

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

2/91

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Lex

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE DU COMPORTEMENT
D'UNE AUBE PAR
ELEMENTS FINIS

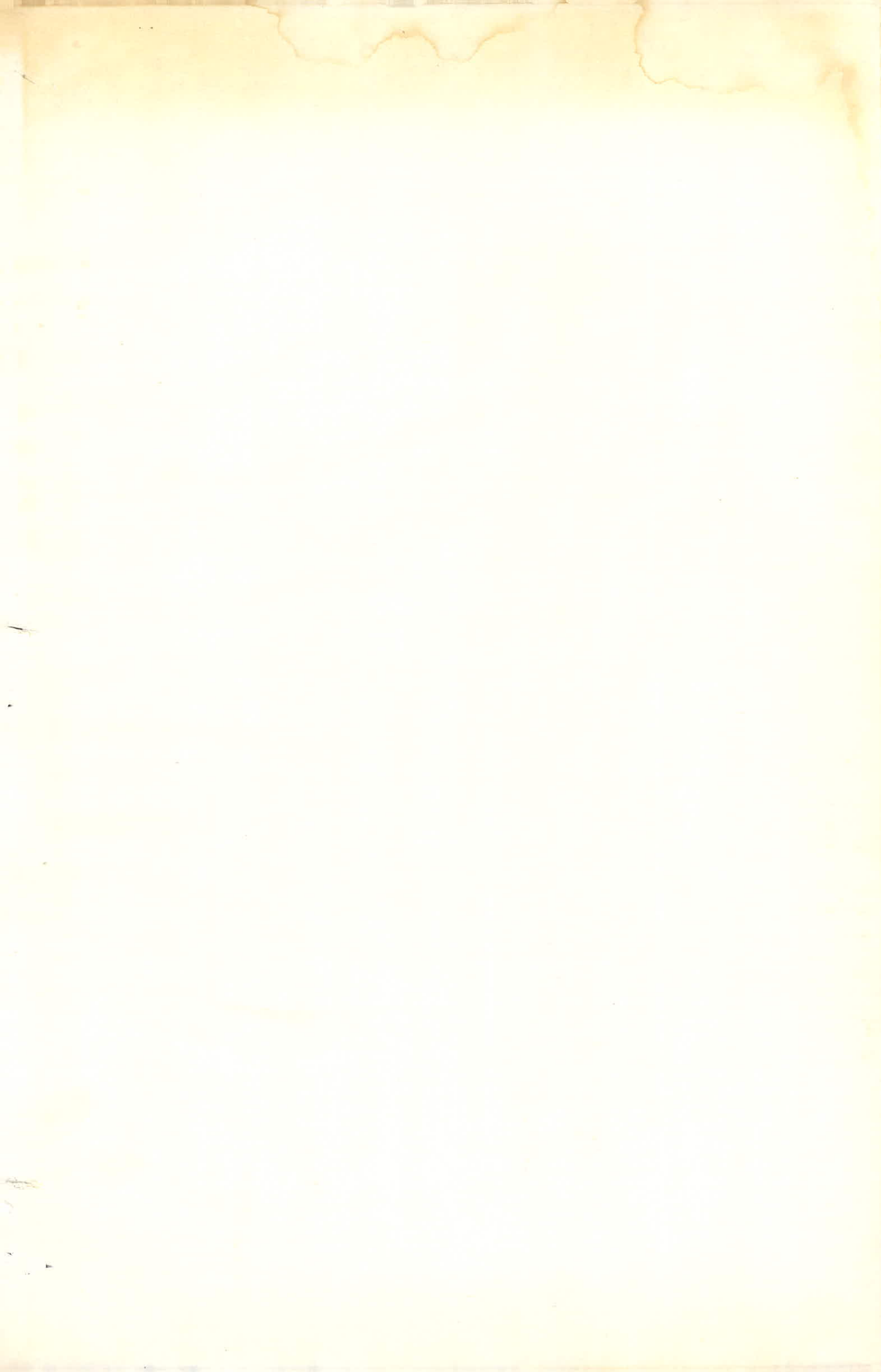
Proposé Par :
M. M.TAZI

Etudié par :
M. KH.ABDESSEMED

Dirigé par :
M. M.TAZI

PROMOTION : JUIN 1991

E.N.P. 10, Avenue Hacem Badi – EL-HARRACH – ALGER



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE DU COMPORTEMENT
D'UNE AUBE PAR
ELEMENTS FINIS

Proposé Par :
M. M.TAZI

Etudié par :
M. KH.ABDESSEMED

Dirigé par :
M. M.TAZI

PROMOTION : JUIN 1991

E.N.P. 10, Avenue Hacén Badi – EL-HARRACH – ALGER

DEDICACES

A la mémoire de mon père à qui je rend un grand hommage pour ce qu'il fut pendant et après la guerre de libération. ("rahimahou Allah").

A ma mère, tous mes frères et toutes mes soeurs.

A toute ma famille et tous mes amis.

A tous ceux qui témoignent qu'il n'y a de dieu qu'Allah et que Mohammed est son envoyé et son prophète.

Je dédie ce modeste travail.

Khaled

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, je tiens à adresser mes remerciements profonds à mon promoteur Monsieur **TAZI** ainsi qu'à tous ceux qui ont collaboré de loin ou de près à l'élaboration de ce modeste travail. Mes remerciements vont également à tous ceux qui ont contribué à ma formation, je citerai en particulier Monsieur **KROUTCHEK** et Monsieur **GAHMOUSSE**.

Qu'ils veuillent bien trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

Khaled

MINISTERE AUX UNIVERSITES
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
Departement : Génie Mécanique
Promoteur : M. M. TAZI
Elève-ingénieur : M. KH. ABDESSEMED



Sujet : Etude du comportement d'une aube par éléments finis

Résumé : Dans cette étude nous avons utilisé la méthode des éléments finis pour vérifier la résistance statique et dynamique d'une aube de turbine à vapeur. Un Programme informatique a été élaboré pour le calcul de l'élément briqué à 20 noeuds utilisé pour la discrétisation.

Subject : Study of a blade using finit element method

Abstract : In this study the finit element method was used to verify the static and dynamic resistance of a steam turbine blade. A computer program was elaborated to comput the 20 joints element used for discretisation.

الموضوع : دراسة جذيرة عنفة بخارية بطريقتة.
ملخص : العناصر المنتهية التعداد.

في هذه الدراسة استخدمنا طريقة العناصر المنتهية التعداد للتأكد من المقاومة السكونية والديناميكية للجذيرة عنفة بخارية. لقد قمنا بإعداد برنامج معلوماتي لتقدير عنصر ذي شاكلة متوازية المستطيلات محتوية على عشرين عنفة للتجسيد لساعة.

SOMMAIRE

	Page
I)-INTRODUCTION.....	1
II)- JUSTIFICATION DE LA FORME DE L'AUBE.....	3
II.1)-Introduction.....	3
II.2)-Généralités.....	3
II.2.1)- Définition d'un profil.....	3
II.2.2)- Etude aérodynamique.....	3
II.3)- Tracé d'une grille d'aube.....	5
II.4)- Etapes du tracé.....	6
II.4.1)- Choix du profil.....	6
II.4.2)- Choix de C_z	7
II.4.3)- Détermination du serrage.....	7
II.4.4)- Traçage de la grille.....	8
II.5)- Vrillage des aubes.....	8
II.6)- Diminution de la section.....	9
II.7)- Résistance de l'aube.....	9
III)- PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.....	10
III.1)- Introduction.....	10
III.2)- Formulation générale de la méthode.....	10
III.3)- Cas des structures élastiques.....	12
IV)- CALCULS PRELIMINAIRES.....	15
IV.1)- Introduction.....	15
IV.2)- Données relatives à l'aube étudiée.....	15
IV.3)- Chargement de l'aube.....	16
IV.4)- Première approche.....	20
IV.4.1)- Etude statique.....	20
IV.4.2)- Etude dynamique.....	22
IV.4.2.1)- Vibrations longitudinales...	22
IV.4.2.1)- Vibrations transversales....	23
IV.5)- Solution en élément finis.....	25
IV.5.1)- Element barre.....	25
IV.5.1.1)- Cas statique.....	25
IV.5.1.2)- Cas dynamique.....	26
IV.5.2)- Element poutre.....	27
IV.5.2.1)- Cas statique.....	29
IV.5.2.1)- Cas dynamique.....	29
IV.5.3)- Résultats.....	29

V)- ELEMENT BRIQUE A 20 NOEUDS.....	31
V.1)- Introduction.....	31
V.2)- Formulation.....	31
V.2.1)- Fonctions d'interpolation.....	31
V.2.2)-Construction des matrices élémentaires.	34
V.2.2.1)- Matrice jacobienne.....	34
V.2.2.2)- Intégration des matrices élémentaires.....	35
V.3)- Etapes de calcul de [K] et [M].....	38
V.4)- Modélisation des charges.....	38
V.4.1)- Forces volumiques.....	38
V.4.2)- Forces surfaciques.....	39
V.5)- Technique de dégénération.....	42
V.6)- Maillage de l'aube.....	44
VI)- Etude dynamique.....	45
VI.1)- Introduction.....	45
VI.2)- Les éléments finis en dynamique.....	45
VI.3)- Recherche des valeurs propres.....	47
VI.4)- Examen des forces excitatrices.....	50
VI.4.1)- Effet de la veine de vapeur.....	50
VI.4.2)- Dissymétrie dans la répartition de pression à la sortie d'un étage.....	51
VII)- ORGANISATION DU PROGRAMME, TESTS ET RESULTATS.....	52
VII.1)- Introduction.....	53
VII.2)- Organigramme général.....	53
VII.3)- Introduction des données.....	54
VII.4)- Intégration des matrices élémentaires et assemblage.....	54
VII.4.1)- Points d'intégration.....	54
VII.4.2)- Les sous programmes.....	55
VII.5)- Calcul des déplacements et des contraintes	58
VII.6)- Tests du programme.....	58
VII.7)- Résultats.....	62
VIII)- CONCLUSION.....	64
ANNEXE : Programme brik20	

ID- INTRODUCTION :

Les êtres ont toujours essayé de surmonter les problèmes complexes auxquels ils se heurtent en subdivisant l'ensemble en composants plus faciles à traiter. La méthode des éléments finis constitue un exemple de cette règle générale, ainsi l'ingénieur, devant un système complexe rencontré dans la pratique, utilise la méthode des éléments finis pour le discrétiser en éléments simples faciles à traiter et propose donc une solution non pas exacte mais satisfaisant les exigences pratiques.

Dans le domaine de la mécanique des solides, McHENRY, HRENKOFF et NEWMARK ont montré, dès les années quarante, que l'on pouvait obtenir d'assez bonnes solutions au problème continu en remplaçant des petites parties du milieu continu par des arrangements de simples barres élastiques [1]. TURNER, CLOUGH, MARTIN et TOP introduisent en 1956 le concept d'élément fini [2]. C'est seulement à partir de 1960 que la méthode des éléments finis a connu un progrès considérable.

C'est le large domaine d'application qui fait la grande importance de la méthode des éléments finis. En effet, que ce soit en Mécanique des structures, en Electricité, en Magnétisme, en Mécanique des fluides, en Aéronautique ou en thermique la méthode des éléments finis est un outil puissant de résolution des problèmes non linéaires et non stationnaires sur des milieux continus géométriquement complexes.

Les aubes des machines axiales en générale et ceux vrillées en particulier constituent un milieu continu géométriquement complexe. Lors de la conception d'une turbine à vapeur, d'une turbine à gaz, d'un turboréacteur ou d'une pompe axiale une attention particulière est donnée au calcul des grilles d'aubes. Après la détermination du profil de l'aube, celle-ci doit satisfaire les conditions de résistance mécanique. Sachant

que la section transversale et le moment d'inertie de l'aube ne peuvent être représentés analytiquement, la résistance de l'aube ne peut être vérifiée que numériquement. L'objet du présent travail consiste en l'utilisation de la méthode des éléments finis pour la vérification de la résistance statique et dynamique d'une aube du dernier étage de la turbine basse pression de la centrale thermique de CAP-DJENET.

DEUXIEME CHAPITRE : JUSTIFICATION DE LA FORME DE L'AUBE

II.1)- INTRODUCTION :

Les aubes sont considérées comme les organes principaux de toutes les machines axiales. Que ce soit une machine génératrice ou réceptrice, c'est dans les grilles d'aubes que s'effectue l'échange d'énergie. Ainsi le choix de la forme et des dimensions de l'aube devient un facteur déterminant pour le rendement et la fiabilité ainsi que pour le fonctionnement même des machines axiales. Dans le présent chapitre nous allons essayer de donner un aperçu général sur le tracé des aubes.

II.2)- GENERALITES :

II.2.1)- Définition d'une aube :

C'est un obstacle de forme aérodynamique qui, placé dans un écoulement de fluide, modifie les vitesses et fait apparaître des efforts.

II.2.1)- Etude aérodynamique :

Soit un profil d'aube de machine axiale placé dans un écoulement de fluide.

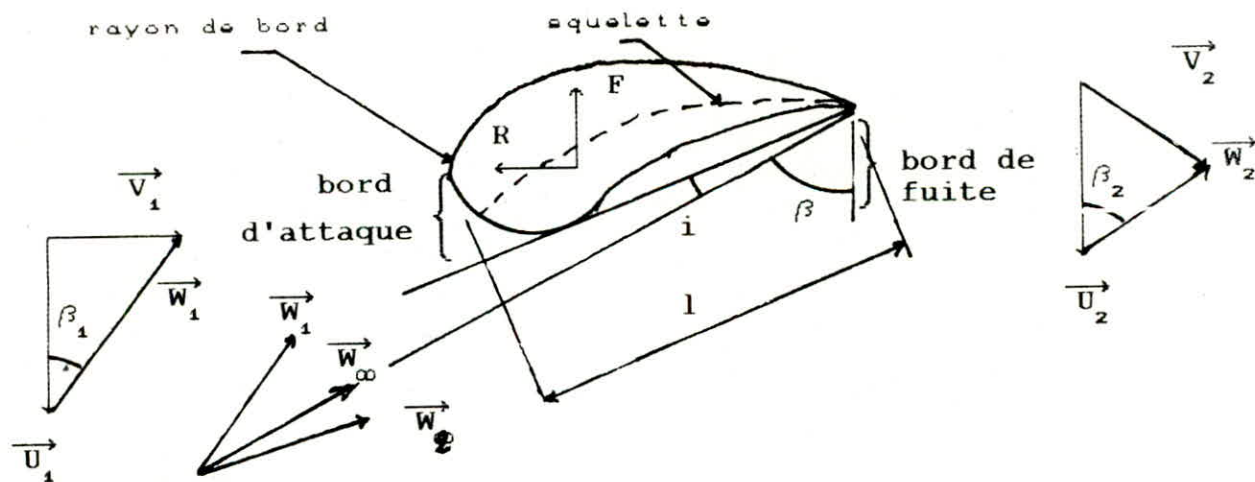


Fig. 2.1 : profil d'aube

$$\vec{W}_{\infty} = \frac{\vec{W}_1 + \vec{W}_2}{2}$$

$\vec{U}_1 = \vec{U}_2$: Vitesse d'entraînement.

\vec{V}_1 : Vitesse absolue d'entrée.

\vec{V}_2 : Vitesse absolue de sortie.

\vec{W}_1 : Vitesse relative d'entrée.

\vec{W}_2 : Vitesse relative de sortie.

β_1 : Angle d'entrée du profil.

β_2 : Angle de sortie du profil.

i : Angle d'incidence.

β : Angle de calage.

l : corde.

Ayant provoqué une modification du triangle des vitesses, le profil subit une distribution de pression différente sur l'intrados et l'extrados, ce qui fait apparaître les deux forces résultantes suivantes :

a)- Une portance donnée par :

$$F = C_z l \rho \frac{W_{\infty}^2}{2} \quad (2.1)$$

C_z : Coefficient de portance.

ρ : Masse volumique du fluide.

b)- Une trainée donnée par :

$$R = C_x l \rho \frac{W_{\infty}^2}{2} \quad (2.2)$$

C_x : Coefficient de trainée.

Les coefficients " C_z " et " C_x " sont déterminés expérimentalement pour chaque profil. Pour cela on fait varier l'angle d'incidence " i " et on mesure les deux forces " F " et " R " correspondantes d'où on déduit les coefficients " C_z " et " C_x ". En portant " C_x " en abscisse et " C_z " en ordonnée on obtient la courbe de la figure (2.2) caractéristique de chaque profil appelée polaire du profil (L'angle d'incidence étant un paramètre).

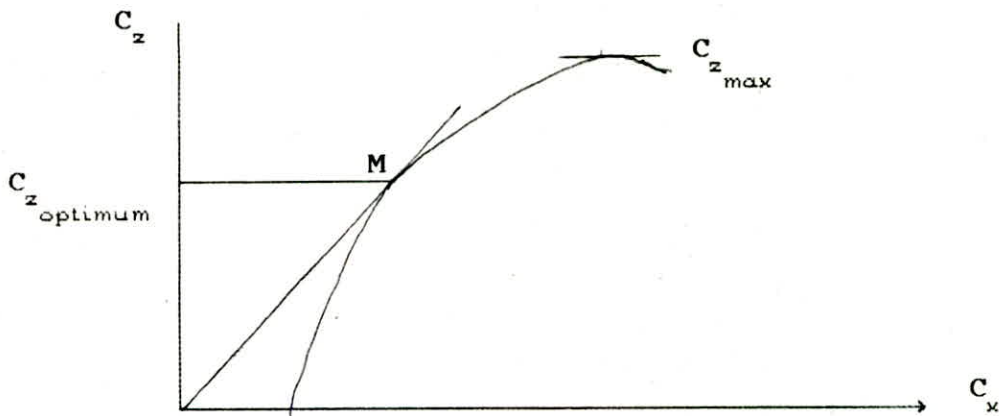


Fig. 2.2 : Polaire d'un profil

Pratiquement le profil est orienté de manière à avoir le maximum de portance et le minimum de traînée c'est à dire pour :

$$\frac{C_z}{C_x} = \left(\frac{C_z}{C_x} \right)_{\text{Max}}$$

C'est ce qui correspond au point "M" de la polaire.

II.3)- TRACE D'UNE GRILLE D'AUBES :

L'étude du profil d'aube en grille pose le délicat problème de l'interaction dont la discussion dépasse le cadre de cette étude. Cependant si le pas relatif " $\frac{t}{l}$ " (" t " étant la distance séparant deux profils successifs de la grille) dépasse une certaine limite, le problème d'interaction peut être négligé et on peut faire le tracé de la grille en suivant les étapes décrites au paragraphe (II.4).

Il faut préciser que lors du tracé d'une grille d'aubes une multitude de points aussi bien variés que compliqués doit être pris en considération. On peut citer :

a)- Des considérations de mécanique des fluides : nature et état du fluide, nature de l'écoulement, problème de cavitation ...

b)- Des considérations d'aérodynamique : forme du profil, polaire du profil, problème d'interactions de décollements...

c)- Des considérations de mécanique des structures : résistance statique et dynamique du profil.

Ainsi, il résulte que pour une machine axiale quelconque il est difficile de déterminer quels sont les facteurs prépondérants qui tranchent sur le tracé d'une grille. Néanmoins dans la majorité des applications pratiques on peut prendre comme point de départ les triangles des vitesses à l'entrée et à la sortie de la grille (ou du profil). Ceci est dû au fait que :

a)- Le débit du fluide est imposé par l'installation.

b)- La charge exprimée en hauteur (H_{th}) est aussi imposée par l'installation. D'après le théorème d'Euler :

$$g H_{th} = U_2 V_{2u} \quad (2.3)$$

Où :

g : Accélération de la pesanteur

V_{2u} : Projection de \vec{V}_2 sur \vec{U}_2 .

c)- La vitesse de rotation est imposée par des considérations qui diffèrent suivant l'application.

Ces trois points permettent de déterminer les triangles des vitesses d'entrée et de sortie.

II.4)- ETAPES DU TRACE :

Connaissant les triangles des vitesses le tracé d'une grille d'aubes peut être effectué en suivant les étapes suivantes :

II.4.1)- Choix du profil :

De nos jours des catalogues contiennent des gammes complètes de profils avec toutes leurs caractéristiques déduites d'expériences dans les souffleries. Donc, connaissant la nature du fluide et les conditions d'écoulement, on peut choisir un profil dont les caractéristiques donnent le meilleur rendement. Cependant le profil peut être tracé en choisissant une courbe (généralement prise dans la famille des cercles ou des paraboles) qui sera le squelette et qui assure la déviation $(\beta_2 - \beta_1)$ désirée. Ensuite on choisit une loi d'épaisseur qui assure la résistance statique et dynamique du profil et qui ne provoque pas de changements brusques de section entraînant des décollements indésirables. Le profil obtenu sera corrigé par des expériences de soufflerie.

Remarque : Cette étape peut être considérée comme la plus délicate. Il n'y a presque pas de documentation concernant le choix du profil.

II.4.2)- Choix du coefficient de portance :

Comme il a été expliqué précédemment, on choisit le coefficient de portance " C_z " de manière à avoir le rapport de celui-ci à " C_x " maximal. On en déduit l'incidence correspondante " i ".

II.4.3)- Détermination du serrage " l/t " :

On démontre que la portance est donnée par :

$$F = \rho t \Delta W_u W_\infty \quad (2.4)$$

Où :

$$\Delta W_u = W_{1u} - W_{2u}$$

W_{iu} : Projection de \vec{W}_i sur \vec{U}_i ($i=1,2$).

En comparant (2.1) et (2.4) on déduit :

$$\frac{C_z l}{t} = \frac{2 V_{2u}}{W_\infty} \quad (2.5)$$

Cette relation permet de tirer le serrage des pales " $\frac{1}{t}$ ".

II.4.4)- Traçage de la grille :

On trace une aube en disposant le profil avec l'incidence "i" sur la direction de W_{∞} et on trace les aubes voisines d'après le pas déjà déterminé.

II.5)- VRILLAGE DES AUBES :

Il faut préciser que tout ce qui a été développé jusqu'à maintenant est basé sur les triangles des vitesses à l'entrée et à la sortie du profil. Pour les machines axiales ces triangles des vitesses se déforment avec l'augmentation du rayon à cause du changement de la vitesse d'entraînement $u = \omega R$ (Voir figure 2.3). Donc le profil choisi doit être orienté différemment selon les différents rayons pour avoir le " C_z " optimum à chaque fois. C'est ce qui provoque le vrillage des aubes des machines axiales.

