

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Ecole Nationale Polytechnique
Département de Génie Civil
Laboratoire génie parasismique et dynamique des structures

Mémoire de fin d'études
en vue de l'obtention du diplôme :
d'Ingénieur d'état en Génie Civil



**Couplage mécano-fiabiliste pour la vérification des structures en
béton :**

Cas d'un pont réparé.

Présenté par:
M^{lle} AÏSSANI Amina

Directrice de mémoire :

M^{me} D. CHERID
M^r R. LAGGOUNE

ENP Alger.
Université A. MIRA, Béjaia.

Promotion 2010/2011

ملخص :

الهدف من هذا العمل هو استعمال تقنية جديدة تعمل على أخذ بعين الاعتبار الإرتيابات التي تأثر على ضمان البناءات. و لهذا الغرض، تم ربط بين نماذج ميكانيكية و أسس رياضية باستعمال طريقة التحليل فورم، للتأكد من ضمان أمن جسر مرمم ببسكرة. مكن هذا التحليل من الإستنتاج أن هذا الجسر صالح و أن الإصلاح الذي تم باستعمال طريقة الشد الخارجي كان ناجعا، و لكن لم يُمكن من استرجاع الرافدة المهينة وثقها الأصلي. ومن خلال تحليل تحسيبي على الإرتيابات المتعلقة بالخرسانة، تم ملاحظة أن البناء يتأثر سلبيا من تحويلية كزازة الخرسانة.

الكلمات المفتاحية : إقتران الموثوقية والميكانيكية، معامل الضمان، جسر، الشد الخارجي، الإرتيابات.

Résumé :

Ce travail a pour objectif d'utiliser une méthodologie basée sur un couplage mécano-fiabiliste pour l'analyse de la fiabilité d'un pont en béton précontraint situé à Biskra. Ce pont a été dégradé en 2004 à la suite d'un choc, puis réparé quelques années plus tard. Le couplage mécano-fiabiliste est basé sur un dialogue entre deux codes de calculs l'un mécanique basé sur la méthode des éléments finis et l'autre fiabiliste. Ce dialogue mécano-fiabiliste est assuré à l'aide d'un algorithme d'optimisation basé sur l'approximation FORM (First Order Reliability Method).

Les résultats de cette étude ont permis d'affirmer que les éléments structuraux (poutres) du pont de Biskra vérifient les conditions de résistance et que la réparation par précontrainte extérieure a permis d'améliorer la fiabilité de la poutre dégradée sans toutefois la remettre à son état original. Une analyse de sensibilité sur les variables de conception étudiées a également permis de montrer que la variable liée au matériau (module de Young) influe considérablement sur la performance des structures.

Mots clés : Couplage mécano-fiabiliste, Indice de fiabilité, Pont, Précontrainte extérieure, Incertitudes.

Abstract:

The aim goal of this work is to use a new methodology based on a coupling between reliability methods and the finite element models, to evaluate the reliability of a bridge based in Biskra. This bridge has been repaired after a shock using external prestressing.

The coupling used, has been done using an approximation by gradient. In our case, we have done it with the First Order Reliability Method (FORM).

This analysis permitted us to affirm that all the beams of the bridge verify the resistance conditions. Besides, it has also shown that the reparation used hadn't given back the damaged beam its original resistance.

Last but not least, a sensitivity analysis made us notice that the performance of the structure is badly influenced by the variability of the material.

Keywords: Reliability-mechanical Coupling, Reliability index, Bridge, External prestressed, Uncertainties.

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier ma directrice de mémoire, Madame D. CHERID, pour son encadrement, son aide morale et matérielle, sa disponibilité, et pour la confiance qu'elle m'a toujours témoignée.

Toute ma gratitude s'adresse à mon co-directeur, Monsieur R. LAGGOUNE du Laboratoire LAMOS - Université de Béjaïa, pour avoir su me motiver et me pousser à bout. Je voudrais également le remercier de m'avoir transmis, à moi, un bout de ses connaissances, d'avoir toujours essayé de me convaincre, parfois même pendant des heures, mais qui passaient finalement à chaque fois si vite. Pour ses encouragements, pour sa confiance et pour son encadrement de qualité.

Merci également au Professeur A. CHATEAUNEUF et au Dr S. BELKACEMI pour leurs orientations pertinentes.

De même, je remercie Mr A. SEGHIR et Mr S. ADJABI, enseignants à l'Université de Béjaïa, pour leur aide précieuse chacun dans son domaine, sans oublier les adhérents du Club Scientifique de Recherche Opérationnelle (SCOR).

J'exprime ma gratitude au Professeur B. TILIOUINE pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider ce jury. Mes vifs remerciements vont également au professeur M. HAMMOUTENE ainsi qu'à Mr S. LAKHAL pour avoir pris un peu de leur précieux temps pour examiner ce travail.

Je suis reconnaissante à Mr DJERIR, chef de projet à la SAPTA, pour sa contribution et pour sa participation au jury en tant que membre invité.

*Enfin, un **Merci** spécial à tout ceux qui ont participé de près ou de loin à ma formation, tout particulièrement mes enseignants de spécialité.*

Dédicace

J'aimerais dédier ce travail tout d'abord

- *A mes parents :*

Ma maman toujours présente, toujours prête à aider, toujours prête à donner sans compter tout ce qu'elle a pour le bonheur de ses enfants. A ma petite maman qui a su supporter mon caractère parfois si froid, MERCI maman.

A mon papa, qui m'a toujours fait confiance. A mon modèle, qui a toujours su me rassurer et être là quand j'en avais le plus besoin. A l'homme qui m'a tout donné, MERCI !

- *A mes chères petites sœurs :*

A la numéro 2 : Yasmine, la panique !

A la numéro 3 : Myriam, mon âme sœur.

Et à la numéro 4 : ma douce Camille.

- *A la mémoire de mes deux grands-pères.*
 - *A mes deux grands-mères.*
- *A une personne très chère à mon cœur, qui a toujours été là dans les bons moments comme dans les mauvais, qui m'a aidé, accompagné, soutenu et encouragé à chaque étape, Merci.*
 - *A tous mes oncles, tantes, Petits cousins et cousines.*
- *Enfin, je ne pourrais pas finir sans remercier, Idris (mon demi-frère de coeur) pour son aide, ses encouragements et mes crises de stress qu'il a su gérer.*

*Mes amis : Mamoul, Chaima, Zaki, Yakin, Mehdi, Aïmed et Imen.
(en la mémoire de Abdenour dit Ezemri qui a toujours été là pour moi).*

Ainsi que toute la promotion de Génie civil, tout particulièrement les BOHO et Mouloud avec qui j'ai passé des moments inoubliables.

Table des matières

Introduction Générale	1
CHAPITRE I : Méthode des éléments finis	2
I.1. Introduction	2
I.2. Historique	3
I.3. Les éléments finis et le génie civil	4
I.4. Avantages de la méthode des éléments finis	4
I.5. Etapes pratiques du calcul par éléments finis	5
I.6. Approximation par éléments finis	5
I.6.1. Approximation nodale	5
I.6.2. Approximation par éléments finis	7
I.7. Formulation intégrale	7
I.8. Construction de l'espace d'approximation	7
I.8.1. Discrétisation du domaine	7
I.8.2. Les méthodes de maillage	10
I.9. Construction des fonctions d'approximation sur un élément	10
I.10. Méthode de construction des fonctions d'interpolation	10
I.10.1. Élément de référence	10
I.10.2. Approximation sur un élément de référence	11
I.10.3. Erreur d'approximation sur un élément	11
I.10.4. Amélioration de la précision d'approximation	12
I.11. Présentation matricielle de la méthode des éléments finis	12
I.11.1. Construction des matrices élémentaires	12
I.11.2. Assemblage des matrices élémentaires en matrice globale	12
I.12. Conclusion	13
CHAPITRE II : Fiabilité des structures	14
II.1. Introduction	14
II.2. Historique	15
II.3. Intérêt d'une analyse fiabiliste	16
II.4. Terminologie et Jargon	16

II.5. Fiabilité des structures.....	17
II.5.1 : Première approche de la fiabilité mécanique.....	17
II.5.2. Notions de base.....	18
II.5.3. Transformation probabiliste.....	19
II.5.3.1. Transformation isoprobabiliste.....	19
II.5.3.2. Transformation de Rosenblatt.....	21
II.5.3.3. Transformation de Nataf.....	21
II.5.3.4. Transformation de la fonction d'état limite.....	22
II.5.4. Méthodes de recherche du point de conception.....	22
II.5.4.1. Approximation par un hyperplan : FORM (First Order Reliability method)	22
II.5.4.2. Approximation par surface quadratique: SORM (Second Order Reliability Method).....	23
II.5.5. Méthodes de simulation.....	25
II.6. Mesures de sensibilité.....	27
II.7. Fiabilité des systèmes mécaniques.....	28
II.7.1. Arbre de défaillance.....	28
II.7.2. Modélisation des systèmes pour le calcul de la fiabilité.....	29
II.7.3. Bornes de la probabilité de défaillance d'un système.....	31
II.8. Conclusion.....	31
CHAPITRE III : Couplage mécano-fiabiliste.....	32
III.1. Introduction.....	32
III.2. Propagation de l'aléa dans le modèle mécanique.....	33
III.2.1. Transformations mécano-fiabiliste.....	33
III.2.2. Aléas dans le modèle mécano-fiabiliste.....	34
III.2.2.1. Aléas externes.....	34
III.2.2.2. Aléas internes.....	34
III.3. Eléments finis et fiabilité.....	36
III.3.1. Couplage mécano-fiabiliste.....	36
III.3.2. Eléments finis stochastiques.....	37
III.4. Méthode de l'optimisation équivalente.....	38
III.5. Méthodes directes.....	41
III.6. Méthode de surface de réponse.....	42
III.7. Difficulté du couplage mécanique.....	45
III.8. Conclusion.....	46
CHAPITRE IV : Analyse fiabiliste pour l'étude de la flèche d'un échangeur réparé à Biskra.....	47

IV. 1. Introduction.....	47
IV. 2. Rappel.....	48
IV.2.1. Analyse déterministe.....	48
IV.2.2. Analyse probabiliste.....	52
IV.3. Description de l'application.....	55
IV.3.1. Description de l'ouvrage.....	55
IV.3.1.1. Caractéristiques du pont.....	55
IV.3.1.2. Matériaux de réalisation.....	58
IV.3.2. Actions.....	59
IV.3.3. Flèches dues à la précontrainte.....	60
IV.4. Description de l'étude.....	60
IV.4.1. Calcul déterministe (par éléments finis).....	60
IV.4.2. Approche fiabiliste.....	63
IV.4.2.1. Modélisation des variables aléatoires par des lois de densité de probabilité.....	63
IV.4.2.2. Fonction d'état limite.....	65
IV.4.2.3. Recherche du point de conception P*(ou β -point).....	66
IV.4.2.4. Résultats de l'étude.....	69
IV.4.2.5. Analyse de sensibilité.....	71
IV.5. Fiabilité du pont.....	77
IV.6. Conclusion.....	79
CHAPITRE V : Potentiel de l'approche et perspectives.....	80
V.1. Introduction.....	80
V.2. Evaluation temporelle de la fiabilité.....	80
V.2.1. Durée de vie d'un ouvrage.....	81
V.2.2. Prise en compte du temps dans le modèle étudié.....	82
V.3. Méthodes de fiabilité en mécanique.....	82
V.3.1. Calibrations des coefficients partiels.....	83
V.3.2. Maintenance et réparation des ouvrages.....	83
V.3.3. Fiabilité / Coût.....	84
V.4. Conclusion.....	85
Conclusion Générale.....	86
Bibliographie.	
ANNEXE A.	
ANNEXE B.	

Liste des Figures

Figure I.1. Etapes générales de la méthode des éléments finis	4
Figure I.2. Discrétisation d'un domaine (éléments triangulaires).....	7
Figure I.3. Quelques types d'éléments [2,9].....	8
Figure I.4. Nœuds géométriques et de calcul de l'élément K.....	9
Figure I.5. Élément réel et élément de référence	10
Figure II.1. Fiabilité pratique et théorique	17
Figure II.2. Représentation de l'indice de fiabilité β [11].....	20
Figure II.3. Principe de l'approximation FORM, construction de l'hyperplan tangent en P^* [11].....	22
Figure II.4. Approximation SORM [11].....	23
Figure II.5. Simulation de Monté Carlo.....	25
Figure II.6. Quelques méthodes de simulations Monté Carlo [17].....	26
Figure II.7. Organigramme de l'analyse fiabiliste des systèmes mécaniques [18].....	27
Figure II.8. Arbre de défaillance d'une poutre bi-encastree [15].....	28
Figure II.9. Bi-encastree représenté par un système série-parallèle [15].....	29
Figure III.1. Transformation mécanique et fiabiliste dans le schéma du couplage	33
Figure III.2. Flux des aléas entre les données et la marge [17].....	34
Figure III.3. Flux des variables dans le modèle mécano- fiabiliste [17].....	36
Figure III.4. Méthodes d'analyse de la fiabilité pour des modèles éléments finis [17].....	37
Figure III.5. Mariage fiabilité et MEF [17].....	38
Figure III.6. Formulations possibles du problème mécano-fiabiliste dans un code EF [17]...40	
Figure III.7. Pilotage par module d'optimisation [11].....	40
Figure III.8. Couplage par méthode directe [11].....	41
Figure III.9. Deux plans d'expériences successifs [11].....	43
Figure III.10. Principe de la méthode par surface de réponse.....	45
Figure IV.1. Poutre chargée.....	48
Figure IV.2. Élément poutre à deux nœuds [4].....	50

Figure IV.3. Système en série représentant la défaillance d'une poutre.....	54
Figure IV. 4. L'ouvrage réparé.....	54
Figure IV.5.a. Section transversale de la poutre [22].....	55
Figure IV.5.b. Détails de la dalle et de la couche de roulement [22].....	55
Figure IV.6. Tablier du pont [22].....	56
Figure IV.7. Section transversale équivalente [22].....	57
Figure IV.8. Poutre soumise à la sollicitation maximale.....	59
Figure IV.9. Discrétisation en éléments finis de:	
a). La demi- poutre ($n_G= 2, h^K= 1.85m, n_c=8$).....	60
b). Toute la poutre ($n_G= 2, h^K= 1.85m, n_c=15$).....	60
Figure IV.10. Présentation d'un élément.....	60
Figure IV.11. Lois de distributions des variables.....	64
Figure IV.12. Calcul de β en utilisant la méthode FORM.....	65
Figure IV.13. Illustration de l'algorithme de Rackwitz-Fiessler [14].....	66
Figure IV.14. Allure de l'évolution du taux de défaillance « courbe en baignoire ».....	70
Figure IV.15. Facteurs d'importance associés.....	73
Figure IV.16. Facteurs d'importance avec une distribution de E normale.....	73
Figure IV.17. Facteurs d'importance poutre intermédiaire (E normale).....	74
Figure IV.18. Facteurs d'importance poutre intermédiaire (E log-normale).....	75
Figure IV.19. Facteurs d'importance poutre de rive réparée (E normale).....	75
Figure IV.20. Facteurs d'importance poutre de rive réparée (E log-normale).....	75
Figure IV.21. Facteurs d'importance poutre de rive non réparée (E normale).....	76
Figure IV.22. Facteurs d'importance poutre rive non réparée (E log-normale).....	76
Figure IV.23. Architecture structurale du pont.....	77
Figure IV.24. Répartition des sollicitations sur chaque poutre (ligne d'influence).....	77
Figure IV.25. Défaillance du système lorsque 2 poutres successives sont défaillantes.....	78
Figure V.1. Solution de l'équation de la durée de vie.....	81

Liste des Tableaux

Tableau III.1. Formulations du problème de fiabilité [17].....	39
Tableau IV.1. Indice de fiabilité à atteindre évalué en fonction de la criticité de l'élément et du type de défaillance (période de référence : 1an) [20].....	53
Tableau IV.2. Valeurs cibles de β [19,21].....	53
Tableau IV.3. Moments dus aux charges permanentes.....	58
Tableau IV.4. Moments fléchissants sous les différents systèmes de charge.....	58
Tableau IV.5. Combinaisons d'actions selon le B.P.E.L.....	58
Tableau IV.6. Sollicitation pour la poutre intermédiaire [22].....	58
Tableau IV.7. Sollicitations de la poutre de rive [22].....	59
Tableau IV.8. Valeurs de la flèche due à la précontrainte [22].....	59
Tableau IV.9. Paramètres de calcul de la poutre.....	59
Tableau IV.10. Tableau des connectivités.....	60
Tableau IV.11. Tableau des coordonnées.....	61
Tableau IV.12. Flèches obtenues.....	62
Tableau IV.13. Variables aléatoires et déterministes à considérer.....	62
Tableau IV.14. Variables aléatoires et leurs densités de probabilités.....	63
Tableau IV.15. Corrélations.....	66
Tableau IV.16. Variables aléatoires et leurs densités de probabilité.....	68
Tableau IV.17. Résultats fiabilistes (E log-normale).....	68
Tableau IV.18. Résultats fiabilistes en utilisant une distribution de E normale.....	68
Tableau IV.19. Résultats de l'analyse de sensibilité.....	71
Tableau IV.20. Facteurs de sensibilité pour E (log normale).....	71

Introduction générale

Introduction générale

L'objectif principal de la conception en ingénierie est de maximiser la durée de vie tout en minimisant le coût, tâche qui s'avère très délicate.

A la suite des travaux effectués au 19^{ème} siècle par Navier, la notion de contrainte couplée à un coefficient de sécurité a permis de concevoir des structures fiables. Cette notion est largement utilisée dans nos règlements. Cependant, de nombreux pays, tels que le Royaume-Uni, le Canada et les USA, se sont tournés vers de nouvelles approches de plus en plus sophistiquées dans le seul but de rendre leurs structures plus performantes et plus économiques. Ces méthodes utilisent un couplage entre des méthodes de programmation mathématique et de modélisation mécanique, qui prendraient en compte les propriétés des matériaux, les propriétés géométriques, les actions appliquées,... qui présentent naturellement des incertitudes.

Ces incertitudes proviennent de la variabilité intrinsèque de ces paramètres, de l'erreur de mesure, ou d'un manque de connaissance précise sur ces paramètres. De même, les actions appliquées aux structures ne sont pas toujours parfaitement connues, ce qui est très souvent le cas en Algérie (risques sismiques, climatiques,...).

Cette démarche probabiliste est, selon Hasofer une précision supplémentaire [29]. Elle est fondée sur la recherche du point de défaillance le plus probable, mais reste encore dans une large mesure, une méthode d'expert. La plupart de ses applications se situent dans le contexte d'étalonnage des coefficients de sécurité (calibration des règlements de conception- Eurocodes actuels-). Un grand nombre de travaux de recherche se tournent actuellement vers l'utilisation de cette démarche pour l'évaluation des ouvrages existants pour étudier principalement les stratégies de maintenance optimales (voir [30], [33], [34], [35]).

L'objectif de ce travail est de s'initier à cette démarche et de comprendre l'intérêt d'un tel couplage entre la modélisation mécanique et fiabiliste. Pour cela, nous nous proposons d'appliquer cette approche, à un ouvrage d'art Algérien, qui a été détruit en 2004 suite à un choc, puis réparé quelques années plus tard.

Dans le premier chapitre, nous présenterons les grands titres d'une modélisation mécanique par éléments finis. Dans le second, il sera question de quelques notions sur la fiabilité dans le domaine des structures, où sera présenté brièvement les différentes méthodes de calcul de fiabilité. Le chapitre trois quant à lui sera consacré à la présentation des différentes méthodes de couplage.

Dans le chapitre quatre, une application de ce couplage sera illustré, sur un échangeur de Biskra réparé par précontrainte extérieure. Une étude de fiabilité sera faite sur les différents éléments structuraux de ce dernier, puis une analyse de sensibilité mettra en évidence les variables de conception qui influent le plus sur les conditions de résistance de ce pont.

Dans le chapitre cinq, nous présenterons quelques applications possibles de cette analyse dans le domaine du génie civil.

Enfin, dans la conclusion générale, nous synthétisons les principaux résultats obtenus.

CHAPITRE I

Méthode des éléments finis

CHAPITRE I

Méthode des éléments finis

I.1. Introduction :

La résolution des équations différentielles (ED) ou plus généralement des équations aux dérivées partielles (EDP) occupe une place importante en ingénierie et en mathématiques appliquées. Chacune de ces disciplines apporte une contribution différente mais complémentaire à la compréhension et à la résolution des problèmes.

Il existe plusieurs techniques permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles. On pense par exemple aux méthodes des différences finies, de volumes finis, aux méthodes spectrales, etc. On peut sans doute affirmer que la plus largement répandue est la méthode des éléments finis (MEF). Cette popularité n'est pas sans fondement puisqu'elle possède une base mathématique rigoureuse, qui permet de prévoir jusqu'à un certain point la précision de notre approximation et même d'améliorer cette précision. La MEF est maintenant reconnue comme l'une des principales méthodes de résolution des EDP dans des géométries quelconques, que ce soit en dimension une, deux ou trois : on trouve même des méthodes d'éléments finis en dimension 4, soit en espace- temps,... [1]

Cette méthode consiste à remplacer un problème continu par un problème discret équivalent. D'une part, le domaine géométrique est subdivisé en sous domaines de géométrie simple (éléments), sur lesquels l'étude du problème peut se faire en une seule opération, et d'autre part, une approximation simple des variables inconnues est utilisée pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques [2].

