

0/95
6

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT *Genie Mecanique*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Modelisation de Robots Manipulateurs
en chaine cinematique simple
ayant 2 à 6 degrés liberté
liaison pivot et / ou glissière*

Proposé par :

Mohamed MAQANI

Etudié par :

BOUTAOUI Acellane
FACI Ismaïl

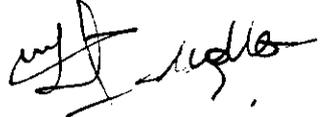
Dirigé par :

Mohamed MAQANI

PROMOTION
Juin 1995

A la mémoire de mon père décédé en Août 92 ;
A la mémoire de mon frère Abd-Rezak décédé en Avril 94
A ma chère mère qui a su surmonter les moments difficiles
tout en m'accordant l'amour, le courage et le soutien le long
de ma formation.

A mes frères et sœurs en "Billal et Samiha";
A mon oncle Med-Saïd
A mes oncles Mokhtar et Med ainsi qu'à tous, mes
cousins et cousines, en particulier 'Ryadh'
A tous mes amis(es) en particulier Kader, Malik et Réda
je dédie ce travail

A. Boutsou


A ma mère qui m'a accordé tout son amour le long de
ma formation ;

A mon père pour ses encouragements et son soutien ;
A mes frères et sœurs, sans oublier ma nièce La bien-aimée
'Jmène'

A tous mes amis, en particulier Rabia

A tous ceux-là ;

Je dédie ce modeste travail

J. Foci


REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, Nous tenons à remercier très sincèrement toutes les personnes qui nous ont aidé pour réaliser ce modeste travail et qui de près ou de loin nous ont permis de mener à bien ce travail.

Nous exprimons notre profonde reconnaissance à monsieur M. MADANI Maître Assistant à l'E.N.P.A, pour nous avoir proposé un sujet passionnant, et avoir dirigé et suivi avec intérêt nos travaux, pour nous avoir permis de bénéficier de son expérience et de ses conseils.

Nous remercions sincèrement tout les enseignants au sein de notre département **GENIE-MECANIQUE** qui ont contribué à notre formation et pour leurs encouragements et leurs aides.

Résumé .

Le travail de cette thèse , motivé par un problème industriel concret , soit la modélisation des robots manipulateurs , a conduit au développement d'un logiciel a la modélisation en Robotique . Ce dernier permettra d'élaborer les modèles géométrique, cinématiques et dynamiques de tout robot de structure à chaîne cinématique simple ayant de 2 à 6 degrés de liberté avec des liaisons prismatiques et/ou rotoïdes .

Abstract .

The work of this thesis , motivated by a concrete industrial problem , that is the modelling of manipulator robots has led to develop an aid's computer program in the area of modelling robots . This tool will allow to elaborate geometrical , kinetic and dynamic models for all robot of simple kinetic chain structure having two(2) to six(6) degrees of freedom .

ملغص .

وان عمل هذه الأطروحة ، المعرف بوساطة مشكل صناعي مُجَسَّد "ألا وهو نمذجة الروبوتات الممارسة" قد أدى إلى تطوير برنامج معلوماتي للمساعدة على النمذجة في ميدان الروبوتات ، وستسمح هذه الأداة بإعداد النماذج الهندسية ، الحركية والديناميكية لكل ما هو روبوت يتميز ببنية ذات سلسلة حركية بسيطة من 2 إلى 6 درجات للحرية .

SOMMAIRE

I- INTRODUCTION

I-1- INTRODUCTION	1
I-2- ORGANISATION DU RAPPORT	2

II- GENERALITES

II-1- INTRODUCTION	5
II-2- CLASSIFICATION DES ROBOTS	5
II-3- STRUCTURES DU BRAS DE ROBOT	8
II-3-1 LES ROBOTS CARTESIEN	8
II-3-2 LES ROBOTS CYLINDRIQUES	9
II-3-3 LES ROBOTS SPHERIQUES	10
II-3-4 LES ROBOTS ARTICULES	10
II-4- CONSTITUTION D'UN ROBOT MANIPULATEUR	12
II-4-1 DEFINITION DES LIAISONS	12
II-4-2 STRUCTURE DES ROBOTS MANIPULATEURS	13

III- NOTIONS MATHEMATIKES

III-1 INTRODUCTION	16
III-2 NOTIONS DE MATRICES TENSORIELLES ET MATRICES VECTORIELLES	17
III-3 NOTION D'ESPACE AFFINE EUCLIDIEN	17
III-3-a CHANGEMENT DE REPERE VECTORIEL ET AFFINE	18
III-3-b COMPOSANTES HOMOGENES D'UN VECTEUR, COORDONNEES HOMOGENE D'UN POINT, NOTIONS DE MATRICE DE PASSAGE HOMOGENE	20
III-4 LES DIFFERENTES REPRESENTATION RENCONTREES EN MECANIQUE	21
III-4-1 EXPRESSION DU BI-POINT OM	21
III-4-1-1 COORDONNEES CARTESIENNES	21

III-4-1-2 COORDONNEES CYLINDRIQUES	21
III-4-1-3 COORDONNEES SPHERIQUES	22
III-5 REPRESENTATION DE LA CHAINE DU SOLIDE CONSTITUANT LE ROBOT	23
III-5-1 REPERE LIE AU SOLIDE S_k	24
III-5-2 REPERE LIE AU SOLIDE S_{k-1}	28
III-5-3 LIAISON ENTRE S_{k-1} ET S_k	29
III-6 NOTION D'INVERSE GENERALISEE, DE PSEUDO- INVERSE ET DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES	31
III-6-1 INVERSE GENERALISEE	31
III-6-2 PSEUDO-INVERSE	33

IV- SYNTHESE DIMENSIONNELLE

MODELISATION DES ROBOTS MANIPULATEURS

IV-A- MODELISATION GEOMETRIQUE

IV-A-1 INTRODUCTION	41
IV-A-2 INTERET DE LA MODELISATION GEOMETRIQUE	41
IV-A-3 SITUATION DE L'ORGANE TERMINAL	43
a- POSITION DE L'OUTIL DE TRAVAIL	44
b- ORIENTATION DE L'OUTIL DE TRAVAIL	45
c- COORDONNEES GENERALISEES D'UN ROBOT MANIPULATEUR	47
IV-A-4 MODELE GEOMETRIQUE D'UN ROBOT MANIPULATEUR	47
IV-A-5 POSITION ET ORIENTATION EN UTILISANT LES MATRICES DE ROTATION	47
1- ORIENTATION D'UN REPERE R_i / R_{i+1}	48
2- POSITION D'UN POINT P PAR RAPPORT AU REPERE R_i	50

IV-A-6 POSITION ET ORIENTATION EN UTILISANT LES MATRICES HOMOGENES	51
IV-A-7 NOTATION DE DENAVIT ET HARTEMBERG POUR LA MODELISATION DES ROBOTS	52
IV-A-8 POSITION ET ORIENTATION DE L'OUTIL DE TRAVAIL	55
IV-A-9 EXPRESSION DU MODELE GEOMETRIQUE DIRECT	56
IV-A-10 PROGRAMME FAI_MG	58
IV-A-11 APPLICATIONS	60
1- APPLICATION AU ROBOT TH8	60
2- APPLICATION AU ROBOT PUMA	61
MODELISATION GEOMETRIQUE INVERSE	
IV-A-13 METHODE ANALYTIQUE	64
IV-A-13-1 PRINCIPE	64
IV-A-14 METHODE NUMERIQUE ITERATIVE	66
IV-A-15 MODELE GEOMETRIQUE INVERSE DE TH8	67
IV-A-16 MODELE GEOMETRIQUE INVERSE DE PUMA	70
IV-B MODELISATION CINEMATIQUE	73
IV-B-1 INTRODUCTION	73
IV-B-2 INTERET	73
IV-B-3 MODELISATION CINEMATIQUE BASEE SUR LES LOIS DE COMPOSITION DE VITESSES	74
IV-B-4 MODELISATION CINEMATIQUE UTILISANT LA MATRICE JACOBIEENNE	77
1-METHODE DE PRODUIT VECTORIEL	78
2-MODELE VARIATIONNEL	80
IV-B-5 PROGRAMME FAI_MC	85
MODELISATION CINEMATIQUE INVERSE	88

IV-C MODELISATION DYNAMIQUE	
IV-C-1 INTRODUCTION	90
IV-C-2 FORMALISMES DE MODELISATION DYNAMIQUE	91
IV-C-3 FORMALISME DE LAGRANGE	93
IV-C-3-1 VITESSE DES ARTICULATIONS DU ROBOT	94
IV-C-3-2 ENERGIE CINETIQUE TOTALE DU ROBOT	97
IV-C-3-3 ENERGIE POTENTIELLE TOTALE DU ROBOT	99
IV-C-3-4 MODELE DYNAMIQUE DES ROBOTS MANIPULATEURS	99
IV-C-4 PROGRAMME FAI_MD	101
IV-C-5 MODELE DYNAMIQUE DU ROBOT TH8	101
V- TESTS ET RESULTATS	108
V-1-INTRODUCTION	108
V-2-VOLUME DE TRAVAIL	108
V-3-ERREURS DE MODELISATION	110
A- TESTS DU MODELE GEOMETRIQUE	111
B- TESTS DU MODELE CINEMATIQUE	112
- CONCLUSION	122
- BIBLIOGRAPHIE	124
- ANNEXE	
ANNEXE-A-	
ANNEXE-B-	

CHAPITRE I

INTRODUCTION

*«Car il est plus facile , une fois qu'on
a acquis une certaine connaissance des
questions , d'en imaginer ensuite la
démonstration , que si l'on recherchait celle-ci
sans aucune notion préalable »*

ARCHIMEDE

INTRODUCTION:

L'accroissement des cadences de production dans l'industrie , l'amélioration de la qualité des produits manufacturés ont été permis par l'automatisation et la robotisation . Le rythme de travail et la qualité exigés ne peuvent être pris en charge par l'homme , cela a conduit l'industrie a remplacer l'homme par des robots industriels qui font le même travail , avec un meilleur rendement et une qualité supérieure . Ils ont l'avantage d'exécuter des tâches répétitives sans dégradation de la qualité du produit . Ils peuvent aussi accomplir des tâches dans des milieux hostiles à l'homme , citons l'exemple des travaux tels qu'arrimer un satellite à une navette spatiale , effectuer des réparations dans une centrale nucléaire , soulever des charges lourdes (manutention) , les déplacer rapidement avec une bonne précision de façon répétitives etc

Le développement de la robotisation dans l'industrie s'est orienté vers l'utilisation des robots spécialisés ou spécifiques ; un robot qui fait de la peinture ne sera pas le même qu'un robot de soudure ou de métallurgie . Ces robots seront conçus pour une exécution optimale de la tâche .

L'art de la manipulation , qui est donné à l'homme , pose problème à un robot , car l'exécution optimale de la tâche assignée à un robot , ne pourra se faire que sur la base d'une étude , d'une conception et d'une analyse des performances du robot qui devra exécuter la tâche .

L'étude , la conception et l'analyse des performances peut être réaliser à l'aide d'un modèle purement mathématique du robot . Ce modèle permettra de prévoir le comportement réel de ce dernier .

Trois classes de modèles de robots , permettent de couvrir l'ensemble des tâches exécutées par les robots industriels , ces trois types sont :

- Le modèle géométrique (mise en position)
- Le modèle cinématique (mise en vitesse)
- Le modèle dynamique (mise en cinétique)

1. Le modèle géométrique est un modèle qui couvre un domaine ou la tâche exécutée par le robot doit être précise(exemple du positionnement de l'organe terminal) , de plus cette tâche ne devra pas être rapide .

2. Le modèle cinématique , quant à lui , couvre un domaine ou la tâche peut être assez rapide . La vitesse de déplacement de l'outil de travail du robot étant régie par une loi de vitesse bien déterminée .
3. Le modèle dynamique couvre un domaine ou la tâche fait appel à des vitesses importantes . Ces dernières vont générer des effets dynamiques que ce modèle peut prendre en compte .

Préalablement à toute simulation ,une étape fondamentale consiste à élaborer le modèle du robot dont on veut analyser les performances ou que l'on veut concevoir . Différent formalismes et différentes représentations permettent d'élaborer des modèles en robotique .

La tâche délicate et complexe d'élaboration des modèles pourrait être facilitée si l'analyste et le concepteur disposaient de procédures programmées qui permettraient :

- Une implantation facile des modèles sur le calculateur .
- Une modification souple des paramètres de ces modèles.
- La simplification de ces modèles .

Nous nous sommes proposé de concevoir et réaliser un logiciel d'aide à la modélisation en robotique . Cet outil permettra d'élaborer les modèles géométrique , cinématique et dynamique de tout robot de structure à chaîne cinématique simple ayant de deux à six degrés de liberté avec des liaisons prismatiques et/ou rotoïdes .

ORGANISATION DU RAPPORT :

Nous donnons dans cette partie une vue de l'organisation de l'exposé et les parties essentielles traitées pour les robots manipulateurs .

Notre travail est présenté en cinq chapitres :

Le deuxième chapitre aborde les généralités sur les différentes structures et les différents types de tâches que peut le robot manipulateur effectuer , ainsi que la relation existant entre les robots et leurs environnement ; enfin nous introduisons les différentes configurations pour un robot ainsi que leurs domaine de validité .

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des transformations cinématique pour la manipulation des robots industriels . Il nous permet de définir les notions mathématiques nécessaires pour l'obtention des modèles géométrique , cinématique et dynamique , citons par exemple :

- Les notions des tenseurs .
- Les notions de matrices de passage homogènes de DENAVIT-HARTEMBERG .
- La notion de l'inverse généralisé , pseudo-inverse etc....

Le troisième chapitre qui est le plus important dans notre étude , est consacré à l'obtention des modèles géométrique , cinématique et dynamique .

Nous avons partagé ce chapitre en trois grandes lignes :

- Modélisation géométrique : nous permet d'exprimer la position et l'orientation de l'outil de travail du robot (situation) en fonction des positions et orientations des différents corps qui le constituent .

L'élaboration de ce modèle fait appel à plusieurs méthodes [GOR84][COI81]. Nous avons choisi la méthode la plus simple et qui donne un maximum d'informations avec un minimum de calculs . Cette méthode est celle de DENAVIT-HARTEMBERG [MEG84].

Nous avons élaboré le modèle géométrique inverse en utilisant la méthode itérative pour un robot de 2 à 6 degrés de liberté en chaîne cinématique simple ; avec l'exposition de la méthode analytique pour les robots PUMA600 et TH8 [MEG84] .

- Modélisation cinématique : présente l'expression de la vitesse de translation et la de rotation de l'outils de travail en fonction des différentes vitesses articulaires . Ceci peut être fait à l'aide de plusieurs méthodes [YOU87][GOR84], nous avons choisi celle de WHITNEY qui consiste à calculer la matrice jacobienne du modèle géométrique . Nous avons abordé le modèle cinématique inverse , ce calcul a été fait en inversant la matrice jacobienne .

- Modélisation dynamique : qui établit l'expression des forces généralisées en fonction des coordonnées , vitesses et accélérations généralisées . Plusieurs formalismes [CAZ89] ont été étudiés , nous avons choisi le formalisme de LAGRANGE avec

l'utilisation de la méthode de DENAVIT-HARTEMBERG [MEG84][PAU82] qui est orientée vers le domaine de la conception et de la commande .

Le cinquième chapitre : Finalement , nous achevons notre travail par application du logiciel élaboré au robot PUMA ,une conclusion générale et des perspectives .

CHAPITRE II

GENERALITES

*Notre ennemi dans l'étude c'est la
suffisance ; quiconque veut réellement apprendre doit
commencer par s'en débarrasser .*

*« S'instruire sans jamais s'estimer satisfait »
et*

*« Enseigner sans jamais se lasser »
telle doit être notre attitude .*

MAO TSE -TOUNG

II-1-INTRODUCTION:

La modélisation est utilisée en robotique , dans le but de simuler le comportement réel du robot , donc d'analyser son comportement sans avoir a le faire sur le robot lui même , manipulation qui pourrait le détruire . La modélisation est utilisée aussi pour réaliser la synthèse des lois de commande en simulation .

L'expérience industrielle a fait appel a des robots qui doivent exécuter des taches très diverses ,telles que :

- l'alimentation et le chargement des machines outils ;
- la manutention dans l'industrie(métallurgie par exemple) ;
- la peinture au pistolet;
- le soudage ;
- l'usinage des pièces (ex. perçage)

L'étude de ces taches ,montre qu'il y a des robots qui manipulent des objets légers a faibles vitesses mais avec une bonne précision (ex. de la soudure) . il y a par contre des robots qui manipulent des objets lourds a grandes vitesses sans une précision (cas de l'industrie métallurgique) . Donc l'un des critères de classification des robots sera la tache qu'ils devront réaliser .

Les performances d'une tache sont sa durée d'exécution et sa précision. L'expérience montre qu'il faut faire un compromis entre la précision du robot et sa vitesse d'exécution.

II-2-CLASSIFICATION DES ROBOTS:

Dans une tentative de classification , deux définitions ont été proposes pour qualifier un robot .L'une des deux définitions provient de la J.I.R.A. (japan industriel robot industry association) qui décrit un robot comme étant un système versatile dote d'une mémoire et pouvant effectuer des mouvements comme ceux d'un opérateur humain. De son cote le R.I.A (robot institute of america) , définit un robot comme étant un manipulateur a fonctions multiples pouvant être programmes pour réaliser automatiquement des taches variées éventuellement répétitives .

Ces deux définitions sont très grossières et de façon à décrire plus précisément les robots ; la J.I.R.A. a répertorié six classes de robots :

CLASSE N° 1:

Manipulateur manuel: Ce robot est actionné par un opérateur humain.

CLASSE N° 2:

Robot à séquence de travail fixe: Cet appareil réalise de façon répétitive une succession d'opérations en suivant un protocole fixe à l'avance, mais la séquence des différentes étapes de travail du robot est difficile à modifier.

CLASSE N° 3:

Robot à séquence de travail évolutive: Ce type de robot a les mêmes caractéristiques que le robot précédent. Il se positionne automatiquement de façon répétitive en des sites prédéterminés. Cependant dans ce système, la séquence des diverses opérations que doit effectuer le robot est facilement modifiée.

CLASSE N° 4:

Robot copieur :Il est capable de reproduire des mouvements qui ont été exécutés sous contrôle d'un opérateur humain et qui ont été enregistrés dans une mémoire. Ce type d'opération sous-entend aussi que l'ensemble des opérations que doit réaliser le robot a été enregistré. Par exemple, la position du robot a un instant donné, mais aussi la tâche qu'il doit réaliser en chaque point de sa trajectoire. En fonctionnement en exlave, le robot copieur exécute automatiquement et de façon répétitive une séquence opératoire qui a été enregistré(playback- robot).

CLASSE N°5:

Robot à commande numérique: Ce robot présente la particularité d'être contrôlé de façon numérique. Il exécute des opérations enregistrées comme un robot copieur et il est directement programmable.

CLASSE N°6:

Robot intelligent: Ce type de robot est doté de moyens sensoriels de perceptions de l'environnement comme le sens visuel, le sens tactile, et il est capable de s'adapter aux changements éventuels des conditions de travail ou de l'environnement tout en continuant à exécuter une tâche donnée, programmée ou enregistrée à l'avance.

Nous pouvons aussi classer les robots d'après:

- Le type de trajectoire: point à point ou continue.
- La structure du bras du robot: robot cartésien, robot cylindrique, robot sphérique ou robot articulé.

Les choix de la structure du robot et du type de trajectoire dépendent de la tâche qu'il devra réaliser.

A/ SYSTEMES POINT A POINT ET A TRAJECTOIRE CONTINUE:

On pourrait penser que deux robots, dont l'un fait de la soudure par point et l'autre de la soudure à l'arc, sont tout à fait similaires, seuls leurs outils paraissent différents. Il s'agit en réalité de deux robots très différents.

A-1- LES SYSTEMES POINT A POINT:

Les robots de soudure par point sont un bon exemple de systèmes point à point. Un tel robot se déplace d'un point à l'autre, positionne ses électrodes, serre les tôles à assembler, effectue sa soudure et réitère ce cycle, le robot positionnera ensuite son outil de travail à son point de départ pour opérer sur un autre assemblage.

La description la plus générale d'un tel robot est la suivante:

le robot se déplace jusqu'en un point dont les coordonnées ont été numériquement définies. Une fois rendu à ce point, il s'arrête. Le manipulateur effectue alors une tâche, sans déplacement de l'ensemble de la structure. Après exécution, le robot se déplace vers un nouveau point pour effectuer le même travail.

Pour un système point à point, la trajectoire du robot et sa vitesse d'évolution entre deux points n'ont aucune importance. Son évolution peut être faite de deux manières différentes:

1) Il effectue ses déplacements suivants ses différents degrés de liberté aussi rapidement que possible, donc il effectue entre deux points des trajectoires hors contrôle.

2) Il effectue de façon simultanée l'ensemble des déplacements prévus par chacun de ses degrés de liberté, il en résulte une trajectoire plus régulière sans discontinuité.

A-2-LES SYSTEMES A TRAJECTOIRE CONTINUE:

Ces robots effectuent leurs travail en suivant un chemin prédéfini, à allure relativement régulière pour faire, par exemple de la soudure à l'arc. Les degrés de liberté de ces robots évoluent tous simultanément de façon à obtenir un suivi précis de la trajectoire. Les évolutions relatives à chaque degré de liberté s'effectuent à des vitesses différentes. La coordination de l'ensemble est assurée par le calculateur de commande.

Pour ce type de robot, la trajectoire décrite dépend de la position de l'outil de travail, ainsi que des différents rapports qui existent entre les vitesses de chaque degré de liberté. La vitesse composée de l'outil de travail affecte la qualité du travail effectué. Par exemple: des variation de vitesse d'une électrode de soudure peuvent entraîner un cordon de soudure non homogène(surépaisseur ou manque du métal d'apport)

II-3-STRUCTURE DU BRAS DU ROBOT:

En ce qui concerne la structure des robots, nous pouvons les classer en fonction des systèmes de coordonnées dan lesquels il travaillent:

- Robots cartésiens :Il ont trois axes de translations.
- Robots cylindriques: Il ont deux axes de translations et un axe de rotation.
- Robots sphériques: Ils ont un axe de translation et deux axes de rotations.
- Robots articulés: Ils ont trois axes de rotations.

Le système de coordonnées dans lequel il faut travailler dépend de l'application à mettre en oeuvre. Un robot cylindrique convient bien à une presse d'estampage, alors qu'un robot articulé pourrait effectuer des soudures à divers endroits invisibles depuis sa base. Une des caractéristiques du robot est son espace de travail, ce dernier est le volume accessible par l'outil du travail du robot.

II- 3-1- LES ROBOTS CARTISIENS:

La structure du robot cartésien possède trois degrés de liberté qui sont des translations. Les déplacements s'effectuent au moyen de glissières(cf. fig. I-1).Le poignet d'un tel robot peut effectue un déplacement rectiligne à vitesse continue. Il n'est pas très répandu dans l'industrie,parcequ'il manque de flexibilité. Il ne peut atteindre des objets situés au sol ou invisible de sa base.

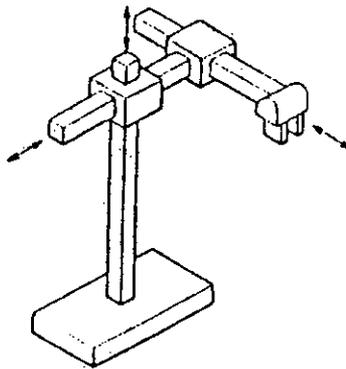


FIG II-1 Robot Cartésien

II-3-2 LES ROBOTS CYLINDRIQUES:

Le bâti d'un robot cylindrique est constitué d'un bras horizontale supporté par une colonne verticale, cette dernière étant montée sur un support rotatif. Le bras peut s'éloigner et se rapprocher de la colonne, le support du bras peut monter et descendre le long de la colonne (cf. fig. I-2). Les performances dynamiques d'un tel robot sont difficiles à obtenir, du fait que la distance entre la charge portée par l'outil et la colonne est variable, ceci provoquera un couple résistant variable au moteur du bâti, ceci sera encore plus difficile si la charge est variable.

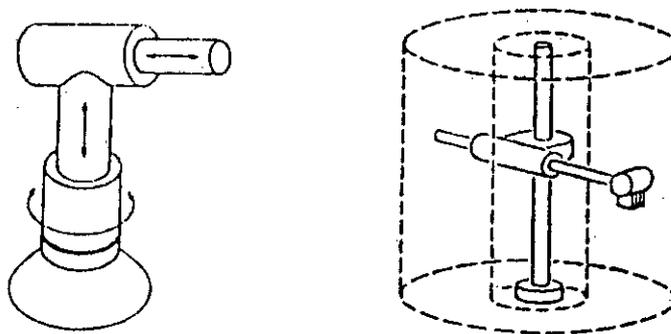


FIG II-2-Robot Cylindrique

II-3-3-LES ROBOTS SPHERIQUES:

IL ressemble à une tourelle de char. Il est constitué d'un bâti rotatif, d'une colonne verticale qui supporte un axe de rotation verticale autour duquel peut tourner un bras à déplacement télescopique (cf. fig I-3).

Ce type de robot n'est pas très précis du fait de l'amplification des erreurs angulaires des axes de rotations sur la position de l'organe terminal. Il reste cependant très utilisé par rapport aux robots cartésiens et cylindriques à cause de sa flexibilité d'utilisation. Son axe horizontal lui permet d'atteindre des objets situés à des niveaux inférieurs à celui de son bâti.

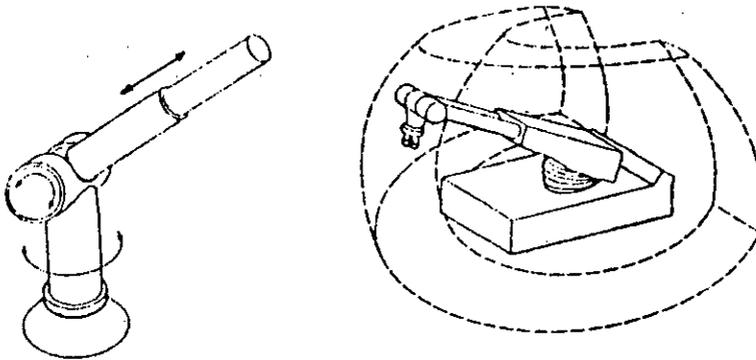


FIG II- 3-Robot Sphérique.

II-3-4-LES ROBOTS ARTICULES:

Les robots articulés se composent d'un assemblage de trois éléments. Un bâti rotoïde horizontale qui supporte un bras à deux articulations, cet arrangement copie le bras humain (cf. fig. I-4). Du fait que ce genre de robot possède trois articulations rotoïdes, sa précision reste assez mauvaise en bout de bras, puisque s'y accumulent les imprécisions des trois articulation. En revanche ce type de robot possède une excellente souplesse, il peut s'adapter à beaucoup de tâches.

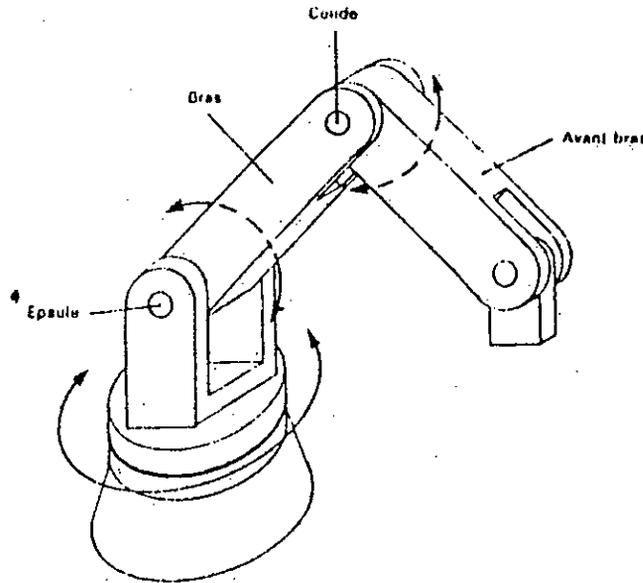


FIG-II-4-Robot Articulé.

Remarques:

Pour une tâche bien déterminée, nous devons choisir le type de robot, et le type de trajectoire qu'il suivra, exemple[KOR86]:

- ⇒ Un robot qui fera de la manutention, de l'alimentation, du déchargement sera du type cylindrique ou sphérique avec de trajectoire continue. Nous choisissons cette trajectoire parceque le robot est situé à proximité des machines outils qui réalisent les pièces, si ce n'est pas le cas ce sera une trajectoire point à point.
- ⇒ Un robot de soudure point à point, sera un robot sphérique avec trajectoire point à point.
- ⇒ Un robot qui fera de la soudure à l'arc, sera un robot de type articulé ayant au minimum quatre(4) degrés de liberté avec un trajectoire continue.
- ⇒ Un robot qui fera de l'assemblage, sera de type articulé avec de trajectoire continue.
- ⇒ Un robot qui fera de la peinture au pistolet, sera un robot de type articulé d'au moins cinq(5) degrés de liberté avec un trajectoire continue.

IL est important de savoir que le choix du type de robot et du type de trajectoire n'est pas le même pour la même tâche. Le prix du robot est aussi un autre critère de choix

pour l'utilisateur. Plus un robot est flexible plus il est cher, plus le robot est précis et rapide plus il est cher.

II-4-CONSTITUTION D'UN ROBOT MANIPULATEUR:

II-4-1 DEFINITIONS DES LIAISONS:

La structure mécanique d'un robot manipulateur est un ensemble de corps, rigides, assemblés à l'aide de liaisons. Une liaison entre deux corps permet une mobilité relative de l'un par rapport à l'autre. Une liaison qui permet un mouvement de rotation est une liaison rotoïde (R) ou pivot, par contre celle qui permet un mouvement de translation est une liaison prismatique (P) ou glissière.

Afin d'uniformiser le vocabulaire, nous utilisons le terme liaison rotoïde (R) et liaison prismatique (P). Nous utilisons ainsi les symboles indiqués sur la fig-II-5 (cf. fig-II-5) pour schématiser une liaison rotoïde et une liaison prismatique.

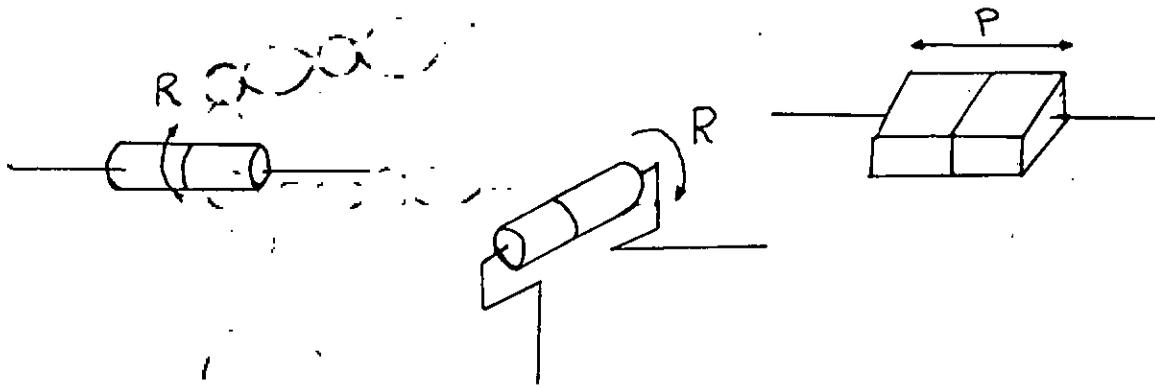


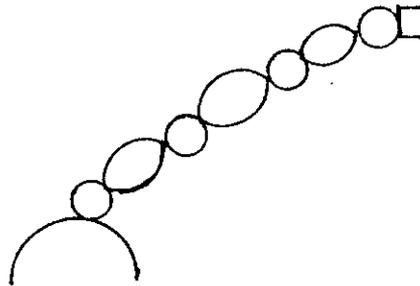
FIG-II-5-Symboles Des Liaisons Prismatiques et Rotoïdes.

Les corps et les liaisons qui constituent le robot sont numérotés de 0 à N à partir de la base de façon à ce que la liaison L_i soit située entre le corps C_{i-1} et C_i (cf. Fig-II-6), le C_{i-1} est fixe par rapport à la liaison L_i , C_i est mobile par rapport à la liaison L_i .

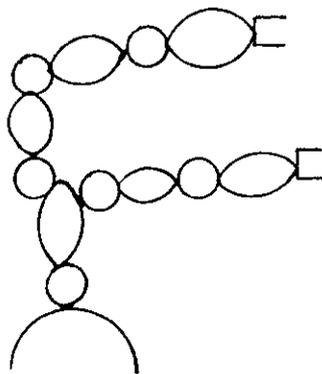
II-4-2-STRUCTURE DES ROBOTS MANIPULATEURS:

Les corps C_i et les liaisons L_i constituant le robot manipulateur peuvent être disposés à partir d'un corps de référence C_0 ou base ,comme suit:

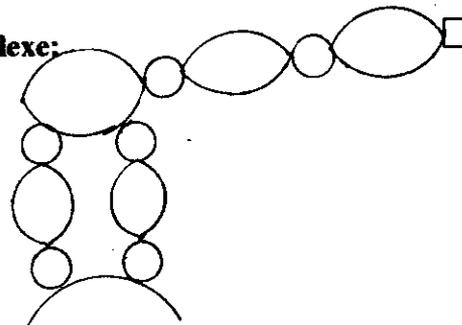
-Structure en Chaîne Simple:



-Structure en Chaîne Arborescente:



-Structure en Chaîne complexe:



Notre étude s'applique aux robots manipulateurs ayant une structure en chaîne cinématique simple ,le premier corps(C_1)de la chaîne est articulé sur un bâti(base fixe; corp C_0), le dernier corps constitue l'outil de travail, le nombre de degrés de liberté est égale au nombre de paramètres indépendants qui définissent la position et l'orientation de l'organe de travail.

Application: La figure (II-7) (cf. fig-II-7) présente le robot TH8 de RNUR ayant six liaisons ,de type RPP+RRR, la figure (II-8) (cf. fig II-8) présente le robot PUMA600 ayant 6 liaisons, de type RRR+RRR.

