الجمهوريه الجزائريه الديمقراطيه الشعبيه
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : *Génie Mécanique*

18/95

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Modélisation mathématique des mécanismes de transfert en milieu poreux - Application au processus de condensation .

Proposé par : *Mr S. LARBI*

Etudié par : *Mr B. SLIMANI*

Dirigé par : *Mr S. LARBI*

PROMOTION : 1994/ 1995

E.N.P 10, Avenue Hassen Badi - EL-HARRACH - ALGER

الجمهوريه الجزائريه الديمقراطيه الشعبيه
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : *Génie Mécanique*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Modélisation mathématique des mécanismes de transfert en milieu poreux - Application au processus de condensation .

Proposé par : *Mr S. LARBI*

Etudié par : *Mr B. SLIMANI*

Dirigé par : *Mr S. LARBI*

PROMOTION : 1993 / 1994

E.N.P 10, Avenue Hassen Badi - EL-HARRACH - ALGER

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Remerciements

Il me tient très particulièrement à coeur d'exprimer ici ma profonde gratitude envers mon Promoteur , Monsieur S. LARBI pour tout l'intérêt qu'il a accordé à mon travail , pour l'effort constant qu'il a apporté à sa réalisation , pour ses encouragements très positifs et enfin pour les rapports très agréables qu'il a entretenus avec moi durant toute la période de réalisation de mon projet de fin d'études .

Mes vifs remerciements vont également à :

- *Monsieur le Président et Messieurs les membres du Jury qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir évaluer mon travail .*
- *Monsieur T. Ahmed Zaid , Responsable du Département de Génie-chimique , pour la mise à ma disposition d'un calculateur lors des simulations numériques .*
- *L'ensemble des Enseignants qui ont contribué à ma formation , en particulier à mon Professeur de mathématiques en classe de première , Monsieur M. BELKACEMI .*

Enfin , je tiens à remercier très vivement Monsieur S. AYACHE pour le soin particulier qu'il a apporté à la réalisation de ce document .

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

RESUME

D'abord, nous avons décrit les différents modes de fixation d'humidité par une structure poreuse. Puis, nous avons présenté l'approche mathématique permettant la modélisation des transferts couplés de chaleur et de masse en milieu poreux.

Le modèle de PHILIP-DE VRIES est ensuite appliqué au processus de condensation unidirectionnelle dans un milieu poreux non saturé homogène et isotrope, soumis à de faibles gradients thermiques. la validité de ce modèle est vérifiée par comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux .

ABSTRACT

First, we have described the different modes of moisture fixing by a porous structure. Then, we have presented the mathematical approach that enables the modelisation of coupled heat and mass transfert in porous media.

The model of PHILIP-DE VRIES is applied to the unidirectional condensation process in an unsaturated homogeneous and isotropic porous media, at small temperature gradients. The validity of this model is tested by comparison between theoretical and experimental results.

SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

NOMENCLATURE

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I : ANALYSE PHYSIQUE DES DIFFERENTS MODES DE FIXATION D' HUMIDITE EN MILIEU POREUX

I-1 LES MILIEUX POREUX 3
I-1-1 Description 3
I-1-2 Propriétés 3

I-2 FIXATION DE L'HUMIDITE DANS UNE STRUCTURE POREUSE: 5
I-2-1 Equilibre des phases (liquides ↔ vapeur) 6
I-2-2 Adsorption physique 9
I-2-3 Capillarité 16
I-2-4 Condensation 17

I-3 INFLUENCE DES PROPRIETES DU MATERIAU SUR LA QUANTITE D'EAU FIXEE 18

CHAPITRE II : MODELISATION MATHEMATIQUE DES PHENOMENES DE TRANSFERT EN MILIEU POREUX

II-1 APPROCHE DU CONTINU 20
II-1-1 Echelle microscopique 20
II-1-2 Echelle macroscopique 22

II-2 RELATIONS ENTRE GRANDEURS MICROSCOPIQUES ET MACROSCOPIQUES (EQUATIONS DE BILANS) 24

II-3 MODELE DIT DE PHILIP-DE VRIES 31

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

CHAPITRE III : DETERMINATION DES COEFFICIENTS DE TRANSFERT

III-1 COEFFICIENTS DE TRANSFERT DE MASSE 39
III-1-1 Domaine des fortes teneurs en humidité 39
III-1-2 Domaine des faibles teneurs en humidité: 43

III-2- PARAMETRES THERMOPHYSIQUES: 50

CHAPITRE IV : MODELE MATHEMATIQUE ET RESOLUTION NUMERIQUE

IV-1 MODELES PHYSIQUE ET MATHEMATIQUE 51
IV-1-1 Modèle physique 51
VI-1-2 Modèle mathématique et conditions aux frontières 51

VI-2 RESOLUTION NUMERIQUE 55
IV-2-1 Rappels sur les méthodes numériques 56
IV-2-1-1 Définition de la formulation intégrale d'une équation différentielle 56
IV-2-1-2 Méthode de GALERKIN 57
IV-2-1-3 Méthode des éléments finis: 58
IV-2-1-4 Fonctions d'interpolation en approximation linéaire 59
IV-2-2 Application au cas traité et formulation du système algébrique à résoudre 61

CHAPITRE : RESULTATS ET DISCUSSION

V-1 PRESENTATION DES RESULTATS ET INTERPRETATION: 72
V-1-1 Profils hydriques 72
V-1-2 Profils thermiques 72
V-1-3 Distribution de densité de flux de masse 73
V-1-3-1 Densité de flux en phase liquide 73
V-1-3-2 Densité de flux en phase vapeur 73
V-1-4 Distribution de densité de flux de chaleur 74
V-1-5 Etude de sensibilité aux paramètres 74

V-2 DISCUSSION 74

CONCLUSION 110

ANNEXES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

NOMENCLATURE

Nomenclature

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

a : coefficient de diffusion de masse isotherme ;

c : capacité calorifique ;

d : longueur de l'échantillon ;

D : coefficient de diffusion de la vapeur dans l'air ;

D_θ : coefficient de diffusion massique isotherme global ;

D_{θ_ℓ} : coefficient de diffusion massique isotherme de la phase liquide ;

D_{θ_v} : coefficient de diffusion massique isotherme de la phase vapeur ;

D_{T_ℓ} : coefficient de diffusion massique non isotherme de la phase liquide ;

D_{T_v} : coefficient de diffusion massique non isotherme de la phase vapeur ;

F : fonction de pondération ;

g : accélération de la pesanteur ;

h : enthalpie ;

h_e : coefficient de transfert de chaleur ;

h_m : coefficient de transfert de masse ;

I : terme source, puit ;

J : densité de flux ;

K : conductivité hydraulique ;

L : chaleur latente ;

M : masse molaire ;

N : nombre de noeuds ;

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

P_c : pression capillaire ;

P_{vs} : pression de vapeur saturante ;

R : constante des gaz parfaits ;

r : rayon des pores ;

t : temps ;

T : température ;

x, z : dimensions d'espace ;

Lettres grecques:

δ : coefficient de thermomigration ;

ε : porosité ;

λ : conductivité thermique ;

ρ : masse volumique ;

ρ_0 : masse volumique du matériau sec ;

(ρc) : chaleur volumique ;

σ : tension interfaciale ;

ω : teneur en eau pondérale ;

θ : teneur en eau volumique ;

α, η : coefficients traduisant l'accumulation en phase vapeur ;

ψ : succion ;

φ : fonction de pondération ;

ϕ : humidité relative ;

∇ : opérateur $\left(\vec{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x} \ , \ \vec{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y} \ , \ \vec{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)$

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE -- المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Indices, symboles

* : grandeur définie en milieu poreux ;

l : liquide ;

v : vapeur ;

o : valeur initiale ;

a : air ;

q : chaleur ;

m : masse ;

c : critique ;

h : humide ;

i : intérieur ;

e : extérieur ;

s : surface ;

Relations:

$a_e = D_{\theta_e}$;

$a_v = D_{\theta_v}$;

$a_e \cdot \delta_e = \frac{\rho_e}{\rho_0} \cdot D_{T_e}$;

$a_v \cdot \delta_v = \frac{\rho_e}{\rho_0} \cdot D_{T_v}$;

$a = a_e + a_v$;

$a \cdot \delta = a_e \cdot \delta_e + a_v \cdot \delta_v$.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION

L'étude des écoulements de deux phases fluides en **milieu poreux** présente un grand intérêt dans de nombreux domaines d'activités industrielles et situations naturelles:

- en génie pétrole pour décrire le déroulement d'une procédure de récupération secondaire par injection d'eau,
- en hydrologie dans le domaine non saturé, pour l'étude de l'hystérésis des cycles de saturation-désaturation des sols et des ouvrages,
- en génie chimique pour l'étude des pertes de charge ou de surface d'échange dans certaines installations (catalyseurs, extracteurs, ...).

En plus de l'aspect dynamique, s'ajoute le côté thermique et massique où l'influence des gradients de température et de concentration sur les phénomènes de **migration d'humidité** (cas de séchage) ou de **diffusion de la vapeur d'eau** (condensation) n'est pas à exclure, compte tenu de son importance théorique et pratique.

Vu à l'échelle des **pores** que nous appelons " microscopique ", le comportement des fluides est décrit par les lois classiques de la mécanique des milieux continus (lois de conservation de la masse, de l'énergie et de la quantité de mouvement). Cependant, la complexité du milieu, notamment la géométrie des **interfaces** rend le problème insoluble à l'état actuel des connaissances. Les difficultés se situent essentiellement à deux niveaux:

- entre les deux fluides: en l'absence de la matrice solide l'écoulement de deux fluides dans une conduite présente différentes configurations (à bulles, à poches, à film liquide, avec gouttelettes, à brouillard) dont l'étude théorique est difficile (problème des écoulements diphasiques dans les conduites).
- entre les fluides et le solide: lorsque l'on prend en considération la présence de la matrice solide, le problème prend alors une dimension supplémentaire caractérisé par les conditions de raccord aux interfaces solide-fluide.

Compte tenu de la complexité de cette nouvelle configuration, la description de l'état de chaque phase (liquide, vapeur ou solide) devient impossible à **l'échelle microscopique.**
Pour palier à cette éventualité, on est conduit alors à définir une autre **échelle** dite **macroscopique** permettant ainsi le passage du **milieu continu** réel à un **milieu continu** fictif (MARLE [20], WHITAKER [22]).

Selon les secteurs d'application concernés, ou les problèmes rencontrés, diverses tentatives de **description physique** et de **modélisation mathématique** de ces phénomènes ont été effectués au cours des dernières décennies. C'est ainsi qu'après les premiers travaux de modélisation fondés sur la prise en compte exclusive du **transfert en phase vapeur**, des améliorations sensibles ont été apportées à la théorie à travers les études de PHILIP-DE VRIES [14], LUIKOV [18], MARLE [20], BEAR [2] et WHITAKER [22] en prenant en considération les **transferts simultanés en phase liquide et vapeur** ainsi que les effets de **couplage** et d'**interaction** entre **transfert de chaleur** et **transfert de masse.**

Bien que de nombreux travaux aient été consacrés à l'évaluation de ces modèles, lorsque le rôle de la **phase condensée** peut être considéré comme prédominant (ce qui est le cas en séchage de **matériaux capillaro-poreux**) RECAN [21], CRAUSSE [10], il n'existe, par contre que peu d'études ayant pour objectif leur validation dans des situations de **condensation thermique**.

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans cette double préoccupation d'analyse et d'évaluation. Il s'articule autour de cinq chapitres:

Le premier est consacré à la description physique des différents modes de fixation d'humidité au sein des milieux poreux;

le second chapitre est relatif à la modélisation mathématique des phénomènes de transfert en milieu poreux. Y sont sommairement rappelés les concepts de base et les hypothèses utilisés dans sa formulation;

Le troisième chapitre traite de la détermination des coefficients de transfert intervenant dans le modèle mathématique de DE VRIES;

Le quatrième chapitre concerne la résolution numérique du modèle mathématique de DE VRIES sur la base d'un système physique donné;

Le dernier chapitre est enfin destiné à valider le modèle théorique utilisé et à apprécier l'intérêt pratique de certaines simplifications.

Mots clés:

Milieu poreux, changement de phase, transfert de chaleur et de masse, écoulement diphasique, vaporisation-condensation, modélisation-expérimentation.

CHAPITRE I

ANALYSE PHYSIQUE DES DIFFERENTS MODES DE FIXATION D' HUMIDITE EN MILIEU POREUX

I-1 LES MILIEUX POREUX
I-1-1 Description
I-1-2 Propriétés
I-2 FIXATION DE L'HUMIDITE DANS UNE STRUCTURE POREUSE
I-2-1 Equilibre des phases (liquide ↔ vapeur)
I-2-2 Adsorption physique
I-2-3 Capillarité
I-2-4 Condensation
I-3 INFLUENCE DES PROPRIETES DU MATERIAU SUR LA QUANTITE D'EAU FIXEE

I-1 LES MILIEUX POREUX

I-1-1 Description

Un milieu poreux est constitué par un solide de forme compliquée, englobant des vides appelés "pores". Ceux-ci peuvent communiquer entre eux et contenir une ou plusieurs phases fluides susceptibles de s'écouler. La partie solide du milieu poreux doit être connexe afin d'avoir une certaine cohésion: c'est en cela qu'un milieu poreux se distingue par exemple d'une suspension de particules solides dans un fluide.

Il importe de souligner que les pores du milieu ne sont pas individualisés, leur forme compliquée, leur interconnexion rendent les notions de "nombres de pores", "dimension moyenne des pores", etc.., sans signification précise.

Lorsque les dimensions géométriques des pores et des fractions de la phase solide comprise entre les pores ont des valeurs largement supérieures aux dimensions moléculaires, chaque phase peut être considérée comme un milieu continu et le milieu poreux comme un ensemble de milieux continus étroitement imbriqués. Dans cette acception, les phénomènes qui se déroulent au sein du milieu (écoulements et phénomènes de transfert) sont parfaitement décrits par les équations dites microscopiques de la thermodynamique des milieux continus et la détermination du champ des différentes variables en tout point de chacune des phases devrait, à priori, pouvoir être effectuée.

En raison de la complexité géométrique de l'espace poreux et des difficultés pour l'instant insurmontables que pose la définition précise des domaines occupés par chacune des phases, la description microscopique dont nous venons de parler ne peut toutefois être mise en pratique qu'après un changement d'échelle dont l'étape essentielle conduit à définir un volume élémentaire représentatif (V.E.R) permettant d'établir une équivalence entre le milieu dispersé réel et un milieu continu fictif [2, 5, 13, 14, 15, 16, 19, 20, 21]. Nous reviendrons en détails sur cette notion d'échelle et sur les méthodes permettant le passage du milieu dispersé réel au milieu continu fictif lors de la modélisation mathématique des phénomènes de transfert en milieu poreux (cf. chapitre II).
Nous nous contenterons dans ce qui suit de citer quelques propriétés des milieux poreux influant sur la nature et l'importance des phénomènes de fixation d'humidité.

I-1-2 Propriétés

Un milieu poreux possède certaines caractéristiques géométriques intrinsèques appelées propriétés structurales telles :

- la surface spécifique: c'est la surface limitant l'espace des pores par unité de volume du milieu poreux;
- la porosité: c'est le rapport du volume des vides accessibles au volume de l'échantillon, elle est souvent notée ε;
- la tortuosité: elle est définie par la relation :

$$\tau = (L_e / L)^2$$

où: L_e désigne la longueur moyenne des lignes de courant du fluide traversant l'échantillon et L la longueur de l'échantillon.

Il peut comprendre également plusieurs phases:

- une phase solide constituée par la structure (ou squelette) du matériau;
- une phase liquide constituée par l'eau (liquide) contenue dans les pores du matériau;
- une phase gazeuse constituée par l'air humide (mélange d'air sec et de vapeur d'eau).

Un certain nombre d'autres grandeurs peut être définit telles:

- la masse et le volume de la phase solide: M_s , V_s ;
- la masse et le volume de la phase liquide: M_e , V_e ;
- la masse et le volume de la phase gazeuse: M_a , V_a ;

La masse et le volume total du matériau seront alors:

$$M_t = M_a + M_e + M_s \quad \text{et} \quad V_t = V_a + V_e + V_s$$

Le matériau à l'état sec possède une masse volumique apparente définie par:

$$\rho_0 = \frac{M_s}{V_t} \qquad (1\text{-}1)$$

La masse volumique de la phase solide est donnée par:

$$\rho_s = \frac{M_s}{V_s} \qquad (1\text{-}2)$$

La masse volumique équivalente est exprimée par:

$$\rho^* = \frac{M_t}{V_t} = \frac{M_s + M_e + M_a}{V_t} \qquad (1\text{-}3)$$

qui peut s'exprimer sous la forme:

$$\rho^* = \rho_0 \cdot \left(1 + \frac{M_e}{M_s} + \frac{M_a}{M_s} \right) \qquad (1\text{-}3')$$

La masse de l'air humide pouvant être négligée devant la masse d'eau et de solide, la masse volumique équivalente se réduit alors à :

$$\rho^* = \rho_0 \cdot \left(1 + \frac{M_e}{M_s} \right) \qquad (1\text{-}3'')$$

Dans cette expression, le rapport $\frac{M_e}{M_s}$ exprime la teneur en eau massique donnée par :

$$\omega_e = \frac{M_e}{M_s} \qquad (1\text{-}4)$$

On peut aussi l'exprimer en terme de teneur d'eau volumique sous la forme:

$$\theta_e = \frac{V_e}{V_t} \qquad (1\text{-}5)$$

La teneur en vapeur massique ω_v et volumique θ_v s'expriment de la même manière:

$$\omega_v = \frac{M_v}{M_s} \quad \text{et} \quad \theta_v = \frac{V_v}{V_t} \qquad (1\text{-}6)$$

La teneur totale en humidité (phase liquide et gazeuse) du matériau poreux s'exprime alors par:

$$\omega = \omega_v + \omega_e \qquad (1\text{-}7)$$

Si l'on considère que la teneur en vapeur ω_v est négligeable devant ω_e, l'expression finale de la masse volumique équivalente du matériau se réduit à:

$$\rho^* = \rho_o \cdot [\, 1 + \omega \,] \qquad (1\text{-}8)$$

Concernant la mesure de la teneur en eau dans les matériaux poreux, plusieurs méthodes sont utilisées et la précision des mesures dépend à la fois de la méthode utilisée et du domaine de teneur en eau dans lequel on effectue la mesure (cf. chapitre III).

I-2 FIXATION DE L'HUMIDITE DANS UNE STRUCTURE POREUSE

Si l'on admet qu'il n'y a pas de réaction chimique entre le matériau solide constituant la structure poreuse et l'eau (vapeur ou liquide) avec laquelle cette structure est mise en contact, trois mécanismes peuvent intervenir pour contribuer à la fixation d'humidité au sein du milieu poreux. Il s'agit de l'adsorption physique, de la capillarité et de la condensation.
Afin d'analyser de manière détaillée ces différents modes de fixation d'humidité, faisons quelques rappels de thermodynamique sur les notions d'équilibre des phases (liquides $\leftrightarrow$ vapeur).

I-2-1 Equilibre des phases (liquides ↔ vapeur)

Lorsque deux phases d'un mélange sont en équilibre, les potentiels chimiques d'un même constituant dans chacune des phases sont égaux.

Au sein d'un milieu poreux où le fluide est en équilibre, les potentiels thermodynamiques (enthalpies libres spécifiques) du fluide sont identiques dans les deux phases. Notons g_l et g_v ces enthalpies libres par unité de masse:

$$g_l = g_v \qquad (1\text{-}9)$$

L'enthalpie libre de la vapeur s'exprime aisément avec l'hypothèse que la phase gazeuse est un mélange de gaz parfaits :

$$g_v = \frac{R \cdot T}{M_v} \cdot \left[f(T) + Log\, P_v \right] \qquad (1\text{-}10)$$

f (T) étant une fonction de la température.

Considérons le cas de l'équilibre à la température T d'une surface plane de liquide condensé en contact avec sa vapeur saturante (éventuellement mélangée avec de l'air):

$$P_v = P_{vs} \qquad (1\text{-}11)$$

$$g_v^\circ = \frac{R \cdot T}{M_v} \cdot \left[f(T) + \mathrm{Log}\, P_{vs} \right]$$

Cette enthalpie libre est habituellement (dans l'étude des milieux poreux) prise comme référence à la température T pour la définition de l'état de la vapeur. concernant la phase condensée, la référence correspondante sera l'enthalpie libre du liquide à une pression standard g_1° .

$$g_v^\circ = g_1^\circ \qquad (1\text{-}12)$$

Ceci permet de définir une notion dérivée du potentiel thermodynamique connue sous le nom de potentiel matriciel :

$$\phi_l = \rho_l \cdot (g_l - g_l^o)$$

et (1-13)

$$\phi_v = \rho_v \cdot (g_v - g_v^o)$$

cette grandeur s'exprime en unités de pression, elle permet d'éliminer la fonction f (T).

La loi de l'équilibre peut s'écrire alors:

$$\phi_l = \phi_v = \rho_l \cdot \frac{R \cdot T}{M_v} \cdot Log \frac{P_v}{P_{vs}} = \rho_l \cdot \frac{R \cdot T}{M_v} \cdot Log\phi \qquad (1\text{-}14)$$

où: $\phi = \frac{P_v}{P_{vs}}$ est l'humidité relative.

Il nous sera utile par la suite de faire le lien entre cette loi et l'approche moléculaire des phénomènes de contact entre phase condensée et sa vapeur.

Considérons une aire unité sur l'interface entre la phase condensée et le gaz (Fig.. 1).

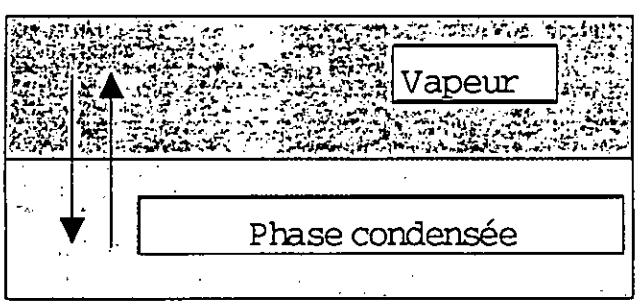


Fig. 1 Equilibre des phases
Echange moléculaire

Le nombre de molécules heurtant l'interface en provenance de la vapeur et venant s'y fixer durant l'unité de temps est proportionnel à la concentration de la vapeur ou à sa pression partielle: $A \cdot P_v$.
Dans la phase condensée, chaque molécule est liée aux voisines par des forces qu'on peut caractériser par une énergie de liaison E_l. Elle possède par ailleurs une énergie cinétique dont la valeur est aléatoire, ce qui permet à certaines molécules d'échapper aux forces de liaison et passer dans la phase vapeur.
Le nombre de ces molécules dans l'unité de temps est formulé conformément à une répartition statistique de BOLTZMANN des énergies cinétiques : $B \cdot e^{\frac{E_L}{R \cdot T}}$.

L'équilibre des phases s'interprète alors comme l'égalité des flux de molécules échappant à la phase condensée et y pénétrant:

$$A \cdot P_v = B \cdot e^{\frac{E_L}{R \cdot T}} \qquad (1\text{-}15)$$

Notons en particulier que dans le cas d'un liquide libre en équilibre avec sa vapeur saturante, $P_v = P_{vs}$ et l'énergie E_l n'est autre que la chaleur latente de vaporisation par mole, $L \cdot M_v$:

$$A \cdot P_{vs} = B \cdot e^{\frac{L \cdot M_v}{R \cdot T}} \qquad (1\text{-}16)$$

Cette formule peut s'interpréter comme étant une forme intégrée au voisinage de la température T de l'équation de CLAPEYRON qui s'écrit :

$$L = T \cdot \frac{1}{\rho_{vs}} \cdot \frac{1}{\rho_l} \cdot \frac{dP_{vs}}{dT} L \qquad (1\text{-}17)$$

avec: $\rho_l >> \rho_{vs}$ et $\frac{P_{vs}}{\rho_{vs}} = \frac{R \cdot T}{M_v}$, L devient :

$$L = T \cdot \frac{R \cdot T}{M \cdot P_{vs}} \cdot \frac{dP_{vs}}{dT}$$, ce qui donne :

$$p_{vs} = cte \cdot e^{\frac{L \cdot M_v}{R \cdot T}} \qquad (1\text{-}18)$$

Faisons le rapport (1-15) sur (1-16), on obtient :

$$\frac{P_v}{P_{vs}} = e^{\frac{L \cdot M_v - E_l}{R \cdot T}} \qquad (1\text{-}19)$$

ou encore :

$$L \cdot M_v - E_l = R \cdot T \cdot \text{Log}\, \phi \qquad (1\text{-}20)$$

En injectant l'équation (1-14) donnant ϕ_l dans (1-20) on obtient :

$$E_l = L \cdot M_v - \frac{\phi_l \cdot M_v}{\rho_l} \qquad (1\text{-}21)$$

Le potentiel matriciel apparaît ainsi comme l'énergie (par unité de volume de la phase condensée) qui s'ajoute à la chaleur latente de vaporisation lorsque la phase condensée n'est pas dans son état standard.

I-2-2 Adsorption physique

Pour illustrer ce phénomène, considérons un échantillon d'un milieu poreux sec de masse M_S placé dans une enceinte dont on peut contrôler la température T et l'humidité $\phi = \frac{P_v}{P_{vs}}$ (P_v étant la pression de la vapeur régnant dans l'enceinte et P_{vs} la pression de vapeur saturante à la température T).
Si l'on fait varier ϕ, la température étant maintenue constante, on remarque que le poids de l'échantillon augmente au fur est à mesure que la pression de vapeur dans l'enceinte se rapproche de la pression de vapeur saturante. Cet accroissement de poids correspond à la fixation d'une certaine quantité d'eau par le milieu poreux, sous l'action des phénomènes dits d'adsorption, dont l'origine physique est attribuée aux forces intermoléculaires (Forces de VAN DER WALLS) agissant sur les molécules de vapeur au voisinage de l'interface solide-fluide dans les pores.

L'interprétation théorique des courbes de sorption traduisant l'accroissement de la teneur en eau de l'échantillon en fonction de l'humidité relative a conduit à distinguer différentes étapes dans le processus de fixation de l'humidité (Fig. 2):

- l'adsorption monomoléculaire caractérisée par la fixation d'une couche de molécules d'eau sur la surface des pores (Fig. 2-a),

- l'adsorption plurimoléculaire caractérisée par la fixation de plusieurs couches de molécules d'eau sur la première couche adsorbée (Fig. 2-b),

et enfin, lorsque les diamètres des pores sont suffisamment petits, la condensation capillaire sur les ménisques formés par la jonction des couches plurimoléculaires (Fig. 2-c).

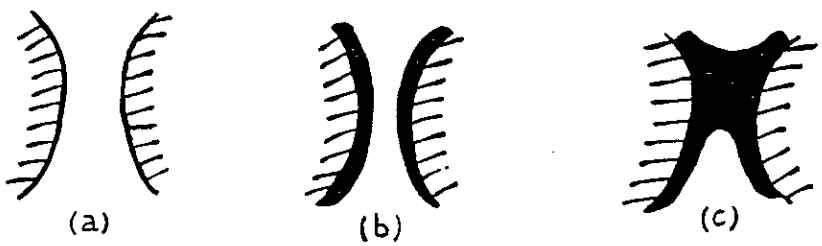
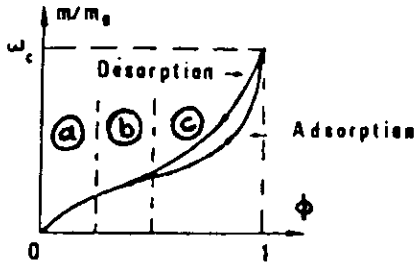


Fig. 2

Sur une courbe d'adsorption, le processus de fixation de l'humidité est ainsi convenablement représenté (Fig. 3):



(Fig. 3)

- par la théorie de l'adsorrption monomoléculaire de LANGMUIR [12] lorsque $\phi \in [\ 0\ ,\ 0.2\ ]$ environ (a),

- par la théorie de l'adsorption plurimoléculaire de BRUNAUER, EMMET et TELLER [9, 12] lorsque $\phi \in [\ 0.2\ ,\ 0.5]$ (b) et enfin,
- par la théorie de la condensation capillaire de KELVIN [12] lorsque $\phi \in [\ 0.5\ ,\ 1\ ]$ environ (c).

Un paramètre important dans les phénomènes d'adsorption est la surface spécifique S_o du milieu poreux, définie comme la surface totale des pores accessibles par unité de volume du milieu poreux. Elle présente une forme très complexe et une courbure.

Dans la présentation des théories de l'adsorption que nous allons examiner ci-après, la surface S_o est assimilée à son développement suivant un plan, négligeant ainsi l'influence de la courbure.
Si on désigne par e_a l'épaisseur moyenne de la couche adsorbée, la teneur volumique en fluide condensé s'exprime, dans ces conditions par:

$$\theta = S_0 \cdot e_a \left[{cm^3}/{cm^3} \right]$$

L'objectif commun des théories de l'adsorption est de prévoir la quantité de fluide adsorbée, caractérisée par θ ou e_a , en fonction de l'état du fluide, caractérisé par le potentiel commun aux phases adsorbée et vapeur. Ce potentiel étant lié au rapport $\phi = \frac{P_v}{P_{vs}}$, pression relative de la vapeur. Les résultats théoriques ou expérimentaux sont le plus souvent présentés sous la forme d'une relation entre ϕ et θ à température donnée, relation appelée isotherme d'adsorption.

Les diverses théories de l'adsorption se différencient par la formulation, explicite ou non, du potentiel ϕ_l de la phase condensée en fonction de la teneur volumique θ, par la nature des forces intermoléculaires auxquelles elles font appel, et par le schéma de la disposition des molécules au voisinage de la paroi.

* **Adsorption monomoléculaire. Théorie de LANGMUIR [12]**

La partie S de la surface spécifique S_o est couverte d'une seule épaisseur de molécules de densité surfacique caractérisée par a_o (Fig. 4), distance intermoléculaire, dont les valeurs adoptées sont généralement peu différents de la distance intermoléculaire dans le fluide à l'état liquide.

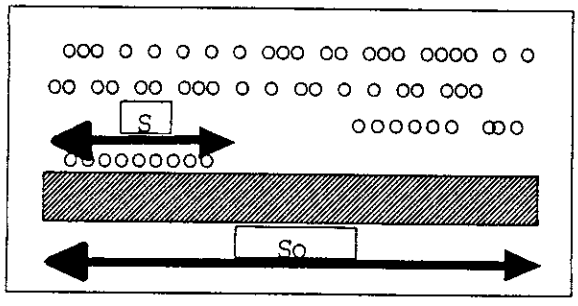


Fig. 4 Théorie de LANGMUIR

Les molécules sont liées au solide par des forces dont la nature n'est pas précisée, elles sont caractérisées par une énergie de liaison E_1 (par mole).

A l'équilibre, le nombre de molécules s'échappant de la couche condensée est égal au nombre de molécules en provenance de la vapeur, qui sont captées par la surface non couverte (S_o - S) du solide:

$$B \cdot S \cdot e^{\frac{E_1}{R \cdot T}} = A \cdot P_v \cdot (S_0 - S) \qquad (1\text{-}22)$$

En appelant θ_m la teneur volumique en phase condensée lorsque la couverture est totale, ou teneur en eau monomoléculaire, l'isotherme d'adsorption prend la forme:

$$\phi = C \cdot e^{\frac{E_1}{R \cdot T}} \cdot \frac{\theta}{\theta - \theta_m} \qquad (1\text{-}23)$$

* **Adsorption multimoléculaire - B.E.T [9,12]**

Dans cette théorie due à BRUNAUER, EMMET et TELLER, plusieurs couches successives de molécules, d'aires décroissantes, sont superposées sur la surface des pores (Fig. 5).

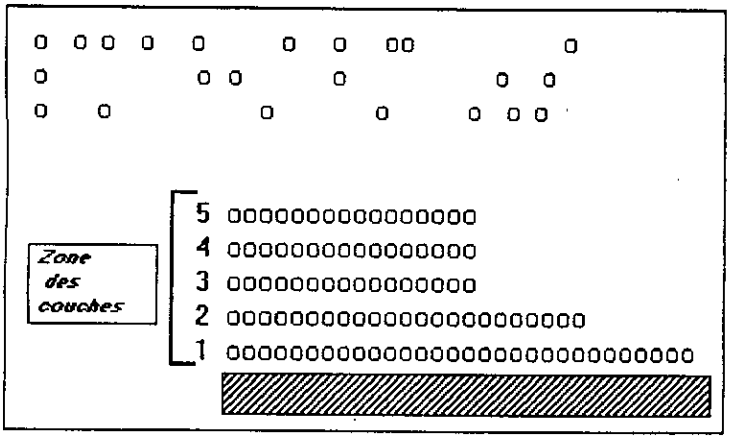


Fig. 5 Théorie B.E.T

Les molécules de la première couche sont liées au solide par une énergie molaire E_1. Celles des autres couches sont liées par une énergie supposée égale à la chaleur latente de vaporisation $L \cdot M$. La couche d'ordre i a une aire S_i dont la partie $S_i - S_{i-1}$ est exposée au contact de la vapeur. Le bilan des flux de molécules échangés avec la phase gazeuse par chaque couche conduit à une relation entre la teneur en fluide condensé θ et la pression de vapeur relative ϕ moyennant les hypothèses suivantes:
Le nombre de couches est infini, et lorsque ϕ tend vers 1, la teneur en fluide condensé tend vers l'infini:

$$\frac{\phi}{\phi_m} = \frac{C \cdot \phi}{(1-\phi)\cdot(1-\phi+C\cdot\phi)} \qquad (1\text{-}24)$$

Le coefficient C est lié à l'énergie de liaison E_1 par:

$$c = e^{\frac{E_1 - L\cdot M_v}{R\cdot T}} \qquad (1\text{-}25)$$

L'application de cette théorie aux isothermes d'adsorption expérimentaux obtenus avec l'azote ou du Krypton à basse température permet une évaluation couramment pratiquée de la surface spécifique des matériaux, dite "Surface B.E.T".

* <u>Adsorption multimoléculaire. Théorie polaire [12]</u>

Cette théorie est due à ZWICKER et DE BOER d'une part et à BRADLEY d'autre part. Elle se distingue de la précédente en situant l'origine physique de l'énergie de liaison des molécules adsorbées dans les forces électrostatiques et la polarisation des molécules.

Lorsqu'une molécule ayant un moment dipolaire naturel μ_0 et une polarisabilité β_{int} est placée dans un champs électrique $\vec{\varepsilon}$, son orientation cesse d'être aléatoire et tend à s'orienter, sous l'effet des forces électrostatiques, de telle façon que son moment dipolaire résultant $\vec{\mu}_t$ soit parallèle au champs électrique $\vec{\varepsilon}$.

$$\vec{\mu}_t = \left[\beta_{int} + \frac{\mu_0^2}{3 \cdot K_B \cdot T} \right] \cdot \vec{\varepsilon} \qquad (1\text{-}26)$$

K_B : constante de BOLTZMANN

$\vec{\mu}_t$ est la superposition de $\beta_{int} \cdot \vec{\varepsilon}$ et de $\frac{\mu_0^2}{3 \cdot K_B \cdot T} \cdot \vec{\varepsilon}$, le premier étant le moment dipolaire induit par action du champ électrique $\vec{\varepsilon}$ sur le nuage électronique de la molécule, le second étant le moment dipolaire induit par l'orientation de la molécule polaire sous l'effet du champ $\vec{\varepsilon}$. Notons que l'expression donnant ce dernier $[\frac{\mu_0^2}{3 \cdot K_B \cdot T} \cdot \vec{\varepsilon}]$ suppose l'hypothèse de faibles champs électriques.

Notons aussi que pour le cas de l'eau aux températures usuelles, le second terme de $\vec{\mu}_t$, $\frac{\mu_0^2}{3 \cdot K_B \cdot T} \cdot \vec{\varepsilon}$ est nettement prépondérant.

Bradley considère la phase adsorbée comme formée de n couches dans chacune desquelles toutes les molécules ont un même moment dipolaire μ_i. Ce moment résulte, pour chaque couche autre que la première et la dernière du champ électrique créé par les deux couches immédiatement voisines.

La première couche subit l'action du champs électrique $\vec{\varepsilon}_0$ régnant au voisinage du solide et de la seconde couche. La dernière couche ne subit que l'action de l'avant dernière.

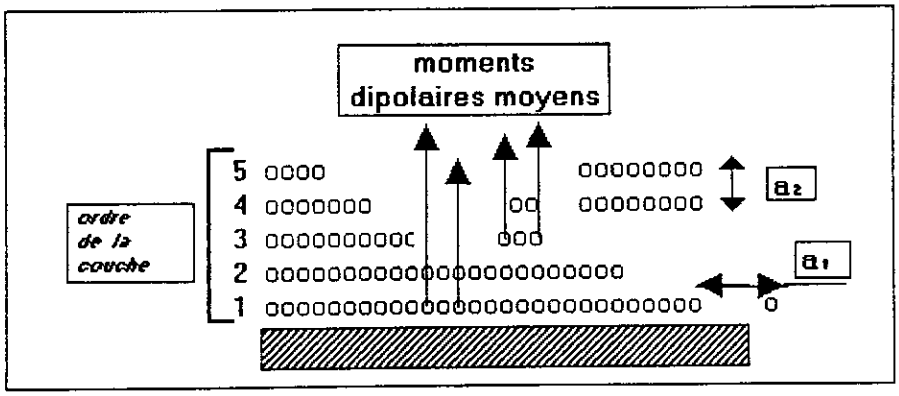


Fig. 6 Théorie polaire

Après avoir calculé le champ électrique créé par une couche, considérée comme un pavage de côte a_1 de dipôle μ_i , à la distance a_2 qui la sépare de ses voisines. BRADLEY montre que chaque couche induit sur ses voisines immédiates une polarisation proportionnelle à son propre moment dipolaire, le coefficient de proportionnalité k étant de la forme:

$$k = \frac{A}{a_1^3} \cdot \left[\beta_{int} + \frac{\mu_0^2}{3 \cdot K_B \cdot T} \right] \qquad (1\text{-}27)$$

Ceci permet de calculer, à partir du champ ε_0 créé par le solide au voisinage de la première couche, l'état de polarisation de la dernière couche.. BRADLEY identifie alors l'énergie nécessaire pour arracher cette couche et disperser ses molécules au potentiel thermodynamique et montre, moyennant quelques hypothèses supplémentaires et une correction due à BRUNAUER et Al, qu'il est de le forme:

$$\phi_L = -B \cdot l^{2m} \qquad (1\text{-}28)$$

où l est un coefficient numérique lié à k par:

$$k = \frac{l}{1 + l^2}$$

Le nombre de couches n peut s'exprimer comme le rapport θ / θ_m.

On peut écrire la relation (1-28) sous la forme:

$$\mathrm{Log}(\phi_L) = \mathrm{Log}\beta + 2 \cdot \frac{\phi}{\phi_m} \cdot \mathrm{Log}l \qquad (1\text{-}29)$$

Nous retiendrons le caractère linéaire de la relation entre la teneur en fluide condensé et le logarithme du potentiel.
De plus, le coefficient l, inférieur à 1, est une fonction de la température dont la forme peut être prévue en tenant compte de la relation entre l et k. Dans le cas de l'eau, le moment dipolaire μ_o étant grand, on peut négliger sans grande erreur la polarisabilité interne et écrire: $k \approx \frac{C}{T}$.

* <u>condensation capillaire - loi de KELVIN [12]</u>

L'enthalpie libre d'un corps pur sous une seule phase s'exprime sous une forme différentielle par:

$$d\rho_L = -\Gamma \cdot dT + \frac{1}{\rho_L} \cdot dP_L \qquad (1\text{-}30)$$

Le passage de l'état standard caractérisé par g_L° à l'état actuel caractérisé par g_L étant supposé s'effectuer à température constante, l'intégration de (1-30) donne:

$$g_L - g_L^\circ = \int \frac{dP_L}{\rho_L} \qquad (1\text{-}31)$$

ϕ_L étant défini par:

$$\phi_L = \rho_L \cdot (g_L - g_L^\circ)$$

Il s'exprime alors par:

$$\phi_L = \rho_L \cdot (g_L - g_L^\circ) = P_L - P_o \qquad (1\text{-}32)$$

Ainsi, le potentiel matriciel s'identifie à la pression du liquide.

D'autre part:

$$P_o - P_L = 2 \cdot \frac{\sigma}{r} \quad (\text{cf. } \textbf{Capillarité})$$

L'égalité des potentiels dans les deux phases permet d'écrire:

$$\phi_L = \phi_v = -2 \cdot \frac{\sigma}{r} = (\rho_L \cdot \frac{R \cdot T}{M_v}) \cdot \mathrm{Log}\, \phi$$

ou sous une autre forme:

$$\phi = \frac{P_v}{P_{vs}} = e^{\frac{2 \cdot \sigma \cdot M_v}{\rho_L \cdot r R \cdot T}} \qquad (1\text{-}33)$$

où r: rayon du capillaire, σ: tension interfaciale eau - vapeur, ρ_L: masse volumique de l'eau liquide, M_v: masse molaire de la vapeur, T: température, R: constante des gaz parfaits.

La relation (1-33) est appelée loi de KELVIN; en fait il s'agit de la restriction à la phase capillaire de la loi générale de l'équilibre des phases.

Parmi les théories de l'adsorption que nous avons citées, seule la théorie polaire permet de calculer l'épaisseur de la couche adsorbée en fonction de l'humidité relative ϕ.
Dans la pratique, on utilise souvent une autre formule d'adsorption à caractère beaucoup plus empirique que celles citées précédemment, c'est la formule d' HALSEY qui s'écrit sous la forme:

$$e_a(\phi) = A \cdot (-\mathrm{Log}\phi)^{-B} \qquad (1\text{-}34)$$

où A et B sont des constantes dépendant de la nature de l'adsorbat et de la température d'expérience.

Nous concluons ces quelques rappels sur l'adsorption en précisant que la teneur en eau maximale, ω_c , qui peut être fixée dans un milieu poreux par ce mécanisme est, en règle générale, très inférieure à la teneur en eau correspondant à la saturation complète (remplissage de tous les pores).

A partir de la situation d'équilibre hygroscopique ($\omega_e = \omega_c$, $\phi = C$); l'accroissement de la teneur en eau ne peut alors poursuivre que s'il y'a un apport d'eau en masse. Deux mécanismes peuvent concourir à cela: *la capillarité* et *la condensation.*

I-2-3 Capillarité

En tant que mécanisme de fixation de l'humidité, la capillarité **[6, 7, 8, 12]** intervient lorsque la stature poreuse est mise en contact avec de l'eau en phase liquide (Fig. 7-a). Sans rentrer dans une analyse détaillée des phénomènes complexes de mouillabilité, l'expérience montre, que dans de nombreux cas, l'eau liquide présente un comportement mouillant par rapport aux solides constituant les structures poreuses. Cette "affinité" de l'eau qui se traduit par une tendance à l'étalement du liquide sur la surface des pores, conduit alors à la formation d'interfaces courbes entre le fluide mouillant liquide et non mouillant gazeux constitué, en l'occurrence, par l'air humide (Fig. 7b)

Lorsque l'on examine la condition d'équilibre d'une telle interface, on constate qu'il existe de part et d'autre, une différence de pression $P_c = P_o - P_L > 0$, la pression P_L dans la phase liquide étant inférieure à la pression P_o dans la phase gazeuse.

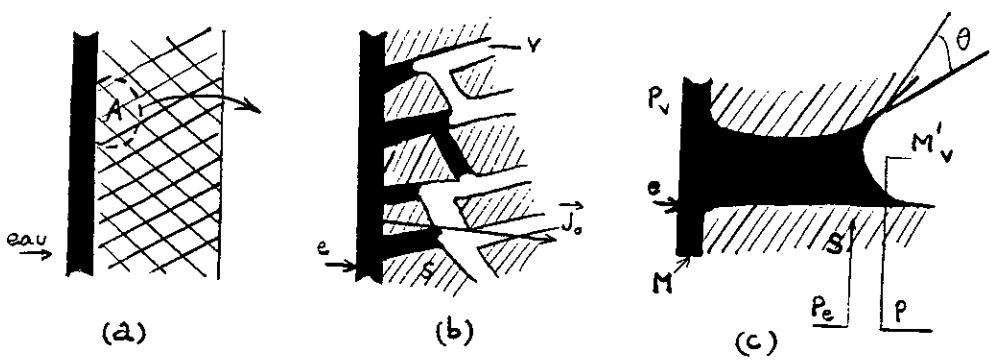


Fig. 7

Cette différence de pression P_c , appelée pression capillaire, s'exprime en fonction de la tension interfaciale liquide - gaz σ (T), et des rayons de courbure principaux r_1 , r_2 , de l'interface par la loi de LAPLACE :

$$P_c = \sigma \cdot \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right]$$

ou bien, en fonction de la mouillabilité, caractérisée par l'angle θ, formée par les tangentes à la surface solide et à l'interface au point d'accrochage du liquide, et du rayon de pore. Pour un capillaire de section droite circulaire et de rayon r, on a dans ces conditions:

$$P_c = \frac{2 \cdot \sigma \cdot \cos\theta}{r}$$

Etant donné que la pression dans le liquide libre, avec lequel la surface externe de la structure poreuse est mise en contact, est égale à la pression de l'air humide (l'espace des pores occupé par la phase gazeuse étant en relation avec l'extérieur - porosité ouverte -) il existe donc une différence de pression dans l'eau liquide lorsque l'on passe d'un point M extérieur à la structure à un point M' situé au voisinage d'une interface.
Sous l'effet de cette pression, égale à la pression capillaire, un écoulement liquide conduisant au remplissage des pores ou de certaines classes de diamètre de pores par l'eau liquide s'établit (Fig. 7-c).

En milieu poreux, la pression capillaire varie en fonction de la teneur en eau liquide ω, comme le montre la figure 8. Elle s'annule pour une teneur en eau qui est la teneur en eau de saturation ω_{es} , pour laquelle tous les pores sont remplis, et croît de façon continue lorsque ω diminue de ω_{es} à ω_c . Comme dans le domaine d'adsorption de KELVIN, les courbes P_c (ω) présentent des effets d'hystérisis qui peuvent être marqués entre drainage (ω_e décroissant) et imbibition (ω_e croissant).

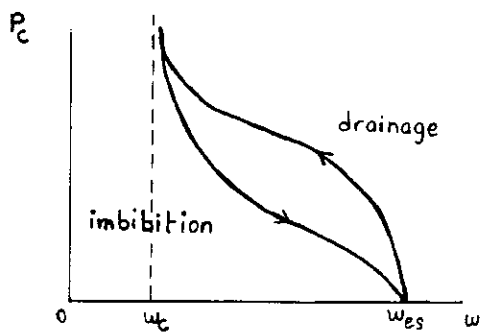


Fig. 8

I-2-4 Condensation

Pour illustrer de manière simple ce phénomène, considérons une paroi dont l'une des faces est rendue étanche à la vapeur d'eau . Imaginons que cette paroi est en équilibre hygroscopique, T_o étant sa température, $P_{vo} < P_{vso}$ la pression de vapeur dans l'espace des pores, (P_{vso} étant la pression de vapeur saturante correspondant à T_o) (Fig. 9-a) et supposons que par suite d'un refroidissement de la face imperméable, un régime thermique stationnaire, caractérisé par une variation de température T_o, T_e, telle que $T_e < T_o$ s'établisse. Si la courbe de pression de vapeur saturante correspondant à cette nouvelle distribution se situe en certains points de la paroi, en dessous de la valeur P_{vo} , il est bien évident que l'on aura condensation [3, 6, 12]. La masse d'eau liquide ainsi formée proviendra, d'une part, de la condensation de la vapeur initialement en place dans ce domaine et d'autre part, de la condensation d'une partie du flux d'humidité, en phase de vapeur, s'écoulant vers les zones froides par diffusion moléculaire (Fig. 9-b).

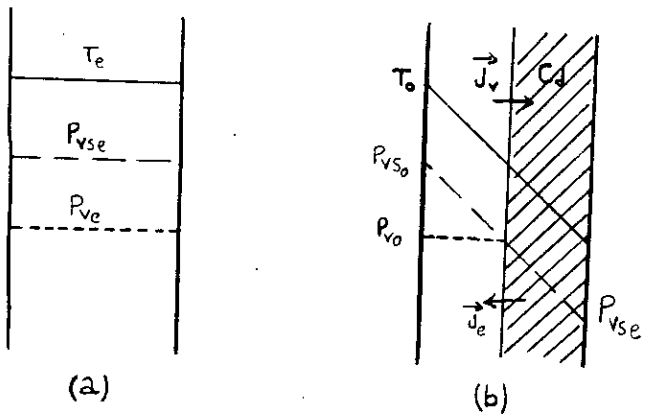


Fig. 9

I-3 INFLUENCE DES PROPRIETES DU MATERIAU SUR LA QUANTITE D'EAU FIXEE

La quantité d'humidité qui peut se trouver fixée à l'équilibre par adsorption, condensation ou capillarité au sein d'un milieu poreux, dépend d'un certain nombre de caractéristiques géométriques globales de celui-ci: les caractéristiques structurales.
En ce qui concerne l'adsorption physique, dont l'effet se traduit par la fixation de molécules de vapeur à la surface des pores, le paramètre de structure fondamental qui détermine la quantité d'eau qui peut être fixée par un tel mécanisme est la surface spécifique S, surface limitant l'espace des pores par unité de volume du milieu poreux..
En ce qui concerne la condensation et la capillarité, il s'agit principalement du volume des pores, caractérisé par la porosité ε, rapport du volume des vides accessibles sur le volume de l'échantillon.

