1/95

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT Genie Mecanique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Simulation numérique du pliage des Eôles en Eau

Proposé par :
D. SAADOUN

Etudié par :
A. AIT BELKACEM
A. BARA

Dirigé par :
D. SAADOUN

PROMOTION
Juin 1995

E. N. P 10, Avenue Hassen Badi - EL-HARRACH - ALGER

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT *Genie Mecanique*

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Simulation numérique du pliage des tôles en Air

Proposé par :
D. SAADOUN

Etudié par :
A. AIT BELKACEM
A. BARA

Dirigé par :
D. SAADOUN

PROMOTION
Juin 1995

E. N. P 10, Avenue Hassen Badi - EL-HARRACH - ALGER

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

"وقل إعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون"

الآية

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

REMERCIEMENTS

- Nous remercions Dieu qui nous a permis de finir ce modeste travail.
- Nous tenons également à exprimer notre sincère gratitude à monsieur D.Saadoun qui nous a profondement aidé par ses conseils et ses suggestions, ainsi que par son attachement permanent à notre travail.
- Que les membres du jury trouvent ici nos vifs remerciments d'avoir accepter d'examiner et évaluer notre travail.

A.Ait Belkacem .

A.Bara

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail à ma mère, mon père, ainsi qu'à mes frères et soeurs, pour leurs soutien tout le long de ma formation.

A.Bara.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DÉDICACES.

- A mon père.
- A ma mère.
- A mes frères et soeurs.

Qu'ils trouvent dans ce modeste travail le temoignage de ma profonde gartitude.

A. Aït Belkacem

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

ملخص

ترمي هذه الدراسة إلى تحديد كيفية إنتشار التشوهات المرنة في الصفائح.
بواسطة برنامج الحساب المنجز وبواسطة العناصر المنتهية يمكن تحديد المناطق اللدونة في حالة التشوهات الكبيرة التي تسمح لنا بإحداث أشكال في المعادن.

Résumé

Cette étude vise à déterminer la propagation des déformations plastiques.
Le code de calcul mis au point est par l'analyse par éléments finis, nous permet d'évaluer les zones plastiques avec l'hypothèse des grandes déformations, et permettre ainsi la mise en forme des matériaux.

Abstract

This study deals with the determination of plastic deformation propagation in plates.
The numiric calculation program using finit-element méthod determines the plastic deformation zones, for setting in form of materials.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

SOMMAIRE

Introduction.....9

Chapitre I : Théorie de l'élasticité des plaques en flexion.....10

I.1. Introduction.....11

I.2. Equations Générales de la flexion élastique en petits déplacements.....12

I.2.1. Plaques minces.....12

2.1.1.1. Relations déformations - Courbures.....14

I.2.1.2. Relation contraintes - Courbures.....17

I.2.1.3. Détermination de l'énergie de déformation.....18

I.2.1.4. Détermination des moments de flexion.....19

I.2.2. Plaques épaisses.....20

I.2.2.1. Relations déformations - Courbures.....22

I.2.2.2. Relation contraintes - Déformations.....22

I.2.2.3. Détermination de l'énergie de flexion.....24

I.2.2.4. Détermination des moments de flexion et des efforts de cisaillement.....25

I.3. Equations générales de flexion élastique en grands déplacements.....26

I.3.1. Plaques minces.....26

I.3.2.1. Relations déformations - Courbures.....26

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Chapitre II : Théorie de l'élasto-plasticité des plaques en flexion....31
II.1 Définition d'un modèle élasto-plastique....33
II.1.1. Détermination du comportement élasto-plastique....33
II.2. Loi de comportement élasto-plastique....35
II.2.1. Surface d'écoulement....35
II.2.2. Loi d'écoulement....36
II.2.2.1. Principe de normalité....36
II.2.3. Phénomène d'écrouissage....37
II.2.3.1. Ecrouissage isotrope....37
II.2.3.2. Ecrouissage cinématique....38
II.2.4. Critère de plasticité....41
II.2.4.1. Critère de Treca....43
II.2.4.2. Critère de Von-Mises....43
II.3. Flexion élasto-plastique des plaques....45
II.3.1. Description d'un problème élasto-plastique en flexion....45
II.3.2. Approches du problème....46
II.3.2.1. Approche en multicouches....46
II.3.2.2. Approche en monocouche....46
II.3.3. Expressions des moments et efforts tranchants....47

Chapitre III : Introduction du modèle élasto-plastique et l'hypothèse des grandes déformations dans le code d'éléments finis....49
III.1. Présentation de la méthode des éléments finis....51
III.2. Hypothèses fondamentales....52
III.3. Formulation de la méthode des éléments finis....53
III.3.1. Principe des travaux virtuels....53
III.3.2. Approximation par éléments finis....53
III.4. Modélisation élasto-plastique....59
III.4.1. Modélisation en monocouche....59
III.4.2. Modélisation en multicouches....66
III.5. Résolution numérique....67

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Chapitre IV : Présentation du code de calcul....70

IV.1. Structure du code de calcul....71

IV.2. Méthodes de résolution des systèmes non-linéaires....74

IV.3. Calcul des forces résiduelles pour un problème élasto-plastique....78

IV.3.1. Méthode des "contraintes initiales"....78

IV.3.2. Test de convergence....80

IV.3.3. Vérification du critère de plasticité....81

IV.3.4. Calcul des déformations plastiques et contraintes réelles....81

Chapitre V : Application du code de calcul et présentation des résultats....84

V.1. Introduction....85

V.2. Simulation du pliage en V....86

V.3. Comparaison des résultats en petites et grandes déformations....89

V.4. Déformée avant et après décharge....91

V.5. Evolution des zones plastiques....93

V.6. Détermination de la course maximale à atteindre....98

V.7. Influence de quelques paramètres....100

V.7.1. Choix de la méthode de résolution....100

V.7.2. Influence du critère de plasticité....102

V.8. Conclusion....105

Conclusion globale....106

Références bibliographiques....109

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION

L'objet de cette étude est la détermination du champ de "GRANDE" déformation, ainsi que la localisation des zones plastiques des structures bidimentionnelles : "PLAQUES".

Le travail est présenté en deux grandes parties :

- La première partie est constituée par la présentation théorique de l'élasticité et de l'élasto-plasticité des plaques "minces et épaisses" en flexion en petites et grandes déformations.

  Pour la flexion élastique en se basant sur les plus classiques théories; la théorie de Kirchhoff et la théorie Mindlin.

  Nous faisons ensuite un rappel de plasticité pour des matériaux standards, isotropes, nous nous limitons aux critères isotropes les plus classiques soient le critères de Von-Mises et le critère de Tresca, et aux écrouissages les plus simples soient l'écrouissage cinématique et l'écrouissage isotrope, en signalant les lois adoptées à la flexion élasto-plastique des plaques pour les deux approches "monocouche, multicouche".

- Dans la seconde partie, nous avons élaboré un code de calcul, en se basant sur la modélisation par éléments finis des plaques bidimentionnelles en flexion avec l'hypothèse des grandes déformations. Après l'exposition de la structure du programme, on donne un rappel sur les méthodes de résolution des problèmes non-linéaires. Nous donnons, ensuite, un développement du calcul élasto-plastique et enfin les résultats d'exemples traités en prenant soin de comparer les résultats obtenus avec ceux de la littérature.

CHAPITRE I :
THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ DES PLAQUES EN FLEXION.

I.1. Introduction.

Tous les matériaux solides possèdent un domaine de l'espace des contraintes à l'intérieur duquel une variation des sollicitations n'entraîne qu'une variation de déformation élastique, il s'agit de mouvements réversibles d'atomes ou de molécules qui correspondent à des déformations n'excédant pas un taux bien déterminé. Avant d'utiliser la théorie de l'élasticité pour telle ou telle application, il y a donc lieu de s'assurer que l'ordre de grandeur des contraintes est bien compatible avec le domaine d'élasticité du matériau considéré.

I.2. Equations Générales de la flexion élastique en petits déplacements.

I.2.1. Plaques minces.

Les axes $OXYZ$ étant rectangulaire, une plaque est un solide, limité par deux plans parallèles voisins d'équations $Z = \pm\frac{h}{2}$ et par une surface normale à ces plans (Fig. I.I.), le plan OXY est le plan moyen de la plaque.

La minceur de la plaque justifie les hypothèses de la théorie de Kirchoff suivantes :

- Les forces extérieures peuvent être considérées comme appliquées au plan moyen. Les forces données sont normales à ce plan.
- La constante normale "σ_z" sur tout élément parallèle au plan moyen peut être négligée.

$$\sigma_z = 0 \qquad (I.1)$$

- Le plan moyen ne subit aucune contraction ni extension lors de la flexion de la plaque. Le déplacement d'un point du plan moyen se réduit donc à sa seule composante normale "$w(x,y)$" comptée positivement sur l'axe OZ est appelée "flèche de la plaque", on aura donc :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 0 \end{cases} \qquad (I.2)$$

- Une normale au plan moyen se transforme après déformation en normale au plan moyen déformé (Fig. I.2.) cela revient à négliger l'effet de cisaillement dans les plans xz et yz, et on aura :

$$\begin{cases} \delta_{yz} = 0 \\ \delta_{xz} = 0 \end{cases} \qquad (I.3)$$

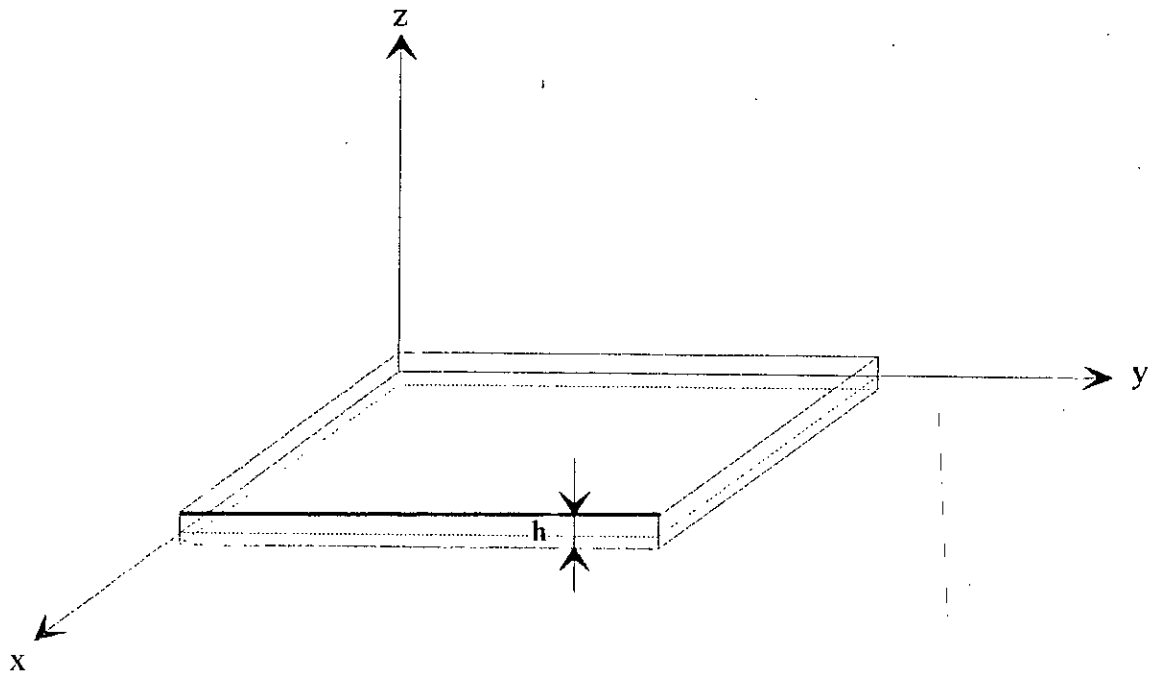


Figure I.1 : Représentation Géométrique d'une plaque.

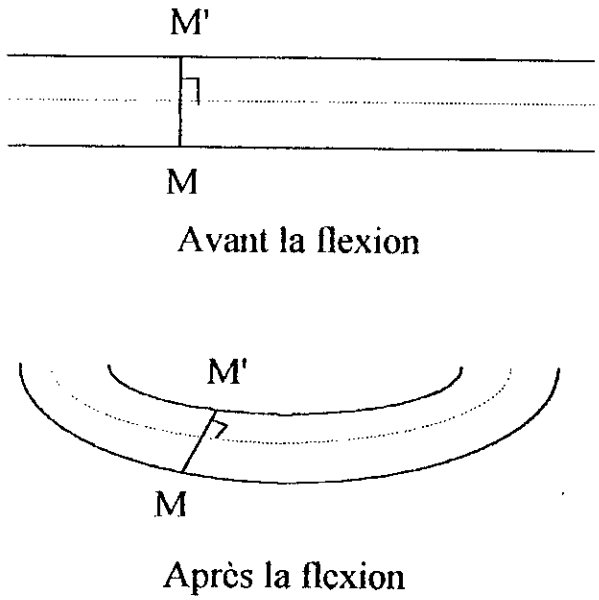


Figure I.2 : Représentation de la normale au plan Moyen avant et après la flexion.

I.2.1.1. Relations déformations - Courbures.

Les hypothèses du paragraphe précédent montrent que les composantes (u, v, w) du déplacement d'un point de la plaque de coordonnées (x, y, z) ont pour valeurs :

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x} \qquad (I.4)$$

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (I.5)$$

$$w = w(x, y) \qquad (I.6)$$

Les seules composantes non nulles du tenseur déformation en ce point sont donc :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (I.7)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (I.8)$$

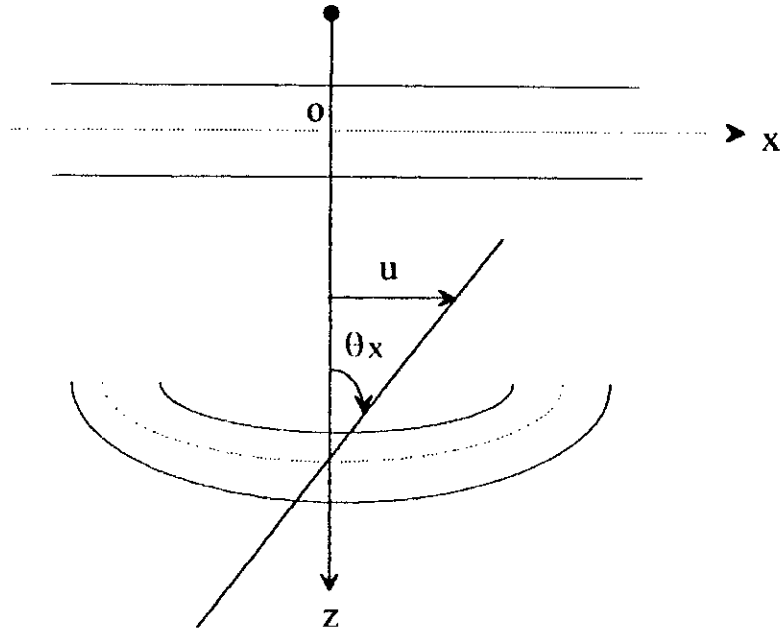
$$\delta_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x.\partial y} \qquad (I.9)$$

en effet nous avons :

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (I.10)$$

$$\delta_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad (I.11)$$

$$\delta_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \qquad (I.12)$$



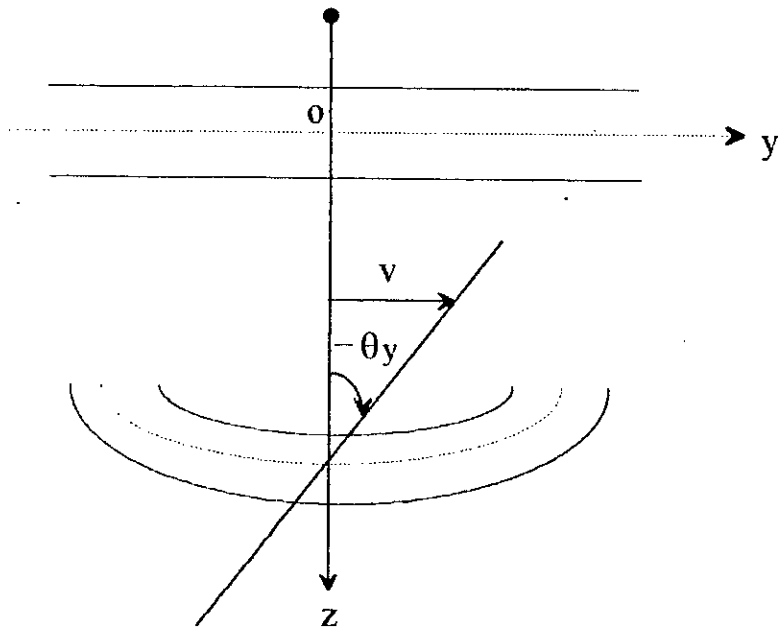


Figure I.3 : Représentation schématique des déplacements.

On peut écrire le système d'équation (I.7), (I.8) et (I.9) sous forme matricielle :

$$\{\varepsilon\} = -z\{x\} \qquad (I.13)$$

Où :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \delta_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (I.14)$$

et :

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x.\partial y} \end{Bmatrix} \qquad (I.15)$$

Soient :

$$\frac{1}{\rho_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = X_x \qquad (I.16)$$

- Où X_x et ρ_x sont respectivement la courbure et le rayon de courbure du plan moyen dans le plan (x, z).

$$\frac{1}{\rho_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = X_y \qquad (I.17)$$

- Où X_y et ρ_y sont respectivement la courbure et le rayon de courbure du plan moyen dans le plan (y, z).

$$\frac{1}{\rho_z} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x.\partial y} = X_{xy} \qquad (I.18)$$

- Où X_{xy} et ρ_z sont respectivement la courbure et le rayon de courbure du plan moyen dans le plan (x, y).
- Et le vecteur $\{X\}$ est donc le vecteur des courbures.

I.2.1.2. Relation contraintes - Courbures.

Les relations de la théorie de l'élasticité entre les composantes du tenseur déformation et les composantes du tenseur contraintes se réduisent donc aux relations suivantes :

$$\varepsilon_x = \frac{(\sigma_x - \nu_x.\sigma_y)}{E_x} \qquad (I.19)$$

$$\varepsilon_y = \frac{(\sigma_y - \nu_y.\sigma_x)}{E_y} \qquad (I.20)$$

$$\delta_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \qquad (I.21)$$

Ce qui donne :

$$\sigma_x = \frac{E_x.\varepsilon_x + \nu_x.E_y.\varepsilon_y}{1-\nu_x.\nu_y} \qquad (I.22)$$

$$\sigma_y = \frac{E_y.\varepsilon_y + \nu_y.E_x.\varepsilon_x}{1-\nu_x.\nu_y} \qquad (I.23)$$

$$\tau_{xy} = G_{xy}.\delta_{xy} \qquad (I.24)$$

On peut écrire ce système sous forme matricielle :

$$\{\delta\} = [D_{xy}]\{\varepsilon\} \qquad (I.25)$$

Où :

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{Bmatrix} \qquad (I.26)$$

$\{\delta\}$ vecteur des contraintes.

$$[D_{xy}] = \frac{1}{1-\nu_x.\nu_y}.\begin{bmatrix} E_x & \nu_x.E_y & 0 \\ \nu_y.E_x & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_x.\nu_y).G_{xy} \end{bmatrix} \qquad (I.27)$$

$[D]$: la matrice des contraintes élastiques.

Avec :

E_x, E_y : modules de Young respectivement selon l'axe (ox) et l'axe (oy).

ν_x, ν_y : coefficients de Poisson respectivement selon l'axe (ox) et l'axe (oy).

σ_{xy} : module d'élasticité transverse selon le plan (x, y).

Dans le cas d'un matériaux isotope, i.e. :

$$\begin{cases} E_x = E_y = E \\ \nu_x = \nu_y = \nu \\ G_{xy} = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases} \tag{I.28}$$

et :

$$[D_{xy}] = [D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{I.29}$$

Donc en vertu de (I.13), (I.25) et (I.29) on conclu :

$$\{\sigma\} = -Z.[D].\{X\} \tag{I.30}$$

I.2.1.3. Détermination de l'énergie de déformation.

L' énergie de déformation "U" est donnée par :

$$U = \frac{1}{2}\int_{(v)} \{\sigma\}^t.\{\varepsilon\}.dv \tag{I.31}$$

Avec :

$$dv = ds.dz \tag{I.32}$$

En utilisant les relations (I.13), (I.30) et (I.32) on aura :

$$U = \frac{1}{2}\int_{(s)} \{X\}^t.[D].\{X\}.ds.\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2.dz \tag{I.33}$$

Après l'intégration selon l'épaisseur "h" et simplification on obtient :

$$U = \frac{Eh^3}{24\left(1-\nu^2\right)} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x.\partial y}\right)^2 \right\} dx.dy \tag{I34}$$

I.2.1.4. Détermination des moments de flexion.

Les moments de flexion sont données par :

$$\{M\} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma\} z.dz = \left[D'_f\right].\{X\} \tag{I.35}$$

Où :

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \tag{I.36}$$

et :

$$[D'] = \frac{h^3}{12}.[D] \tag{I.37}$$

Avec :

- M_x, M_y : sont les moments fléchissant au point du plan moyen selon l'axe (Ox) et l'axe (Oy) respectivement.
- M_{xy} : le couple de torsion au point du plan moyen selon le plan (x, y).

I.2.2. Plaques épaisses.

