élément à l'autre. Les efforts tranchants peuvent être obtenus en utilisant les équations d'équilibre :

$$T_x = M_{x,x} + M_{xy,y}$$

$$T_y = M_{xy,y} + M_{y,y}$$

ou T_x et T_y sont constants pour DKT.

Les contraintes de CT sont également obtenues à partir des équations d'équilibre en contraintes.

$$\sigma_{xz} = - \int_{-z}^z (\sigma_{x,x} + \sigma_{xy,y}) dz$$

$$\sigma_{yz} = - \int_{-z}^z (\sigma_{xy,x} + \sigma_{y,y}) dz$$

* REMARQUES

1-les variables nodales de l'élément DKT sont celles d'élément de type de KIRCHHOFF "pur" permettant de satisfaire les conditions aux limites de type KIRCHHOFF.

2-l'hypothèse de KIRCHHOFF est satisfaites en tous point du contour

3-aucune interpolation de w n'est nécessaire à l'intérieur de l'élément pour le calcul de $[K]$ w varie cubiquement de façon indépendante le long du contour.

4-la convergence suivant la solution classique des plaques minces est vérifiée parce que l'énergie de déformation de cisaillement est négligée et l'hypothèse de KIRCHHOFF est satisfaite le long des frontières de l'élément .

5- Lorsque cette formulation est appliquée aux poutres planes, la matrice de rigidité exacte de la poutre est retrouvée (avec un polynome cubique w).

6-cette formulation peut être facilement étendue pour obtenir des éléments quadrilatéraux à 12 ddl (élément Qc) et d'autres éléments polygonals.

V- PRESENTATION DU LOGICIEL RE_FLEX [1,2]

V.1- INTRODUCTION

Nous présentons dans cette partie un logiciel simple et modulaire, Il peut servir de base aux chercheurs qui pourront l'utiliser et le modifier facilement pour tester de nouveaux éléments ou de nouvelles méthodes de résolution. Ce logiciel RE-FLEX (Recherche et Enseignement en modélisation des structures FLEXibles) est écrit en fortran et possède une architecture ouverte, modulaire et extensible. il peut facilement être implanté et exploité sur micro ordinateur ou station de travail.

Dans ce qui suit nous décrivons différents aspects de l'architecture du logiciel RE-FLEX et son mode d'utilisation, nous fournissons la liste des instructions des différents modules : acquisition des données, calcul des sollicitations réparties, résolution linéaire, calcul de valeurs et vecteurs propres.

V.2- CARACTERISTIQUES D'UN LOGICIEL D'ÉLÉMENTS FINIS :

En toute généralité un logiciel d'éléments finis contient :

- une structure de représentation des données associées à la description d'un problème et à la résolution.
- un ensemble de sous-programmes avec une structure d'enchaînement pour effectuer la lecture et les opérations de calcul.

La figure (V.1) nous montre l'enchaînement des différents bloc.

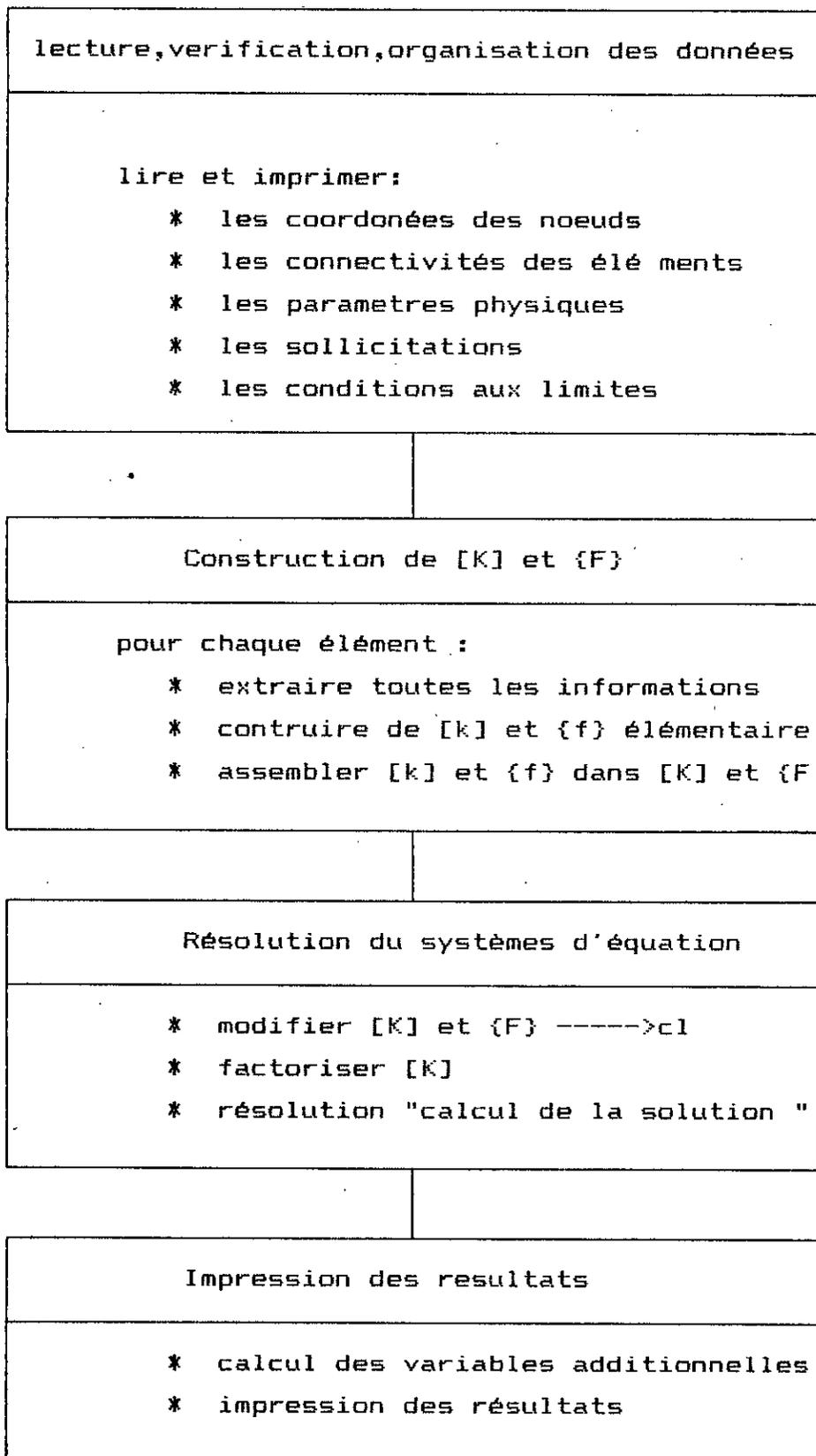


Fig (V.1)

V.3-CARACTERISTIQUE DU LOGICIEL RE-FLEX

1- Sa structure permet d'enlever ou d'ajouter des modules : on peut ne retenir que quelques modules pour l'initialisation à la méthode des éléments finis ou, au contraire, en ajouter pour d'autres applications.

2- chaque quantité est représentée d'une manière distincte dans la base des données.

3- durant la lecture des données aucune manipulation n'est effectuée pour préparer les tables et pointeurs associés aux modules de calcul. Nous pouvons utiliser différents types de stockage et méthode de résolution : "matrice pleine, ou ligne de ciel".

4- il est facile de modifier la méthode de résolution, les conditions aux limites, les coordonnées, les connectivités, car chaque entité est représentée indépendamment.

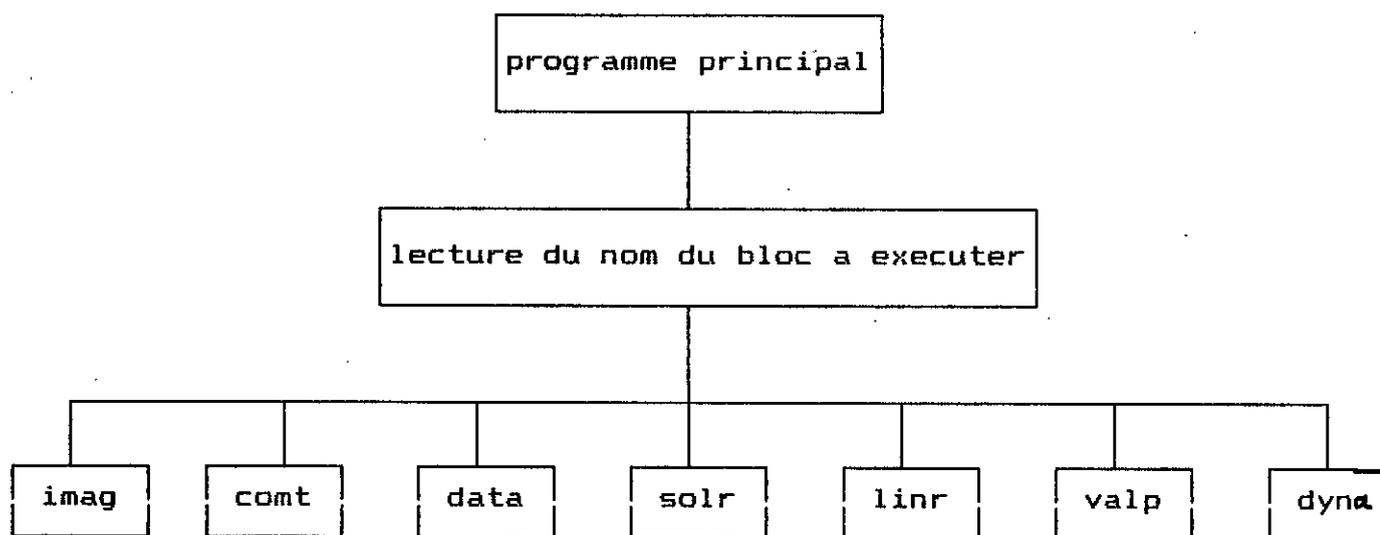
Nous signalons que toutes les quantités importantes (scalaires et tables) sont regroupées dans différents 'common', il est facile de créer un fichier groupant la déclaration des tables et d'utiliser une instruction de type 'include fichier' dans le programme principal et dans les sous-programmes (en notons que toute modification d'allocation nécessite une recompilation du logiciel)

