

9/91

وزارة الجامعات  
Ministère aux Universités

2 ex

# ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT

GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## PROJET DE FIN D'ETUDES

### SUJET

INFLUENCE DES MODELES BIODYNAMIQUES  
CHOISIS DU CORPS DU CHAUFFEUR SUR  
LA STRUCTURE DE SUSPENSION OPTIMALE  
DU FAUTEUIL

Proposé par :  
M.M. KSTAZEK

Etudié par :  
M.O. LAGHROUCHE

Dirigé par :  
M.M. KSTAZEK

PROMOTION  
Juin 91

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المدرسة الوطنية المتعددة التقنية  
المكتبة - BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

الحمد لله الذي هدانا لهذا وما كنا لنهتدي لولا أن هدانا الله

والله يقبل منا أعمالنا وأجعلها

خالصا لوجهك الكريم ووقفنا

لعملنا في مرضاتك ...

والله يعلمنا ما ينفعنا ولا يضرنا

بما علمت منا وزونا علما

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ  
الحمد لله الذي هدانا لهذا وما كنا لنهتدي لولا أن هدانا الله  
والله يقبل منا أعمالنا وأجعلها خالصا لوجهك الكريم ووقفنا  
لعملنا في مرضاتك ... والله يعلمنا ما ينفعنا ولا يضرنا  
بما علمت منا وزونا علما

## DEDICACES

JE DEDIE CE MODESTE TRAVAIL

- A mes chers parents.
- A mes freres et soeurs.
- A tous les amis.

Omar LAGHROUCHE



## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier monsieur Marek KSIAZEK pour son aide et son suivi durant cette étude ainsi que tous les professeurs qui ont contribué à ma formation.

Je tiens aussi à remercier tous les amis qui m'ont assisté durant les études et qui ont rendu ces dernières très agréables dans les moments les plus difficiles.

Omar LAGHROUCHE.



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة - BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

وزارة الجامعات  
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
وزارة الهندسة الميكانيكية  
الموجهة: ما. كسيارزك  
طالب الهندسة: لفروش عمر

Ministère des universités.  
Ecole nationale polytechnique.  
Département de génie mécanique.  
Promoteur : M. KSI AZEK.  
Elève ingénieur : LAGHROUCHE Omar.

**الموضوع:** تأثير النماذج البيوديناميكية المختارة لجسم السائق على بنية التعليق المثالي للمقعد.  
**الخلاصة:** تضمن هذه الدراسة حوصلة تحليلية لأنظمة التعليق الأمثل لكروسي السائق وذلك انطلاقاً من معرفتنا للنماذج البيوديناميكية المختارة لجسم السائق والتخريصات العشوائية. وقد اعتمدنا على معيار للإرتزاز الأمثل واستعملنا طريقة "وينر" و "هوف" "

**Sujet :** Influence des modèles biodynamiques choisis du corps du chauffeur sur la structure de suspension optimale du fauteuil.  
**Résumé :** Connaissant les modèles biodynamiques choisis du corps du chauffeur ainsi que les excitations aléatoires, on synthétise analytiquement les systèmes de suspension optima du fauteuil, en tenant compte d'un critère d'optimisation et en utilisant la méthode de Wiener-Hopf.

**subject :** Influence of biomechanical models of human operator body on the analytic structure of the optimal suspension.  
**Abstract :** For chosen excitations and biomechanical models of human operator body ,the optimum vibroisolation systems of sitting chair have been obtained by the method of Wiener-Hopf.

SOMMAIRE

Introduction.....	1
But du projet.....	2
Chapitre I-GENERALITES.	
1-Processus stochastique.....	3
1-1-Fonction aléatoire.....	3
1-2-Processus stochastique.....	3
1-3-Processus stationnaire.....	3
1-4-Processus ergodique.....	4
1-5-Fonction de densité spectrale.....	4
2-Système.....	5
2-1-Système discret.....	6
2-2-Système continu.....	6
2-3-Système stable et réalisable.....	6
2-4-Système linéaire stationnaire.....	7
2-5-Dispersion du signal de sortie d'un système linéaire.....	7
3-Fonction de transfert.....	9
3-1-Définition.....	9
3-2-Stabilité, pôles et zéros.....	10
3-3-Critère de stabilité.....	11
Chapitre II-LES SYSTEMES DE SUSPENSION.	
1-Introduction.....	13
2-Les systèmes passifs.....	13
3-Les systèmes actifs.....	17
Chapitre III-SYSTEME DE SUSPENSION OPTIMAL.	
1-Présentation du problème.....	22
1-1-Introduction.....	22
1-2-Hypothèses.....	22
2-Problème de critère de suspension optimale.....	22
2-1-Critère du déplacement relatif.....	22
2-2-Critère d'accélération minimale.....	22
2-3-Recherche d'un cas optimal.....	23
2-4-Expression de la fonctionnelle.....	23

3-Formulation mathématique du problème.....	24
4-Solution du problème par la méthode de Wiener- Hopf.....	283

**Chapitre IV-PRESENTATION DES MODELES BIODYNAMIQUES.**

1-Introduction.....	32
2-Présentation des modèles.....	33

**Chapitre V-APPLICATION AU MODELE 1.**

1-Influence de la partie m.....	37
1-a-Excitation de type 'bruit blanc'.....	383
1-b-Excitation de type 'bruit couleur'.....	44
2-Influence de la partie $m_1$ .....	52
2-a-Excitation de type 'bruit blanc'.....	52
2-b-Excitation de type 'bruit couleur'.....	583

**Chapitre VI-APPLICATION AU MODELE 2.**

1-Influence de la partie $m_1$ .....	67
1-a-Excitation de type 'bruit blanc'.....	683
1-b-Excitation de type 'bruit couleur'.....	74
2-Influence de la partie $m_2$ .....	833
2-a-Excitation de type 'bruit blanc'.....	834
2-b-Excitation de type 'bruit couleur'.....	837

**Chapitre VII-APPLICATION AU MODELE 3.**

1-Influence de la partie m.....	93
1-a-Excitation de type 'bruit blanc'.....	94
1-b-Excitation de type 'bruit couleur'.....	99
2-Influence de la partie $m_1$ .....	104
2-a-Excitation de type 'bruit blanc'.....	105
2-b-Excitation de type 'bruit couleur'.....	1083
3-Influence de la partie $m_2$ .....	112
3-a-Excitation de type 'bruit blanc'.....	113
3-b-Excitation de type 'bruit couleur'.....	116

**Chapitre VIII-CONCLUSION.....** 119

Index bibliographiques.

## INTRODUCTION :

Le siège du chauffeur revêt une grande importance dans l'industrie des véhicules. Il demeure l'une des préoccupations majeures des industriels non seulement pour une question de qualité (cas des véhicules particuliers), mais aussi de sécurité et d'amélioration de la capacité de travail des utilisateurs (cas des véhicules industriels).

Les systèmes mécaniques sollicités par des vibrations aléatoires peuvent être vibro-isolés par des structures dont la forme analytique est retrouvée sur la base de la méthode de Wiener-Hopf. [1,2,3]

Cette vibro-isolation est assurée soit par des systèmes actifs agissant par l'action de servomécanismes, soit par des systèmes passifs agissant par simple action des ressorts et amortisseurs, ou bien par la combinaison des deux systèmes. Plusieurs études ont été menées dans ce sens pour atténuer au maximum les vibrations générées par les différentes sources d'excitation. [4, ..., 10]

La complexité du modèle biodynamique du corps du chauffeur, l'excitation et le critère ont une influence décisive sur la forme analytique, et par conséquent, sur la structure de suspension optimale du fauteuil.

Dans cette étude nous avons choisi trois modèles biodynamiques du corps du chauffeur [7,8,9], et on a appliqué un critère d'optimisation qui tient compte de la dispersion du déplacement relatif du siège par rapport au plancher du véhicule et de la dispersion de l'accélération de la ième masse du modèle biodynamique considéré.

Deux types d'excitations ont été choisies, une de type 'bruit blanc' et l'autre de type complexe 'bruit couleur'.

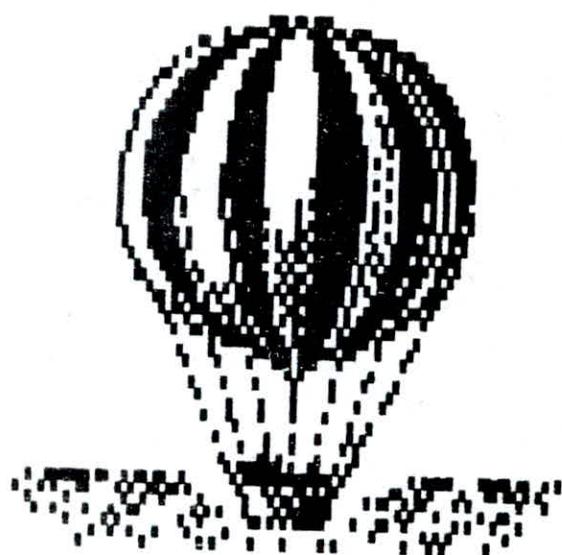
BUT DU PROJET :

Connaissant les modèles biodynamiques choisis du corps du chauffeur ainsi que les excitations aléatoires, on synthétise analytiquement les fonctions de transfert optimales du siège, en tenant compte d'un critère d'optimisation et en utilisant la méthode de Wiener-Hopf.

On trace les modules et phases des fonctions de transfert auxquelles on aboutit et les variations des dispersions en fonction du multiplicateur de Lagrange.

# Chapitre 1

## **GENERALITES**



## 1-Processus stochastique :

Le mot stochastique est utilisé par les mathématiciens et physiciens pour désigner les processus soumis au hasard .Ils sont caractérisés par une instabilité dans le temps et une absence de reproductibilité. Les exemples sont nombreux : navire soumis à une mer agitée,voiture roulant sur une route en mauvais état,turbulence aérodynamique au niveau d'un réacteur,...

Les signaux de ce type ne sont pas traités de manière précise,ils sont décrits à partir de bases statistiques.

### 1-1 Fonction aléatoire :

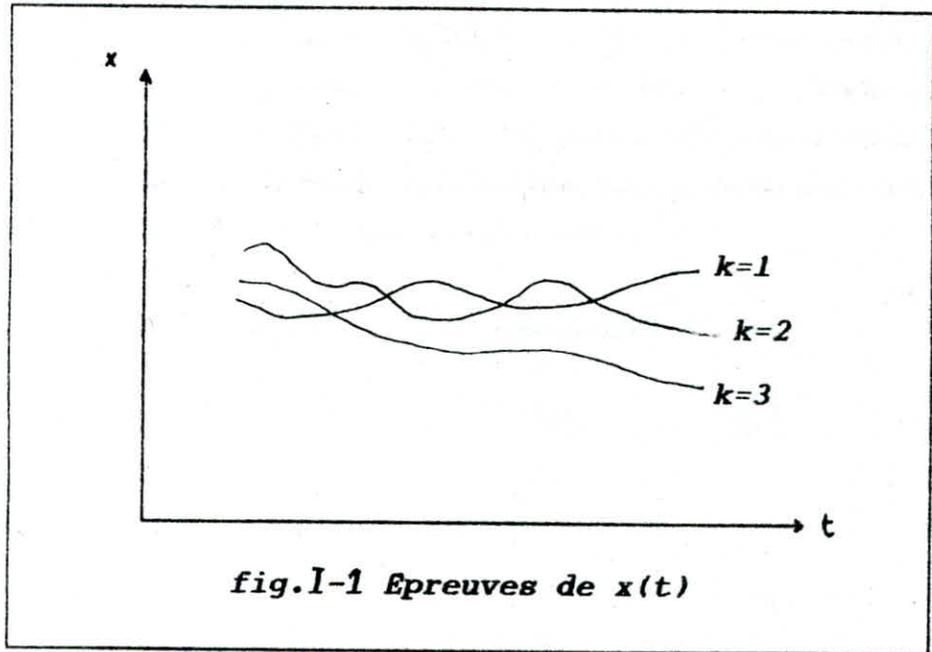
On appelle fonction aléatoire, une fonction où le le hasard intervient à chaque instant dans la détermination des valeurs de la fonction.

### 1-2 Processus stochastique :

Un processus stochastique n'est pas purement aléatoire,mais contient un certain degré d'aléa.Il est plus général que le processus aléatoire. Mathématiquement,c'est une fonction de deux variables  $x^k(t)$ ,où  $k$  prend ses valeurs dans un espace des épreuves et  $t$  sur l'axe réel des temps.Pour chaque valeur de  $k$ , $x$  est une fonction aléatoire de  $t$ . On obtient une famille de signaux,chacun d'eux est produit par un processus identique.(voir fig.1-1)

### 1-3-Processus stationnaire :

Les processus aléatoires qui se déroulent approximativement de la même façon dans le temps et qui présentent l'aspect de vibrations aléatoires avec des caractéristiques probabilistes ne variants pas sensiblement avec le temps sont dits stationnaires.



#### 1-4 Processus ergodique :

L'ergodicité nous permet d'obtenir les caractéristiques d'un processus aléatoire à partir d'un seul enregistrement suffisamment long au lieu d'exiger la connaissance d'un grand nombre d'échantillons. Pour un processus stationnaire et ergodique, il y a autant d'informations dans un enregistrement de longue durée que dans de multiples réalisations.

#### 1-5 Fonction de densité spectrale :

Soit  $x(t)$  une fonction aléatoire stationnaire du temps, ou plus exactement un échantillon suffisamment long de cette fonction aléatoire. L'énergie de la fonction  $x$  dans l'intervalle de temps  $[t_1, t_2]$  est définie par :

$$E = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) \cdot dt \quad (I-1)$$

La transformée de Fourier de  $x(t)$  est :

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

et:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) \cdot e^{st} \cdot ds$$

où :  $s = j\omega$

L'énergie totale de la fonction  $x$  est :

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega \cdot dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{j\omega t} \cdot dt \cdot d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \cdot X(-j\omega) \cdot d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 \cdot d\omega \end{aligned}$$

En posant :  $s = j\omega$ , on aura:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) \cdot d\omega \quad (\text{I-2})$$

$S(j\omega)$  est la densité spectrale énergétique de la fonction aléatoire  $x$ . L'aire de la courbe de  $S$  en fonction de  $\omega$  représente l'énergie totale de la fonction  $x$ . Quant à son allure, elle exprime la répartition de cette énergie dans le spectre des fréquences.

## 2-Système :

De façon générale, un système sert à transformer un signal d'entrée  $x(t)$  en un signal  $y(t)$  qui apparaît à sa sortie. Le système est caractérisé par un opérateur  $h$  qui transforme l'espace des entrées  $x(t)$  en l'espace des sorties  $y(t)$ :  $h[x(t)] = y(t)$ .

Dans le domaine fréquentiel, l'opérateur  $h$  s'exprime par le rapport :  $H(s) = Y(s)/X(s)$  où  $X(s)$  et  $Y(s)$  sont respectivement les transformées de Fourier des fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$ .

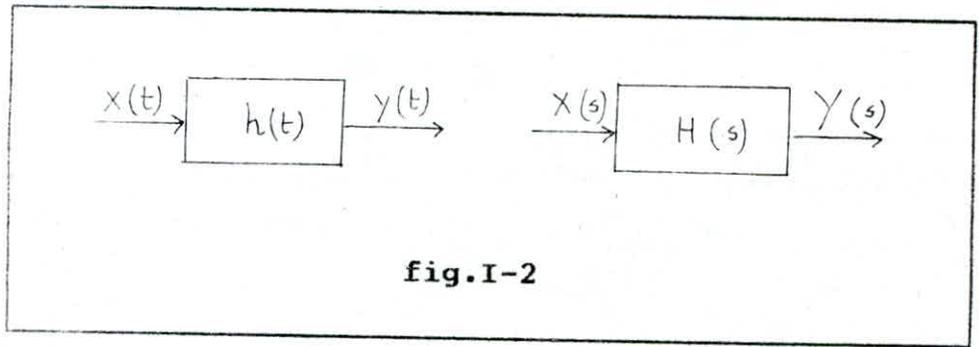


fig.I-2

### 2-1 Système discret :

Il est constitué d'éléments permettant d'écrire les équations qui le régissent sous forme d'équations différentielles du second ordre à coefficients constants. Le nombre de variables indépendantes étant égal au nombre de degrés de liberté du système.

### 2-2 Système continu :

Un système continu est un système dont le nombre de degrés de liberté est infini. Le mouvement d'un point du système n'est plus fonction du temps mais aussi de l'espace. La possession d'une infinité de degrés de liberté implique la présence d'une infinité de fréquences propres.

### 2-3 Système stable et réalisable :

Un système est dit stable si à tout signal d'entrée borné produit à sa sortie un signal borné.

Un système est dit réalisable si l'apparition du signal de sortie ne précède pas le signal d'entrée.

Un système qui est à la fois stable et réalisable est dit physiquement réalisable.

## 2-4 Système linéaire stationnaire :

Un système est dit linéaire si, pour deux signaux d'entrée  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  et pour deux scalaires  $\alpha$  et  $\beta$ , le système fait correspondre les signaux de sortie  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  tels que :

$$\begin{aligned}h[\alpha \cdot x_1(t) + \beta \cdot x_2(t)] &= h[\alpha \cdot x_1(t)] + [h[\beta \cdot x_2(t)]] \\ &= \alpha \cdot [h(x_1(t))] + \beta \cdot [h(x_2(t))] \\ &= \alpha \cdot y_1(t) + \beta \cdot y_2(t)\end{aligned}$$

Un système est dit stationnaire si son opérateur  $h$  est invariant dans le temps :  $h[x(t+\tau)] = y(t+\tau) \quad \forall \tau$

## 2-5 Dispersion du signal de sortie d'un système linéaire :

Soit  $x(t)$  et  $y(t)$  respectivement l'entrée et la sortie d'un système linéaire. Soit  $h$  l'opérateur du système qui transforme l'espace  $x$  des entrées en l'espace  $y$  des sorties.

La dispersion du signal de sortie est :

$$\sigma_y^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} y^2(t) \cdot dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} y(t) \cdot y(t) \cdot dt$$

$$\text{Or: } y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(-j\omega) \cdot e^{-j\omega t} \cdot d\omega$$

Donc :

$$\sigma_y^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} y(t) \cdot \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(-j\omega) \cdot e^{-j\omega t} \cdot d\omega \right] dt$$

$$Y(-j\omega) = H_{Y/X}(-j\omega) \cdot X(j\omega)$$

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} Y(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{Y/X}(-j\omega) \cdot X(-j\omega) e^{-j\omega t} \cdot d\omega \right] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} H_{Y/X}(-j\omega) \cdot X(-j\omega) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \end{aligned}$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = Y(j\omega) = H_{Y/X}(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} H_{Y/X}(-j\omega) \cdot X(-j\omega) \cdot H_{Y/X}(j\omega) \cdot X(j\omega) \cdot d\omega \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} |H_{Y/X}(j\omega)|^2 \cdot \frac{|X(j\omega)|^2}{2T} \cdot d\omega \end{aligned}$$

Notons que :

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(j\omega)|^2}{2T}$$

est la densité spectrale de puissance.

Donc :

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{Y/X}(j\omega)|^2 \cdot S_X(\omega) \cdot d\omega$$

En posant :  $s = j\omega$ , on obtient :

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-j\infty}^{+j\infty} |H_{Y/X}(s)|^2 \cdot S_X(s) \cdot ds \quad (I-3)$$

Par analogie, on écrit les dispersions de l'écart et de l'accélération pour un système qui a  $x_0(t)$  à son entrée et  $x(t)$  à sa sortie.

-Dispersion de l'écart :

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| \frac{H_{x-x_0}(s)}{x_0} \right|^2 \cdot S_{x_0}(s) \cdot ds \quad (1-4)$$

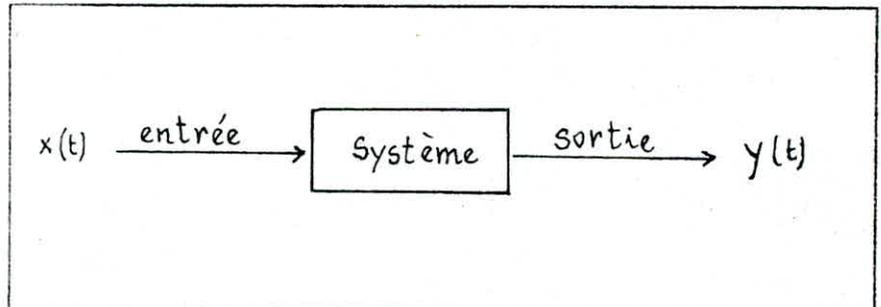
-Dispersion de l'accélération de sortie :

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-j\infty}^{+j\infty} |H_x(s)|^2 \cdot S_{x_0}(s) \cdot ds \quad (1-5)$$

3-Fonction de transfert :

3-1 Définition :

Soit un système linéaire soumis à une entrée  $x(t)$  et présente à sa sortie une réponse  $y(t)$ .



Le système est régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$B_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + B_1 \frac{dy}{dt} + B_0 \cdot y(t) =$$

$$A_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + A_1 \frac{dx}{dt} + A_0 \cdot x(t)$$

Si on prend les transformées de Laplace des deux membres, on est amené à écrire :

$$(B_n s^n + \dots + B_1 s + B_0) \cdot Y(s) = (A_m s^m + \dots + A_1 s + A_0) \cdot X(s)$$

Soit :

$$Y(s) = \frac{A_m s^m + \dots + A_1 s + A_0}{B_n s^n + \dots + B_1 s + B_0} \cdot X(s)$$

La fonction :

$$H(s) = \frac{A_m s^m + \dots + A_1 s + A_0}{B_n s^n + \dots + B_1 s + B_0}$$

est caractéristique du système, on l'appelle sa fonction de transfert ou bien sa transmittance; alors :

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) \quad (1-6)$$

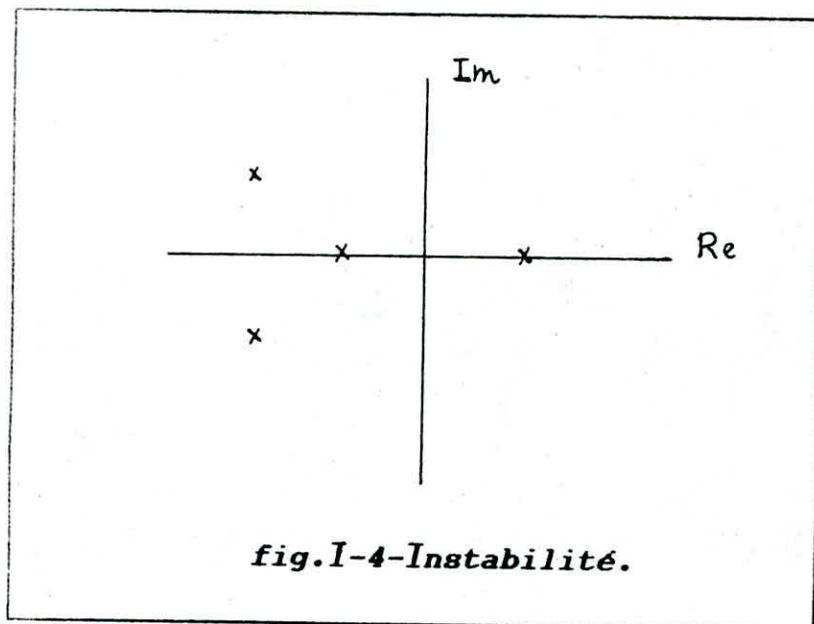
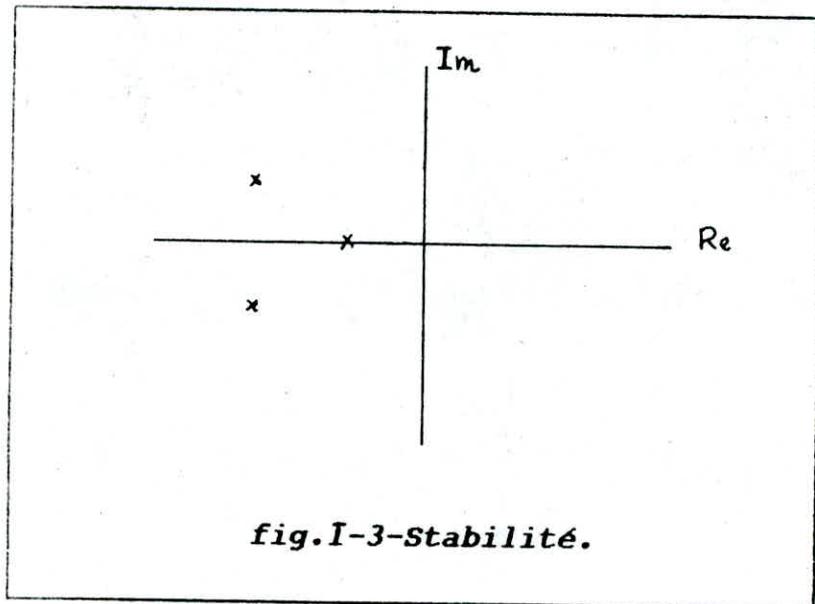
### 3-2 Stabilité, pôles et zéros :

On dit qu'un système est stable lorsque, écarté de sa position d'équilibre, il tend à y revenir; instable, lorsqu'il tend à s'en écarter davantage. Dans le cas intermédiaire d'un système qui ne revient pas à son équilibre mais s'en écarte pas, on parle alors de système à la limite de stabilité.

Soit  $H(s) = N(s)/D(s)$  une fonction de transfert d'un système. Le dénominateur  $D(s)$  est dit équation caractéristique de la fonction de transfert. Les racines de  $N(s)$  sont dites les zéros de la fonction de transfert. Les racines de  $D(s)$  sont dites les pôles de la fonction de transfert.

La condition fondamentale de stabilité d'un système est que les pôles de sa fonction de transfert aient leurs parties réelles négatives, i.e. soient situés dans le demi plan complexe gauche. (fig. I-3)

Si au moins un pôle a sa partie réelle positive, i.e. situé à droite, il y a instabilité. (fig. I-4).



3-3 Critère de stabilité :

a/ Condition nécessaire : Pour qu'il y ait stabilité, il faut que tous les coefficients de l'équation caractéristique existent et aient le même signe.

b/ Condition necssaire et suffisante : Soit  $D(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$ , l'équation caractéristique d'une fonction de transfert d'un système .On construit le tableau suivant :

$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	$\dots$
$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	$\dots$
$b_2$	$b_4$	$b_6$	$\dots\dots\dots$	
$c_3$	$c_5$	$c_7$	$\dots\dots\dots$	

Où :

$$b_i = \frac{a_1 a_i - a_0 a_{i+1}}{a_1}$$

$$c_i = \frac{b_2 a_i - a_1 b_{i+1}}{b_2}$$

Pour que les racines de l'équation caractéristique soient à parties réelles négatives, il faut que tous les éléments de la première colonne aient le même signe, sinon le nombre de racines à parties réelles positives est égal au nombre de changement de signe.

# Chapitre 2

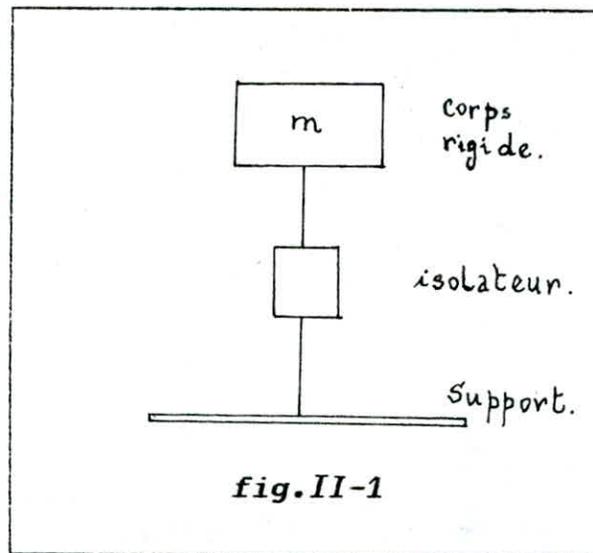
## **LES SYSTEMES DE SUSPENSION**



## 1-Introduction :

La suspension relie de façon souple le siège du chauffeur au plancher. C'est une structure d'isolation, elle consiste à absorber les excitations dues aux irrégularités de la surface de la route, afin de réduire au maximum leurs effets : déplacement, vitesse, accélération, variation de l'accélération, énergie transmise.

Le concept de vibro-isolation est illustré par la considération d'un système à un seul degré de liberté représenté par un corps rigide connecté à un support par un isolateur (fig.II-1).



La structure de suspension du siège du chauffeur comprend des ressorts et amortisseurs, comme elle peut comprendre des systèmes pneumatiques et hydrauliques.

La suspension est assurée soit par des systèmes passifs, soit par des systèmes actifs, soit par la combinaison des deux, dit système semi-actif.

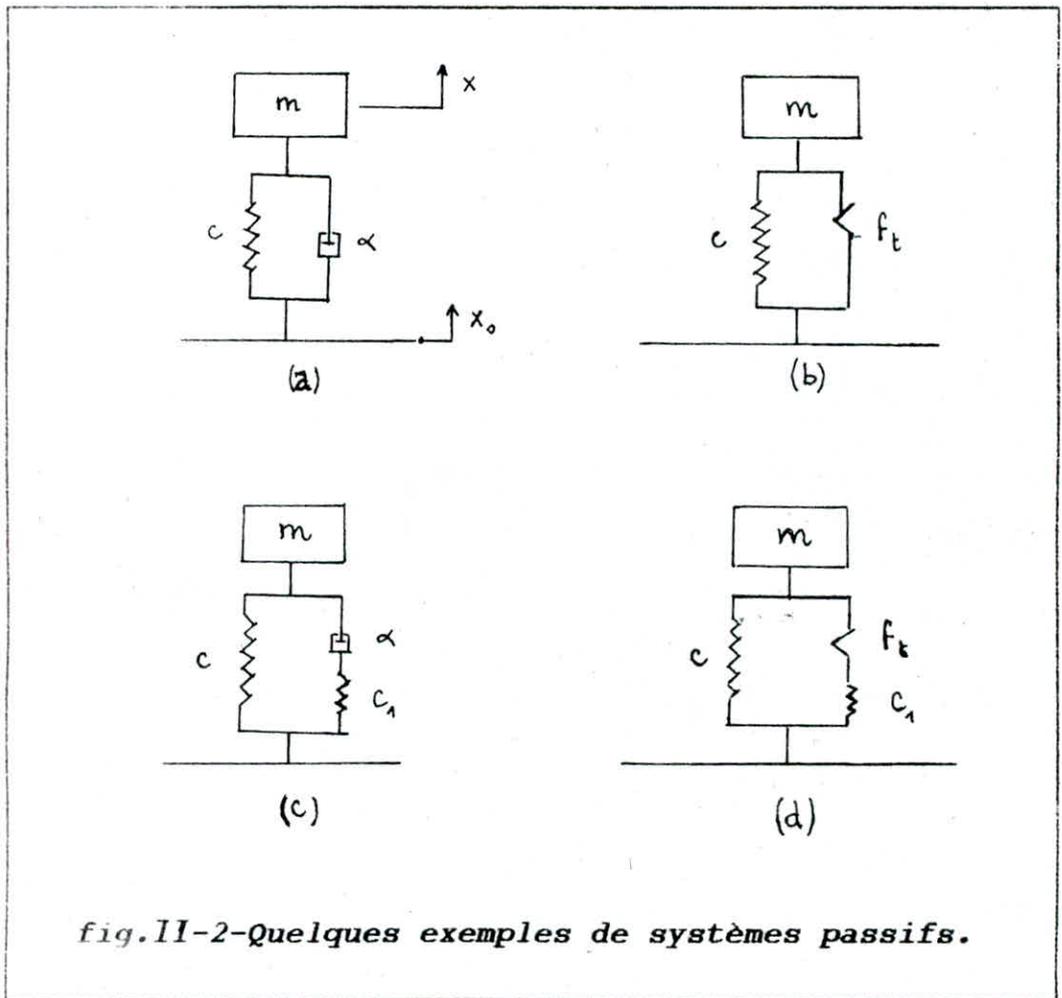
## 2-Les systèmes passifs :

Ils agissent par l'action des ressorts et amortisseurs, ces derniers sont considérés comme linéaires et de masses négligeables.

Les amortisseurs absorbent l'énergie des excitations afin d'affaiblir leurs effets et empêcher les rebondissements. Les ressorts empêchent la transmission intégrale de l'accélération du rebondissement. Ils sont combinés de différentes manières pour réaliser les systèmes voulus. (voir fig. II-2)

L'amortisseur représenté en (a) est un amortisseur visqueux, il a la propriété de transmettre une force  $f_c$  proportionnelle directement à la vitesse relative :  $f_c = c \cdot \dot{\delta}$  avec  $\delta = x - x_0$ .

Tandis que l'amortisseur représenté en (b) dit amortisseur de Coulomb, il transmet une force  $f_t$  constante, indépendante de la position et de la grandeur de la vitesse, elle oppose toujours la vitesse relative  $\dot{\delta}$ .

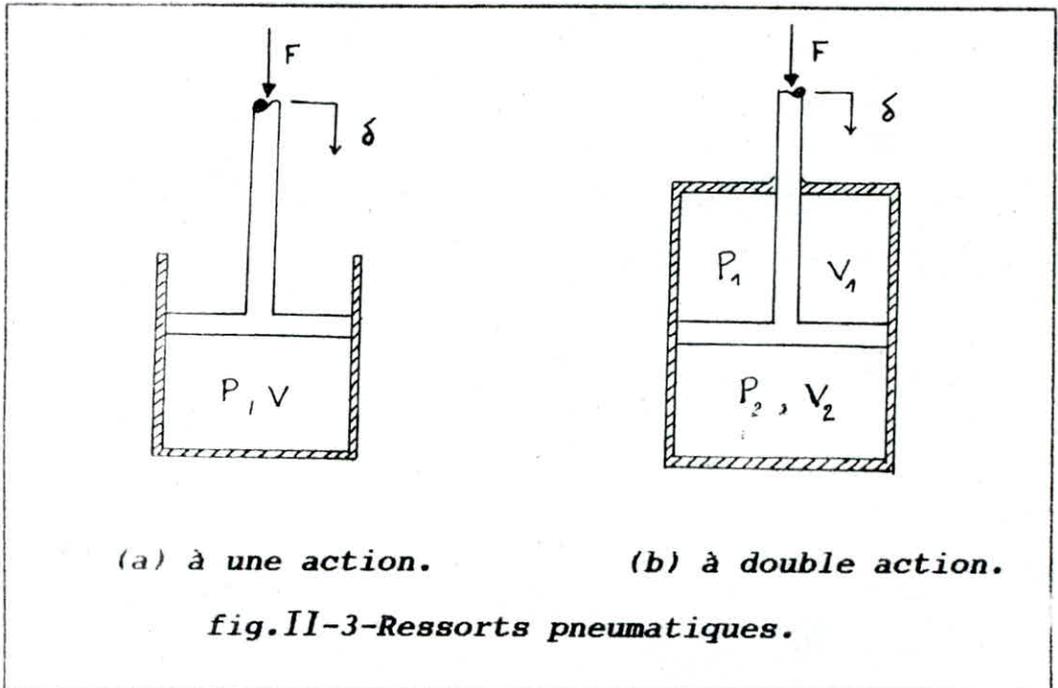


En plus de ces éléments conventionnels, il en existe d'autres accomplissant la même fonction, mais de configuration différente. Ce sont les ressorts pneumatiques.

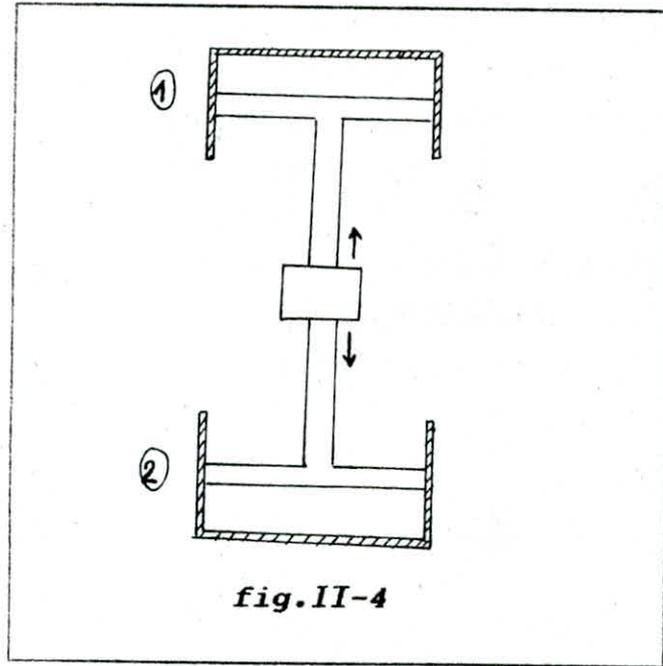
-Les ressorts pneumatiques :

Ils peuvent supporter des charges importantes si leurs parois sont assez rigides. La charge supportée est le produit de la pression  $P$  et de la surface  $S$  (fig.II-3-a). La rigidité  $k$  est la dérivée de la force  $F$  par rapport au déplacement .

Il existe deux types de ressorts pneumatiques : à une action et à double action.