La théorie de Reissner-Mindlin permet d'étudier les plaques épaisses en flexion en tenant compte des effets de cisaillement transverse.

La théorie de Reissner-Mindlin est basée sur les hypothèses suivantes :

- La contrainte σ_z est négligée par rapport aux contraintes σ_x et σ_y, ce qui nous ramène à un état de contrainte plane :

$$\sigma_z = 0 \qquad (I.38)$$

- Les section planes avant déformation restent planes après déformation sans être nécessairement normales à la déformée du plan moyen, ainsi le déplacement d'un point quelconque de la plaque peut être déterminé si nous connaissons le champ de déplacement du plan moyen de la plaque pour la flexion avec l'hypothèse des petits déplacements les composantes de déplacements d'un point de coordonnées (x, y, z) sont :

$$\begin{cases} u = z.\beta_x(x,y) & (I.39) \\ v = z.\beta_y(x,y) & (I.40) \\ w = w(x,y) & (I.41) \end{cases}$$

Avec :

- z : la distance du point considéré par rapport au plan moyen.
- w : le déplacement du point considéré transversalement.
- β_x, β_y : les rotations de la normale au plan moyen dans les plans $x - z$ et $y - z$ respectivement (figure I.4)

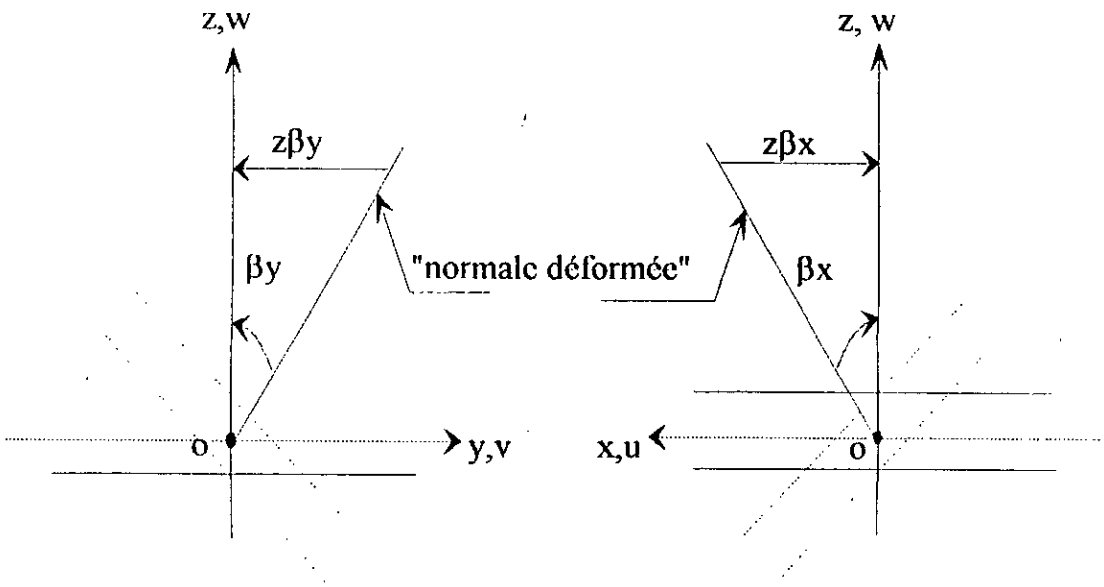


Figure I.4 : Représentation des normales au plan moyen des déformées.

- On néglige la rotation autour de l'axe (OZ) :

$$\beta_z = 0 \qquad (1.42)$$

I.2.2.1. Relations déformations - Courbures.

Avec les hypothèse des petites déformations, les déformations de flexion (linéaire à travers l'épaisseur) et de cisaillement (constantes à travers l'épaisseur) s'écrivent respectivement :

$$\{\varepsilon_f\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \delta_{xy} \end{Bmatrix} = z\{x\} \qquad (I.43)$$

Avec :

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \beta_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \qquad (I.44)$$

Où : $\{X\}$ est le vecteur courbure.

Le tenseur de déformation due au cisaillement est donné par :

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_{xz} \\ \delta_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_y + \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \qquad (I.45)$$

I.2.2.2. Relation contraintes - Déformations.

Avec L'hypothèse des contraintes planes pour un matériau homogène et isotope, où nous ne tenons pas compte du découplage (membrane flexion) les vecteurs contraintes s'écrivent :

- Pour la flexion :

$$\{\sigma\}_f = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D]_f \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \delta_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (I.46)$$

Où :

$$[D]_f = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \qquad (I.47)$$

donc :

$$\{\sigma\}_f = [D_f].[\varepsilon]_f \qquad (I.48)$$

Où :

$$\{\sigma\}_f = z.[D_f]\{X\} \qquad (I.49)$$

- Pour le cisaillement :

$$\{\sigma\}_c = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = [D_c].\{\delta\} \qquad (I.50)$$

Tel que :

$$[D_c] = \frac{E}{2(1+\nu)}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (I.51)$$

I.2.2.3. Détermination de l'énergie de flexion.

L'énergie interne de déformation due à la flexion et celle due au cisaillement transversal s'écrivent respectivement :

$$u_f = \frac{1}{2}\int_v z^2.\{X\}'.[D_f].\{X\}dv \qquad (I.52)$$

$$u_c = \frac{1}{2}\int_v \{\delta\}'.[D_c]\{\delta\}.dv \qquad (I.53)$$

Et comme $\{X\}$ et $\{\delta\}$ étant indépendant de "z" nous pouvons écrire :

$$u_f = \frac{1}{2}\int_{(s)} \{X\}'.\left[D_f'\right].\{X\}.ds \qquad (I.54)$$

$$u_c = \frac{1}{2}\int_{(s)} \{\delta\}'.\left[D_c'\right].\{\delta\}.ds \qquad (I.55)$$

Où "S" est la surface du plan moyen de la plaque.

$$\left[D_f'\right] = \frac{h^3}{12}[D_f] \qquad (I.56)$$

$$\left[D_c'\right] = Kh[D_c] \qquad (I.57)$$

Où "K" est le coefficient de correction der cisaillement (généralement égal à $\frac{5}{6}$). [7]

Les deux composantes de l'énergie de déformation peuvent s'écrire :

$$u_f = \frac{E.h^3}{24\left(1-v^2\right)}\int_{(s)} \left\{\left(\frac{\partial\beta_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta_y}{\partial y}\right)^2 + 2v\left(\frac{\partial\beta_x}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\beta_y}{\partial y}\right) + \frac{1-v}{2}\left(\frac{\partial\beta_x}{\partial y} + \frac{\partial\beta_x}{\partial x}\right)\right\}dx.dy$$

(III.58)

$$u_c = \frac{E.h.K}{4(1+v)}\int_{(s)} \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x\right)^2 + 2v\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y\right)^2\right\}dx.dy \qquad (III.59)$$

I.2.2.4. Détermination des moments de flexion et des efforts de cisaillement.

Les moments de flexion $\{M\}$ et les efforts de cisaillement $\{Q\}$ sont définis comme suit :

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\{\sigma_f\}.dz = \left[D'_f\right]\{X\} \qquad \text{(III.60)}$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = K.\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_c\}.dz = [D'_c]\{\delta\} \qquad \text{(III.61)}$$

Une présentation positive de M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y est schématisée à la figure (I.5)

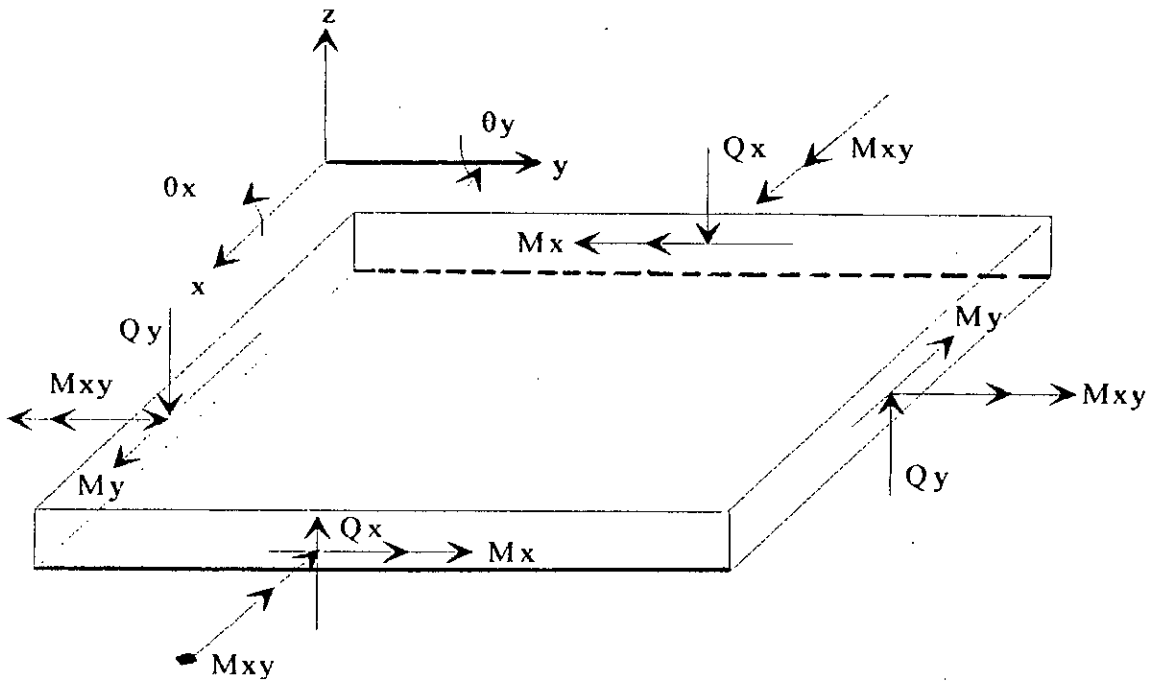


Figure (I.5) : Efforts de flexion M_x, M_y & M_{xy}
et de cisaillement Q_x & Q_y.

I.3. Equations générales de flexion élastique en grands déplacement.

I.3.1. Plaques minces.

La flexion en grands déplacements produira toujours des allongements supplémentaires du plan moyen qu'il faut maintenant en tenir compte, en se basant toujours sur les hypothèses de la théorie de Kirchhoff.

I.3.2.1. Relations déformations - Courbures.

Soient (u, v, w) les composantes suivant les directions, x, y et z, du petit déplacement que subit, pendant la flexion, un point du plan moyen.

Soit un élément linéaire AB de ce plan suivant la direction x. La figure (I.6) schématise l'allongement de cet élément.

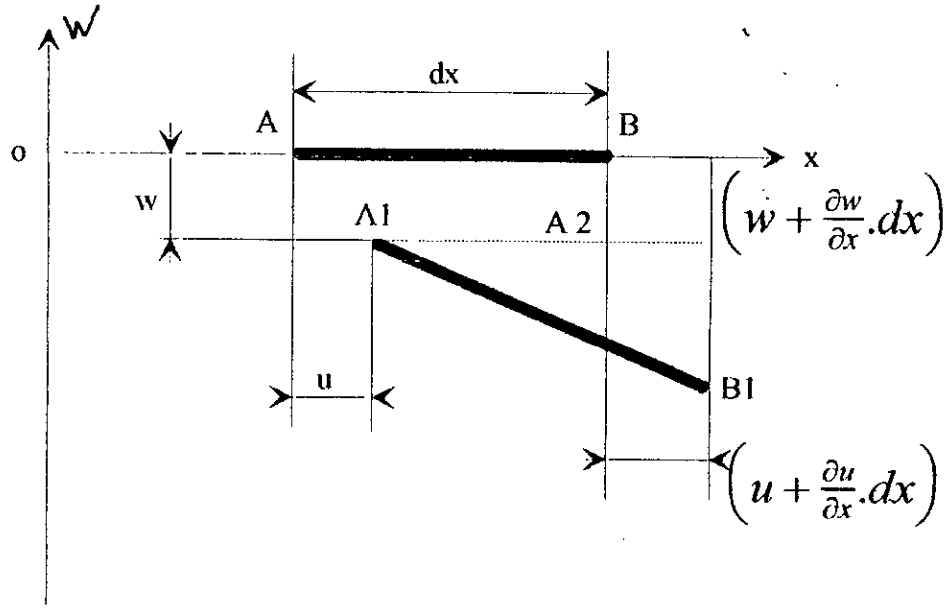


Figure (I.6)

On peut écrire :

$$\varepsilon_x = \frac{A_1B_1 - AB}{AB} \qquad (I.62)$$

Avec :

$$AB = dx \qquad (I.63)$$

D'après le triangle $A_1A_2B_1$ on aura :

$$A_1B_1 \approx \left(1 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\right)dx \qquad (I.64)$$

Négligeant le terme $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$, on aura :

$$A_1B_1 = \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)dx \qquad (I.65)$$

D'où :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \qquad (I.66)$$

De même la déformation suivant la direction y est :

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \qquad (I.67)$$

Considérons maintenant les cisaillements due à la flexion dans le plan moyen. Pour déterminer l'allongement de cisaillement dû au déplacement w prenons deux éléments linéaires infiniment petits OA et OB, suivant la direction x et y, comme l'indique la figure (I.7). Par suite des déplacements dans la direction z ces éléments viennent en O_1A_1 et O_1B_1, l'angle CD_1B_1, noté θ est le cisaillement correspondant au déplacement w.

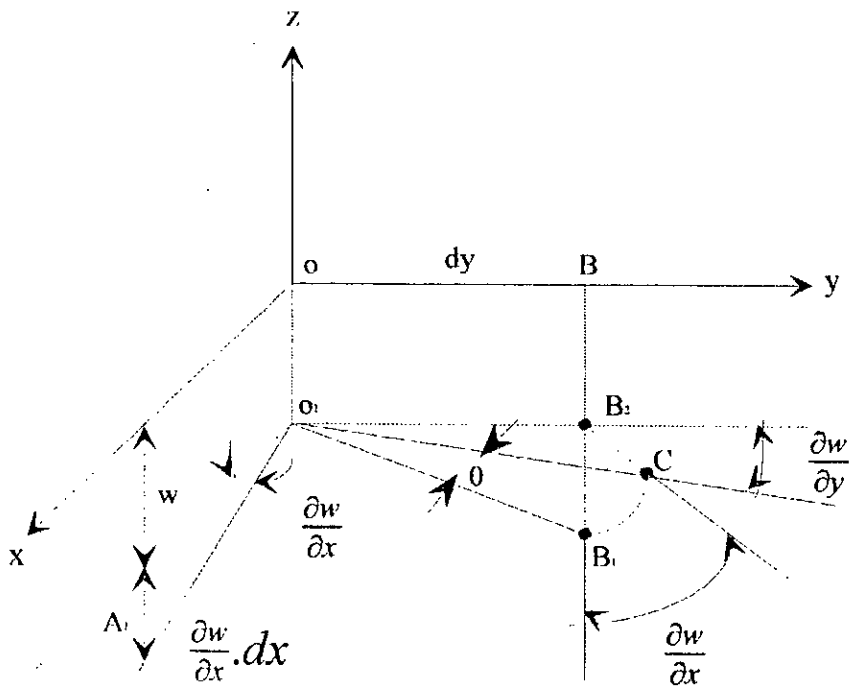


Figure (I.7)

D'après la figure ci-dessus on peut écrire :

$$B_1c = \frac{\partial w}{\partial x}.B_2c \qquad (I.68)$$

Où :

$$B_2c = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right).dy \qquad (I.69)$$

En substituant ces deux équations, on obtient :

$$B_1c = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right).\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy \qquad (I.70)$$

D'autre part on peut écrire aussi :

$$B_1c = \theta.dy \qquad (I.71)$$

Par identification entre les deux équations on aura :

$$\theta = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right).\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \qquad (I.72)$$

Finalement la déformation de cisaillement dû aux déplacements u, v et w s'écrit :

$$\delta_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}.\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (I.73)$$

D'où les relations déformations-courbures :

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x.\partial y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0^p \\ \varepsilon_0^L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_L^p \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Où :

$$\varepsilon_0^p = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

et :

$$\varepsilon_0^f = \begin{Bmatrix} -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x.\partial y} \end{Bmatrix}$$

et :

$$\varepsilon_L^p = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \end{Bmatrix}$$

Remarque : On indique que les autres relations restent identiques.

CHAPITRE II :
THÉORIE DE L'ELASTO-PLASTICITÉ DES PLAQUES EN FLEXION.

Dans la pratique, on a très souvent recours à l'utilisation des métaux. Ce choix est largement appuyé par le fait que les métaux présentent la propriété d'êtres malléables; c.à.d. déformables sans l'effet de changements plus ou moins importants.

Une de ces déformations est la déformation plastique , qui occupe un rang d'étude très large, car, dans divers structure mécanique, ce phénomène est généralement néfaste pour le bon fonctionnement des systèmes mécanique, et il convient dons de l'éviter.

C'est dans ce cadre que s'inscrit l'étude théorique et expérimentale du comportement élasto-plastique des métaux.

Pour notre étude, la déformation plastique est destiné, du fait qu'on étudie le façonnage des métaux (la mise en forme des métaux) par déformation plastique.

Dans ce chapitre nous rappelons les caractéristiques essentielles de l'elasto-plasticité avec écrouissage. Nous ne tenons pas compte des effets de température ni ceux de viscosité.

II.1 Définition d'un modèle Elasto-Plastique.

II.1.1. Détermination du comportement Elasto-Plastique.

La physique des solides et les expériences phénoménologiques justifient le découplage des effets élastique et plastique. C'est à dire, la partition des déformations ou séparation entre la déformation élastique $[\varepsilon_e]$ et la déformation irréversible ou inélastique $[\varepsilon_p]$. [4]

Dans le cadre de l'elasto-plasticité on écrira au delà d'un certain niveau de contrainte qu'on appelle "seuil de plasticité" σ_0.

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_e] + [\varepsilon_p] \qquad \text{(II.1)}$$

donc :

$$[d\varepsilon] = [d\varepsilon_e] + [d\varepsilon_p] \qquad \text{(II.2)}$$

Les relations de comportement découplées pour ε_e et ε_p sont de la forme :

$$\varepsilon_e = A(\sigma) \quad \forall\sigma \qquad \text{(II.3)}$$

$$\varepsilon_p = \begin{cases} F(\sigma) \; pour \; |\sigma| \geq \sigma_0 \\ 0 \quad si \; |\sigma| < \sigma_0 \end{cases} \qquad \text{(II.4)}$$

Où :

- σ_0 est le seuil de plasticité.

Les incréments de la déformation élastique $[d\varepsilon_e]$ sont reliés aux incréments de contraintes $[d\sigma]$ par la loi de Hooke :

$$[d\varepsilon_e] = \tfrac{1+\nu}{E}[d\sigma] - \tfrac{\nu}{E}(trace[d\sigma]).[\delta] \qquad \text{(II.5)}$$

Où :

- E : étant le module de Young.
- ν : le coefficient de Poisson.
- $[\delta]$: la matrice identité.

Les propriétés matérielles requises pour définir le comportement élasto-plastique sont obtenues par un essai unidirectionnel de "traction simple".

Plusieurs types de comportements élasto-plastiques sont mentionnés sur la figure (II.1)

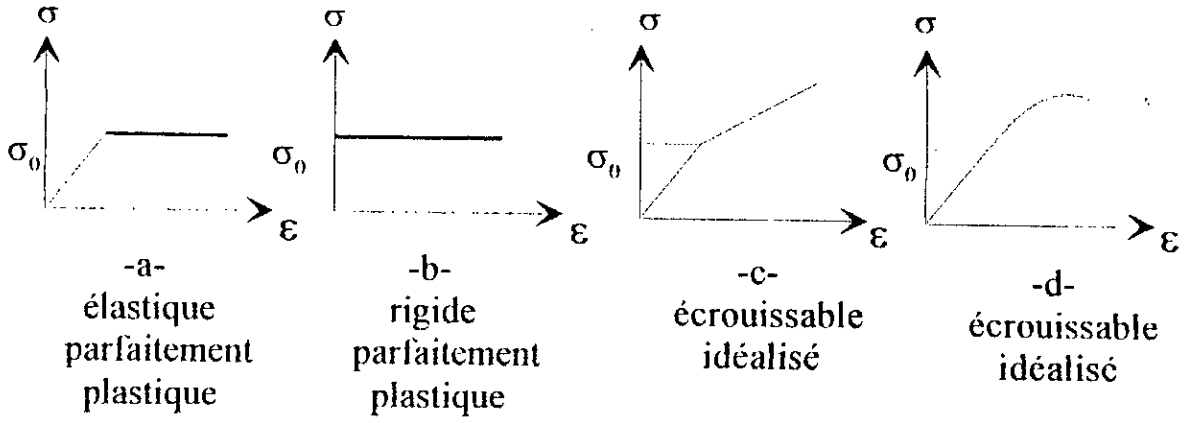


Figure (II.2) : types de comportements des matériaux élasto-plastiques.

II.2. Loi de comportement Elasto-Plastique.

II.2.1. Surface d'écoulement.

On admet généralement comme hypothèse, et c'est un fait confirmé par l'expérience [9], que l'écoulement n'apparaît que si les contraintes σ satisfont un critère général d'écoulement de la forme :

$$F(\sigma, K) = 0 \qquad \text{(II.6)}$$

Où :

- K : est un paramètre d'écrouissage.