V.4 - ORGANISATION GENERALE DU LOGICIEL RE-FLEX

Le logiciel RE-FLEX, écrit en fortran 77, est constitué d'un ensemble de modules, chaque module, exécutable par une commande, représente par un enchaînement des sous-programmes pour effectuer différentes opérations.

V.4.1- ENCHAINEMENT DES BLOCS FONCTIONNELS :

Le programme principal enchaîne l'exécution des blocs fonctionnels sous le contrôle de l'utilisateur, en appelant les sous-programmes correspondant à chaque bloc.



imag : impression des données

comt : lecture des commentaires

data : lecture des données éléments finis

solr : calcul des sollicitations reparties

linr : résolution du problème statique lineaire

valp : calcul de valeurs et vecteurs propres par iteration inverse avec orthogonalisation par GRAM-SCHMIDT

dyna : résolution du problème de dynamique des structure

stop : arrêt du programme

V.4.2- ALLOCATION DES TABLES :

L'allocation d'espace est effectuée en choisissant des dimensions fixes pour toutes les tables. differants parametres

globaux et tables sont définies dans les fichiers param.inc, common.inc qui sont communs à l'ensemble des sous-programmes.

V.4.3- DESCRIPTION DES DIFFERENTES COMMANDES

1- COMMANDE IMAG

Impression de l'ensemble des données du problème fournies par l'utilisateur.

programme principal

.
.
call blimag =====> subroutine blimag

2- COMMANDE COMT

Lecture et impression des commentaires décrivant le problème.

programme principal

.
.
call blcomt =====> subroutine blcomt

3- COMMANDE DATA

cette commande permet de lire toutes les données d'un problème d'éléments finis, plusieurs sous-programmes sont appelés pour créer différentes tables associées à la description du problème.

programme principal

.
.
call bldata

subroutine bldata

lecture des données

| | |
|------------------|--|
| call rdvcor(..) | coordonnées (vcor) |
| call rdkdlnc(..) | ddl par noeud (kdln) |
| call rdprn(..) | propriétés nodales (vprn) |
| call rdknec(..) | connectivités (konec) |
| call rdtpel(..) | type de l'élément (kprel) |
| call rdprel(..) | numéro de groupe (kprel) |
| | propriétés par groupe (vprel) |
| call rdclim(..) | indice (kclim) et valeur des cl (vclim) |
| call rdsolc(..) | sollicitations concentrées |

4- COMMANDE SOLR

Cette commande permet de construire, par assemblage le vecteur des charges équivalentes dues aux sollicitations repartis pour tous les types d'éléments utilisés.

programme principal

.
.
call blsolr

subroutine blsolr

.
.
call exsolr

subroutine exsolr

.
.

| | |
|------------------|-------------------------------|
| call init(..) | |
| call elemlib(..) | initialisation des paramètres |
| call tkone(..) | table (kone , kdle) |
| call tvcore(..) | table (vcore) |
| call tvpree(..) | table tvpree |
| call elmlib(..) | calcul de vfe |
| call asfe(..) | assemblage de vfe dans vfrg |

5- COMMANDE LINR

Cette commande controle les operations pour résoudre un problème lineaire.

$$[VKG] * \{U\} = \{VFG\} \quad \text{soit} \quad [L] * [D] * [S] * \{U\} = \{VFG\}$$

programme principal

call bllinr

subroutine bllinr

call exlinr

subroutine exlinr

call maj sollicitations concentrées dans vfg
call maj sollicitations réparties dans vfg
call asln assemblage de vkg

subroutine aslin

-call elemlib(1,..) initialisation
-call tkone(..) tables (kone,kdle)
-call tvcore(..) table (vcore)
-call tvpree(..) table (vpree)
-call elmlib(2,..) calcul de [vke]
-call aske(..) assemblage de [vke] dans [VKG]

call modkg(..) conditions aux limites
call kfacmp(..) triangularisation de [VKG]
call solmp(..) résolution
call movecl(..) reintroduction des cond.lim.
call prtsol(..) impression des résultats
call grad

subroutine grad

call elmlib,tkone, tvcore, tvpree(..)
call elmlib(..) calcul des contraintes

call reac

subroutine reac

calcul des
réactions

call elemlib,tkone, tvcore, tvpree(..)
call elmlib(..) calcul des forces internes
call asfe(..) assemblage de vfe dans vresg

* fin du boucle

6- COMMANDE VALP

Cette commande controle les opérations pour obtenir ivalp valeurs et vecteurs propres.

$$[VKG] * \{U\} = [vmg] * \{U\} * \text{lamda}$$

si l'inverse de la matrice n'existe pas on peut utiliser un décalage pour la rendre non singulière.

*-DECALAGE :

$$[VKG] = [VKB] - \text{decale} * [VMG]$$

$$\text{lamda} = \text{lamda} - \text{decale}$$

**-ITERATION INVERSE :

$$\{u^i\} = [K]^{-1} * [M] * \{u^{i-1}\}$$

$$\text{lamda} = \frac{\langle u^i \rangle * [K] * \{u^i\}}{\langle u^i \rangle * [M] * \{u^i\}}$$

***-ORTHOGONALISATION DE GRAM-SCHMIDT :

$$\{v\} = \{u\} - c1 * \{v1\} - c2 * \{v2\} \dots\dots$$

$$c1 = \langle v1 \rangle * [M] * \{u\}$$

$$v = \frac{\{v\}}{\langle v \rangle * [M] * \{v\}}$$

programme principal

·
·

call blvalp

subroutine blvalp

·
·
call exvalp

subroutine exvalp

·
·
call askg, asmg, kfacmp(...)

call vpinv valeurs et vecteurs propres

subroutine vpinv

- call init
- call matvec
- call scal
- call gram, scal, solmp, scal,
matvec, scal(...)

7- COMMANDE DYNA :

Cette commande controle les opérations pour obtenir la solution temporelle d'un problème de dynamique.

$$[K] * \{U\} + [M] * \{\dot{U}\} = \{F\}$$

La méthode implicite de NEWMARK est utilisée pour la discrétisation dans le temps, si l'on ne tient pas compte de l'amortissement.

$$[[M] * (dt * dt/4) * [K]] * \{U(t+dt)\} = \{R\}$$

avec :

$$\{R\} = (dt * dt/4) * \{F(t+dt)\} + [M] * (\{U\} + dt * \{vitg\} + (dt * dt/4) * \{vaccg\})$$

$$\{vaccg(t+dt)\} = - \{vaccg(dt)\} + \{4/dt * dt\} * (\{u(t+dt)\} - \{u(t)-dt * \{vitess(t)\}\})$$

$$\{vitg(t+dt)\} = \{vitess(t)\} + dt/2 * (\{vaccel(t)\} + \{vaccel(t + dt)\})$$

L'enchaînement des opérations de la commande DYNA est le suivant:

programme principal

·
·

call bldyna

subroutine bldyna

call exdyna

subroutine exdyna

call maj, maj, lirsol, movecl, maj,
asdyna, kfacmp, solmp, accvit,
move, prtsol(...)

B- COMMANDE STOP

cette commande permet de terminer l'exécution du logiciel,
c'est la dernière commande .