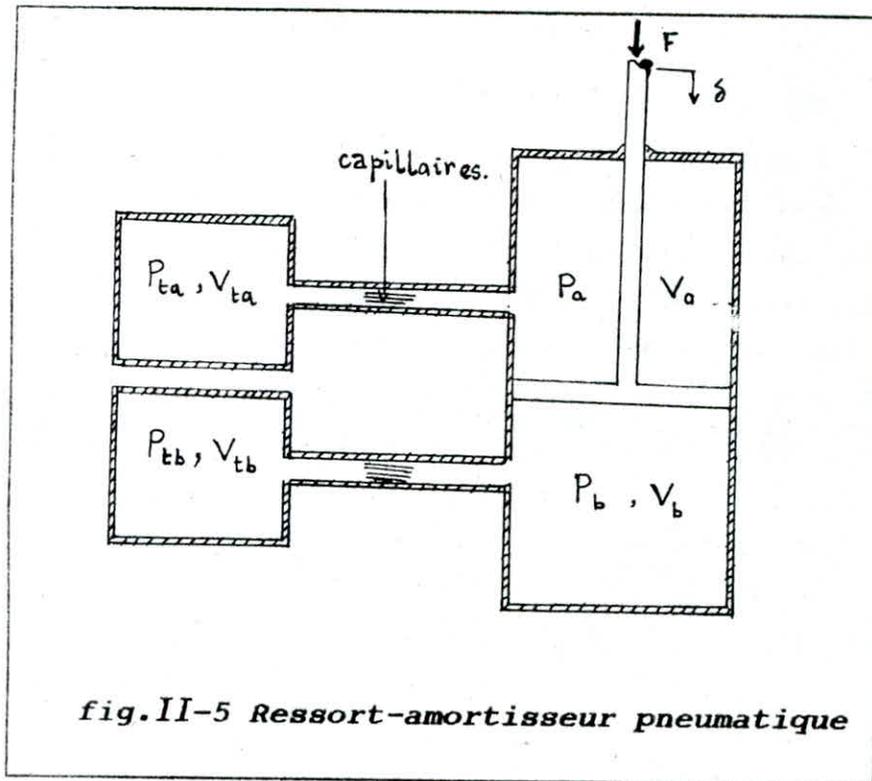
En général le ressort pneumatique à une seule action est utilisé dans les applications où la charge est à un seul sens. Celui à double action supporte la charge dans les deux sens. On note qu'il est plus avantageux, dans le cas d'une charge à deux sens, d'utiliser deux ressorts à une seule action travaillant en opposition, que d'utiliser celui à double action. (fig II-4)



-Ressort-amortisseur pneumatique :

*C'est un ressort pneumatique à double action dont les deux volumes de part et d'autre du piston sont en communication avec deux tanks connectés au cylindre par deux passages ayant des capillaires résistants. (voir fig.II-5)*

*L'amortissement est dû à la résistance des capillaires, il dépend de la dimension des passages entre les tanks et le cylindre. La longueur de ces passages est choisie d'une manière convenable afin d'avoir l'effet de l'amortissement. Sinon, si les passages sont très larges ou bien très étroits, le système tend à devenir un simple ressort pneumatique.*



### 3-Les systèmes actifs :

Ils agissent par l'action de servomécanismes de types pneumatiques ou électro-hydrauliques. Un servomécanisme est conçu pour réaliser un certain programme d'action, grâce à une comparaison permanente entre les consignes qui lui sont données et le travail qu'il exécute.

Le système actif possède une source d'énergie, il est adapté à répondre aux excitations d'une façon à satisfaire un certain critère requis.

A cause de leur complexité, les systèmes actifs sont décrits par des équations différentielles d'ordre élevé, en général supérieur à trois, ce qui rend leur étude plus difficile et différente de celle des systèmes passifs.

Exemples de systèmes actifs :

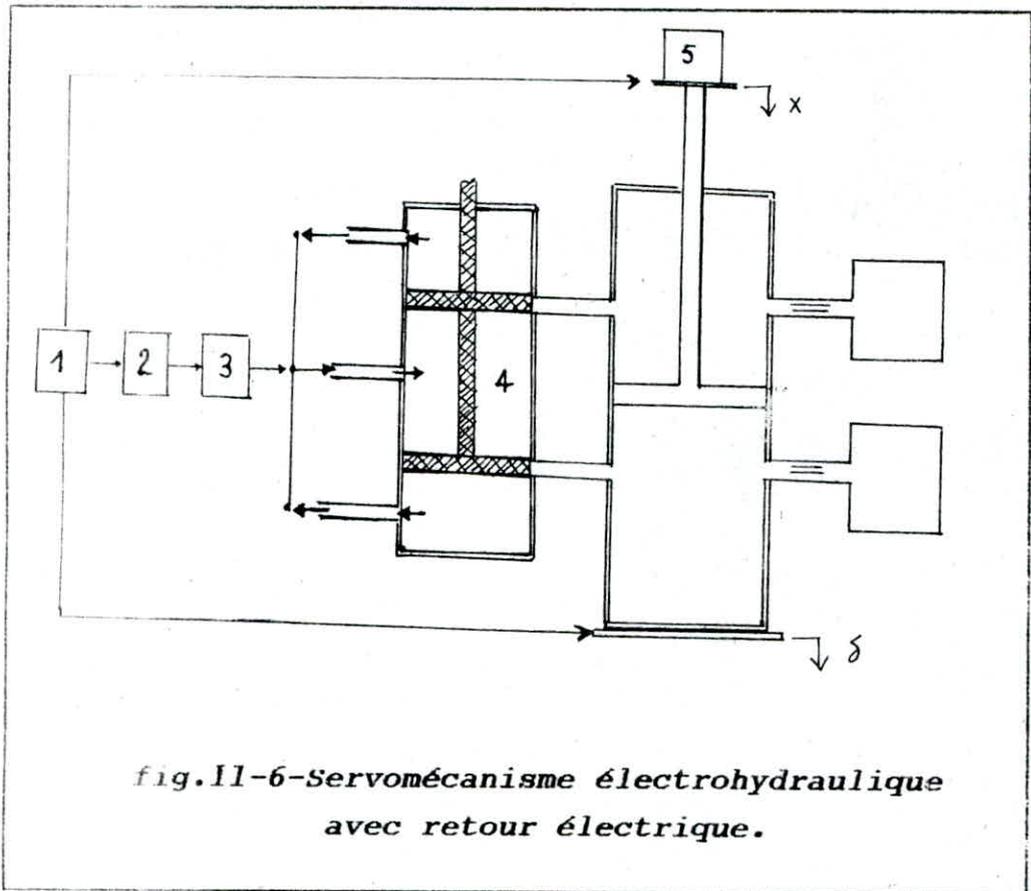


fig.11-6-Servomécanisme électrohydraulique  
avec retour électrique.

- 1-Compateur. (Detecteur.D)
- 2-Amplificateur. (G)
- 3-Moteur.
- 4-servovalve. (V)
- 5-Corps à vibro-isoler. (m)

Le détecteur  $D$  effectue une comparaison entre l'entrée  $u$  et la sortie  $x$  et produit un signal électrique proportionnel à l'écart  $\delta = u - x$ . Celui-ci est amplifié par l'élément  $G$  du système, puis utilisé pour actionner un moteur, qui à son tour produit une force  $F$  proportionnelle au signal d'entrée. La force  $F$  agit directement sur une valve  $V$  de façon à contrôler les déplacements du piston et garder la position désirée du corps à vibro-isoler  $m$ . Ainsi l'action de la valve est proportionnelle à l'écart  $\delta$ .

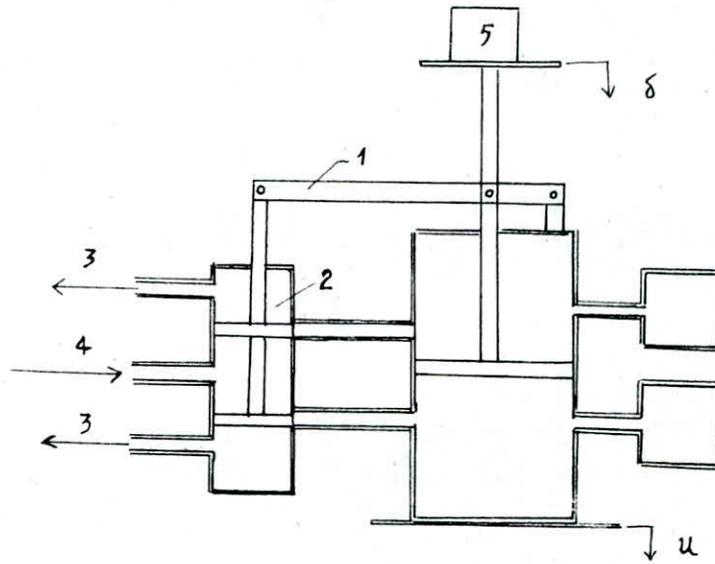


fig.II-7-Servomécanisme pneumatique à retour mécanique.

- 1-Elément de retour mécanique.
- 2-Servovalve.
- 3-Sortie du gaz.
- 4-Entree du gaz.
- 5-Corps à vibro-isoler.

Dans l'exemple de la fig.II-7, le gaz est aspiré dans une enceinte à basse pression pour être recomprimé et refoulé dans la tuyauterie d'alimentation à haute pression de manière à déplacer le piston d'une distance permettant au système de retrouver l'équilibre.

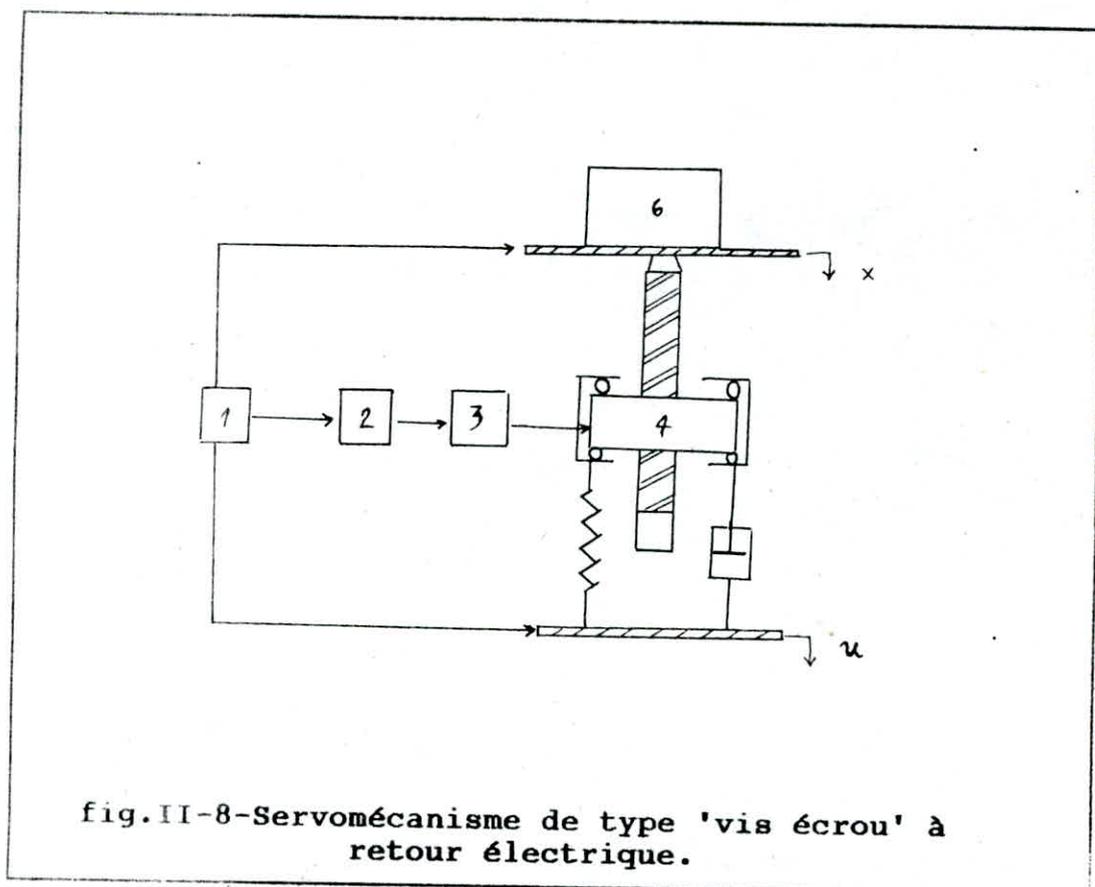


fig.II-8-Servomécanisme de type 'vis écrou' à retour électrique.

- 1-Capteur.
- 2-Amplificateur.
- 3-Moteur.
- 4-Disque.
- 5-Vis.
- 6-Corps à vibro-isoler.

Le signal électrique dû au déplacement relatif est transformé en un mouvement de rotation transmis directement au disque. Ce dernier le transforme par l'intermédiaire d'une vis en un mouvement de translation qui permet au corps à vibro-isoler de rejoindre sa position d'équilibre.

Les systèmes de suspension peuvent être réalisés par la combinaison de systèmes actifs et passifs, ils sont dits systèmes semi-actifs. Ils présentent l'avantage d'être plus performants que les systèmes passifs et plus simples que les systèmes actifs.

Exemple de système semi-actif :

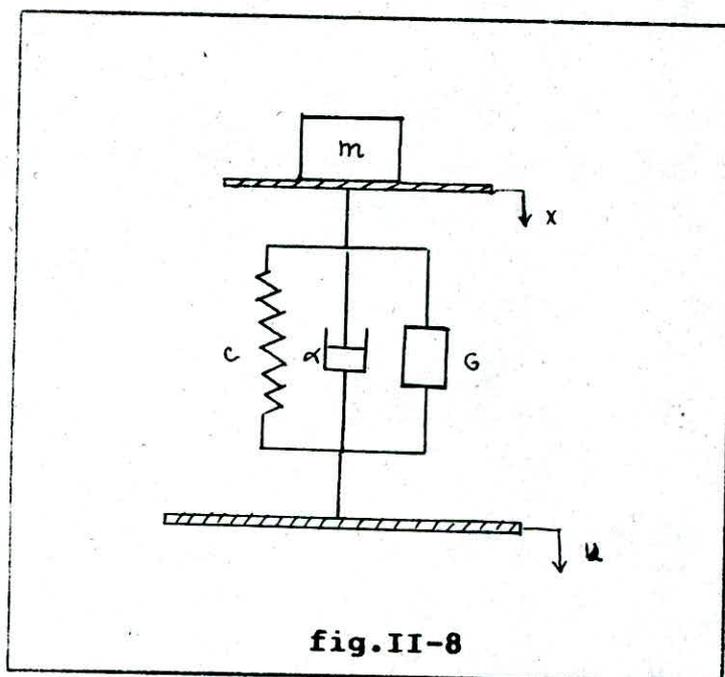
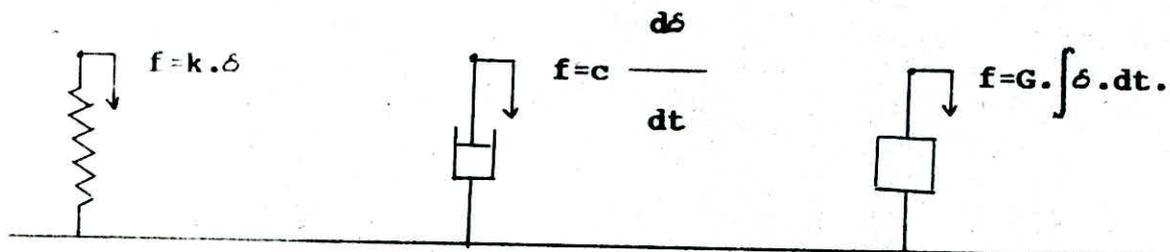


fig.II-8

$$\delta = (u - x)$$



# Chapitre 3

## **SYSTEME DE SUSPENSION OPTIMAL**



## 1-Présentation du problème :

### 1-1-Introduction :

Le problème est de synthétiser analytiquement les fonctions de transfert optimales du fauteuil suivant le modèle choisi du corps du chauffeur, l'expression de la densité spectrale de l'excitation aléatoire et le critère d'optimisation requis.

### 1-2-Hypothèses:

- Les modèles biodynamiques du corps du chauffeur sont considérés comme des systèmes linéaires et discrets.
- Les excitations sont des processus aléatoires, normaux, stationnaires et ergodiques.
- Il n'existe que des vibrations verticales.
- il n'y a aucune influence du corps du chauffeur ni de la structure de suspension sur la source d'excitation.

## 2-Problème de critère de suspension optimale :

### 2-1 Critère du déplacement relatif :

Le but est de limiter les déplacements réels du siège du chauffeur par rapport à sa base, ce qui assure une bonne adhérence et une rigidité accrue; pour cela il faut minimiser la valeur quadratique moyenne du déplacement relatif :  $\overline{[x(t) - x_0(t)]^2}$ , où  $x(t)$  est le déplacement du siège et  $x_0(t)$  celui de sa base.

### 2-2 Critère d'accélération :

Le critère d'accélération minimale a pour objet de minimiser la valeur quadratique moyenne de cette dernière  $\overline{[\ddot{x}(t)]^2}$  et ceci dans le but d'assurer une souplesse au système et par suite

confort et sécurité.

2-3 Recherche d'un cas optimal :

D'un coté, la minimisation du déplacement relatif correspond à une liaison parfaitement rigide, donc transmet de grandes accélérations. D'un autre coté, assurer une accélération minimale correspond à une liaison souple, donc un déplacement relatif important. Face à ces deux exigences contradictoires, un compromis entre les deux a été choisi et qui consiste à satisfaire chacun des deux critères.

2-4 Expression de la fonctionnelle :

En supposant que les valeurs moyennes du déplacement relatif et de l'accélération sont nulles, les valeurs quadratiques moyennes deviennent :

$$\overline{[x(t) - x_0(t)]^2} = \sigma_{x-x_0}^2 \dots \dots \dots \text{Dispersion de l'écart.}$$

$$\overline{[\ddot{x}(t)]^2} = \sigma_{\ddot{x}}^2 \dots \dots \dots \text{Dispersion de l'accélération.}$$

Le problème cité précédemment revient à la minimisation de la fonctionnelle suivante :

$$C = \sigma_{x-x_0}^2 + \lambda \cdot \sigma_{\ddot{x}}^2 \quad \text{(III-1)}$$

$$\text{Où : } \sigma_{x-x_0}^2 \text{ [m}^2\text{]} - \text{Dispersion de l'écart.}$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 \text{ [m}^2\text{/s}^4\text{]} - \text{Dispersion de l'accélération.}$$

$$\lambda \text{ [s}^4\text{]} - \text{multiplicateur de lagrange.}$$

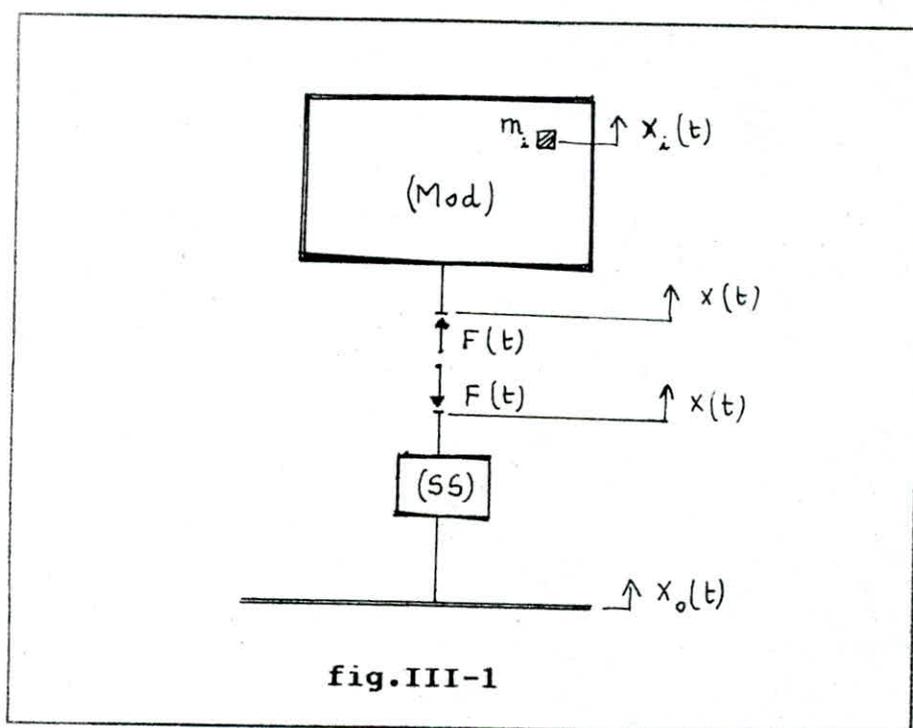
Le critère est important vu son application pratique dans le

domaine de la suspension des véhicules, confort, sécurité,...

Il est à noter qu'il existe d'autres critères qu'on choisi selon le domaine d'application, tels que la minimisation de la vitesse, de l'énergie transmise, les variations de l'accélération,...

### 3-Formulation mathématique du problème :

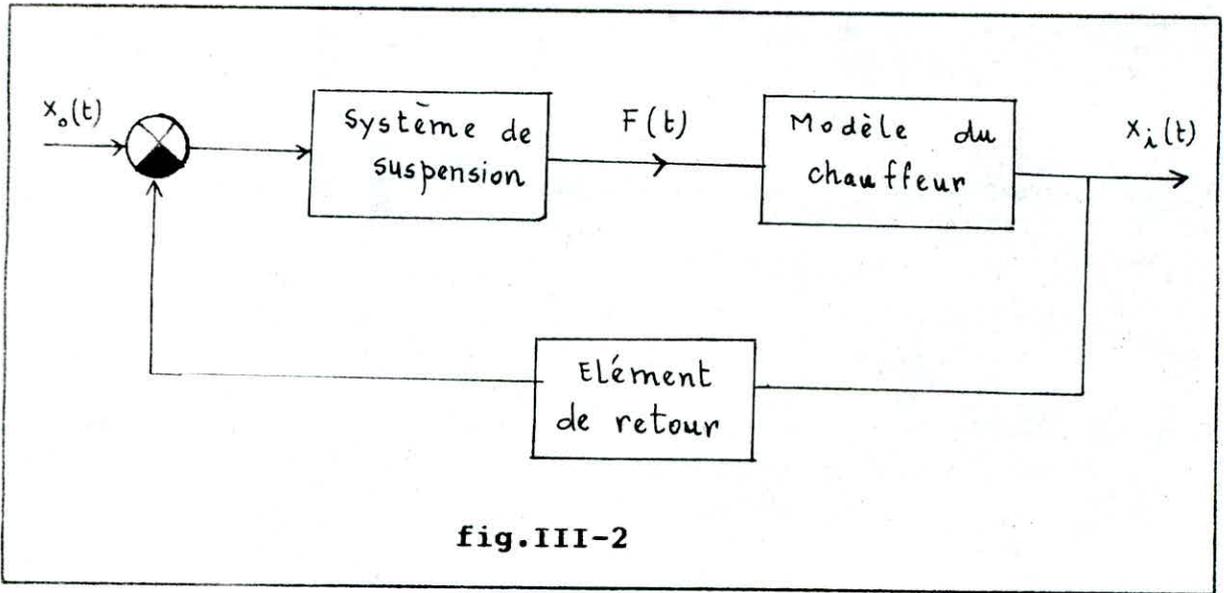
Le modèle biodynamique du corps du chauffeur (mod), le système de suspension (ss) et une source d'excitation sont représentés schématiquement sur la fig.III-1.



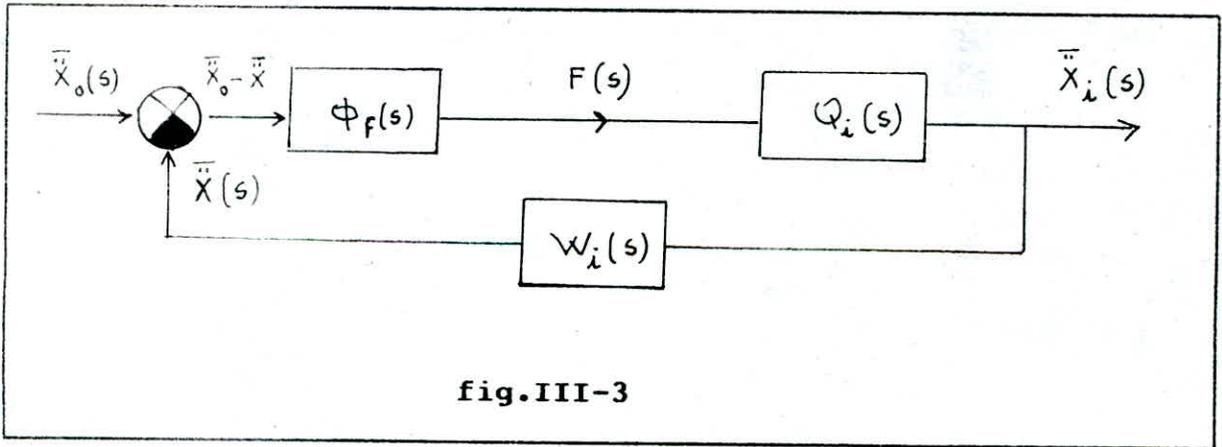
- Où:  $x_i(t)$ -coordonnée de la i-ème masse.  
 $x(t)$ -coordonnée du point de contact entre (mod) et (ss).  
 $f(t)$ -force transmise entre (mod) et (ss).  
 $t$ -la variable temps.

La représentation de notre système en boucle

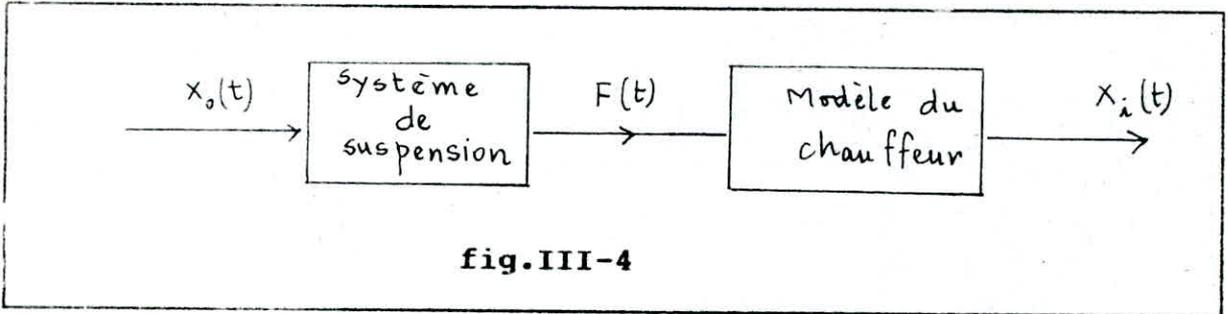
fermée est :



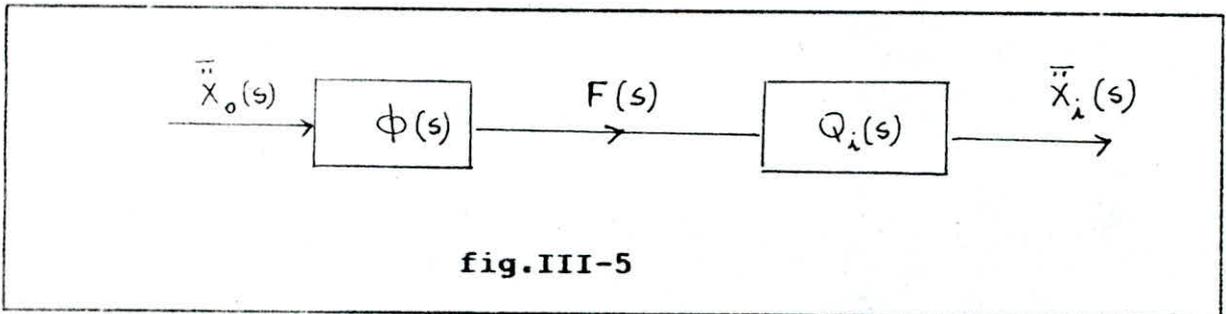
En passant par les transformées de Laplace, on aura le schéma suivant :



En boucle ouverte on a :



De même que précédemment :



En boucle ouverte on a : 
$$\frac{\bar{X}_i(s)}{\bar{X}_0(s)} = \phi(s) \cdot Q_i(s)$$

En boucle fermée on a : 
$$\frac{\bar{X}_i(s)}{\bar{X}_0(s)} = \frac{\phi_f(s) \cdot Q_i(s)}{1 + \phi_f(s) Q_i(s) w_i(s)}$$

On tire alors : 
$$\phi(s) = \frac{\phi_f(s)}{1 + \phi_f(s) \cdot Q_i(s) \cdot w_i(s)} \quad \text{(III-2)}$$

avec : 
$$\phi(s) = \frac{\bar{F}(s)}{\bar{X}_0(s)} \quad \text{(III-3)}$$

On désigne par :

$$L_i(s) = \frac{\bar{X}_i(s)}{\bar{X}(s)}, \quad L(s) = \frac{\bar{F}(s)}{\bar{X}(s)} \quad \text{et} \quad G(s) = \frac{s^2}{L(s)}. \quad (\text{III-4})$$

Alors :

$$Q_i(s) = \frac{\bar{\bar{X}}_i(s)}{\bar{F}(s)} = \frac{\bar{\bar{X}}_i(s)}{\bar{X}(s)} \frac{\bar{X}(s)}{\bar{F}(s)} = \frac{s^2 \bar{X}_i(s)}{\bar{X}_i(s)} \frac{\bar{X}(s)}{\bar{F}(s)} = \frac{s^2 L_i(s)}{L(s)} \quad (\text{III-5})$$

$$W_i(s) = \frac{\bar{\bar{X}}(s)}{\bar{\bar{X}}_i(s)} = \frac{s^2 \bar{X}(s)}{s^2 \bar{X}_i(s)} = \frac{1}{L_i(s)} \quad (\text{III-6})$$

En utilisant les relations (II-3) et (II-4), on écrit les relations suivantes :

$$\begin{aligned} H_{\frac{x-x_0}{\bar{x}_0}}(s) &= \frac{\bar{X}(s) - \bar{X}_0(s)}{\bar{\bar{X}}_0(s)} = \frac{\frac{\bar{X}(s)}{\bar{F}(s)} - \frac{\bar{X}_0(s)}{\bar{F}(s)}}{\frac{\bar{\bar{X}}_0(s)}{\bar{F}(s)}} = \frac{\frac{1}{L(s)} - \frac{1}{s^2 \phi(s)}}{\frac{1}{\phi(s)}} \\ &= \frac{\frac{s^2 \phi(s)}{L(s)} - 1}{s^2} = \frac{\phi(s) G(s) - 1}{s^2}. \end{aligned} \quad (\text{III-7})$$

$$\begin{aligned} H_{\frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_0}}(s) &= \frac{\bar{\bar{X}}_i(s)}{\bar{\bar{X}}_0(s)} = \frac{\bar{\bar{X}}_i(s)}{\bar{X}(s)} \cdot \frac{\bar{X}(s)}{\bar{F}(s)} \frac{\bar{F}(s)}{\bar{\bar{X}}_0(s)} = \frac{L_i(s) s^2 \phi(s)}{L(s)} \\ &= L_i(s) \phi(s) G(s) \end{aligned} \quad (\text{III-8})$$

En tenant compte des formules (I-4) et (I-5), on obtient :

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\bar{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\bar{x}_0}(s) ds \quad (\text{III-9})$$

$$\sigma_{\ddot{x}_i}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{\ddot{x}_i}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s) ds. \quad (\text{III-10})$$

La densité spectrale de l'excitation est de la forme :

$$S_{\ddot{x}_0}(s) = S_0 \cdot s^4 \Psi(s) \Psi(-s). \quad (\text{III-11})$$

L'expression de la fonctionnelle de (II-1) devient :

$$C = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left\{ \left[ \frac{\Phi(s)G(s)-1}{s^2} \right] \left[ \frac{\Phi(-s)G(-s)-1}{s^2} \right] + \lambda \left[ L_i(s)\Phi(s)G(s) \right] \left[ L_i(-s)\Phi(-s)G(-s) \right] \right\} S_0 s^4 \Psi(s) \Psi(-s). \quad (\text{III-12})$$

Ou bien :

$$C = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left\{ \left[ \Phi(s)G(s)-1 \right] \left[ \Phi(-s)G(-s)-1 \right] + \lambda s^4 \left[ L_i(s)\Phi(s)G(s) \right] \left[ L_i(-s)\Phi(-s)G(-s) \right] \right\} S_0 \Psi(s) \Psi(-s) \quad (\text{III-13})$$

#### 4-Solution générale du problème par la méthode de Wiener-Hopf :

La méthode de Wiener-Hopf est une méthode de synthèse globale, elle tient compte du caractère aléatoire des entrées des systèmes. Elle suppose le système linéaire et les entrées caractérisées par leurs densités spectrales de fréquences. La méthode donne des solutions par voie de synthèse mathématique, ce qui peut poser de délicats problèmes d'interprétation ou de réalisation physique.

Dans notre cas, pour obtenir la structure de suspension optimale (ss), il faut que la valeur de la fonctionnelle C soit minimale par rapport à la fonction de transfert  $\phi(s)$ . Soit  $\phi_0(s)$  la fonction de transfert optimale pour laquelle la fonctionnelle C est minimale, et  $C^*$  la valeur minimale de C.

$$\phi_0(s) = \phi(s) + \varepsilon \cdot \gamma(s)$$

(III-14)

Où  $\gamma(s)$  - fonction de balance arbitraire.

$\varepsilon$  - un paramètre constant.

Par analogie à (III-13), on écrit  $C^*$ .

$$C^* = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left\{ [(\phi(s) + \varepsilon \gamma(s)) G(s) - 1] [(\phi(-s) + \varepsilon \gamma(-s)) G(-s) - 1] + \lambda s^4 [L_\lambda(s) (\phi(s) + \varepsilon \gamma(s)) G(s)] [L_\lambda(-s) (\phi(-s) + \varepsilon \gamma(-s)) G(-s)] \right\} \Psi(s) \Psi(-s) ds \quad (\text{III-15})$$

On calcule la première variation de  $C$  et on égalise sa dérivée première par rapport à  $\varepsilon$ , à zéro. On obtient :

$$\Delta C = C^* - C = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left\{ [\phi(s) G(s) + \varepsilon \gamma(s) G(s) - 1] [\phi(-s) G(-s) + \varepsilon \gamma(-s) G(-s) - 1] - [\phi(s) G(s) - 1] [\phi(-s) G(-s) - 1] + \lambda s^4 [(G(s) \phi(s) + \varepsilon \gamma(s) G(s)) \times (G(-s) \phi(-s) + \varepsilon \gamma(-s) G(-s)) - (G(s) \phi(s)) (G(-s) \phi(-s))] L_\lambda(s) L_\lambda(-s) \right\} \Psi(s) \Psi(-s) ds.$$

$$\phi(s) = \phi_0(s) \quad \text{ni} \quad \left. \frac{d(\Delta C)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left\{ [G(s) G(-s) + \lambda s^4 L_\lambda(s) L_\lambda(-s) G(s) G(-s)] \phi(s) - G(-s) \right\} \gamma(-s) + \left\{ [G(s) G(-s) + \lambda s^4 L_\lambda(s) L_\lambda(-s) G(s) G(-s)] \phi(s) - G(s) \right\} \gamma(s) \right\} \Psi(s) \Psi(-s) ds = 0. \quad (\text{III-16})$$

$$\text{Posons : } R(s) R(-s) = 1 + \lambda s^4 L_\lambda(s) L_\lambda(-s).$$

$$D(s) D(-s) = R(s) R(-s) G(s) G(-s). \quad (\text{III-17})$$

L'équation (III-16) devient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [D(s) D(-s) \phi(s) \Psi(s) \Psi(-s) - G(-s) \Psi(s) \Psi(-s)] \gamma(-s) ds + \int_{-\infty}^{+\infty} [D(s) D(-s) \phi(s) \Psi(s) \Psi(-s) - G(s) \Psi(s) \Psi(-s)] \gamma(s) ds = 0 \quad (\text{III-18})$$

En note (III-17) par :  $I_1 + I_2 = 0$ .

En posant :  $s = -s$ ,  $I_2$  devient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [D(s) D(-s) \phi(s) \Psi(s) \Psi(-s) - G(-s) \Psi(s) \Psi(-s)] \gamma(-s) (-ds) = \int_{-\infty}^{+\infty} [D(s) D(-s) \phi(s) \Psi(s) \Psi(-s) - G(-s) \Psi(s) \Psi(-s)] \gamma(-s) ds = I_1.$$

Donc :  $I_1 + I_2 = 0 \Leftrightarrow 2I_1 = 0 \Leftrightarrow I_1 = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ [D(s) D(-s) \phi(s) \Psi(s) \Psi(-s)] - [G(-s) \Psi(s) \Psi(-s)] \right\} \gamma(-s) ds = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ D(s) \phi(s) \Psi(s) - \frac{G(-s) \Psi(s)}{D(-s)} \right] \gamma(-s) \Psi(-s) D(-s) ds = 0 \quad (\text{III-19})$$

De (III-19) on tire :

$$D(s) \phi(s) \Psi(s) - \frac{G(-s) \Psi(s)}{D(-s)} = 0 \quad (\text{III-20})$$

Donc :

$$\phi(s) = \frac{1}{D(s) \Psi(s)} \left[ \frac{G(-s) \Psi(s)}{D(-s)} \right] \quad (\text{III-21})$$

En revenant à :  $D(s) = R(s) G(s)$ , on trouve :

$$\phi(s) = \frac{1}{\Psi(s) R(s) G(s)} \left[ \frac{\Psi(s)}{R(-s)} \right] \quad (\text{III-22})$$

Pour que le système soit stable, on ne prend de  $\left[ \frac{\Psi(s)}{R(-s)} \right]_+$ , que la partie ayant des pôles à gauche de l'axe imaginaire, et on note:  $\left[ \frac{\Psi(s)}{R(-s)} \right]_+$ .

Enfin, la fonction de transfert optimale de notre système aura comme expression :

$$\phi(s) = \frac{1}{\Psi(s) R(-s) G(s)} \left[ \frac{\Psi(s)}{R(-s)} \right]_+ \quad (\text{III-23})$$

En remplaçant l'expression de  $\phi(s)$  de (III-23) dans (III-2), on écrira la fonction de transfert optimale en boucle fermée  $\phi_f(s)$  en fonction de  $\phi(s)$ .

$$\phi_f(s) = \frac{\phi(s)}{1 - \phi(s) G(s)} \quad (\text{III-24})$$

# Chapitre 4

## **PRESENTATION DES MODELES BIODYNAMIQUES**



## 1-Introduction :

L'homme comme système mécanique est d'une complexité extrême, et ses propriétés mécaniques sont très variables. Les informations sont faibles en ce qui concerne la grandeur des forces capables de provoquer des dommages mécaniques au corps humain.

Dans ce sens, et pour éviter l'exposition à de tels dangers, des méthodes ont été élaborées permettant d'étudier sa structure et mesurer les propriétés physiques de ses parties constituantes.