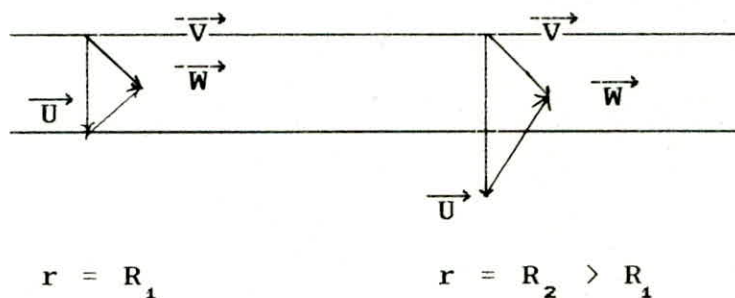


Fig. 2.3 - Déformation du triangle des vitesses avec l'augmentation du rayon.

II.6)- DIMINUTION DE LA SECTION :

La diminution de la section de l'aube nous permet d'utiliser de plus grandes vitesses de rotation pour une même longueur. Cette diminution peut être représentée par une loi approximative en imposant une contrainte constante dans tout le corps de l'aube. La figure (2.4) montre un exemple d'aube

vrillée avec diminution de section.

REMARQUE : C 'est toujours l'expérience qui tranche sur la validité d'une grille donnée dans une application donnée.

II.7)- RESISTANCE DE L'AUBE :

Lorsqu'on a parlé du choix du profil (ou de sa loi d'épaisseur) on a précisé qu'il s'agissait d'assurer la résistance statique et dynamique de l'aube tout en assurant un bon rendement. Cette résistance ne peut être vérifiée par la résistance des matériaux classique étant donné que la section et les différents moments d'inerties varient d'une manière difficile à représenter analytiquement. L'emploi des méthodes numériques devient alors impératif. Les chapitres suivants se proposent de déterminer les contraintes et les fréquences propres d'une aube afin de vérifier sa résistance en utilisant la méthode des éléments finis. L'aube choisie est celle du dernier étage de la turbine basse-pression de la centrale de Cap-Djenet.

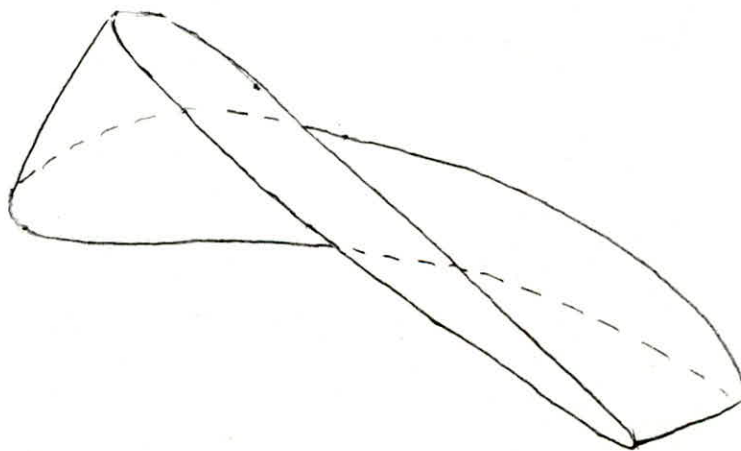


Fig. 2.4 : Aube vrillée avec diminution de section

TROISIEME CHAPITRE : PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS
FINIS

III.1)- INTRODUCTION :

Tout les problèmes physiques auxquels fait face l'ingénieur et le physicien sont régis par des équations différentielles de différents types. Mis à part quelques cas où ces équations possèdent des solutions analytiques, la majorité des problèmes physiques réels n'en possèdent pas. De ce fait la méthode des éléments finis se propose de donner une solution approximative à ces équations. La précision de la méthode dépend de beaucoup de facteurs et peut être améliorée de différentes manières.

III.2)- FORMULATION GENERALE DE LA METHODE :

Soit l'ensemble d'équations différentielles (système) suivant :

$$A(u) = \begin{Bmatrix} A_1(u) \\ A_2(u) \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

"u" étant l'ensemble des variables à chercher et qui sont astreintes à vérifier les conditions aux limites suivantes :

$$B(u) = \begin{Bmatrix} B_1(u) \\ B_2(u) \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

La méthode des éléments finis propose comme solution approchée :

$$u \simeq \sum_{i=1}^n N_i a_i = N a \quad (3.3)$$

Où :

a_i : Paramètres inconnues.

N_i : Fonctions de forme définies à l'aide de variables indépendantes.

Etant donné que (3.1) est vérifiée sur tout le domaine physique étudié Ω , on peut écrire :

$$W^T A(u) = 0 \quad (3.4)$$

Où :

W : Vecteur composé de fonctions quelconques au nombre des équations différentielles régissant le problème.

De même :

$$\int W^T A(u) d\Omega = 0$$

$$\int W^T A(N a) d\Omega = 0 \quad (3.5)$$

Le même raisonnement conduit à écrire :

$$\int \bar{W}^T B(N a) d\Gamma = 0 \quad (3.6)$$

Où :

Γ : Frontière de Ω .

$$(3.5) + (3.6) \Leftrightarrow \int W^T A(N a) d\Omega + \int \bar{W}^T B(N a) d\Gamma = 0 \quad (3.7)$$

On remarque que $A(N a)$ et $B(N a)$ sont les erreurs ou résidus résultants du remplacement de "u" par "N a", c'est ce qui fait que cette méthode est appelée *méthode des résidus pondérés* (pondéré par W).

Galerkin suggère : $W = N$

Si de plus les équations (3.1) sont linéaires, c'est à dire :

$$A(u) = L u + p = 0$$

En ne considérant que (3.5), on peut écrire :

$$\int W^T A(N a) d\Omega = \int N^T (L N a + p) d\Omega = 0$$

$$\rightarrow K a + f = 0 \quad (3.8)$$

Avec :

$$K = \int [N]^T [L] [N] d\Omega$$

$$f = \int [N] p \, d\Omega$$

III.3)- CAS DES STRUCTURES ELASTIQUES :

Dans ce cas la fonction approximée est généralement la fonction de déplacement (formulation déplacement) :

$$\begin{aligned} u &= \sum N_i a_i \\ &= [N_i \quad N_j \quad \dots] \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ \vdots \end{Bmatrix} \\ &= N a \end{aligned} \quad (3.9)$$

Les fonctions "N" sont appelées *fonctions de forme* .
Les déformations s'écrivent :

$$\varepsilon = L u \quad (3.10)$$

Ou :

L : L'opérateur linéaire approprié qui varie suivant la nature du problème.

Donc :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= L N a \\ \text{Ou} \quad \varepsilon &= B a \end{aligned} \quad (3.11)$$

Avec :

$$B = L N$$

D'autre part les contraintes s'écrivent :

$$\sigma = D \varepsilon \quad (3.12)$$

Ou :

D : Matrice d'élasticité dépendant des propriétés du matériau.

Si "q" représente le vecteur des forces appliquées on peut écrire :

$$\delta a^T q = \int \delta \varepsilon^T \sigma \, dV \quad (3.13)$$

Relation qui découle de l'égalité du travail virtuel des forces extérieures au travail des forces intérieures totales (dans tout le volume).

$$\text{Or :} \quad \delta \varepsilon^T = \delta a^T B^T$$

Donc :

$$\delta a^T q = \delta a^T \int B^T D \epsilon dV$$

$$\rightarrow q = \left[\int B^T D B dV \right] a$$

$$q = [K] a \quad (3.14)$$

Avec :

$$[K] = \int \int \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (3.14.a)$$

[K] : Matrice de rigidite.

Dans le cas de la dynamique des structures, deux forces prennent naissance en plus de la force statique "q" :

1)- Force d'inertie :

$$\begin{aligned} -\rho \ddot{u} &= -\rho \frac{d^2 u}{dt^2} \\ &= -\rho N \frac{d^2 a}{dt^2} \end{aligned}$$

ρ : Masse volumique du matériau.

2)- Force de résistance par frottement (on ne considère que la résistance linéaire) :

$$\begin{aligned} -\mu \dot{u} &= -c \frac{du}{dt} \\ &= -c N \frac{da}{dt} \end{aligned}$$

c : Coefficient d'amortissement.

Le travail virtuel correspondant à ces deux forces est :

$$\begin{aligned} -\int \delta u^T \rho \ddot{u} dV - \int \delta u^T \mu \dot{u} dV &= -\int \delta a^T N^T \rho \ddot{u} dV - \int \delta a^T N^T c \dot{u} dV \\ &= -\delta a^T \left[\int N^T \rho N \ddot{a} dV - \int N^T c N \dot{a} dV \right] \\ &= -\delta a^T \left[M \ddot{a} + C \dot{a} \right] \end{aligned}$$

Avec :

$$M = \int N^T \rho N dV \quad (3.15.a)$$

$$C = \int N^T c N dV \quad (3.15.b)$$

M : Matrice masse cohérente.

C : Matrice d'amortissement.

En ajoutant ce travail au terme gauche de la relation (3.13), la relation (3.14) deviendra :

$$[M] \ddot{a} + [C] \dot{a} + [K] a = q \quad (3.15)$$

Le calcul des matrices [K], [M] et [C] se fait sur chaque élément. Après assemblage les équations précédentes gardent les mêmes formes et nous donnent :

- 1)- Les déplacements et donc les contraintes (Eq. 3.14).
- 2)- Les fréquences et la réponse dynamique (Eq. 3.15).

QUATRIEME CHAPITRE : CALCULS PRELIMINAIRES

VI.1)- INTRODUCTION :

La centrale thermique de Cap-Djenet étant une unité d'exploitation, elle ne dispose donc pas de toutes les données techniques concernant les aubes des turbines. Le bureau d'étude possède des manuels et plans fournissant des informations presque inutiles à notre travail. Heureusement que le magasin de la centrale contient des aubes de rechange d'où nous avons tiré la géométrie exacte de l'aube en question. Contacté, le constructeur nous a fourni quelques données supplémentaires. Dans le présent chapitre nous essayerons de donner une idée sur l'ordre de grandeur des contraintes et fréquences propres en utilisant le peu de données dont nous disposons.

IV.2)- DONNEES RELATIVES A L'AUBE ETUDIEE :

L'évolution du profil de l'aube suivant la hauteur est représentée sur la figure (4.1). Ces profils ont été obtenus par mesure directe de l'aube réelle à l'aide de comparateur et table de fraiseuse.

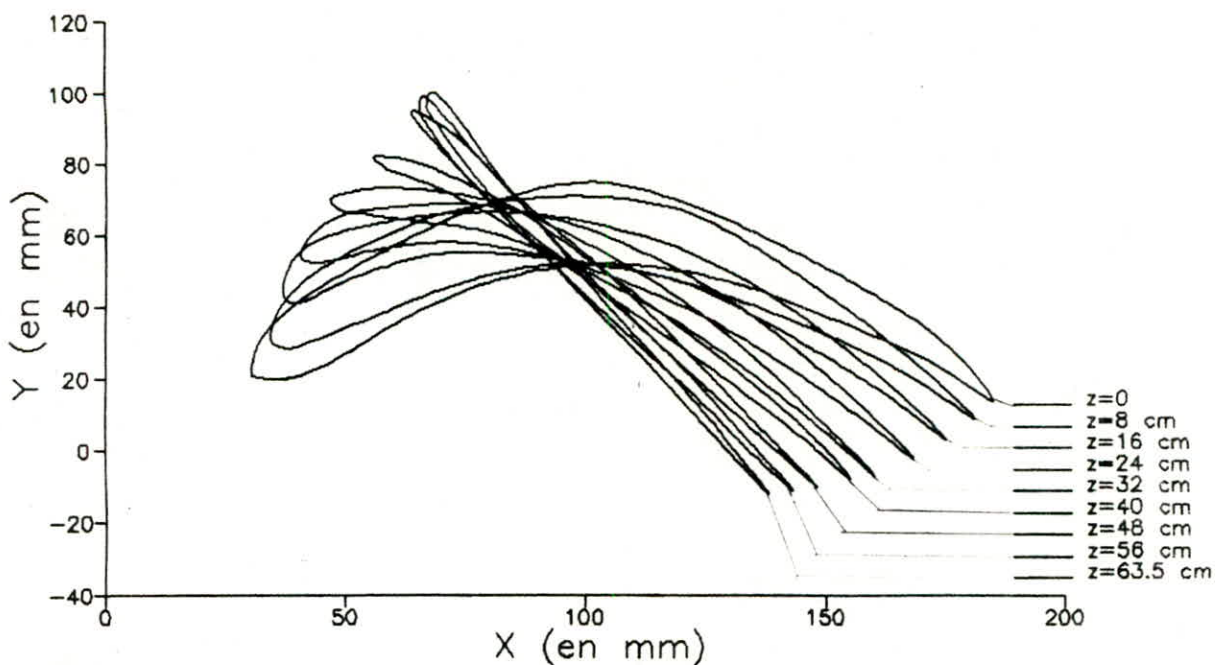


Fig 4.1 : EVOLUTION DU PROFIL DE L'AUBE ETUDIEE

Le matériau utilisé n'a pas été spécifié par le constructeur (Energierzeugung KWU Siemens). Vu les conditions de travail de l'aube ce matériau sera certainement un acier inoxydable. Les aciers inoxydables couramment utilisés ont une limite d'élasticité variant entre 205 et 1345 MPa.

Le constructeur nous a fourni les données suivantes :

Module de Young : $E = 2.157 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$.

Coefficient de Poisson : $\nu = 0.33$.

Masse de l'aube sans support : $m = 6.83 \text{ Kg}$.

Masse de l'aube avec support : $M = 10 \text{ Kg}$.

Nombre d'aubes de la dernière grille BP : $z = 58$.

IV.3)- CHARGEMENT DE L'AUBE :

Le chargement de l'aube est constitué par :

- a)- Une force centrifuge due à la vitesse de rotation.
- b)- Une force répartie due à la distribution de pression sur les parois de l'aube.

Si la force centrifuge est relativement connue vu que le nombre de tours est constant (3000 tr/min), la répartition de pression reste un problème non maîtrisé. Nous avons essayé un programme (utilisant les transformations conformes) qui calcule la répartition des pressions d'après celle des vitesses en écoulement potentiel. Malheureusement les résultats obtenus n'étaient pas fiables même pour des exemples simples. Les ouvrages consultés donnent une allure générale de répartition sans aucune idée sur la grandeur de la dépression ou surpression régnant sur le profil. La figure (4.2) donne un exemple de cette allure.

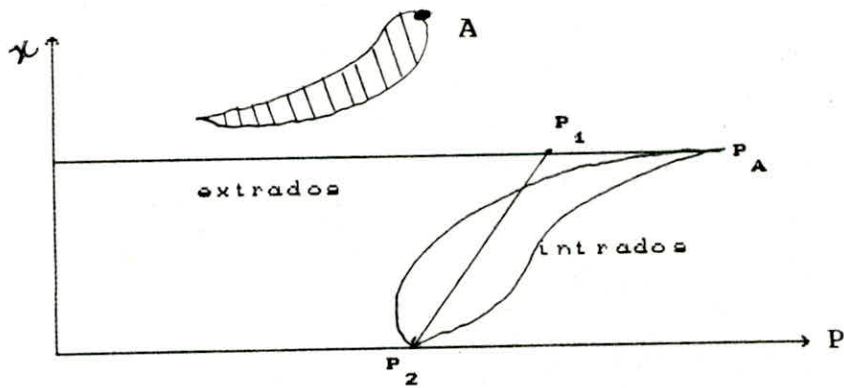


Fig.4.2 : Répartition de pression sur un profil.

Quelle que soit l'allure de la répartition de pression, celle-ci ne doit, en aucun point (mis à part A), dépasser la valeur de la pression d'arrêt P_A sur le bord d'attaque.

La pression d'arrêt est donnée par :

$$P_A = P_1 + \frac{1}{2} \rho W_1^2 \quad (4.1)$$

Ou :

P_1 : Pression statique en amont du profil.

ρ : Masse volumique du fluide.

W_1 : Vitesse relative du fluide a l'entrée du profil.

Pour calculer " ρ " il faut connaitre l'état de la vapeur au niveau du dernier étage BP. Le constructeur indique deux états de vapeur à la sortie de la turbine BP :

a)- Valeur nominale : $P = 0.05$ bars (absolue).

$T = 33$ °C.

b)- Valeur longue durée : $P = 0.3$ bars (absolue).

$T = 70$ °C.

Le titre " x " de la vapeur n'est pas connu. Ceci nous amène à utiliser deux valeurs $x = 0.966$ (valeur courante) et $x = 1$ (Valeur théorique). En utilisant la formule :

$$v = (1 - x)v_g + x v_f \quad (4.2)$$

donnant le volume massique, ainsi que les valeurs de v_g et v_f lues sur les tables de vapeur, on aura le tableau de valeurs de

la masse volumique suivant :

	Valeur nominal	Valeur longue durée
x = 0.966	0.205	0.037
x = 1	0.198	0.035

Tableau 4.1 : Valeur de la masse volumique de vapeur (Kg/m^3)

La valeur moyenne de " ρ " est de : $\bar{\rho} = 0.119 \text{ Kg/m}^3$.

En supposant une entrée sans prérotation la vitesse relative (voir II.2.2) sera donnée par :

$$W_1 = \sqrt{V_1^2 + U_1^2} \quad (4.3)$$

Où :

V_1 : Vitesse absolue à l'entrée.

$U_2 = \omega r$: Vitesse d'entraînement à l'entrée.

Le débit de vapeur utilisé dépend de la charge demandée à la centrale (100, 150, 400, ... tonnes/h), sa valeur maximale est de $q_m = 530 \text{ t/h}$.

D'après les techniciens de la centrale de Cap-Djenet celle-ci travaille souvent à plein régime, c'est pourquoi nous avons choisis pour nos calculs un débit de 500 t/h.

La section de passage est donnée par :

$$S = \pi (R_{\text{ex}}^2 - R_{\text{in}}^2) \quad (4.4)$$

Où :

R_{ex} : Rayon extérieur.

R_{in} : Rayon intérieur.

Au niveau du dernier étage BP : $R_{\text{ex}} = 1396.8 \text{ mm}$.

$R_{\text{in}} = 728.0 \text{ mm}$.

La relation (4.4) donne : $S = 4.46 \text{ m}^2$.

Ainsi la vitesse absolue à l'entrée sera :

$$V = \frac{q_m}{\rho S} = 261.43 \text{ m/s}$$

La vitesse relative " U_1 " dépend du rayon :

* A la base $r = R_{\text{in}}$: $U_1 = 228.71 \text{ m/s}$.

* A l'extrémité $r = R_{\text{ex}}$: $U_1 = 438.82 \text{ m/s}$.

Les valeurs correspondantes de " W_1 " sont :

* A la base : $W_1 = 347.35 \text{ m/s.}$

* A l'extrémité : $W_1 = 510.79 \text{ m/s.}$

La pression " P_1 " en amont de l'aube n'est calculable que si on connaissait la chute d'enthalpie à travers la grille mobile. Cette chute n'étant pas connue, nous utiliserons une chute de pression de 30 % (valeur courante) [3] :

Ainsi :

$$\frac{P_1 - P_2}{P_1} = 0.30$$

En prenant $P_2 = 0.30 \text{ bar}$ (valeur de longue durée) on aura :

$$P_1 = 0.43 \text{ bar}$$

Cette valeur de " P_1 " n'est qu'indicatif car, sous l'effet de la force centrifuge, la pression " P_1 " varie avec la rayon selon la loi [3] :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{C_u^2}{r} \quad (4.5)$$

Où :

C_u : Vitesse radiale de la vapeur.

Si on convient d'écrire : $C_u = \omega r$

On aura :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \omega^2 r$$

ou bien :

$$P = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + \text{Cst} \quad (4.6)$$

Ainsi la pression est proportionnelle au carré du rayon. Si on suppose que $P_2 = 0.3 \text{ bar}$ (et donc $P_1 = 0.43 \text{ bar}$) est donnée au rayon moyen, la relation (4.6) s'écrit :

$$P_1 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (r^2 + R_{\text{moy}}^2) + 4.3 \cdot 10^4 \quad (4.7)$$

P_1 est en Pascal.

Les valeurs limites de " P_1 " seront :

$$P_{1\text{min}} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (R_{\text{in}}^2 + R_{\text{moy}}^2) + 4.3 \cdot 10^4 = 3.95 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

$$P_{1\text{max}} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (R_{\text{ex}}^2 + R_{\text{moy}}^2) + 4.3 \cdot 10^4 = 4.78 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

Finalement la pression d'arrêt correspondante serait d'après (4.1) :

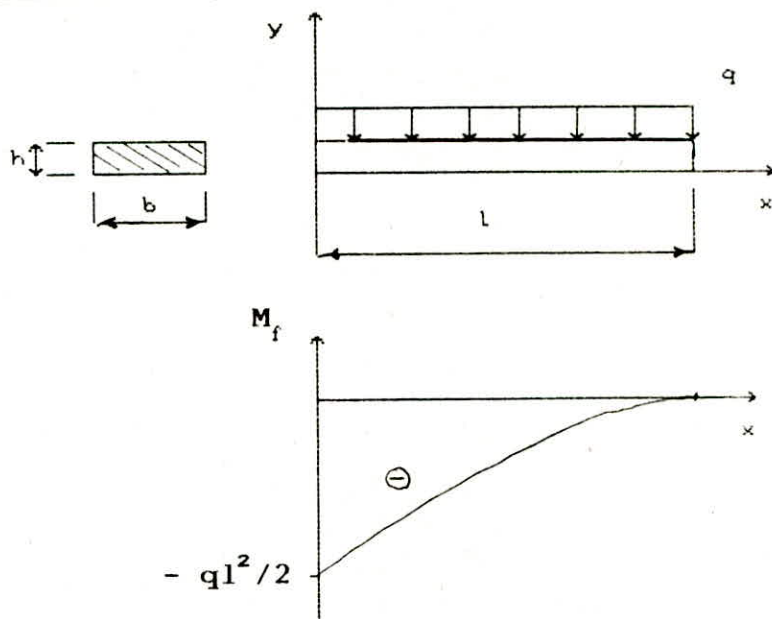
* A la base : $P_A = 4.67 \cdot 10^4 \text{ Pa}$

* A l'extrémité : $P_A = 6.33 \cdot 10^4 \text{ Pa}$

VI.4) - PREMIERE APPROCHE :

Considérons dans une première approche que l'aube est une poutre de section rectangulaire constante soumise à une charge répartie uniforme et une force centrifuge. La poutre étant encastrée en sa base.