- cette commande est obligatoire

V.4 -DESCRIPTION DES DONNEES DU LOGICIEL RE-FLEX

| LIGNE | FORMAT | VARIABLE LUE | COMMENTAIRES |
|-------|-----------|------------------|--|
| 1 | 2A10 | finp,fout | fichiers de resultats et de données |
| 2 | A4,6X,2i5 | imag,mglob,melem | image des données |
| 3 | A4,6X,2I5 | comt,mglob,melem | commentaires |
| 4 | 00 | | |
| 5 | A4,6X,2I5 | data,mglob,melem | données éléments finis |

| | | | |
|----|------------------------|---|---------------------------|
| 6 | 5X,A4,1X,10I5 | coor,ndim,nnt, ndln,idlvar,nprn | |
| 7 | BF10 nnt lignes | X , Y , Z | coordonnées |
| 9 | 5X,A4 | DLPN | facultatif |
| 10 | 16I5 NNT/16 lignes | KDLNC | facultatif |
| 11 | 5X,A4 | PRND | facultatif(pp.nodales) |
| 12 | BF10 nnt lignes | VPRN(nprn val.) | facultatif |
| 13 | 5X,A4,1X,10I5 | elem,nelt,nnel, ngprel,nprel, ntypel,itypel | |
| 14 | 16I5 | konec | connectivités |
| 15 | 5X,A4 | TYPE | facultatif |
| 16 | 15I5 | KYPEL | facultatif |
| 17 | 5X,A4 | PREL | # groupes de pp.élément. |
| 18 | 16I5 NELT/16 lignes | KPREL | facultatif |
| 19 | BF10:0 | VPREL | pp.pour chaque groupe |
| 20 | 5X,A4 | COND | conditions imposées |
| 21 | 10I1,7F10.0 | ICOD | valeurs de ddl |
| 22 | 16i5 fin par -1 | kvec-kclim | imposés(numero des noeuds |
| 23 | 00 | | |
| 24 | 5X,A4 | SOLC | facultatif,soll.conc. |

| | | | |
|----|--------------------|--|---------------------------|
| 25 | 7F10 | v1(i),(i=1,ndln) | sollicitations |
| 26 | 16I5 fin par -1 | KVEC | numéro des noeuds |
| 27 | A4,6X,2I5 | solr,mglob,melem | soll.reparties |
| 28 | A4,6X,2I5 | linr,mglob,melem | pb.lineaire statique |
| 29 | 3I5,3A10 | nonsym,igrad, ireac,fsol,fgrad freac | |
| 30 | A4,6X,2I5 | VALP,MGLOB,MELEM | valeurs et vecteurs prop. |
| 31 | 2I5 | nvalp,niter | |
| 32 | 2F10.0 | decale,emax | |
| 33 | A4,6X,2I5 | DYNA,MGLOB,MELEM | dynamique transitoire |
| 34 | I5 | nonsym | |
| 35 | 2F10.0 | tfcg,tfrg | |
| 36 | I5,2F10.0 | NPAS,DPAS,DFG | autant de lign.que de pas |
| 37 | 00 | | |
| 38 | A4.6x,2I5 | stop | arret de l'execution |

V.4.2 : Exemple : Fichier des données

*.- EXEMPLE D'UTILISATION DE RE_FLEX 1.0 : ELEMENT DKT

```

imag
comt
** élément DKT - élément type 7
** soll.conc.=1 au noeud 3 et -1 au noeud 2
** influence de la distorsion géométrique
**
**           4                               3
**           *****
**           *                               *
**           *                               *
**           *                               *
**           *****
**           1                               2
**           c.1 la plaque est encastree (cote 1-4)

data      0      0
  coord   2      4      3      0      0
  0        0
  6        0
  6        1
  0        1
  elem    2      3      1      10     1      7
  1      2      3
  1      3      4
  prel
  1      10000000  0.25      0      0      0      0
  0.05
  cond
111      0      0      0
  1      4      -1

  solc
  -1.
  2
  1.
  3

solr
linr
  0      0      0
  0      0      0
stop      0      0

```

CONCLUSION : AVANTAGES ET INCONVENIENTS DU LOGICIEL RE_FLEX

1- AVANTAGES :

- 1- Sa structure permet d'enlever ou ajouter des modules
- 2- Chaque quantité est représentée d'une manière distincte dans la base des données
- 3- On peut changer la taille des tables selon la classe des différents problèmes par l'édition des fichiers 'PARAM.INC' et 'COMMON.INC', il suffit ensuite de recompiler tous les sous-programmes du logiciel.
- 4- Il est facile de modifier quelques sous-routines (méthode de résolution, les conditions aux limites.....)

2- INCONVENIENTS

- 1- Allocation d'espace pour différentes tables est statique.
- 2- on ne peut pas introduire les conditions aux limites de type :
$$\delta_k = \alpha * \delta_1$$
- 3- fichier de données compliqué d'où la nécessité d'introduire un mailleur automatique.

VI. RESULTATS NUMERIQUES

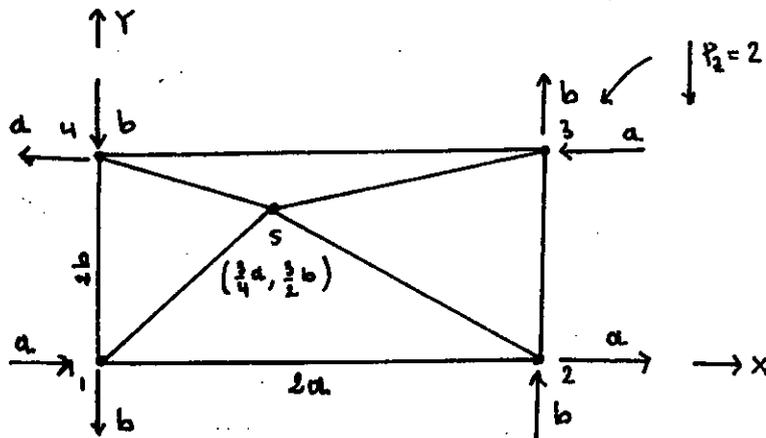
De nombreux problèmes académiques et pratiques ont été traités pour mettre en évidence les caractéristiques de l'élément DKT afin de traiter les problèmes linéaires statiques et dynamiques (vibrations libres) et de flambement. Ces caractéristiques incluent notamment l'influence de la distorsion, la vitesse de convergence, la précision dans le calcul des contraintes.

VI.1- PATCH-TEST :

Afin de s'assurer de la compatibilité des variables essentielles et de la bonne représentation de l'état de déformation constante on peut solutionner les problèmes dits du patch-test, et impliquant un nombre réduit d'élément DKT. une bonne programmation de la matrice de rigidité doit conduire à fournir pour le problème décrit dans la figure (VI.1) à des moments M_x , M_y , M_{xy} égaux à l'unité en tout point du domaine.

Il est à noter que l'élément classique BCIZ1 conduit pour le problème de la figure (VI.1) à des résultats erronés jusqu'à 30 %, cet élément ne devrait plus être maintenu dans les codes de calcul actuels.

D'autre part on peut s'assurer en calculant les valeurs propres des matrices de rigidité de DKT et pour une large variation de l/h qu'il n'existe que trois mouvements à énergie nulle



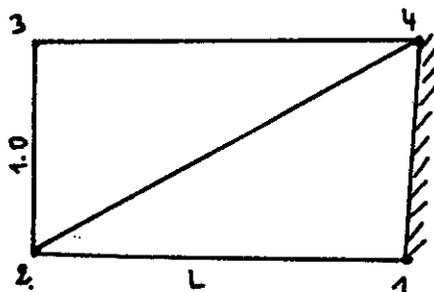
C.L. $W=0$ aux nœuds 1,2,4
 $M_x = b$ " " 2,3
 $M_x = -b$ " " 1,4
 $M_y = -a$ " " 1,2
 $M_y = a$ " " 3,4
 $P_3 = -2$ au nœud 3

Fig (VI.1) -

Résultats: $M_x = M_y = M_{xy} = 1$ en tout point du domaine
 Pour $a = 20$, $b = 10$, $E = 1000$, $h = 1$ et $\nu = 0.3$ $W_3 = 12.47$

VI.2- TEST DE ROBINSON :

ROBINSON a proposé dès 1978 une série de tests qu'un élément devrait subir avec succès avant d'être intégré dans un code de calcul aux applications industrielles. Ce test, consiste à étudier le comportement d'une plaque rectangulaire de longueur L encastree le long d'un petit coté et soumise à l'extrémité libre soit à deux charges concentrées de direction opposée et égales à 1, soit à deux couples concentrés $M_y = 1$, la plaque est discrétisée par deux éléments triangulaires (fig VI.2.1) et (fig IV.3). Les plaques travaillent en flexion-torsion, on a étudié le comportement de l'élément DKT en le comparant à d'autres éléments triangulaires compatibles tel que : HCT, HSM qui sont prises directement de [1], on a observé que l'élément DKT conduisait à des résultats très proches de la solution de référence (benchmark) pour les deux maillages (orientation (A) et l'orientation (B)), En particulier, les éléments compatibles HCT et HSM ne fournissent des résultats corrects que pour $L < 2$



fig(VI.2.1)