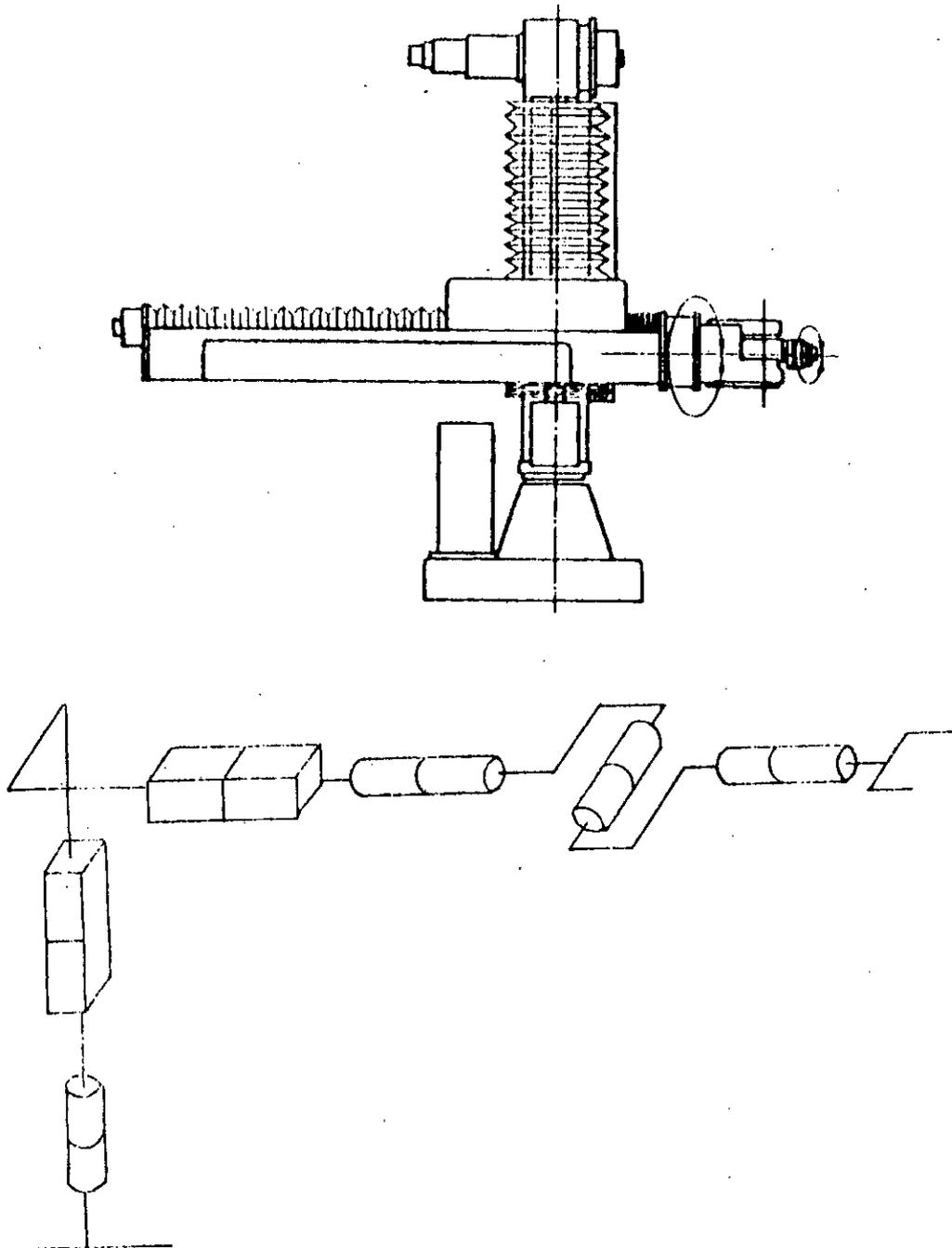


Fig II - 7 Robot TH8 de type RPP RRR

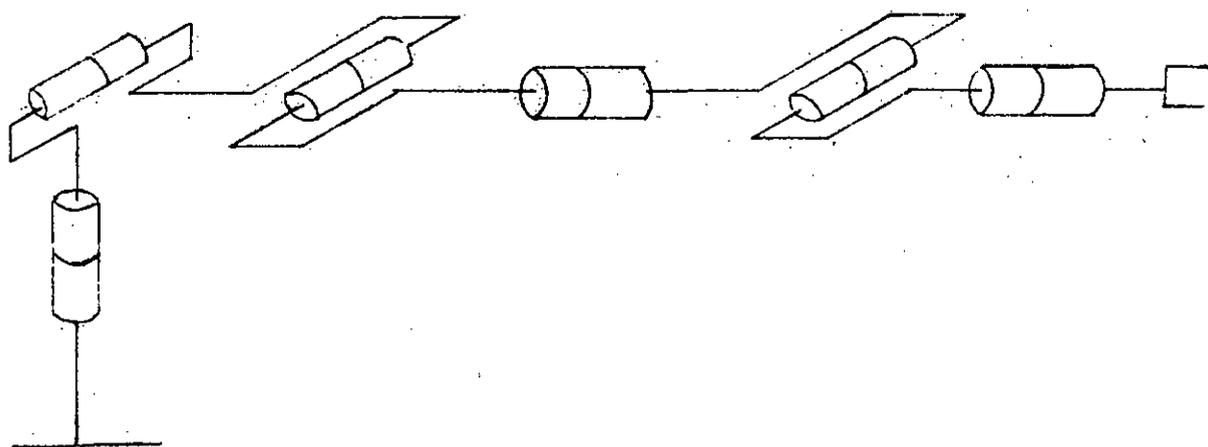
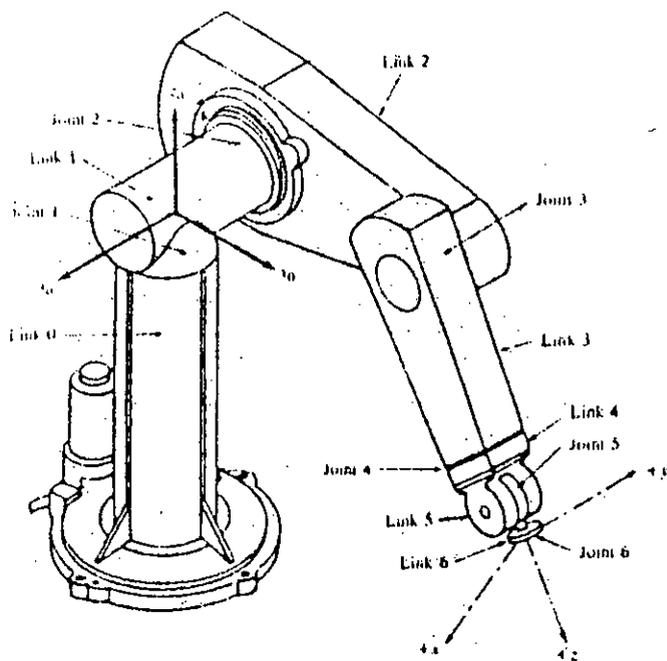


Fig II - 8 Robot PUMA de type RRR RRR

CHAPITRE III
NOTIONS MATHÉMATIQUES



*La pensée n'est qu'un éclair
au milieu d'une longue nuit, mais
c'est cet éclair qui est tout*

HENRI POINCARRE

III.1- Introduction:

La modélisation d'un robot manipulateur fait appel à des méthodes de calcul de la mécanique qui s'appliquent bien à l'étude des robots qui ont une structure de chaîne simple et dont les liaisons ne comportent qu'un seul degré de liberté, de type glissière et/ou pivot.

L'utilisation de ces méthodes suppose une bonne maîtrise des notions mathématiques précises. Nous avons jugé intéressant de regrouper les notions utiles pour une réalisation ultérieure.

L'obtention des modèles géométriques et différentiels, directs, inverses, et dynamique, qui fait l'objet de notre étude, est uniquement basé sur des considérations géométrique. Notre but étant de systématiser les calculs, pour une vaste classe de robots manipulateurs. Des outils mathématiques appropriés doivent être utilisés. L'algèbre matricielle qui est un outils privilégié conduit à des résultats extrinsèques valables uniquement, dans un repère particulier.

C'est la raison pour laquelle nous proposons, dans cette étude, des méthodes de calculs intrinsèques qui conduisent à des résultats généraux.

L'outil convenable à une telle démarche est l'algèbre tensorielle. Nous commençons cette partie par un rappel de la notion de tenseur et des principales opérations de l'algèbre tensorielle, de plus nous définissons les notions de matrices vectorielles et tensorielles que nous utiliserons pour le calcul de la matrice jacobienne qui intervient, dans le modèle différentiel direct, puis nous exposons la notion de matrice de passage homogène, utilisée pour les changement de repères affinis. Cette matrice de passage homogène, permet de systématiser l'obtention des modèles géométriques et différentiels, ainsi que le modèle dynamique.

III.2- Notion de matrice vectorielle et de matrice tensorielle:

III.2.1- Définition:

Une matrice vectorielle est un tableau rectangulaire de vecteurs. Une matrice tensorielle est un tableau rectangulaire de tenseurs. Par exemple

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_{11} & \vec{V}_{12} & \vec{V}_{13} \\ \vec{V}_{21} & \vec{V}_{22} & \vec{V}_{23} \end{bmatrix} \text{ est une matrice vectorielle de dimension } 2 \times 3$$

et

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \text{ une matrice tensorielle d'ordre 2.}$$

Si l'on respecte la règle des dimensions, il est possible d'étendre le produit matriciel classique (entre matrice scalaires) au produit entre matrice vectorielles et /ou tensorielles à condition de remplacer le produit classique par le produit *contracté*.

III.3- Notion d'espace affine Euclidien:

Donnons-nous un point arbitraire fixe O que nous appelons origine. A chaque vecteur \vec{v} de l'espace vectoriel euclidien E l'ensemble des points P ainsi obtenus est l'espace affine euclidien ξ , d'origine O , associé à l'espace vectoriel euclidien E . De la même façon que le vecteur \vec{v} peut être défini par ses composantes dans le repère vectoriel euclidien

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}).$$

Le point P peut être défini par ses coordonnées dans le repère affine euclidien $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$.

a) Changement de repères vectoriel et affine:

Considérons deux repères vectoriels orthonormés différents $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$.

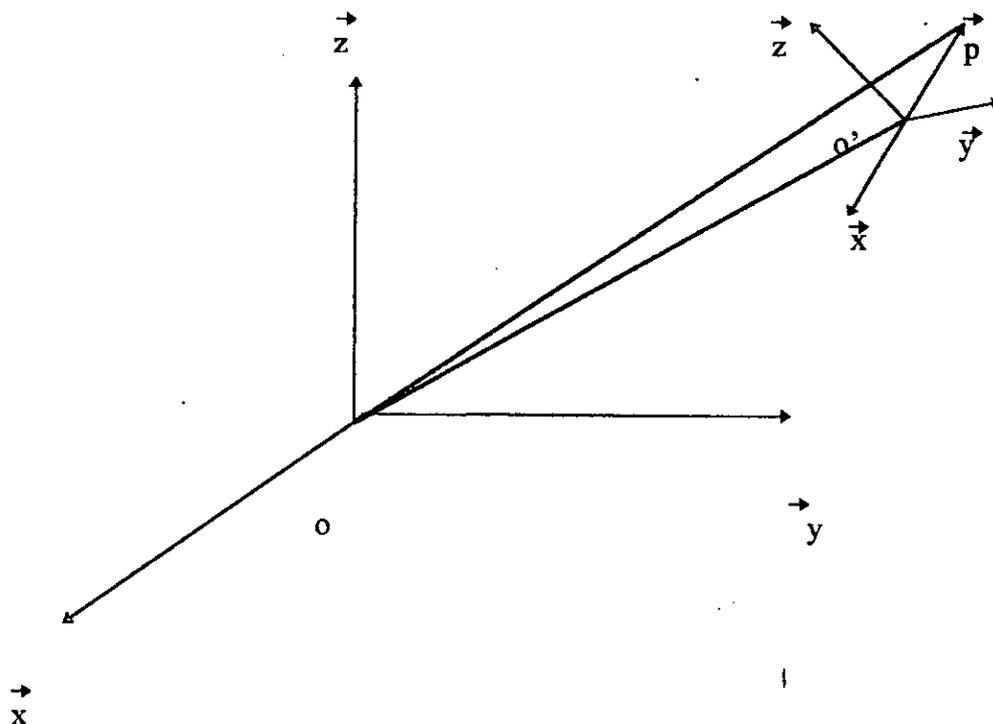
Nous appelons matrice de passage classique du repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ou repère $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ la matrice carrée R d'ordre 3, qui permet d'exprimer la matrice colonne $[V]$ de dimension (3×1) , des composantes d'un vecteur \vec{V} dans le repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ en fonction de matrice colonne $[V']$ de dimension (3×1) de ses composantes dans le repère $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$.

$$\vec{V} = R \vec{V}' \dots \dots \dots (1)$$

- Rappelons que la matrice R est orthonormale:

$$R^{-1} = R^t$$

Considérons maintenant les deux repères affines représentés:



L'équation entre bi-point: $\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$ permet de calculer les coordonnées $x, y,$ et z du point P dans le repère affine (o, x, y, z) en fonction de ses coordonnées X, Y, Z dans le repère affine (o', X, Y, Z) connaissant les coordonnées l, m, n du point o' dans le repère affine (o, x, y, z) :

Si l'on pose $\vec{v} = (x, y, z)^t, \vec{v}' = (X, Y, Z)^t$

$$P = (l, m, n)^t$$

on obtient:

$$\vec{V} = P + R \cdot \vec{v}' \dots\dots (2)$$

La comparaison des équations (1) et (2) montre la différence de nature qui existe entre changement de composantes d'un vecteur et unchangement de coordonnées d'un point. L'équation (1) est linéaire et l'équation (2) affine. Afin

d'unifier ces équations J.DENAVIT et R.S. HARTENBERG ont proposé, en 1955, les notions de composantes et coordonnées homogènes.

b) - Composantes homogènes d'un vecteur, Coordonnées homogènes d'un point, Notion de matrice de passage homogène:

- Les composantes homogènes d'un vecteur sont les quatre scalaires obtenus en adjoignant la valeur "0 " au trois composantes classiques

$$\begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

Les coordonnées homogènes d'un point sont sont les quatre scalaires obtenus en adjoignant la valeur " 1 " au trois coordonnées classiques:

$$\begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} \dots\dots(4)$$

Ces deux équations, désormais linéaires, font intervenir, une matrice carrée d'ordre 4, dénommée matrice de passage homogène du repère affine $(o, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ au repère affine $(o, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Nous posons :

$$T = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

III.4- Les différentes représentations rencontrées en mécanique:

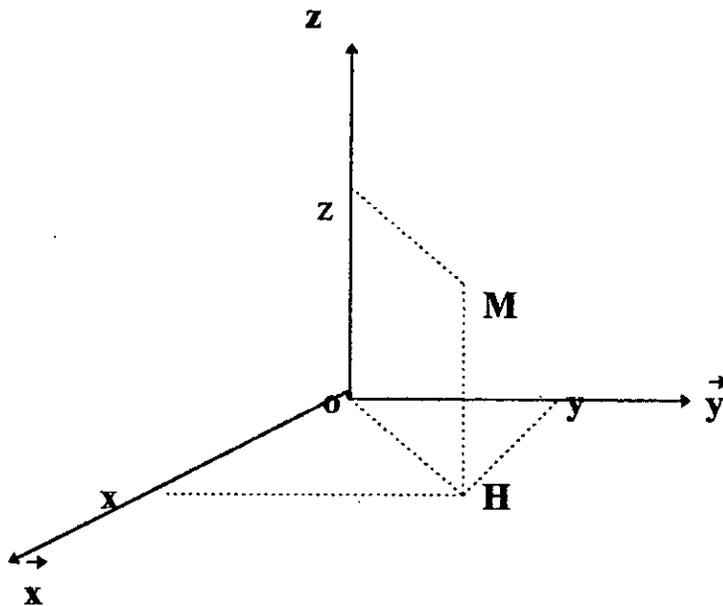
III.4.1- Expression du bi-point \vec{OM} :

Considérons un repère orthonormé direct $(o, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et un point M. Le point M peut être situé à l'aide de trois coordonnées:

III.4.1.1- Coordonnées cartésiennes:

$$\vec{OM} = x(M)\vec{x} + y(M)\vec{y} + z(M)\vec{z}.$$

On pourra utiliser s'il n'y a pas ambiguïté x, y, z pour $x(M), y(M), z(M)$.



III.4.1.2- Coordonnées cylindrique:

$$\vec{OM} = r\vec{u}(\alpha) + z\vec{Z}.$$

(on utilise r, α, Z en abrégé de $r(M), \alpha(M), Z(M)$)

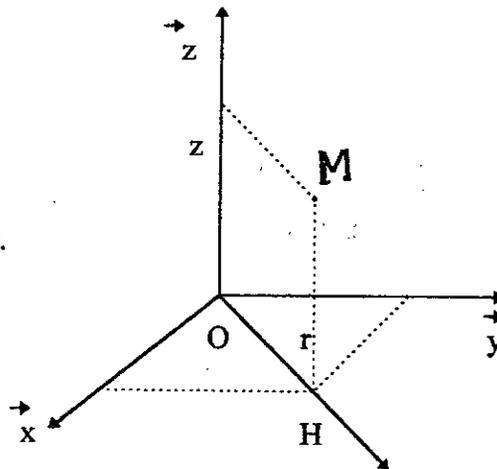
$$\vec{OM} = r \vec{u}(\alpha)$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\vec{u}(\alpha) = \cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y}$$

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$



On choisit: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (positif)

$$\vec{u}(\alpha)$$

d'où α (modulo 2π) défini par $\cos \alpha = x/r$ et $\sin \alpha = y/r$

On notera qu'on peut faire l'hypothèse que $x^2 + y^2 \neq 0$ car il n'y a pas lieu d'utiliser les coordonnées cylindriques dans le cas où M est situé sur l'axe (\vec{OZ}) ses coordonnées cartésiennes étant alors $(0, 0, z)$.

En conclusion, pour tout point non situé sur l'axe (\vec{OZ}) on passe de (x, y, z) aux coordonnées cylindrique (r, α, z) par le choix :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \cos \alpha = x/r; \sin \alpha = y/r$$

III.4.1.3- Coordonnées sphériques:

$$\vec{OM} = R \vec{k}(\alpha, \beta)$$

(k vecteur unitaire) (on utilise R, α, β en abrégé de $R(M), \alpha(M), \beta(M)$)

On suppose que M n'est pas situé sur l'axe (\vec{OZ}), en particulier M n'est pas confondu avec O, donc R n'est pas nul ; on choisit R positif:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

d'où

$$\vec{k}(\alpha, \beta) = (x \vec{x} + y \vec{y} + z \vec{z}) / \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = \vec{U}(\alpha) \cos \beta + \vec{Z} \sin \beta$$

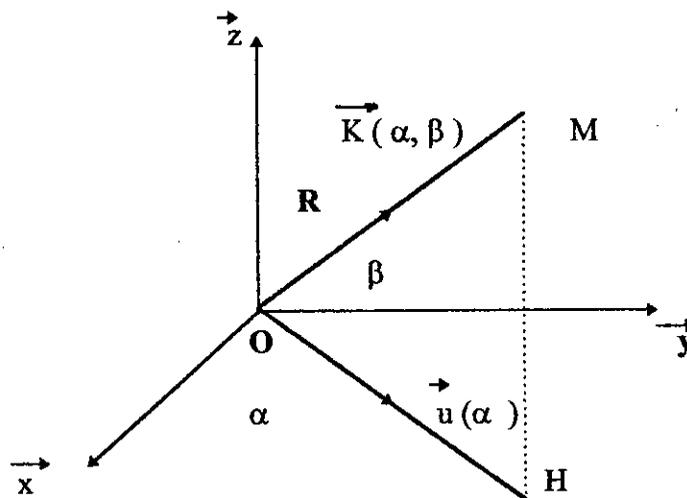
On choisit: $\cos \beta > 0, -\Pi/2 \leq \beta \leq \Pi/2$

$$\sin \beta = z / \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}; \quad \cos \beta = \sqrt{x^2 + y^2} / \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = r / R$$

$$\cos \alpha = x / \sqrt{(x^2 + y^2)}; \quad \sin \alpha = y / \sqrt{(x^2 + y^2)}.$$

On conclusion, pour tout point non situé sur l'axe (oz) on passe de (x, y, z) aux coordonnées sphériques (R, α , β) par les choix suivants:

$$R = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}, \alpha \text{ comme coordonnées cylindrique } -\Pi/2 \leq \beta \leq \Pi/2$$



II.5- Représentation de la chaîne de solides constituant le robot:

Le robot considéré est constitué par une chaîne simple ouverte de n solides, sans boucle ni branchement. Le premier solide est en liaison avec le bâti et avec le deuxième solide; le K^{ème} solide est en liaison avec le (K-1)^{ème} solide et avec le (K+1)^{ème} solide; le n^{ème} solide est en liaison avec le (n-1)^{ème} solide, il comporte généralement un organe de préhension qui lui permet d'effectuer une tâche déterminée. Les liaisons entre les différents solides sont à un degré de liberté: liaison pivot permettant un mouvement de rotation d'un solide par rapport à son voisin,

liaison glissière permettant un mouvement de translation rectiligne entre deux solides voisins dans la chaîne.

III.5.1- Repères liés au solide S_k :

Considérons le solide S_k ($1 \leq k \leq n$); désignons par:

- $D_{k-1, k}$ la droite affine matérialisant l'axe de la liaison entre (S_k) et (S_{k-1}) que nous orientons arbitrairement par le vecteur unitaire \vec{z}_k .
- $D_{k, k+1}$ la droite affine matérialisant l'axe de la liaison entre (S_k) et (S_{k+1}) que nous orientons arbitrairement par le vecteur unitaire \vec{Z}_k .

Dans le cas général les droites $D_{k-1, k}$, et $D_{k, k+1}$ ne sont ni parallèles, ni concourantes, et admettent une droite perpendiculaire commune (common normal CN: dans la littérature anglaise); désignons par O_k et O'_k les intersections respectives de cette perpendiculaire commune avec $D_{k-1, k}$ et $D_{k, k+1}$ et posons:

$$\vec{O_k O'_k} = a_k \vec{x}_k \quad \text{avec } a_k > 0$$

$$(\vec{z}_k, \vec{Z}_k) = \alpha_k \quad \text{mesuré sur } \vec{x}_k$$

$$\vec{y}_k = \vec{z}_k \wedge \vec{x}_k$$

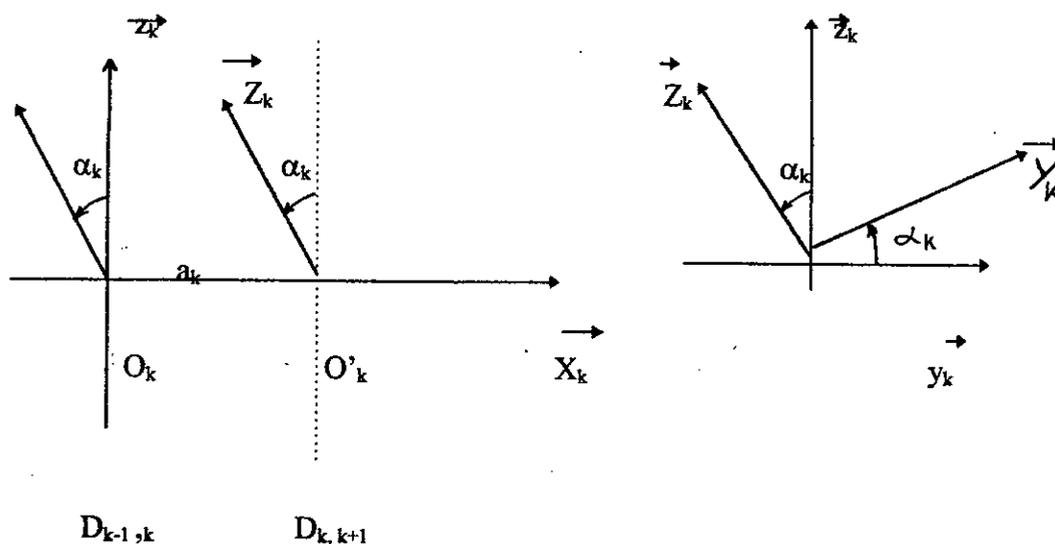
$$\vec{Y}_k = \vec{Z}_k \wedge \vec{x}_k$$

Nous venons de définir deux repères orthonormés directs liés au solide S_k :

$$\text{Le repère lié au solide } (k) = (O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$$

et

$$\text{Le repère lié au solide } (k') = (O'_k, \vec{X}_k, \vec{Y}_k, \vec{Z}_k)$$



a_k = la longueur du solide k le long de la perpendiculaire commune (CN)

α_k = l'angle du solide k entre les axes de l'articulation.

La matrice de changement de repères entre $\langle k \rangle$ et $\langle k' \rangle$ et parfaitement définie par la donnée de α_k et a_k qui sont des caractéristique géométrique de construction; nous notons G_k cette matrice:

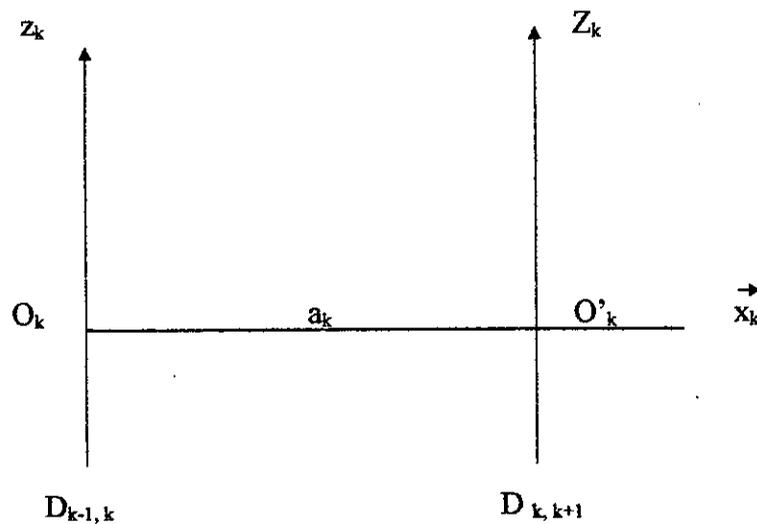
$$[G_k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_k \\ 0 & \cos\alpha_k & -\sin\alpha_k & 0 \\ 0 & \sin\alpha_k & \cos\alpha_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans le cas particulier ou les droites $D_{k-1, k}$, et $D_{k, k+1}$ sont parallèles, il y a une infinité de droites perpendiculaires communes, l'origine O_k du repère $\langle k \rangle$ est donc arbitraire sur $D_{k-1, k}$.

→ →

On peut toujours poser $z_k = Z_k$ c'est à dire $\alpha_k = 0$, a_k est parfaitement déterminée.

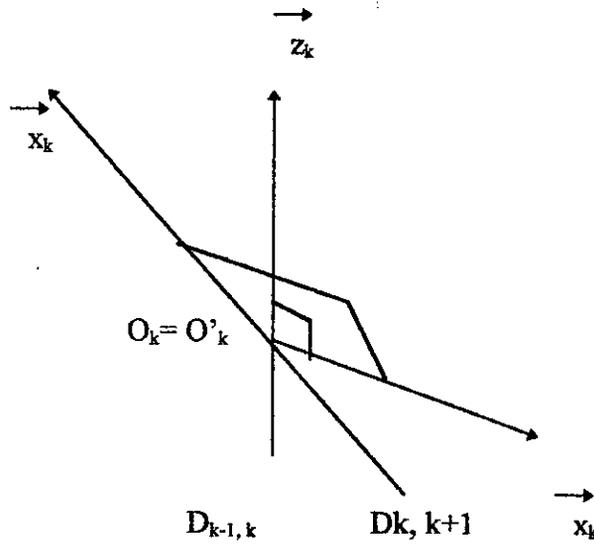
$$[G_k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Dans le cas particulier où les droites $D_{k-1,k}$ et $D_{k,k+1}$, sont concourantes:

$$O_k = O'_k, a_k = 0.$$

le vecteur x_k est orthogonal au plan défini par \vec{z}_k et \vec{Z}_k mais son orientation est arbitraire ce qui permet de choisir α_k



$$[G_k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_k & -\sin\alpha_k & 0 \\ 0 & \sin\alpha_k & \cos\alpha_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

III.5.2- Repères liés au solide S_{k-1} :

Considérons maintenant le solide S_{k-1} ; les droites $D_{k-2, k-1}$ et $D_{k-1, k}$ matérialisent les axes respectifs des liaisons entre (S_{k-1}) et (S_{k-2}) d'une part et entre (S_{k-1}) et (S_k) d'autre part, on oriente respectivement ces droites

par les vecteurs \vec{z}_{k-1} et $\vec{Z}_{k-1} = \vec{z}_k$

Dans le cas général on désigne par O_{k-1} et O'_{k-1} les intersections de la perpendiculaire commune à ces deux droites avec celles-ci.

On pose:

$$\vec{O}_{k-1} O'_{k-1} = a_{k-1} \vec{x}_{k-1} \quad \text{avec } a_{k-1} > 0$$

$$(\vec{z}_{k-1}, \vec{Z}_{k-1}) = \alpha_{k-1} \quad \text{mesuré sur } \vec{x}_{k-1}$$

$$\vec{y}_{k-1} = \vec{z}_{k-1} \wedge \vec{x}_{k-1}$$

$$\vec{Y}_{k-1} = \vec{Z}_{k-1} \wedge \vec{x}_{k-1}$$

On définit ainsi deux repères liés au solide S_{k-1} :

$$\text{le repère } \langle k-1 \rangle = (O_{k-1}, \vec{x}_{k-1}, \vec{y}_{k-1}, \vec{z}_{k-1})$$

et

$$\text{le repère } \langle k'-1 \rangle = (O'_{k-1}, \vec{x}_{k-1}, \vec{Y}_{k-1}, \vec{Z}_{k-1})$$

La matrice de changement de repère $\langle k-1 / k'-1 \rangle$ est notée G_{k-1} et s'écrit :

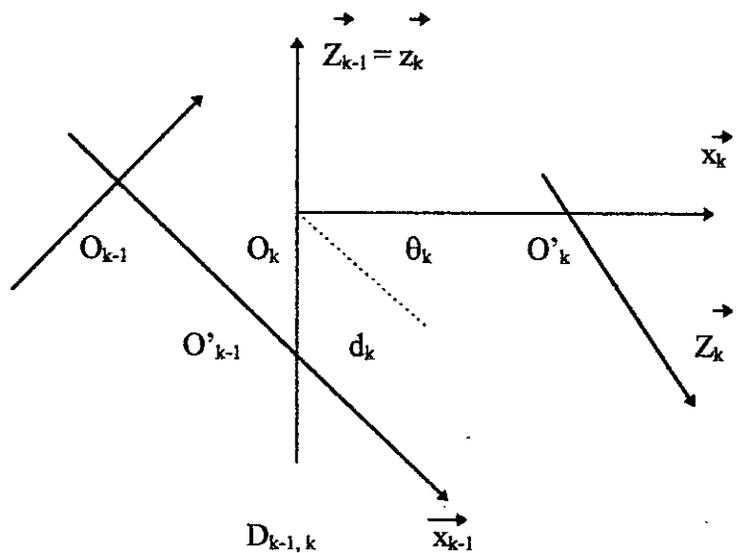
$$[G_{k-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{k-1} \\ 0 & \cos \alpha_{k-1} & -\sin \alpha_{k-1} & 0 \\ 0 & \sin \alpha_{k-1} & \cos \alpha_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

III.5.3- Liaison entre S_{k-1} et S_k:

Le solide S_k est en liaison pivot ou glissière avec la solide S_{k-1} selon la droite D_{k-1,k} orientée par le vecteur $\vec{Z}_{k-1} = \vec{z}_k$; cela signifie qu'il y a coïncidence géométrique des axes (O_k, z_k) et (O'_{k-1}, Z_{k-1}) selon la droite D_{k-1,k} et l'on pose:

$$\vec{O'_{k-1}O_k} = d_k \vec{Z}_k$$

$$(\vec{x}_{k-1}, \vec{x}_k) = \Theta_k \text{ mesuré sur } \vec{z}_k = \vec{Z}_{k-1}$$



Si la liaison est une glissière, Θ_k sera fonction du temps et d_k indépendant du temps.

Si la liaison est un pivot, Θ_k sera fonction du temps et d_k indépendant du temps.

La matrice de changement de repères < k⁻¹ > et < k > caractérise le mouvement de S_k par rapport à S_{k-1}, nous le désignerons par M_k; elle s'écrit:

$$M_k = \begin{bmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k & 0 & 0 \\ \sin\theta_k & \cos\alpha_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous en déduisons la matrice $\langle k-1/k \rangle$ permettant de passer du repère $(\vec{O}_{k-1}, \vec{x}_{k-1}, \vec{y}_{k-1}, \vec{z}_{k-1})$ au repère $(\vec{O}_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$

On la note : $T_{K-1}^k = \langle k-1/k \rangle = G_{k-1} \cdot M_k$

$$T_{K-1}^k = \begin{bmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k & 0 & a_{k-1} \\ \cos\alpha_{k-1} \sin\theta_k & \cos\alpha_{k-1} \cos\theta_k & -\sin\alpha_{k-1} & -d_k \sin\alpha_{k-1} \\ \sin\alpha_{k-1} \sin\theta_k & \sin\alpha_{k-1} \cos\theta_k & \cos\alpha_{k-1} & d_k \cos\alpha_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cette matrice dénommée matrice de passage homogène du repère affine

$(\vec{O}_{k-1}, \vec{x}_{k-1}, \vec{y}_{k-1}, \vec{z}_{k-1})$ au repère $(\vec{O}_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$, elle a la forme suivante;

$$T = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'intérêt de cette matrice est de regrouper l'information sur la position (sous-matrice P) et sur l'orientation (sous- matrice R) du repère affine $(\vec{O}_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ par rapport au repère affine $(\vec{O}_{k-1}, \vec{x}_{k-1}, \vec{y}_{k-1}, \vec{z}_{k-1})$. Contrairement à la matrice de passage classique R. La matrice de passage homogène T n'est pas orthonormale. Son inverse se calcul cependant facilement:

$$T^{-1} = T_k^{k-1} = \begin{bmatrix} R & -RP \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Les matrices de passage homogènes conservent la propriété multiplicative des matrices de passage classique; c'est cette propriété qui est à la base de la modélisation des robots manipulateurs, proposée dans cette thèse.

Enfin la position et l'orientation du repère affine $(O_{k-1}, \vec{x}_{k-1}, \vec{y}_{k-1}, \vec{z}_{k-1})$ par rapport $(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ sont définis par les quatre (4) paramètres (α, a, θ, d) dites paramètres de DENAVIT- HARTENBERG.

III.6- Notions d'inverse généralisée, de Pseudo-Inverse, et résolution des systèmes linéaires [Bou 71], [Fou 80], [Gor 84]:

III.6.1- Inverse généralisée:

III.6.1.1- Définition:

Soit A une matrice de dimension $m \times n$ et de rang r^* . On dit que la matrice $A^\#$, de dimension $n \times m$ est une matrice généralisée de A si et seulement si:

$$A A^\# A = A$$

On montre que la matrice A possède une infinité d'inverse généralisées A sauf lorsque A est une matrice d'ordre n et de rang n; $A^\#$ s'identifie alors à A^{-1} , matrice inverse de A.

exemple:

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ admet, comme on peut le vérifier aisément pour inverse généralisée la matrice $A^\# = \begin{pmatrix} 1+a & a \end{pmatrix}^t$ quelle que soit la valeur de a.

III.6.1.2- Calcul:

Actuellement toutes les méthodes proposées pour le calcul d'une inverse généralisée, qui ne soit pas à priori la pseudo-inverse, nécessitent de calculer explicitement le rang r de la matrice considérée et d'isoler un mineur de même ordre que le rang de cette matrice.

Nous présentons ci-après la méthode de calcul d'une inverse généralisée la plus utilisée. Deux cas peuvent se présenter :

1^{er} cas :

On partitionne la matrice A de la façon suivante:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

de telle sorte que A_{11} soit une matrice carrée de rang maximale r , alors on peut vérifier que:

$$A^\# = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est une inverse généralisée de A . En effet:

$$A A^{\#} A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \end{bmatrix}$$

or puisque A et A_{11} sont de rang r , on peut écrire que:

$$A_{21} = k A_{11} \text{ et } A_{12} = k A_{12}$$

donc: $A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} = k A_{12} = A_{22}$. d'où le résultat.