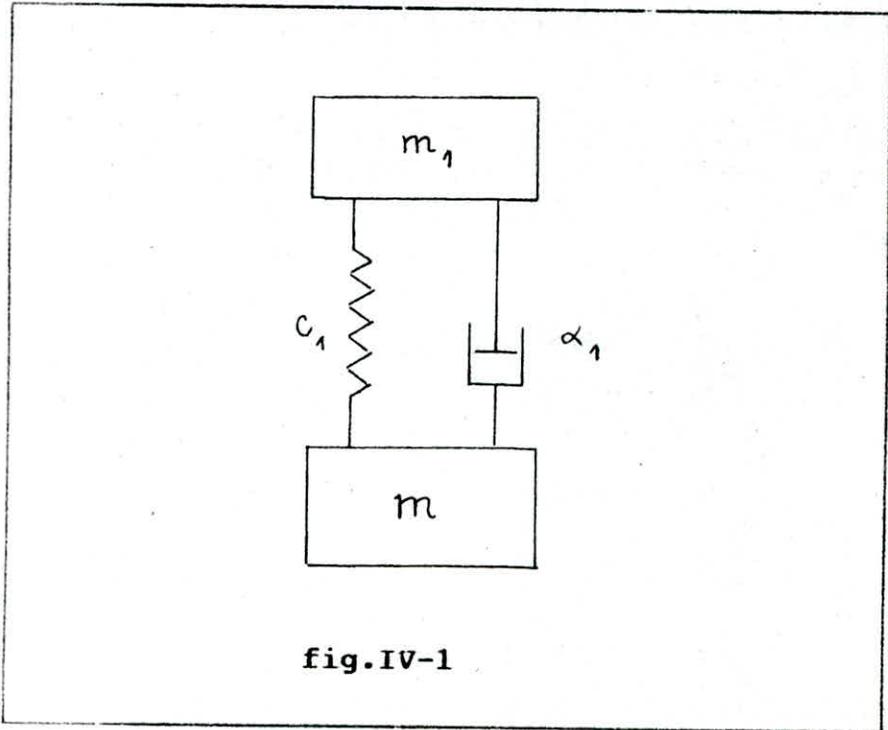
L'étude des effets des vibrations sur le corps humain s'effectue en laboratoire à l'intérieur d'un environnement simulé et contrôlé. Les méthodes de mesure sont adaptées à chaque propriété particulière du système biologique soumis aux excitations. Ces propriétés sont traitées séparément et approximativement, elles peuvent varier non seulement d'un individu à un autre, mais aussi au cours du temps pour un même individu. Donc il est nécessaire d'utiliser des méthodes statistiques de façon adéquate, suite à un grand nombre d'observations et de contrôles.

En général, pour mesurer la réponse du corps, on utilise des méthodes de mesure sans contact, les rayons X s'adaptent avec succès, les observations optiques, cinématographiques, ...

Plusieurs études ont été menées afin de synthétiser des modèles mécaniques pouvant remplacer le corps humain dans des domaines bien spécifiés et dans des limites étroites. Ainsi le corps du chauffeur a été modélisé, et parmi ces modèles, on présentera trois dont on étudiera l'influence sur la structure de suspension du siège.

## 2-Présentation des modèles :

### 2-1 Modèle 1 :



Elaboré par A.Wisner, A.Donnadieu et A.Berthos-'A biomécanical modèle of man for the study of véhicule seat and suspension'-

- $m_1$  : représente la tête, le thorax et les membres supérieurs.
- $m$  : représente l'abdomen, le bassin et les membres inférieurs.
- l'amortisseur  $\alpha_1$  et le ressort  $c_1$  remplacent la colonne vertébrale et le diaphragme.

Les données numériques de ce modèle sont les suivantes :

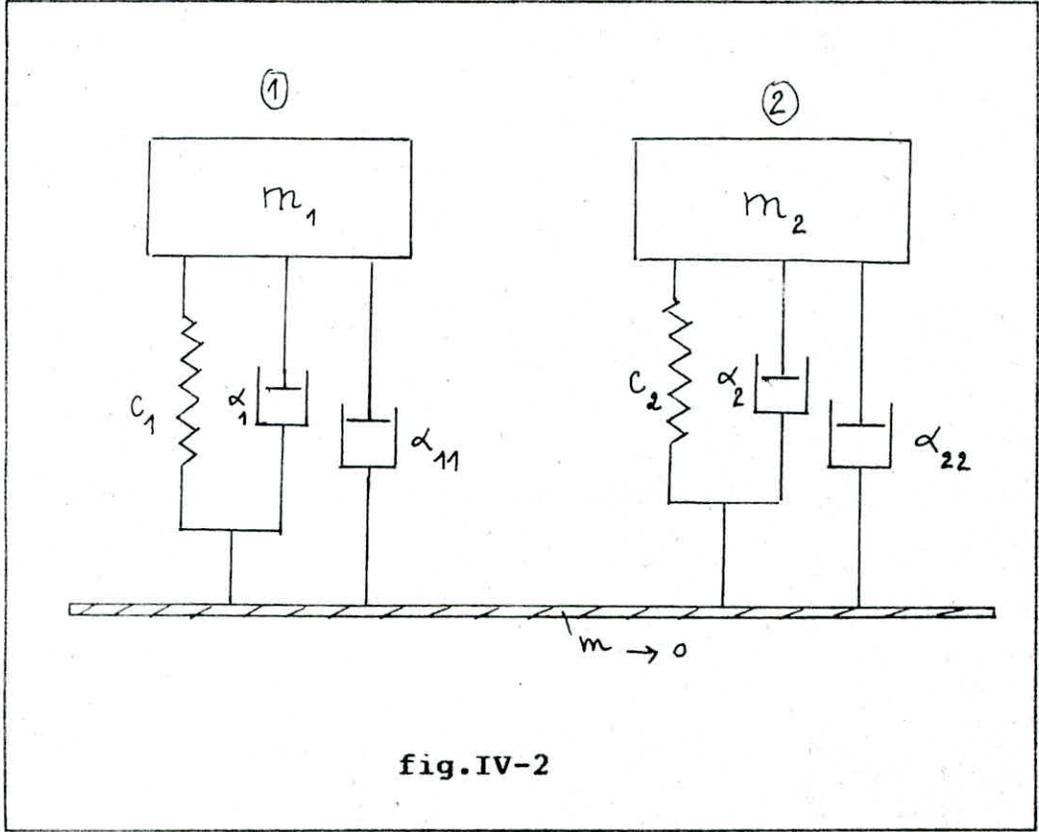
$$m_1 = 27.5 \text{ [Kg]}$$

$$m = 29.5 \text{ [Kg]}$$

$$c_1 = 22955.4 \text{ [Kg/s}^2\text{]}$$

$$\alpha_1 = 353.16 \text{ [Kg/s]}$$

2-2 Modèle no2 :



D'après M.Ksiazek-'Some problems of identification and modeling of the human body'-'man under vibration'-

La partie 1 représente la tête et la partie 2 représente le reste du corps.

Les données numériques sont :

$$m_1 = 7.739 \text{ [Kg]}$$

$$c_1 = 38823.41493 \text{ [Kg/s}^2\text{]}$$

$$\alpha_1 = 130.62722 \text{ [Kg/s]}$$

$$\alpha_{11} = 2932.865197 \text{ [Kg/s]}$$

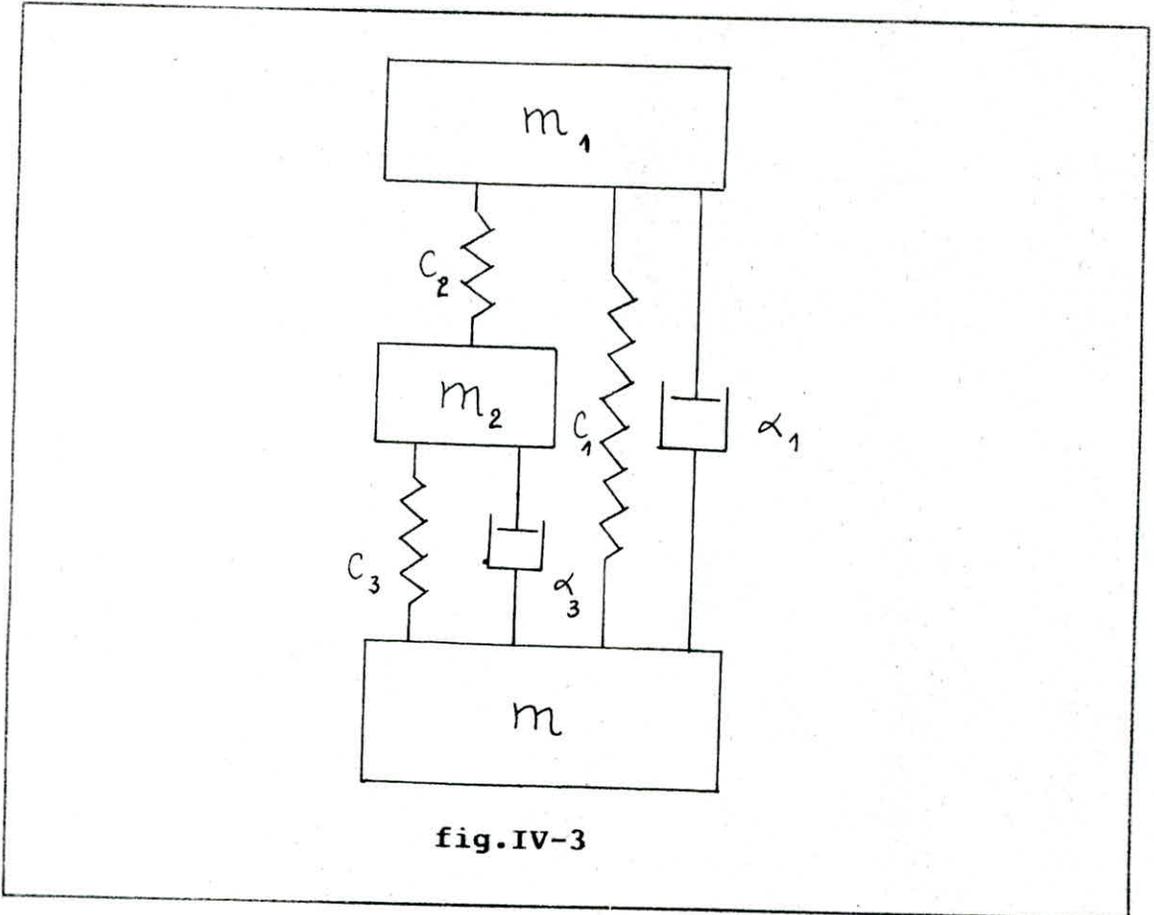
$$m_2 = 79.4255 \text{ [Kg]}$$

$$c_2 = 93905.104 \text{ [Kg/s}^2\text{]}$$

$$\alpha_2 = 1307.0108 \text{ [Kg/s]}$$

$$\alpha_{22} = 15373.50446 \text{ [Kg/s]}$$

2-3 Modèle no3 :



D'après G.R.Hopkins-'Non linear lumped parameter mathematical model of dynamic response of the human body'-

- $m_1$  : représente la masse réduite de la partie haute du corps.
- $m_2$  : représente la masse réduite des parties internes (estomac, ...).
- $m$  : représente la masse réduite de la partie basse du corps.
- $(c_1, \alpha_1)$  : colonne vertébrale.
- $(c_3, \alpha_3)$  : rigidité et amortissement de la partie basse du ventre.
- $c_2$  : rigidité du diaphragme.

Les données numériques du modèle sont :

$$m_1 = 23.587164 \text{ [Kg]}$$

$$m_2 = 22.68072 \text{ [Kg]}$$

$$m = 27.21600072 \text{ [Kg]}$$

$$c_1 = 78975.405 \text{ [Kg/s}^2\text{]}$$

$$c_2 = 29835.153 \text{ [Kg/s}^2\text{]}$$

$$c_3 = 15795.081 \text{ [Kg/s}^2\text{]}$$

$$\alpha_1 = 1226.25 \text{ [Kg/s]}$$

$$\alpha_3 = 122.625 \text{ [Kg/s]}$$

# Chapitre 5

## **APPLICATION AU MODELE 1**



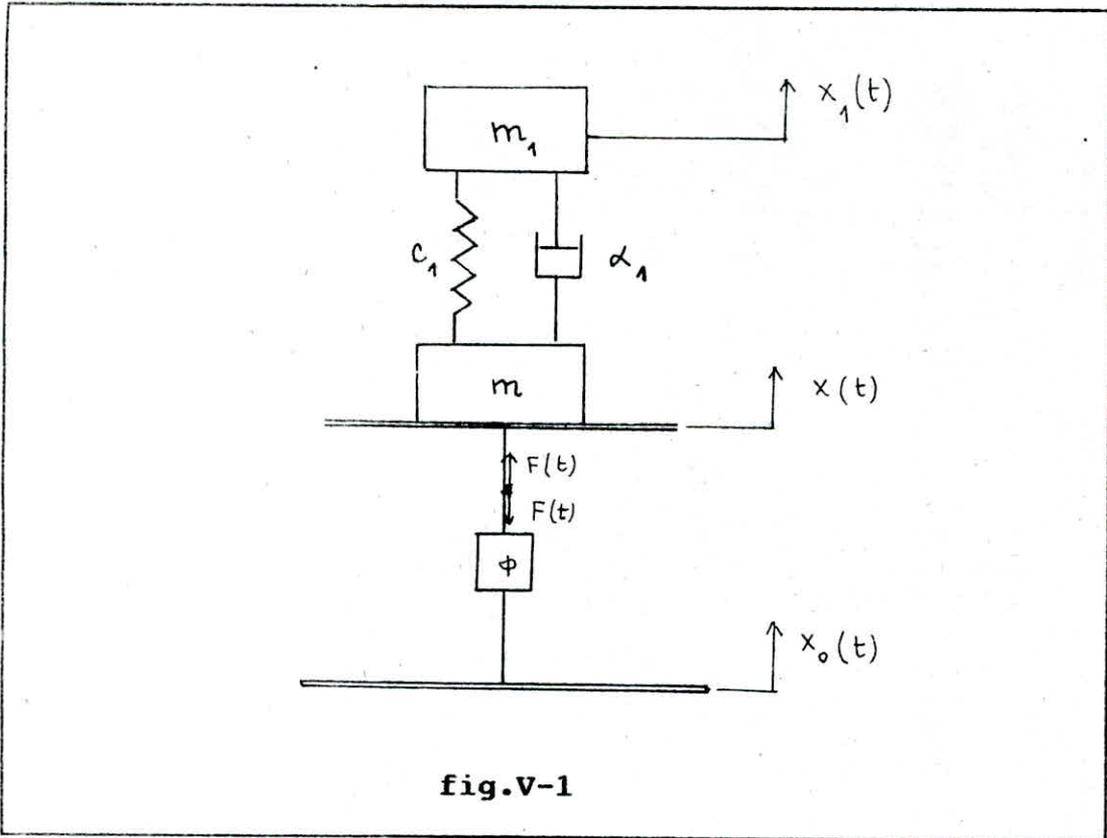


fig.V-1

De la relation fondamentale de la dynamique, on écrit :

$$F - c_1(x - x_1) - \alpha_1(\dot{x} - \dot{x}_1) = m\ddot{x}$$

$$c_1(x - x_1) + \alpha_1(\dot{x} - \dot{x}_1) = m_1\ddot{x}_1$$

En passant aux transformées de Laplace, on a :

$$F - c_1(x - x_1) - \alpha_1 s(x - x_1) = m s^2 x$$

$$c_1(x - x_1) - \alpha_1 s(x - x_1) = m_1 s^2 x_1$$

1-Influence de la partie m :

Selon (III-4) et (III-17) :

$$L_i(s) = 1$$

$$G(s) = \frac{m_1^2 s^2 + \alpha_1 s + c_1}{m \cdot m_1 s^2 + \alpha_1 (m + m_1) s + c_1 (m + m_1)} \quad (V-1)$$

$$R(s) \cdot R(-s) = 1 + \lambda \cdot s^4 \quad (V-2)$$

En décomposons (IV-2), on obtient :

$$R(s) = As^2 + Bs + C \quad (V-3)$$

Les coefficients A, B et C sont les solutions du système algébrique

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= \lambda \\ 2AC - B^2 &= 0 \\ C^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (V-4)$$

A, B et C sont les paramètres dépendants de la structure du modèle biodynamique, ils sont fonctions du multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ .

(fig.V-2)

1-a Excitation de type 'bruit blanc':

$$S_{\ddot{x}_0}(s) = N^2.$$

De (III-11), on trouve :

$$S_0 = N^2 \quad \text{et} \quad \psi(s) = \frac{1}{s^2} \quad (V-5)$$

De (III-24), on aura :

$$\phi(s) = \frac{s^2 [m \cdot m_1 s^2 + \alpha_1 (m + m_1) s + c_1 (m + m_1)]}{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1) \cdot (As^2 + Bs + C)} \cdot \frac{1/s^2}{As^2 - Bs + C}$$

Après décomposition :

$$\frac{1}{s^2 (As^2 - Bs + C)} = \frac{Ms + N}{s^2} + \frac{Ps + Q}{As^2 - Bs + C}$$

Les paramètres M, N, P et Q sont tirés du système suivant avec A, B, C déjà connus : (fig.V-3)

$$\left. \begin{aligned}
 AM+P=0 \\
 AN-BM+Q=0 \\
 CM-BN=0 \\
 CN=1
 \end{aligned} \right\} \quad (V-6)$$

Finalement, on obtient :

$$\phi(s) = \frac{n_3 s^3 + n_2 s^2 + n_1 s + n_0}{d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0} \quad (V-7-a)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Où : } n_3 &= m \cdot m_1 \cdot M \\
 n_2 &= m \cdot m_1 \cdot N + \alpha_1 (m + m_1) \cdot M \\
 n_1 &= (\alpha_1 N + c_1 M) (m + m_1) \\
 n_0 &= c_1 (m + m_1) \cdot N
 \end{aligned} \quad (V-8)$$

$$\begin{aligned}
 d_4 &= A \cdot m_1 \\
 d_3 &= A \cdot \alpha_1 + B \cdot m_1 \\
 d_2 &= A \cdot c_1 + B \cdot \alpha_1 + C \cdot m_1 \\
 d_1 &= B \cdot c_1 + C \cdot \alpha_1 \\
 d_0 &= C \cdot c_1
 \end{aligned}$$

les module et phase de  $\phi(s)$  sont représentés sur la fig.V-7.

De (III-24), on écrit la fonction de transfert en boucle fermée:

$$\phi_f(s) = \frac{\left[ m \cdot m_1 s^2 + \alpha_1 (m + m_1) s + c_1 (m + m_1) \right] (Ms + N)}{As^2 (m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)} \quad (V-7-b)$$

De (III-7) et (III-8), on écrit les dispersions : (fig.V-4)

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} N^2 \lambda^{3/4}. \quad (V-9)$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} N^2 \lambda^{-1/4} \quad (V-10)$$

La fonctionnelle C aura pour expression :

$$C = 2 N^2 \lambda^{3/4} \quad (V-11)$$

La fonction de transfert  $\phi(s)$ , les dispersions et la fonctionnelle sont fonctions du multiplicateur  $\lambda$ .

En résolvant les systèmes non linéaires (V-4) et linéaire (V-6) pour différentes valeurs de  $\lambda$ , on aboutit aux solutions qu'on appellera respectivement les paramètres dépendants de la structure et les paramètres dépendants de l'excitation.

On présentera les variations de ces paramètres ainsi que les variations des dispersions et de la fonctionnelle en fonction du multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ .

Pour cela, on préfère effectuer le changement de variable suivant :

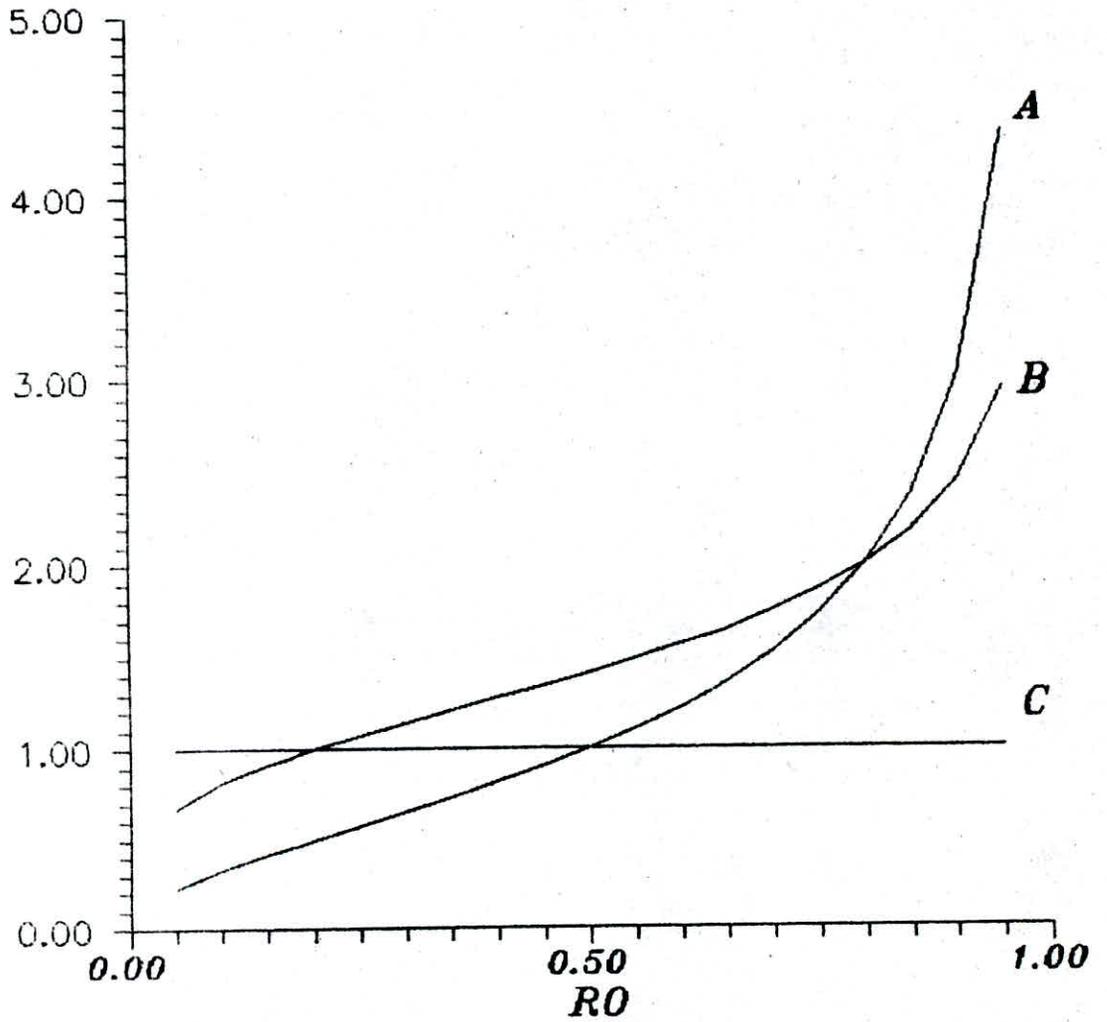
$$\lambda = \lambda_0 \frac{\rho}{1-\rho} ; \quad \rho \in [0, +\infty [.$$

$$\text{Avec : } \lambda_0 = 1 \text{ [s}^4\text{]}$$

Les variations de  $\lambda$  entre zéro et l'infini correspondent aux variations de  $\rho$  entre zéro et un.

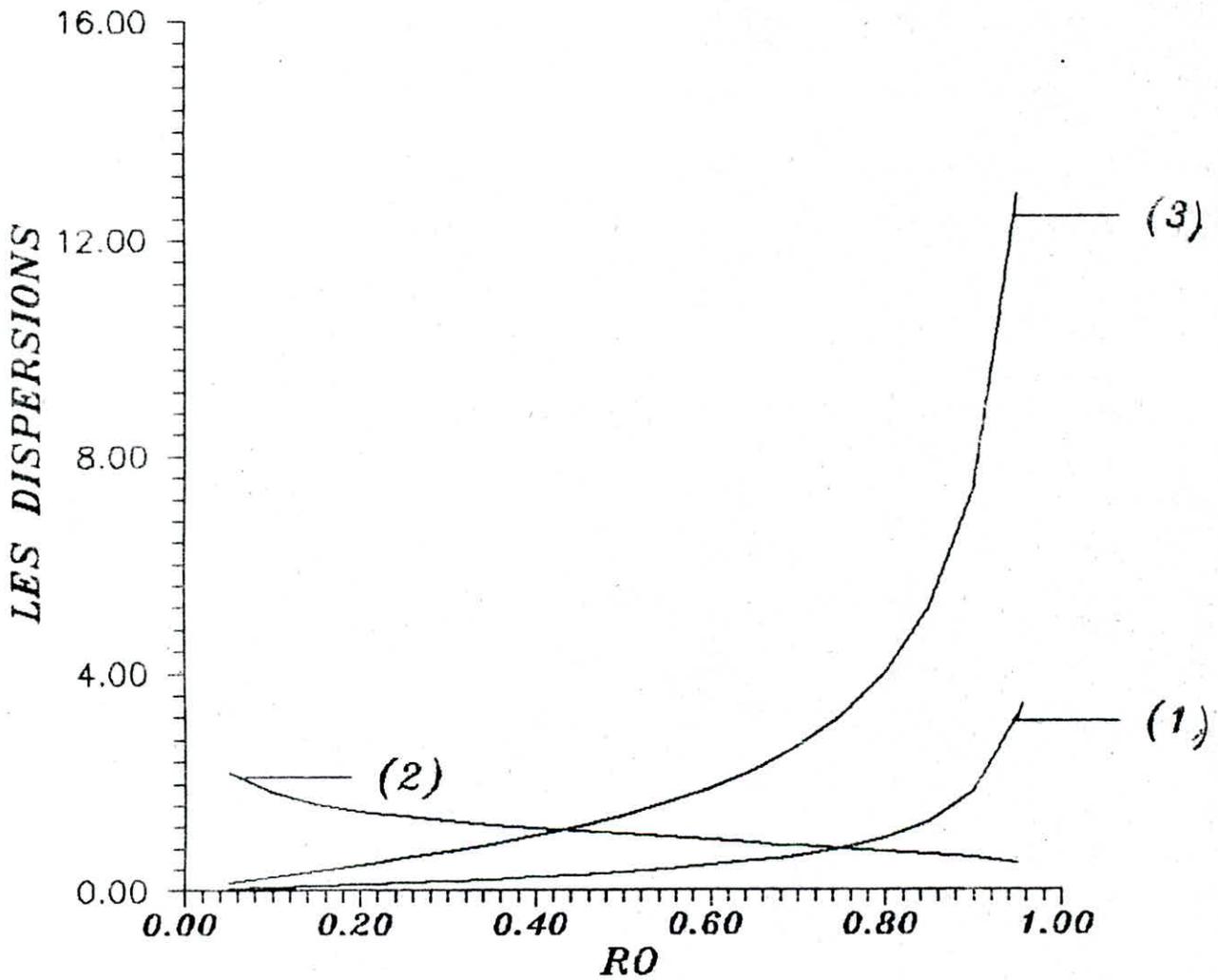
Comme on tracera le module et la phase de la fonction de transfert dans la plage de fréquences allant de zéro à 150 hertz et pour trois valeurs différentes de  $\lambda$ .

**LES PARAMETRES DEPENDANTS DE LA STRUCTURE**



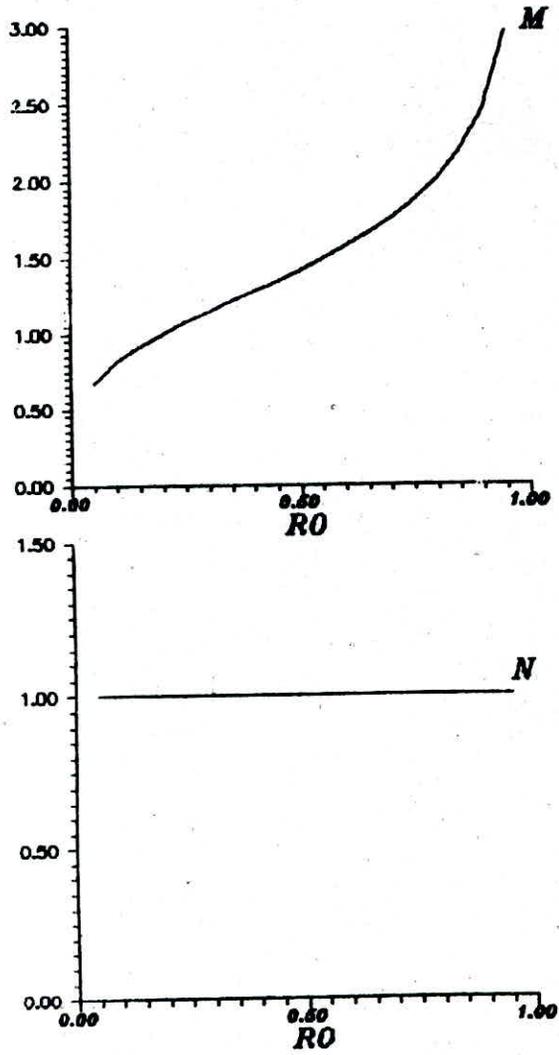
*A, unité:sec<sup>2</sup>*  
*B, unité:sec*  
*C, sans unité*

fig.V-2



- (1) Dispersion de l'écart / N2 , unité:sec<sup>3</sup>
- (2) Dispersion de l'accélération / N2, unité:1/sec
- (3) Fonctionnelle / N2 , unité:sec<sup>3</sup>

fig.V-4



**LES PARAMETRES DEPENDANTS DE L'EXCITATION**  
*M, écrit: 250*  
*N, sans écrits*

fig.V-3

1-b Excitation de type 'bruit couleur' :

$$S_{\ddot{x}_0}(s) = \frac{\alpha \cdot \sigma^2}{\pi} \cdot \frac{\Omega^2 - s^2}{(\Omega^2 + s^2)^2 - 4\alpha^2 s^2}$$

$$\alpha = 0.1 \text{ [1/s]}$$

$$\sigma^2 = 1 \text{ [cm}^2 \cdot \text{s}^{-4}\text{]}$$

$$\Omega = 37.24 \text{ [1/s]}$$

De (III-11), on obtient :

$$S_0 = \frac{\alpha \cdot \sigma^2}{\pi}$$

(V-12)

$$\psi(s) = \frac{\Omega + s}{s^2 (s^2 + 2\alpha s + \Omega^2)}$$

De (III-24), on écrit la fonction de transfert :

$$\phi(s) = \frac{s^2 [m \cdot m_1 s^2 + \alpha_1 (m + m_1) s + c_1 (m + m_1)]}{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1) (As^2 + Bs + C)} \cdot \frac{\Omega + s}{s^2 (s^2 + 2\alpha s + \Omega^2)} \cdot \frac{1}{As^2 - Bs + C}$$

Après décomposition :

$$\frac{\Omega + s}{s^2 (s^2 + 2\alpha s + \Omega^2)} \cdot \frac{1}{As^2 - Bs + C} = \frac{Ms^3 + Ns^2 + Ps + Q}{s^2 (s^2 + 2\alpha s + \Omega^2)} + \frac{Rs + T}{As^2 - Bs + C}$$

Les paramètres M, N, P et Q sont solutions du système : (fig.V-5)

$$\left. \begin{aligned} AM + R &= 0 \\ -BM + AN + 2\alpha R + T &= 0 \\ CM - BN + AP + R\Omega^2 + 2\alpha T &= 0 \\ CN - BP + AQ + T\Omega^2 &= 0 \\ CP - BQ &= 1 \\ CQ &= \Omega \end{aligned} \right\} \quad (V-13)$$

Finalement, on écrit la fonction de transfert :

$$\phi(s) = \frac{n_5 s^5 + n_4 s^4 + n_3 s^3 + n_2 s^2 + n_1 s + n_0}{d_5 s^5 + d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0} \quad (V-14-a)$$

$$\text{Où : } n_5 = M \cdot m \cdot m_1$$

$$n_4 = N \cdot m \cdot m_1 + M \cdot \alpha_1 (m + m_1)$$

$$n_3 = P \cdot m \cdot m_1 + N \cdot \alpha_1 (m + m_1) + M \cdot c_1 (m + m_1)$$

$$n_2 = Q \cdot m \cdot m_1 + P \cdot \alpha_1 (m + m_1) + N \cdot c_1 (m + m_1)$$

$$n_1 = Q \cdot \alpha_1 (m + m_1) + P \cdot c_1 (m + m_1)$$

$$n_0 = Q \cdot c_1 (m + m_1)$$

$$d_5 = A \cdot m_1$$

$$d_4 = A \cdot \alpha_1 + (B + A\Omega) m_1$$

$$d_3 = A \cdot c_1 + (B + A\Omega) \alpha_1 + (C + B\Omega) m_1$$

$$d_2 = (B + A\Omega) c_1 + (C + B\Omega) \alpha_1 + \Omega \cdot m_1$$

$$d_1 = (C + B\Omega) c_1 + \Omega \alpha_1$$

$$d_0 = \Omega c_1$$

les module et phase de  $\phi(s)$  sont représentés sur la fig.V-7.

La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\phi(s) = \frac{\left[ m \cdot m_1 s^2 + \alpha_1 (m + m_1) s + c_1 (m + m_1) \right] (Ms^3 + Ns^2 + Ps + Q)}{s^2 \left[ (A - M) s + (B + A\Omega - N) \right] (m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)} \quad (V-14-b)$$

Les dispersions sont : (fig.V-6)

$$\alpha_{x-x_0}^2 = \frac{\alpha \cdot \sigma^2}{\pi} \cdot \frac{\vartheta_1^2 \vartheta_0^{\beta_3 \beta_3 \beta_3 \beta_4} + \vartheta_0^2 (-\beta_1 \beta_3^2 + \beta_2 \beta_3 \beta_4)}{2\beta_0^{\beta_3 \beta_4} (-\beta_0^{\beta_3 \beta_3} - \beta_1^2 \beta_4 + \beta_1 \beta_2 \beta_3^2)} \quad (V-15)$$

Où :

$$\vartheta_0 = N - B - A\Omega$$

$$\vartheta_1 = M - A$$

$$\beta_0 = C\Omega^2$$

$$\beta_1 = B\Omega^2 + 2\alpha C$$

(V-16)

$$\beta_2 = A\Omega^2 + 2\alpha B + C$$

$$\beta_3 = 2\alpha A + B$$

$$\beta_4 = A$$

$$\sigma \frac{2}{x} = \frac{\alpha \cdot \sigma^2}{\Pi} \cdot \frac{h_4 + h_3 + h_2 + h_1}{2\beta_0\beta_4(-\beta_0\beta_3^2 - \beta_1^2\beta_4 + \beta_1\beta_2\beta_3)}$$

(V-17)

Où :

$$h_4 = \vartheta_3^2 (-\beta_0^2\beta_3 + \beta_0\beta_1\beta_3)$$

$$h_3 = (\vartheta_2^2 - 2\vartheta_1\vartheta_3)\beta_0\beta_1\beta_4$$

$$h_2 = (\vartheta_1^2 - 2\vartheta_0\vartheta_2)\beta_0\beta_3\beta_4$$

$$h_1 = \vartheta_0^2 (-\beta_1\beta_4^2 + \beta_2\beta_3\beta_4)$$

(V-18)

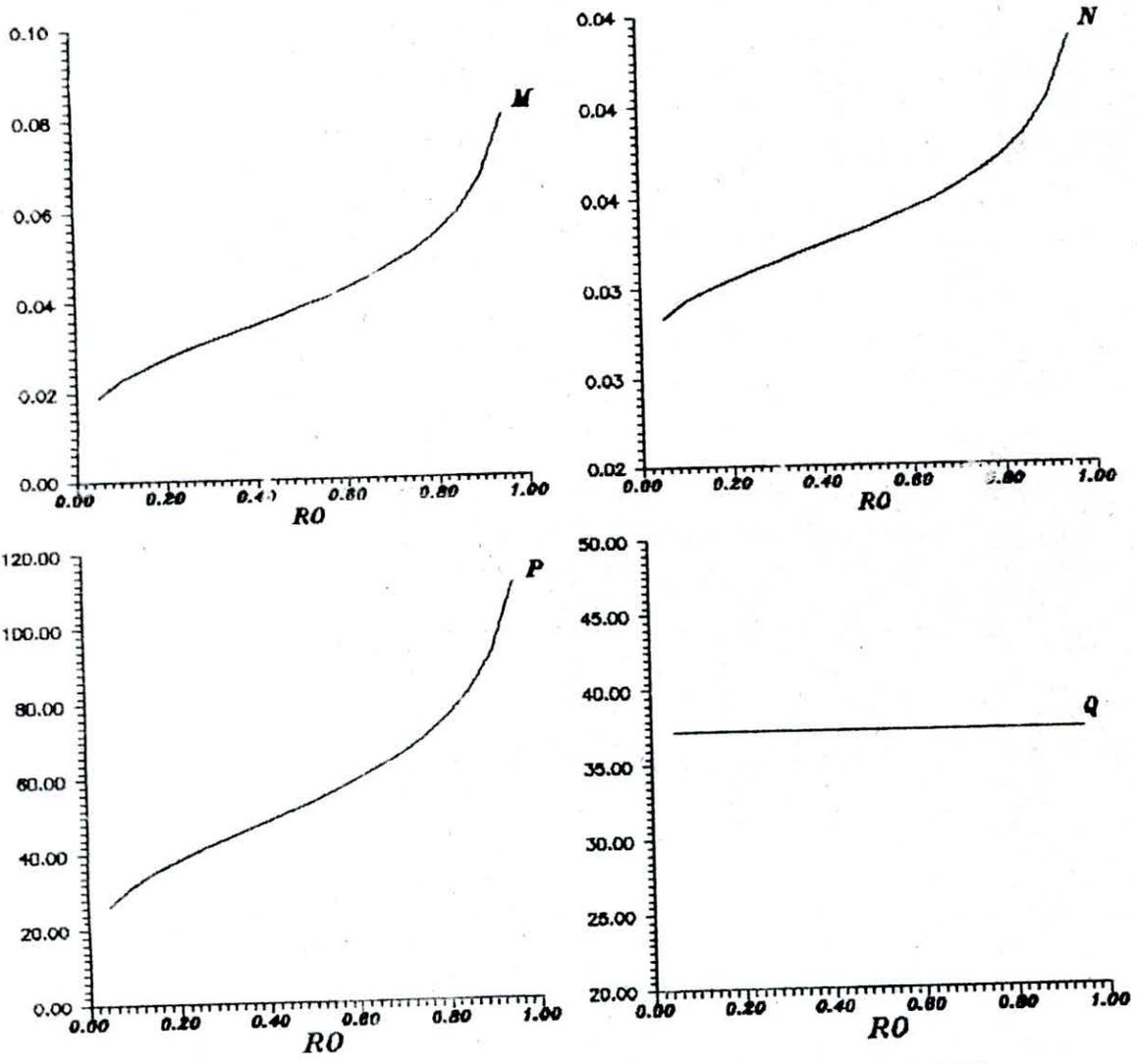
$$\vartheta_0 = Q$$

$$\vartheta_2 = N$$

$$\vartheta_1 = P$$

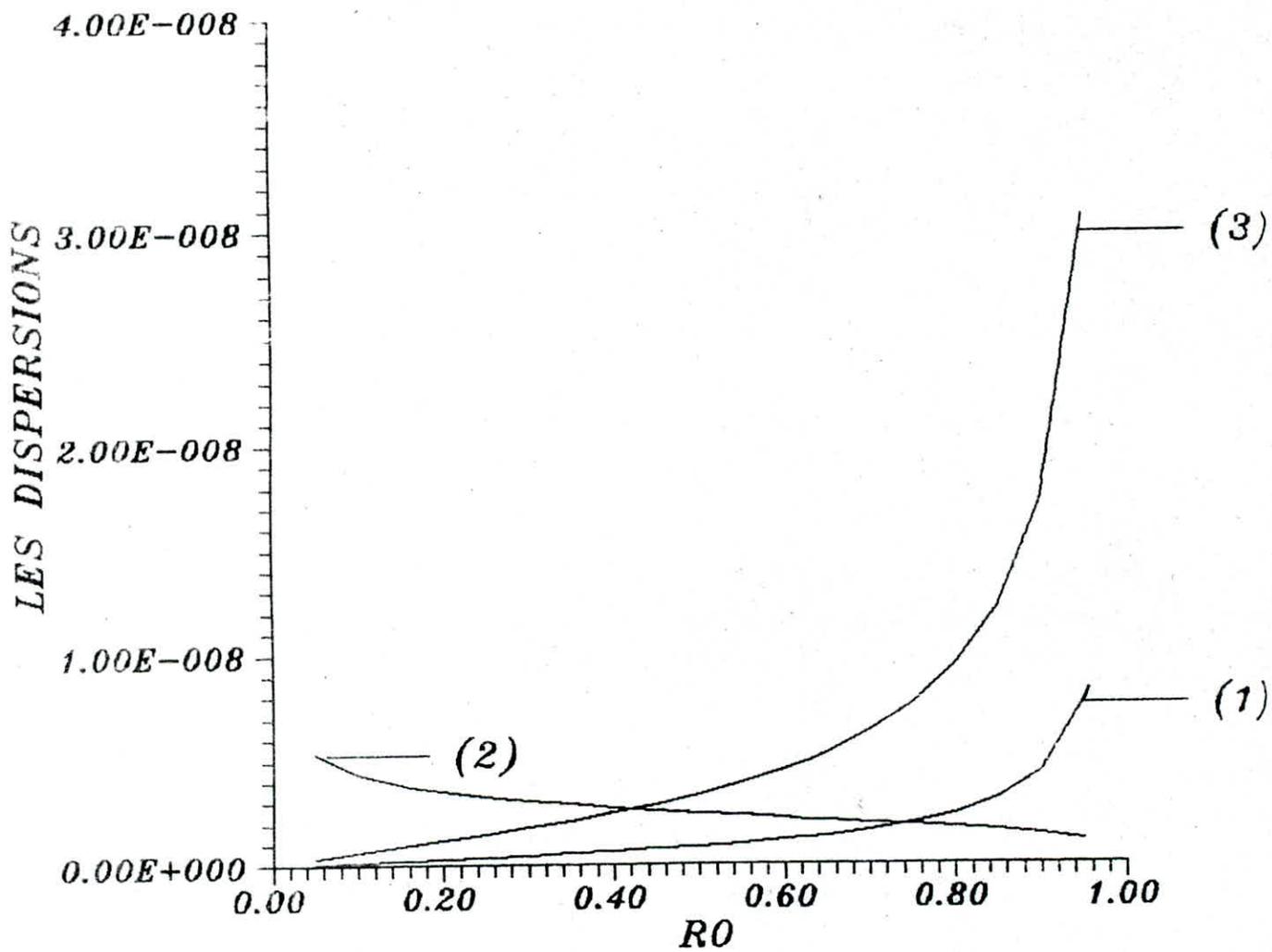
$$\vartheta_3 = M$$

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  et  $\beta_4$  sont les mêmes que précédemment.