C.L : $w = \theta_x = \theta_y$ aux nœuds 1 et 4

$P_2 = 1.0$ au nœud 3

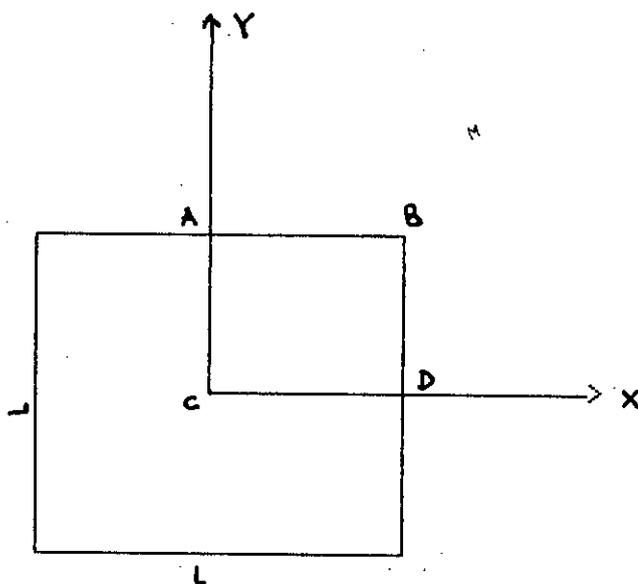
$P_2 = -1.0$ au nœud 2

VI.3- TESTS DE PRÉCISION

VI.3.1- PLAQUES CARRÉES :

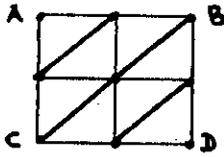
Différents problèmes de plaques carrées et rectangulaires ont été analysées avec l'élément DKT, pour différentes conditions aux limites et pour différentes sollicitations. Les figures (VI.3), et (VI.4) concernent une plaque carrée simplement supportée sous charge concentrée et pour une plaque encastree sous charge concentrée et uniforme. Les résultats obtenus avec DKT pour trois orientations possibles (DKT(A), DKT(B) et DKT(C)) sont comparés à d'autres éléments triangulaires à 9 d.l comme HCT, HSM et BCIZ1. Sur les figures (VI.5), (VI.6), (VI.7) et (VI.8) nous donnons le pourcentage d'erreur sur la flèche au centre en fonction du nombre de division N par demi-côté pour $N = 1, 2, 4$ on observe une convergence monotone de HCT et DKT (HCT étant un modèle déplacement compatible),

On observe également une influence forte de l'orientation du maillage avec les éléments DKT et HSM.

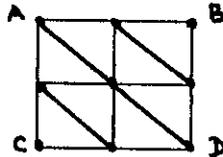


Fig(VI.3.1)- PLAQUE CARREE

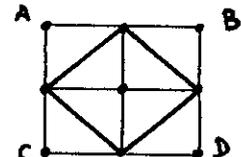
$N = 2$ (1/4 de plaque)



(A)



(B)



(C)

Condition de symetrie :

$$\beta_x = 0 \quad \text{sur CA}$$

$$\beta_y = 0 \quad \text{sur CD}$$

Encastrement :

$$w = \beta_x = \beta_y = 0 \quad \text{sur ABD}$$

Appui simple :

$$w = \beta_x = 0 \quad \text{sur AB}$$

$$w = \beta_y = 0 \quad \text{sur BD}$$

VI.3.2- PLAQUES LOSANGES "RHOMBIC"

Nous avons analysés une plaque biaise "rhombic" (voir figure (VI.8)) la plaque est discrétisée en élément DKT (A,B et C) et soumise à une force uniforme d'intensité ($q = 1$) on a remporté les resultats dans les tableaux (VI.1), (VI.2) et (VI.3)

La figure (VI.9) nous donne le pourcentage d'erreur sur la flèche au centre de la plaque en fonction du nombre de division N une convergence monotone est observée pour les trois orientation.

N.B _ on voulait comparer l'élément DKT à d'autres éléments triangulaires (HSM, HCT....) mais malheureusement nous ne disposons pas de solution pour ces éléments.

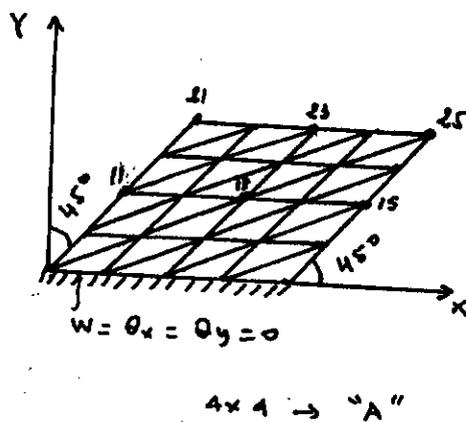
$$q = 0.26066 \text{ psi}$$

$$E = 105 .E+06 \text{ psi}$$

$$h = 0.125 \text{ psi}$$

$$\nu = 0.3$$

$$L = 12''$$



Fig(VI.81): PLAQUE LOSANGE "RHOMBIC"
ENCASTREE (orient. 'A')

| | 11 | 13 | 15 | 21 | 23 | 25 |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 X 1 | — | — | — | 0.2125 | — | 0.6856 |
| 2 X 2 | 0.0303 | 0.0705 | 0.1483 | 0.1215 | 0.2231 | 0.3460 |
| 4 X 4 | 0.0228 | 0.0582 | 0.1277 | 0.1189 | 0.2111 | 0.3254 |
| v.exp. | 0.022 | 0.056 | 0.129 | 0.121 | 0.204 | 0.294 |

tableau (VI.1)- Resultats numeriques (orientation "A")

| | 11 | 13 | 15 | 21 | 23 | 25 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 X 1 | — | — | — | 0.1202 | — | 0.3201 |
| 2 X 2 | 0.0166 | 0.0444 | 0.1005 | 0.0986 | 0.1689 | 0.2568 |
| 4 X 4 | 0.0191 | 0.0518 | 0.1161 | 0.1170 | 0.1978 | 0.2960 |

tableau (VI.2)- Resultats numériques (orientation "B")

| | 11 | 13 | 15 | 21 | 23 | 25 |
|-------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|
| 2 X 2 | 0.01986 | 0.0674 | 0.1455 | 0.1207 | 0.2153 | 0.3395 |
| 4 X 4 | 0.01991 | 0.05526 | 0.1244 | 0.1171 | 0.2008 | 0.3052 |

tableau (VI.3)- Resultats numériques (orientation "C")

VI.3.3-PLAQUE CIRCULAIRE

Nous avons analysés une plaque circulaire (mince) pour les deux cas de conditions aux limites "encastrée et simplement supportée", les resultats obtenus sont reportés dans les tableaux (VI.4), (VI.5) et (VI.6) pour de deux cas de conditions aux limites.

On a reporté l'erreur sur w_c (déflexion du centre de la plaque) en fonction du nombre d'éléments (voir figure(VI.10) on remarque que la solution obtenue avec l'élément DKT tend vers la solution théorique lorsque le nombre d'éléments augmente (finesse du maillage).

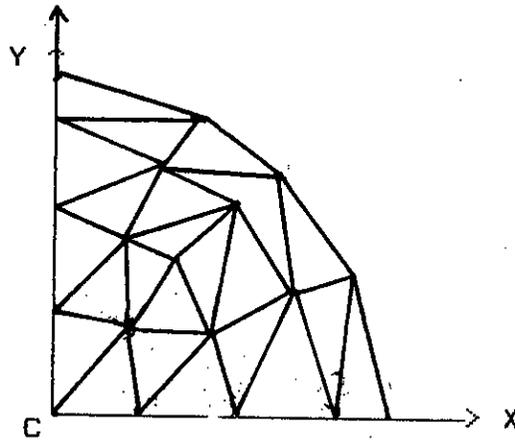
$$E = 10.92$$

$$\nu = 0.3$$

$$q = 1$$

$$h = 0.1$$

$$R = 5$$



Fig(VI.11)-(1/4 de plaque circulaire)
(24 éléments)