Lorsque au lieu de considérer des situations d'équilibre, on s'intéresse à l'aspect dynamique des processus, d'autres grandeurs jouent un rôle essentiel. Il s'agit notamment:

- du diamètre des pores, d, dont l'influence se manifeste respectivement sur les phénomènes de condensation capillaire, lors de l'adsorption (relation de KELVIN), sur les phénomènes de capillarité conduisant à la fixation d'eau en masse (pression capillaire) et sur la résistance à l'écoulement (perméabilité ou perméabilité relative).

- de la tortuosité, définie par la relation $\tau = (L_o / L)^2$ (L_o étant la longueur réelle des lignes de courant du fluide traversant l'échantillon, L la longueur de celui-ci) dont l'influence se manifeste également sur les capacités d'écoulement des fluides à travers le matériau (perméabilité, diffusion moléculaire de la vapeur).

Si l'on se limite à l'analyse des seuls paramètres caractéristiques S, d, ε qui sont le plus commodément accessibles, certaines grandes familles de matériaux poreux peuvent être distinguées en dépit des très larges variations des paramètres considérés (Fig. 10).

Si, par ailleurs, en utilisant la relation de KELVIN, on détermine le diamètre maximum du pore, au delà duquel les phénomènes de condensation capillaire ne peuvent plus se manifester : $P_v = P_{vs}$, soit $r \sim 10^{-7}$ m pour l'eau à 10°c, on peut en outre distinguer deux types de comportement des matériaux poreux:

- Les matériaux dits hygroscopiques, dans lequel les mécanismes d'adsorption peuvent contribuer à la fixation de quantités d'humidité non négligeables (ces matériaux ayant une grande surface spécifique et de surcroît des rayons de pores inférieurs à 10^{-7}m), domaine A, Fig. 10 .

- Les matériaux non hygroscopiques ou capillairo-poreux ($r > 10^{-7}$m) pour les quels la quantité d'humidité fixée par adsorption est faible, voir négligeable, domaine B, Fig. 10.

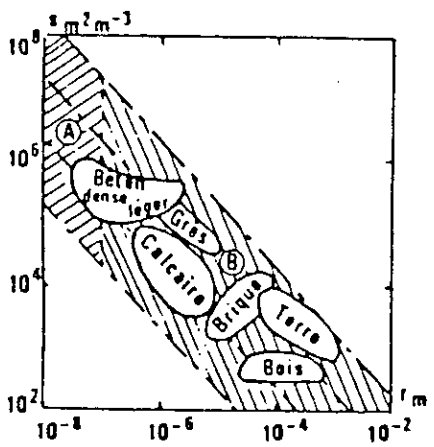


Fig.10

En règle générale, même pour les matériaux ayant un comportement réputé hygroscopique, la quantité d'humidité fixée par adsorption reste faible comparée à la quantité d'humidité correspondant au remplissage de tous les pores (saturation complète).

CHAPITRE II

MODELISATION MATHEMATIQUE DES PHENOMENES DE TRANSFERT EN MILIEU POREUX

II-1 APPROCHE DU CONTINU
II-1-1 Echelle microscopique
II-1-2 Echelle macroscopique
II-2 RELATIONS ENTRE GRANDEURS MICROSCOPIQUES ET MACROSCOPIQUES (EQUATION DE BILANS)
II-3 MODELE DIT DE PHILIP- DE VRIES

Nous avons évoqué au début du chapitre précèdent les difficultés que pose le caractère " dispersé " du milieu poreux réel et la géométrie très complexe des interfaces délimitant les différentes phases en présence dans la modélisation des phénomènes de transfert; nous avons mentionné également l'importance des notions de V.E.R et de milieu continu fictif.
A présent, nous allons expliciter ces notions, en présentant succinctement l'approche permettant le passage du milieu " dispersé " réel au milieu " continu " fictif ainsi que les difficultés rencontrées.

Il importe bien de signaler dés maintenant que le terme de " modèle " employé dans le texte n'a pas constamment la même signification : l'introduction du concept de modèle peut s'avérer nécessaire à différents niveaux d'analyse et il est assigné à chaque niveau une signification spécifique bien précise.

II-1 APPROCHE DU CONTINU

La modélisation mathématique des phénomènes physiques ayant lieu dans un milieu donné consiste à ramener ce milieu réel, donc discontinu, à un milieu continu fictif grâce au choix d'une échelle appropriée; cela revient à définir les dimensions de la portion de milieu sur laquelle on définit les différentes grandeurs qui interviennent dans l'expression des lois physiques utilisées.
En général, ces lois fondamentales ont été établies pour des particules supposées infiniment petites ; c'est le cas par exemple des lois des interactions universelles (gravitationnelle, électrique, magnétique, ...).
Pour pouvoir appliquer ces lois à d'autres échelles, il s'impose alors d'opérer un changement dans leur formulation.
On distingue ainsi, pour l'expression des lois de conservation par exemple, différentes formulation telles les bilans microscopiques et macroscopiques.

Dans l'étude des phénomènes de transfert de masse et de chaleur en milieu poreux, l'attention est concentrée sur le ou les fluides occupant l'espace des pores ; deux échelles s'imposent, en général au choix de l'observateur pour analyser ces phénomènes:
L'échelle microscopiques associée au concept de particule élémentaire de fluide et l'échelle macroscopique associé au concept de volume élémentaire représentatif (V.E.R).

II-1-1 Echelle microscopique

Le fluide est vu sous son aspect structural comme étant composé d'un très grand nombre de molécules en mouvement, pouvant entrer en collision les unes avec les autres et avec les parois du récipient les contenant.
L'application de la théorie de la mécanique classique permet, en principe de d'écrire complètement l'état de ces molécules à n'importe quel instant, pourvu que soient connues la position et la vitesse initiales de chaque molécule ainsi que les forces mises en jeu.
En dépit de cette hypothèse, qui est impossible à satisfaire en pratique, il est excessivement délicat de résoudre ce problème; notons par ailleurs que dans un gramme de gaz, on dénombre plus de 10^{22} molécules: cela met en évidence l'ardeur de la tache à accomplir ; même avec les calculateurs les plus rapides, on mettrait des milliard d'années pour résoudre les systèmes d'équations qui en résulteraient.

Nous sommes alors amenés à abandonner cette approche à l'échelle moléculaire pour une autre approche à l'échelle dite microscopique : la particule fluide est, dans cette approche, composée d'un grand nombre de molécules occupant un volume de fluide de dimensions suffisamment grandes devant

le libre parcours moyen des molécules et très petites comparées aux dimensions de l'ensemble du fluide sur lequel porte l'étude.
Cette approche, de nature statistique, permet de prédire les valeurs moyennées des différentes grandeurs physiques recherchées, prises sur un volume élémentaire de fluide ou particule fluide.
La double restriction sur la taille de la particule fluide assure d'une part la représentativité des grandeurs moyennées en imposant une taille assez grande pour permettre à un effet de moyenne d'apparaître, et d'autre part confert à ces mêmes grandeurs un caractère local en imposant une taille assez petite devant la totalité du domaine de fluide étudié.

Pour illustrer ceci, considérons une grandeur intensive, la masse volumique ρ , définie comme le rapport de la masse du fluide Δm au volume ΔV occupé par ce même fluide. En un point quelconque P du fluide, on peut imaginer une série de volumes ΔV_i centrés en P et contenant des masses de fluide Δm_i. Il correspond alors, une série de masses volumiques moyennes $\rho_i = \Delta m_i / \Delta V_i$, représentées sur la figure 1.
On remarque que pour des valeurs proches de ΔV_o , la masse volumique ρ_i reste pratiquement constante. Pour des valeurs plus grandes, elle change graduellement dans le cas d'un fluide non homogène et reste constante dans le cas d'un fluide homogène. Pour des valeurs plus petites, de l'ordre de λ (λ : distance moyenne entre molécules ou libre parcours moyen des molécules), de larges fluctuations de ρ_i sont observées et, de ce fait, il devient insignificatif de représenter par ρ_i la masse volumique en P. Ainsi, la masse volumique du fluide au point P est définie par :

$$\rho(P) = \lim_{\Delta V_i \to \Delta V_o} \rho_i = \lim_{\Delta V_i \to \Delta V_o} (\Delta m_i / \Delta V_i) \qquad (2\text{-}1)$$

Le volume caractéristique ΔV_o est appelé point physique (ou point matériel) du fluide au point mathématique P, c'est le volume d'une particule fluide au point P. De cette façon, le fluide composé d'un très grand nombre de molécules, présentant des vides est remplacé par un continuum composé d'un très grand nombre de particules fluides pour lequel une fonction ρ continue dans l'espace est définie par:

$$\lim_{P' \to P} \rho(P') = \rho(P) \qquad (2\text{-}2)$$

Notons que pour un milieu homogène, il importe de définir une longueur caractéristique L par :

$$L = \rho / (\partial\rho / \partial l) \qquad (2\text{-}3)$$

ou selon chaque direction:

$$L_x = \rho / (\partial\rho / \partial x) \; ; \; L_y = \rho / (\partial\rho / \partial y) \; ; \; L_z = \rho / (\partial\rho / \partial z)$$

avec :

$$\partial\rho / \partial l = \lim_{\Delta l \to \Delta l_o} [\rho . (1 + (\Delta l / 2)) - \rho . (1 - (\Delta l / 2))] / \Delta l \qquad (2\text{-}4)$$

où :

$\lambda < \Delta l_o < L$, est la longueur caractéristique du fluide au point P, avec $(\Delta l_o)^3$ de l'ordre de ΔV_o .

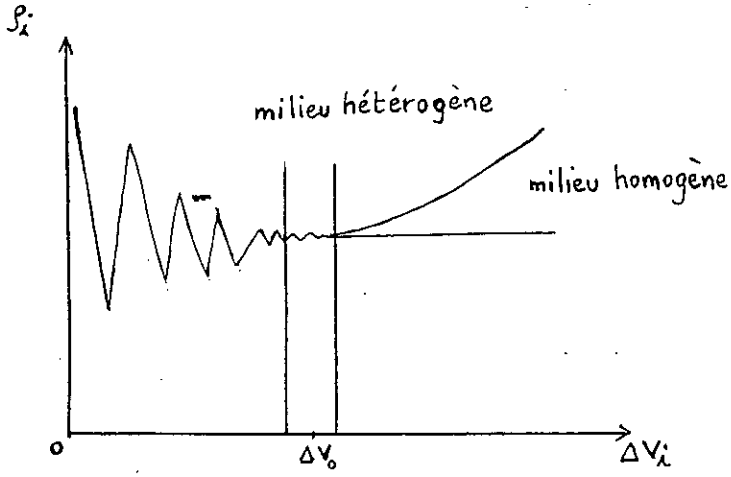


Fig. 1 Définition de la densité d'un fluide

Notons aussi qu'il importe de faire le même raisonnement que précédemment, par rapport à la variable temps t afin de déterminer l'intervalle de temps Δt_o qui permet à un effet de moyenne dans le temps de se manifester. En effet, si l'on observe (ou on mesure) une grandeur quelconque, soit la masse volumique ρ_i au point P du fluide à des intervalles de temps Δt_i au tour d'un instant mathématique t, on obtiendra différentes valeurs ρ_i qu'on pourrait représenter sur une figure similaire à la figure 1. On définira alors le temps caractéristique T par :

$$T = \rho / (\partial \rho / \partial t) \qquad (2\text{-}5)$$

Le libre temps moyen d'une molécule λ_t est défini quand à lui comme étant l'intervalle de temps durant lequel chaque molécule entre en collision une fois en moyenne avec une autre molécule.

Δt_o satisfait alors la condition :

$$\lambda_t < \Delta t_o < T \qquad (2\text{-}6)$$

Nous avons présenté dans ce qui précède, l'approche permettant de passer de l'échelle moléculaire à l'échelle microscopique associée au milieu continu fluide ; ainsi, le fluide se présente au sein du milieu poreux comme un milieu continu délimité par les surfaces des parois solides de la matrice du milieu poreux. Nous allons, dans ce qui suit, procéder d'une manière analogue pour passer à une autre échelle, celle du V.E.R.

II-1-2 ECHELLE MACROSCOPIQUE

Considérons un point mathématique P au sein du milieu poreux et un volume ΔV_i (de forme sphérique) centré en P et de taille supérieure à celle d'un grain ou d'un pore. Déterminons pour ce volume le rapport :

$$\eta_i \equiv \eta_i \cdot (\Delta V_i) = (\Delta V_e)_i / \Delta V_i$$

où : $(\Delta V_e)_i$ désigne le volume de l'espace vide contenu dans (ΔV_i).

En admettant une variation graduelle de ΔV_o et ΔV_e au voisinage de P, il vient :

$$\eta(P) = \lim_{P' \to P} \eta(P') \qquad (2\text{-}8)$$

Ce qui signifie que η est une fonction continue de la position P au sein du milieu poreux.

Ainsi, par l'introduction du concept de porosité et la définition du V.E.R, nous avons remplacé le milieu réel par un milieu continu fictif dans lequel on peut attribuer des valeurs pour n'importe quelle propriété (aussi bien du milieu que du fluide s'y trouvant) à n'importe quel point mathématique du milieu. Soulignons cependant, que parfois il est nécessaire de définir des V.E.R du milieu sur la base d'autres paramètres que la porosité.

De la même manière que pour la porosité volumique, on peut définir la porosité surfacique (η_A) et linéaire (η_L).
On peut montrer que la porosité volumétrique en un point d'un milieu poreux est égale à la moyenne de la porosité surfacique au même point et que la porosité surfacique en un point donné est égale à la moyenne de la porosité linéaire. (cf. BEAR [2])

$$\eta(P) = \overline{\eta}_A(P)$$

et (2-9)

$$\eta_A(P) = \overline{\eta}_L(P)$$

II-2 RELATION ENTRE GRANDEURS MICROSCOPIQUES ET MACROSCOPIQUES (EQUATIONS DE BILANS).

Jusqu'à présent nous avons montré qu'un milieu poreux peut être décrit comme un milieu continu fictif auquel sont associées des grandeurs macroscopiques définies en chaque point du milieu comme des valeurs moyennées prises sur un certain volume centré au point considéré, dit V.E.R. A ces grandeurs (ou variables) macroscopiques locales sont appliquées des lois macroscopiques locales qu'il faudrait établir par des prises de moyenne sur les équations microscopiques correspondantes. On aura alors à établir des relations entre les dérivées des grandeurs microscopiques et celles des grandeurs macroscopiques correspondantes.

A ce niveau, il importe de souligner qu'une grandeur microscopique associée à une phase donnée du milieu poreux, continue sur tout le domaine occupé par cette phase, n'est pas continue aux interfaces. Par conséquent les formules de dérivation de telles grandeurs doivent être appliquées au sens de distributions dés lors qu'on aura à les calculer en moyenne sur un V.E.R [22].

A présent, nous allons introduire quelques définitions complémentaires et établir quelques propriétés relatives aux grandeurs macroscopiques. Nous donnerons par la suite les relations entre les dérivées des grandeurs microscopiques et celles des grandeurs macroscopiques correspondantes que nous appliquerons pour établir les équations de bilan macroscopiques.

Considérons une fonction ψ_α continûment différentiable dans la phase α mais discontinue sur l'interface $A_{\alpha i}$ dans le milieu poreux :

- La moyenne de ψ_α dans un V.E.R R_o est définie par :

$$<\psi_\alpha>(\vec{x},t)=\frac{1}{R_0}\cdot\int_{R_0}\psi_\alpha\cdot(\vec{x}+\vec{\zeta},t)dV_\zeta \qquad (2\text{-}10)$$

- La moyenne intrinsèque de ψ_α ; c'est à dire prise sur la partie R_α de R_o occupée par la phase α est définie par:

$$<\psi_\alpha>^\alpha(\vec{x},t)=\frac{1}{R_\alpha}\cdot\int_{R_\alpha}\psi_\alpha\cdot(\vec{x}+\vec{\zeta},t)dV_\zeta \qquad (2\text{-}11)$$

de (2-10) et (2-11) on déduit:

$$<\psi_\alpha>(\vec{x},t)=\varepsilon_\alpha(\vec{x},t)\cdot<\psi_\alpha>^\alpha(\vec{x},t) \qquad (2\text{-}12)$$

où : $\varepsilon_\alpha(\vec{x},t) = [\,R_\alpha(\vec{x},t)\,]/R_O = \varepsilon\,.\,s_\alpha$

s_α étant la saturation ou la teneur volumétrique en phase α et ε la porosité.

On peut montrer (établir) les propriétés suivantes (cf. BEAR [2]):

$$<<\psi_\alpha>> = <\psi_\alpha> \qquad (2\text{-}13)$$

$$<<\psi_\alpha>^\alpha>^\alpha = <\psi_\alpha>^\alpha \qquad (2\text{-}14)$$

- La déviation $\tilde{\psi}_\alpha$ en tout point du V.E.R est définie comme étant la déviation par rapport à la moyenne $<\psi_\alpha>^\alpha$:

$$\tilde{\psi}_\alpha = \psi_\alpha - <\psi_\alpha>^\alpha \qquad (2\text{-}15)$$

On peut montrer [2] que:

$$<\tilde{\psi}_\alpha>^\alpha = 0 \qquad (2\text{-}16)$$

$$<\psi_{1\alpha}\cdot\psi_{2\alpha}> = <\psi_{1\alpha}>^\alpha\cdot<\psi_{2\alpha}>^\alpha + <\tilde{\psi}_{1\alpha}\cdot\tilde{\psi}_{2\alpha}> \qquad (2\text{-}17)$$

- Les opérateurs de dérivation s'écrivent en moyenne sous la forme :

$$< \nabla\psi_\alpha >= \nabla < \psi_\alpha > + \frac{1}{R_0} \cdot \int_{A\alpha i} |\psi_\alpha| \cdot \vec{n}_\alpha \cdot dA \qquad (2\text{-}18)$$

$$< \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial t} >= \frac{\partial < \nabla\psi_\alpha >}{\partial t} - \frac{1}{R_0} \cdot \int_{A\alpha i} |\psi_\alpha| \cdot \vec{w} \cdot \vec{n}_\alpha \cdot dA \qquad (2\text{-}19)$$

où :

$\vec{n}_\alpha$: normale à l'interface $A_{\alpha i}$ dirigée vers l'extérieur de la phase;
$\vec{w}$: vecteur vitesse de déplacement de l'interface $A_{\alpha i}$;
$|\psi_\alpha|$: saut de ψ_α à la traversée de $A_{\alpha i}$ ($A_{\alpha i}$ surface séparant les phases α et i).

N.B : Rappelons une fois encore que la dérivée de ψ_α doit être appliquée au sens de dérivée distributionnelle.

Soit ψ_α la valeur spécifique (par unité de masse) d'une grandeur extensive S de la phase α et ρ_α la masse volumique de α:

$$\psi_\alpha = \frac{dS}{dm_\alpha} ; \quad \rho_\alpha \cdot \psi_\alpha = \frac{dS}{dR_\alpha} \qquad (2\text{-}20)$$

m_α et R_α désignent respectivement la masse et le volume de la phase.

L'équation générale de S à l'échelle microscopique s'écrit:

$$\frac{\partial(\rho_\alpha \cdot \psi_\alpha)}{\partial t} = -\nabla(\rho_\alpha \cdot \psi_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha + \vec{J}(\psi_\alpha)) + I_\alpha \qquad (2\text{-}21)$$

$\vec{v}_\alpha$ étant la vitesse locale de la phase α,

$\vec{J}(\psi_\alpha) = \rho_\alpha \cdot \psi_\alpha \cdot (\vec{v} - \vec{v}_\alpha)$ est la densité de flux de diffusion de α,

I_α est le taux de production volumique de S dans la phase α.

En prenant la moyenne sur le V.E.R, l'équation précédente s'écrit:

$$<\frac{\partial(\rho_\alpha \cdot \psi_\alpha)}{\partial t}>=-<\nabla(\rho_\alpha \cdot \psi_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha + \vec{J}(\psi_\alpha))>+<I_\alpha> \qquad (2\text{-}22)$$

En utilisant les relations de définition et les règles de prise de moyenne relatives aux opérateurs de dérivation données par les relations (2.18) et (2.19), on obtient:

$$\frac{\partial(\varepsilon_\alpha \cdot <\rho_\alpha \cdot \psi_\alpha>^\alpha)}{\partial t} = -\nabla(\varepsilon_\alpha \cdot <\rho_\alpha \cdot \psi_\alpha>^\alpha \cdot <\vec{v}_\alpha>^\alpha + \varepsilon_\alpha \cdot <\rho_\alpha \cdot \tilde{\psi}_\alpha>^\alpha \cdot <\tilde{\vec{v}}_\alpha>^\alpha + \varepsilon_\alpha \cdot <\vec{J}(\psi_\alpha)>^\alpha$$

$$-\frac{1}{R_0} \cdot \int_{A\alpha i} \left[\rho_\alpha \cdot \psi_\alpha \cdot (\vec{v}_\alpha - \vec{w}_{\alpha i}) + \vec{J}(\psi_\alpha)\right] \cdot \vec{n}_\alpha \cdot dA + \varepsilon_\alpha \cdot <I_\alpha>^\alpha$$

$$(2\text{-}23)$$

Notons que, par rapport à l'équation de bilan microscopique (2.21), cette équation fait apparaître deux termes supplémentaires:

- $\varepsilon_\alpha \cdot <\rho_\alpha \cdot \tilde{\psi}_\alpha \cdot \tilde{\vec{v}}_\alpha>^\alpha$: représente une densité de flux de dispersion due aux variations locales de $\vec{v}_\alpha$ et $\rho_\alpha \cdot \psi_\alpha$;

- $-\frac{1}{R_0} \cdot \int_{A\alpha i} \left[\rho_\alpha \cdot \psi_\alpha \cdot (\vec{v}_\alpha - \vec{w}_{\alpha i}) + \vec{J}(\psi_\alpha)\right] \cdot \vec{n}_\alpha \cdot dA$: représente le transfert de ψ_α à travers les interfaces $A_{\alpha i}$ situées dans le V.E.R . Ce terme ne s'identifie à zéro que si $A_{\alpha i}$ est une surface matérielle ($A_{\alpha i}$ interface avec la matrice solide) ou s'il n' y a pas de transfert entre phases (cas de deux phases non miscibles par exemple)

A ce stade, il importe de souligner que la détermination des termes supplémentaires apparaissant dans les équations de bilans macroscopiques pose (dans l'état actuel des connaissances et des moyens expérimentaux) en général des difficultés insurmontables: cette détermination ne devient possible que dans certains cas relativement simples et même dans de tels cas, le recours à des hypothèses complémentaires demeure incontournable.

Dans les paragraphes précédents, nous avons introduit la notion de grandeur macroscopique (définie comme étant une valeur moyenne prise sur un V.E.R) sans aucune précision concernant la procédure utilisée. Les détails relatifs à la méthode employée ne seront évoquées que dans le cadre d'un modèle

bien défini, construit sur la base d'un ensemble d'hypothèses appropriées; ceci constitue une approche très répandue dans toutes les branches de la physique: elle est fondée sur le concept de modèle et elle permet de ramener le système physique étudié (de nature excessivement complexe) à un système traitable mathématiquement.

Dans le cas de l'étude des phénomènes physiques en milieu poreux, plusieurs modèles ont été proposés; leur validité a été testé expérimentalement et des domaines d'applications ont été dégagés. Nous citons, à titre d'exemple, le modèle proposé par BEAR et BACHMAT (1966,1967), ce modèle statistique permet d'établir les équations macroscopiques de l'écoulement de fluide dans un milieu poreux ainsi que des justifications théoriques à certaines lois empiriques utilisées telle: la loi de DARCY.

Compte tenu, de la taille relativement importante des développements théoriques pour établir les équations macroscopiques, nous nous sommes limités dans ce qui suit à un simple exemple illustratif , relatif au bilan de masse dans le cas d'un seul constituant présent dans le milieu poreux sous deux phases.

Bilan de conservation de masse

Considérons un fluide sous deux phases 1 et 2 présent dans un milieu poreux indéformable. Les équations de conservation de masse s'écrivent alors pour chaque phase sous la forme :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \cdot \bar{v}_1) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 \cdot \bar{v}_2) = 0 \qquad (2\text{-}24)$$

En prenant la moyenne sur un V.E.R, on obtient :

$$< \frac{\partial \rho_1}{\partial t} > + < \nabla \cdot (\rho_1 \cdot \bar{v}_1) >= 0 \quad ; \quad < \frac{\partial \rho_2}{\partial t} > + < \nabla \cdot (\rho_2 \cdot \bar{v}_2) >= 0 \qquad (2\text{-}25)$$

Les relations entre les opérations de dérivation établies dans les relations (2.18) et (2.19) s'écrivent pour la phase 1 (présentant une interface A_{12} avec la phase 2 et A_{1s} avec la matrice solide) sous la forme :

$$< \frac{\partial \rho_1}{\partial t} >= \frac{\partial < \rho_1 >}{\partial t} - \frac{1}{R_0} \cdot \int_{A_{12}} \rho_1 \cdot \bar{w} \cdot \bar{n}_{12} \cdot dA_{12} - \frac{1}{R_0} \cdot \int_{A_{1s}} \rho_1 \cdot \bar{w} \cdot \bar{n}_{1s} \cdot dA_{1s} \qquad (2\text{-}26)$$

$$< \nabla (\rho_1 \cdot \bar{v}_1) >= \nabla < (\rho_1 \cdot \bar{v}_1) > + \frac{1}{R_0} \cdot \int_{A_{12}} \rho_1 \cdot \bar{v}_1 \cdot \bar{n}_{12} \cdot dA_{12} + \frac{1}{R_0} \cdot \int_{A_{1s}} \rho_1 \cdot \bar{v}_1 \cdot \bar{n}_{1s} \cdot dA_{1s} \qquad (2\text{-}27)$$

Comme la matrice solide est indéformable, $\vec{w}$ et $\vec{v}_1$ sont nulles sur A_{1s}, et (2.26) et (2.27) s'expriment alors sous la forme :

$$<\frac{\partial \rho_1}{\partial t}>=\frac{\partial <\rho_1>}{\partial t}-\frac{1}{R_0}\cdot\int_{A_{12}}\rho_1\cdot\vec{w}\cdot\vec{n}_{12}\cdot dA_{12} \qquad (2\text{-}26')$$

et

$$<\nabla(\rho_1\cdot\vec{v}_1)>=\nabla<(\rho_1\cdot\vec{v}_1)>+\frac{1}{R_0}\cdot\int_{A_{12}}\rho_1\cdot\vec{v}_1\cdot\vec{n}_{12}\cdot dA_{12} \qquad (2\text{-}27')$$

L'équation de bilan macroscopique de la phase 1 sera :

$$\frac{\partial <\rho_1>}{\partial t}+\nabla<(\rho_1\cdot\vec{v}_1)>+\frac{1}{R_0}\cdot\int_{A_{12}}\rho_1\cdot(\vec{v}_1-\vec{w})\cdot\vec{n}_{12}\cdot dA_{12}=0 \qquad (2\text{-}28)$$

Soit encore en moyenne intrinsèque de phase:

$$\frac{\partial(\varepsilon\cdot s_1\cdot<\rho_1>^1)}{\partial t}+\nabla(\varepsilon\cdot s_1\cdot<(\rho_1\cdot\vec{v}_1)>^1)+\frac{1}{R_0}\cdot\int_{A_{12}}\rho_1\cdot(\vec{v}_1-\vec{w})\cdot\vec{n}_{12}\cdot dA_{12}=0 \qquad (2\text{-}29)$$

En séparant $<(\rho_1\cdot\vec{v}_1)>^1$ d'après la propriété (2.17) on obtient:

$$<(\rho_1\cdot\vec{v}_1)>^1=<\rho_1>^1\cdot<\vec{v}_1>^1+<(\tilde{\rho}_1\cdot\tilde{\vec{v}}_1)>^1$$

En négligeant $<(\tilde{\rho}_1\cdot\tilde{\vec{v}}_1)>^1$, terme de dispersion devant $<\rho_1>^1\cdot<\tilde{\vec{v}}_1>^1$, on obtient:

$$\frac{\partial(\varepsilon\cdot s_1\cdot<\rho_1>^1)}{\partial t}+\nabla(<\rho_1>^1\cdot\vec{v}_1)+\frac{1}{R_0}\cdot\int_{A_{12}}\rho_1\cdot(\vec{v}_1-\vec{w})\cdot\vec{n}_{12}\cdot dA_{12}=0 \qquad (2\text{-}30)$$

où: $<\rho_1>^1\cdot\vec{v}_1=<(\rho_1\cdot\vec{v}_1)>=\varepsilon\cdot s_1\cdot<\rho_1>^1\cdot<\vec{v}_1>^1$

Soit, en supprimant les signes < >:

$$\frac{\partial(\varepsilon \cdot s_1 \cdot \rho_1)}{\partial t} + \nabla(\rho_1 \cdot \vec{v}_1) + I_1 = 0 \qquad (2\text{-}31)$$

De même pour la phase 2, on obtient:

$$\frac{\partial(\varepsilon \cdot s_2 \cdot \rho_2)}{\partial t} + \nabla(\rho_2 \cdot \vec{v}_2) + I_2 = 0 \qquad (2\text{-}32)$$

où:

$$I_1 = \frac{1}{R_0} \cdot \int_{A_{12}} \rho_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{w}) \cdot \vec{n}_{12} \cdot dA_{12} = 0$$

et

$$I_2 = \frac{1}{R_0} \cdot \int_{A_{12}} \rho_2 \cdot (\vec{v}_2 - \vec{w}) \cdot \vec{n}_{21} \cdot dA_{21} = 0$$

représentent les pertes et sources (création-disparition) des phases 1 et 2 consécutives aux éventuels changements de phase du constituant considéré. On a alors $I_1 + I_2 = 0$: la masse de 1 qui quitte la phase 1 pour la phase 2 à travers A_{12} et égale à la masse de 2 qui entre dans la phase 2 par A_{12}.

la conservation de la masse totale du fluide s'exprime par :

$$\frac{\partial(\rho_1 \cdot \varepsilon \cdot s_1 + \rho_2 \cdot \varepsilon \cdot s_2)}{\partial t} + \nabla(\rho_1 \cdot \vec{v}_1 + \rho_2 \cdot \vec{v}_2) = 0 \qquad (2\text{-}33)$$

En résumé, les équations macroscopiques de conservation de masse relatives à chaque phase et à l'ensemble du constituant (1 et 2) s'écrivent :

$$\frac{\partial(\rho_1 \cdot \varepsilon \cdot s_1)}{\partial t} + \nabla(\rho_1 \cdot \vec{v}_1) + I_1 = 0$$

$$\frac{\partial(\rho_2 \cdot \varepsilon \cdot s_2)}{\partial t} + \nabla(\rho_2 \cdot \vec{v}_2) + I_2 = 0 \qquad (2\text{-}34)$$

$$\frac{\partial(\rho_1 \cdot \varepsilon \cdot s_1 + \rho_2 \cdot \varepsilon \cdot s_2)}{\partial t} + \nabla(\rho_1 \cdot \vec{v}_1 + \rho_2 \cdot \vec{v}_2) = 0$$

avec: $I_1 + I_2 = 0$

Pour conclure ce paragraphe, notons que nous avons présenté l'approche permettant de traiter mathématiquement les phénomènes physiques ayant lieu dans un milieu poreux, tout en évoquant les difficultés rencontrées à chaque niveau d'analyse avec, au besoin, des exemples très simples en vue d'illustration. Pour le lecteur intéressé d'approfondir ces notions, il trouvera dans les références [2, 5, 16, 18, 22] tous les détails concernant cet aspect d'analyse des phénomènes physiques en milieu poreux.

Concernant les premiers modèles théoriques utilisés pour décrire les mécanismes de transfert au sein d'un milieu poreux, les uns prennent exclusivement en compte le transfert en phase vapeur, les autres le transfert en phase liquide ; le modèle dit de PHILIP.DEVRIES étant le plus élaboré il prend en considération les deux modes de transfert (liquide + vapeur) ainsi que les effets de couplage entre transfert de masse et transfert de chaleur.

Il est fondé sur l'identification du milieu poreux à un milieu continu fictif pour lequel les équations de bilan macroscopiques sont obtenues par extension intuitive des équations de bilans microscopiques. Ces équations de bilans ne feront donc pas apparaître les termes supplémentaires relatifs au flux à travers les interfaces contenues dans le V.E.R et la dispersion.

II-3 MODELE DIT DE PHILIP-DEVRIES

Le modélisation mathématique des phénomènes de transferts couplés de chaleur et de masse en milieu poreux a été établie respectivement par PHILIP et DE VRIES [16] en 1957 et LUIKOV [18] en 1958. Elle a été "justifiée" par WHITAKER [21] en 1977, à partir de la thermodynamique des milieux continus.

Le modèle dû à PHILIP et DE VRIES est établi dans le cadre des hypothèses suivantes :

- La matrice solide constituant le milieu poreux est indéformable, homogène et isotrope,
- L'enthalpie des différentes phases est indépendante de la pression ;
- Les phénomènes de gel ou d'ébullition ne sont pas pris en compte ;
- La densité de la phase liquide est constante ;
- Les différentes phases sont continues ;
- La phase gazeuse obéit à la loi des gaz parfaits ;
- La pression totale de la phase gazeuse est uniforme est constante ;
- Le travail des forces de compression et de dissipation visqueuse et négligeable ;
- La phase liquide ne contient qu'un seul constituant ;
- La diffusion de vapeur est du type moléculaire ;
- Les différentes phases sont en équilibre thermodynamique local ;
- Les phénomènes d'hysterésis ne sont pas pris en compte ;
- Il n' y a pas de réaction chimique au sein du milieu poreux ;
- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable ;

Les équations de bilan de conservation de la masse et de l'énergie pour chaque phase i sont données par:

Pour la loi de conservation de la masse:

$$\frac{\partial(\rho_i \cdot \theta_i)}{\partial t} = -\nabla(\bar{J}_i) + I_i$$

avec: $\sum_i I_i = 0$ (2-35)

Pour la loi de conservation de l'énergie:

$$\frac{\partial(\rho_0 \cdot h_i + \sum_i \rho_i \cdot \theta_i \cdot h_i)}{\partial t} = -\nabla(\vec{J}_q + \sum_i h_i \cdot \vec{J}_i)$$

Dans ces équations où l'indice i prend la valeur e ou v selon que le transfert se fait en phase liquide ou vapeur, ρ représente la masse volumique, h l'enthalpie massique, $\vec{J}$ la densité de flux de masse, $\vec{J}_q$ la densité de flux de chaleur conductif, I est un terme source, θ la teneur en eau volumique (volume de liquide ou de vapeur par unité de volume du milieu poreux) et $\rho_o = \rho_s$ (1- ε) la masse volumique apparente du milieu poreux, (ε étant la porosité et ρ_s la masse volumique du solide constituant la matrice).

La fermeture de ce système est effectuée grâce aux équations de transfert (masse et énergie), aux équations d'état et aux conditions d'équilibre entre phases.

Equation de transfert de masse en phase liquide

La formulation mathématique caractérisant le transfert de masse en phase liquide en milieu poreux est donnée par la loi de DARCY. Dans le cas d'un milieu non saturé au sein duquel la pression totale de la phase gazeuse est constante, la densité de flux de masse $\vec{J}_e = \rho_e \cdot \vec{v}_e$ où $\vec{v}_e$ est la vitesse de filtration s'écrit:

$$\vec{J}_e = -\frac{\rho_e \cdot \bar{k}_e \cdot g}{\nu_e} \cdot \nabla(\psi_t)$$

$$\psi_t = \psi_m + \psi_g \qquad (2\text{-}36)$$

où

ψ_g = potentiel gravitationnel

ψ_m = potentiel matriciel, tels que:

$$\psi_m = g \cdot \psi = g \cdot \frac{P_c}{\rho_e}$$

où P_c est la pression capillaire dont on sait qu'elle dépend de θ et de T (Crausse [11]) et,

$$\psi_g = -g \cdot z$$

compte tenu de ces relations $\vec{J}_e$ devient::

$$\vec{J}_e = -\rho_e \cdot K \cdot \nabla(\psi - z) \qquad (2\text{-}36')$$

avec: $\psi = \psi(\theta_e, T)$, $K = (k_e \cdot g) / \nu_e$ et le flux de masse s'écrit:

$$\vec{J}_e = -\rho_e \cdot K \cdot \nabla\vec{\psi} + \rho_e \cdot K \cdot \vec{k} = -\rho_e \cdot (D_{\theta_e} \cdot \nabla\theta_e + D_{T_e} \cdot \nabla T) + \rho_e \cdot K \cdot \vec{k} \qquad (2\text{-}37)$$

avec: $D_{\theta_e} = K \cdot (\frac{\partial\psi}{\partial\theta_e})_T$, $D_{T_e} = K \cdot (\frac{\partial\psi}{\partial T})_{\theta_e}$

Equation de transfert de masse en phase vapeur

La pression totale de la phase gazeuse étant supposée uniforme et constante, la densité de flux de masse $\vec{J}_v$ de la vapeur obéit à la diffusion moléculaire, modélisée par la loi de FICK. En milieu poreux cette loi est pondérée par un terme correctif $f(\theta_e)$, traduisant l'influence, jusqu'à présent non clairement identifiée, de la présence de la phase liquide ainsi que de la tortuosité de la matrice solide. Dans ces conditions $\vec{J}_v$ s'écrit :

$$\vec{J}_v = -F \cdot D \cdot \frac{P}{P - P_v} \cdot \frac{M_v}{R \cdot T} \cdot \nabla P_v \qquad (2\text{-}38)$$

où :

D est le coefficient de diffusion de la vapeur dans l'air,
P la pression totale du gaz,
P_V la pression de vapeur,
R constante des gaz parfaits.

En considérant la condition d'équilibre thermodynamique local entre les phases liquide et vapeur formulée par la loi de KELVIN :

$P_v = P_{vs} \cdot e^{\frac{M_v \cdot g \cdot \psi}{R \cdot T}}$ pour exprimer $P_v = P_v(\theta_e, T)$, ∇P_v s'écrit alors:

$\nabla P_v = (\frac{\partial P_v}{\partial\theta_e})_T \cdot \nabla\theta_e + (\frac{\partial P_v}{\partial t})_{\theta_e} \cdot \nabla T$ et la densité de flux $\vec{J}_v$ prend la forme:

$$\vec{J}_V = -\rho_e \cdot (D_{\theta_v} \cdot \nabla\theta_e + D_{T_v} \cdot \nabla T) \qquad (2\text{-}39)$$

avec:

$$D_{\theta_v} = F \cdot D \cdot \frac{P}{P - P_v} \cdot \frac{M_v}{R \cdot T} \cdot \frac{1}{\rho_e} \cdot (\frac{\partial P_v}{\partial\theta_e})_T$$

$$D_{T_v} = F \cdot D \cdot \frac{P}{P - P_v} \cdot \frac{M_v}{R \cdot T} \cdot \frac{1}{\rho_e} \cdot (\frac{\partial P_v}{\partial T})_{\theta_e}$$

ou bien encore, en utilisant la relation de CLAPEYRON donnée par :

$$\frac{1}{P_v}\cdot\frac{dP_v}{dT}=\frac{M_v\cdot L}{(R\cdot T)^2} \qquad \text{avec:} \quad P_v=\phi\,.\,P_{vs}$$

$$D_{\theta_v}=F\cdot D\cdot\frac{P}{P-P_v}\cdot\left(M_v/R\cdot T\right)^2\cdot\frac{g\cdot P_{vs}}{\rho_e}\cdot e^{\frac{M_v\cdot g\cdot\psi}{R\cdot T}}\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta_e}\right)_T$$

$$D_{T_v}=F\cdot D\cdot\frac{P}{P-P_v}\cdot\left(M_v/R\cdot T\right)^2\cdot\frac{P_{vs}}{\rho_e}\cdot e^{\frac{M_v\cdot g\cdot\psi}{R\cdot T}}\cdot\left(\frac{L}{T}\right)+F\cdot D\cdot\frac{P}{P-P_v}\cdot\left(M_v/R\cdot T\right)^2\cdot\frac{g\cdot P_{vs}}{\rho_e}\cdot\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta_e}\right)_{\theta_e}-\frac{\psi}{T}\right]\cdot\phi$$

En remplaçant les relations (2.37) et (2.38) dans les équations de bilan de masse et d'énergie il vient :

- Pour la phase liquide

$$\frac{\partial(\rho_e\cdot\theta_e)}{\partial t}=\nabla\cdot\rho_e\cdot(D_{\theta_e}\cdot\nabla\theta_e+D_{T_e}\cdot\nabla T)-\rho_e\cdot\left(\frac{\partial K}{\partial z}\right)+I_e$$

et pour la phase vapeur:

$$\frac{\partial(\rho_v\cdot\theta_v)}{\partial t}=\nabla\cdot\rho_e\cdot(D_{\theta_v}\cdot\nabla\theta_e+D_{T_v}\cdot\nabla T)+I_v$$

En exprimant θ_v en équivalent liquide condensé, θ_e^* formulé par:

$$\rho_v\cdot\theta_e=\rho_e\cdot\theta_e^*=\theta_v^*\,,\ \text{cela donne:}\quad \theta_e^*=\frac{\rho_v\cdot\theta_e}{\rho_e}=(\varepsilon-\theta_e)\cdot\frac{\rho_v}{\rho_e}$$

L'utilisation de $\rho_v=P_v\cdot\frac{M_v}{R\cdot T}$ permet alors d'écrire:

$$\frac{\partial(\rho_v\cdot\theta_v)}{\partial t}=-\frac{\rho_v}{\rho_e}\cdot\frac{\partial\theta_e}{\partial t}+\frac{\varepsilon-\theta_e}{\rho_e}\cdot\frac{\partial\rho_v}{\partial t}=-\frac{\rho_v}{\rho_e}\cdot\frac{\partial\theta_e}{\partial t}+\frac{\varepsilon-\theta_e}{\rho_e}\cdot\frac{M_v}{R}\cdot\frac{\partial(P_v/T)}{\partial t}$$

et par suite d'expliciter la variation de masse due à l'évolution des variables thermodynamiques P et T:

$$\frac{\partial \theta_v^*}{\partial t} = -\frac{\rho_v}{\rho_e}\cdot\frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \frac{\varepsilon-\theta_e}{\rho_e}\cdot\frac{M_v}{R}\cdot\frac{1}{T}\cdot\left(\frac{\partial P_v}{\partial \theta_e}\right)_T\cdot\frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \frac{1}{T}\cdot\left(\frac{\partial P_v}{\partial T}\right)_{\theta_e}\cdot\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{P_v}{T^2}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}$$

avec:

$$D_{\theta_v} = F\cdot D\cdot\frac{P}{P-P_v}\cdot\frac{M_v}{R\cdot T}\cdot\frac{1}{\rho_e}\cdot\left(\frac{\partial P_v}{\partial \theta_e}\right)_T$$

$$D_{T_v} = F\cdot D\cdot\frac{P}{P-P_v}\cdot\frac{M_v}{R\cdot T}\cdot\frac{1}{\rho_e}\cdot\left(\frac{\partial P_v}{\partial T}\right)_{\theta_e}$$

on obtient finalement:

$$\frac{\partial \theta_v^*}{\partial t} = \alpha\cdot\frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \beta\cdot\frac{\partial T}{\partial t}$$

avec: $$\alpha = (\varepsilon-\theta_e)\cdot\frac{D_{\theta_v}}{\frac{F\cdot D\cdot P}{P-P_v}} - \frac{\rho_v}{\rho_e}$$

$$\beta = (\varepsilon-\theta_e)\cdot\frac{D_{T_v}}{\frac{F\cdot D\cdot P}{P-P_v}} - (\varepsilon-\theta_e)\cdot\frac{\rho_v}{\rho_e\cdot T}$$

La loi de conservation de la masse de vapeur devient finalement:

$$\frac{\partial \theta_v^*}{\partial t} = \alpha\cdot\frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \beta\cdot\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla\cdot(D_{\theta_v}\cdot\nabla\theta_e + D_{T_v}\cdot\nabla T) + \frac{I_v}{\rho_e} \qquad (2\text{-}40)$$

et celle de la phase liquide:

$$\frac{\partial \theta_e}{\partial t} = \nabla\cdot(D_{\theta_e}\cdot\nabla\theta_e + D_{T_e}\cdot\nabla T) + \frac{I_e}{\rho_e} \qquad (2\text{-}41)$$

L'addition des relations (2-40) et (2-41) sachant que $I_e + I_v = 0$ donne enfin:

$$(1+\alpha)\cdot\frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \beta\cdot\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla\cdot(D_\theta\cdot\nabla\theta_e + D_T\cdot\nabla T) - \frac{\partial K}{\partial z} \qquad (2\text{-}42)$$

qui est la loi de conservation de la masse totale d'eau (liquide + vapeur) du milieu poreux.

avec: $D_\theta = D_{\theta_e} + D_{\theta_v}$; $D_T = D_{T_e} + D_{T_v}$

Considérons maintenant la loi de conservation d'énergie:

$$\frac{\partial(\rho_0 \cdot h_0 + \rho_e \cdot \theta_e \cdot h_e + \rho_e \cdot \theta_v^* \cdot h_v)}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}_q - \nabla \cdot (\vec{J}_e \cdot h_e + \vec{J}_v \cdot h_v)$$

Après développement et en utilisant la loi de conservation de masse en phases liquide et vapeur, il vient:

$$\frac{\partial(\rho_0 \cdot h_0)}{\partial t} + \rho_e \cdot \theta_e \cdot \frac{\partial h_e}{\partial t} + \rho_e \cdot \theta_v^* \cdot \frac{\partial h_v}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}_q - \vec{J}_e \cdot \nabla h_e - \vec{J}_v \cdot \nabla h_v - L \cdot I_v$$

avec: $h_0 = c_0 \cdot T$

$h_e = c_e \cdot T$

$h_v = c_v \cdot T$

et $\vec{J}_q = -\lambda^* \cdot \nabla T$ loi de FOURIER exprimant le transfert de chaleur par conduction au sein du milieu non saturé de conductivité thermique apparente $\lambda^* = \lambda^*(\theta_e, T)$. On obtient:

$$(\rho c)^* \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda^* \cdot \nabla T) + \rho_e \cdot c_e \cdot \nabla \cdot (D_{\theta_e} \cdot \nabla \theta_e + D_{T_e} \cdot \nabla T - K) \cdot \nabla T + \rho_e \cdot c_v \cdot \nabla \cdot (D_{\theta_v} \cdot \nabla \theta_e + D_{T_v} \cdot \nabla T) \cdot \nabla T - L \cdot I_v$$

L'expression de I_v étant tirée de la relation (2-40), soit:

$$I_v = \rho_e \cdot \alpha \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \rho_e \cdot \beta \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - \rho_e \cdot \nabla \cdot (D_{\theta_v} \cdot \nabla \theta_e + D_{T_v} \cdot \nabla T) ;$$

il vient finalement en remplaçant cette valeur dans l'expression précédente:

$$\left[(\rho c)^* + \rho_e \cdot L \cdot \beta\right] \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_e \cdot L \cdot \alpha \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda^* \cdot \nabla T) + \rho_e \cdot L \cdot \nabla \cdot (D_{\theta_v} \cdot \nabla \theta_e + D_{T_v} \cdot \nabla T)$$
$$+ \rho_e \cdot c_e \cdot (D_{\theta_e} \cdot \nabla \theta_e + D_{T_e} \cdot \nabla T - K) \cdot \nabla T + \rho_e \cdot c_v \cdot (D_{\theta_v} \cdot \nabla \theta_e + D_{T_v} \cdot \nabla T) \cdot \nabla T \qquad (2\text{-}43)$$

qui est la loi de conservation de l'énergie en milieu poreux.