LES PARAMETRES DEPENDANTS DE L'EXCITATION  
*M*, unite: sec<sup>2</sup>      *N*, unite: sec  
*P*, sans unite      *Q*, unite: 1/sec

fig. V-5



- (1) Dispersion de l'écart, unité:  $m^2$
- (2) Dispersion de l'accélération, unité:  $m^2/sec^4$
- (3) Fonctionnelle, unité:  $m^2$

fig.V-6

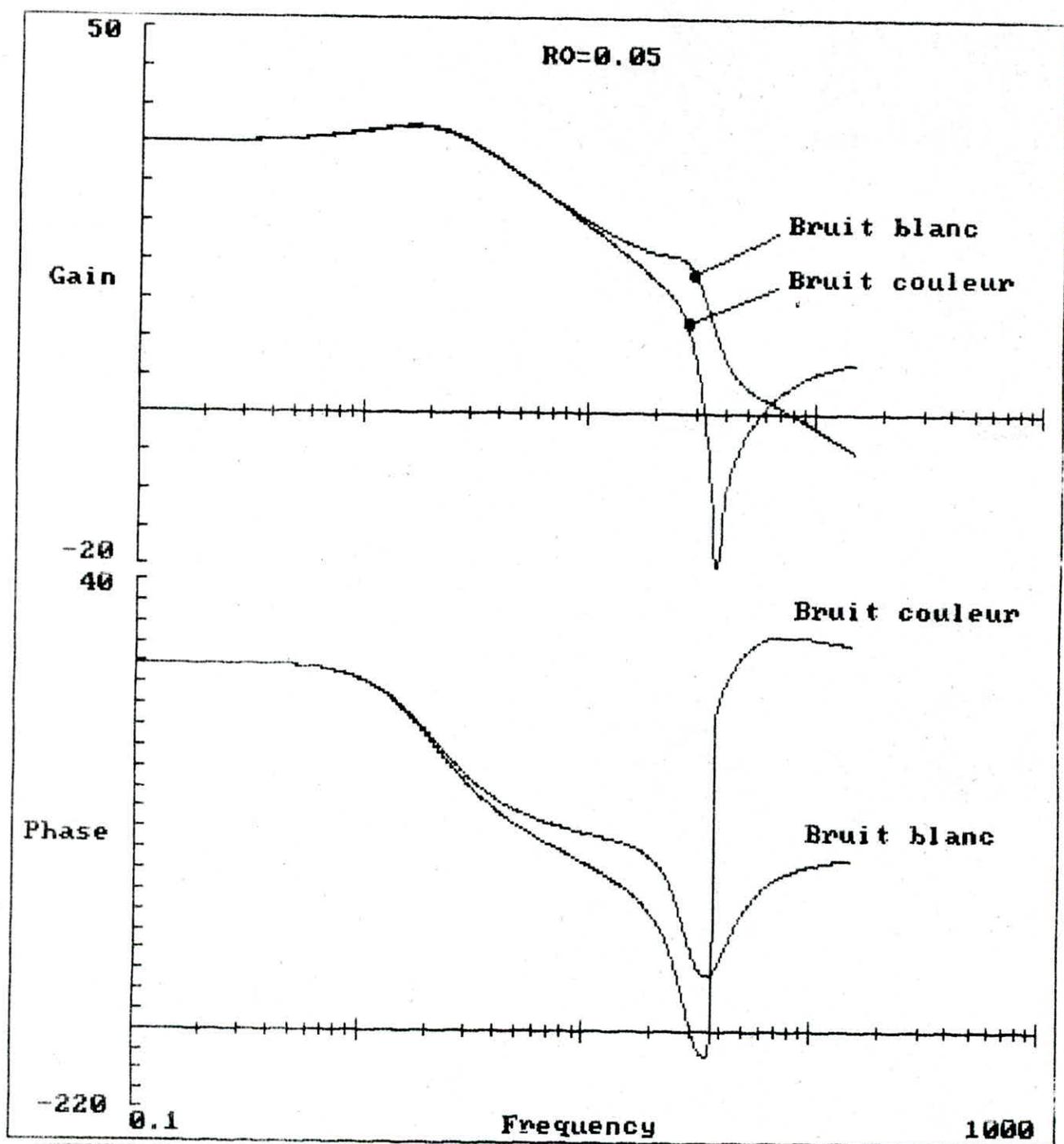


fig.V-7

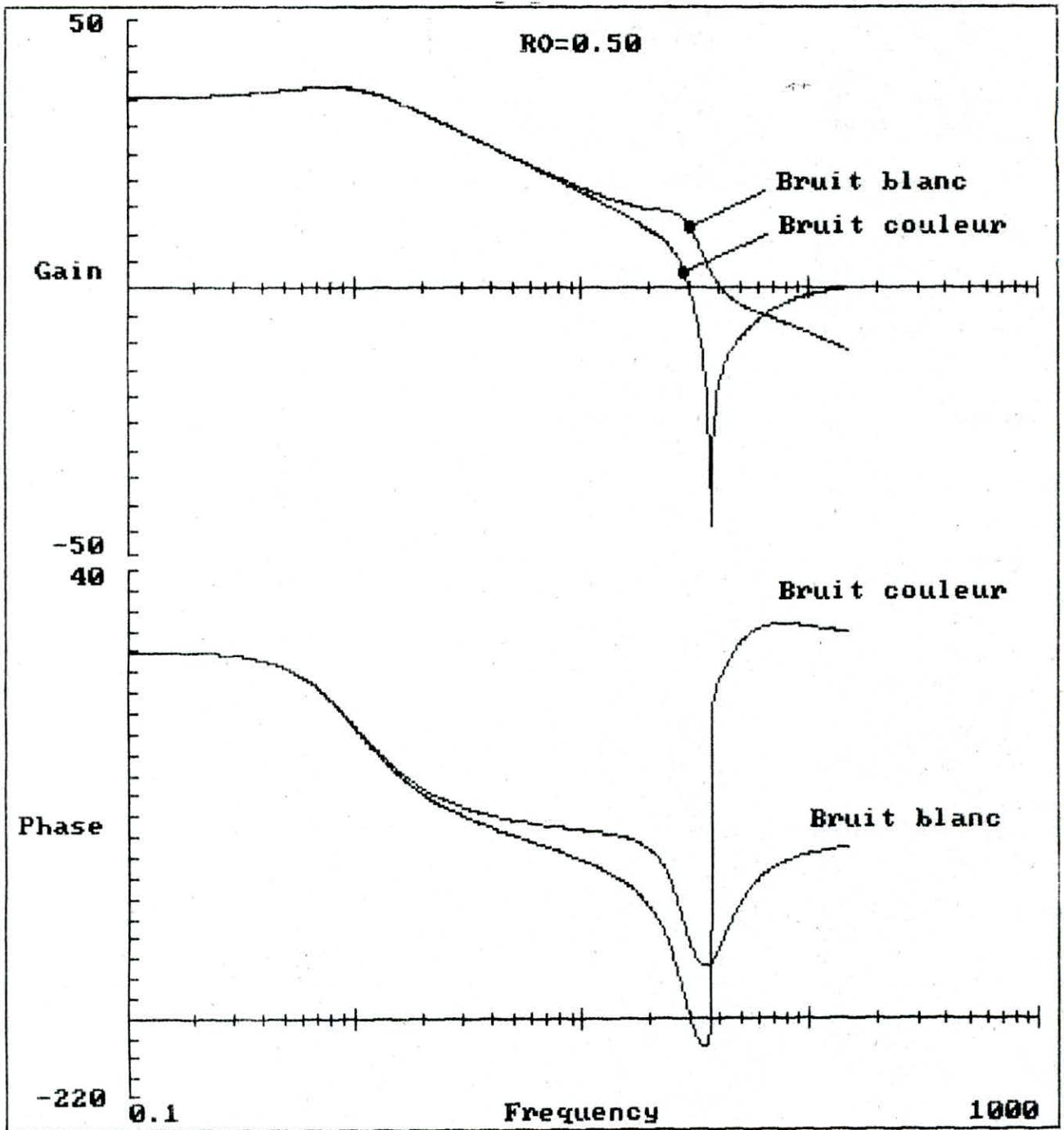


fig.V-7

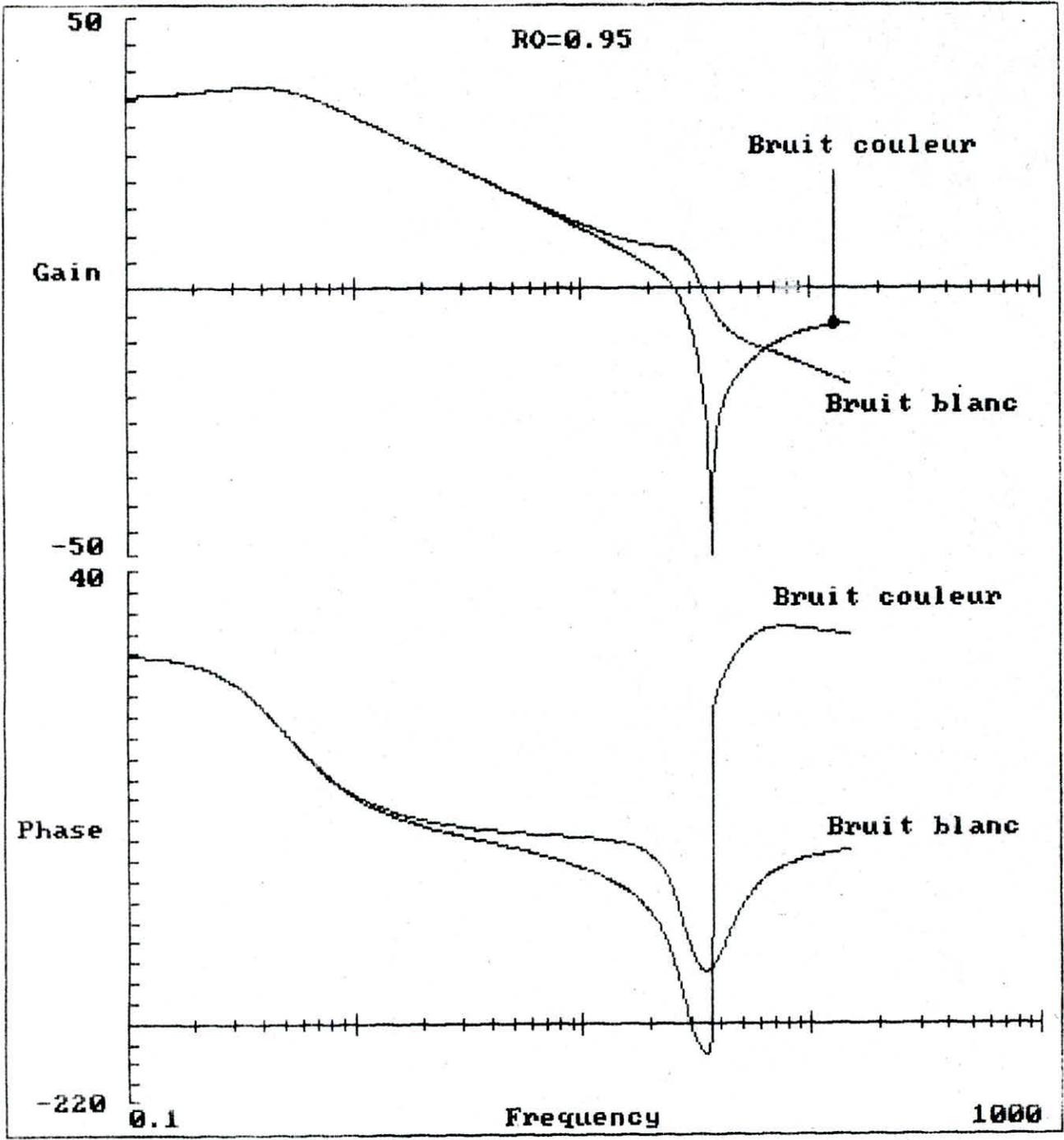


fig.V-7

2-Influence de la partie  $m_1$ :

Selon (III-4) et (III-17):

$$L_1(s) = \frac{\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1} \quad (V-19)$$

$$G(s) = \frac{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}{m \cdot m_1 s^2 + \alpha_1 (m+m_1) s + c_1 (m+m_1)}$$

$$R(s) \cdot R(-s) = 1 + \lambda s^4 \frac{\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1} \cdot \frac{-\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1} \quad (V-20)$$

En décomposons (V-20), on aura :

$$R(s) = \frac{As^3 + Bs^2 + Cs + D}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1} \quad (V-21)$$

Les coefficients A, B, C et D sont solutions du système algébrique non linéaire suivant : (fig.V-8)

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= \lambda \cdot \alpha_1^2 \\ B^2 - 2AC &= m_1 + \lambda \cdot c_1^2 \\ 2BD - C^2 &= 2m_1 c_1 - \alpha_1^2 \\ D^2 &= c_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (V-22)$$

Les solutions A, B, C et D sont fonctions du multiplicateur  $\lambda$ .

2-a Excitation de type 'bruit blanc' :

De (III-24), on écrit la fonction de transfert :

$$\phi(s) = \frac{s^2 [m \cdot m_1 s^2 + \alpha_1 (m+m_1) s + c_1 (m+m_1)] (m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)}{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1) (As^3 + Bs^2 + Cs + D)} \cdot \frac{1/s^2}{\frac{-As^3 + Bs^2 - Cs + D}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}}$$

En décomposons :

$$\frac{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}{s^2 (-As^3 + Bs^2 - Cs + D)} = \frac{Ms + N}{s^2} + \frac{Ps^2 + Qs + R}{-As^3 + Bs^2 - Cs + D}$$

Les paramètres M, N, P et Q sont les solutions du système suivant :

(fig.V-9)

$$\left. \begin{aligned} -AM + P &= 0 \\ BM - AN + Q &= 0 \\ -CM + BN + R &= m_1 \\ DM - CN &= -\alpha_1 \\ DN &= c_1 \end{aligned} \right\} \quad (V-23)$$

La fonction de transfert dans ce cas est : (fig.V-13)

$$\phi(s) = \frac{n_3 s^3 + n_2 s^2 + n_1 s + n_0}{As^3 + Bs^2 + Cs + D} \quad (V-24-a)$$

Où :

$$\begin{aligned} n_3 &= M \cdot m \cdot m_1 \\ n_2 &= N \cdot m \cdot m_1 + M \cdot \alpha_1 (m + m_1) \\ n_1 &= N \cdot \alpha_1 (m + m_1) + M \cdot c_1 (m + m_1) \\ n_0 &= N \cdot c_1 (m + m_1) \end{aligned}$$

La fonction de transfert en boucle fermée est :

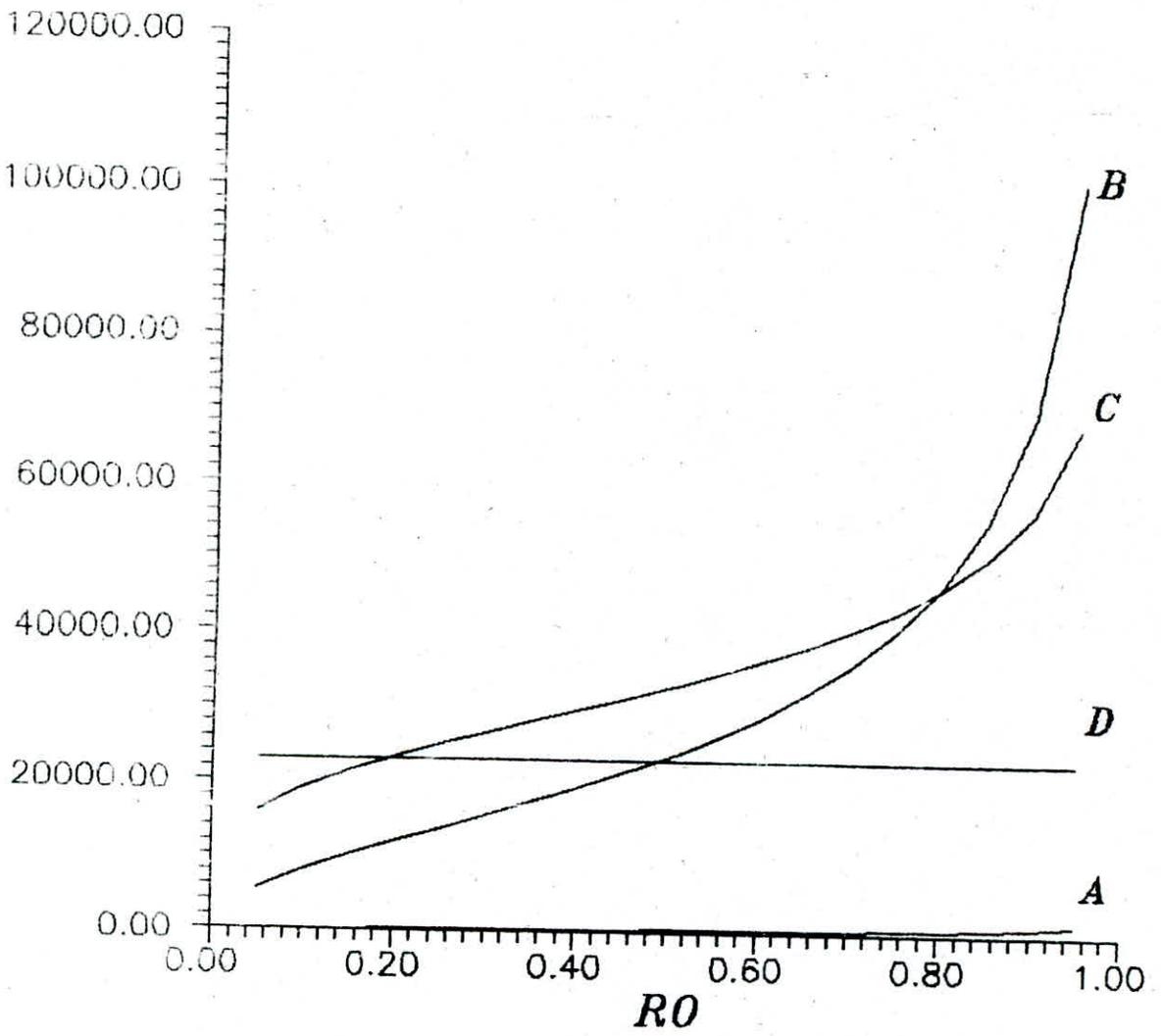
$$\phi_f(s) = \frac{\left[ m \cdot m_1 s^2 + \alpha_1 s(m+m_1) + c_1(m+m_1) \right] (Ms+N)}{s^2 \left[ (A-Mm_1)s + (B-M\alpha_1 - Nm_1) \right]} \quad (\text{V-24-b})$$

Et les dispersions : (fig.V-10)

$$\sigma_{x-x_0}^2 = N^2 \cdot \frac{(m_1 \cdot M - A)^2 DA + (m_1 N + \alpha_1 M - B)^2 AB}{2AD(-AD+BC)} \quad (\text{V-25})$$

$$\sigma_{x_1}^2 = N^2 \cdot \frac{(\alpha_1 M)^2 DC + [(\alpha_1 N + c_1 M)^2 - 2\alpha_1 M c_1 N] DA + (c_1 N)^2 AB}{2AD(-AD+BC)} \quad (\text{V-26})$$

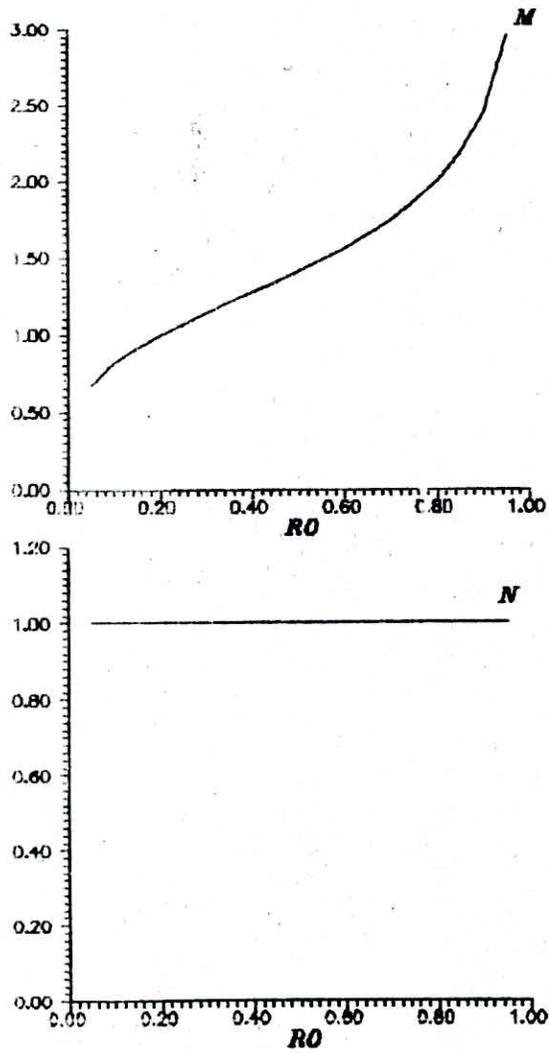
LES PARAMETRES DEPENDANTS DE LA STRUCTURE



A, unite: Kg.sec  
C, unite: Kg/sec

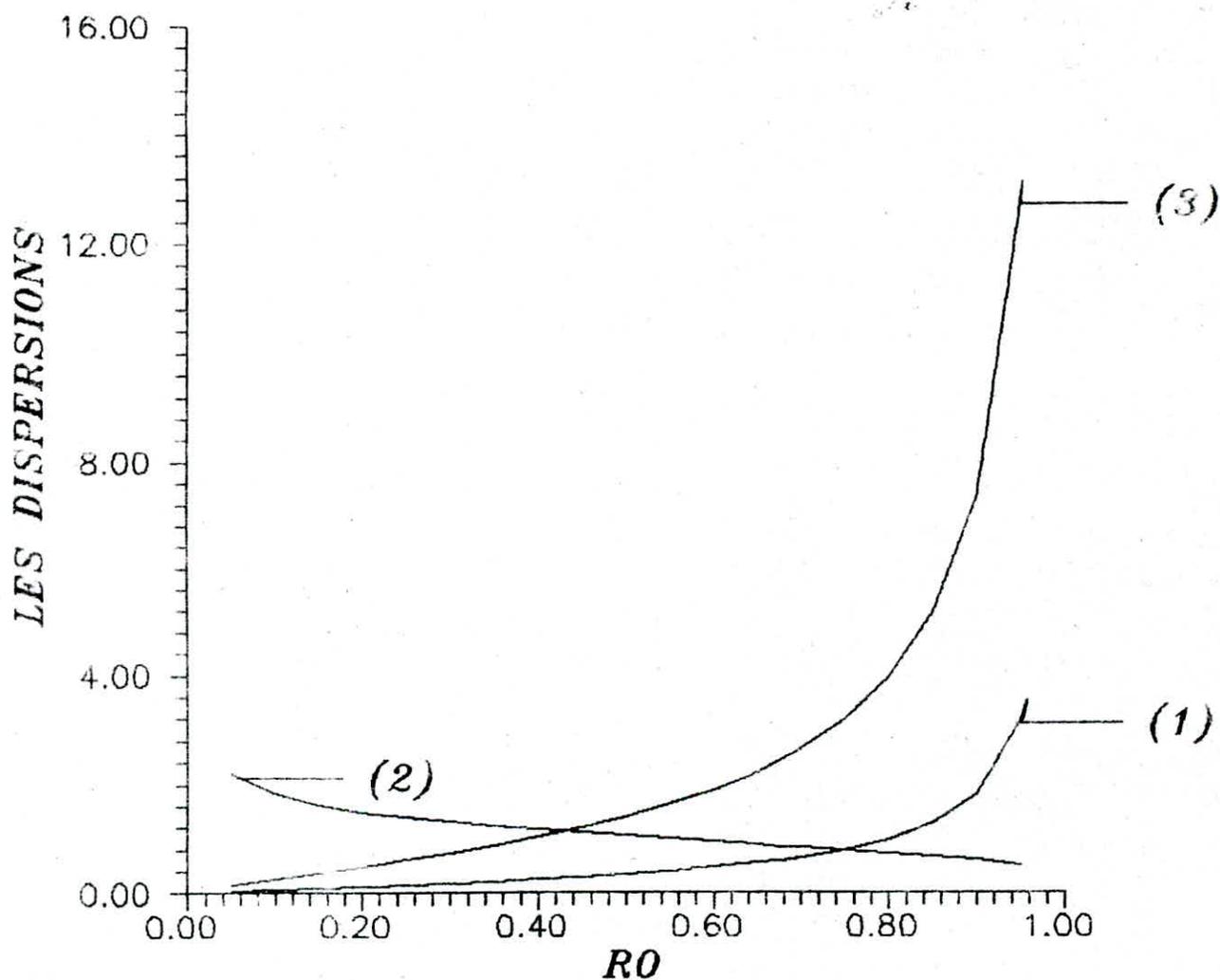
B, unite: Kg  
D, unite: Kg/sec<sup>2</sup>

fig.V-ε3



**LES PARAMETRES DEPENDANTS DE L'EXCITATION**  
*M, unit:sec*  
*N, sans unite*

fig. V-9



- (1) Dispersion de l'ecart / N2 ,unite:sec<sup>3</sup>
- (2) Dispersion de l'acceleration / N2 ,unite:1/sec
- (3) Fonctionnelle / N2 ,unite:sec<sup>3</sup>

fig.V-10

2-b Excitation de type 'bruit couleur' :

$$\frac{\psi(s)}{R(-s)} = \frac{Ms^3 + Ns^2 + Ps + Q}{s^2(s^2 + 2\alpha s + \Omega^2)} + \frac{Rs^2 + Ts + U}{-As^3 + Bs^2 - Cs + D}$$

Les paramètres M, N, P et Q sont tirés du système suivant : (fig.V-11)

$$\left. \begin{aligned} -AM + R &= 0 \\ BM - AN + 2\alpha R + T &= 0 \\ -CM + BN - AP + R\Omega^2 + 2\alpha T + U &= 0 \\ MD - CN + BP - AQ + 2\alpha U + T\Omega^2 &= m_1 \\ ND - CP + BQ + U\Omega^2 &= m_1\Omega - \alpha_1 \\ PD - CQ &= c_1 - \alpha_1\Omega \\ QD &= c_1\Omega \end{aligned} \right\} \quad (V-27)$$

La fonction de transfert est : (fig.V-13)

$$\phi(s) = \frac{n_5 s^5 + n_4 s^4 + n_3 s^3 + n_2 s^2 + n_1 s + n_0}{d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0} \quad (V-28-a)$$

Où :

$$\begin{aligned} n_5 &= M \cdot m \cdot m_1 \\ n_4 &= N \cdot m \cdot m_1 + M \alpha_1 (m + m_1) \\ n_3 &= P \cdot m \cdot m_1 + N \alpha_1 (m + m_1) + M \cdot c_1 (m + m_1) \\ n_2 &= Q \cdot m \cdot m_1 + P \alpha_1 (m + m_1) + N \cdot c_1 (m + m_1) \\ n_1 &= Q \cdot \alpha_1 (m + m_1) + P \cdot c_1 (m + m_1) \\ n_0 &= Q \cdot c_1 (m + m_1) \\ d_4 &= A \\ d_3 &= B + A\Omega \\ d_2 &= C + B\Omega \\ d_1 &= D + C\Omega \\ d_0 &= D\Omega \end{aligned} \quad (V-29)$$

La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\phi_f(s) = \frac{\left[ m \cdot m_1 s^2 + \alpha_1 (m+m_1) s + c_1 (m+m_1) \right] (Ms^3 + Ns^2 + Ps + Q)}{s^2 (d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0)} \quad (\text{V-28-b})$$

$$d_3 = -Mm_1$$

$$d_2 = A - \alpha_1 M - m_1 N$$

$$d_1 = B + A\Omega - c_1 M - \alpha_1 N - m_1 P$$

$$d_0 = C + B\Omega - c_1 N - \alpha_1 P - m_1 Q$$

Les dispersions sont : (fig.V-12)

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{\alpha \cdot \sigma^2}{\Pi} \cdot \frac{1}{2\Delta} \left[ \sigma_3^2 \xi_1^2 + (\sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_3) \xi_2^2 + (\sigma_1^2 - 2\sigma_0 \sigma_2) \xi_3^2 + \sigma_2^2 \xi_4^2 \right]$$

(V-30)

$$\xi_0 = \frac{1}{\beta_5} (\beta_3 \xi_1 - \beta_1 \xi_2)$$

$$\xi_1 = -\beta_0 \beta_3 + \beta_1 \beta_2$$

$$\xi_2 = -\beta_0 \beta_5 + \beta_1 \beta_4$$

$$\xi_3 = \frac{1}{\beta_0} (\beta_2 \xi_2 - \beta_4 \xi_1)$$

$$\xi_4 = \frac{1}{\beta_0} (\beta_2 \xi_3 - \beta_4 \xi_2)$$

$$\Delta = \beta_0 (\beta_1 \xi_4 - \beta_3 \xi_3 + \beta_5 \xi_2)$$

$$\beta_5 = A$$

$$\beta_4 = 2\alpha A + B$$

$$\beta_3 = A\Omega^2 + 2\alpha B + C$$

$$\beta_2 = B\Omega^2 + 2\alpha C + D$$

$$\beta_1 = C\Omega^2 + 2\alpha D$$

$$\beta_0 = D\Omega^2$$

(V-31)

$$\vartheta_3 = M \cdot m_1$$

$$\vartheta_2 = N \cdot m_1 + \alpha_1 \cdot M - A$$

$$\vartheta_1 = P \cdot m_1 + \alpha_1 \cdot N + c_1 \cdot M - B - A\Omega$$

$$\vartheta_0 = Q \cdot m_1 + \alpha_1 \cdot P + c_1 \cdot N - C - B\Omega$$

$$\alpha \frac{\partial^2 \ddot{x}_1}{\partial t^2} = \frac{\alpha \omega^2}{\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} \left[ \vartheta_4^2 \xi_0 + (\vartheta_3^2 - 2\vartheta_2 \vartheta_4) \xi_1 + (\vartheta_2^2 - 2\vartheta_1 \vartheta_3 + 2\vartheta_0 \vartheta_4) \xi_2 + \right. \\ \left. (\vartheta_1^2 - 2\vartheta_0 \vartheta_2) \xi_3 + \vartheta_0^2 \xi_4 \right]$$

(V-32)

$$\vartheta_4 = M \cdot \alpha_1$$

$$\vartheta_2 = P \cdot \alpha_1 + N \cdot c_1$$

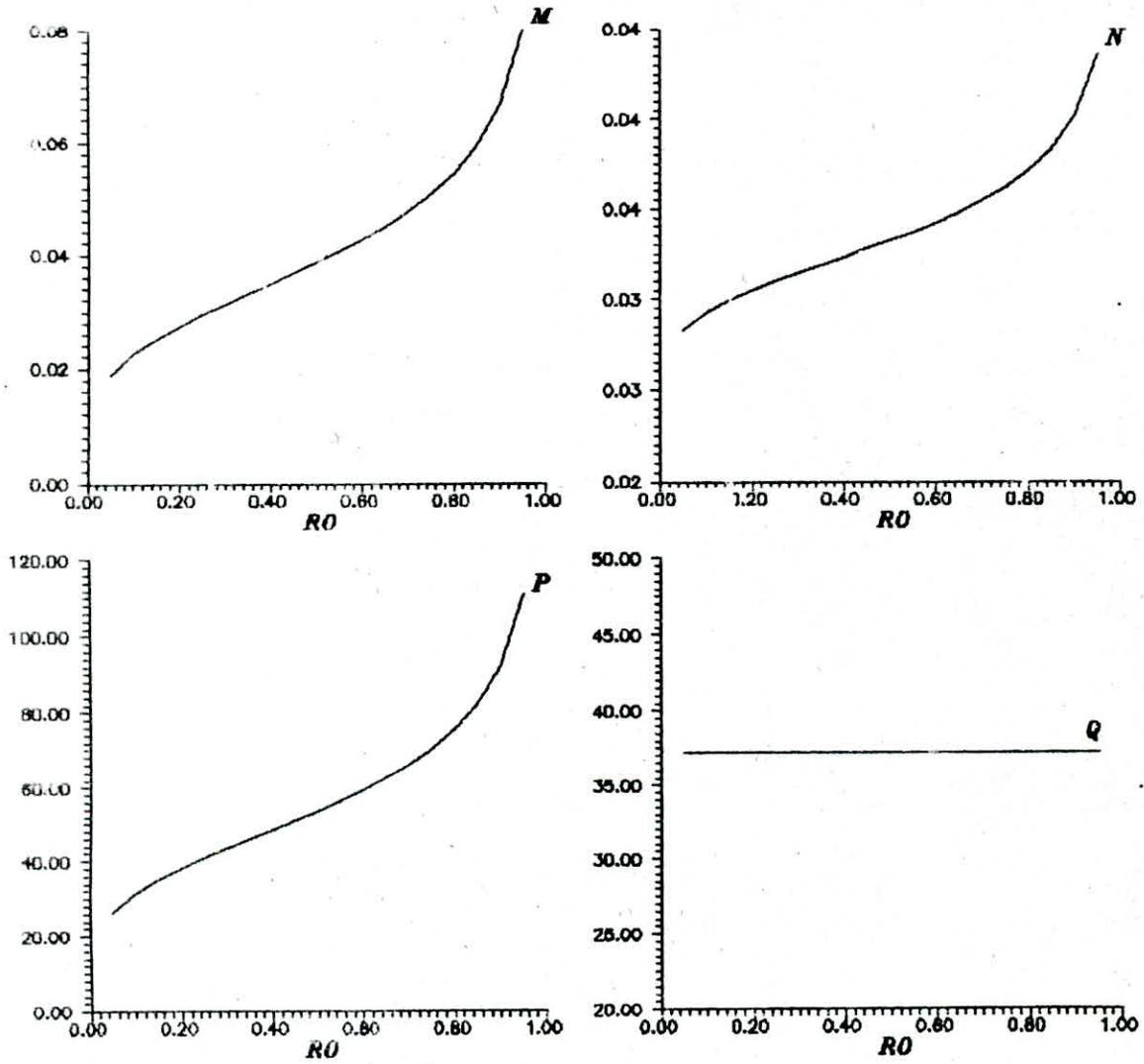
$$\vartheta_0 = Q \cdot c_1$$

$$\vartheta_3 = N \cdot \alpha_1 + M \cdot c_1$$

$$\vartheta_1 = Q \cdot \alpha_1 + P \cdot c_1$$

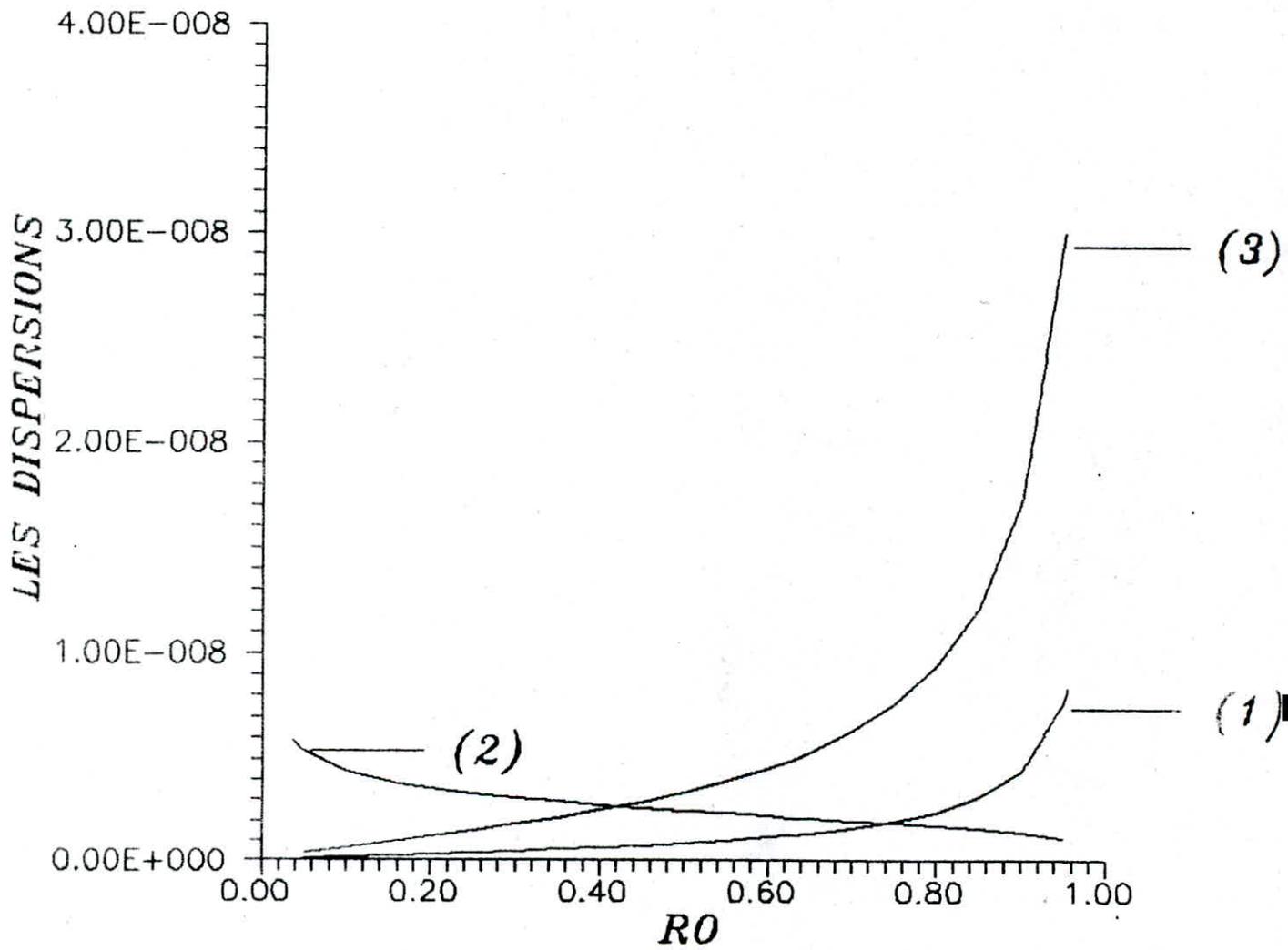
(V-33)

$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \Delta, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  et  $\beta_5$  sont définis de la même façon que précédemment.