2^{me} cas:

On ne partitionne pas la matrice A comme précédemment. Alors il existe, au moins, une matrice carrée régulière de permutation des lignes L et une matrice carrée régulière de permutation des colonnes C telles que:

$$L A C = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{11} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

où B_{11} est une matrice carrée de rang maximal r . Si B est une matrice inverse généralisée de B , défini comme précédemment, alors, on peut vérifier aisément que:

$$A^{\#} = C B^{\#} L$$

est une inverse généralisée de A .

III.6.2- Pseudo-Inverse

la notion de pseudo-inverse d'une matrice a été définie en 1955 par Moore et PENROSE.

On rappelle pseudo-inverse, on inverse de Moore-Penrose, de la matrice A , la matrice inverse généralisée A^{\dagger} , telle que:

$$A A^t A = A$$

$$A^t A A^t = A^t$$

$$(A^t A)^t = A^t A$$

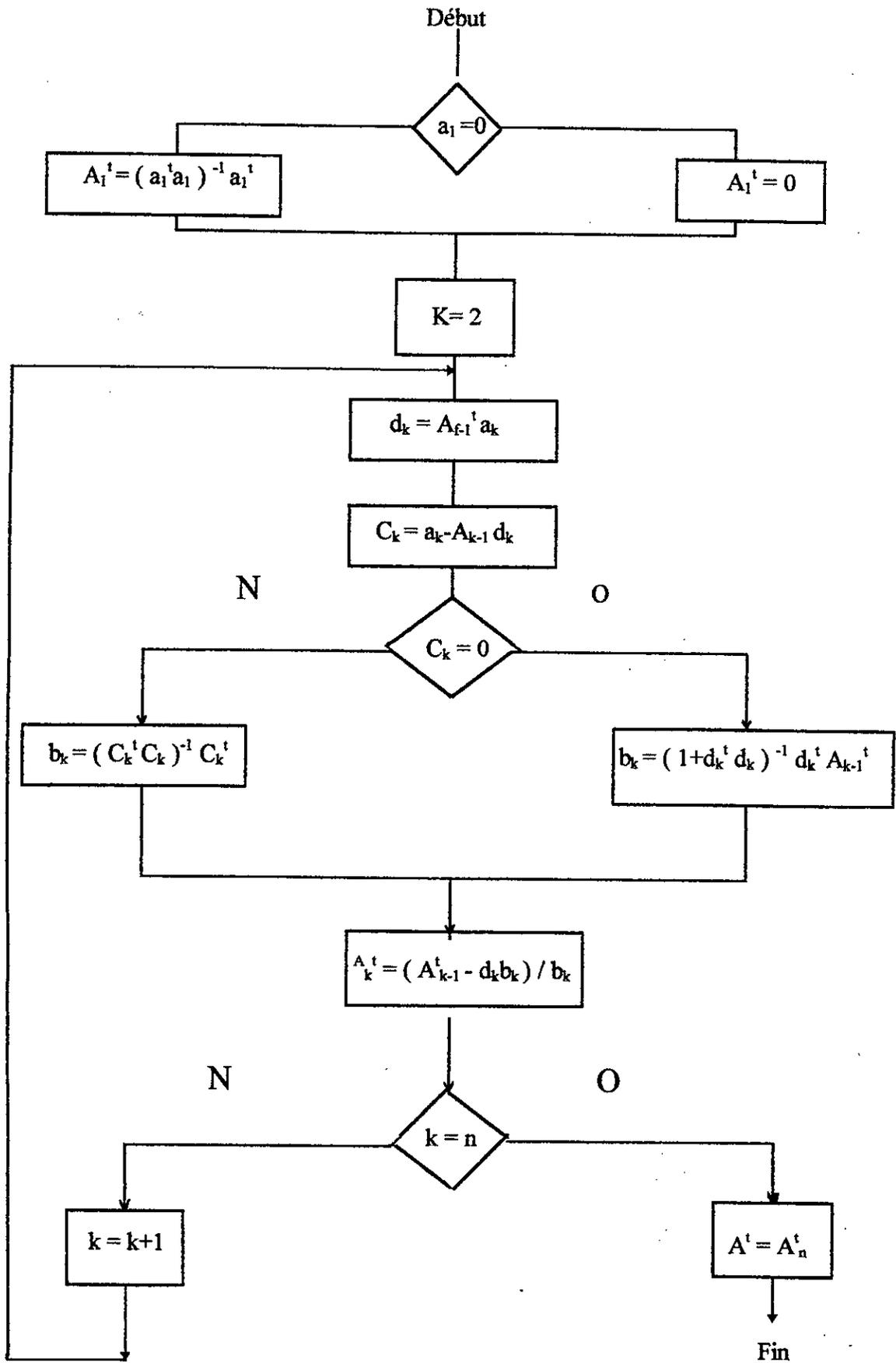
$$(A A^t)^t = A A^t$$

On démontre que la matrice A^t existe et est unique.

Méthode itérative de GREVILLE:

C'est l'application des règles de calcul de la pseudo-inverse d'une matrice partitionnée. L'algorithme est indiqué sur la figure ci-dessous.

On note O_k la matrice formée par la $k^{\text{ième}}$ colonne de A et A_k la matrice formée en bordant à droite la matrice A_{k-1} par O_k avec $A_1 = a_1$ (A_k est aussi la matrice formée par les k premières colonnes de A).



Algorithme de greville de calcul de la pseudo-inverse d'une matrice.

CHAPITRE IV
SYNTHESE DIMENSIONNELLE



*Une loi est un modèle
qui n'est plus (ou pas encore !) contesté.
Un modèle devient une loi ..., on sombre dans l'oubli.*

BOILEAU.

Modélisation des Robots Manipulateurs

Introduction :

Une fois que l'utilisateur du robot nous a précisé les caractéristiques de la tâche à réaliser et le volume atteignable du robot, alors nous pouvons choisir le robot le plus adapté à cette tâche . Il nous restera à déterminer les valeurs des paramètres du robot qui sont :

- Les longueurs des segments du robot.
- Les valeurs maximales des angles pour les liaisons de rotation.
- Les valeurs maximales des longueurs pour les liaisons de translation.
- Les vitesses maximales des rotations et des translations.
- Les masses des segments.
- Les forces appliquées à chaque moteur pour les liaisons de rotation et de translation.

Les valeurs de ces paramètres seront requises pour une bonne exécution de la tâche. Pour déterminer les valeurs de ces paramètres, il nous faut élaborer le modèle du robot. Ce modèle nous permettra d'ajuster ces valeurs après simulation jusqu'à obtenir leur valeurs optimales pour une bonne exécution de la tâche.

Lorsque la tâche doit être précise sans être rapide ,il faut créer un modèle qui prenne ce type de contraintes. Lorsque la tâche doit être rapide mais moins précise ,il faut créer un second modèle qui prenne en compte ce type de contraintes.

Lorsque la tâche fait appel à des vitesses importantes avec des variations importantes , il faut chercher un troisième modèle qui puisse prendre en compte les effets dynamiques résultants de ces vitesses et leurs variations, effets négligés par le second modelés .

Donc, les modelés de robots sont divisés en trois classes, selon leurs domaines de validité :

- Modélisation Géométrique : [COI 86] [GOR 84]

Avant toute considération temporelle ou dynamique , une tâche pour un robot consiste à déplacer son outil de travail d'un point à un autre. Il est important de maîtriser les déplacements de cet outil de travail. Ce que nous pouvons modifier dans le robot sont les valeurs des articulations respectives du robot, tout en maîtrisant leurs valeurs. Par contre nous ne sommes pas maîtres des déplacements de l'outil de travail. Le modèle géométrique nous permet d'être maître de ces déplacements : il est un ensemble d'équations qui retient les déplacements de l'organe terminal aux valeurs des articulations.

A) - *Domaine de validité* : L'avantage de l'utilisation d'un tel modèle ,est de déterminer la position de l'outil de travail avec une très bonne précision . Ce modèle est utile pour les tâches qui exigent beaucoup de précision. Il est utile aussi pour toutes les tâches où la position de l'outil de travail est importante comme par exemple : lorsque le robot doit déplacer son outil à l'intérieur d'une structure sans pour autant qu'il y ait contact avec cette structure . Le seul inconvénient pour ce modèle ,c'est qu'il ne prend pas en compte le temps d'exécution de la tâche.

Le modèle géométrique sera donc utilisé pour les tâches où la précision est l'une des caractéristiques importantes, avec un temps d'exécution parmi les caractéristiques les moins importantes .

B) - *Méthodes d'obtention du modèle géométrique:* Pour connaître la position et l'orientation de l'organe terminal, il est nécessaire de les connaître par rapport à un référentiel ,ce sera le repère lié au bâti . Nous affecterons un repère à l'outil de travail, la position et l'orientation de ce repère par rapport au référentiel sera le modèle géométrique de ce robot.

Nous prenons un point C situé dans l'outil de travail, nous affecterons un repère à chaque articulation . En faisant un changement de repère de l'outil vers le repère de l'articulation précédent l'outil, nous aurons la position du point C (outil de travail) exprimée dans le repère de cette articulation. En continuant cette opération de changements de repère jusqu' au repère lié au bâti, nous obtenons la position et l'orientation de l'outil exprimées dans le référentiel, qui est le modèle géométrique du

robot. L'opération de changement de repérés sera en fonction des longueurs des segment du robot, et des variables articulaires qui seront des angles (variables) pour les rotations et des distances (variables) pour les translations .

L'obtention de la position et de l'orientation de l'outil est possible grâce à trois méthodes:

- 1 - Méthodes des matrices de rotation et des vecteurs de translations . (cf § IV- A 5)
- 2 - Méthodes des matrices de transformations homogènes avec utilisation de la convention de DENEVIT- HARTENBERG . (cf § IV - A - 6)

Ces deux méthodes seront exposées en détail dans la section de modélisation géométrique.

C) - Utilisation du modèle géométrique : Le modèle géométrique est utilisé dans un premier temps pour concevoir le robot, il sera ensuite utilisé pour simuler ce robot dans la réalisation d'une tâche, il sera utilisé pour analyser son comportement face à des perturbations externes comme des erreurs de longueurs, des jeux dans les glissières des articulations prismatiques et des jeux au niveau des moteurs des articulations rotoïdes.

Modélisation Cinématique : [GOR 84] [YOU 87] [LEE 87]

Nous avons vu que le modèle géométrique est utilisé sans contrainte de temps . Lorsque cette dernière intervient , c'est la vitesse de déplacement de l'outil de travail qu'il faudra prendre en compte. Il s'agira pour le robot d'exécuter une tâche à une certaine allure afin qu'il puisse être intégré dans un processus de fabrication fonctionnant à un certain rythme . Ce rythme imposera cette contrainte de temps et donc la vitesse d'exécution. Lorsque le robot doit saisir une pièce d'une presse d'estompage, il faudra qu'il suive le rythme de la presse .

le modèle cinématique, est un ensemble d'équations donnant les vitesses de translation et d'orientation de l'outil de travail en fonction des différentes vitesses des articulation, connaissant la loi $V(t)$ de la vitesse de l'organe terminal, le modèle cinématique nous donnera celle des vitesses des articulations .

Le modèle cinématique peut être obtenu à l'aide de deux méthodes:

- 1 - Les lois de composition de vitesses . (cf § B-3)
- 2 - Le calcul de la jacobienne du modèle géométrique . (cf § B-4)

Le domaine de validité du modèle cinématique sera borné aux faibles vitesses mais non nulles. Lorsque ces vitesses seront nulles cela revient à utiliser le modèle géométrique, lorsque les vitesses sont importantes le modèle cinématique ne permet plus de négliger les effets dynamiques issus de ces grandes vitesses.

Il y a certaines application ou le modèle cinématique et très utilisés, ce sont les tache ou le robot doit déplacer son outils de travail à vitesse constante, exemple : la soudure à l'arc, la découpé au laser . Ces applications découlent du suivi de trajectoire, qui consiste à suivre une trajectoire avec vitesse constante; Pour réaliser cette application il suffit de diviser la trajectoire en petits segments le long desqueles le robot se déplacera à vitesse constante.

MODELISATION DYNAMIQUE : [LEE 87]

Il y'a des applications, notamment dans le domaines de l'industrie automobile, ou les robot doivent se déplacer à très grande vitesse tout en ayant des charges très lourdes (culasse des moteur , vilebrequin, sièges,.....). L'utilisation des grandes vitesses engendre des effets dynamiques négligés par les deux modèles précédents, ces effet dynamiques sont :

- Les forces d'inerties.
- Les forces de coriolis.
- Les forces centrifuges.
- Les forces de gravités.

L'exemple le plus significatif est celui du robot cylindrique qui porte une charge tout en la déplaçant suivant sa troisième articulation, ce déplacement doit engendrer une force variable qui est en fonction de la valeur de la troisième articulation, qui est la distance entre la charge transportée et l'axe horizontale du robot dans ce cas, il est nécessaire d'élaborer un modèle qui nous donne la valeur de cette force en fonction de la valeur de

cette troisième variable articulaire, de sa vitesse et son accélération. Ce modèle sera le modèle dynamique du robot, son domaine de validité sera celui des grandes vitesses, où les forces seront importantes.

L'obtention du modèle dynamique des robots manipulateurs sera basée sur l'utilisation des lois de la mécanique analytique qui adaptées à la robotique ont donné naissance aux formalismes suivants :

- Formalisme de Newton - Euler.
- Formalisme de d'Alembert.
- Formalisme de Gibbs .
- Formalisme de Lagrange.

Une étude de ces différents formalismes [VUK 82] a montré que les formalismes de Newton-Euler et celui de d'Alembert étaient orientés vers la commande en temps réel, alors que le formalisme de Lagrange est orienté vers la conception et la simulation .

A- MODELISATION GEOMETRIQUE

IV- A - 1 - Introduction:

Le robot manipulateur, quelle que soit la tâche qu'il doit réaliser doit positionner et orienter son outil de travail (O T) . L'outil de travail peut être l'extrémité d'une électrode de soudure, ou le centre de gravité d'un objet manipulé par la pince du robot.

Le problème géométrique consiste à prévoir la position et l'orientation de l'outil de travail dans l'espace opérationnel . Cet espace est lié à un repère fixe car l'utilisateur du robot perçoit de façon naturel (pour la vision) la tâche à accomplir dans cet espace.

La difficulté réside dans le fait que les actionneurs qui dotent le robot manipulateur n'agissent pas directement sur la position et l'orientation de l'outil de travail, mais agissent sur la position et l'orientation des différents corps qui constituent le robot manipulateur ceci à travers ses articulations. Donc nous connaissons l'évolution des articulations mais pas celle de l'outil de travail.

Le modèle géométrique permet de résoudre ce problème. Le modèle géométrique et la description de la position et de l'orientation de l'outil de travail (situation du robot) en fonction de l'état de ses articulations (configuration du robot). Ainsi connaissant la configuration du robot, le modèle géométrique nous permet de connaître la situation du robot.

Le modèle géométrique inverse permet de résoudre le problème inverse, connaissant la situation du robot le modèle géométrique inverse nous donne sa configuration. Donc le modèle géométrique inverse et la description de la configuration du robot en fait de sa situation.

Le but de ce chapitre est la présentation des différentes méthodes d'obtention du modèle géométrique direct inverse avec une application aux robots PUMA 600 et TH 8.

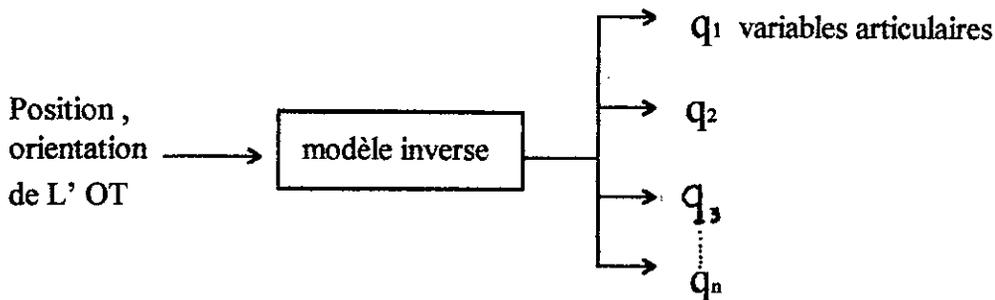
IV-A -2 - Intérêt de la modélisation géométrique :

Nous avons vu en introduction, que en général, le modèle géométrique était la relation qui existe entre la position, l'orientation de l'outil de travail et la valeur précise par les variables articulaires qui permettent à l'outil de travail d'être à cette position et d'avoir cette orientation.

Si nous nous fixons une position et une orientation, le modèle géométrique inverse nous donnera les valeurs des variables articulaires permettant cette position et cette orientation, le modèle direct et la fonction inverse .

L'intérêt d'une telle modélisation réside dans son utilité dans deux domaines qui sont :

1 / - La commande :



La commande consiste à envoyé des tensions aux moteurs qui font tourner les n articulations mais nous ne pouvant pas connaître les valeurs des angles aux différentes articulations qui permettent à l'organe terminal, de se positionner à l'endroit choisit et de s'orienter de la manière voulue.

Le modèle géométrique inverse nous donne les valeurs des variables articulaires, qui seront envoyées sous forme de tensions aux moteurs des articulations du robot. Les valeurs des variables articulaires ont été calculée par le modèle géométrique inverse avec pour entrées la position et l'orientation de l'outil de travail. Donc si nous voulons commander le robot pour qu'il positionne et oriente son outil de travail en X , nous introduisons X dans le modèle géométrique inverse qui donnera les valeurs des variables articulaires.

2/ - LA CONCEPTION: Lors de l'étape de conception d'un robot, nous devons connaître l'ensemble de tâches qu'il doit réaliser, la précision avec laquelle il doit réaliser cette tâche. Une fois le choix des paramètres fait (nombre de degrés de liberté, type d'articulation, longueur des segments) nous utiliserons le modèle géométrique pour analyser ses performances quant à l'exécution de cette tâche.

La tâche sera caractérisée par une trajectoire type, nous testerons le modèle inverse grâce à cette trajectoire test. En fonction des résultats obtenus en simulation nous ajusterons les paramètres du robot jusqu'à trouver la structure optimale du robot qui réalisera cette tâche.

Il faudra prendre en compte le fait que les tâches différentes en fonction de leur précision, un assemblage de pièces ou une soudure exigera du robot une plus grande précision qu'une peinture au pistolet.

Il rentrera aussi en compte le compromis coût fabrication du robot puisqu'un robot est autant plus cher qu'il est précis.

Il faut noter enfin, que la modélisation géométrique est utilisée surtout pour sa précision dans le positionnement et l'orientation de l'outil de travail à faible vitesse. Elle n'est efficace que pour cette tâche puisque la contrainte de temps est exclue, contrairement à la modélisation cinématique et dynamique.

N.B : Un logiciel permettant d'aborder les domaines de la simulation et de la conception des robots sera exposé dans la suite de ce travail.

IV -A - 3 - Situation de l'organe terminal : [GOR 84]

Afin de préciser la notion de situation de l'outil de travail du robot manipulateur ,nous introduisons deux repères affines orthonormés, l'un lié au bâti du robot l'autre lié à l'outil de travail du robot.

La situation de l'outil de travail est la position et l'orientation du repère affine qui lui est lié par rapport au repère affine lié au bâti du robot. (cf FIG IV-1)

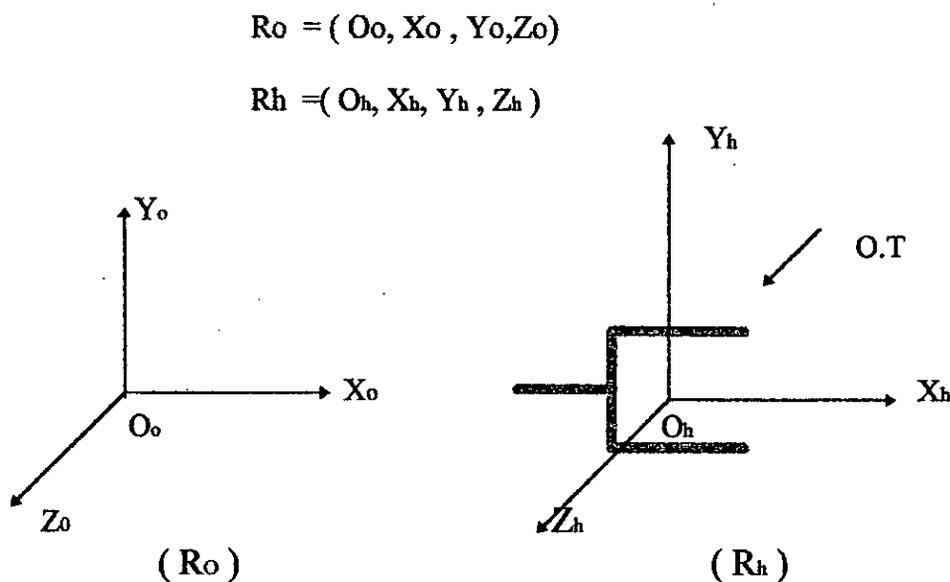


FIG : IV-1 Repères affines liés au bâti et à l'outil de travail .

Pour définir la situation de travail, il nous faut dans le cas général, connaître six paramètres indépendants que nous appellerons coordonnées opérationnelles:

- Trois coordonnées opérationnelles définissent la position de l'organe terminal : coordonnées cartésiennes, cylindrique, sphériques.

- Trois coordonnées opérationnelles définissant l'orientation de l'organe terminal : cosinus directeurs, angles de Brayan, paramètres d'Euler .

A/ - Position de l'outil de travail :

La position du repère R_h par rapport à R_o est définie par les trois coordonnées du point O_h exprimé dans le repère R_o .

Plusieurs choix sont possibles (cf § IV-2)

1 - Coordonnées cartésiennes : coordonnées de $O_h = (X_h, Y_h, Z_h) = (l, m, n)$

2 - Coordonnées cylindriques : coordonnées de $O_h = (\rho, \theta, z)$

3 - Coordonnées sphériques : coordonnées de $O_h = (r, \theta, \varphi)$.

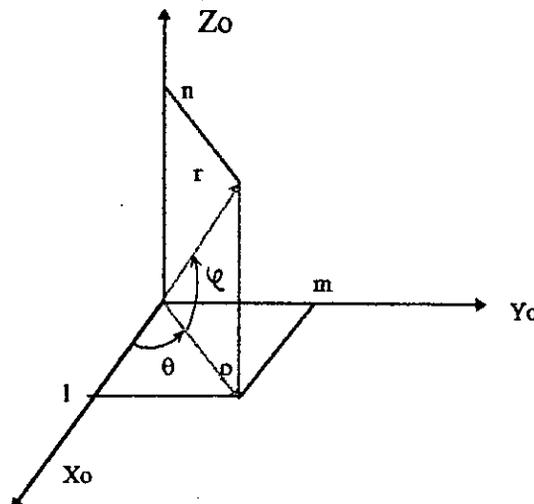


Fig IV - 2 - Choix des coordonnées pour définir la position

B / - Orientation de l'outil de travail :

L'orientation de R_h par rapport au repère R_o est définie de différentes manières, nous présentons trois d'entre elles:

1 - Cosinus directeurs : L'orientation du repère R_h par rapport au repère R_o peut être définie par les éléments de la matrices d'orientation (cf : § IV A-10) du repère R_h par rapport au repère R_o , ces éléments sont appelés cosinus directeurs, ils sont désignés colonne par colonne on a ainsi :

paramètres d'orientation de R_h ($X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, Z_x, Z_y, Z_z$) .

2 - Paramètres d'EULER : Pour obtenir le repère R_h , nous faisons pivoter le repère R_o d'un angle ε autour d'une direction de vecteur unitaire \vec{e} . (cf FIG IV-3)

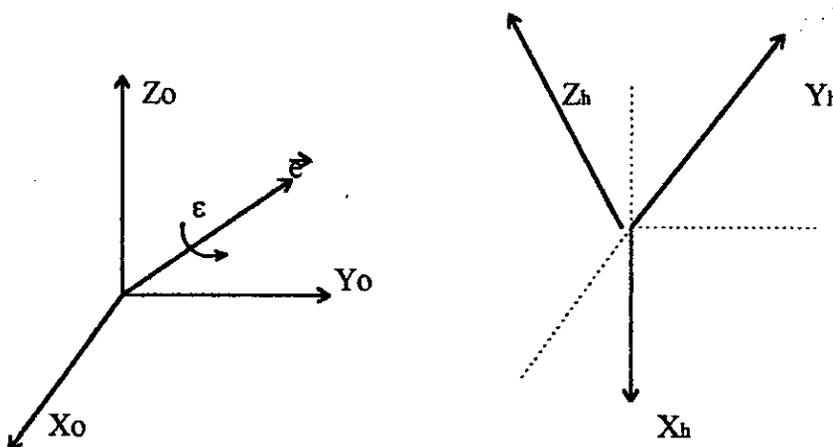


FIG - IV - 3

L'orientation du repère R_h par rapport au repère R_o est définie par quatre (4) paramètres qui sont : (P, Q, R, S).

$$P = e_x \sin \varepsilon/2, \quad Q = e_y \sin \varepsilon/2, \quad R = e_z \sin \varepsilon/2, \quad S = \cos \varepsilon/2$$

avec : $e = [e_x, e_y, e_z]^t$ (NB : L'exposant t équivalent à la transposition).

3 - Angles de BRYAN : le repère R_h se déduit du repère R_o par trois rotations successives. (cf .Fig IV - 4) : (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3)

- rotation ϕ_1 autour de X_o .
- rotation ϕ_2 autour de Y_{ϕ_1} .
- rotation ϕ_3 autour de Z_{ϕ_2} .

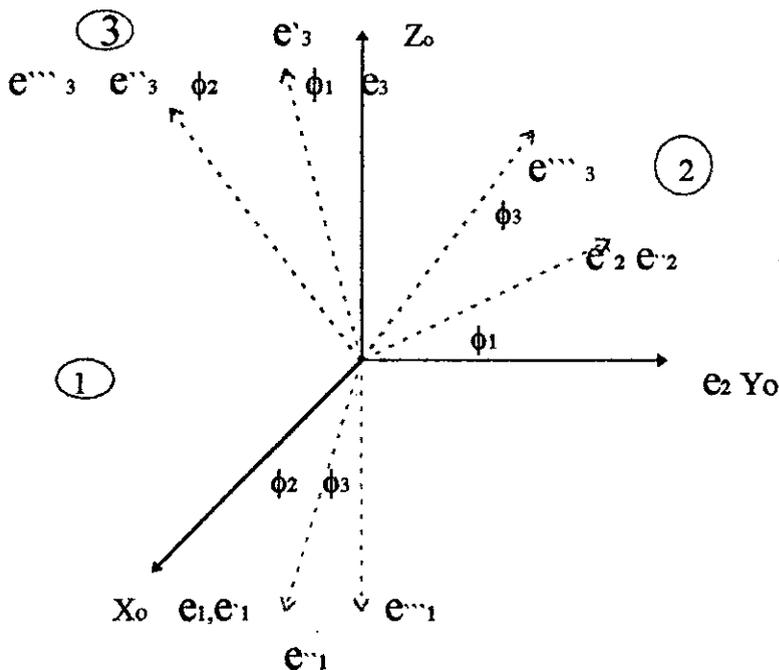


Fig -IV -4

Pour définir la situation de l'outil de travail, il nous faut six (6) coordonnées opérationnelles. Si nous choisissons les coordonnées cartésiennes pour la position de O_h et les paramètres d'EULER pour l'orientation de R_h , les coordonnées opérationnelles de l'outil de travail sont $(l, m, n, p, q, r, s) = (X_o^T, Y_o^T, Z_o^T, p, q, r, S)$.

C/ - Coordonnées généralisées d'un robot manipulateur :

La i éme coordonnée généralisée Q_i d'un robot est la quantité définissant le mouvement relatif du corps C_i par rapport au corps C_{i-1} ; Q_i peut être soit un angle autour de Z_i lorsque la liaison L_i est rotoïde. Elle peut être une distance le long de Z_i lorsque la liaison L_i est prismatique. L'ensemble des Q_i tel que $Q = [Q_1, Q_2, \dots, Q_n]$ permet de définir la configuration du robot manipulateur.

IV- A -4 - Modèle géométrique d'un robot manipulateur :

Le modèle géométrique, nous permet de connaître la situation du robot (position et orientation) en fonction de sa configuration, grâce à la relation entre coordonnées opérationnelles et les coordonnées généralisées.

$$X(R_o) = f(Q)$$

$X(R_o)$: Vecteur (6×1) coordonnées opérationnelles (3 coordonnées pour la position , 3 coordonnées pour l'orientation) exprimées par rapport au repère R_o .

Q : Vecteur [$n \times 1$] coordonnées généralisées , $n = \text{nbre de ddl}$.

Pour obtenir cette relation ,il est nécessaire d'affecter un repère orthonorme à chacun des corps constituant le robot.

IV- A - 5 - Position et orientation utilisant les matrices de rotations :

Nous allons présenter une méthode qui nous permet d'obtenir la position et l'orientation à l'aide des matrices de rotations classiques [LEE 87]

IV -A - 5 -1 - Orientation d'un repère R_i par rapport à un repère R_{i+1} :

Pour passer d'un repère R_i à un repère R_{i+1} , nous pouvons avoir jusqu'à six transformations géométriques: trois rotations autour des axes X_1, Y_1, Z_1 , et trois translations le long de ces mêmes axes. Dans la pratique il n'y a qu'une seule de ces transformations, vu que la technologie ne permet qu'une seule translation en orientation entre segment adjacents du robot.

Soit un point P de l'espace (cf fig-IV-5), ce point est de coordonnées :

$$P/x,y,z = (P_x, P_y, P_z) \text{ dans le repère } R_i (o, x, y, z)$$

$$P/u,v,w = (P_u, P_v, P_w) \text{ dans le repère } R_{i+1} (o, u, v, w)$$

Nous voulons trouver une matrice de passage de dimension [3X 3] qui va transformer les coordonnées P_u, P_v, P_w en coordonnées exprimées dans le repère (o, x, y, z) et ceci après que le repère R_{i+1} , ait subi une rotation :

Cette matrice est telle que : $P_{xyz} = [R] \cdot P_{u,v,w}$, avec $[R]$: matrice de passage

$$\text{Nous avons : } P_{uvw} = P_u I_u + P_v I_v + P_w I_w$$

En utilisant la définition de produit scalaire, nous obtenons les relations suivantes :

$$P_x = I_x \cdot P_{uvw} = I_x \cdot I_u P_u + I_x \cdot I_v P_v + I_x \cdot I_w P_w$$

$$P_y = I_y \cdot P_{uvw} = I_y \cdot I_u P_u + I_y \cdot I_v P_v + I_y \cdot I_w P_w$$

$$P_z = I_z \cdot P_{uvw} = I_z \cdot I_u P_u + I_z \cdot I_v P_v + I_z \cdot I_w P_w$$

Ces relations exprimées sous formes matricielle donnent :

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x I_u & I_x I_v & I_x I_w \\ I_y I_u & I_y I_v & I_y I_w \\ I_z I_u & I_z I_v & I_z I_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_u \\ P_v \\ P_w \end{pmatrix}$$

$$[R]$$

[R] : matrice de passage

Si le repère R_{i+1} est tourné d'un angle α autour de l'axe Ox , donc $I_x = I_u$

$P_{xyz} = [R] P_{uvw}$, la matrice [R] sera :

$$[R] = R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Donc on peut déduire par la même façon : $R_{z,\theta}$ et $R_{y,\theta}$:

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

La matrice [R] sera notée : $R_{i, i+1}$

La matrice $R_{i, i+1}$ nous donne l'orientation du repère R_{i+1} par rapport au repère R_i .

Nous obtenons donc :

$$P_{x,y,z} = R_{i, i+1} P_{uvw} \quad (IV-3)$$

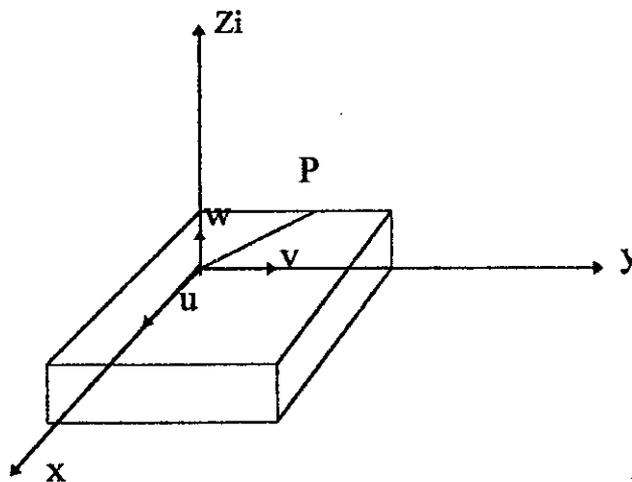


Fig - IV - 5

IV- A - 5 - 2 - Position d'un point P par rapport au repère Ri :

Soit un point P de coordonnées P_i dans le repère R_i , et de coordonnées P_{i+1} dans le repère R_{i+1} . Nous proposons de déterminer les coordonnées P_i connaissant P_{i+1} et $R_{i, i+1}$ (cf fig IV-6).

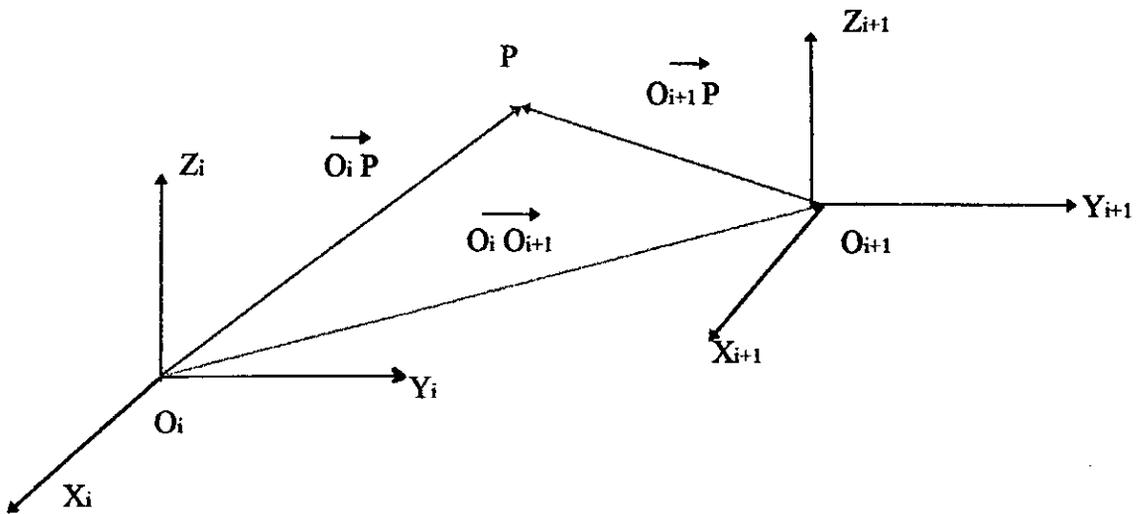


Fig - V - 6

on a :

$$\vec{O_i P} = \vec{O_i O_{i+1}} + \vec{O_{i+1} P} \quad (IV - 4)$$

$\vec{O_i P}$ = P_i : coordonnées du point P exprimé dans R_i .

$\vec{O_{i+1} P}$ = P_{i+1} : coordonnées du point P exprimé dans R_{i+1} .

$\vec{O_i O_{i+1}}$: coordonnées du point O_{i+1} exprimé dans R_i .