La méthode fait appel aux trois domaines suivants [3] :

- Les sciences de l'ingénieur, pour construire les équations aux dérivées partielles ;
- Les méthodes numériques, pour construire et résoudre les équations algébriques ;
- La programmation et l'informatique pour exécuter efficacement les calculs.

I.2. Historique :

La méthode des éléments finis est le fruit de deux domaines de recherche : Les mathématiques et les sciences de l'ingénieur. Les outils mathématiques remontent jusqu'aux résidus pondérés de Gauss (1775), Galerkin (1915) et Biezenokoch (1923), ainsi qu'aux méthodes variationnelles de Rayleigh (1870) et Ritz (1909). La contribution des sciences de l'ingénieur a débuté dans les années quarante avec Hrenikoff (1941), Henry (1943) et Newmark (1949) qui touchèrent pour la première fois aux structures continues, en faisant une approximation sur des portions de petites dimensions dans un problème continu d'une barre

longue d'où, l'idée de base des éléments finis. Par la suite, Argyris (1955), Turner (1956), Glough (1956) et Martin (1956) ont fait une analogie directe en adoptant un comportement simplifié pour des petites portions, d'où la naissance d'éléments finis avec "panneaux" comme nom.

Argyris et Kelsy (1960) utilisent la notion d'énergie dans l'analyse des structures et font appel à des méthodes mathématiques (résidus pondérés, principes variationnels ...). Le terme " élément fini " est utilisé pour la première fois par Glough (1960), et dès lors, il y a un développement rapide de la méthode. Dans les années soixante; Zienkiwicz (1965), De Arante (1968), Oliviera (1968), Green (1969), Tones (1969), Lay (1969), Storne (1969), et Finlayson (1975) ont reformulé la méthode à partir de considérations énergétiques et variationnelles sous forme générale de résidus pondérés, d'où le modèle mathématique de la MEF. En 1969 la MEF est reconnue comme un outil général de résolution des EDP, et utilisée pour résoudre des problèmes non linéaires et non stationnaires dans plusieurs domaines [4].

Actuellement, la méthode des éléments finis est très répandue dans les industries, en particulier en construction aéronautique, aérospatiale, navale et nucléaire. On trouve de nombreux programmes généraux de calcul pour utiliser industriellement la méthode des éléments finis, principalement dans le domaine de la mécanique des solides. Par exemple, SAP, ANSYS... [3].

I.3. Les éléments finis et le génie civil :

Projeter un ouvrage en génie civil nécessite plusieurs phases d'intervention. Deux phases principales peuvent être distinguées :

1. Conception et avant projet ou phase de dimensionnement de l'ouvrage.
2. Exécution ou phase de justification de l'ouvrage.

Une structure se présente comme un arrangement et/ ou une simplification de parties ou modèles (tablier de pont structuré à base de poutres, de plaques ou de coques, fondations, etc), et elle ne permet pas de caractériser le sol sur lequel la construction s'établit.

Modéliser ne doit donc pas se limiter à la simple extraction de quelques composantes de structures ou de matière en vue d'une analyse séparée, mais cela consiste plutôt à localiser et à mesurer l'importance relative des divers paramètres significatifs et critiques du problème traité, à organiser les géométries et les diverses configurations de l'ouvrage évoluant dans le temps et à les remplacer dans un espace associant des composantes de la structure et de matière couplées entre elles. La modélisation d'un ouvrage doit essentiellement résulter de: *«la recherche de la structure permettant d'approcher au mieux le fonctionnement réel de la construction, de la loi de comportement caractéristique du matériau et de la recherche des interactions structures- matériaux »* [5].

I.4. Avantages de la méthode des éléments finis :

Pour présenter la MEF, on commence souvent par exposer les problèmes physiques que la méthode peut résoudre, puis on poursuit en développant l'un ou l'autre des deux aspects suivants : les avantages pratiques de la méthode, ou ses fondements mathématiques.

- L'approche pratique : qui repose sur les notions de nœuds et éléments, met naturellement en évidence la variété des domaines d'applications couverts par la MEF, ainsi que son caractère modulaire, qui présente un grand intérêt dans la conception des outils et dans la gestion des études : c'est le côté « Lego » de la MEF. En outre, elle identifie facilement, sur divers points durs de la mise en œuvre (comme la complexité géométrique ou le coût de résolution du problème), les forces et les faiblesses de conception des outils existants.
- L'approche mathématique : basée sur la théorie de l'approximation et les espaces fonctionnels, est plus rigoureuse et beaucoup plus lourde à introduire, mais elle permet seule de juger de la pertinence de la MEF parmi l'ensemble des moyens d'analyse offerts à l'ingénieur.

I.5. Etapes pratiques du calcul par éléments finis :

Dans la méthode des éléments finis, un domaine quelconque (solide, liquide, ou gaz) est représenté par un assemblage de sous domaines appelés « éléments finis ». Ces éléments sont connectés entre eux en des points spécifiques appelés « nœuds, ou points nodaux ». Lorsque les équations (telles que les équations d'équilibre) de tout le domaine sont écrites, les nouvelles inconnues seront les variables aux nœuds. Les fonctions d'approximations définissent le domaine à travers un assemblage d'éléments [6].

La solution d'un cas général par la MEF suit toujours un ordre, qui peut être défini comme suit [4] :

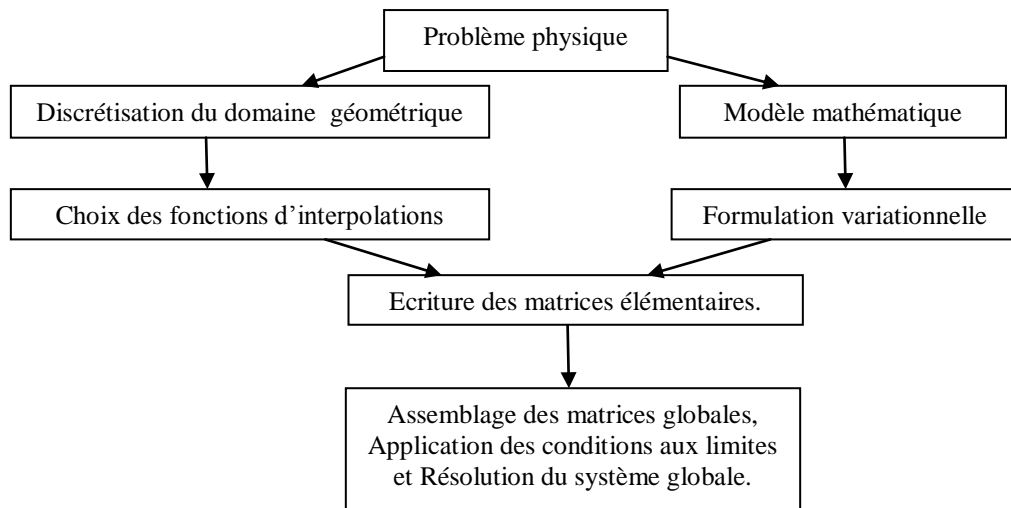


Figure I.1. Etapes générales de la méthode des éléments finis.

I.6. Approximation par éléments finis :

I.6.1. Approximation nodale :

Un modèle mathématique d'un système physique fait intervenir plusieurs variables ou fonctions exactes $U_{ex}(x)$. Celles-ci sont représentées par des *fonctions approchées* $U(x)$ telle que la différence ;

$$e(x) = U_{ex}(x) - U(x) \tag{1.1}$$

soit assez petite pour viser l'objectif [3].

La fonction approchée U de U_{ex} , est construite sur la base de fonctions polynomiales (ou trigonométriques) linéairement indépendantes :

$$U(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_n x^{n-1} \tag{1.2}$$

Que nous pouvons écrire sous forme matricielle comme suit :

$$U(x) = \langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1} \rangle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Les paramètres $a_1, a_2, a_3, \dots, a_i$ sont les paramètres de l'approximation, et n'ont pas de sens physique, cependant nous pouvons leur en donner un. Pour cela faisons en sorte de satisfaire la condition (1.1), par exemple en faisant coïncider $U_{ex}(x)$ et $U(x)$ en n points x_1, x_2, \dots, x_n , c'est-à-dire en annulant $e(x)$ aux n points x_i appelés nœuds.

Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} U(x_1) &= a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_1^2 + \dots + a_n x_1^{n-1} = U_{ex}(x_1) = U_{ex1} \\ U(x_2) &= a_1 + a_2 x_2 + a_3 x_2^2 + \dots + a_n x_2^{n-1} = U_{ex}(x_2) = U_{ex2} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ U(x_n) &= a_1 + a_2 x_n + a_3 x_n^2 + \dots + a_n x_n^{n-1} = U_{ex}(x_n) = U_{exn} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{ex1} \\ U_{ex2} \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{exn} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Ou : $[A] \{a\} = \{U_{ex}\}$

Si la matrice n'est pas singulière, nous pouvons écrire :

$$\{a\} = [A]^{-1} \{U_{ex}\}$$

En remplaçant $\{a\}$ par sa valeur dans (1.3) nous aurons :

$$U(x) = \langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1} \rangle [A]^{-1} \{U_{ex}\}$$

que nous pouvons écrire comme suit :

$$U(x) = \langle N_1(x), N_2(x), \dots, N_n(x) \rangle \{U_{ex}\} \quad (1.6)$$

Ou tout simplement : $U(x) = \langle N \rangle \{U_{ex}\}$

$$\text{avec :} \quad \langle N \rangle = \langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1} \rangle [A]^{-1} \quad (1.7)$$

Comme $U(x_i) = U_{exi}$, il découle de (1.6) que :

$$N_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

On appelle ce type d'approximation : *approximation nodale*. Les paramètres U_{exi} sont des *variables nodales* et les fonctions $N_i(x)$ sont les fonctions d'interpolations nodales ou *fonctions de forme* [2].

I.6.2. Approximation par éléments finis :

La méthode d'approximation par éléments finis est une méthode particulière d'approximation par sous domaines qui présente les particularités suivantes :

- L'approximation nodale sur chaque sous domaine Ω^e ne fait intervenir que les variables nodales attachées à des nœuds situés sur Ω^e et sur sa frontière.
- Les fonctions approchées $U^e(x)$ sur chaque sous domaine Ω^e sont construites de manière à être continues sur Ω^e et elles satisfont des conditions de continuité entre les différents sous domaines. Une fois toutes les fonctions $U^e(x)$ construites, la fonction $U(x)$ est obtenue par :

$$U(x) = \sum_e U^e(x) \quad (1.8)$$

Définitions :

- Les points en lesquels la fonction approchée $U^e(x)$ surcoïncide avec la fonction exacte $U_{ex}(x)$ sont les nœuds d'interpolation ou points nodaux.
- Les coordonnées x_i de ces nœuds sont les *coordonnées nodales*.
- Les valeurs $U_i = U^e(x_i) = U_{ex}(x_i)$ sont les variables nodales[3].

I.7. Formulation intégrale :

Le comportement d'un système physique continu est généralement représenté par un système d'EDP associé à des conditions aux limites sur le domaine considéré. Dans la plus part des cas, il n'est pas toujours possible de trouver des solutions analytiques à ces systèmes d'équations différentielles. Pour cela, il faudrait remplacer le système continu par un système

discret équivalent dont le comportement est décrit par des équations algébriques qu'on peut résoudre par des méthodes numériques.

L'une des caractéristiques majeures de cette méthode est la transformation du problème continu en une formulation intégrale, dite variationnelle[7].

I.8. Construction de l'espace d'approximation :

La méthode des éléments finis consiste à rechercher une solution approchée de la solution exacte sous la forme d'un champ défini par morceaux sur les sous domaines de Ω , les n sous domaines de Ω^e doivent être tel que :

$$\bigcup_{i=1}^n \Omega^e = \Omega \text{ et } \Omega^e_i \cap \Omega^e_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \quad (1.9)$$

I.8.1. Discrétisation du domaine :

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation par sous domaines. Donc avant toute application il faut diviser le domaine à étudier en éléments. Chaque élément est défini géométriquement par un nombre de nœuds bien déterminé qui constitue en général le nombre de sommets (voir Figure I.2).

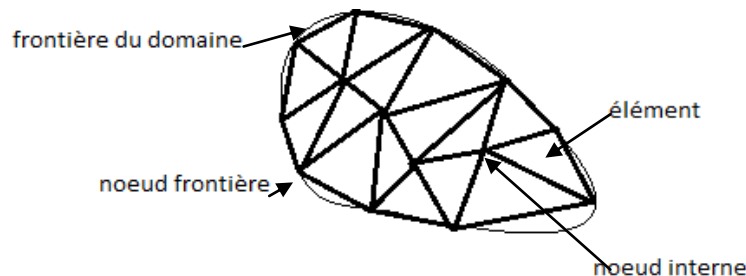


Figure I.2. Discrétisation d'un domaine (éléments triangulaires).

La discrétisation géométrique doit respecter les règles suivantes :

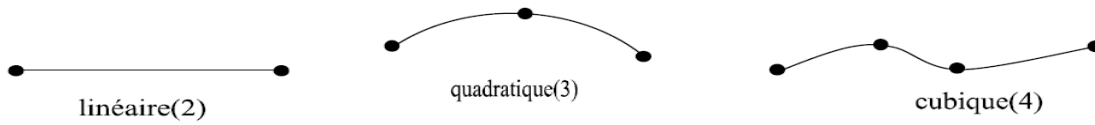
- 1) Le nœud d'un élément ne doit pas être inférieur à un côté d'un autre du même type ;
- 2) Aucun élément bidimensionnel ne doit être plat ;
- 3) Deux éléments distincts ne peuvent avoir que des points situés dans leurs frontières communes; le recouvrement est exclu ;
- 4) L'ensemble de tous les éléments doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donné ; les trous entre éléments sont exclus [4].

- **Les éléments :**

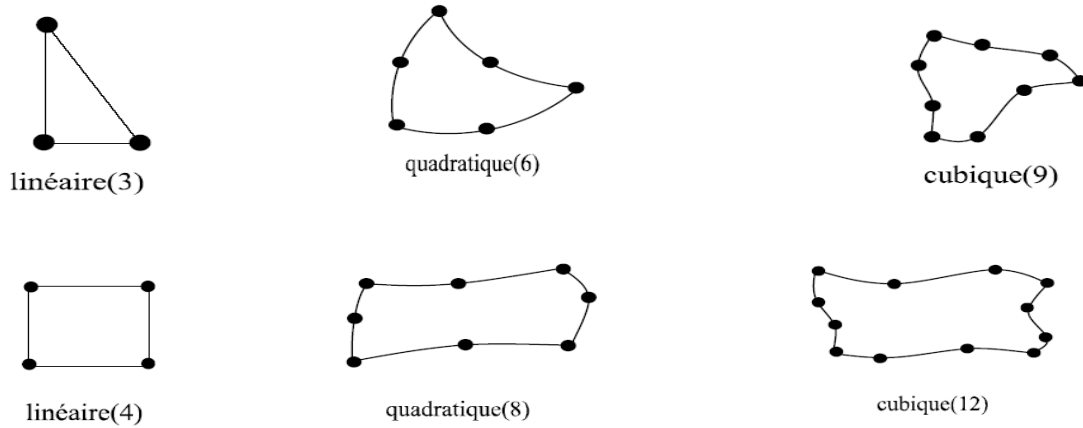
Considérons une partition de l'intervalle]0, L[, cette répartition en sous intervalles constitue *le maillage*, et les sous intervalles K_i sont appelés *éléments* dont le nombre total est noté n_{el} . (Les éléments peuvent être de longueurs variables)[8].

Formes d'éléments classiques :

Eléments à une dimension :



Eléments à deux dimensions :



Eléments à trois dimensions :

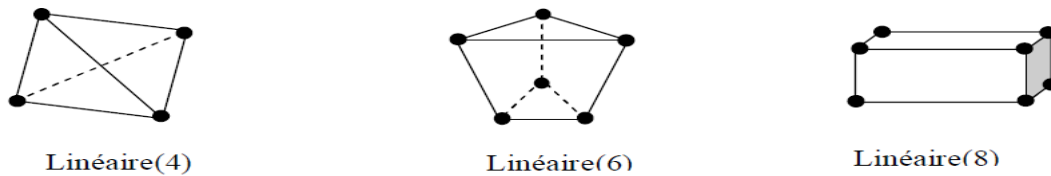


Figure I.3. Quelques types d'éléments [2,9].

• **Les nœuds :**

Sur chaque élément, on identifie :

- n_G nœuds géométriques qui permettent de définir la géométrie de l'élément en question. . Ce sont ces nœuds géométriques qui définissent localement la géométrie de l'élément et globalement, celle du domaine entier ;
- On notera $K = [x_1^K, x_2^K]$ un élément générique et h^K sa taille.
- Dans chaque élément K on identifie également un nombre n_C de nœuds de calcul souvent appelés nœuds d'interpolation où les variables essentielles du problème seront éventuellement calculées. Ces nœuds d'interpolation peuvent ou non coïncider avec les nœuds géométriques.

- n_r représente le nombre total de nœuds de l'élément K, et $(x_1^K, x_2^K, \dots, x_{nT}^K)$ les nœuds de l'élément K en commençant par les nœuds géométriques, suivis des autres nœuds de calcul (Figure I.4) [1].

Exemple :

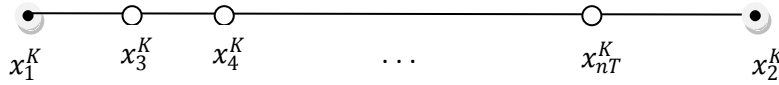


Figure I.4. Nœuds géométriques et de calcul de l'élément K.

- **Les degrés de liberté :**

On associe à chaque nœud de calcul de l'élément une ou plusieurs inconnues appelées *degrés de liberté (ddl)* suivant que le problème possède une ou plusieurs variables essentielles. On note n_D le nombre de degrés de liberté de l'élément. Certains degrés de liberté seront communs à 2 (ou plus éléments) Le nombre total de degrés de liberté du domaine sera noté n_{ddl} . Les degrés de liberté seront donc les inconnues de notre problème [1].

I.8.2. Les méthodes de maillage :

1. Les mailles doivent être bien proportionnées, c'est-à-dire que le rapport de leur plus grande dimension sur leur plus petite dimension doit être aussi voisin de 1 que possible.
2. Le maillage ne doit pas être inutilement fin (plus le maillage est fin plus le calcul est coûteux). On doit faire un compromis entre la finesse de la représentation géométrique et le coût du calcul [8].

I.9. Construction des fonctions d'approximation sur un élément :

La construction de la fonction approchée U , sur un élément, par la méthode d'approximation générale ou nodale doit répondre essentiellement aux besoins du problème à solutionner ainsi qu'aux exigences de la géométrie de l'élément.

L'interpolation doit permettre de représenter [9]:

- Les états de déplacement constants ou modes rigides ;
- Les états de déformation constante.

Ce critère semble physiquement évident, l'élément fini doit pouvoir se déplacer en bloc, comme un corps rigide, sans qu'aucune contrainte ou déformation n'y naisse, et il doit être capable de représenter les états de déformation les plus simples.

La raison pour laquelle, les fonctions approchées doivent satisfaire ces deux principes, est d'assurer la convergence de la solution quand on augmente le nombre d'éléments et/ ou on diminue leurs tailles.

I.10. Méthode de construction des fonctions d'interpolation :

I.10.1. Elément de référence :

De manière à simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, introduisons la notion d'*élément de référence* : un élément de référence Ω^f est un élément de forme très simple, repéré dans un *espace de référence*, qui peut être transformé en chaque élément réel Ω^e par une transformation géométrique τ^e .

La transformation τ^e définit les coordonnées x^e de chaque point de l'élément réel à partir des coordonnées ξ du point correspondant de l'élément de référence (Figure I.5):

$$\tau^e : \xi \rightarrow x^e = x^e(\xi) \tag{1.10}$$

La transformation τ^e dépend de la forme et de la position de l'élément réel, donc des coordonnées géométriques qui le définissent. Il y a une transformation τ^e différente pour chaque élément réel :

$$\tau^e : \xi \rightarrow x^e = x^e(\xi, x_i, x_j, x_k, \dots)$$

Les x_i, x_j, x_k, \dots sont les coordonnées des nœuds géométriques qui appartiennent à l'élément e [3].