LES PARAMETRES DEPENDANTS DE L'EXCITATION  
*M*, unite:sec<sup>2</sup>      *N*, unite:sec  
*p*: sans unite      *Q*, unite: 1/sec

fig. V.11



- (1) Dispersion de l'ecart, unite:  $m^2$
- (2) Dispersion de l'acceleration, unite:  $m^2/sec^4$
- (3) Fonctinnelle, unite:  $m^2$

fig. V-12

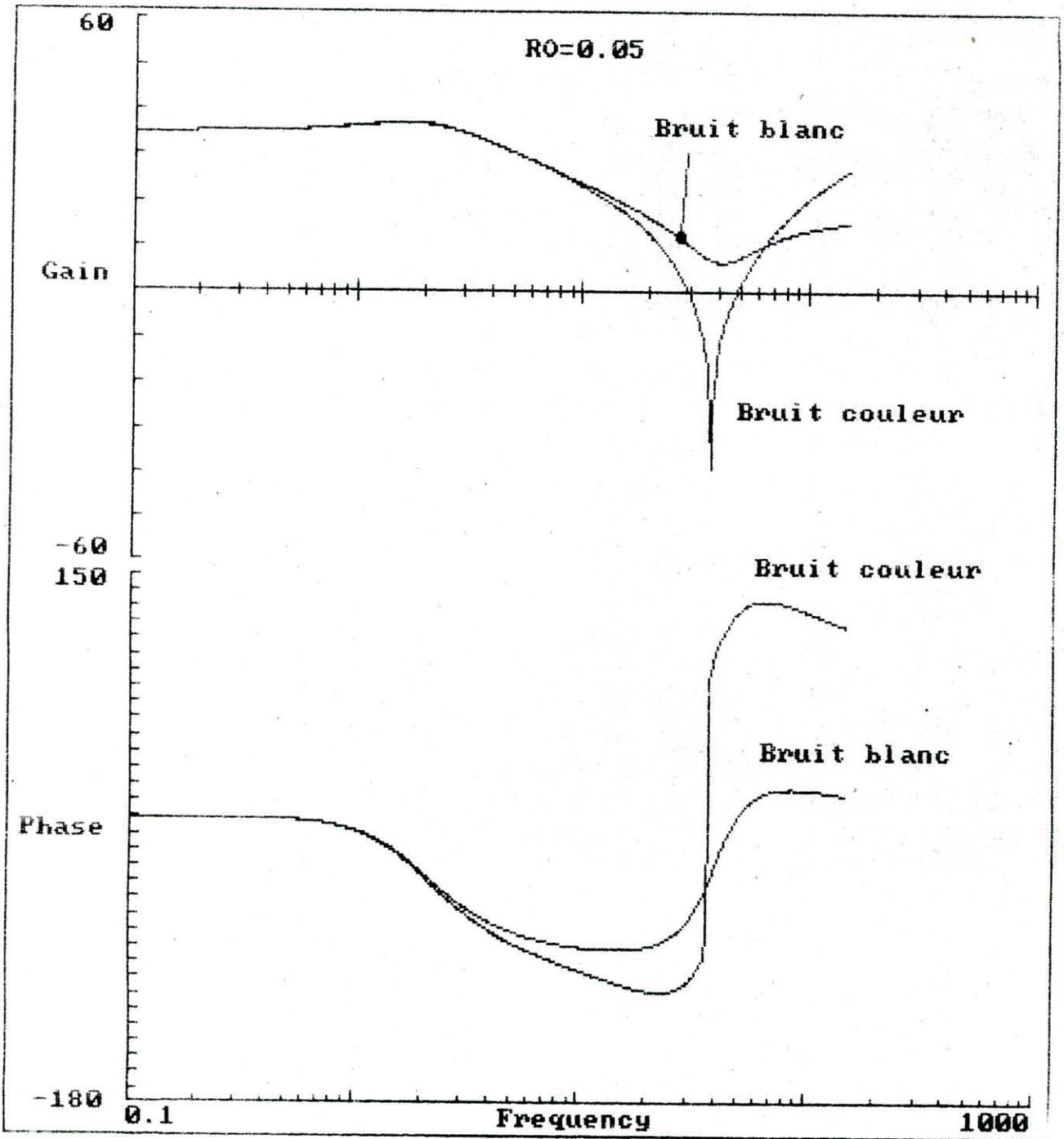


fig. V-13

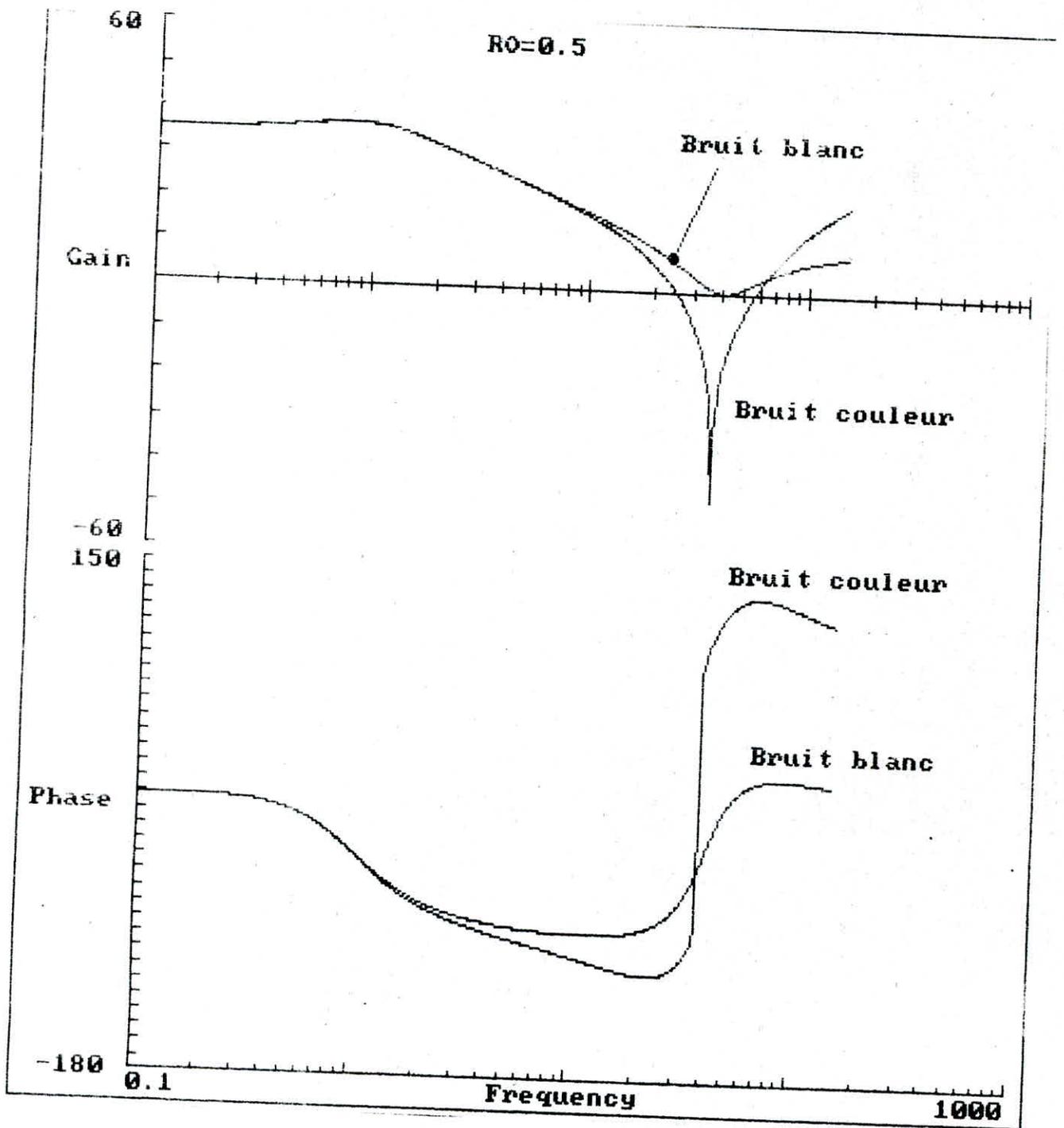


fig.V-13

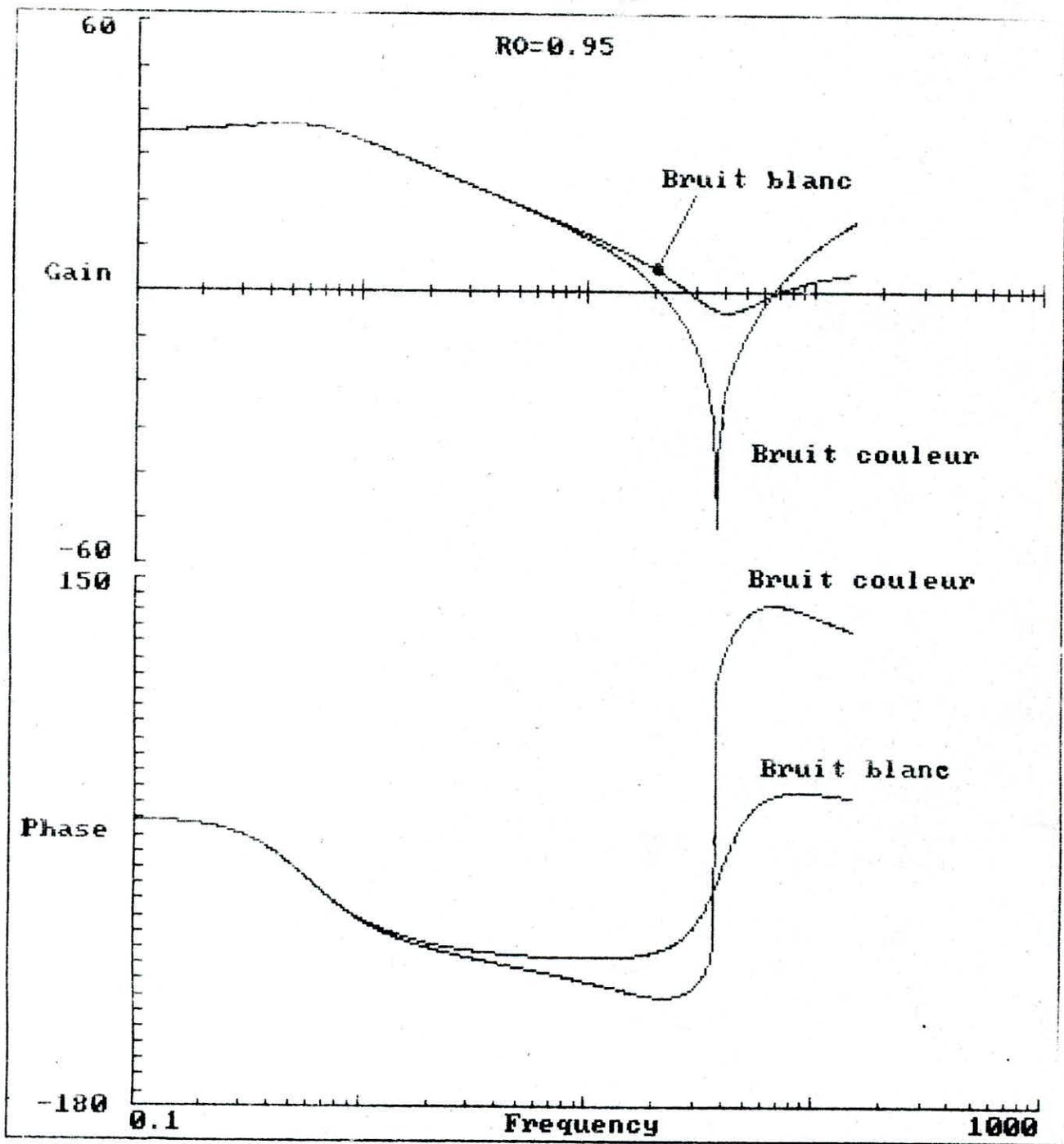


fig.V-13

# Chapitre 6

## **APPLICATION AU MODELE 2**



Application au modèle 2

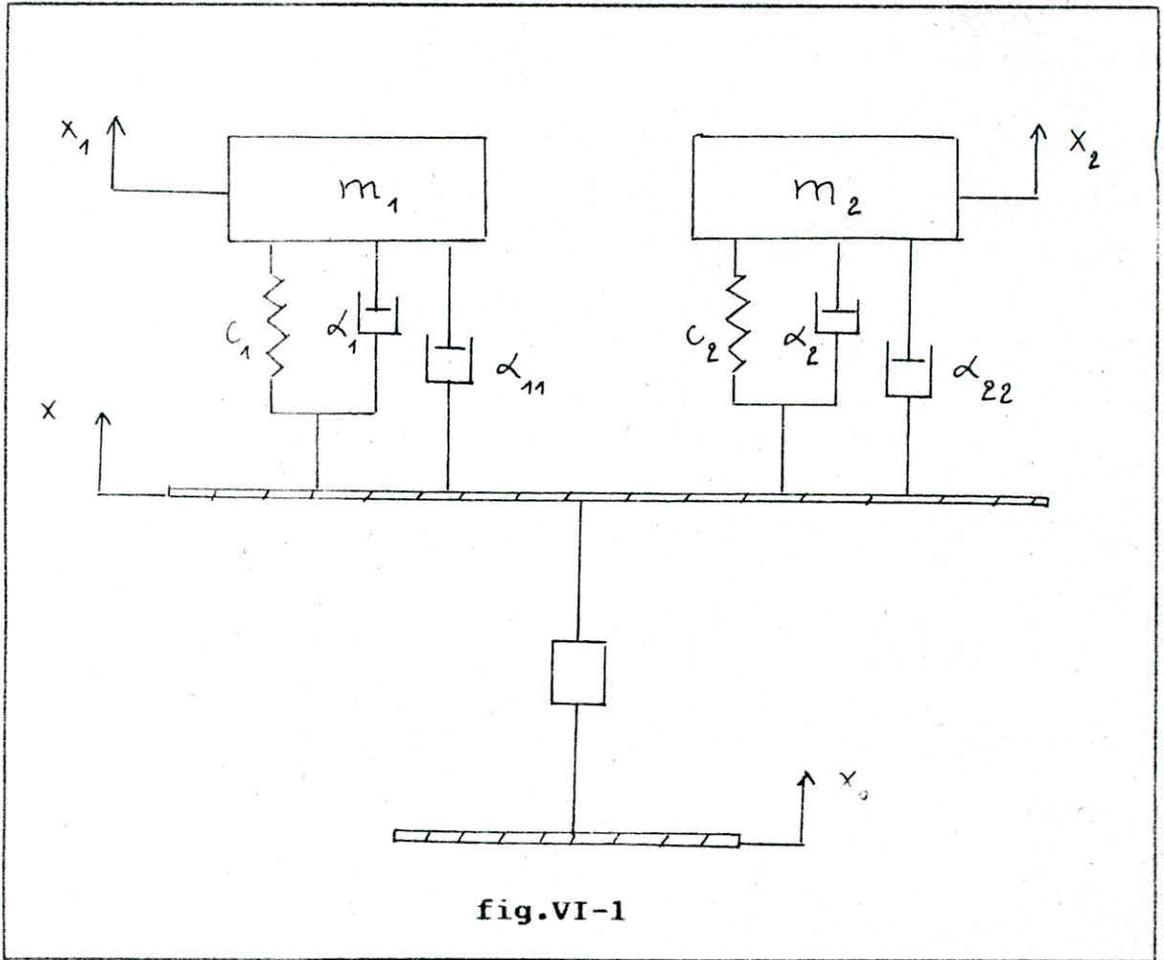


fig.VI-1

La relation fondamentale de la dynamique nous permet d'écrire les équations du mouvement suivantes :

$$f - c_1(x - x_1) - (\alpha_1 + \alpha_{11})(\dot{x} - \dot{x}_1) - c_2(x - x_2) - (\alpha_2 + \alpha_{22})(\dot{x} - \dot{x}_2) = 0$$

$$c_1(x - x_1) + (\alpha_1 + \alpha_{11})(\dot{x} - \dot{x}_1) = m_1 \ddot{x}_1$$

$$c_2(x - x_2) + (\alpha_2 + \alpha_{22})(\dot{x} - \dot{x}_2) = m_2 \ddot{x}_2$$

En passant aux transformées de Laplace, on obtient :

$$f - c_1(x - x_1) - (\alpha_1 + \alpha_{11})s(x - x_1) - c_2(x - x_2) - (\alpha_2 + \alpha_{22})s(x - x_2) = 0$$

$$c_1(x - x_1) + (\alpha_1 + \alpha_{11})s(x - x_1) = m_1 s^2 x_1$$

$$c_2(x - x_2) + (\alpha_2 + \alpha_{22})s(x - x_2) = m_2 s^2 x_2$$

1-Influence de la partie  $m_1$ :

Selon (III-4) et (III-17)

$$L_1(s) = \frac{(\alpha_1 + \alpha_{11})s + c_1}{m_1 s^2 + (\alpha_1 + \alpha_{11})s + c_1} \quad (\text{VI-1})$$

$$G(s) = \frac{[m_1 s^2 + (\alpha_1 + \alpha_{11})s + c_1][m_2 s^2 + (\alpha_2 + \alpha_{22})s + c_2]}{g_3 s^3 + g_2 s^2 + g_1 s + g_0}$$

$$\begin{aligned} \text{Où : } g_0 &= c_1 c_2 (m_1 + m_2) \\ g_1 &= (m_1 + m_2) [c_1 (\alpha_2 + \alpha_{22}) + c_2 (\alpha_1 + \alpha_{11})] \\ g_2 &= (m_1 + m_2) (\alpha_1 + \alpha_{11}) (\alpha_2 + \alpha_{22}) + m_1 m_2 (c_1 + c_2) \\ g_3 &= m_1 m_2 (\alpha_1 + \alpha_{11} + \alpha_2 + \alpha_{22}) \end{aligned} \quad (\text{VI-2})$$

$$R(s)R(-s) = 1 + \lambda s^4 \cdot L_1(s)L_1(-s) \quad (\text{VI-3})$$

En décomposant (VI-3), on obtient :

$$R(s) = \frac{As^3 + Bs^2 + Cs + D}{m_1 s^2 + (\alpha_1 + \alpha_{11})s + c_1} \quad (\text{VI-4})$$

Les paramètres A, B, C et D sont les solutions du système algébrique non linéaire : (fig. VI-2)

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= \lambda (\alpha_1 + \alpha_{11})^2 \\ B^2 - 2AC &= m_1^2 + \lambda c_1^2 \\ 2BD - C^2 &= 2m_1 c_1 - (\alpha_1 + \alpha_{11})^2 \\ D^2 &= c_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI-5})$$

A, B, C et D sont les paramètres dépendants de la structure, ils sont fonctions du multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ . (fig.VI-2)

1-a-Excitation de type 'bruit blanc' :

De (III-24), on écrit la fonction de transfert :

$$\phi(s) = \frac{1}{\psi(s)R(s)G(s)} \left[ \frac{\psi(s)}{R(-s)} \right] +$$

$$\left[ \frac{\psi(s)}{R(-s)} \right] = \frac{1/s^2}{\frac{-As^3 + Bs^2 - Cs + D}{m_1 s^2 - (\alpha_1 + \alpha_{11})s + c_1}}$$

$$= \frac{Ms + N}{s^2} + \frac{Ps^2 + Qs + R}{-As^3 + Bs^2 - Cs + D}$$

Les paramètres M, N, P, Q, et R sont solutions du système algébrique linéaire :

$$\left. \begin{aligned} -AM + P &= 0 \\ BM - AN + Q &= 0 \\ -CM + BN + R &= m_1 \\ DN &= c_1 \end{aligned} \right\} \quad (VI-6)$$

M, N, P et Q sont les paramètres dépendants de l'excitation il sont fonctions du multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ . (fig.VI-3)

La fonction de transfert est : (fig.VI-7)

$$\phi(s) = \frac{n_4 s^4 + n_3 s^3 + n_2 s^2 + n_1 s + n_0}{d_5 s^5 + d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0} \quad (VI-6-a)$$

Où :

$$n_4 = g_3 M$$

$$n_3 = g_3 N + g_2 M$$

$$n_2 = g_2 N + g_1 M$$

$$n_1 = g_1 N + g_0 M$$

$$n_0 = g_0 N$$

(VI-7)

$$d_5 = A m_2$$

$$d_4 = A(\alpha_2 + \alpha_{22}) + B m_2$$

$$d_3 = A c_2 + B(\alpha_2 + \alpha_{22}) + C m_2$$

$$d_2 = B c_2 + C(\alpha_2 + \alpha_{22}) + D m_2$$

$$d_1 = C c_2 + D(\alpha_2 + \alpha_{22})$$

$$d_0 = D c_2$$

La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\phi_f(s) = \frac{(g_3 s^3 + g_2 s^2 + g_1 s + g_0)(Ms + N)}{s^2 \left[ (A - M m_1) s + \left[ B - (\alpha_1 + \alpha_{11}) - m_1 N \right] \right] \left[ m_2 s^2 + (\alpha_2 + \alpha_{22}) s + c_2 \right]}$$

(VI-6-b)

Les dispersions sont alors : (fig.VI-4)

Dispersion de l'écart :

$$\sigma_{x-x_0}^2 = N^2 \frac{(m_1 M - A)^2 AD + [m_1 N + M(\alpha_1 + \alpha_{11}) - B]^2 AB}{2AD(-AD + BC)} \quad \text{(VI-8)}$$

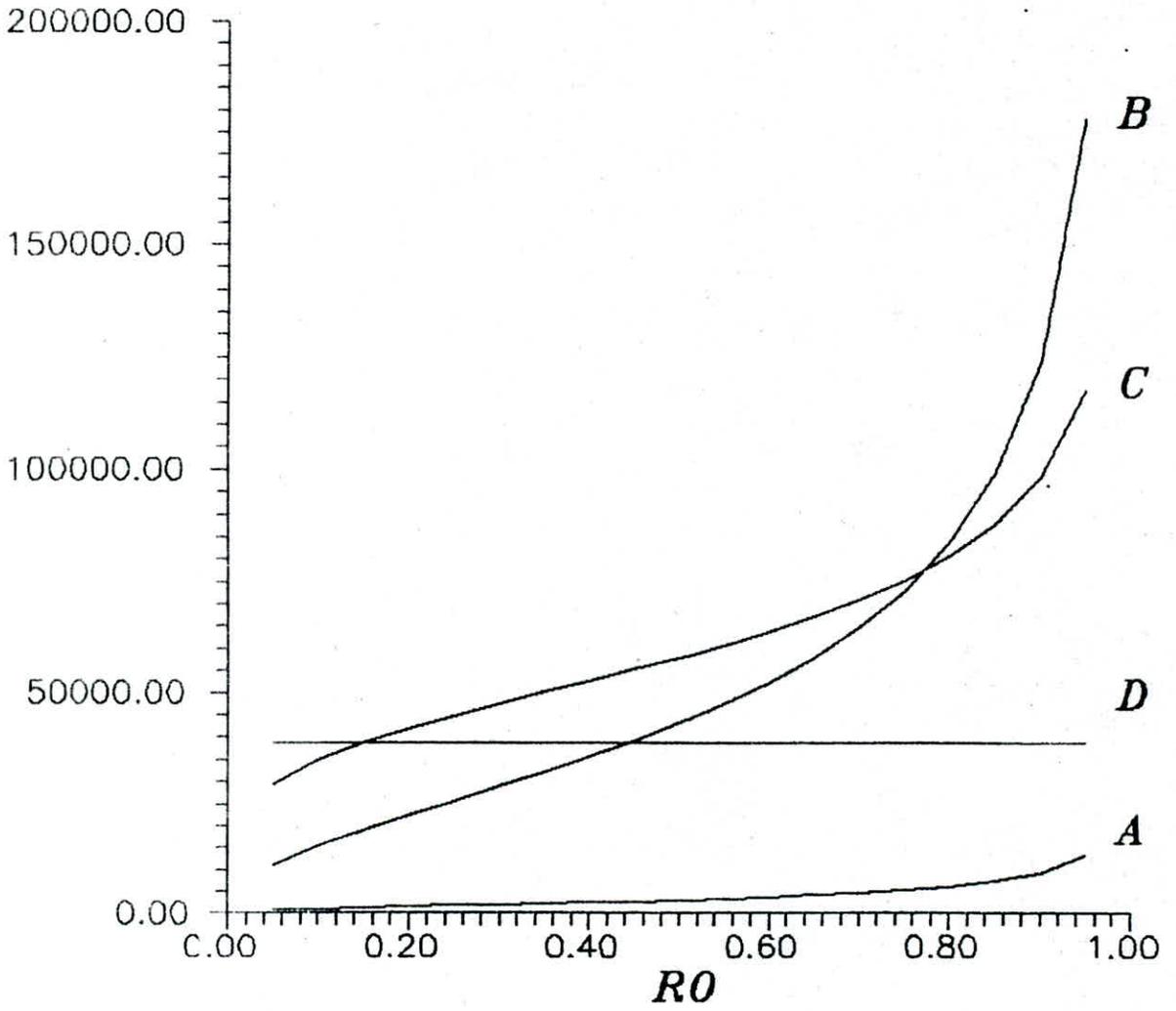
Dispersion de l'accélération :

$$\sigma_{x_1}^2 = N^2 \frac{h_1 + h_2 + h_3}{2AD(-AD+BC)} \quad (\text{VI-9})$$

Avec :

$$h_1 = [M(\alpha_1 + \alpha_{11})]^2 DC$$
$$h_2 = \{ [N(\alpha_1 + \alpha_{11}) + Mc_1]^2 - 2M(\alpha_1 + \alpha_{11})Nc_1 \} DA$$
$$h_3 = [Nc_1]^2 BA$$

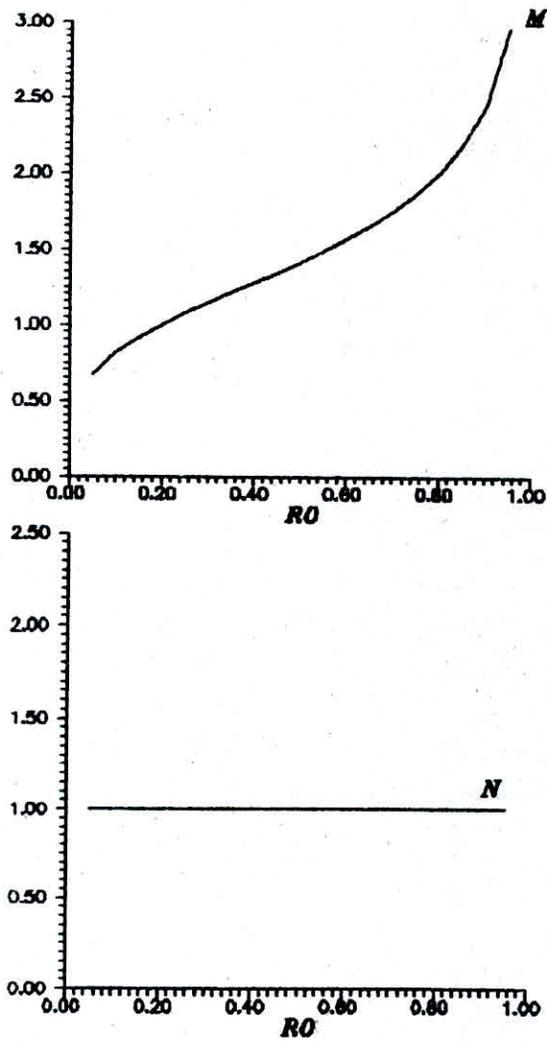
LES PARAMETRES DEPENDANTS DE LA STRUCTURE



A, unite: Kg.sec  
 C, unite: Kg/sec

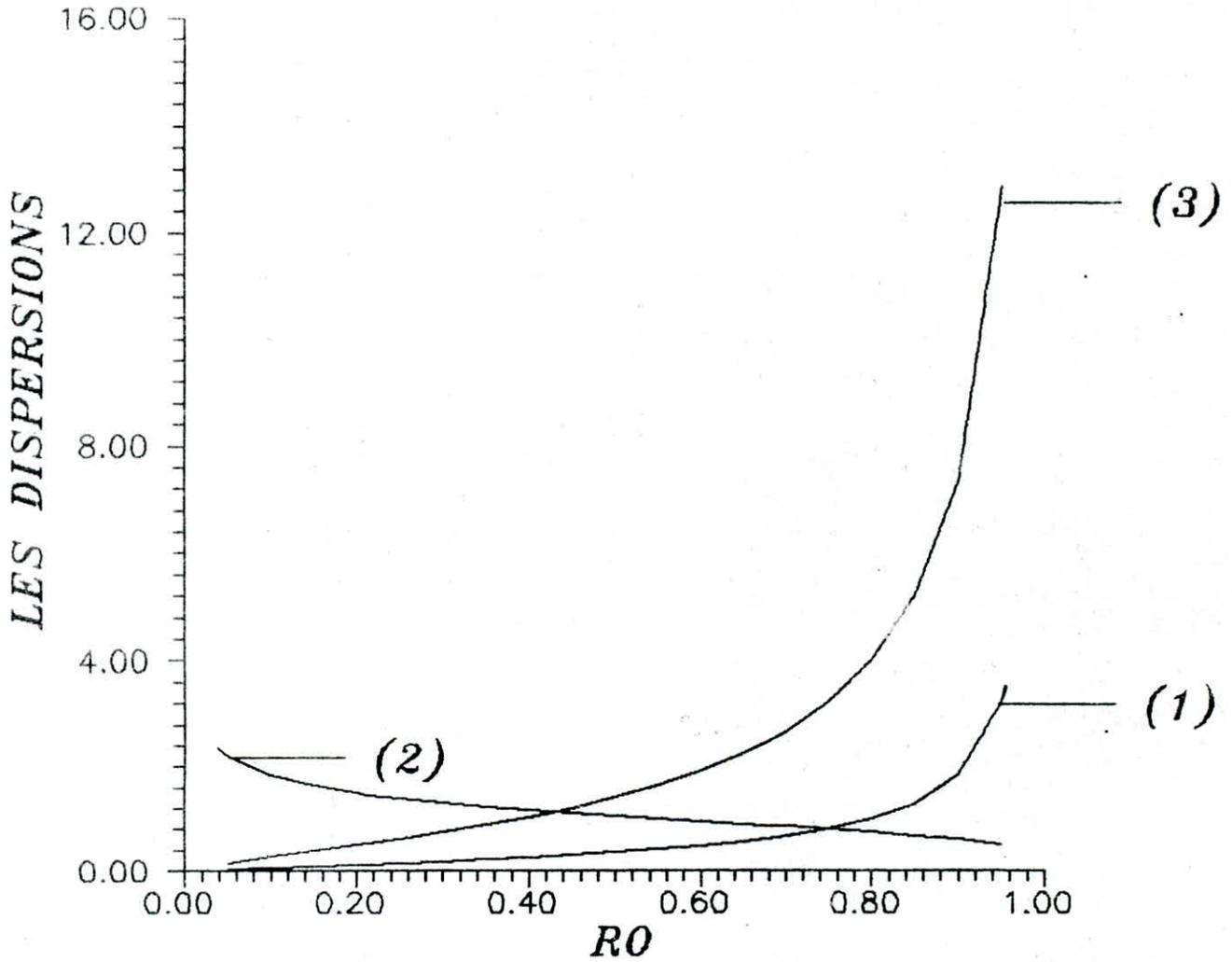
B, unite: Kg  
 D, unite: Kg/sec<sup>2</sup>

fig.VI - 2



**LES PARAMETRES DEPENDANTS DE L'EXCITATION**  
*M, unite: sec*  
*N, sans unite*

fig.VI - 3



- (1) Dispersion de l'ecart / N2, unite:sec<sup>3</sup>
- (2) Dispersion de l'accleration / N2, unite:1/sec
- (3) Fonctionnelle / N2, unite:sec<sup>3</sup>

fig.VI - 4

1-b-Excitation de type 'bruit couleur' :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \psi(s) \\ R(-s) \end{bmatrix} &= \frac{\frac{\Omega+s}{s^2+2\alpha s+\Omega^2}}{\frac{-As^3+Bs^2-Cs+D}{m_1 s^2+(\alpha_1+\alpha_{11})s+c_1}} \\ &= \frac{Ms^3+Ns^2+Ps+Q}{s^2(s^2+2\alpha s+c_1)} + \frac{Rs^2+Ts+U}{-As^3+Bs^2-Cs+D} \end{aligned}$$

Les paramètres M,N,P,Q,R,T et U sont solutions du système algébrique linéaire suivant :

$$\left. \begin{aligned} -AM+R &= 0 \\ BM-AN+2\alpha R+T &= 0 \\ -CM+BN-AP+R\Omega^2+2\alpha T+U &= 0 \\ MD-CN+BP-AQ+2\alpha U+T\Omega^2 &= m_1 \\ ND-CP+BQ+U\Omega^2 &= m_1\Omega-(\alpha_1+\alpha_{11}) \\ PD-CQ &= c_1-\Omega(\alpha_1+\alpha_{11}) \\ QD &= c_1\Omega \end{aligned} \right\} \quad (VI-10)$$

M,N,P et Q sont les paramètres dépendants de l'excitation, ils sont fonctions de  $\lambda$ . (fig.VI-6)

La fonction de transfert est alors : (fig.VI-7)

$$\phi(s) = \frac{n_6 s^6 + n_5 s^5 + n_4 s^4 + n_3 s^3 + n_2 s^2 + n_1 s + n_0}{d_6 s^6 + d_5 s^5 + d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0} \quad (VI-11-a)$$

Où :

$$n_6 = g_3 M$$

$$n_5 = g_3 N + g_2 M$$

$$n_4 = g_3 P + g_2 N + g_1 M$$

$$n_3 = g_3 Q + g_2 P + g_1 N + g_0 M$$

$$n_2 = g_2 Q + g_1 P + g_0 N$$

$$n_1 = g_1 Q + g_0 P$$

$$n_0 = g_0 Q$$

$$d_6 = A m_2$$

(VI-12)

$$d_5 = A m_2 \Omega + B m_2 + A (\alpha_2 + \alpha_{22})$$

$$d_4 = C m_2 + B (\alpha_2 + \alpha_{22}) + A c_2 + \Omega [D m_2 + A (\alpha_2 + \alpha_{22})]$$

$$d_3 = D m_2 + C (\alpha_2 + \alpha_{22}) + B c_2 + \Omega [C m_2 + B (\alpha_2 + \alpha_{22}) + A c_2]$$

$$d_2 = D (\alpha_2 + \alpha_{22}) + C c_2 + \Omega [D m_2 + C (\alpha_2 + \alpha_{22}) + B c_2]$$

$$d_1 = D c_2 + \Omega [D (\alpha_2 + \alpha_{22}) + C c_2]$$

$$d_0 = \Omega D c_2$$

La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\phi_f(s) = \frac{(g_3 s^3 + g_2 s^2 + g_1 s + g_0) (M s^3 + N s^2 + P s + Q)}{s^2 (d_3' s^3 + d_2' s^2 + d_1' s + d_0') [m_2 s^2 + (\alpha_2 + \alpha_{22}) s + c_2]}$$

$$\text{Où : } d_3' = -M m_1 s^3 \quad \text{(VI-11-b)}$$

$$d_2' = A - M (\alpha_1 + \alpha_{11}) - N m_1$$

$$d_1' = B + A \Omega - M c_1 - N (\alpha_1 + \alpha_{11}) - m_1 P$$

$$d_0' = C + B \Omega - c_1 N - P (\alpha_1 + \alpha_{11}) - m_1 Q$$

Les dispersions sont les suivantes : (fig.VI-6)