Pour uniformiser cette équation du point de vue repère, nous devons utiliser la matrice de passage $R_{i, i+1}$:

→

$$\text{L'équation (IV- 4) devient : } P_i = O_i O_{i+1} + R_{i, i+1} \cdot P_{i+1} \quad (IV - 5)$$

Nous pouvons remarqué que la position du point P dans R_i et l'orientation de repère R_{i+1} par rapport au repère R_i s'obtiennent de deux manières distinctes :

IV - A - 6 - Position et orientation utilisant les transformation homogènes :

Les transformations homogènes sont très utilisés dans la modélisation des robots manipulateurs. La transformation des coordonnées décrites par l'équation (IV - 5) est caractérisée par le vecteur position $O_i O_{i+1}$ et par la matrice de rotation $R_{i, i+1}$. $O_i O_{i+1}$ représente une transformation liée a une translation, $R_{i, i+1}$ représente une transformation en relation avec une rotation . [GOR 84]

Le but est d'obtenir une représentation des transformations de coordonnées qui combine aussi bien une translation qu'une rotation. Ceci doit être donnée par une seule équation .

Nous définissons un vecteur position [4 X 1] ou la quatrième composante est ajoutée, elle sera égale à 1 pour les applications en robotique.

$$P_i = [X_i, Y_i, Z_i, 1]^t \quad \text{et} \quad P_{i+1} = [X_{i+1}, Y_{i+1}, Z_{i+1}, 1]^t$$

L'équation (IV - 5) devient :

$$P_i = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ z_i \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} R_{i, i+1} & & & O_i O_{i+1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} X_{i+1} \\ Y_{i+1} \\ Z_{i+1} \\ 1 \end{pmatrix} = T_{i, i+1} \cdot P_{i+1}$$

Si le repère R_{i+1} est tourné d'un angle θ autour de OX :

$$T_{\theta,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si l'origine O_{i+1} est de coordonnées (dx, dy, dz) dans R_i avec $O_i X_i // O_{i+1} X_{i+1}$, $O_i Y_i // O_{i+1} Y_{i+1}$, $O_i Z_i // O_{i+1} Z_{i+1}$, nous avons alors :

$$T_{\text{trans}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété : La nature de la matrice T fait que : $T^{-1} = T^t$

T^{-1} : matrice inverse de T et T^t : matrice transposée de T .

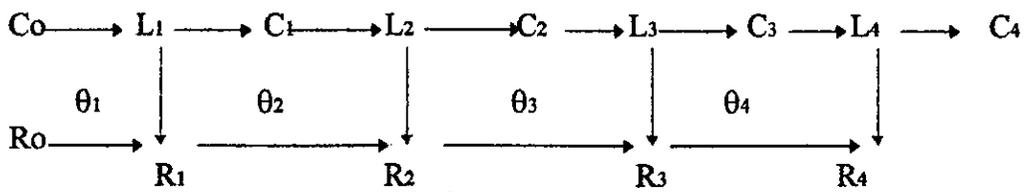
IV- A - 7 - Notation de DEVANIT-HARTENBERG pour la modélisation des robots:

Denavit et Hartenberg ont développé une méthode systématique d'obtention de la matrice $T_{i, i+1}$ [LEE 87]. Cette méthode propose sur le fait qu'à chaque liaison L_i est attribué un repère R_i . Le passage de repère R_i au repère R_{i+1} se fait à l'aide de quatre transformations qui sont : une rotation θ_i , deux translations d_i et θ_i puis une rotation α_i .

Pour expliciter la méthode de Denavit-Hartenberg, nous devons utiliser la notion de corps C_i , liaison L_i , repère R_i et la disposition des uns par rapport aux autres.

Soit un robot manipulateur ayant un degré de liberté par exemple un robot manipulateur à N degrés de liberté de type rotoïde. Ce robot possède N liaisons, il possède aussi $N+1$ corps. Chaque liaison L_i est située entre les corps C_{i-1} et C_i . A la liaison L_i correspond le repère E_i qui tourne de θ_{i+1} pour aboutir au repère R_{i+1} , donc le corps C_i est fixe par rapport à L_{i+1} , le corps C_{i+1} quant à lui est mobile par rapport à L_{i+1} , à chaque corps C_i est lié un repère R_{i+1} .

Si $N=4$



Nous devons suivre aussi les quatre règles suivantes concernant la disposition des repères.

1/ - Z_{i+1} est un vecteur unitaire de l'axe de la liaison L_{i+1} .

2/ - O_{i+1} est le pied de la perpendiculaire commune aux axes des liaisons L_i et L_{i+1} , situé sur l'axe de la liaison L_{i+1} .

Cas particulier :

Si les axes des deux liaisons sont parallèles ou confondus, il faut choisir arbitrairement une perpendiculaire commune (C N), le point O_{i+1} est alors déterminé. Dans chaque cas particulier des considérations de symétrie ou de simplicité permettent un choix rationnel.

3/ - X_{i+1} est un vecteur unitaire de cette perpendiculaire commune orienté de l'axe de la liaison L_i vers l'axes de la liaison L_{i+1} .

Cas particulier :

Si les axes des deux liaisons sont concourant ou confondus, l'orientation est arbitraire. Le choix sera guidé par des considérations de simplicité ou de symétrie .

4/ - $Y_{i+1} = Z_{i+1} \times X_{i+1}$ de façon a ce que $(O_{i+1}, X_{i+1}, Y_{i+1}, Z_{i+1})$ forment un triède direct.

La position et l'orientation du corps C_i par rapport à C_{i+1} sont définies par quatre paramètres de Devanit-Hartenberg . (Cf § IV-7)

a_i : Longueur de la perpendiculaire commune aux axes des liaisons L_i et L_{i+1} (longueurs arithmétique).

d_i : Distance, le long de Z_i , du support de X_i (distance arithmétique).

α_i : Angle entre Z_i et Z_{i+1} mesuré autour de X_{i+1} .

θ_i : Angle entre X_i et X_{i+1} mesuré autour de Z_{i+1} .

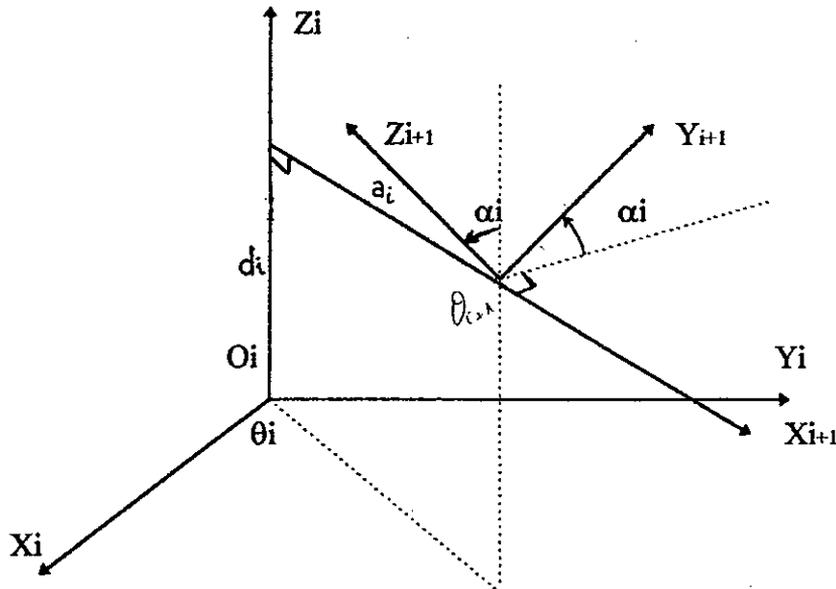


Fig IV-7 : Disposition des paramètres de Denavit-Hartenberg.

La position et l'orientation du corps C_i par rapport au corps C_{i-1} sont définies par la matrice de passage homogène $T_{i, i+1}$ du repère R_i (lié à C_{i-1}) au repère R_{i+1} (lié à C_i). Cette matrice s'obtient en fonction des quatre paramètres de Denavit-Hartenberg $a_i, \alpha_i, \theta_i, d_i$.

$$T_{i, i+1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cos\alpha_i & \sin\theta_i \sin\alpha_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \sin\alpha_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'après cette méthode, la i éme coordonnée généralisée qui s'identifie à θ_i si L_i est rotoïde, on à d_i si L_i est prismatique.

IV- A - 8 - Position et orientation de l'outil de travail:

Pour obtenir la position et l'orientation de l'organe terminal d'un robot manipulateur a N degres de liberte , nous pouvons utiliser deux methodes des differentes :

- Les matrices de rotation.
- Les matrices de passage homogenes.

IV - A - 9 - Position et orientation de l'outil de travail en utilisant les matrices de rotations :

Comme nous l'avons vu au paragraphe (§ IV- A - 5), nous devons calculer toutes les matrices de passages $R_{i, i+1}$:

A) - L'orientation de l'outil de travail : d'après l'équation (IV-3).

$$V (R_i) = R_{i, i+1} \cdot V(R_{i+1}) \Rightarrow$$

$$V(R_0) = R_{0,1} \cdot V(R_1) \text{ et } V (R_1) = R_{1,2} V (R_2) \dots V (R_{n-1}) = R_{n-1, n} V(R_n).$$

$$\Rightarrow V (R_0) = R_{0,1} R_{1,2} \dots R_{n-1, n} V (R_n) \text{ soit } R_{0,n} = R_{0,1} R_{1,2} \dots R_{n-1, n}$$

$$\Rightarrow V (R_0) = R_{0,n} V (R_n) \quad (IV - 6)$$

$V (R_0)$: coordonnée d'un vecteur V exprimé dans le repère R_0 .

$V (R_n)$: coordonnée du vecteur V exprimé dans le repère R_n .

$R_{0,n}$: matrice de passage donnent l'orientation du repère R_n par rapport au repère R_0 .

B) - *La position de l'outil de travail:* D'après l'équation (IV-4):

Soit un point C du corps C_n , la position du point C exprimé dans R_0 est la suivante:

$$\overrightarrow{OC (R_0)} = \overrightarrow{OO_n (R_0)} + \overrightarrow{O_n C (R_0)} \text{ or : } \overrightarrow{O_n C (R_0)} = R_{0, n} \overrightarrow{O_n C (R_n)}$$

$$\text{donc: } \overrightarrow{OC (R_0)} = \overrightarrow{OO_n (R_0)} + R_{0, n} \cdot \overrightarrow{O_n C (R_n)}$$

de la même manière:

$$\overrightarrow{OC (R_0)} = \overrightarrow{OO_{n-1} (R_0)} + R_{0, n-1} \overrightarrow{O_{n-1} O_n (R_0)} + R_{0, n} \overrightarrow{O_n C (R_0)}$$

$$\overrightarrow{OC (R_0)} = \overrightarrow{OO_1 (R_0)} + R_{0, 1} \overrightarrow{O_1 O_2 (R_1)} + \dots + R_{0, n-1} \overrightarrow{O_{n-1} O_n (R_{n-1})}$$

$$+ R_{0, n} \overrightarrow{O_n C (R_n)} \quad (IV - 7)$$

Si le repère R_n est lié à l'outil de travail et le point C coïncide avec le centre de l'outil de travail, l'équation (IV-6) nous donne l'orientation de l'organe terminal et l'équation (IV- 5) nous donne sa position. Donc les équations (IV - 6) et (IV - 7) nous donne la position et l'orientation de l'outil de travail en fonction des variables généralisées , ce qui nous donne le modèle géométrique du robot manipulateur.

IV- A- 10 -Position et l'orientation de l'outil de travail utilisant les matrices de passages homogènes :

Comme nous l'avons vu au paragraphe (§ IV- A - 7), nous devons calculer toutes les $T_{i, i+1}$ qui sont les matrices de passage homogènes élémentaires d'un repère R_i au repère R_{i+1} . Le produit des matrices de passage homogènes élémentaires permet le calcul de la matrice de passage homogène du repère R_0 (lié au bâti) au repère R_n (lié a l'outil de travail) .

$$T_{0, n} = T_{0, 1} . T_{1, 2} T_{n-1, n}$$

$$T_{0, n} = \begin{bmatrix} R_{0, n} & P_{0, n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_{0, n}$ = Matrice d'orientation [3X3] de l'outil de travail .

$P_{0, n}$ = Matrice position [3X1] de l'outil de travail .

IV- A- 10 - Expression du modèle géométrique direct.

D'après le paragraphe (§ IV-A-9) et (§ IV-A-10), nous pouvons remarquer que la méthode utilisant les matrices homogènes est plus simple et plus pratique . Elle ne fait appel qu'a un seul algorithme, le calcul des matrices $T_{i, i+1}$ se fait à l'aide de paramètres $a_i, \theta_i, d_i, \alpha_i$ qui sont simples a obtenir .

C'est pour ces raisons que nous avons choisi d'établir le modèle géométrique à partir de la méthode des matrices de passages homogènes.

Soit t_{ij} l'élément ij de la matrice $T_{0,n}$ (matrice de passage homogène globale), la position de l'outil de travail (en coordonnées cartésiennes) est donnée par la matrice $P_{0,n}$ telle que :

$$X_{ot} = l = t_{14}$$

$$Y_{ot} = m = t_{24}$$

$$Z_{ot} = n = t_{34}$$

L'orientation de l'outil de travail est obtenue à l'aide de la matrice de passage $R_{0,n}$, on peut définir cette orientation par trois modes différents:

1°) - **Paramètres d'EULER** : (p, q, r, s)

$$p = (\text{sgn}(t_{32} - t_{23})) \cdot \sqrt{1 + t_{11} - t_{22} - t_{33}} \quad p \in [-1, 1]$$

$$q = (\text{sgn}(t_{13} - t_{31})) \cdot \sqrt{1 - t_{11} + t_{22} - t_{33}} \quad q \in [-1, 1]$$

$$r = (\text{sgn}(t_{21}, t_{12})) \cdot \sqrt{1 - t_{11} - t_{22} + t_{33}} \quad r \in [-1, 1]$$

avec :

sgn : représente la fonction signe.

2°) - **Angle de BRAYAN** : (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3)

$$\phi_1 = A \tan(2(-\varepsilon \cdot t_{23} / \varepsilon \cdot t_{33})) \quad \phi_1 \in [0, 2\pi]$$

$$\phi_2 = A \tan(t_{12} / \varepsilon (t_{11}^2 + t_{12}^2)) \quad \phi_2 \in [0, 2\pi]$$

$$\phi_3 = A \tan(2(t_{12} / t_{11})) \quad \phi_3 \in [0, 2\pi]$$

avec :

A tan : représente la fonction tg .

3°) - Cosinus directeurs:

$$\begin{array}{lll} X_X = t_{11} & Y_X = t_{12} & Z_X = t_{13} \\ X_Y = t_{21} & Y_Y = t_{22} & Z_Y = t_{23} \\ X_Z = t_{31} & Y_Z = t_{32} & Z_Z = t_{33} \end{array}$$

IV - A - 11 - Programme FAI-MG :

Dans le but de faciliter les calculs établis dans ce modèle, nous avons développé le programme FAI-MG (MG pour modèle géométrique) en fortran, ce programme calcule la matrice de passage homogène $T_{0, n}$ de tout robot, donc il permet d'obtenir le modèle géométrique des robots ayant une structure de chaîne cinématique simple de deux degrés jusqu'a six degrés de liberté (ddl) avec des liaisons de type rotoïdes au prismatique. Ce programme est structuré de la manière suivante (cf . fig IV-8) :

1°) - Introduction des paramètres de DENAVIT-HARTENBERG:

$$ndl, a_i, \alpha_i, \theta_i, d_i ; i = 1, ndl$$

ndl : nombre de ddl du robot.

2°) - Elaboration des matrices de passages homogènes élémentaires :

$$T [i] = T_{i, i+1} , i = 1 , ndl$$

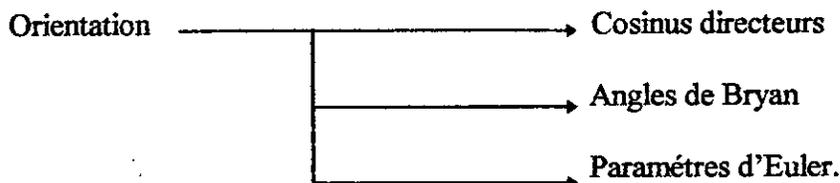
3°) - Calcul de la matrice de passage homogène globale de R_0 à R_n :

$$T_{0, n} = T_{0, 1} . T_{1, 2} . \dots . T_{n-1, n}$$

4°) - Affichage de $T_{0, n}$.

5°) - Présentation de la situation de l'OT.

Position du l'OT en coordonnées cartésiennes extraites de $P_{0, n}$.Orientation de l'OT extraite de R_0 avec le choix suivant :



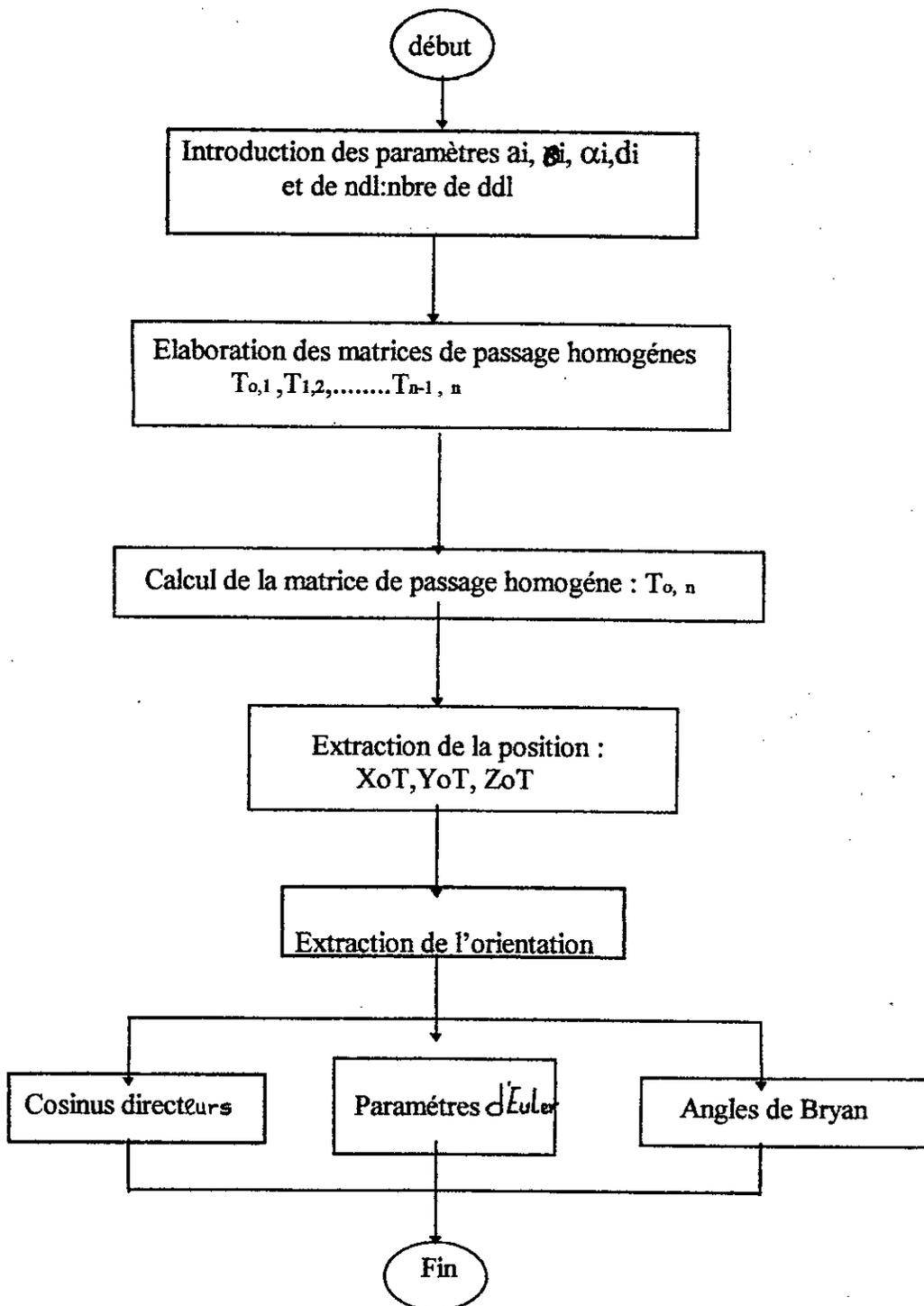


Fig : IV - 8 - Organigramme du FAI-MG

IV - A - 12 - Application :

Pour notre étude, nous avons choisis pour l'application du programme FAI-MG ,deux types de robots manipulateurs existants dans l'industrie , le robot manipulateur TH8 et le robot PUMA.

1°) - Application au robot TH8:

Le robot manipulateur TH8 est le type RPP-RRR (cf - fig IV-7) , il possède six corps mobiles , quatre liaison rotoïdes et deux liaisons prismatiques. Les repères liés au corps sont représentés sur la figure (IV-9) et la figure (IV-10) nous donne les paramètres Denavit-Hartenberg du TH8.

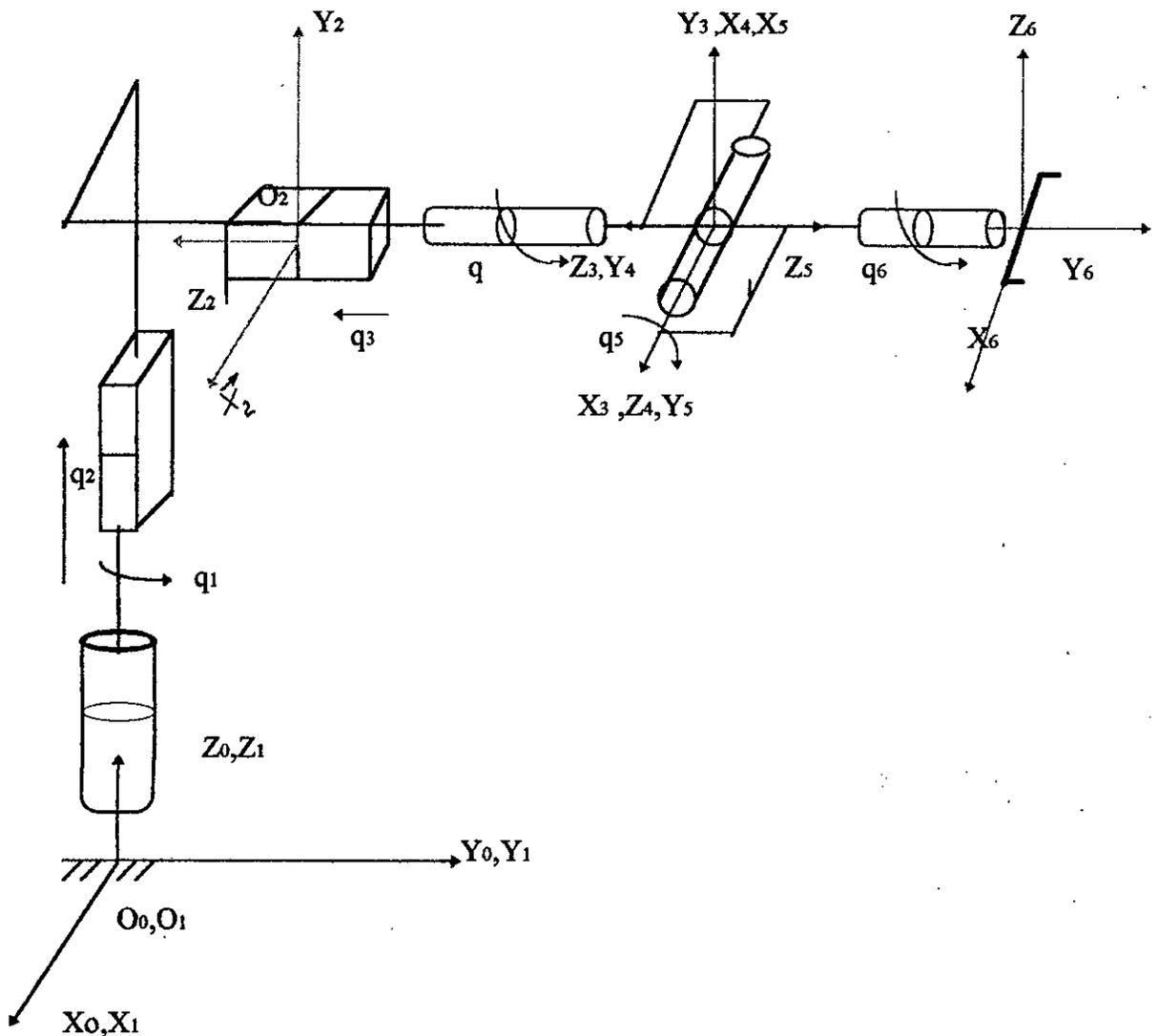


fig - IV - 9 - Robot TH8 avec disposition des repères.

liaisons	α_i	a_i	θ_i	d_i
1	0	0	q_1	0
2	$\pi/2$	0.054	0	d_2
3	0	0	0	d_3
4	$+\pi/2$	0	q_4	0
5	$+\pi/2$	0	q_5	0
6	$+\pi/2$	0	q_6	0.291

Fig - IV -10 - Parametres de Denavit-Hartenberg du robot TH8 .

2°) - Application du robot PUMA :

Le robot manipulateur Puma est de type RRR-RRR (cf Fig IV- 8), il possède six liaisons rotoides, les réperes liés aux corps sont représentés sur la figure (CF Fig IV-11) . La figure (IV 12) nous donne les parametres de Denavit - Hartenberg .

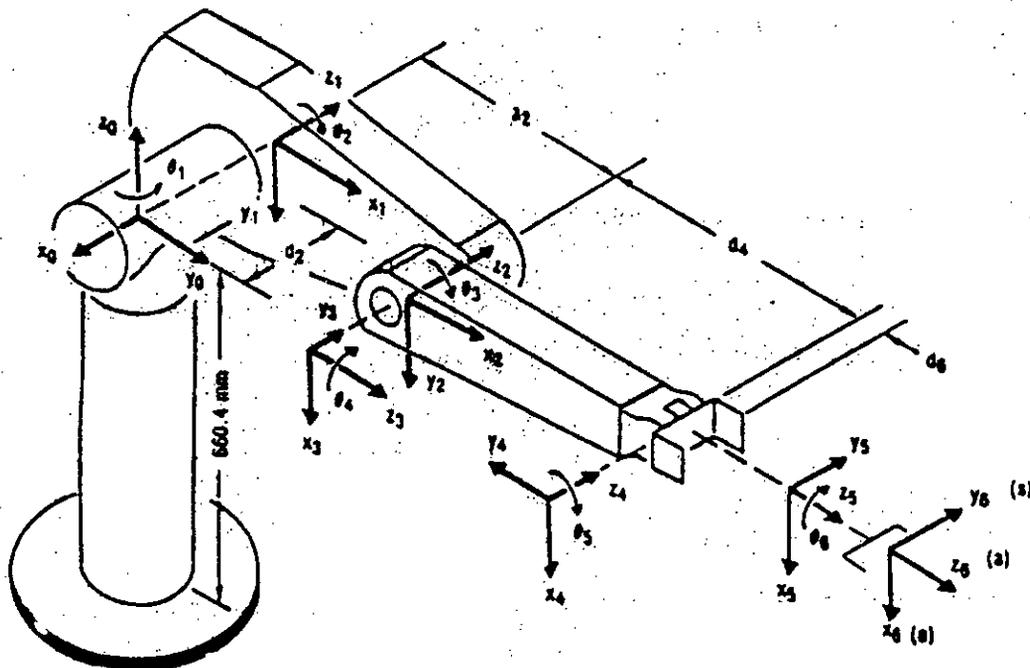


Fig -IV - 11 - Robot PUMA avec disposition des réperes.

liaisons	α_i	a_i	θ_i	d_i
1	$-\pi/2$	0	q_1	0
2	0	0.432	q_2	0.149
3	$+\pi/2$	0	q_3	0
4	$-\pi/2$	0	q_4	0.432
5	$+\pi/2$	0	q_5	0
6	0	0	q_6	0.056

Fig - IV -12 - Parametres de Denavit-Hartenberg du robot PUMA .

Modèle Géométrique Inverse Des Robots Manipulateur :

Le modèle géométrique direct tel que nous l'avons vu dans le paragraphe précédent fournit les coordonnées opérationnelles en fonction des coordonnées généralisées, dans la pratique c'est le problème inverse qui se pose :

Au moment de la conception ou de la synthèse de la commande d'un robot manipulateur, le problème est de déterminer les coordonnées généralisées qui correspondent à des coordonnées opérationnelles données.

Resoudre ce problème consiste à calculer une réciproque F^{-1} , qui si elle existe, constitue un modèle géométrique inverse du robot que l'on note :

$$q = f^{-1}(X(Ro))$$

Nous remarquerons que la fonction f non linéaire en $\sin\theta_i$ et $\cos\theta_i$ de plus elle est couplée, de ce fait elle n'est pas toujours inversible [Gor 84].

La difficulté de cette résolution réside dans le fait que la fonction f soit inversible ou pas. Trois cas peuvent se présenter selon le nombre ndl de degré de liberté:

a) - $ndl < 6$: Il n'existe pas de solution à l'équation $q=f^{-1}(x)$, cette absence de solution peut avoir trois origines :

- *Origine géométrique* : Ce cas se présente si la position que l'on veut atteindre est en dehors de l'espace atteignable par robot .

- *Origine mécanique* : Du point de vue géométrique les variables de rotation font un tour de 360° . Dans la réalité, pour des raisons liées à la construction du robot, ces angles sont inférieurs à 360° , donc certaines solutions géométriques ne sont pas atteignables mécaniquement.

- *Origine mathématique* : La fonction f étant fortement non linéaire, il est impossible de calculer f^{-1} .

b) - $ndl > 6$: Lorsque le nombre (6) de paramètres définissent la position et l'orientation de l'outil de travail est inférieur au nombre ndl de variable articulaires, nous avons une infinité de solutions.

En pratique le probleme peut etre en donnont des valeurs arbitraires mais convenablement choisies aux ($ndl - 6$) variables articulaires, ces valeurs devons etre compatibles avec la géometrie et la mécanique du robot.

c) - $ndl = 6$: Les solutions mathématiques sont au nombres finis, ce nombres est parfois supérieur à 1 à cause des fonctions trigéométriques inverse. Les contraintes mécaniques pouvont suprimés certaines d'entres elles, le choix des solutions restantes peut être fait de manière à les éloigner de leur butées mécaniques ou a l'aide d'un critères de continuité de trajectoire.

Néanmoins, il faut tenir en mémoire que le resultat précédent peut être inexact d'un certain cas particulier, est noter qu'il est très difficile a priorie de savoir si le X appartient ou non au volume de travail operationnel.

Pour trouver q correspondant a X donner, il est possible d'utiliser des méthodes analytiques ou des méthodes numériques iteratives.

•Les méthodes analytiques amènent a l'obtention de toutes les configurations géométrique inverse sous forme litterale. Hélas , ellesne sont pas générales et ne s'applique qu'a des robot manipulateur simple (i.e. qui possèdent un grand nombre de paramètres de Denavit-Hartenberg nuls) du de ceux en services dans l'industrie.

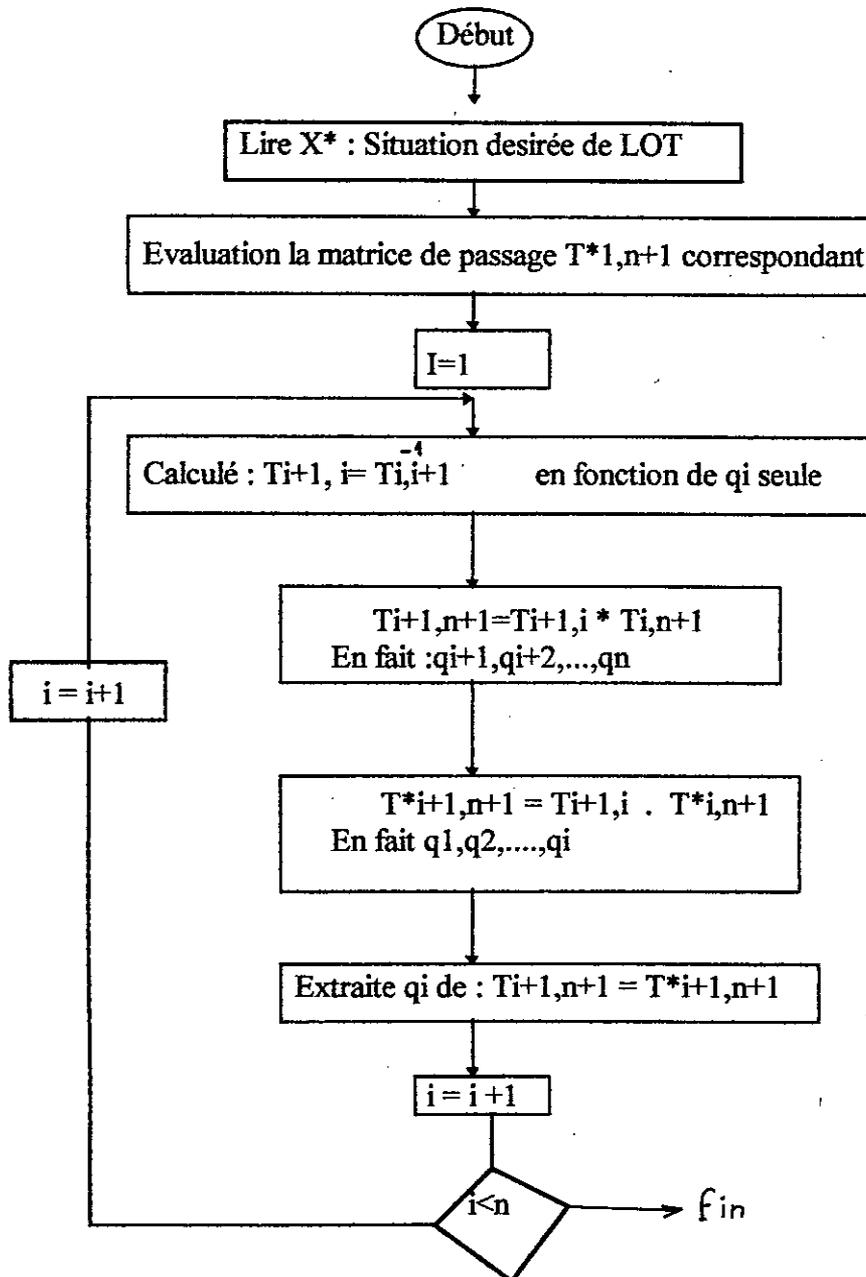
•Les méthodes numeriques iteratives permettent la détermination d'un modèle géométrique inverse. Elle présente un caractère général, mais necessitent un grand nombre d'opérations et pose de délicats problèmes de convergence.

IV - A - 13 - Méthode Analytique:

IV-A-13-1 - Principe :

Nous exposons ici que la méthode basée sur l'utilisation des matrice de passages homogènes élémentaires du robot manipulateur .

L'organigramme le plus adapté pour cette méthode est celui de Paul [Paul82], il est structuré de façon suivante:



Remarque :

1 °) - Si le robot manipulateur se termine par des liaisons rotoides concourantes en un point O, ce qui est souvent le cas en pratique, on a intérêt, pour simplifier les calculs, à mettre en place un repère R_{n+1} d'axes parallèles à ceux de R_n et d'origine O. La matrice $T_{i,n+1}$ (resp $T^*_{i,i+1}$) se déduit facilement de $T_{i,n}$ (resp $T^*_{i,i}$) des que sont connues les composantes du point

$\vec{O_{n+1} O}$ dans le repère R_{n+1} .