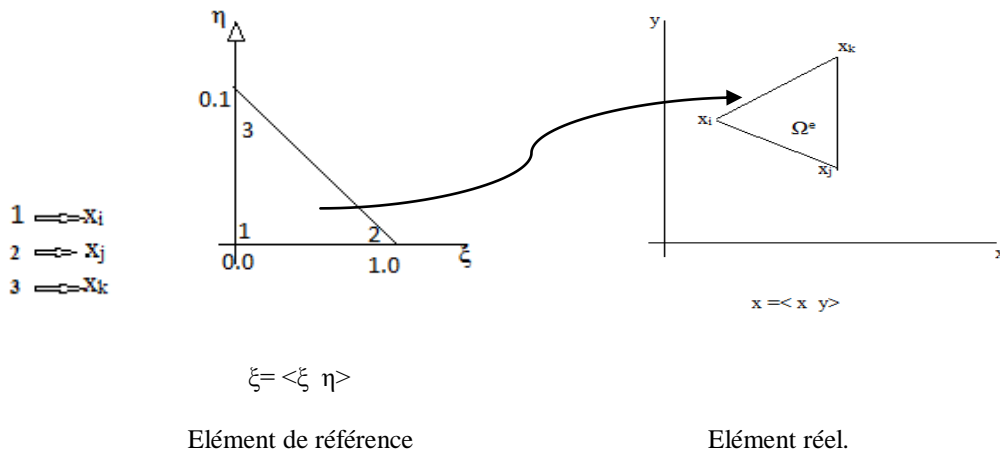


Figure I.5. Elément réel et élément de référence.

I.10.2. Approximation sur un élément de référence :

Nous choisissons sur le domaine Ω un ensemble de nœuds d'interpolation de coordonnées x_i , confondus ou non avec les nœuds géométriques. Sur chaque élément Ω^e nous utilisons une approximation nodale de type (1.3) de la fonction exacte $U_{ex}(x)$:

$$U_{ex}(x) = U(x) = \langle N_1(x), N_2(x), \dots, N_n(x) \rangle \{U_{ex}\} = \langle N(x) \rangle \{U_{ex}\} \tag{1.11}$$

- x : appartient à Ω^e .

$$- \{U_{ex}\} = \begin{Bmatrix} U_{ex1} \\ U_{ex2} \\ \vdots \\ U_{exn} \end{Bmatrix}, \text{ où } U_{ex1}, U_{ex2}, \dots, U_{exn} \text{ sont les valeurs de } U_{ex} \text{ aux } n^e \text{ nœuds}$$

d'interpolation sur l'élément réel.

- $N(x)$ sont les fonctions d'interpolation sur l'élément réel.

Remplaçons l'approximation sur l'élément réel par l'approximation correspondante sur l'élément de référence :

$$U_{ex}(\xi) = U(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{U_{ex}\} \quad (1.12)$$

Avec :

- $\{U_{ex}\}$ sont les variables nodales de l'élément ;
- Et $N(\xi)$ sont les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence.

I.10.3. Erreur d'approximation sur un élément :

- L'erreur d'approximation en tout point x de l'élément réel Ω^e est définie par (1.1).
- L'erreur au point de l'élément de référence est :

$$e(\xi) = U(\xi) - U_{ex}(\xi) \quad (1.13)$$

En deux points x et ξ qui se correspondent dans la transformation (1.10), les erreurs $e(x)$ et $e(\xi)$ prennent la même valeur. Pour caractériser l'erreur maximale sur l'élément, nous utilisons la norme du maximum de la fonction $e(x)$:

$$|e| = \text{maximum sur } \Omega^e \text{ de } |e(x)| \quad (1.14)$$

I.10.4. Amélioration de la précision d'approximation :

Pour améliorer la précision de l'approximation nous devons diminuer les erreurs. Pour cela, il faut :

- Soit diminuer l , dimension de chaque élément, et par conséquent augmenter le nombre d'éléments ;
- Soit augmenter n , c'est-à-dire utiliser une approximation dont la base polynomiale soit complète jusqu'à un ordre plus élevé (n : ordre du polynôme d'approximation).

I.11. Présentation matricielle de la méthode des éléments finis :

Dans la pratique, nous insistons en particulier, sur l'organisation matricielle qui facilite le passage de la formulation à la programmation.

I.11.1. Construction des matrices élémentaires :

Il s'agit de mettre sous forme matricielle, les formes intégrales de l'équation à résoudre dans chaque domaine élémentaire Ω^e .

Donc pour chaque élément, on résoud le système suivant:

$$W^e = [K]_e [U]_e - [F]_e \quad (1.15)$$

K_e : matrice élémentaire ou rigidité d'un système discret ;

U_e : vecteur élémentaire de la variable nodale ;

F_e : vecteur élémentaire de sollicitation.

I.11.2. Assemblage des matrices élémentaires en matrice globale :

La forme W étendue au domaine Ω , est la somme des formes W^e des domaines élémentaires Ω^e :

$$W = \sum W^e = 0 \quad (1.16)$$

On a donc:

$$W = \sum ([K]_e [U]_e - [F]_e) = [K][U] - [F] \quad (1.17)$$

$[K]$, $[U]$, $[F]$: matrices globales discrétisées, obtenues par expansion des matrices élémentaires.

Afin d'obtenir la solution complète, il faut que la *condition d'équilibre globale soit satisfaite*.

Comme cette condition est vérifiée à l'intérieur de chaque élément (par la formulation de la matrice élémentaire), il ne nous reste donc, qu'à la vérifier au niveau de chaque nœud.

Pour cela, on doit déterminer les contributions de tous les éléments auxquels un nœud « i » appartient pour les égaliser avec l'excitation extérieure appliquée en ce nœud. Autrement dit, on doit situer chaque élément de la matrice élémentaire dans la matrice globale, et le sommer avec la valeur existante qui est le résultat des contributions des autres matrices élémentaires. Cet emplacement dans la matrice globale n'est qu'une localisation de la variable élémentaire dans la variable globale [10].

Remarque :

La méthode présentée ci-dessus donne les principaux titres de la méthode des éléments finis classiques. Cependant, il existe une autre approche de la méthode qui combine deux techniques, à savoir l'analyse classique par élément finis et l'analyse statistique, elle est connue sous : *méthode d'éléments finis stochastiques*. On cherche en général à déterminer les caractéristiques stochastiques des réponses aléatoires à partir de la connaissance des aléas sur les paramètres structuraux, géométriques, les conditions aux limites ou encore les chargements d'un système. Ces réponses peuvent être des réponses statiques (déformations), ou des réponses dynamiques. Différentes techniques existent pour résoudre de tels problèmes. Ces méthodes sont généralement classées en trois catégories : les méthodes de simulation (type Monte Carlo), les méthodes de perturbation et les méthodes spectrales qui utilisent essentiellement les variables aléatoires.

I.12. Conclusion :

L'essentiel de ce chapitre était de présenter la méthode des éléments finis, de donner quelques définitions et d'introduire les principales étapes de calcul.

Si on met de côté les aspects incertains ou aléatoires, il reste néanmoins que les structures actuelles sont complexes, et que les modéliser requiert des algorithmes numériques à la fois précis et efficaces. La méthode des éléments finis a depuis de nombreuses années prouvé son efficacité pour résoudre une grande variété de problèmes. Il apparaît donc clairement que l'introduction d'aléas ou d'incertitudes doit rester compatible avec la formulation éléments finis déterministe classique.

Même en ayant pris connaissance de la généralité de cette méthode, les méthodes numériques, même bien discrétisées, peuvent ne pas prendre en compte correctement certains phénomènes. De façon générale, on distingue des sources d'erreurs :

- Sur les charges et leur cumul ;
- Structurales (il peut survenir des dispersions dans les caractéristiques des matériaux utilisés dans l'élaboration de la structure).

Pour tenir compte de ces incertitudes affectant les paramètres du modèle sur la variabilité de sortie, il est nécessaire de les étudier grâce aux méthodes de fiabilité et la méthode des éléments finis stochastique.

CHAPITRE II

Fiabilité des structures

CHAPITRE II

Fiabilité des structures.

II.1. Introduction :

Si les approches probabilistes se sont développées depuis maintenant de nombreuses années en ce qui concerne la sûreté du fonctionnement des systèmes, en particulier électroniques, ce n'est que plus récemment qu'elles ont pénétré le Génie civil et le Génie mécanique pour la maîtrise des risques liés aux choix dimensionnels [11].

Dans ce chapitre, nous aborderons quelques notions de fiabilité des structures, très peu abordée dans les ouvrages spécialisés, les travaux de recherches quant à eux se multiplient. En effet, aujourd'hui, on se rend compte que les facteurs de sécurité ne suffisent plus pour prendre en compte les fluctuations des charges, les propriétés des matériaux, les caractéristiques dimensionnelles, les conditions de fonctionnement, ... et qu'une étude de fiabilité est nécessaire pour une bonne prévision des défaillances des systèmes. C'est dans ce sens que les nouveaux Eurocodes et les lois Canadiennes ont été pensés. Trois champs d'application de la fiabilité des structures sont particulièrement visés:

- Les ouvrages exceptionnels ou très novateurs pour lesquels l'expérience cumulée au cours des siècles est insuffisante ;
- Les ouvrages et constructions tout à fait ordinaires dont la conception s'appuie sur des codes ou règlements ;
- Les suivis des ouvrages en cours de leur vie, qui font souvent apparaître un état réel dégradé (exemple, une fatigue entraînant une fissuration).

II.2. Historique :

C'est certainement le code d'Hammourabi qui contient, le premier des principes régissant l'acceptation du risque en construction. Ce souverain Babylonien rassembla vers 1755, avant notre ère, un ensemble de prescriptions, dictées par les Dieux, constituant le premier code juridique connu. Ce code, concernait la construction des maisons et la responsabilité revenait au maçon.

Puis vint Léonard de Vinci (1452 -1519) qui fût l'un des premiers à chercher une relation entre sollicitations et résistance dans le cas des poutres. Un peu plus tard, Galilée s'intéressa particulièrement à l'optimisation de la résistance d'une poutre cantilever initiant ainsi les premières modélisations.

Blaise Pascal (1623 -1662) proposa une invitation à la réflexion sur ce thème en disant:
« *Or, quand on travaille pour demain et pour l'incertain, on agit avec raison : car on doit travailler pour l'incertain, par la règle des partis qui est démontrée* ». Cette pensée

concernant un enjeu commercial, s'applique également avec pertinence à un enjeu technique, fondant ainsi le calcul des probabilités.

Les travaux d'Henri Poincaré, apportèrent une conclusion acceptée difficilement : « *l'imprévisibilité avait sa place dans les systèmes déterministes* ».

En revanche, enrichi d'une culture mécanique et probabiliste, aujourd'hui, l'incertain est accepté progressivement. En Allemagne, Mayer fût certainement l'un des premiers à suggérer, dès 1926, d'utiliser en conception les valeurs moyennes et les variances des variables. Mais c'est en 1947 que A.M. Freudenthal amorce dans un article, le débat scientifique actuel : « *placer le concept de sûreté des structures dans le royaume de la réalité physique où il n'y a pas d'absolu et où la connaissance n'est pas parfaite* ».

A.R. Rjanitzyne introduit, dans le contexte de la construction métallique, une caractéristique de sécurité γ égale à l'inverse du coefficient de variation d'une fonction de performance et elle deviendra la première définition d'un indice de fiabilité.

Depuis maintenant un demi-siècle, des avancées scientifiques successives ont permis aux chercheurs et aux ingénieurs de construire des méthodes de dimensionnement tenant compte des écarts prévisibles et des incertitudes. C'est bien entendu les domaines où ces écarts étaient les plus grands qui ont mobilisé les efforts, pour le génie civil d'abord et en particulier la géotechnique, les actions naturelles et ensuite pour les structures et les constructions mécaniques [11].

II.3. Intérêt d'une analyse fiabiliste :

Les intérêts de l'analyse fiabiliste des structures peuvent être résumés comme suit :

- Elle offre un traitement réaliste des incertitudes et juge la rigueur des facteurs de sécurité arbitraires ;
- Elle permet l'aide à la décision menant à une économie dans le coût de construction et à une conception mieux équilibrée ;
- Elle produit des conceptions vraiment sécurisantes ;
- Elle mesure mieux la fiabilité des conceptions par rapport aux règlements et tient compte des différents modes de défaillance ;
- Elle permet une répartition optimale des matériaux entre les différents composants de la structure ;
- Elle intègre facilement l'expérience dans le processus de conception ;
- Elle permet de définir une stratégie d'inspection, maintenance et réparation des structures existantes afin d'étendre leur durée de vie, tout en tenant compte du facteur économique ;
- Elle élargit la connaissance de l'influence des incertitudes sur la réponse de la structure.

Ces intérêts montrent l'avantage de l'analyse fiabiliste, soit pour les structures envisagées en optimisant le rapport coût/fiabilité, soit pour les structures existantes en optimisant leurs performances à travers les maintenances et la prolongation de leur durée de vie.

II.4. Terminologie et Jargon :

Avant de traiter des paramètres de fiabilité, nous définirons le terme défaillance, car la définition de la défaillance conditionne celle de la qualité ou de la fiabilité.

L'amélioration de la fiabilité (croissance de la fiabilité) s'appuie sur l'analyse des défaillances. Au départ, on corrigeait les défaillances en intervenant sur les dysfonctionnements révélés par des tests. Aujourd'hui, on recueille (et on exploite) systématiquement les données se rapportant aux défaillances pour optimiser la conception, et au besoin, la modifier.

La défaillance peut se définir comme la : « *non-conformité à un critère de performance défini* » [12], ou « *altération ou cessation d'un bien à accomplir une fonction requise* » d'après l'AFNOR X60-011 qui définit les différentes défaillances [13]. Dès lors que la défaillance est définie comme un état de non-conformité par rapport aux spécifications, toute modification de la définition de la défaillance doit entraîner une modification de la spécification technique.

La définition du mode de défaillance détermine la fiabilité du système et dicte le choix du taux de défaillance retenu au niveau du choix du composant.

Le taux de défaillance est représenté par λ . Considérons un ensemble N d'éléments, dont k sont défaillants à un instant t . Si l'on admet qu'une défaillance est réparée dès qu'elle se produit, le temps cumulé $T = (N \cdot t)$. Dans le cas contraire, $T = [t_1 + t_2 + \dots + t_k + (N-k) \cdot t]$.

t_i : correspond au temps de la $i^{\text{ème}}$ défaillance. [15]

Le *taux de défaillance* est, pour une période spécifiée de la vie d'un élément, le rapport entre le nombre total des défaillances et le temps total d'observations. Si λ est le taux de défaillance pour N éléments, alors $\hat{\lambda} = \frac{k}{T}$ (estimation de λ). La valeur exacte est obtenue uniquement lorsqu'il y a défaillance de la totalité des N éléments.

Ayant maintenant défini le terme *défaillance* pour une application donnée, nous pouvons désormais définir les termes *qualité*, *fiabilité* et *maintenabilité* :

- *Qualité* : conformité aux spécifications.
- *Fiabilité* : Probabilité qu'un élément accomplisse une fonction requise, dans les conditions spécifiées, pendant un intervalle de temps donné. La fiabilité correspond donc à la notion de qualité à laquelle s'ajouterait une dimension temporelle et peut se décrire comme « *la probabilité de non- défaillance pendant un intervalle de temps donné* ».

- *Maintenabilité* : Probabilité qu'un élément défaillant soit réparé dans un intervalle de temps donné lorsque les réparations sont effectuées conformément aux procédures prescrites, ou « *probabilité de réparation dans un intervalle de temps donné* » [12].

II.5. Fiabilité des structures :

L'analyse de la fiabilité des structures est aujourd'hui devenue une discipline à part entière dans l'étude de la durabilité, de l'aptitude au service et de la sécurité des structures.

II.5.1 : Première approche de la fiabilité mécanique :

On s'intéresse à des méthodes qui sont développées essentiellement en relation avec la modélisation des matériaux et des structures. Elles font bénéficier la mécanique de bien des acquis de disciplines scientifiques; la théorie des probabilités en premier lieu et de l'expérience d'autres champs technologiques. Elles s'en différencient par une relation étroite avec les modèles de comportement mécanique. Elles apportent une précision supplémentaire au concepteur. Ainsi, l'approche fiabiliste en mécanique est souvent mise en œuvre dans le cadre des contrôles de qualité. Elle s'appuie tout d'abord sur une connaissance statistique des variables élémentaires (ou variables de bases) entrant dans la modélisation mécanique (connaissance des propriétés des matériaux, de la géométrie, des liaisons et des actions).

La défaillance met généralement en jeu une combinaison simple de composants complexes plutôt qu'une combinaison complexe de composants simples (car cette dernière est plus fréquente en sûreté de fonctionnement).

Rappelons qu'un composant est composé d'un élément géométrique et de son comportement mécanique [11].

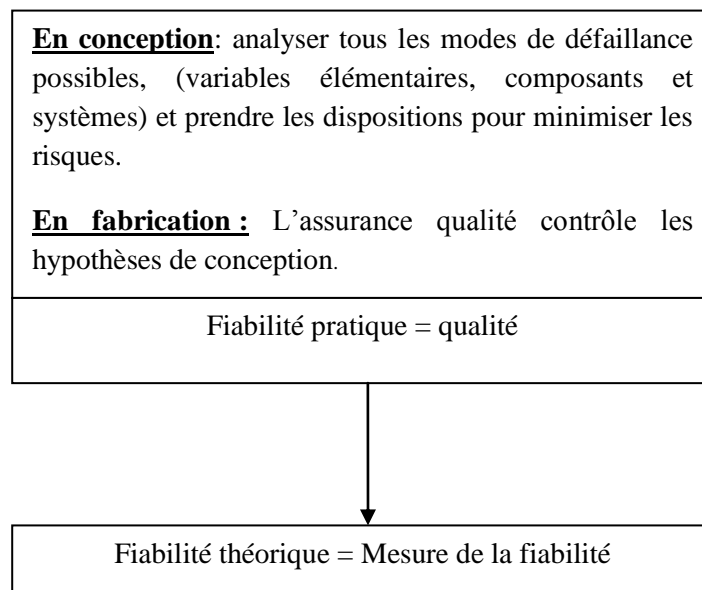


Figure II.1. Fiabilité pratique et théorique.

II.5.2. Notions de base :

1) Le succès d'un dimensionnement est traduit par la vérification d'une égalité fonction du temps t , du type :

$$G (S(t), R(t)) > 0 , \forall t \in [0, T] \quad (2.1)$$

et dans un cas simple de séparation des variables:

$$S(t) < R(t) , \forall t \in [0, T] \quad (2.2)$$

Où : $[0, T]$ est la durée de vie exigée ou période de référence pour laquelle le dimensionnement est étudié.

Le projeteur tend alors à déterminer le meilleur dimensionnement, c'est-à-dire celui qui optimise un critère objectif (souvent de coût généralisé) pour un niveau de fiabilité donné.

Pour plus de clarté, on utilisera un nombre de variables limité à 2 :

- R : variable aléatoire résistance ;
- S : variable aléatoire sollicitation.

$G (.)$ est la fonction de performance associée à une règle de fonctionnement. Elle traduit le scénario de défaillance (G_k pour chaque scénario de fonctionnement possible).

Soit $\langle X_n \rangle = \langle R, S \rangle$, vecteur des variables aléatoires :

- $G_k (X_n) = 0$: constitue la surface d'état limite ;
- $G_k (X_n) > 0$: domaine de sureté, domaine intérieur à l'état limite, domaine des événements de succès ;
- $G_k (X_n) \leq 0$: domaine de défaillance, domaine extérieur à l'état limite, domaine des événements de défaillance. Il peut ne pas exister.

2) Le scénario de *fonctionnement* est la disponibilité d'une résistance **supérieure** à la sollicitation, c'est-à-dire :

$$R - S > 0 \quad (2.3)$$

et le scénario de *non fonctionnement*, ou de défaillance, est alors :

$$R - S \leq 0 \quad (2.4)$$

- La mesure de la défaillance est alors la probabilité associée à l'événement $\{R - S \leq 0\}$, soit :

$$\text{Probabilité de défaillance} = P_f = \text{Prob} (\{R - S \leq 0\}) = \int_{r-s \leq 0} f_{R,S} (r, s) dr ds . \quad (2.5)$$

Cette expression ne peut être évaluée analytiquement voire même numériquement, surtout dans le cas de l'analyse de la fiabilité des structures, mais peut être calculée par les méthodes de simulation.

- La fiabilité est pour sa part, définie comme le complément de la probabilité de défaillance :

$$Fiabilité = 1 - P_f \quad (2.6)$$

Le calcul de l'indice de fiabilité nécessite la recherche du point de défaillance le plus probable P^* (ou point de conception). La première définition pour l'indice de fiabilité a été formulée par Rjinitzyne- Cornell. L'indice β_c est obtenu à partir de la moyenne m_Z et de l'écart-type σ_Z de la variable de marge $Z = R - S$:

$$\beta_c = \frac{m_Z}{\sigma_Z} \quad (2.7)$$

L'indice β_c (sans dimension) apparaît donc comme l'inverse du coefficient de variation de la variable aléatoire Z [11].