Dispersion de l'écart :

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{\alpha \sigma^2}{\pi} \frac{1}{2\Delta} \left[ \vartheta_3^2 \xi_1 + (\vartheta_2^2 - 2\vartheta_1 \vartheta_3) \xi_2 + (\vartheta_1^2 - 2\vartheta_0 \vartheta_2) \xi_3 + \vartheta_0^2 \xi_4 \right] \quad (\text{VI-13})$$

$$\xi_0 = (\beta_3 \xi_1 - \beta_1 \xi_2) / \beta_5$$

$$\xi_1 = -\beta_0 \beta_3 + \beta_1 \beta_2$$

$$\xi_2 = -\beta_0 \beta_5 + \beta_1 \beta_4$$

$$\xi_3 = (\beta_2 \xi_2 - \beta_4 \xi_1) / \beta_0$$

$$\xi_4 = (\beta_2 \xi_3 - \beta_4 \xi_2) / \beta_0$$

$$\Delta = \beta_0 (\beta_1 \xi_4 - \beta_3 \xi_3 + \beta_5 \xi_2)$$

$$\vartheta_3 = M m_1$$

$$\vartheta_2 = N m_1 + (\alpha_1 + \alpha_{11}) M - A$$

$$\vartheta_1 = m_1 P + (\alpha_1 + \alpha_{11}) N + c_1 M - B - A \Omega$$

$$\vartheta_0 = m_1 Q + (\alpha_1 + \alpha_{11}) P + c_1 N - C - B \Omega$$

$$\beta_5 = A$$

$$\beta_4 = B + 2\alpha A$$

$$\beta_3 = C + 2\alpha B + A \Omega^2$$

$$\beta_2 = D + 2\alpha C + B \Omega^2$$

$$\beta_1 = 2\alpha D + C \Omega^2$$

$$\beta_0 = D \Omega^2$$

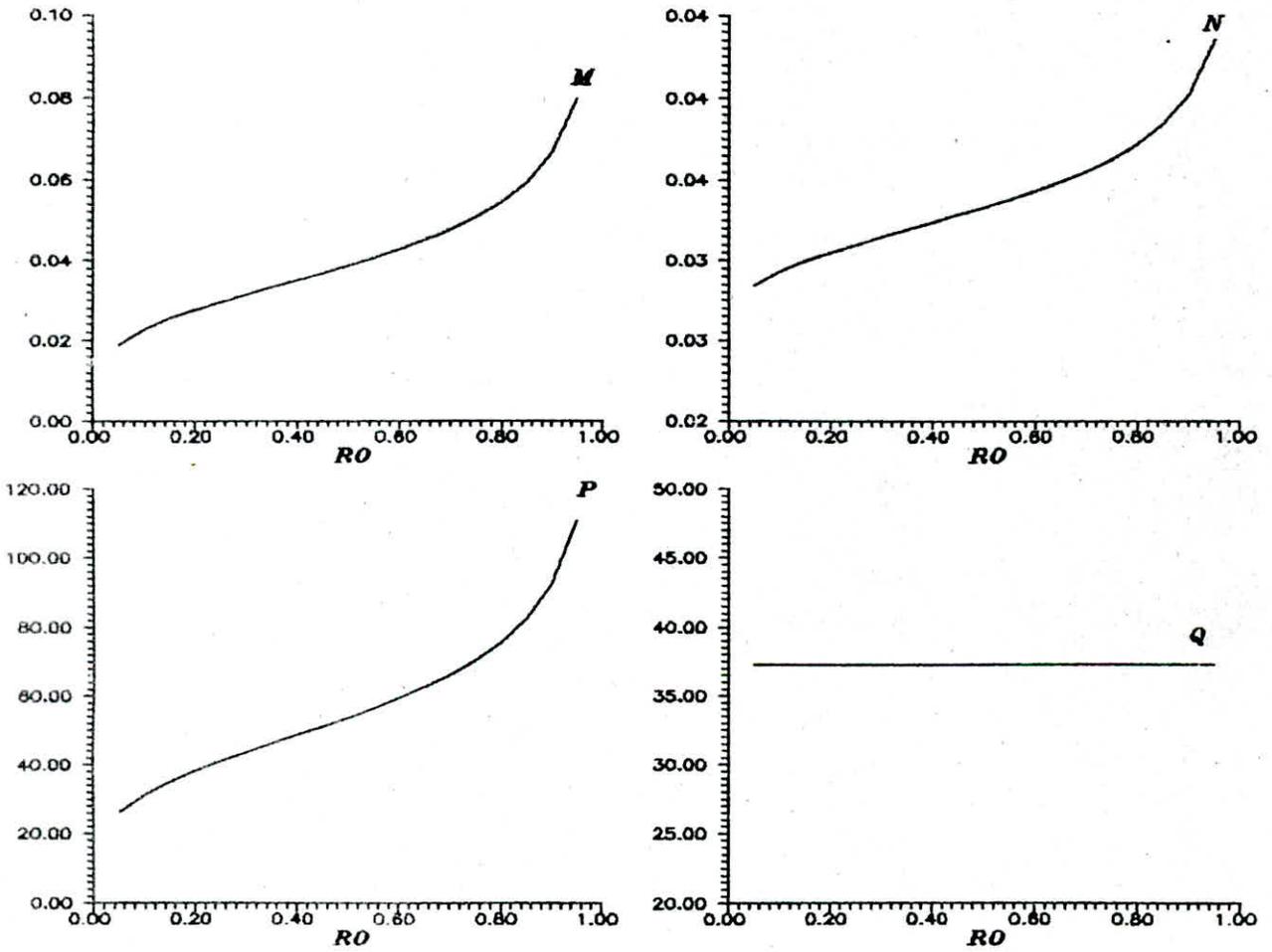
(VI-14)

Dispersion de l'accélération :

$$\sigma_{\ddot{x}_1}^2 = \frac{\alpha \sigma}{\pi} \frac{1}{2\Delta} \left[ \vartheta_4^2 \xi_0 + (\vartheta_3^2 - 2\vartheta_2 \vartheta_4) \xi_1 + (\vartheta_2^2 - 2\vartheta_1 \vartheta_3 + 2\vartheta_0 \vartheta_4) \xi_2 + \right. \\ \left. (\vartheta_1^2 - 2\vartheta_0 \vartheta_2) \xi_3 + \vartheta_0^2 \xi_4 \right] \quad (\text{VI-15})$$

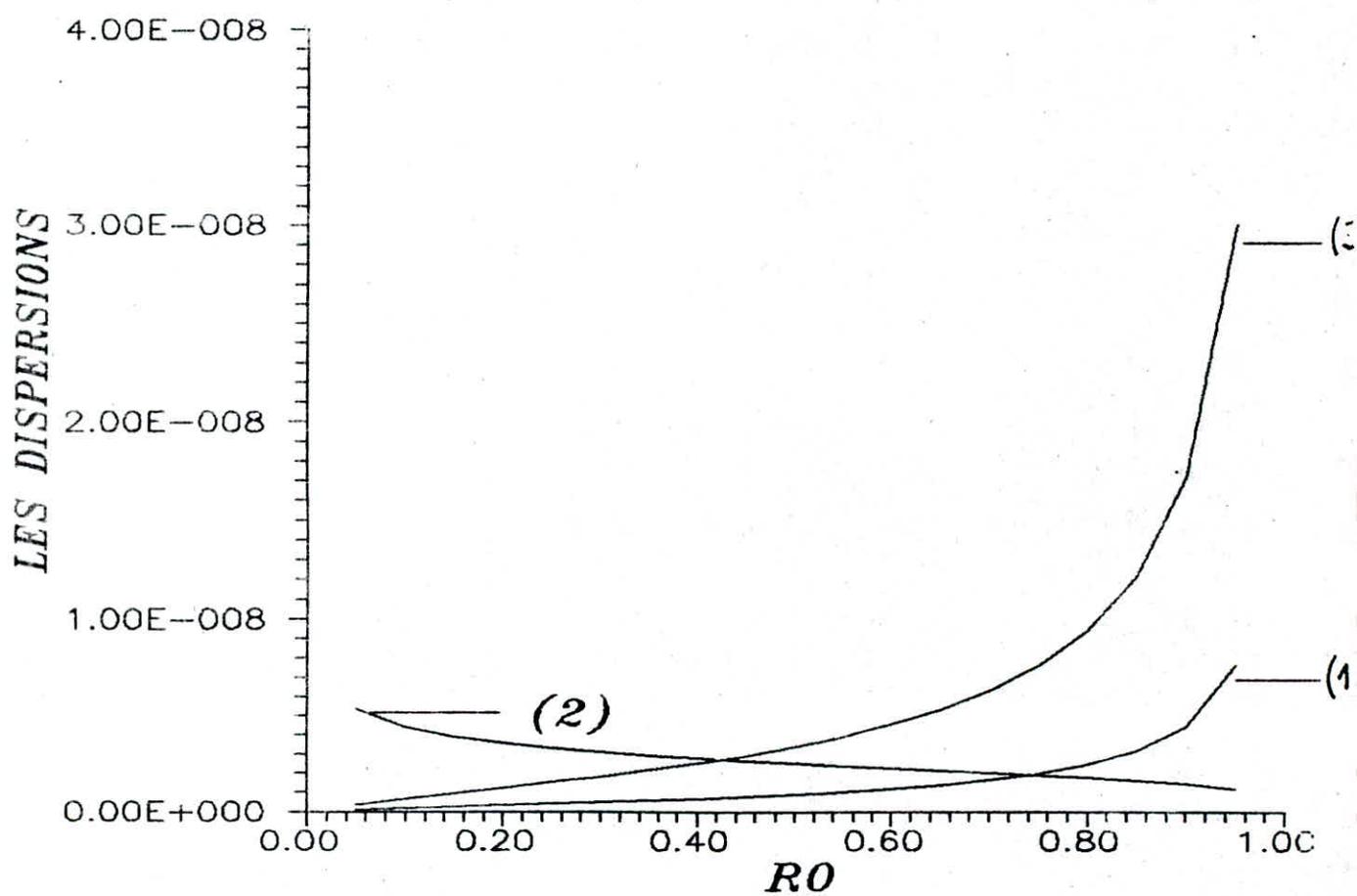
$$\begin{aligned} \vartheta_4 &= M(\alpha_1 + \alpha_{11}) \\ \vartheta_3 &= Mc_1 + N(\alpha_1 + \alpha_{11}) \\ \vartheta_2 &= Nc_1 + P(\alpha_1 + \alpha_{11}) \\ \vartheta_1 &= Pc_1 + Q(\alpha_1 + \alpha_{11}) \\ \vartheta_0 &= Qc_1 \end{aligned} \quad (\text{VI-16})$$

Les autres coefficients sont définis de la même façon que dans l'expression de la dispersion de l'écart.



LES PARAMETRES DEPENDANTS DE L'EXCITATION  
*M*, unite:  $\text{seso}^2$       *N*, unite: sec  
*P*, sans unite      *Q*, unite: 1/sec

fig.VI - 5



- (1) Dispersion de l'ecart, unite: m<sup>2</sup>
- (2) Dispersion de l'acceleration, unite: m<sup>2</sup>/sec<sup>4</sup>
- (3) Fonctionnelle, unite: m<sup>2</sup>

fig.VI - 6

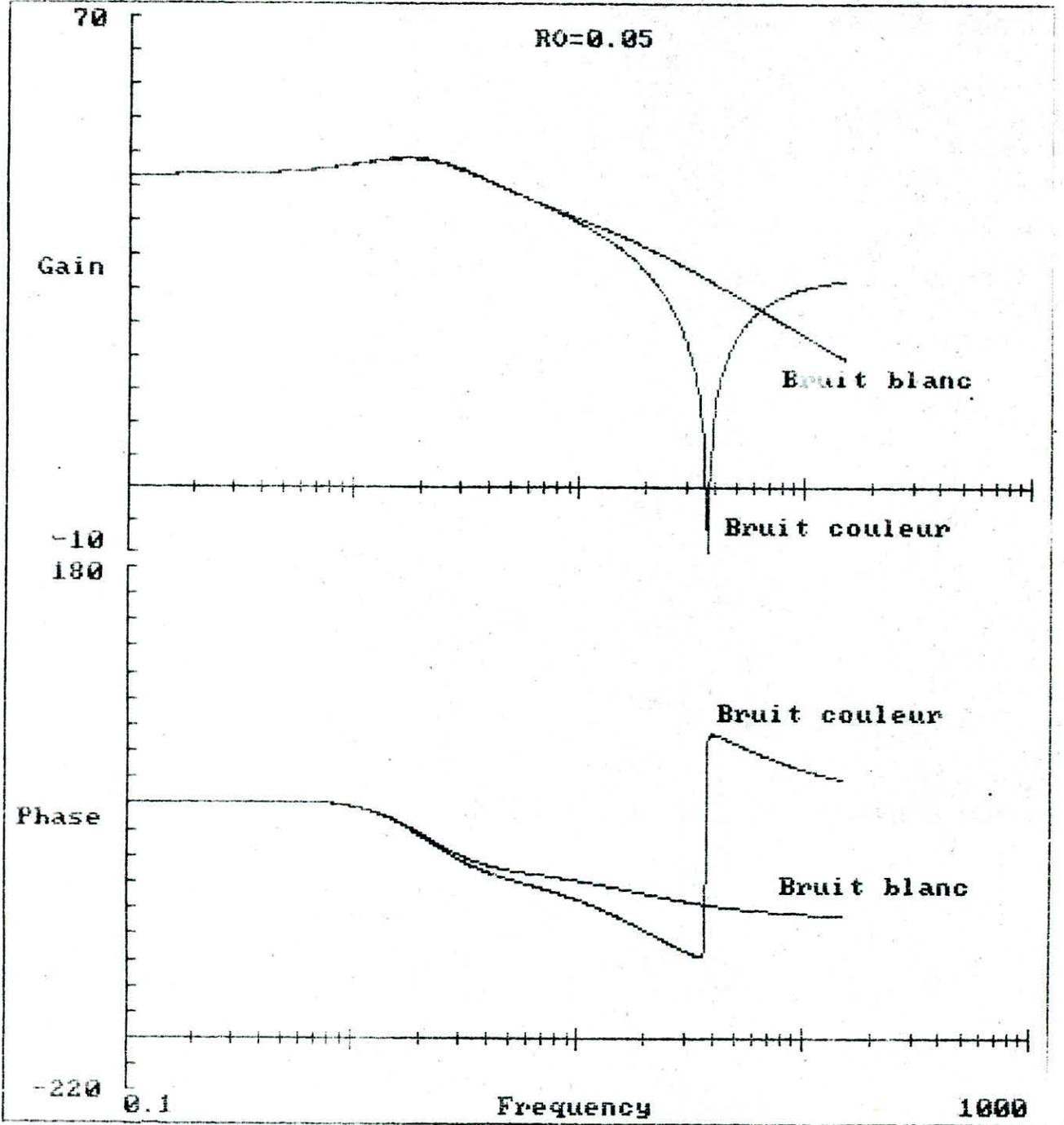


fig.VI-7

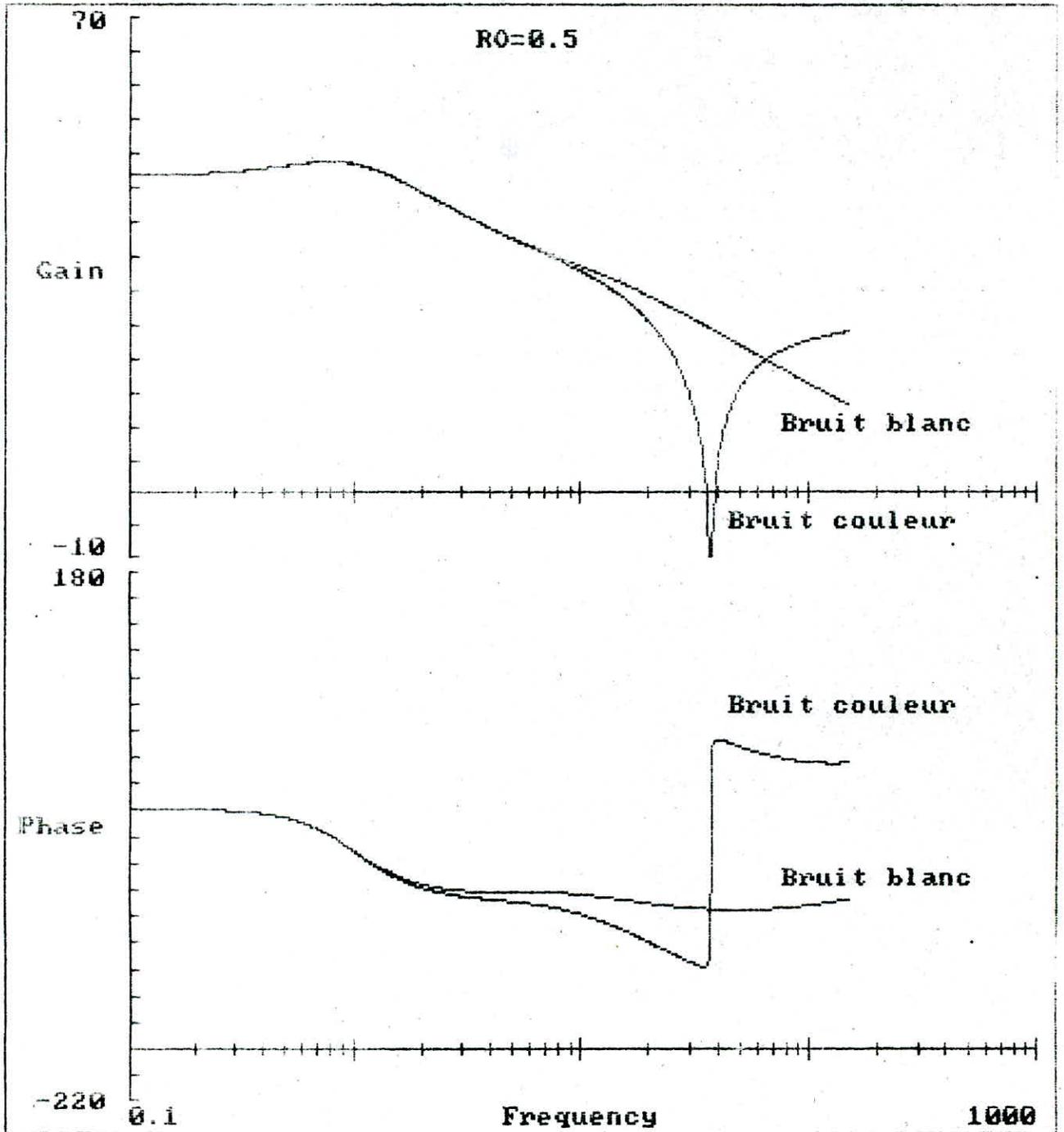


fig. VI-7

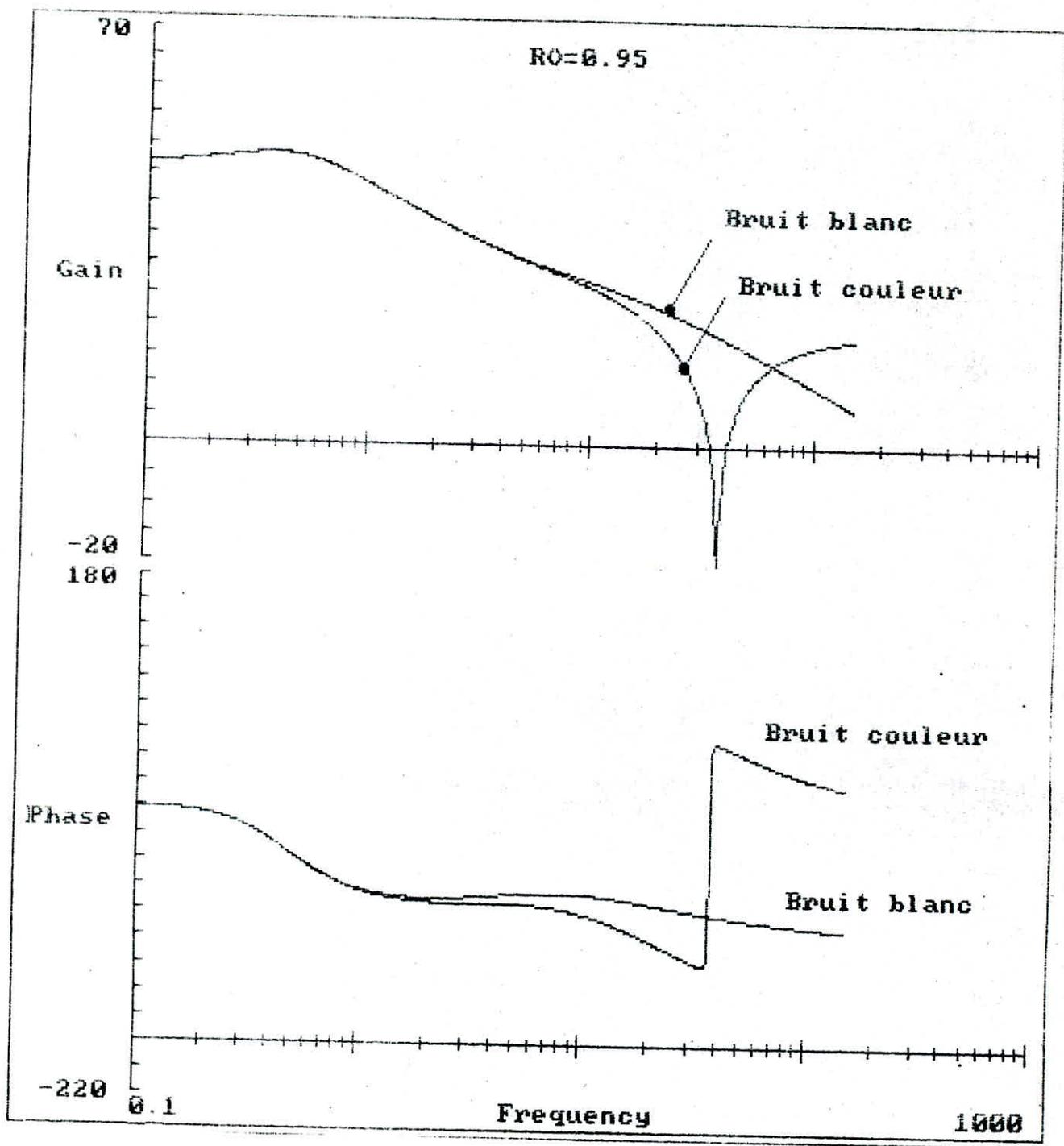


fig.VI - 7

## 2-Influence de $m_2$ :

L'influence de la partie  $m_2$  est similaire à celle de  $m_1$ , donc on trouvera les mêmes résultats obtenus pour l'influence de  $m_1$ , en remplaçant  $m_1, m_2, c_1, c_2, \alpha_1, \alpha_{11}, \alpha_2$  et  $\alpha_{22}$  par respectivement  $m_2, m_1, c_2, c_1, \alpha_2, \alpha_{22}, \alpha_1$  et  $\alpha_{11}$ .

Les résultats obtenus sont représentés par les graphes suivants :

-Les paramètres dépendants de la structure :(fig.VI-8)

-Bruit blanc:

-Les paramètres dépendants de l'excitation :(fig.VI-9)

-Les dispersions :(fig.VI-10)

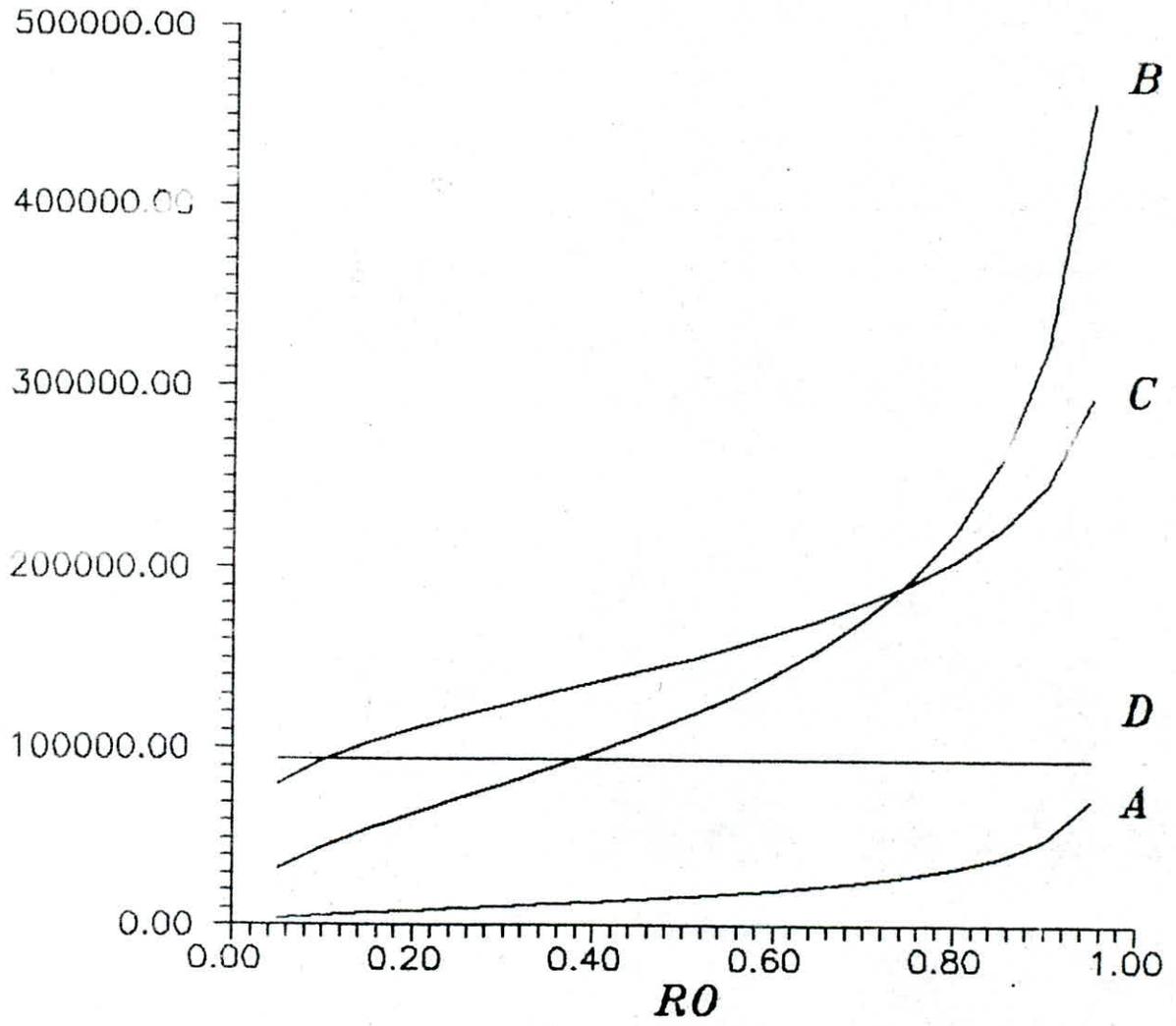
-Bruit de couleur :

-Les paramètres dépendants de l'excitation :(fig.VI-11)

-les dispersions :(fig.VI-12)

-Les modules et phases des fonctions de transfert :(fig.VI-13)

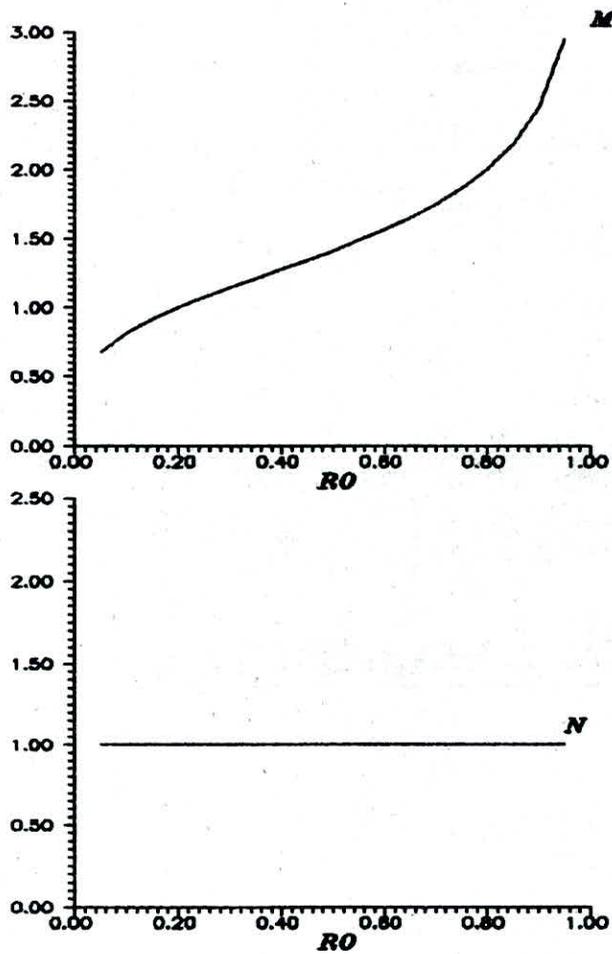
LES PARAMETRES DEPENDANTS DE LA STRUCTURE



A, unite: Kg.sec  
C, unite: Kg/sec

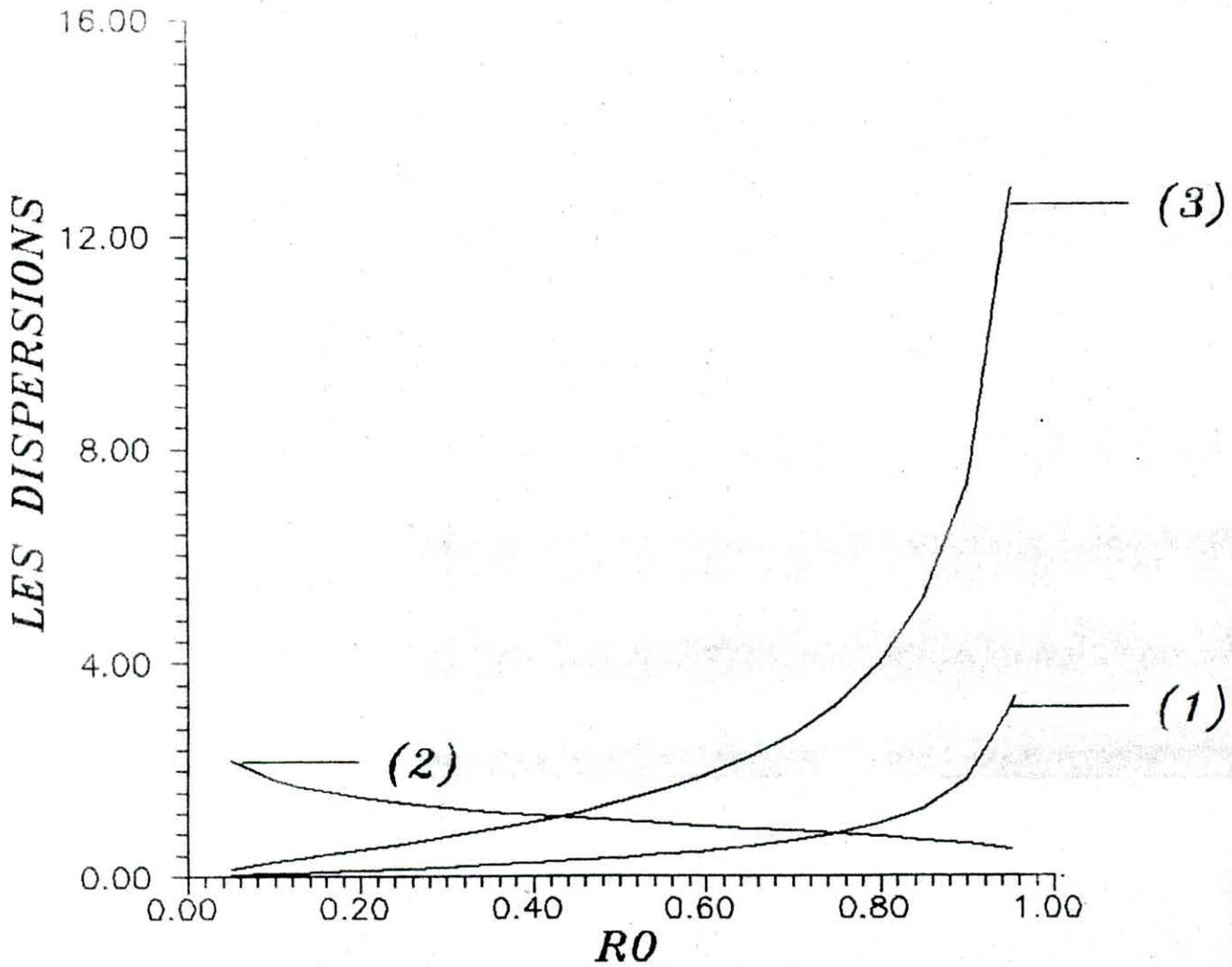
B, unite: Kg  
D, unite: Kg/sec<sup>2</sup>

fig.VI- 83



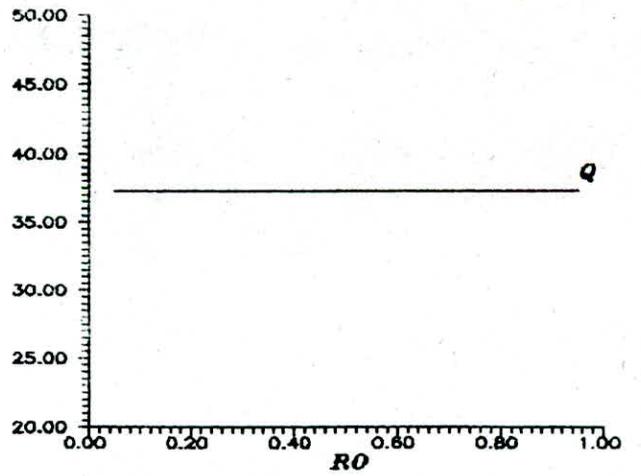
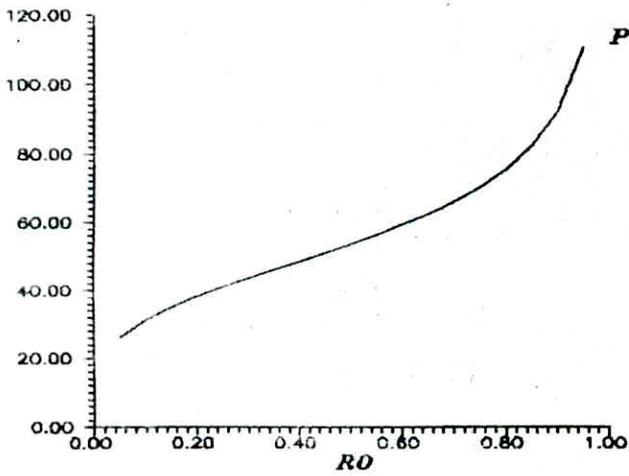
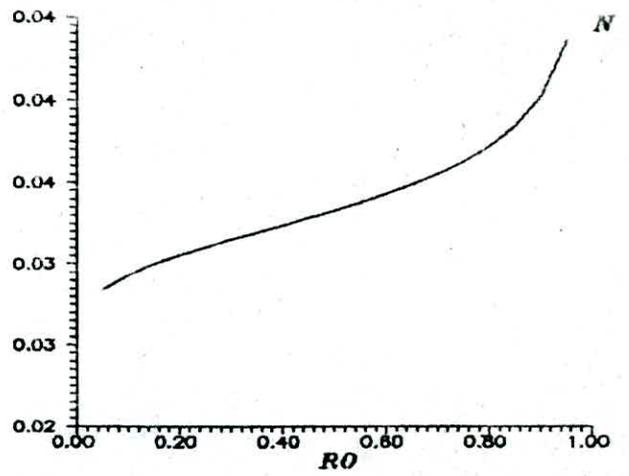
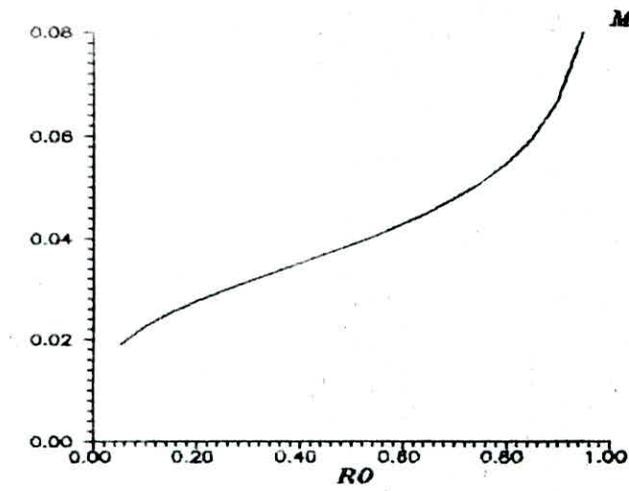
**LES PARAMETRES DEPENDANTS DE L'EXCITATION**  
*M, unite: sec*  
*N, sans unite*

fig. VI-9



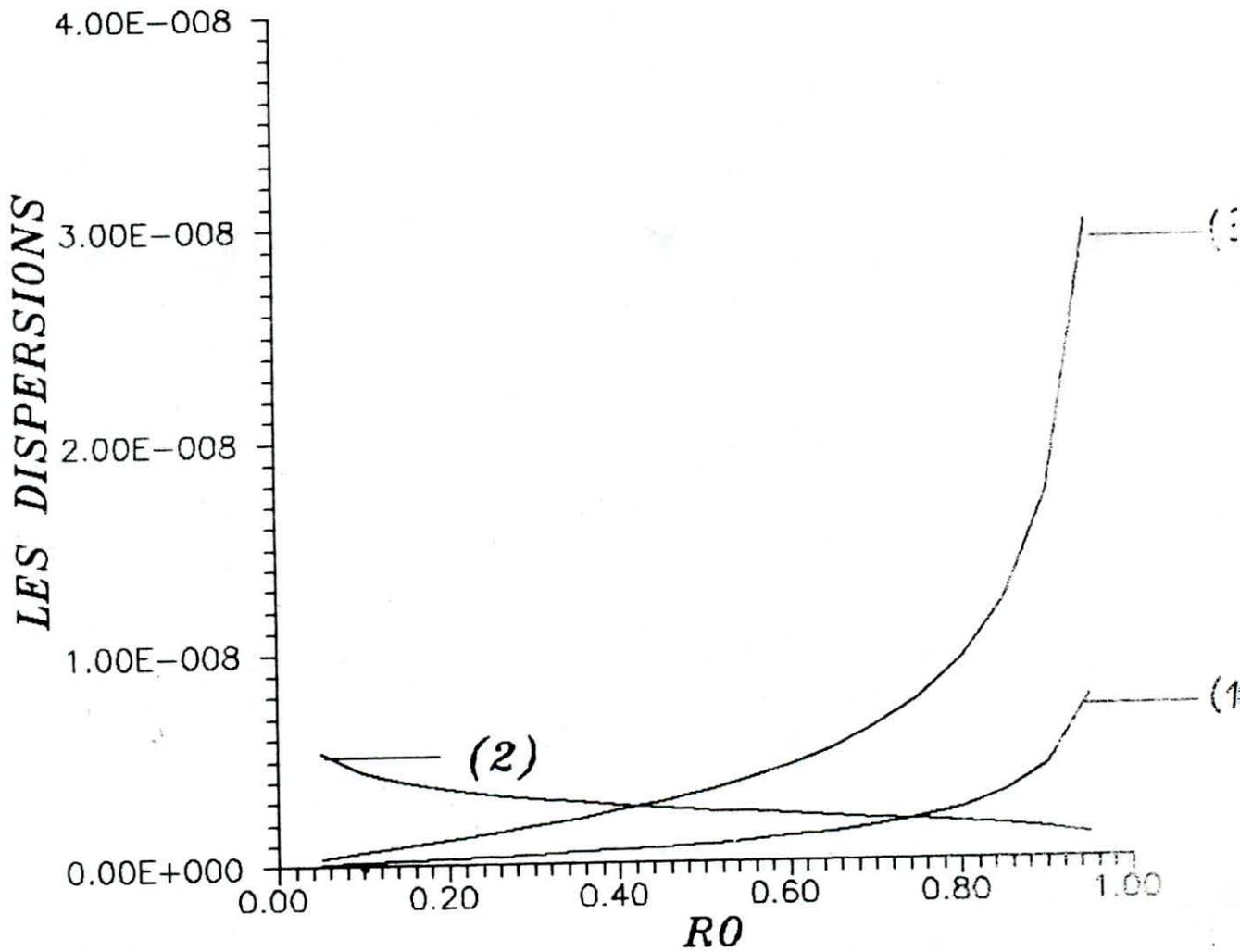
- (1) Dispersion de l'ecart / N2, unite:sec<sup>3</sup>
- (2) Dispersion de l'acceleration / N2, unite:1/sec
- (3) Fonctionnelle / N2, unite:sec<sup>3</sup>

fig.VI-10



LES PARAMETRES DEPENDANTS DE L'EXCITATION  
*M, unite:sec<sup>2</sup>*      *N, unite:sec*  
*P, sans unite*      *Q, unite:1/sec*

fig.VI - 11



- (1) Dispersion de l'ecart, unite:  $m^2$
- (2) Dispersion de l'acceleration, unite:  $m^2/sec^4$
- (3) Fonctionnelle, unite:  $m^2$