VI.4.1) - Etude statique :



Moment fléchissant :

$$M_f = -q(1-x)^2/2$$

$$y'' = -\frac{M_f}{EI} = \frac{q}{2EI}(1-x)^2$$

I : Moment d'inertie $I = bh^3/12$

$$y = \frac{q}{24EI}(1-x)^4 + C_1x + C_2$$

Les conditions aux limites déterminent les constantes C_1 et C_2 .
Finalement :

$$y = \frac{q}{6 E I} \left[\frac{1}{4} (1 - x)^4 + l^3 x + \frac{1}{4} l^4 \right]$$

La contrainte sera alors :

$$\sigma = \frac{M_f y}{I} \quad ; \quad y = h/2 \quad (\text{fibre extrême})$$

Pour $x = 0$: $\sigma = \sigma_{\max} = \frac{q h l^2}{4 I}$

Vu la géométrie de l'aube on prendra :

$$h = 10 \text{ mm.}$$

$$b = 140 \text{ mm.}$$

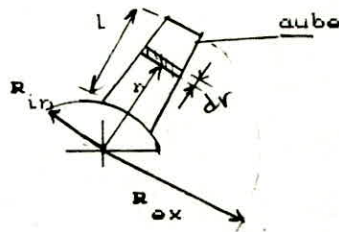
$$l = 660 \text{ mm.}$$

Les calculs du paragraphe 4.3 permettent de prendre :

$$q = 5 \cdot 10^4 \text{ N/m.}$$

Ce qui donne : $\sigma = 4.67 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$.

Force centrifuge :



$$dF = \rho S dr \omega^2 r$$

ω : Vitesse de rotation de la turbine.

$$\begin{aligned} F_{\max} &= \int_{R_{in}}^{R_{ex}} \rho S \omega^2 r dr = \rho S \omega^2 \frac{R_{ex}^2 - R_{in}^2}{2} \\ &= \rho S \omega^2 (R_{ex} - R_{in}) \left(\frac{R_{ex} + R_{in}}{2} \right) \\ &= \rho S l R_m \omega^2 \end{aligned}$$

R_m : rayon moyen.

Donc :
$$\sigma = \frac{F_{\max}}{S} = \rho l R_m \omega^2$$

On prend :

$$\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3 ; \omega = 3000 \text{ tr/min}$$

Ainsi :

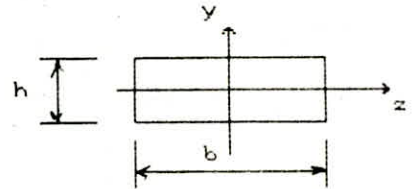
$$\sigma_{\max} = 5.39 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$$

La contrainte de tension maximale totale est :

$$\sigma_{\max} = 5.21 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$$

La contrainte de cisaillement est :

$$\tau = \frac{T S}{b I}$$



T : Effort tranchant

$$T = \frac{dM_f}{dx} = q (l - x)$$

$$S = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (\text{moment statique})$$

$$y = 0 \Rightarrow \tau = \tau_{\max} \quad \tau_{\max} = \frac{3 q l}{2 S}$$

$$\tau_{\max} = 3.53 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$$

IV.4.2) - Etude dynamique :

IV.4.2.1) - Vibrations longitudinales :

$$\text{Equation générale : } E S \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \rho S \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\text{On pose : } u(x,t) = U(x) T(t)$$

Ainsi :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T \frac{d^2 U}{dx^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = U \frac{d^2 T}{dt^2}$$

$$\rightarrow \frac{E}{\rho} T \frac{d^2 U}{dx^2} = U \frac{d^2 T}{dt^2}$$

$$\text{ou : } \frac{E}{\rho} \frac{U''}{U} = \frac{T''}{T}$$

Nous avons la situation suivante $f(x) = g(t)$. Ceci n'est

possible que si : $f(x) = g(t) = \text{Cste.}$

Donc :
$$\frac{E}{\rho} \frac{U''}{U} = \frac{T''}{T} = -\omega^2$$

La constante est négative pour éviter la solution infinie.

Prenons la première égalité : $\frac{U''}{U} = -\lambda^2$ Avec $\lambda^2 = \frac{\rho}{E} \omega^2$

$$\rightarrow U'' + \lambda^2 U = 0$$

$$\rightarrow U = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

à $x = 0$; $U = 0 \rightarrow A = 0$

à $x = l$; $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ (Contrainte nulle) $\rightarrow B \lambda \cos \lambda l = 0$

$$\rightarrow \lambda l = \frac{k}{2} \pi$$

Ce qui donne :

$$\omega l \sqrt{\frac{\rho}{E}} = k \frac{\pi}{2}$$

Ou bien :

$$\omega_n = \frac{2n-1}{2l} \pi \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

Avec les données précédentes on aura :

$$\omega_1 = 12516 \text{ s}^{-1} ; \omega_2 = 37547 \text{ s}^{-1} ; \omega_3 = 62578 \text{ s}^{-1} ;$$

$$\omega_4 = 87610 \text{ s}^{-1} ; \omega_5 = 112641 \text{ s}^{-1} ; \dots$$

IV.4.2.2) - Vibrations transversales :

Equation générale :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

On pose : $y(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$$\rightarrow T E I \frac{d^4 X}{dx^4} = \rho S X \frac{d^2 T}{dt^2} = 0$$

Comme précédemment on écrit :

$$-\frac{\frac{d^4 X}{dx^4}}{\frac{\rho S}{E I} X} = \frac{\frac{d^4 T}{dt^4}}{T} = -\omega^2$$

Posons : $\beta^4 = \omega^2 \frac{\rho S}{E I}$

On aura : $X(x) = A_1 \text{Ch}\beta x + A_2 \text{Sh}\beta x + A_3 \text{Cos}\beta x + A_4 \text{Sin}\beta x$

Conditions aux limites :

$$y(0,1) = 0 \rightarrow A_1 = A_3$$

$$\frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = 0 \rightarrow A_4 = -A_2$$

$$M_f(x=1) = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 y(1,t)}{\partial x^2} = 0$$

$$\rightarrow A_1 \beta^2 (\text{Ch}\beta 1 + \text{Cos}\beta 1) + A_2 \beta^2 (\text{Sh}\beta 1 - \text{Sin}\beta 1) = 0$$

Effort tranchant nul pour $x = 1 \rightarrow \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$

$$\rightarrow A_1 \beta^3 (\text{Sh}\beta 1 + \text{Sin}\beta 1) + A_2 \beta^3 (\text{Ch}\beta 1 - \text{Cos}\beta 1) = 0$$

Les deux dernières équations constituent un système dont la solution est :

$$1 + \text{Cos}\beta 1 \cdot \text{Ch}\beta 1 = 0$$

La résolution numérique nous donne :

$$\omega_1 = 3.516 \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{E I}{\rho S}} ; \quad \omega_2 = 22.10 \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{E I}{\rho S}} ;$$

$$\omega_3 = 3.516 \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{E I}{\rho S}} ; \quad \omega_4 = 120.9 \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{E I}{\rho S}} ;$$

$$\omega_5 = 199.8 \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{E I}{\rho S}} ; \dots$$

Avec les données précédentes on aura :

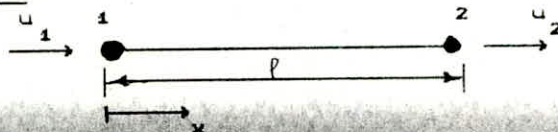
$$\omega_1 = 122 \text{ s}^{-1} ; \omega_2 = 770 \text{ s}^{-1} ; \omega_3 = 2177 \text{ s}^{-1} ; \omega_4 = 4213 \text{ s}^{-1} ;$$

$$\omega_5 = 6963 \text{ s}^{-1} ; \dots$$

IV.5) - SOLUTION EN ELEMENT FINIS :

IV.5.1) - Element barre :

Soit labarre ci-contre :



IV.5.1.1) - Cas statique :

La fonction de déplacement choisie est du type polynomial :

$$u(x) = C_0 x + C_1$$

Les conditions aux limites déterminent les constantes C_0 et C_1 :

Noeud 1 : $x = 0$; $u(x) = u_1 \rightarrow C_0 = u_1$

Noeud 2 : $x = l$; $u(x) = u_2 \rightarrow C_1 = (u_2 - u_1)/l$

Donc :

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_1 + \frac{x}{l} u_2$$

$$u(x) = \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \frac{x}{l} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Relation similaire à l'équation (3.9).

D'autre part : $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ = donc d'après (3.1) : $[L] = \frac{\partial}{\partial x}$

Et $\sigma = E S$ donc d'après (3.12) : $[D] = E$

Ainsi : $[B] = [L] [N] = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{matrix} \right\}^T$
 $= \frac{1}{l} [-1 \quad 1]$

A ce stade le calcul de la matrice de rigidité $[K]$ est évident :

$$[K] = \int \int \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

$$= E S L [B]^T [B]$$

$$= \frac{E S}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

IV.5.1.12) - Cas dynamique :

Pour le calcul des fréquences propres deux matrices peuvent être utilisées :

a) - Matrice masse concentrée :

La masse est supposée équitablement répartie sur les deux degrés de liberté :

$$M = \frac{\rho S l}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) - Matrice masse cohérente :

Elle est calculée d'après la formule (3.15.b) :

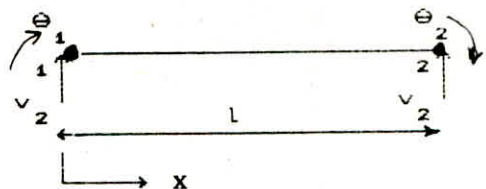
$$[M] = \rho S \int_0^l \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & 0 \\ \frac{x}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} dx$$

Après intégration :

$$M = \frac{\rho S l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

IV.5.2) - Element poutre :

Soit la poutre ci-contre :



IV.5.2.1) - Cas statique :

Etant donné qu'on a 4 conditions aux limites, la fonction d'interpolation choisie sera un polynôme du troisième degré :

$$W(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$$

W : Déplacement vertical.

Après application des conditions aux limites nous obtenons le système suivant :

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1^2 & 1^3 \\ 0 & 1 & 2 \cdot 1 & 3 \cdot 1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix}$$

Après inversion :

$$\begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/1^2 & -1/1 & -3/1^2 & 1/1^3 \\ 2/1^3 & 1/1^2 & -2/1^3 & 3/1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Ainsi :

$$W(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix}$$

$$= [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/1^2 & -1/1 & -3/1^2 & 1/1^3 \\ 2/1^3 & 1/1^2 & -2/1^3 & 3/1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 1 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \\ x - \frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\ 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \\ - \frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{array}{l} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array} \right\}$$

Donc :

$$N = \left\{ \begin{array}{l} 1 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \\ x - \frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\ 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \\ - \frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \end{array} \right\}^T$$

On définit la déformation généralisée comme étant la courbure:

$$\epsilon = \frac{dW}{dx^2}$$

$$\text{Donc } L \equiv \frac{d^2}{dx^2}$$

$$\text{Et } B = L N = \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \begin{array}{l} 1 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \\ x - \frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\ 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \\ - \frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \end{array} \right\}^T$$

$$\sigma = E I \frac{d^2 W}{dx^2} = E I \varepsilon$$

$$\rightarrow [D] = \{E I\}$$

$$\text{Finalement : } [K] = \int [B]^T [D] [B] dV$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

IV.5.2.2) - Cas dynamique :

En utilisant la formule (3.15.a) nous obtenons la matrice suivante :

$$[M] = \frac{\rho S l}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l \\ -22l & 4l^2 & -13l & -3l^2 \\ 54 & -13l & 156 & 22l \\ 13l & -3l^2 & 22l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Remarque :

La barre et la poutre formulées précédemment peuvent être assemblées pour donner une poutre à 3 degrés de liberté par noeud dont la matrice de rigidité est la somme (après extension) des matrices $[K]_{\text{barre}}$ et $[K]_{\text{poutre}}$. L'effet de la force centrifuge et de la charge répartie sera donc mis en évidence en une seule opération. L'inconvénient est la grande taille des matrices à manipuler.

IV.5.3) - Résultats :

Nous avons utilisé une poutre d'une part (flexion) et trois barres d'autre part (traction) pour modéliser. La force volumique et la charge répartie ont été modélisées en charges concentrées aux noeuds (voir détails au chapitre V). Les résultats obtenus sont les suivants :

a)- Element barre :

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= 5.39 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2 \\ \omega_1 &= 12374 \text{ s}^{-1} \\ \omega_2 &= 33807 \text{ s}^{-1} \\ \omega_3 &= 46173 \text{ s}^{-1}\end{aligned}$$

b)- Element poutre :

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= 4.67 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \\ \omega_1 &= 123 \text{ s}^{-1} \\ \omega_2 &= 1213 \text{ s}^{-1}\end{aligned}$$

V.1 INTRODUCTION :

Au début de cette étude nous avons décidé de discrétiser l'aube en éléments coques épaisses (en utilisant le logiciel SAP80 pour le traitement), ce qui conviendrait pour la géométrie de l'aube présentant une dimension inférieure aux deux autres. Malheureusement le SAP80 ne traite pas ce type d'élément et sa formulation est très compliquée, c'est ce qui nous a poussé à utiliser l'élément brique à 20 noeuds (Fig. 5.1). Ce dernier convient très bien pour les géométries curvilignes suivant les trois dimensions, mais connaît en revanche des difficultés numériques lorsque l'une des dimensions est petite par rapport aux deux autres. Cet élément possède trois degrés de liberté par noeuds (déplacement suivant les trois directions), donc la matrice de rigidité élémentaire sera d'ordre 60x60.

V.2) - FORMULATION :

V.2.1) - Fonctions d'interpolations :

Dans la méthode des éléments finis (méthode des déplacements) on interpole deux entités :

a) - Les déplacements de l'élément :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

b) - La géométrie de l'élément :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [\bar{N}] \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

Où :

u_i, v_i, w_i : Déplacements suivant x, y et z respectivement des noeuds d'interpolations.

x_j, y_j, z_j : Coordonnées x, y et z des noeuds géométriques.

Si les noeuds d'interpolations sont identiques aux noeuds géométriques ($[N] = [\bar{N}]$) l'élément est dit isoparamétrique. Si le nombre de noeuds d'interpolations est

supérieur au nombre de noeuds géométriques (degré de [N] supérieur au degré de $\overline{[N]}$) l'élément est dit *sub-paramétrique*. Dans le cas contraire (degré de [N] inférieur au degré de $\overline{[N]}$) il est dit *super-paramétrique*.

Dans notre étude l'élément brique à 20 noeuds est pris sous sa forme isoparamétrique.

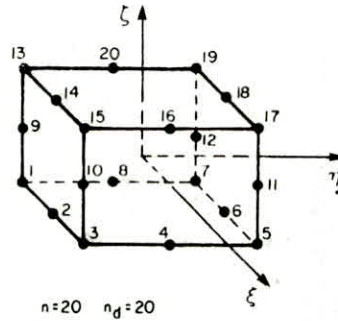


Fig. 5.1 : Element de référence

Les fonctions d'interpolations N_i et leurs dérivées sont les suivantes [2] :

Noeuds sommets :

Noeud i	1	3	5	7	13	15	17	19
ξ_i	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
η_i	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
ζ_i	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)(-2 + \xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{8} \xi_i (1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)(-1 + 2\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{1}{8} \eta_i (1 + \xi\xi_i)(1 + \zeta\zeta_i)(-1 + \xi\xi_i + 2\eta\eta_i + \zeta\zeta_i)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \frac{1}{8} \zeta_i (1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(-1 + \xi\xi_i + \eta\eta_i + 2\zeta\zeta_i)$$

Noeuds des côtés parallèles à l'axe ξ :

Noeud i	2	6	14	18
η_i	-1	1	-1	1
ζ_i	-1	-1	1	1

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta\eta_i) (1 + \zeta\zeta_i)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \xi (1 + \eta\eta_i) (1 + \zeta\zeta_i)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{1}{4} \eta_i (1 - \xi^2) (1 + \zeta\zeta_i)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \frac{1}{4} \zeta_i (1 - \xi^2) (1 + \eta\eta_i)$$

Noeuds sur les côtés parallèles à l'axe η :

Noeud i	4	8	16	20
$\eta_i = 0 ; \xi_i$	1	-1	1	-1
ζ_i	-1	-1	1	1

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \eta^2) (1 + \xi\xi_i) (1 + \zeta\zeta_i)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \xi_i (1 - \eta^2) (1 + \zeta\zeta_i)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = -\frac{1}{2} \eta (1 + \xi\xi_i) (1 + \zeta\zeta_i)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \frac{1}{4} \zeta_i (1 + \xi\xi_i) (1 - \eta^2)$$

Noeuds sur les côtés parallèles à l'axe ζ :

Noeud i	9	10	11	12
$\zeta_i = 0 ; \xi_i$	-1	1	1	-1
η_i	-1	-1	1	1

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \zeta^2) (1 + \xi\xi_i) (1 + \eta\eta_i)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \xi_i (1 - \zeta^2) (1 + \eta\eta_i)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{1}{4} \eta_i (1 + \xi\xi_i) (1 - \zeta^2)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = -\frac{1}{2} \zeta (1 + \xi\xi_i) (1 + \eta\eta_i)$$

V.2.2)- Constructions des matrices élémentaires :

La construction des matrices élémentaires nécessite l'intégration de fonctions complexes (Eqs. 3.14.a, 3.15.a et 3.15.b) sur des domaines géométriquement complexes (Fig.5.2).

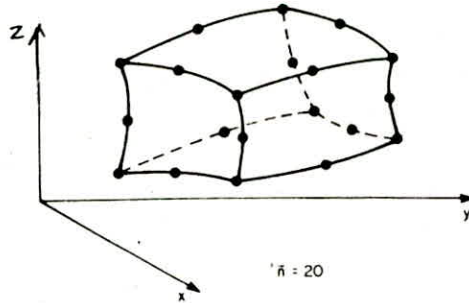


Fig. 5.2 : Element brique à 20 noeuds réel

Dans la majorité des applications, ces intégrales sont calculées numériquement. De plus les fonctions $[N]$ ainsi que leurs dérivées intervenants dans ce calcul sont définies sur l'élément de référence, c'est ce qui nous oblige à définir une transformation entre l'élément réel et celui de référence.

V.2.2.1)- Matrice jacobienne :

L'équation (5.2) définit une transformation bijective :

$$\tau : \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [N(\xi, \eta, \zeta)] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

On sait que pour une fonction quelconque "f" :

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi}$$

Les dérivées par rapport à ξ, η et ζ s'écrivent donc en fonctions de ceux par rapport à x, y et z

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

$$= [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

La matrice [J] est appelée *matrice jacobienne*.

En pratique c'est l'inverse de [J] qui est utilisée car on cherche à exprimer les dérivées en x, y et z (élément réel) à partir de ceux par rapport à ξ , η et ζ (élément de référence) :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (5.4.a)$$

D'après (5.2) la matrice jacobienne s'écrit :

$$[J] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} (x \quad y \quad z) = \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial N}{\partial \xi} \right) \\ \left(\frac{\partial N}{\partial \eta} \right) \\ \left(\frac{\partial N}{\partial \zeta} \right) \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{20} & y_{20} & z_{20} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Finalement on démontre que [2] :

$$\iiint_{V^o} f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{V^r} f(\xi, \eta, \zeta) \det(J) d\xi d\eta d\zeta \quad (5.6)$$

Où :

V^o : Volume de l'élément réel.

V^r : Volume de l'élément de référence.

f : Fonction quelconque.

V.2.2.2) - Intégration des matrices élémentaires :

L'expression (3.14.a) de la matrice de rigidité de l'élément brique à 20 noeuds devient d'après (5.6) :

$$[K] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] \det(J) d\xi d\eta d\zeta \quad (5.7)$$

De même l'expression (3.15.a) de la matrice masse s'écrit :

$$[M] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^T \rho [N] \det(J) d\xi d\eta d\zeta \quad (5.7.a)$$

Bien que plus simples que (3.15.a) et (3.14.a) ces intégrales sont délicates à calculer explicitement. On utilise donc une intégration numérique qui, dans le cas général, s'écrit [2] :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^r w_i f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \quad (5.8)$$

Où :

r : Nombre de points d'intégrations.

w_i : Poids du point d'intégration i .

Dans le membre de droite de l'égalité (3.8) la fonction "f" est calculée aux points d'intégrations, lesquels sont donnés dans des tables avec leurs poids correspondants.

En appliquant (3.9) pour la brique à 20 noeuds nous obtenons :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_{20} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_{20} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_{20} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_{20} \\ v_{20} \\ w_{20} \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

Dans le cas d'analyse tridimensionnelle des contraintes, l'équation générale (3.10) s'écrit :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

Ou bien :

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

En utilisant (5.9) on aura :

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_{20}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{20}}{\partial y} & \frac{\partial N_{20}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial z} & \frac{\partial N_{20}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{20}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_{20} \\ v_{20} \\ w_{20} \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

$$= [B]\{a\}$$

Pour un matériau isotrope la matrice [D] est donné par :

$$[D] = A \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\nu} & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{1-\nu} & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Symétrique

Avec :

$$A = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Ainsi, les éléments de calcul des matrices élémentaires sont réunis, il suffit d'exprimer les dérivées en x , y et z des fonctions $[N]$ à partir des dérivées en ξ , η et ζ et de faire une intégration numérique :

V.3)- ETAPES DE CALCUL DE [K] ET [M] :

Le calcul des matrices élémentaires de chaque élément s'effectue comme suit [2] :

- a)- Initialiser $[K]$ et $[M]$ à zéro.
- b)- Pour chaque point d'intégration :
 - * Calculer les fonctions $[N]$ et leurs dérivées en ξ , η et ζ aux points d'intégrations (§ V.2).
 - * Calculer la matrice jacobienne $[J]$ (Eq. 5.5) ainsi que son inverse et son déterminant.
 - * Calculer les dérivées des fonctions $[N]$ en x , y et z à partir des dérivées en ξ , η et ζ (Eq. 5.4.1).
 - * Construire la matrice $[B]$ (Eq. 5.11).
 - * Accumuler dans $[K]$ le produit $[B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot \det(J) \cdot W_r$
 - * Accumuler dans $[M]$ le produit $[N]^T \cdot [N] \cdot \det(J) \cdot W_r$

V.4)- MODELISATION DES CHARGES :

Dans l'application de la méthode des éléments finis au calcul des structures élastiques, on démontre que les forces "q" appliquées au système (Eq. 3.14) sont données par :

$$\{q\} = \iiint [N] f_v dV + \iint [N] f_s dS \quad (5.13)$$

Où :

f_v : Force par unité de volume .

f_s : Force par unité de surface.

Les intégrales mises en jeu dans (5.13) sont calculées sur l'élément réel. Comme pour les matrices masse et rigidité il faut donc les transformer en intégrales sur l'élément de référence.