Cette condition d'écoulement peut se concevoir comme une surface dans l'espace à n-dimensions des contraintes, la position de cette surface dépendant de la valeur instantanée du paramètre K (Figure (II.3))

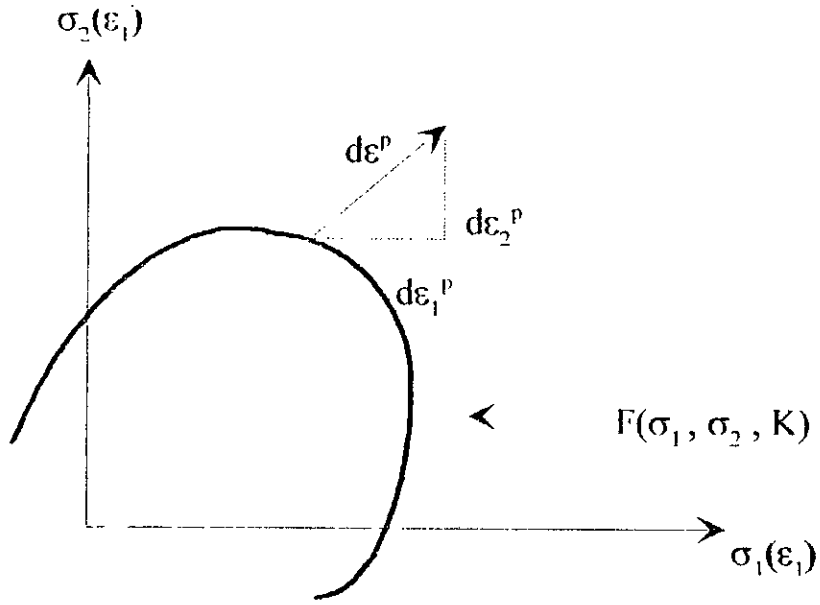


Figure (II.3) : Surface d'écoulement et condition de normalité dans l'espace des contraintes bidimentionnel.

II.2.2. Loi d'écoulement.

II.2.2.1. Principe de normalité.

Von Mises a le premier suggéré les relations constitutives fondamentales qui permettent de définir les incréments de déformations plastiques à partir de la donnée de la surface d'écoulement, à l'état actuel, on admet généralement les hypothèses suivantes [9] :

$$d\varepsilon_p = \lambda \frac{\partial F}{\partial [\sigma]} \qquad \text{(II.7)}$$

Ce qui se traduit pour chacun des n comportements par :

$$d_n\varepsilon_p = \lambda \frac{\partial F}{\partial_n} \qquad \text{(II.8)}$$

Où :

- λ : est une constante de proportionnalité appelée multiplicateur plastique.

La relation (II.7) peut s'interpréter comme traduisant le fait que le vecteur "$d\varepsilon_p$" est orthogonal à la surface d'écoulement.

Nous introduisons la condition de consistance par le fait que, lorsque l'écoulement plastique intervient, les contraintes se situent toujours sur la surface d'écoulement définie par l'équation (II.6). Si l'on différentie cette relation, on peut alors écrire :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial [\sigma]}.d[\sigma] + \frac{\partial F}{\partial K}.dK = 0 \qquad \text{(II.9)}$$

de plus , il a été montré que : [9] et [2]

$$\frac{\partial F}{\partial [\sigma]} = d[s] \qquad \text{(II.10)}$$

- S étant le tenceur déviateur des contraintes.

d'où la relation de Prandtl-Reuss :

$$d\varepsilon_{ij} = \left[\frac{1+\nu}{E}d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}.trace([\sigma]).\delta_{ij}\right] + \left[\frac{\partial F}{\partial[\sigma]}.d\lambda\right] \qquad \text{(II.11)}$$

II.2.3. Phénomène d'écrouissage.

Un matériau est dit écrouissable si la surface d'écoulement (ou limite élastique) varie au cours de son histoire de chargement. Autrement dit, il n'existe pas un seuil de plasticité mais une infinité de seuils. La valeur de la contrainte d'écoulement d'un matériau est une caractéristique de son état; nous parlerons alors de contrainte d'écoulement d'un matériau donné dans un état donné.

Les deux modèles d'écrouissage les plus utilisés et les plus simples traduisant la variation de surface d'écoulement sont :

II.2.3.1. Ecrouissage isotrope.

Pour un matériaux isotope dans son état initial, on fait l'hypothèse que cette isotropie n'est pas perturbée par l'apparition de déformations plastiques.

La surface d'écoulement se transforme au cours du chargement par une homothétie de rapport supérieur à 1 [4] (Figure (II.4)). Ce qui permet d'écrire le critère :

$$F([\sigma], p) = 0 \qquad \text{(II.12)}$$

p : caractérise une mesure de l'écrouissage isotope qui est déterminé à partir d'un essai expérimental uniaxial.

Ce paramètre peut être assimilé : [9]

- Au travail de déformation plastique :

$$dp = dw^p \qquad \text{(II.13)}$$

Avec :

$$dw^p = [\varepsilon^T][\sigma] \qquad \text{(II.14)}$$

- A la déformation plastique cumulée :

$$dp \cong d\varepsilon^p \qquad \text{(II.15)}$$

Avec :

$$d\varepsilon^p = \left(\tfrac{2}{3}[d\varepsilon_p]^T.[d\varepsilon_p]\right) \qquad \text{(II.16)}$$

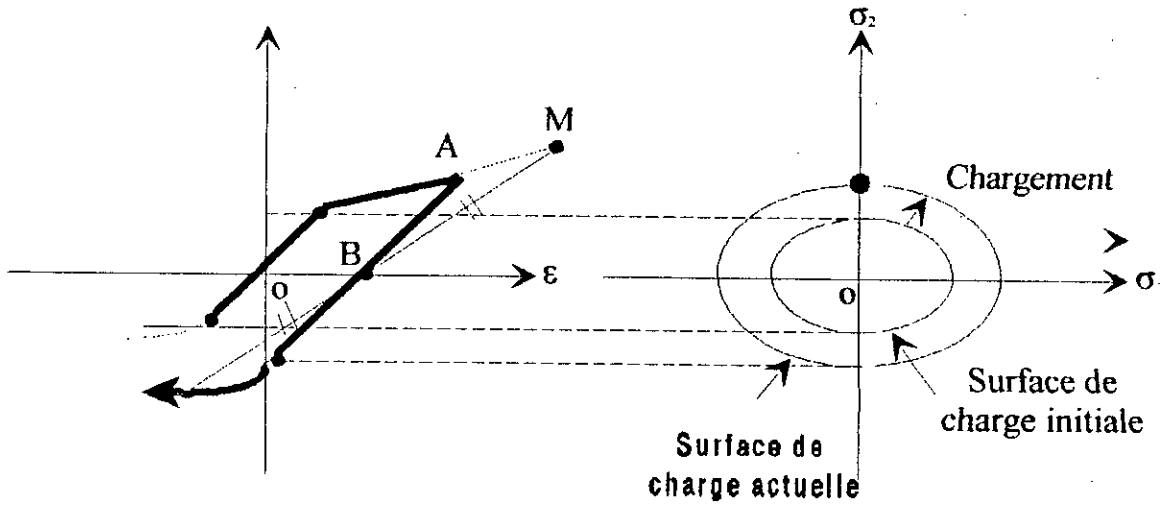


Figure (II.4) : Ecrouissage isotope
(Essai de traction compression)

II.2.3.2. Ecrouissage cinématique.

Une schématisation très utile de l'écrouissage anisotrope est l'écrouissage cinématique linéaire pour lequel le domaine d'élasticité garde une amplitude constante mais se déplace par une translation dans l'espace des contraintes (Figure (II.5))

L'effet Bauschinger se met en évidence lorsque l'on soumet une éprouvette à un essai de traction suivi d'un essai de compression.

On constate souvent que la traction préalable à écroui le matériau dans le sens de la traction (Augmentation de la limite d'élasticité) mais l'a adouci dans le sens de la compression : la figure (II.17) montre que la limite d'élasticité en compression est plus faible que la limite initiale en compression .

Le critère prend la forme générale suivante :

$$F([\sigma],[\alpha]) = 0 \qquad \text{(II.17)}$$

Où :

- $[\alpha]$ est une grandeur "tensorielle" associée à la translation du centre de la surface d'écoulement.

Deux hypothèses sont faites pour caractériser cette grandeur.

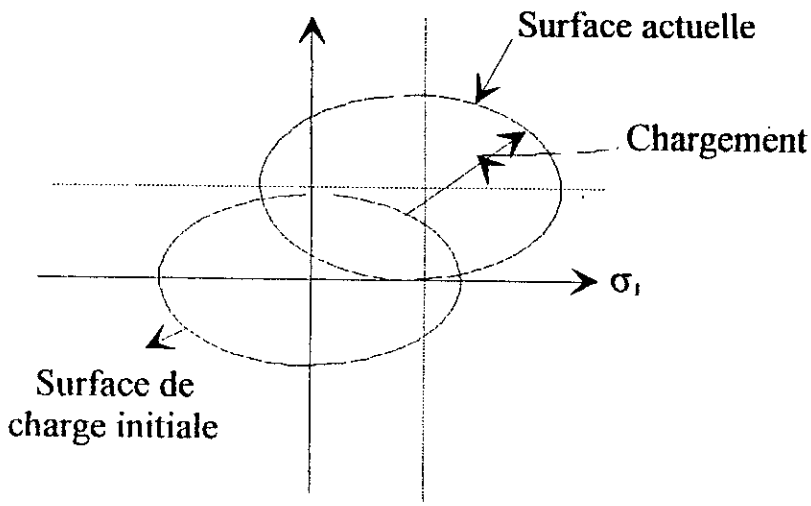


Figure (II.5) : Ecrouissage cinématique.

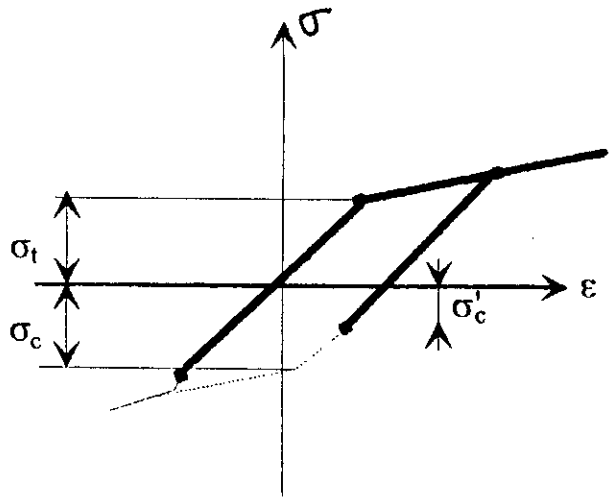


Figure (II.6) : Effet Bauschinger

- **Hypothèse de Zeigler.**

Cette hypothèse consiste à remplacer la loi d'écrouissage par :

$$[d\alpha] = ([\sigma] - [\alpha]).du \qquad \text{(II.18)}$$

La translation s'effectue dans la direction joignant le centre de la surface d'écoulement au point représentant l'état de contrainte sur cette surface Figure (II.7.a)

Le paramètre du est défini en exprimant que le nouveau champ de contraintes reste plastiquement admissible [4].

- **Hypothèse de Prager.**

$$[d_\alpha] = c[d\varepsilon_p] \qquad \text{(II.19)}$$

La translation s'effectue dans la direction des déformations plastiques (Figure (II.7.b)). La constante c est déterminée à partir d'un essai uniaxial.

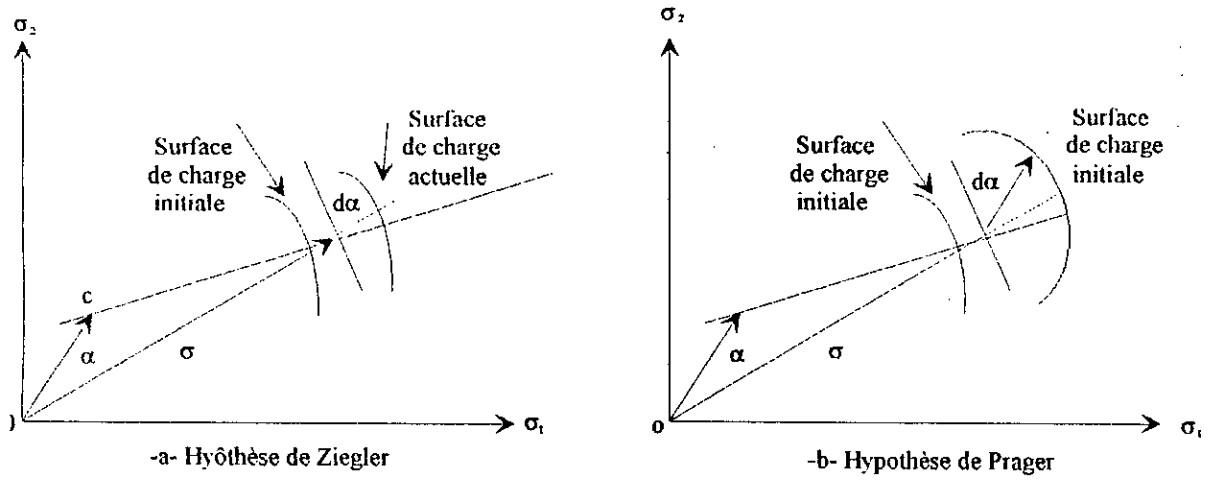


Figure (II.7) : Hypothèses de caractérisation de l'écrouissage cinématique.

Dans ce qui suit nous ne nous intéresserons qu'a l'écrouissage isotrope.

II.2.4. Critère de plasticité.

L'isotropie impose que la frontière du domaine soit invariante par changement de repère. Il ne dépend donc que des trois invariants du tenseur de contraintes [.].

$$J_1 = tr([\sigma]) = \sigma_{ii} \qquad \text{(II.20)}$$

$$J_2 = \tfrac{1}{2}.tr\left([\sigma]^2\right) = \tfrac{1}{2}.\sigma_{ij}.\sigma_{ij} \qquad \text{(II.21)}$$

$$J_3 = \tfrac{1}{3}.tr\left([\sigma]^3\right) = \tfrac{1}{3}.Det([\sigma]) = \tfrac{1}{3}.\sigma_{ij}.\sigma_{jk}.\sigma_{ki} \qquad \text{(II.22)}$$

Dans les matériaux métalliques on observe généralement l'incompressibilité plastique et l'imdépendance du comportement vis à vis de la contrainte hydrostatique. [ ]

Dans le cas isotrope il suffit d'utiliser les invariants J'_2 et J'_3 qui s'écrivent [1] :

$$J'_2 = \tfrac{1}{2}.tr([\sigma']) \tag{II.23}$$

$$J'_3 = \tfrac{1}{3}.tr\left([\sigma']^2\right) \tag{II.24}$$

Avec :

$$[\sigma'] = [\sigma] - \tfrac{1}{3}J_1[\delta] \tag{II.25}$$

Par conséquent, la fonction de charge s'écrit [1] :

$$F(J'_2, J'_3, P) \tag{II.26}$$

Choisissons la variable seuil de plasticité en traction simple σ_s, dans ce cas :

$$P = \sigma_s \tag{II.27}$$

Les expressions les plus courantes données à la surface d'écoulement pour les matériaux métalliques sont celles de Tresca (1864) et Von-Misses (1913). Ces deux critères sont définis comme suit :

II.2.4.1. Critère de Treca.

La constante tangentielle maximale s'exprime par : [1]

$$\frac{1}{2}\sup_{i\neq j}\left(\left|\sigma_i-\sigma_j\right|\right) \qquad \text{(II.28)}$$

La déformation plastique apparaît lorsque la contrainte de cisaillement maximale dépasse un certain niveau :

$$F([\sigma]) = \frac{1}{2}\sup_{i\neq j}\left(\left|\sigma_i-\sigma_j\right|\right) - \sigma_0 \qquad \text{(II.29)}$$

Où :

- σ_i et σ_j sont les contraintes principales.
- σ_0 est la limite élastique en traction simple.

Dans l'espace des contraintes principales le critère de Tresca est représenté par un prisme droit à base hexagonale dont l'axe est la trissectrice du repère $(0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ (Fig. II.8)

II.2.4.2. Critère de Von-Mises.

La déformation plastique apparaît lorsque le second invariant (J_2') du tenseur déviateur des contraintes atteint une certaine valeur :

$$F([\sigma]) = (J_2')^{\frac{1}{2}} - k \qquad \text{(II.30)}$$

Avec :

$$J_2' = \frac{1}{2}.tr\left([\sigma']^2\right) \qquad \text{(II.31)}$$

et :

$$k = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_0 \qquad \text{(II.32)}$$

L'expression développée du critère de Von-Mises dans l'espace des contraintes principales à trois dimensions est :

$$F([\sigma]) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_0^2 \qquad \text{(II.33)}$$

C'est l'équation du cylindre à base circulaire dans l'axe et la trissectrice du repère $(0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ et est circonscrit à l'hexagone de Tresca.

Remarque : Ce critère à l'avantage de ne pas présenter une discontinuité de la normale comme c'est le cas du critère de Tresca.

L'interprétation physique donnée à ce critère est que la plastification ne commence que lorsque l'énergie interne de déformation élastique atteint une certaine valeur.
Le critère s'écrit :

$$\bar{\sigma} - \sigma_0 = 0 \qquad \text{(III.34)}$$

$$\bar{\sigma} = 3J_2' \qquad \text{(III.35)}$$

- $\bar{\sigma}$: dite contrainte équivalente.

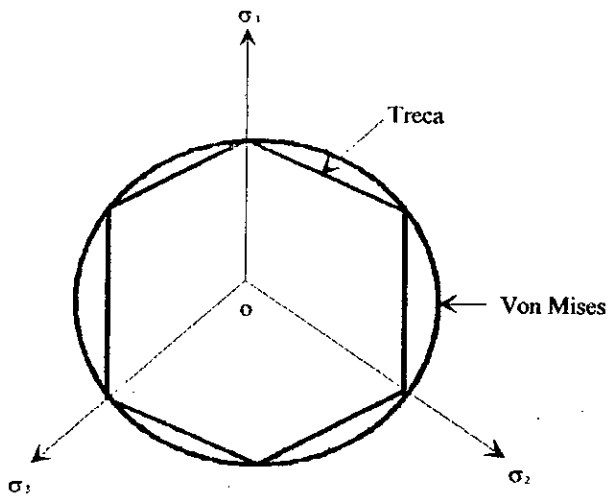


Figure (II.8) : Représentation géométrique du critère de plasticité (projection dans le plan octaédral).

II.3. Flexion Elasto-Plastique des plaques.

II.3.1. Description d'un problème Elasto-Plastique en flexion.

Lorsque le moment appliqué augmente, les fibres extrêmes de la plaque sont les premières à atteindre le seuil de plasticité, et les contraintes normales de toutes les autres fibres antérieures, qui restent, varient linéairement en fonction de leur distance par rapport à l'axe neutre comme l'indique la figure (fig. II.9.b). Toute augmentation supplémentaire du moment porte les fibres intérieures au seuil de plasticité. La plasticité progresse depuis les fibres extérieures vers les fibres intérieures comme l'indique la figure (II.9.c); et la distribution des contraintes normales, quant on atteint la plastification de toutes les fibres, est donc représentée dans la figure (II.9.d), le moment correspondant à ce cas de figure est appelé moment totalement plastique.

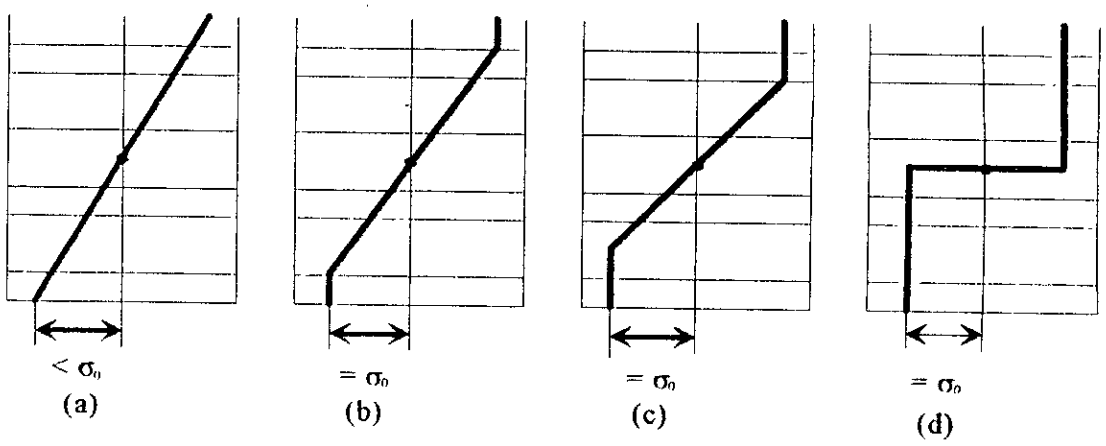


Figure (II.9) : Evolution de la plasticité parfaite en flexion

II.3.2. Approches du problème.

Deux approches différentes sont à considérer pour l'étude de la flexion des plaques en élasto-plasticité.

II.3.2.1. Approche en multicouches.

En suivant l'évolution de la plasticité à travers l'épaisseur, la plaque est divisée en un nombre de couches de manière qu'elles se plastifient séparément.
Malgré le grand intérêt que porte cette approche vers la réalité, elle présente l'inconvénient de la lenteur numérique pour les plaques épaisses.

II.3.2.2. Approche en monocouche.