II.5.3. Transformation probabiliste :

II.5.3.1. Transformation isoprobabiliste :

Hasofer et Lind ont proposé de ne pas se placer dans l'espace des variables physiques, mais d'effectuer un changement de variables vers un nouvel espace de variables Gaussiennes statistiquement indépendantes, de moyennes nulles et d'écart-type unitaires soit :

$$X_i \rightarrow U_i : \text{Vecteur Gaussien } N(0, I), \quad m_{U_i} = 0, \sigma_{U_i} = 1. \quad (2.8)$$

La transformation de l'espace physique vers l'espace normé ou espace standard (dite transformation isoprobabiliste) est immédiate dans le cas des variables Gaussiennes indépendantes :

$$u = \frac{x - m_Z}{\sigma_Z} \quad (\text{variables réduites ici Gaussiennes}) \quad (2.9)$$

et elles conservent la linéarité de l'état limite.

Dans l'espace Gaussien standard des variables u_i , l'indice de fiabilité β est défini comme la distance de l'origine O au point P^* le plus proche de l'origine sur la surface d'état-limite. P^* est le point de défaillance le plus probable.

Pour des variables indépendantes de lois quelconques, le principe de la transformation consiste à écrire l'égalité des fonctions de répartition [11].

$$\phi(u) = F_x(x) \rightarrow T : x \rightarrow u = \Phi^{-1}(F_x(x)) \quad (2.10)$$

Cette transformation est dite *isoprobabiliste*, elle est notée T . Elle est appliquée ici pour une seule variable x et elle suppose que $F_x(x)$ soit continue et strictement croissante.

Le point P^* est le point de conception.

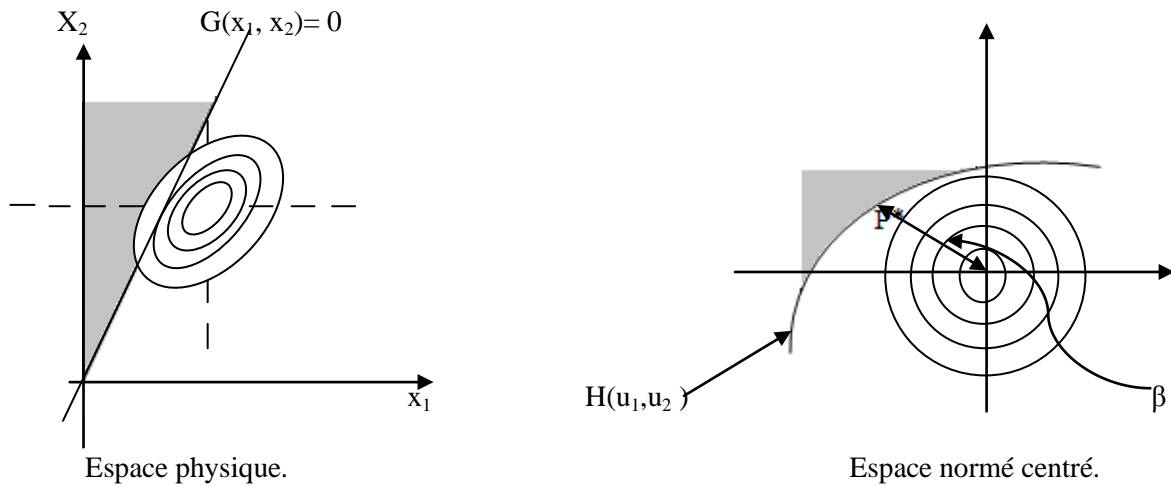


Figure II.2. Représentation de l'indice de fiabilité β [11].

Si les variables sont dépendantes, d'autres transformations seront utilisées, telles que les transformations de Rosenblatt ou de Nataf.

Remarque:

La relation entre P_f et β est un changement d'échelle. La mesure de l'indice correspond à quelques unités alors que dans le cas de la probabilité, c'est l'exposant n de $P_f=10^{-n}$ qui est intéressant. L'échelle de β est une échelle approximativement logarithmique de la fiabilité qui correspond mieux à une appréciation subjective des ordres [11].

Actuellement, les méthodes les plus efficaces pour le calcul de la fiabilité sont basées sur la recherche de ce point de conception (ou le point de défaillance le plus probable). Des méthodes connues sous le nom des méthodes FORM /SORM consistent en un couplage entre le modèle fiabiliste et le modèle mécanique. Le modèle fiabiliste s'occupe de trouver les directions de recherche, alors que le modèle mécanique s'occupe d'évaluer la fonction d'état limite [15].

II.5.3.2. Transformation de Rosenblatt :

Cette transformation a été étendue par Hohenbichler et Rackwitz (1981) à partir de l'idée de Rosenblatt (1952), et est définie comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = \phi^{-1}[F_{x_1}(x_1)] \\ u_2 = \phi^{-1}[F_{x_2}(x_2|x_1)] \\ \dots \\ u_i = \phi^{-1}[F_{x_i}(x_i|x_1 \dots x_{i-1})] \\ \dots \\ u_n = \phi^{-1}[F_{x_n}(x_n|x_1 \dots x_{n-1})] \end{cases} \quad (2.11)$$

Où $F_{x_i}(x_i|x_1 \dots x_{i-1})$ est la fonction de répartition de X_i .

Cette définition de la transformation de Rosenblatt requiert la connaissance de la densité conjointe. Or en pratique, on ne connaît généralement que les moyennes, les écart-

types et parfois une matrice de covariances, ainsi que les densités marginales des variables aléatoires [14].

II.5.3.3. Transformation de Nataf :

Connaissant les distributions marginales de chaque composante X_i de X , soit $f_{x_i}(x_i)$ pour la densité de probabilité, et $F_{x_i}(x_i)$ pour la fonction de répartition, il est possible de définir un vecteur Y des variables centrées réduites dont les composantes corrélées sont définies par :

$$Y = \Phi^{-1}F_x(x_i). \tag{2.12}$$

Nataf (1962) [14] a proposé une fonction de densité conjointe aux variables X_i et X_j ($i, j = 1, \dots, n$) compte tenu des distributions des lois Y_i et Y_j .

$$f_{x_i, x_j}(x_i, x_j) = \Phi_2(y_i, y_j, \rho_{0,ij}) \frac{f_{x_i}(x_i)f_{x_j}(x_j)}{\phi(y_i)\phi(y_j)} \tag{2.13}$$

Où $\Phi_2(y_i, y_j, \rho_{0,ij})$ est la densité d'un vecteur gaussien de dimension 2, de composantes centrées réduites et de coefficient de corrélation fictif $\rho_{0,ij}$:

$$\phi(y_i, y_j, \rho_{0,ij}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{0,ij}^2}} \exp\left[-\frac{y_i^2 - 2y_i y_j \rho_{0,ij} + y_j^2}{2(1-\rho_{0,ij}^2)}\right] \tag{2.14}$$

La corrélation fictive est exprimée en fonction des densités marginales des lois X_i et X_j et de leur coefficient de corrélation ρ_{ij} (Der Kiureghian et Liu 1986):

$$\rho_{ij} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) \left(\frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j}\right) \Phi_2(y_i, y_j, \rho_{0,ij}) \frac{f_{x_i}(x_i)f_{x_j}(x_j)}{\phi(y_i)\phi(y_j)} dx_i dx_j \tag{2.15}$$

Où μ_i et μ_j représentent les moyennes des variables X_i et X_j respectivement et σ_i et σ_j leurs écart-types [14].

II.5.3.4. Transformation de la fonction d'état limite :

Lors du passage de l'espace physique à l'espace standardisé, le changement de base appliqué conduit à la relation suivante entre les gradients dans chaque espace :

$$\nabla G(u) = \nabla T^{-1}(x) * \nabla G(x) \tag{2.16}$$

Le jacobien de la transformation inverse $\nabla T^{-1}(\cdot)$ ne s'écrit de façon explicite que pour la loi normale et pour la loi log-normale. Pour toutes les autres lois de probabilité, un schéma numérique pour le calcul de ce dernier doit être employé [14].

II.5.4. Méthodes de recherche du point de conception :

II. 5.4.1. Approximation par un hyperplan : FORM (First Order Reliability method)

Cette méthode est appliquée dans l'espace normé U .

La résolution de $\beta = \sqrt{\sum_i u_i^2}$ sous la contrainte $H(u) = 0$ conduit à la détermination de β , et des cosinus directeurs de la direction P^*O notés α .

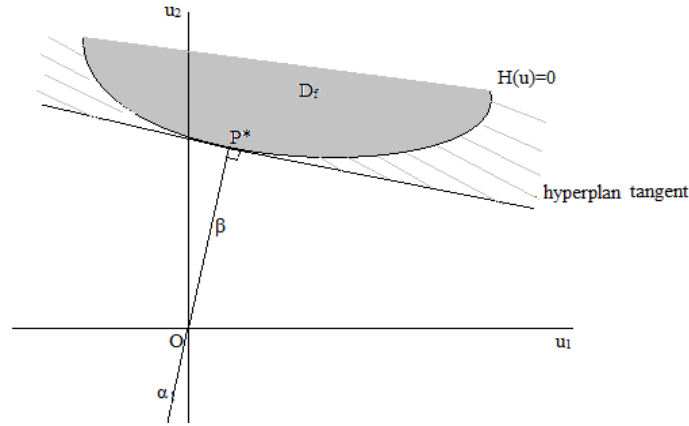


Figure II.3 : Principe de l'approximation FORM, construction de l'hyperplan tangent en P^* [11].

L'indice de fiabilité de Hasofer- Lind (Hasofer et Lind, 1974) [29], est défini comme la distance la plus courte entre la courbe d'état limite $H(u)$ dans l'espace normé réduit des variables aléatoires et l'origine du repère. Il est égal à la distance du point de défaillance u^* à l'origine du repère :

$$\beta_{HL} = \|u^*\| \quad (2.17)$$

Le point u^* est proportionnel au vecteur unitaire α^* , vecteur des cosinus directeurs, normal à la surface de défaillance en u^* , soit [11]:

$$u^* = \beta_{HL} \cdot \alpha^* \quad (2.18)$$

Le point u^* est déterminé comme la limite d'une séquence $(u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)}, \dots)$. Le vecteur unitaire normal à la surface de défaillance définie par $H(u)$ au point $u^{(m)}$ est noté $\alpha^{(m)}$. Le vecteur $\alpha^{(m)}$ est parallèle au vecteur gradient en $u^{(m)}$ et est dirigé vers le domaine de défaillance :

$$\alpha^{(m)} = - \frac{\nabla H(u^{(m)})}{\|\nabla H(u^{(m)})\|} \quad (2.19)$$

L'approximation FORM (First Order Reliability Method) consiste à associer à la valeur de β , la probabilité $\Phi(-\beta)$. Cette hypothèse revient à remplacer la surface d'état limite réelle $H(u) = 0$ par un hyperplan au point de conception (Figure II.3). L'équation d'un tel hyperplan est donnée par :

$$H(u) = \sum_i \alpha_i u_i + \beta = 0 \quad (2.20)$$

Par construction du point P^* (de coordonnées u^*) comme point situé à la distance minimale de l'origine, cet hyperplan est orthogonal au vecteur P^*O de cosinus directeur α_i .

∂D_f étant définie par l'équation implicite $H(u) = 0$, on est certain qu'un plan tangent existe au point P^* réalisant le minimum de la distance si :

1. H admet un gradient noté ∇H au point de coordonnées u^* .
2. $\nabla H(u)|_{u^*} \neq 0$.

Probabilité de défaillance :

Soit (2.20) un hyperplan dans l'espace U des variables normalisées, situé à une distance β de l'origine. Soit D_f le demi-espace délimité par (2.20) ne contenant pas l'origine. Alors la probabilité du domaine D_f est donnée par la relation :

$$P_f = \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta) \quad (2.21)$$

Dans laquelle Φ est la fonction de distribution de probabilité de la loi normale centrée à une dimension $N(0,1)$ [11].

II.5.4.2. Approximation par surface quadratique: SORM (Second Order Reliability Method)

La connaissance de la courbure de l'état limite au point P^* conduit à une correction asymptotique de l'approximation FORM, elle constitue une approximation SORM : Second Order Reliability Method.

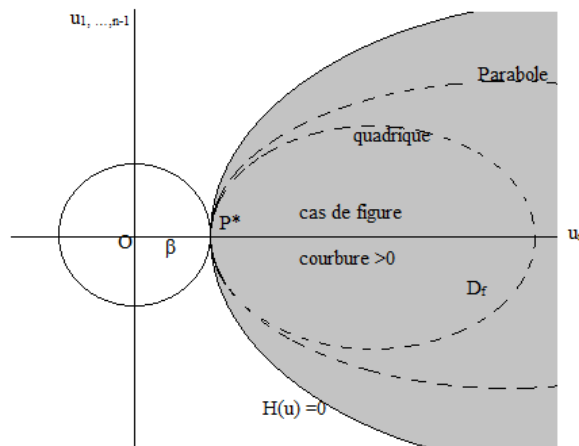


Figure II.4. Approximation SORM [11].

a) Asymptotique :

La signification de « asymptotique » dans ce cas, veut dire que si l'on effectue une affinité de l'espace (dilatation) par des coefficients de plus en plus grands, nous pouvons calculer la limite du coefficient de correction à appliquer à la probabilité donnée par la formule FORM pour obtenir une approximation tenant compte des courbures.

➤ **Formule de Breitung :**

Le sens de l'influence de la courbure sur la probabilité de défaillance est intuitivement facile à prévoir. La Figure II.4 montre qu'une courbure positive (convexe tournée vers

l'origine) à tendance à diminuer la probabilité de défaillance par rapport à l'approximation FORM.

Une approximation, pour $\beta \rightarrow \infty$, de la probabilité de défaillance est donnée par la formule de Breitung:

$$P_f = \Phi(-\beta) \left(\sum_{\alpha=1}^n \left(\prod_{j=1}^{n-1} (1 + \beta K_j^{(\alpha)}) \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (2.22)$$

Où les k_i représentent les courbures principales dans le repère orienté selon la direction P^* , les α sont les indices des points u^α tel que $\|u^\alpha\| = \beta$.

➤ **Approximation de Hohenbichler :**

Une amélioration a été apportée à la formule asymptotique de Breitung par Hohenbichler. Elle s'écrit :

$$P_f = \Phi(-\beta) \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\phi(\beta)}{\phi(-\beta)} k_j}} \quad (2.23)$$

➤ **Approximation de Tvedt :**

L.Tvedt a calculé les termes successifs d'une formule asymptotique. Le calcul est donné pour un seul point de conception, dont l'indice β .

Les trois premiers termes du développement asymptotique de la probabilité de défaillance :

$$P_f = A_1 + A_2 + A_3 + \dots \quad (2.24)$$

A_1 : premier terme, est calculé par la formule de Breitung (relation 2.22).

A_2 : utilisant les mêmes données et la densité ϕ de la loi normale de Gauss, vaut :

$$A_2 = (\beta\phi(-\beta) - \phi\beta) \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} (1 + \beta k_j)^{-\frac{1}{2}} - \prod_{j=1}^{n-1} [1 + (\beta + 1)k_j]^{-\frac{1}{2}} \right\} \quad (2.25)$$

A_3 utilise également les mêmes quantités :

$$A_3 = (\beta + 1)[\beta\phi(-\beta) - \phi\beta]C \quad (2.26)$$

avec :

$$C = \prod_{j=1}^{n-1} (1 + \beta k_j)^{-\frac{1}{2}} - \text{Re} \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} [1 + (\beta + i)k_j]^{-\frac{1}{2}} \right\} \quad (2.27)$$

On peut noter qu'un tel développement asymptotique n'est pas unique.

Re : désigne la partie réelle d'un nombre complexe [11].

b) Exacte sur forme quadratique :

Dans un espace U à n variables muni d'une distribution de probabilités Gaussienne, considérons les valeurs d'une forme quadratique Q . Les valeurs $Q(u)$ de cette forme quadratique pour $u \in U$ forment une variable aléatoire dont il est possible de calculer la loi de distribution en utilisant la fonction caractéristique.

En inversant la fonction caractéristique, on peut alors calculer la densité de probabilité et la distribution cumulée des valeurs de $Q(u)$, en particulier la quantité $\text{Prob}(Q(u) \leq 0)$ qui est la probabilité de défaillance cherchée [11].

II.5.5. Méthodes de simulation :

Simuler veut dire représenter un phénomène par un système équivalent. Les simulations numériques sont des représentations par des modèles numériques.

Simulation de Monté Carlo :

Les simulations de Monté Carlo constituent le moyen le plus coûteux, mais certainement le plus sûr, pour l'évaluation de la probabilité de défaillance, et permettent d'obtenir des résultats de référence. Ces méthodes de simulation constituent une méthode d'intégration qui, par rapport à l'intégration numérique, représente un moyen **économique** en choisissant seulement quelques points au hasard dans le domaine d'intégration au lieu de faire un balayage systématique dans toutes les directions. La valeur de l'intégration est ainsi déduite de l'espérance mathématique des tirages.

Les tirages sont effectués dans tout l'espace suivant la loi multi-normale (Figure II.5). L'intégrale à évaluer est :

$$P_f = \int_{D_f} \phi_n \, du_1 \, du_2 \, \dots \, du_n \quad (2.28)$$

Où P_f est la probabilité de défaillance, ϕ_n la fonction de densité multi normale de dimension n , et D_f est le domaine de défaillance défini par $H(u_k) \leq 0$.

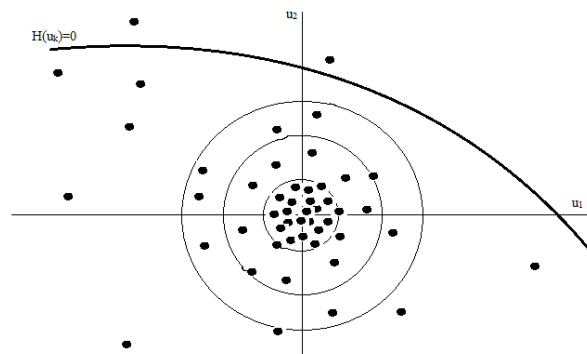


Figure II.5. Simulation de Monté Carlo.

Nous pouvons parler de six méthodes de simulation :

1. Simulation de Monté Carlo classiques (MC) (Figure II.6.a) ;
2. Tirages d'importance (IS) (Figure II.6.b) ;
3. Méthode du Pavé (PS) (Figure II.6.c) ;
4. Tirages adaptatifs (AS) (Figure II.6.d) ;
5. Simulations conditionnelles (CS) (Figure II.6.e) ;
6. Simulations Directionnelles (DS) (Figure II.6.f).

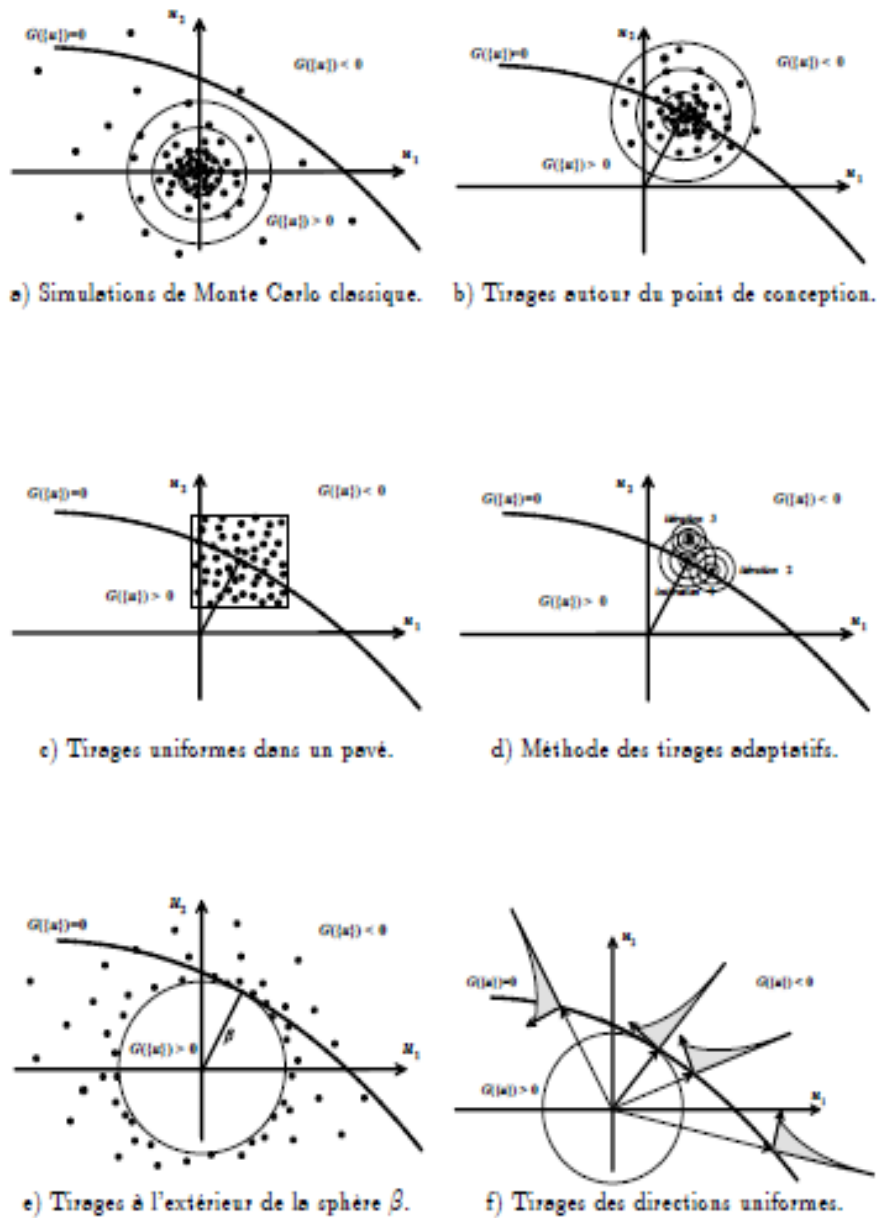


Figure II.6. Quelques méthodes de simulations Monté Carlo [17].