V.4.1)- Forces volumiques :

En utilisant la transformation (5.6) le vecteur force volumique s'écrit :

$$\{q\} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N] f_v \det(J) d\xi d\eta d\zeta \quad (5.14)$$

On voit donc que le calcul de $\{q_v\}$ est presque identique au au calcul de $[M]$.

Pour le cas de l'aube de la turbine BP étudiée, la force volumique qui entre en jeu est la force centrifuge, le poids étant négligeable. Elle a comme expression (§ IV.3) :

$$dF = \rho S dr \omega^2 r$$

Donc :

$$f_v = \frac{dF}{dV} = \frac{dF}{S dr} = \rho \omega^2 r$$

On voit que la force par unité de volume " f_v " dépend du rayon. Du moment que " f_v " dans l'équation (5.14) doit être exprimée aux points d'intégration, il faut donc :

a)- Ou bien prendre une distance radiale moyenne pour chaque élément et qui sera valable pour tout les points d'intégration sur l'élément.

b)- Ou bien déterminer la distance radiale de chaque point d'intégration dans chaque élément d'après (5.2).

La solution b)- est plus exacte, mais plus chère numériquement que la solution a)-. C'est elle que nous allons adopter dans notre programme de calcul.

La construction du vecteur élémentaire $\{q_v\}$ se fait en suivant les mêmes étapes du § V.3.

V.4.2) - Forces surfaciques :

Le second terme du membre de droite de l'égalité (5.13) constitut une intégrale de surface à trois dimensions car les faces de l'élément brique à 20 noeuds réel sont gauches (Fig. 5.2).

On démontre que [2] :

$$\iint_{S^o} f(x,y,z) dS = \iint_{S^r} f(s_1, s_2) J_s ds_1 ds_2 \quad (5.15)$$

Où :

S^o : Surface de l'élément réel.

S^r : Surface de l'élément de référence correspondante.

(s_1, s_2) : Les couples (ξ, η) , (ξ, ζ) ou (η, ζ) suivant la surface correspondante de l'élément de référence sur laquelle est définie la fonction $f(x,y,z)$ dans

l'élément réel.

$$J_s = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial s_1} \frac{\partial z}{\partial s_2} - \frac{\partial z}{\partial s_1} \frac{\partial y}{\partial s_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s_1} \frac{\partial x}{\partial s_2} - \frac{\partial x}{\partial s_1} \frac{\partial z}{\partial s_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial s_1} \frac{\partial y}{\partial s_2} - \frac{\partial y}{\partial s_1} \frac{\partial x}{\partial s_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.16)$$

Ainsi le vecteur force surfacique $\{q_s\}$ s'écrit :

$$\{q_s\} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N] f_s J_s ds_1 ds_2 \quad (5.17)$$

Pour ce cas il faut donc utiliser une intégration numérique à deux dimensions qui s'écrit (dans le cas général) :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(s_1, s_2) ds_1 ds_2 = \sum_{i=1}^r w_i f(s_{1_i}, s_{2_i}) \quad (5.18)$$

Par conséquent la force par unité de surface " f_s " ainsi que l'expression de " J_s " doivent être calculées aux points d'intégration.

REMARQUE :

Les dérivées intervenants dans le calcul de " J_s " (Eq. 5.16) sont les termes de la matrice jacobienne $[J]$ (Eq. 5.4). Seulement, si s_1 et s_2 sont les variables définissant la surface sur laquelle s'effectue l'intégrale, il faut imposer en plus que $s_3 = \text{Cste}$ dans le calcul de $[J]$ (Eq. 5.5). Par exemple :

Si une charge répartie est appliquée sur la surface de l'élément de référence définie par les noeuds 1, 2, 10, 15, 14, 13 et 9 (Fig. 5.1), on aura $s_1 = \xi$, $s_2 = \zeta$, il faut dans ce cas imposer $\eta = -1$ dans l'expression (5.5) de la matrice jacobienne.

Pour le cas de l'aube étudiée, la pression de vapeur constitue la force par unité de surface " f_s ". Vu le développement précédemment fait (§ IV.2), nous exprimons " f_s " comme suit :

a)- Le long d'un profil :

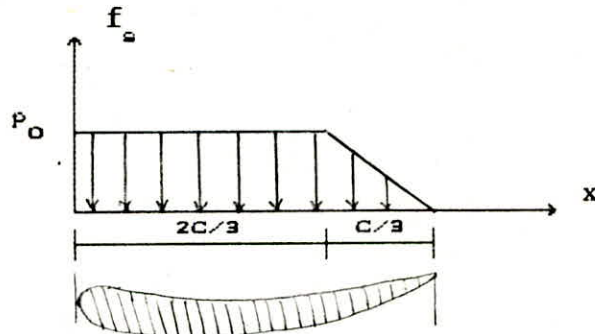


Fig. 5.3 : Distribution de pression le long d'un profil

c : Corde du profil.

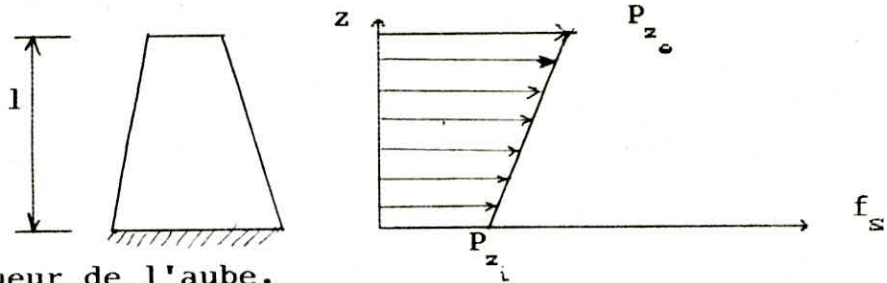
P_0 : Pression choisie inférieure à la pression d'arrêt.

Donc :

- * Pour $0 \leq x \leq 2c/3$: $f_s = P_0$
- * Pour $2c/3 \leq x \leq c$: $f_s = 3P_0 \left(\frac{c-x}{c} \right)$

b)- Le long de la longueur de l'aube :

Pour une abscisse "x" donnée :



l : Longueur de l'aube.

Fig 5.4 : Distribution de pression le long de l'aube

$$f_s = P_{z_l} + \frac{P_{z_o} - P_{z_l}}{l} z$$

P_{z_l} : Pression à $z = 0$

P_{z_o} : Pression à $z = l$

La distribution de pression dans l'espace aura l'allure suivante :

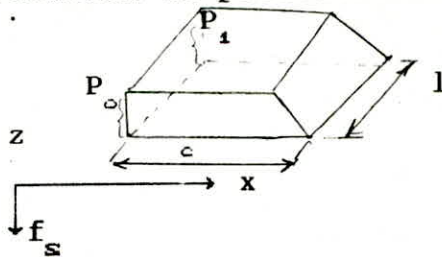


Fig. 5.5 : Distribution spatiale des pressions.

$$\text{Pour } 0 \leq x \leq 2c/3 : f_s = P_o + \frac{P_1 - P_o}{l} z$$

$$\text{Pour } 2c/3 \leq x \leq c : f_s = 3P_o \left(\frac{c-x}{c} \right) \left(P_o + \frac{P_1 - P_o}{l} z \right)$$

Pour le cas de notre structure :

$$P_o = 4.10^4 \text{ N/m}^2$$

$$P_1 = 6.10^4 \text{ N/m}^2$$

$$c_{\text{moyen}} = 145 \text{ mm.}$$

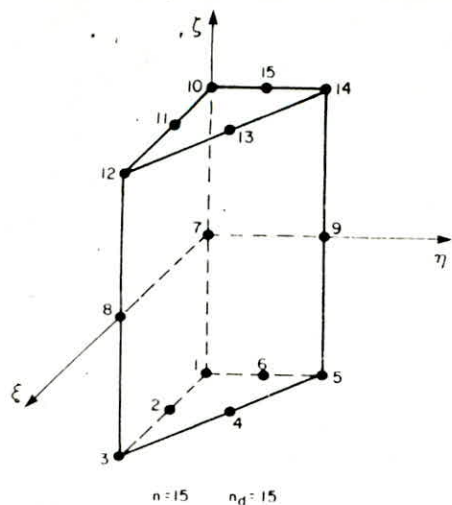
Cette distribution de pression est appliquée sur l'intrados de l'aube. Comme pour la force volumique, il faut déterminer les coordonnées des points d'intégration dans le repère réel pour pouvoir utiliser directement l'expression précédente de la force surfacique.

Finalement les étapes de calcul du vecteur force surfacique élémentaire $\{q_s\}$ seront :

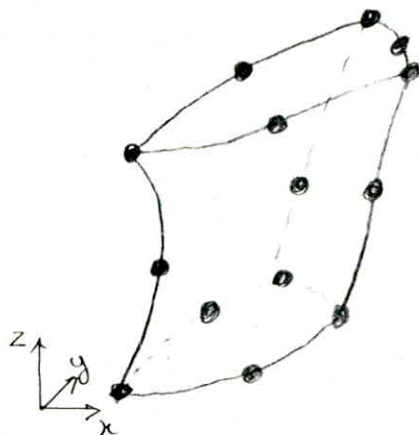
- a)- Initialiser $\{q_s\}$ à zéro.
- b)- Pour chaque point d'intégration :
 - * Calculer " f_s ".
 - * Calculer les fonctions d'interpolations $[N]$ (§ V.2).
 - * Calculer la matrice jacobienne et son déterminant (Eq. 5.5) en imposant le $s_l = \text{Cste}$ approprié (Voir remarque de ce paragraphe).
 - * Calculer " J_s " (Eq. 5.16).
 - * Accumuler dans $\{q_s\}$ le produit $[N].f_s.W_r.J_s$.

V.5) - TECHNIQUE DE DEGENERATION :

L'aube étudiée présente un coin au bord de fuite (Fig. 4.1) ce qui pose un petit problème sur la disposition des noeuds dans cette région. L'idéal aurait été de formuler l'élément prismatique à 15 noeuds (Fig. 5.6) pour remplir le vide laissé par l'élément brique à 20 noeuds au bord de fuite.



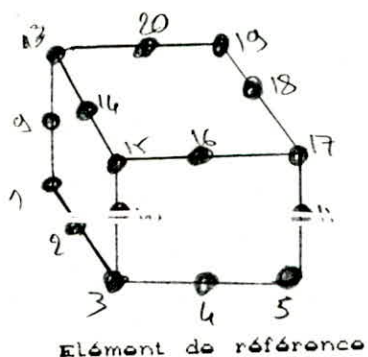
Element de référence



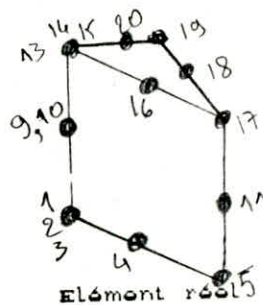
Element réel

Fig. 5.6 : Element prismatique à 15 noeuds.

La programmation du calcul des matrices élémentaires de cet élément aurait pris trop de temps d'une part et aurait rendu le programme trop long d'autre part. C'est pourquoi nous avons utilisé la technique de *dégénération* qui consiste à *dégénérer* l'élément brique à 20 noeuds en élément prisme à 15 noeuds (Fig. 5.7).



Element de référence



Element réel

Fig. 5.7 : Dégénération de l'élément brique à 20 noeuds en élément prisme à 15 noeuds.

Cette *dégénération* est obtenue simplement lors de l'introduction des données. On impose alors :

- * Noeuds 2 et 3 mêmes coordonnées que le noeud 1.
- * Noeud 10 mêmes coordonnées que le noeud 9.
- * Noeuds 14 et 15 mêmes coordonnées que le noeud 13.

L'élément dégénéré a été testé sur des exemples simples et a donné d'assez bons résultats .

Lorsque nous avons essayé de calculer les contraintes aux noeuds de l'élément dégénéré nous avons toujours obtenu un jacobien ($\text{Det}(J)$) nul et donc un arrêt de l'exécution. Ceci s'explique par le fait que la transformation " τ " (5.3) n'est plus bijective.

La référence [1] pose deux conditions pour limiter la déformation des éléments quadratiques :

- a)- Aucun angle intérieur de l'élément déformée ne doit dépasser 180° .
- b)- Les noeuds intermédiaires doivent être projeté dans le tiers central de la distance entre les noeuds d'extrémités.

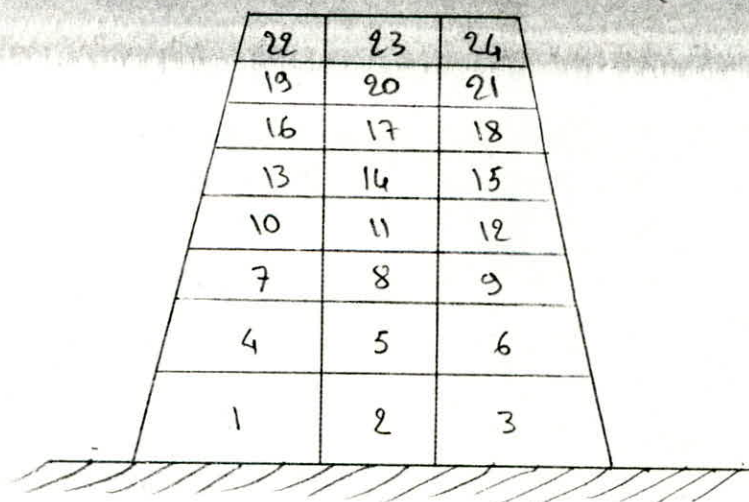
Pour contourner le problème du jacobien nul nous pouvons :

- a)- Soit décaler légèrement les coordonnées des groupes de noeuds $\{13,14,15\}$, $\{9,10\}$ et $\{1,2,3\}$.
- b)- Soit calculer les contraintes aux points d'intégration.

5.6) - MAILLAGE DE L'AUBE :

Les problèmes d'espace mémoire et de temps d'exécution ont limité notre choix du maillage. En effet en simple précision l'ordinateur (Vax) n'exécute plus le programme pour un système à plus de 700 degrés de liberté faute d'espace mémoire. En simple précision aussi le temps d'exécution pour le calcul statique (déplacements et contraintes) d'un exemple à 200 degrés de liberté est de 30 minutes en moyenne (ce temps dépend du nombre d'utilisateurs).

Nous avons opté pour le maillage suivant :



24 éléments
226 noeuds

VI.1) - INTRODUCTION :

Les forces développées dans les machines axiales, même en période de régime établi, ne sont pas rigoureusement constantes. Elles oscillent en général autour d'une valeur moyenne avec une certaine périodicité. Ce fait est susceptible de donner lieu à des phénomènes de résonance qui peuvent présenter des conséquences néfastes pour la sécurité du matériel.

En particulier les aubes, qui constituent des systèmes à masses réparties possédant une suite indéfinie de fréquences naturelles de vibration, sont des éléments particulièrement exposés aux dangers de rupture résultants des efforts alternés qui se produisent lorsqu'une des fréquences propres de l'aube coïncide avec l'une des fréquences d'excitation.

L'étude des vibrations d'un aubage pose deux problèmes :

- a)- La détermination des fréquences propres.
- b)- L'examen des impulsions excitatrices.

La comparaison des chiffres obtenus permet de déterminer les zones de résonances possibles [5].

Dans le présent chapitre nous allons essayer de contourner les deux problèmes précédents en utilisant la méthode des éléments finis.

VI.2) - LES ELEMENTS FINIS EN DYNAMIQUE :

L'étude dynamique d'une structure peut s'effectuer en cherchant des solutions approchées du système continu avec un nombre finis de degrés de liberté. Ceci revient, après discrétisation, à la résolution du système du second membre suivant (Eq. 3.15) [6] :

$$[M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{a\} + [C] \frac{\partial}{\partial t} \{a\} + [K] \{a\} = \{q\} \quad (6.1)$$

Les expressions des matrices [M], [C] et [K] sont

données au chapitre trois.

$\{q\}$: Vecteur force excitatrice.

Pour calculer les fréquences propres de la structure on doit résoudre le système sans second membre, soit :

$$[M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{a\} + [C] \frac{\partial}{\partial t} \{a\} + [K] \{a\} = 0 \quad (6.2)$$

On appelle modes, les solutions propres du système (6.2). Dans le cas général, ces modes au nombre de "n" sont complexes et leurs interprétation physique n'est pas évidente. Heureusement, dans de nombreux problèmes pratiques, les structures étudiées sont faiblement amorties, ce qui permet d'éviter le calcul des modes propres complexes, opération toujours longue et coûteuse. C'est notamment le cas des aubes des turbines à vapeur où la dissipation d'énergie provient du frottement de vapeur contre les surfaces des aubes. On se ramène donc à la recherche des modes propres du système suivant :

$$[M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{a\} + [K] \{a\} = 0 \quad (6.2)$$

Les solutions sont du type $\{a\} = \{X\} e^{j\omega t}$, d'où les équations modales :

$$-\omega^2 [M] \{X\} + [K] \{X\} = 0 \quad (6.4)$$

On démontre que si les deux matrices [M] et [K] sont définies positives les valeurs propres " ω_i^2 " sont positives.

Une matrice [V] est dite définie positive si :

$$\forall \{X\} \neq 0 ; \{X\} [V] \{X\} > 0 \quad (6.5)$$

Le système (6.4) s'écrit :

$$([K] - \omega^2 [M]) \{X\} = 0 \quad (6.6)$$

Pour avoir des solutions non triviales il faut que :

$$\det ([K] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (6.7)$$

L'équation (6.7) est un polynôme d'ordre "n" qui n'est résolvable, pour les grands systèmes, que par des méthodes approchées. Parmi ces méthodes on peut citer la méthode de l'itération inverse avec orthogonalisation, la méthode de Jacobi, la méthode du sous-espace

VI.3) - RECHERCHE DES VALEURS PROPRES :

La méthode de recherche des valeurs propres la plus simple à mettre en oeuvre sur ordinateur est celle de l'itération inverse avec orthogonalisation. Nous avons essayé cette méthode plutôt que d'autre car le temps ne permettait pas de programmer une méthode plus compliquée.

L'algorithme général de l'itération inverse avec orthogonalisation est le suivant [7] :

a)- Triangulariser [K].

b)- Choisir un vecteur initial $\{V^1\}$

c)- Calculer la sollicitation : $\{F^1\} = [M]\{V^1\}$

Pour chaque itération i :

* Résoudre $[K]\{V^{i+1}\} = \{F^i\}$

* Calculer la sollicitation $\{\bar{F}\} = [M]\{V^{i+1}\}$

* Evaluer $d = \langle V^{i+1} \rangle \{\bar{F}\}$

* Calculer l'approximation de $\omega_j^2 = \lambda_j$

$$\lambda_j^{i+1} = \frac{\langle V^{i+1} \rangle \{F^i\}}{d}$$

* Calculer $\{V^{i+1}\}$: $\{V^{i+1}\} = \frac{1}{\sqrt{d}} \{\bar{F}\}$

* Vérifier la convergence $\left| \frac{\lambda_j^{i+1} - \lambda_j^i}{\lambda_j^{i+1}} \right| < \varepsilon$

d)- Calculer le vecteur propre :

$$\{X_j\} = \frac{1}{\sqrt{d}} \{V^{i+1}\}$$

e)- Modifier $\{V^{i+1}\} = \{V^{i+1}\} - c_j \{X_j\}$

$$c_j = \langle X_j \rangle \{ \bar{Y} \}$$

$$\{ \bar{Y} \} = [M] \{V^{i+1}\}$$

f)- Refaire l'étape c)- jusqu'à la convergence.

Nous avons essayé cette méthode sans aucun succès ni sur des exemples simples ni sur la structure réelle. En vain nous avons essayé et combiné les possibilités suivantes :

- Des matrices masses diagonales avec différentes répartitions.

- Des matrices masses cohérentes avec différentes intégrations numériques.

- La technique de décalage utilisant différents décalages.

- Différentes méthodes d'applications des conditions aux limites.

- Un programme utilisant cette méthode, élaboré dans un très récent ouvrage [7].

Nous avons toujours obtenu des valeurs propres trop grandes ou même négatives sur certains exemples.

Si on écarte les cas où la méthode elle-même ne garantirait pas la convergence pour les grands systèmes ou ne serait pas applicable pour ce type précis d'élément (brique 20 noeuds) ce qui n'est pas spécifié dans les ouvrages consultés, l'origine de la non-convergence serait probablement l'ordinateur utilisé qui, vu le nombre d'itérations et d'opérations effectuées, va accumuler les erreurs et, après

avoir atteint le nombre maximum d'itérations, donnerait des résultats complètement erronés. Il reste à mentionner que nous avons souvent eu un problème d'overflow c'est à dire un dépassement de la capacité de l'ordinateur au niveau de la troisième étape du point c)- de l'algorithme, même en double précision.

Vu que nous n'avons pas pu obtenir les fréquences propres utilisant l'élément brique à 20 noeuds, nous allons nous contenter des résultats de la première approche (poutre) et prévoir les résonances possibles de l'aube.

Lors du calcul des fréquences propres de l'aube modélisée en poutre, nous n'avons pas tenu compte de la force centrifuge qui, si elle devient importante, a pour effet de raidir l'ailette et donc d'augmenter ses fréquences de vibrations propres. Il n'y a pas de formule exacte donnant l'effet de la force centrifuge sur les fréquences propres de l'ailette. Nous utiliserons la formule approchée de Scharffenberg [5] :

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \Omega^2 \left[2 \frac{R_m}{l} - \frac{1}{2} \right]$$

Où :

ω^2 : Fréquence propre en tenant compte de la force centrifuge.

ω_0^2 : Fréquence propre sans tenir compte de la force centrifuge.

Ω^2 : Vitesse de rotation du rotor de la turbine.

R_m : Rayon moyen.

l : Longueur de l'aube.

Nous avons calculé et arrangé les sept premières valeurs propres avec et sans l'effet de la force centrifuge.

Voici les résultats :

Fréquence (en s^{-1})	
Sans force centrifuge	Avec force centrifuge
122	532
370	920
790	945
2177	2238
4213	4245
4966	4993
6963	6982

VI.4D) - EXAMEN DES FORCES EXCITATRICES :

VI.4.1D) - Effet de la veine de vapeur : [5]

La veine de vapeur sortant des aubes distributrices n'est pas homogène car l'existence même et l'épaisseur des parois de guidages provoquent :

- Des couches limites avec variation rapide de la vitesse dans l'épaisseur de ces couches.

- Des sillages qui n'ont pas encore disparu lorsque la veine de vapeur rencontre les aubages mobiles.

Ces sillages sont découpés par les ailettes mobiles et occupent dans le canal de la roue des positions successives.