Dans cette approche, on suppose que la section entière de la plaque se plastifie instantanément lorsque le moment de la flexion atteint le moment "limite élastique". Cette approche malgré sa grande généralité présente des résultats satisfaisants pour les plaques minces.

En réalité, il existe une plastification graduelle qui progresse depuis les fibres extérieurs vers les fibres intérieures jusqu'à ce que la section sort entièrement plastifié.
L'analyse élastique des plaques est faite en terme de variables généralisées (ou globale) :
$\{X\}$ et $\{M\}$. L'extension à l'analyse élasto-plastique avec ces mêmes variables nécessite une adaptation des lois élasto-plastiques présentées ci-dessous. Cette adaptation se fait conformément aux définitions qui lient $\{\varepsilon\}$ et $\{\sigma\}$ aux variables globales, soient :

$$\begin{cases} [\varepsilon] = z[X] \quad ; \\ [\sigma] = \frac{12}{h^3}.z.[M] \end{cases} \qquad \text{(II.36)}$$

Où :

h est l'épaisseur de la plaque.

Les transformations nécessaires pour exprimer les critères de plasticité (en particulier pour le critère de Von-Mises) sont faites en considérant que l'hypothèse de Kirchoff reste valable dans le domaine élasto-plastique et qu'un couple $\{M\}$ est dit

plastiquement admissible s'il lui correspond au moins une distribution de contrainte $\{\sigma\}$ plastiquement admissible.

L'expérience montre que sous ces hypothèses en flexion pure, le critère garde la même forme en moment $\{M\}$ que celle en contraintes $\{\sigma\}$. Le moment "limite élastique" M_p s'exprime en fonction de la limite élastique par la relation suivante [9] :

$$M_p = h^2.\frac{\sigma_0}{4} \qquad \text{(III.37)}$$

Les critères de Tresca et Von-Mises s'écrivent respectivement :

$$F([M]) = \sup|M_i - M_j| - M_p \qquad \text{(II.38)}$$

$$F([M]) = M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3M_{xy}^2 - M_p^2 \qquad \text{(II.39)}$$

Où : M_i et M_j sont les moments principaux.

Pour les matériaux écrouissables le moment $M_p(X_p)$ peut être déduit à partir d'une courbe uniaxiale de traction simple en gardant la même définition du travail de déformation plastique ainsi que la déformation cumulée (II.2.3.1)

II.3.3. Expressions des moments et efforts tranchants.

Les moments de flexion $\{M\}$ et les efforts de cisaillement $\{Q\}$ sont définis comme suit :

$$\{M\} = \left[D_f'\right].\{X\} \qquad \text{(II.40)}$$

$\left[D_f'\right] = \frac{h^3}{12}\left[D_f\right]$ est la rigidité flexionnelle dans le cas d'une approche monocouche.

Pour une approche multicouche, il faut sommer la contribution de chaque couche, on a alors :

$$\left[D_f'\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4}(z_{i+1} + z_i)\left(z_{i+1}^2 - z_i^2\right)\left[D_f\right] \qquad \text{(II.41)}$$

- n : étant le nombre de couches totale de la plaque.

$$\{Q\} = [D'_c]\{\delta\} \qquad \text{(II.42)}$$

- $[D'_c]$: est la rigidité de cisaillement définie par l'équation (I.57).

Dans le cas d'une plaque multicouche :

$$[D'_c] = K \sum_{i=1}^{n} (z_{i+1} - z_i).[D_c] \qquad \text{(II.43)}$$

- K : est le coefficient de corrélation pour le cisaillement (généralement égale à $\frac{5}{6}$).
- $[D_f]$ et $[D_c]$ sont définit par les équations (I.47) et (I.51)

CHAPITRE III : INTRODUCTION DU MODÈLE ÉLASTO-PLASTIQUE ET L'HYPOTHÈSE DES GRANDES DÉFORMATIONS DANS LE CODE D'ÉLÉMENTS FINIS.

La complexité des phénomènes étudiés et la difficulté de résolution des problèmes réels, nous conduit souvent à chercher des méthodes qui permettent d'approximer la solution exacte.

En pratique, le principe de ces méthodes est la discrétisation du milieu contraint en un ensemble d'éléments facilement formulés, ensuite la reconstitution du système global à partir de ces éléments.

Parmi les méthodes employées et qui nous intéressent il y a la méthode des éléments finis qui est très souvent utilisée dans la calcul des structures, mais qu'on peut également rencontrer dans d'autres domaines tels que la mécanique des fluides.

Parmi les avantages de cette méthode, on peut citer :

- Facilité de formuler les caractéristiques élémentaires.
- Répétitivité des calculs pour chaque élément.
- Possibilité de calcul des déplacements et contraintes en chaque point du milieu.
- Possibilité de réduction de la taille du système, dans certains cas, d'une manière très significative.

Parmi les inconvénients de cette méthode, on peut noter :

- Le temps de calcul qui peut devenir assez important, plus particulièrement dans le cas du calcul itératif.

III.1. Présentation de la méthode des éléments finis.

La discrétisation par élément finis, s'effectue en subdivisant le système en un ensemble d'éléments qui ne sont reliés entre eux , à leur frontière, que par des noeuds; les inconnues du problème sont les déplacements de ces noeuds.

La discrétisation du problème consiste, à approximiser le déplacement u_i en chaque point de l'élément par [13] :

$$u_i = N_{ij}.d_j \qquad i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m} \qquad \text{(III.1)}$$

Où :

- m : est la dimension du problème.
- n : nombre de noeud par élément.
- u_i : déplacement des noeuds.

Les N_{ij} , appelées fonctions de formes, nous permettent de connaître le déplacement en chaque point en remplaçant les valeurs des cordonnées de ce point dans leurs expressions.

Donc la discrétisation doit passer par :

- La définition de la géométrie des éléments.
- La construction des fonctions d'interpolations.

De nombreux types d'éléments sont définies par [6] :

- Leur forme.
- Leur nombre de noeuds.
- Leur nombre de degrés de liberté par noeud.
- Leur polynôme d'interpolation.

Il faut noter que la précision des résultats, [Yang] est influencé par les paramètres précédemment cités [13], [15]

III.2. Hypothèses fondamentales.

Dans ce qui suit, nous considérerons certaines hypothèses dans le but de simplifier la formulation :

- Chargement quasi-statique;
- Grands déplacements : donc prise en compte des termes non-linéaires pair le calcul des déformations [16].

III.3. Formulation de la méthode des éléments finis.

III.3.1. Principe des travaux virtuels.

Considérons un milieu Ω de contour Γ sous l'action de la force de volume b_i et d'une force de surface t_i .

Le principe des travaux virtuels considère qu'en imposant un déplacement virtuel ζu_i, l'énergie de déformation interne et le travail des forces extérieurs sont égaux :

$$\int_{\Omega} \delta\varepsilon_{ij}.\tau_{ij}.d\Omega - \int_{\omega} \delta u_i.b_i.d\Omega - \int_{\Gamma} \delta u_i.b_i.d\Gamma = 0 \qquad \text{(III.2)}$$

III.3.2. Approximation par éléments finis.

On rappelle que la méthode des éléments finis permet de discrétiser le déplacement u en l'exprimant en fonction des déplacements nodaux d_j.

La formulation isoparamétrique permet de calculer la contribution de chaque élément.

Les déplacements, pour chaque élément, sont exprimés comme :

$$\begin{aligned} u_i &= N_{ij}.d_j \\ \delta u_i &= N_{ij}.\delta d_j \end{aligned} \qquad \text{(III.3)}$$

Dans notre étude, nous avons choisi un éléments isoparamétrique récemment développé [7], à savoir le quadrilatère à huit (08) noeuds [6] (fig. III.1), permettant d'obtenir des résultats d'une précision appréciable.

Ce type d'élément est fondé sur la théorie de Mindlin qui tient compte de l'effet de cisaillement transverse. Sa formulation est basée sur 3 variables nodales indépendantes w, β_x, β_y.

Il a la caractéristique d'être conforme, car il nécessite la continuité c_0 sous la condition de compatibilité, contrairement à celles de Kirchhoff qui est la continuité c_1.

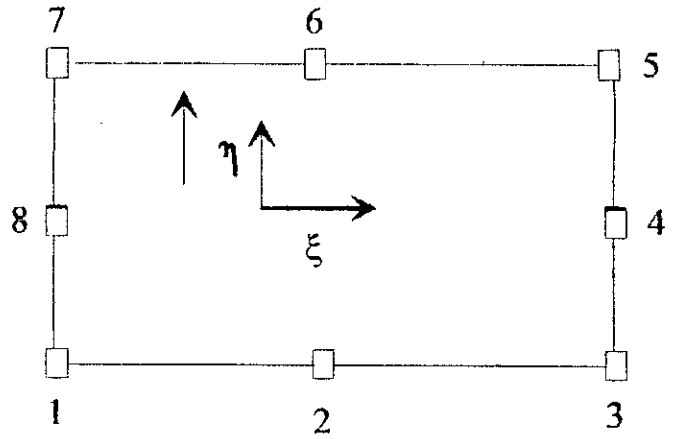
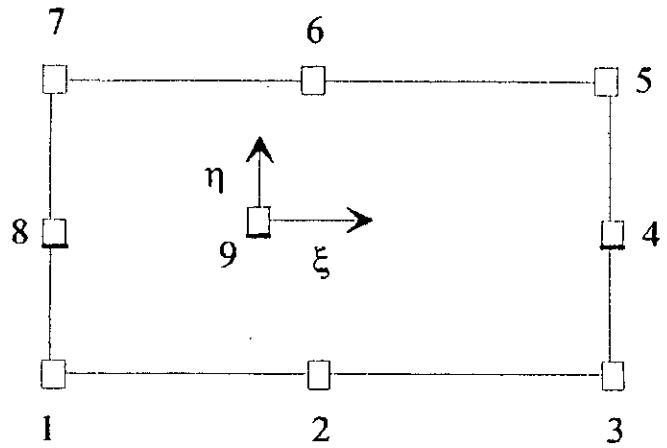


Figure III.1 : Représentation du type d'élément.

Les fonctions de formes sont basées sur l'interpolation de Serendip pour "W" et sur celle de Lagrange pour β_x et β_y .

On note, par ailleurs qu'il est possible d'utiliser un autre élément qui est l'élément quadrilatère hétérosis, qui possède un noeud central avec β_x, β_y comme degrés de liberté.



Les fonctions de formes correspondant à ce type d'élément liées au repère local sont données par [9] :

$$N_i = \tfrac{1}{h}(1+\xi.\varepsilon_i).(1+\eta.u_i).(\xi.\varepsilon_i+\eta.u_i-1) \quad i=1,3,5,7$$

$$N_i = \tfrac{\zeta_i^2}{2}(1+\xi.\varepsilon_i).(1-\eta^2)+\tfrac{u_i^2}{h}(1+\xi.\varepsilon_i).(1-\eta^2) \quad i=2,4,6,8$$

$$N_i = (1-\xi^2).(1-\eta^2) \quad i=9$$

Avec :

ξ, η les coordonnées exprimées dans le repère local lié à l'élément.

A partir du champ de déplacement ainsi défini et compte tenu des hypothèses des grands déplacements, on peut déterminer le champ de déformation, soit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j}d_j+\frac{\partial N_{ij}}{\partial x_i}d_i\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial N_{ij}}{\partial x_j}d_j\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}d_i\right) \qquad \text{(III.5)}$$

$\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ sont exprimées sous forme vectorielle, pour raison de simplicité.

Donc :

$$\varepsilon = \varepsilon_f^0 + \varepsilon_f^L + \varepsilon_c^0$$

Ou encore :

$$\varepsilon_{ij} = (B_{ij}).d_j$$

B_{ij} sont les composantes de la matrice des dérivées des fonctions de formes, dans le cas de la flexion, elles s'écrivent :

$$(B_{ij})_f = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x_2} & -\frac{\partial N_i}{\partial x_1} \end{vmatrix} \qquad \text{(III.8)}$$

Le terme due au cisaillement est donné par :

$$(B_{ij})_c = \begin{bmatrix} -\frac{\partial N_i}{\partial x_1} & -N_i & 0 \\ +\frac{\partial N_i}{\partial x_2} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \qquad \text{(III.9)}$$

Pour le calcul des grandes déformations dues à la flexion, nous avons :

$$(B_{ij})_f^L = c.G \qquad \text{(III.10)}$$

Les matrices c et G seront explicitées plus loin dans ce chapitre.

Le champ des contrainte est déterminé à partir du champ de déformation :

$$\sigma_i = H.(\varepsilon_j) \qquad \text{(III.14)}$$

Dans le cas élastique :

$$\sigma_i = D_{ij}.\varepsilon_j \qquad \text{(III.15)}$$

Où :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_t \\ \sigma_c \end{pmatrix} ; \ \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_f \\ \varepsilon_c \end{pmatrix}$$

et :

$$D = \begin{pmatrix} D_f & 0 \\ 0 & D_c \end{pmatrix} \qquad \text{(III.16)}$$

En reportant les équations (III.4) et (III.7) dans l'expression des travaux virtuels avec :

$$\delta d_i = \left\{ \left[K_0 + K_c + K_L^f \right] - \int_\omega N_{ij}.b_i.d\Omega \right\} = 0 \qquad \text{(III.17)}$$

Avec :

$$K_0 = \int_\Omega x_3^2 (B_{ij})_f.(D^f).(B_{ij})_f.d\Omega \qquad \text{(III.18)}$$

$$K_c = \int_\Omega (B_{ij})_f.(D^f).(B_{ij})_c.d\Omega \qquad \text{(III.19)}$$

$$K_L = \int_\Omega \left(B_L^f\right)^t.(D^f).\left(B_L^f\right).d\Omega \qquad \text{(III.20)}$$

Où :

$$B_L^f = A.G$$

ou sous une forme plus condensée :

$$(K_{ij}).d_j = F_j \qquad \text{(III.21)}$$

L'intégration des équations (III.18) à (III.20) se fera, au niveau de chaque élément :
L'élément de volume est donné par :

$$d\Omega = h.\det J.d\zeta.d\eta \qquad \text{(III.22)}$$

Où : J est le Jacobien, défini par :

$$[J] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{pmatrix} \qquad \text{(III.23)}$$

Pour tenir compte de la contribution de chaque élément nous réalisons l'assemblage des matrices de rigidité élémentaire ainsi que les vecteurs forces élémentaires, pour former la matrice de rigidité globale, ainsi que le vecteur force global de toute la structure. Nous obtenons ainsi, un système d'équations global :

$$K_{ij}.d_j = F_j \qquad \text{(III.24)}$$

Qui n'est resolvable que par des méthodes itératives car la matrice de rigidité est fonction des déplacements d_j.

III.4. Modélisation élasto-plastique.

III.4.1. Modélisation en monocouche.

Le principe de l'approche monocouche , suppose que la section de la plaque devient plastique, lorsque le moment de flexion dépasse le seuil de plasticité, c.à.d. atteint un "moment seuil" dans ce cas la fonction de charge se met sous la forme :

$$F\left(M_i, \tilde{P}\right) = 0 \qquad \text{(III.25)}$$

$\tilde{P}$: est une grandeur qui caractérise l'écrouissage pour une flexion paire.
Avec l'hypothèse des grands déplacements nous avons :

$$\{dX_i\} = \{dX_i\}_e + \{dX_i\}_p \qquad \text{(III.26)}$$

Avec :

- $\{dX_i\}_e = \{dX_i\}^0 + \{dX_i\}^L$
- $\{dX_i\}^0$: est la déformation linéaire
- $\{dX_i\}^L$: est la déformation due aux grands déplacements.

et :

- $\{dX_i\}^f = \lambda\left\{\frac{\partial F}{\partial M}\right\}$

La surface d'écoulement ne dépend que des efforts de flexion.
Sous forme différentielle, (III.25) s'écrit :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial M_i}.d(M_i)_f + \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right).dp = 0 \qquad \text{(III.27)}$$

Où :

$$a_i = d(M_i) - Ad\lambda = 0 \qquad \text{(III.28)}$$

Avec :

$$a_i = \frac{\partial F}{\partial M_i} = \left| \frac{\partial F}{\partial M_1} \; \frac{\partial F}{\partial M_2} \; \frac{\partial F}{\partial M_3} \right|^t \qquad \text{(III.29)}$$

- a_i : est appelé vecteur d'écoulement plastique.

La solution de Prandtl-Reuse s'écrit :

$$dX_i = \left[(D_{ij})_f \right]^{-1} .d(M_i) + d\lambda . \frac{\partial F}{\partial (M_i)} \qquad \text{(III.30)}$$

En multipliant cette dernière équation par :

$$dD_i = a_j . D_{ij}$$

on obtient :

$$d\lambda = \frac{1}{1 + a_j . \left(D_{ij} \right)_f . a_i} . a_j . d_{D_i} . d_{X_i} \qquad \text{(III.31)}$$

En remplaçant (III.31) dans (III.30), on obtient la relation incrémentale contrainte-déformation.

$$d(M_i) = (D_{ij})_{ep} . dX_j \qquad \text{(III.32)}$$

Si on pose :

$$\left[(D_{ij})_f \right]_{ep} = (D_{ij})_f - \frac{dD_i . dD_j}{A + dD_i . dD_j} \qquad \text{(III.33)}$$

et :

$$dD_i = (D_{ij})_f . a_j$$

- $\left[(D_{ij})_f \right]_{ep}$ est appelée "Matrice de flexion élasto-plastique".

Le scalaire A est exprimé à partir de l'équation (III.21) :

$$F\left((M_i)_f, p \right) = F(M_i) - Re(p) = 0 \qquad \text{(III.34)}$$

Où :

- Re : est la limite élastique en traction simple.

A devient donc :

$$A = -\frac{1}{d\lambda}.\frac{\partial F}{\partial P}.dP = \frac{1}{\lambda}.\frac{dRe}{dP}.dP \qquad \text{(III.35)}$$

En utilisant le travail plastique dissipé comme variable scalaire évaluant l'état de l'écrouissage du matériau :

$$dF = (M_i).(d\varepsilon_i)_p \qquad \text{(III.36)}$$

à partir de (III.36) et (III.17), on a :

$$dP = (\sigma_i)_f.d\lambda.\frac{\partial F}{\partial(\sigma_i)_f} \qquad \text{(III.37)}$$

Soit :

$$dp = d\lambda.a_i.(\sigma_i)_f \qquad \text{(III.38)}$$

Dans le cas uniaxial, on a :

$$\sigma_i = \tilde{\sigma} = Re$$

et :

$$(d\varepsilon_1)_p = d\,\tilde{\varepsilon}_p$$

où :

$\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\varepsilon}_p$ sont respectivement la contrainte et la déformation équivalentes.

$$dp = Re.d\,\tilde{\varepsilon}_p = d\lambda.a_i.(\sigma_i)_f$$

$$dp = Re.d\,\tilde{X}_p = d\lambda.a_i.(M_i)$$

D'autre part :

$$\frac{d\tilde{M}}{dX_p} = \frac{dRe}{d\tilde{X}_p} = H' \qquad \text{(III.39)}$$

L'application du théorème d'Euleur pour les fonctions homogènes d'ordre 1 à l'équation (III.34) donne :

$$\frac{\partial F}{\partial M_i}(M_i) = Re \qquad \text{(III.40)}$$

où :

$$\alpha_i(M_i) = Re$$

Pour substituer des équations (III.39) et (III.40) dans les équations (III.35) et (III.37), on obtient :

$$\begin{cases} d\lambda = dX_p \\ A = A' \end{cases} \qquad \text{(III.41)}$$

Donc A représente la pente locale de la courbe contrainte-déformation.

Calcul de la matrice de rigidité.

La nature du phénomène élasto-plastique, fait que la rigidité du matériau varie continuellement au cours du chargement. De plus la forme incrémentale de la relation contrainte déformation conduit à l'utilisation des méthodes de résolution itératives, le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\delta d_i \left\{ \left\{ \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (B_{ij})_f^0 (\sigma_i)_f^0 + (B_{ij})_f^L (\sigma_i)_f^L + (B_{ij})_c (\sigma_i)_c + (dB_{ij})^L (\sigma_i)_f^L - N_{ij}.b_i \right\} dz.dA \right\} = 0 \qquad \text{(III.42)}$$

c.a.d :

$$\Psi_i = 0 \qquad \text{(III.43)}$$

- Ψ_i étant le vecteur des forces résiduelles.

Après intégration à travers l'épaisseur, l'équation (III.4.3) devient :

$$\int_A \Big[(B_{ij})_f^0 (M_i)^0 + (B_{ij})_f^L (M_i)^L + (B_{ij})_c (Q_i) \\ (dB_{ij})^L (M_i)^L - N_{ij}.q \Big] = A = 0 \qquad \text{(III.44)}$$

L'équation (III.4.4) est celle employé pour une approche en monocouche.