L'inversion du modèle géométrique est forte, alors à partir des matrices $T_{i,n+1}$ et $T_{i,n+1}^*$ en suivant le même algorithme précédent.

2 °) - En pratique l'identification de $T_{i+1,n+1}$ et $T_{i+1,n+1}^*$ dans l'algorithme peut permettre de trouver d'autres déterminations de q_j ($j > i$).

- Lorsque la i ème liaison est rotoïde, le calcul de q_i est généralement basé sur la résolution d'une équation du type :

$$\alpha \cos\theta + \beta \sin\theta = \delta$$

La solution n'existe que si : $\alpha^2 + \beta^2 \geq \delta^2$

Dans ce cas deux solutions sont possibles, elles sont données par :

$$\sin\theta = \frac{\beta^2 + \varepsilon\alpha \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \delta^2}}{\alpha^2 + \beta^2} \quad \varepsilon = + \text{ ou } - 1$$

$$\cos\theta = \frac{\alpha\delta - \varepsilon\beta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \delta^2}}{\alpha^2 + \beta^2}$$

IV - A - 14 - Méthodes numériques itératives: [GOR 84],[PRU 82]

Pour trouver f^{-1} et donc pour trouver q qui correspond à un X donnée, nous pouvons utiliser des méthodes numériques itératives telle que :

- La méthode de linéarisation de la matrice de passage homogène du robot manipulateur.

- La méthode utilisant la matrice jacobienne du robot manipulateur, Ces méthodes présentent trois inconvénients connus:

1 - Il est nécessaire de se fixer une estimation initiale du q correspondant à la position désirée de X de l'organe terminal.

2 - La résolution numérique ne permet d'aboutir qu'à une seule solution.

3 - Le temps de calcul est important, peut être une source de difficultés si ces méthodes sont utilisés dans un contexte temps réel.

Compte tenu de ces inconvénients, nous n'avons pas de méthode numérique itérative assez fiable qui donne le modèle géométrique inverse de tout robot. est toujours possible de traiter séparément chaque cas particulier et dans cette section nous allons voir le cas de deux robots qui sont le TH8 et le PUMA.

IV - A - 15 - Modèle géométrique inverse du TH8: [MEG 84]

La situation X à atteindre est définie par les coordonnées cartésiennes (l , m , n) et les quatres paramètres d'EULER (p , q , r , s), ces paramètres sont obtenus à partir de la matrice de passage homogène donnés par [GOR84] :

$$T_{0**6} = \begin{bmatrix} R_{0,6} & | & P_{0,6} \\ \hline 0 & | & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(p^2+s^2)-1 & 2(pq-rs) & 2(pr+qs) & | & l \\ 2(pq+rs) & 2(q^2+s^2)-1 & 2(qr-ps) & | & m \\ 2(pr-qs) & 2(qr+ps) & 2(r^2+s^2)-1 & | & n \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

soit:

$$C_i = \cos\theta_i \text{ et } S_i = \sin\theta_i$$

$$T_{11} = C_1.(C_4.C_5.C_6 + S_4.S_6) + S_1.S_5.S_6$$

$$T_{12} = C_1.C_4.S_5 - S_1.S_5$$

$$T_{13} = C_1.(C_4.S_5.S_6 - S_4.C_6) + S_1.S_5.S_6$$

$$T_{14} = C_1.(C_4.C_5.D_6 + A_2) - S_1 . (- (-C_5.d_6+Q_3))$$

$$T_{22} = S_1.G_4.S_5 + C_1.C_5$$

$$T_{23} = S_1.(C_4.C_5.S_6 - S_4.S_6) - C_1.S_5.S_6$$

$$T_{24} = S_1.(C_4.S_5.D_6 + A_2) + C_1.(-(-C_5.R_6 + Q_3))$$

$$T_{31} = S_4.C_5.C_6 - C_4.S_6$$

$$T_{32} = S_4.S_4.S_6 + C_4.C_6$$

$$T_{34} = S_4.S_5.R_6 + Q_2$$

Les trois derniers liaisons du robot étant concourants au point O4 (cf. fig IV-9) pour simplifier les calculs, nous mettons en place un repère R6 d'axe parallèles à ceux de R6 et d'origine O3 nous obtenons :

$$d_6 = 0 \text{ , nous avons alors:}$$

$$\Gamma = C1 \cdot a2 + S1 \cdot Q3$$

$$m' = S1 \cdot a2 - C1 \cdot Q3$$

$$n' = Q2$$

$$\Rightarrow Q3 = \sqrt{1^2 + m'^2 + a^2}$$

$$S1 = l \cdot Q3 + m' \cdot a2 \quad \text{et}$$

$$C1 = \Gamma \cdot a2 - m' \cdot Q3$$

$$\Rightarrow \boxed{Q1 = \text{Atan}(S1/C1)}$$

Atan: représente la fonction inverse de tg

$$\boxed{Q2 = n'}$$

$$\text{Atan} = \text{tg}^{-1}$$

les expressions des coordonnées généralisés Q4, Q5 et Q6 sont obtenus de la manière suivante:

$$R3 \cdot 6 = R3, 2 \cdot R2, 1 \cdot R1; 6 = R3, 4 \cdot R4, 5 \cdot R5, 6$$

$$R3^{*6} = \begin{bmatrix} C1 & S1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ S1 & -C1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(p^2+s^2)-1 & 2(pq-rs) & 2(pr+qs) \\ 2(pq+rs) & 2(q^2+s^2)-1 & 2(qr-ps) \\ 2(pr-qs) & 2(qr+ps) & 2(r^2+s^2)-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C4 C5 C6 + S4 S6 & C4 C5 & C4 C5 C6 - S4 C6 \\ S4 C5 C6 - C4 C6 & S4 S5 & S4 C5 S6 + C4 C6 \\ S5 C6 & -S5 & S5 S6 \end{bmatrix}$$

En établissant l'égalité:

$$K = [2 (q^2+s^2) - 1]$$

$$S5 = \sqrt{4C^2_1 (pq-rs)^2 + S1 [k-1] + 4 C1 S1 (pq-rs) k + 4(qr+ps)^2}$$

$$C5 = 2 C1 (q^2+s^2) - c1 - 2S1 (qp - rs)$$

Nous obtenons: Q5

$$Q5 = \text{Atan} (S5/C5)$$

$$S4 = 2(qr + ps) /S5$$

$$C4 = [2 C1(qp-rs)+2 S1(q^2+s^2) -S1] /S5.$$

Ce qui nous permet d'obtenir Q4:

$$Q4 = \text{Atan} (S4/C4)$$

$$S6 = [2 S1 (pr +qs) - 2 C1(qr - ps)] /S5$$

$$C6 = [2 S1 (p^2 + s^2) - S1 - 2 C1(pq+rs)] /C5$$

$$\Rightarrow Q6 = \text{Atan}(S6/C6)$$

Il existe quatre familles de solutions (cf tableau (IV-1))

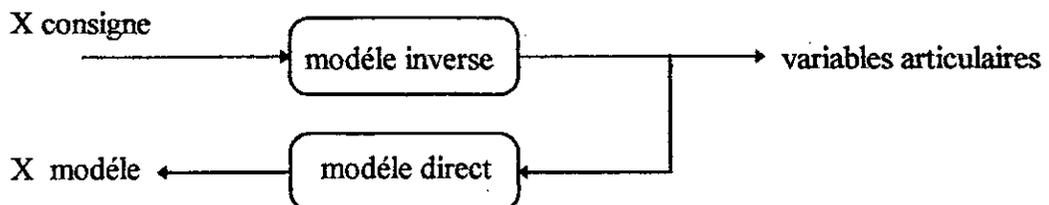
solution	1	2	3	4
Q1	Q1	Q1	Q1	Q1
Q2	Q2	Q2	Q2	Q2
Q3	-Q3	-Q3	Q3	Q3
Q4	Q4	$\pi+Q4$	Q4	$\pi+Q4$
Q5	Q5	-Q5	Q5	-Q5
Q6	Q6	$\pi+Q6$	Q6	$\pi+Q6$

Tableau IV-1- les solutions du modèle inverse du TH8.

Nous avons obtenus quatre, famille de solutions (c tableau(IV-1)).

Nous avons choisi la troisième famille de solution par ce qu'elle est assez loin des butées.

Pour vérifier la validité du modèle géométrique élaboré ainsi que celle du modèle iverse nous allons faire la manipulation suivante:



pour une position et une orientation de l'outil de travail de consigne X consigne, introduite dans le modèle inverse, nous obtenons une solution de variable articulaire. Ces mêmes variables articulaires introduites dans le modèle direct, nous donnent une position et une orientation de l'outil de travail (X modèle). En faisant la comparaison, nous trouvons que les valeurs de X consigne et de X modèle sont les mêmes ce qui prouve que f^{-1} est bien la fonction réciproque de f et donc, ceci nous permet d'affirmer que les modèles géométriques direct et inverse ainsi élaborés sont correctes .

IV - A - 16 - Modèle géométrique inverse du robot PUMA: [LEE 87]

C.S.G lee a proposé une approche géométrique pour trouver le modèle géométrique inverse de robots six degrés de liberté, toutes les liaisons étant rotatives, cette méthode est sur les différentes configurations du PUMA , configurations caractérisées par paramètre ARM, ELBOW (voir annexe B).

Dans ce paragraphe nous donnons les résultats de cette méthode pour un robot PUMA dont les paramètres sont ARM= -1 , ELBOW=1.

En appliquant cette méthode nous trouvons le modèle géométrique inverse du PUMA, dont voici les expressions littérales:

• données en entrée:

-Les paramètres de Denavit-Hartenberg .

-La position et l'orientation de l'organe terminal:

XOT, YOT, ZOT , p , q , r , s

on pose:

$$XOT = Px$$

$$YOT = Py$$

$$ZOT = Pz$$

$$nx = 2(p^2 + s^2) - 1$$

$$ny = 2(pq + rs)$$

$$nz = 2(pr - qs)$$

$$Sx = 2(pq - rs)$$

$$Sy = 2(q^2 + s^2) - 1$$

$$Sz = 2(qr + ps)$$

$$ax = 2(pr + qs)$$

$$ay = 2(qp - ps)$$

$$az = 2(r^2 + s^2) - 1$$

Nous donnons les expressions littérales des paramètres articulaires après calcul:

on pose:

$$C_i = \cos(\theta_i), \quad S_i = \sin(\theta_i)$$

et

$$S_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j) \text{ et } C_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$$

$$Q_1 = \text{tg}^{-1} \left[\frac{P_y \sqrt{P_x^2 + P_y^2 - d_2^2} - d_2 P_x}{P_x \sqrt{P_x^2 + P_y^2 - d_2^2} - d_2 P_y} \right]$$

$$Q_2 = \text{tg}^{-1} \left[\frac{-(P_z (a_3 + d_4 S_3) + (d_4 c_3) (\sqrt{P_x^2 + P_y^2 - d_2^2}))}{(P_z (a_3 + d_4 S_3) + (d_4 c_3) (\sqrt{P_x^2 + P_y^2 - d_2^2}))} \right]$$

$$Q_3 = \text{tg}^{-1} \left[\frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - d_4^2 - a^2 - d^2}{\sqrt{(4 d_4^2 a^2) - (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - d_4^2 - A^2 - A^2)}} \right]$$

$$Q_4 = \text{tg}^{-1} \left[\frac{C_1 a_y - S_1 a_x}{C_1 C_{23} a_x + S_1 C_{23} a_y - S_{23} a_y} \right]$$

$$Q_5 = \text{tg}^{-1} \left[\frac{(C_1 C_{23} C_4 - S_1 S_4) a_x + (S_1 C_{23} C_4 - C_1 S_4) a_y - C_4 S_{23} a_z}{C_1 S_{23} a_x + S_1 S_{23} a_y + C_{23} a_z} \right]$$

$$Q_6 = \text{tg}^{-1} \left[\begin{array}{l} (-S_1C_4 - C_1C_{23}S_4)nx + (C_1C_4 - S_1C_{23}S_4)ny + (S_4S_{23})nz \\ (-S_1C_4 - C_1C_{23}S_4)S_x + (C_1C_4 - S_1C_{23}S_4)S_y + (S_4S_{23})S_z \end{array} \right]$$

A partir des resultats obtenus, nous avons élaboré le programme PLIMA-MGI, qui donne le modèle géométrique inverse du PUMA.

Nous avons fait les mêmes tests que ceux fait pour le TH8, nous avons trouvé de bons résultats à savoir que X consgne et X modèle étaient les mêmes ce qui nous a permis d'affirmer que les programmes d'elaboration du modèle direct et inverse étaient corrects.

B / Modélisation cinématique

B-1- Introduction

En robotique, il est très important de connaître la durée d'exécution d'une tâche ou plus exactement d'en être maître, d'où la nécessité de contrôler sa vitesse. Dans l'utilisation du laser pour la découpe, la vitesse de déplacement de l'outil de travail doit être entre 1 m/s et 3 m/s . Une vitesse inférieure à 1 m/s entraînerait une détérioration du matériau à découper, une vitesse supérieure à 3 m/s rendrait le laser inefficace. Cette exactitude du domaine de vitesse borné entre 1 m/s et 3 m/s ne pourrait être respectée si l'homme devait exécuter cette tâche.

Dans le sous-chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à la détermination de la position et de l'orientation de l'outil de travail, nous ne nous sommes pas intéressés à la vitesse de position et d'orientation, nous ne pourrions pas contrôler cette vitesse. Le modèle cinématique nous donne la vitesse de position (translation de l'outil de travail) et la vitesse d'orientation (rotation de l'outil de travail) en fonction des différentes vitesses d'évolution des variables généralisées, il nous permettra donc de contrôler la vitesse d'exécution de la tâche.

Dans ce chapitre nous allons présenter différentes méthodes d'obtention du modèle cinématique ainsi qu'une méthode d'obtention du modèle cinématique inversé.

B-2 Intéret de la modélisation cinématique

La modélisation cinématique des robots manipulateurs est utilisée dans des tâches où la vitesse d'évolution de l'outil de travail intervient. Cette vitesse ne doit pas être très faible puisque le modèle géométrique a un domaine borné aux très faibles vitesses. Cette vitesse ne doit pas être très importante, parce que les effets dynamiques résultants des grandes vitesses ne pourront plus être négligés.

La modélisation cinématique sera utilisée dans un domaine intermédiaire où les vitesses ne seront pas très faibles, elles ne seront pas très importantes pour qu'elles puissent nous permettre de négliger les effets dynamiques. Ceci étant, le domaine de validité de la modélisation cinématique est situé entre celui du modèle géométrique (très faibles vitesses) et celui du modèle dynamique (grandes vitesses, cf. sous-chapitre c).

Elle nous permet de prendre compte l'évolution des vitesses tout en négligeant leurs effets dynamiques.

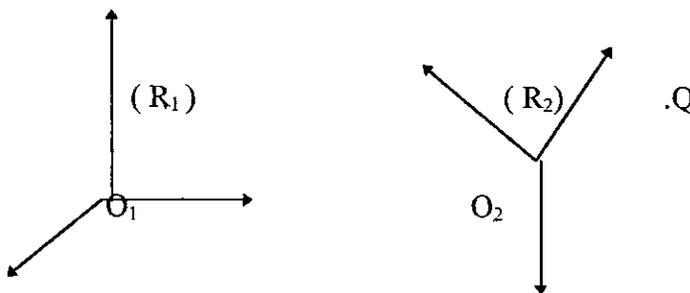
Le modèle cinématique est utilisé pour la conception, la simulation et la commande de robots dont l'outil de travail doit suivre une trajectoire continue, à allure régulière, exemples de la soudure à l'arc, de la découpe avec le laser. La vitesse de l'outil de travail doit donc obéir à une loi cinématique $V(t)$ bien précise et bien adaptée à ce genre de tâche.

Pour que $V(t)$ soit adaptée à notre tâche, nous devons concevoir un robot qui réalise cette exigence, l'étape de la simulation nous permettra d'analyser les performances de ce robot. La réalisation de $V(t)$ sera en fonction des vitesses des articulations. Nous devons prendre compte la nature des moteurs au niveau des articulations ; un moteur peut tourner jusqu'à une vitesse maximale que l'on ne pourra pas dépasser. Si l'un des moteurs est sollicité à sa vitesse maximale, alors qu'un autre est en dessous de sa vitesse moyenne, il y aura un problème de conception. Nous serons obligés de modifier les paramètres du robot jusqu'à ce que les deux moteurs tournent loin des vitesses maximales admises et ceci jusqu'à ce que la loi $V(t)$ soit réalisée.

B-3 Modèle cinématique basé sur les lois de composition des vitesses

Cette méthode fait appel aux lois de composition de vitesse issues de la mécanique analytique.

Considérons un corps solide auquel on attache le repère R_2 en O_2 et un repère de référence R_1 (cf. figure B-1)



Nous savons que la vitesse d'un point quelconque O_2 appartenant au solide par rapport au repère R_1 peut s'exprimer par la somme de trois vecteurs vitesse :

- $V_{O_2}^{(1)}$: vitesse absolue de translation du point O_2 par rapport à R_1
- $V_{O_2}^{(2)}$: vitesse de translation relative de Q vis-à-vis de R_2
- $\omega_2^{(1)} \wedge O_2Q$: vitesse d'entraînement produite par rotation de R_2 vis-à-vis de R_1

Cette vitesse a pour expression :

$$V_Q^{(1)} = V_{O_2}^{(1)} + V_Q^{(2)} + \omega_2^{(1)} \wedge \vec{O_2Q} \quad (B-1)$$

En utilisant cette loi de composition des vitesses, nous pourrions établir le modèle cinématique d'un robot.

Si nous considérons la chaîne articulaire formée par les corps successifs d'un robot (figure B-2), l'expression (B-1) se traduira par la relation suivante :

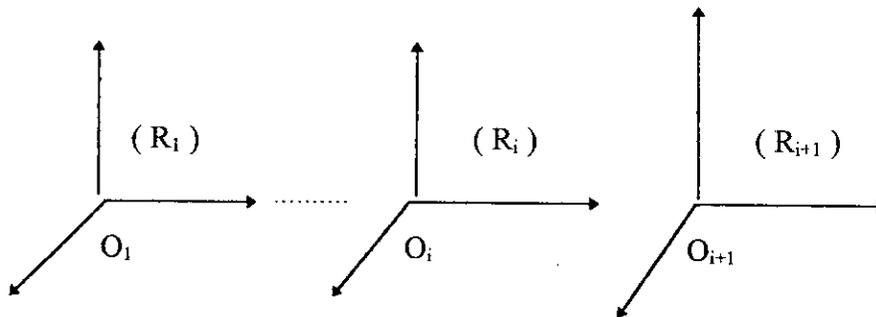


figure B-2

$$V_{O_{i+1}}^{(0)}(R_i) = V_{O_i}^{(0)}(R_i) + V_{O_{i+1}}^{(O_i)}(R_i) \wedge \vec{O_iO_{i+1}}(R_i) \quad (B-2)$$

$V_{O_i}^{(0)}(R_i)$: vitesse de O_{i+1} par rapport à R_0 exprimé dans R_i .

$V_{O_{i+1}}^{(O_i)}(R_i)$: vitesse de O_i par rapport à R_0 exprimé dans R_i

$O_i O_{i+1}(R_i)$: vitesse de translation de O_{i+1} par rapport à O_i exprimé dans R_i

$\Omega_i^{(0)}(R_i)$: vitesse de rotation de R_i par rapport à O_i exprimé dans R_i

$O_i O_{i+1}$: vecteur $O_i O_{i+1}$ exprimé dans R_i

Pour établir l'expression de la vitesse de l'outil de travail, nous devons adjoindre à (B-2) l'équation de transformation de vecteur (A-2) et (A-5) :

$$V_{O_{i+1}}^{(0)}(R_i) = R_i^{i+1} V_{O_{i+1}}^{(0)}(R_{i+1})$$

En ce qui concerne les vitesses de rotation des repères, nous avons l'équation suivante :

$$\Omega_i^{(0)}(R_i) = \Omega_i^{(i-1)}(R_{i-1}) + R_{i-1}^i \Omega_{i-1}^{(0)}(R_{i-1}) \quad (B-4)$$

Les équations (B-2), (B-3) et (B-4) permettent de calculer les vitesses de rotations et de translation de n'importe quel segment du robot en particulier celle de son outil de travail.

Exemple : soit le cas d'un robot à quatre degrés de liberté. Nous devons calculer le vecteur \dot{X} défini par :

$$\dot{X} = \begin{cases} \Omega_4^{(0)}(R_4) : \text{vitesse de rotation de } R_4 \text{ par rapport à } R_0 \text{ exprimé dans } R_4 \\ V_C^{(0)}(R_4) : \text{vitesse du point terminal } C \text{ par rapport à } R_0 \text{ exprimé dans } R_4 \end{cases} \quad (B-5)$$

Nous trouvons après calcul :

$$\Omega_4^{(0)} = \Omega_4^{(3)}(R_3) + R_3^4 \Omega_3^{(2)} + R_3^4 R_2^3 \Omega_2^{(1)}(R_1) + R_3^4 R_2^3 R_1^2 \Omega_0^{(1)}(R_0) \quad (B-6)$$

$$V_C^{(0)}(R_4) = V_{O_4}^{(0)}(R_4) + V_C^{O_4}(R_4) + \Omega_4^{(0)}(R_4) \wedge O_4 C(R_4) \quad (B-7)$$

$$V_{O_4}^{(0)}(R_4) = R_3^4 V_{O_4}^{(0)}(R_3)$$

$$V_{O_3}^{(0)}(R_2) = V_{O_2}^{(0)}(R_2) + V_{O_3}^{O_2}(R_2) + \Omega_2^{(0)}(R_2) \wedge \dot{O}_2 O_3(R_2)$$

$$V_{O_3}^{(0)}(R_3) = R_2^3 V_{O_2}^{(0)}(R_2)$$

$$V_{O_3}^{(0)}(R_2) = V_{O_2}^{(0)}(R_2) + V_{O_3}^{O_2}(R_2) + \Omega_2^{(0)}(R_2) \wedge O_2 O_3(R_2)$$

$$V_{O_2}^{(0)}(R_2) = R_1^2 V_{O_2}^{(0)}(R_1)$$

$$V_{O_2}^{(0)}(R_1) = V_{O_1}^{(0)}(R_1) + V_{O_2}^{O_1}(R_1) + \Omega_1^{(0)}(R_1) \wedge O_1 O_2(R_1)$$

$$V_{O_1}^{(0)}(R_3) = R_0^{(1)} V_{O_1}^{(0)}(R_0)$$

En ce qui concerne $V_c^{(0)}(R_4)$, nous devons remonter de bas en haut pour l'obtenir en utilisant les sept équations qui la suivent.

Nous pouvons remarquer que cette méthode est très lourde, de plus elle est compliquée à implémenter sur ordinateur du fait de sa lourdeur.

B-4- Modèle cinématique utilisant la matrice JACOBIENNE

Le modèle différentiel du robot manipulateur est celui qui permet de calculer les différentielles dx des coordonnées opérationnelles en fonction des différentielles dq imposées aux coordonnées généralisées.

$$dx = J [q] dq \quad (B-8)$$

Ce modèle permet de calculer aussi le modèle cinématique du robot manipulateur. En effet, si nous divisons dx et dq par dt nous obtiendrons X (vitesse de position et d'orientation de l'outil de travail) et \dot{q} (vitesse généralisée du robot manipulateur) ce qui nous permet d'écrire :

$$\dot{X} = J [q] \dot{q} \quad \text{avec : } \dot{X} = [V_x, V_y, V_z, w_x, w_y, w_z]^t$$

V_x, V_y, V_z : vitesses linéaires de l'outil de travail

w_x, w_y, w_z : vitesses angulaires de l'outil de travail

$J [q]$: matrice jacobienne

\dot{q} : vecteur vitesse généralisée

Pour obtenir ce modèle, il nous faut calculer la matrice jacobienne $J [q]$, nous présentons deux méthodes de calcul de $J [q]$.

B-4-1- Méthode du produit vectoriel : [Lee 87], [You 87], [Ren 78]

Considérons la $i^{\text{ème}}$ liaison dont l'axe est défini par le vecteur unitaire Z_i . Un accroissement infinitésimal dq_i de la coordonnée généralisée q_i provoque sur l'outil de travail du manipulateur un accroissement infinitésimal de position dp_i et un accroissement infinitésimal d'orientation $d\Phi_i$.

a) Si cette liaison est prismatique (cf.fig. B-3)

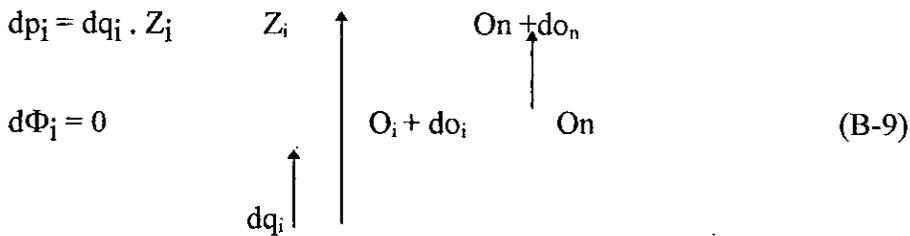


fig - B-4- Accroissement infinitésimal de position et d'orientation pour une liaison prismatique.

b) Si cette liaison est rotoïde : (cf. fig. B-4)

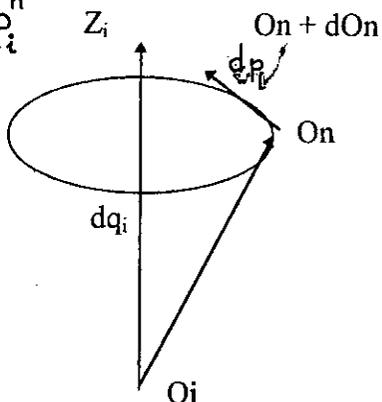
$$\begin{cases} dp_i = (dq_i \cdot Z_i) \wedge P_i^n \\ d\Phi_i = dq_i \cdot Z_i \end{cases} \quad (B-10)$$


fig - B-4- Accroissement infinitésimal de position et d'orientation pour une liaison rotoïde.

En utilisant le paramètre σ_i tel que :

$\sigma_i = 1$ si L_i est prismatique

$\sigma_i = 0$ si L_i est rotoïde

Nous pouvons regrouper (B-9) et (B-10) en une égalité :

$$\begin{cases} dp_i = (\sigma_i \cdot Z_i + \overline{\sigma_i} \cdot Z_i \wedge P_i^n) \cdot dq_i \\ d\Phi_i = \overline{\sigma_i} \cdot Z_i \cdot dq_i \end{cases} \quad (B-11)$$

Les accroissement infinitésimaux de position et d'orientation de l'outil de travail sont la somme de ceux engendrer aux différentes liaisons :

$$dp = \sum_{i=1}^n (\sigma_{i-1} Z_{i-1} + \overline{\sigma_{i-1}} Z_{i-1} \wedge P_{i-1}^n) dq_i \quad (B-12)$$

$$d\phi = \sum_{i=1}^n (\overline{\sigma_{i-1}} Z_{i-1}) dq_{i-1} \quad (B-13)$$

Les équations (B-12) et (B-13) nous permettent d'écrire :

$$J_i[q] = \begin{bmatrix} Z_{i-1} \wedge P_{i-1}^n \\ Z_{i-1} \end{bmatrix} \quad \text{si } L_i \text{ est rotoïde} \quad (B-14)$$

$$J_i[q] = \begin{bmatrix} Z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{si } L_i \text{ est prismatique} \quad (B-15)$$

avec $J[q] = [J_1[q], J_2[q], \dots, J_n[q]]$ (B-16)

P_{i-1}^n : position de l'outil de travail par rapport au repère R_{i-1} exprimé dans

R_0

Z_{i-1} : vecteur unitaire le long duquel il y a translation ou autour duquel il y a rotation.

Si nous voulons connaître les vitesses V et ω dans le repère R_n , il suffira de multiplier $V(t)$ et $\omega(t)$ par la matrice d'orientation $[3 \times 3] [R_0^n]$ de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} V_0^n(t) \\ \omega_0^n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0^n & 0 \\ 0 & R_0^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0^n & 0 \\ 0 & R_0^n \end{bmatrix} J[q] \dot{q}(t)$$

Nous pouvons remarquer que la méthode des produits vectoriels est simple à implémenter sur calculateur et donne les mêmes résultats que notre choix s'est orienté vers cette méthode.

B-4-2- Modèle variationnel :

Ce modèle est intéressant lorsque le problème de la coordination des mouvements du robot manipulateur se pose (cas de la commande), c'est à dire lorsque l'outil de travail doit suivre une suite de positions et d'orientations définie par le vecteur X en fonction d'une suite de valeurs des variables généralisées q . Il serait intéressant d'avoir cette suite d'orientations et de positions sous forme d'accroissement ΔX en fonction d'une suite d'accroissement des variables généralisées Δq . Cette transformation reviendrait

à linéariser le modèle géométrique qui est, comme nous l'avons vu au sous chapitre A, non-linéaire .

Une méthode de linéarisation du modèle géométrique $X = f(q)$ consisterait à calculer les dérivées partielles de la fonction f par rapport aux variables généralisées q , nous obtenons alors :

$$\Delta X = \frac{\partial f}{\partial q} \times \Delta q$$

Le calcul de la dérivée partielle de f , par rapport aux variables généralisées, peut être fait à l'aide du calcul de celui de la matrice jacobienne J . Le choix des paramètres de position et d'orientation dépend d'une matrice Π qui, multipliée par J , nous donne :

$$\Delta X = J \cdot \Pi \cdot \Delta q$$

Cette équation nous permet d'avoir la valeur des accroissements ΔX de la position et de l'orientation de l'outil de travail en fonction des accroissements Δq des variables articulaires. Le calcul de la matrice jacobienne J a été vu précédemment. La matrice Π qui dépend du choix des paramètres de position et d'orientation peut être subdivisée en deux sous matrices :

$$\Pi = \begin{bmatrix} M_p & 0 \\ 0 & M_R \end{bmatrix}$$

M_p : matrice dépendant du choix des coordonnées

M_R : matrice dépendant du choix des paramètres d'orientation

a) Expression de M_p : les éléments de la matrice M_p dépendent du choix des coordonnées :

1°) Coordonnées cartésiennes :

$$(X, Y, Z) = (l, m, n)$$

donc $dX = dl$

$$dY = dm$$

$$dZ = dn$$

d'où

$$M_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2°) Coordonnées cylindriques :

$$(X, Y, Z) = (P \cos\theta, P \sin\theta, Z)$$

$$dX = \cos\theta dp - p \sin\theta d\theta$$

$$dY = \sin\theta dp + p \cos\theta d\theta$$

$$dZ = dZ$$

D'où :

$$M_p = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \frac{-\sin\theta}{p} & \frac{\cos\theta}{p} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3°) Coordonnées sphériques :

$$(X, Y, Z) = (p \cos\theta \sin\phi, p \sin\theta \sin\phi, Z \cos\phi)$$

$$dX = \cos\theta \sin\phi dp - p \sin\theta \sin\phi d\theta + p \cos\theta \cos\phi d\phi$$

$$dY = \sin\theta \sin\phi dp + p \cos\theta \sin\phi d\theta + p \sin\theta \cos\phi d\phi$$

$$dZ = \cos\phi dp - p \sin\phi d\phi$$

D'où :

$$M_p = \begin{bmatrix} \cos\theta \sin\phi & \sin\theta \cos\phi & \cos\phi \\ \frac{-\sin\theta}{p \cos\theta} & \frac{\cos\theta}{p \sin\phi} & 0 \\ \frac{\cos\theta \cos\phi}{p} & \frac{\cos\theta \cos\phi}{p} & \frac{-\sin\theta}{p} \end{bmatrix}$$

b) Expression de M_R : les éléments de la matrice M_R dépendent du choix des paramètres d'orientation, nous ne donnerons que les expressions des éléments de M_R :

1°) Angle de Bryan :

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi_1 \operatorname{tg}\phi_2 & -\cos\phi_1 \operatorname{tg}\phi_2 \\ 0 & \cos\phi_1 & \sin\phi_1 \\ 0 & \frac{-\sin\phi_1}{\cos\phi_2} & \frac{-\cos\phi_1}{\sin\phi_2} \end{bmatrix}$$

2°) Paramètres d'Euler :

$$M_R = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S & r & -q \\ -r & S & p \\ q & -p & S \\ -p & -q & -r \end{bmatrix}$$

3°) Cosinus directeurs :

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & X_z & -X_y \\ -X_z & 0 & X_x \\ X_y & -X_x & 0 \\ 0 & Y_z & -Y_y \\ -Y_z & 0 & Y_x \\ -Y_y & -Y_x & 0 \\ 0 & Z_x & -Z_y \\ -Z_z & 0 & Z_x \\ Z_y & -Z_x & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple : si notre choix est celui :

- des coordonnées cartésiennes
- des paramètres d'Euler.

Alors la matrice Π a pour expression :

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{S}{2} & \frac{r}{2} & -\frac{q}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-r}{2} & \frac{S}{2} & \frac{p}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{q}{2} & -\frac{p}{2} & \frac{S}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-p}{2} & \frac{-p}{2} & \frac{-r}{2} \end{bmatrix}$$

B-5- Programme FAI - MC

Le programme FAI - MC (MC : modèle cinématique) permet de calculer les vitesses $V(t)$ et $\omega(t)$ pour les robots à chaîne cinématique simple ayant de deux à six degrés de liberté avec des liaisons prismatiques et/ou rotoïdes. Le calcul de ces vitesses nécessite le passage par l'élaboration d'une matrice jacobienne $J [q]$. Cette matrice est obtenue à partir de la méthode du produit vectoriel.

D'après le paragraphe B-3-2, l'expression des colonnes de la matrice $J [q]$ est :

$$J_i = \begin{bmatrix} Z_{i-1} \wedge P_{i-1}^n \\ Z_{i-1} \\ Z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ pour une rotation en } i$$

Z_{i-1} : vecteur unitaire du repère R_{i-1} exprimé dans R_0 .

Si T_0^{i-1} est la matrice de passage du repère R_0 au repère R_{i-1} alors les composantes du vecteurs Z_{i-1} seront les trois premiers éléments de la troisième colonne de T_0^{i-1} .

P_{i-1}^n : position de l'outil de travail par rapport à O_{i-1} exprimé dans R_0

$$p_{i-1}^n = P_0^n - P_0^{i-1}$$

P_0^n : position de l'outil de travail par rapport à O exprimée dans R_0

P_0^{i-1} : position de O_{i-1} par rapport à O exprimée dans R_0 .