Le système d'équations (2-42) et (2-43) forme le modèle de DE VRIES.

$$\frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \alpha \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \beta \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (D_\theta \cdot \nabla \theta_e + D_T \cdot \nabla T) - \frac{\partial K}{\partial z}$$

---------(a)------- --(b)-- --(c)--

$$(\rho c)^* \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda^* \cdot \nabla T) + \rho_e \cdot L \cdot \nabla \cdot (D_{\theta_v} \cdot \nabla \theta_e + D_{T_v} \cdot \nabla T - \alpha \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} - \beta \cdot \frac{\partial T}{\partial t})$$

----------(d)----------

$$+\rho_e \cdot c_e \cdot (D_{\theta_e} \cdot \nabla \theta_e + D_{T_e} \cdot \nabla T - K) \cdot \nabla T + \rho_e \cdot c_v \cdot (D_{\theta_v} \cdot \nabla \theta_e + D_{T_v} \cdot \nabla T) \cdot \nabla T$$

----------(e)---------- ----------(f)----------

Dans ces équations les termes:
(a) représente le taux d'accumulation en masse de vapeur exprimé en équivalent liquide condensé,
(b) et (c) la densité de flux de masse (liquide + vapeur) due au gradient de pression de vapeur,
(d) l'énergie crée ou absorbée par le processus de changement de phase,
(e) et (f) respectivement l'énergie convective propre à la phase liquide et vapeur.

Dans l'étude, où le transfert des phases est contrôlé par la diffusion moléculaire et la capillarité, les termes d'énergie convective (e) et (f) sont négligeables, RECAN [21] et les équations précédentes se simplifient pour donner:

$$(1+\alpha) \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \beta \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (D_\theta \cdot \nabla \theta_e + D_T \cdot \nabla T) - \frac{\partial K}{\partial z}$$

$$\left[(\rho c)^* + \rho_e \cdot L \cdot \beta\right] \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_e \cdot L \cdot \alpha \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda^* \cdot \nabla T) + \rho_e \cdot L \cdot \nabla \cdot (D_{\theta_v} \cdot \nabla \theta_e + D_{T_v} \cdot \nabla T) \qquad (A)$$

Ce système est celui dont on se propose d'évaluer la validité en tant que modèle de description du processus de condensation en milieu poreux.

Dans de nombreux cas, la prépondérance de la masse liquide par rapport à la masse vapeur, permet de simplifier le modèle (A) en négligeant les termes $\alpha \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t}$ et $\beta \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$ exprimant, dans le bilan de masse, la variation de masse locale due à l'évolution des variables d'état.
Dans ces conditions le modèle de DE VRIES simplifié est donné par:

$$\frac{\partial \theta_e}{\partial t} = \nabla \cdot (D_\theta \cdot \nabla \theta_e + D_T \cdot \nabla T) - \frac{\partial K}{\partial z}$$

$$(\rho c)^* \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda^* \cdot \nabla T) + \rho_e \cdot L \cdot \nabla \cdot (D_{\theta_v} \cdot \nabla \theta_e + D_{T_v} \cdot \nabla T) \qquad (B)$$

Ce système est fréquemment utilisé pour d'écrire les processus de séchage, mais, comme l'a souligné BORIES [6], la simplification précédente peut-être pénalisante, voire même conduire à un système d'équations qui ne décrit pas les phénomènes.

Pour éviter les problèmes posés par les variations éventuelles de volume du matériau en cours d'humidification les équations de bilan sont en outre souvent exprimées en fonction de la teneur en eau pondérale w.

w et θ_e étant liés par la relations $\theta_e = \frac{\rho_0}{\rho_e} \cdot w$ et le système d'équations (A) s'écrit alors:

$$(1+\alpha)\cdot\frac{\partial w}{\partial t}+\eta\cdot\frac{\partial T}{\partial t}=\nabla\cdot(a_m\cdot\nabla w+a_d\cdot\nabla T)-\frac{\rho_0}{\rho_e}\cdot\frac{\partial K}{\partial z}$$

$$\left[(\rho c)^*+\rho_0\cdot L\cdot\beta\right]\cdot\frac{\partial T}{\partial t}+\rho_0\cdot L\cdot\alpha\cdot\frac{\partial w}{\partial t}=\nabla\cdot\left[\rho_0\cdot L\cdot a_{mv}\cdot\nabla w+(\lambda^*+\rho_0\cdot L\cdot a_{dv})\cdot\nabla T\right]$$

avec: $a_m = D_\theta$; $a_d = \frac{\rho_e}{\rho_0}\cdot D_T$; $a_{mv} = D_{\theta v}$; $a_{dv} = \frac{\rho_e}{\rho_0}\cdot D_{Tv}$; $\eta = \frac{\rho_e}{\rho_0}\cdot\beta$

Ce système a été partiellement testé par CRAUSSE [10] dans le cadre d'expériences fondamentales de thermomigration (migration d'humidité sous faibles gradients thermiques) , effectuées avec teneur en eau initiale non nulle , sur des milieux macrocapillaires dont les coefficients avaient été préalablement déterminés.

CHAPITRE III

DETERMINATION DES COEFFICIENTS DE TRANSFERT

III-1 COEFFICIENTS DE TRANSFERT DE MASSE

III-1-1 Domaine des fortes teneurs en humidité
III-1-2 Domaine des faibles teneurs en humidité

III-2 PARAMETRES THERMOPHYSIQUES

La résolution du système d'équations (A) (chapitre II) nécessite la connaissance des différents coefficients utilisés: α , χ , a_m , a_d , K , ρ_e , ρ_o , $(\rho c)^*$, L , a_{mv} , a_{dv} , λ^* . Ces coefficients dépendant de la teneur en humidité ω et de la température T peuvent être classés en deux catégories : les coefficients correspondants aux propriétés thermophysiques du milieu poreux ou de la phase considérée, qui sont accessibles directement à partir des tables, et les coefficients caractérisant les interactions de la matrice solide sur le comportement dynamique et statique de l'humidité, qui sont obtenus à partir d'expériences spécifiques. Lorsque les valeurs des coefficients sont connues à certaines teneurs en humidité et températures des interpolations sont utilisées pour déterminer les valeurs correspondant aux teneurs et températures intermédiaires.

Dans ce qui suit, nous allons présenter brièvement les différentes méthodes permettant la détermination des coefficients de transfert non accessibles par les tables. On retrouve dans les expressions littérales de ces coefficients (relations (2.4) et (2.5) du chapitre II) outre les paramètres correspondant aux propriétés thermophysiques, quatre paramètres fondamentaux caractérisant l'effet de la matrice solide sur les phénomènes de transfert considérés.
Ces paramètres sont : la conductivité hydraulique K, la succion ψ , la fonction de pondération f et l'humidité relative d'équilibre hygroscopique ϕ, les méthodes expérimentales que nous allons décrire consistent en la détermination de ces grandeurs pour des domaines allant de 0 à 23% pour les teneurs en humidité et de 8 ^oC à 50 ^oC pour les températures. Pour la détermination des paramètres thermophysiques λ^* et $(\rho c)^*$, elle sera présentée en fin de ce chapitre .

III-1 COEFFICIENTS DE TRANSFERT DE MASSE

III-1-1 Domaine des fortes teneurs en humidité

La méthode utilisée pour déterminer les coefficients de transfert de masse dans ce domaine de teneur en humidité est fondée sur l'analyse d'écoulements unidirectionnels en cycle de drainage (désaturation) d'une colonne de milieu poreux. L'application de la loi de DARCY à un milieu poreux non saturé permet d'écrire :

$$k(\theta) = -\frac{\bar{V}}{\overrightarrow{grad}\,\phi} \qquad (3\text{-}1)$$

avec : $\bar{V}$: vitesse de filtration ou densité de flux volumique,
θ : teneur en eau volumique,
$\phi = \psi - z$, z étant la cote de la section considérée.

La détermination expérimentale des grandeurs grad ϕ et V, dans des conditions isothermes, permet d'accéder au paramètre $K(\theta)_T$.

Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure 3.1. Le milieu poreux est placé dans un cylindre métallique de 70 cm de hauteur et de 5 cm de diamètre. Ce cylindre est entouré d'un circuit

fluide au sein duquel circule de l'eau à température régulée, permettant ainsi de réaliser des expériences à différentes températures. La succion ψ est obtenue grâce à des tensiomètres disposés en différentes sections le long d'une génératrice. Quant à la teneur en eau θ, elle est obtenue par une méthode gammamétrique basée sur le comptage des particules γ émises à travers le milieu par une source radioactive. Le nombre de ces particules et lié a la teneur en eau θ par :

$$N = Ns \cdot \exp(\mu_L \cdot \rho_L \cdot \theta \cdot e) \qquad (3\text{-}2)$$

avec :

Ns : nombre de particules émises à travers le milieu sec ,
μ_L : coefficient d'absorption massique de l'eau de masse volumique ρ_L ,
e : épaisseur du milieu .

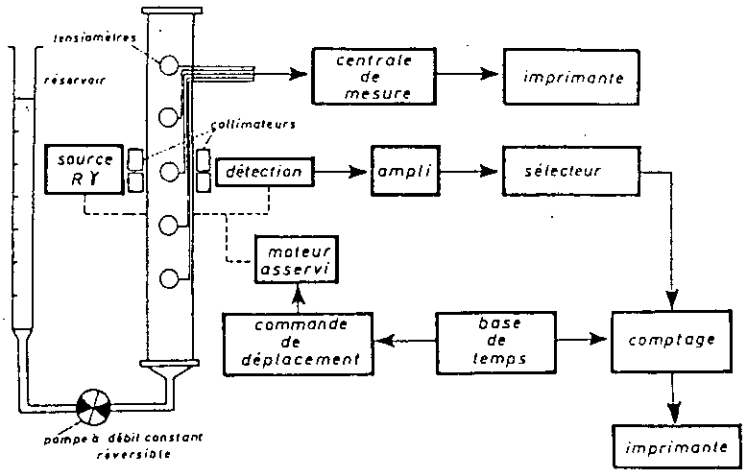


Fig. 3-1

D'autre part, la vitesse moyenne V est évaluée à partir du volume d'eau drainé pendant un intervalle de temps $\Delta t = t_1 - t_2$, entre la surface supérieur de la colonne de section S (débit nul) est une cote z_j du milieu poreux. Ce volume s'exprime par :

$$E(t) = S \cdot \int_{z_j}^{L} [\theta(z, t_1) - \theta(z, t_2)] \cdot dz \qquad (3\text{-}3)$$

La vitesse V est déduite alors de la courbe lissée de E (t) :

$$V = \frac{1}{S} \cdot \frac{dE}{dt}$$

La teneur en humidité affectée à la valeur de K ainsi calculée correspond à la valeur moyenne θ_{12} dans la section z_j considérée pour l'intervalle de temps Δt.

Les valeurs des grandeurs $K(\theta)$ et $\psi(\theta)$ obtenues pour les différentes températures considérées sont représentés sur les figures 3.2 et 3.3 après une transformation permettant de les exprimer en fonction de la teneur en eau pondérale ω ,où : $\omega = \frac{\rho_e}{\rho_0} \cdot \theta$.

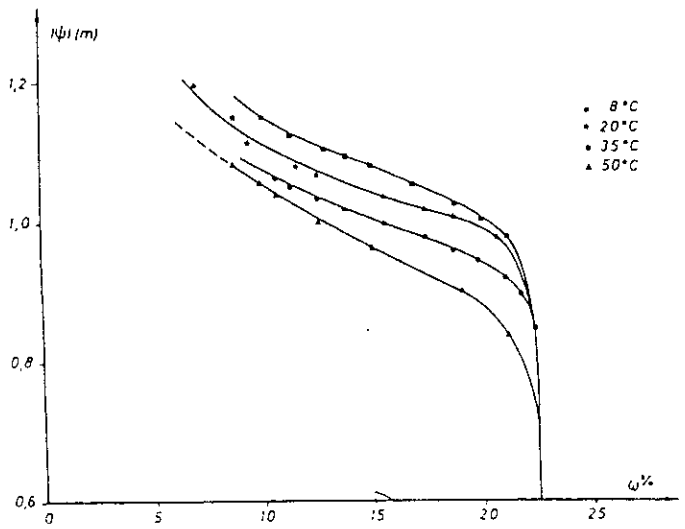


Fig. 3-2 Effets de température sur la succion

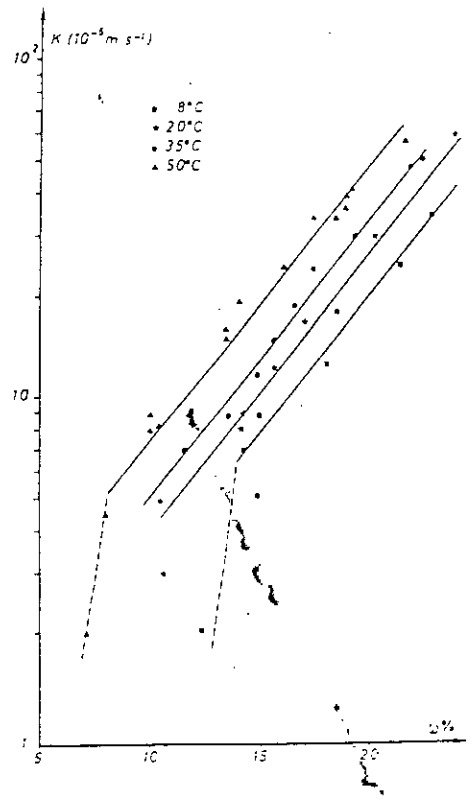


Fig. 3-3 Effets de température sur la conductivité hydraulique

En tenant compte de l'expression de la conductivité hydraulique K (K = k.g / ν) , on pourrait considérer que la dépendance de cette dernière avec la température est essentiellement liée aux variations de la viscosité ν avec cette grandeur.

On est alors conduit à définir la grandeur réduite :

$$p(M,\omega) = \frac{\psi(\omega \cdot T)}{\sigma(T)} \qquad (3\text{-}4)$$

Elle dépend essentiellement de la teneur en humidité ω pour un milieu poreux donné (M)

De même, on définit sous l'hypothèse d'une mouillabilité indépendante de la température, la grandeur réduite associée à la pression capillaire:

$$q(M,\omega) = \frac{\psi(\omega \cdot T)}{\sigma(T)} \qquad (3\text{-}5)$$

Elle dépend essentiellement de la teneur en humidité ω pour un milieu poreux donné (M).
Ces grandeurs réduites sont représentées sur les figures 3.4 et 3.5

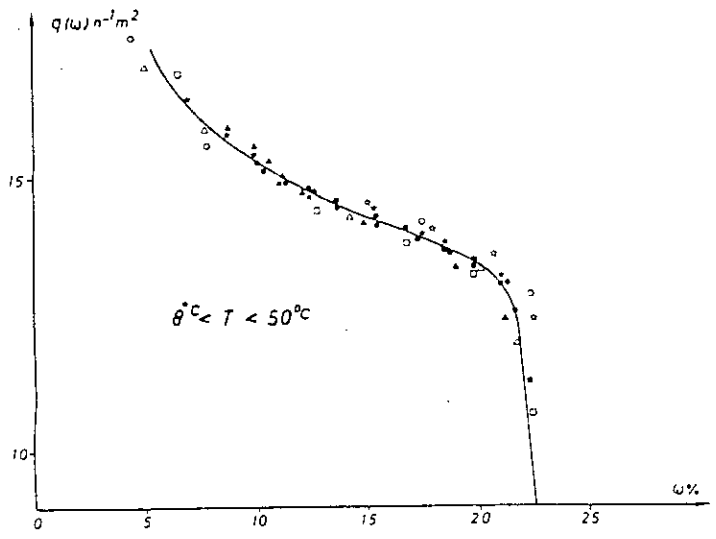


Fig. 3.4

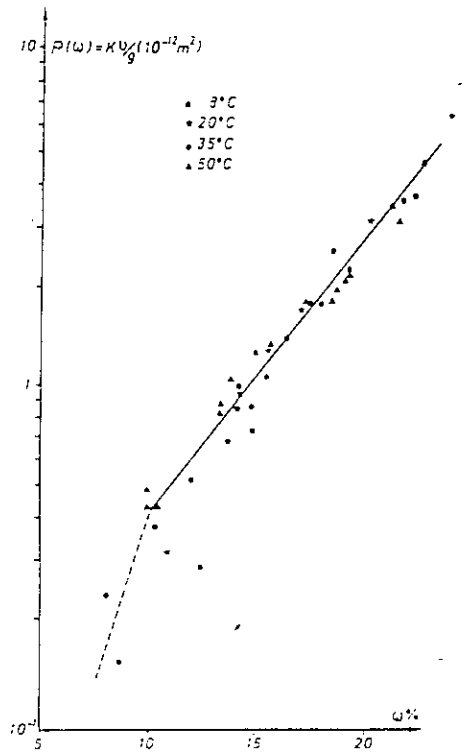


Fig. 3.5

Notons par ailleurs, que cette considération de dépendance exclusive de la teneur en humidité pour les grandeurs réduites $p(M,\omega)$ et $q(M,\omega)$ a été en accord avec les résultats obtenus par JACKSON et DUMORF [10] et que par conséquent elle se trouve bien justifiée.

Ce qui est important à mentionner à propos de cette méthode, est qu'elle est limitée à cause des risques de désamorçage des tensiomètres et des difficultés d'analyse des profils d'humidité pour des teneurs en eau en deçà de 7% . Elle permet , néanmoins , pour des teneurs en humidité se situant dans le domaine [7% , 23%] :

- L'évaluation des paramètres $K(\omega, T)$ et $\psi(\omega, T)$ à l'aide d'une méthode dynamique;
- La mise en évidence des effets de la température sur ces paramètres à l'aide des données physiques ($\nu(T)$, $\sigma(T)$) caractéristiques de la phase liquide considérée.

III-1-2 Domaine des faibles teneurs en humidité:

Pour des teneurs en humidité inférieures à 7% , la détermination de $K(\omega, T)$ est à la fois délicate et peu précise . On est alors obligé d'utiliser une autre méthode , elle permet de donner accès directement aux valeurs des coefficients de transfert. Pour la détermination de $\psi(\omega)_T$, trois méthodes sont utilisées correspondant chacune à un domaine de teneur en humidité.

Coefficient de transferts de masse :

La méthode utilisée , consiste à déterminer le coefficient global de transfert de masse isotherme a , le coefficient de transfert de masse isotherme en phase liquide a_e , puis par déduction le coefficient de transfert de masse en phase vapeur a_v .

En l'absence d'effets de gravité , l'équation donnant la densité de flux de masse isotherme suivant une ddirection x est donné par :

$$J = -\rho_0 \cdot a \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \qquad (3\text{-}6)$$

Il apparaît clairement que la valeur du coefficient de transfert " a " est directement déduite des valeurs de la densité de flux J et du gradient de teneur en eau $\frac{\partial \omega}{\partial x}$.

Les dispositifs expérimentaux utilisés, consistent en des cellules métalliques de forme cylindrique de 34 mm de diamètre et 150 mm de longueur, dans lesquelles le milieu poreux préalablement humidifié par mouillage à la teneur en humidité moyenne choisie, est mis en place . Ces cellules sont placées horizontalement , elles sont ouvertes à l'une des extrémités et imperméables sur les autres surfaces .
Une deuxième cellule contenant un produit desséchant (chlorure de lithium) (figure 3.6 a) ou un autre matériau poreux en équilibre hygrothermique (même pression de vapeur et température que le matériau à analyser) (figure 3.6 b), peut être montée a l'extrémité ouverte. L'ensemble étanche, constitué de deux cellules montées bout à bout, est placé dans une enceinte à température régulée.

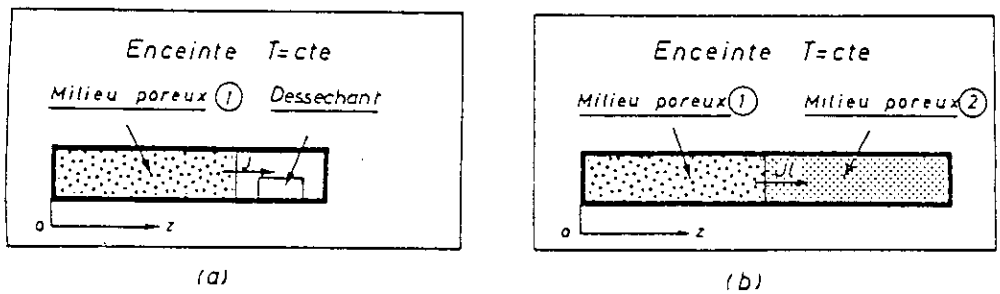


Fig. 3-6 Modèles physiques

Compte tenu de la nature différente des conditions aux limites imposées à la surface libre du milieu poreux à analyser, les transferts d'humidité qui se développent en direction du dessiccatif ou en direction du milieu poreux chargé d'effectuer le " pompage " capillaire correspondent respectivement :

- à un transfert en phase liquide + vapeur dans la première configuration ,
- à un transfert en phase liquide seulement dans la deuxième configuration.

Les profils de teneur en humidité $\omega (x)_t$ relatifs à différents temps, sont obtenus par découpage des échantillons et pesées. Les bilans massiques sont vérifiés par comparaison des résultats obtenus après planimétrage des profils avec l'accroissement du poids du dessiccatif ou du milieu poreux.

Une fois connus les valeurs de $\omega (x)$ et de J, l'expression (3.6) permet d'accéder aux valeurs du coefficient $a = a_e + a_v$ dans la première configuration (écoulement en phase liquide + vapeur); et aux valeurs du coefficient a_e dans la deuxième configuration (écoulement en phase liquide). Les valeurs du coefficient a_v sont en conséquence déduites par: $a_v = a - a_e$.

Relation $\psi (\omega)_t$

(a) Domaine des teneur en humidité $\omega \in$ [23% - 2.5%] :

Le dispositif expérimental utilisé est représenté sur la figure 3.7 . Le milieu poreux est mis en place dans une enceinte étanche; il est limité à la partie inférieure par une plaque poreuse semi-impermeable. L'eau contenue dans l'échantillon à étudier est chassée en augmentant la pression d'air au moyen d'un mano-détendeur de précision. La pression de l'eau étant maintenue constante au cours de l'expérience, la pression capillaire et par voie de conséquence ψ est directement déterminée à partir de la mesure de la pression d'air imposée. La connaissance du volume d'eau écoulé, mesuré en cours d'expérience, permet en outre d'accéder à la valeur de ω en équilibre avec la succion ψ.
La température est maintenue durant toutes les expériences à 20 ^{o}C par mise en place du dispositif expérimental dans une enceinte thermostatée.

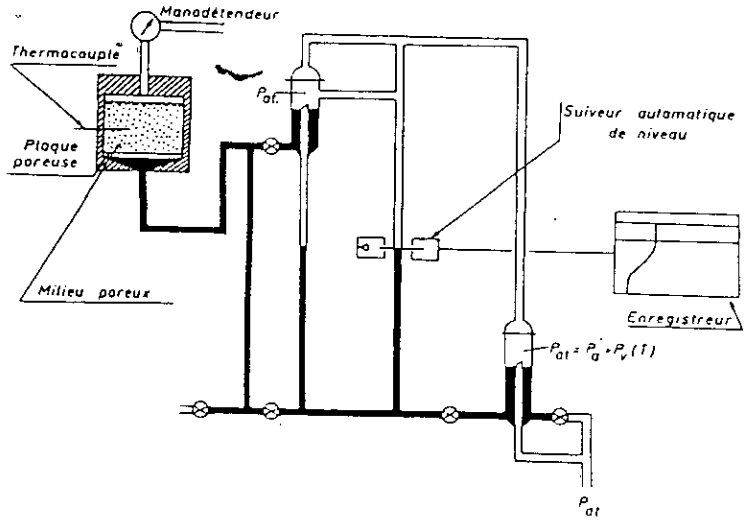
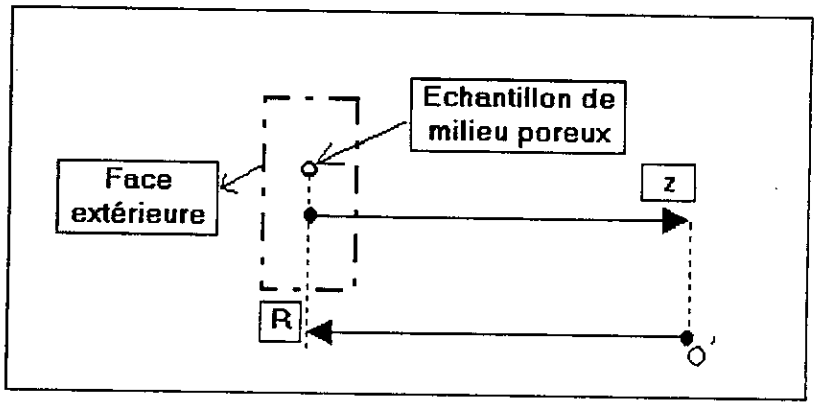


Fig. 3-7 Dispositif expérimental - Méthode de la plaque de pression

(b) Domaine des teneurs en humidité $\omega \in [\ 2.5\% - 1\%\ ]$:

Les échantillons de milieu poreux, partiellement saturés, sont placés dans les godets d'une centrifugeuse permettant de créer des accélérations allons jusqu'à 10 " g ". Les teneurs en humidité sont déterminées par découpage des échantillons en éléments d'un demi-centimètre d'épaisseur et par pesées après 4 à 8 heures de centrifugation; les succions correspondantes sont obtenues par calcul de l'accélération centrifuge en fonction de la vitesse de rotation et de la distance à l'axe de la tranche du matériau analysé.

Considérons le schéma ci-dessous:



L'accélération centrifuge s'écrit:

$$\gamma(z) = (R - z) .\Omega^2 \qquad (3\text{-}7)$$

avec:

Ω : vitesse de rotation ,
R : distance maximale de rotation .

la pression capillaire s'exprime alors par :

$$P_c = (\rho_e - \rho_a) \cdot \int_0^z (R - z) \cdot \Omega^2 \cdot dz$$

soit :

$$P_c = (\rho_e - \rho_a) \cdot \Omega^2 \cdot R \cdot \frac{1 - z}{2 \cdot R} \cdot z \qquad (3\text{-}8)$$

La relation (3.8) peut se mettre sous la forme:

$$P_c = X . f(z)$$

Le paramètre X étant fixé pour chaque régime uniforme de rotation, la fonction f (z) est évaluée à chaque côte de l'échantillon de milieu poreux. L'état de succion est ensuite déterminé à l'aide de la relation: $\psi = -\frac{\rho_e}{\rho_e - g}$.

(c) Domaine des teneurs en humidité $\omega < 1\%$:

Les échantillons de milieu poreux préalablement humidifiés à une teneur en eau voisine de 1%, sont introduits dans un dessiccateur placé dans une enceinte thermostatée. La pression de vapeur dans le dessiccateur est contrôlée par une solution acqueuse d'acide sulfurique de concentration donnée.
La succion correspondant à l'équilibre thermodynamique (teneur en eau constante), une fois celui-ci est atteint, est alors calculée par application de la relation de KELVIN:

$$\psi = \frac{R \cdot T}{M \cdot g} \cdot \log \phi \qquad \text{avec:} \quad \phi = \frac{P_v}{P_{vs}}$$

La teneur en eau est déduite de la pesée de l'échantillon.

Les valeurs des coefficients de transfert global (phase liquide + vapeur) a (ω) et en phase liquide seule a_e (ω), obtenues à différentes températures sont représentées sur les figures 3.8 et 3.9 .

Comme on peut le constater sur la figure 3.9, le coefficient de diffusion en phase liquide a_e devient égal au coefficient de diffusion global a , lorsque ω est approximativement de 4% . Cette information indique que la contribution de la phase gazeuse au transfert de masse isotherme est négligeable pour le matériau considéré lorsque la teneur en humidité est supérieur a 4% .

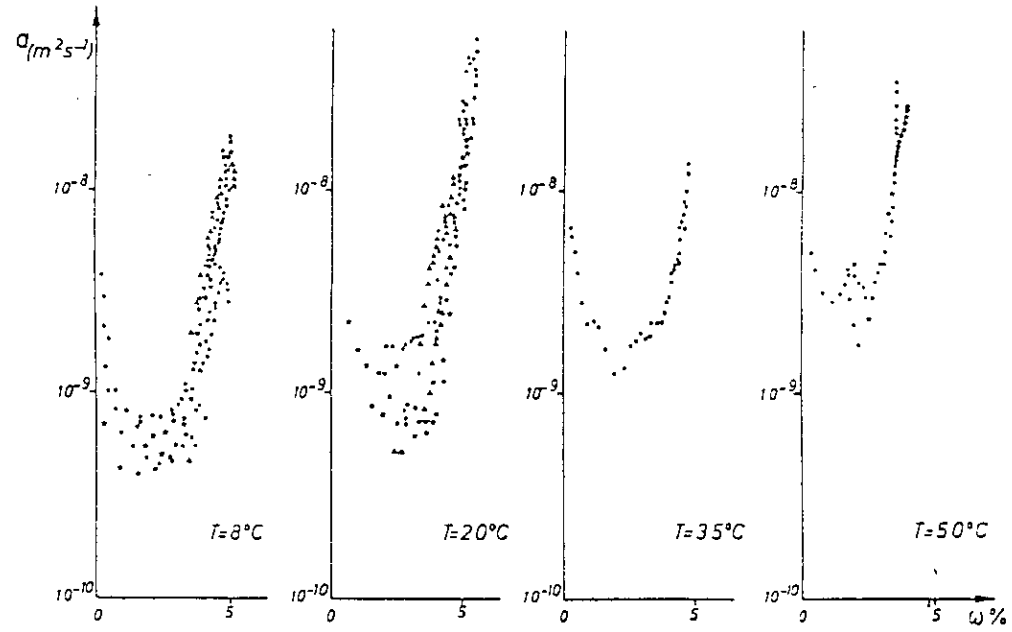


Fig. 3-8 Coefficient de diffusion massique global - Résultats expérimentaux

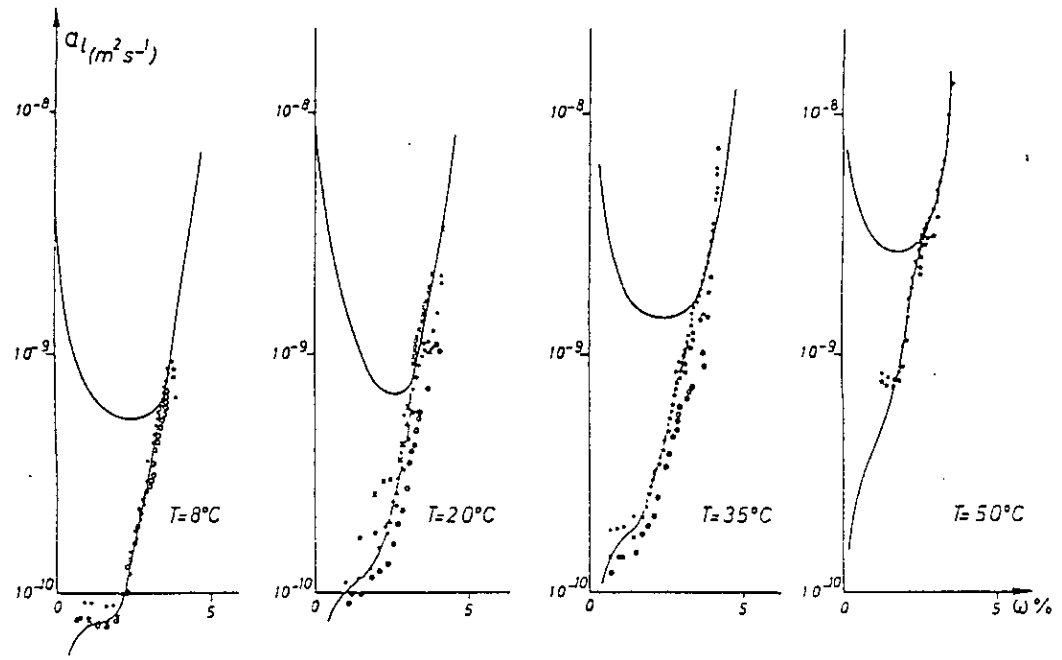


Fig. 3.9 Coefficient de diffusion massique en phase liquide - Résultats expérimentaux

Sur la figure 3.10 , sont représentées les valeurs de a (ω) réalisées sur toute la plage de variation de ω. La zone en tiret portée sur cette figure correspond à un raccordement entre le domaine des fortes teneurs en humidité et le domaine des faibles teneurs.

L'évolution du coefficient de diffusion de masse en phase vapeur a_v (ω) , déduite de la différence a (ω) - a_e (ω), est représentée sur la figure 3.11 et est comparée avec la formulation théorique basée sur l'expression littérale de ce coefficient.

Les valeurs de F (ω) choisies pour le calcul ont été déduites d'une étude [11] concernant la détermination de l'influence de la température sur la conductivité thermique λ^* (ω)$_T$ d'après les résultats obtenus par DE VRIES.

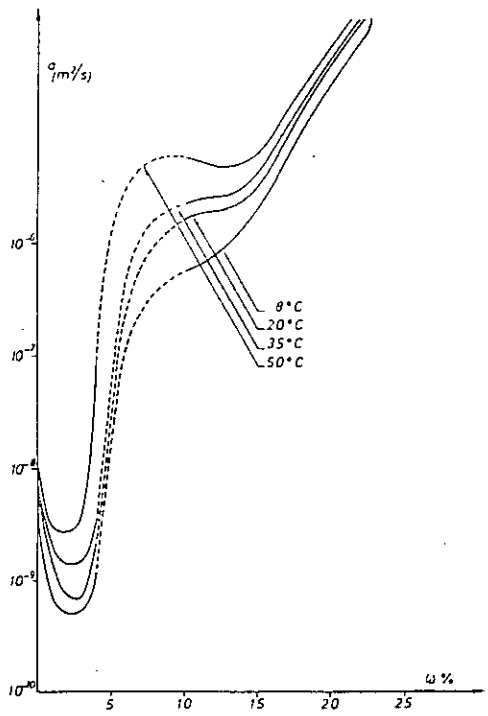


Fig. 3-10 Coefficient de diffusion massique global

En ce qui concerne les valeurs de thermomigration δ , elles sont représentées sur la figure 3.12 . Ces valeurs ont été calculées en utilisant les données expérimentales ψ (ω , T) permettant d'accéder au coefficient δ_e et δ_v à partir des relations (données au chapitre II) , a (ω , T) , a_v (ω , T) et a_e (ω , T) au moyen de l'expression :

$$\delta = \frac{a_e \cdot \delta_e + a_v \cdot \delta_v}{a}$$

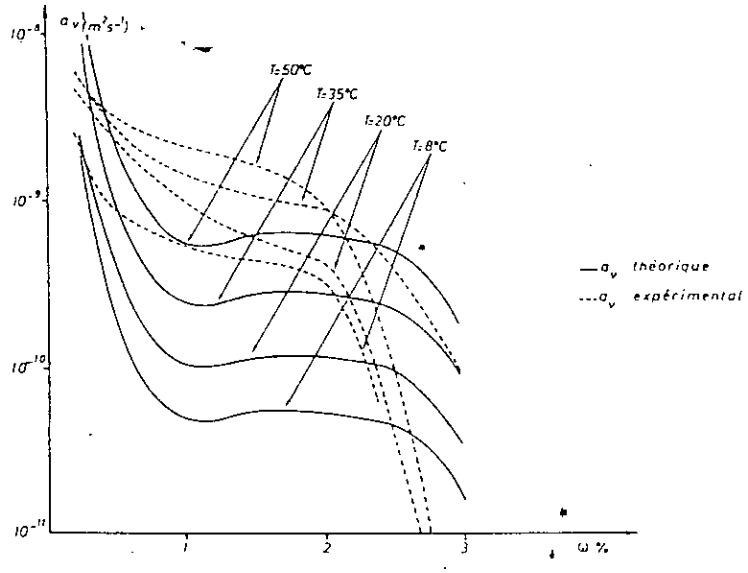


Fig. 3-11 Coefficient de diffusion massique en phase vapeur - Comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux

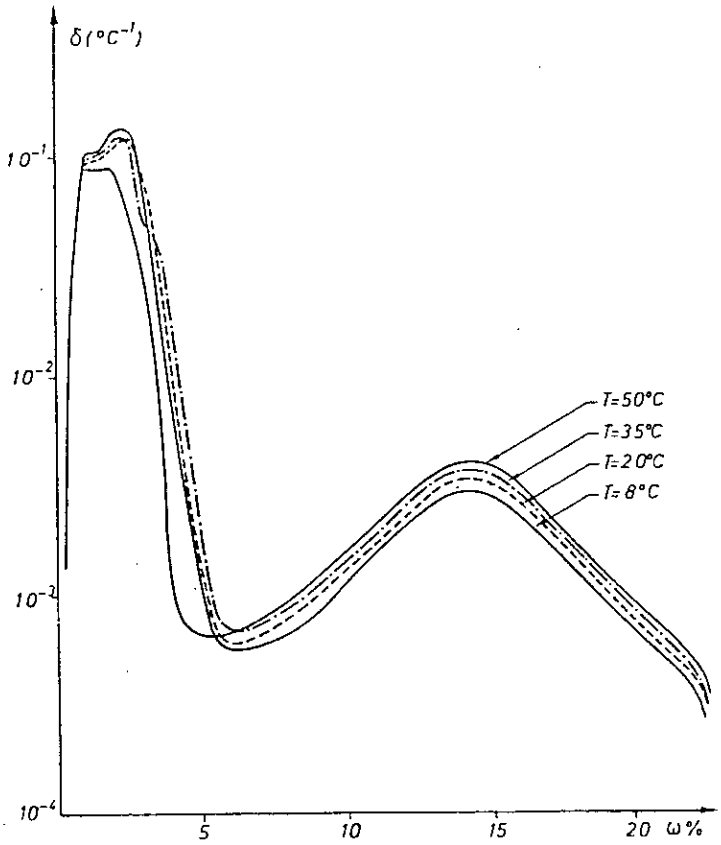


Fig. 3-12 Coefficient de thermomigration (calcul théorique)

III-2- PARAMETRES THERMOPHYSIQUES:

La conductivité thermique, λ^* (ω , T) a été déterminée expérimentalement au moyen d'un appareillage classique: conductivimètre à cylindres coaxiaux.

En ce qui concerne la chaleur volumique ($\rho c)^*$, elle a été calculée directement en utilisant la relation d'additivité des enthalpies:

$$(\rho\, c)^* = \rho_o \cdot c_o + \rho_e \cdot c_e \cdot \omega_e$$

La chaleur volumique résultant de la contribution de la vapeur étant négligée.

Les valeurs moyennes de la diffusivité thermique du matériau sont représentées sur la figure 3.13 .

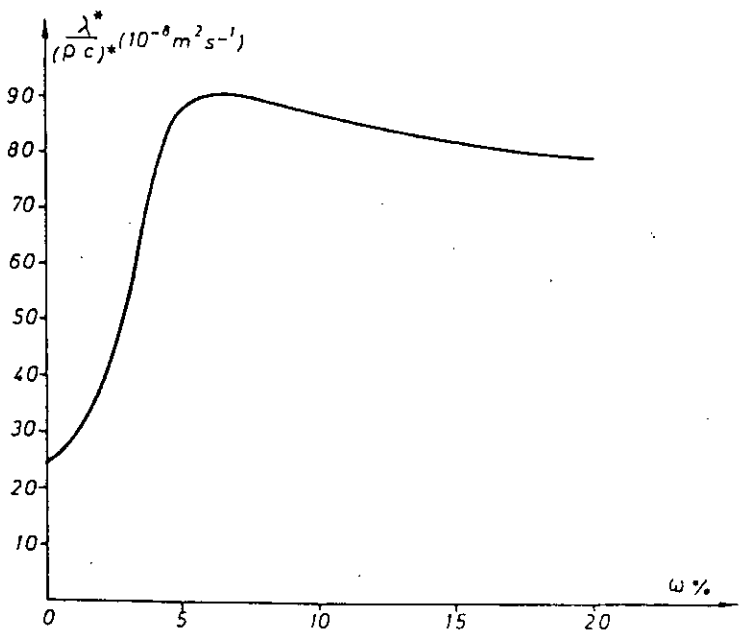


Fig. 3-13 Diffusivité thermique du matériau

CHAPITRE IV

MODELE MATHEMATIQUE ET RESOLUTION NUMERIQUE

IV-1 MODELES PHYSIQUE ET MATHEMATIQUE

IV-1-1 Modèle physique
IV-1-2 Modèle mathématique et conditions aux frontières

IV-2 RESOLUTION NUMERIQUE

IV-2-1 Rappels sur les méthodes numériques
IV-2-1-1 Définition de la formulation intégrale d'une équation différentielle
IV-2-1-2 Méthode de GALERKIN
IV-2-1-3 Méthodes des éléments finis
IV-2-1-4 Fonctions d'interpolation en approximation linéaire
IV-2-2 Application au cas traité et formulation du système algébrique à résoudre

IV-1 MODELES PHYSIQUE ET MATHEMATIQUE

IV-1-1 Modèle physique

Pour des raisons de commodité expérimentale et numérique, le système physique choisi pour notre étude est unidirectionnel et semi-ouvert. L'extrémité ouverte en z = 0 est en contact avec un air régulé en température et en humidité, l'extrémité inférieure fermée en z = L est maintenue à température constante. La surface latérale du modèle est imperméable et adiabatique de sorte qu'il n'y ait aucun transfert thermique ou massique latéral et que les phénomènes puissent être considérés globalement unidirectionnels (Fig. 4-1).

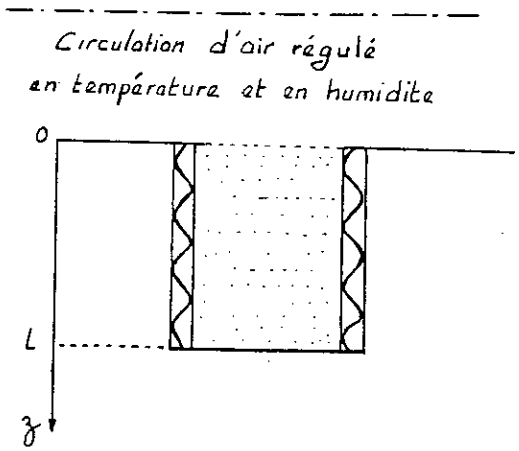


Fig. 4-1 Modèle physique à étudier

VI-1-2 Modèle mathématique et conditions aux frontières

Le système complet d'équations décrivant les transferts couplés de chaleur et de masse en milieu poreux est donné par :

$$(1+\alpha)\cdot\frac{\partial w}{\partial t}+\eta\cdot\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\cdot\left(a_m\cdot\frac{\partial w}{\partial z}+a_d\cdot\frac{\partial T}{\partial z}\right)-\frac{\rho_e}{\rho_0}\cdot\frac{\partial K}{\partial z}$$

$$((\rho c)^*+\rho_0\cdot L\cdot\eta)\cdot\frac{\partial T}{\partial t}+\rho_0\cdot L\cdot\alpha\cdot\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left[(\rho_0\cdot L\cdot a_{mv}\cdot\frac{\partial w}{\partial z})+(\lambda^*+\rho_0\cdot L\cdot a_{dv})\cdot\frac{\partial T}{\partial z}\right]$$

(4-1)

avec:

$$a_m = D_\theta \ , \ a_d = \frac{\rho_e}{\rho_0} \cdot D_T \ , \ a_{mv} = D_{\theta_v} \ , \ a_{dv} = \frac{\rho_e}{\rho_0} \cdot D_{T_v} \ , \ \eta = \frac{\rho_e}{\rho_0} \cdot \beta$$

$$\alpha = \frac{(\varepsilon - \theta_e) \cdot D_{\theta_v}}{\frac{f \cdot D \cdot P}{P - P_v}} - \frac{\rho_v}{\rho_e}$$

$$\beta = \frac{(\varepsilon - \theta_e) \cdot D_{T_v}}{\frac{f \cdot D \cdot P}{P - P_v}} - \frac{(\varepsilon - \theta_e) \cdot \rho_v}{\rho_e \cdot T}$$

$$D_\theta = K \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta_e} \right)_T \quad , \quad D_T = K \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial T} \right)_{\theta_e}$$

$$D_{\theta_v} = \frac{f \cdot D \cdot P}{P - P_v} \cdot \frac{M_v}{R \cdot T} \cdot \frac{1}{\rho_e} \cdot \left(\frac{\partial P_v}{\partial \theta_e} \right)_T$$

$$D_{T_v} = \frac{f \cdot D \cdot P}{P - P_v} \cdot \frac{M_v}{R \cdot T} \cdot \frac{1}{\rho_e} \cdot \left(\frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_e}$$

$$D_\theta = D_{\theta_e} + D_{\theta_v} \ ; \ D_T = D_{T_e} + D_{T_v}$$

E termes de coefficients de diffusion a_i et de thermomigration δ_i , (i = e ou v), les coefficients précédents s'expriment sous la forme :

$$D_{\theta_e} = a_e$$

$$D_{T_e} = \frac{\rho_0}{\rho_e} \cdot a_e \cdot \delta_e$$

$$D_{\theta_v} = a_v$$

$$D_{T_v} = \frac{\rho_0}{\rho_e} \cdot a_v \cdot \delta_v$$

$$a = a_e + a_v$$

$$a_\delta = a_\theta \cdot \delta_e + a_v \cdot \delta_v$$

Le domaine retenu pour la résolution numérique est semi-ouvert; concernant les conditions initiales et aux limites elles correspondent à celles des essais à savoir:

- milieu initialement sec porté à une température uniforme égale à celle de l'air circulant dans la veine. Les parois latérales étant supposées fermées et isolées afin qu'il n'y ait aucun transfert, la simulation numérique a été effectuée dans le cas unidirectionnel.

Du point de vue des conditions aux frontières, en z = 0 et z = L elles correspondent respectivement à une condition de flux de masse nul et une température constante en z = L, et à la continuité des densités de flux de masse et une température constante en z = 0.

La densité du flux de chaleur, G, (RECAN [21]) s'écrit comme étant la somme du flux conductif et de celui dû au changement de phase, (vapeur $\longleftrightarrow$ liquide). Elle s'exprime par :

$$G = (-\lambda^* \cdot \nabla T + L \cdot \vec{J}_v) \cdot \vec{n} \qquad \vec{n}: \text{ normale extérieure à l'interface}$$

Soit , compte tenu de l'expression de $\vec{J}_v$ (chapitre II) , en projection sur l'axe oz parallèlement à $\vec{n}$:

$$G = -(\lambda^* + \rho_0 \cdot L \cdot a_{dv}) \cdot \frac{\partial T}{\partial z} - \rho_0 \cdot L \cdot a_{mv} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (4\text{-}2)$$

En ce qui concerne la densité de flux massique W, elle correspond à l'addition des densités de flux de masse en phase vapeur et liquide. Elle est donnée par l'expression:

$$W = -\rho_0 \cdot \left[a_m \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + a_d \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right] \qquad (4\text{-}3)$$

Coté externe, c'est à dire dans l'atmosphère en contact avec le milieu poreux et plus précisément sur l'interface, les échanges convectifs sont communément régis par:

$$H = h_c \cdot (T_s - T_a) \qquad \text{pour la densité de flux de chaleur} \qquad (4\text{-}4)$$

où h_C est le coefficient de transfert de chaleur par correction, et par:

$$E = h_m \cdot (C_s - C_a) \qquad \text{pour la densité de flux de masse} \qquad (4\text{-}5)$$

où:

h_m est le coefficient de transfert de masse ;

T_s , T_a , L_s , L_a étant respectivement la température de surface et de l'air, la concentration de vapeur en surface et dans l'air ;

L étant la chaleur latente.

Compte tenu de ces éléments, le système d'équations établi par PHILIP-DE VRIES [13] s'exprime sous sa forme complète par:

$$(1+\alpha)\cdot\frac{\partial w}{\partial t}+\eta\cdot\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}(a_m\cdot\frac{\partial w}{\partial z}+a_d\cdot\frac{\partial T}{\partial z})$$
$$\rho_0\cdot L\cdot\alpha\cdot\frac{\partial w}{\partial t}+\left[(\rho c)^*+\rho_e\cdot L\cdot\eta\right]\cdot\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left[(\lambda^*+\rho_0\cdot L\cdot a_{dv}\cdot\frac{\partial T}{\partial z})+\rho_0\cdot L\cdot a_{mv}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\right] \quad (4\text{-}1')$$

Tandis que le jeu de conditions aux limites associées, concernant les densités de flux de masse et de chaleur à l'interface air-milieu poreux s'expriment par :

$$W=-\rho_0\cdot\left[a_m\cdot\frac{\partial w}{\partial z}+a_d\cdot\frac{\partial T}{\partial z}\right]=-E=-h_m\cdot(C_s-C_a) \quad \text{, soit :}$$

$$a_m\cdot\frac{\partial w}{\partial z}+a_d\cdot\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{h_m}{\rho_0}\cdot(C_s-C_a) \quad \text{pour la densité de masse ;} \quad (4\text{-}6)$$

et par :

$$G=-(\lambda^*+\rho_0\cdot L\cdot a_{dv})\cdot\frac{\partial T}{\partial z}-\rho_0\cdot L\cdot a_{mv}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}=R\cdot N-h_e\cdot(T_s-T_a)-L\cdot h_m\cdot(C_s-Ca) \quad (4\text{-}7)$$

pour la densité de flux de chaleur.