Fig. VI - 12

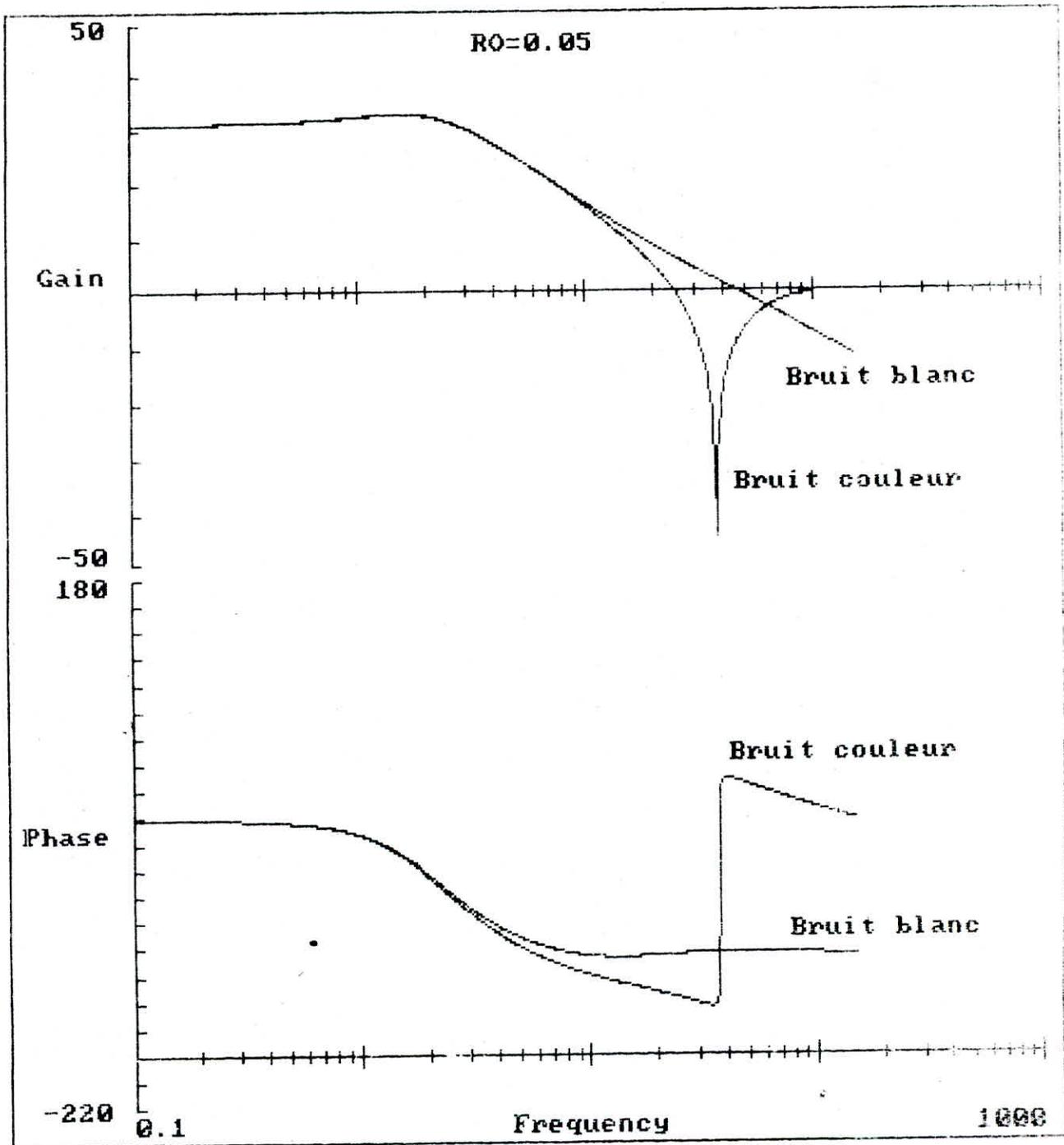


fig.VI-13

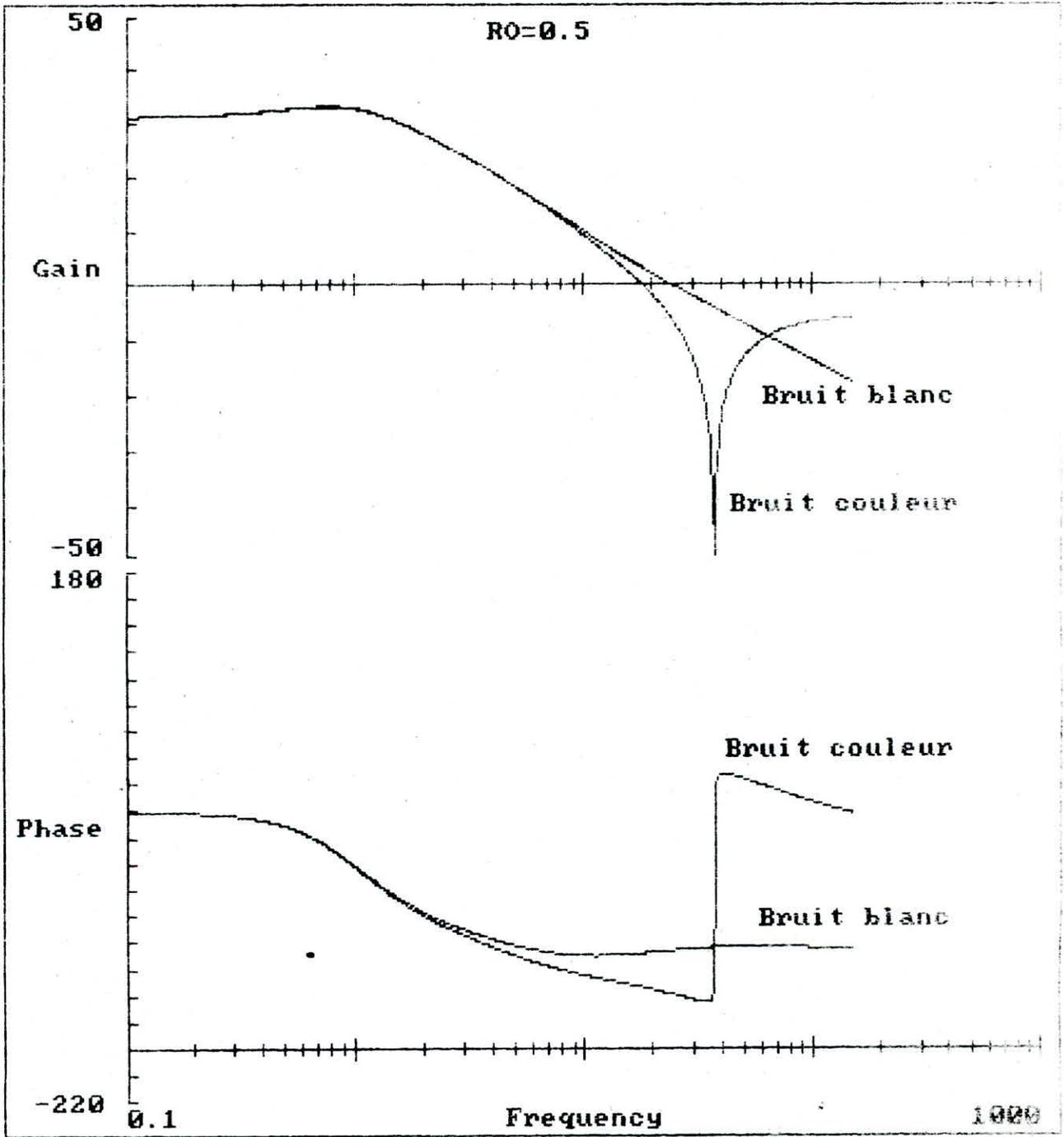


fig. VI - 13

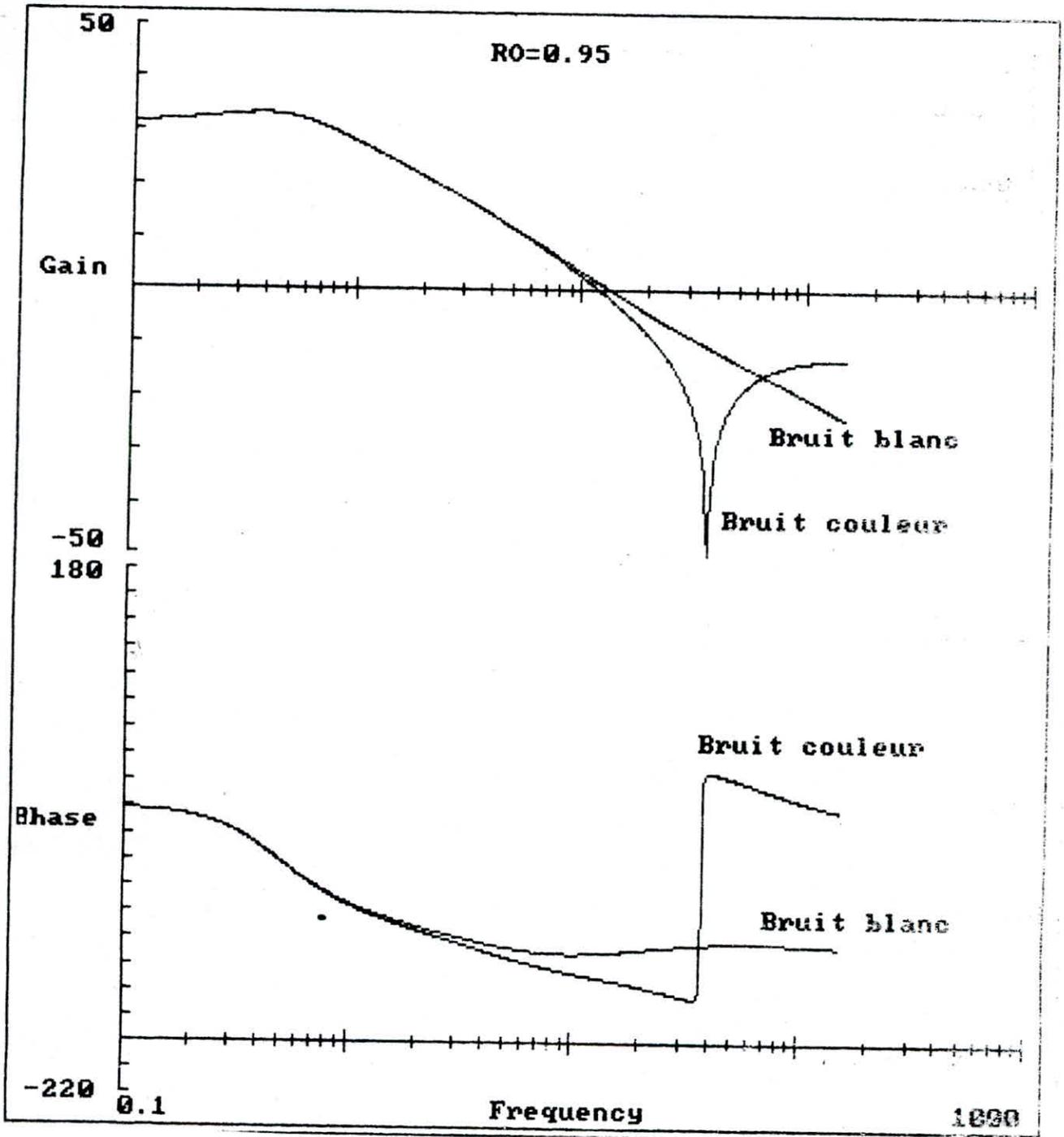


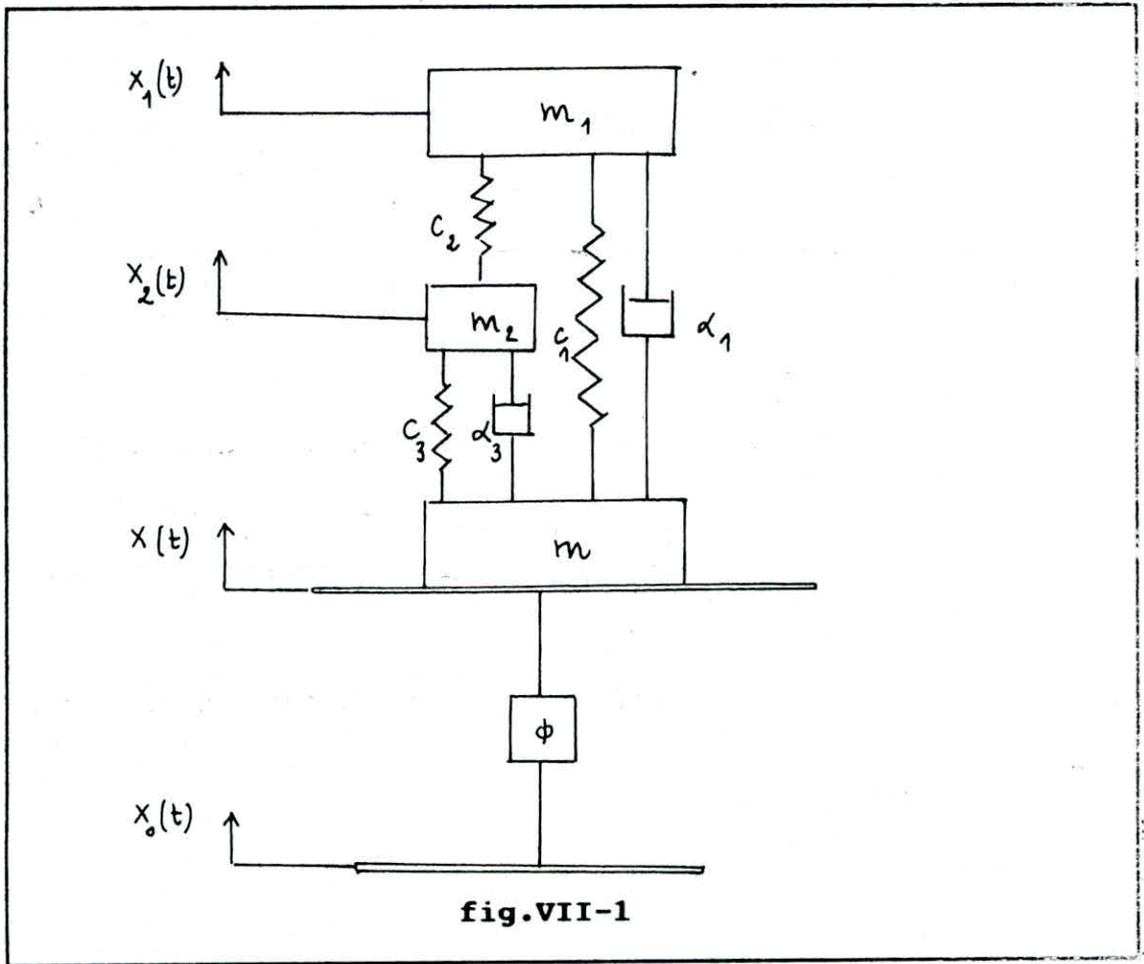
fig.VI-13

# Chapitre 7

## **APPLICATION AU MODELE 3**



Application au modèle 3



La relation fondamentale de la dynamique nous permet d'écrire les équations du mouvement :

$$\begin{aligned}
 f - c_1(x-x_1) - \alpha_1(\dot{x}-\dot{x}_1) - c_3(x-x_2) - \alpha_3(\dot{x}-\dot{x}_2) &= m\ddot{x} \\
 c_1(x-x_1) + \alpha_1(\dot{x}-\dot{x}_1) + c_2(x-x_2) &= m_1\ddot{x}_1 \\
 c_3(x-x_2) + \alpha_3(\dot{x}-\dot{x}_2) - c_2(x_2-x_1) &= m_2\ddot{x}_2
 \end{aligned}$$

En passant par les transformées de Laplace on a :

$$\begin{aligned}
 f - c_1(x-x_1) - \alpha_1 s(x-x_1) - c_3(x-x_2) - \alpha_3 s(x-x_2) &= m s^2 x \\
 c_1(x-x_1) + \alpha_1 s(x-x_1) + c_2(x_2-x_1) &= m_1 s^2 x_1 \\
 c_3(x-x_2) + \alpha_3 s(x-x_2) - c_2(x_2-x_1) &= m_2 s^2 x_2
 \end{aligned}$$

### 1-Influence de la partie m :

Des formules (III-4) et (III-17), on écrit :

$$\begin{aligned}
 L_i(s) &= 1 \\
 G(s) &= \frac{l_4 s^4 + l_3 s^3 + l_2 s^2 + l_1 s + l_0}{g_4 s^4 + g_3 s^3 + g_2 s^2 + g_1 s + g_0}
 \end{aligned} \tag{VII-1}$$

$$\begin{aligned}
 g_4 &= m m_1 m_2 \\
 g_3 &= m(m_1 \alpha_3 + m_2 \alpha_1) + m_1 m_2 (\alpha_1 + \alpha_2) \\
 g_2 &= m \left[ m_1 (c_2 + c_3) + \alpha_1 \alpha_3 + m_2 (c_1 + c_2) \right] + \alpha_1 \alpha_3 (m_1 + m_2) + m_1 m_2 (c_1 + c_2) \\
 g_1 &= (m + m_1 + m_2) \left[ \alpha_1 (c_2 + c_3) + \alpha_3 (c_1 + c_2) \right] \\
 g_0 &= (m + m_1 + m_2) (c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3)
 \end{aligned} \tag{VII-2}$$

$$\begin{aligned}
 l_4 &= m_1 m_2 \\
 l_3 &= m \alpha_3 + m_2 \alpha_1 \\
 l_2 &= m_1 (c_2 + c_3) + \alpha_1 \alpha_3 + m_2 (c_1 + c_2) \\
 l_1 &= \alpha_1 (c_2 + c_3) + \alpha_3 (c_1 + c_2) \\
 l_0 &= c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_1 c_3
 \end{aligned}$$

$$R(s)R(-s) = 1 + \lambda s^4 \tag{VII-3}$$

En décomposant (VII-3), on obtient :

$$R(s) = A s^2 + B s + C$$

Les coefficients A, B et C sont les solutions du système algébrique non linéaire :

$$\left. \begin{array}{l} A^2 = \lambda \\ 2AC - B^2 = 0 \\ C^2 = 1 \end{array} \right\} \quad (\text{VII-4})$$

A, B et C dépendent de  $\lambda$ . (fig.VII-2)

1-a-Excitation de type 'bruit blanc' :

De (III-24) :

$$\phi(s) = \frac{s^2(g_4s^4 + g_3s^3 + g_2s^2 + g_1s + g_0)}{(As^2 + Bs + C)(l_4s^4 + l_3s^3 + l_2s^2 + l_1s + l_0)} \left[ \frac{1/s^2}{As^2 - Bs + C} \right]$$

Après décomposition :

$$\frac{1}{s^2(As^2 - Bs + C)} = \frac{Ms + N}{s^2} + \frac{Ps + Q}{As^2 - Bs + C}$$

M et N sont les solutions du système ci-dessous: (fig.VII-3)

$$\left. \begin{array}{l} AM + P = 0 \\ AN - BM + Q = 0 \\ CM - BN = 0 \\ CN = 1 \end{array} \right\} \quad (\text{VII-5})$$

La fonction de transfert est alors : (fig.VII-7)

$$\phi(s) = \frac{n_5s^5 + n_4s^4 + n_3s^3 + n_2s^2 + n_1s + n_0}{d_6s^6 + d_5s^5 + d_4s^4 + d_3s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0} \quad (\text{VII-6-a})$$

$$n_5 = g_4 M$$

$$n_4 = g_4 N + g_3 M$$

$$n_3 = g_3 N + g_2 M$$

$$n_2 = g_2 N + g_1 M$$

$$n_1 = g_1 N + g_0 M$$

$$n_0 = g_0 N$$

$$d_6 = A l_4$$

$$d_5 = A l_3 + B l_4$$

$$d_4 = A l_2 + B l_3 + C l_4$$

$$d_3 = A l_1 + B l_2 + C l_3$$

$$d_2 = A l_0 + B l_1 + C l_2$$

$$d_1 = B l_0 + C l_1$$

$$d_0 = C l_0$$

(VII-7)

La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\phi_f(s) = \frac{(g_4 s^4 + g_3 s^3 + g_2 s^2 + g_1 s + g_0)(Ms + N)}{As^2(l_4 s^4 + l_3 s^3 + l_2 s^2 + l_1 s + l_0)}$$

(VII-7-b)

Dispersion de l'écart : (fig.VII-7)

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2 \cdot 2} N^2 \lambda^{3/4}$$

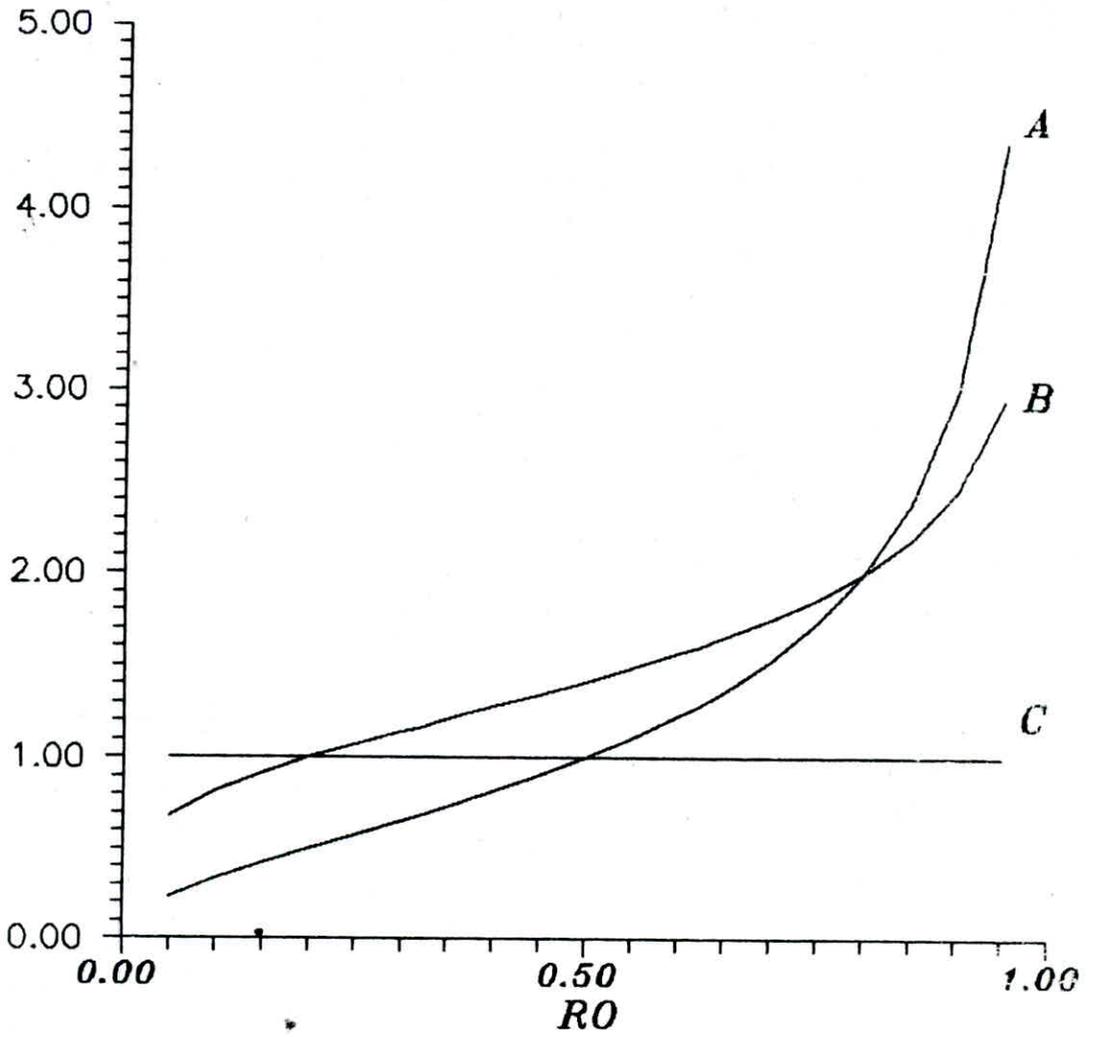
(VII-8)

Dispersion de l'accélération: (fig.VII-7)

$$\sigma_{\ddot{x}_1}^2 = \frac{3}{2 \cdot 2} N^2 \lambda^{-1/4}$$

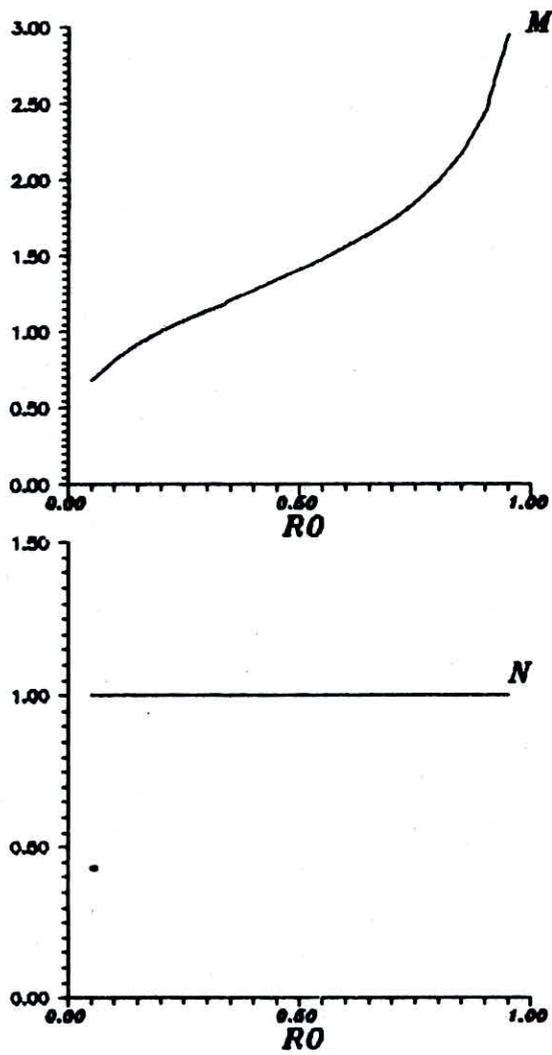
(VII-9)

**LES PARAMETRES DEPENDANTS DE LA STRUCTURE**



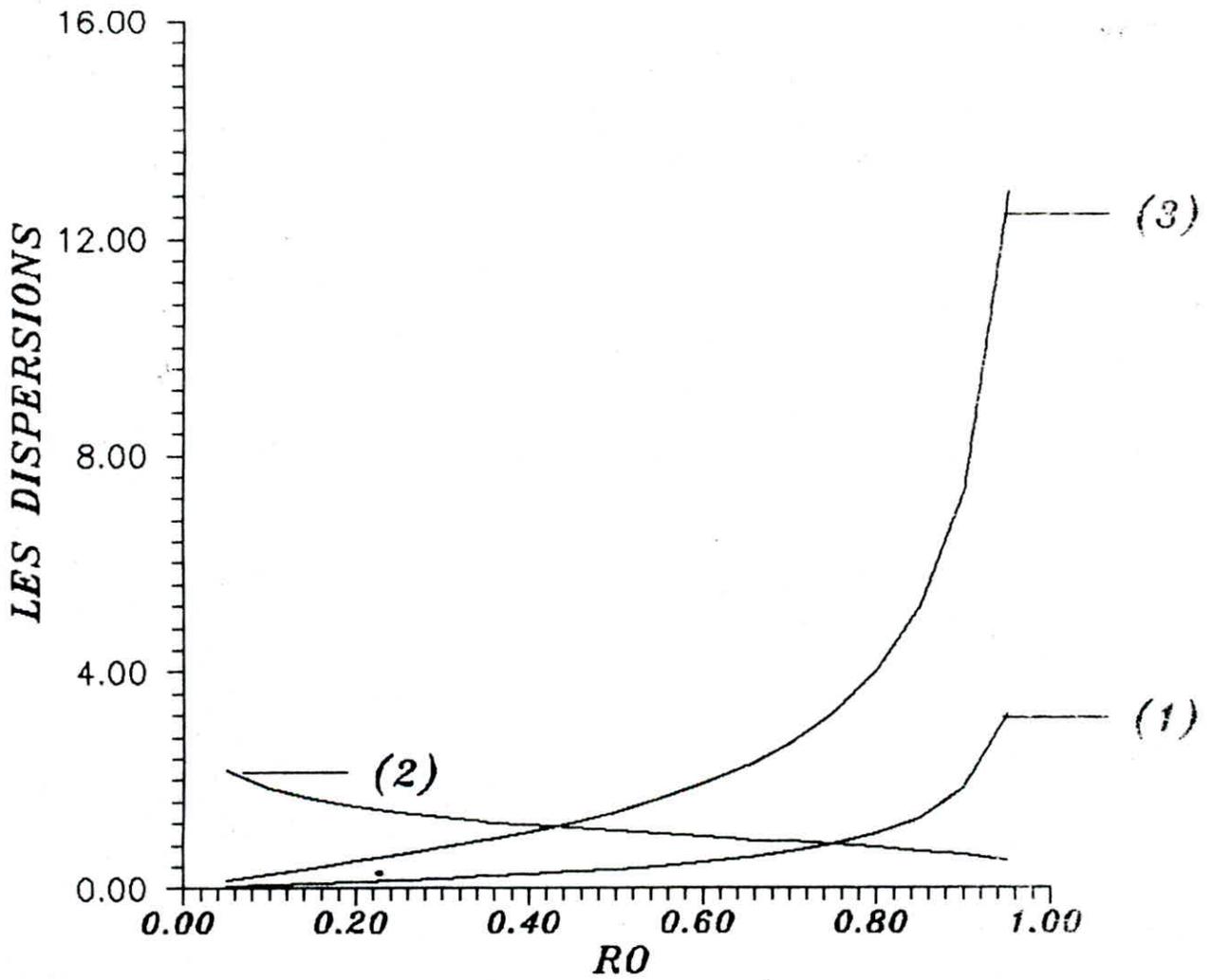
*A, unite:sec<sup>2</sup>*  
*B, unite:sec*  
*C, sans unite*

fig.VII-2



**LES PARAMETRES DEPENDANTS DE L'EXCITATION**  
*M, unite:sec*  
*N, sans unite*

fig. VII - 3



- (1) Dispersion de l'ecart /  $N_2$  , unite:sec<sup>3</sup>
- (2) Dispersion de l'acceleration /  $N_2$ , unite:1/sec
- (3) Fonctionnelle /  $N_2$  , unite:sec<sup>3</sup>

fig.VII-4

1-b-Excitation de type 'bruit couleur' :

$$\frac{\Omega+s}{s^2(s^2+2\alpha s+\Omega^2)} = \frac{Ms^3+Ns^2+Ps+Q}{s^2(s^2+2\alpha s+\Omega^2)} + \frac{Rs+T}{As^2-Bs+C}$$

M, N, P et Q sont les paramètres dépendants de l'excitation ils sont solutions du système suivant: (fig.VII-5)

$$\left. \begin{aligned} AM+R &= 0 \\ -BM+AN+2\alpha R+T &= 0 \\ CM-BN+AP+R\Omega^2+2\alpha T &= 0 \\ CN-BP+AQ+T\Omega^2 &= 0 \\ CP-BQ &= 1 \\ CQ &= \Omega \end{aligned} \right\} \quad \text{(VII-10)}$$

La fonction de transfert est : (fig.VII-7)

$$\phi(s) = \frac{n_7 s^7 + n_6 s^6 + n_5 s^5 + n_4 s^4 + n_3 s^3 + n_2 s^2 + n_1 s + n_0}{d_7 s^7 + d_6 s^6 + d_5 s^5 + d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0} \quad \text{(VII-11-a)}$$

$$\begin{aligned} n_7 &= g_4 M \\ n_6 &= g_3 M + g_4 N \\ n_5 &= g_2 M + g_3 N + g_4 P \\ n_4 &= g_1 M + g_2 N + g_3 P + g_4 Q \end{aligned}$$

$$n_3 = g_0 M + g_1 N + g_2 P + g_3 Q$$

$$n_2 = g_0 N + g_1 P + g_2 Q$$

$$n_1 = g_0 P + g_1 Q$$

$$n_0 = g_0 Q$$

$$d_7 = A l_4$$

$$d_6 = A l_3 + (B + A\Omega) l_4$$

(VII-12)

$$d_5 = A l_2 + (B + A\Omega) l_3 + (C + B\Omega) l_4$$

$$d_4 = A l_1 + (B + A\Omega) l_2 + (C + B\Omega) l_3 + \Omega l_4$$

$$d_3 = A l_0 + (B + A\Omega) l_1 + (C + B\Omega) l_2 + \Omega l_3$$

$$d_2 = (B + A\Omega) l_0 + (C + B\Omega) l_1 + \Omega l_2$$

$$d_1 = (C + B\Omega) l_0 + \Omega l_1$$

$$d_0 = \Omega l_0$$

La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\phi_f(s) = \frac{(g_4 s^4 + g_3 s^3 + g_2 s^2 + g_1 s + g_0)(M s^3 + N s^2 + P s + Q)}{s^2 \left[ (A - M) s + (B + A\Omega - N) \right] (l_4 s^4 + l_3 s^3 + l_2 s^2 + l_1 s + l_0)}$$

(VII-11-b)

Les dispersions sont alors : (fig.VII-6)

Dispersion de l'écart :

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{\alpha \sigma}{\pi} \frac{\vartheta_1^2 \beta_0 \beta_3 \beta_4 + \vartheta_0^2 (-\beta_1 \beta_4^2 + \beta_2 \beta_3 \beta_4)}{2 \beta_0 \beta_4 (-\beta_0 \beta_3^2 - \beta_1 \beta_4^2 + \beta_1 \beta_2 \beta_3)}$$

(VII-13)

$$\vartheta_0 = N - B - A\Omega$$

$$\vartheta_1 = M - A$$

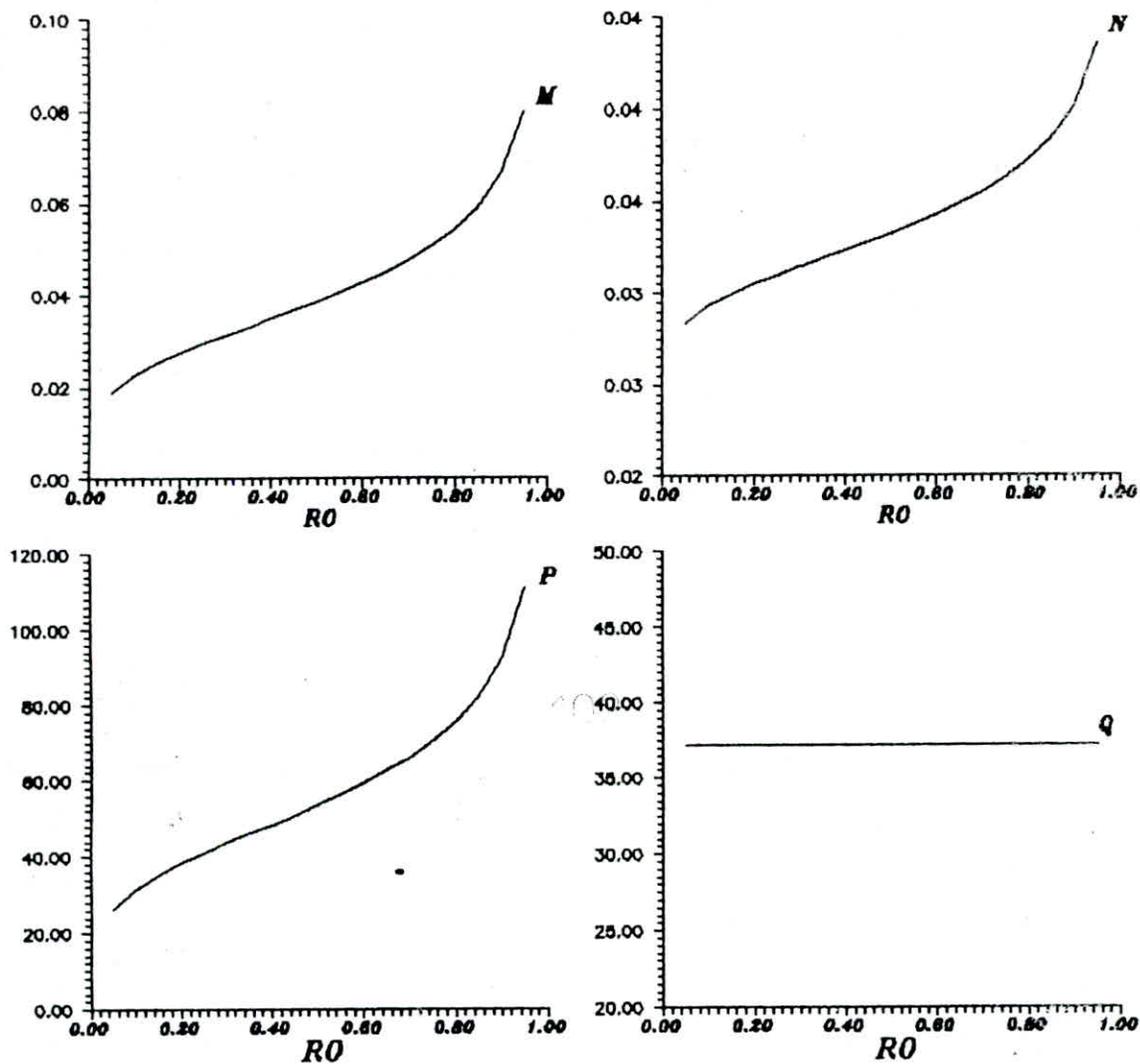
$$\begin{aligned}
 \beta_0 &= \alpha \Omega^2 \\
 \beta_1 &= B \Omega^2 + 2\alpha C \\
 \beta_2 &= A \Omega^2 + 2\alpha B + C \\
 \beta_3 &= 2\alpha A + B \\
 \beta_4 &= A
 \end{aligned}
 \tag{VI-14}$$

Dispersion de l'accélération :

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{\alpha \sigma}{\pi} \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{2\beta_0\beta_3^2 (-\beta_0\beta_3^2 - \beta_1^2\beta_4 + \beta_1\beta_2\beta_3)}
 \tag{VII-15}$$

$$\begin{aligned}
 h_1 &= \vartheta_3^2 (-\beta_0^2\beta_3 + \beta_0\beta_1\beta_2) \\
 h_2 &= (\vartheta_2^2 - 2\vartheta_1\vartheta_3)\beta_0\beta_1\beta_4 \\
 h_3 &= (\vartheta_1^2 - 2\vartheta_0\vartheta_2)\beta_0\beta_3\beta_4 \\
 h_4 &= \vartheta_0^2 (-\beta_1\beta_4^2 + \beta_2\beta_3\beta_4) \\
 \vartheta_3 &= M \\
 \vartheta_2 &= N \\
 \vartheta_1 &= P \\
 \vartheta_0 &= Q
 \end{aligned}
 \tag{VII-16}$$

Les  $\beta_i$  sont de la même façon que dans (VII-14).