On pose pour la mise en informatique :

$$P_0(i) = P_1^n$$

$$Z(i) = Z_i$$

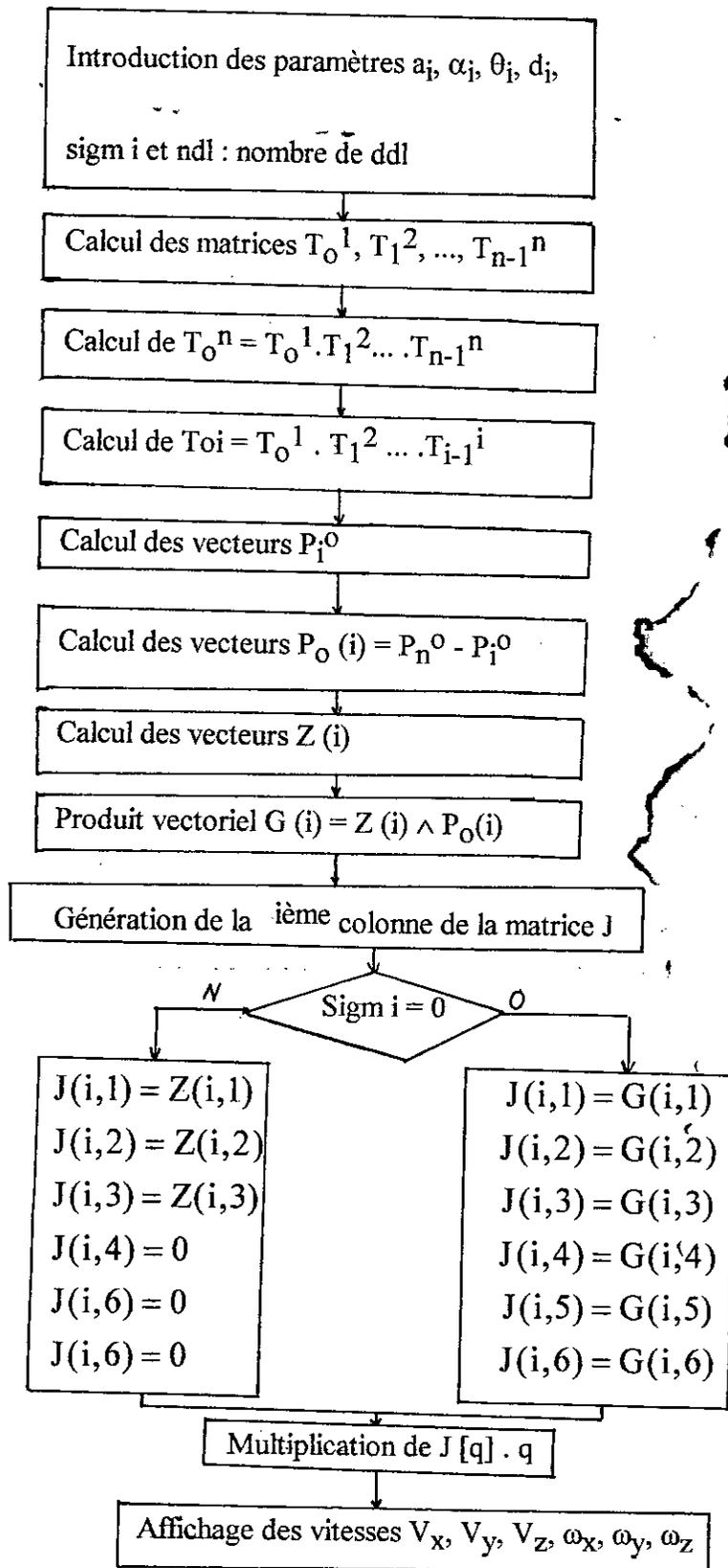
Soit $G(i) = Z(i) \wedge P_0(i)$, (\wedge : produit vectoriel), nous aurons :

$$J[i] = \begin{bmatrix} G(i) \\ Z(i) \end{bmatrix} \quad \text{pour une rotation en } i$$

$$J[i] = \begin{bmatrix} Z(i) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{pour une translation en } i$$

D'où l'organigramme de la figure B-5 (cf. fig. B-5).

Application : Nous devons développer les programmes TH8 - MC et PUMA - MC à partir de FA1 - MC. Il vont nous permettre de calculer le modèle cinématique des robots TH8 et PUMA.



Modèle cinématique inverse

Le modèle cinématique inverse d'un robot manipulateur est le modèle qui permet de calculer, s'il existe, le vecteur vitesse généralisée qui correspond à une vitesse donnée de translation et de rotation de l'outil de travail. Le but du calcul du modèle cinématique inverse est qu'en pratique voulons maîtriser les vitesses de translations et de rotation de l'outil de travail. En imposant le modèle cinématique inverse, nous avons deux méthodes à notre disposition.

- Inverser le modèle cinématique direct, donc calculer J^{-1} .
- Différencier le modèle géométrique inverse.

Notre choix est orienté vers l'inversion du modèle cinématique direct puisque la deuxième méthode présente l'inconvénient de nécessiter le calcul du modèle géométrique inverse, ce qui n'est pas toujours possible comme cela a été vu précédemment.

L'inversion de la matrice $J [q]$ n'est possible que si : [Coi 86]

- la matrice J est carrée ($m = n$)
- le déterminant de J est différent de zéro

avec : m : dimension de l'espace opérationnel

n : dimension de l'espace généralisé.

Dans ce cas ($m = n$) nous pouvons calculer le modèle cinématique inverse, l'inversion se fera à l'aide des méthodes numériques classiques d'inversion de matrices (Gauss, Cramer).

Le déterminant de J est nul dans les cas suivants :

a) $\det J : 0$ pour certaines valeurs discrètes des variables articulaires, que nous appellerons valeurs singulières. Dans ce cas, nous chercherons ces valeurs afin d'éviter de calculer J^{-1} pour ces valeurs, nous pouvons calculer J^{-1} pour toutes les autres valeurs.

b) $\det J = 0$ pour toute valeur des variables articulaires alors cela est une erreur de conception du robot (nous ne rencontrerons jamais ce cas en pratique).

Pour l'inversion de la matrice $J[q]$, nous avons utilisé la méthode de Gauss avec optimisation du pivot [Non 85] qui est adapté à notre cas, le principe de cette méthode est le suivant :

Considérons le produit $(J(q) \cdot I)$ où I est la matrice unité. Le principe de l'inversion repose sur le fait que toute transformation faite simultanément sur les lignes de $J(q)$ et I et permet de transformer $J[q]$ en I transforme en même temps I en $J^{-1}[q]$.

C / Modélisation dynamique

C - 1 - Introduction :

Dans le sous-chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à la vitesse de position et d'orientation de l'outil de travail, dans le cas où les déplacements se faisaient à faible vitesse, les effets dynamiques étant alors négligeables.

Or, dans l'industrie, les exigences sont de plus en plus grandes. Il faut concevoir des robots performants, capables d'exécuter des tâches à des vitesses de plus en plus élevées. Donc, on ne peut plus négliger les effets dynamiques.

Le modèle cinématique a, comme nous l'avons vu, un domaine de validité limité aux faibles vitesses ; d'où la nécessité d'une modélisation dynamique dont le domaine de validité s'étend aux grandes vitesses. Cette modélisation dynamique prendrait en compte tous les effets dynamiques résultants des vitesses élevées.

Les effets dynamiques sont :

- les forces centrifuges
- les forces de couplages
- les forces d'inertie
- les forces de gravité

La modélisation dynamique peut être exploitée sous deux formes :

1) Le modèle direct : il nous donne les forces généralisées Γ_i appliquées à la i ème articulation en fonction des variables articulaires q_i , vitesses articulaires \dot{q}_i et accélérations articulaires \ddot{q}_i :

$$\Gamma_i = g(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i)$$

2) le modèle inverse : il permet de calculer les accélérations articulaires en fonction des variables articulaires, des vitesses et des forces Γ_i appliquées aux i articulations.

$$\ddot{q}_i = h(\Gamma_i, q_i, \dot{q}_i)$$

Dans cette partie, nous allons présenter les différentes méthodes qui permettent d'obtenir le modèle dynamique d'un robot manipulateur.

C - 2 - Formalismes de modélisation dynamique :

Le modèle dynamique d'un robot manipulateur peut être obtenu grâce aux lois de la mécanique analytique. Ces lois ont été appliquées à la mécanique des robots manipulateur pour donner naissance aux différents formalismes de modélisation dynamique des robots manipulateurs. Ces formalismes sont :

- le formalisme de D'ALEMBERT
- le formalisme de NEWTON - EULER
- le formalisme de GIBBS
- le formalisme de LAGRANGE

Le modèle dyanmique d'un robot manipulateur à chaîne cinématique simple formé de corps rigides indéformables reliés par n liaisons peut être décrit par n équations qui, condensées sous forme matricielle, s'expriment par :

$$P = W \ddot{q} - U \quad (C-1)$$

P étant un vecteur $[nx1]$ dont la composante est :

- une force lorsque la liaison L_i est une translation
- un moment lorsque la liaison L_i est une rotation

W : matrice $[nxn]$, matrice d'inertie dont les éléments dépendent de :

$$q_i, \dot{q}_i, J_i$$

U : vecteur $[n \times n]$: vecteur dont les composantes sont la somme des forces de couplages, centrifugeuses, de gravité.

q = vecteur $[n \times n]$: vecteur accélération.

L'annexe A présentera en détail l'utilisation des formalismes de D'ALEMBERT, de NEWTON-EULER et de GIBBS en vue de l'obtention du modèle dynamique des robots manipulateurs. Nous développerons uniquement le formalisme de LA GRANGE qui est le plus couramment utilisé en conception et en simulation.

Comme nous l'avons dit en introduction, l'évolution des contraintes telles que l'augmentation de la vitesse de travail, l'utilisation de nouvelles technologies, conduisent les chercheurs à utiliser la modélisation pour :

1) La conception : concevoir un robot à l'aide de ces nouvelles technologies.

2) La simulation : pour des trajectires tests, l'utilisation du modèle du robot nous permettra d'analyser d'une manière fine et précise les performances du robot ainsi conçu. Si besoin est, nous pourrions ajouter les paramètres issus de l'étape de conception, grâce à la simulation et à l'analyse des performances.

3) La commande : le modèle du robot sera utilisé pour réaliser la synthèse de la loi de commande du robot.

Nous pouvons remarquer que les modèles doivent être le plus complets possibles. C'est à dire qu'il doivent nous donner dans le cas de la conception et de la simulation, un maximum d'informations intermédiaires, sans contrainte de temps.

Notre travail entre dans le cadre de la conception et de la simulation. Les modèles que nous élaborons, doivent donc permettre d'accéder à un maximum d'informations et ceci sans contrainte de temps de calcul.

Si nous étudions les différents formalismes, nous remarquerons [VUK 82] que les formalismes de NEWTON-EULER et de D'ALEMBERT utilisés pour générer le modèle dynamique donnent uniquement la valeur numérique des forces généralisées. Ce sont des

formalismes destinés uniquement à la commande, de plus ils sont très rapides, donc ils peuvent être utilisés en temps réel.

Le formalisme de LAGRANGE nous permet d'avoir la valeur numérique des forces d'inertie de chaque articulation ainsi que les forces de couplages, les forces centrifuges, les forces de gravité et les forces généralisées (Γ_j). L'inconvénient de ce formalisme est qu'il est assez lourd (comparé aux autres formalismes). Cet inconvénient n'en est pas un, puisque nous n'avons pas de contrainte de temps de calcul. C'est ce qui a orienté notre choix vers l'utilisation du formalisme de LAGRANGE pour l'élaboration du modèle dynamique du robot.

C - 3 - Formalisme de LAGRANGE : (LEE 87)

Le modèle dynamique d'un robot manipulateur peut être élaboré à partir d'application directe des équations de LAGRANGE. Le problème dans l'utilisation de ce formalisme réside dans le fait qu'il fait appel au calcul de dérivées partielles, ce qui nous amènera à dériver des matrices.

L'utilisation des matrices de passage homogènes (cf. chapitre 2), permettra de dériver une matrice de passage homogène en la multipliant par une matrice Q_i , les éléments de la matrice Q_i étant connus suivant que l'articulation L_i soit une translation ou une rotation.

Si nous utilisons le formalisme de LAGRANGE avec les paramètres de DENAVIT et HARTEMBERG nous pourrions avoir un modèle dynamique complet du point de vue bilan des forces, sans avoir à dériver des matrices, opération qui est évitée avec l'utilisation des paramètres de DENAVIT et HARTEMBERG et des matrices Q_i .

L'élaboration du modèle dynamique d'un robot à n degrés de liberté est donc basée sur :

- 1) Les matrices de passage homogènes [4x4] de transition d'un repère R_i à un repère R_{i+1} , ces matrices seront notées T_i^{i+1} .

2) les équations de LAGRANGE :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \Gamma_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

avec : L : lagrangien = énergie cinématique K - énergie potentiel P

K : énergie cinétique totale manipulateur

P : énergie potentiel totale du robot manipulateur

q_i : variable articulaire

\dot{q}_i : vitesse articulaire

Γ_i : force ou moment articulaire appliqué à l'articulation i.

C - 3 - 1 - Vitesses des articulations du robot manipulateur

Le formalisme de LAGRANGE utilise l'énergie cinétique du robot, qui s'exprime en fonction de la vitesse de chaque segment du robot :

Soit un point ${}^i r_i$ appartenant au segment i (cf. figure C-1)

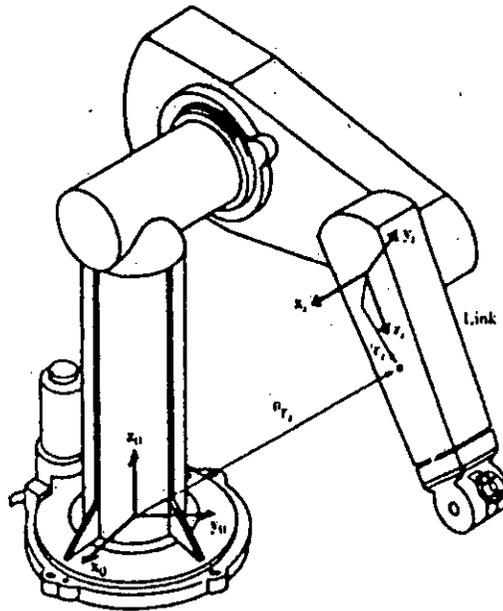


fig. C-1- point ${}^i r_i$ du segment i

Soit 0r_i le même point exprimé dans le repère R_0 , T_1^{i+1} la matrice de passage qui prend en compte un déplacement dans l'espace du repère R_i vers le repère R_{i+1} et T_i^{i+1} la matrice qui transforme R_i vers le repère R_0 .

Nous obtenons :

$${}^0r_i = T_0^i \cdot {}^i r_i \quad \text{avec} \quad T_0^i = T_0^1 \cdot T_1^2 \dots T_{i-1}^i$$

La vitesse $\dot{{}^i r}_i$ exprimée dans le repère R_0 peut être exprimée de la manière suivante:

$$\begin{aligned} {}^0V_i = V_i &= \frac{d}{dt} [{}^0r_i] = \frac{d}{dt} [T_0^i \cdot {}^i r_i] \\ V_i &= \dot{T}_0^1 \cdot T_1^2 \dots T_{i-1}^i \cdot {}^i r_i + T_0^1 \cdot \dot{T}_1^2 \dots T_{i-1}^i \cdot {}^i r_i + \dots + T_0^1 \cdot T_1^2 \dots \dot{T}_{i-1}^i \cdot {}^i r_i + T_0^1 \cdot T_1^2 \dots T_{i-1}^i \cdot \dot{{}^i r}_i \end{aligned}$$

$$V_i = \sum_{j=1}^i \left[\frac{\partial T_0^i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] \cdot {}^i r_i$$

Nous trouvons la forme compacte précédente parce que $\dot{{}^i r}_i = 0$. La dérivée partielle de T_0^i par rapport à q_j peut être facilement obtenue en utilisant la matrice Q_j dont les éléments sont :

$$Q_j = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

lorsque l'articulation L_j est une rotation

$$Q_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

lorsque l'articulation L_j est une translation

Donc nous avons : $\frac{\partial T_{i-1}^i}{\partial q_i} = Q_i T_{i-1}^i$

Pour $i = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\frac{\partial T_0^i}{\partial q_j} = \begin{cases} T_0^1 \cdot T_1^2 \dots T_{j-1}^{j-1} \cdot Q_j \cdot T_{j-1}^j \dots T_{i-1}^i & \text{pour } j \leq i \\ 0 & \text{pour } j > i \end{cases} \quad (C-1)$$

Afin de simplifier l'équation (C-1), utilisons la notation suivante :

$U_{ij} = \frac{\partial T_0^i}{\partial q_j}$, l'équation (C-1) devient:

$$U_{ij} = \begin{cases} T_0^{j-1} \cdot Q_j \cdot T_{j-1}^i & \text{pour } j \leq i \\ 0 & \text{pour } j > i \end{cases} \quad (C-2)$$

En utilisant cette notation :

$$V_i = \sum_{j=i}^i [U_{ij} q_j] \cdot r_i \quad (C-3)$$

Nous avons besoin aussi de l'effet de l'interaction entre les articulations :

$$U_{ijk} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial q_k} = \begin{cases} T_0^{j-1} Q_j & T_{j-1}^{k-1} Q_k & T_{k-1}^k & i \geq k \geq j \\ T_0^{k-1} Q_k & T_{k-1}^{j-1} Q_j & T_{j-1}^i & i \geq j \geq k \\ 0 & & & i < j \text{ ou } i < k \end{cases}$$

L'équation (C-4) peut être interprétée comme traduisant les effets de l'interaction des articulations j et k sur le segment i.

C - 3 - 2 - Energie cinétique totale du robot manipulateur :

Après avoir obtenu la vitesse des articulations, nous avons besoin de trouver l'énergie cinétique du segment i. Soit K_i l'énergie cinétique du segment i, $i = 1, 2, \dots, n$, exprimée dans R_0 . Soit dK_i l'énergie cinétique d'une particule de masse différentielle dm dans le segment i, nous avons alors :

$$\begin{aligned} dK_i &= 1/2 (X^2 + Y^2 + Z^2) dm \\ &= 1/2 \cdot \text{Trace} (V_i \cdot V_i^t) = 1/2 T_r (V_i \cdot V_i^t) dm \end{aligned} \quad (C-5)$$

avec : T_r : signifie l'opération de trace d'une matrice, $T_r [A] = \sum a_{ii}$.

t : dénote le transposé .

En remplaçant l'expression de V_i (équation C-3) dans (C-5), nous obtenons :

$$dK_i = 1/2 T_r \left[\sum_{p=1}^i U_{ip} \dot{q}_p r_i^i \left[\sum_{r=1}^i U_{ir} \dot{q}_r r_i^i \right]^T \right] dm$$

$$dK_i = 1/2 T_r \left[\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} r_i^i r_i^i U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] dm$$

$$dK_i = 1/2 T_r \left[\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} (r_i^i r_i^i dm) U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right]$$

U_{ip} , U_{ir} , U_p et \dot{q}_r sont indépendants de la distribution de masse du segment i ce qui nous permet d'intégrer l'équation précédente et nous obtenons :

$$K_i = \int dK_i = 1/2 Tr \left[\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} \left(\int r_i^i r_i^i dm \right) U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right]$$

L'intégrale à l'intérieur du segments est l'inertie de tous les points du segment i :

$$J_i = \int r_i^i r_i^i dm = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i x_i^i dm & \int x_i z_i^i dm & \int x_i dm \\ \int x_i y_i dm & \int y_i^2 dm & \int x_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int x_i z_i dm & \int y_i z_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix}$$

Si nous utilisons les tenseurs d'inerties I , définis dans les matrices à trois dimensions nous obtenons :

$$J = \begin{bmatrix} (-I_{XX} + I_{YY} + I_{ZZ}) & I_{XY} & I_{XZ} & m \bar{X}_i \\ I_{XY} & (I_{XX} - I_{YY} + I_{ZZ}) & I_{YZ} & m \bar{Y}_i \\ I_{XZ} & I_{YZ} & (I_{XX} + I_{YY} - I_{ZZ}) & m \bar{Z}_i \\ m \bar{X}_i & m \bar{Y}_i & m \bar{Z}_i & m \end{bmatrix}$$

Avec X_i, Y_i, Z_i , étant les trois premières composantes de r . L'équation (C-6) devient

$$K_i = 1/2 T_r \left[\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} J_i U_{ir}^t \dot{q}_p \dot{q}_r \right]$$

d'où l'expression de l'énergie cinétique totale du robot :

$$K = \sum K_i = 1/2 \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \left[T_r (U_{ip} J_i U_{ir}^t) \dot{q}_p \dot{q}_r \right]$$

Il faut noter que l'énergie cinétique K est un scalaire, J_i dépend uniquement de la translation de masse du segment i et que J_i est exprimé par rapport au repère lié au segment i .

C - 3 - 3 : Energie potentielle totale du robot manipulateur

Soit P_i l'énergie potentielle du segment i , elle a pour expression

$$P_i = - m_i g \cdot {}^0\vec{r}_i = - m_i g (T_o^i \vec{r}_i)$$

$i=1, 2, 3, \dots, n$

d'où l'énergie potentielle totale du robot :

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n -m_i g (T_o^i \vec{r}_i) \quad (C-8)$$

g étant l'accélération de gravité ($g = (0, 0, - 9,8062, 0)$)

C - 3 - 4 - Modèle dynamique du robot manipulateur

En utilisant les équations (C-7) et (C-8), nous obtenons le lagrangien du robot :

$L = K - P$, ce qui nous donne :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \left[T_r (U_{ip} J_i U_{ir}^t) \dot{q}_p \dot{q}_r \right] + \sum_{i=1}^n m_i g (T_o^i \vec{r}_i) \quad (C-9)$$

Si nous appliquons l'équation de LAGRANGE, nous obtiendrons :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L_i}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L_i}{\partial q_i} = \Gamma_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\Gamma_i = \sum_{j=i}^n \sum_{k=j}^i \text{Tr} (U_{ij} \cdot J_i \cdot U_{ij}^t) \ddot{q}_k + \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \sum_{m=1}^j \text{Tr} (U_{jkm} \cdot J_i \cdot U_{ji}^t) \dot{q}_k \dot{q}_m - \sum_{i=1}^n m_i g (U_{ij} \cdot \vec{r}_i) \quad (C-10)$$

Pour $i = 1, 2, \dots, n$, cette équation peut être exprimée sous forme matricielle :

$$\Gamma_i = \sum_{k=1}^n D_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=i}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m + C_i \quad (C-11)$$

Et plus simplement :

$$\Gamma(t) = D[q(t)] \ddot{q}(t) + h(q(t), \dot{q}(t)) + C[q(t)] \quad (C-12)$$

Où $\Gamma(t)$: vecteur $[n \times 1]$: force ou moment articulaire

$q(t)$: vecteur $[n \times 1]$: variable articulaire

$\dot{q}(t)$: vecteur $[n \times 1]$: vitesse articulaire

$\ddot{q}(t)$: vecteur $[n \times 1]$: accélération articulaire

$D[q(t)]$: matrice $[n \times n]$: matrice d'énergie dont l'expression des éléments est :

$$D_{ik} = \sum_{j=\max(i,k)}^n \text{Tr} (U_{jk} \cdot J_j \cdot U_{ji}^t) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$h[q(t), \dot{q}(t)]$: vecteur $[n \times 1]$: vecteur force de couplage et force centrifuge dont l'expression des éléments est :

$$h_c = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m \quad (C-14)$$

avec

$$h_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^j \text{Tr} (U_{jkm} \cdot J_i \cdot U_{ji}^t) \quad i, k, m = 1, 2, \dots, n \quad (C-15)$$

N.B : il est possible de séparer les forces de couplage et les forces centrifuges :

- les forces centrifuges pour les termes h_{ikk}
- les forces de couplage : pour les termes h_{ikm} , avec k différent de m .

$c[q(t)]$: vecteur $[n \times 1]$: vecteur des forces de gravité dont les éléments sont :

$$C_i = \sum_{j=1}^n -n_j g (U_{ij} \cdot \bar{r}_j) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Le modèle dynamique est représenté par les équations : (C-12), (C13), (C14),

(C-15) et (C-16).

C - 4 - Programme FAI - MD

Nous avons élaboré le programme FAI - MD (MD pour modèle dynamique) en FOTRAN 77, cette élaboration a été difficile du fait de l'utilisation des indices pour des matrices U_{ij} , U_{ijk} et h_{ikm} qui sont des matrices à deux dimensions $[4 \times 4]$. Rappelons que le langage FORTRAN 77 permet de prendre en compte des matrices indicées.

Pour contourner le problème des indices, nous avons créé des matrices ayant 5 dimensions. Exemple : $U_{ijk}(4,4)$ sera la matrice à 5 dimensions $U(i, j, k, 4, 4)$. Cette représentation est permise en FORTRAN 77. Après que ce problème ait été réglé, nous avons développé les sous-programmes suivants :

- calcul de la trace [$U_{ij} J_j U_{ji}^t$]
- calcul de la trace [$U_{jkm} J_j U_{ji}^t$]
- calcul de U_{jkm}
- calcul de U_{jk}

Pour le calcul de U_{jkm} et celui de U_{jk} , nous avons trouvé beaucoup de difficultés, parce que notre logiciel devait modéliser les robots manipulateurs ayant de deux à six degrés de liberté.

ORGANISATION DES CALCULS :

Nous avons organisé les calculs de la manière suivante :

1) Introduction des paramètres du robot :

- n = nombre de degrés de liberté
- les paramètres de DENAVIT - HARTEMBERG
- les variables articulaires
- les masses des segments
- les matrices d'inertie
- les vecteurs ${}^i r_i$
- les vitesses généralisées
- les accélérations généralisées.

- calcul de la trace [$U_{ij} J_j U_{ji}^t$]
- calcul de la trace [$U_{jkm} J_j U_{ji}^t$]
- calcul de U_{jkm}
- calcul de U_{jk}

Pour le calcul de U_{jkm} et celui de U_{jk} , nous avons trouvé beaucoup de difficultés, parce que notre logiciel devait modéliser les robots manipulateurs ayant de deux à six degrés de liberté.

ORGANISATION DES CALCULS :

Nous avons organisé les calculs de la manière suivante :

1) Introduction des paramètres du robot :

- n = nombre de degrés de liberté
- les paramètres de DENAVIT - HARTEMBERG
- les variables articulaires
- les masses des segments
- les matrices d'inertie
- les vecteurs ${}^i r_j$
- les vitesses généralisées
- les accélérations généralisées.

2) Elaboration des matrices

$$T_i^{i+1} \text{ et } T_0^i \text{ et } T_{i+1}^i :$$

$$\text{on pose } T(i) = T_{i+1}^i \quad i = 1, \dots, n$$

$$h(i) = T_0^i = T_0^1 \dots T_{i-1}^i$$

3) Elaboration des matrices $S(j, i, 4, 4)$

$$T_i^{i+1} \text{ et } T_0^i \text{ et } T_{i+1}^i :$$

$$\text{on pose } T(i) = T_{i+1}^i \quad i = 1, \dots, n$$

$$h(i) = T_0^i = T_0^1 \dots T_{i-1}^i$$

$$S(i, i+1, 4, 4) = T(i+1) \quad i=1, n-1$$

$$S(j, i, 4, 4) = S(j, j-1, 4, 4) \cdot T(i) \quad \text{avec } j = 1, n-2$$

$$i = j+2, n$$

4) Elaboration des matrices $Q(i)$ 5) Elaboration des matrices $U(i, j, k, 4, 4)$

$$U(0, i, 1) = Q(1) \cdot h(i) \quad i = 1, n$$

$$U(0, i, j) = h(j) \cdot Q(j) \cdot S(j-1, i) \quad , \quad j = 2, n \text{ et } i = j, n$$

$$U(i, 1, 1) = Q(1) \cdot Q(1) \cdot h(i) \quad , \quad i = 1, n$$

$$U(i, k, k) = h(k) \cdot Q(k) \cdot S(k-1, i), \quad i = 2, n \text{ et } k = 2, i$$

$$U(i, 1, k) = Q(1) \cdot h(k) \cdot Q(k) \cdot S(k-1, i), \quad i = 2, n \text{ et } k = 2, i$$

$$U(i, j, k) = h(j) \cdot Q(j) \cdot S(j-1, k-1) \cdot Q(k) \cdot S(k-1, i), \quad i = 3, n, j = 2, n \text{ et } k = j+1, i.$$

6) Elaboration des éléments $D(i, k)$

$$i = 1, n \text{ et } h = 1, n$$

$$\text{si } (i < k) \quad D(i, k) = D(i, k) + TR_1 \quad j = k, n$$

si $(k < i)$ $D(i, k) = D(i, k) + TR_1 \quad j = i, n$

si $(i = k)$ $D(i, k) = D(i, k) + TR_1 \quad j = i, n$

Le sous-programme : $TR_1 = \text{trace} (U(0, j, k) J(j) U(0, j, i)^t)$

7) Elaboration des éléments $h(i, k, m)$

$i = 1, n ; k = 1, n$ et $m = 1, n$

si $(i < k)$:

- si $(k < m)$ $h(i, k, m) = H(i, k, m) + TR_2 \quad j = m, n$
- si $(k \geq m)$ $h(i, k, m) = h(i, k, m) - TR_2 \quad j = k, n$

si $(i > k)$:

- si $(i < m)$ $h(i, k, m) = h(i, k, m) + TR_2 \quad j = m, n$
- si $(i \geq m)$ $h(i, k, m) = h(i, k, m) + TR_2 \quad j = m, n$

si $(i = k)$:

- si $(i < m)$ $h(i, k, m) = h(i, k, m) + TR_2 \quad j = m, n$
- si $(i \geq m)$ $h(j, k, m) + h(i, k, m) + TR_2 \quad j = k, m$

Le sous-programme $TR_2 = \text{trace} (U(j, k, m) \cdot J(j) \cdot U(0, j, i)^t)$

8) Elaboration du vecteur $C(i)$: soit g le vecteur accélération de la pesanteur.

Pour $i = 1, n$ et $j = 1, n$:

$C(i) = C(i) - M(j) \cdot g \cdot U(0, i, j) \cdot i r_i$

9) Elaboration du vecteur D :

$D(i) = D(i) + D(i, k) \cdot \ddot{q}(k)$ avec $i = 1, n$ et $k = 1, n$

$D(i)$ étant la composante du vecteur force d'inertie D

10) Elaboration du vecteur FCR :

$$F_{CR}(i) = F_{CR}(i) + H(i, k, m) \cdot \dot{q}(k) \cdot \dot{q}(m)$$

avec $i = 1, n$; $k = 1, n$ et $m = 1, n$ et $k \neq m$

$F_{CR}(i)$ étant la composante du vecteur force de CORIOLIS.

11) Elaboration du vecteur FCT :

$$F_{CT}(i) = F_{CT}(i) + H(i, k, m) \cdot q(k) \cdot q(m)$$

avec $i = 1, n$; $k = 1, n$; $m = 1, n$ et $k = m$.

FCT étant la composante du vecteur force centrifuge.

12) Affichage des résultats qui sont :

- les forces d'inertie
- les forces de gravité
- les forces de Coriolis
- les forces centrifuges.

Nous optimisons le temps de calcul, malgré que cela n'était pas une contrainte majeure, puisque nous nous situons dans le cadre de la conception et de la simulation. Toutes les données d'entrée sont introduites au clavier, toutes les données en sortie sont visualisées sur l'écran, ce qui nous a permis d'économiser le temps d'écriture et de lecture du disque (au cas où nous aurions utilisé des fichiers). (cf. fig. C-2 : elle présente le programme

FAI - MD)

L'utilité d'un tel logiciel entrera dans le cadre de la simulation d'un robot en cours de conception, ce programme nous permettra d'étudier les efforts que devons déployer les moteurs pour une accélération, vitesse et variable articulaire évoluant suivant une trajectoire donnée. Il nous permettra aussi de savoir selon les moteurs disponibles, si la tâche est réalisable du point de vue des efforts.

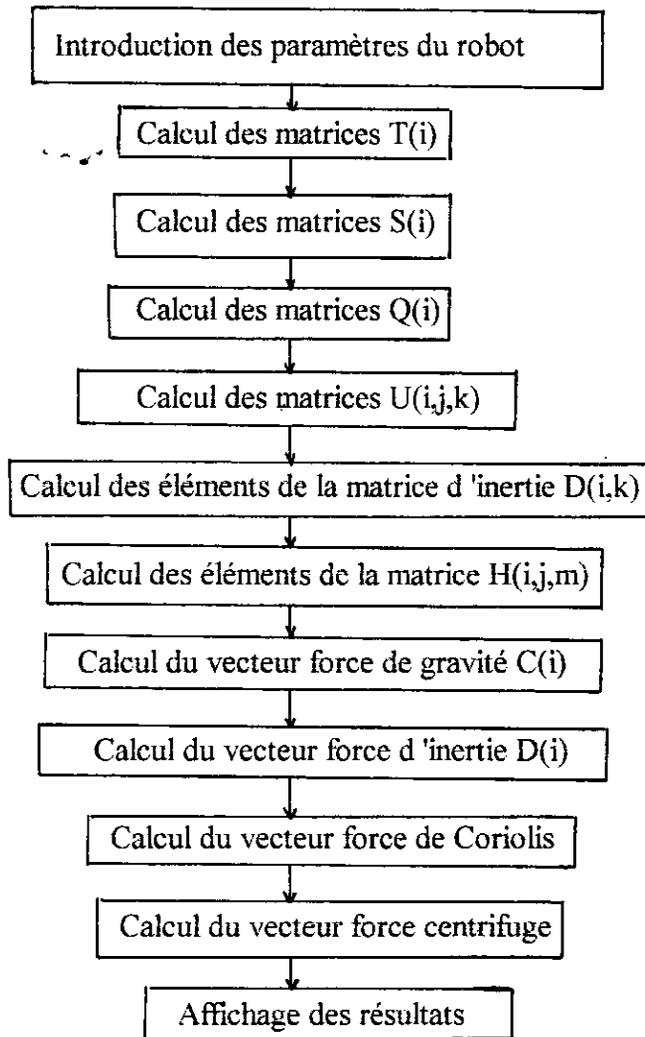


Figure C-2 : organigramme du programme FAI - MD.

C - 5 Application : Modèle dynamique du robot TH8

Nous avons élaboré un logiciel à partir du programme FAI - MD, qui permet d'obtenir le modèle dynamique du robot TH8 (cf. A-5, A-15, A-16). Nous disposons des paramètres tels que les longueurs. Ce qui nous manquait, c'était les masses des segments et leurs matrices d'inertie. Nous n'avons pu les trouver et ceci est dû au fait que ces paramètres sont inconnus ou ne figurent pas dans les notes techniques des constructeurs. Les paramètres de DENAVIT et HARTEMBERG ont été tirés de la littérature. En ce qui concerne les masses, les moments du premier ordre (ML) et du second ordre (ML²), les chercheurs ont développé des méthodes pour les identifier.

Plusieurs techniques peuvent être utilisées pour effectuer cette identification :

[MEG 84].

1) La mesure : les paramètres sont obtenus par mesure directe. Cette technique est simple en ce qui concerne la masse, elle pose une plus grande difficulté pour les moments. Le plus grand inconvénient de cette méthode est qu'elle doit être appliquée à chacun des corps, ce qui nécessite le démontage du robot.

2) Le calcul : les paramètres sont calculés à partir d'une représentation géométrique des divers corps du robot.

3) L'estimation : les paramètres du robot sont obtenus à l'aide d'une technique d'estimation. L'intérêt de cette méthode d'identification est qu'elle permet d'estimer les paramètres qui entrent dans le calcul du modèle, en évitant le démontage du robot.

Nous avons choisi les paramètres estimés par MEGAHED [MEG 84], nous les avons introduit dans le programme FAI - MD. Cela nous a permis d'élaborer le programme TH8 - MD donnant le modèle dynamique de TH8 déjà présenté dans le chapitre (2). Nous avons comparé les résultats obtenus à l'aide du TH8 - MD pour une trajectoire donnée à savoir q , \dot{q} et \ddot{q} , ces résultats sont analogues à ceux trouvés par MEGAHED : valeurs numériques des forces d'inertie, forces de couplages et forces centrifuges.