L'action de la vapeur en un point d'une ailette se trouve ainsi en rapport avec le passage en ce point du sillage du distributeur, elle varie donc dans le temps à la fréquence des passages de deux distributeurs successifs devant la même aube mobile, soit :

$$f = N n$$

Où :

N : Vitesse de rotation en tr/s.

n : Nombre de distributeurs.

Ces actions sont périodiques mais non sinusoïdales, leurs décomposition en série de Fourier fait apparaître les

harmoniques de fréquences : $2 N n$, $3 N n$, $4 N n$,

Pour le cas de l'aube étudiée :

$$N = 50 \text{ tr/s} ; n = 58$$

Les harmoniques de fréquences seront alors : 2900, 5800, 8700, 11600, 14500, 17400, 20300, ...

Donc sous toute réserve (car la modélisation de l'aube en poutre est un peu grossière) on peut dire qu'il n'y a pas de risque de rupture par résonance sous l'effet de la veine de vapeur.

VI.4.2) - Dissymétrie dans la répartition des pressions à la sortie d'un étage :

Ce fait se produit surtout à la sortie du dernier étage BP en raison des trajets différents effectués par la vapeur suivant le point de sortie de la roue (Fig. 6.1).

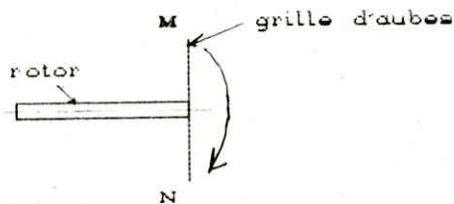


Fig. 6.1 : Trajet différents des filets de vapeur.

Au filet M correspond le plus long trajet pour aboutir au condenseur donc la plus forte perte de charge. Au filet N, la plus faible. Si la pression est constante devant l'étage nous aurons derrière la roue mobile $p_M > p_N$ d'où une variation des efforts sur les aubes à la fréquence de rotation.

Il faut éviter que la fréquence des aubes soit égale à la vitesse de rotation ou à un multiple de celle-ci jusqu'à quatre à cinq fois [5].

Les multiples de la vitesse de rotation (en s^{-1}) sont :

314, 628, 942, 1257, 1571, 1885, 2199, ...

En comparant ces valeurs avec ceux des fréquences propres on voit qu'il y a plusieurs possibilités de résonance.

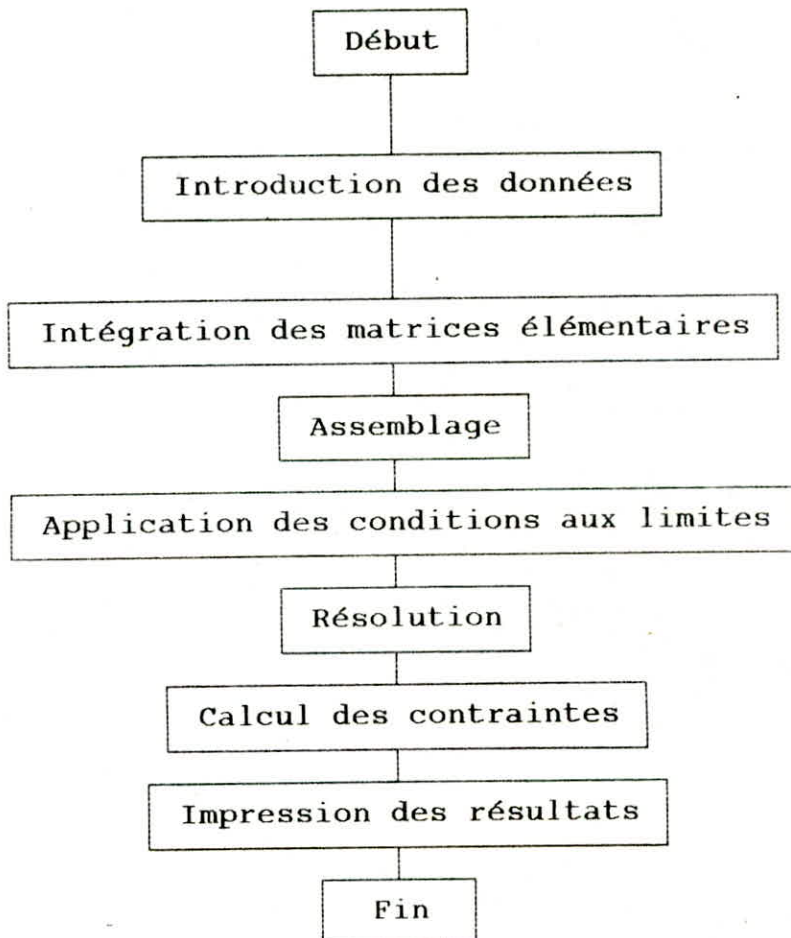
Dans le manuel d'entretien, le constructeur de la turbine indique de passer la plage de vitesse comprise entre 73 s^{-1} et 298 s^{-1} le plus rapidement possible lors du démarrage pour éviter une rupture des aubes par résonance.

SEPTIEME CHAPITRE : ORGANISATION DU PROGRAMME, TESTS ET RESULTATS .

VII.1)- INTRODUCTION :

La programmation de la méthode des éléments finis n'est pas un but en soi car, de nos jours, il existe des logiciels très performants traitants divers types d'éléments. Néanmoins, l'ingénieur doit connaître les grandes lignes de celle-ci pour qu'en cas de besoin il puisse élaborer son propre programme. C'est notamment le cas de ce projet où nous n'avons pas trouvé un programme traitant l'élément brique à 20 noeuds dans la bibliothèque de logiciels de l'E.N.P. Dans ce chapitre nous donnerons les grandes lignes du programme informatique élaboré en langage FORTRAN ainsi que les tests de confirmations des résultats. Le listing du programme se trouve en annexe.

VII.2)- ORGANIGRAMME GENERAL :



VII.3) - INTRODUCTION DES DONNEES :

Les données nécessaires au traitement d'un problème sont: le nombre d'éléments et de noeuds, les noeuds attachés à chaque élément, les coordonnées des noeuds, le module de Young et celui de Poisson, les charges et les conditions aux limites. Pour éviter les problèmes liés aux formats de lecture nous avons opté pour la solution suivante :

Une fois lancé le programme affiche un message demandant si l'utilisateur veut introduire les données ou exécuter le programme (si les données sont déjà introduites). En choisissant l'introduction des données, le programme nous affiche des messages successifs demandant toutes les données une à une. L'utilisateur n'aura alors qu'à introduire les données demandées en format "libre". Ainsi le problème de format de lecture ne se posera pas. A la fin de l'introduction des données l'utilisateur peut toujours les corriger en faisant appel au fichier de données.

La seule précision qu'il faut ajouter pour cette étape est que lors de l'introduction des noeuds attachés à chaque élément il faut respecter l'ordre de numérotation de la figure (5.1) d'une part et, s'il y a des forces volumiques en jeu, choisir convenablement l'orientation de l'élément (Voir § 7.5).

VII.4) - INTEGRATION DES MATRICES ELEMENTAIRES ET ASSEMBLAGE :

Les données communs à tout les types de problèmes sont les coordonnées des noeuds et des points d'intégration dans le repère local ainsi que les coefficients de pondération. Nous avons donc introduit d'abord ces trois groupes de données.

VII.4.1) - Points d'intégration :

Le choix du nombre de points d'intégration optimum pour un élément et un problème donné n'est pas très explicité dans les ouvrages d'éléments finis. Ainsi, pour les éléments isoparamétriques, la référence [1] suggère un nombre de points d'intégration permettant l'intégration exacte de "Det(J)", alors que la référence [2] voit que ce critère peut être insuffisant.

Néanmoins, en règle générale, plus le nombre de points d'intégration est grand plus la précision est meilleure, quitte à augmenter le temps d'exécution. Mais il y a toujours un nombre minimum de points d'intégration au dessous duquel la matrice [K] est singulière même après application des conditions aux limites, et un nombre maximum à partir duquel l'intégration de [K] est exacte.

En ce qui concerne notre programme nous avons essayé sur divers exemples cinq types d'intégrations numériques : à 4 points, à 6 points (deux types), à 14 points et à 34 points. Mis à part l'intégration à 34 points qui donne de très bons résultats (presque exactes en traction des poutres), ainsi que celle à 14 points, qui donne d'assez bons résultats, les trois autres types d'intégration ne donnent jamais de bons résultats. Ainsi nous avons opté pour une intégration à 34 points (Voir coordonnées et poids sur le listing du programme en annexe).

7.4.2) - Les sous-programmes :

Pour le calcul des fonctions d'interpolation ainsi que leurs dérivées dans le repère de référence nous avons utilisé 4 sous-programmes vu qu'il y a 4 types de fonctions d'interpolations (§ V.2). Pour ce cas on a :

En entrée :

- * Les numéros des fonctions et l'incrément.
- * Les coordonnées du point d'intégration concerné.
- * Les coordonnées des noeuds correspondants aux numéros des fonctions.

En sortie :

- * Les fonctions [N] et leurs dérivées par rapport à ξ , η et ζ .

Pour le calcul de la matrice jacobienne, de son déterminant, nous utilisons le sous-programme JACOB.

En entrée :

- * Point d'intégration.
- * Numéros des noeuds attachés à l'élément considéré.
- * Dérivées des fonctions [N] par rapport ξ , η et ζ .

En sortie :

- * Matrice jacobienne.
- * Jacobien (Det(J)).
- * Matrice jacobienne inverse.

Le calcul des dérivées par rapport à x, y, z des fonctions [N] se fait par le sous-programme DERXYZ.

En entrée :

- * Point d'intégration.
- * Matrice jacobienne inverse.
- * Dérivées des fonctions [N] par rapport à ξ, η et ζ .

En sortie :

- * Dérivées des fonctions [N] par rapport à x, y et z .

Le sous-programme CALCUB calcule la matrice [B] :

En entrée :

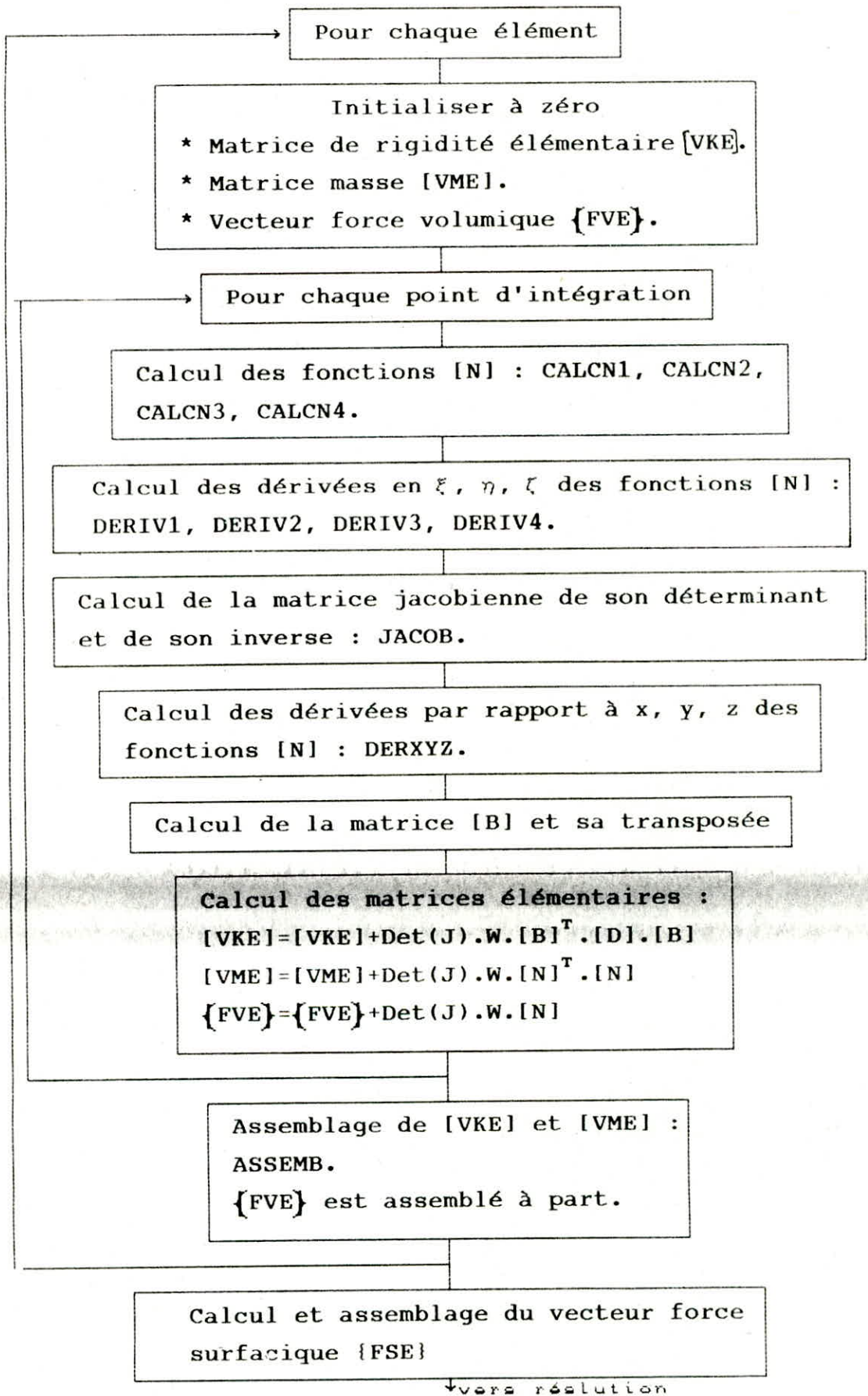
- * Point d'intégration.
- * Dérivées des fonctions [N] par rapport à x, y et z .

En sortie :

- * Matrice [B].

Après la sommation des matrices élémentaires calculées en chaque point d'intégration, le sous-programme ASSEMB fait l'assemblage des matrices [K] et [M]. La technique utilisée consiste à positionner d'une manière adéquate chaque terme de la matrice élémentaire dans la matrice globale. Ceci se fait en cherchant le bon numéro de ligne et de colonne à attribuer à chaque terme de la matrice élémentaire. L'assemblage du vecteur force volumique élémentaire se fait directement.

Le vecteur force surfacique élémentaire est calculé et assemblé après le calcul et l'assemblage de [K], [M] et $\{q_v\}$, car l'intégration utilisée (7 points d'intégration) est bidimensionnelle.



VII.5) - CALCUL DES DEPLACEMENTS ET DES CONTRAINTES :

La technique utilisée pour introduire les conditions aux limites est celle dite *du terme diagonal dominant*. Elle consiste à remplacer (pour chaque déplacement imposé $u_l = \overline{u}_l$) :

* K_{ll} par $K_{ll} + \alpha$.

* q_l par $\alpha \cdot \overline{u}_l$.

α : étant très grand par rapport aux termes de $[K]$.

Après introduction des conditions aux limites le sous-programme RESOLV résout le système $[K]\{u\} = \{q\}$ par la méthode d'élimination de Gauss.

Le calcul des contraintes peut se faire en n'importe quel point de l'élément, il suffit pour cela de spécifier les coordonnées. Les étapes de calcul seront identiques à ceux du calcul de la matrice $[K]$ jusqu'à l'étape du produit $[D].[B]$. Les contraintes seront déterminées par le produit :

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{u\} \quad (\text{Eq. 3.12}).$$

Les références [6] et [7] suggèrent de calculer les contraintes aux points d'intégration, car c'est en ces points qu'on connaît le mieux les déformations. De plus le calcul des contraintes aux noeuds induit une discontinuité qu'il est difficile d'interpréter. Pour le cas de l'élément brique à 20 noeuds avec une intégration à 34 points, il sera difficile de distinguer l'emplacement des 34 points d'intégration sur l'élément réel. Ainsi le calcul des contraintes en ces points posera un problème de vérification (par exemple : section tendue et comprimée d'une poutre en flexion). C'est pourquoi nous avons calculé les contraintes tantôt aux points d'intégration tantôt aux noeuds, suivant l'exemple traité.

VII.6) - TESTS DU PROGRAMME :

Le programme a été testé sur plusieurs exemples et a donné des résultats avec une précision qui varie suivant le type de chargement. Ainsi donc pour une traction de poutre les résultats sont presque exactes, tandis que pour une flexion l'écart par rapport à la solution analytique est plus grand.

L'exemple que nous allons traiter est celui d'une arche elliptique de pont en béton (Fig. 7.1) traité par la référence [2] en élasticité plane (élément isoparamétrique à 8 noeuds). Nous allons traiter l'exemple par des éléments briques à 20 noeuds et comparer les résultats obtenus.

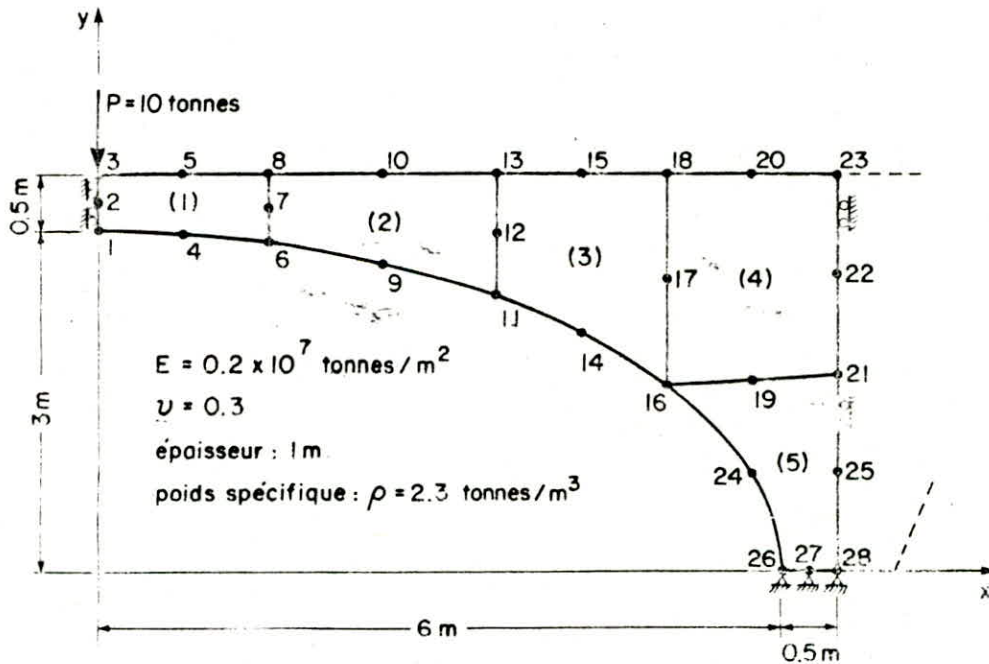


Fig. 7.1 : Arche élleptique de pont

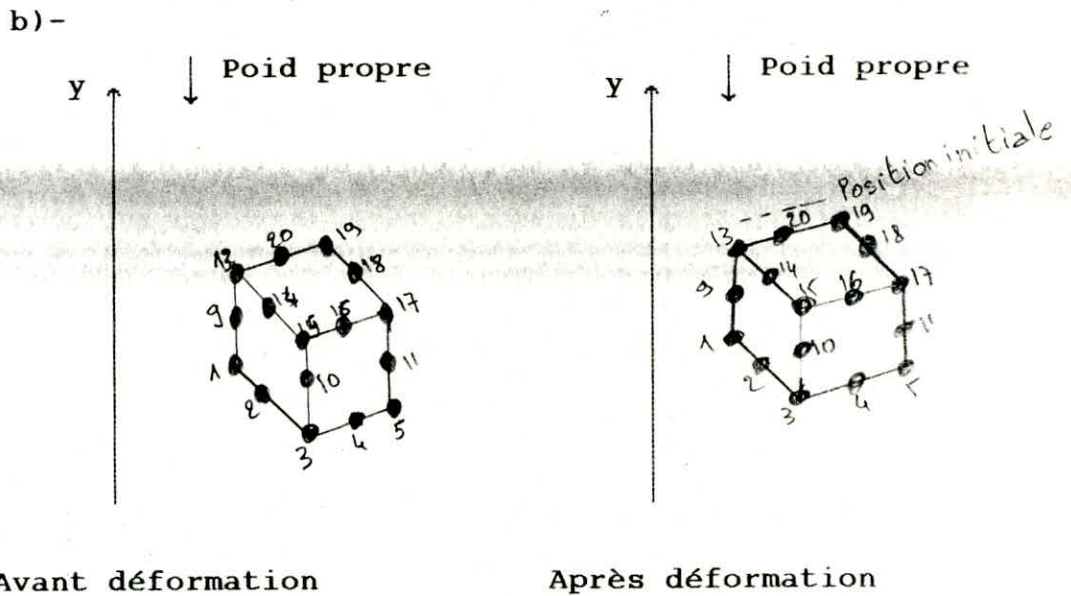
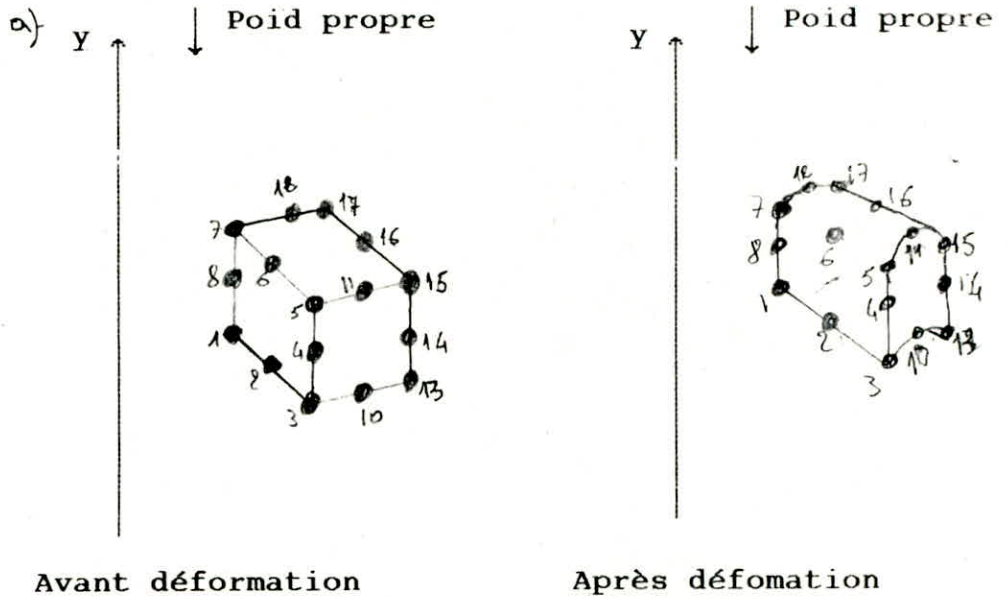
En plus de la force concentrée P , le poids propre est pris en considération.