Si les mécanismes physiques, mis en jeu dans les processus de transfert à l'intérieur du milieu poreux sont relativement bien décrits actuellement, le niveau des connaissances concernant les problèmes d'interface est par contre dans un état embryonnaire; l'expression des coefficients h_e et h_m est généralement d'origine empirique.

Pour respecter de manière rigoureuse, les conditions de réalisation des essais, il aurait été nécessaire de prendre en compte, dans la simulation, les conditions de raccordement entre le milieu poreux et l'atmosphère et par voie de conséquence de procéder préalablement à la détermination spécifique des coefficients de transfert. Compte tenu des difficultés que présente une telle détermination et du caractère artificiel de ces coefficients, nous avons choisi une procédure semi-empirique consistant à imposer, sur l'interface, les températures et densités de flux de masse déduites de l'expérience. Etant donné que l'objectif essentiel de l'étude concerne l'analyse des phénomènes qui se développent au sein du milieu poreux , il est en effet, de ce point de vue, équivalent d'étudier ces phénomènes en imposant les lois expérimentales qui rendent compte explicitement et précisément du couplage et des interactions entre couches limites externes et milieu poreux.

Compte tenu de ces remarques, les conditions aux limites utilisées pour la résolution du système d'équations précédemment défini ont donc été les suivantes:

Pour la partie ouverte du système(z = 0)

$$t > 0 : \quad \left| \begin{array}{l} a_m \cdot \dfrac{\partial w}{\partial z} + a_d \cdot \dfrac{\partial T}{\partial z} = \dot{m}(t) \\ \\ T = T_s = T_a \end{array} \right. \qquad (4\text{-}8)$$

où: $\dot{m}(t) = \dfrac{d\,m(t)}{dt} = \dfrac{1}{\rho_0 \cdot S} \cdot \dfrac{d\,M(t)}{dt}$

M (t): loi donnant l'évolution des masses d'eau condensées ou évaporées en fonction du temps

S : section de passage de la vapeur

ρ_0 : masse volumique de l'échantillon du milieu poreux

Pour la partie fermée du système en (z = L)

$$t > 0: \quad \left| \begin{array}{l} a_m \cdot \dfrac{\partial w}{\partial z} + a_d \cdot \dfrac{\partial T}{\partial z} = 0 \\ \\ T = T_e \end{array} \right. \qquad (4\text{-}9)$$

Les conditions initiales relatives à la teneur en eau et à la températures quant à elles

$$t \leq 0: \quad \left| \begin{array}{l} w = w_o = 0{,}02\% \\ \\ T = T_o = T_a \end{array} \right. \qquad (4\text{-}10)$$

VI-2 RESOLUTION NUMERIQUE

Le système d'équation à résoudre (4-1', associé aux conditions initiales et aux limites 4-8, 4-9 et 4-10) est constitué de deux équations paraboliques monodimensionnelles et couplées.
Le caractère non linéaire de ce système rend vaine la recherche de solutions analytiques et nécessite l'utilisation d'une méthode numérique.

La méthode retenue pour la résolution numérique est la méthode de GALERKIN conjointement à une approximation par éléments finis.

Dans ce qui suit, nous allons présenter brièvement la méthode utilisée pour la résolution numérique ainsi que son application au système 4-1.

IV-2-1 Rappels sur les méthodes numériques

IV-2-1-1 Définition de la formulation intégrale d'une équation différentielle

Considérons l'équation aux dérivés partielles:

$$L(\underline{u}) - \underline{g} = 0 \qquad (4\text{-}11)$$

où u dépend du vecteur des variables indépendantes $\underline{x}$

Cette équation est définie dans un domaine Ω et est associée aux conditions aux limites sur le contour Γ du domaine Ω (Fig. 4.2) .

$$B(\underline{u}) - \underline{h} = 0 \qquad (4\text{-}12)$$

Dans les équations (4-11) et (4-12), nous avons noté $\underline{g}$ et $\underline{h}$ à la place de $\underline{g}(\underline{x})$ et $\underline{h}(\underline{x})$ pour alléger l'écriture.

Il est intuitif que la relation (4-11) associée à (4-12) équivalent à :

$$\int_{\Omega}\left[L(\underline{u}) - \underline{g}\right]\cdot P(\underline{x})\cdot d\Omega + \int_{\Gamma}\left[B(\underline{u}) - \underline{h}\right]\cdot \overline{P}(\underline{x})\cdot d\Gamma = 0 \qquad (4\text{-}13)$$

et ce quelles que soient les fonctions $P(\underline{x})$ et $\overline{P}(\underline{x})$

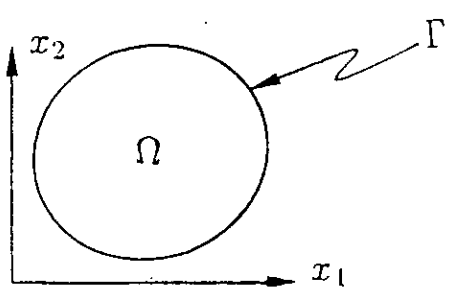


Fig. 4.2 Domaine de définition

La relation (4-13) est appelée "Formulation intégrale normale" du système différentiel défini par (4-11) et (4-12); on l'appelle aussi "Formulation forte".

Une autre relation peut être établie à partir de (4-13), en utilisant la formule de Green [25 , 26] :

$$\int_\Omega u \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot d\Omega = -\int_\Omega v \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot d\Omega + \int_\Gamma u \cdot v \cdot n_i \cdot d\Gamma \qquad (4\text{-}14)$$

La relation (4-13) ainsi transformée fera apparaître les dérivées des fonctions de pondérations $P(\underline{x})$ et $\bar{P}(\underline{x})$ tout en abaissant l'ordre de dérivation de la fonction $u(\underline{x})$. Cette nouvelle relation est appelée " Formulation intégrale faible " du système différentiel défini par (4-11) et (4-12).

Le lecteur intéressé par plus de détails concernant ces deux types de formulations peut consulter les références [25] et [26].

IV-2-1-2 Méthode de GALERKIN

La méthode de GALERKIN fait partie des méthodes, dites méthodes d'approximation de la solution. Contrairement aux méthodes des différences finies qui sont des approximations d'équations, ces méthodes consistent à supposer une approximation de la solution, qu'on écrit généralement sous la forme :

$$u(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N} C_i \cdot \phi_i(\underline{x}) \qquad (4\text{-}15)$$

où les fonctions $\phi_i(\underline{x})$ dites " fonctions de formes " sont les connues et les coefficients C_i les inconnues.

En choisissant alors N fonctions de pondérations $P_j(\underline{x})$, il devient possible de déterminer les N coefficients C_i qui réalisent le mieux la relation (4-13) qui s'écrira :

$$\int_\Omega \left[L(\sum_{i=1}^{N} C_i \cdot \phi_i) - \underline{g} \right] \cdot P_j \cdot d\Omega + \int_\Gamma \left[B(\sum_{i=1}^{N} C_i \cdot \phi_i) - \underline{h} \right] \cdot P_j \cdot d\Gamma = 0$$

(j = 1, 2, ...N)

Dans le cas particulier de la méthode de GALERKIN, les N fonctions de pondération P_j $(\underline{x})$ sont choisies comme étant les fonctions de formes elles-mêmes. Outre l'intérêt de n'avoir à gérer qu'une seule base de fonctions, cette formulation a souvent l'avantage de conduire pour la détermination des coefficients C_i à la résolution de systèmes simplifiés.

La formulation générale de la méthode de GALERKIN appliquée à la définition de (4-11) et (4-12) s'écrit ainsi :

$$\int_\Omega \left[L(\sum_{i=1}^{N} C_i \cdot \phi_i) - \underline{g} \right] \cdot \phi_j \cdot d\Omega + \int_\Gamma \left[B(\sum_{i=1}^{N} C_i \cdot \phi_i) - \underline{h} \right] \cdot \phi_j \cdot d\Gamma = 0 \qquad (4\text{-}16)$$

(j=1,2,...N)

IV-2-1-3 Méthode des éléments finis:

La méthode des éléments finis est souhaitable dés que la géométrie du domaine complet Ω ou l'allure de la solution dans ce domaine est trop compliquée.
Elle remplace la recherche impossible d'une solution approchée unique définie dans tout Ω, par la recherche possible de nombreuses solutions approchées définies dans des espaces élémentaires issus d'un découpage de Ω, et le recouvrant entièrement .

La méthode universellement appelée " méthode des éléments finis " est toujours associée aux règles d'utilisation suivantes :

1- le problème est toujours traité à partir d'une formulation intégrale faible, de façon à pouvoir utiliser les fonctions de forme les plus simples, c'est à dire celles dont la classe de continuité est la plus faible possible ;

2- les fonctions de forme sont choisies de telle sorte que les coefficients inconnus de la solution approchée dans un élément soient précisément les valeurs de la solution en certains points particuliers; ces points sont appelés les " noeuds " de l'élément. Ceci donne un sens physique aux coefficients cherchés et donc une grande clarté à l'exposé de la solution puisque les résultats calculés sont directement les variables d'intérêt en des point choisis par l'utilisateur.

La solution approchée est donc :

$$u(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N} u_i \cdot \phi_i(\underline{x}) \qquad (4\text{-}17)$$

avec $u_i = u(x_i)$, x_i étant les coordonnées des noeuds.

Les fonctions de formes $\phi_i(\underline{x})$ sont ainsi telles qu'elles permettent simplement le calcul de $u(\underline{x})$ en tout point à partir des valeurs u_i de la solution aux noeuds.
C'est pourquoi dans le cadre de la méthode des éléments finis, les fonctions de formes sont souvent appelées " fonctions d'interpolation ". Ce changement d'appellation est d'ailleurs souhaitable puisque le découpage de l'espace en éléments finis fait perdre aux fonctions $\phi_i(\underline{x})$ toute représentativité de l'allure de la solution complète.

3- les fonctions de pondération sont les mêmes que les fonctions de forme. La méthode des éléments finis est donc un cas d'application de la méthode de GALERKIN.

IV-2-1-4 Fonctions d'interpolation en approximation linéaire

Lorsque l'opérateur de dérivation dans le système d'équations à résoudre est du second ordre $(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2})$, la formulation intégrale faible permet de ramener ce système à un autre système équivalent où ne figurent que les dérivés d'ordre un $(\frac{\partial}{\partial x_i})$. On peut alors utiliser des fonctions d'interpolation continues et linéaires par morceaux. Pour cela, on découpe l'espace Ω en N intervalles élémentaires qu'on appelle " éléments " et sur chaque élément on fait l'approximation linéaire (Fig. 4.3) .

$$u(x) = u_i + \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \cdot (u_j - u_i) = \frac{1 - (x - x_i)}{x_j - x_i} \cdot u_i + \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \cdot u_j$$

qui s'écrit:

$$u(x) = u_i \cdot \phi_i(x) + u_j \cdot \phi_j(x) \qquad (4\text{-}18)$$

avec:

$$\phi_i(x) = \frac{(x_j - x)}{(x_j - x_i)} \quad \text{et} \quad \phi_j = \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

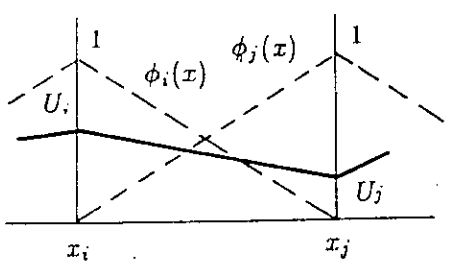


Fig. 4.3 Approximation linéaire sur un élément

De même, pour un coefficient variable quelconque A intervenant dans le système à résoudre, on écrira l'interpolation sur l'élément (i , j) :

$$A(x) = A_i \cdot \phi_i(x) + A_j \cdot \phi_j(x) \qquad (4\text{-}19)$$

Ainsi dans l'expression de la solution générale approchée (4.17) qui s'écrit :

$$u(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i \cdot \phi_i(x) \qquad (4\text{-}20)$$

La fonction ϕ_i (x) prend les valeurs:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1})} & \text{pour } x_{i-1} \le x \le x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - xi} & \text{pour } x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \qquad (4\text{-}21)$$

En posant $l = x_i - x_{i-1}$, la longueur constante des éléments, et en notant $N_i(x)$ les fonctions $\phi_i(x)$, il est facile d'établir les relations suivantes [25 , 26] :

$$\frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{1}{l} \qquad \text{pour } x_{i-1} \le x \le x_j$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial x} = -\frac{1}{l} \qquad \text{pour } x_i \le x \le x_{j+1}$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} = (-1)^{\delta_i + 1} \cdot \frac{1}{l^2} \qquad \text{pour } |i-j| \le 1 \qquad (4\text{-}22)$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} = 0 \qquad \text{pour } |i-j| > 1$$

Et, pour un coefficient variable A interpolé comme en (4-19) :

$$\int_{x-1}^{x_i} A_{i-1} \cdot N_{i-1} \cdot N_i \cdot dx = \frac{A_{i-1} \cdot l}{6}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} A_{i+1} \cdot N_{i+1} \cdot N_i \cdot dx = \frac{A_{i+1} \cdot l}{6}$$

$$\int_{x-1}^{x_i} A_i \cdot N_i^2 \cdot dx = \frac{A_i \cdot l}{3} \qquad (4\text{--}23)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} A_i \cdot N_i^2 \cdot dx = \frac{A_i \cdot l}{3}$$

IV-2-2 Application au cas traité et formulation du système algébrique à résoudre

Le domaine considéré est découpé en éléments d'égale longueur, numérotés depuis la partie ouverte du système et définis par deux noeuds pour chaque élément, de coordonnées prises selon l'axe z (Fig. 4.4) .

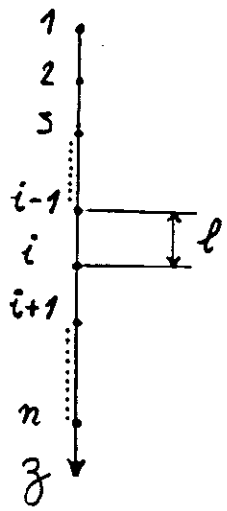


Fig. 4.4 Discrétisation du domaine étudié

En posant :

$$A = 1 + \alpha$$

$$B = \eta$$

$$M = a_m$$

$$D = a_d$$

$$R = \rho_0 \cdot L \cdot \alpha$$

$$E = \rho_0 \cdot L \cdot \eta + (\rho c)^*$$

$$Q = \lambda^* + \rho_0 \cdot L \cdot a_{dv}$$

$$C = \rho_0 \cdot L \cdot a_{mv}$$

$$S = \frac{\rho_e}{\rho_0} \cdot K$$

(4-24)

Le système (4-1') associé aux conditions initiales et aux limites (4-8, 4-9, 4-10) s'écrit :

$$A\cdot\frac{\partial w}{\partial t}+B\cdot\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left[M\cdot\frac{\partial w}{\partial z}+D\cdot\frac{\partial T}{\partial z}-S\right] \qquad (1)$$

$$R\cdot\frac{\partial w}{\partial t}+E\cdot\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left[Q\cdot\frac{\partial T}{\partial t}+C\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\right] \qquad (2)$$

avec les conditions aux limites :

$t>0$, $z=z_1=0$:

$$T=T_1$$

$$M\cdot\frac{\partial w}{\partial z}+D\cdot\frac{\partial T}{\partial z}-S=\phi_{w_1}=\dot{m}(t)$$

$$Q\cdot\frac{\partial T}{\partial z}+C\cdot\frac{\partial w}{\partial z}=\phi_{T_1}$$

$t>0$, $z=z_n$:

$$T=T_3$$

$$M\cdot\frac{\partial w}{\partial z}+D\cdot\frac{\partial T}{\partial z}-S=\phi_{w_n}=0$$

$$Q\cdot\frac{\partial w}{\partial z}+C\cdot\frac{\partial w}{\partial z}=\phi_{T_n}$$

Ecrivons la formulation intégrale normale (4-13) des équations (1) et (2), en notant par $N_i(z)$ les fonctions d'interpolation :

$$\int_\Omega\left\{A\cdot\frac{\partial w}{\partial t}+B\cdot\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\left[M\cdot\frac{\partial w}{\partial z}+D\cdot\frac{\partial T}{\partial z}-S\right]\right\}\cdot N_i(z)\cdot d\Omega=0 \qquad (1')$$

$(i=1, 2, \ldots n)$

$$\int_{\Omega}\left\{R\cdot\frac{\partial w}{\partial t}+E\cdot\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\left[Q\cdot\frac{\partial w}{\partial z}+C\cdot\frac{\partial T}{\partial z}\right]\right\}\cdot N_i(z)\cdot d\Omega=0 \qquad (2')$$

(i = 1, 2, ...n)

Appliquons la formule de Green (4-14) à (1') et (2') :

$$\int_{\Omega}A\cdot N_i\cdot\frac{\partial w}{\partial t}\cdot d\Omega+\int_{\Omega}B\cdot N_i\cdot\frac{\partial T}{\partial t}\cdot d\Omega+\int_{\Omega}M\cdot\frac{\partial N_i}{\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\cdot d\Omega+\int_{\Omega}D\cdot\frac{\partial N_i}{\partial z}\cdot\frac{\partial T}{\partial z}\cdot d\Omega=$$

$$\int_{\Gamma}\left[M\cdot\frac{\partial w}{\partial z}+D\cdot\frac{\partial T}{\partial z}-S\right]\cdot N_i\cdot n_z\cdot d\Gamma+\int_{\Omega}S\cdot\frac{\partial N_i}{\partial z}\cdot d\Omega \qquad (1'')$$

(i = 1, 2, ...n)

$$\int_{\Omega}R\cdot N_i\cdot\frac{\partial w}{\partial t}\cdot d\Omega+\int_{\Omega}E\cdot N_i\cdot\frac{\partial T}{\partial t}\cdot d\Omega+\int_{\Omega}Q\cdot\frac{\partial N_i}{\partial z}\cdot\frac{\partial T}{\partial z}\cdot d\Omega+\int_{\Omega}C\cdot\frac{\partial N_i}{\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\cdot d\Omega=$$

$$\int_{\Gamma}\left[Q\cdot\frac{\partial T}{\partial z}+C\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\right]\cdot N_i\cdot n_z\cdot d\Gamma \qquad (2'')$$

(i = 1, 2, ...n)

On distingue dans les équations (1'') et (2'') quatre types d'intégrales I_1, I_2, I_3 et I_4 qui sont évaluées pour différents coefficients A, B, M,...etc. Calculons alors les valeurs de ces intégrales dans le cas d'un coefficient quelconque G qui prendra par la suite les différentes valeurs A, B, M,...etc.

Intégrale I_1:

$$I_1=\int_{\Omega}G\cdot N_i\cdot\frac{\partial w}{\partial t}\cdot d\Omega=\int_{z_1}^{z_n}G\cdot N_i\cdot\frac{\partial w}{\partial t}\cdot dz$$

Afin d'assurer une meilleure stabilité à la solution numérique, les valeurs nodales des dérivés par rapport au temps $\frac{\partial w_i}{\partial t}$ et $\frac{\partial T_i}{\partial t}$ sont définies comme des moyennes pondérées des dérivées $\frac{\partial w}{\partial t}$ et $\frac{\partial T}{\partial t}$ prises sur le domaine entier :

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = \frac{\int_\Omega G \cdot N_i \cdot \frac{\partial w}{\partial t} \cdot d\Omega}{\int_\Omega G \cdot N_i \cdot d\Omega} = \dot{w}_i$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\int_\Omega G \cdot N_i \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot d\Omega}{\int_\Omega G \cdot N_i \cdot d\Omega} = \dot{T}_i$$

Soit avec $u = W$ ou T et $\dot{u}_i = \dot{w}_i$ ou $\dot{T}_i$:

$$I_i = \int_\Omega G \cdot N_i \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot d\Omega = \dot{u}_i \cdot \int_\Omega G \cdot N_i \cdot dz$$

A ce niveau, écrivons l'expression de la solution générale approchée (4.19) en considérant les variables nodales u_i comme fonction du temps :

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{N} u_i(t) \cdot N_i(x) \qquad (4\text{-}25)$$

écrivons aussi l'expression de l'interpolation sur un élément des coefficients (4-19) :

$G(x) = G_{i-1} \cdot N_{i-1}(x) + G_i \cdot N_i(x)$ sur l'élément (i-1, i)

$G(x) = G_i \cdot N_i(x) + G_{i+1} \cdot N_{i+1}(x)$ sur l'élément (i, i+1)

on aura :

$$I_i = \int_{z_{i-1}}^{z_i} G \cdot N_i \cdot dz + \int_{z_i}^{z_{i+1}} G \cdot N_i \cdot dz + \int_{z_{i+1}}^{z_n} G \cdot N_i \cdot dz$$

Remarquons que d'après (4-21) seul le terme correspondant à l'intervalle [z_{i-1} ; z_{i+1}] n'est pas nul :

$$I_i = \left[\int_{z_{i-1}}^{z_i} G \cdot N_i \cdot dz + \int_{z_i}^{z_{i+1}} G \cdot N_i \cdot dz \right] \cdot \dot{u}_i \qquad (*)$$

qui s'écrit en tenant compte de (4-25) :

$$I_i = \left[\int_{z_{i-1}}^{z_i} (G_{i-1} \cdot N_{i-1} \cdot N_i + G_i \cdot N_i \cdot N_i) \cdot dz + \int_{z_i}^{z_{i+1}} (G_i \cdot N_i \cdot N_i + G_{i+1} \cdot N_{i+1} \cdot N_i) \cdot dz \right] \cdot \dot{u}_i$$

Soit enfin en utilisant les relations (4-23) :

$$I_i = \dot{u}_i \cdot \frac{(G_{i-1} + G_{i+1} + 4 \cdot G_i)}{6} \cdot l$$

Notons encore que pour i =1 et i = n, l'expression (*) se réduit à :

$$I_1 = \dot{u}_1 \cdot \int_{z_1}^{z_2} G \cdot N_i \cdot dz \quad \text{et} \quad I_1 = \dot{u}_1 \cdot \int_{z_{n-1}}^{z_n} G \cdot N_{n-1} \cdot dz$$

qui conduisent respectivement à :

$$I_1 = \dot{u}_1 \cdot \frac{G_2 + 2 \cdot G_1}{6} \cdot l \quad \text{et} \quad I_1 = \dot{u}_n \cdot \frac{(G_{n-1} + 2 \cdot G_n)}{6} \cdot l$$

En résumé l'intégrale I_i (G) peut se mettre sous la forme :

$$I_1(G) = G1_{ii} \cdot \dot{u}_i = G1(G) \cdot \dot{u} \qquad (4\text{-}27)$$

où : G1 (G) est une matrice diagonale dont les éléments sont donnés par :

$$G1_i = \frac{G_2 + 2 \cdot G_1}{6} \cdot l$$

$$G1_{nn} = \frac{G_{n-1} + 2 \cdot G_n}{6} \cdot l$$

$$G1_{ii} = \frac{G_{i-1} + G_{i+1} + 4 \cdot G_i}{6} \cdot l \qquad , \; i \neq 1 \text{ et } i \neq n$$

et $\dot{u}$ un vecteur dont les éléments sont $\dot{w}$ et $\dot{T}$.

Intégrale I_2 :

$$I_2 = \int_{\Omega} G \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot d\Omega$$

avec: $u = w$ ou T ; $u = \sum_{j=1}^{N} u_j \cdot N_j$

$$I_2 = \int_{z_1}^{z_n} G \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left[\sum_{j=1}^{N} u_j \cdot N_j\right] \cdot dz$$

$$= \int_{z_1}^{z_n} \left\{ \sum_{j=1}^{N} \left(G \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial z} \cdot u_j \right) \right\} \cdot dz$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_{z_1}^{z_n} G \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial z} \cdot dz \right\} \cdot u_j$$

$$= \sum_{j=1}^{N} G2_j \cdot u_j$$

avec :

$$G2_j = \int_{z_1}^{z_n} G \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial z} \cdot dz$$

Comme d'après (4-21) N_i est non nulle uniquement dans l'intervalle (z_{i-1} , z_{i+1}), on aura :

$$G2_j = \int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} G \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial z} \cdot dz$$

Puisque sur l'intervalle (z_{i-1} , z_{i+1}) seules les fonctions N_j (j = i-1, i, i+1) ne sont pas nulles (Fig. 4.5), il vient :

$$G2_{i,i-1} = \int_{z_{i-1}}^{z_i} G \cdot \frac{\partial N_{i-1}}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial z} \cdot dz$$

$$G2_{i,i+1} = \int_{z_i}^{z_{i+1}} G \cdot \frac{\partial N_{i+1}}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial z} \cdot dz \qquad (**)$$

$$G2_i = \int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} G \cdot \left(\frac{\partial N_i}{\partial z}\right)^2 \cdot dz$$

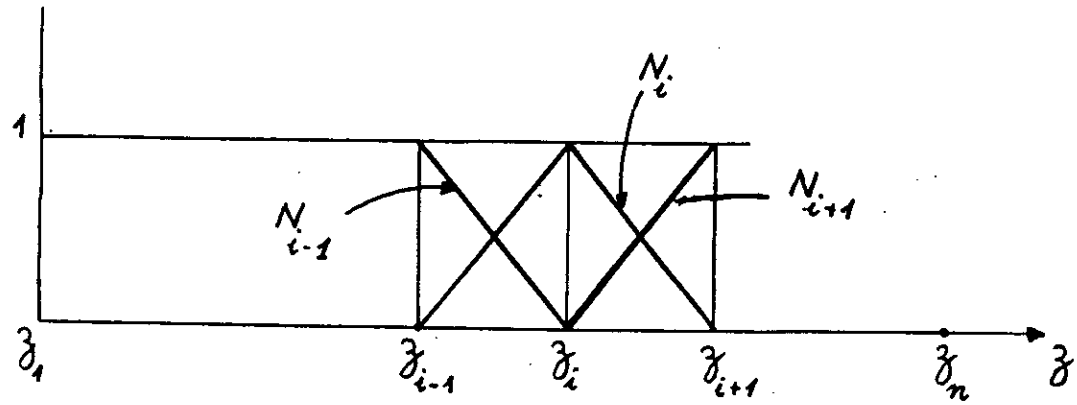


Fig. 4.5

Remarquons comme pour le calcul de I_1, que les expressions (**) se réduisent pour i = 1 et i = n à :

$$G2_{11} = \int_{z_1}^{z_2} G \cdot \frac{\partial N_2}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial z} \cdot dz + \int_{z_1}^{z_2} G \cdot \left(\frac{\partial N_1}{\partial z} \right)^2 \cdot dz$$

et

$$G2_{nn} = \int_{z_{n-1}}^{z_n} G \cdot \frac{\partial N_{n-1}}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial z} \cdot dz + \int_{z_{n-1}}^{z_n} G \cdot \left(\frac{\partial N_1}{\partial z} \right)^2 \cdot dz$$

qui conduisent respectivement en utilisant (4-22) et (4-26) à :

$$G2_{11} = \frac{G_1 + G_2}{2 \cdot l} \quad \text{et} \quad G2_{nn} = \frac{G_{n-1} + G_n}{2 \cdot l}$$

de même les relations (4-22) et (4-25) permettent de calculer :

$$G2_{ii} = \frac{G_{i-1} + 2 \cdot G_i + G_{i+1}}{2 \cdot l}$$

$$G2_{i,i-1} = -\frac{G_{i-1} + G_i}{2 \cdot l}$$

$$G2_{i,i+1} = -\frac{G_{i+1} + G_i}{2 \cdot l}$$

On remarquera que la matrice G2 est une matrice bande symétrique :

$$G2_{ji} = G2_{ij}$$

En résumé, l'intégrale I_2 (G) se met sous la forme :

$$I_2(G) = G2_{i,i-1} \cdot u_{i-1} + G2_{ii} \cdot u_i + G2_{i,i+1} \cdot u_{i+1} \qquad (4\text{-}28)$$

Intégrale I_3:

$I_3(M,D) = \int_\Gamma (M \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + D \cdot \frac{\partial T}{\partial z} - S) \cdot N_i \cdot n_z \cdot d\Gamma$, exprime le flux de masse à la frontière.

$I_3(M,D) = \phi_{w_1}$ pour i = 1

$I_3(M,D) = \phi_{w_n} = 0$ pour i = n

$I_3(M,D) = 0$ pour $i \neq 1$ et $i \neq n$ car d'après (4-21) N_i dans ce cas est nulle sur la frontière Γ.

Pour i =1, 2, ...n $I_3(M,D)$ conduit donc au vecteur $F_w = \begin{bmatrix} \phi_{w_1} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{w_n} \end{bmatrix}$ (4-29)

De même $I_3(Q,C) = \int_\Gamma (Q \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + C \cdot \frac{\partial w}{\partial z}) \cdot N_i \cdot n_z \cdot d\Gamma$, exprime le flux de chaleur à la frontière Γ .

$I_3(Q,C) = \phi_{T_1}$ pour i = 1

$I_3(Q,C) = \phi_{T_n}$ pour i = n

$I_3(Q,C) = 0$ pour $i \neq 1$ et $i \neq n$

Pour i =1, 2, ...n $I_3(Q, C)$ conduit donc au vecteur : $F_T = \begin{bmatrix} \phi_{T_1} \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ \phi_{T_n} \end{bmatrix}$ (4-30)

Intégrale I_4:

$$I_4 = \int_{\Omega} S \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot d\Omega = \int_{z_1}^{z_n} S \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot dz = \int_{z_{i-1}}^{z_{i+n}} S \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot dz$$

En utilisant l'interpolation de S donnée par (4-26) :

$$I_4 = \int_{z_{i-1}}^{z_i} (S_{i-1} \cdot N_{i-1} + S_i \cdot N_i) \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot dz + \int_{z_i}^{z_{i+1}} (S_i \cdot N_i + S_{i+1} \cdot N_{i+1}) \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot dz$$

Notons que pour i = 1 et i = n, on aura respectivement :

$$I_4 = \int_{z_{i-1}}^{z_i} (S_1 \cdot N_1 + S_2 \cdot N_2) \cdot dz \quad \text{et} \quad I_4 = \int_{z_i}^{z_{i+1}} (S_{n-1} \cdot N_{n-1} + S_n \cdot N_n) \cdot dz$$

En utilisant (4-21), on retrouve pour i = 1 , 2 , ...n le vecteur :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{-(S_1+S_2)}{2} \\ \frac{(S_1-S_3)}{2} \\ . \\ . \\ \frac{(S_i-S_{i-2})}{2} \\ . \\ . \\ \frac{(S_{n-1}+S_n)}{2} \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}31)$$

Après avoir calculé les intégrales I_1, I_2, I_3 et I_4, les équations (1") et (2") s'écrivent alors :

$$I_1(A)+I_1(B)+I_2(M)+I_2(D)=I_3(M,D)+I_4(S)$$
$$I_1(R)+I_1(E)+I_2(Q)+I_2(C)=I_3(Q,C)$$

qui s'écrivent :

$$G1(A)\cdot\dot{W}_i+G1(B)\cdot\dot{T}_i+G2(M)\cdot W_i+G2(D)\cdot T_i=F_w+J$$
$$G1(R)\cdot\dot{W}_i+G1(E)\cdot\dot{T}_i+G2(C)\cdot W_i+G2(Q)\cdot T_i=F_T$$

$(i = 1, 2, ...n)$

Il s'agit donc de deux systèmes de n équations chacun, qu'on pourra réunir en un système unique à 2.n inconnues et 2.n équations :

$$B\cdot\dot{X}+A\cdot X=C \qquad (4\text{-}32)$$

dans lequel les vecteurs des inconnues s'écrivent :

$$X=\begin{bmatrix} T_1 \\ W_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_n \\ W_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{X}=\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{W}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{T}_n \\ \dot{W}_n \end{bmatrix}$$

Les matrices B, A et C s'obtiennent par superposition des matrices G1, G2, F_w, F_T et J.

Pour intégrer ce système, nous utilisons un schéma implicite :

$$\dot{X}=\frac{X^{m+1}-X^m}{\Delta t} \qquad (4.33)$$

où : X^m est la valeur de X à l'instant $m\cdot\Delta t$
Δt est le pas de temps (variable)

La linéarisation du système est obtenue en évaluant les coefficients à l'instant (m+θ) où θ ∈ [0 , 1], soit :

$$X^{m+\theta} = \theta \cdot X^{m+1} + (1-\theta) \cdot X^{m} \qquad (4\text{-}34)$$

$\theta = 0$: Schéma explicite

$\theta = 1$: Schéma implicite

$\theta = 1/2$: Schéma implicite centré (Crank- Nickolson)

En utilisant (4-32) et (4-33), écrivons le système (4-31) à l'instant $m + \theta$:

$$\left[B \cdot \dot{X} + A \cdot X = C\right]^{m+\theta} \quad \Rightarrow$$

$$\left[\frac{B^{m+\theta}}{\Delta t} + \theta \cdot A^{m+\theta}\right] \cdot X^{m+1} = \left[\frac{B^{m+\theta}}{\Delta t} - (1-\theta) \cdot A^{m+\theta}\right] \cdot X^{m} + C^{m+\theta}$$

L'évaluation des matrices $A^{m+\theta}$, $B^{m+\theta}$ et $C^{m+\theta}$ (à l'instant m+θ) revient à l'évaluation des différents coefficients définis en (4-24) à l'instant considéré (m+θ). Pour un coefficient quelconque G, on a :

$$G(w, T)^{m+\theta} = \theta \cdot G(w^{m+1}, T^{m+1}) + (1-\theta) \cdot G(w^{m}, T^{m})$$

Finalement le système à résoudre se met sous la forme:

$$\mathcal{A} \,.\, X = \mathcal{B} \qquad (4\text{-}35)$$

Dans lequel la matrice $\mathcal{A}$ est une matrice bande de largeur 7, les coefficients de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ étant fonctions de la solution, La résolution est effectuée par la méthode directe d'élimination de Gauss, avec un processus itératif qu'on arrête lorsque la différence entre deux estimations successives est inférieure à une valeur donnée:

Connaissant X^m, on calcule les matrices $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ puis on calcul X^{m+1} , on évalue la différence $X^{m+1} - X^{m}$ et on refait les calculs, le processus itératif est arrêté lorsque cette différence est inférieure à la valeur fixée (choisie) en fonction de la précision recherchée.

Schéma de prévisions:

L'estimation de T^{m+1} et w^{m+1} lors de la première itération est obtenue par extrapolation linéaire à partir des solutions des deux instants précédents:

$$X^{m+1} = X^{m} + (X^{m} - X^{m-1}) \cdot \left(\frac{\Delta t_m}{\Delta t_{m-1}}\right) \qquad (4\text{-}36)$$

Δt_m : pas relatif au calcul de X^{m+1}

Δt_{m-1} : pas relatif au calcul de X^{m}

CHAPITRE V

RESULTATS ET DISCUSSION

V-1 PRESENTATION DES RESULTATS ET INTERPRETATION

V-1-1 Profils hydriques
V-1-2 Profils thermiques
V-1-3 Distribution de densité de flux de masse
V-1-3-1 Densité de flux en phase liquide
V-1-3-2 Densité de flux en phase vapeur
V-1-4 Distribution de densité de flux de chaleur
V-1-5 Etude de sensibilité aux paramètres

V-2 DISCUSSION

Pour étudier les mécanismes de transfert chaleur-masse en milieu poreux différents types de conditions expérimentales peuvent être envisagés (cf. Chapitre IV) , où l'on peut examiner :

- l'influence du gradient de température pour une humidité relative d'air fixée;
- pour un même gradient de température et une même humidité relative de l'air, l'influence de la température moyenne et enfin;
- pour un même gradient thermique l'influence d'une humidité relative proche de la saturation.

Compte tenu de la nature phénoménologique assez complexe de ces mécanismes de transfert, on s'est intéressé à un type particulier de conditions expérimentales (cf. Annexe II) pour faire notre étude. Ce choix a été fait sur la base de la période de temps assez longue des essais afin d'atteindre le maximum de saturation du milieu en humidité.

Afin d'analyser les mécanismes physiques mis en jeu, des distributions de densité de flux de masse et de chaleur ont été présentées et interprétées; enfin une étude de sensibilité aux paramètres a été abordée afin d'apprécier l'influence de certains termes du modèle mathématique utilisé.

V-1 PRESENTATION DES RESULTATS ET INTERPRETATION:

V-1-1 Profils hydriques

Les profils hydriques présentés sur les figures 5-1 et 5-2 , montrent les distributions d'humidité à différents temps (12 heures , 24 heures , 48 heures , 4 jours , 9 jours , 16 jours , 24 jours , 30 jours , 40 jours , 44 jours , 50 jours , 62 jours , 4,5 mois) obtenus par calcul où l'on peut noter la présence de deux zones bien distinctes :
- une zône sèche, comprise entre la face exposée (ouverte) et l'interface de condensation et ,
- un zone humide, saturée en liquide condensée, comprise entre l'interface de condensation et la surface sous refroidie en $z = d$.
Dans la zone sèche, l'évolution de la teneur en eau suit la loi d'adsorption du matériau, tandis que dans la zone humide, dont l'interface progresse au cours du temps sous l'influence conjointe des effets thermiques et hydriques, la condensation se poursuit.

Les résultats des comparaisons entre expérience et calcul numérique pour les distributions d'humidité sont portés sur les figures 5-3 , 5-4 , 5-5 et 5-6 . D'une manière générale les résultats montrent nettement le caractère satisfaisant du modèle de PHILIP - DE VRIES pour décrire les phénomènes observés expérimentalement, si l'on veut bien convenir, comme cela a été montré en thermomigration, (RECAN [21] , CRAUSSE [10]) que les écarts observés sur la valeur maximale de la teneur en eau en $z = d$ peuvent en effet provenir de l'influence de la gravité, non prise en compte dans nos calculs, et dont le rôle devient non négligeable lorsque la teneur en eau pondérale dépasse 3 à 4 % pour le matériau choisi.

V-1-2 Profils thermiques

Les profils thermiques présentés sur les figures 5-7 et 5-8 , montrent les distributions de température à différents temps obtenus par calcul, où l'on peut noter la présence :

- de profils thermiques linéaires pour les premiers temps (Figure 5-7) , et qui correspondent à l'établissement du régime de conduction pure ;

- de profils thermiques avec faible changement de pente pour les derniers temps (Figure 5-4).

Le changement de pente des profils thermiques résulte essentiellement quant à lui de l'influence des mécanismes de changement de phase; ce changement de faible pente est consécutif à la non prise en compte de l'évolution de la conductivité thermique avec la teneur en eau dans nos calculs.

V-1-3 Distribution de densité de flux de masse

V-1-3-1 Densité de flux en phase liquide

Les densités de flux de masse en phase liquide sont portées sur les figures (5-9 et 5-10) et leurs composantes, dues aux gradients d'humidité et de température sur les figures 5-11 à 5-14 et 5-15 .

On notera tout d'abord que la densité de flux en phase liquide est toujours négative. Compte tenu de la convention adoptée : Flux positif dirigé de l'extrémité ouverte en contact avec l'ambiance vers le milieu poreux, le liquide a donc tendance à envahir le milieu depuis la plaque froide, sur laquelle démarre la condensation, vers l'interface en z = 0. Conformément à l'évolution des coefficients de transfert de masse, cette densité de flux est nulle dans la zone d'adsorption (extrémité ouverte) puis croît et passe par un maximum dans la zone de condensation. En début d'essai ce flux est évidemment égal à zéro puisque la masse de liquide condensée est elle même égale à zéro.

Si l'on examine maintenant l'évolution des différentes composantes de ce flux, on note que la densité de flux induite par le gradient de température est positive et sensiblement plus faible, en valeur absolue que celle, négative , induite par le gradient de saturation; la contribution thermique a pour effet de ralentir la vitesse d'inhibition de la zone sèche par le front de condensation.

V-1-3-2 Densité de flux en phase vapeur

Les densités de flux en phase vapeur sont portées sur les figures 5-16 et 5-17 et leurs composantes dues aux gradients d'humidité et de température sur les figures 5-18 à 5-19 et 5-20 à 5-21

On notera contrairement au cas précédent, que le flux en phase vapeur est positif et par conséquent dirigé de la face d'entrée vers la face froide imperméable, et que la composante de la densité de flux due au gradient thermique est positive et sensiblement plus importante que la composante, négative, induite par le gradient de saturation.

Les profils de densités de flux de masse en phase vapeur sont linéaires aux premiers instants. Ils présentent ensuite une allure quasi-constante tout au long de la partie sèche de l'échantillon, puis des variations dans la zone dans la zone humide. Comme dans le cas du liquide, ces variations sont le résultat de l'évolution conjointe des gradients locaux de saturation et de température ainsi que des coefficients de transfert en fonction de ces variables.

La densité de flux de masse totale (liquide + vapeur), représentée sur les figures 5-22 et 5-23 , est positive sur la face en contact avec l'air et égale à zéro sur la face z = d.
L'annulation de cette densité de flux est le résultat de la compétition entre condensation de vapeur et succion capillaire agissant sur le fluide condensé.

V-1-4 Distribution de densité de flux de chaleur

Les contributions respectives du changement de phase et de la conduction sur le transfert de chaleur sont présentées sur les figures 5-24 , 5-25 et 5-26 à 5-28 . On notera que malgré le changement de phase, le mode de transfert thermique prédominant est de type conductif, mais que la densité de flux due à la chaleur latente peut représenter jusqu'à 10 % de la seule contribution conductive.

S'agissant de la densité de flux de chaleur (Fig. 5-29 à 5-31), le transfert de chaleur est principalement conductif mais le changement de phase dû à la condensation peut entraîner des accroissements tout à fait significatifs de la densité de flux transmise.

V-1-5 Etude de sensibilité aux paramètres

En vue d'apprécier l'importance relative des différents paramètres et par voie de conséquence les possibilités d'évaluation quantitative du modèle, une étude de sensibilité a été réalisée. Elle a porté essentiellement sur les termes d'accumulation en phase vapeur; l'influence de ces termes est mise en évidence en comparant l'évolution des profils de teneur en eau, déduite de la résolution numérique du modèle complet, à celle déduite de la résolution numérique d'un modèle simplifié dans lequel les termes

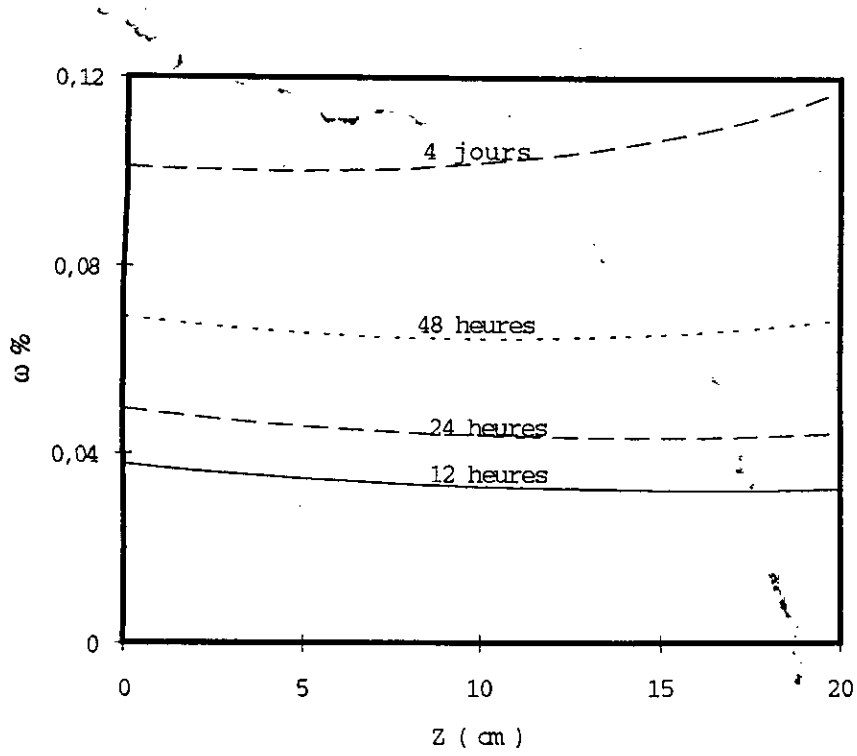
$\alpha \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \eta \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$ sont considérés comme étant à priori négligeables.

Comme on peut aisément le constater sur les figures 5-32 à 5-35, l'influence des termes d'accumulation en phase vapeur n'est sensible qu'à très faible saturation et plus précisément, ici , dans le domaine d'adsorption. Ce résultat nous semble particulièrement intéressant dans la mesure où il confirme, comme en séchage , l'hypothèse consistant à négliger les variations locales instantanées de la masse de vapeur, dans le bilan de masse totale.

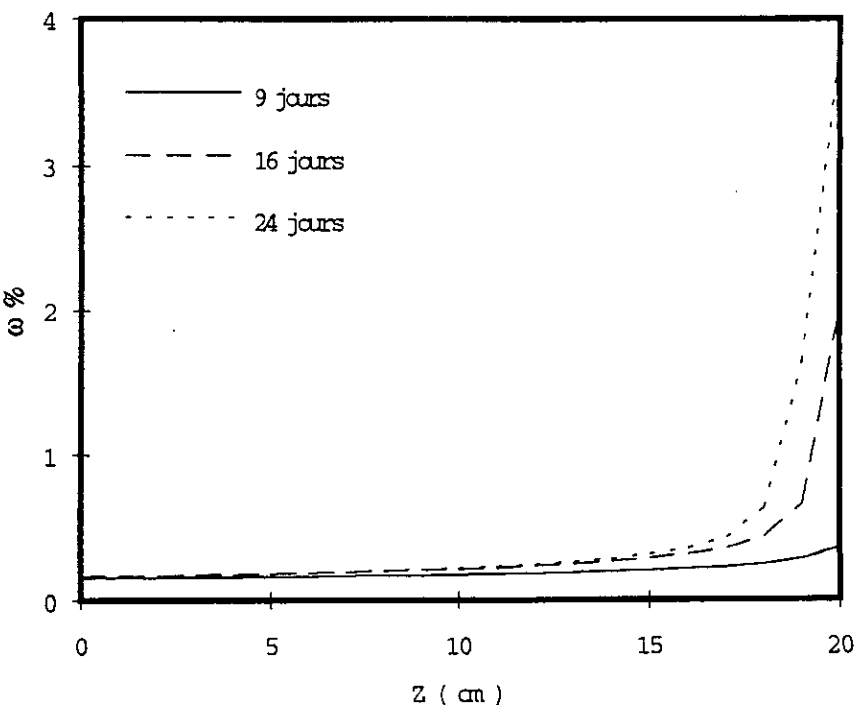
V-2 DISCUSSION

Compte tenu de l'accord qualitatif plutôt satisfaisant qui se dégage de la comparaison entre les résultats expérimentaux et ceux obtenus par la résolution numérique du système d'équations couplées de transfert de chaleur et de masse, il nous a paru utile d'exploiter le code de calcul en vue de préciser la contribution des différents mécanismes sur le développement de la condensation. Dans cette perspective, nous nous sommes attachés, d'une part, à l'examen des différents flux globaux (massiques et thermiques), d'autre part, dans l'expression de ces flux, à identifier les contributions provenant des gradients de saturation et de température.

L'analyse ainsi effectuée, non seulement fournit les éléments de compréhension détaillés du processus de condensation mais également permet de prévoir les éventuelles simplifications qui peuvent être apportées dans la modélisation.