Pour vérifier aussi la validité de notre programme, nous avons élaboré à la main le modèle dynamique d'un robot à 2 degrés de liberté en utilisant la même méthode que celle du programme FAI - MD, en comparant les résultats obtenus par les deux manières à savoir à la main (notons que le calcul à la main du modèle dynamique du robot à deux degrés de liberté a demandé cinq jours de travail) et avec le programme FAI - MD. Nous avons trouvé les résultats identiques.

Nous avons procédé à la vérification de la validité du programme FAI - MD de deux manières différentes qui ont permis d'aboutir aux mêmes résultats. Ces résultats nous permettent d'affirmer la validité du logiciel FAI - MD et la bonne précision des résultats qu'il donne.

CHAPITRE V
RESULTATS ET TESTS



*«Lorsqu'un théoricien trouve un
resultat nouveau , personne n'y croit sauf lui !*

*Lorsqu'un expérimentateur trouve
un résultat nouveau , tout le monde y croit sauf lui ! »*

J.LEMATTRE

INTRODUCTION :

Les robots industriels ont été développés pour accroître entre autre la productivité et améliorer la qualité au sein d'un processus industriel .

Lors de la conception du robot , il faut prendre en considération le type de la tâche qu'il va accomplir , et le volume de travail ou l'organe terminal évolue . La connaissance du volume de travail du robot est très utile pour le commander et le dimensionner plus finement .

L'analyse de sensibilité du modèle, consiste à déterminer la tolérance sur les variables articulaires ainsi que sur les paramètres(longueurs) .

Lors de l'élaboration du modèle direct et inverse d'un robot manipulateur nous introduisons des erreurs. Ces erreurs sont dues en générale à la précision des paramètres utilisés par le programme (simple ou double précision , valeur de π) . Ces erreurs seront ensuite amplifiées à cause des multiplications successives de ces paramètres .

VOLUME DE TRAVAIL : [GOR 84]

DEFINITION :

Le volume de travail en position d'un robot manipulateur est défini comme l'espace physique engendré par un point de l'organe terminal lorsque la configuration du robot évolue . Ce volume est habituellement représenté par deux sections perpendiculaires choisies en fonction du type du robot manipulateur . Cette représentation est préférable en une seule vue en perspective .

En général la plage de variation d'une coordonnée généralisée est donnée :

$$q \in [q_{im} , q_{iM}]$$

Il peut arriver , toutefois, que ce ne soit pas le cas et en particulier pour une liaison rotoïde qui permet une rotation continue ; alors :

$$q_{im} = -\infty \quad \text{et} \quad q_{iM} = +\infty$$

Le volume de travail généralisé V_q d'un robot manipulateur est l'hyperparallélépipède de l'espace généralisé :

$$V_q = \prod_{i=1}^n [q_{im}, q_{iM}] \quad (\text{le produit étant le produit cartésien})$$

Le volume de travail opérationnel V_x d'un robot manipulateur est l'image, par la fonction f (cf. § 4-A-1), le volume de travail généralisé V_q :

$$V_x = f(V_q)$$

Ce volume de travail est appelé opérationnel, qui en fait est un hypervolume en général, est extrêmement difficile à caractériser et en général impossible à visualiser simplement.

CALCUL DU VOLUME DE TRAVAIL DU ROBOT PUMA600 :

Si nous considérons le robot manipulateur PUMA600, le volume de travail généralisé V_q est l'Hyperparallélépipède défini dans le tableau (5-1) :

i	1	2	3	4	5	6
q_{im}	-134°	0°	-26°	-180°	-125°	-180°
q_{iM}	$+134^\circ$	$+120^\circ$	$+90^\circ$	$+180^\circ$	$+125^\circ$	$+180^\circ$

Tableau 5-1.

Bornes de variation des coordonnées généralisées du robot manipulateur PUMA600.

Ce robot manipulateur est défini par les valeurs numériques suivantes : (paramètres de **DENAVIT-HARTENBERG**)

$$a_2 = 0.432 \text{ m} \quad d_2 = 0.149 \text{ m} \quad d_4 = 0.432 \text{ m} \quad d_6 = 0.056 \text{ m}$$

En utilisant le modèle géométrique direct, avec quelques modifications dans le programme **FAI_MG**, nous obtenons les projections du volume de travail en position V_p sur le plan horizontal

(X Y) et sur un plan vertical (X Z) (cf. Fig. 5-1), ainsi que le volume de travail en perspective.

REMARQUE :

L'examen de la figure (5-1) montre que ce robot (PUMA) a un comportement sans discontinuité gênante tout l'on reste dans les limites du volume de travail défini. Cette régularité est un atout intéressant pour la programmation et l'utilisation dans le milieu industriel. Il nous permet aussi de détecter et d'éviter les passages par les singularités, concevoir l'installation optimale réservée au robot et par conséquent diminuer le coût.

ERREURS DE MODELISATION

A) TESTS DU MODELE GEOMETRIQUE :

Ce paragraphe a pour but de montrer l'importance de ces erreurs et leurs évolution lors d'une trajectoire donnée.

La manipulation (cf. FIG.5-2) consiste à prendre une trajectoire de consigne $X_{cons}=(L_{cons}, M_{cons}, N_{cons}, P_{cons}, Q_{cons}, R_{cons})$ et à introduire les paramètres de la trajectoire dans le modèle géométrique inverse. Les valeurs des variables articulaires obtenus seront à leur tour introduites dans le modèle géométrique direct qui nous donnera la trajectoire modèle $X_{mod}=(L_{mod}, M_{mod}, N_{mod}, P_{mod}, Q_{mod}, R_{mod})$, par la suite nous calculerons les erreurs commises :

$$\Delta L=L_{cons}-L_{mod}, \Delta M=M_{cons}-M_{mod}, \Delta N=N_{cons}-N_{mod}$$

$$\Delta P=P_{cons}-P_{mod}, \Delta Q=Q_{cons}-Q_{mod}, \Delta R=R_{cons}-R_{mod}$$

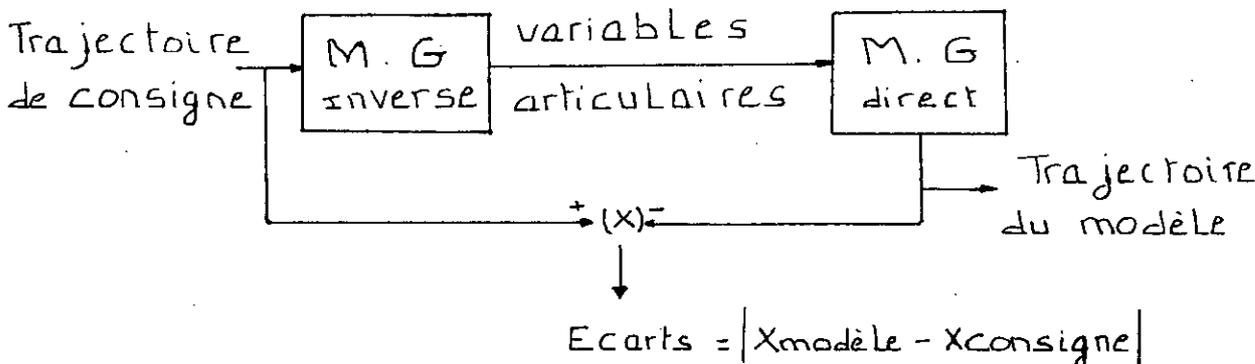


FIG.5-2: Calcul d'erreurs entre la consigne et modèle

Pour notre application nous prendrons le robot PUMA600 ; la trajectoire de consigne sera un cercle dans le plan (XOZ) de rayon $r=0.195$ m et de centre le point de coordonnées (0.195, 0.195). La durée d'exécution de la trajectoire sera de 30 sec (cf. Fig.5-9)

ANALYSE DES RESULTATS DES TESTS :

En premier lieu, il faut noter que la forme, la position et la grandeur du trajectoire est choisie afin d'assurer une certaine homogénéité dans les comparaisons (position relative constante par rapport au volume de travail) et éviter de passages par des singularités, le départ de la trajectoire est

situé au côté X positif; par raison de simplification et parce que c'est un cas couramment rencontré en pratique, les positions de prise et de dépose sont choisies au même niveau (même valeur de z).

Les résultats relevés au cours des tests sont les suivants :

- Evolution des paramètres ou variables articulaires Q_1, Q_2, \dots, Q_6 en (rd) en fonction de la trajectoire consigne, ainsi que les courbes de comparaisons entre les coordonnées opérationnelles du modèle par rapport à celles du consigne (cf. FIG.5-3 et Fig.5-4).
- Les figures (5-3) et (5-4) montrent qu'avec la trajectoire et le mouvement choisis l'allure des variables articulaires sont des fonctions sinusoïdale ou cosinusoidale de période $T=30$ sec à l'exception du coordonnée Q_5 qui a une évolution discontinue et ceci est due à un passage brutale à proximité des singularités et de la limite ($Q_5=0$). [GOR 84]
- Vu le plan dans lequel la trajectoire est effectuée, les coordonnées opérationnelles X_{α} et Z_{α} de consigne sont identiques à celles obtenues par le modèle géométrique, ceci nous permet de dire que le modèle géométrique élaboré conserve l'allure de la trajectoire.
- Malgré que la trajectoire de consigne ne touche pas l'orientation de l'outil de travail ($P_{cons}=Q_{cons}=R_{cons}=0.195$), nous remarquons que les graphes de P_{mod} , Q_{mod} et R_{mod} , obtenues par le modèle géométrique, ont une évolution qui est assez importante surtout pour P et R (cf. FIG.5-8 et 5-10). Cette comparaison nous pousse à affirmer qu'une trajectoire de consigne ne touche que la position aura une influence sur les variables de rotations.

- Erreurs de modélisation : Nous remarquons qu'elles existent, certes elles ne sont pas importantes, leurs valeurs oscillent entre 10^{-3} et 10^{-2} ; cette fourchette est la même trouvée dans les références spécialisées de la robotique [GOR 84],[COI 82]. Ces erreurs sont variables et leurs évolutions est propre à chaque paramètre. ce qui nous permet d'affirmer qu'elles doivent être étudiées tout au long d'une trajectoire et non pas en un point de la trajectoire.

Enfin nous pouvons dire que le modèle géométrique direct et inverse élaboré est acceptable vu les résultats satisfaisants qu'il donne

BA TESTS DU MODELE CINEMATIQUE :

Dans le cas de la modélisation cinématique. Les erreurs de modélisation proviennent essentiellement du calcul de la matrice jacobienne inverse, donc elles dépendent de la méthode d'inversion de J qui est la méthode de Gauss avec optimisation du pivot. La manipulation sera la même que celle présentée dans le paragraphe précédent,(cf. FIG.). Elle consiste à prendre une trajectoire de consigne $X_{cons} = (L_{cons}, M_{cons}, N_{cons}, P_{cons}, Q_{cons}, R_{cons})$, elle sera introduite dans le modèle géométrique inverse qui nous donnera les valeurs des variables articulaires au différents instants t de la trajectoire.

Ces valeurs des variables articulaires introduites dans le programme du modèle cinématique inverse nous donneront les valeurs des éléments de la matrice Jacobienne inverse, ensuite nous introduisons dans ce même programme la vitesse d'évolution de $X_{consigne}$ qui sera $V_{cons}=(L,M,N,P,Q,R)$.

Ce modèle nous donnera les vitesses d'évolution des variables articulaires. Les vitesses des variables articulaires avec les valeurs des variables articulaires (introduites dans le modèle cinématique direct) nous donneront les vitesses d'évolution de l'outil de travail $V_{mod}=(L_{mod},M_{mod},N_{mod}, P_{mod}, Q_{mod},R_{mod})$.

Nous avons calculé les erreurs commises qui sont:

$$\text{Erreurs} = V_{mod} - V_{cons}$$

elles sont de l'ordre de 10^{-3} , donc elles ne sont pas importantes.

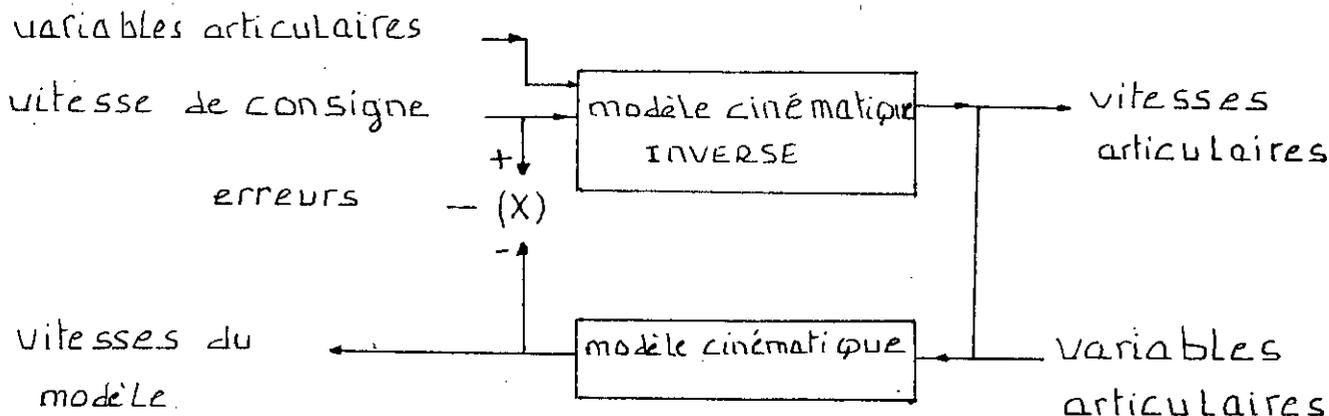


Fig.5-13 :Schéma pour le calcul de l'erreur de modélisation cinématique.

Nous avons fait une comparaison entre l'évolution des variables articulaires et celles de leurs vitesses. Nous constatons que les vitesses articulaires sont bien les vitesses correspondant aux variables articulaires respectives. A tout maximum ou minimum des variables articulaires correspond une vitesse nulle. A chaque pente importante des variables articulaires correspond une vitesse nulle. Cette comparaison nous permet de dire que les modèles cinématique direct et inverse élaborés sont bien en correspondance avec le modèle géométrique. Vu la correspondance entre évolution des variables articulaires et leurs vitesses, le programme d'élaboration du modèle cinématique direct et inverse donne des résultats satisfaisants.

- Il est bien clair que la vitesse choisie pour la trajectoire consigne est basée seulement sur les deux vitesses de translation X_{α} et Z_{α} avec les autres vitesses nulles ($Y_{\alpha \text{ cons}} = P_{\text{cons}} = Q_{\text{cons}} = R_{\text{cons}} = 0$) mais lors d'élaboration du modèle direct, nous constatons les évolutions suivantes :

- Malgré que la vitesse de la trajectoire de consigne ne touche les vitesses d'orientations de l'organe terminal, nous remarquons que les graphes de P_{mod} , Q_{mod} et R_{mod} , obtenus par le modèle cinématique, ont une évolution différente à celle de P_{cons} , Q_{cons} et R_{cons} imposées par la trajectoire. Leur évolution est en sinus ou en cosinus autour de la ligne zéro.

- Les vitesses opérationnelles X_{α} et Z_{α} , de la trajectoire consigne, sont identiques à celle trouvées par modélisation X_{α} , $Z_{\alpha}(\text{mod})$. Par contre la vitesse Y_{α} change évolution d'une droite ($Y_{\alpha \text{ cons}}=0$) à une fonction cosinusoidale autour de la ligne zéro est coïncide avec le graphe de consigne à deux instants $t = 8 \text{ sec}$ et $t = 22,5 \text{ sec}$

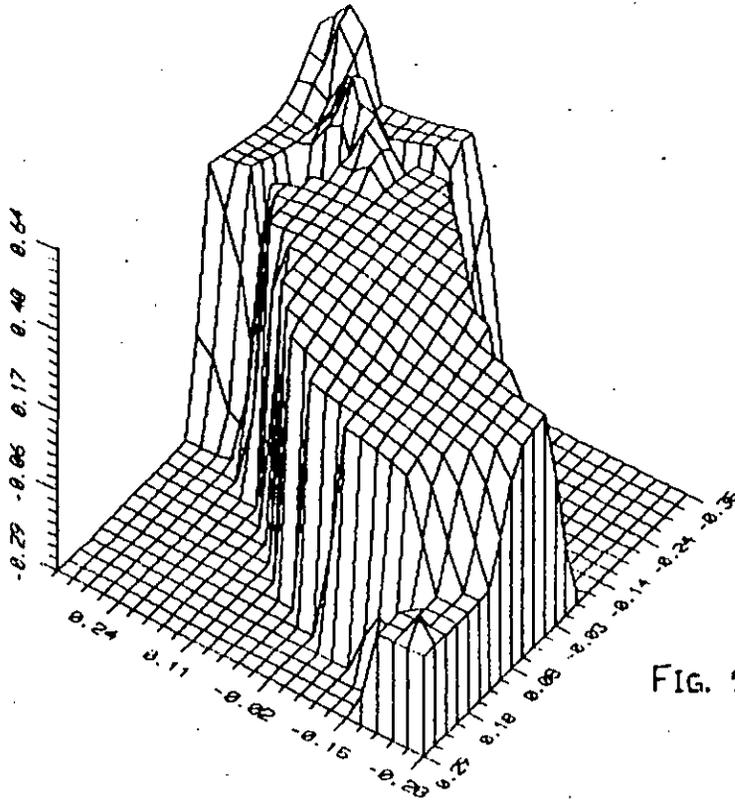


FIG. 5.1: Le volume de travail du Robot PUMA

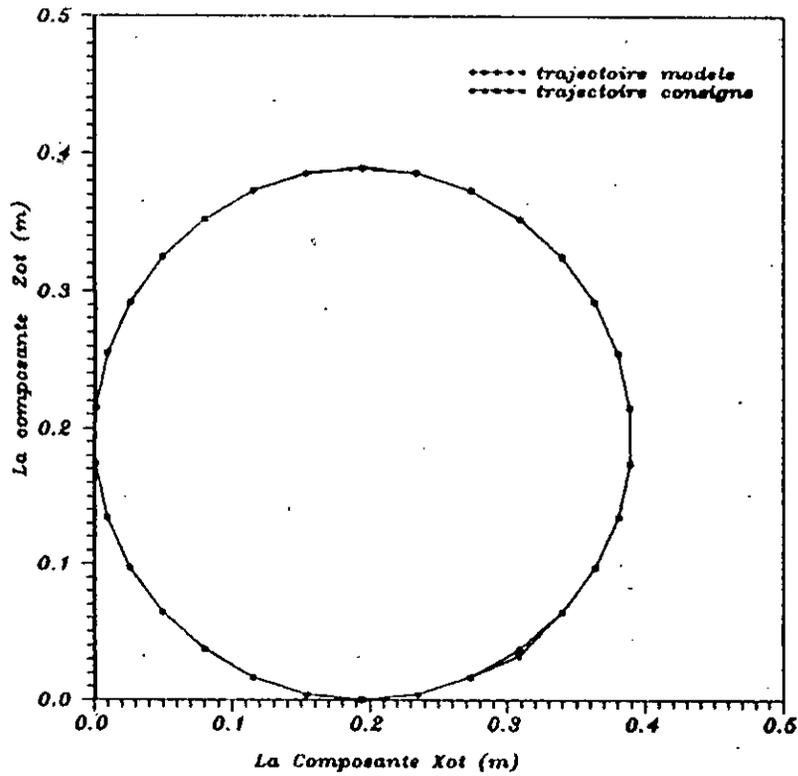


FIG.5-17 : EVOLUTION DE TRAJECTOIRE CONSIGNE ET MODELE

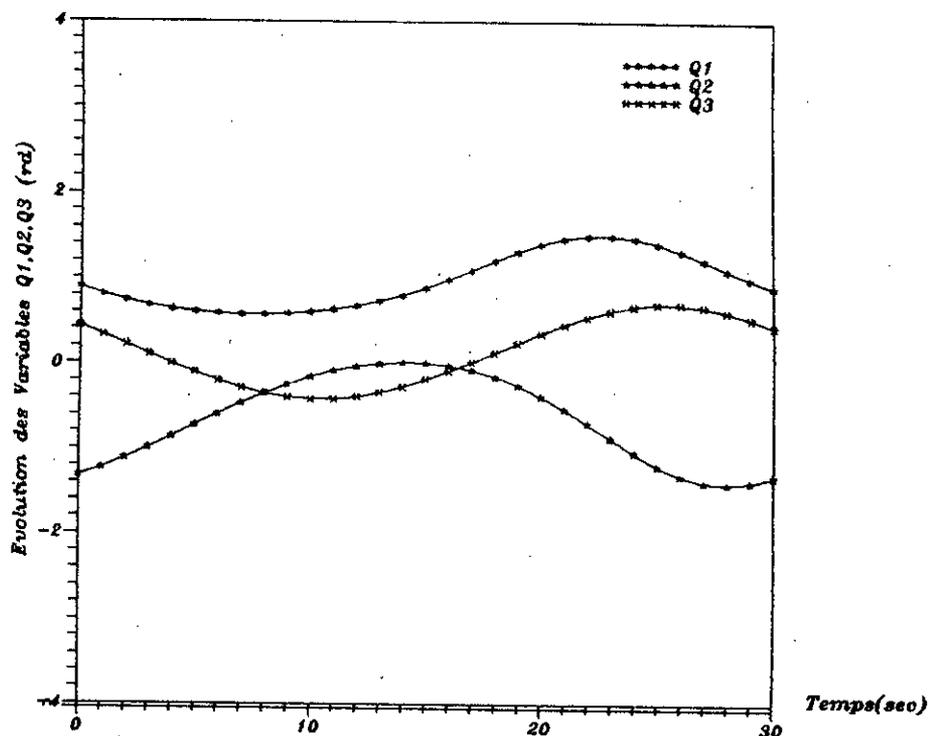


FIG.5-2 : Evolution des variables articulaires Q1,Q2,Q3 en fonction de la trajectoire consigne

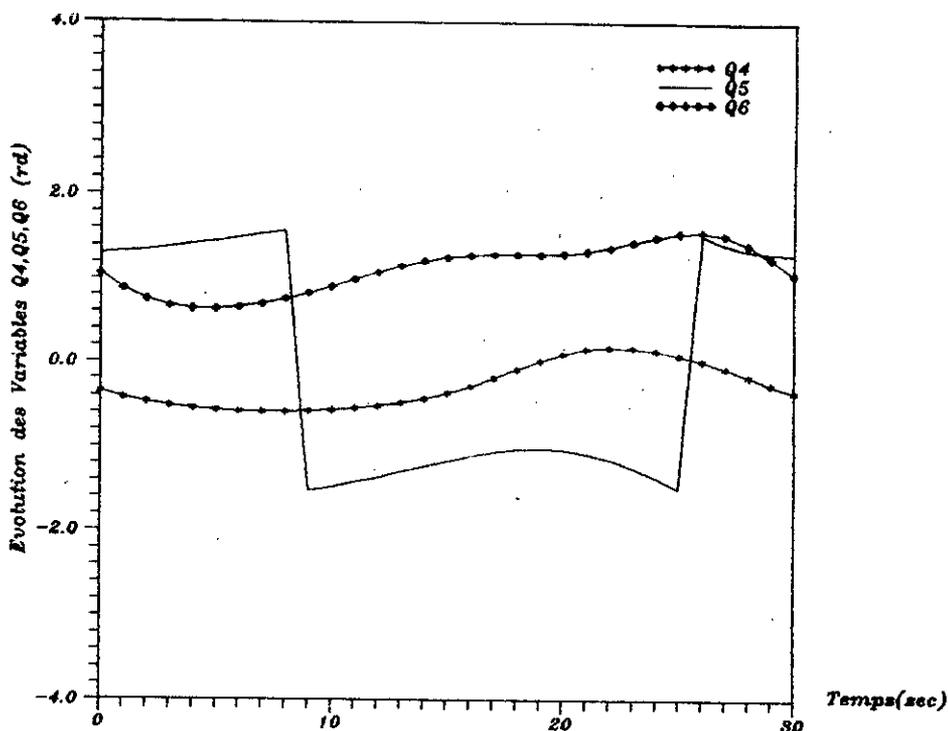


FIG.5-3 : Evolution des variables articulaires Q4,Q5,Q6 en fonction de la trajectoire consigne