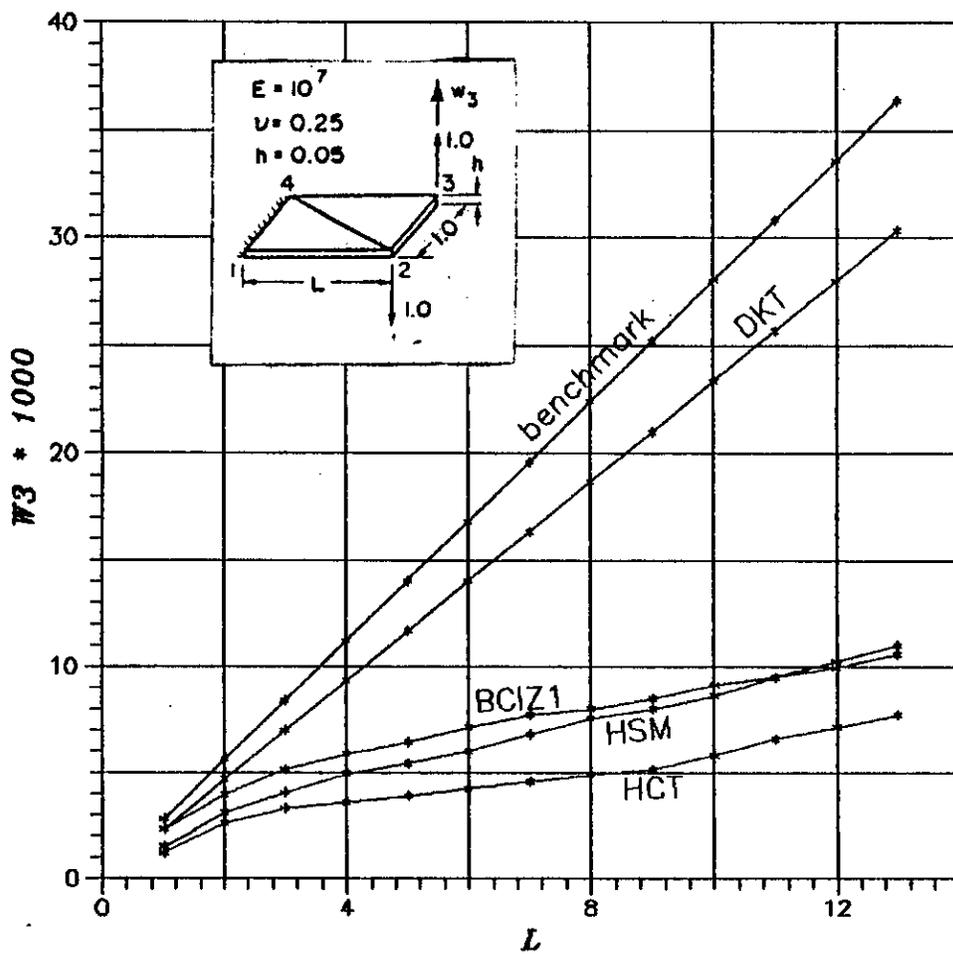
| Nbr D'élts | W_C : p. encastrée | W_C : p. appui simple |
|-----------------|----------------------|-------------------------|
| 1 | 10360 | 31540 |
| 2 | 11380 | 31460 |
| 6 | 10290 | 31840 |
| 24 | 10120 | 37900 |
| solution exacte | 8782.7 | 39831.5 |

tableau (VI.4)- Comparaison DKT / solution exacte
d'une plaque circulaire en flexion

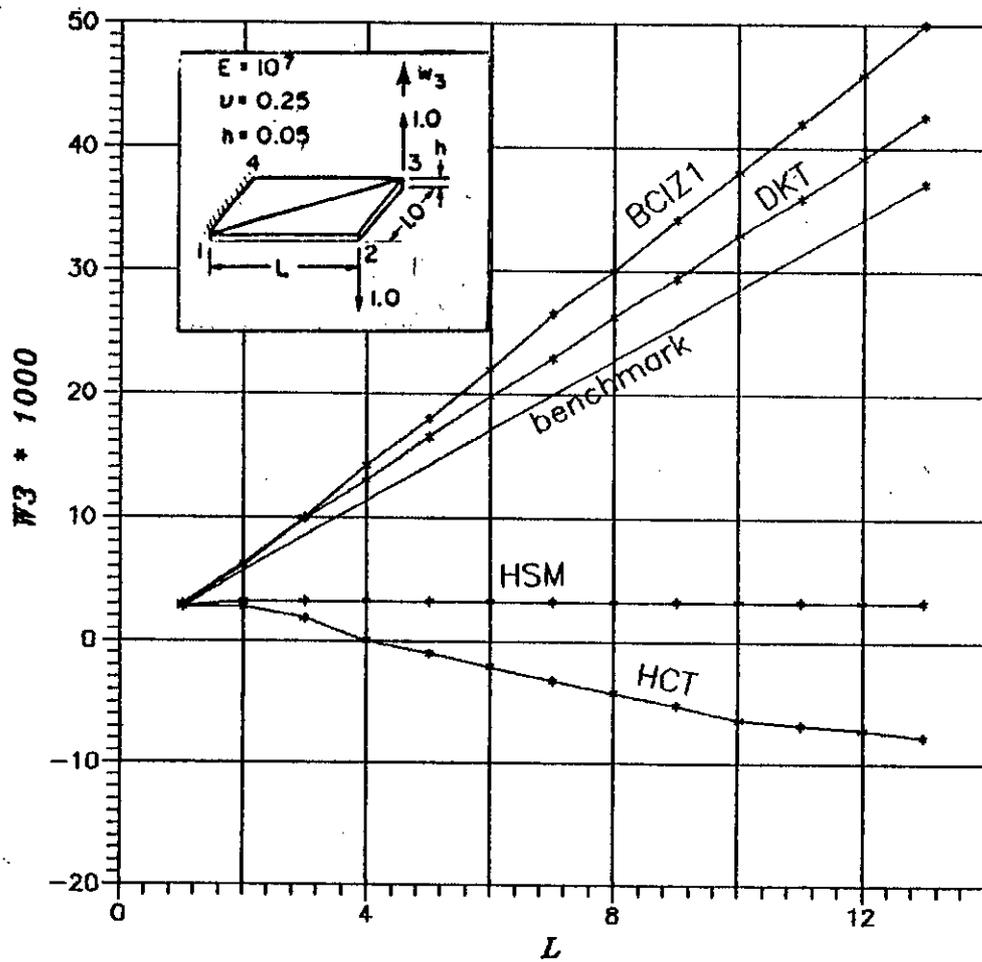
| Nbr d'élts | W_C (DKT) | W_C (DCT) |
|-----------------|---------------|-----------------|
| 6 | 10290 (+5.18) | 10315.6 (+5.44) |
| 24 | 10120 (+3.44) | 9999.91 (+2.21) |
| solution exacte | 9783.48 | |

tableau (VI.5)- Plaque circulaire encastrée
comparaison DKT / DCT

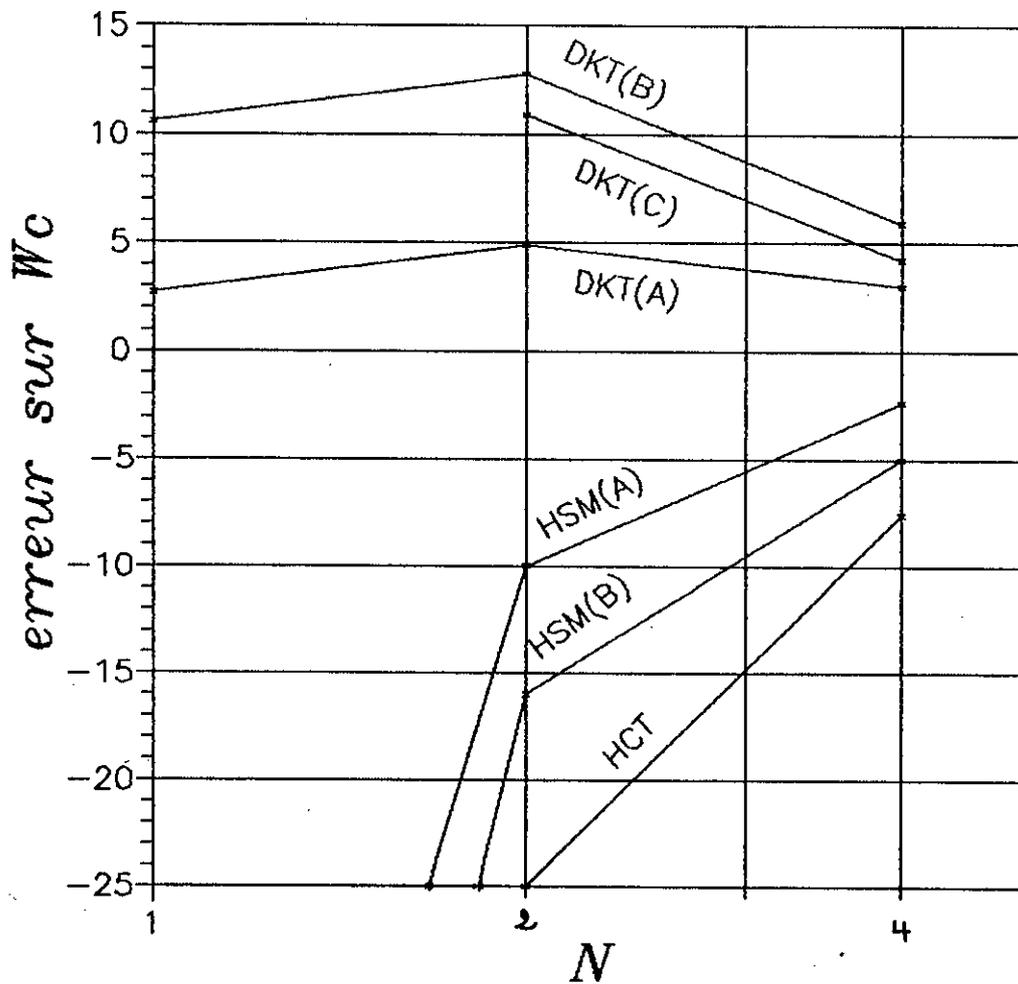
**Fig(VI.3) COMPARAISON DE DIFFERENTS ELEMENTS
A TROIS NOEUDS EN FLEXION-TORSION**