II.6. Mesures de sensibilité :

Les mesures de sensibilité sont très utiles pour l'ingénieur, puisqu'elles permettent de déterminer les paramètres les plus influents sur le système. L'importance d'une variable est considérée par rapport à deux objectifs :

- ✚ La sensibilité de la fonction de performance, évaluée à la configuration de fonctionnement du système. Nous l'appelons « *sensibilité mécanique* » car elle porte sur la transformation mécanique ;

- ✚ La sensibilité de l'indice de fiabilité, évaluée au point de conception. Nous l'appelons « *sensibilité fiabiliste* » car on s'intéresse à la variation de la fiabilité du système.

II.7. Fiabilité des systèmes mécaniques :

La défaillance d'un système mécanique ne dépend pas dans un cas général, d'un seul événement simple. Un scénario de défaillance est associé à une fonction d'état limite séparant le domaine de sureté du domaine de défaillance. Un composant est défini par un scénario de défaillance et un état limite. Une telle définition ne préjuge pas de la nature physique d'un composant. Il peut tout à fait correspondre à un composant physique mais cela n'est pas nécessaire.

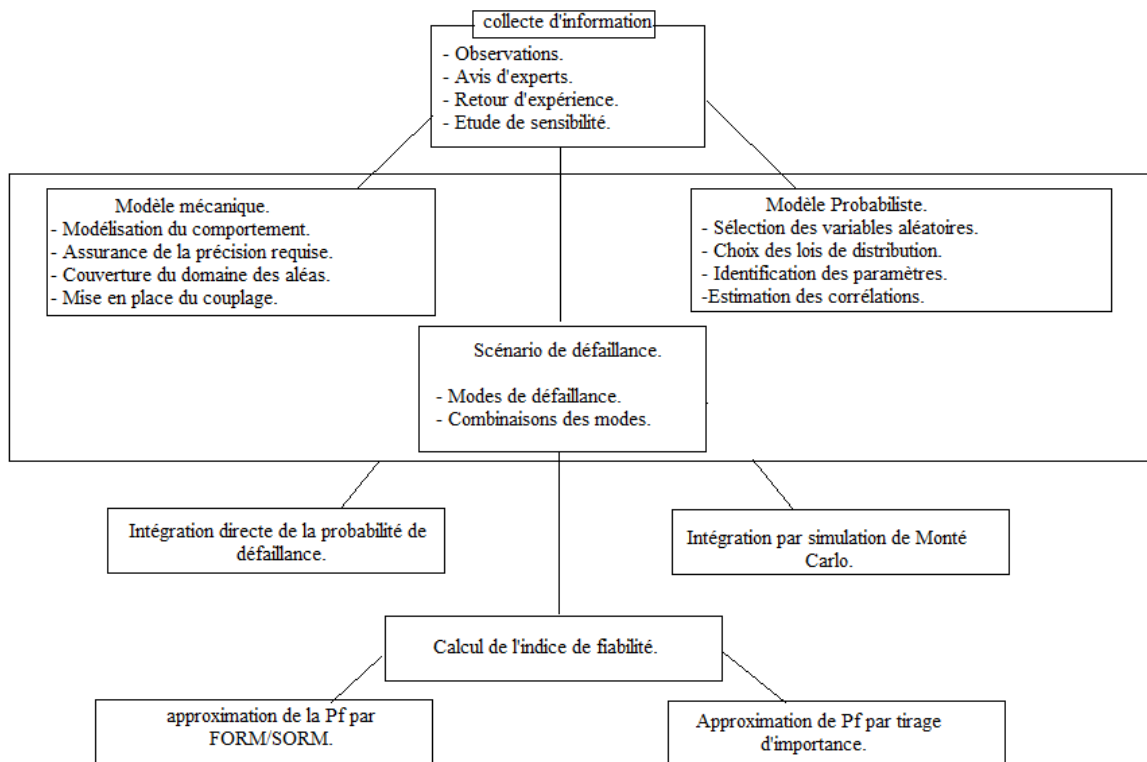


Figure II.7. Organigramme de l'analyse fiabiliste des systèmes mécaniques [18].

II.7.1. Arbre de défaillance :

Pour schématiser, il existe deux sortes de défaillances : les défaillances qui se sont déjà produites et celles que l'on ignore encore. Si la première catégorie justifie à elle seule le rôle de la maintenance, la seconde doit être une préoccupation permanente.

Un arbre de défaillance est composé d'événements reliés entre eux par des opérateurs logiques. Dans sa structure ascendante on trouve des événements de base, des événements intermédiaires puis le(s) événement(s) indésirable(s).

L'arbre, par définition, est composé de branches qui chacune mène, des événements de base à l'événement indésirable. Cette organisation graphique montre parfaitement les liens et

enchainements entre les événements et permet des analyses réduites et mieux ciblées sur certains déroulements causals.

L'esprit du modèle des arbres de défaillance est tout à fait comparable à celui qui préside à la construction des arbres des causes dans le domaine de l'analyse des accidents du travail [13].

Dans la figure ci-dessous, on peut voir l'arbre de défaillance d'une poutre bi-encastree :

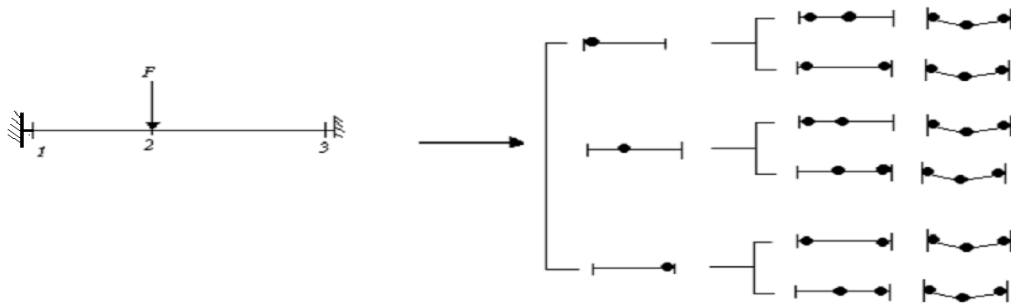


Figure II.8. Arbre de défaillance d'une poutre bi-encastree [15].

II.7.2. Modélisation des systèmes pour le calcul de la fiabilité :

Le calcul de la fiabilité d'un système dépend des fiabilités des composants et de la forme sous laquelle est représentée le scénario de défaillance, c'est-à-dire en série, en parallèle ou mixte :

Combinaison des modes de défaillances :

Afin de déterminer l'indice de fiabilité d'une structure entière, un indice de fiabilité est calculé pour chacune des composantes de la structure et pour chaque fonction d'état limite décrivant un mode de défaillance. Ces modes sont ensuite organisés en système, soit en série, en parallèle ou par une combinaison des deux (mixte) afin de représenter le comportement de la structure [16].

- **Combinaison en Série :**

Le système formé des événements E_i est un système en série si l'occurrence d'un seul événement entraîne la défaillance du système. La probabilité de défaillance du système, P_{f-syst} est alors la probabilité de l'**union** des événements de défaillance [11]:

$$P_{f-syst} = \text{Prob} (\cup_i E_i) \quad (2.29)$$

Pour n événements :

$$\text{Prob} (\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} P(E_i \cap E_j) + \dots + (-1)^n P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) \quad (2.30)$$

- **Combinaison en parallèle :**

Le système formé des événements E_i est un système parallèle si l'occurrence de la défaillance de tous les événements est nécessaire à la défaillance du système. La probabilité de défaillance du système P_{f-syst} , est alors la probabilité de l'**intersection** des événements de défaillance [11] :

$$P_{f-syst} = \text{Prob}(\cap_i E_i) \quad (2.31)$$

- **Combinaison mixte :**

Combinaison parallèle de systèmes séries [11] :

$$P_{f-syst} = \text{Prob} (\cap_j (U_i E_i)_j) \quad (2.32)$$

Combinaison série de systèmes parallèles [11] :

Beaucoup de systèmes mécaniques peuvent être représentés par la combinaison série des combinaisons parallèles:

$$P_{f-syst} = \text{Prob} (U_j (\cap_i E_i)_j) \quad (2.33)$$

Le portique bi- encastré ci-dessous illustre ce cas de combinaison :

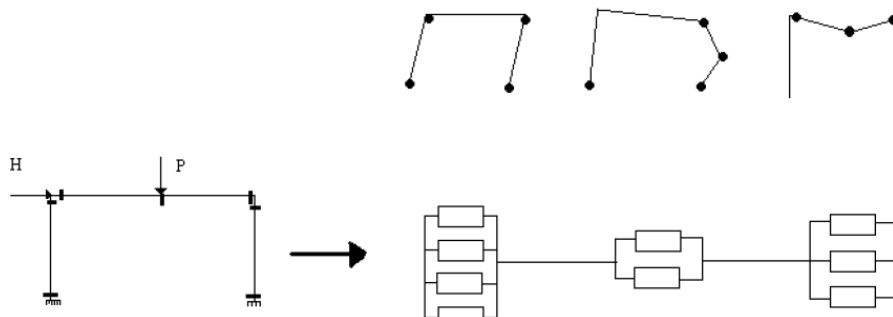


Figure II.9. Bi-encastré représenté par un système série-parallèle [15].

Calcul de la fiabilité du système :

La relation entre les taux de défaillance des blocs et la fiabilité du système est affaire une de modélisation mathématique. En supposant que la fiabilité prévisionnelle ne permet pas d'atteindre l'objectif fixé pour le système, il faut assigner à chacun des blocs des objectifs de fiabilité plus exigeants (moindre taux de défaillance ou moindre temps d'indisponibilité) [12].

II.7.3. Bornes de la probabilité de défaillance d'un système :

- **Bornes uni-modales :**

Les bornes sont dites uni-modales si elles ne font intervenir que les probabilités des événements simples, de type $P(E_i)$ et le signe de leurs dépendances (il faut que toutes les corrélations soient de même signe) [15].

Cas des dépendances positives:

Pour k événements corrélés tous positivement :

$$P(\bar{E}) = P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \dots \cap \bar{E}_j) = P(\cap_{i=1}^k \bar{E}_i) \geq \prod_{i=1}^k P(\bar{E}_i) \quad (2.34)$$

Pour obtenir la défaillance du système série, il suffit de revenir aux événements E_i :

$$\text{Corrélation} > 0, \max P(E_i) \leq P(E) = P(\cup E_i) \leq 1 - \prod_{i=1}^k (1 - P(E_i)) \quad (2.35)$$

Cas des dépendances négatives :

$$\text{Corrélation} < 0, 1 - \prod_{i=1}^k (1 - P(E_i)) \leq P(E) = P(\cup E_i) \leq 1 \quad (2.36)$$

- **Bornes bi-modales :**

Les bornes bi-modales sont obtenues à partir des probabilités des événements pris un par un et des probabilités des événements pris deux à deux.

$$P(E_1) + \sum_{i=2}^k \max (P(E_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(E_i \cap E_j) ; 0) \leq P(E) \leq \sum_{i=1}^k P(E_i) - \sum_{i=2}^k \max P(E_i \cap E_j) \quad (2.37)$$

Dans cette expression $P(E_1) = \max_i P(E_i)$. Son application repose sur l'estimation des probabilités $P(E_i \cap E_j)$, ce qui est possible en approximation FORM, qui revient à remplacer l'état- limite réel par son approximation linéaire au point de défaillance le plus probable dans l'espace des variables normées centrées. L'événement E_i est donc représenté par son indice de fiabilité β_i et l'hyperplan $Z_i = a_{0i} + \langle a_i \rangle \{u\} = 0$ [11].

II.8. Conclusion :

La méthode la plus universellement adoptée pour quantifier la fiabilité repose sur le calcul des probabilités. La normalisation a reconnu le lien direct entre la notion de fiabilité et sa mesure par une probabilité [11].

Les produits d'une analyse fiabiliste dans le domaine des structures, sont principalement :

- La probabilité de défaillance (ou l'indice de fiabilité), qui est toujours conditionnée par un scénario de défaillance mécanique, et une modélisation mécanique des données ;

- Les facteurs d'importance, résultats de l'analyse de sensibilité, très importants car ils permettent d'avoir une idée claire sur le comportement mécano-fiabiliste et nous permettent d'avoir des informations sur la contribution de chacune des variables de conception sur la fiabilité de l'ouvrage étudié.

Ces deux produits devront être les résultats d'un travail d'optimisation entre un code probabiliste (qui tiendra compte des incertitudes sur les variables de conception) et d'un code mécanique, qui lui définira le scénario de défaillance mécanique à considérer. Ce jumelage se fera grâce à l'une des méthodes du couplage mécano-fiabiliste.

CHAPITRE III

Couplage mécano-fiabiliste

CHAPITRE III

Couplage mécano-fiabiliste

III.1. Introduction :

Au cours de la dernière décennie, les méthodes fiabilistes ont montré leur capacité à pouvoir analyser des systèmes mécaniques de plus en plus complexes. Cette efficacité s'appuie sur la mise en place des méthodes de « *couplage mécano-fiabiliste* » permettant de traiter les modèles numériques des structures réelles. Dans le schéma du couplage, le modèle numérique (tel que la méthode des éléments finis), fournit la réponse mécanique permettant de vérifier l'état limite de défaillance.

L'optimisation des structures est indispensable pour concevoir des systèmes de plus en plus performants. Or, l'optimisation a une influence certaine sur la confiance que l'on peut accorder à la structure. L'objet de l'optimisation mécano-fiabiliste est de rechercher le meilleur compromis entre la réduction du coût et l'assurance de la fiabilité. L'assurance de la fiabilité des structures est un critère fondamental quand il s'agit de faire un choix au niveau de la conception et de la maintenance.

Nous pouvons citer trois variantes de ce type d'optimisation :

- Minimiser le coût pour satisfaire un niveau de fiabilité cible ;
- Maximiser la fiabilité en respectant un coût cible ;
- ou bien, minimiser le ratio : Coût / Fiabilité.

Dans ces trois cas, on cherche à mieux répartir la matière dans la structure en tenant compte des incertitudes et des aléas affectant l'état de la structure.

Nous développerons dans ce chapitre les grands titres du « *mariage* » éléments finis/fiabilité, des difficultés d'un tel « *mariage* », mais surtout du principe de fonctionnement d'un tel couplage.

III.2. Propagation de l'aléa dans le modèle mécanique :

III.2.1. Transformations mécano-fiabiliste :

Le schéma de l'analyse mécano-fiabiliste commence par la définition de l'aléa et de son rôle dans le fonctionnement mécanique du système. Les aléas qui nous intéressent correspondent aux variables de conception X_i pour lesquelles nous disposons d'une information plus ou moins approfondie. Chaque réalisation de ces variables constitue un jeu de données pour le modèle mécanique (généralement décrit par éléments finis), pour lequel une réponse mécanique est obtenue. Il est souvent possible d'écrire la fonction de performance sous la forme :

$$G(x_i) = R(x_i) - S(x_i) \quad (3.1)$$

Où $R(x_i)$ et $S(x_i)$ sont respectivement les fonctions implicites de résistance et de sollicitation. La fonction de performance $G(\cdot)$ assure la liaison entre l'espace des données et l'espace des réponses, c'est pour cela qu'elle est appelée *transformation mécanique* (Figure III.1).

Etant donnée la relation implicite entre les différentes variables du modèle, la réponse complète de la structure ne peut être évaluée que point par point. Rappelons que cette transformation mécanique est généralement non linéaire même si le comportement mécanique lui-même est linéaire.

Lorsque les deux arguments de $G(\cdot)$ deviennent aléatoires, la fonction de performance devient elle-aussi aléatoire ; dans ce cas, elle intègre les deux transformations mécanique et probabiliste, qui jouent des rôles amplificateurs ou réducteurs de l'importance des variabilités des données [17].

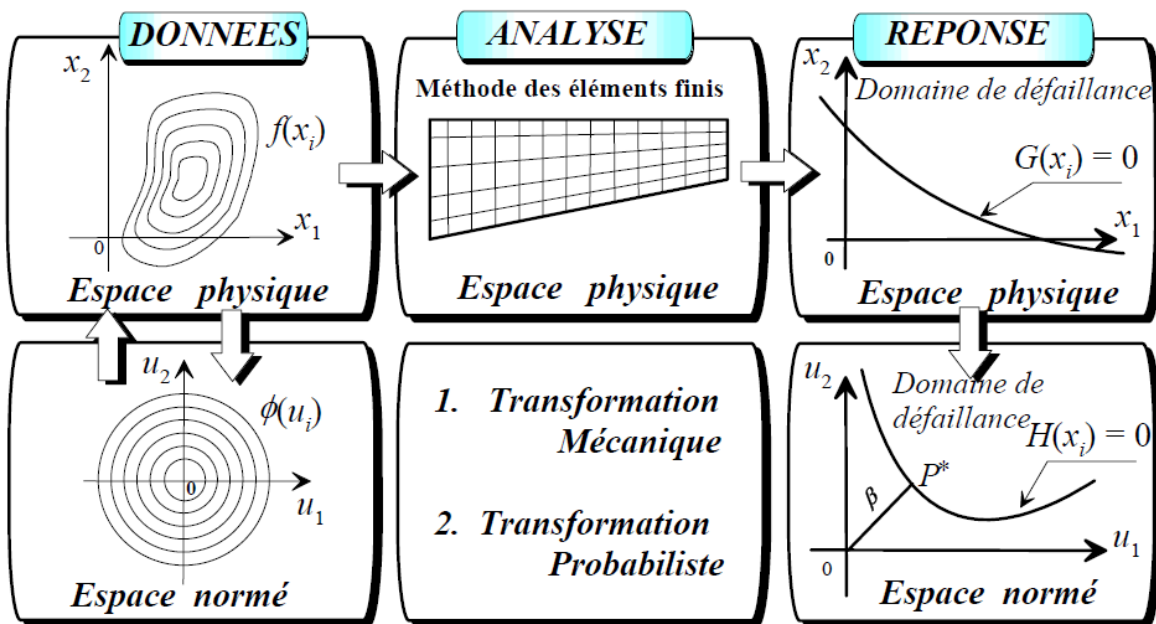


Figure III.1. Transformation mécanique et fiabiliste dans le schéma du couplage

III.2.2. Aléas dans le modèle mécano-fiabiliste :

Dans l'analyse mécanique, les variables du modèle sont introduites pour définir les dimensions géométriques, les propriétés des matériaux, les actions extérieures et éventuellement les conditions aux limites (Figure III.2). Etant donné que l'impact des incertitudes dépend de la nature de l'aléa, le concepteur doit distinguer deux catégories de variables selon la dépendance de l'état de la structure [17].

III.2.2.1. Aléas externes :

Les aléas qui n'affectent pas l'état interne de la structure sont appelés : *aléas externes*.

A titre d'exemple, nous pouvons citer :

- Les actions naturelles (vent, neige, température,...).
- Les charges de fonctionnement (charges permanentes, charges d'exploitation, ...).

Notons que les forces sismiques et les charges suivieuses n'appartiennent pas à cette catégorie, puisqu'elles interagissent avec l'état structural [17].

III.2.2.2. Aléas internes :

Les aléas dont la variabilité dépend et/ou modifie l'état de la structure sont appelés : *aléas internes*.

Parmi ces aléas, nous avons tous les paramètres intervenant dans le calcul de la rigidité structurale; telles que :

- Les propriétés des matériaux : module d'élasticité, coefficient de Poisson, masse volumique, coefficient de dilatation thermique, ... ;
- Les variables géométriques : elles sont simples telles que les dimensions, ou composées telles que les aires et les inerties ;
- Les conditions aux limites et liaisons internes.