Dans l'équation d'équilibre sous sa forme incrémentale est comme suit :

$$\Psi_i + K_{T_{ij}}.D.d_j = 0 \qquad \text{(III.45)}$$

qui doit être satisfaite à chaque itération :

$K_{T_{ij}}$ représente la rigidité tangentielle qui s'écrit pour une approche en monocouche.

$$K_{T_{ij}} = K_{O_{ij}} + K_{L_{ij}} + K_\sigma^f + K_{c_{ij}} = K_{f_{ij}} + K_{c_{ij}}$$

- $K_{O_{ij}}$ est la matrice de rigidité due aux petits déplacement s'exprimants par :

$$K_{O_{ij}} = \int_A (B_{ij})_f^o.(D_{ij})_{ep}.(B_{ij})_f^o.dA \qquad \text{(III.46)}$$

- $K_{L_{ij}}$ est la matrice de rigidité due aux grands déplacements appelées également "matrice initiale de déplacement" au "matrice des grands déplacements" elle s'exprime par [13] :

$$K_{L_{ij}} = \int_A (B_{ij})_f^L.(D_{ij})_{ep}.(B_{ij})_f^L.dA \qquad \text{(III.47)}$$

($(B_{ij})_f^L$ est explicité dans ce qui suit)

- K_σ^f : est appelée matrice des contraintes initiales, ou matrice géométrique, elle est fonction du niveau des contraintes.

Soit ε^L la déformation due aux grands déplacements, alors :

$$\varepsilon^L = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{\partial\omega}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial\omega}{\partial y} \\ \frac{\partial\omega}{\partial y} & \frac{\partial\omega}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial\omega}{\partial x} \\ \frac{\partial\omega}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}.c.\beta \qquad \text{(III.48)}$$

$$W = (\omega_i, \beta_{x_i}, \beta_{y_i})^t$$

β s'écrire en variables nodales :

$$\beta = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\omega}{\partial x} \\ \frac{\partial\omega}{\partial y} \end{Bmatrix} = G.W \qquad \text{(III.49)}$$

expression dans laquelle nous avons :

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < \frac{\partial N_i}{\partial x} > \\ < \frac{\partial N_i}{\partial y} > \end{bmatrix} \qquad \text{(III.50)}$$

Ainsi G est une matrice dont les termes sont définis uniquement en fonction des coordonnées. Si l'on considère les variations de ε^L, on a :

$$d\varepsilon^L = \frac{1}{2}dc\beta + \frac{1}{2}cd\beta = cGdw$$

donc :

$$d\varepsilon^L = cG.dw \qquad \text{(III.51)}$$

et on a ainsi immédiatement par définition :

$$(B_{ij}) = cG \qquad \text{(III.52)}$$

En revenant à la définition de K_{σ}^{f}, on a :

$$K_{\sigma}^{f}.dN = \int_A (dB_{ij})^{L}.(M_i).dA \qquad \text{(III.53)}$$

en substituant la variation de (III.52) dans (III.53), on obtient :

$$K_{\sigma}^{f}.dw = \int_A G^{t}.dc^{t}.\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{pmatrix}.dA \qquad \text{(III.54)}$$

Tel que :

- T_i représentent les contraintes de membrane moyenne.

c.a.d :

$$T_i = \sigma_i.h$$

or :

$$dc^{t}.\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{bmatrix}.d\beta = \begin{bmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{bmatrix}.G.dw$$

Finalement l'équation (III.54) peut s'écrire :

$$K_{\sigma}^{f}.dw = \left\{ \int_A G^{t}.\begin{bmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{bmatrix}.G.dA \right\}.dw \qquad \text{(III.56)}$$

c.a.d. :

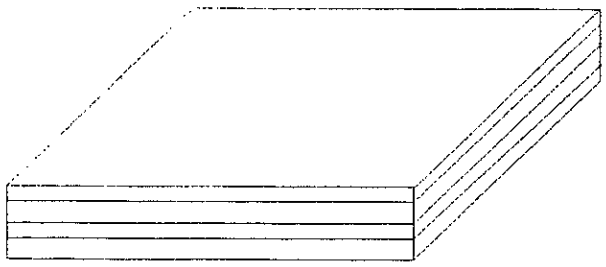
$$K_{\sigma}^{f} = \int_A G^{t}.\begin{bmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{bmatrix}.G.dA \qquad \text{(III.57)}$$

- $K_{c_{ij}}$: est la matrice de rigidité due aux efforts de cisaillement, elle est de la forme :

$$K_{c_{ij}} = \int_A (B_{ij})_{F}.(D_{ij})_{c}.(B_{ij})_{c}.dA \qquad \text{(III.58)}$$

III.4.2. Modélisation en multicouche.

Par cette approche, on considère la plaque comme étant subdivisée en un nombre fini de couches symétriques par rapport au plan moyen (Fig. III.2)



(Figure III.2)

On suppose ici que les couches externes se plastifient, lorsque la contrainte normale au milieu de ces dernières dépassent le seuil plastique.

Les calculs relatifs à cet approche ne sont pas développés, car il sont identiques à ceux de l'approche monocouche à part que les calculs sont développés ici en termes de variables réelles.

III.5. Résolution numérique.

Pour faciliter les calculs numériques, il est préférable d'écrire le critère de plasticité ainsi que le vecteur d'écoulement plastique en fonction des invariants du tenseur déviateur des contraintes. Cela reste valable pour une approche multicouche, la généralisation des calculs présentés dans le cas monocouche se fait suivant les remarques faites dans (III.4.2).

Les contraintes principales déviatoriques sont les racines de l'équation :

$$t^3 - J_2' t - J_3' = 0 \qquad \text{(III.59)}$$

En posant $t = r\sin\theta$, nous obtenons :

$$\sin^3\theta - \frac{J_2'}{r^2}\sin\theta - \frac{J_3'}{r^3} = 0 \qquad \text{(III.60)}$$

En comparant l'équation (III.60) à l'identité trigonométrique :

$$\sin^3\theta - \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta = 0 \qquad \text{(III.61)}$$

Nous obtenons :

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2'} \qquad \text{(III.62)}$$

$$\sin 3\theta = -\frac{4J_3'}{r^3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3'}{J_2'^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{(III.63)}$$

Les moments principaux sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1' \\ \sigma_2' \\ \sigma_3' \end{Bmatrix} = \frac{2\sqrt{J_2'}}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\theta \\ \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.64)}$$

Le critère de Tresca peut s'écrire donc en fonction des invariants scalaires comme :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{2\sqrt{J_2'}}{\sqrt{3}}\left[\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)\right] = R_e \qquad \text{(III.65)}$$

soit :

$$2\sqrt{J_2'}\cos\theta = R_e = \sqrt{3}\,k \qquad \text{(III.66)}$$

le critère de Von-Mises reste inchangé soit :

$$\sqrt{J_2'} = k \qquad \text{(III.67)}$$

ou :

$$\sqrt{3J_2'} = R_e$$

le vecteur d'écoulement plastique peut s'écrire aussi comme :

$$a_i = \frac{\partial F}{\partial(\sigma_i)_f} = \frac{\partial F}{\partial\sqrt{J_2'}}\frac{\partial\sqrt{J_2'}}{\partial(\sigma_i)_f} + \frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial(\sigma_i)_f} \qquad \text{(III.68)}$$

en différentiant l'équation (III.63), nous obtenons :

$$\frac{\partial\theta}{\partial(\sigma_i)} = -\frac{\sqrt{3}}{2\cos 3\theta}\frac{1}{J_2'^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial J_3'}{J_2'^{2}}\frac{\partial\sqrt{J_2'}}{\partial(\sigma_i)} \qquad \text{(III.69)}$$

En substituant l'équation (III.69) dans l'équation (III.68), le vecteur d'écoulement plastique aura la forme :

$$a_i = C_1 a_{1i} + C_2 a_{2i} \qquad \text{(III.70)}$$

avec :

$$a_{1i} = \frac{\partial\sqrt{J_2'}}{\partial(\sigma_i)_f}$$

et :

$$a_{2i} = \frac{\partial\sqrt{J_3'}}{\partial(\sigma_i)_f}$$

les constantes sont données dans le tableau pour le critère de plasticité de Tresca et de Von-Mises.

Critère de plasticité	Tresca	Von-Mises
C_1	$2\cos\theta(1+\tan\theta\ \tan 3\theta)$	$\sqrt{3}$
C_2	$\frac{\sqrt{3}}{J_2'}\ \frac{\sin\theta}{\cos 3\theta}$	0

point singulier de la surface de charge :

Eventuellement, il peut exister des points singuliers notamment pour le critère de Tresca où les constantes C_1 et C_2 sont déterminées pour $\theta = \pm 30^0$ (coins de la surface de charge).

Cette indétermination peut être levée en retournant à l'expression originale du critère, soit :

$$2\sqrt{J_2'}\cos\theta = R_e$$

pour $\theta = 30^0$, nous avons :

$$\sqrt{3J_2'} = R_e$$

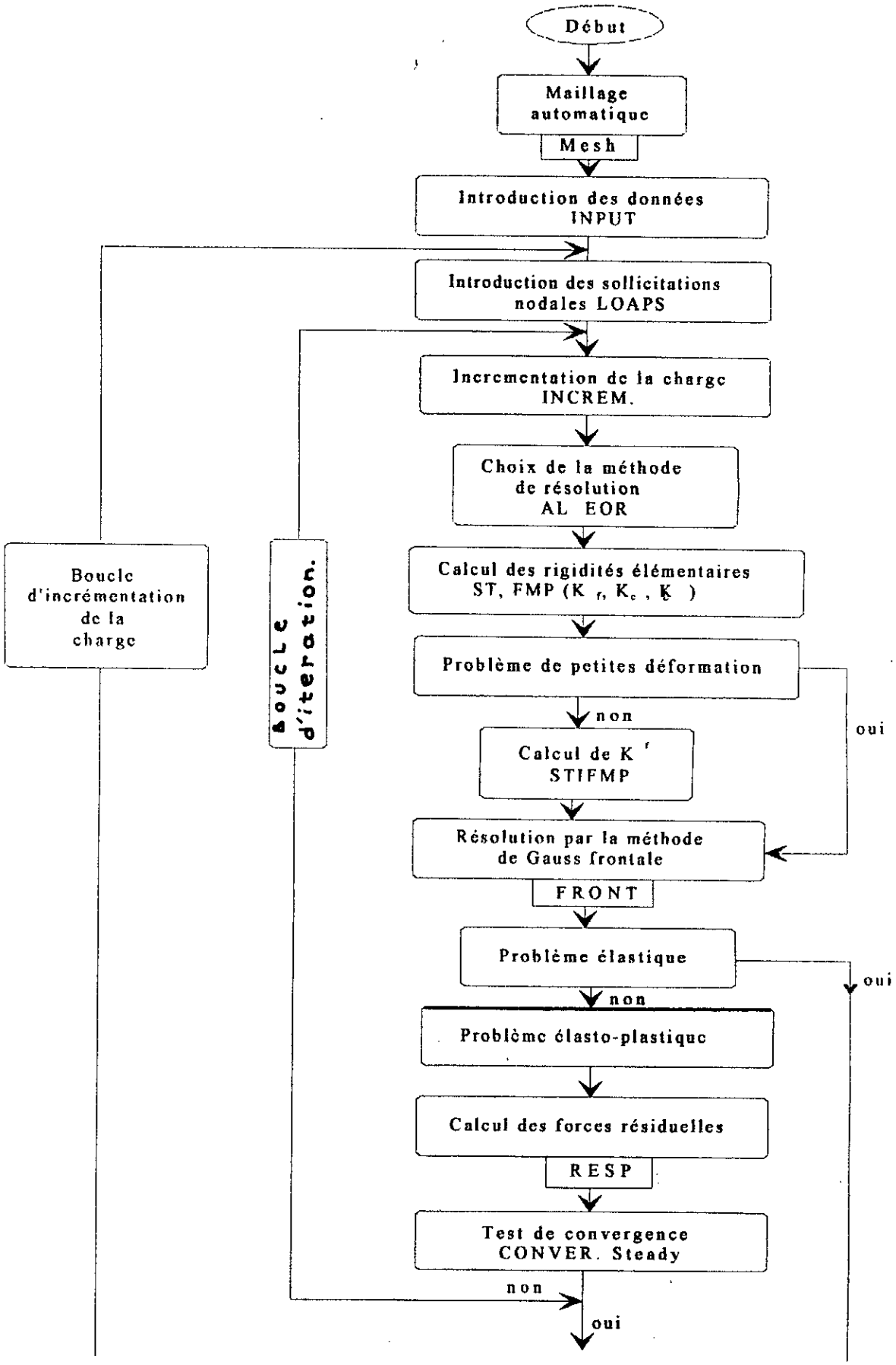
résultat confirmé par la figure 2.5 qui montre que la surface de charge de Von-Mises (cylindre) passe par les coins de l'hexagone de Tresca.

CHAPITRE IV : PRÉSENTATION DU CODE DE CALCUL.

IV.1 Structure du code de calcul.

Le calcule numérique à été fait sur la base du programme élaboré par Hinton et Owen [9]. Le programme permet par une approche en monocouche de calculer la déformation élasto-plastique, par la théorie incrémentale d'élasto-plasticité, pour des plaques formant des structures bidimentionnelles en supposant un écrouissage idéalisé. Pour notre étude, on a modifié le programme de sorte qu'il puisse calculer les déformations élasto-plastiques dues à de grands déplacements et cela en supposant un écrouissage non-linéaires, c.a.d. dépendant de la déformation plastique.

La figure (IV.1) ci-après donne la structure du programme (organigramme) après modification.


Début
Maillage automatique
Mesh
Introduction des données INPUT
Introduction des sollicitations nodales LOAPS
Incrementation de la charge INCREM.
Choix de la méthode de résolution AL EOR
Calcul des rigidités élémentaires ST, FMP (K f, Kc , K)
Problème de petites déformation
non
oui
Calcul de K f STIFMP
Résolution par la méthode de Gauss frontale
FRONT
Problème élastique
oui
non
Problème élasto-plastique
Calcul des forces résiduelles
RESP
Test de convergence CONVER. Steady
non
oui
Boucle d'incrémentation de la charge
Boucle d'iteration.

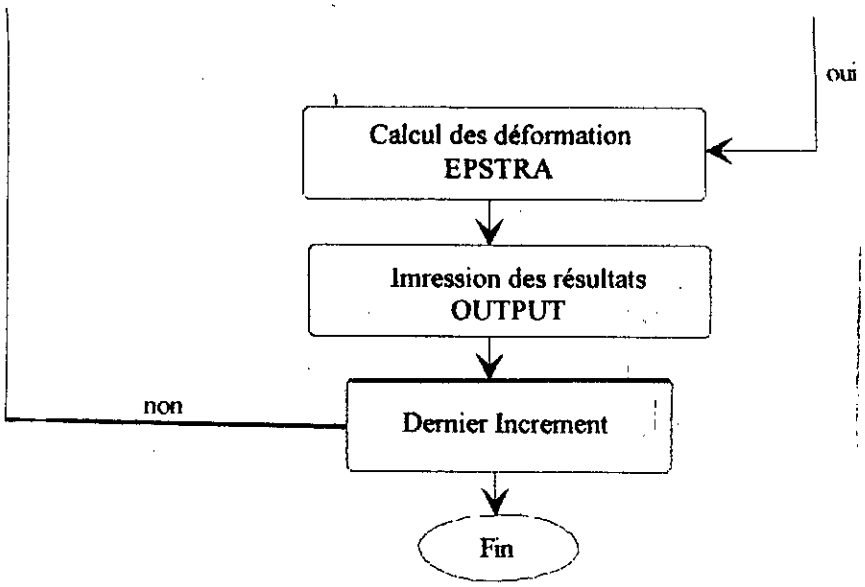


Figure (4.1) : Structure du code de calcul

IV.2. Méthodes de résolution des systèmes non-linéaire.

La majorité des algorithmes conduisent à résoudre un système d'équations linéaire à chaque itération. Pour notre cas nous avons choisie de résoudre les systèmes d'équations linéaires obtenus à chaque itération par la méthode de Gauss frontale qui combine la factorisation de Gauss à une optimisation de la taille mémoire. La méthode n'utilise, à un instant donné, qu'un sous ensemble de la matrice du système, qui n'est jamais stockée en mémoire centrale. Cette particularité offre un gain sensible d'espace mémoire par rapport à un stockage par bande ou un stokage skyline. [8]

Dans cette partie nous sommes amené à résoudre un problème non linéaire . Cette non linéaritévient du fait que la matrice élasto-plastique est fonction des déformations élasto-plastiques. La nature différentielle des lois de comportement impose de considérer une méthode incrémentale.

Les méthodes incrémentales consistent à transformer un problème non linéaire en une suite de problèmes linéaires successifs en décomposant la sollicitation totale en accroissement (ou incréments) de charge (ou pas de charge).

Quatre algorithmes sont développées dans le code de calcul que nous avons utilisé pour la résolution du système d'équations :

$$K_{ij}\, d_j - F_i = 0 \qquad \text{(IV.1)}$$

IV.2.1. Méthode de substitution.

Cette méthode consiste à construire une suite de solutions $d^{(0)}, d^{(1)}, d^{(2)}, \ldots\ldots, d^{(r)}$ tel que pour la r^{ième} itération nous avons :

$$\Psi_i\left(d_i^{(r)}\right) = F_i - K_{ij}\left(d_i^{(r)}\right) d_j^{(r)}$$

$$\Delta d_i^{(r+1)} = \left[K_{ij}\left(d_i^{(r)}\right)\right]^{-1} \Psi_i\left(d_i^{(r)}\right) \qquad \text{(IV.2)}$$

$$d_i^{(r+1)} = d_i^{(r)} + \Delta d_i^{(r+1)}$$

Si le processus converge, $d_i^{(r)}$ tend vers la solution exacte lorsque r tend vers l'infini. Nous remarquons que dans cette méthode, la matrice $[K_{ij}]$ doit être calculée et inversée à chaque itération, ce qui rend le calcul longet coûteux. De plus, les risques de divergence sont grands. [6]

IV.2.2. Méthode de Newton-Raphson ou de la rigidité tangentielle.

Cette méthode consiste à utiliser un développement de Taylor du premier degré à l'équation :

$$\Psi_i = K_{ij}\, d_j - F_i$$

A l'itération r, nous avons :

$$\Psi_i\left(d_k^{(r)} + \Delta d_k^{(r+1)}\right) = \Psi_i\left(d_k^{(r)}\right) + \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial d_j}\right)\Delta d_j^{(r+1)} \quad \text{(IV.3)}$$

soit :

$$\Delta d_i^{(r+1)} = \left[\frac{\partial \Psi_i}{\partial d_j}\right]^{-1} \Psi_i\left(d_k^{(r)}\right) \quad \text{(IV.4)}$$

et :

$$d_i^{(r+1)} = \left[K_{T_{ij}}\left(d_i^{(r)}\right)\right]^{-1} \Psi\left(d_i^{(r)}\right) \quad \text{(IV.5)}$$

l'équation (IV.4) peut être écrite sous la forme :

$$\Delta d_i^{(r+1)} = \left[K_{T_{ij}}\left(d_i^{(r)}\right)\right]^{-1} \Psi\left(d_i^{(r)}\right) \quad \text{(IV.6)}$$

La matrice dite tangente $\left[K_{t_{ij}}\right]$ est à calculer et inverser à chaque itération, ce qui représente souvent la partie essentielle du temps de calcul.

Cette méthode est utilisée pour des problèmes dont la solutions ne dépend pas seulement du déplacement actuel, mais aussi de l'histoire de chargement .

IV.2.3. Méthode incrémentale ou pas à pas.

Afin d'éviter la résolution complète d'un système linéaire à chaque itération, nous faisont l'approximation suivante pour chaque incrément de charge :

$$K_{T_{ij}}\left(d_i^{(r)}\right) = K_{T_{ij}}\left(d_i^{(0)}\right) \qquad \text{(IV.7)}$$

Cette méthode nécessite un nombre plus élevé que la méthode de Newton-Raphson, mais le coût de calcul est en général moins élevé, car la matrice $\left[K_{T_{ij}}\right]$ n'est calculée et inversée qu'à la première itération de chaque incrément.

IV.2.4. Méthode de rigidité initiale.

La matrice $\left[K_{T_{ij}}\right]$ est calculée et inversée uniquement à la première itération du premier incrément, et nous avons :

$$\Delta d_i^{(r)} = -\left[K_{T_{ij}}\left(d_i^{(0)}\right)\right]^{-1} d_i^{(r)} \qquad \text{(IV.8)}$$

Cette méthode est utilisée pour des problèmes dont la linéarité est faible.