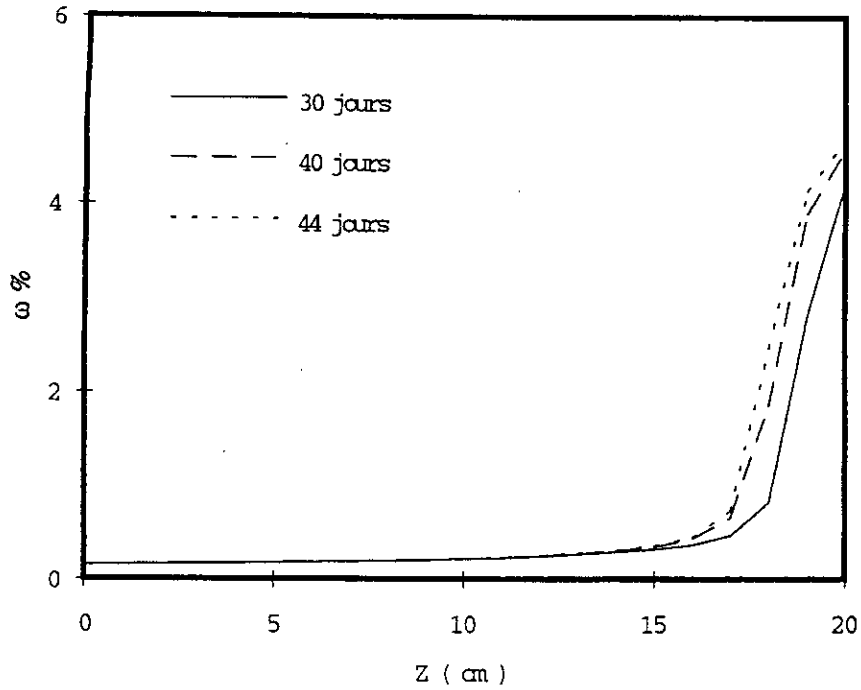


(a)

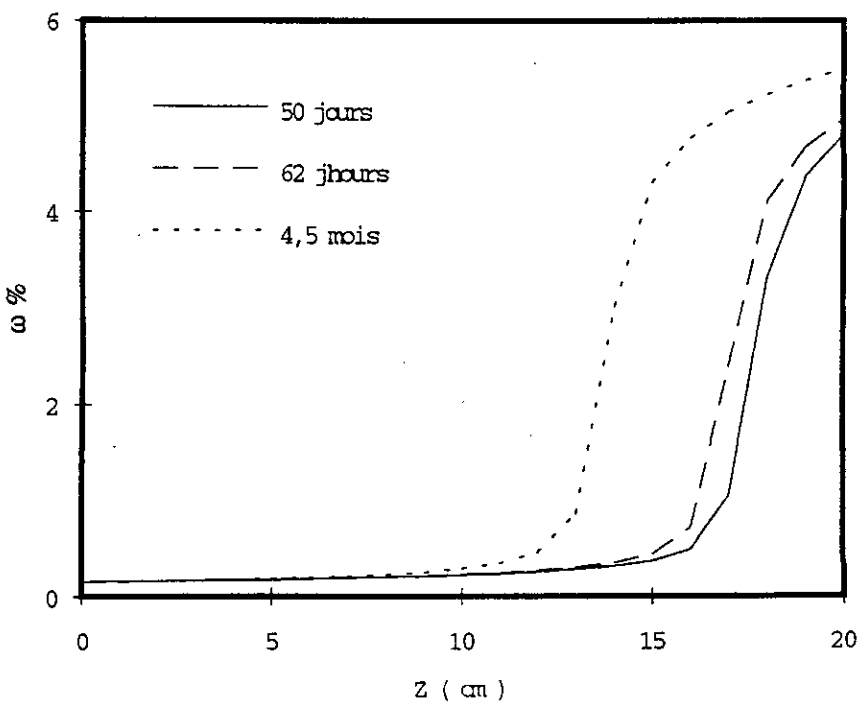


(b)

Fig. 5.1 - Distributions de l'humidité (calcul numérique)

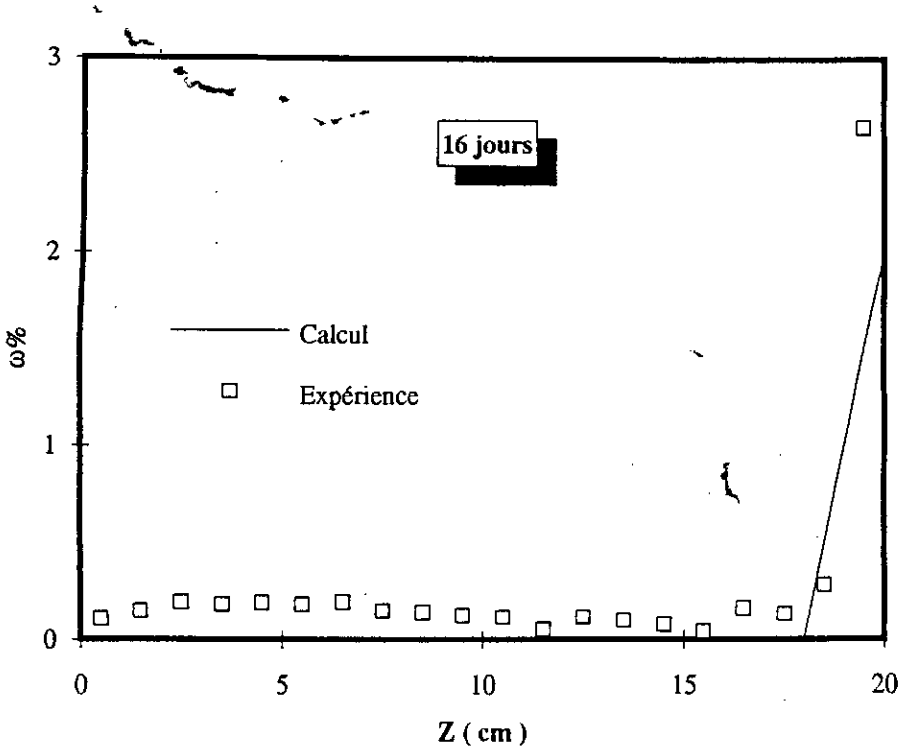


(a)

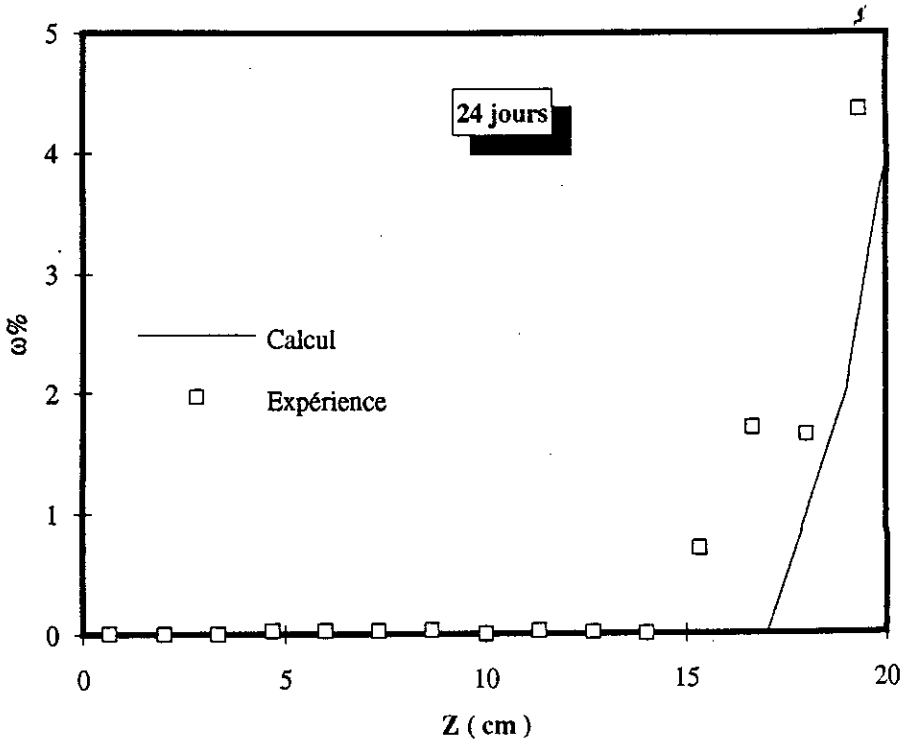


(b)

Fig. 5.2 - Distributions de l'humidité (calcul numérique)

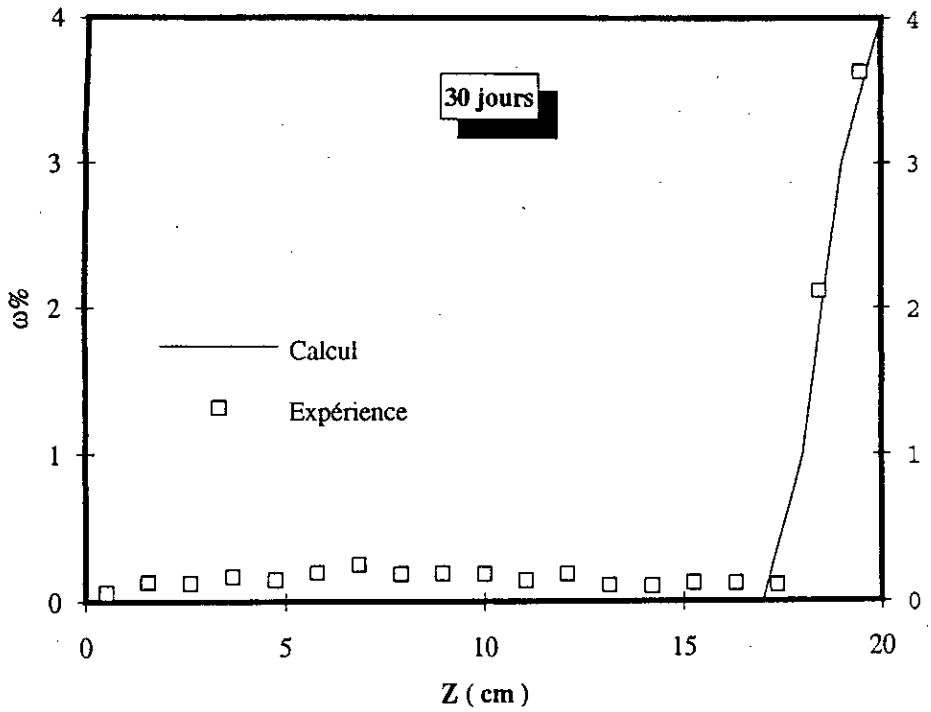


(a)

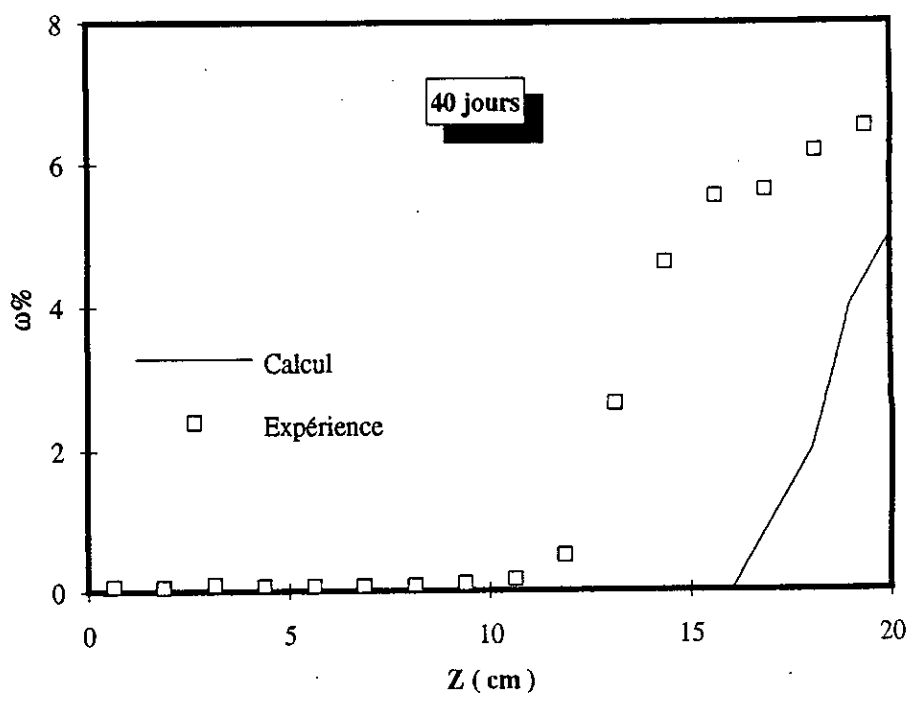


(b)

Fig. 5.3 - Distributions de l'humidité
(Comparaison Expériencce - Calcul)

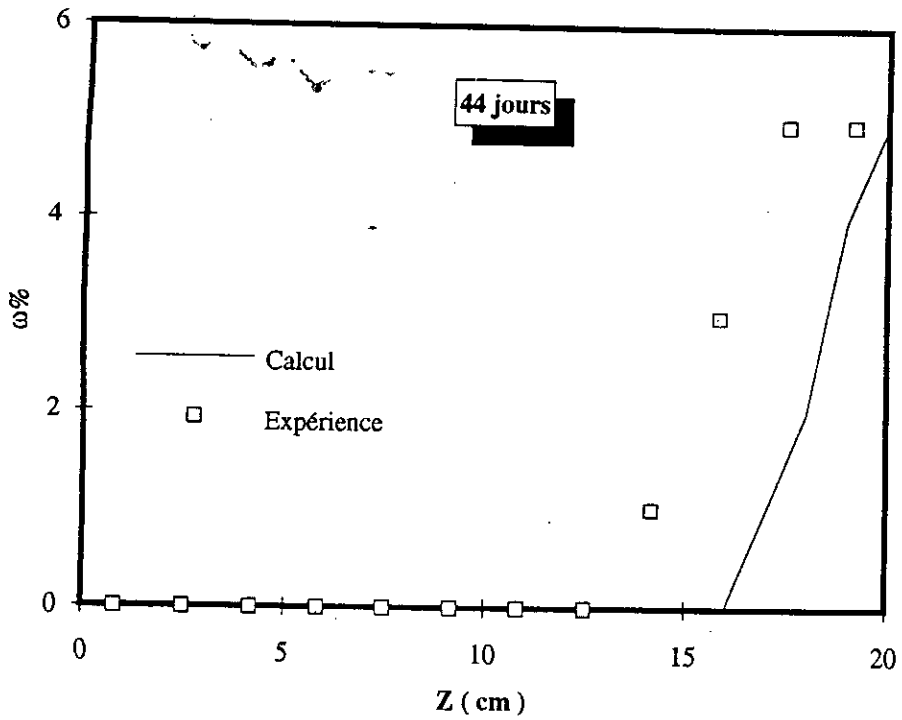


(a)

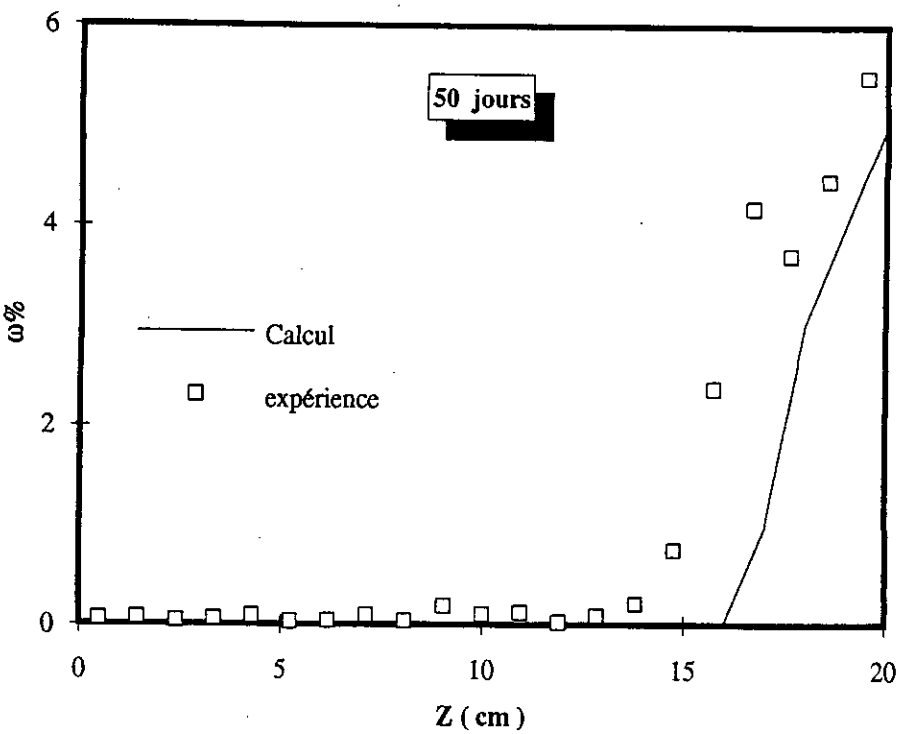


(b)

Fig. 5.4 - Distributions de l'humidité
(Comparaison Expériencce - Calcul)

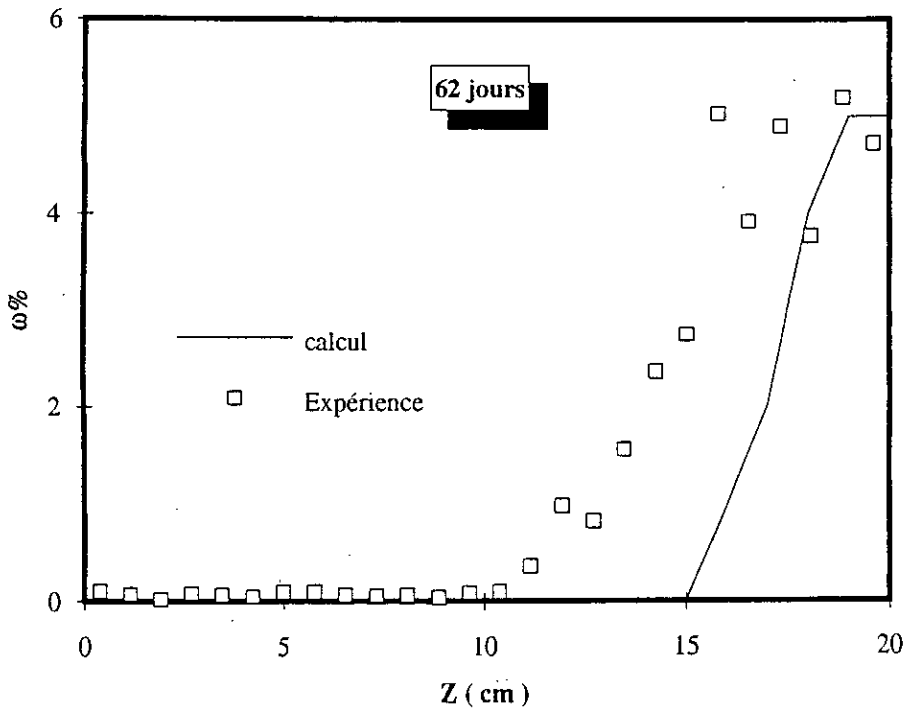


(a)

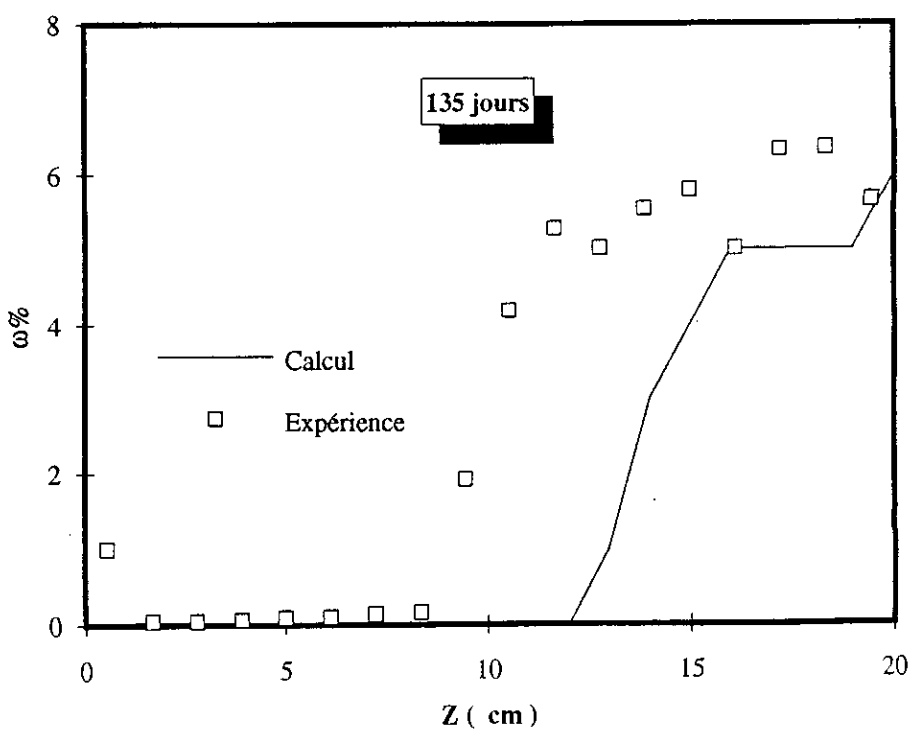


(b)

Fig. 5.5 - Distributions de l'humidité
(Comparaison Expériencce - Calcul)

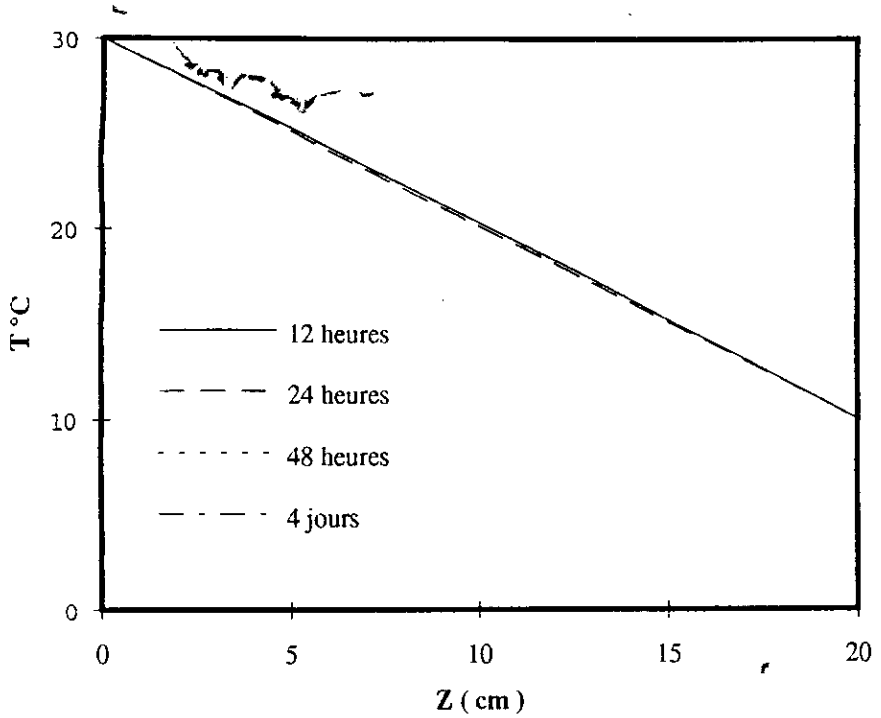


(a)

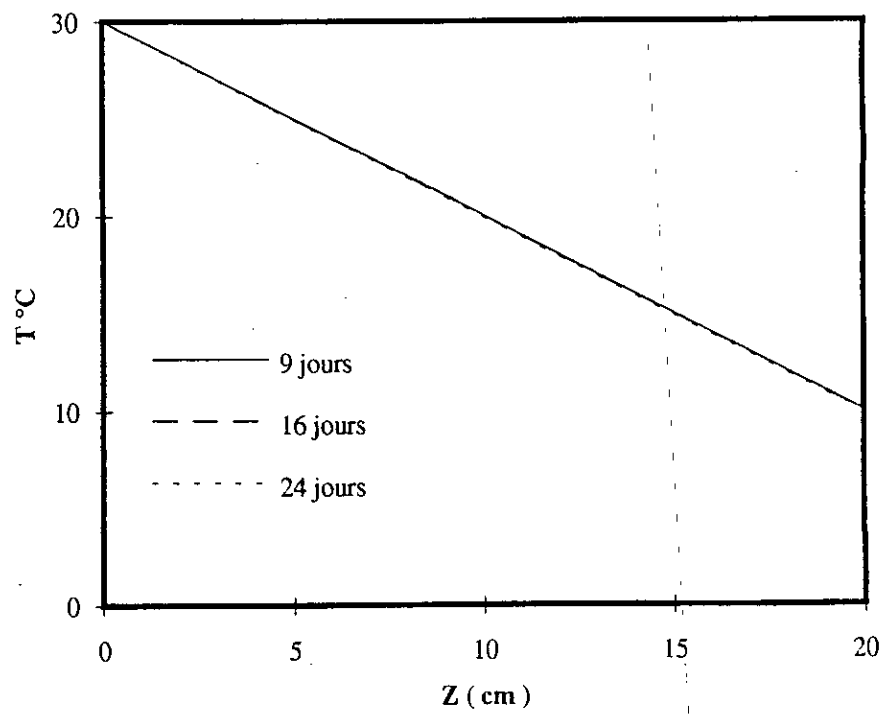


(b)

Fig. 5.6 - Distributions de l'humidité
(Comparaison Expérienccе - Calcul)

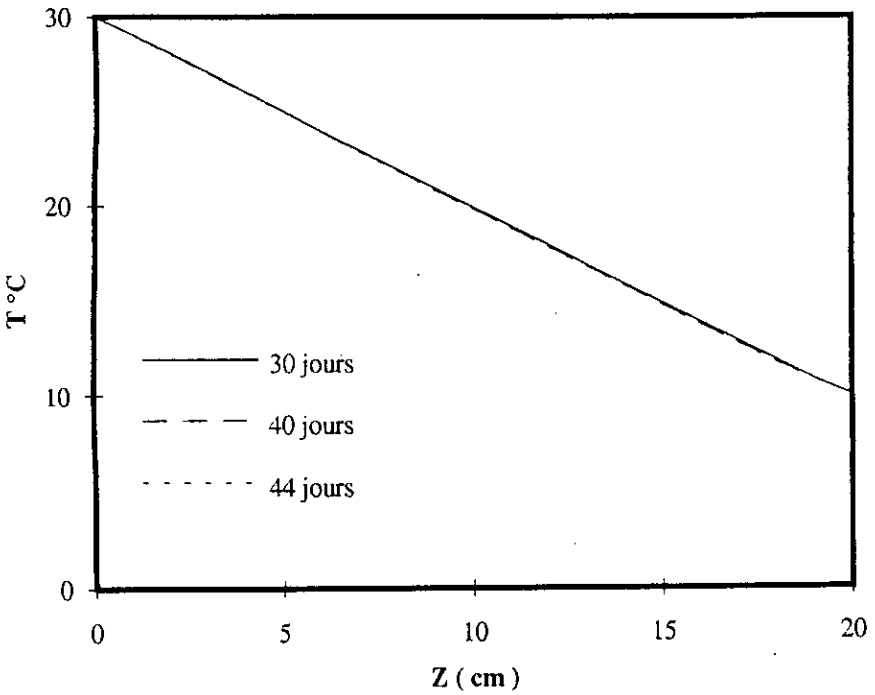


(a)

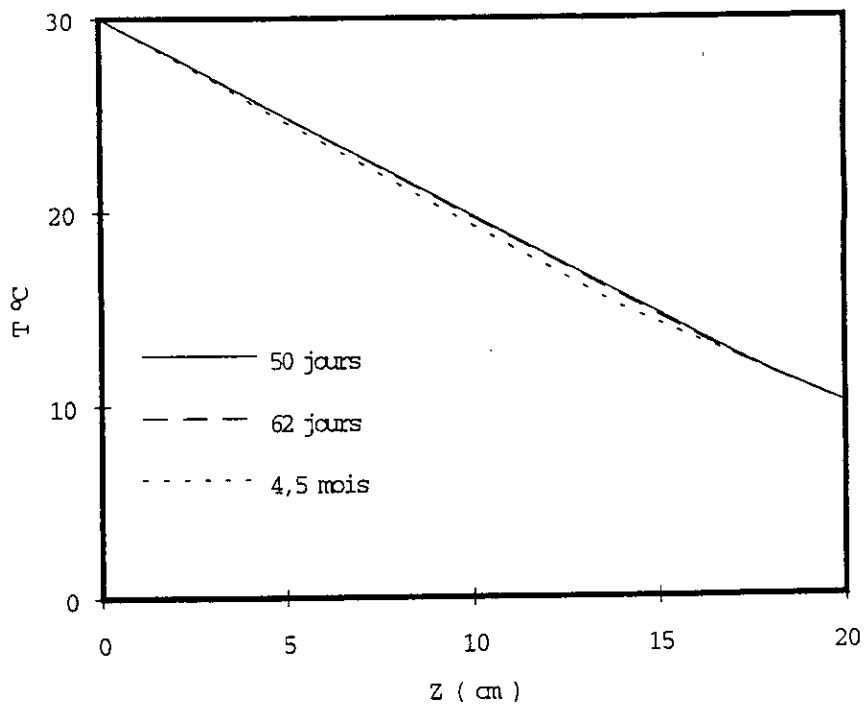


(b)

Fig. 5.7 - Distributions de la température (calcul numérique)

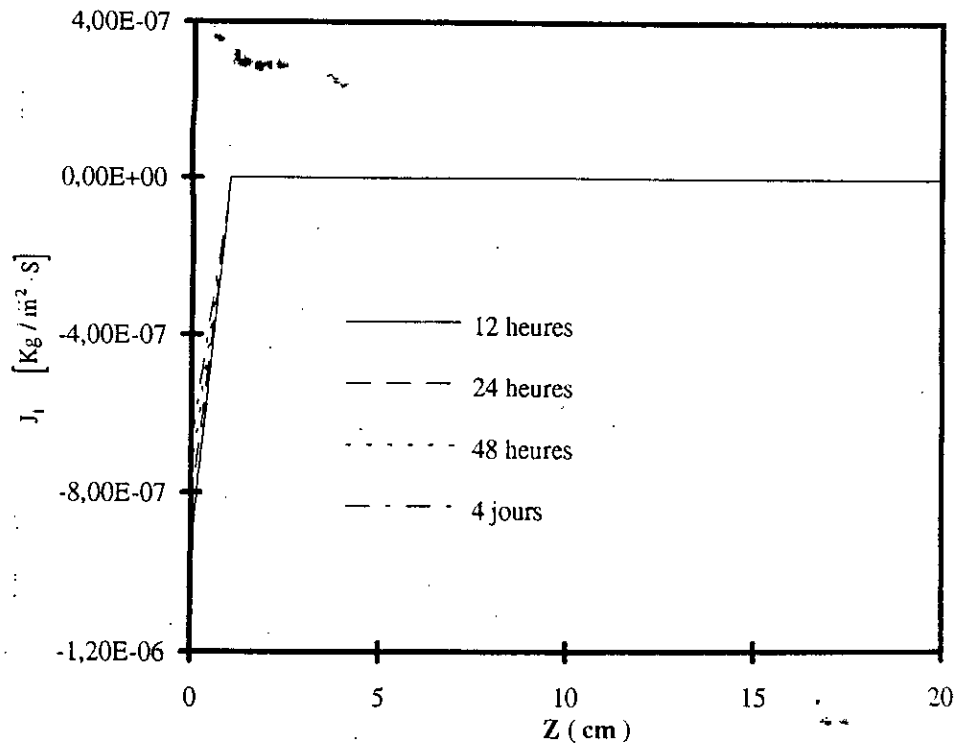


(a)

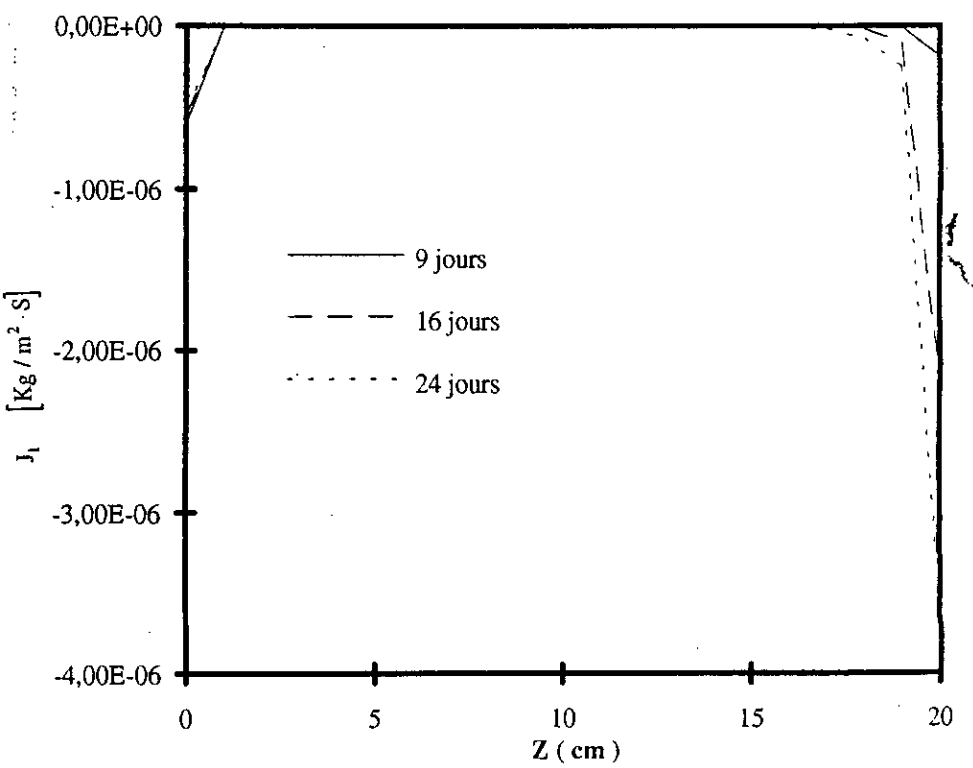


(b)

Fig. 5.8 - Distributions de la température (calcul numérique)

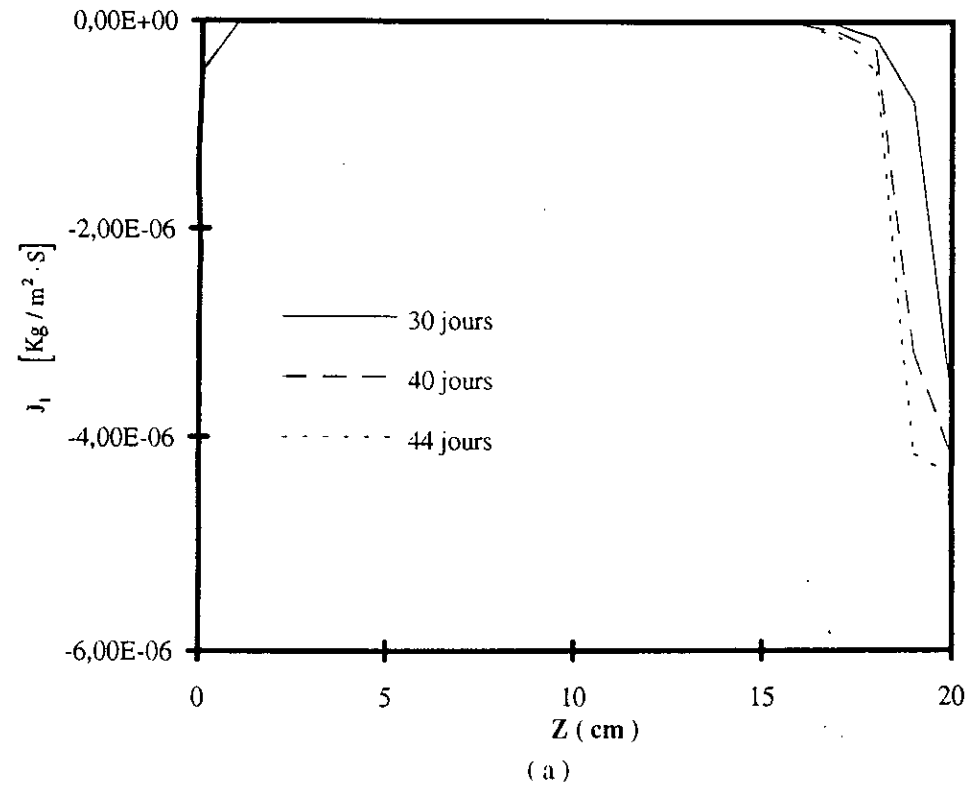


(a)

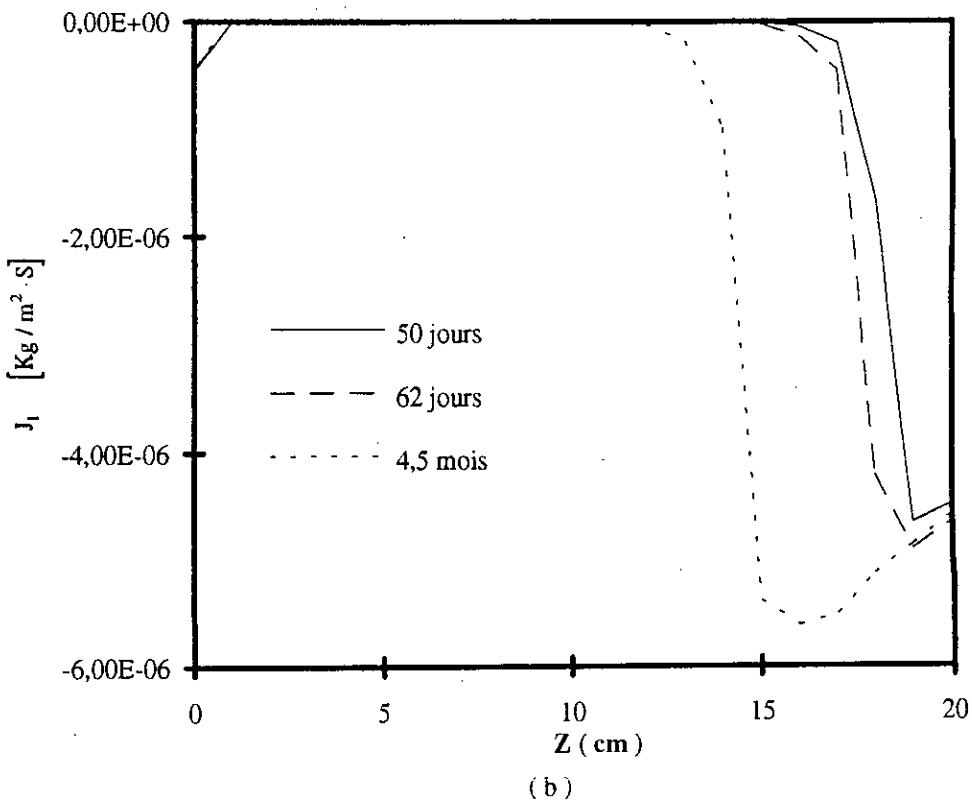


(b)

Fig. 5.9 - Distributions de la densité de flux en phase liquide

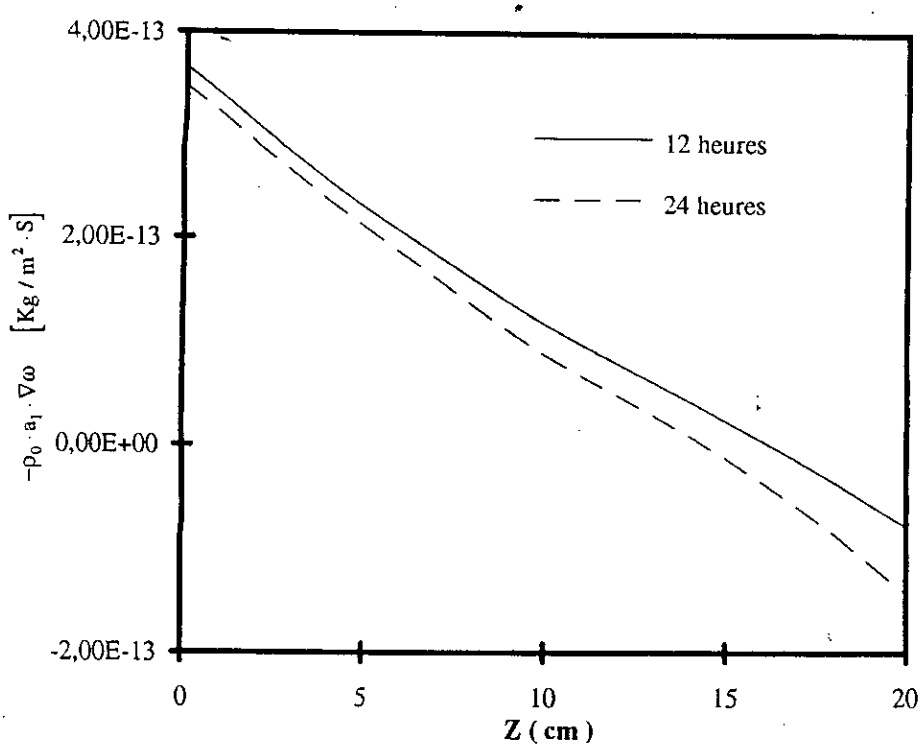


(a)

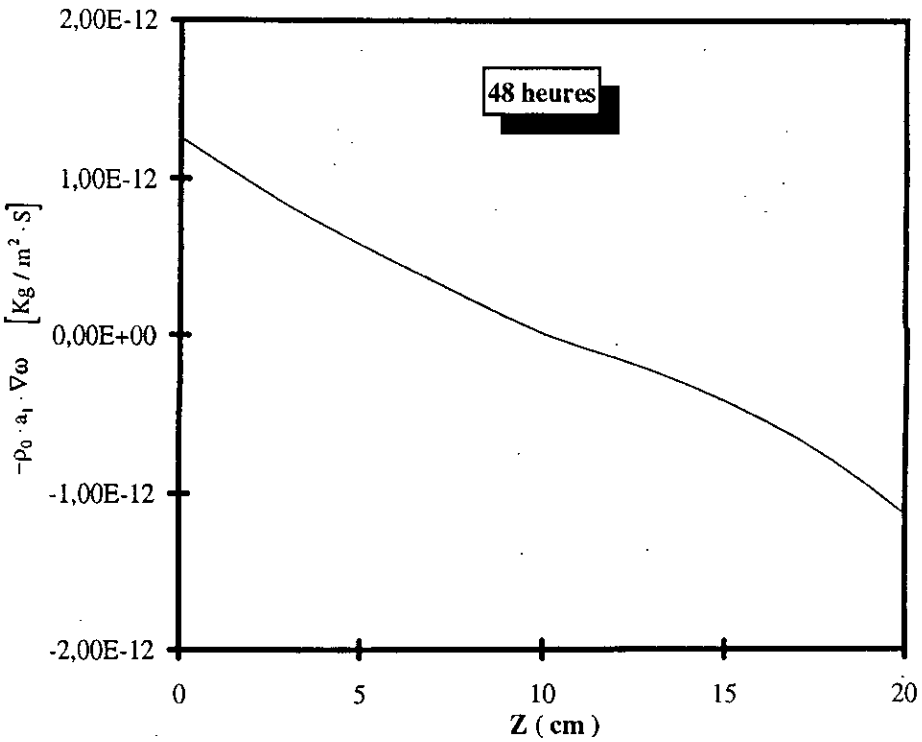


(b)

Fig. 5.10 - Distributions de la densité de flux en phase liquide

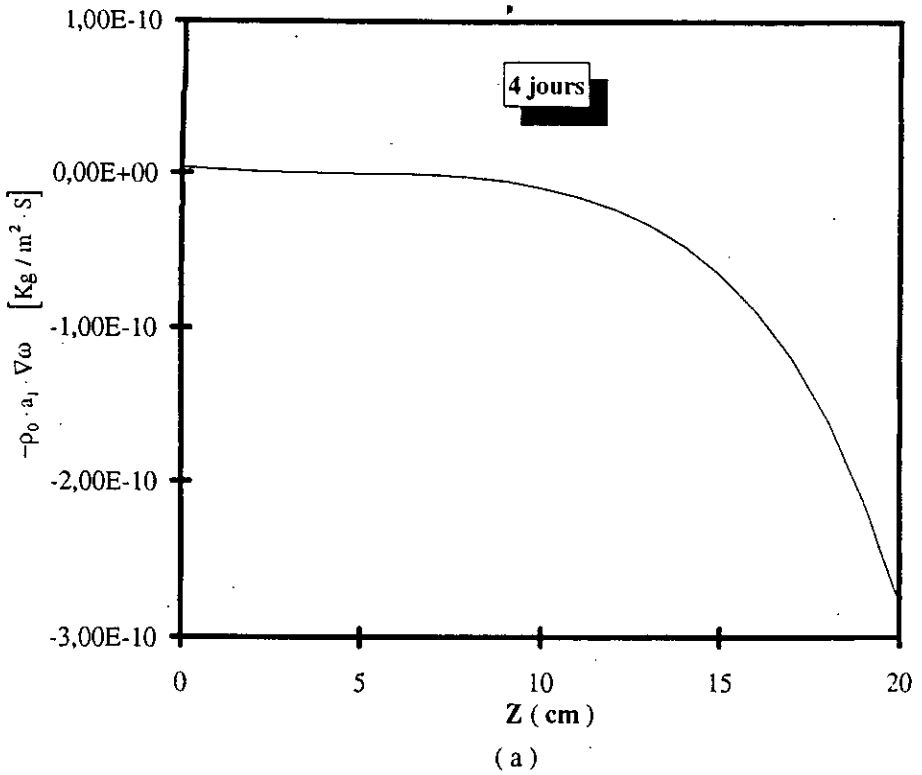


(a)

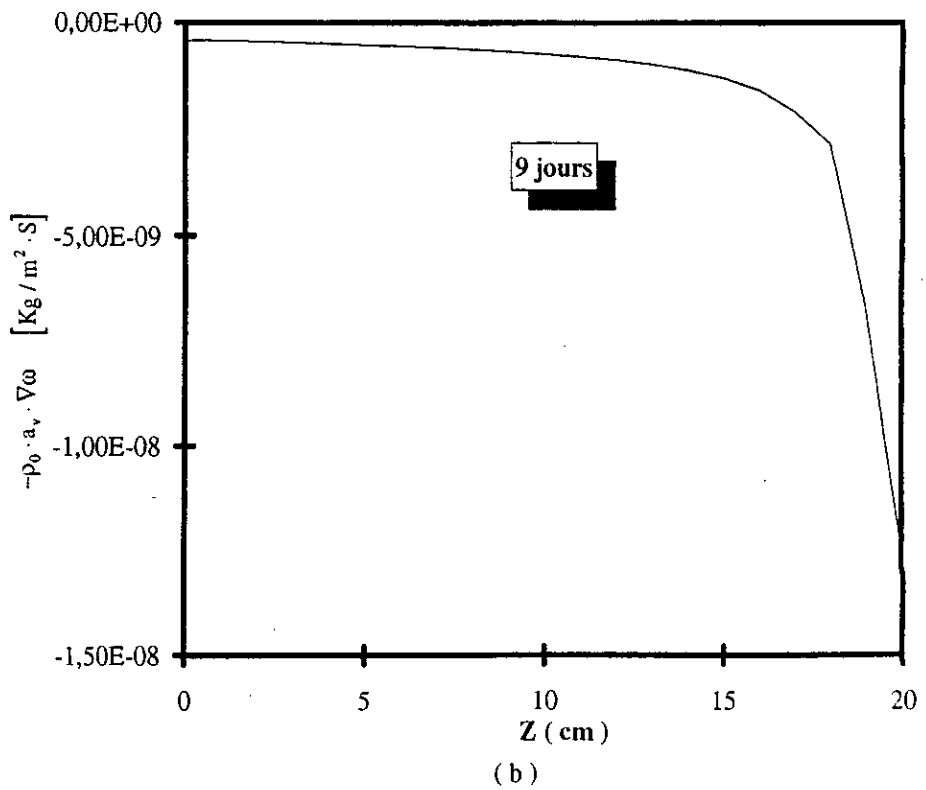


(b)

Fig. 5.11 -Distributions de la densité de flux en phase liquide due au gradient d'humidité.

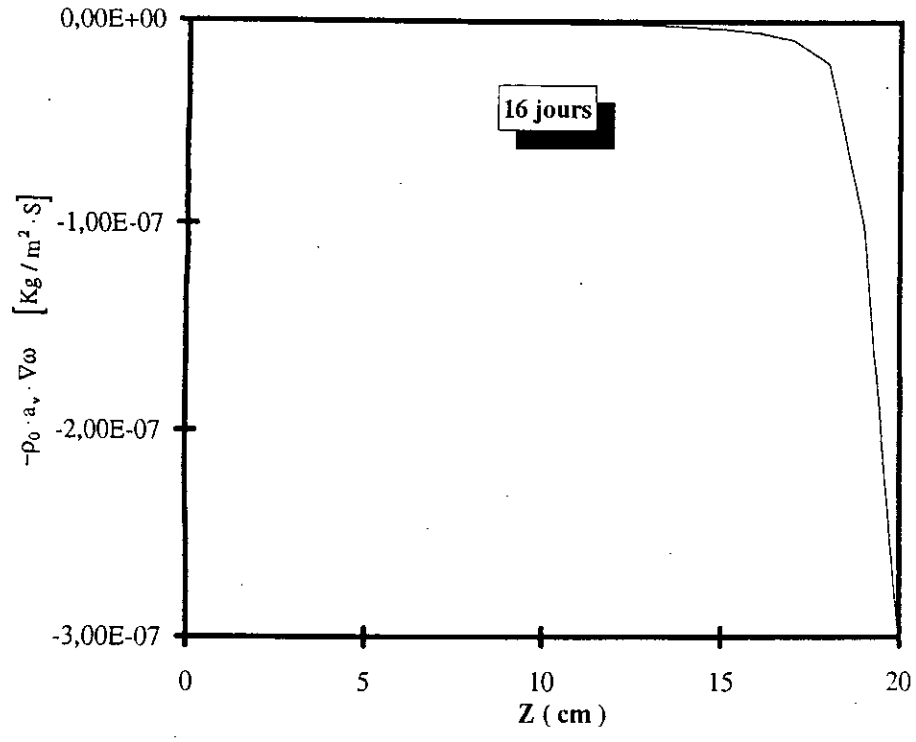


(a)

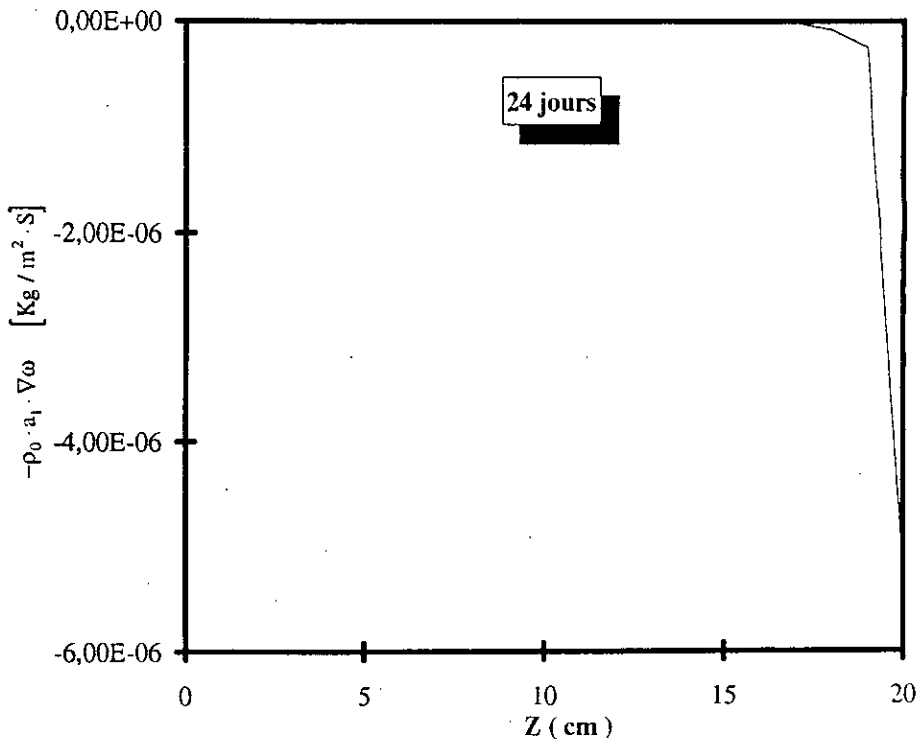


(b)

Fig. 5.12 -Distributions de la densité de flux en phase liquide due au gradient d'humidité.