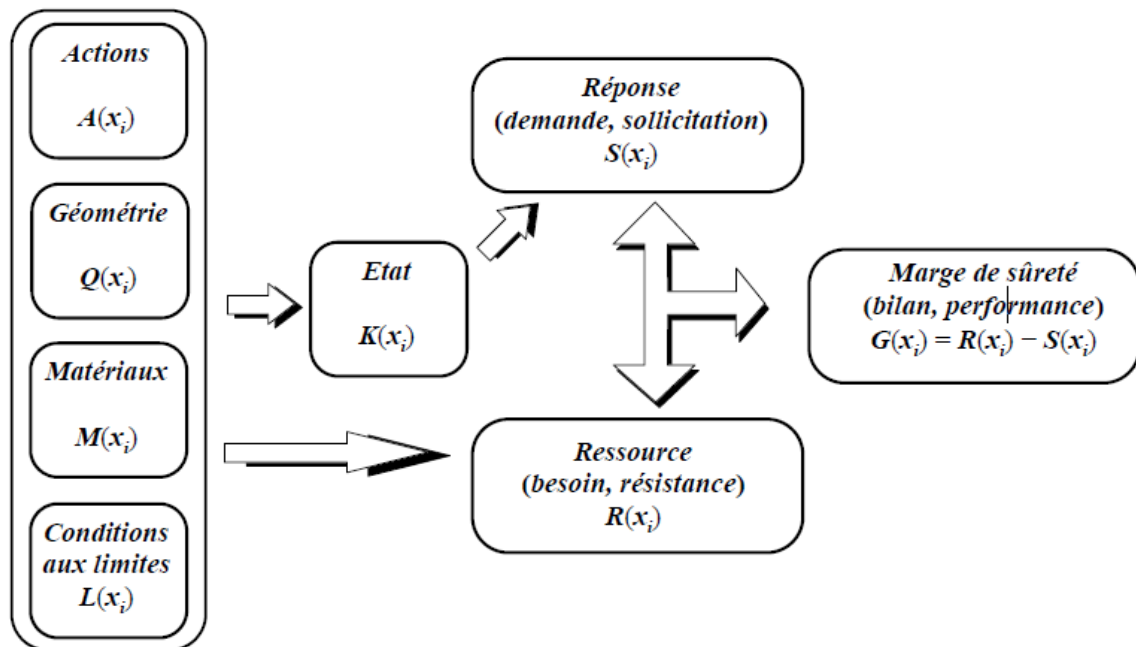


Figure III.2. Flux des aléas entre les données et la marge [17].

Il est évident que le traitement de l'aléa interne pose beaucoup plus de difficultés que l'aléa externe qui peut être complètement découplé de l'état structural.

La propagation des incertitudes dans le modèle mécano-fiabiliste dépend directement des relations entre les différentes variables. Dans ce contexte, la contribution de chacune des

variables présente un double sens : mécanique et probabiliste ; le traitement des variables doit s'adapter à leur nature et aux liens entre elles (Figure III.3).

Nous pouvons classer les variables du modèle comme suit [17]:

1/ *Variables élémentaires* : Ce sont des variables du niveau le plus bas ; elles sont déclarées par une simple affectation d'une valeur numérique. Dans le modèle probabiliste, ces variables peuvent être probabilisées.

2/ *Variables fonctions de variables déterministes* : Les variables sont déclarées par une fonction faisant intervenir d'autres variables qui sont déterministes sur toute l'arborescence jusqu'au niveau des variables élémentaires. Ces variables peuvent se faire attribuer des lois probabilistes avec les paramètres définis par l'arborescence déterministe ; ce schéma permet donc d'effectuer une étude paramétrique.

3/ *Variable fonctions d'au moins une variable aléatoire* : Ces variables sont fonctions implicites ou explicites de l'aléa du modèle. Du point de vue probabiliste, ces variables sont déjà aléatoires, leur distribution est définie par la combinaison des variables aléatoires en argument.

4/ *Variables-résultat du calcul éléments finis* : Certaines variables sont le résultat de l'analyse effectuée par le code EF, par exemple les contraintes en un point donné. D'une manière générale, les variables-résultat qui nous intéressent sont celles qui interviennent dans l'expression de la fonction de performance (ce qui représentent généralement une forme de sollicitation). Ces variables sont donc fonction de variables aléatoires, d'où l'intérêt du couplage mécano- fiabiliste.

5/ *Variables composées* : c'est le cas des variables dont les paramètres de loi dépendent d'autres variables aléatoires. Pour ces variables, les paramètres de distribution sont définis par des fonctions explicites des autres variables du modèle. Du point de vue probabiliste, ces variables sont aléatoires avec des paramètres aléatoires. Il faut donc garder en mémoire toute l'arborescence de

composition ainsi que les fonctions de variables aléatoires jusqu'au niveau des variables élémentaires

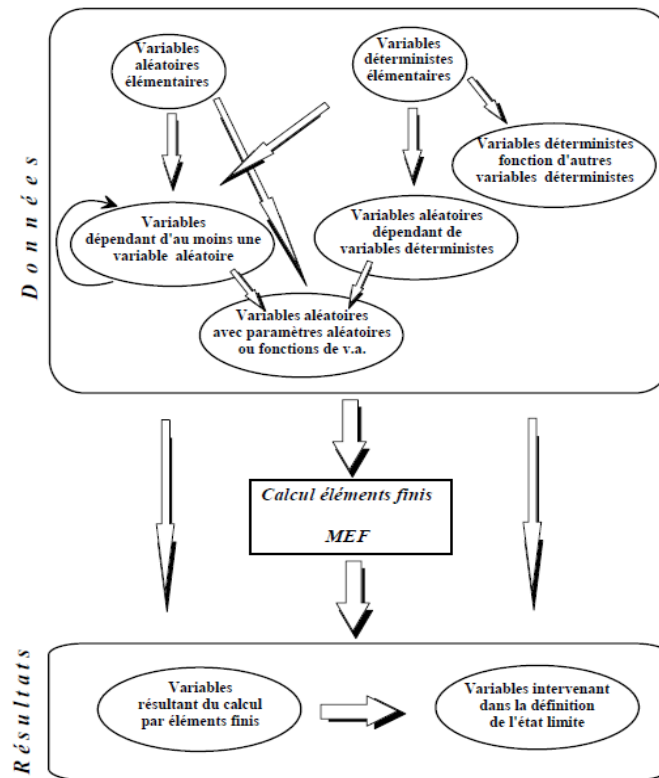


Figure III.3. Flux des variables dans le modèle mécano- fiabiliste [17].

III.3. Eléments finis et fiabilité :

Lorsque la structure est modélisée par éléments finis, le calcul de sa fiabilité peut être mené par une des deux approches suivantes (Figure III.4).

III.3.1. Couplage mécano-fiabiliste :

Il s'agit de l'intégration de l'analyse fiabiliste et de la modélisation mécanique dans un même outil, en vue de l'évaluation des informations fiabilistes (P_f , facteurs d'importance,...). Dans cette famille, nous distinguons trois méthodes :

- a) La méthode de l'optimisation équivalente : qui consiste à formuler le problème sous un schéma d'optimisation standard.
- b) La méthode directe : qui fait appel au calcul EF point- par-point.
- c) La méthode de surface de réponse : qui substitue le modèle EF par une surface approchée sur laquelle les appels fiabilistes sont effectués.

III.3.2. Eléments finis stochastiques :

L'objectif de cette approche est de déterminer les caractéristiques probabilistes de la réponse mécanique en fonction de celles données. En général, nous nous intéressons aux moments statiques de la réponse (contrainte, déplacement,...). Cette méthode est bien adaptée aux problèmes de champs stochastiques, mais elle nécessite un développement particulier.

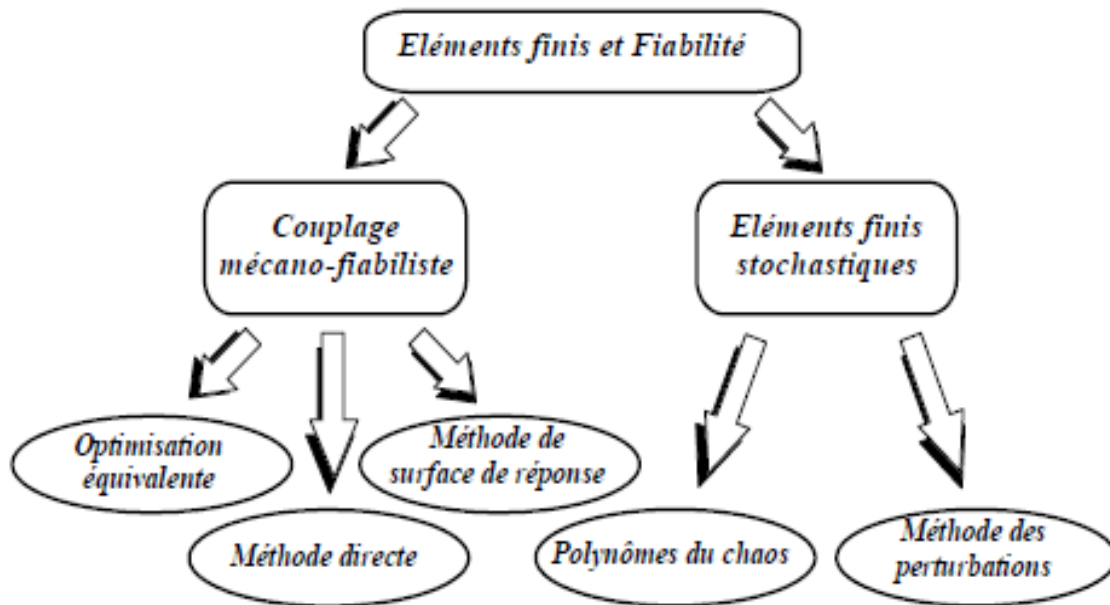


Figure III.4. Méthodes d'analyse de la fiabilité pour des modèles éléments finis [17].

Le couplage des modules mécanique et fiabiliste peut être bien assimilé à un 'mariage', dans lequel les deux partenaires visent un objectif commun de *performance*, tout en gardant chacun ses spécificités. Le critère de meilleure performance est jugé par quatre mesures : *généralité*, *efficacité*, *précision* et *robustesse*.

- La *généralité* est la capacité de traiter un problème général avec des outils standards.
- L'*efficacité* est la mesure de l'effort nécessaire pour arriver à la solution recherchée (cela se traduit par le temps de calcul ou par le nombre d'appels mécaniques). Il est important de rappeler que le coût de l'analyse couplée est principalement dû au nombre d'appels EF nécessaire pour aboutir à la convergence ; en d'autres termes, le temps de l'analyse mécanique par EF est beaucoup plus long que celui du traitement fiabiliste des informations.
- La *précision* correspond à l'intervalle d'erreur tolérée sur le résultat final.
- La *robustesse* est la capacité de trouver la bonne solution quelles que soient les conditions initiales de l'algorithme [17].

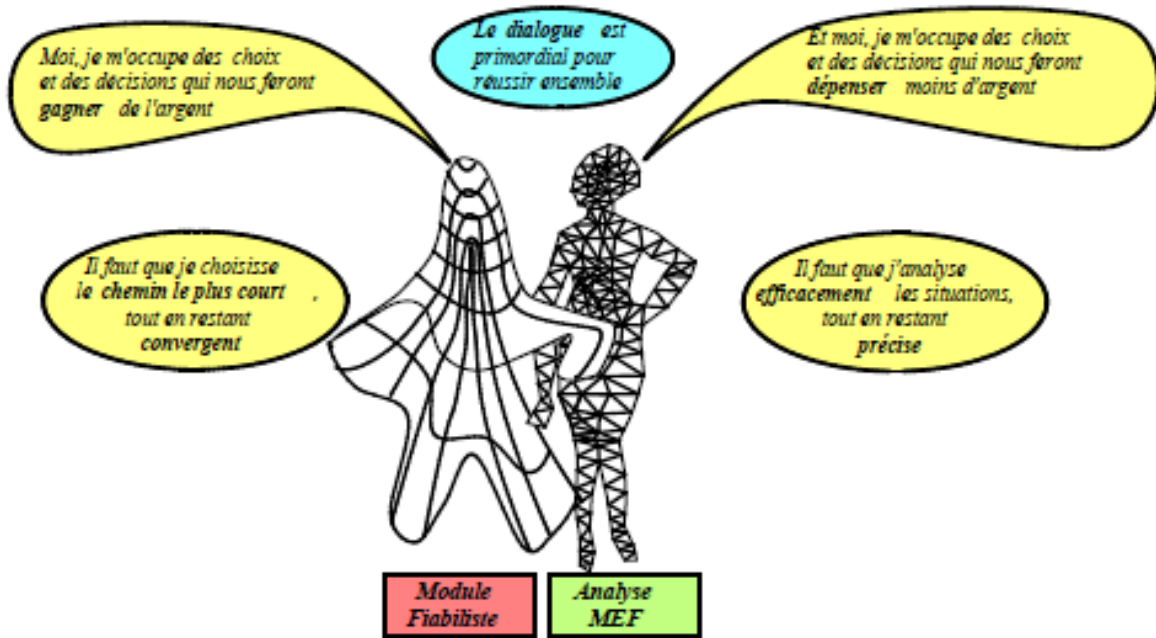


Figure III.5. Mariage fiabilité et MEF [17].

III.4. Méthode de l'optimisation équivalente :

Cette approche repose sur le fait que la recherche du point de conception est un problème d'optimisation particulier. Si le code éléments finis dispose d'un module d'optimisation, il sera possible de lui laisser la charge de rechercher le point de conception, et par conséquent l'indice de fiabilité. Les difficultés de convergence rencontrées provenant essentiellement du fait que le module d'optimisation fonctionne dans un repère unique alors que les méthodes de fiabilité manipulent des informations réparties dans deux espaces : physique et normé.

Le problème brut consiste en une minimisation sous contrainte:

$$\text{Minimiser } u_i : d(u_i) \text{ sous } G(x_j) \leq 0 \quad (3.2)$$

où $d(u_i) = \sqrt{\sum_i u_i^2}$ est la distance entre l'origine de l'espace normé et une réalisation quelconque, et $G(x_j)$ est la fonction de performance définie dans l'espace physique. Il est clair que ce genre de problème ne pourra pas être résolu correctement par un module d'optimisation standard pour deux raisons : La première est que le problème est défini en fonction de deux types de variables u_i et x_j représentant les deux espaces normé et physique, elles sont liées par la transformation isoprobabiliste T .

Pour résoudre ces difficultés, le problème d'optimisation est redéfini sous une des trois formes décrites sur la Figure III.6, les problèmes correspondants sont donnés par (le

Tableau III.1):

Tableau III.1. Formulations du problème de fiabilité [17].

Espace normé	Espace physique	Espace mixte
Trouver : u_i qui minimise : $d(u_i)$ sous : $H(u_i) = 0$	Trouver : x_i qui minimise : $d_\beta(x_i)$ sous : $G(x_i) = 0$	Trouver : u_i et x_i qui minimise : $d(u_i)$ sous : $G(x_j) = 0$ et : $u_i - T_i(x_j) = 0$

Dans ce tableau, $d_\beta(x_i)$ correspond à l'image dans l'espace physique de la distance $d(u_i)$ et $T_i(x_i)$ la transformation isoprobabiliste. Malgré l'équivalence mathématique stricte de ces trois formulations, leurs performances numériques sont très différentes et dépendent principalement du module d'optimisation utilisé. L'avantage de la formulation dans l'espace normé réside dans la manipulation de quantités adimensionnelles où l'ordre de grandeur est plus ou moins maîtrisé. Par contre, la maîtrise de la précision des dérivées numériques n'est possible que dans l'espace physique, d'où l'intérêt de la deuxième formulation. La formulation dans l'espace mixte combine les avantages des deux premières formulations, au prix d'une augmentation du nombre de variables mises en jeu. Cette formulation permet également une certaine liberté sur la condition de transformation isoprobabiliste ; cette liberté peut être interprétée comme erreur, mais elle peut favoriser la convergence dans certains cas où la précision des sorties EF reste insuffisante.

Le schéma de l'analyse consiste à reformuler le problème de fiabilité dans le module d'optimisation du code EF ; pour cela, une des trois formulations ci-dessus (Tableau III.1) est sélectionnée. De manière classique et selon le format du code de calcul, l'utilisateur lance la procédure d'optimisation standard, qui doit converger en fournissant les résultats fiabilistes : indice de fiabilité, point de conception et éventuellement surface de réponse. Pour ces résultats, un post-traitement peut être effectué pour l'approximation du premier ou du second ordre de la probabilité de défaillance. Notons que lorsque la transformation isoprobabiliste ne peut pas se calculer explicitement, le code de calcul doit permettre de dialoguer avec un programme extérieur pour les opérations de changement d'espace.

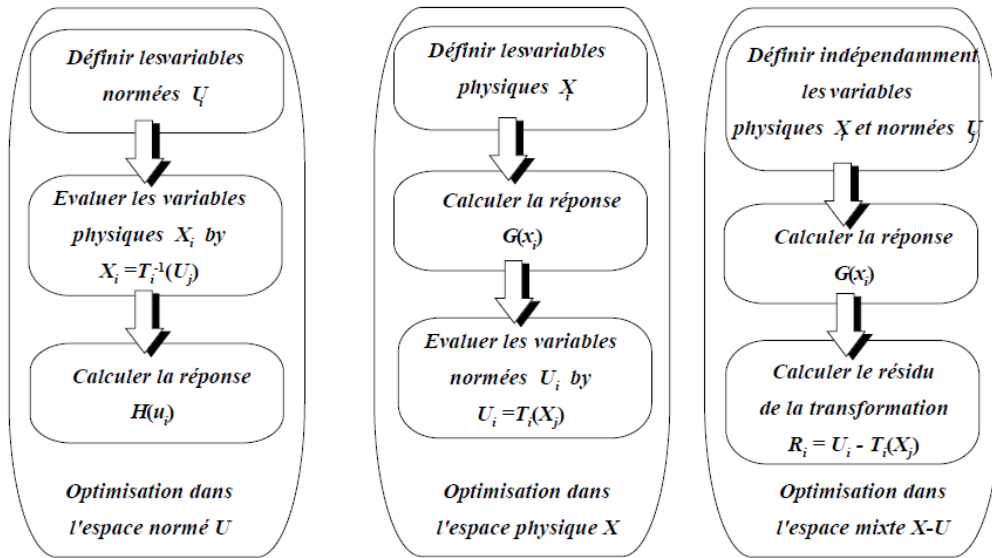


Figure III.6. Formulations possibles du problème mécano-fiabiliste dans un code EF [17].

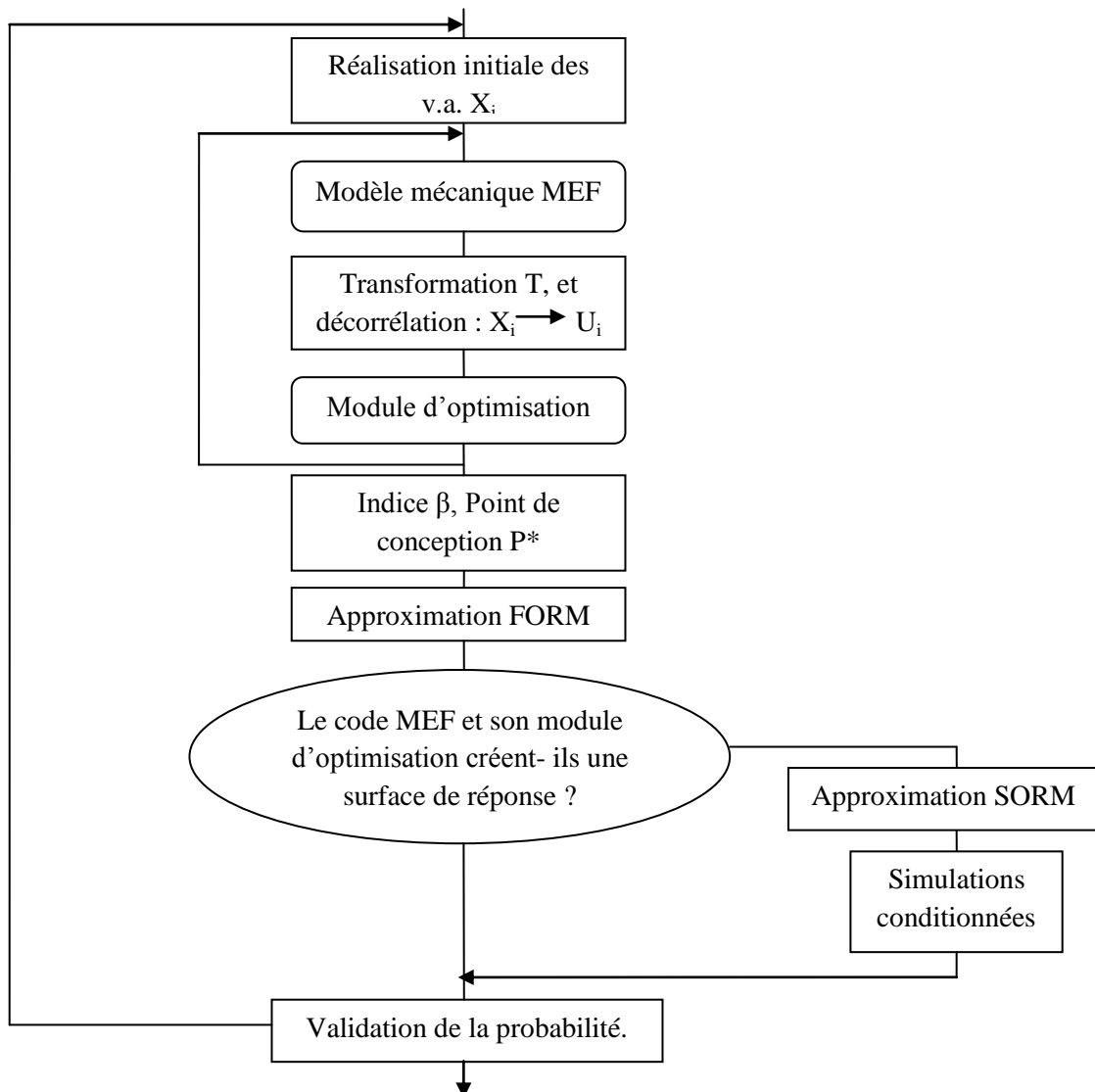


Figure III.7. Pilotage par module d'optimisation [11].