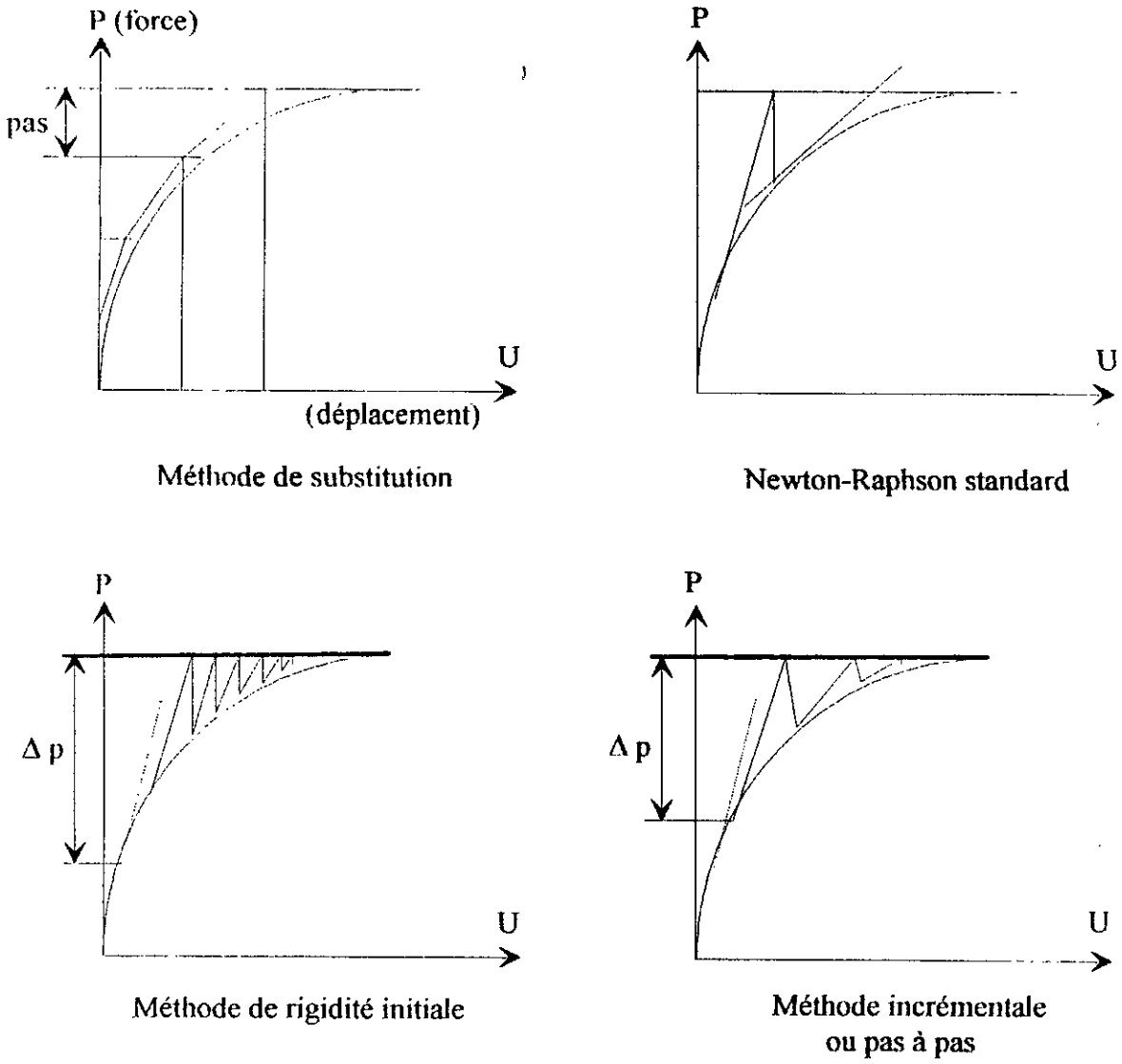


Figure 4.1 : Méthode de résolution numériques.

IV.3. Calcule des forces résiduelles pour un problème élasto-plastique.

Les forces appliquées à la $r^{ème}$ itération sont les forces résiduelles obtenues à l'itération (r-1).

Le calcul de ces forces est basé sur la méthode des "contraintes initiales"

IV.3.1. Méthode des "contraintes initiales".

La méthode présentée en [14] consiste à calculer le résidu à chaque itération à partir de l'état de contrainte résiduelle, en calculant la différence entre les contraintes issues du calcul élasto-plastique et les contraintes élasto-plastiques vérifiant le critère de plasticité.

Les étapes de calcul se présentent comme suit :

Pour l'incrément $\{dF\}$ de charge :

Pour le problème en multicouche, les étapes de calcul sont les suivantes :

1/ Résolution du système :

$$\left(\Delta d_i^{(r)}\right) = \left[K_{T_{ij}}^{(r-1)}\right]^{-1} \Psi_i^{r-1}$$

2/ Calcul des déformations et contraintes :

$$\left(\Delta d_i^{(r)}\right) \rightarrow \left(\Delta \varepsilon_i^{(r)}\right)_f = 3[\beta_{ij}]_f \left(\Delta d_i^{(r)}\right) + 3[\beta_{ij}]_f^L \left(\Delta d_i^{(r)}\right)$$

$$\rightarrow \left(\Delta \sigma_i^{(r)}\right)_f = D_f.\left(\Delta \varepsilon_i^{(r)}\right)_f$$

$$\left(\Delta d_i^{(r)}\right) \rightarrow \left(\Delta \varepsilon_i^{(r)}\right)_c = [\beta_{ij}]_c \left(\Delta d_i^{(r)}\right)_i$$

$$\rightarrow \left(\Delta \sigma_i^{(r)}\right)_c = [D_c].\left(\Delta \varepsilon_i^{(r)}\right)_c$$

3/ Calcul élasto-plastique :

On calcule la contrainte totale et la déformation totale par accumulation des incréments de contraintes.

$$(\Delta\sigma_i)_f^{(r)} = (\Delta\sigma_i)_f^{(r-1)} + (\Delta\sigma_i)_f^{(r)}$$

$$(\Delta\sigma_i)_c^{(r)} = (\Delta\sigma_i)_c^{(r-1)} + (\Delta\sigma_i)_c^{(r)}$$

Pour la déformation totale :

$$(\varepsilon_i)_f^{(r)} = (\varepsilon_i)_f^{(r-1)} + (\Delta\varepsilon_i)_f^{(r)}$$

4/ On calcule les efforts de cisaillement ainsi que les moments, d'où les forces résiduelles :

$$\Psi_i^{(r)} = \int_{A^c} \left((B_{ij})_j^T . M_i^{(r)} + (B_{ij})_c^T . Q_i^{(r)} \right) dx.dy - F_i$$

5/ A l'itération $r = r + 1$, on incrémente la charge :

$$F_i^{(r+1)} = F_i^{(r)} + \Delta F_i^{(r+1)}$$

On pose :

$$\Psi^{(r+1)} = \Delta F_i^{(r+1)}$$

On répète les calculs jusqu'à la convergence.

Pour le problème monocouche, les étapes du calcul restent identiques à celles de l'approche multicouche, la seule différence est dans le fait que le calcul se fait en termes de variables généralisées :

$$\{\varepsilon_i\} \text{ devient } \{X_i\}$$

et

$$\{\sigma_i\} \text{ devient } \{M_i\}$$

(Calcul établis par rapport à l'unité d'épaisseur).

IV.3.2. Test de convergence.

Le calcul itératif s'arrête lorsque le critère de convergence est satisfait. Le critère peut être basé :

- soit sur le rapport des forces résiduelles et la norme des forces calculées, qui doit être inférieur à une certaine tolérance préalablement fixée, d'après la précision requise [9].

$$\frac{\sqrt{\Psi_i^{(r)}.\Psi_i^{(r)}}}{\sqrt{F_i^{(r)}.F_i^{(r)}}} \times 100 \leq T_0 \qquad \text{(IV.9)}$$

- ou bien la norme des accroissements de déplacement [9]

$$\frac{\left[\sum_i \left(\omega_i^{(r)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\sum_i \left(\omega_i^{(r+1)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \times 100 \leq T_0 \qquad \text{(IV.10)}$$

Tel que :

- ω_i représente les variables nodales w_i, β_{x_i}, β_{y_i}.

Il est évident que le choix de la tolérance T_0, influe d'une manière significative sur la vitesse de convergence des calculs. Pour notre part, on a pris une erreur de 1 % qui s'est avérée acceptable dans une certaine mesure par rapport aux résultats obtenus.

IV.3.3. Vérification du critère de plasticité.

Elle consiste à corriger le calcul des résidus en tenant compte de l'admissibilité plastique du champ de contraintes obtenu.

Dans le cas ou le critère n'est pas vérifié en un certain point, on se redistribue le surplus de contraintes qui viole le critère de manière à faire apparaître les déformations plastique et satisfaire la condition d'équilibre.

IV.3.4. Calcul des déformations plastiques et contraintes réelles.

Ce calcul est introduit après le calcul présenté dans le (paragraphe IV.3.1) à l'étape (2) du calcul de $\{\Delta X_p\}_i^{(r)}$ et $\{\Delta M_i\}^{(r)}$ plastiquement admissible.

- A chaque itération, on suppose un comportement élastique, et on calcule $(X_i)^{(r)}$ et $\left(\Delta M_i^{(r)}\right)$.

Les équations d'équilibre sont satisfaites, mais pour :

$$(M_i)^{(r)} = (M_i)^{(r+1)} + (\Delta M_i)^{(r)}$$

Le critère de plasticité peut donner les résultats suivants :

- $F(\{M\}) < 0$: on reste dans la limite du domaine élastique, le calcul effectué est donc correcte (fig. IV.1).
- $F(\{M\}) > 0$: une plastification c'est produite à ce niveau du calcul supposé élastique. Donc ce dernier doit être rectifié par un paramètre R tel que :

$$F\left((M)^{(r-1)}\right) < 0 + R(\Delta M_i)^{(r)} = 0$$

Pour satisfaire l'équation d'équilibre, $(1-R)(\Delta M_i)^{(r)}$ est "rabattu" sur la surface d'écoulement, en faisant ainsi apparaître la déformation plastique (Fig. IV.1)

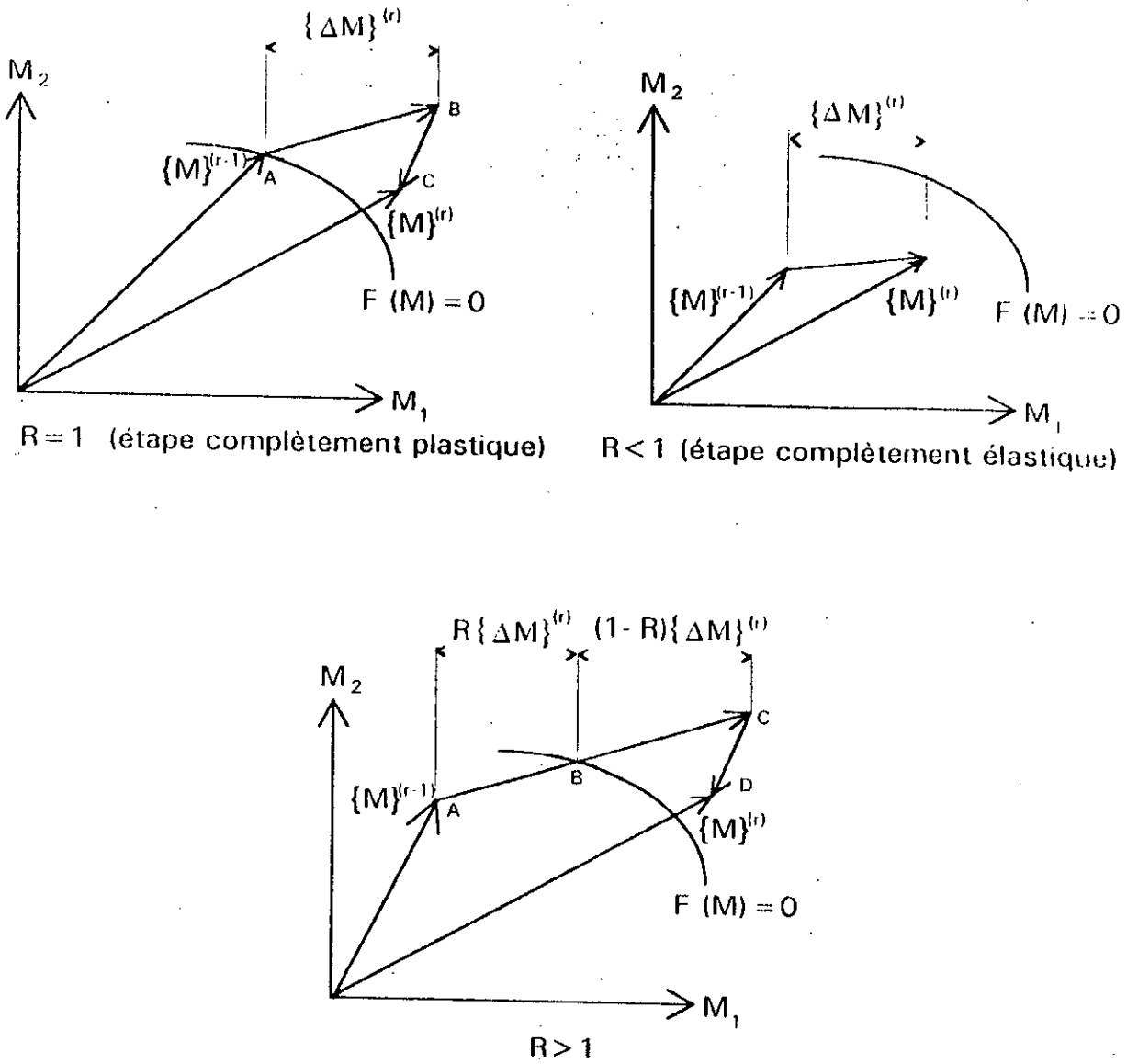


Figure IV.1 : Détermination du facteur de correction R

CHAPITRE V :
APPLICATION DU CODE DE CALCUL ET PRÉSENTATION DES RÉSULTATS.

V.1. Introduction.

Dans ce chapitre, on présente les résultats de calculs numériques d'une plaque soumise à un pliage en V modélisé par une flexion 3 points élasto-plastique.

Les hypothèses simplificatrices que nous avons adopté sont les suivantes :

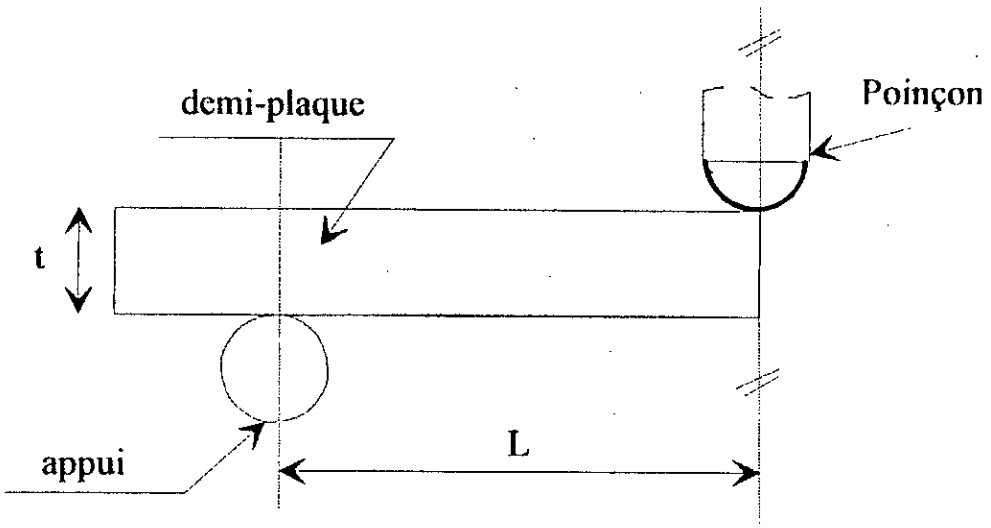
- L'épaisseur se platifie entièrement et instantanement dés que le niveau de chargement ateint la limite élastique (approche monocouche)
- Chargement instantané.
- Poinçon à angle vif, modélisé par un chargement linéaire.
- Appuis à angle vif.
- Frottements négligeables.

Les paramètres considérés sont :

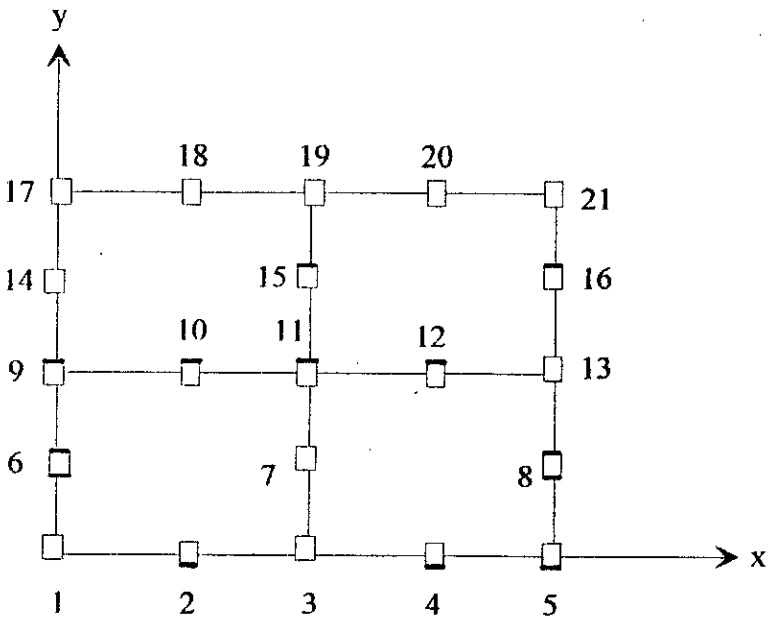
- L'influence du choix de la méthode.
- L'influence du critère de plasticité.

Nous notons dans cette partie , que vu le manque de documentation, nous n'avons pu élargir notre champ d'application pour pouvoir valider nos résultats.

V.2. Simulation du pliage en V :



(Fig. 5.2.1) : Schéma de plaque soumise à une flexion 3 points (Pliage en V).



(Fig. 5.2.2.) : Représentation nodale de la demi-plaque.

Dans la figure (5.2.3) est représenté le déplacement du noeud du milieu de la plaque en fonction de la charge appliquée, ainsi que les résultats de J. W. Joo et B.M. Kwak [15]

Données numériques :

- $E = 206\ G.Pa$
- $\nu = 0.3$
- $\sigma_y = 552\ M.Pa$
- $\sigma_D = 676\ M.Pa$
- $n = 0.69$
- Largeur de la plaque $L = 200\ mm$
- Largeur $w = 40\ mm$
- Epaisseur $k = 8\ mm$
- Largeur entre-appuis $= 160\ mm$

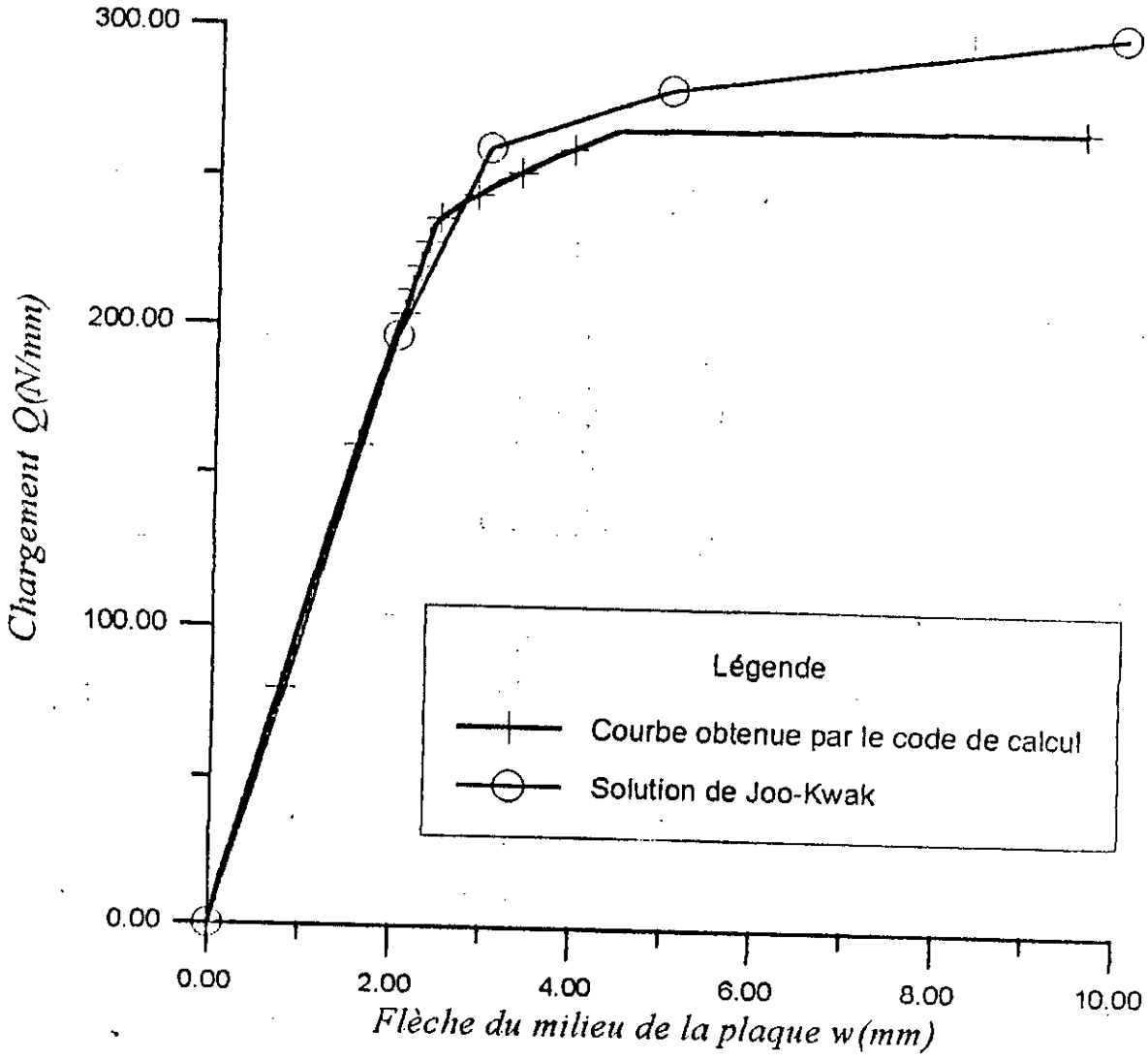


Figure 5.1.3: Plaque soumise à une flexion 3 points.