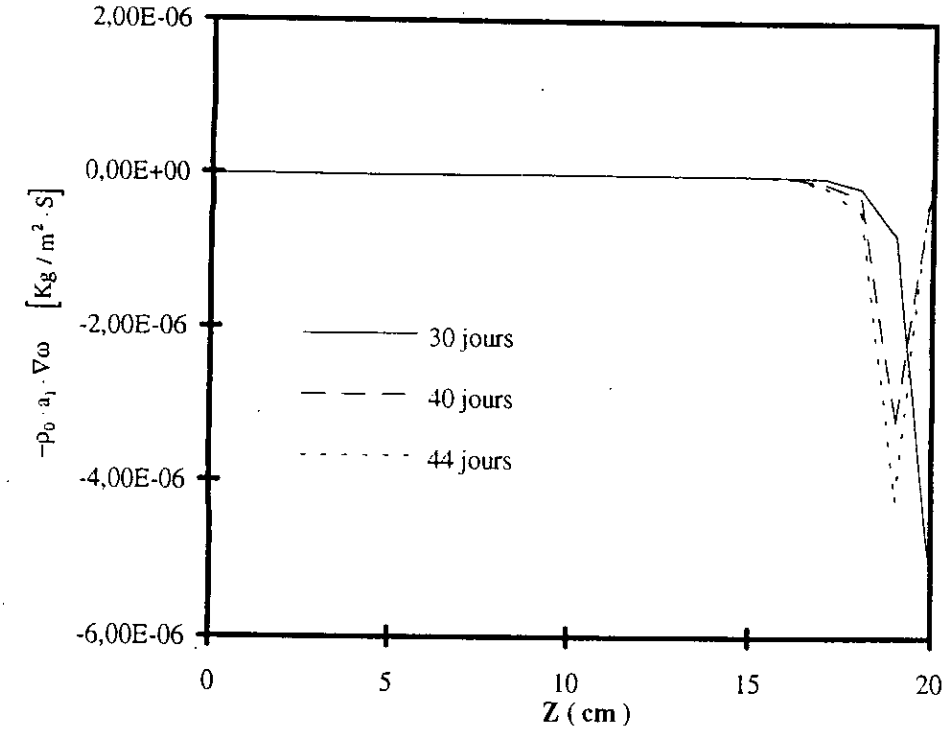


(a)

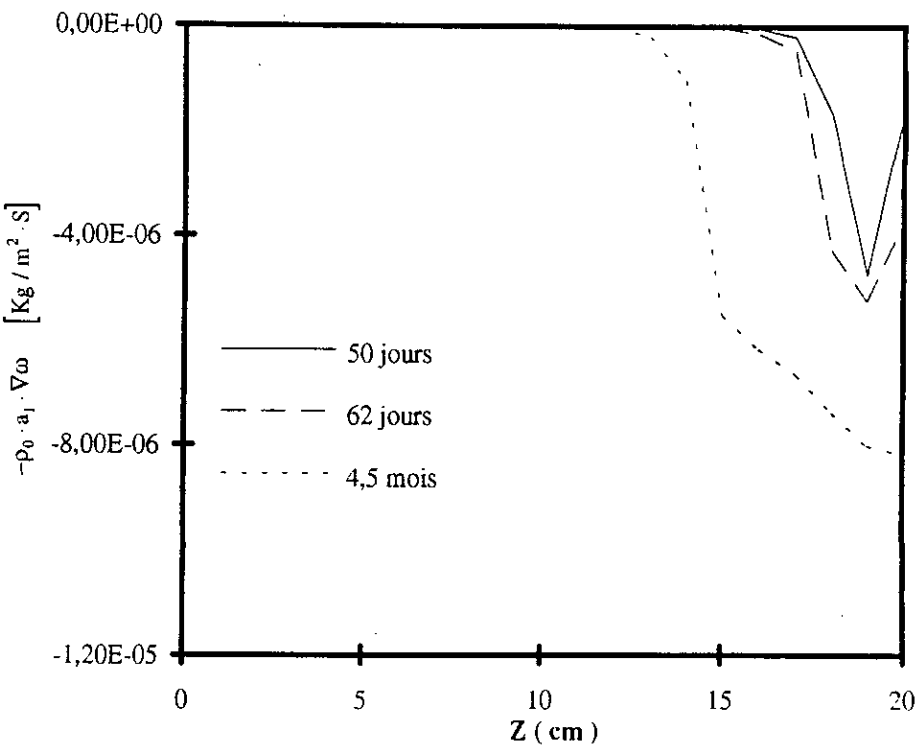


(b)

Fig. 5.13 -Distributions de la densité de flux en phase liquide due au gradient d'humidité.

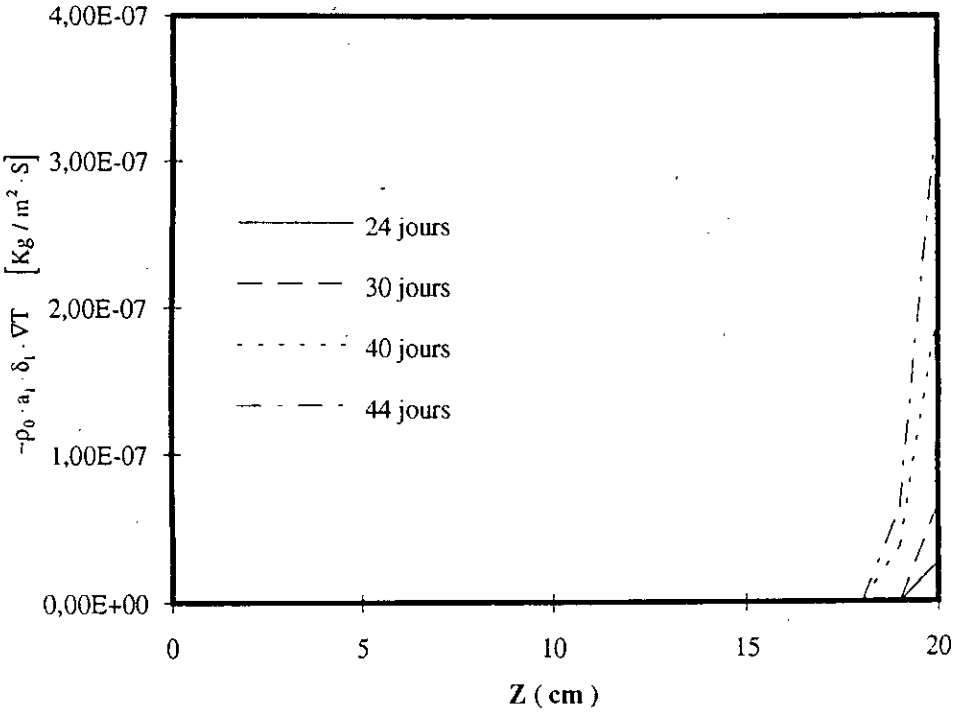


(a)

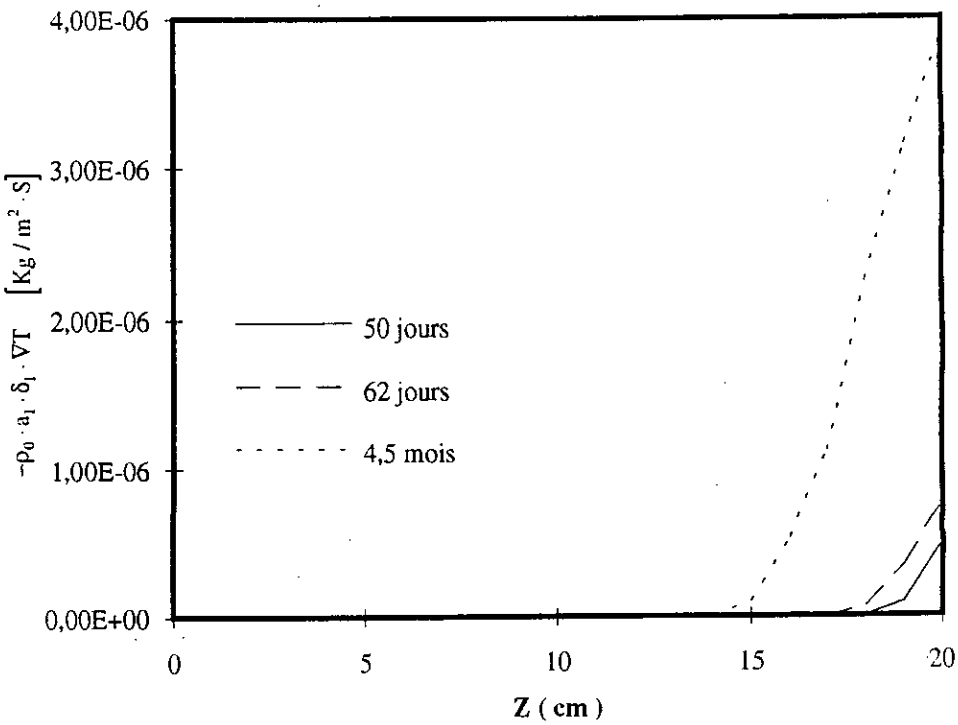


(b)

Fig. 5.14 -Distributions de la densité de flux en phase liquide due au gradient d'humidité.

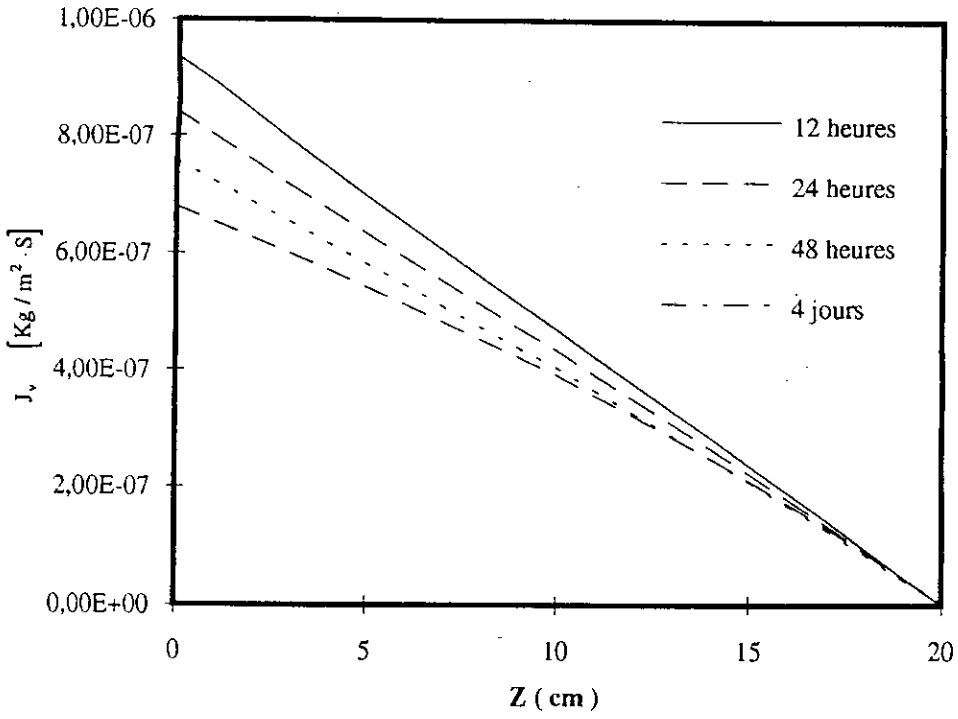


(a)

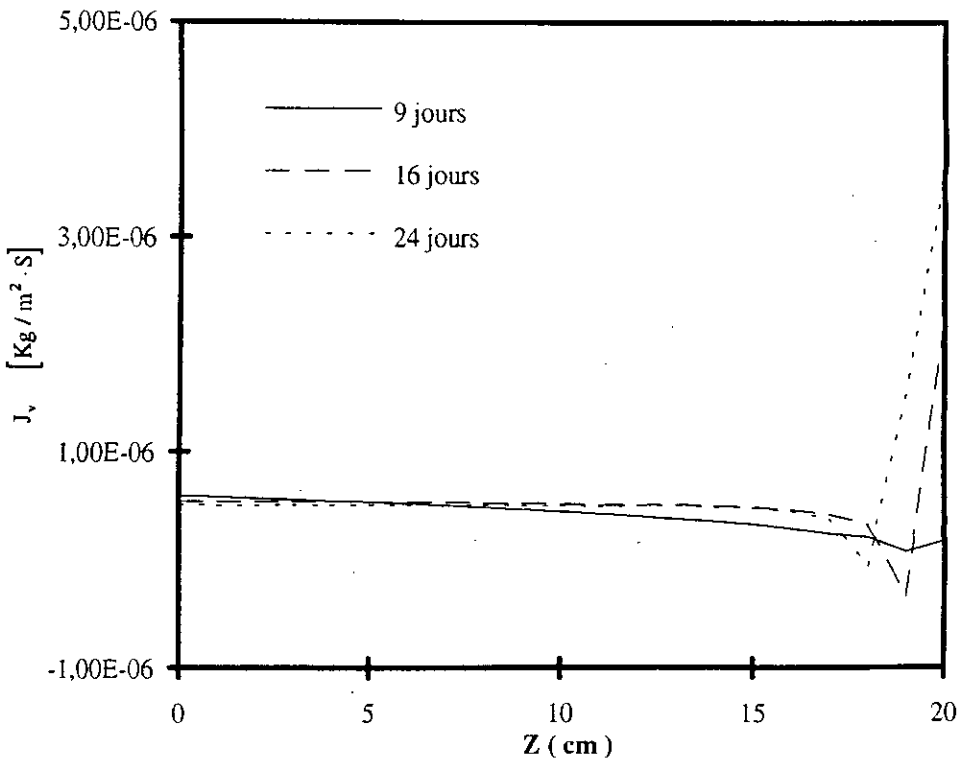


(b)

Fg. 5.15 Distributions de la densité de flux en phase liquide due au gradient thermique

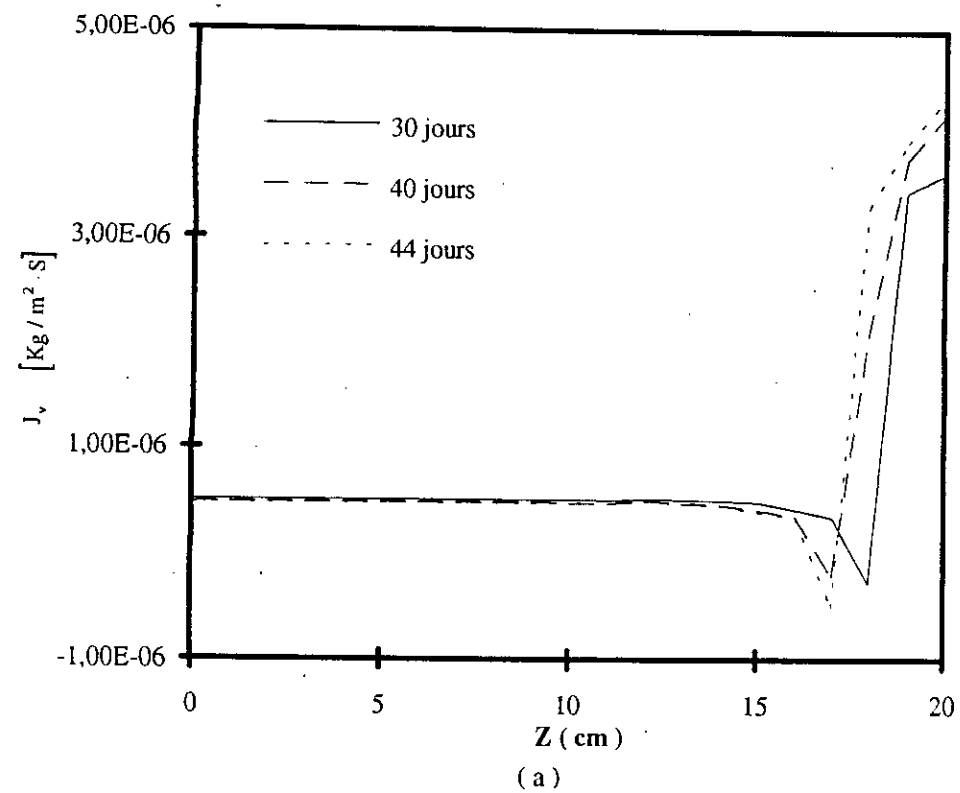


(a)

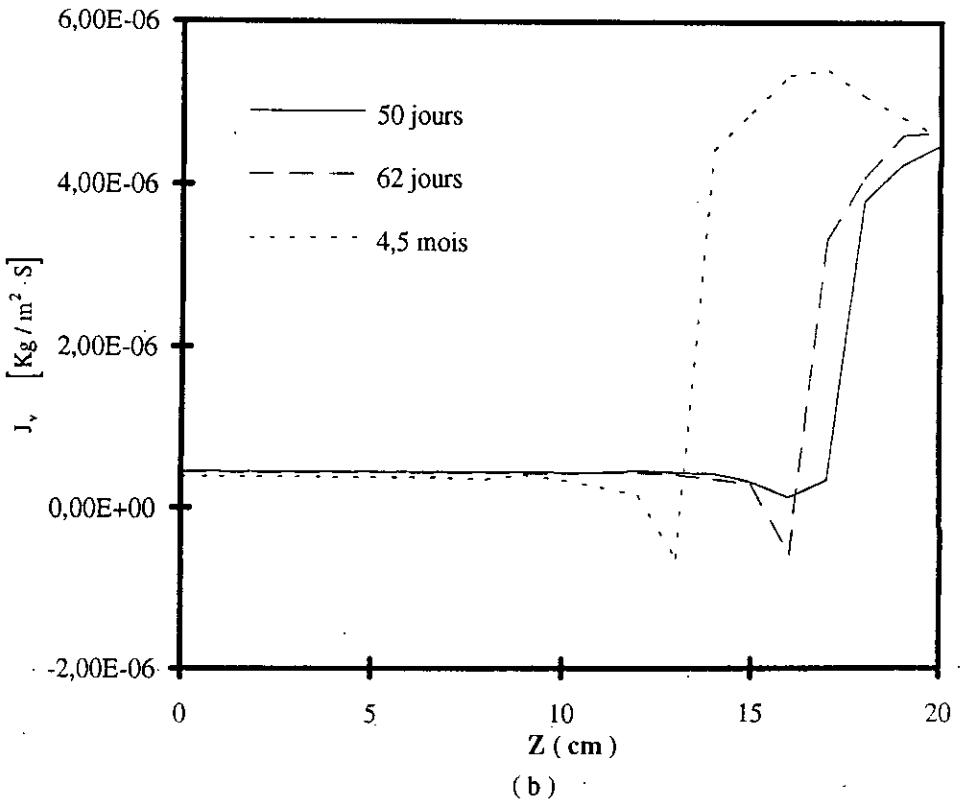


(b)

Fig. 5.16 - Distributions de la densité de flux en phase vapeur

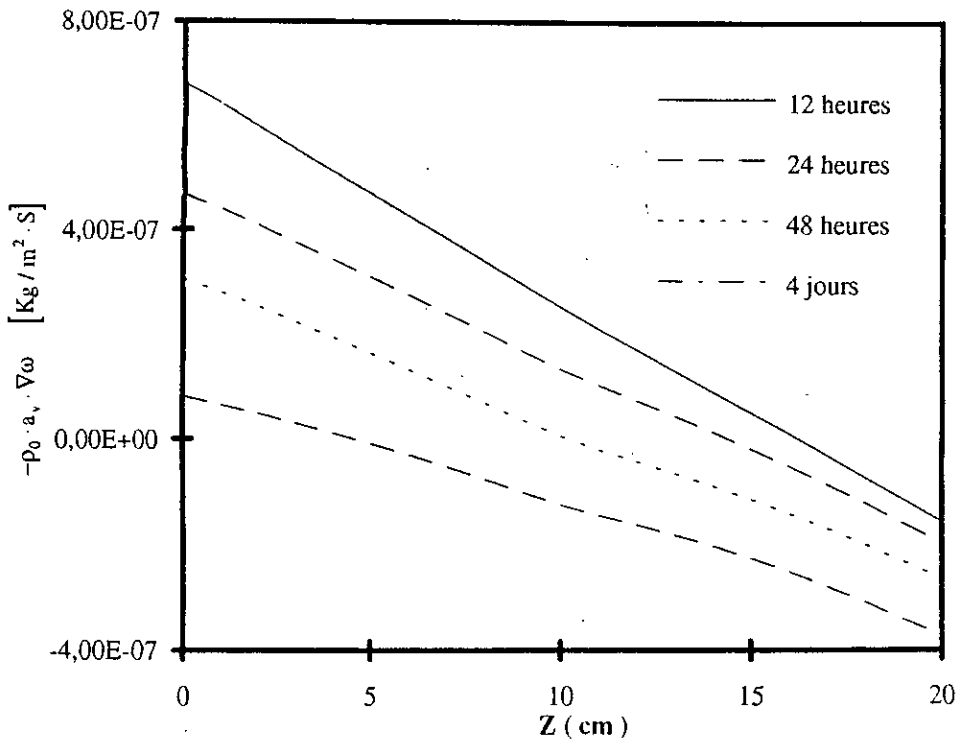


(a)

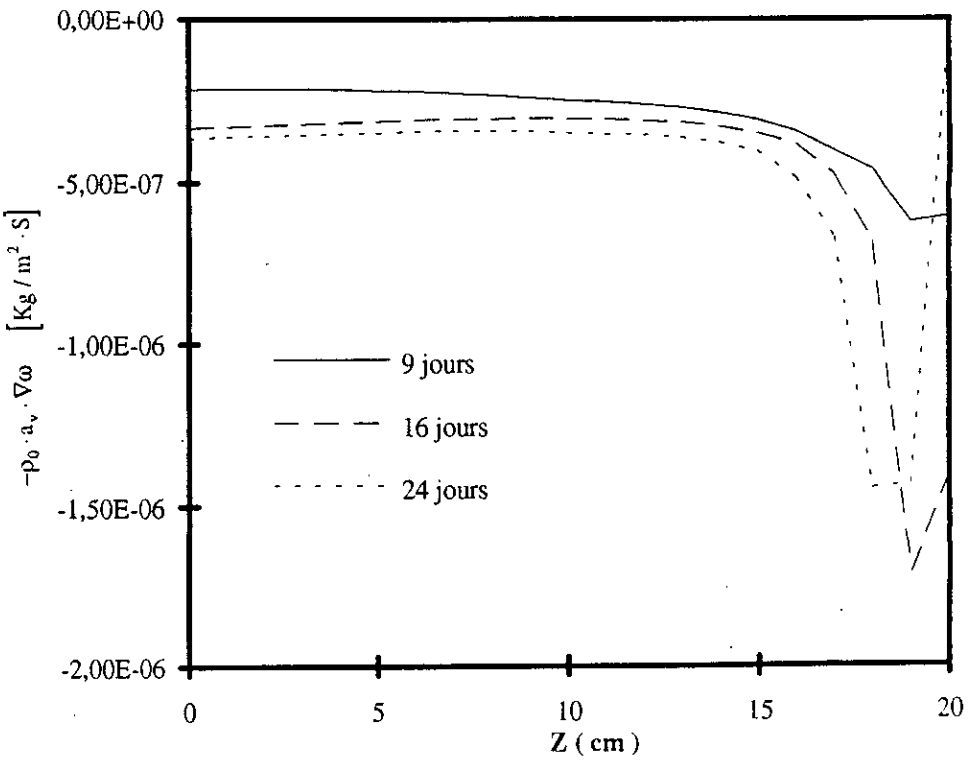


(b)

Fig. 5.17 - Distributions de la densité de flux en phase vapeur

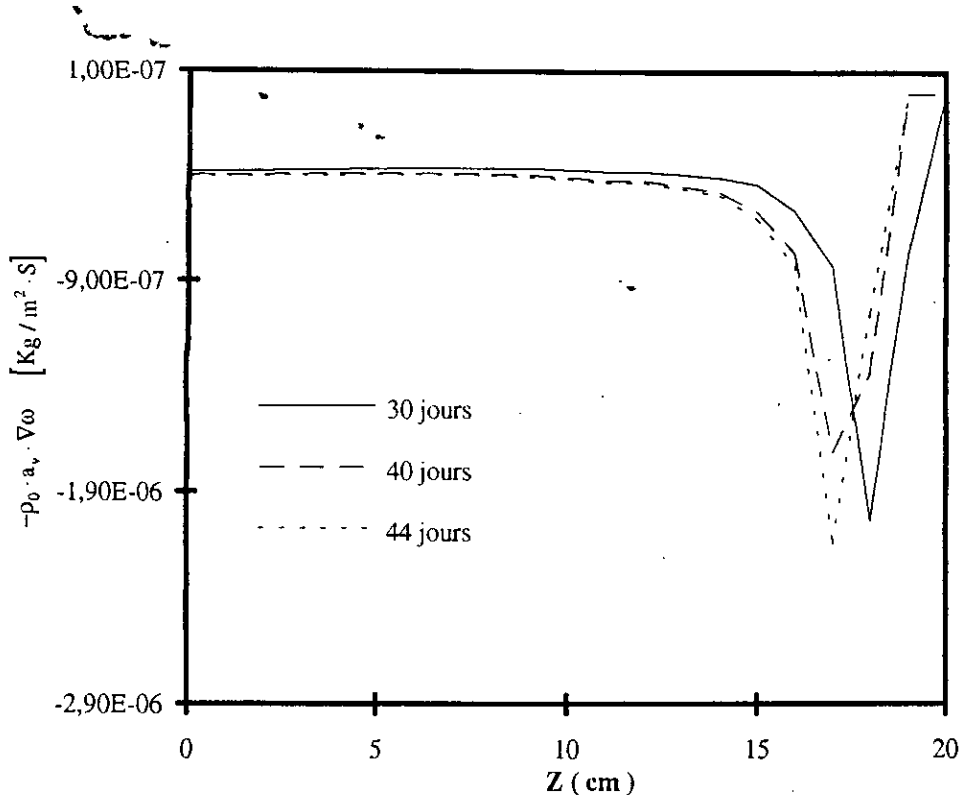


(a)

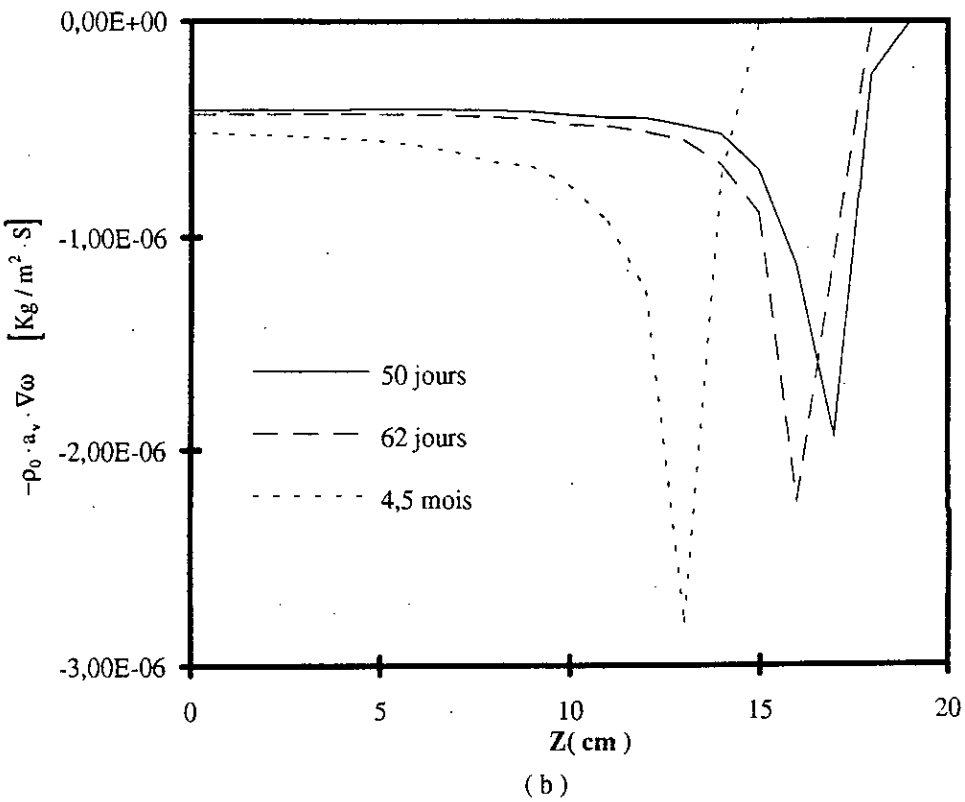


(b)

Fig. 5.18 - Distributions de la densité de flux en phse vapeur due au gradient d'humidité

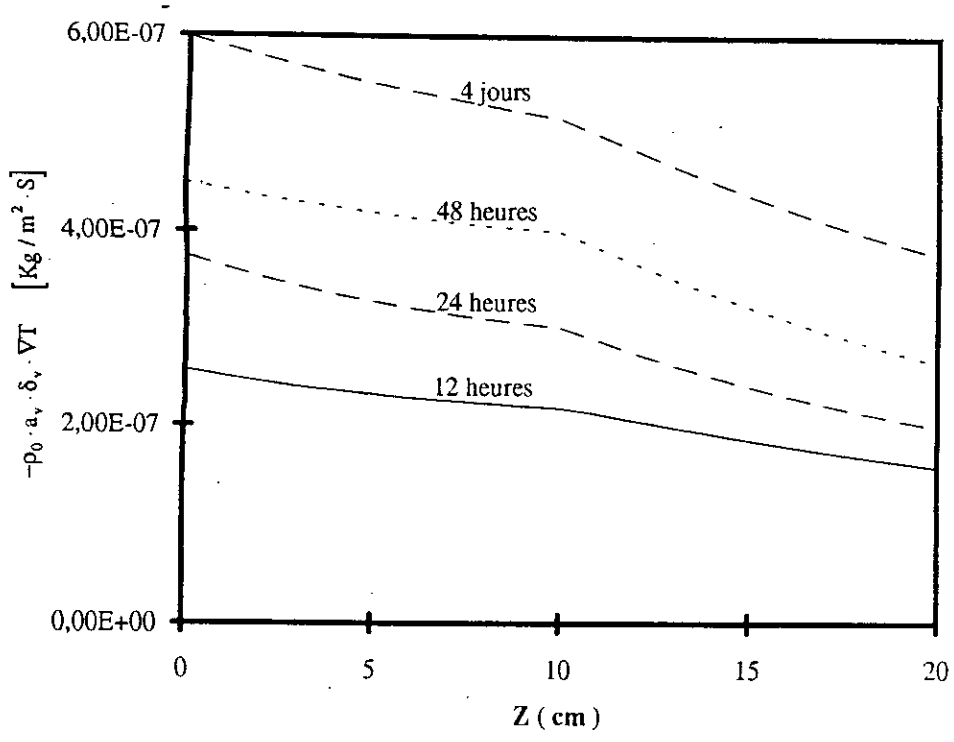


(a)

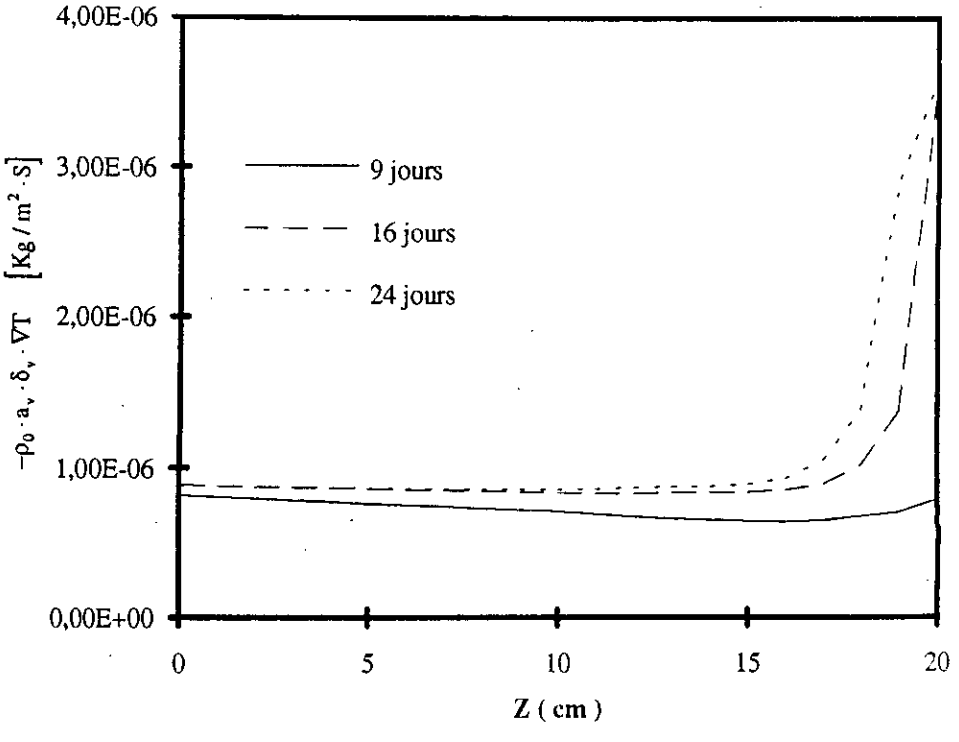


(b)

Fig. 5.19 - Distributions de la densité de flux en phse vapeur due au gradient d'humidité

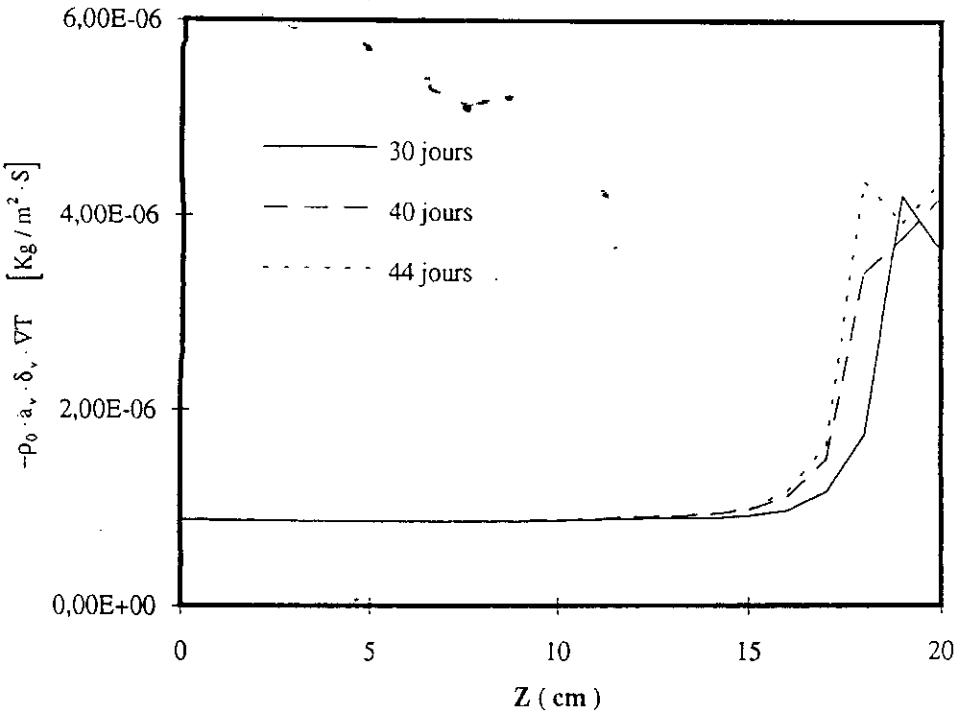


(a)

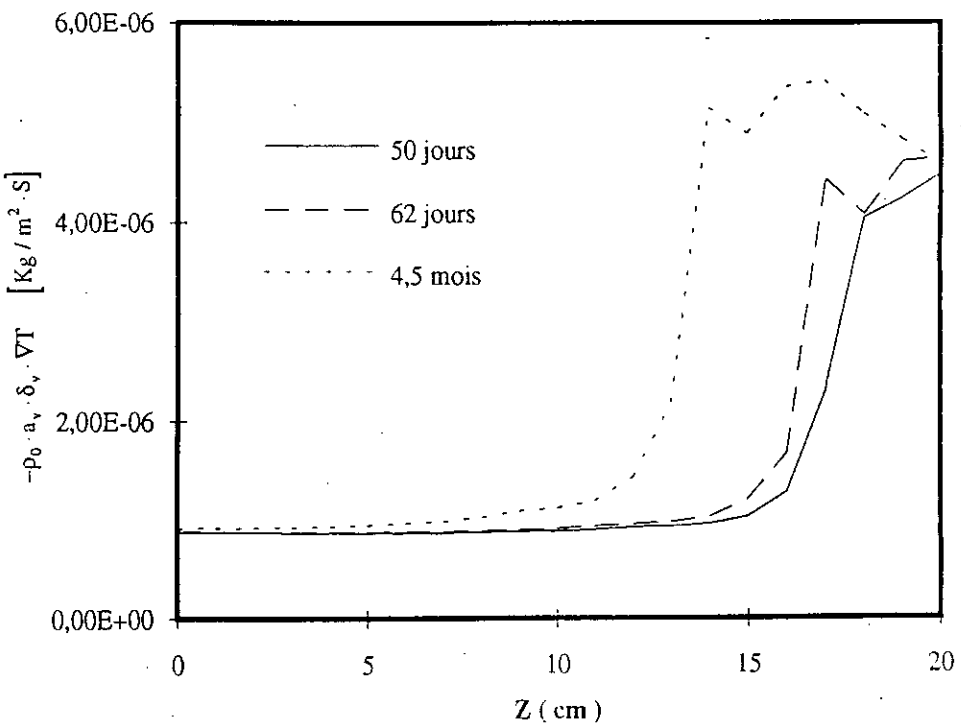


(b)

Fig. 5.20 - Distributions de la densité de flux en phase vapeur due au gradient thermique

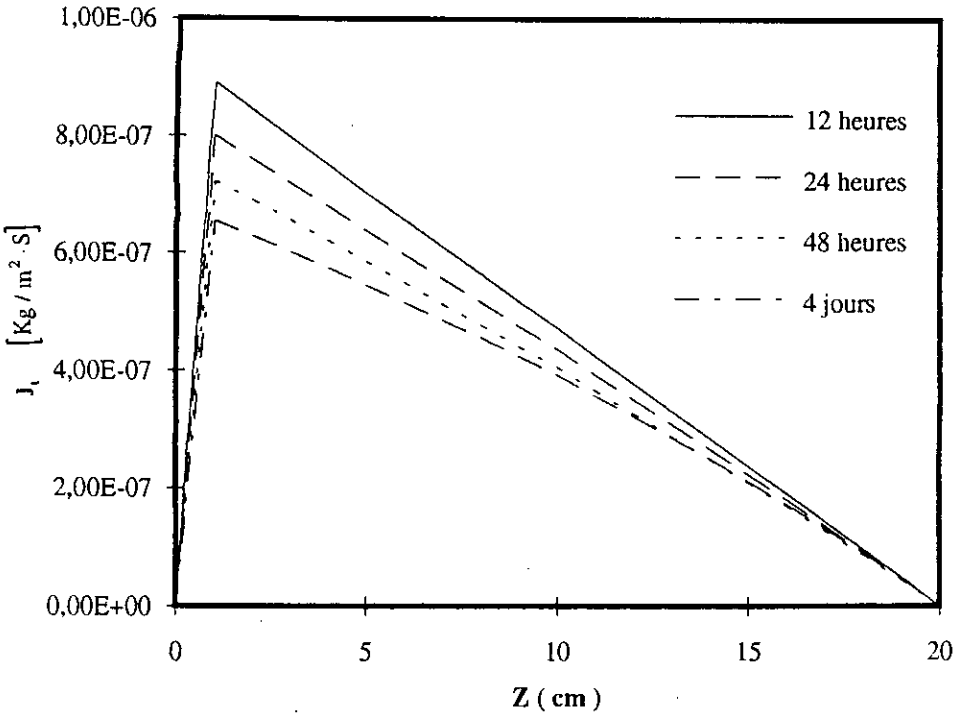


(a)

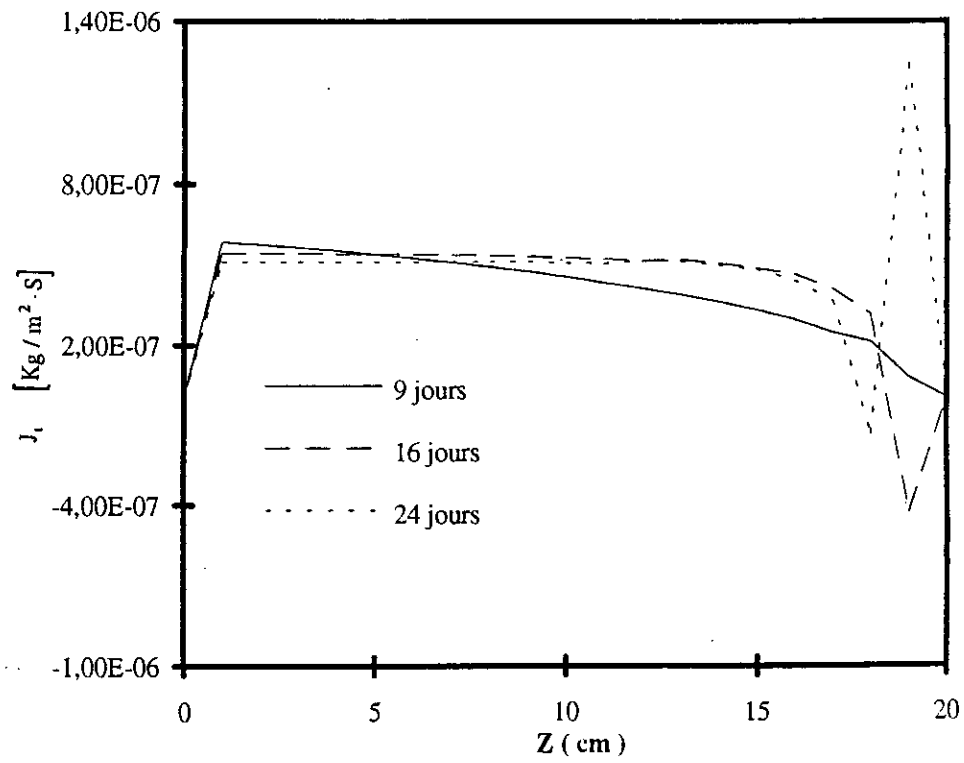


(b)

Fig. 5.21 - Distributions de la densité de flux en phase vapeur due au gradient thermique

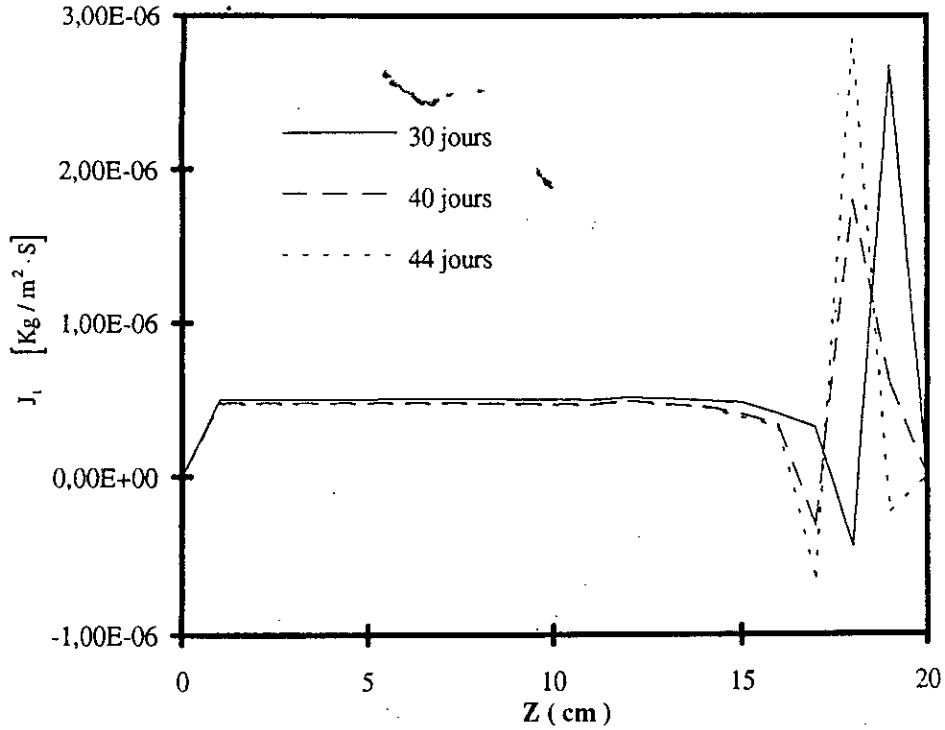


(a)

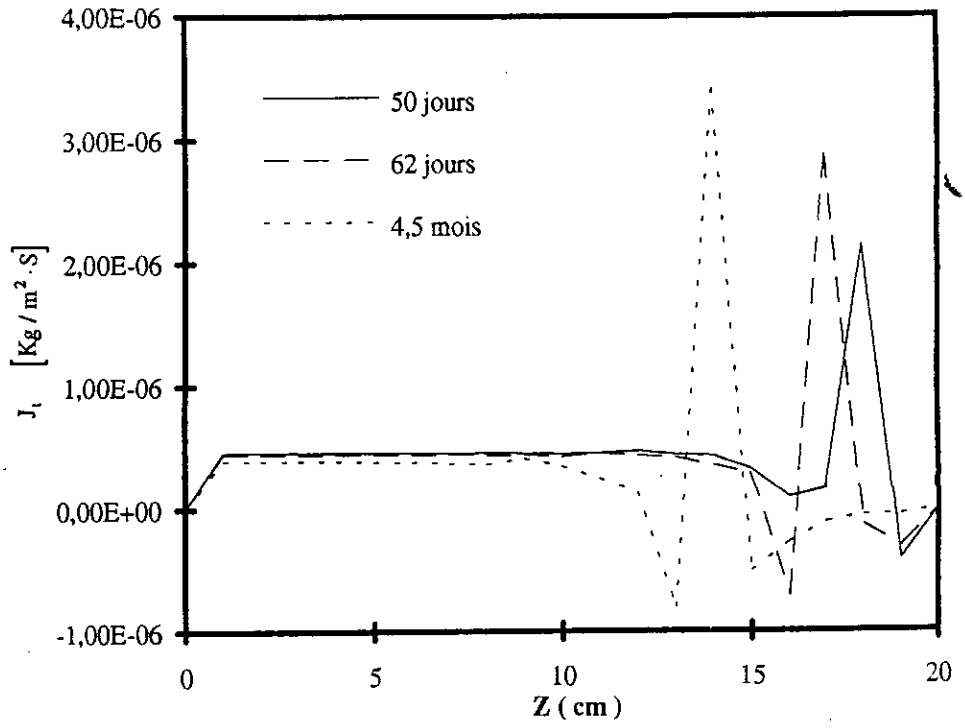


(b)