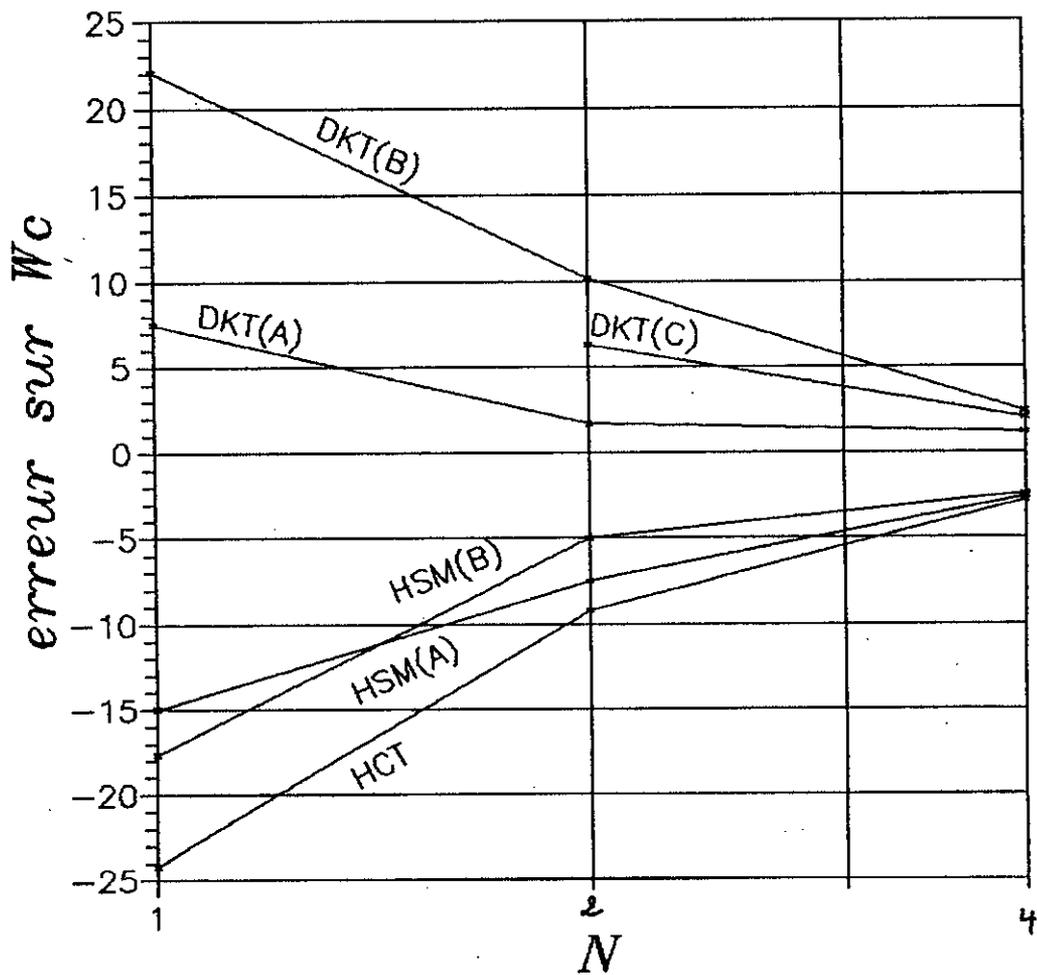
**Fig (VI.2) COMPARAISON DE DIFFERENTS ELEMENTS
A TROIS NOEUDS EN FLEXION-TORSION**



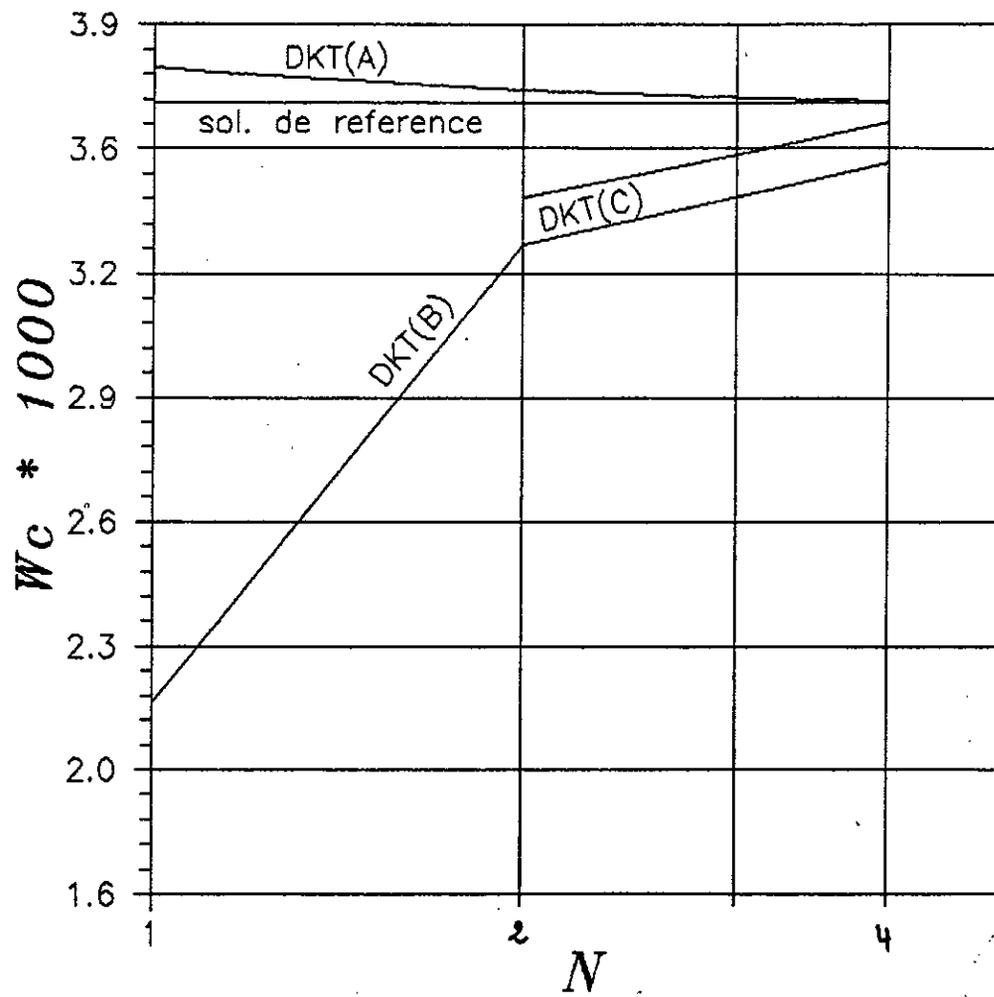
Fig(vi.5) PLAQUE CARREE ENCASTREE
SOUS CHARGE CONCENTREE



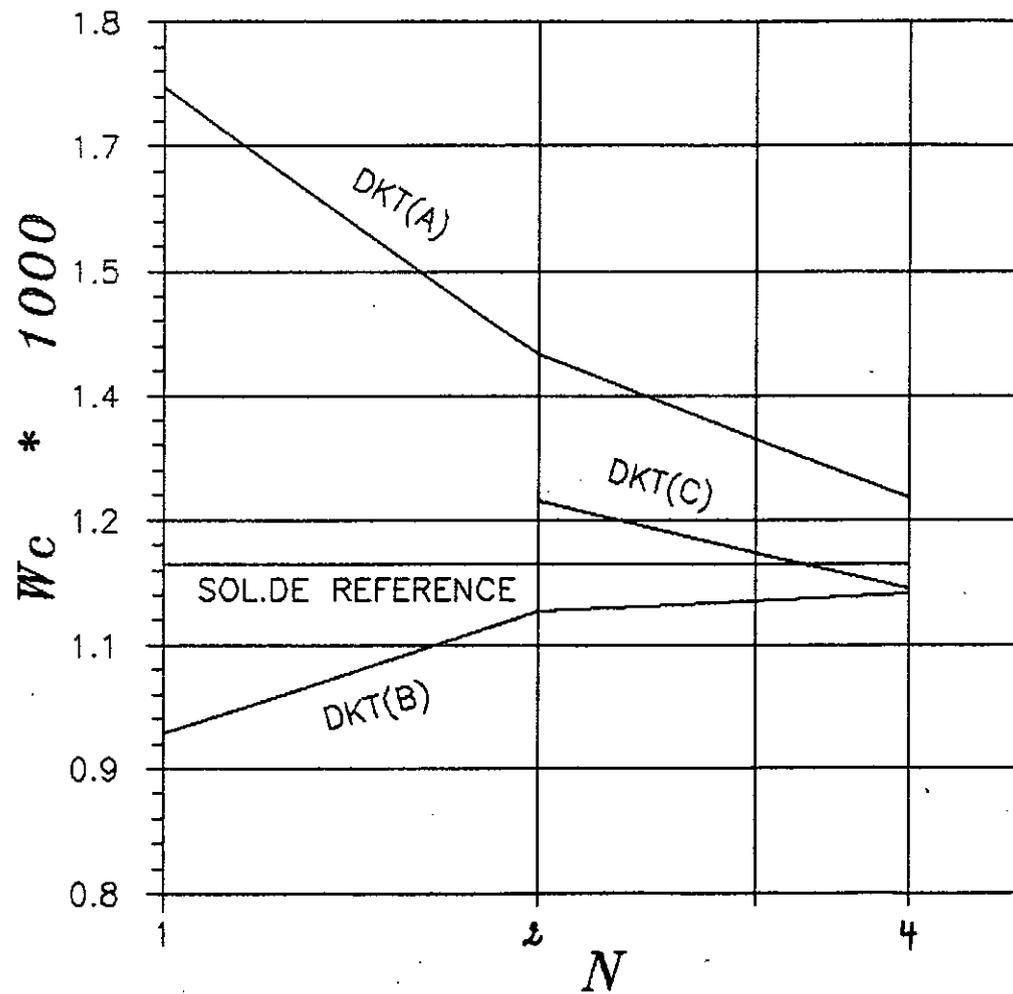
Fig(vi. 6) PLAQUE CARREE SIMPLEMENT SUPORTEEE
SOUS CHARGE CONCENTREE