REMARQUE IMPORTANTE :

Lorsque nous avons changé la manière de donner les numéros de noeuds attachés à chaque élément nous avons constaté que les valeurs des déplacements s'approchaient de ceux données dans la référence [2]. Ceci est du aux faits suivants :

L'expression (5.14) donnant le vecteur force volumique peut fournir des valeurs positives, négatives ou même nulles du poids aux noeuds. C'est un problème mathématique similaire à celui des masses négatives dont l'interprétation physique n'est pas évidente. Ainsi donc l'expression (5.14) nous donne des valeurs de poids nulle aux noeuds 9, 10, 11 et 12 (Fig. 5.1).

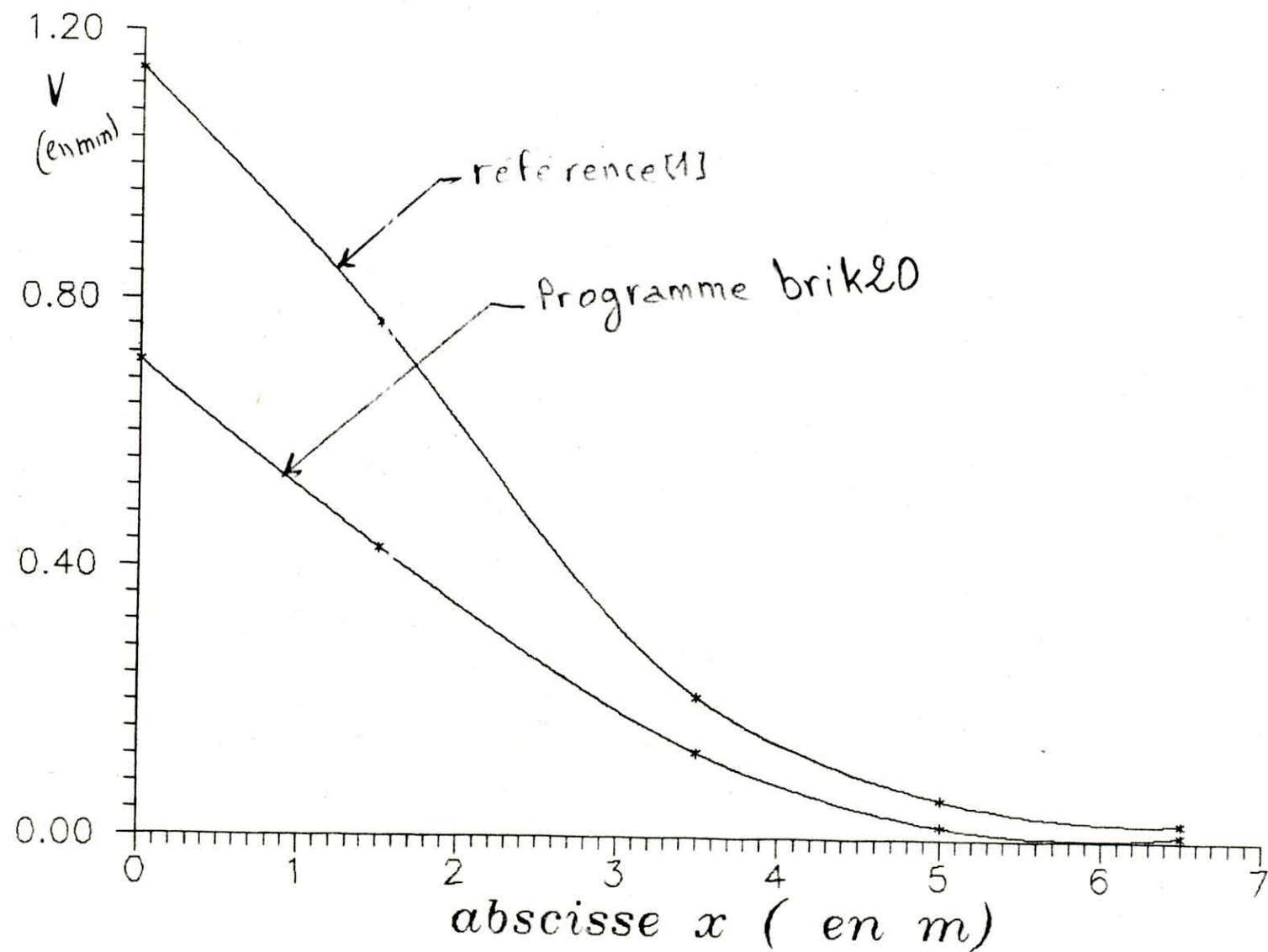
Pour le cas de cet exemple le poids réel est orienté dans le sens contraire de l'axe des "y", observons la différence entre les deux orientations suivantes d'un élément :



L'orientation b)- représente mieux la déformation de l'élément sous l'effet de son propre poids.

Règle :

Lorsqu'il s'agit de modéliser une force volumique, il faut toujours veiller à ce que le plan de l'élément brique 20 noeuds, défini par les noeuds 9, 10, 11 et 12, soit perpendiculaire à la force par unité de volume f_v .



***** Fig.7.2 : déplacement vertical --comparaison--

VII.7)- Résultats :

Voici les contraintes moyennes dans les éléments avec et sans dégénération.

CONTRAINTES DANS LES ELEMENTS SANS DEGENERATION
(en N/m²)

Element	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{xz}
1	1.91E+10	1.97E+10	1.74E+10	1.17E+10	2.86E+09	4.76E+09
2	6.84E+09	7.05E+09	1.31E+10	1.83E+09	3.50E+09	2.54E+09
3	1.83E+10	2.17E+10	2.10E+10	5.01E+09	2.23E+10	2.53E+10
4	3.65E+10	3.71E+10	3.22E+10	1.25E+10	1.25E+10	1.51E+10
5	2.47E+10	2.90E+10	2.88E+10	6.44E+09	1.32E+10	7.93E+09
6	5.37E+10	4.74E+10	5.04E+10	1.78E+10	3.94E+10	3.83E+10
7	3.78E+10	5.56E+10	5.58E+10	1.94E+10	3.47E+10	2.26E+10
8	7.41E+10	7.70E+10	6.91E+10	2.52E+10	2.55E+10	1.80E+10
9	4.07E+11	4.59E+11	4.49E+11	1.26E+11	2.30E+11	3.23E+11
10	8.75E+10	2.17E+11	1.52E+11	8.56E+10	6.96E+10	5.04E+10
11	1.32E+11	1.74E+11	1.75E+11	4.06E+10	8.26E+10	6.82E+10
12	5.37E+11	7.02E+11	7.97E+11	2.26E+11	5.50E+11	7.82E+11
13	1.89E+11	3.78E+11	2.14E+11	1.26E+11	1.25E+11	7.64E+10
14	2.74E+11	1.74E+11	2.10E+11	5.04E+10	1.17E+11	9.60E+10
15	4.81E+11	6.06E+11	4.87E+11	2.10E+11	5.05E+11	6.45E+11
16	9.58E+12	9.78E+12	1.85E+13	2.51E+11	4.18E+12	1.86E+12
17	1.20E+11	8.83E+10	7.11E+10	3.74E+10	3.32E+10	6.76E+10
18	2.61E+11	3.46E+11	2.28E+11	1.16E+11	9.68E+10	1.18E+11
19	5.19E+11	6.39E+11	3.23E+11	2.54E+11	1.77E+11	2.51E+11
20	1.07E+11	1.32E+11	6.48E+10	5.01E+10	3.96E+10	4.99E+10
21	1.88E+11	2.42E+11	2.37E+11	8.37E+10	7.84E+10	4.69E+10
22	1.37E+11	1.18E+11	7.76E+10	4.55E+10	2.05E+10	3.13E+10
23	1.38E+11	2.08E+11	1.09E+11	5.54E+10	3.66E+10	2.95E+10
24	1.34E+11	2.01E+11	1.00E+11	4.75E+10	4.29E+10	2.80E+10

CONTRAINTES DANS LES ELEMENTS AVEC DEGENERATION

(en N/m^2)

Element	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{xz}
1	3.17E+09	4.32E+09	6.02E+09	1.47E+09	2.40E+09	1.26E+09
2	2.76E+09	2.46E+09	4.41E+09	8.39E+08	1.62E+09	1.63E+09
3	4.32E+09	4.43E+09	1.16E+10	8.28E+08	1.54E+09	1.38E+09
4	4.64E+09	5.15E+09	5.33E+09	1.45E+09	2.40E+09	3.39E+09
5	3.65E+09	2.23E+09	2.75E+09	1.08E+09	1.75E+09	2.16E+09
6	2.93E+09	3.29E+09	3.78E+09	8.24E+08	2.08E+09	1.99E+09
7	3.91E+09	5.75E+09	2.87E+09	1.10E+09	1.63E+09	1.35E+09
8	1.72E+09	1.89E+09	3.22E+09	8.50E+08	1.47E+09	1.06E+09
9	5.97E+09	2.13E+09	7.01E+09	9.43E+08	1.64E+09	1.53E+09
10	6.33E+09	9.39E+09	4.54E+09	3.46E+09	2.58E+09	2.25E+09
11	2.23E+09	1.70E+09	1.53E+09	1.88E+09	2.35E+09	1.66E+09
12	1.44E+10	9.18E+09	1.09E+10	3.91E+09	3.86E+09	5.74E+09
13	1.47E+10	1.87E+10	1.00E+10	8.44E+09	3.71E+09	3.08E+09
14	1.13E+10	1.06E+10	8.33E+09	5.67E+09	2.63E+09	1.15E+09
15	1.17E+10	4.70E+09	6.37E+09	3.95E+09	4.67E+09	4.68E+09
16	1.54E+10	1.50E+10	1.07E+10	1.30E+10	7.05E+09	1.77E+09
17	6.92E+09	1.07E+10	6.42E+09	4.21E+09	1.46E+09	1.19E+09
18	1.09E+10	5.44E+09	4.27E+09	2.22E+09	3.64E+09	4.83E+09
19	2.06E+10	3.04E+10	1.76E+10	1.30E+10	3.82E+09	4.96E+09
20	4.23E+09	6.35E+09	2.42E+09	2.20E+09	2.19E+09	1.98E+09
21	6.90E+09	1.18E+10	5.80E+09	4.35E+09	3.34E+09	3.97E+09
22	7.33E+09	6.30E+09	4.26E+09	3.02E+09	1.73E+09	2.77E+09
23	2.15E+10	3.04E+10	1.65E+10	9.46E+09	9.95E+09	1.15E+10
24	9.71E+09	1.62E+10	1.23E+10	5.02E+09	4.55E+09	4.32E+09

VIIID) - CONCLUSION :

Loin d'être un travail complet cette étude m'a comme même permis d'approfondir mes connaissances dans le domaine de la méthode des éléments finis. Notamment le calcul des matrices élémentaires et la modélisation des charges.

Les résultats obtenus imposent que le matériau choisi pour la fabrication de l'aube doit avoir une limite d'élasticité supérieur à 10^{12} N/m². La même démarche pourrait être utilisée pour n'importe quelle aube de machine axiale.

Le programme élaboré (brik20) peut être utile dans le calcul des déplacements et contraintes de n'importe quel corps de forme curviligne.

Avec une étude complémentaire approfondie concernant le choix d'un profil d'aube on peut espérer un jour fabriquer une aube à 100 % algérienne.

ANNEXE

```
*****
*
*                               PROGRAMME BRICK20
*
*
*
*                               CALCUL DE L'ELEMENT BRIQUE A 20 NOEUDS
*
*
*
*                               ELABORE PAR K. ABDESSEMED
*
*                               PROMOTION : JUIN 1991
*
*****
```

```
*****
*                               PHASE DE LECTURE
*                               *****
*****
```

```
c      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*16 C5,CC,CM,CO
      DIMENSION XN(226),YN(226),ZN(226),INDL(226,3),DNX(34,20)
      DIMENSION DNY(34,20),DNZ(34,20),B(6,60),VJ(9)
      DIMENSION VJ1(9),NOND(24,20),NEL(24),VKE(60,60),FVE(20)
      DIMENSION VKG(678,678),FS(678),KLOCE(678),BT(60,6)
      DIMENSION VN(34,20),DNXSI(34,20),DNETA(34,20),DNZETA(34,20)
      DIMENSION XSII(34),ETAI(34),DZETAI(34),XSI(20),ETA(20),
      1DZETA(20),D(6,6),DB(6,60),W(34),SIGX(34),SIGY(34),SIGZ(34),
      1TOXY(34),TOYZ(34),TOXZ(34),VME(60,60),VMG(678,678),
      1VNG(3,60),VNGT(60,3),VALP(20),VECP(678,20),VYO(678),VMY(678),
      1EPSX(34),EPSY(34),EPSZ(34),GAXY(34),GAYZ(34),GAXZ(34),
      1VX(678),VKG1(678,678),FSE(20)
      OPEN(UNIT=1,FILE='DAUBE1.DAT',STATUS='OLD')
      OPEN(UNIT=2,FILE='RAUBE1.RES',STATUS='NEW')
      PRINT*,'1-ENTREE DES DONNEES'
      PRINT*,'2-EXECUTION DU PROGRAMME'
      PRINT*,'CHOISISSEZ UN CHIFFRE'
      READ(*,*) L
      IF(L.EQ.1) GOTO 18
      IF(L.EQ.2) GOTO 20
      PRINT*,'IL FAUT CHOISIR 1 OU 2'
      STOP 'ADIEU'
18  PRINT*,'DONNER LE NOMBRE DE NOEUDS ET D ELEMENTS'
      READ(*,*)NNOD,NELE
```

```

WRITE(1,9) NNOD,NELE
PRINT*, 'DONNER LES NUMEROS DES NOEUDS QUI CONSTITUENT
1CHAQUE ELEMENT (ATTENTION A L ORDRE)'
DO 1234 I=1,NELE
PRINT*, 'ELEMENT NUMERO :', I
READ(*,*) (NOND(I,J),J=1,20)
WRITE(1,19) (I,(NOND(I,J),J=1,20))
1234 CONTINUE
PRINT*, 'DONNER LES COORDONNEES (X,Y,Z) DE CHAQUE
2NOEUD'
DO 4321 I=1,NNOD
PRINT*, 'NOEUD NUMERO :', I
READ(*,*)(XN(I),YN(I),ZN(I))
WRITE(1,229)(I,XN(I),YN(I),ZN(I))
4321 CONTINUE
PRINT*, 'DONNER LE MODULE DE YOUNG ET CELUI DE POISSON'
READ(*,*)E,RU
WRITE(1,399)E,RU
PRINT*, 'DONNER LA CHARGE SUIVANT X,Y ET Z DE CHAQUE NOEUD'
DO 1111 I9=1,3*NNOD-2,3
J21=I9/3+1
PRINT*, 'NOEUD NUMERO :', J21
READ(*,*)FS(I9),FS(I9+1),FS(I9+2)
WRITE(1,49)J21,FS(I9),FS(I9+1),FS(I9+2)
1111 CONTINUE
PRINT*, 'POUR CHAQUE NOEUD ET,SUIVANT LES 3 DDL (X,Y,Z),TAPER
3 1 SI LE DEPLACEMENT EST POSSIBLE ET 0 SINON'
DO 1112 I4=1,NNOD
PRINT*, 'NOEUD NUMERO :', I4
READ(*,*)INDL(I4,1),INDL(I4,2),INDL(I4,3)
WRITE(1,59)I4,INDL(I4,1),INDL(I4,2),INDL(I4,3)
1112 CONTINUE
STOP 'MERCI'
20 READ(1,9)NNOD,NELE
DO 4949 I8=1,NELE
4949 READ(1,19)(NEL(I8),(NOND(I8,J),J=1,20))
DO 4499 I7=1,NNOD
4499 READ(1,229)(I111,XN(I7),YN(I7),ZN(I7))
READ(1,399)E,RU

```

```
DO 1113 I3=1,3*NNOD-2,3
```

```
J=I3/3+1
```

```
READ(1,49)J111,FS(I3),FS(I3+1),FS(I3+2)
```

```
1113 CONTINUE
```

```
DO 1114 I5=1,NNOD
```

```
READ(1,59)I121,INDL(I5,1),INDL(I5,2),INDL(I5,3)
```

```
1114 CONTINUE
```

```
*****
```

```
***** POINTS D 'INTEGRATION *****
```

```
*****
```

```
***** 14 POINTS*****
```

```
c      KL=14
c      A1=19
c      A2=30
c      C1=19
c      C2=33
c      W1=320
c      W2=361
c      W3=121
c      W4=361
c      A=SQRT(A1/A2)
c      C=SQRT(C1/C2)
c      DO 810 IA1=1,4
c810   DZETAI(IA1)=0.
c      DO 811 IA2=3,6
c811   XSII(IA2)=0.
c      XSII(1)=A
c      XSII(2)=-A
c      ETAI(1)=0.
c      ETAI(2)=0.
c      ETAI(3)=A
c      ETAI(4)=-A
c      ETAI(5)=0.
c      ETAI(6)=0.
c      DZETAI(5)=A
c      DZETAI(6)=-A
c      DO 812 IA3=7,10
```

c812 XSII(IA3)=C
 DO 813 IA4=11,14
c813 XSII(IA4)=-C
c DO 814 IA5=9,12
c814 ETAI(IA5)=-C
c ETAI(7)=C
c ETAI(8)=C
c ETAI(13)=C
c ETAI(14)=C
c DZETA I(7)=C
c DZETA I(8)=-C
c DZETA I(9)=C
c DZETA I(10)=-C
c DZETA I(11)=-C
c DZETA I(12)=C
c DZETA I(13)=C
c DZETA I(14)=-C
c DO 815 IA6=1,6
c815 W(IA6)=W1/W2
c DO 816 IA6=7,14
c816 W(IA6)=W3/W4

*****34 POINTS*****

A=0.925820099772552
 B1=0.330814963699288
 C=0.734112528752115
 DO 16 II=1,6
16 W(II)=0.295747599451303
 DO 17 II=7,18
17 W(II)=0.094101508916324
 DO 26 II=19,26
26 W(II)=0.412333862271436
 DO 36 II=27,34
36 W(II)=0.224703174765601
 XSII(1)=A
 ETAI(1)=0.
 DZETA I(1)=0.
 XSII(2)=-A
 ETAI(2)=0.
 DZETA I(2)=0.

XSII(3)=0.

ETAI(3)=A

DZETAI(3)=0.

XSII(4)=0.

ETAI(4)=-A

DZETAI(4)=0.

XSII(5)=0.

ETAI(5)=0.

DZETAI(5)=A

XSII(6)=0.

ETAI(6)=0.

DZETAI(6)=-A

XSII(7)=A

ETAI(7)=A

DZETAI(7)=0.

XSII(8)=A

ETAI(8)=-A

DZETAI(8)=0.

XSII(9)=-A

ETAI(9)=A

DZETAI(9)=0.

XSII(10)=-A

ETAI(10)=-A

DZETAI(10)=0.

XSII(11)=0.

ETAI(11)=A

DZETAI(11)=A

XSII(12)=0.

ETAI(12)=A

DZETAI(12)=-A

XSII(13)=0.

ETAI(13)=-A

DZETAI(13)=A

XSII(14)=0.

ETAI(14)=-A

DZETAI(14)=-A

XSII(15)=A

ETAI(15)=0.

DZETAI(15)=A

XSII(16)=A
ETAI(16)=0.
DZETAI(16)=-A
XSII(17)=-A
ETAI(17)=0.
DZETAI(17)=A
XSII(18)=-A
ETAI(18)=0.
DZETAI(18)=-A
XSII(19)=B1
ETAI(19)=B1
DZETAI(19)=B1
XSII(20)=B1
ETAI(20)=B1
DZETAI(20)=-B1
XSII(21)=B1
ETAI(21)=-B1
DZETAI(21)=-B1
XSII(22)=-B1
ETAI(22)=-B1
DZETAI(22)=-B1
XSII(23)=-B1
ETAI(23)=-B1
DZETAI(23)=B1
XSII(24)=-B1
ETAI(24)=B1
DZETAI(24)=B1
XSII(25)=B1
ETAI(25)=-B1
DZETAI(25)=B1
XSII(26)=-B1
ETAI(26)=B1
DZETAI(26)=-B1
XSII(27)=C
ETAI(27)=C
DZETAI(27)=C
XSII(28)=C
ETAI(28)=C
DZETAI(28)=-C

XSII(29)=C
ETAI(29)=-C
DZETAI(29)=-C
XSII(30)=-C
ETAI(30)=-C
DZETAI(30)=-C
XSII(31)=-C
ETAI(31)=-C
DZETAI(31)=C
XSII(32)=-C
ETAI(32)=C
DZETAI(32)=C
XSII(33)=C
ETAI(33)=-C
DZETAI(33)=C
XSII(34)=-C
ETAI(34)=C
DZETAI(34)=-C

*****COORDONNEES DES NOEUDS - ELEMENT DE REFERENCE-*****

DO 5 II=1,8
5 DZETA(II)=-1
DO 15 II=9,12
15 DZETA(II)=0.
DO 25 II=13,20
25 DZETA(II)=1
XSI(1)=-1
ETA(1)=-1
XSI(2)=0.
ETA(2)=-1
XSI(3)=1
ETA(3)=-1
XSI(4)=1
ETA(4)=0.
XSI(5)=1
ETA(5)=1

XSI(6)=0.
ETA(6)=1
XSI(7)=-1
ETA(7)=1
XSI(8)=-1
ETA(8)=0.
XSI(9)=-1
ETA(9)=-1
XSI(10)=1
ETA(10)=-1
XSI(11)=1
ETA(11)=1
XSI(12)=-1
ETA(12)=1
XSI(13)=-1
ETA(13)=-1
XSI(14)=0.
ETA(14)=-1
XSI(15)=1
ETA(15)=-1
XSI(16)=1
ETA(16)=0.
XSI(17)=1
ETA(17)=1
XSI(18)=0.
ETA(18)=1
XSI(19)=-1
ETA(19)=1
XSI(20)=-1
ETA(20)=0.

*****MATRICE SOUPLESSE D*****

CALL PRESENT

DO 101 II=1,6

DO 101 JJ=1,6

101 D(II, JJ)=0.

D(1,1)=E*(1-RU)/(1+RU)/(1-2*RU)

```

D(1,2)=E*RU/(1+RU)/(1-2*RU)
D(1,3)=D(1,2)
D(2,2)=D(1,1)
D(2,3)=D(1,3)
D(3,3)=D(1,1)
D(4,4)=E/(2*(1+RU))
D(5,5)=D(4,4)
D(6,6)=D(5,5)
DO 102 II=1,6
DO 102 JJ=II,6
102 D(JJ,II)=D(II,JJ)
DO 800 I1=1,NNOD*3
DO 800 J1=1,NNOD*3
VKG(I1,J1)=0.
800 VMG(I1,J1)=0.

PRINT*, 'DONNER LA MASSE VOLUMIQUE'
READ*, RO

```

*****BOUCLE SUR TOUT LES ELEMENTS*****

```

DO 1000 KK=1,NELE
DO 81 II=1,60
DO 81 JJ=1,60
VKE(II,JJ)=0.
81 VME(II,JJ)=0.
DO 1967 I1=1,20
1967 FVE(I1)=0.