Fig. 5.22 - Distributions de la densité de flux de masse totale

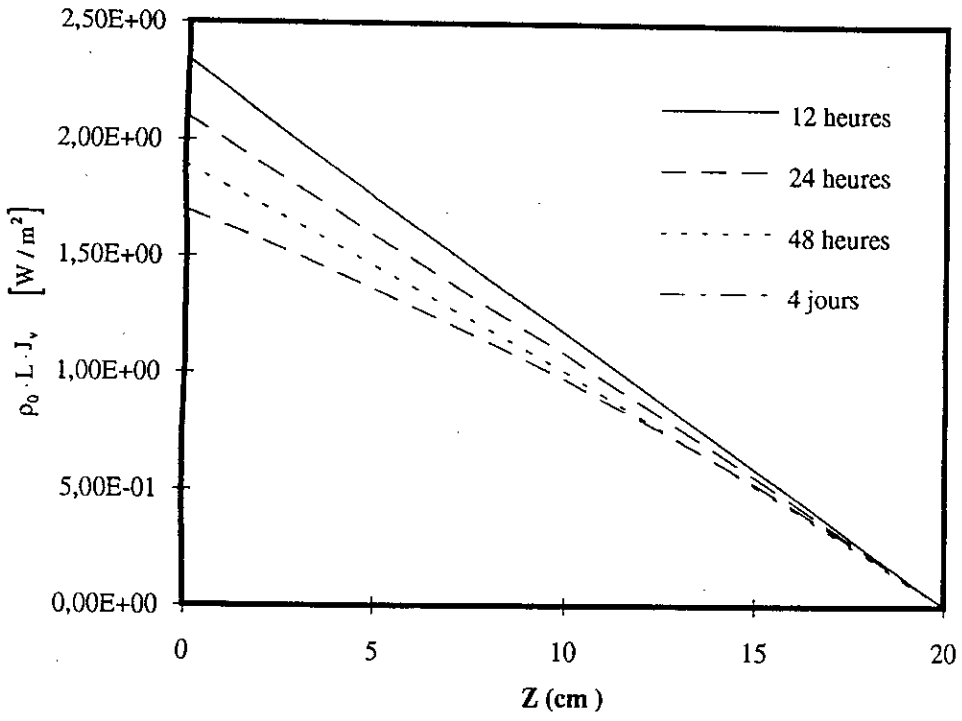


(a)

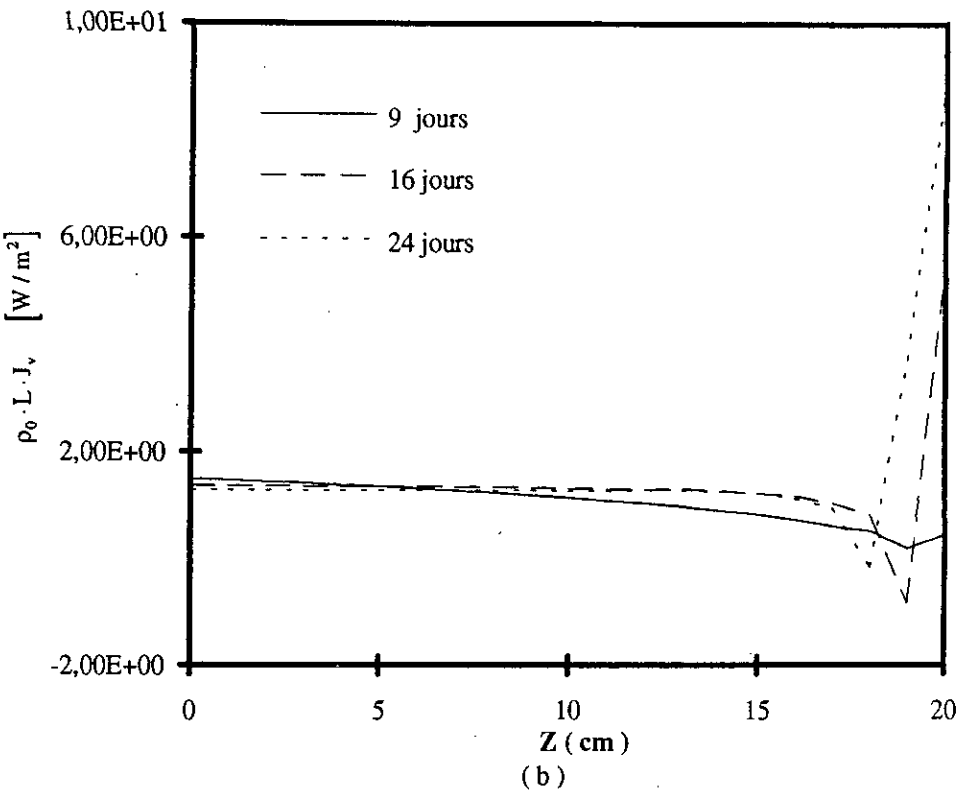


(d)

Fig. 5.23 - Distributions de la densité de flux de masse totale

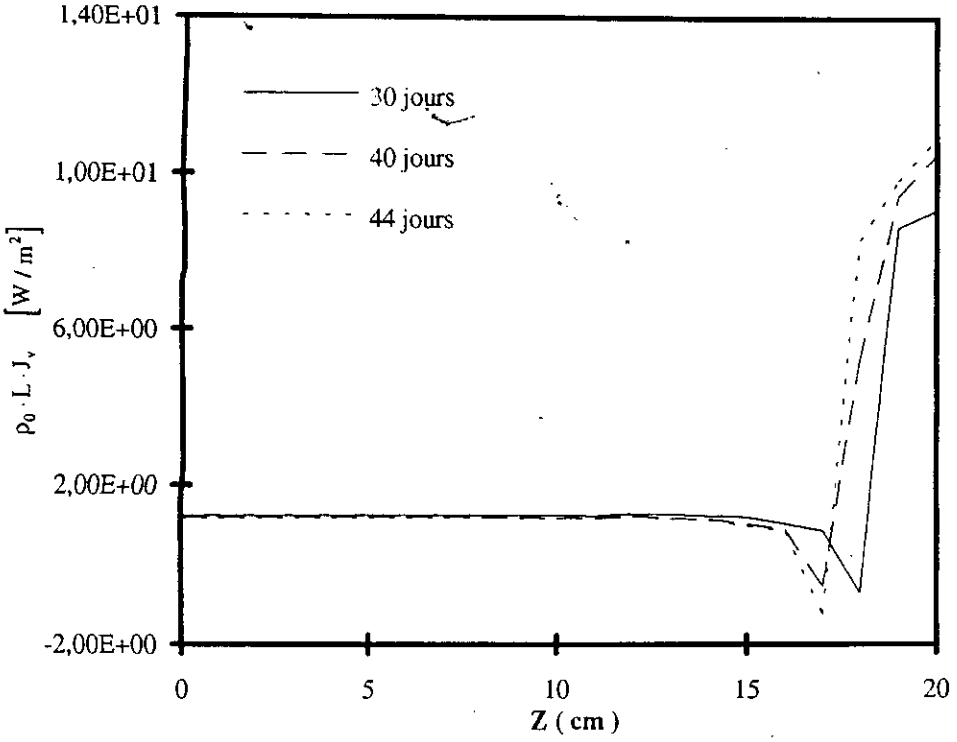


(a)

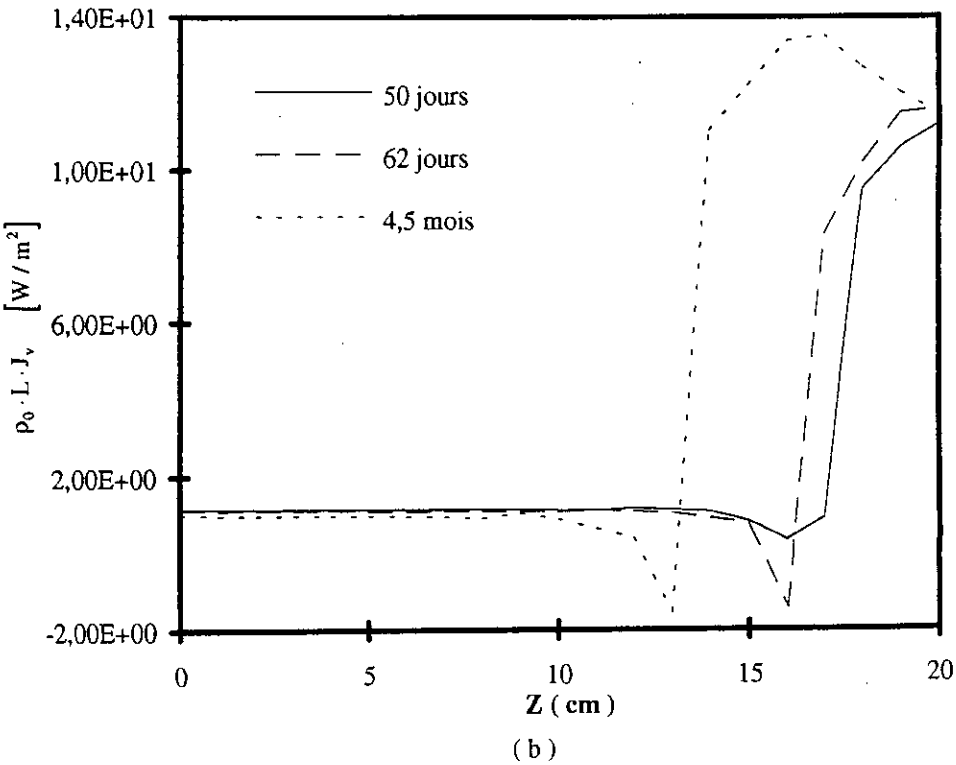


(b)

Fig. 5.24 - Distributions de la densité de flux de chaleur due au changement de phase

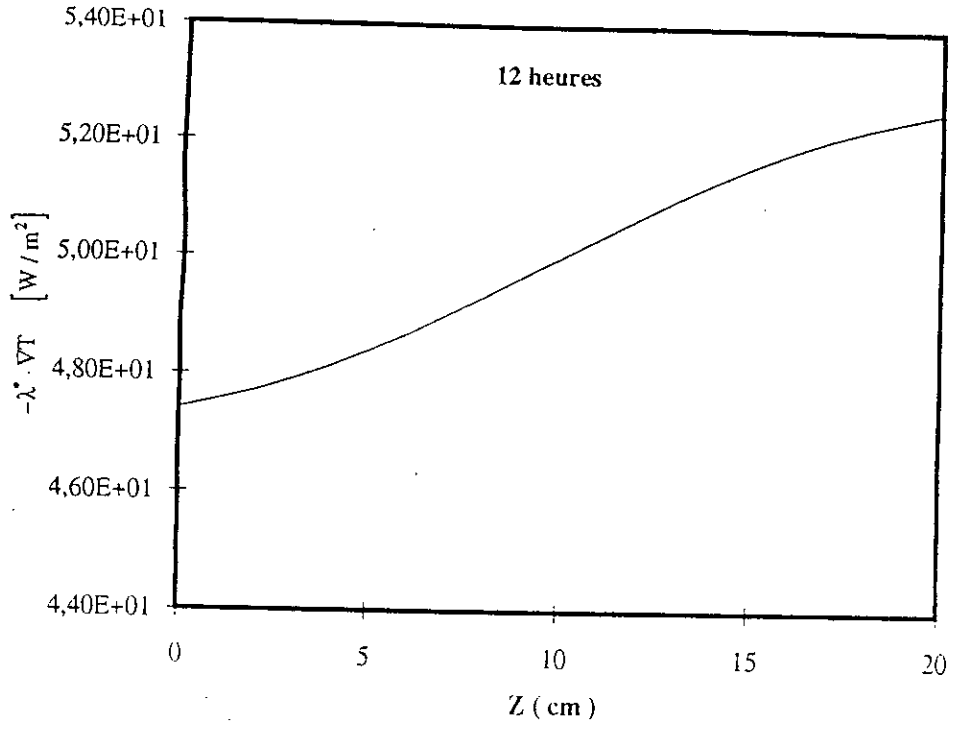


(a)

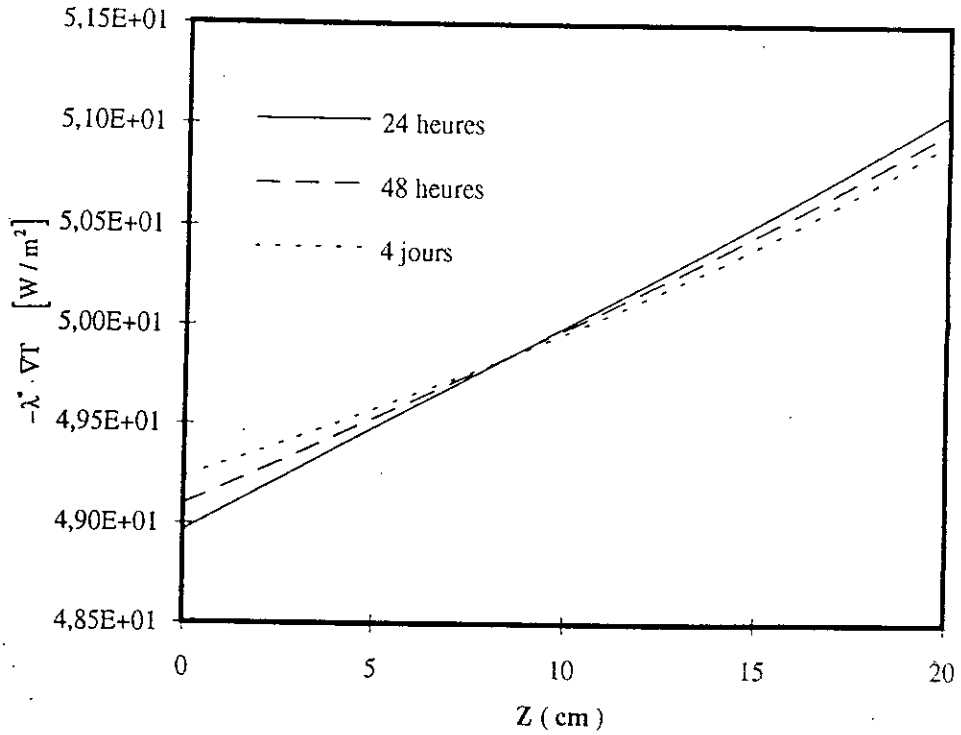


(b)

Fig. 5.25 - Distributions de la densité de flux de chaleur due au changement de phase

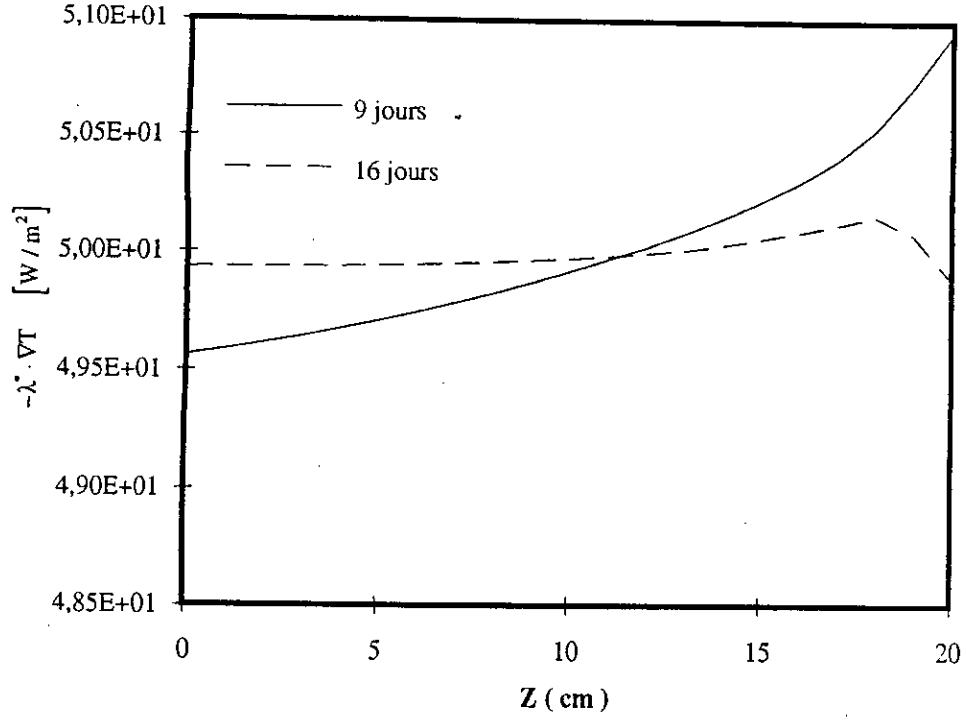


(a)

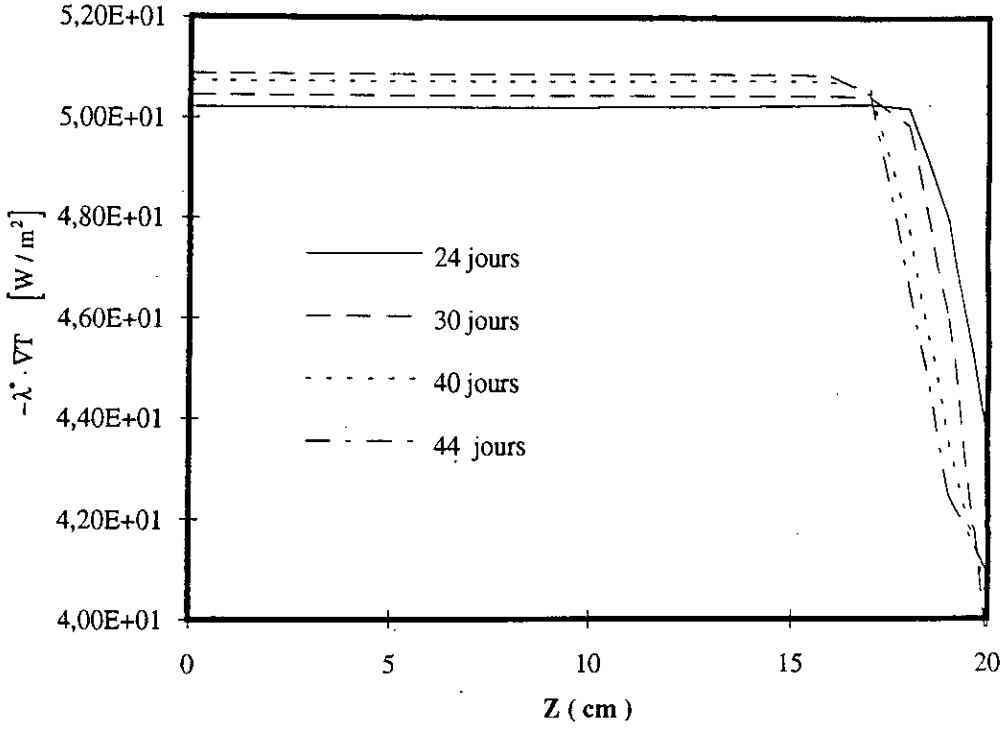


(b)

Fig. 5.26 - Distributions de la densité de flux de chaleur due à la conduction

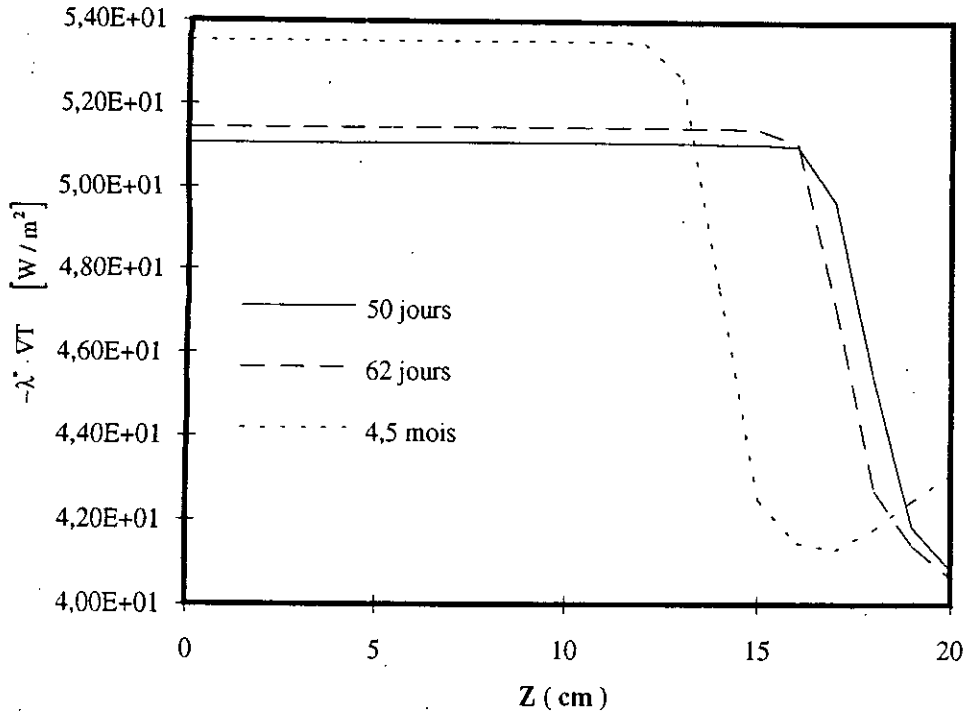


(a)



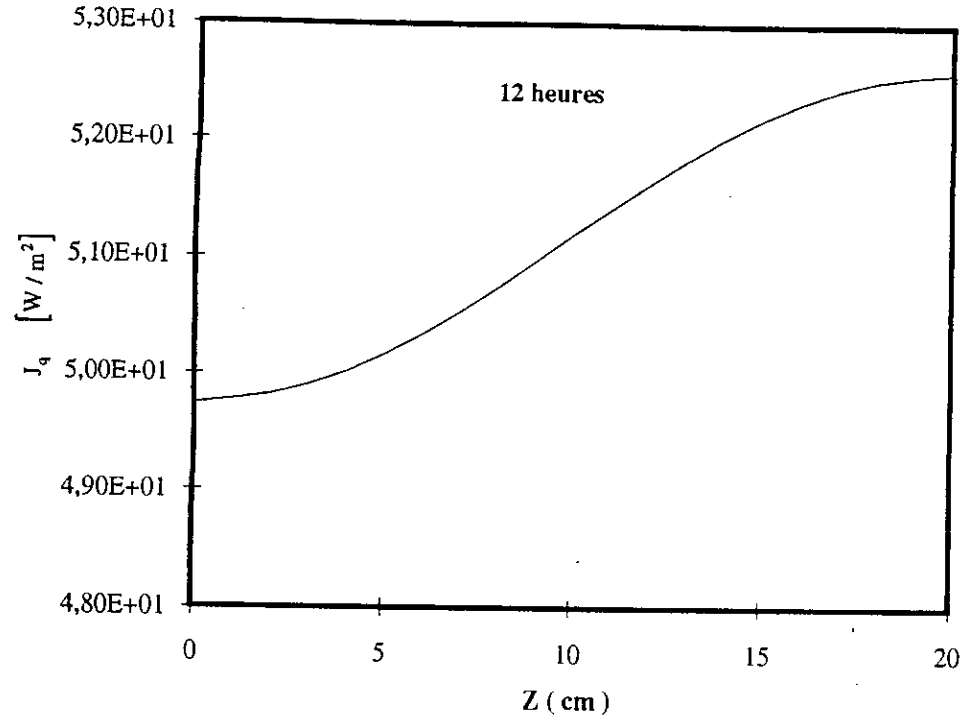
(b)

Fig. 5.27 - Distributions de la densité de flux de chaleur due à la conduction

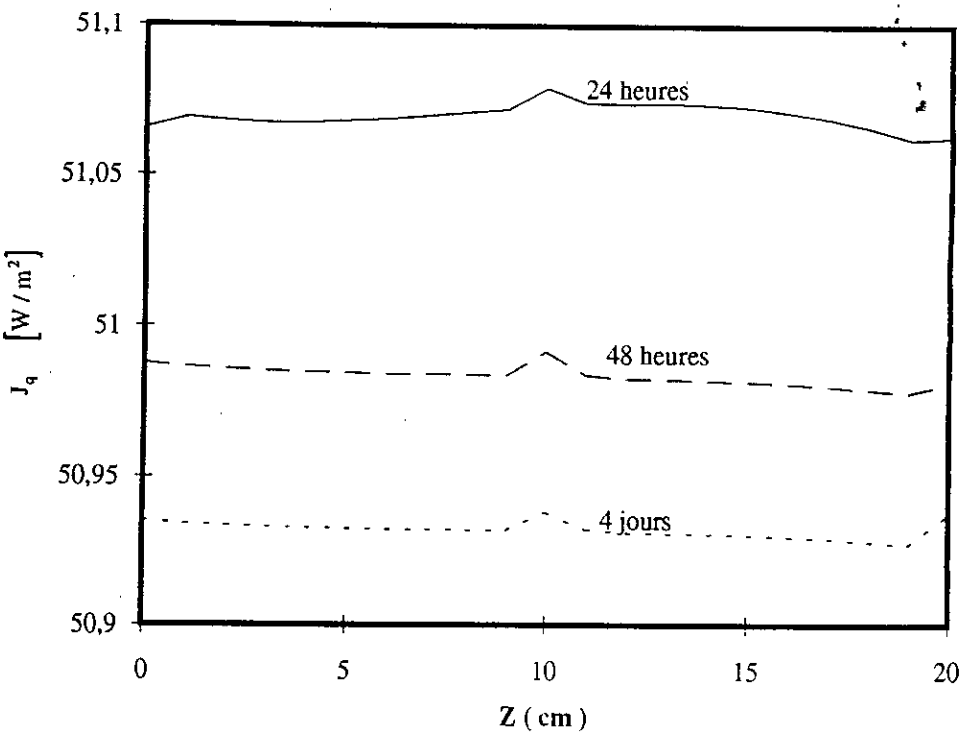


(a)

Fig. 5.28 - Distributions de la densité de flux de chaleur due à la conduction

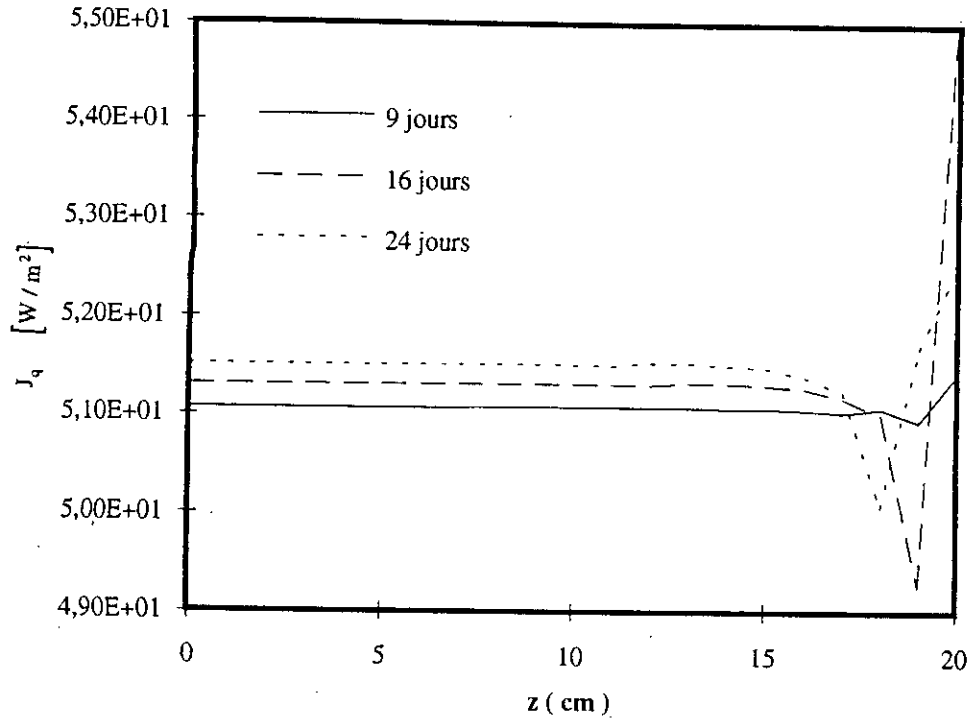


(a)

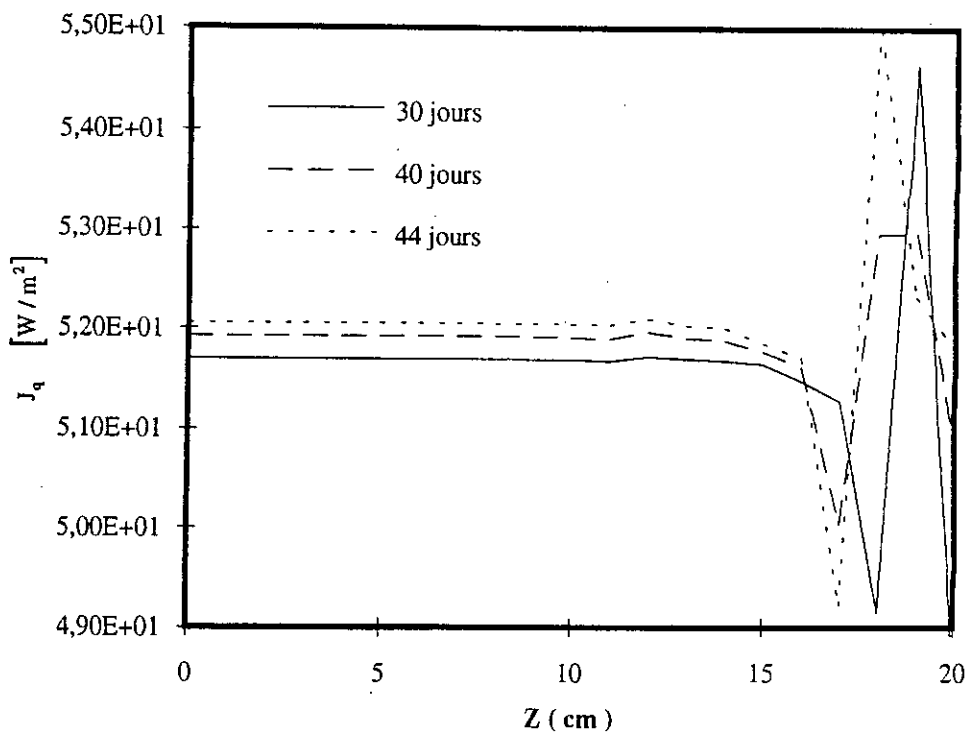


(b)

Fig. 5.29 - Distributions de la densité de flux de chaleur totale

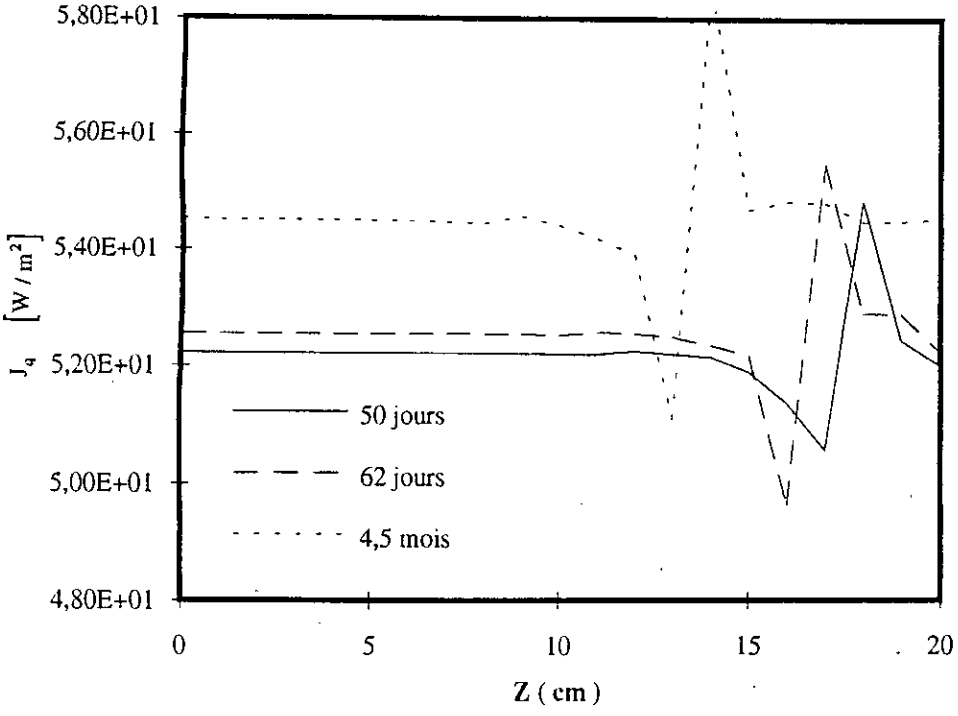


(a)



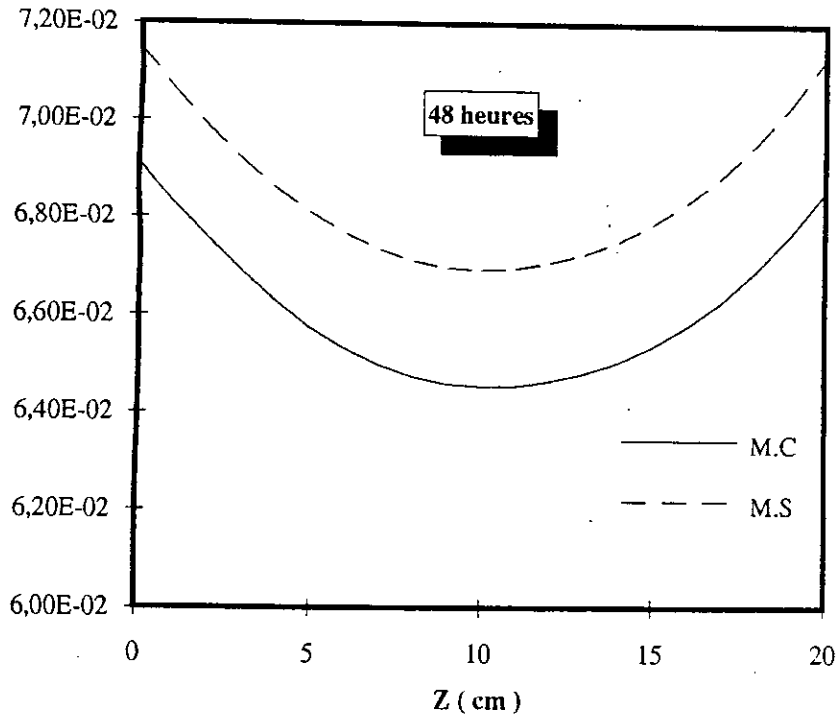
(b)

Fig. 5.30 - Distributions de la densité de flux de chaleur totale

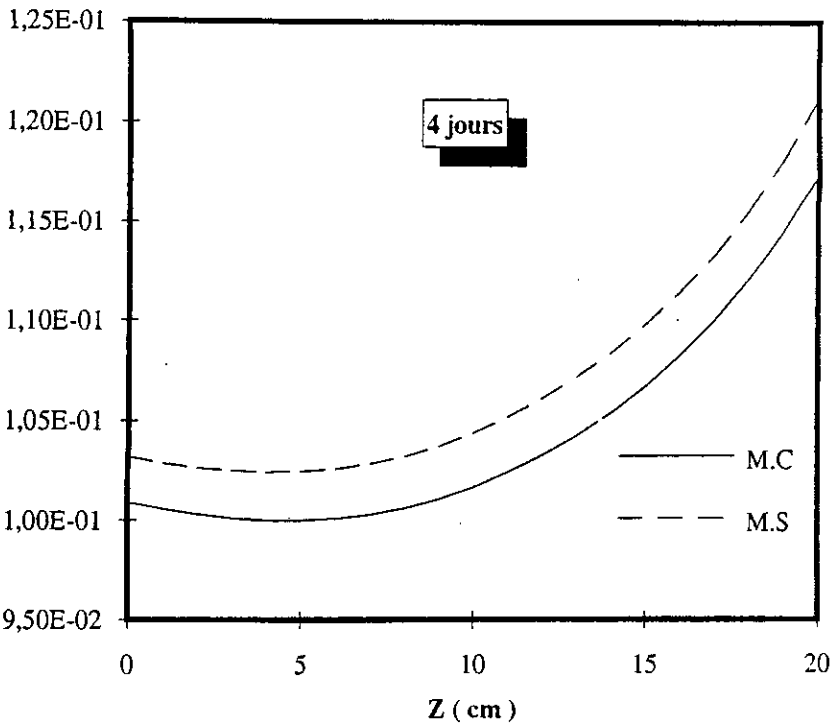


(a)

Fig. 5.31 - Distributions de la densité de flux de chaleur totale

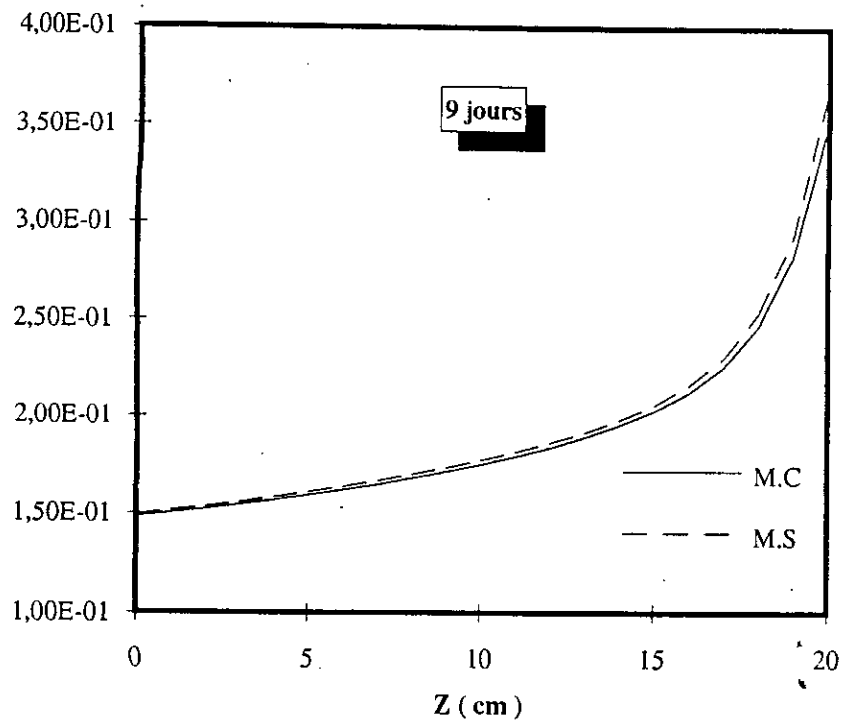


(a)

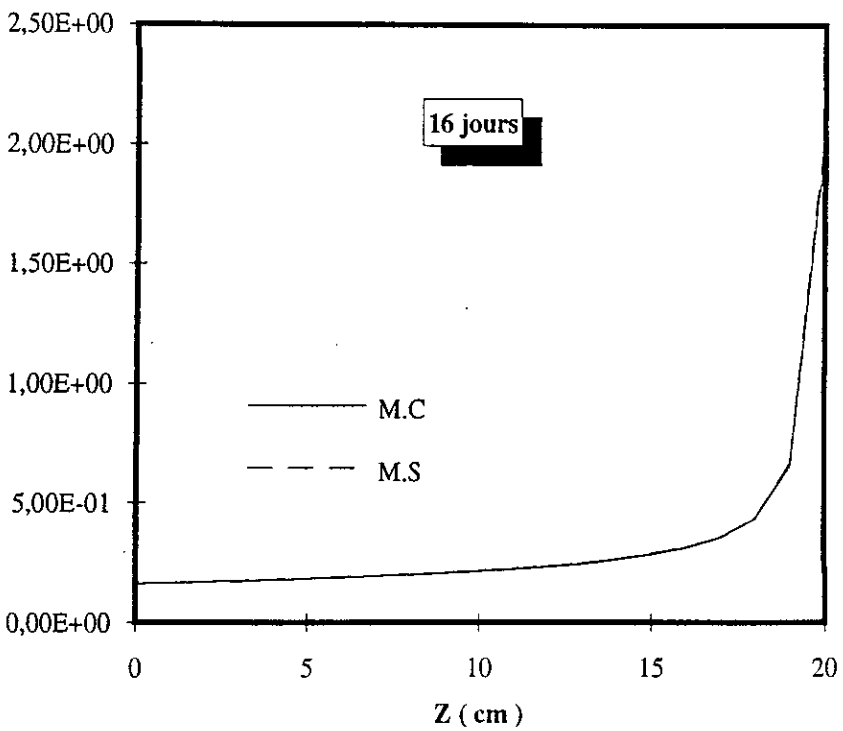


(b)

Fig. 5.32 - Influence des coefficients α , η
sur les distributions d'humidité

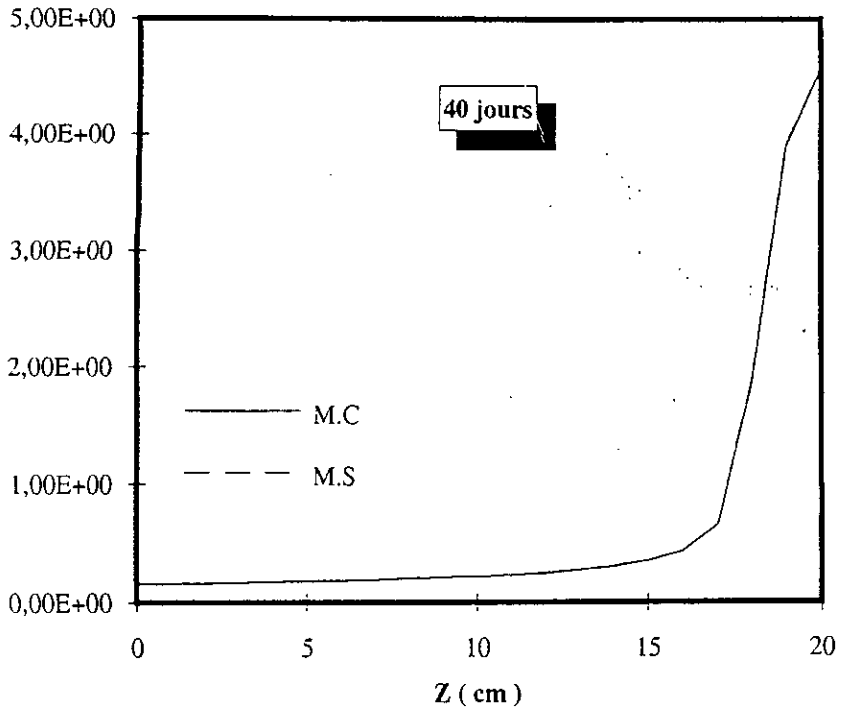


(a)

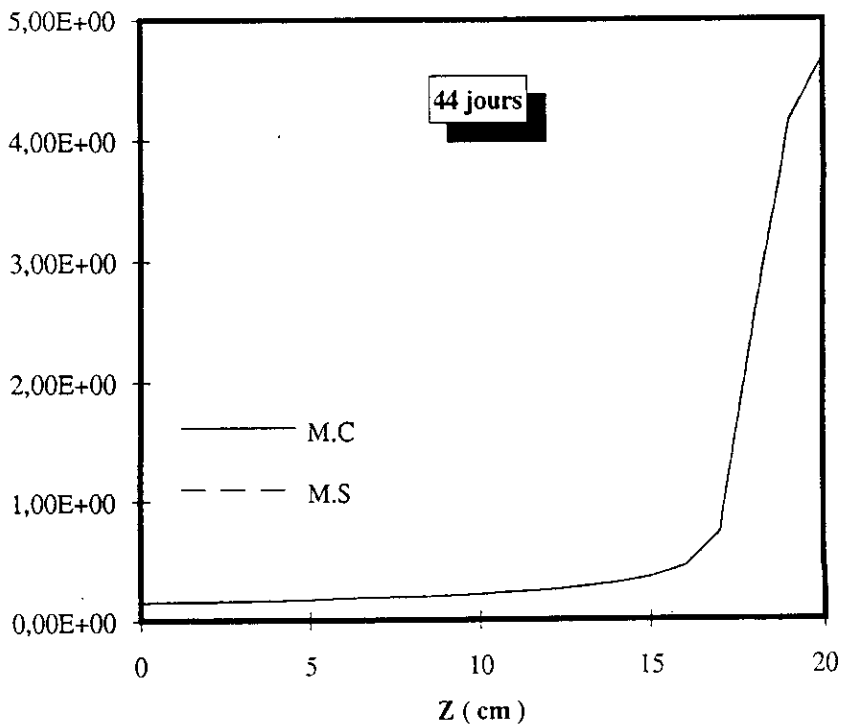


(b)

Fig. 5.33 - Influence des coefficients α , η
sur les distributions d'humidité



(a)



(b)

Fig. 5.34 - Influence des coefficients α , η
sur les distributions d'humidité

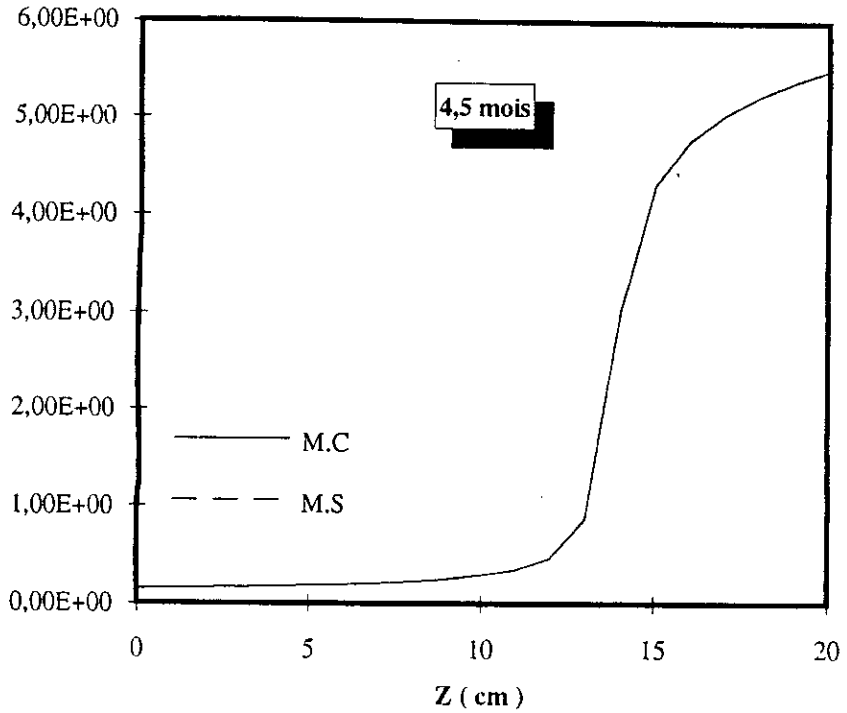


Fig. 5.35 - Influence des coefficients α , η
sur les distributions d'humidité

CONCLUSION

CONCLUSION

Le travail présenté dans ce mémoire, concerne l'étude de l'humidification par condensation d'un matériau capillaro-poreux initialement sec; il a été developpé sous un double aspect :

- l'analyse des mécanismes d'envahissement du milieu poreux par la phase condensée et ,

- l'évaluation des possiblités offertes par un modèle de description des transferts de chaleur et de masse pour prévoir ces phénomènes.

Outre la compléxité des intéractions entre les procéssus de vaporisation-condensation pouvant intervenir en régime transitoire, la comparaison entre les expériences et la formulation numérique nous a succéssivement permis de montrer :

- que le modèle de PHILIP et DE VRIES constituait un outil de prédiction tout à fait satisfaisant des procéssus de condensation interne et de leur évolution ,

- le rôle et l'importance relative des mécanismes de transfert de masse en phase vapeur, ainsi que de leurs composants, respectivement associés aux gradients de teneur en eau et de température, sur la formation des fronts de condensation et leur évolution ,

- qu'en dehors du domaine d'adsorption, où leur influence reste prépondérante, les termes d'accumulation en phase vapeur, de l'équation du bilan de masse totale, peuvent être négligés pour décrire les transferts au sein de matériaux capillaro-poreux ,

- qu'en présence de gradients de température, la cinétique d'imbibition du milieu par la phase condensée se trouvait ralentie.

Au vue du bilan présenté ici et dans le but de compléter ce travail, on peut évidemment envisager plusieurs extensions :

- une prise en compte dans le calcul de l'évolution de la conductivité thermique avec la teneur en eau
- une étude de sensibilité aux paramètres, pour simplifier le modèle théorique ,

- une mise en oeuvre d'un code de calcul bidimensionnel, prenant en compte la gravité.

ANNEXE I

PROGRAMMATION INFORMATIQUE

1- Nomenclature du programme informatique
2- Organigramme général
3- Interpolation des coefficients
   - Sous-programme Scrute
   - Sous-programme INTER2
   - Sous-programme INTER1
4- Stockage de la matrice et résolution
   - Stockage de la matrice et introduction des conditions aux limites
   - Résolution – Sous-programme GAUS

1- Nomenclature du programme informatique

Options

LABET : LABET = 0 $\Rightarrow$ modèle simplifié ; LABET = 1 $\Rightarrow$ modèle complet .