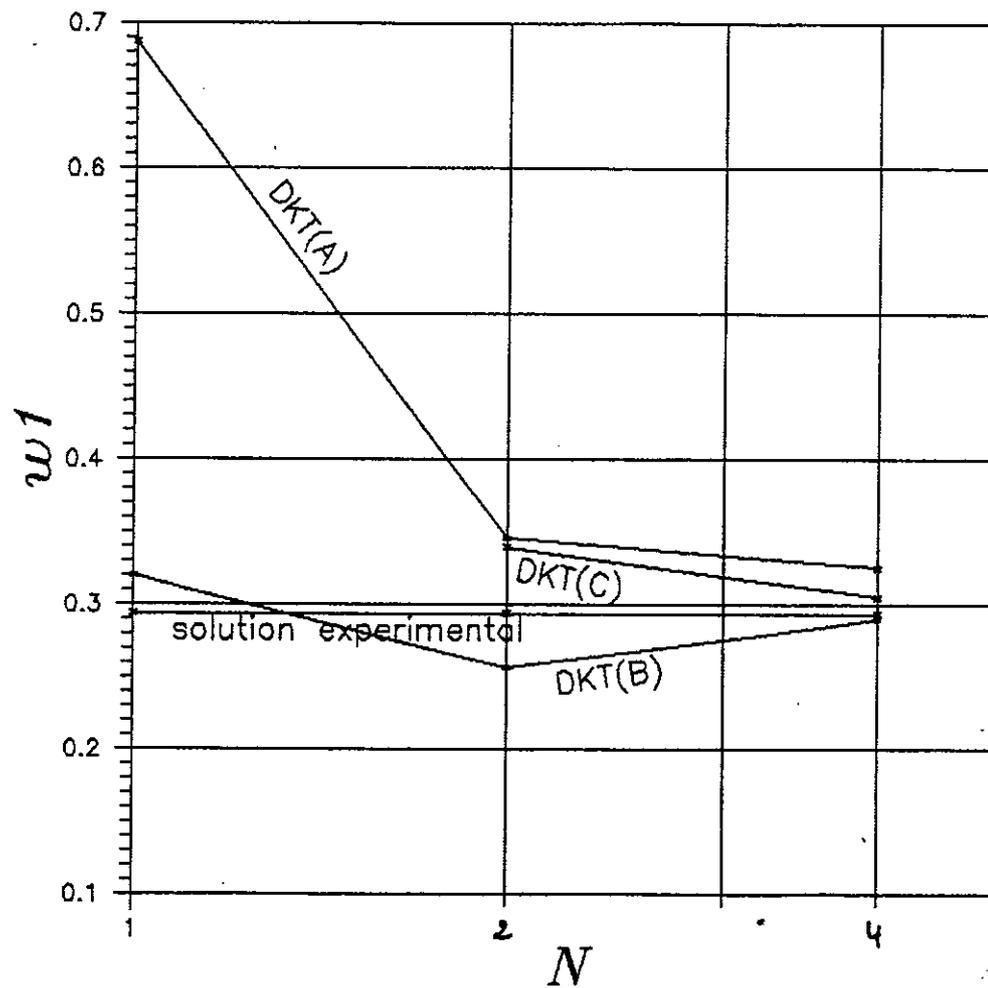
Fig(vi. 7) PLAQUE CARREE SIMPLEMENT SUPORTEE
SOUS CHARGE UNIFORME (P=1)



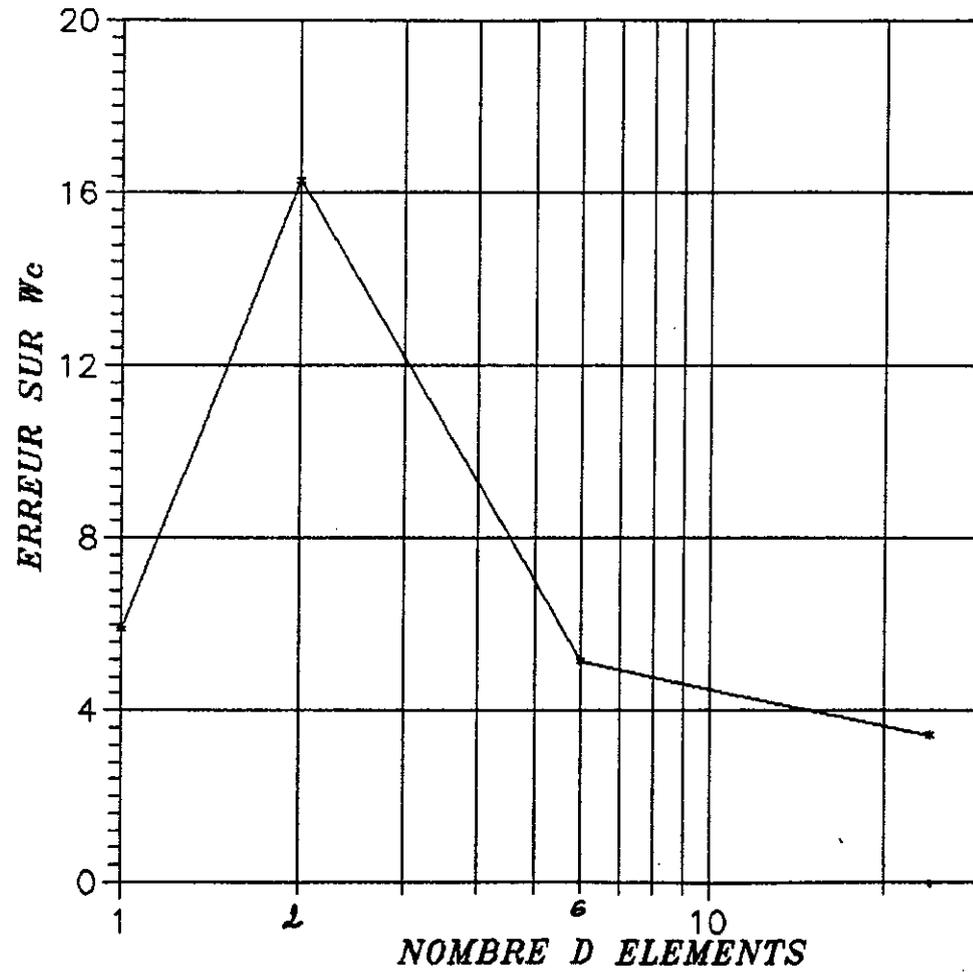
Fig(vi. 8) PLAQUE CARREE ENCASTREE SOUS
CHARGE UNIFORME (P=1)



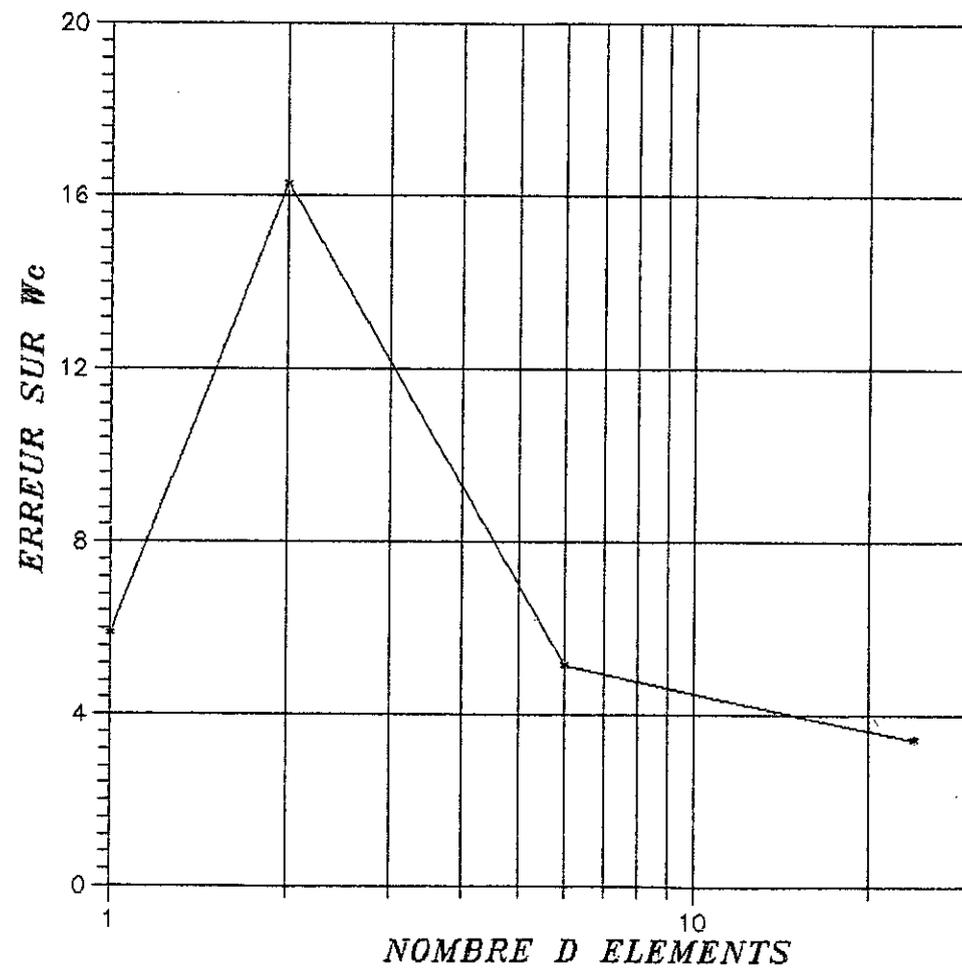
Fig(vi. 9) PLAQUE LOSANGE RHOMBIC ENCASTREE
SOUS CHARGE UNIFORME ($q = 1$)