III.5. Méthodes directes :

Cette méthode est basée sur la recherche du point de conception, par le pilotage des calculs EF dans l'espace normé. D'une manière générale, les algorithmes sont basés sur l'utilisation des gradients pour déterminer la direction de descente. Ces algorithmes sont en général performants car ils tiennent mieux compte de la spécificité du problème fiabiliste. Dans le schéma d'analyse, nous commençons par l'évaluation de la fonction de performance et de son gradient, en vue de définir la direction de recherche du point de conception. Le calcul de la fonction de performance et de son gradient représente un coût de calcul important, puisqu'il implique des appels au code EF. Le nouveau point est ensuite utilisé pour la nouvelle itération et ainsi de suite jusqu'à la convergence de la solution. Pour l'estimation de la probabilité de défaillance, des approximations FORM /SORM sont utilisées. Dans le cas du second ordre SORM, des appels supplémentaires au code EF sont effectués en vue du calcul des courbures [17].

La (Figure III.8) récapitule l'enchaînement des étapes et souligne les appels au code MEF :

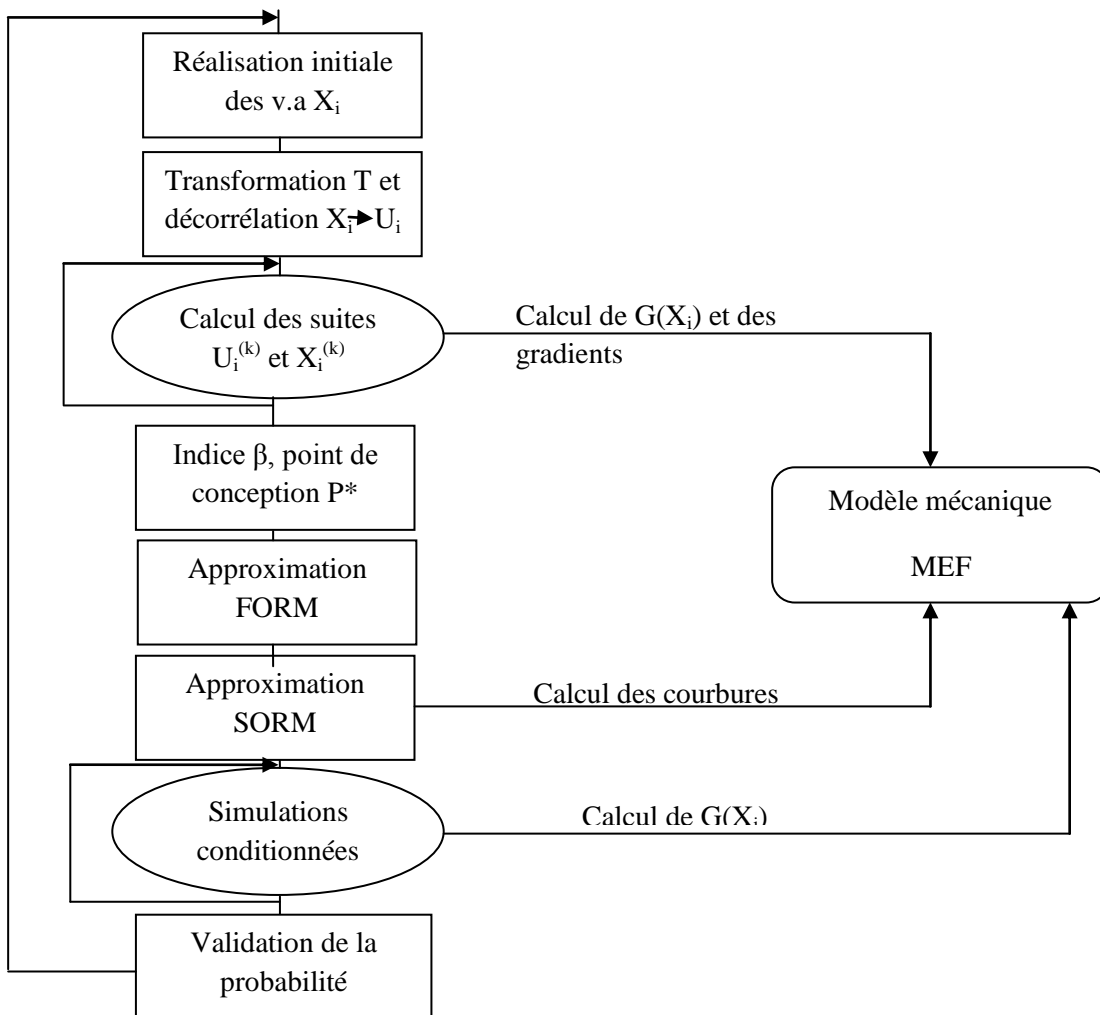


Figure III.8. Couplage par méthode directe [11].

III.6. Méthode de surface de réponse :

Dans le cas des réponses mécaniques complexes (non linéarité, irrégularité, discontinuité des pentes,...), une alternative intéressante est proposée par la construction d'une surface de réponse qui se substitue au modèle implicite, en l'occurrence le modèle éléments finis [17]. L'intérêt essentiel de cette méthode réside dans le découplage numérique entre le modèle mécanique et le modèle fiabiliste. Alors que l'inconvénient principal résulte du fait que les calculs fiabilistes sont effectués avec un modèle mécanique approché [11].

Le calcul de fiabilité nécessite, par quelque méthode que ce soit, un nombre toujours important d'évaluation de réalisations de la fonction d'état limite $G(X_i)$. Ce nombre apparaît comme un bon indicateur d'efficacité de la méthode, chaque réalisation pouvant résulter d'un modèle complexe associé à une solution numérique lourde. Il est indispensable d'en limiter le nombre total. Pour cela, une des méthodes possibles est de construire une représentation analytique simple dans un voisinage du point de conception. Le nom de surface de réponse (SR) est donné à une telle représentation. Son intérêt réside dans une forme explicite sur laquelle le calcul de fiabilité est grandement simplifié et d'un coût quasi nul; sa difficulté est alors de justifier l'approximation dans un domaine donné.

Pour cela, deux approximations sont à traiter :

- Choisir une base de développement de la SR et identifier les coefficients inconnus.
- Construire la SR autour du point de défaillance le plus probable.

❖ Base de développement de la SR :

Trois cas sont à considérer selon les informations disponibles :

1. Le modèle mécanique conduit à une forme explicite de la SR dépendant de l paramètres. Il suffit alors d'identifier les l paramètres à partir de l calculs en veillant à ce que le système d'équations soit bien conditionné. Une telle situation se présente lorsque des coefficients d'influence indépendants des variables aléatoires peuvent être calculés.
2. Une étude théorique donne des indications sur la forme de la SR. C'est le cas par exemple d'un développement limité de la réponse autour d'un point (série de Taylor). C'est également le cas lorsque des théories simplifiées existent à côté de modèles plus précis (RDM avant calcul MEF en élasticité).
3. En absence d'informations, la SR doit être construite en aveugle. Une base a priori est choisie et les coefficients sont identifiés par interpolation ou par régression. Nous plaçons dans ce cas, c'est un développement sur une base polynomiale qui paraît le plus efficace actuellement (retenue par la majorité des auteurs). Le degré $d = 2$ (surface de réponse quadratique, SRQ) correspond alors à un bon compromis, puisqu'il inclut un calcul possible des courbures et qu'il évite des oscillations toujours possibles avec un degré élevé.

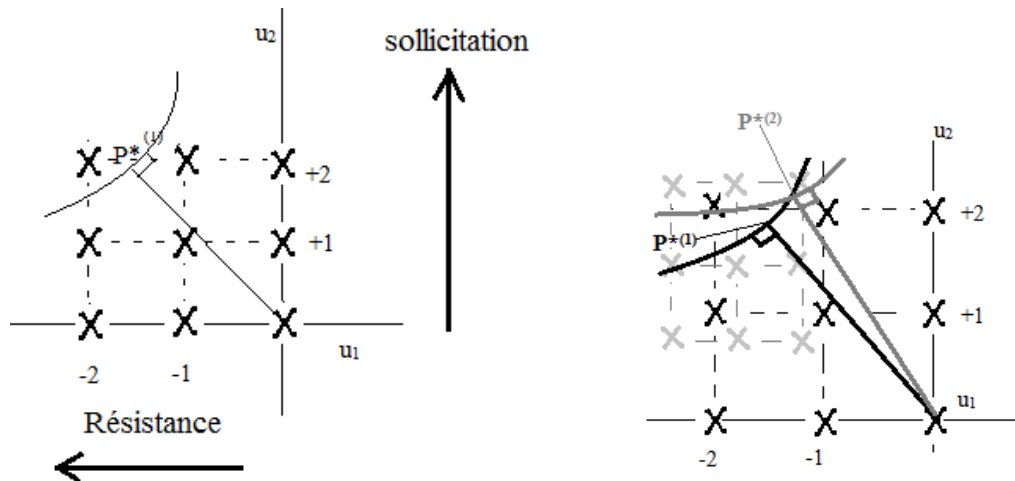


Figure III.9. Deux plans d'expériences successifs [11].

❖ **Construction de la SR : Plan d'expériences « orienté » :**

La base du développement de la SR étant choisie, il faut la construire autour du point de défaillance le plus probable P^* dont la position est inconnue. La solution proposée consiste à rechercher une suite de points $P^{*(s)}$ associée à une suite de SR(s) dont le domaine de définition contient finalement $P^{*(s)}$.

Un plan d'expériences numériques (PEN) définit les réalisations à calculer, au minimum l' pour une interpolation mais un nombre plus élevé est nécessaire pour garantir la qualité de l'approximation.

La théorie des plans d'expériences propose des plans classiques et des plans tabulés (utilisation de tables prédéfinies).

De tels plans ont été testés sur des exemples de référence et ont conduit à des résultats satisfaisants montrant leur aptitude à converger vers la solution exacte après suffisamment de pas. Cependant, cette première approche ne prend pas en compte ce que le concepteur mécanicien sait du fonctionnement de la structure étudiée. En effet, pour la plupart des variables aléatoires, le caractère résistant ou sollicitation est connu et le sens du décalage de la médiane vers le point de défaillance est donc connu a priori. De tels plans, qui incluent toute la connaissance experte du concepteur, sont dits orientés et ils sont à privilégier en phase de démarrage alors que les plans centrés sont à construire autour du point de défaillance quand sa position est confirmée.

Le choix d'un premier plan d'expériences permet de construire une première surface de réponse et donc d'obtenir un premier point $P^{*(1)}$. L'analyse des résultats permet d'introduire de nouvelles expériences autour de ce premier point pour répéter le processus par translation ou projection du PEN. La Figure III.9. illustre la construction. Le premier plan (à gauche), à un écart type, est orienté par le caractère résistance ou sollicitation. Il conduit à l'obtention du

point $P^{*(1)}$. Centré sur ce point nous construisons un deuxième plan (à droite), à 0.75 d'écart-type, qui donne le point $P^{*(2)}$.

❖ **Choix de l'espace de travail :**

Compte tenu du schéma de résolution des problèmes de fiabilité, deux possibilités sont offertes pour construire une SR dans l'espace physique ou dans l'espace normé.

Espace physique : Se placer dans l'espace physique présente l'intérêt de traiter directement des solutions physiquement réalisables, ce qui reste près des habitudes du concepteur. Cependant, le choix des points physiques peut conduire à des points très éloignés de l'origine dans l'espace normé ou, au contraire, à des points presque confondus selon l'importance de l'écart-type.

Espace normé : Travailler directement dans l'espace normé garantit un choix de variables autour d'un point, distant d'un nombre d'écart-types bien contrôlé, ce qui favorise le bon conditionnement numérique. Le domaine de validité de la SR est bien connu. Cependant, le point physique origine peut ne pas être physiquement admissible. On recherche alors des solutions physiques aberrantes, d'où l'importance d'examiner le caractère réaliste ou non des origines physiques des points de calcul.

Remarque :

Evaluation numérique des gradients : La plupart des procédures de calcul mécano-fiabilistes demandent le calcul des gradients pour définir la direction de descente qui minimise la fonction objectif (distance entre l'origine et l'état limite). Lors du couplage mécano-fiabiliste, ce gradient peut être obtenu par différences finies numériques (méthode directe) ou par dérivation d'une fonction explicite approchée de l'état limite (méthode de SR).

Dans le contexte des éléments finis, que les variables aléatoires soient des variables nodales ou des amplitudes d'un développement en série, il est intéressant de calculer si possible directement les dérivées de quantités par rapport à ces variables. De tels calculs sont nécessaires pour une analyse de sensibilité mais également pour une mise en œuvre efficace des algorithmes de fiabilité [11].

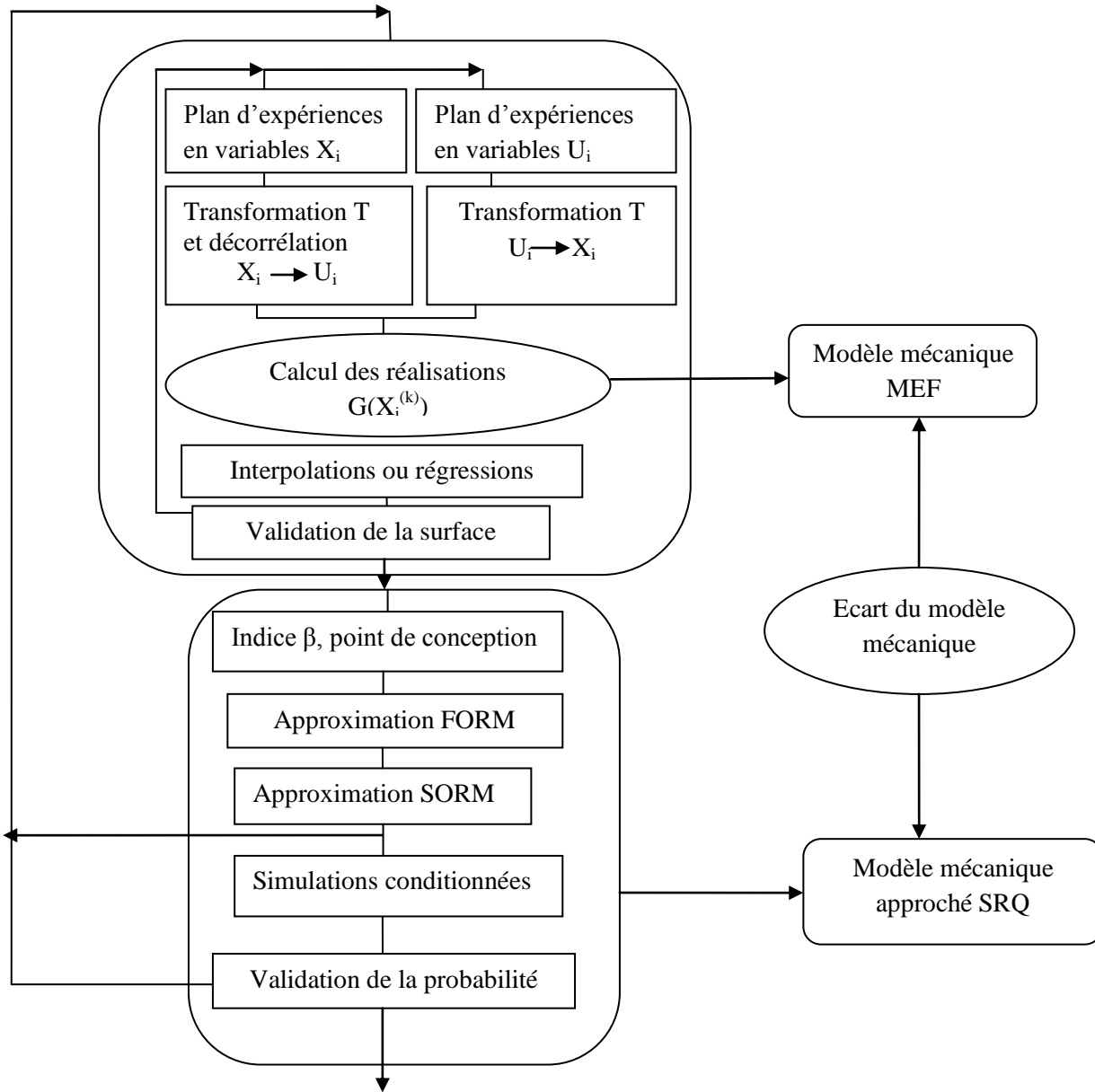


Figure III.10. Principe de la méthode par surface de réponse.

III.7. Difficulté du couplage mécanique :

Le couplage entre la modélisation mécanique par éléments finis, les méthodes de fiabilité et les algorithmes d'optimisation, soulève de délicats problèmes de convergence et est très consommateur des ressources de calcul.

Les algorithmes de programmation non linéaire les plus efficaces et robustes adaptés à ce couplage, ont besoin du calcul des gradients, qui peut se faire dans le cas où la fonction d'état limite dépend implicitement d'un calcul linéaire ou non linéaire par éléments finis, par les méthodes de dérivation numérique. Ceci augmente le temps de calcul et les impressions dues à l'évaluation du gradient par les méthodes numériques qui peuvent engendrer la divergence de l'algorithme [17].

III.8. Conclusion :

Aucune méthode de couplage ne peut apparaître comme étant la meilleure à priori. Un résultat sera obtenu économiquement aussi bien par un bon choix méthodologique que par une bonne maîtrise des procédures itératives lors de la phase d'optimisation (réglage des paramètres et des tests d'arrêts).

De plus, en fonction du problème mécanique traité, du nombre de variables aléatoires, des outils disponibles, l'une ou l'autre des différentes méthodes s'avérera être la plus performante. Leur comparaison permettra de les valider les unes par rapport aux autres.

En pratique, les choix sont imposés par la disponibilité des outils et des compétences.

La méthode des Surfaces de Réponse est apte à coupler tout modèle mécanique avec un modèle fiabiliste sans nécessité d'assurer le dialogue direct entre les logiciels.

Le couplage direct, quant à lui, permet une automatisation de la démarche. L'avantage est alors de pouvoir utiliser les moyens de calculs modernes sans intervention importante de moyens humains.

La capacité à traiter des modèles industriels de taille importante reste une des difficultés majeures ; elle doit être résolue sur les deux plans : algorithmique et informatique.

CHAPITRE IV

*Analyse fiabiliste pour l'étude
de la flèche d'un échangeur
réparé à Biskra.*

CHAPITRE IV

Analyse fiabiliste pour l'étude de la flèche d'un échangeur réparé à Biskra.

IV. 1. Introduction :

Nous essayerons à travers ce chapitre de développer cette nouvelle approche qui vise à donner une précision supplémentaire au concepteur dont il peut faire usage aussi bien en phase de conception initiale, qu'en vue d'optimiser les opérations d'inspections, de maintenance et de réparation.

Rappelons que l'objectif de ce travail est de s'initier au couplage mécano-fiabiliste à travers un exemple d'application. Pour cela, nous verrons avec plus de précision toutes les étapes pour le cas d'une étude de fiabilité simple à un seul objectif, en passant par le choix des variables, la définition de l'état limite, la description de l'algorithme d'optimisation et l'analyse des résultats appliquée aux éléments structuraux d'un échangeur reliant Biskra à Batna.

IV. 2. Rappel :

Les approches traitant de la fiabilité d'une structure sont généralement classées en quatre niveaux d'analyse :

- Niveau 0 : correspond à une analyse purement déterministe. Les sollicitations (ou les actions) et les résistances sont des valeurs déterminées relevant d'expertise et un coefficient global de sécurité est choisi. Le retour d'expérience justifie seul le dimensionnement et l'évaluation qualitative de la fiabilité.
- Niveau 1 : est dit semi-probabiliste. Les sollicitations (ou les actions) et les résistances sont introduites par des valeurs représentatives issues d'un contenu statistique plus ou moins riche. Des coefficients partiels sont également introduits dans les règles de dimensionnement. Ce niveau est le plus utilisé actuellement.
- Niveau 2 : correspond à une mise en œuvre partielle des méthodes probabilistes. Elle nécessite la définition d'une période de référence et des approximations de type FOSM¹ (First Order second moment) ou FORM/SORM admises. Le niveau 2 est également à la base de la procédure de calibration des coefficients partiels définis au niveau 1).
- Niveau 3 : est celui de la méthode probabiliste complète. Il nécessite la connaissance des densités conjointes de probabilité de toutes les variables, ce qui est inaccessible en pratique dans la plupart des situations [11].