```

*****BOUCLE SUR TOUT LES POINTS D'INTEGRATION*****

```
DO 100 I=1,34
```

*****CALCUL DES FONCTIONS N*****

```

CALL CALCN1(1,7,2,I,XSII,XSI,ETAI,ETA,DZETAI,DZETA,VN)
CALL CALCN1(13,19,2,I,XSII,XSI,ETAI,ETA,DZETAI,DZETA,VN)
CALL CALCN2(2,6,4,I,XSII,ETAI,ETA,DZETAI,DZETA,VN)
CALL CALCN2(14,18,4,I,XSII,ETAI,ETA,DZETAI,DZETA,VN)
CALL CALCN3(4,8,4,I,XSII,XSI,ETAI,DZETAI,DZETA,VN)

```

CALL CALCN3(16,20,4,I,XSII,XSI,ETAI,DZETAI,DZETA,VN)

CALL CALCN4(9,12,1,I,XSII,XSI,ETAI,ETA,DZETAI,VN)

DO 9011 J=1,58,3

L=J/3+1

VNG(1,J)=VN(I,L)

VNG(1,J+1)=0.

VNG(1,J+2)=0.

VNG(2,J)=0.

VNG(2,J+1)=VN(I,L)

VNG(2,J+2)=0.

VNG(3,J)=0.

VNG(3,J+1)=0.

9011 VNG(3,J+2)=VN(I,L)

DO 9012 II=1,60

DO 9012 JJ=1,3

9012 VNGT(II,JJ)=VNG(JJ,II)

***** DERIVEES DES FONCTIONS N *****

CALL DERIV1(1,7,2,I,XSII,XSI,ETAI,ETA,DZETAI,DZETA,
1 DNXSI,DNETA,DNZETA)

CALL DERIV1(13,19,2,I,XSII,XSI,ETAI,ETA,DZETAI,DZETA,
1 DNXSI,DNETA,DNZETA)

CALL DERIV2(2,6,4,I,XSII,ETAI,ETA,DZETAI,DZETA,
2 DNXSI,DNETA,DNZETA)

CALL DERIV2(14,18,4,I,XSII,ETAI,ETA,DZETAI,DZETA,
2 DNXSI,DNETA,DNZETA)

CALL DERIV3(4,8,4,I,XSII,XSI,ETAI,DZETAI,DZETA,
3 DNXSI,DNETA,DNZETA)

CALL DERIV3(16,20,4,I,XSII,XSI,ETAI,DZETAI,DZETA,
3 DNXSI,DNETA,DNZETA)

CALL DERIV4(9,12,1,I,XSII,XSI,ETAI,ETA,DZETAI,
4 DNXSI,DNETA,DNZETA)

*****CALCUL DU JACOBIEN*****

CALL JACOB(I, KK, NOND, DNXSI, DNETA, DNZETA,

```

1XN,YN,ZN,VJ,DETJ,VJ1)
DO 9013 II=1,60
DO 9013 JJ=1,II
DO 9013 K=1,3
VME(II,JJ)=VME(II,JJ)+RO*VNKT(II,K)*VNG(K,JJ)*DETJ*W(I)
9013 VME(JJ,II)=VME(II,JJ)
C7001 CONTINUE
C WRITE(2,*)'VOICI LA MATRICE MASSE GLOBALE'
C WRITE(2,*)((VMG(I,J),J=1,3*NNOD),I=1,3*NNOD)

```

*****CALCUL DES FORCES VOLUMIQUES*****

```

DO 1968 I2=1,20
ZPG=0.
DO 13579 L=1,20
NO=NOND(KK,L)
13579 ZPG=ZPG+VN(I,L)*ZN(NO)
PG=7.6983E+08*(ZPG+0.728)
1968 FVE(I2)=FVE(I2)+PG*DETJ*W(I)*VN(I,I2)
C1968 PRINT*, 'FVE(' ,I2, ')=' ,FVE(I2)

```

*****CALCUL DES DERIVEES EN X Y Z DE N*****

```
CALL DERXYZ(I,VJ1, DNXTI, DNETA, DNZETA, DNX, DNY, DNZ)
```

*****CALCUL DE LA MATRICE B*****

```
CALL CALCUB(I, DNX, DNY, DNZ, B)
```

*****CALCUL DU PRODUIT D. B*****

```

DO 145 II=1,60
DO 145 JJ=1,60
145 DB(II,JJ)=0.
DO 150 II=1,60
DO 150 JJ=1,60
DO 150 K=1,60
150 DB(II,JJ)=DB(II,JJ)+D(II,K)*B(K,JJ)

```

c-----TRANSPOSEE DE B-----a

DO 146 II=1,60

DO 146 JJ=1,6

146 BT(II,JJ)=B(JJ,II)

C-----MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE-----

DO 160 K=1,60

DO 160 L=1,K

DO 160 M=1,6

VKE(K,L)=VKE(K,L)+DETJ*W(I)*BT(K,M)*DB(M,L)

160 VKE(L,K)=VKE(K,L)

100 CONTINUE

*****ASSEMBLAGE*****

CALL ASSEMB(KK,NOND,VME,VMG)

CALL ASSEMB(KK,NOND,VKE,VKG)

DO 1969 I3=1,20

J3=3*NOND(KK,I3)

1969 FS(J3)=FS(J3)+FVE(I3)

C1969 PRINT*, 'FS(' ,J3, ')', '=', FS(J3)

1000 CONTINUE

*****CALCUL DES FORCES SURFACIQUES*****

R1=8.

R2=100.

R3=168.

R4=20.

R5=48.

GG=7.

```

HH=15.
OO=24.
XX=SQRT(GG/HH)
YY=SQRT((GG+SQRT(OO))/HH)
ZZ=SQRT((GG-SQRT(OO))/HH)
UU=R1/GG
VV=R2/R3
WW=R4/R5
XSII(1)=0.
XSII(2)=-XX
XSII(3)=XX
XSII(4)=YY
XSII(5)=-YY
XSII(6)=ZZ
XSII(7)=-ZZ
DZETAI(1)=0.
DZETAI(2)=-XX
DZETAI(3)=XX
DZETAI(4)=-ZZ
DZETAI(5)=ZZ
DZETAI(6)=-YY
DZETAI(7)=YY
W(1)=UU
W(2)=VV
W(3)=VV
DO 29401 M1=4,7,1
29401 W(M1)=WW
DO 20000 IE=1,NELE
DO 20001 IA=1,20
20001 FSE(IA)=0.
DO 20002 I=1,7
CALL CALCN1(1,7,2,I,XSII,XSI,ETAI,ETA,DZETAI,DZETA,VN)
CALL CALCN1(13,19,2,I,XSII,XSI,ETAI,ETA,DZETAI,DZETA,VN)
CALL CALCN2(2,6,4,I,XSII,ETAI,ETA,DZETAI,DZETA,VN)
CALL CALCN2(14,18,4,I,XSII,ETAI,ETA,DZETAI,DZETA,VN)
CALL CALCN3(4,8,4,I,XSII,XSI,ETAI,DZETAI,DZETA,VN)
CALL CALCN3(16,20,4,I,XSII,XSI,ETAI,DZETAI,DZETA,VN)
CALL CALCN4(9,12,1,I,XSII,XSI,ETAI,ETA,DZETAI,VN)
XPG=0.

```

```

ZPG=0.
DO 35791 L=1,20
NON=NOND(IE,L)
XPG=XPG+VN(I,L)*XN(NON)
35791 ZPG=ZPG+VN(I,L)*ZN(NON)
IF(XPG.LE.0.0967) THEN
FSS=4E+04+3.0303E+04*ZPG
GOTO 967
ENDIF
FSS=12E+04*((0.145-XPG)/0.145)*(4E+04+3.0303E+04*ZPG)
967 DO 20003 JN=1,20
20003 ETAI(JN)=-1.
CALL DERIV1(1,7,2,I,XSII,XSI,ETAI,ETA,DZETAI,DZETA,
1 DNXSI,DNETA,DNZETA)
CALL DERIV1(13,19,2,I,XSII,XSI,ETAI,ETA,DZETAI,DZETA,
1 DNXSI,DNETA,DNZETA)
CALL DERIV2(2,6,4,I,XSII,ETAI,ETA,DZETAI,DZETA,
2 DNXSI,DNETA,DNZETA)
CALL DERIV2(14,18,4,I,XSII,ETAI,ETA,DZETAI,DZETA,
2 DNXSI,DNETA,DNZETA)
CALL DERIV3(4,8,4,I,XSII,XSI,ETAI,DZETAI,DZETA,
3 DNXSI,DNETA,DNZETA)
CALL DERIV3(16,20,4,I,XSII,XSI,ETAI,DZETAI,DZETA,
3 DNXSI,DNETA,DNZETA)
CALL DERIV4(9,12,1,I,XSII,XSI,ETAI,ETA,DZETAI,
4 DNXSI,DNETA,DNZETA)
CALL JACOB(I,IE,NOND,DNXSI,DNETA,DNZETA,
IXN,YN,ZN,VJ,DETJ,VJ1)
DJS=SQRT((VJ(2)*VJ(9)-VJ(3)*VJ(8))**2+(VJ(3)*VJ(7)-VJ(1)
1 *VJ(9))**2+(VJ(1)*VJ(8)-VJ(2)*VJ(7))**2)
DO 20004 NN=1,20
20004 FSE(NN)=FSE(NN)+DJS*W(I)*FSS*VN(I,NN)
20002 CONTINUE
DO 19969 I23=1,20
J23=3*NOND(IE,I23)-1
PRINT*,I23,J23
19969 FS(J23)=FS(J23)+FSE(I23)
20000 CONTINUE

```

```

Q=0.
DO 1977 I3=1,3*NNOD
DO 1977 J3=1,3*NNOD
1977 Q=Q+VMG(I3,J3)
WRITE(2,*)'VOICI LA MASSE TOTALE',Q
C WRITE(2,*)'VOICI LA MATRICE DE RIGIDITE GLOBALE'
C WRITE(2,*)((VKG(I,J),J=1,3*NNOD),I=1,3*NNOD)

```

```

*****
*****CONDITIONS AUX LIMITES*****
*****

```

```

DO 90033 KB=1,3*NNOD
DO 90033 KC=1,3*NNOD
90033 VKG1(KB,KC)=VKG(KB,KC)
DO 111 I=1,NNOD
DO 111 J=1,3
KS=INDL(I,J)
IF(KS.NE.0) GOTO 111
GOTO(304,404,504)J
304 M=3*I-2
FS(M)=0.
VKG1(M,M)=VKG1(M,M)+1E20
GOTO 111
404 M=3*I-1
FS(M)=0.
VKG1(M,M)=VKG1(M,M)+1E20
GOTO 111
504 M=3*I
FS(M)=0.
VKG1(M,M)=VKG1(M,M)+1E20
111 CONTINUE

```

```

*****
*****RESOLUTION DU SYSTEME*****
*****

```



```

CALL RESOLV(NNOD,VKG1,FS)
WRITE(2,99)
99  FORMAT(20X,'VOICI LES DEPLACEMENTS AUX NOEUDS')
DO 1117 IA=1,3*NNOD-2,3
J=IA/3+1
WRITE(2,109)J,FS(IA),FS(IA+1),FS(IA+2)
109  FORMAT (5X,I3,5X,3(E10.4,3X))
1117  CONTINUE

```

```

*****
*****CALCUL DES CONTRAINTES*****

```

```

*****
CALL PRESENT
PRINT*, 'CALCUL DES CONTRAINTES'
DO 4000 KK=1,NELE
WRITE(2,3333)KK
3333  FORMAT(2X,'VOICI LES CONTRAINTES AUX POINTS D'INTEGRATION
1  DANS L ELEMENT',I2)
DO 4001 I=1,34
CALL DERIV1(1,7,2,I,XSII,XSI,ETAI,ETA,DZETAI,DZETA,
1  DNXSI,DNETA,DNZETA)
CALL DERIV1(13,19,2,I,XSII,XSI,ETAI,ETA,DZETAI,DZETA,
1  DNXSI,DNETA,DNZETA)
CALL DERIV2(2,6,4,I,XSII,ETAI,ETA,DZETAI,DZETA,
2  DNXSI,DNETA,DNZETA)
CALL DERIV2(14,18,4,I,XSII,ETAI,ETA,DZETAI,DZETA,
2  DNXSI,DNETA,DNZETA)
CALL DERIV3(4,8,4,I,XSII,XSI,ETAI,DZETAI,DZETA,
3  DNXSI,DNETA,DNZETA)
CALL DERIV3(16,20,4,I,XSII,XSI,ETAI,DZETAI,DZETA,
3  DNXSI,DNETA,DNZETA)
CALL DERIV4(9,12,1,I,XSII,XSI,ETAI,ETA,DZETAI,

```

```

*****CALCUL DES CONTRAINTES AUX NOEUDS*****
C      CALL DERIV1(1,7,2,I,XSI,XSI,ETA,ETA,DZETA,DZETA,
C      1  DNXSI,DNETA,DNZETA)
C      CALL DERIV1(13,19,2,I,XSI,XSI,ETA,ETA,DZETA,DZETA,
C      1  DNXSI,DNETA,DNZETA)
C      CALL DERIV2(2,6,4,I,XSI,ETA,ETA,DZETA,DZETA,
C      2  DNXSI,DNETA,DNZETA)

```

```

C    CALL DERIV2(14,18,4,I,XSI,ETA,ETA,DZETA,DZETA,
C    2 DNXSI,DNETA,DNZETA)
C    CALL DERIV3(4,8,4,I,XSI,XSI,ETA,DZETA,DZETA,
C    3 DNXSI,DNETA,DNZETA)
C    CALL DERIV3(16,20,4,I,XSI,XSI,ETA,DZETA,DZETA,
C    3 DNXSI,DNETA,DNZETA)
C    CALL DERIV4(9,12,1,I,XSI,XSI,ETA,ETA,DZETA,
C    4 DNXSI,DNETA,DNZETA)
C    CALL JACOB(I, KK, NOND, DNXSI, DNETA, DNZETA,
1XN, YN, ZN, VJ, DETJ, VJ1)

```

```

CALL DERXYZ(I, VJ1, DNXSI, DNETA, DNZETA, DNX, DNY, DNZ)

```

```

C-----CALCUL DE LA MATRICE B-----a

```

```

CALL CALCUB(I, DNX, DNY, DNZ, B)

```

```

EPSX(I)=0.

```

```

EPSY(I)=0.

```

```

EPSZ(I)=0.

```

```

GAXY(I)=0.

```

```

GAYZ(I)=0.

```

```

GAXZ(I)=0.

```

```

DO 1051 IK=1,58,3

```

```

J1=IK/3+1

```

```

M1=3*NOND(KK,J1)-2

```

```

*****DEFORMATIONS*****

```

```

EPSX(I)=EPSX(I)+B(1,IK)*FS(M1)+B(1,IK+1)*FS(M1+1)+
1B(1,IK+2)*FS(M1+2)

```

```

EPSY(I)=EPSY(I)+B(2,IK)*FS(M1)+B(2,IK+1)*FS(M1+1)+
1B(2,IK+2)*FS(M1+2)

```

```

EPSZ(I)=EPSZ(I)+B(3,IK)*FS(M1)+B(3,IK+1)*FS(M1+1)+
1B(3,IK+2)*FS(M1+2)

```

```

GAXY(I)=GAXY(I)+B(4,IK)*FS(M1)+B(4,IK+1)*FS(M1+1)+
1B(4,IK+2)*FS(M1+2)

```

```

GAYZ(I)=GAYZ(I)+B(5,IK)*FS(M1)+B(5,IK+1)*FS(M1+1)+
1B(5,IK+2)*FS(M1+2)

```

 *****ATTENTION cette partie ne donne pas de résultats fiables*****
 *****CALCUL DYNAMIQUE*****

4000 CONTINUE

WRITE(2,*)GX,GY,GZ,TXX,TXY,TXZ
 4343 CONTINUE

TXZ=(TXZ+ABS(TOXZ(J)))/34
 TYZ=(TYZ+ABS(TOYZ(J)))/34
 TXY=(TXY+ABS(TOXY(J)))/34
 GZ=(GZ+ABS(SIGZ(J)))/34
 GY=(GY+ABS(SIGY(J)))/34
 GX=(GX+ABS(SIGX(J)))/34

DO 4343 J=1,34

TXZ=0.
 TYZ=0.
 TXY=0.
 GZ=0.
 GY=0.
 GX=0.

WRITE(2,*)'VOICI LES CONTRAINTE MOYENNES'

4001 CONTINUE

889 FORMAT(2X,I3,3X,6(E8.2,3X))

I , TOXY(I) , TOYZ(I) , TOXZ(I)

WRITE(2,889)I,SIGX(I),SIGY(I),SIGZ(I)

TOXZ(I)=D(6,6)*GAXZ(I)

TOYZ(I)=D(5,5)*GAYZ(I)

TOXY(I)=D(4,4)*GAXY(I)

SIGZ(I)=D(3,1)*EPSX(I)+D(3,2)*EPSY(I)+D(3,3)*EPSZ(I)

SIGY(I)=D(2,1)*EPSX(I)+D(2,2)*EPSY(I)+D(2,3)*EPSZ(I)

SIGX(I)=D(1,1)*EPSX(I)+D(1,2)*EPSY(I)+D(1,3)*EPSZ(I)

 *****CONTRAINTE*****

1051 CONTINUE

IB(6,IK+2)*FS(MI+2)

GAXZ(I)=GAXZ(I)+B(6,IK)*FS(MI)+B(6,IK+1)*FS(MI+1)+

```

C     PRINT*, 'DONNER LE NOMBRE DE VALEURS PROPRES DESIRE'
C     READ*, NVALP
      NVALP=3
      EMAX=1.D-07
      GR=1.D+12
      DO 33333 I1=1, NNOD
      DO 33333 J1=1, 3
      KS=INDL(I1, J1)
      IF(KS.NE.0)GOTO 33333
      GOTO(3044, 4044, 5044)J1
3044  M=3*I1-2
      DO 12121 K11=1, 3*NNOD
      VKG(M, K11)=0.
      VMG(M, K11)=0.
      VKG(K11, M)=0.
12121 VMG(K11, M)=0.
      VKG(M, M)=GR
      GOTO 33333
4044  M=3*I1-1
      DO 21212 K21=1, 3*NNOD
      VKG(M, K21)=0.
      VMG(M, K21)=0.
      VKG(K21, M)=0.
21212 VMG(K21, M)=0.
      VKG(M, M)=GR
      GOTO 33333
5044  M=3*I1
      DO 21211 K31=1, 3*NNOD
      VKG(M, K31)=0.
      VMG(M, K31)=0.
      VKG(K31, M)=0.
21211 VMG(K31, M)=0.
      VKG(M, M)=GR
33333 CONTINUE
C     DO 66666 IU=1, 3*NNOD
C     DO 66666 JU=1, 3*NNOD
C66666 VKG(IU, JU)=VKG(IU, JU)-1000*VMG(IU, JU)
      ERRMIN=1.D-02
      CLAMDO=0.