Flèche du milieu de la plaque.

On note que pour les résultats de Joo-Knak, les hypothèses sont un peu différentes, et sont les suivantes :

- L'épaisseur se plastifie graduellement.
- Changement évoluant en fonction du temps.
- Poinçon arrondi (surface de chargement variable au cours du temps).
- Appyis arrondis.
- Frottements négligeables.

C'est en autre choses, les éléments qui peuvent expliquer l'écart des résultats.

V.3. Comparaison des résultats en petites et grandes déformations.

La figure (5.3) montre les résultats des 2 approches du problèmes, à savoir :

- Hypothèses des petites déformations.
- Hypothèses des grandes déformations.

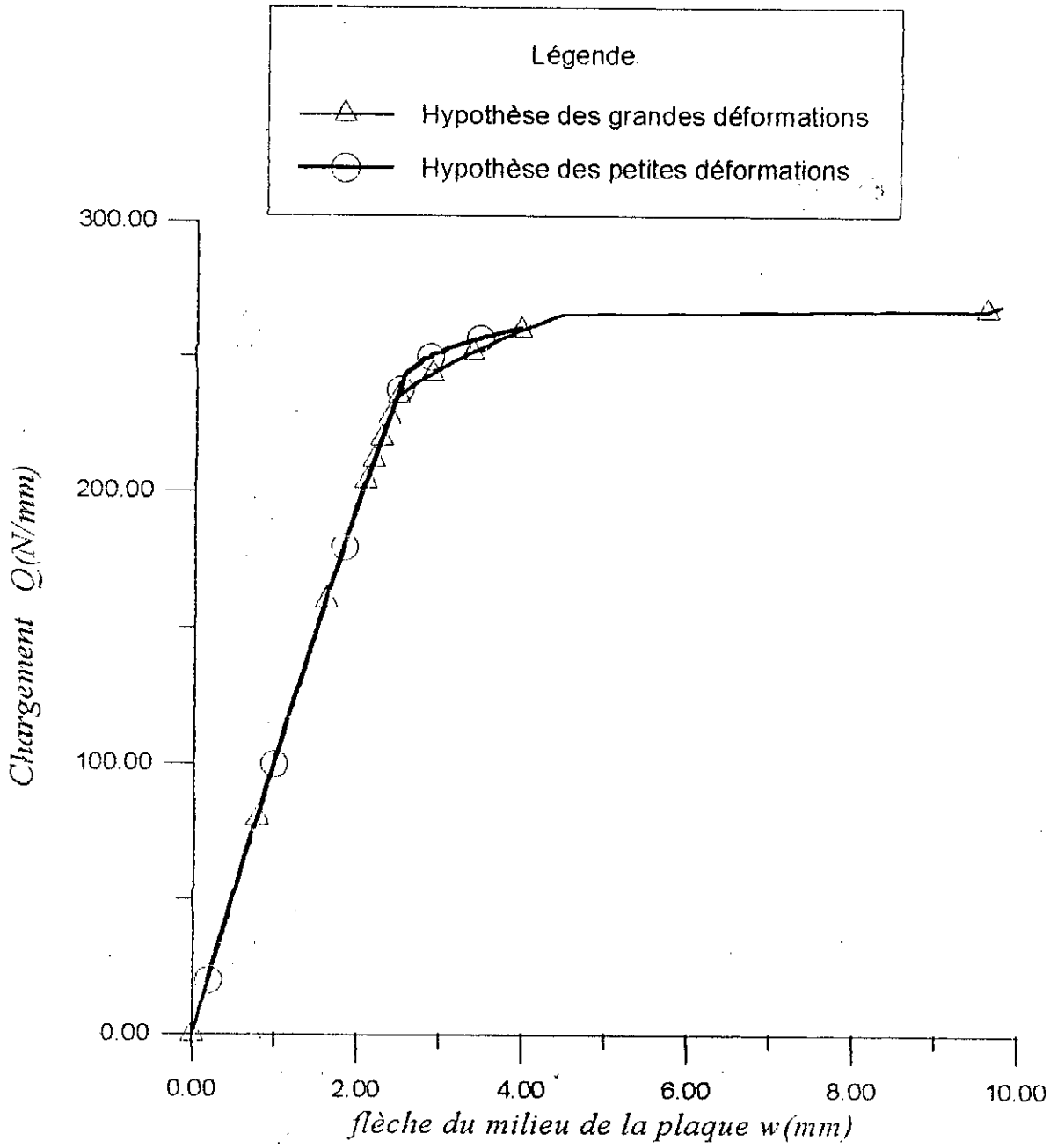


Figure 5.3 : Comparaison entre les hypothèses des petites et grandes déformations.

D'après la figure, on voit bien que la théorie des petites déformations au delà d'un certain niveau de contrainte ne peut simuler le phénomène de pliage.

V.4. Déformée avant et aprés décharge.

Nous avons tracé dans la figure (5.4) le profil de ligne médiane de la plaque qui correspond à différents niveaux de chargement, ainsi que l'allure de plaque après décharge.

On constate ainsi l'évolution de la plaque au cours du pliage.

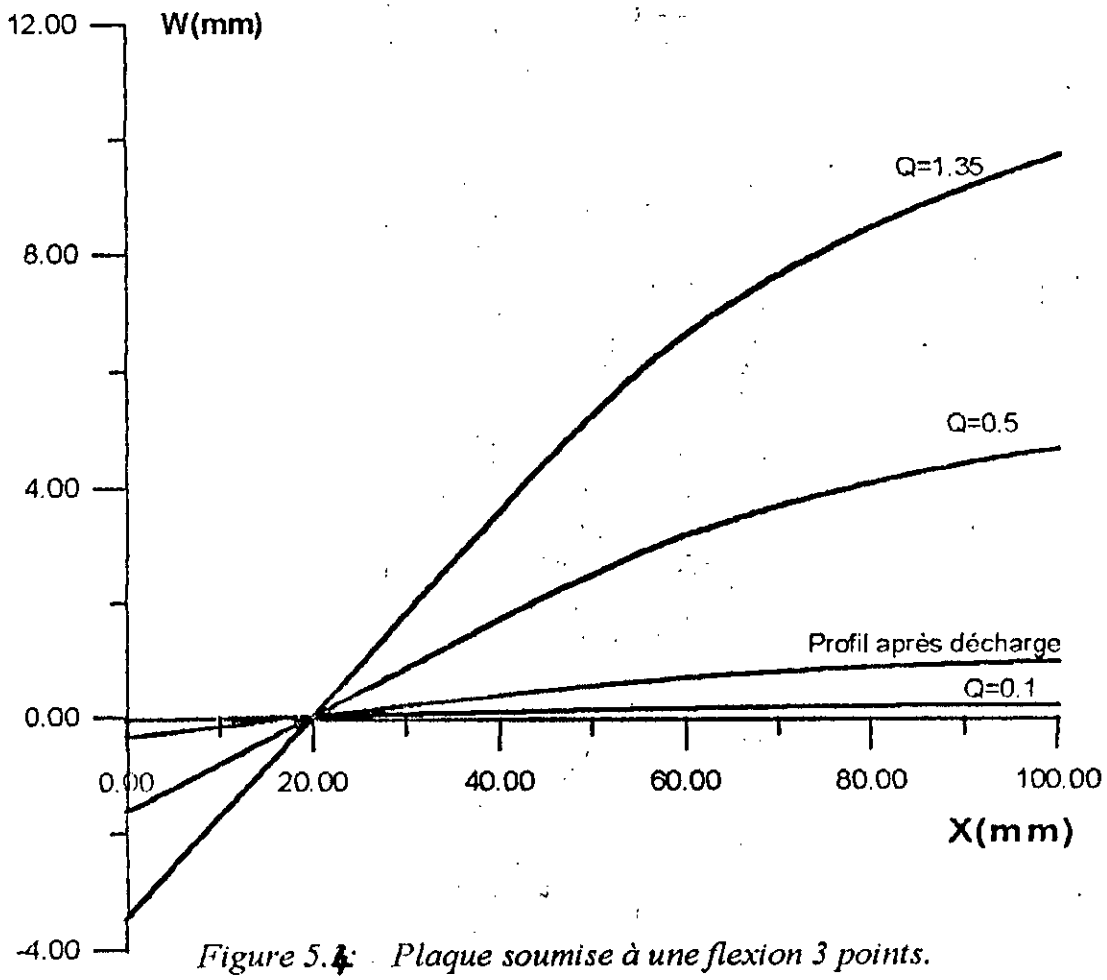


Figure 5.4 : Plaque soumise à une flexion 3 points. Profil de la ligne mediane pour différents niveaux de chargement.

V.5. Evolution des zones plastiques.

Les figures (5.5.1) à (5.5.4) représentent l'évolution des zones plastiques dans la plaque qui correspondent à differents niveaux de chargement.

Les figures illustrent les lignes d'isovaleurs des déformations plastique cumulées, nous pouvons constaté, ainsi, que la plastification commence au milieu de la plaque et progresse vers les appuis.

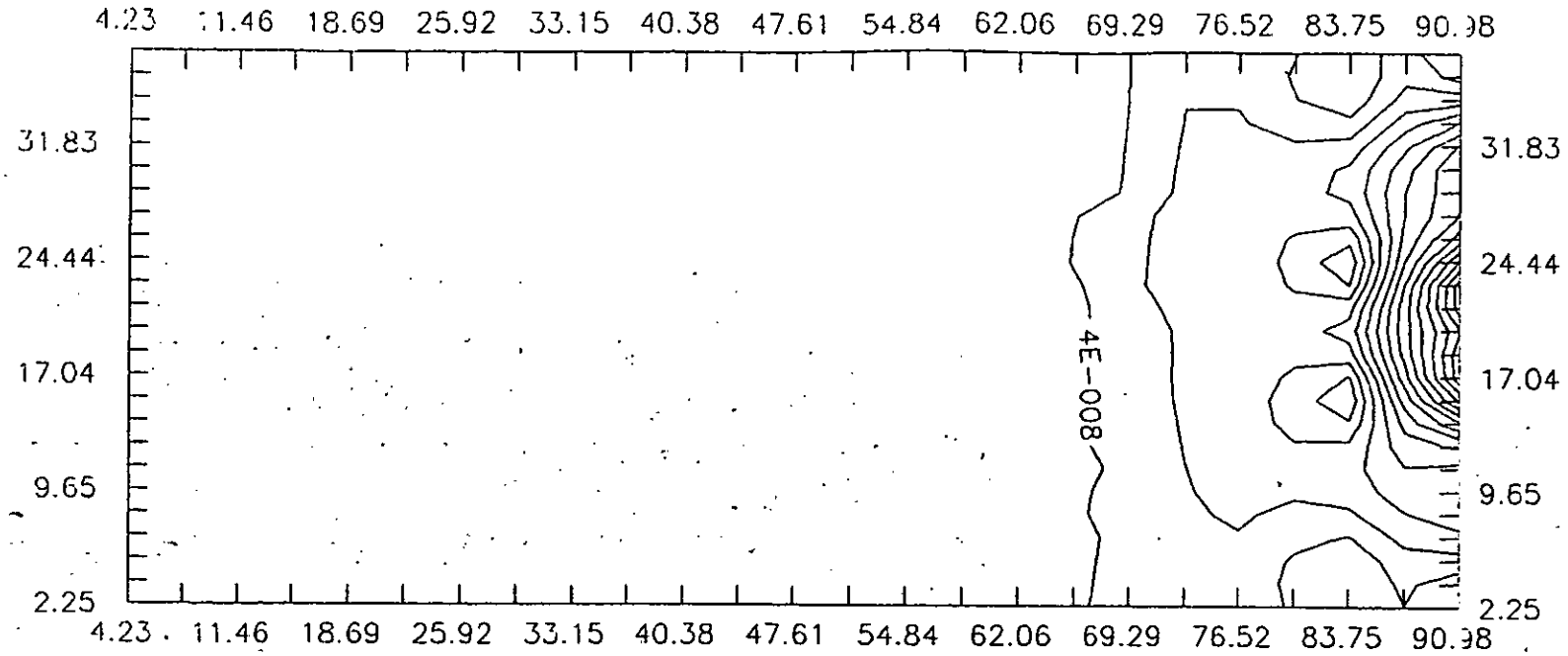


figure 5. 5. 1 : Plaque rectangulaire avec chargement lineaire. Evolution des zones plastiques Q=234

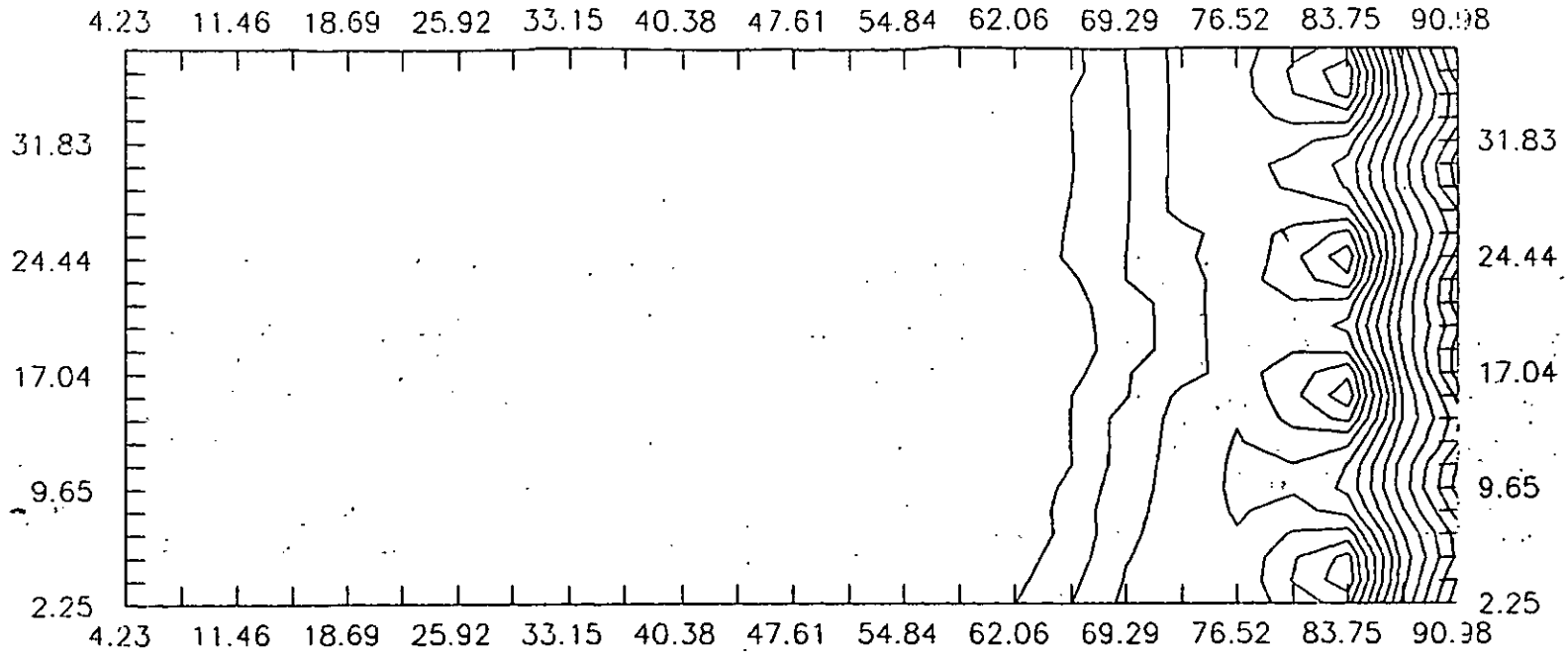


figure 5. 5. 2: Plaque rectangulaire avec chargement lineaire.
Evolution des zones plastiques Q=244

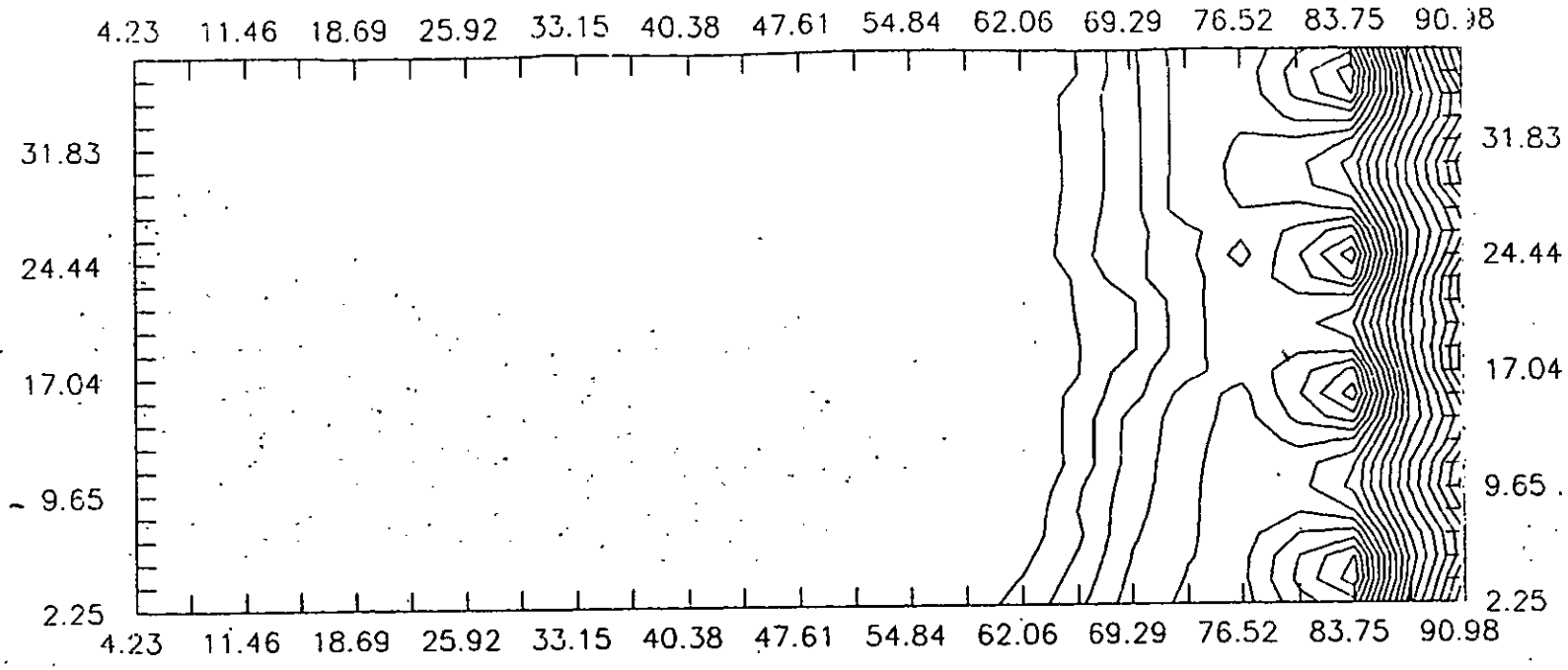


figure 5. 5. 3: Plaque rectangulaire avec chargement lineaire.
Evolution des zones plastiques Q=260

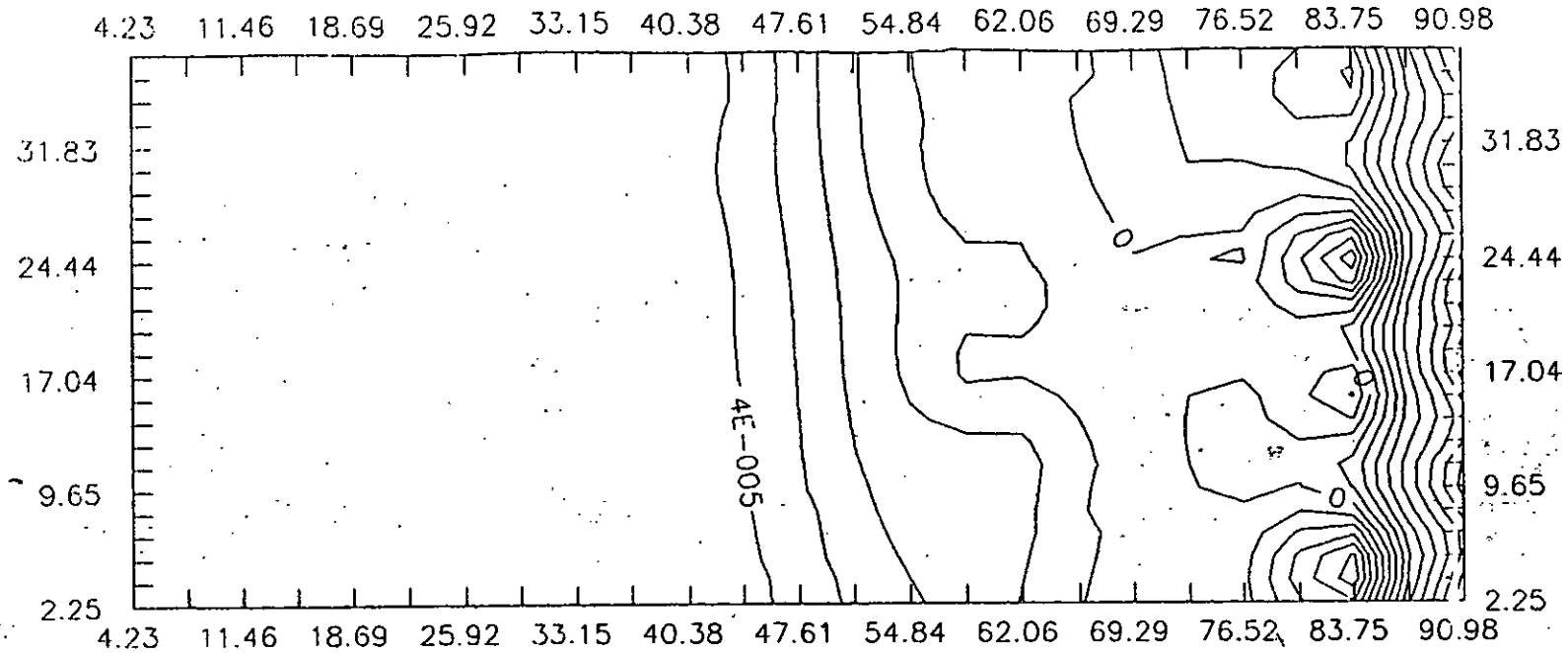


figure 5. 5. 4: Plaque rectangulaire avec chargement lineaire. Evolution des zones plastiques Q=300

V.6. Détermination de la course maximale à atteindre.