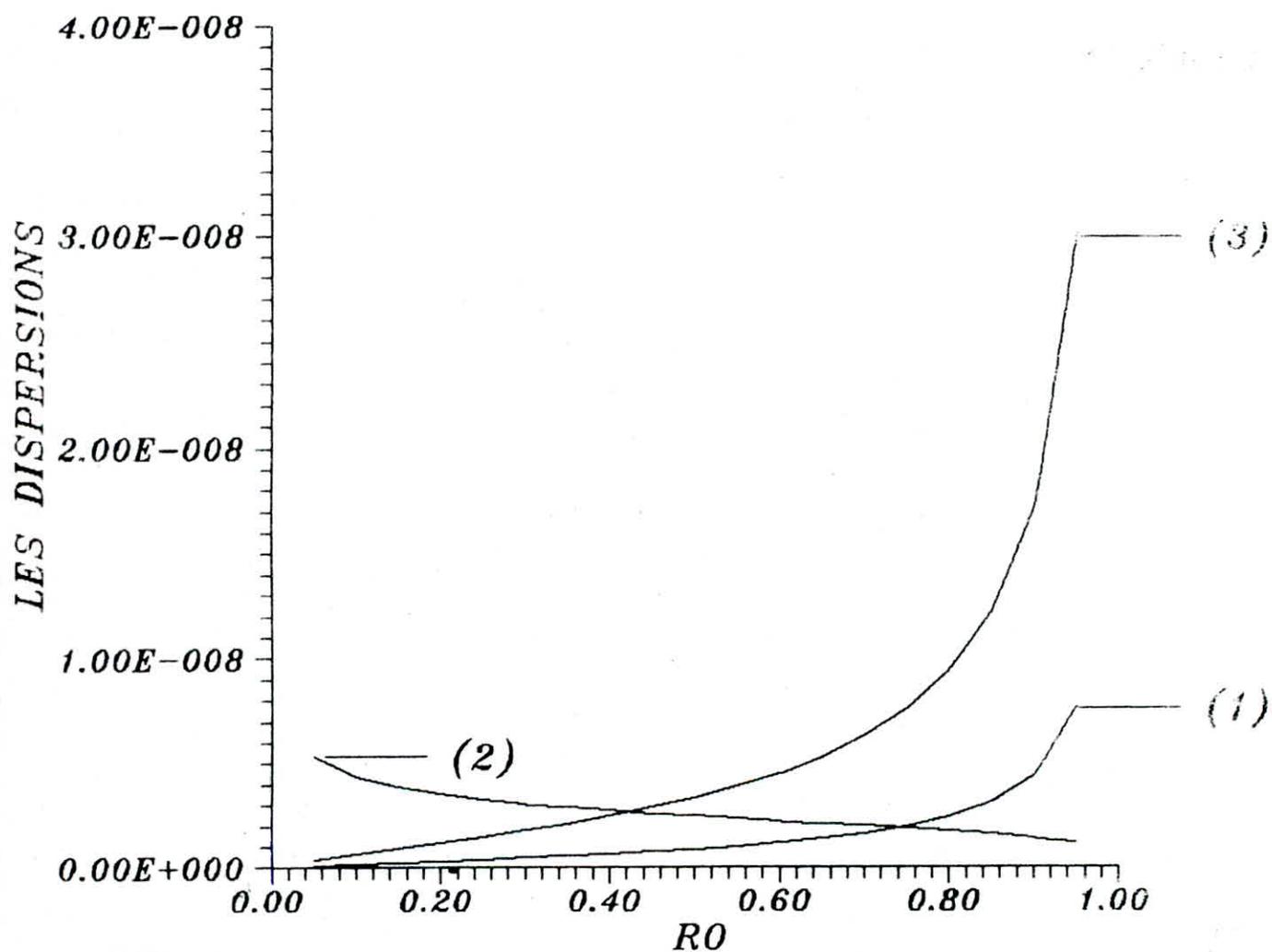


**LES PARAMETRES DEPENDANTS DE L'EXCITATION**

*M, unite: sec<sup>2</sup>*  
*P: sans unite*

*N, unite: sec*  
*Q, unite: 1/sec*

fig. VII- 5



- (1) Dispersion de l'ecart, unite:  $m^2$
- (2) Dispersion de l'acceleration, unite:  $m^2/sec^4$
- (3) Fonctionnelle, unite:  $m^2$

fig.VII - 6

2-Influence de la partie  $m_1$  :

Selon (III-4) et (III-17)

$$L_1(s) = \frac{k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{l_4 s^4 + l_3 s^3 + l_2 s^2 + l_1 s + l_0} \quad (\text{VII-17})$$

$$\text{Où : } k_3 = m_2 \alpha_1$$

$$k_2 = m_2 c_1 + \alpha_1 \alpha_3$$

$$k_1 = \alpha_1 (c_2 + c_3) + \alpha_3 (c_1 + c_2) \quad (\text{VII-18})$$

$$k_0 = c_1 (c_2 + c_3) + c_2 c_3$$

Et  $l_4, l_3, l_2, l_1$  et  $l_0$  sont définis en (VII-2).

$$R(s) \cdot R(-s) = 1 + \lambda \cdot L_1(s) \cdot L_1(-s) \quad (\text{VII-19})$$

En décomposant (VII-19), on obtient :

$$R(s) = \frac{As^5 + Bs^4 + Ds^3 + Es^2 + Fs + G}{l_4 s^4 + l_3 s^3 + l_2 s^2 + l_1 s + l_0} \quad (\text{VII-20})$$

Les solutions A, B, D, E, F et G du système ci dessous sont toutes positives et dépendent de  $\lambda$ .

$$A^2 = \lambda k_3^2$$

$$B^2 - 2AD = l_4^2 + \lambda (k_2^2 - 2k_1 k_3)$$

$$2BE - 2AF - D^2 = (2l_2 l_4 - l_3^2) + \lambda (2k_2 k_0 - k_1^2) \quad (\text{VII-21})$$

$$2BG - 2DF + E^2 = (2l_4 l_0 - 2l_3 l_1 + l_2^2) + \lambda k_0^2$$

$$2EG - F^2 = 2l_2 l_0 - l_1^2$$

$$G^2 = l_0^2$$

2-a-Excitation de type 'bruit blanc' :

$$\left[ \begin{array}{c} \psi(s) \\ R(-s) \end{array} \right] = \frac{Ms+N}{s^2} + \frac{Ps^4+Qs^3+Rs^2+Ts+U}{-As^5+Bs^4-Ds^3+Es^2-Fs+G}$$

Les coefficients M,N,P,Q,R,T et U sont solutions du système suivant :

$$P-AM = 0$$

$$Q+BM-AN = 0$$

$$R-DM+BN = 1_4$$

$$T+EM-DN = -1_3$$

$$U-FM-EN = 1_2$$

$$GM-FN = -1_1$$

$$GN = 1_0$$

(VII-21)

De (III-23), on écrit la fonction de transfert :

$$\phi(s) = \frac{n_5s^5+n_4s^4+n_3s^3+n_2s^2+n_1s+n_0}{d_5s^5+d_4s^4+d_3s^3+d_2s^2+d_1s+d_0}$$

(VII-22-a)

$$\text{Où : } n_5 = g_4 M$$

$$n_4 = g_3 M + g_2 N$$

$$n_3 = g_2 M + g_3 N$$

$$n_2 = g_1 M + g_2 N$$

$$n_1 = g_0 M + g_1 N$$

$$n_0 = g_0 N$$

(VII-23)

$$d_5 = A$$

$$d_2 = E$$

$$d_4 = B$$

$$d_1 = F$$

$$d_3 = D$$

$$d_0 = G$$

La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\phi_f(s) = \frac{(g_4 s^4 + g_3 s^3 + g_2 s^2 + g_1 s + g_0)(Ms + N)}{s^2 (d_3' s^3 + d_2' s^2 + d_1' s + d_0')} \quad (\text{VII-22-b})$$

Où :

$$\begin{aligned} d_3' &= A - l_4 M \\ d_2' &= B - l_3 M - l_4 N \\ d_1' &= D - l_2 M - l_3 N \\ d_0' &= E - l_1 M - l_2 N \end{aligned}$$

Dispersion de l'écart :

$$\sigma_{x-x_0}^2 = N^2 \cdot \frac{1}{2\Delta} \left[ \vartheta_3^2 \xi_1^2 + (\vartheta_2^2 - 2\vartheta_1 \vartheta_3) \xi_2^2 + (\vartheta_1^2 - 2\vartheta_0 \vartheta_2) \xi_3^2 + \vartheta_0^2 \xi_4^2 \right]$$

(VII-24)

$$\begin{aligned} \xi_0 &= (\beta_3 \xi_1 - \beta_1 \xi_2) / \beta_5 \\ \xi_1 &= -\beta_0 \beta_3 + \beta_1 \beta_2 \\ \xi_2 &= -\beta_0 \beta_5 + \beta_1 \beta_4 \\ \xi_3 &= (\beta_2 \xi_2 - \beta_4 \xi_1) / \beta_0 \\ \xi_4 &= (\beta_2 \xi_3 - \beta_4 \xi_2) / \beta_0 \\ \Delta &= \beta_0 (\beta_1 \xi_4 - \beta_3 \xi_3 + \beta_5 \xi_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_0 &= l_1 M + l_2 N - E \\ \vartheta_1 &= l_2 M + l_3 N - D \\ \vartheta_2 &= l_3 M + l_4 N - B \\ \vartheta_3 &= l_4 M - A \end{aligned}$$

(VII-25)

$$\begin{aligned} \beta_0 &= G & \beta_2 &= E & \beta_4 &= B \\ \beta_1 &= F & \beta_3 &= D & \beta_5 &= A \end{aligned}$$

dispersion de l'accélération :

$$\sigma_{\ddot{x}_1}^2 = N^2 \frac{1}{2\Delta} \left[ \begin{aligned} &\vartheta_4^2 \zeta_0^2 + (\vartheta_3^2 - 2\vartheta_2\vartheta_4) \zeta_1^2 + (\vartheta_2^2 - 2\vartheta_1\vartheta_3 + 2\vartheta_0\vartheta_4) \zeta_2^2 + \\ &(\vartheta_1^2 - 2\vartheta_0\vartheta_2) \zeta_3^2 + \vartheta_0^2 \zeta_4^2 \end{aligned} \right] \quad (\text{VII-26})$$

Où :  $\vartheta_0 = k_0 N$

$\vartheta_1 = k_1 N + k_0 M$

$\vartheta_2 = k_2 N + k_1 M$

$\vartheta_3 = k_3 N + k_2 M$

$\vartheta_4 = k_3 M$

(VII-27)

$\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \Delta, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  et  $\beta_5$  sont les mêmes que dans (VII-25)

2-b-Excitation de type 'bruit couleur' :

$$\left[ \frac{\psi(s)}{R(-s)} \right] = \frac{Ms^3 + Ns^2 + Ps + Q}{s^2(s^2 + 2\alpha s + \Omega^2)} + \frac{Rs^4 + Ts^3 + Us^2 + Vs + W}{-As^5 + Bs^4 - Ds^3 + Es^2 - Fs + G}$$

Les coefficients M, N, P, Q, R, T, U, V et W sont solutions du système algébrique linéaire :

$$-AM + R = 0$$

$$T + 2\alpha R + BM - AN = 0$$

$$U + 2\alpha T + R\Omega^2 - DM + BN - AP = 0$$

$$V + 2\alpha U + T\Omega^2 + EM - DN + BP - AQ = l_4$$

$$W + 2\alpha V + U\Omega^2 - FM + EN - DP + BQ = l_4\Omega - l_3$$

(VII-28)

$$2\alpha W + V\Omega^2 + GM - FN + EP - DQ = l_2 - l_3\Omega$$

$$W\Omega^2 + GN - FP + EQ = l_2\Omega - l_1$$

$$GP - FQ = l_0 - l_1\Omega$$

$$GQ = l_0\Omega$$

De (III-23), on écrit la fonction de transfert :

$$\phi(s) = \frac{n_7s^7 + n_6s^6 + n_5s^5 + n_4s^4 + n_3s^3 + n_2s^2 + n_1s + n_0}{-d_6s^6 + d_5s^5 + d_4s^4 + d_3s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0}$$

(VII-28-a)

$$\text{Où : } n_7 = g_4M$$

$$n_6 = g_4N + g_3M$$

$$n_5 = g_4P + g_3N + g_2M$$

$$n_4 = g_4Q + g_3P + g_2N + g_1M$$

$$n_3 = g_3Q + g_2P + g_1N + g_0M$$

$$n_2 = g_2Q + g_1P + g_0N$$

$$n_1 = g_1Q + g_0P$$

$$n_0 = g_0Q$$

(VII-29)

$$\begin{aligned}
 d_6 &= A \\
 d_5 &= B + A\Omega \\
 d_4 &= D + B\Omega \\
 d_3 &= E + D\Omega \\
 d_2 &= F + E\Omega \\
 d_1 &= G + F\Omega \\
 d_0 &= G\Omega
 \end{aligned}$$

La fonction de transfert en boucle fermée est:

$$\phi_f(s) = \frac{(g_4 s^4 + g_3 s^3 + g_2 s^2 + g_1 s + g_0)(Ms^3 + Ns^2 + Ps + Q)}{s^2 (d_5 s^5 + d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0)} \quad (\text{VII-28-b})$$

Où :

$$\begin{aligned}
 d_5' &= -l_4 M \\
 d_4' &= A - l_3 M - l_4 N \\
 d_3' &= B + A\Omega - l_2 M - l_3 N - l_4 P \\
 d_2' &= D + B\Omega - l_1 M - l_2 N - l_3 P - l_4 Q \\
 d_1' &= E + D\Omega - l_0 M - l_1 N - l_2 P - l_3 Q \\
 d_0' &= F + E\Omega - l_0 N - l_1 P - l_2 Q
 \end{aligned}$$

Dispersion de l'écart :

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{\alpha \sigma^2}{\Pi} \frac{1}{2 \Delta} \left[ \vartheta_5^2 \xi_1 + (\vartheta_4^2 - 2\vartheta_3 \vartheta_5) \xi_2 + (\vartheta_3^2 - 2\vartheta_2 \vartheta_4 + 2\vartheta_1 \vartheta_5) \xi_3 + \right. \\ \left. (\vartheta_2^2 - 2\vartheta_1 \vartheta_3 + 2\vartheta_0 \vartheta_4) \xi_4 + (\vartheta_1^2 - 2\vartheta_0 \vartheta_2) \xi_5 + \vartheta_0^2 \xi_6 \right]$$

(VII-30)

Avec :

$$\xi_0 = (\beta_5 \xi_1 - \beta_3 \xi_2 + \beta_1 \xi_3) / \beta_7$$

$$\xi_1 = -(\beta_1 \beta_4 - \beta_0 \beta_5)^2 (\beta_0 \beta_3 - \beta_1 \beta_2) (\beta_0 \beta_7 - \beta_1 \beta_6 + \beta_2 \beta_5 - \beta_3 \beta_4)$$

$$\xi_2 = (\beta_0 \beta_7 - \beta_1 \beta_6)^2 + (\beta_0 \beta_3 - \beta_1 \beta_2) (\beta_2 \beta_7 - \beta_3 \beta_6)$$

$$\xi_3 = -(\beta_0 \beta_7 - \beta_1 \beta_6)^2 + (\beta_0 \beta_3 - \beta_1 \beta_2) (\beta_4 \beta_7 - \beta_5 \beta_6)$$

$$\xi_4 = (\beta_2 \xi_3 - \beta_4 \xi_2 + \beta_6 \xi_1) / \beta_0$$

$$\xi_5 = (\beta_2 \xi_4 - \beta_4 \xi_3 + \beta_6 \xi_2) / \beta_0$$

$$\xi_6 = (\beta_2 \xi_5 - \beta_4 \xi_4 + \beta_6 \xi_3) / \beta_0$$

$$\Delta = \beta_0 (\beta_1 \xi_6 - \beta_3 \xi_5 + \beta_5 \xi_4 - \beta_7 \xi_3)$$

$$\beta_0 = G\Omega^2$$

$$\beta_1 = F\Omega^2 + 2\alpha G$$

$$\beta_2 = E\Omega^2 + 2\alpha F + G$$

$$\beta_3 = D\Omega^2 + 2\alpha E + F$$

$$\beta_4 = B\Omega^2 + 2\alpha D + E$$

$$\beta_5 = A\Omega^2 + 2\alpha B + D$$

$$\beta_6 = 2\alpha A + B$$

$$\beta_7 = A$$

$$\vartheta_0 = 1_2 Q + 1_1 P + 1_0 N - F - E\Omega$$

$$\vartheta_1 = 1_3 Q + 1_2 P + 1_1 N + 1_0 M - E - D\Omega$$

$$\vartheta_2 = 1_4 Q + 1_3 P + 1_2 N + 1_1 M - D - B\Omega$$

$$\vartheta_3 = 1_4 P + 1_3 N + 1_2 M - B - A\Omega$$

$$\vartheta_4 = 1_4 N + 1_3 M - A$$

$$\vartheta_5 = 1_4 M$$

(VII-31)

Dispersion de l'accélération :

$$\sigma_{\ddot{x}_1}^2 = \frac{\alpha \sigma^2}{\pi} \frac{1}{2 \Delta} \left[ \vartheta_6^2 \xi_0 + (\vartheta_5^2 - 2\vartheta_4 \vartheta_6) \xi_1 + (\vartheta_4^2 - 2\vartheta_3 \vartheta_5 + 2\vartheta_2 \vartheta_6) \xi_2 + \right. \\ \left. (\vartheta_3^2 - 2\vartheta_2 \vartheta_4 + 2\vartheta_1 \vartheta_5 - 2\vartheta_0 \vartheta_6) \xi_3 + (\vartheta_2^2 - 2\vartheta_1 \vartheta_3 + 2\vartheta_0 \vartheta_4) \xi_4 + (\vartheta_1^2 - 2\vartheta_0 \vartheta_3) \xi_5 + \vartheta_0^2 \xi_6 \right]$$

(VII-32)

Où :  $\vartheta_0 = k_0 Q$

$\vartheta_1 = k_1 Q + k_0 P$

$\vartheta_2 = k_2 Q + k_1 P + k_0 N$

$\vartheta_3 = k_3 Q + k_2 P + k_1 N + k_0 M$

$\vartheta_4 = k_3 P + k_2 N + k_1 M$

$\vartheta_5 = k_3 N + k_2 M$

$\vartheta_6 = k_3 M$

(VII-33)

$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \Delta, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$  et  $\beta_7$  sont définies de la même manière qu'au (VII-31).

### 3-Influence de la partie $m_2$ :

Des équations (III-4) et (III-17) on écrit :

$$L_2(s) = \frac{k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{l_4 s^4 + l_3 s^3 + l_2 s^2 + l_1 s + l_0} \quad (\text{VII-34})$$

$$\text{Où : } k_0 = c_3(c_1 + c_2) - c_1 c_2$$

$$k_1 = \alpha_3(c_1 + c_2) + \alpha_1(c_3 - c_2)$$

$$k_2 = m_1 c_3 + \alpha_1 \alpha_3$$

$$k_3 = m_1 \alpha_3$$

(VII-35)

$$l_0 = c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_1 c_3$$

$$l_1 = \alpha_1(c_2 + c_3) + \alpha_3(c_1 + c_2)$$

$$l_2 = m_1(c_2 + c_3) + \alpha_1 \alpha_3 + m_2(c_1 + c_2)$$

$$l_3 = m_1 \alpha_3 + m_2 \alpha_1$$

$$l_4 = m_1 m_2$$

L'expression de  $G(s)$  est la même que celle définie en (VII-1).

$$R(s)R(-s) = 1 + \lambda s^4 \cdot L_2(s)L_2(-s) \quad (\text{VII-36})$$

En décomposant (VII-35), on obtient :

$$R(s) = \frac{As^5 + Bs^4 + Ds^3 + Es^2 + Fs + G}{l_4 s^4 + l_3 s^3 + l_2 s^2 + l_1 s + l_0} \quad (\text{VII-37})$$

Les coefficients A, B, D, E, F et G sont les solutions du système algébrique non linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
A^2 &= \lambda k_3^2 \\
B^2 - 2AD &= l_4^2 + \lambda (k_2^2 - 2k_1 k_3) \\
2BE - 2AF - D^2 &= (2l_2 l_4 - l_3^2) + \lambda (2k_2 k_0 - k_1^2) \\
2BG - 2DF + E^2 &= (2l_4 l_0 - 2l_3 l_1 + l_2^2) + \lambda k_0^2 \\
2EG - F^2 &= 2l_2 l_0 - l_1^2 \\
G^2 &= l_0^2
\end{aligned}
\tag{VII-38}$$

3-a-Excitation de type 'bruit blanc':

$$\left[ \begin{array}{c} \psi(s) \\ R(-s) \end{array} \right] = \frac{Ms+N}{s^2} + \frac{Ps^4 + Qs^3 + Rs^2 + Ts + U}{-As^5 + Bs^4 - Ds^3 + Es^2 - Fs + G}$$

De (III-23), on écrit la fonction de transfert :

$$\phi(s) = \frac{n_5 s^5 + n_4 s^4 + n_3 s^3 + n_2 s^2 + n_1 s + n_0}{d_5 s^5 + d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0}
\tag{VII-39-a}$$

Où :  $n_5 = g_4 M$

$$n_4 = g_3 M + g_4 N$$

$$n_3 = g_2 M + g_3 N$$

$$n_2 = g_1 M + g_2 N$$

$$n_1 = g_0 M + g_1 N$$

$$n_0 = g_0 N$$

(VII-40)

$$d_5 = A$$

$$d_4 = B$$

$$d_3 = D$$

$$d_2 = E$$

$$d_1 = F$$

$$d_0 = G$$

La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\phi_f(s) = \frac{(g_4 s^4 + g_3 s^3 + g_2 s^2 + g_1 s + g_0)(Ms + N)}{s^2 (d_3' s^3 + d_2' s^2 + d_1' s + d_0')} \quad (\text{VII-39-b})$$

Où :

$$\begin{aligned} d_3' &= A - l_4 M \\ d_2' &= B - l_3 M - l_4 N \\ d_1' &= D - l_2 M - l_3 N \\ d_0' &= E - l_1 M - l_2 N \end{aligned}$$

Dispersion de l'écart :

$$\sigma_{x-x_0}^2 = N^2 \frac{1}{2 \Delta} \left[ \vartheta_3^2 \xi_1 + (\vartheta_2^2 - 2\vartheta_1 \vartheta_3) \xi_2 + (\vartheta_1^2 - 2\vartheta_0 \vartheta_2) \xi_3 + \vartheta_0^2 \xi_4 \right] \quad (\text{VII-41})$$

Avec :

$$\begin{aligned} \xi_0 &= (\beta_3 \xi_1 - \beta_1 \xi_2) / \beta_0 \\ \xi_1 &= -\beta_0 \beta_3 + \beta_1 \beta_2 \\ \xi_2 &= -\beta_0 \beta_5 + \beta_1 \beta_4 \\ \xi_3 &= (\beta_2 \xi_2 - \beta_4 \xi_1) / \beta_0 \\ \xi_4 &= (\beta_2 \xi_3 - \beta_4 \xi_2) / \beta_0 \\ \Delta &= \beta_0 (\beta_1 \xi_4 - \beta_3 \xi_3 + \beta_5 \xi_2) \end{aligned}$$

(VII-42)

$$\begin{aligned} \beta_0 &= G \\ \beta_1 &= F \\ \beta_2 &= E \\ \beta_3 &= D \\ \beta_4 &= B \\ \beta_5 &= A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_0 &= l_1 M + l_2 N - E \\ \vartheta_1 &= l_2 M + l_3 N - D \\ \vartheta_2 &= l_3 M + l_4 N - B \\ \vartheta_3 &= l_4 M - A \end{aligned}$$

Dispersion de l'accélération :

$$\sigma_{\ddot{x}_2}^2 = N^2 \frac{1}{2 \Delta} \left[ \vartheta_2^2 \zeta_0^2 + (\vartheta_3^2 - 2\vartheta_4 \vartheta_2) \zeta_1 + (\vartheta_2^2 - 2\vartheta_1 \vartheta_3 + 2\vartheta_0 \vartheta_4) \zeta_2 + (\vartheta_1^2 - 2\vartheta_0 \vartheta_2) \zeta_3 + \vartheta_0^2 \zeta_4 \right]$$

(VII-43)

$$\vartheta_0 = k_0 N$$

$$\vartheta_1 = k_1 N + k_0 M$$

$$\vartheta_2 = k_2 N + k_1 M$$

(VII-44)

$$\vartheta_3 = k_3 N + k_2 M$$

$$\vartheta_4 = k_3 M$$

Les autres grandeurs sont les mêmes qu'au (VII-42).

3-b-Excitation de type 'bruit couleur':

$$\left[ \begin{array}{c} \psi(s) \\ R(-s) \end{array} \right] = \frac{Ms^3 + Ns^2 + Ps + Q}{s^2(s^2 + 2\alpha s + \Omega^2)} + \frac{Rs^4 + Ts^3 + Us^2 + Vs + W}{-As^5 + Bs^4 - Ds^3 + Es^2 - Fs + G}$$

Les coefficients  $M, N, P, Q, R, T, U, V$  et  $W$  sont les solutions du système algébrique linéaire suivant :

$$\begin{aligned} R - AM &= 0 \\ T + 2\alpha R + R\Omega^2 + EM - DM + BN - AP &= 0 \\ V + 2\alpha U + T\Omega^2 + EM - DN + BP - AQ &= 1_4 \\ W + 2\alpha V + U\Omega^2 - FM + EN - DP + BQ &= -1_3 + 1_4\Omega \\ 2\alpha W + V\Omega^2 + GM - FN + EP - DQ &= 1_2 - 1_3\Omega \\ W\Omega^2 + GN - FP + EQ &= -1_1 + 1_2\Omega \\ GP - FQ &= 1_0 - 1_1\Omega \\ GQ &= 1_0\Omega \end{aligned} \tag{VII-45}$$

La fonction de transfert dans ce cas est alors :

$$\phi(s) = \frac{n_7 s^7 + n_6 s^6 + n_5 s^5 + n_4 s^4 + n_3 s^3 + n_2 s^2 + n_1 s + n_0}{d_6 s^6 + d_5 s^5 + d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0} \tag{VII-46-a}$$

$$\begin{aligned} n_7 &= g_4 M \\ n_6 &= g_4 N + g_3 M \\ n_5 &= g_4 P + g_3 N + g_2 M \\ n_4 &= g_4 Q + g_3 P + g_2 N + g_1 M \\ n_3 &= g_3 Q + g_2 P + g_1 N + g_0 M \\ n_2 &= g_2 Q + g_1 P + g_0 N \\ n_1 &= g_1 Q + g_0 P \\ n_0 &= g_0 Q \end{aligned}$$

(VII-47)

$$\begin{aligned}
 d_6 &= A \\
 d_5 &= B + A\Omega \\
 d_4 &= D + B\Omega \\
 d_3 &= E + D\Omega \\
 d_2 &= F + E\Omega \\
 d_1 &= G + F\Omega \\
 d_0 &= G\Omega
 \end{aligned}$$

La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\phi_f(s) = \frac{(g_4 s^4 + g_3 s^3 + g_2 s^2 + g_1 s + g_0)(Ms^3 + Ns^2 + Ps + Q)}{s^2 (d_5 s^5 + d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0)} \quad (\text{VII-46-b})$$

Où :

$$\begin{aligned}
 d_5 &= -1_4 M \\
 d_4 &= A - 1_3 M - 1_4 N \\
 d_3 &= B + A\Omega - 1_2 M - 1_3 N - 1_4 P \\
 d_2 &= D + B\Omega - 1_1 M - 1_2 N - 1_3 P - 1_4 Q \\
 d_1 &= E + D\Omega - 1_0 M - 1_1 N - 1_2 P - 1_3 Q \\
 d_0 &= F + E\Omega - 1_0 N - 1_1 P - 1_2 Q
 \end{aligned}$$

Dispersion de l'écart :

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{\alpha \sigma^2}{\Pi} \frac{1}{2 \Delta} \left[ \theta_5^2 \xi_1 + (\theta_4^2 - 2\theta_3 \theta_5) \xi_2 + (\theta_3^2 - 2\theta_2 \theta_4 + 2\theta_1 \theta_5) \xi_3 + \right. \\
 \left. (\theta_2^2 - 2\theta_1 \theta_3 + 2\theta_0 \theta_4) \xi_4 + (\theta_1^2 - 2\theta_0 \theta_2) \xi_5 + \theta_0^2 \xi_6 \right] \quad (\text{VII-48})$$

Les grandeurs :

$$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \Delta, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6 \quad \text{et}$$

$\beta$  ont les mêmes expressions qu'au (VII-31)  
 Dispersion de l'accélération :

$$\sigma_{\ddot{x}_2}^2 = \frac{\alpha \sigma^2}{\Pi} \frac{1}{2 \Delta} \left[ \theta_6^2 \zeta_0 + (\theta_5^2 - 2\theta_4 \theta_6) \zeta_1 + (\theta_4^2 - 2\theta_3 \theta_5 + 2\theta_2 \theta_6) \zeta_3 \right. \\ \left. (\theta_3^2 - 2\theta_2 \theta_4 + 2\theta_1 \theta_5 - 2\theta_0 \theta_6) \zeta_4 + (\theta_2^2 - 2\theta_1 \theta_3 + 2\theta_0 \theta_4) \zeta_4 + (\theta_1^2 - 2\theta_0 \theta_2) \zeta_5 + \theta_0^2 \zeta_6 \right]$$

(VII-49)

Toutes les grandeurs intervenant dans l'expression de la dispersion de l'accélération sont définies par (VII-33).

# Chapitre 8

## **CONCLUSION**



## CONCLUSION :

-Pour chaque modèle, les courbes des dispersions dans les deux cas d'excitation présentent les mêmes variations, elles peuvent être similaires pour une valeur adéquate de la densité spectrale énergétique du bruit blanc.

Ceci est très visible dans les graphes des modules et phases des fonctions de transfert, pour les deux cas d'excitation, les courbes se superposent dans la plage de fréquence 0-20 Hz.

Vu ces remarques, on est amené à conclure qu'il est préférable de mener les calculs en ne considérant que le bruit blanc en raison de leur simplicité et de la validité des résultats obtenus (toujours dans la plage de fréquence 0-20 Hz).

-Pour les petites valeurs de  $\rho$ , la dispersion de l'accélération prend des valeurs infiniment grandes, et la dispersion du déplacement relatif prend des valeurs proches de zéro, donc rigidité accrue du système de suspension.

L'effet contraire est ressenti pour les valeurs de  $\rho$  proches de un, donc une grande souplesse du système de suspension.

En pratique, à partir des exigences limites pour la dispersion de l'une des deux grandeurs, ou bien des deux en même temps, on désigne la valeur correspondante de  $\rho$  à partir de laquelle on déduit les valeurs des paramètres intervenants dans l'expression de la fonction de transfert du système.

-Dans le cas de l'excitation de type 'bruit blanc', les paramètres des systèmes de suspension donnés par la fonction de transfert ne dépendent que de la structure du corps en suspension. Alors que dans le cas de l'excitation de type 'bruit couleur', la fonction de transfert dépend de la structure et de l'excitation.

-Dans tous les cas étudiés, la réalisation physique des systèmes de suspension ne peut être faite que par des systèmes actifs ou bien par la combinaison des systèmes actifs et

passifs, vu que les fonctions de transfert obtenues ne correspondent à aucune fonction de transfert connue pour les systèmes passifs. Il serait plus intéressant de poursuivre cette étude afin d'identifier les différents éléments qui entrent dans la structure des systèmes de suspension auxquels nous avons abouti.

Cette étude nous a permis d'acquérir de nouvelles connaissances sur un domaine dont nous ignorions l'importance et véritable utilité. Nous espérons qu'elle sera d'un apport appréciable pour toute personne intéressée par l'amélioration du confort et de la sécurité routière.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUES.

- (1) G.C.Newton, Jr., L.A.Gould, J.K.Kaiser-'Analytical design of linear feedback controls'-N.Y., John Willey and sons, Inc., London 1957.
- (2) W.R.Perkins, J.B.Cruz, Jr.,-'Engineering of Dynamic Systems'-John Willey and Sons, Inc., N.Y. 1969.
- (3) A.P.Sage-'Optimum Systems Control'-Prentice Hall, Inc., Englewood Clifs, N.Y. 1968.
- (4) M.Ksiazek, T.Rezzoug-'Certaines formes de critères et leur influence sur la vibro-isolation optimum des systèmes mécaniques' projet de fin d'études, Janvier 1985, Dept. mécanique, ENP Alger.
- (5) M.Ksiazek, T.Rezzoug-'Vibro-isolation optimum des systèmes mécaniques avec une forme complexe de critère d'optimisation' Journal of technology no2, 106-123, ENP Alger.
- (6) M.Ksiazek-'Determination of optimum vibro-isolation systems for a sitting human operator'-Aviation, space and environmental medicine, USA, 49/1/; 257-261, 1978.
- (7) M.Ksiazek-'Some problems of identification and modeling of the human body'-'Man under vibration'-Proceedings of international CISM -IFTOMM-XHO-April 3-6, 1979, Udine, ITALY.
- (8) A.Wisner, A.Donnadieu, A.Berthos-'A biomechanical model of man for the study of vehicle seat and suspension'-International journal of product research, 1964, no4, 131-148.
- (9) G.R.Hopkins-'nonlinear lumped parameter mathematical model of dynamic response of the human body'-Symposium of biodynamics models and their applications, AMRL-TR-71-29, pp 26-28, October 1970, Wright Paterson AFB, OHIO, 971, USA.

- (10) F.Coulon-'Theorie et traitement' de signaux'-Presses Polytechniques Romandes,1984 SUISSE.
- (11) A.Spataru-'Theorie de la transmission de l'information'-Masson, Paris 1970.
- (12) F.Raven-'Automatic control engineering'-Auckland,Mc Graw Hill, 1978.
- (13) A.Papoulis-'Probability,random variables and stochastic process'- Mc Graw Hill,New York 1965.
- (14) M.Harris,E.Crede-'Shock and vibration handbook'-Mc Graw Hill book company,1976.
- (15) A.Cho,J.K.Medrich-'Pneumatic actuators for vehicle active suspension applications'-Journal of dynamic systems,measurement and control,March 1985,pp67-72.
- (16) D.L.Margolis,M.Hubbard-'An approach toward the optimal semi-active suspension'-Journal of dynamic systems,measurement and control,Sept.1988,pp 288,289.
- (17) N.Tanaka,Y.Kikushima-'A study of active vibration solation' Journal of Vibration,Acoustics,Stress and Reliability in design, Oct.1985,pp 392-397.
-