```

```

DO 40001 IS=1,NVALP
VALP(IS)=0.
DO 40001 JS=1,3*NNOD
40001 VECP(JS,IS)=0.
CMG=0.
DO 40002 IX=1,3*NNOD
C5=VMG(IX,IX)
40002 IF(C5.GT.CMG)CMG=C5
DO 40003 IVALP=1,NVALP
DO 40004 I=1,3*NNOD
VYO(I)=FLOAT(I)
40004 IF(VMG(I,I).GT.0)VYO(I)=VKG(I,I)/VMG(I,I)
DO 40005 KA1=1,3*NNOD
40005 VMY(KA1)=0.
DO 40006 II=1,3*NNOD
DO 40006 JJ=1,3*NNOD
40006 VMY(II)=VMY(II)+VMG(II,JJ)*VYO(JJ)
*****PROBLEME D'OVERFLOW*****
C C5=0.
C DO 40007 MK1=1,3*NNOD
C IF(VMY(MK1).GT.1E+15.AND.VYO(MK1).GT.1E+15)THEN
C C5=1E+30
C GOTO 40107
C ENDIF
C C5=C5+VMY(MK1)*VYO(MK1)
C40007 CONTINUE
C40107 C5=SQRT(C5)
C DO 40008 I=1,3*NNOD
C VYO(I)=VYO(I)/C5
C40008 VMY(I)=VMY(I)/C5
C5=1.
DO 40009 ITER=1,20
IF(IVALP.GT.1)THEN
CALL GRAM(NNOD,IVALP-1,VECP,VYO,VMY)
DO 40010 LK1=1,3*NNOD
40010 VMY(LK1)=0.
DO 40011 II=1,3*NNOD
DO 40011 JJ=1,3*NNOD
40011 VMY(II)=VMY(II)+VMG(II,JJ)*VYO(JJ)

```

```

CM=0.
DO 40012 JK1=1,3*NNOD
40012 CM=CM+VYO(JK1)*VMY(JK1)
CC=0.
DO 40101 KY=1,3*NNOD
40101 CC=CC+VYO(KY)**2
C5=SQRT(CM/(CC*CMG))
IF(C5.LE.ERRMIN)THEN
CLAMDA=GR
WRITE(2,50001)IVALP,ITER,CLAMDA
50001 FORMAT(1X,9(' '),
1'ERREUR ESPACE VECTEUR NUL:IVALP,ITER,VALP',2I5,E12.5)
GOTO 40013
ENDIF
ENDIF
DO 40014 LK1=1,3*NNOD
40014 VX(LK1)=VMY(LK1)
CALL RESOLV(NNOD,VKG,VX)
C5=0.
DO 40015 NK1=1,3*NNOD
40015 C5=C5+VX(NK1)*VMY(NK1)
DO 40016 MK2=1,3*NNOD
40016 VMY(MK2)=0.
DO 40017 II=1,3*NNOD
DO 40017 JJ=1,3*NNOD
40017 VMY(II)=VMY(II)+VMG(II,JJ)*VX(JJ)
CO=0.
DO 40018 IK1=1,3*NNOD
40018 CO=CO+VX(IK1)*VMY(IK1)
IF(CO.GT.0)THEN
CLAMDA=C5/CO
CO=SQRT(CO)
DO 40019 KP1=1,3*NNOD
VMY(KP1)=VMY(KP1)/CO
40019 VYO(KP1)=VX(KP1)/CO
ELSE
CLAMDA=GR
WRITE(2,50001)IVALP,ITER,CLAMDA
GOTO 40013

```

```

ENDIF
C5=ABS(CLAMDA)
ENORM=ABS(C5-CLAMDO)/C5
IF(ENORM.LE.EMAX)GOTO 40013
CLAMDO=C5

```

*****TECHNIQUE DE DECALAGE*****

```

C   DECALE=CLAMDA
C   DO 65666 IU=1,3*NNOD
C   DO 65666 JU=1,3*NNOD
C65666 VKG(IU,JU)=VKG(IU,JU)-DECALE*VMG(IU,JU)
40009 CONTINUE
40013 VALP(IVALP)=CLAMDA
      DO 40020 KU1=1,3*NNOD
40020 VECP(KU1,IVALP)=VYO(KU1)
      WRITE(2,50002)IVALP,ITER,VALP(IVALP),ENORM
50002 FORMAT(/5X,'  NUMERO DE LA VALEUR PROPRE IVALP=',I5/
1      5X,'NOMBRE D ITERATIONS EFFECTUEES ITER=',I5/
2      5X,'VALEUR PROPRE                               VALP=',E12.5/
3      5X,'NORME DE CONVERGENCE                       ENORM=',E12.5/)
      WRITE(2,*)(VYO(KR1),KR1=1,3*NNOD)
40003 CONTINUE
9   FORMAT(5X,'NNOD=',I4,/,5X,'NELE=',I4)
19  FORMAT (5X,I3,/,20(I3,/))
229 FORMAT(I3,3(2X,E10.4),/)
399 FORMAT(2(5X,E10.4,/)
49  FORMAT(5X,I3,3X,3(E8.2,3X),/)
59  FORMAT(3X,I3,5X,3(I,2X),/)
1122 STOP'FIN D EXECUTION. AU REVOIR ET MERCI'
      END

```

*****LES SOUS-PROGRAMMES*****

```

SUBROUTINE DERIV1(L,M,K,I,XAI,XA,EAI,EA,DAI,DA
1          ,DNXSI,DNETA,DNZETA)

```

```

C   IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION XAI(34),XA(20),EAI(34),EA(20),DAI(34),

```

1DA(20),DNXSI(34,20),DNETA(34,20),DNZETA(34,20)

DO 66 J=L,M,K

DNXSI(I,J)=XA(J)*(1+EA(J)*EAI(I))*(1+DA(J)*DAI(I))*
2 (-1+2*XA(J)*XAI(I)+EA(J)*EAI(I)+DAI(I))*
2 DA(J))/8

DNETA(I,J)=EA(J)*(1+XAI(I)*XA(J))*(1+DA(J)*DAI(I))*
2 (-1+XA(J)*XAI(I)+2*EA(J)*EAI(I)+DAI(I))*
2 DA(J))/8

DNZETA(I,J)=DA(J)*(1+XA(J)*XAI(I))*(1+EA(J)*EAI(I))*
2 (-1+XA(J)*XAI(I)+EA(J)*EAI(I)+2*DAI(I))*
2 DA(J))/8

66 CONTINUE

RETURN

END

SUBROUTINE DERIV2(L,M,K,I,XAI,EAI,EA,DAI,DA,DNXSI,

1 DNETA, DNZETA)

C IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

DIMENSION XAI(34),EAI(34),EA(20),DAI(34),DA(20),

1 DNXSI(34,20),DNETA(34,20),DNZETA(34,20)

DO 77 J=L,M,K

DNXSI(I,J)=-XAI(I)*(1+EAI(I)*EA(J))*(1+DAI(I))*
2 DA(J))/2

DNETA(I,J)=EA(J)*(1-XAI(I)**2)*(1+DAI(I)*DA(J))/4

DNZETA(I,J)=DA(J)*(1-XAI(I)**2)*(1+EAI(I)*EA(J))/4

77 CONTINUE

RETURN

END

SUBROUTINE DERIV3(L,M,K,I,XAI,XA,EAI,DAI,DA,DNXSI

1 ,DNETA, DNZETA)

C IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

DIMENSION XAI(34),XA(20),EAI(34),DAI(34),DA(20)

1 ,DNXSI(34,20),DNETA(34,20),DNZETA(34,20)

DO 88 J=L,M,K

DNXSI(I,J)=XA(J)*(1-EAI(I)**2)*(1+DAI(I)*DA(J))/4

DNETA(I,J)=-EAI(I)*(1+XA(J)*XAI(I))*(1+DA(J))*
2 DAI(I))/2

DNZETA(I,J)=DA(J)*(1+XAI(I)*XA(J))*(1-EAI(I)**2)/4

88 CONTINUE

RETURN

END

SUBROUTINE DERIV4(L,M,K,I,XAI,XA,EAI,EA,DAI,DNXSI,DNETA,
1 DNZETA)

C IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

DIMENSION XAI(34),XA(20),EAI(34),EA(20),DAI(34),DA(20),

1 DNXSI(34,20),DNETA(34,20),DNZETA(34,20)

DO 82 J=L,M,K

DNXSI(I,J)=XA(J)*(1+EAI(I)*EA(J))*(1-DAI(I)**2)/4

DNETA(I,J)=EA(J)*(1+XAI(I)*XA(J))*(1-DAI(I)**2)/4

DNZETA(I,J)=-DAI(I)*(1+XAI(I)*XA(J))*(1+EAI(I)*EA(J))/2

82 CONTINUE

RETURN

END

SUBROUTINE CALCN1(L,M,K,I,XAI,XA,EAI,EA,DAI,DA,VN)

C IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

DIMENSION XAI(34),XA(20),EAI(34),EA(20),DAI(34),

1 DA(20),VN(34,20)

DO 660 J=L,M,K

VN(I,J)=(1+XAI(I)*XA(J))*(1+EAI(I)*EA(J))*(1+DAI(I)*

2 DA(J))*(-2+XAI(I)*XA(J)+EAI(I)*EA(J)+

2 DAI(I)*DA(J))/8

660 CONTINUE

RETURN

END

SUBROUTINE CALCN2(L,M,K,I,XAI,EAI,EA,DAI,DA,VN)

C IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

DIMENSION XAI(34),EAI(34),EA(20),DAI(34),DA(20),VN(34,20)

DO 770 J=L,M,K

VN(I,J)=(1-XAI(I)**2)*(1+EAI(I)*EA(J))*(1+DAI(I)*

2 DA(J))/4

770 CONTINUE

RETURN

END

SUBROUTINE CALCN3(L,M,K,I,XAI,XA,EAI,DAI,DA,VN)

```

C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION XAI(34),XA(20),EAI(34),DAI(34),DA(20),VN(34,20)
      DO 880 J=L,M,K
      VN(I,J)=(1+XA(J)*XAI(I))*(1-EAI(I)**2)*(1+DAI(I)*
2      DA(J))/4
880    CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE CALCN4(L,M,K,I,XAI,XA,EAI,EA,DAI,VN)

```

```

C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION XAI(34),XA(20),EAI(34),EA(20),DAI(34),VN(34,20)
      DO 820 J=L,K,M
      VN(I,J)=(1+XAI(I)*XA(J))*(1+EAI(I)*EA(J))*(1-DAI(I)**2)/4
820    CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE JACOB(I,KK,NOND,DNXSI,DNETA,DNZETA,
1XN,YN,ZN,VJ,DETJ,VJ1)

```

```

C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION DNXSI(34,20),DNETA(34,20),DNZETA(34,20),
1XN(226),YN(226),ZN(226),
1VJ(9),VJ1(9),NOND(24,20)
      DO 105 IJ=1,9
105    VJ(IJ)=0.
      DO 110 L=1,20
      J=NOND(KK,L)
      VJ(1)=VJ(1)+DNXSI(I,L)*XN(J)
      VJ(2)=VJ(2)+DNXSI(I,L)*YN(J)
      VJ(3)=VJ(3)+DNXSI(I,L)*ZN(J)
      VJ(4)=VJ(4)+DNETA(I,L)*XN(J)
      VJ(5)=VJ(5)+DNETA(I,L)*YN(J)
      VJ(6)=VJ(6)+DNETA(I,L)*ZN(J)
      VJ(7)=VJ(7)+DNZETA(I,L)*XN(J)
      VJ(8)=VJ(8)+DNZETA(I,L)*YN(J)
      VJ(9)=VJ(9)+DNZETA(I,L)*ZN(J)
110    CONTINUE
      DETJ=VJ(1)*(VJ(5)*VJ(9)-VJ(8)*VJ(6))+VJ(4)*
3      (VJ(8)*VJ(3)-VJ(2)*VJ(9))

```

```

4          +VJ(7)*(VJ(2)*VJ(6)-VJ(5)*VJ(3))
IF(DETJ.NE.0) GOTO 700
WRITE(*,*)'LE DETERMINANT DU JACOBIEN EST NUL'
STOP'VERIFIER LES NOEUDS ET LEURS COORDONNEES'

```

C-----CALCUL DE L INVERSE DU JACOBIEN-----

```

700  VJ1(1)=(VJ(5)*VJ(9)-VJ(6)*VJ(8))/DETJ
      VJ1(2)=(VJ(3)*VJ(8)-VJ(2)*VJ(9))/DETJ
      VJ1(3)=(VJ(2)*VJ(6)-VJ(3)*VJ(5))/DETJ
      VJ1(4)=(VJ(7)*VJ(6)-VJ(4)*VJ(9))/DETJ
      VJ1(5)=(VJ(1)*VJ(9)-VJ(7)*VJ(3))/DETJ
      VJ1(6)=(VJ(4)*VJ(3)-VJ(6)*VJ(1))/DETJ
      VJ1(7)=(VJ(4)*VJ(8)-VJ(7)*VJ(5))/DETJ
      VJ1(8)=(VJ(2)*VJ(7)-VJ(8)*VJ(1))/DETJ
      VJ1(9)=(VJ(1)*VJ(5)-VJ(4)*VJ(2))/DETJ
RETURN
END

```

SUBROUTINE DERXYZ(I,VJ1,DNXSI,DNETA,DNZETA,DNX,DNY,DNZ)

```

C  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
    DIMENSION VJ1(9),DNXSI(34,20),DNETA(34,20),DNZETA(34,20),
1  DNX(34,20),DNY(34,20),DNZ(34,20)
    DO 125 JJ=1,20
      DNX(I,JJ)=0.
      DNY(I,JJ)=0.
      DNZ(I,JJ)=0.
125  CONTINUE
    DO 130 J=1,20
      DNX(I,J)=DNX(I,J)+VJ1(1)*DNXSI(I,J)+VJ1(2)*DNETA(I,J)+
5      VJ1(3)*DNZETA(I,J)
      DNY(I,J)=DNY(I,J)+VJ1(4)*DNXSI(I,J)+VJ1(5)*DNETA(I,J)+
6      VJ1(6)*DNZETA(I,J)
      DNZ(I,J)=DNZ(I,J)+VJ1(7)*DNXSI(I,J)+VJ1(8)*DNETA(I,J)+
7      VJ1(9)*DNZETA(I,J)
130  CONTINUE
    RETURN
    END

```

SUBROUTINE CALCUB(I,DNX,DNY,DNZ,B)

```

C  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```

DIMENSION DNX(34,20),DNY(34,20),DNZ(34,20),B(6,60)

DO 140 J=1,58,3

L=J/3+1

B(1,J)=DNX(I,L)

B(1,J+1)=0

B(1,J+2)=0

B(2,J)=0

B(2,J+1)=DNY(I,L)

B(2,J+2)=0

B(3,J)=0

B(3,J+1)=0

B(3,J+2)=DNZ(I,L)

B(4,J)=DNY(I,L)

B(4,J+1)=DNX(I,L)

B(4,J+2)=0

B(5,J)=0

B(5,J+1)=DNZ(I,L)

B(5,J+2)=DNY(I,L)

B(6,J)=DNZ(I,L)

B(6,J+1)=0

B(6,J+2)=DNX(I,L)

140 CONTINUE

RETURN

END

SUBROUTINE ASSEMB(KI,NOND,VAE,VAG)

C IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

DIMENSION VAE(60,60),VAG(678,678),KLOCE(678),

1NOND(24,20)

JA=0

DO 550 IN=1,20

IDO=(NOND(KI,IN)-1)*3

DO 550 ID=1,3

JA=JA+1

550 KLOCE(JA)=ID+IDO

DO 551 ID=1,60

I=KLOCE(ID)

DO 551 JD=1,60

J=KLOCE(JD)

```

551  VAG(I,J)=VAG(I,J)+VAE(ID,JD)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE RESOLV(NNOD,VKG,FS)
C     IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION VKG(678,678),FS(678)
      NSYM=0
      DATA ZERO/0.D0/
      N1=3*NNOD-1
      DO 50 IS=1,N1
      PIV=VKG(IS,IS)
      IF(PIV)33,1043,33
1043  WRITE(*,2000) IS
2000  FORMAT('PIVOT NUL,EQUATION ',I5)
      STOP
33    IS1=IS+1
      DO 50 II=IS1,3*NNOD
      CL=VKG(II,IS)/PIV
      IF(CL.EQ.ZERO) GOTO 50
      FS(II)=FS(II)-CL*FS(IS)
      IF(NSYM.NE.1) GOTO 32
      DO 30 IJ=IS1,3*NNOD
30    VKG(II,IJ)=VKG(II,IJ)-CL*VKG(IS,IJ)
      GOTO 50
32    DO 40 IJ=II,3*NNOD
      VKG(II,IJ)=VKG(II,IJ)-CL*VKG(IS,IJ)
40    VKG(IJ,II)=VKG(II,IJ)
50    CONTINUE
      M=3*NNOD
      FS(M)=FS(M)/VKG(M,M)
      DO 70 II=1,N1
      IS1=IS1-1
      CL=ZERO
      IJ1=IS1+1
      DO 60 IJ=IJ1,3*NNOD
60    CL=CL+VKG(IS1,IJ)*FS(IJ)
70    FS(IS1)=(FS(IS1)-CL)/VKG(IS1,IS1)
      RETURN
      END

```

```
*****
Subroutine Present
```

```
C*****
write(*,75688)
75688 format('1')
print*,char(27),'[2j'
print*,char(27),'[5m'
print*,char(27),'#3*****'
print*,char(27),'#4*****'
print*,char(27),'#3*      calcul en cours.      *'
print*,char(27),'#4*      calcul en cours.      *'
print*,char(27),'#3*****'
print*,char(27),'#4*****'
return
END
```

```
C*****
*****ORTHOGONALISATION*****
```

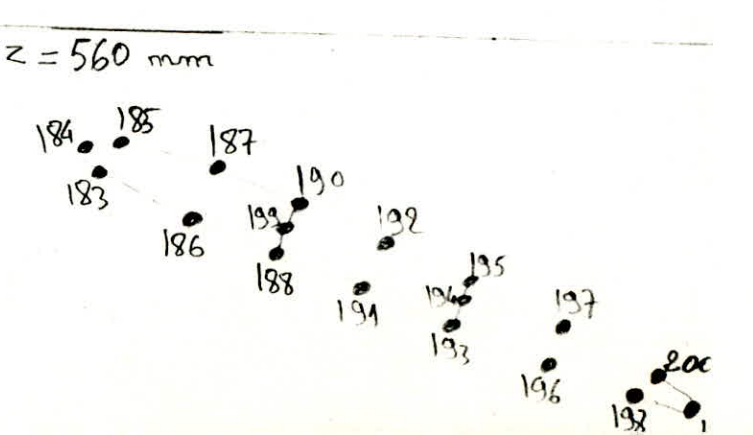
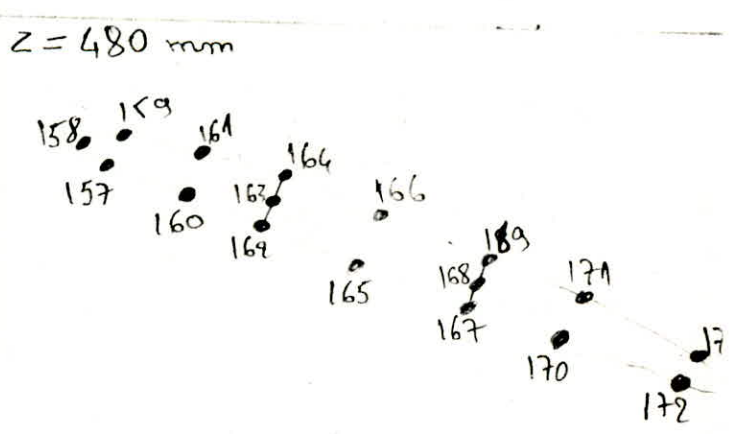
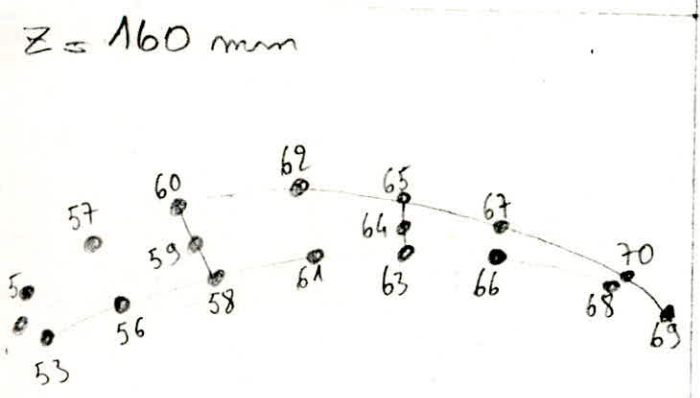
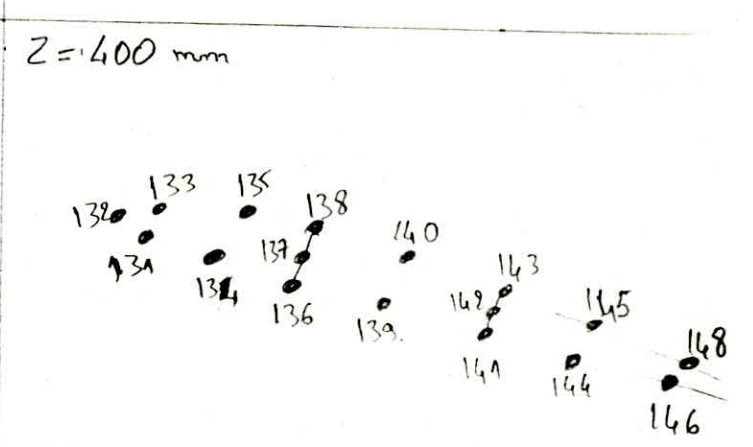
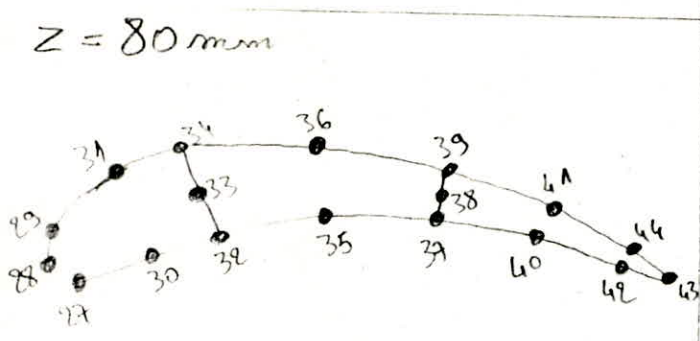
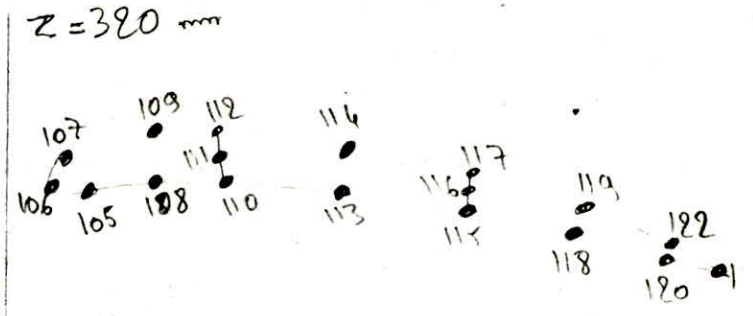
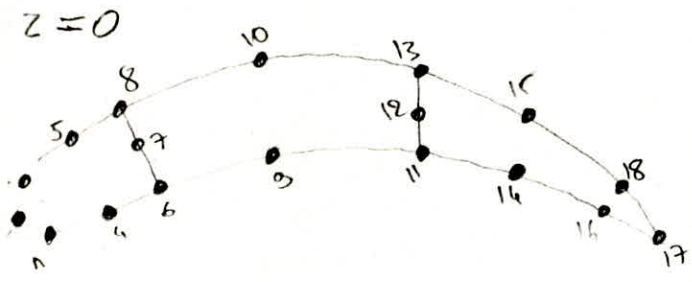
```
SUBROUTINE GRAM(NNOD,IVALP,VECP,VYO,VMY)
```

```
C*****C
```

```
C  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
REAL*16 C5
DIMENSION VECP(3*NNOD,IVALP),VYO(3*NNOD),VMY(3*NNOD)
DO 40021 J=1,IVALP
C5=0.
DO 40022 KO1=1,3*NNOD
40022 C5=C5+VECP(KO1,J)*VMY(KO1)
DO 40023 II=1,3*NNOD
40023 VYO(II)=VYO(II)-C5*VECP(II,J)
40021 CONTINUE
RETURN
END
```

Détails du maillage

A différents rayons { Les plans intermédiaires ne sont pas représentés
 { Le dernier plan est incliné de 10° ($Z_{max} = 66\text{cm}$)
 { Pour les coordonnées voir Fig 4.1



BIBLIOGRAPHIE

- [1] O.C.ZIENKIEWICZ
"The finit element method"
4^{me} édition Mac Graw-Hill (1989)
- [2] G.DHATT et G.TOUZOT
"Une présentation de la méthode des éléments finis"
Edition Maloine Paris (1984)
- [3] M.SEDILLE
"Turbo-machines hydraulique et thermique "
Edition Masson et C^{le} Paris (1967)
- [4] R.BENNACER
"Etude de turbine à vapeur à aube extralongues "
P.F.E E.N.P (Juin 1989)
- [5] L.VIVIER
"Turbine à vapeur et à gaz"
Paris (1965)
- [6] J.F. IMBERT
"Analyse des structures par éléments finis "
Edition Cepadues (Decembre 1984)
- [7] J.L.BATOZ et G.DHATT
"Modélisation des structures par éléments finis "
Edition Hermès (Juin 1990)