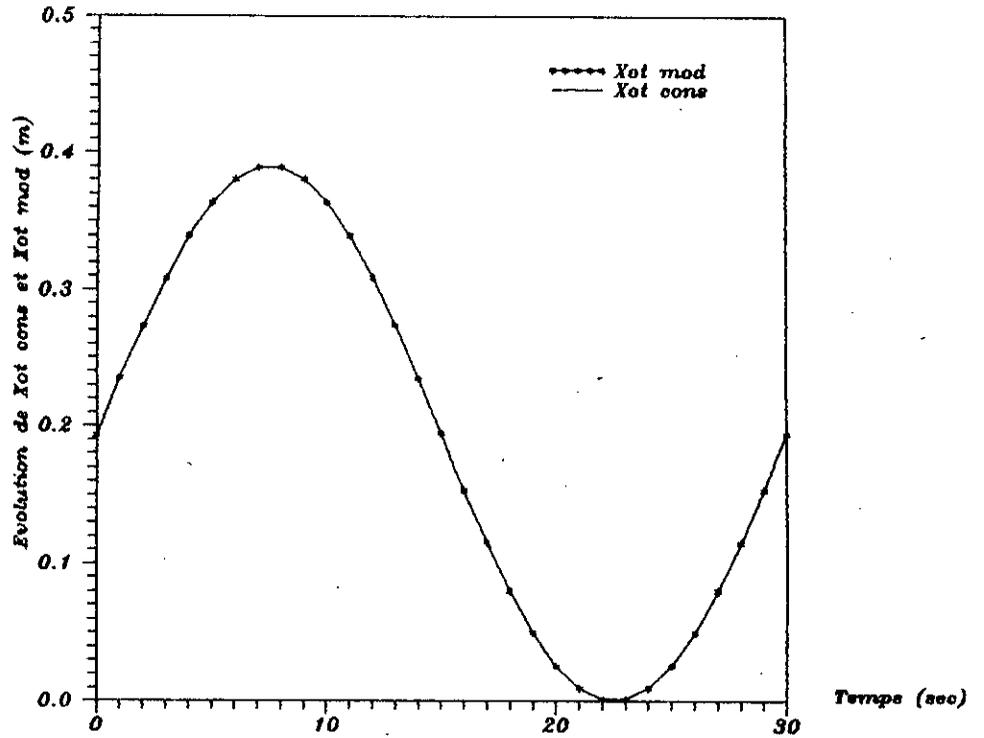


FIG.5-4 : EVOLUTION DE Xot cons et Xot mod

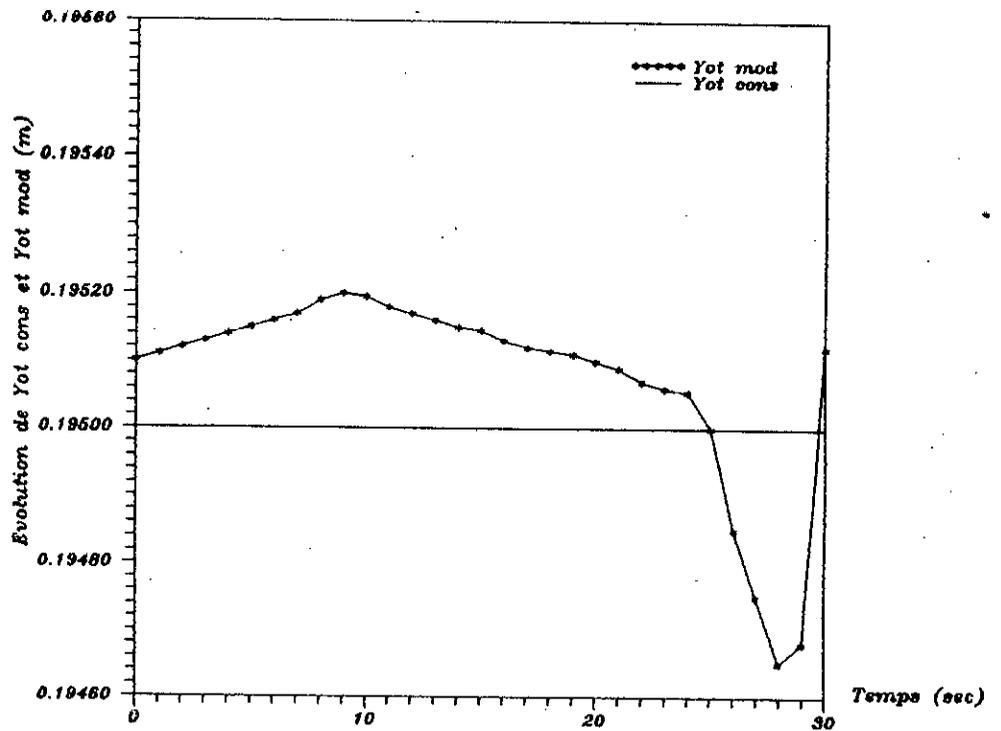


FIG.5-5 : EVOLUTION DE Yot mod et Ycons

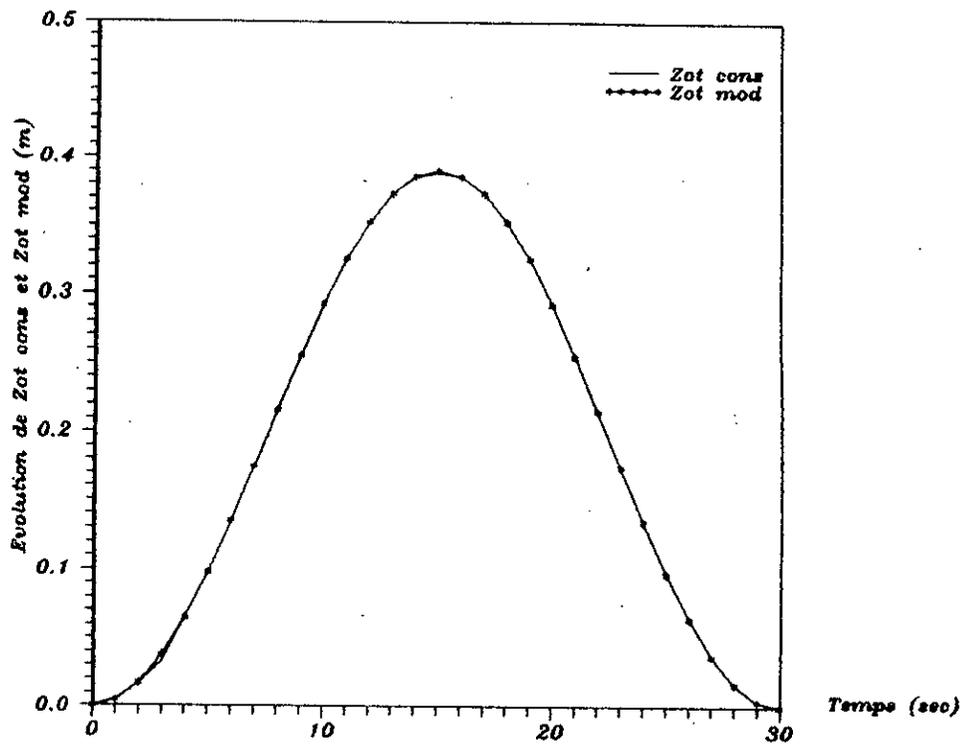


FIG.5-6 : EVOLUTION DE Zot cons et Zot mod

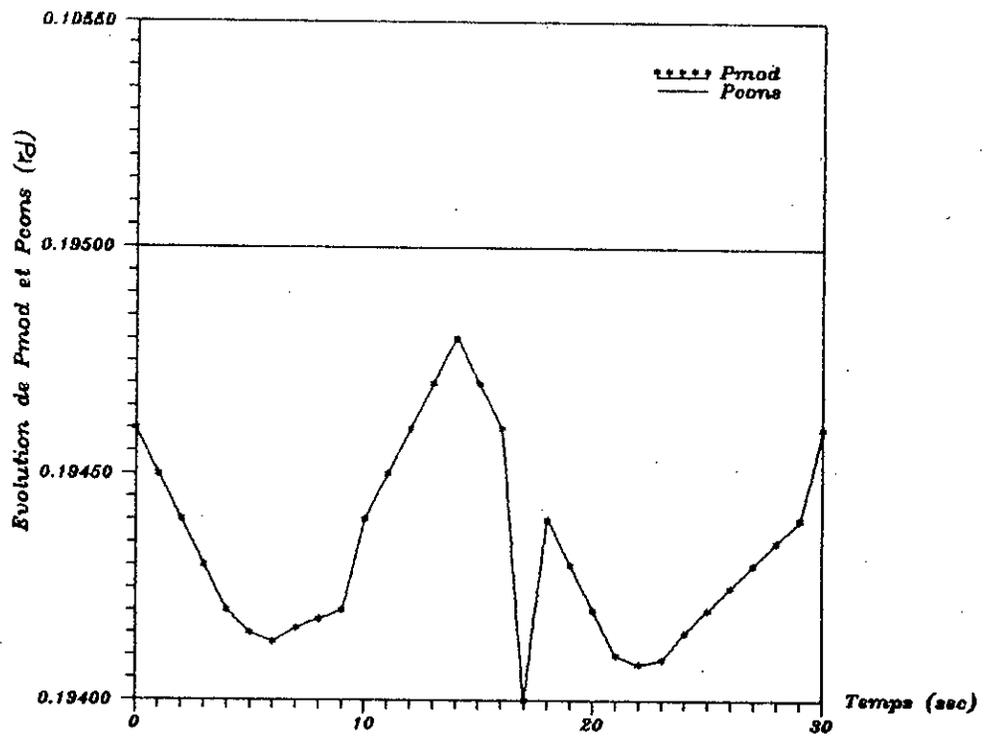


FIG.5-7 : Evolution de Pmod et Pcons

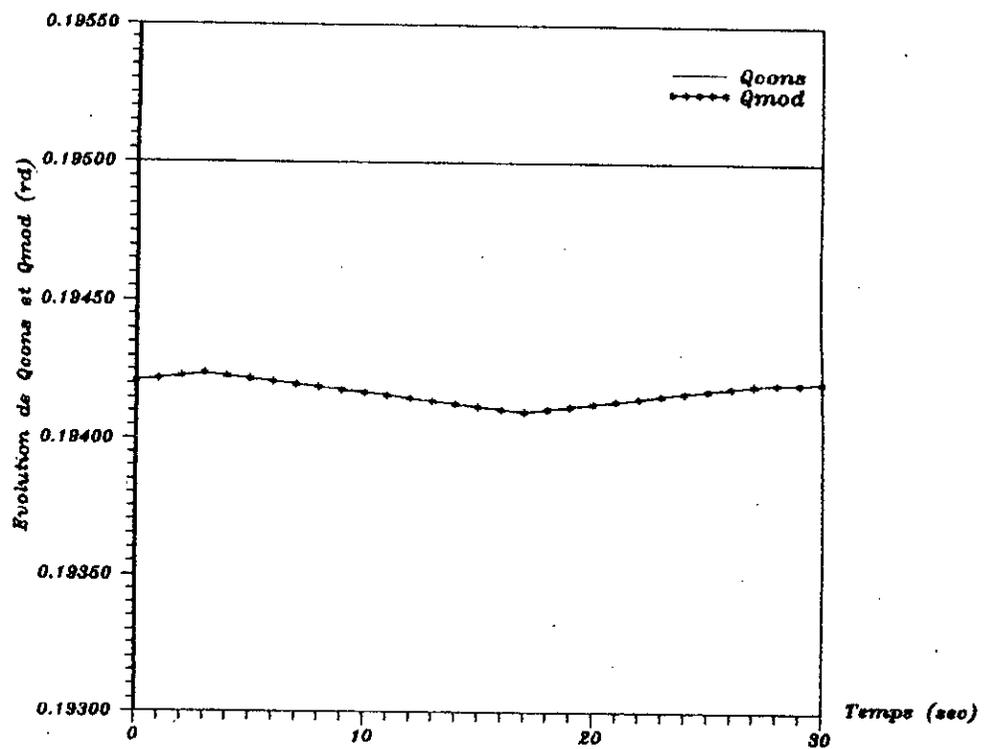


FIG.5-8 : Evolution de Qcons et Qmod

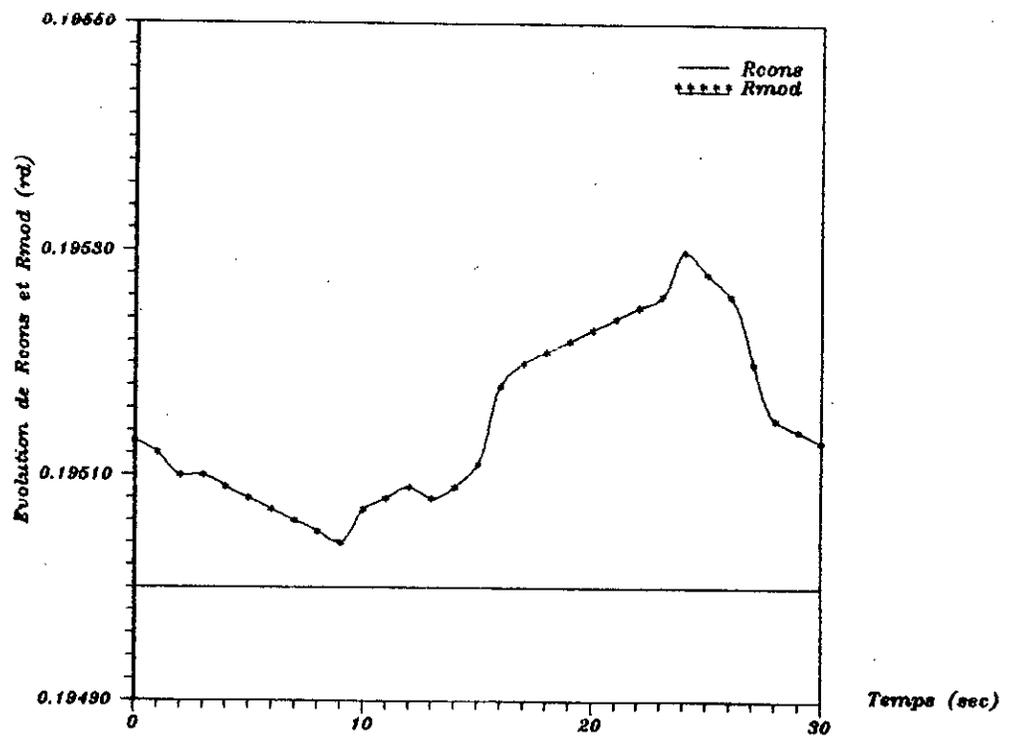


FIG 5-9 : Evolution de Rmod et Rcons

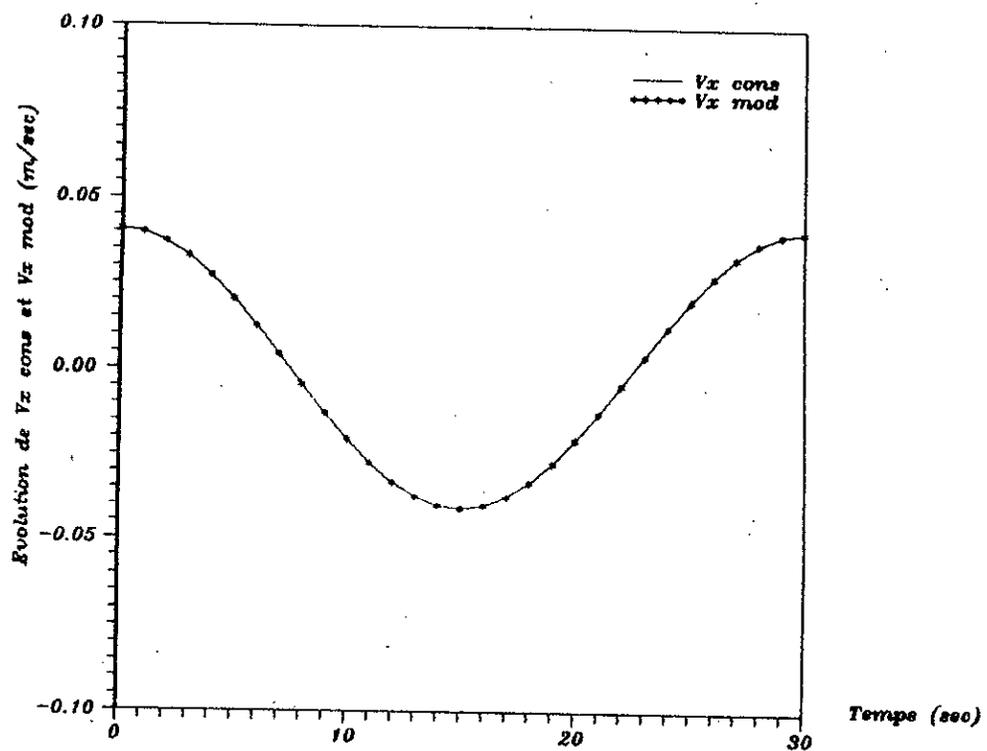


FIG.5-11 : EVOLUTION DE V_x cons et V_x mod

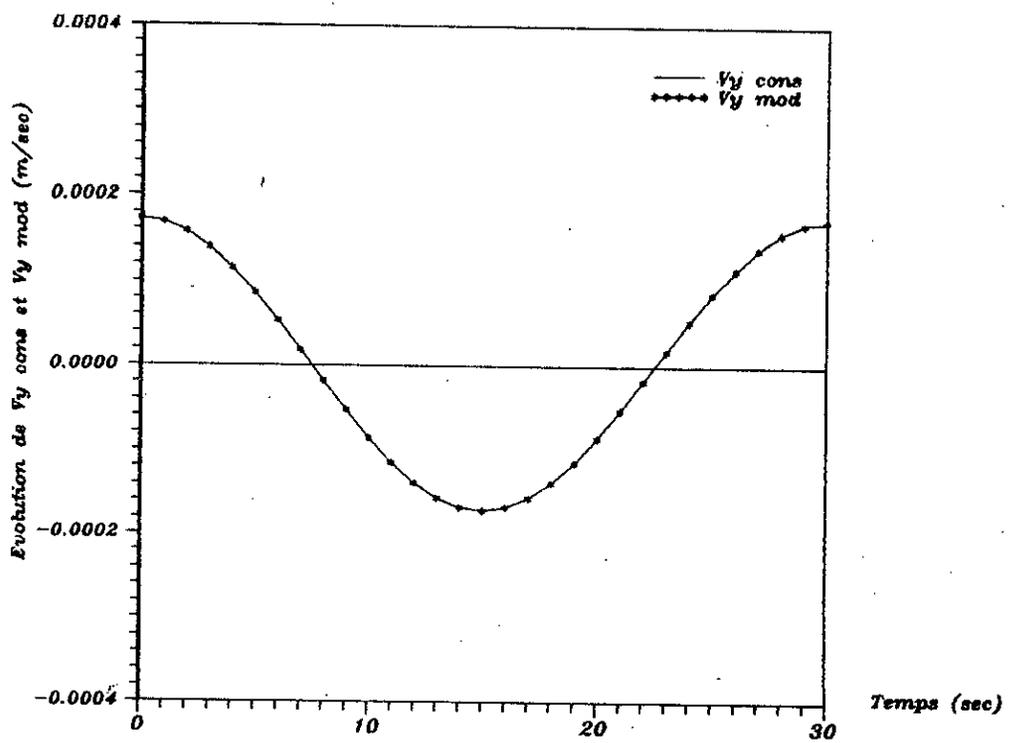


FIG.5-12 : EVOLUTION DE V_y cons et V_y mod

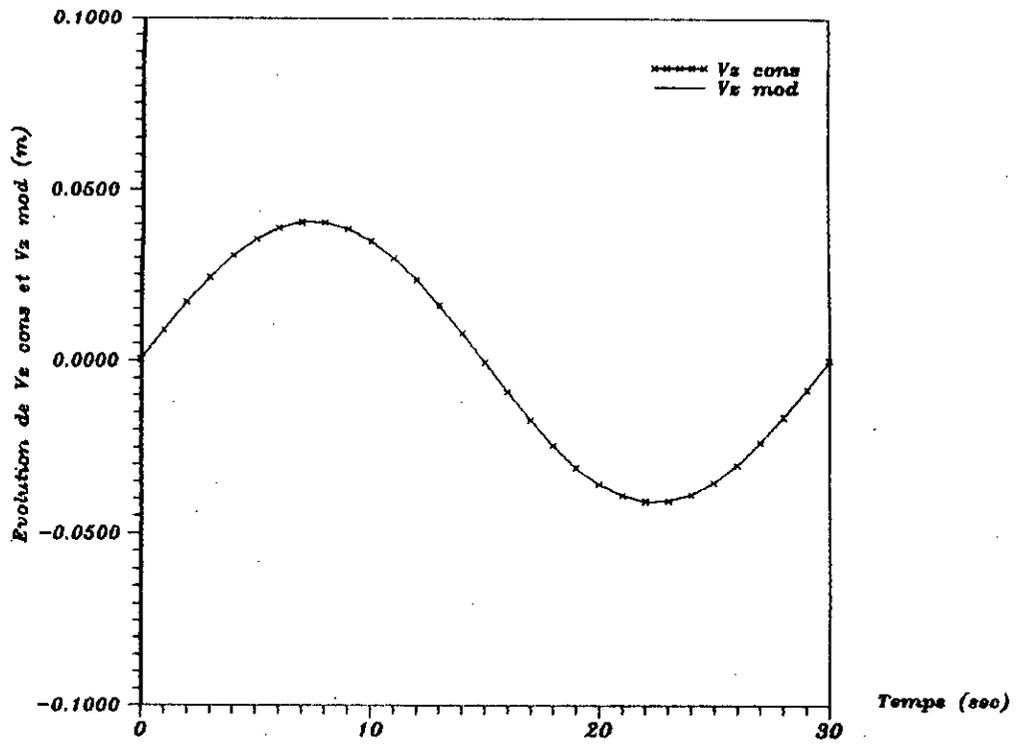


FIG.5-13: EVOLUTION DE V_x cons et V_x mod

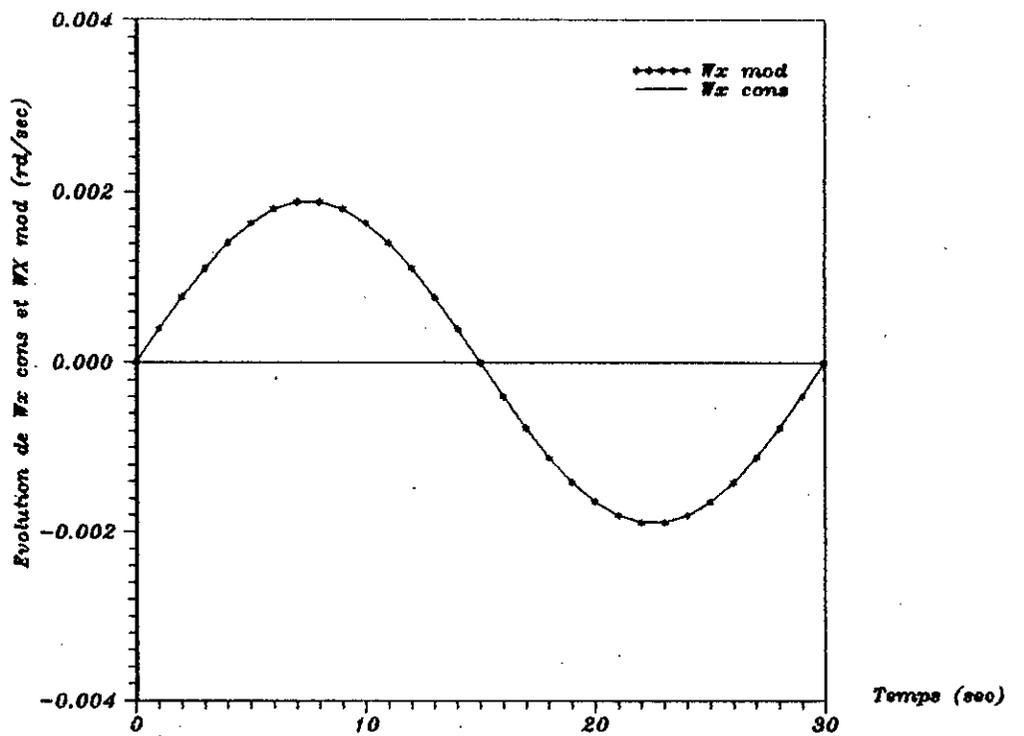


FIG.5-14 : EVOLUTION DE W_x cons W_x mod

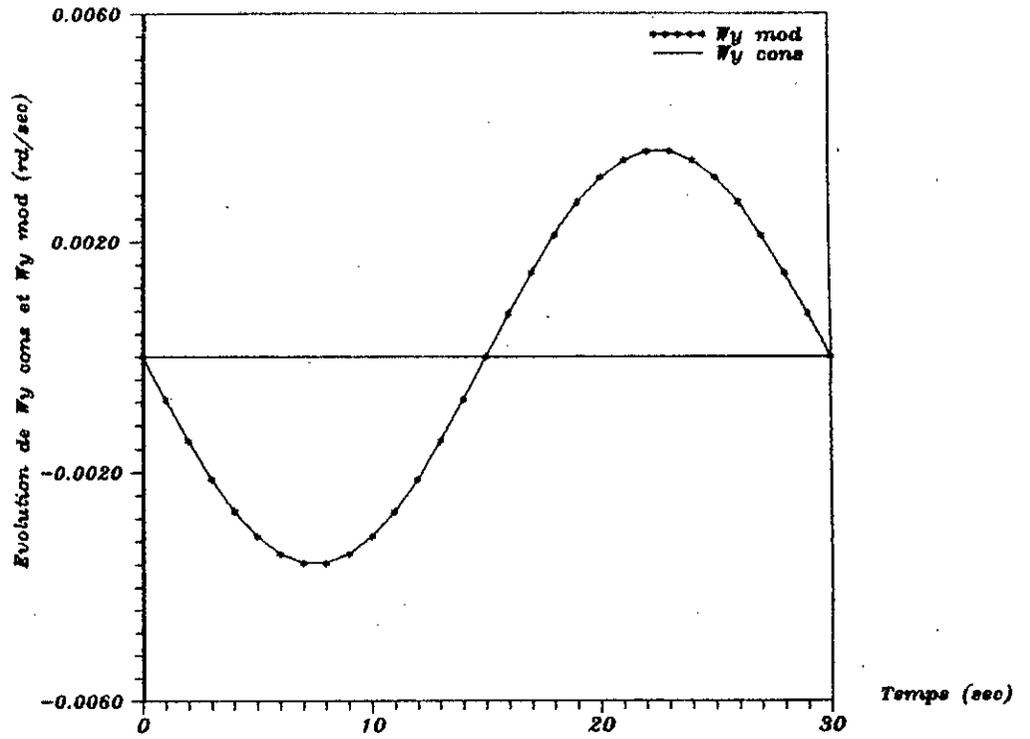


FIG.5-15 : EVOLUTION DE Wy cons et Wy mod

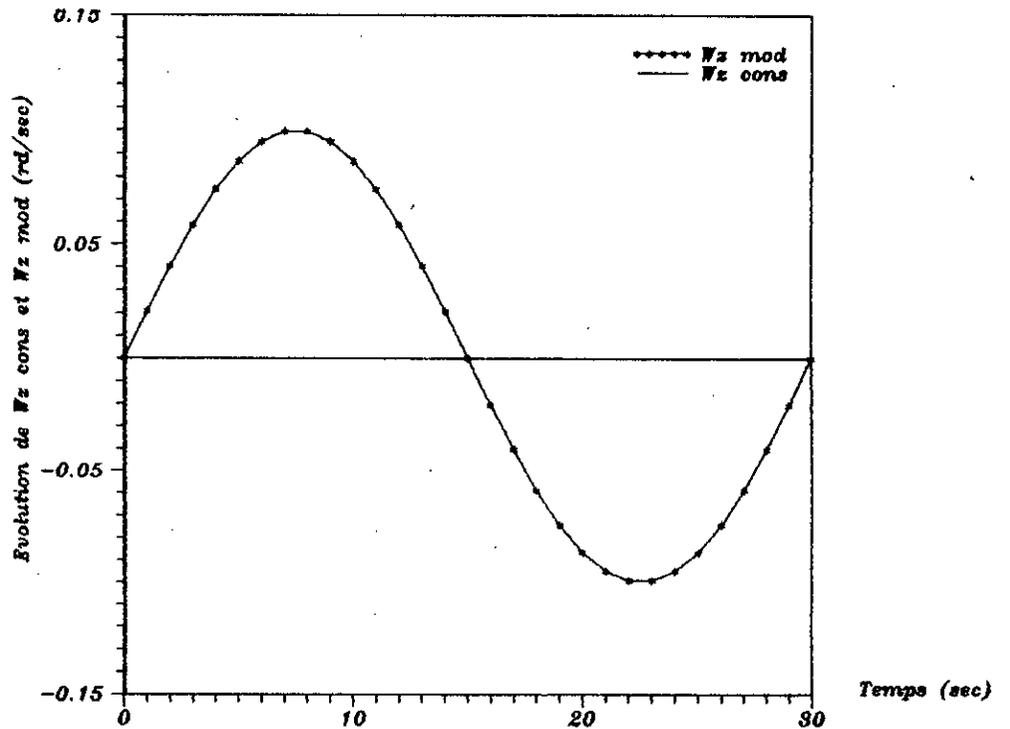


FIG.5-16 : EVOLUTION DE Wz cons et Wz mod

CONCLUSION GENERALE



CONCLUSION

Nous avons étudié dans notre mémoire, les modèles géométriques, cinématique et dynamiques des robots dans le but d'élaboration d'un logiciel d'aide à la modélisation des robots manipulateurs dotés de liaisons à un seul degré de liberté (rotoïde ou prismatique).

Notre premier souci a été de définir d'une part des méthodes de calcul et d'autre part un vocabulaire et des notations, encore peu utilisés dans notre département afin de permettre, une meilleure compréhension du sujet et une familiarisation des élèves ingénieurs avec le monde des robots.

Tout au long de notre travail, nous avons privilégié des méthodes simples à implémenter dans le calculateur et que nous pourrions modifier aisément. Nous avons conçu des méthodes un maximum d'informations, ce qui permettra d'affiner les analyses des performances pour les quelles notre outil a été conçu.

Les calculs tensoriels et matriciels ont été systématiquement utilisés même lorsque la notion de tenseur aurait pu apporter des simplifications d'écriture pour les trois raisons suivantes. En premier lieu pour faciliter la tâche de lecteur en n'utilisant qu'un nombre restreint d'outils mathématiques. En deuxième lieu afin que cette thèse puisse être lue par tout lecteur indépendamment de sa spécialité, car les torseurs sont moins connus que les tenseurs et les matrices. En troisième lieu parce que l'implantation sur le calculateur des opérations sur les torseurs nécessitent, de toute façon, l'utilisation du calcul matriciel.

Parmi les méthodes de modélisation géométrique, nous avons exposé la méthode utilisant les quaternions, qui utilise les matrices de rotation classique et celle qui utilise les matrices de passage homogènes avec les paramètres de DENAVIT-HARTENBERG. Nous avons choisi la dernière méthode parce qu'elle a permis de calculer les matrices de passage élémentaires homogènes de manière simple. Elle a permis aussi d'obtenir un modèle géométrique direct par multiplication des matrices élémentaires.

Nous avons élaboré le modèle géométrique inverse de deux manières différentes: la méthode analytique et itérative.

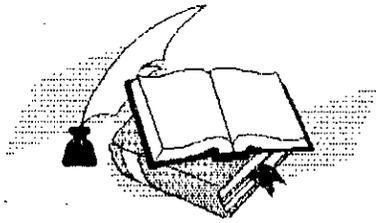
Nous avons exposé trois méthodes d'obtention du modèle cinématique. Celle qui nous est apparue comme la plus simple est la méthode de WHITNEY. Pour le modèle cinématique inverse, nous avons utilisé l'inversion de la matrice jacobienne par la méthode des pivots principaux (optimisation de pivot de GAUSS).

Pour l'obtention du modèle dynamique, nous avons fait appel au formalisme de LAGRANGE avec utilisation de matrice de passage homogène. cette procédure permet d'accéder à un maximum d'informations, ce qui n'est pas le cas avec les autres formalismes. Ce choix a été guidé par le fait que notre logiciel est orienté vers la conception, la simulation et l'analyse des performances.

Notre logiciel n'est qu'un premier pas dans le domaine de la conception d'outil d'aide à la simulation au sein de notre département. Nous pourrions dans l'avenir l'enrichir par un autre logiciel qui calcule le modèle dynamique inverse et par une animation graphique de l'évolution de tout les segments du robot. Nous espérons que des études seront poursuivies dans ce sens et que cette thèse servira de point de départ à de nombreux axes de recherches pour résoudre les problèmes encore sans solutions parmi les quelles nous pouvons citer:

- ◆ La systématisation de l'obtention des modèles inverses.
- ◆ La minimisation du nombre d'opérations arithmétiques qui intervient dans les modèles.
- ◆ La généralisation des modèles au manipulateurs ayant une structure de chaîne complexe.
- ◆ L'étudee problème d'élasticité et déformation des corps constituant le robot manipulateur
- ◆ L'optimisation du volume de travail du robot manipulateur

BIBLIOGRAPHIE



BIBLIOGRAPHIE

- [BEN 85] G. BENI , S. HACKWOOD
Recent advences in Robotics
Wiley-interscience Publication , 1985
- [BOR 85] M. LEBORGNE
.Modélisation des robots manipulateurs rigides
IRISA , Publication .N° 248 , Fev 1985
- [CAZ 89] M. CAZIN , J. METGE
Mécanique de la robotique
Edition Dunod . 1989
- [COI 82] P. COIFFET , M. CHIROUZE
Eléments de la robotique
HERMES ,Editeur .1982
- [COI 81] P. COIFFET
Les robots Tome 1:Modélisation et Commande
HERMES, Editeur. 1981
- [COI 86] P.COIFFET
La Robotique Principes et Application
HERMES. Editeur.1986
- [DAO 94] A. DAOUDI
Conception et Réalisation d'un outil d'aide à
la modélisation en robotique
Thèse de Magister USTHB JUILLET ,1994
- [GOR 84] B. GORLA ,M. RENAUD
Modèles des Robots manipulateurs :
Application à leur commande
CEPADUES . Edition , TOLOUSE ,1984

- [KOR 86]** Y. KOREN
La Robotique pour ingénieurs
EDITION Mac Graw HILL ,1986
- [LEE 82]** C.S.G. LEE
Robot arms , Kinematics , Dynamics and
Control
IEEE . COMPUTER , Dec .1982
- [MEG 84]** S. M. MEGAHED
Contribution à la modélisation géométrique
et dynamique des robots manipulateurs à
structure de chaîne cinématique simple ou
complexe
Thèse . Doctorat . d'Etat , Automatique ,
TOULOUSE III ,1984
- [PRU 82]** A. PRUSKI
La Robotique Générale
Edition ellipse .1982
- [SIE 85]** Andras Siegler dr. ens .
INTERNATIONAL POST- GRADUATE
COURSE ON INDUSTRIAL ROBOTS
AND ROBOTICS
October 21 - November 1, 1985
Budapest ,Hungary

ANNEXE



ANNEXE - A -

METHODES DE MODELISATION DYNAMIQUE DES ROBOT MANIPULATEURS:

Pour élaborer les modèles dynamiques des robots manipulateurs, nous pouvons utiliser l'un des quatre formalismes suivants :

- Formalisme de LAGRANGE.
- Formalisme de D'ALEMBERT.
- Formalisme de NEWTON-EULER.
- Formalisme de GIBBS

Le formalisme qui apparaît le plus courant parmi les trois derniers , est celui de NEWTON-EULER que nous allons exposer ci-dessous .

A-1- FORMALISME DE NEWTON-EULER :

La méthode de NEWTON-EULER a pour avantage la possibilité de connaître les efforts internes à la structure articulée ; cette information permet d'introduire l'effet de frottement dans le modèle dynamique et de dimensionner plus finement les composantes mécaniques . Nous avons renoncé à utiliser cette méthode pour les raisons suivantes :

- - le concept de ce robot assure un frottement faible au niveau des articulations aux extrémités de barres et de ce fait la prise en compte de ce phénomène apporte peu d'avantage;
- - le dimensionnement des composantes mécaniques doit tenir compte des contraintes de la fabrication , des efforts dans le mécanisme lors de mauvaises manipulations et surtout de la raideur de la structure mobile; les efforts internes en fonctionnement normal sont nettement plus faibles que ceux générés par les différents « accidents » que peut subir le robot ; la connaissance des forces dans les barres en fonctionnement normal n'est donc pas très utile au concepteur;

- - la lourdeur de cette résolution qui conduit à l'élimination de toutes les inconnues représentant les efforts intérieurs à la structure .

Cette méthode est utilisée généralement pour résoudre le problème de la commande , donc nous sommes dans le cas de l'algorithme qui réalise la fonction :

$$P = W \ddot{q} + U$$

a) Coordonnées du système et matrices de transition : Soient les coordonnées du corps immobile O, X, Y, Z (Z étant vertical) . Pour chaque segment un système de coordonnées cartésiennes est défini (O_i, X_i, Y_i, Z_i) avec :

$$O_i = S_i \quad \text{L'axe de } Z_i \perp \dot{e}_i, X_i \parallel Z_i, X_i \perp Z_{i-1}$$

Soit $a_i^{(r)}$ un vecteur caractéristique de i ème segment , il est exprimé a partir de trois projections sur les axes du r ème segment i.e. :

$$a_i^{(r)} = [a_{ixr}, a_{iyr}, a_{izr}] \quad \text{avec } \bar{e}_i^{(i)} = \bar{e}_i^{(r)} = (0, 0, 1), \text{ soit le même vecteur exprimé dans le repère}$$

externe O, X, Y, Z . Soit $\bar{l}_i = O_{i-1}O_i$ et $\bar{p}_i = \bar{p}_{i,i} = O_iC_i$ sont constants s'ils sont exprimés dans le repère associé au segment $\bar{l}_i^{(i)}$ et $\bar{p}_i^{(i)}$. De plus ils sont caractéristiques du i ème segment .

La transformation de $O_{i-1}, X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1} \rightarrow O_i, X_i, Y_i, Z_i$ passe par 4 phases :

1- Rotation autour de Z jusqu'à ce que $X_i \parallel X_{i-1}$ de θ_i

$$A_{i,i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2- Translation le long de Z_{i-1} jusqu'à $X_{i-1} \equiv X_i$ déplacement de u_i .

3- Translation le long de X_{i-1} jusqu'à $O_{i-1}O_i$ déplacement de a_i .

si Si est une translation :

$$\bar{\omega}_{i+1} = \bar{A}_{i+1,i} \bar{\omega}_i$$

$$\bar{\varepsilon}_{i+1} = \bar{A}_{i+1,i} \bar{\varepsilon}_i$$

$$\begin{aligned} \bar{W}_{i+1} &= \bar{\varepsilon}_{i+1} \times \bar{I}_{i+1} + \bar{\omega}_{i+1} (\bar{\omega}_{i+1} \times \bar{I}_{i+1}) + 2\bar{\omega}_{i+1} \times (A_{i+1,i} \bar{\varepsilon}_i \dot{q}_{i+1}) \\ &+ A_{i+1,i} (\bar{W}_i + \bar{\varepsilon}_i \dot{q}_{i+1}) \end{aligned}$$

d) Dynamique du système: Considerons le mécanisme d'un segment

Mti : Moment total appliqué en Si et agissant sur le ieme segment

Fti : Force totale appliqué en Si et agissant sur le i eme segment

Fi : Résultante des forces appliquées au i eme segment

Mi : Résultante des moments relatifs au c-d-g

Les théorèmes du centre de gravité et les équations d'Euler appliqués au i eme segment et exprimés dans Ro donnent

$$\bar{F}_i^{res} = m_i \bar{W}_{ci} \quad \text{et} \quad \bar{M}_i^{res} = J_i \bar{\varepsilon}_i - (J_i \bar{\omega}_i) \times \bar{\omega}_i$$

Avec mi : Masse du segment et Ji tenseur d'inertie exprimé dans Ri. La relation entre la résultante des forces et des moments et les forces et moments au niveau de l'articulation est donnée par :

4- Rotation de α_i autour de X_i pour que toutes les coordonnées coïncident .

$$A''_{i,i-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \\ 0 & -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix}$$

D'où la transformation des coordonnées d'un point M d'un repère O_i, X_i, Y_i, Z_i vers un repère $O_{i-1}, X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1}$ est par définition :

$$\begin{bmatrix} X_{i-1} \\ Y_{i-1} \\ Z_{i-1} \end{bmatrix} = A''_{i,i-1} A'_{i,i-1} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{ix_{i-1}} \\ L_{iy_{i-1}} \\ L_{iz_{i-1}} \end{bmatrix}$$

Nous répétons cette opération pour une rotation de l'articulation S_{i-1} de $\theta_i = q_i$ d_i étant constante, si S_{i-1} est une translation $d_i = q_i$ et θ_i est constante .

La matrice de transition du i ème repère (l'articulation i) vers le repère externe :

$$A = \prod_{j=0}^i A_{j-1j} \quad \text{et donc} \quad a_i = A_i a_i^{(i)}$$

i.e. :

$$r = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^i A_j L_j^{(j)} + A_i r^{(i)}$$

Remarque : Dans la pratique nous nous arrangeons à savoir une disposition des repères telle que les étapes 3 et 4 sont supprimées .

b) Relations cinématique : Pour éviter les expressions complexes et les dérivations cette méthode utilise des expressions récurrentes :

- \vec{V}_{ci} : Vitesse du i ème centre de gravité (c-a-g du i ème segment)

- \vec{W}_{ci} : Accélération du i ème centre de gravité

- \vec{V}_i : Vitesse de l'origine du i ème repère

- \vec{W}_i : Accélération de l'origine du i ème repère

- $\vec{\omega}_i$: Vitesse angulaire de l'origine du i ème repère

- $\vec{\epsilon}_i$: Accélération angulaire de l'origine du i ème repère

- \vec{e}_i : Vecteur unitaire de l'axe $O_i Z_i$ du i ème repère i.e. : vecteur unitaire de rotation ou de translation de l'articulation S_i .

Nous introduisons la notion suivante : \vec{a}_i vecteur du i ème segment exprimé dans le repère de base et \vec{a}_i^i le même vecteur exprimé dans R_i d'où les relations suivantes:

$$\vec{W}_{ci} = \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i) + \vec{\epsilon}_i \times \vec{r}_i + \vec{W}_i$$

si S_i est une rotation :

$$\vec{\omega}_{i+1} = A_{i+1,i} (\vec{\omega}_i + \vec{e}_i \dot{q}_{i+1})$$

$$\vec{\epsilon}_{i+1} = A_{i+1,i} (\vec{\epsilon}_i + \vec{e}_i \ddot{q}_{i+1} + \vec{\omega}_i \times \vec{e}_i \dot{q}_{i+1})$$

$$\vec{W}_{i+1} = \vec{\epsilon}_{i+1} \times \vec{l}_{i+1} + \vec{\omega}_i (\vec{\omega}_i \times \vec{l}_{i+1}) + A_{i+1,i} \vec{W}_i$$

$$\bar{F}_u = \bar{F}_i^{res} - m_i \bar{g}_i + A_{i,j+1} \bar{F}_{u+1}$$

$$\bar{M}_u = A_{i,j+1} \bar{M}_{u+1} + \bar{l}_i \times A_{i,j+1} \bar{F}_{u+1} + \bar{M}_i^{res} + \bar{r}_i \times [\bar{F}_i^{res} - m_i \bar{g}_i]$$

$$\text{avec } \bar{g}_i = \{ 0, 0, -9.81 \}$$

si l'articulation S_i est une translation :

$$\bar{P}_i = P_i' \bar{e}_{i-1}, \quad \bar{F}_u = \bar{P}_i + \bar{F}_n \quad \text{avec } F_n \text{ force de réaction en } S_i$$

Sachant que $\bar{F}_n \parallel \bar{e}_{i-1}$ et en multipliant par $\bar{e}_{i-1} \Rightarrow \bar{P}_i = P_i' \cdot \bar{e}_{i-1}$

si l'articulation S_i est une translation :

$$\bar{M}_u = \bar{P}_i + \bar{M}_n, \quad \bar{P}_i = P_i^m \cdot \bar{e}_{i-1} \quad \text{avec } \bar{M}_n : \text{moment de réaction}$$

Sachant que $\bar{M}_n \perp \bar{e}_{i-1}$ et en multipliant par $\bar{e}_{i-1} \Rightarrow P_i^m = \bar{M}_n \cdot \bar{e}_{i-1}$

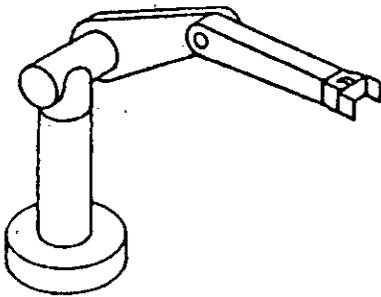
D'où l'algorithme : connaissant $q, \dot{q}, \ddot{q} \rightarrow$ nous pouvons déterminer

$$\bar{e}_i, \bar{\omega}_i, \bar{W}_{ci} \rightarrow F_i^{res}, M_i^{res} \rightarrow M_u, F_u \rightarrow \text{vecteur } P$$

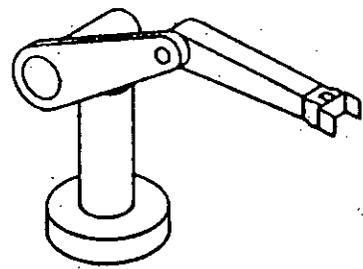
Remarque : il faut prendre $M_{tn+1} = M_{fn} = 0$ et $F_{tn+1} = F_{fn} = 0$

ANNEXE-B -

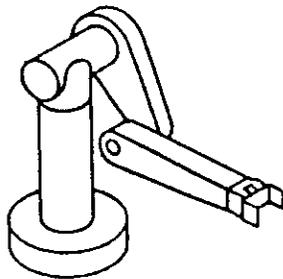
Différents configurations du Robot PUMA avec leurs paramètres ARM, ELBOW correspondants :



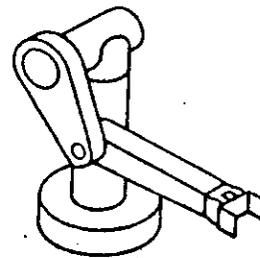
Left and above arm



Right and above arm



Left and below arm



Right and below arm

$$\text{ARM} = \begin{cases} +1 & \text{RIGHT arm} \\ -1 & \text{LEFT arm} \end{cases}$$

$$\text{ELBOW} = \begin{cases} +1 & \text{ABOVE arm} \\ -1 & \text{BELOW arm} \end{cases}$$