IPER : IPER = 0 $\Rightarrow$ pas de gravité ; IPER = 1 $\Rightarrow$ avec effet de gravité .

Conditions aux limites

PHI1 : Flux de masse en z = 0 .

PHI2 : Flux de masse en z = L .

PHIT1 : Flux de chaleur en z = 0 .

PHIT2 : Flux de chaleur en z = 0 .

T1 : Température en z = 0 .

T3 : Température en z = L .

COEF1 , COEF2 : Paramètres de la relation donnant le flux de masse en z = 0 , ($\dot{m}(t) = a \cdot t^b$)

a = COEF1 . E09 ,
b = COEF2 .

IMAS : IMAS = 0 $\Rightarrow$ PHI1 = $\dot{m}(t)$; IMAS = 1 $\Rightarrow$ PHI1 = FI(T)

FI(T) : Fonction (sous-programme) donnant la masse d'eau évaporée en surface en fonction de la température de surface .

MAS : Nombre de données DTT (I) et TTMS(I) utilisées par la fonction FI .

IFLUT : IFLUT = 0 $\Rightarrow$ T = T3 en z = L (condition température) ,

IFLUT = 1 $\Rightarrow$ J_q = PHIT1 en z = L (condition flux) .

IFERM : IFERM = 0 $\Rightarrow$ T1 = TS(t) (variable) ,
IFERM = 1 $\Rightarrow$ T1 constante .

Conditions initiales

T0 : Température initiale .

OMEO : Humidité initiale .

ITREP : ITREP = 0 ⇒ Conditions initiales uniformes sur tout le domaine ,
ITREP = 1 ⇒ La température et l'humidité initiales à chaque noeud sont lues à partir d'un fichier de données.

Discrétisation

NEU : Nombre de noeuds .

NNEU(I) : Numéro du I^{eme} noeud .

ALO(I) : Abscisse du I^{eme} noeud ;
ces deux variables permettent d'affinir le maillage en certaines parties (choisies) du domaine ;
Une partie du domaine est définie par ses deux noeuds extrêmes NNEU(I) et NNEU(I-1) ayant les abscisses ALO(I) et ALO(I-1). Le pas du maillage est (ALO(I)-ALO(I-1))/((NNEU(I)-NNEU(I-1)) .

Z(J) : Abscisse du noeud J .

DZ : Pas d'espace (peut être variable) .

DT : Pas de temps à l'itération en cours .

DT2 : Pas de temps à l'itération précédente .

TSUC (JJJ) : [TSUC(JJJ-1) , TSUC(JJJ)] est un intervalle de temps dans lequel le pas de temps est DTSUC(JJJ) . Il y'a incrémentation de JJJ lorsque le temps PET est supérieur à TSUC(JJJ) .

TETA : θ de l'équation (4-34) .

Paramètres de sortie des résultats

IPES : Incrément de la boucle de sortie (IPES = 1 ⇒ sortie des résultats en chaque noeud) .

IBIF : IBIF = 0 ⇒ pas de sortie des flux vers l'unité 10 ,
IBIF = 1 ⇒ sortie des flux .

IGRAF : Indice de la variabilité ITGRAF .

ITGRAF(IGRAF) : Il y'a sortie vers l'unité 6, lorsque le temps IPET est un multiple de la valeur de MODULT en cours (MODULT(JJJ)).

JSORT : Valeur de MODULT en cours.

Interpolation des coefficients

ITEM : ITEM = 1 ⇒ interpolation par rapport à l'humidité uniquement,
ITEM = 2 ⇒ interpolation par rapport à l'humidité et à la température.

MO(I) : permet le positionnement par rapport à l'humidité ω dans le fichier de données SABLE2.DAT.

MT(I) : Permet le positionnement par rapport à la température T dans le fichier de données SABLE2.DAT.

Précision

OMAX : Ecart maximal entre les valeurs de ω au même noeud à deux itérations consécutives.

TNAX : Ecart maximal entre les valeurs de T au même noeud à deux itérations consécutives.

W : Ecart maximal, sur tout le domaine, entre les valeurs de ω à deux itérations consécutives.

X : Ecart maximal, sur tout le domaine, entre les valeurs de T à deux itérations consécutives.

ITER : Numéro de l'itération en cours.

CRIT : Critère d'arrêt du processus itératif (erreur maximale sur l'humidité).

EPSIL : Critère d'arrêt du processus itératif (erreur maximale sur la température).

TT1(I) : Température au noeud I à l'itération précédente.

OMEG(I) : Humidité au noeud I à l'itération précédente.

Propriétés physiques

RAU : Masse volumique du milieu poreux sec.

QVE : Chaleur latente de l'eau.

DLO(I) : Valeurs de la teneur en eau pour lesquelles sont données, dans le fichier SABLE2.DAT, les valeurs des propriétés physiques du milieu poreux.

DLT(I) : Valeurs de la température pour lesquelles sont données, dans le fichier SABIE2.DAT, les valeurs des propriétés physiques du milieu poreux .

ATOT(I,J) : Valeur de D_θ correspondant à une humidité DLO(I) et une température DLT(J) .

AVAP(I,J) : $D_{\theta v}$

ADTOT(I,J) : $\frac{\rho_e}{\rho_0} \cdot D_T$

ADVAP(I,J) : $\frac{\rho_e}{\rho_0} \cdot D_{Tv}$

DBETA(I) : Valeurs de la teneur en eau pour lesquelles sont données, dans le fichier SABLE2.DAT, les valeurs des coefficients α et η du milieu poreux .

ALFA(I,J) : α

BETA(I,J) : η

DPER(I) : Valeurs de la teneur en eau pour lesquelles sont données, dans le fichier SABLE2.DAT, les valeurs de la perméabilité du milieu poreux .

PER(I,J) : K

DLAM(I) : Valeurs de la teneur en eau pour lesquelles sont données, dans le fichier SABLE2.DAT, les valeurs de la conductivité thermique du milieu poreux .

ALAM(I) : Valeur de λ^* correspondant à une humidité DLAM(I) .

AT(I,J) : Valeur de D_θ au noeud I et à l'instant $m \cdot \Delta t$ pour $J = 1$ et $(m+1) \cdot \Delta t$ pour $J = 2$.

AD(I,J) : D_T .

AV(I,J) : $D_{\theta v}$.

ADV(I,J) : $\frac{\rho_e}{\rho_0} \cdot D_{Tv}$.

AL(I,J) : α .

BE(I,J) : η .

AK(I,J) : K .

LAM(I,J) : λ^* .

ROC(I,J) : $(\rho c)^*$.

Autres variables

PET : Temps en secondes .

IPET : Temps en secondes (valeur entières) .

PETH : Temps en heures .

T(I,J) : Température au noeud I à l'instant $m \cdot \Delta t$ pour $J = 1$ et $(m+1) \cdot \Delta t$ pour $J = 2$.

OME(I,J) : Humidité pondérale ω .

OMOY : Valeur moyenne de ω sur le domaine entier .

A(I) : Voir $\oint$ Stockage de la matrice .

B(I) : Voir $\oint$ Stockage de la matrice .

AAA(I) : Voir $\oint$ Stockage de la matrice .

BBB(I) : Voir $\oint$ Stockage de la matrice .

ABC : Voir $\oint$ Stockage de la matrice .

ABD : Voir $\oint$ Stockage de la matrice .

FLU1 : Flux de chaleur en $z = 0$.

FLU2 : Flux de chaleur en $z = L$.

FL(1) : Flux en phase liquide dû au gradient d'humidité .

FL(2) : Flux en phase liquide dû au gradient thermique .

FL(3) : Flux de masse en phase liquide .

FL(4) : Flux en phase vapeur dû au gradient d'humidité .

FL(5) : Flux en phase vapeur dû au gradient thermique .

FL(6) : Flux de masse en phase vapeur .

FL(7) : Flux de chaleur dû au changement de phase .

FL(8) : Flux de chaleur dû au gradient thermique .

FL(9) : Flux de chaleur totale .

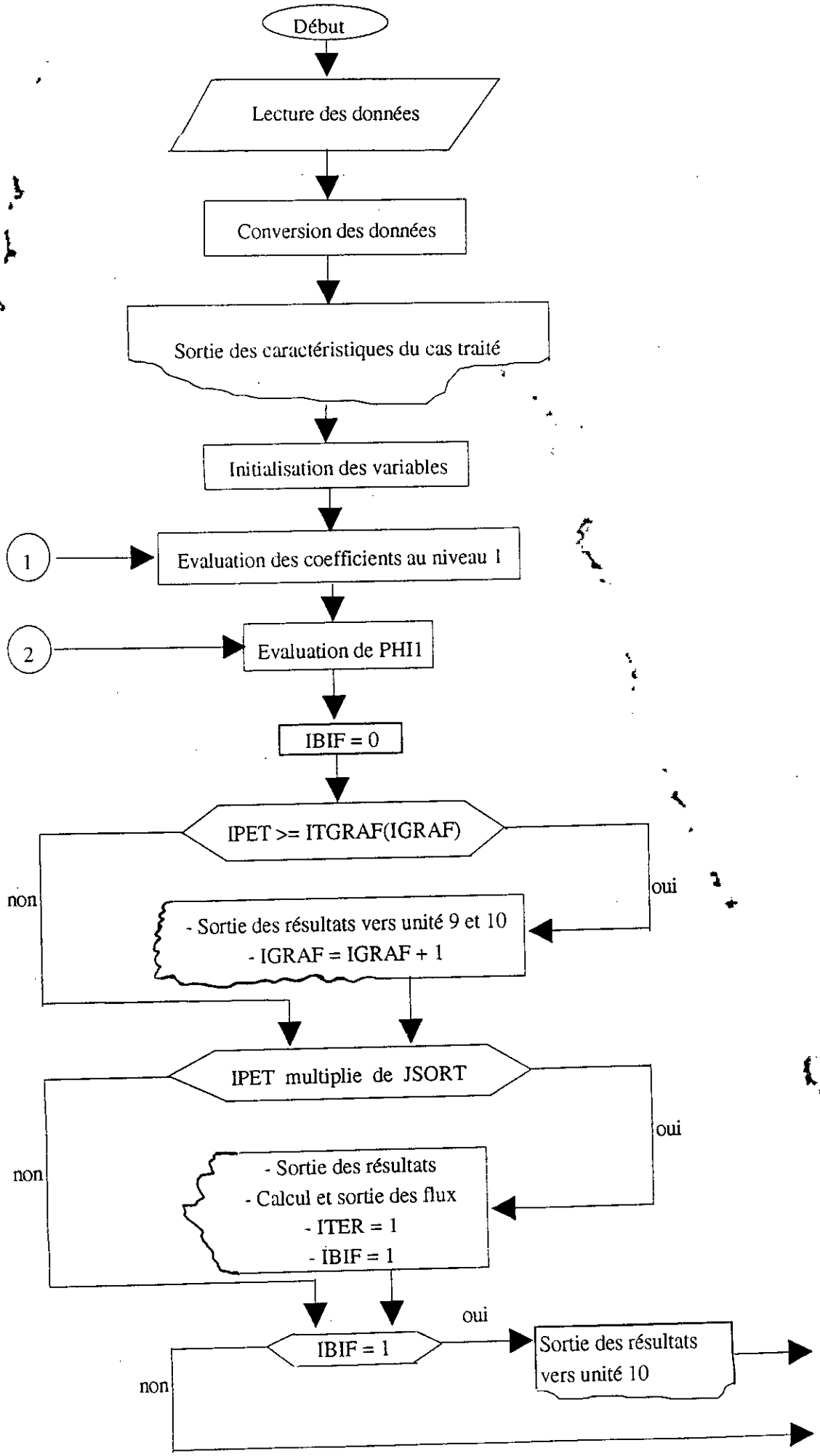
FL(10) : Flux de masse totale .

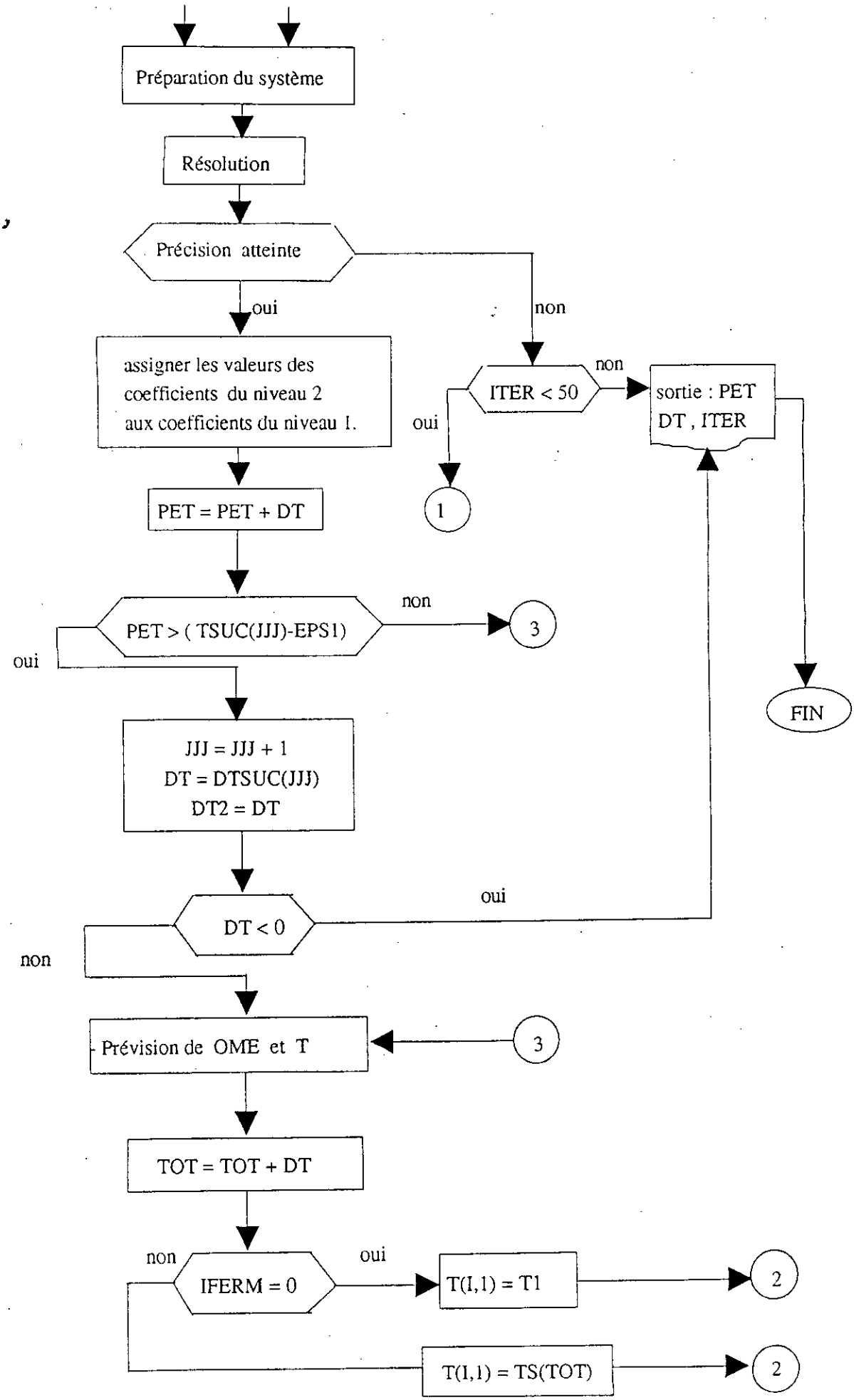
FLT(I,J) : FL(J) au noeud I

DER(I,1) : $\frac{\partial \omega}{\partial z}$ au noeud I .

DER(I,2) : $\frac{\partial T}{\partial z}$ au noeud I .

2- Organigramme général




Préparation du système
Résolution
Précision atteinte
oui
non
assigner les valeurs des coefficients du niveau 2 aux coefficients du niveau 1.
ITER < 50
non
oui
sortie : PET DT , ITER
1
PET = PET + DT
PET > (TSUC(JJJ)-EPS1)
non
3
oui
FIN
JJJ = JJJ + 1
DT = DTSUC(JJJ)
DT2 = DT
DT < 0
oui
non
Prévision de OME et T
3
TOT = TOT + DT
non
IFERM = 0
oui
T(I,1) = T1
2
T(I,1) = TS(TOT)
2

3- Interpolation des coefficients

❒ Sous-programme SCRUTE

*Dans le*fichier SABLE2.DAT, sont données les valeurs des différentes propriétés physiques du milieu poreux considéré, correpondant aux différentes valeurs de l'humidité (DLO(I) , DBETA(I) , DPER(I) , DLAM(I)) et de la température (DLAM(I) .

Pour obtenir la valeur d'une propriété physique quelconque P à une humidité et à une température intermédiaires , on procède par interpolation . Pour cela , on se positionne d'abord dans le fichier SABLE2.DAT comme suit :

Soit à évaluer P(I,ILIG) avec ILIG = 1 ou 2 et I = 1 , ...N :
P(I,ILIG) correpond à une humidité OME(I,ILIG) et une température T(I,ILIG) .

- Si P dépend à la fois de OME et de T, on assigne la valeur 2 au paramètre ITEM de SCRUTE ; SCRUTE détermine alors les valeurs MO(I) et MT(I) telles que :

$$DLO(MO(I)) \geq OME(I,ILIG) \geq DLO(MO(I)-1)$$
$$DLT(MT(I)) \geq T(I,ILIG) \geq DLT(MT(I)-1)$$

- Si P dépend seulement de OME, on assigne la valeur 1 à ITEM et seule la valeur MO(I) sera déterminée .

❒ Sous-programme INTER2

Il permet de calculer la valeur $P(\omega,T)$ d'une propriété quelconque P dépendant des variables ω et T, moyennant une interpolation linéaire entre les points (ω_1 , t_1) et (ω_2 , t_2) tels que :

$$\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$$
$$T_1 \leq T \leq T_2$$

$$P(\omega,T_1) = P(\omega_1,T_1) + \frac{P(\omega_2,T_1) - P(\omega_1,T_1)}{\omega_2 - \omega_1} \cdot (\omega - \omega_1) = C_1$$

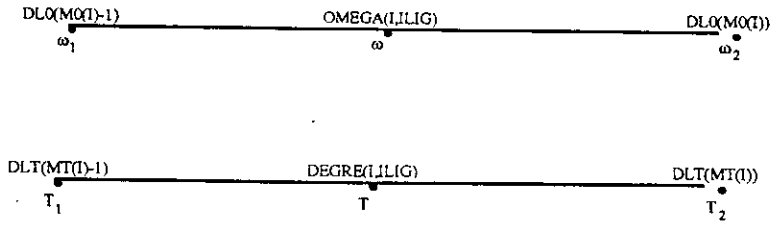
$$P(\omega,T_2) = P(\omega_1,T_2) + \frac{P(\omega_2,T_2) - P(\omega_1,T_2)}{\omega_2 - \omega_1} \cdot (\omega - \omega_1) = C_1$$

$$P(\omega,T) = P(\omega,T_1) + \frac{P(\omega_1,T_2) - P(\omega,T_1)}{T_2 - T_1} \cdot (T - T_1)$$

$$P(\omega,T) = C_1 + (C_2 - C_1) \cdot PQR$$

avec $$PQR = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$

On a la correspondance avec les variables indicées :



Dans le fichier SABLE2.DAT , on a les 4 valeurs de P :

$$\left.\begin{matrix}\omega_2\\T_2\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}DL0(M0(I))\\DLT(MT(I))\end{matrix}\right\}\rightarrow P(M0(I),MT(I))$$

$$\left.\begin{matrix}\omega_1\\T_2\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}DL0(M0(I)-1)\\DLT(MT(I))\end{matrix}\right\}\rightarrow P(M0(I)-1,MT(I))$$

$$\left.\begin{matrix}\omega_1\\T_1\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}DL0(M0(I)-1)\\DLT(MT(I)-1)\end{matrix}\right\}\rightarrow P(M0(I)-1,MT(I)-1)$$

$$\left.\begin{matrix}\omega_2\\T_1\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}DL0(M0(I))\\DLT(MT(I)-1)\end{matrix}\right\}\rightarrow P(M0(I),MT(I)-1)$$

Lors de l'appel de INTER2 , les 4 valeurs de P sont assignées dans la variable TAB et les valeurs de OME(I,ILIG) et T(I,ILIG) , respectivement dans les variables OMEGA(I,ILIG) et DEGRE(I,ILIG) .

❒ Sous-programme INTER1

ITEM = 1

La valeur P(I,ILIG) est calculée moyenant une interpolation linéaire par rapport à ω .

$$P(\omega,T)=P(\omega_1,T)+\frac{P(\omega_2,T)-P(\omega_1,T)}{\omega_2-\omega_1}\cdot(\omega-\omega_1)$$

ITEM = 2

La fonction *Log P* est considdéré comme variant linéairement par rapport à ω et T .

En posant $F(\omega,T) = \text{Log } P(\omega,T)$, on aura le même schéma que celui du sous-programme INTER2 :

$$F(\omega,T) = C_1 + (C_2 - C_1) \cdot PQR$$

La valeur $P(\omega,T)$ est donc donnée par :

$$P(\omega,T) = \exp F(\omega,T) = \exp [\, C_1 + (C_2 - C_1) \cdot PQR \,]$$

4- STOCKAGE DE LA MATRICE ET RESOLUTION

❒ Stockage de la matrice et introduction des conditions aux limites

La matrice $\mathcal{A}_{DN.DN}$ du système (4.35) est stockée dans un vecteur A de dimension (7.DN-3) selon la relation :

$$\mathcal{A}(I,J) = A(6I + J-3)$$

Ceci revient à numéroter les éléments de $\mathcal{A}$ comme suit:

$$\begin{bmatrix}
4 & 5 & 6 & 7 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
10 & 11 & 12 & 13 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 30 & 31 & 32 & 33 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 36 & 37 & 38 & 39 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & &

Les éléments A(4) , A(5) , A(6) et A(7) sont stockés respectivement dans AAA(1) , AAA(2) , AAA(3) , AAA(4) . De même A(282) , A(283) , A(284) et A(285) sont stockés respectivement dans BBB(1) , BBB(2) , BBB(3) , BBB(4) . D'autre part les éléments B(1) et B(41) du vecteur $\mathcal{B}$ de l'équation (4.35) , (qu'on notera simplement B) , sont stockés respectivement dans les variables ABC et ABD .
Ceci nous permettra de calculer ultérieurement les flux de chaleurs en Z = 0 et Z = L .

Conditions aux limites

- En Z = 0

```
A(4)       =  1
A(5 , ... , 8) =  0
B(1)       =  T1
```

qui traduisent la condition T = T1 en Z = 0 .

```
B(2) = B(2) + PHI1
```

qui traduit la condition sur le flux de masse en Z = 0 .

- En Z = L

```
A(282 , ... , 285) =  0
A(284)             =  1          ( cas IFLUT = 0 )
B(41)              =  T3
```

qui traduisent la condition T= T3 en Z = L .
ou bien :

```
B(41) = B(41) + PHIT1          ( cas IFLUT = 1 )
```

qui traduisent la condition sur le flux de chaleur en Z = L .

```
B(42) = B(42) + PHI2
```

qui traduit la condition sur le flux de masse en Z = L .
Dans notre cas , nous avons PHI2 = 0 et IFLUT = 0 .

☐ Résolution - Sous-programme GAUS

```
      SUBROUTINE GAUS(A,B,LV,MX)

      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)      ::  A,B: - parametres d'entrée
      DIMENSION A(1),B(1)           ::       (voir stockage de la
      LMOI=LV-MX                    ::        matrice    ).
      ICODE=1                       ::       - paramètres de sortie
      MX2=2*MX+1                    ::       (vecteur solution OME,T)
      MX1=MX+1                      ::
      M22=MX2-1                     ::  LV: LV=DN,dimension du système
      L=MX1                         ::  MX: MX=3

      ****************** TRIANGULARISATION DE LA MATRICE **************

      DO 5 K=1,LV                   ::  K: K=1,DN ; numéro de ligne
                                    ::     de la matrice
      DIVB=1./A(L)                  ::  L: L=7K-3 ; A(L) élement
                                    ::     diagonal de A (pivot).
      LMX=L+MX                      ::  LMX: (A(i),i=L,LMX),éléments
                                    ::       non nuls de la L^ème ligne
      IF(K.LE.LMOI) GOTO 1          ::       de A.
      LMX=LMX-ICODE                 ::       LMX-L=3  pour K < DN-3
      ICODE=ICODE+1                 ::            =2  pour K = DN-2
                                    ::            =1  pour K = DN-1
                                    ::            =0  pour K = DN
                                    ::  ICODE: (MX-ICODE),nombre de
                                    ::         lignes à réduire avec
                                    ::         la ligne K .

      ----------------- normalisation de la K^ème ligne -----------------

    1 DO 2 J=L,LMX                  ::
    2 A(J)=A(J)*DIVB                ::
      B(K)=B(K)*DIVB                ::

           ------------------------------------------------------------

      IF(K.EQ.LV) GOTO 34           ::

           -------- réduction des lignes (K+1),(K+2) et (K+3)----------

      MI22=0                        ::
      DO 31 II=ICODE,MX             ::  LMI22: A(LMI22) , premier
      MI22=MI22+M22                 ::         élement de chaque ligne
                                    ::         à réduire.
      LMI22=L+MI22                  ::         Si A(lmi22)=0 , ne pas
      IF(A(LMI22).EQ.0) GOTO 31     ::         réduire la ligne
                                    ::         correspondante.
      COEFF=A(LMI22)                ::  MI22:  LMI22=L+MI22 ,
      DO 3 J=L,LMX                  ::         MI22= 6 ---> ligne K+1
      JMI22=J+MI22                  ::             =12 ---> ligne K+2
      A(JMI22)=A(JMI22)-A(J)*COEFF  ::             =18 ---> ligne K+3
```

```
  3 CONTINUE                                ::  JMI22: A(JMI22) , élement de
    III=II-ICODE+1                          ::         la ligne à réduire.
    KIII=K+III                              ::         A(J) , élement de la
                                            ::         ligne K .
    B(KIII)=B(KIII)-B(K)*COEFF              ::         Les deux élements sont
 31 CONTINUE                                ::         sur la même colonne J .
                                            ::  KIII: MI22= 6 ---> KIII=K+1
  5 L=L+MX2                                 ::            =12 ---> KIII=K+2
                                            ::            =18 ---> KIII=K+3

    ********* RESOLUTION DU SYSTEME TRIANGULAIRE SUPERIEUR **********

 34 CONTINUE                                ::
    ICODE=0                                 ::
    I=LV                                    ::
    L=MX1+1+(LV-1)*MX2                      ::
 35 SIGMA=0.                                ::
    L=L-MX2                                 ::
    LMX=L+MX-1                              ::
    IF(I.LE.LMOI) GOTO 6                    ::
    LMX=L+ICODE                             ::
    ICODE=ICODE+1                           ::
  6 II=I                                    ::
    DO 37 J=L,LMX                           ::
    SIGMA=SIGMA+A(J)*B(II)                  ::
    II=II+1                                 ::
 37 CONTINUE                                ::
    I=I-1                                   ::
    B(I)=B(I)-SIGMA                         ::  B(I)=T(I,2)   si I est pair.
    IF(I.GT.1) GOTO 35                      ::      =OME(I,2) si I est impair.
    RETURN                                  ::
    END                                     ::
```

ANNEXE II

BANQUE DE DONNEES EXPERIMENTALES

1- Flux de masse à la surface ouverte du système .
2- Distributions de l'humidité

1- FLUX DE MASSE A LA SURFACE OUVERTE DU SYSTEME

Les masses d'eau entrant par la partie ouverte du système , mesurées à différents instants , et correspondants à différentes conditions aux limites sur la température sont représentées dans le tableau (T-1) .

	Numéro de la mesure	m [10^{-4} Kg]	t [jours]
T_a = 30 °C T_e = 10 °C	1	006,89953	004
	2	017,49958	009
	3	025,70000	016
	4	022,10000	024
	5	041,79960	030
	6	061,20000	040
	7	068,90000	050
	8	079,00000	062
	9	137,59940	135
T_a = 40 °C T_e = 10 °C	1	011,80000	004
	2	025,89900	009
	3	037,70020	016
	4	115,89960	030
T_a = 25 °C T_e = 5 °C	1	005,60027	004
	2	008,20411	009
	3	008,59830	016
	4	020,09970	024
	5	042,09909	040

Tableau (T-1)

Le flux de masse qui intervient dans le système à résoudre s'écrit :

$$\dot{m}(t) = \frac{1}{\rho_0 S} \cdot \frac{dm(t)}{dt} \triangleq \frac{4}{\pi D^2 \rho_0} \cdot \frac{dm(t)}{dt}$$

A partir du tableau (T-1), nous avons tracé les courbes m(t) et $\dot{m}(t)$ en utilisant une interpolation de type puissance :

$$m(t) = a \cdot t^b \qquad ; \qquad \dot{m}(t) = c \cdot t^d$$

Les valeurs des coefficients a , b , c et d sont données dans le tableau (T-2) et la courbe $\dot{m}(t)$ correspondant au cas ($T_a = 30$, $T_e = 10$) est représentée sur la figure (F-1) .

	Mesures utilisées	**$a \cdot 10^{-8}$**	**b**	**$c \cdot 10^{-9}$**	**d**
$T_a = 30$ °C	1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9	1,43515	0,850501	2,698110668	0,149499
$T_e = 10$ °C	1 , 2 , 3 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9	1,64641	0,844765	3,074410157	0,155235
$T_a = 40$ °C $T_e = 10$ °C	1 , 2 , 3	2,4891	0,846523	4,657670294	0,153477
$T_a = 25$ °C	1 , 2 , 3 , 4 , 5	9,62123	0,841667	1,790022672	0,158333
$T_e = 5$ °C	1 , 2 , 4 , 5	7,64814	0,857029	1,465808002	0,132971

Tableau (T-2)

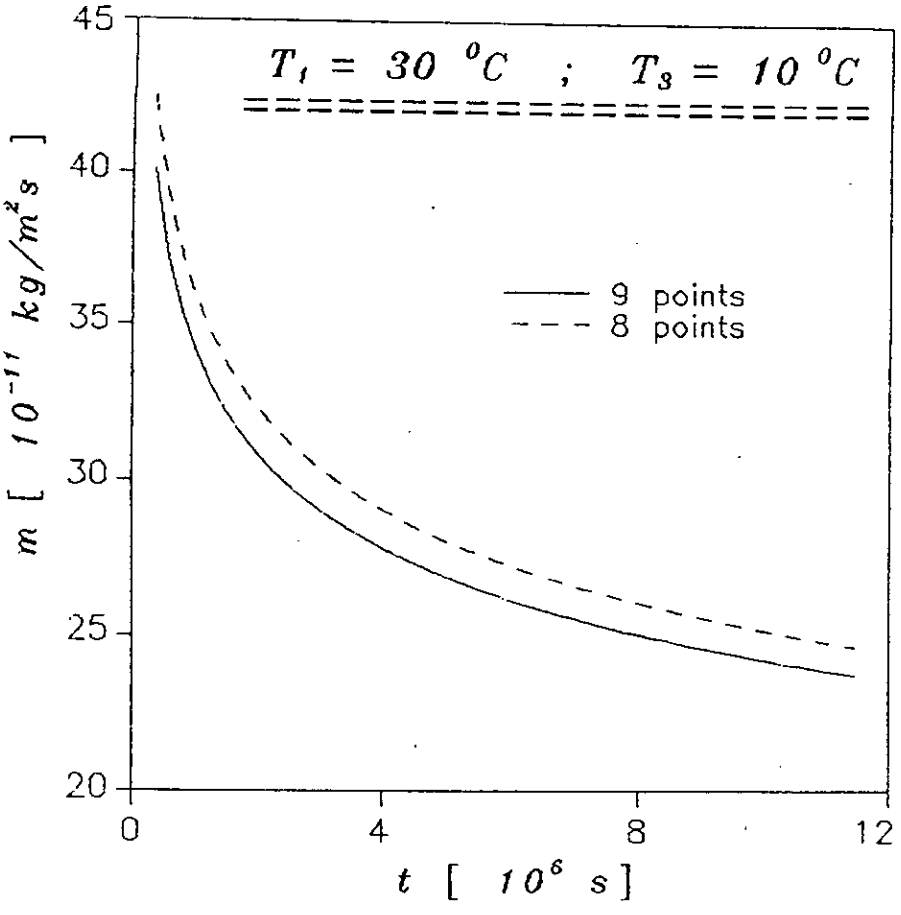


Fig. F-1 Flux de masse à la surface ouverte en fonction du temps

2. DISTRIBUTIONS DE L'HUMIDITE

temps : 4 jours	
Z (m)	ω
0,7380 10^{-02}	0,6129 10^{-03}
0,2100 10^{-01}	0,1813 10^{-03}
0,3479 10^{-01}	0,7485 10^{-03}
0,4826 10^{-01}	0,5731 10^{-03}
0,6125 10^{-01}	0,6395 10^{-03}
0,7418 10^{-01}	0,5799 10^{-03}
0,8692 10^{-01}	0,4917 10^{-03}
0,9946 10^{-01}	0,1003 10^{-02}
0,1118 10^{+00}	0,6716 10^{-03}
0,1222 10^{+00}	0,3148 10^{-03}
0,1319 10^{+00}	0,7300 10^{-03}
0,1427 10^{+00}	0,4956 10^{-03}
0,1504 10^{+00}	0,1091 10^{-02}
0,1575 10^{+00}	0,2853 10^{-03}
0,1644 10^{+00}	0,3735 10^{-03}
0,1715 10^{+00}	0,2833 10^{-03}
01771 ,10^{+00}	0,6729 10^{-03}
0,1811 10^{+00}	0,9961 10^{-03}
0,1844 10^{+00}	0,1116 10^{-02}
0,1927 10^{+00}	0,3094 10^{-02}

temps : 9 jours	
Z (m)	ω
0,3730 10^{-02}	0,1841 10^{-02}
0,1335 10^{-01}	0,9718 10^{-03}
0,2433 10^{-01}	0,1572 10^{-02}
0,3491 10^{-01}	0,2082 10^{-02}
0,4587 10^{-01}	0,1677 10^{-02}
0,5834 10^{-01}	0,9777 10^{-03}
0,7100 10^{-01}	0,1217 10^{-02}
0,8168 10^{-01}	0,1135 10^{-02}
0,9230 10^{-01}	0,1025 10^{-02}
0,1033 10^{+00}	0,1273 10^{-02}
0,1138 10^{+00}	0,6696 10^{-03}
0,1229 10^{+00}	0,8586 10^{-03}
0,1321 10^{+00}	0,1095 10^{-02}
0,1426 10^{+00}	0,1099 10^{-02}
0,1528 10^{+00}	0,6770 10^{-03}
0,1625 10^{+00}	0,4938 10^{-03}
0,1715 10^{+00}	0,1319 10^{-02}
0,1785 10^{+00}	0,4284 10^{-03}
0,1825 10^{+00}	0,8466 10^{-03}
0,1862 10^{+00}	0,4386 10^{-02}
0,1915 10^{+00}	0,2323 10^{-02}
0,1973 10^{+00}	0,2830 10^{-01}

temps : 16 jours	
Z (m)	ω
0,6621 10^{-02}	0,1037 10^{-02}
0,2034 10^{-01}	0,1450 10^{-02}
0,3397 10^{-01}	0,1925 10^{-02}
0,4748 10^{-01}	0,1801 10^{-02}
0,6048 10^{-01}	0,1902 10^{-02}
0,7225 10^{-01}	0,1786 10^{-02}
0,8450 10^{-01}	0,1938 10^{-02}
0,9728 10^{-01}	0,1453 10^{-02}
0,1077 10^{+00}	0,1389 10^{-02}
0,1183 10^{+00}	0,1225 10^{-02}
0,1290 10^{+00}	0,1121 10^{-02}
0,1376 10^{+00}	0,5003 10^{-02}
0,1471 10^{+00}	0,1153 10^{-02}
0,1556 10^{+00}	0,9886 10^{-03}
0,1620 10^{+00}	0,7802 10^{-03}
0,1678 10^{+00}	0,3985 10^{-03}
0,1728 10^{+00}	0,1597 10^{-02}
0,1794 10^{+00}	0,1296 10^{-02}
0,1858 10^{+00}	0,2761 10^{-02}
0,1940 10^{+00}	0,2647 10^{-01}

temps : 24 jours	
Z (m)	ω
0,1036 10^{-01}	0,1107 10^{-03}
0,3034 10^{-01}	0,0000 10^{+00}
0,5037 10^{-01}	0,0000 10^{+00}
0,7055 10^{-01}	0,2336 10^{-03}
0,8756 10^{-01}	0,3177 10^{-03}
0,1037 10^{+00}	0,2560 10^{-03}
0,1219 10^{+00}	0,3703 10^{-03}
0,1374 10^{+00}	0,0000 10^{+00}
0,1486 10^{+00}	0,2263 10^{-03}
0,1613 10^{+00}	0,1504 10^{-03}
0,1716 10^{+00}	0,0000 10^{+00}
0,1781 10^{+00}	0,7132 10^{-02}
0,1858 10^{+00}	0,1703 10^{-01}
0,1925 10^{+00}	0,1643 10^{-01}
0 ,1977 10^{+00}	0,4354 10^{-01}

temps : 30 jours	
Z (m)	ω
0,3836 10^{-02}	0,5963 10^{-03}
0,1208 10^{-01}	0,1297 10^{-02}
0,2199 10^{-01}	0,1249 10^{-02}
0,3218 10^{-01}	0,1703 10^{-02}
0,4306 10^{-01}	0,1482 10^{-02}
0,5388 10^{-01}	0,1968 10^{-02}
0,6360 10^{-01}	0,2484 10^{-02}
0,7367 10^{-01}	0,1824 10^{-02}
0,8473 10^{-01}	0,1895 10^{-02}
0,9641 10^{-01}	0,1823 10^{-02}
0,1079 10^{+00}	0,1374 10^{-02}
0,1193 10^{+00}	0,1850 10^{-02}
0,1301 10^{+00}	0,1089 10^{-02}
0,1420 10^{+00}	0,1025 10^{-02}
0,1533 10^{+00}	0,1260 10^{-02}
0,1625 10^{+00}	0,1215 10^{-02}
0,1714 10^{+00}	0,1088 10^{-02}
0,1819 10^{+00}	0,2116 10^{-01}
0,1941 10^{+00}	00,3625 10^{-01}

temps : 44 jours	
Z (m)	ω
0,6306 10^{-02}	0,1859 10^{-03}
0,2582 10^{-01}	0,6210 10^{-03}
0,5366 10^{-01}	0,5613 10^{-03}
0,8117 10^{-01}	0,4550 10^{-03}
0,1057 10^{+00}	0,5016 10^{-03}
0,1241 10^{+00}	0,8780 10^{-03}
0,1409 10^{+00}	0,6979 10^{-03}
0,1562 10^{+00}	0,1344 10^{-02}
0,1694 10^{+00}	0,1167 10^{-01}
0,1826 10^{+00}	0,3014 10^{-01}
0,1897 10^{+00}	0,4661 10^{-01}
0,1959 10^{+00}	0,5398 10^{-01}

temps : 50 jours	
Z (m)	ω
0,7674 10^{-02}	0,5921 10^{-03}
0,2119 10^{-01}	0,7776 10^{-03}
0,3237 10^{-01}	0,4261 10^{-03}
0,4373 10^{-01}	0,5655 10^{-03}
0,5679 10^{-01}	0,9690 10^{-03}
0,6996 10^{-01}	0,3701 10^{-03}
0,8119 10^{-01}	0,4468 10^{-03}
0,9183 10^{-01}	0,1022 10^{-02}
0,1029 10^{+00}	0,4135 10^{-02}
0,1132 10^{+00}	0,1886 10^{-02}
0,1223 10^{+00}	0,1053 10^{-02}
0,1313 10^{+00}	0,1233 10^{-02}
0,1401 10^{+00}	0,2697 10^{-03}
0,1469 10^{+00}	0,8802 10^{-03}
0,1548 10^{+00}	0,2129 10^{-02}
0,1636 10^{+00}	0,7603 10^{-02}
0,1697 10^{+00}	0,2376 10^{-01}
0,1755 10^{+00}	0,4177 10^{-01}
0,1822 10^{+00}	0,3699 10^{-01}
0,1885 10^{+00}	0,4452 10^{-01}
0,1956 10^{+00}	0,5494 10^{-01}

temps : 62 jours	
Z (m)	ω
0,1120 10^{-01}	0,1011 10^{-02}
0,3014 10^{-01}	0,7307 10^{-03}
0,4337 10^{-01}	0,2065 10^{-03}
0,5324 10^{-01}	0,7732 10^{-03}
0,6288 10^{-01}	0,6471 10^{-03}
0,7295 10^{-01}	0,4701 10^{-03}
0,8249 10^{-01}	0,9593 10^{-03}
0,9226 10^{-01}	0,8966 10^{-03}
0,1013 10^{+00}	0,5666 10^{-03}
0,1095 10^{+00}	0,5344 10^{-03}
0,1172 10^{+00}	0,6683 10^{-03}
0,1235 10^{+00}	0,3850 10^{-03}
0,1304 10^{+00}	0,8621 10^{-03}
0,1368 10^{+00}	0,9034 10^{-03}
0,1425 10^{+00}	0,3521 10^{-02}
0,1489 10^{+00}	0,9827 10^{-02}
0,1541 10^{+00}	0,8229 10^{-02}
0,1601 10^{+00}	0,1555 10^{-01}
0,1660 10^{+00}	0,2358 10^{-01}
0,1717 10^{+00}	0,2737 10^{-01}
0,1765 10^{+00}	0,5027 10^{-01}
0,1800 10^{+00}	0,3915 10^{-01}
0,1841 10^{+00}	0,4898 10^{-01}
0,1880 10^{+00}	0,3764 10^{-01}
0,1920 10^{+00}	0,5195 10^{-01}
0,1972 10^{+00}	0,4729 10^{-01}

temps : 90 jours	
Z (m)	ω
0,7097 10^{-02}	0,2666 10^{-01}
0,1811 10^{-01}	0,4041 10^{-01}
0,2994 10^{-01}	0,3825 10^{-01}
0,4251 10^{-01}	0,4115 10^{-01}
0,5104 10^{-01}	0,4060 10^{-01}
0,5958 10^{-01}	0,3384 10^{-01}
0,6844 10^{-01}	0,4058 10^{-01}
0,7757 10^{-01}	0,4150 10^{-01}
0,8713 10^{-01}	0,4631 10^{-01}
0,9590 10^{-01}	0,5058 10^{-01}
0,1043 10^{+00}	0,5431 10^{-01}
0,1127 10^{+00}	0,5351 10^{-01}
0,1204 10^{+00}	0,5427 10^{-01}
0,1265 10^{+00}	0,5512 10^{-01}
0,1323 10^{+00}	0,5539 10^{-01}
0,1390 10^{+00}	0,6003 10^{-01}
0,1459 10^{+00}	0,5729 10^{-01}
0,1518 10^{+00}	0,5821 10^{-01}
0,1573 10^{+00}	0,5962 10^{-01}
0,1636 10^{+00}	0,6185 10^{-01}
0,1687 10^{+00}	0,6203 10^{-01}
0,1730 10^{+00}	0,5754 10^{-01}
0,1799 10^{+00}	0,5941 10^{-01}
0,1870 10^{+00}	0,6308 10^{-01}
0,1949 10^{+00}	0,6151 10^{-01}

temps : 135 jours	
Z (m)	ω
0,8418 10^{-02}	0,5444 10^{-03}
0,2702 10^{-01}	0,4500 10^{-03}
0,4855 10^{-01}	0,4042 10^{-03}
0,6715 10^{-01}	0,6304 10^{-03}
0,8566 10^{-01}	0,8161 10^{-03}
0,1056 10^{+00}	0,1048 10^{-02}
0,1217 10^{+00}	0,1414 10^{-02}
0,1325 10^{+00}	0,1636 10^{-02}
0,1417 10^{+00}	0,1929 10^{-01}
0,1514 10^{+00}	0,4196 10^{-01}
0,1589 10^{+00}	0,5279 10^{-01}
0,1655 10^{+00}	0,5022 10^{-01}
0,1719 10^{+00}	0,5542 10^{-01}
0,1773 10^{+00}	0,5791 10^{-01}
0,1814 10^{+00}	0,5006 10^{-01}
0,1857 10^{+00}	0,6325 10^{-01}
0,1904 10^{+00}	0,6340 10^{-01}
0,1963 10^{+00}	0,5646 10^{-01}

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Références bibliographiques

1. Bacon, G. (1982).
Simulation numérique des transferts de chaleur et de masse dans un milieu poreux non saturé.
Colloque sur les transferts de chaleur et de masse dans un milieu poreux non saturé, Lausanne.

2. Bear, J. (1972).
Dynamics of fluids in porous media.
American E/Sevier publishing company.

3. Berthier, J. (198).
Diffusion de vapeur au travers des parois.
condensation, REEF. 2, CSTB, Paris.

4. Birt, R.B.., W.E. Steward and E.N. hight foot (1960).
Transport phenomena.
Wiley International Edition.

5. Bories, S. (1985).
Fragment de déscription de la physique des transferts thermiques dans les sous-sols.
La houille blanche, Vol. 3/4, pp. 211-219.

6. Bories, S. (1984).
Transferts de chaleur et de masse dans les matériaux. Analyse critique des différents modèles mathématiques utilisés. Humidité dans le bâtiment.
Collège international des sciences de la construction. pp. 13-31.

7. Bories, S. (1982).
Principes physiques de l'évaporation. Transferts de chaleur et de masse entre un matériau poreux et l'atmosphère. Humidité dans le bâtiment.
Collège international des sciences de la construction. pp. 53-71.

8. Bories, S. (1987).
Transport in porous media, notes de cours de P.E.A. Mécanique des fluides.
ENSEE/HT, Toulouse.

9. Brunaver, S. , P.H. Emmett and E. Teller (1988).
Adsorption of gases in multimolecular layers.
J. Amer, S.C. , Vol. 60, pp. 309-319.

10. Crausse, P. (1983).
Etude fondamentale des transferts couplés de chaleur et d'humidité en milieu poreux non saturé.
Thèse de Doctorat d'état, INP de Toulouse.

11. Crausse, P. , G. Bacon and S. Bories (1981).
Etude fondamentale des transferts couplés chaleur-masse en milieu poreux.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 24, N° 6, pp. 991-1004.

12. Daian, J.F. (1986).
Processus de condensation et de transfert d'eau dans un matériau micro et macro poreux.
Thèse de Doctorat d'état, USM de Grenoble.

13. De Vries, D.A. and J. Philip (1957).
Moisture movement in porous materials under temperature gradients.
Trans. Ame. Geoph. Union, Vol. 38, pp. 222-2322.

14. De Vries, D.A. (1958).
Simultaneous transfert of Heat and Moisture in porous media.
Trans. Ame. Geoph. Union, Vol. 39, pp. 909-916.

15. De Vries, D.A. and W.H. Afgan (1975).
Heat and mass transfer in the biosphere. I.. Transfer processes in plant environnement.
Script Book company, Washington.

16. De Vries, D.A (1987).
The theory of heat and moisture transfer in porous media revisited.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 30, N° 7, pp. 1343-1350.

17. Koui, J.V.D. (1971).
Moisture transfer in cellular concrets roofs.
Phd. Thesis, Eind hoven Univ. of Technology, Walman, Delft.

18. Luikov, A.V. (1966).
Heat and mass transfer in capillary porous bodies.
Pergamon Press.

19. Marle, C.M. (1967).
Ecoulements monophasiques en milieu poreux.
Revue de l'institut Français de pétrole, pp. 11471-1509.

20. Marle, C.M. (1984).
Les écoulements polyphasiques en milieu poreux: de l'échelle des pores à l'échelle macroscopiques.
Annales des mines, pp. 1-6.

21. Recan, M. (1982).
Simulation numérique du comportement thermique et hydrique d'un sol nu. Application à l'étude de l'évaporation par télédétection.
Thèse de Docteur Ingénieur, INP de Toulouse.

22. Whitaker, S. (1977).
Simultaneous heat, mass and momentum transfer in porous media.
A theory of drying in porous media.
Adv. in Heat Transfert, Vol. 13, pp. 119-200.

23. Schwartz, L. (1956).
Theorie des distributions
Herman

24. Larbi, S. and S. Bories (1984).
Simulation expérimentale d'un processus de condensation en milieux poreux.
Forth International Meeting on Heat Transfer.

25. Le Pourhiet, A. (1988)
Résolution numérique des équations aux dérivées partielles
Cepadues-Editions
Collection La Cheveche , Toulouse.

26. Tien-Mo, S. (1984)
Numerical Heat transfer
Hemisphere Publishing Corporation.