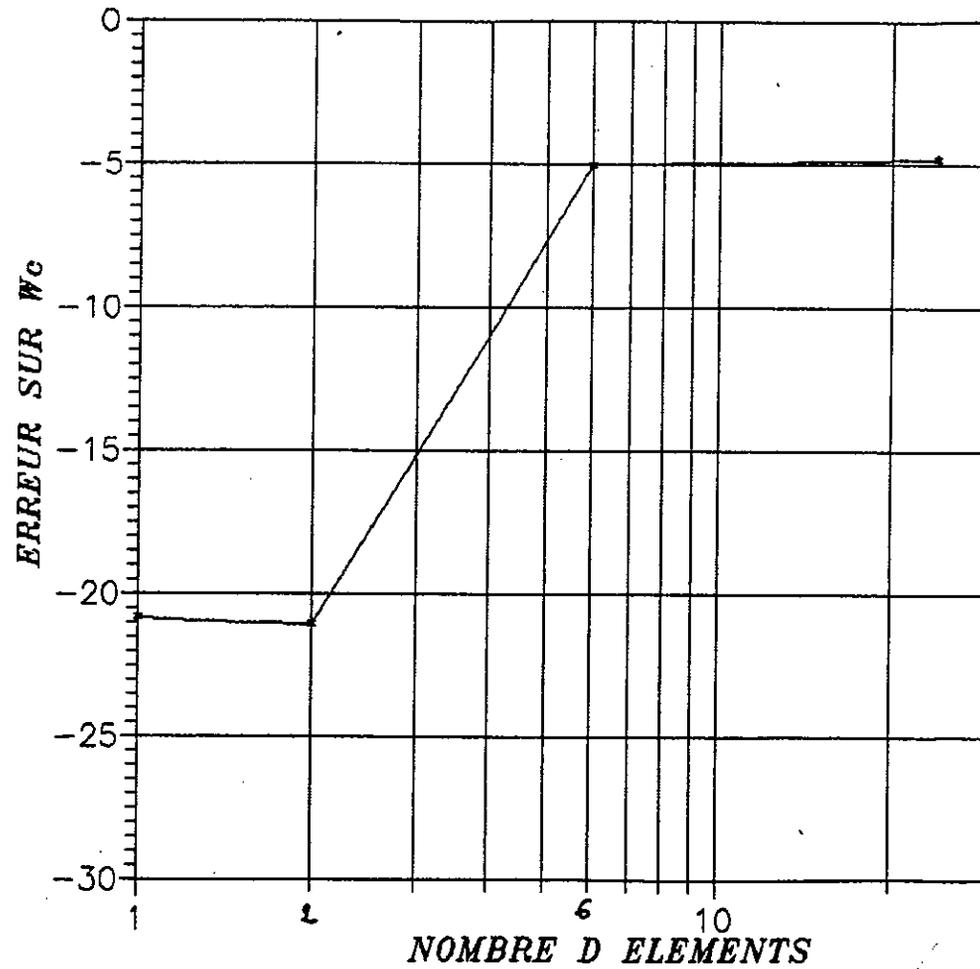
Fig(VI. 10) PLAQUE CIRCULAIRE ENCASTREE
SOUS CHARGE UNIFORME



Fig(vl. 10) PLAQUE CIRCULAIRE ENCASTREE
SOUS CHARGE UNIFORME



Fig(vi. m) PLAQUE CIRCULAIRE SIMPLEMENT
SUPPORTEE SOUS CHARGE UNIFORME



| Nbr d'élts | W_c (DKT) | | W_c (DCT) | |
|-----------------|-------------|---------|-------------|---------|
| 6 | 37840 | (-5.00) | 37857.7 | (-4.96) |
| 24 | 37900 | (-4.85) | 39401.5 | (-1.08) |
| solution exacte | 39831.5 | | | |

tableau (VI.6)- Plaque simplement supportée
comparaison DKT / DCT

VI.4- CONCLUSION

Après la formulation de l'élément DKT et les résultats numériques qu'on a obtenu on peut conclure que l'élément DKT est un élément simple, fiable et efficace.

* - SIMPLE

- formulation théorique transparente
- programmation simple
- nombre d'opérations réduit
- élément simple à 3 noeuds
- ddl ayant une signification pratique

** - FIABLE

- rang correct (aucun mode parasite)
- convergence garantie
- pas de blocage en CT
- résultats indépendants du choix de système de coordonnées X et Y
- pas de paramètres ou coefficients ajustables

*** - EFFICACE

- résultats peu sensibles à la distorsion géométrique
- disponibilité des résultats pour un nombre important de tests reconnus

VI- CONCLUSION

* Notre étude nous a permis d'approfondir nos connaissances sur la méthode des éléments finis (formulation d'éléments nouveaux, structure des logiciels...)

** cette étude nous a permis de conclure que l'élément DKT par sa simplicité de sa formulation, sa fiabilité et son efficacité peut avantageusement être intégré dans les bibliothèques d'éléments des codes de calcul pour résoudre des problèmes industriels.

*** Nous souhaitons que cette étude sera complétée pour développer le logiciel RE_FLEX (allocation dynamique, changement de subroutine 'introduction des conditions aux limites'.., introduction de nouveaux éléments: coque, éléments tridimensionnels, résolution non linéaire, problèmes de thermique,....)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] - J.L.BATOZ, G.DHATT "modélisation des structures par éléments finis", ed.hermes, compiegne, 1990; volumes 1 et 2.

- [2] - DHATT G., TOUZOT G. ,"une présentation de la méthode des éléments finis" ed. maloine, compiegne, 1981.

- [3] - BATOZ J.L. , BATHE K.J. ,"a study of three-node triangular plate bending elements" ,int.j.num. meth.in eng, vol.15 pp 1771,1812 (1980)

- [4] - BHASHYAM G.R.,GALLAGHER R.H. ,"an approach to the inclusion of transverse shear deformation in finite element plate bending analysis" ,computers & structures vol 19, n° 1-2, pp 35-40, 1984, "USA"

- [5] - BATOZ J.L. ,BEN TAHER M. , DHATT G. ," les éléments DKT et DKQ et l'analyse des plaques minces ", compiegne -1982

- [6] - T. J. R. HUGHES, T. E. TEZDUAYAR ,"finite elements based upon MINDLIN plate theory ",journal of applied mechanics ",1981 vol.48 - pp (587 - 595)

- [7] - P. G. BERGAN, X. WANG, "quadrilateral plate bending elements with shear deformations " C & S, vol. 19, N° 1-2, pp 25-34, 1984

- [8] - K. T. BATHE, E. N. DVORKIN, " short communication a four-node plate bending element based on MINDLI-REISSNER plate theory and a mixed interpolation" I.J.N.M.E, vol. 21, pp (367-383), 1981
- [9] - O. C. ZIENKIWICZ, "la méthode des éléments finis " (traduit) 3eme edition Mc GRAM HILL, 1979
- [10] - ROKEY, "introduction à la méthode des éléments finis" (traduit), eyrolles 1979
- [11] - F. BELBLIDIA, "modelisation en 3D en super-éléments du vilebrequin du moteur F4 L912 par M.E.F ", thèse de magister 1990
- [12] - AISSAOUI " analyse des plaques multicouches par éléments finis ",(p.f.e), genie civil, 1989
- [13] - MERAGHNI, " analyse des plaques pliées par la MEF " (p.f.e),genie civil, 1989
- [14] - S. RECHAK - M. L. MOUSSAOUI
" dimensionnement d'un vilebrequin par la MEF "
(p.e.f), genie mécanoque, 1988