Dans la figure (5.6), nous avons tracé la flèche du milieu de la plaque c.à.d. du poinçon en fonction de la charge appliquée, jusqu'à la limite de divergence, c.à.d., que si on continue le chargement il y aura risque de rupture, donc d'apès la figure, le déplacement possible sans rupture doit être inférieur à 10 mm.

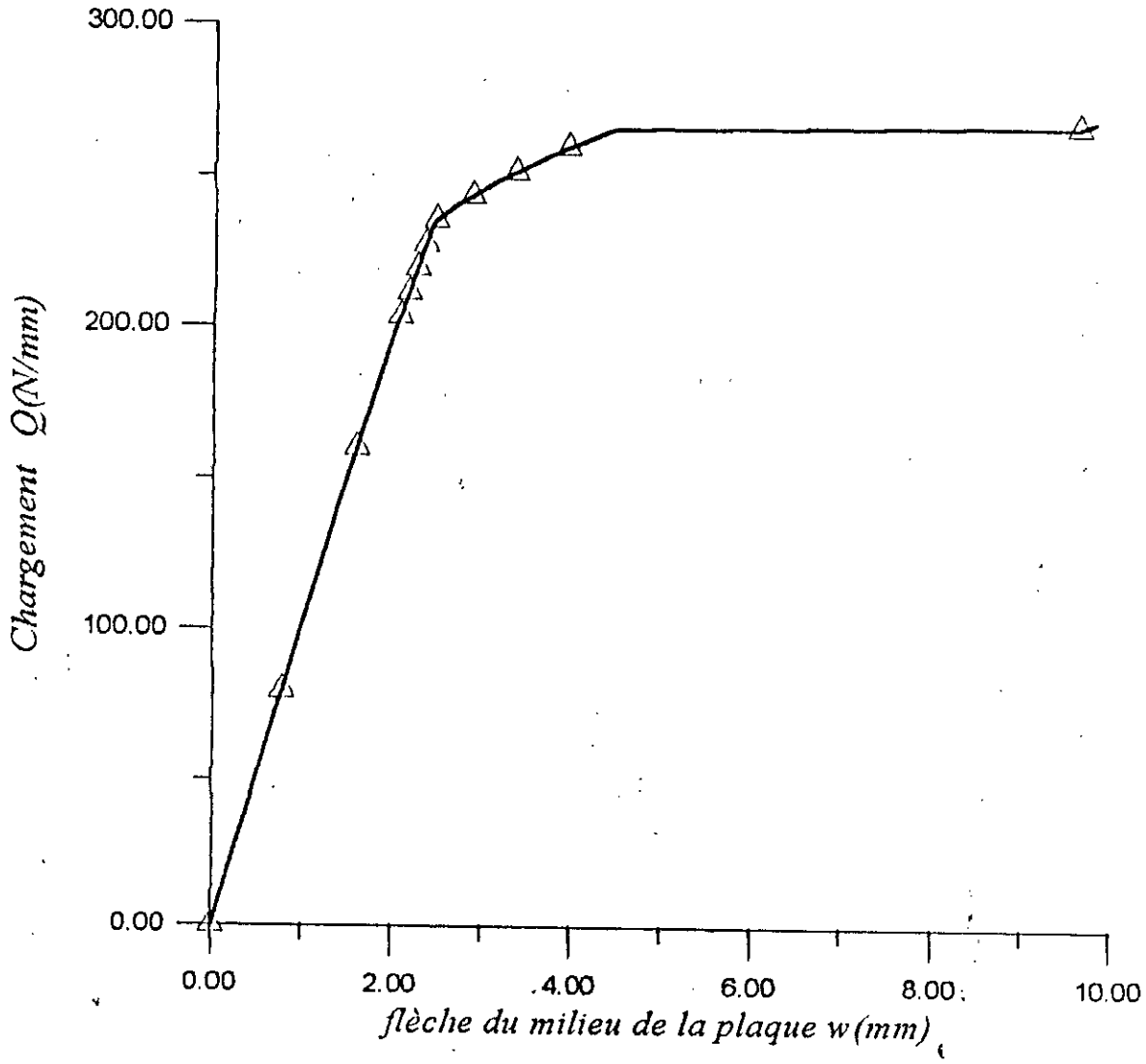


Figure 5.6 : PLaque soumise à une flexion 3 points.

Limite de divergence.

V.7. Influence de quelques paramètres.

V.7.1. Choix de la méthode de résolution.

Du fait de la nature du problème étudié à savoir le problème élasto-plastique et les grands déplacements, nous aurons à résoudre des systèmes d'équations non linéaires qui nous suggèrent l'utilisation de méthodes itératives de résolution.

- Dans notre application, notre choix s'est porté sur la méthode des rigidités tangentielle, plutôt que sur la méthode incrémentale (au pas à pas) qui était tout aussi envisageable.
- Dans la méthode tangentielle le calcul des rigidités élémentaires se fait à chaque itération, alors que dans la méthode incrémentale, le calcul ne se fait qu'à la première itération de chaque incrément.

La figure (5.7.1) illustre l'influence de la méthode de résolution, par le tracé de la flèche au milieu de la plaque en fonction de la charge appliquée.

Du fait de la symétrie de la plaque, le discrétisation s'est limitée à la demi-plaque.

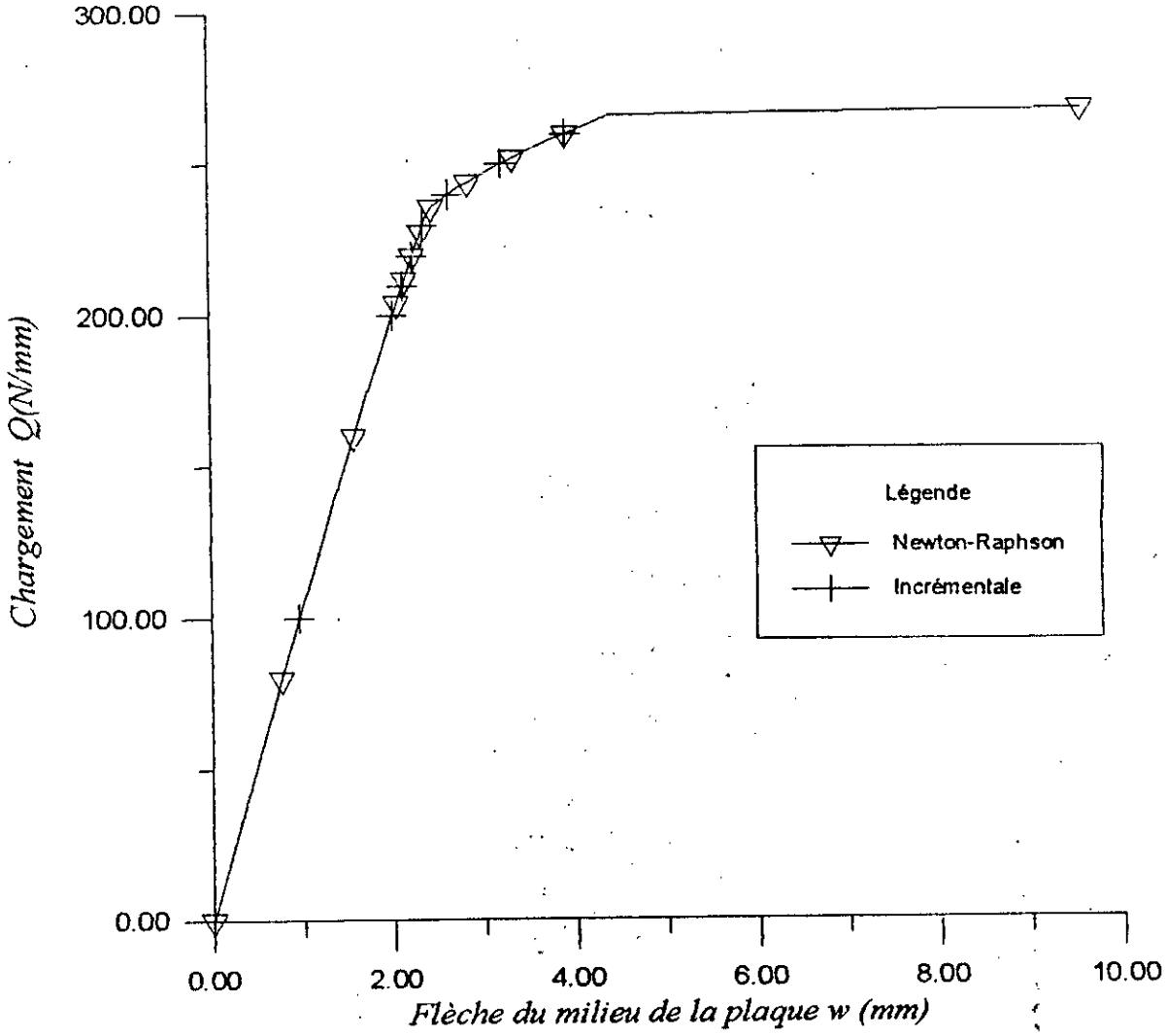


Figure 5.71 Plaque rectangulaire simplement supportée.

Influence de la méthode de resolution.

D'après la figure (5.7.1.), on voit bien que les 2 méthodes aboutissent sur des résultats très sensiblement différents, seulement la méthode incrémentale réduit le temps de calcul au dépend de la vitesse de convergence, par contre la méthode des rigidités tangentielles augmente le temps de calculs mais en prenant des incréments de charge assez faibles, la convergence est atteinte relativement vite.

De plus, en présence d'une forte non-linéarité comme pour les cas des grands déplacements, il est recommandé d'utiliser la méthode des rigidités tangentielles. [13]

V.7.2. Influence du critère de plasticité.

La figure (5.7.2) illustre l'influence du critère de plasticité, par le tracé de la flèche en fonction de la charge, pour les deux critères.

On voit bien que les résultats sont en conformités avec la théorie (figure 5.2) qui montre les surfaces de charge de Von-Mises (cylindre) passe par les sommets de l'hexagone qui correspond à la surface de charge pour le critère de Tresca.

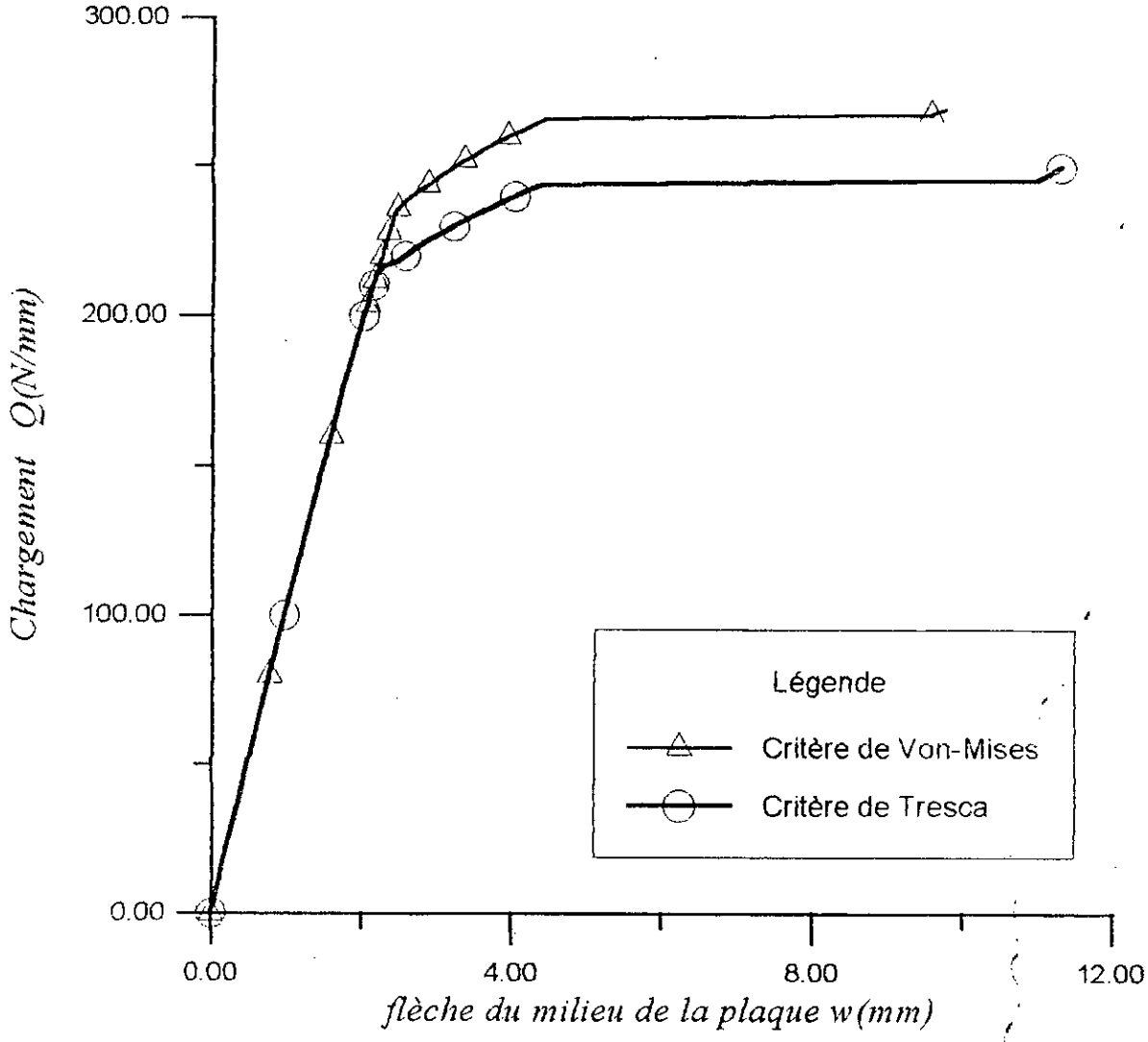


Figure 5.7.2 : PLaque soumise à une flexion 3 points:

Influence du critère de plasticité.

Remarques.

- Durant le calcul, nous avons remarqué que le nombre d'itérations augmente au fur et à mesure que la plasticité progresse dans la structure, ce qui nous suggère de prendre des incréments de plus en plus faibles au cours de la plastification, réalisant ainsi la convergence du calcul itératif.
- On constate également que le test de convergence basé sur la norme des forcess résiduelles, permet une convergence plus rapide que le test de convergence basé sur la norme des déplacements en prenant la même tolérance, et cela en ayant les mêmes résultats.

V.8. Conclusion.

D'après la figure (5.5) on peut voir l'état de déformation de la structure pour un niveau de chargement donné, et de ce fait localiser les zones dangereuses de rupture possible.

- La prise en compte des grandes déformations est nécessaire pour la simulation de la mise en forme des métaux par déformation plastique.
- On constate également, que d'après les résultats obtenus, les zones de déformations plastiques qui évoluent progressivement commencent en général à partir des zones de chargement (dans notre cas, du milieu de la plaque) et se propagent ensuite vers les autres zones de la plaque.
- Il convient aussi de remarquer que l'évolution de plasticité n'est pas linéaire, c.à.d. qu'au bout d'un certain temps, elle s'arrête, sans pour autant recouvrir la totalité de la plaque. Ceci peut s'expliquer par le fait que le seuil de chargement atteint presque le seuil de rupture, tandis qu'ailleurs l'effet élastique est encore présent :

  Par rapport à l'exemple traité, la vitesse de convergence est relativement satisfaisante, compte tenu de la précision exigée ainsi que le nombre d'incréments fixé.

CONCLUSION GLOBALE.

Conclusion globale.

Il est claire que la connaissance du comportement des matériaux est d'une importance vitale, dans le domaine de la construction mécanique, métallique en particulier, car on doit le plus souvent réaliser des déformations permanentes des tôles, c.à.d. aller au delà de la limite élastique des matériaux. Pour cela, on doit être capable d'évaluer l'état de déformation des structures en occurrence des tôles, en ce qui concerne le pliage.

Nous avons donc réalisé un programme informatique de calcul par éléments finis de champs de déformations élasto-plastique de structures bidimentionnelles se présentant sous forme de plaques modélisées par des éléments rectangulaires à huit et neuf noeuds selon une approche monocouche.

Le programme nous permet donc d'évaluer les déformations plastiques, ainsi que leur progression dans la structure et par conséquent la connaissance des zones dangereuses qui peuvent conduire à une rupture.

L'analyse par éléments finis nous permet donc de modéliser des structures et d'évaluer leur état de déformation.

La répetetivité des calculs par éléments finis au niveau élémentaire ainsi que la nature incrémentale du problème étudié font que le calcul numérique peut devenir relativement long.

Le code de calcul nous permet de calculer l'effort de pliage et de localiser les zones ainsi que les courses de poinçons à risque de rupture.

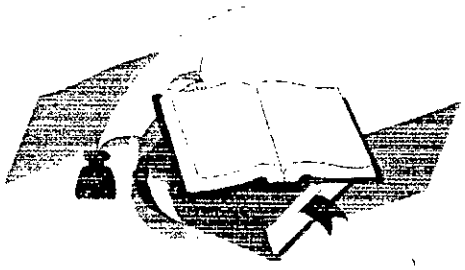
La détermination des zones plastique, conduit à dire qu'on peut poinçonner ou ajourer la tôle avant pliage uniquement au niveau des zones élastiques éventuelles; ce qui permet d'ordonner les opérations de fabrication et par delà, d'organiser la production.

Il serait intéressant d'envisager le calcul entrepris, par une approche multicouche, afin de comparer les résultats avec ceux de l'approche monocouche et de voir les avantages éventuel qu'elle pourrait offrir quant au temps de calcul et sa précision.

Nous envisageons, de plus, le traitement du problème avec la prise en compte des arrondis du poinçon et des appuis, de la course du poinçon (chargement dépendant

du temps) ainsi que les frottements qui surviennent au cours du contact entre la tôle et le poinçon .

Nous souhaitons, enfin que se modeste travail serve d'introduction à l'étude de la simulation numérique de l'emboutissage des tôles, ainsi que les problèmes de flambements pour les éléments coques.



RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

[1] J. L. BATOZ & G. DHATT
"Modélisation des structures par éléments finis"
Vol. 2. 'Plaques et Coques', 1990.

[2] T. Z. BLAZINSKY
"Applied elasto-plasticity of solids.
London : Macmillan, 1983

[3] MABROUK BEN TAHAR
"Analyse élasto-plastique des plaques et coques minces par éléments finis."
Thèse Doctorat troisième cycle. U.T. COMPIENE., 1981

[4] W. F. CHEN & D. J. HAN
"Placticity of structural Engineers."
Springer-Verlag New York Inc, 1988.

[5] R. D. COOK & D. S. MALKUS & M. E. PLESHA
"Concepts and applications of finite element analysis."
John WILEY and Sons, 1989.

[6] G. DHATT & G. TOUZOT
"Une présentation de la méthode des éléments finis."
MALOINE S. A., 1984.

[7] J. F. IMBERT
"Analyse des structures par éléments finis."
2ème édition, 1979.

[8] P. JOLY
"MODULEF : Méthode frontale."
I.N.R.I.A. ROCQUENCOURT, 1985.

[9] D. R. J. OWEN & E. HINTON
"Finite elements in plasticity : Theory and practice."
Pineridge Press Limited. SWANSEA. U. K., 1980.

[10] D. SAADOUN
"Etude des champs de déformation élasto-plastique et élasto-viscoplastique en fond d'entaille."
Thèse de MAGISTER. E.N.P., 1993.

[11] Mr L. NECIB et Mr K. ZERFAOUI.
Etude de la flexion des plaques en elasto-plasticité et modélisation par éléments finis.
P.F.E. E.N.P. 1994

[12] P. PAPADOPOULOS & R. L. TAYLOR
"Elasto-plastic analysis or Reissner-Mindlin plates."
Appl Mech Rev, Vol. 73, Part 2, May 1990

[13] O. C. ZIENKIEWICZ & R. L. TAYLOR
"The finite element methode."
Mc Graw HILL Book Cmpany, 1989.

[14] O. C. ZIENKIEWICZ & S. VALLIAPPANT & I. P. KING
"Elasto-plastic solution of engineering problems 'initial stress', finite element approch."
I. Jornal for Numerical Method in Enginneerng, Vol: 1, 1969.

[15] Joo J. W. and Kwak B. M.
Simulation of three point Bending at large deflection by an elasto-plastic contact analysis.