¹ FOSM suppose la connaissance des 2 premiers moments statiques (moyenne, écart-type). Cette méthode induit des erreurs significatives qui peuvent compromettre le jugement de l'ingénieur et mettre la sécurité de l'ouvrage en péril [30].

Les méthodes de niveau 0 et de niveau 1 n'entrent pas dans le cadre de l'approche probabiliste de la fiabilité: les méthodes de niveau 0 sont toujours d'usage dans nos règlements. En revanche, elles sont en voie de disparition du paysage de l'ingénierie de la construction en Europe et au Canada, au profit des méthodes de niveau 1 qui forment le socle des codes de calcul et de conception des structures (les actuels Eurocodes, et les normes canadiennes.)

Dans ce qui suit, nous verrons la démarche à suivre pour une analyse de niveau 2, sur des éléments structuraux d'un pont.

IV.2.1. Analyse déterministe :

L'analyse déterministe de la sécurité d'un ouvrage, utilisée par les anciens règlements, consistait à vérifier que la contrainte maximale dans la partie la plus sollicitée de l'ouvrage ne dépassait pas une contrainte admissible σ_{adm} obtenue en divisant la contrainte de ruine σ_r du matériau par un coefficient de sécurité K fixé de façon conventionnelle :

$$\sigma \leq \sigma_{adm} = \frac{\sigma_r}{K}$$

Il a été constaté que l'utilisation d'une seule valeur par variable et d'un seul coefficient de sécurité pour caractériser le risque n'est pas suffisant. K est souvent appelé coefficient d'ignorance.

Dans le schéma du couplage, l'analyse déterministe ou le modèle numérique (dans notre cas la méthode des éléments finis), fournit la réponse mécanique permettant de vérifier l'état limite de défaillance.

Pour notre application, nous avons choisi d'étudier les différentes poutres d'un pont. Ainsi nous rappellerons les étapes de calcul par éléments finis d'une poutre quelconque dans ce qui suit:

La formulation d'un élément poutre peut être obtenu en se basant sur la théorie de la RDM ; si on considère notre poutre de section A , de longueur L , soumise à chargement $q(x)$ variant le long de son axe longitudinal tel que montré dans la figure suivante [4] :

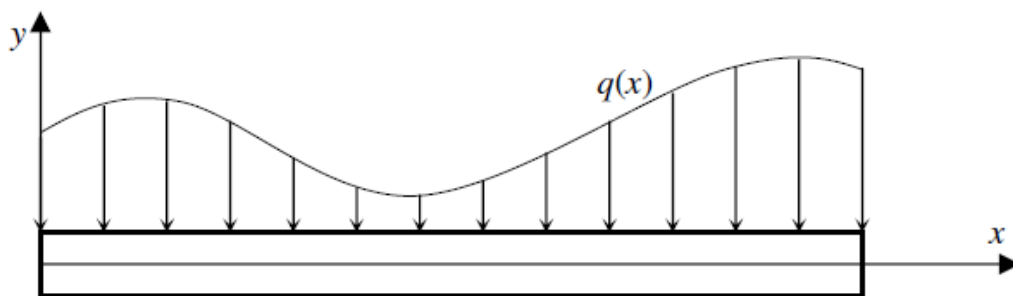


Figure IV.1. Poutre chargée.

Sous l'effet du chargement, la poutre fléchit verticalement d'un déplacement $v(x)$. On suppose qu'après cette déformation, les sections droites restent planes et perpendiculaires à la ligne moyenne ; elles subissent de ce fait une petite rotation d'angle θ dans le plan Oxy .

La rotation de la section déformée est tangente à la ligne moyenne courbée : $\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$, ainsi à cause de cette rotation, les points de la section subissent un déplacement horizontal u variant linéairement de la fibre inférieure à la fibre supérieure. En un point de la section ce déplacement vaut : $u = -\theta \cdot y = -y \frac{\partial v}{\partial x}$

Dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations, la déformation axiale suivant x est : $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$

La loi de Hooke donne la répartition des contraintes le long de la section :

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x} = -E y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Le moment fléchissant } M = E I \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \text{L'effort tranchant : } T = -\frac{dM}{dx} = -\frac{\partial}{\partial x} (E I \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

et la relation entre l'effort tranchant et le chargement est :

$$q = -\frac{dT}{dx} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} (E I \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) \quad (4.2)$$

Cette équation traduit l'équilibre statique de la poutre, dans le cas d'un mouvement dynamique, nous devons ajouter un terme traduisant les forces d'inertie, nous aurons :

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x^2} (E I \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) = q(x) \quad (4.3)$$

Qui est l'équation d'Euler-Bernoulli pour la flexion des poutres. Le déplacement v est fonction de x et du temps t [4].

Formulation de l'élément poutre :

a) Formulation variationnelle :

Soit L la longueur de la poutre, δv la fonction poids, la formulation variationnelle forte associée à l'équation (4.3) s'écrit [4]:

$$\int_0^l \delta v \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx + \int_0^l \delta v \frac{\partial^2}{\partial x^2} (E I \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) dx = \int_0^l \delta v q(x) dx \quad (4.4)$$

La forme intégrale faible s'obtient avec deux intégrations par parties du second terme [4]:

$$\int_0^l \delta v \frac{\partial^2}{\partial x^2} (E I \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) dx = -\int_0^l \frac{\partial \delta v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (E I \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) dx + \left[\delta v \frac{\partial}{\partial x} (E I \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) \right]_0^l$$

$$\int_0^l \frac{\partial \delta v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (E I \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) dx = -\int_0^l \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} (E I \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) dx + \left[\frac{\partial \delta v}{\partial x} (E I \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) \right]_0^l \quad (4.5)$$

Compte tenu des expressions de (4.1), les seconds termes représentent la différence des chargements en force (T_0 et T_L) et en moments (M_0 et M_L) appliqués aux extrémités de la poutre. De plus, on peut remplacer $\frac{\partial \delta v}{\partial x} = \delta \theta$

On écrit ainsi les conditions aux limites comme suit [4]:

$$\begin{aligned} \left[\delta v \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right]_0^l &= \delta v |_{x=L} T_L - \delta v |_{x=0} T_0 \\ \left[\frac{\partial \delta v}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right]_0^l &= \delta \theta |_{x=0} M_0 - \delta \theta |_{x=L} M_L \end{aligned} \quad (4.6)$$

En substituant maintenant (4.6) dans (4.5) et le résultat dans (4.4), on obtient l'expression de la forme variationnelle faible [4]:

$$\int_0^l \delta v \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx + \int_0^l \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) dx - \delta \theta |_{x=0} M_0 + \delta \theta |_{x=L} M_L + \delta v |_{x=L} T_L - \delta v |_{x=0} T_0 = \int_0^l \delta v q(x) dx \quad (4.7)$$

b) Discrétisation :

Pour la discrétisation de cette équation, on considère un élément à deux nœuds : un nœud à chaque extrémité de la poutre. La présence de dérivées d'ordre deux impose l'utilisation de polynômes quadratiques ou plus. En outre, on voit que l'expression des conditions aux limites fait intervenir la rotation aux extrémités, il est donc plus intéressant de prendre deux degrés de liberté par nœuds dans le but d'assurer en même temps la continuité des déplacements et de leurs dérivées qui sont les rotations. Le nombre de degrés de liberté atteint ainsi quatre et le polynôme d'interpolation doit être cubique (quatre constantes). Le vecteur des déplacements et rotations élémentaires s'écrit donc comme suit :

$$U_n = \langle v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2 \rangle \quad (4.8)$$

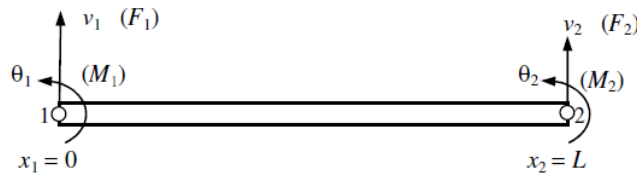


Figure IV.2. Elément poutre à deux nœuds [4].

Les déplacements et rotations le long de la poutre sont approximés par :

$$\begin{aligned} v(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3. \\ \theta(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2. \end{aligned}$$

L'évaluation de ces polynômes aux nœuds donne :

$$\begin{aligned} v(0) &= a_0 = v_1 & \theta(0) &= a_1 = \theta_1 \\ v(L) &= v_2 = v_1 + \mathbf{L} + a_2 L^2 + a_3 L^3 & \mathbf{\Theta} (L) &= \theta_1 + 2a_2 L + 3a_3 L^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

La résolution de (4.8) donne:

$$a_2 = \frac{3}{L^2} (v_2 - v_1) - \frac{1}{L} (-\theta_2 + 2\theta_1) \quad a_3 = \frac{3}{L^3} (v_1 - v_2) - \frac{1}{L^2} (\mathbf{\Theta} + \mathbf{\Theta})$$

En remplaçant dans $v(x)$ et $\theta(x)$, l'interpolation nodale des déplacements s'écrit sous la forme (voir Chapitre I.6.1.) :

$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x)\theta_2 \quad (4.10)$$

Les fonctions de forme N_i sont appelées polynômes d'Hermite, leurs expressions sont [4]:

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}; \quad N_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}; \quad N_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}; \quad N_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (4.11)$$

c) Matrices élémentaires :

On remplace maintenant dans la forme variationnelle (4.7) le déplacement v par son approximation (4.10), on obtient :

$$\delta v = \delta U_n^T N^T; \quad \delta \Theta = \delta U_n^T \frac{dN^T}{dx}; \quad \text{avec : } \delta U_n^T = \langle \delta v_1 \quad \delta \Theta \quad \delta v_2 \quad \delta \Theta \rangle^T \quad (4.12)$$

Le vecteur élémentaire F_n des forces et des moments concentrés aux nœuds s'écrit comme suit :

$$F_e = \langle -T_0 \quad -M_0 \quad T_L \quad M_L \rangle^T \quad (4.13)$$

Le chargement F_e réparti sur l'élément poutre correspond au second terme de la fonction variationnelle (4.7) :

$$\int_0^L \delta v q(x) dx = \delta U_n^T \int_0^L N^T q(x) dx; \quad F_e = \int_0^L N^T q(x) dx$$

Pour un chargement uniforme $q(x) = q_0$:

$$F_e = \frac{L}{60} \langle 30q_0 \quad 5Lq_0 \quad 30q_0 \quad -5Lq_0 \rangle^T \quad (4.14)$$

Pour les matrices M_e et K_e :

$$K_e = \int_0^L \frac{d^2 N^T}{dx^2} EI \frac{d^2 N^T}{dx^2} dx \quad M_e = \int_0^L N^T \rho A N dx$$

Dans notre cas, notre poutre est faite d'un même matériau et de même section (E, I, ρ sont constantes), alors les expressions explicites des matrices élémentaires peuvent être obtenues et s'écrivent comme suit [4] :

$$K_e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}; \quad M_e = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

d) Assemblage:

Après avoir établi les matrices de rigidité de chaque élément de la poutre, il est donc nécessaire de les assembler afin d'avoir la matrice de rigidité globale de toute la poutre.

Et ainsi, pour un nœud obtenu par assemblage de nœuds appartenant à deux éléments adjacents, la force est égale à la somme des forces des deux nœuds, et ces déplacements sont identiques à ceux de chaque nœuds composants l'ensemble (voir Chapitre I.11.2).

e) Résolution numérique :

Une fois qu'on a calculé la matrice de rigidité globale K , et le vecteur global force F , on résout le système suivant [4] :

$$[K]\{U\} = \{F\} \rightarrow \{U\} = [K]^{-1}\{F\}. \quad (4.16)$$

IV.2.2. Analyse probabiliste :

Considérons le cas d'un phénomène dont la condition de non occurrence ne fait intervenir que deux variables : un effet des actions S et une résistance R . Soit la grandeur $B = S - R$. Dans la pratique, les valeurs de S et de R ne sont pas constantes dans le temps et ne sont pas connues à l'avance. Si ces grandeurs sont, de plus, des variables aléatoires indépendantes, la ruine de la construction liée au phénomène considéré est caractérisée par une probabilité de ruine, par la relation [19]:

$$P_{\text{ruine}} = \text{Prob}(S \geq R) = \text{Prob}(B \geq 0) \quad (4.17)$$

Soit encore,

$$P_{\text{ruine}} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\text{Prob que la structure soit soumise à } S1) * (\text{Prob que } R \text{ soit } < S1) dS1. \quad (4.18)$$

❖ Méthodologie d'évaluation probabiliste :

Les étapes d'un calcul fiabiliste sont d'une façon générale les suivantes :

- ✓ Dans une première étape, le modèle mécanique : structure (géométrie / comportement / charges /conditions aux limites...) et codes de calcul (RDM, théorie des poutres ...), est défini, et les variables d'entrées et de sorties sont identifiées.
- ✓ Le modèle probabiliste est ensuite défini pour représenter les propriétés des variables qui entrent dans les calculs du modèle mécanique.

Comme le montre la définition, la fiabilité est l'aptitude à accomplir une fonction requise. Elle prend forme dans la définition de l'état limite ; la fonction requise consiste à ne pas dépasser un seuil donné, par exemple une certaine résistance ou une certaine déformation. Le calcul fiabiliste consiste donc finalement à déterminer la probabilité de défaillance pour un état limite donné [19].

Comme il a été déjà vu précédemment, la formulation des états limites peut s'écrire de la manière suivante :

$$M = R - S. \quad (4.19)$$

où : M = marge de sécurité (ou Z),

R = réponse structurelle.

S = effet de la charge.

Une fois définie, c'est cette fonction qui représentera l'état limite.

Avant toute conception ou évaluation, il est nécessaire de classer la structure à étudier en fonction de l'importance que représente l'ouvrage, une probabilité de défaillance et/ou un

indice de fiabilité cible est alors donné, cette valeur constitue le seuil minimal conventionnel que doit vérifier l'ouvrage selon son importance.

Le tableau (Tableau IV.1.) donne des indices de fiabilité possibles pour des éléments classés selon le type de défaillance et des différents degrés de conséquence atteint, en cas de défaillance. A l'heure actuelle, un certain nombre de projets de recherches se penchent sur ce sujet, avec comme objectif de définir une approche cohérente pour des types de structures spécifiques.

Tableau IV.1. Indice de fiabilité à atteindre évalué en fonction de la criticité de l'élément et du type de défaillance (période de référence : 1an) [20].

Conséquence de la défaillance	Type de défaillance		
	Ductile avec réserve	Ductile sans réserve	Fragile
Pas grave	3.1	3.7	4.3
Grave	3.7	4.3	4.7
Très grave	4.2	4.7	5.2

Ce tableau montre que plus le matériau est ductile, moins l'exigence sur la fiabilité est importante et plus les conséquences dues à une possible défaillance risquent d'être importantes, plus l'exigence sur la fiabilité augmente.

Le tableau suivant (Tableau IV.2.) est souvent donné comme indicateur des valeurs de probabilité de défaillance. Il nous servira également dans notre étude. Il consiste essentiellement à donner la fiabilité cible minimum qu'une structure doit être apte à vérifier en fonction des conséquences économiques et du nombre de personnes mises en dangers.

Tableau IV.2. Valeurs cibles de β [19,21].

Nombre moyen de personnes mises en danger	Conséquences économiques		
	Sans gravité	Graves	Très graves
Petit (< 0.1)	$P_f = 10^{-3}$ $\beta = 3$	$P_f = 10^{-4}$ $\beta = 3.72$	$P_f = 10^{-5}$ $\beta = 4.06$
Moyen	$P_f = 10^{-4}$ $\beta = 3.72$	$P_f = 10^{-5}$ $\beta = 4.06$	$P_f = 10^{-6}$ $\beta = 4.59$
Grand (>10)	$P_f = 10^{-5}$ $\beta = 4.06$	$P_f = 10^{-6}$ $\beta = 4.59$	$P_f = 10^{-7}$ $\beta = 5.12$

A travers ce tableau, nous voyons clairement que plus les conséquences économiques, en cas de défaillance, risquent d'être importantes, plus la fiabilité seuil exigé est élevée ; et plus le nombre moyen personnes mises en danger est élevé plus les exigences sur la fiabilité augmente, et moins le risque de défaillance est accepté.

Il apparaît que la fiabilité n'est pas souvent le seul critère qui entre en jeu dans la détermination du risque acceptable. Une optimisation de la fiabilité en tenant compte des enjeux économiques est souvent de mise.

Fiabilité d'une poutre :

La fiabilité d'une poutre peut être modélisée par un système en série. La poutre est ainsi divisée en plusieurs sections selon les changements de géométrie. La poutre est considérée défaillante dès qu'une des sections atteint la rupture.

Par exemple, si on considère pour chaque section de poutre comporte deux états limites ultimes : flexion (M) et cisaillement (V). On peut modéliser une poutre à n sections de la manière suivante :

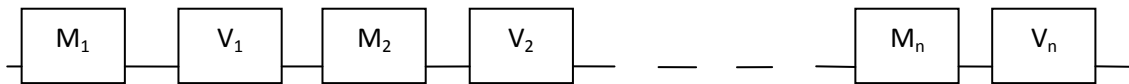


Figure IV.3. Système en série représentant la défaillance d'une poutre.

Nous nous consacrons dans ce travail à étudier la fiabilité des poutres du pont, vis-à-vis d'un seul état limite (état limite de flexion), en raison des données restreintes que nous possédons.

IV.3. Description de l'application :

L'ouvrage étudié est un pont réalisé à Biskra par la Société Algérienne E.N.G.O.A en 2003, selon la norme B.P.E.L 91. Ce pont est un échangeur construit sur la RN 03 NORD 87 reliant Biskra à Batna, il comporte une seule travée à sept poutres isostatiques de 26m de longueur et d'une section variable sous forme de T, dégradé en 2004 par un choc, diagnostiqué par la société Italienne INTEGRA et réparé par la société SAPTA en 2006.

Cet ouvrage a déjà été recalculé par un étudiant polytechnicien en 2008 [22], considérant particulièrement la réparation de ce pont par précontrainte extérieure. Dans notre application, nous ferons une étude de fiabilité sur les poutres de ce pont, après réparation, en se basant sur les données de [22].

IV.3.1. Description de l'ouvrage :



Figure IV. 4. L'ouvrage réparé.

IV.3.1.1. Caractéristiques du pont :

Les figures suivantes présentent les différentes caractéristiques géométriques du pont réparé [22] :

Largeur totale : $7.00 + 2 \times 1.50 = 10.00$ m.

Largeur roulable : $l_r = 7.00$ m.

Largeur chargeable : $l_s = l_r = 7.00$ m.

Nombre de voies : $N = E \left(\frac{l_s}{3} \right) = 2$.

Largeur d'une voie : $l_v = l_s / N = 3.5$ m.

Classe du pont : $l_s = 7$ m \Rightarrow pont première classe.

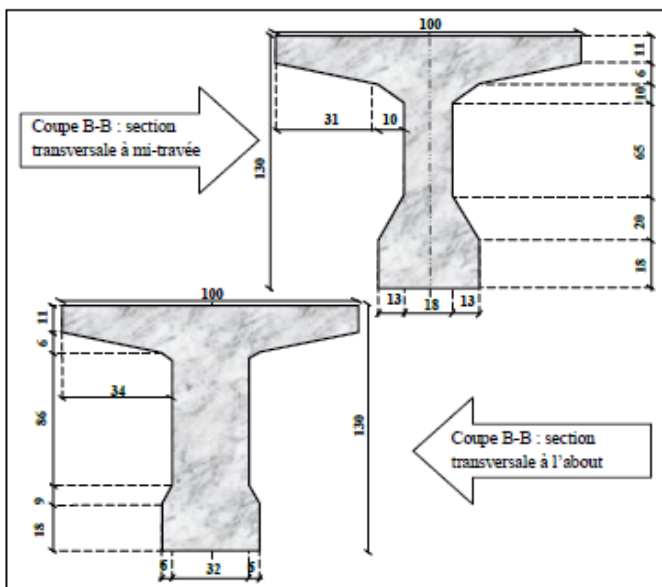


Figure IV.5.a. Section transversale de la poutre [22].

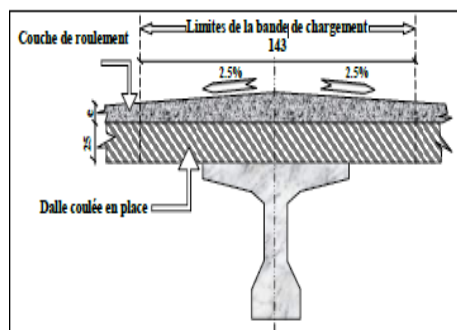


Figure IV.5.b. Détails de la dalle et de la couche de roulement [22].

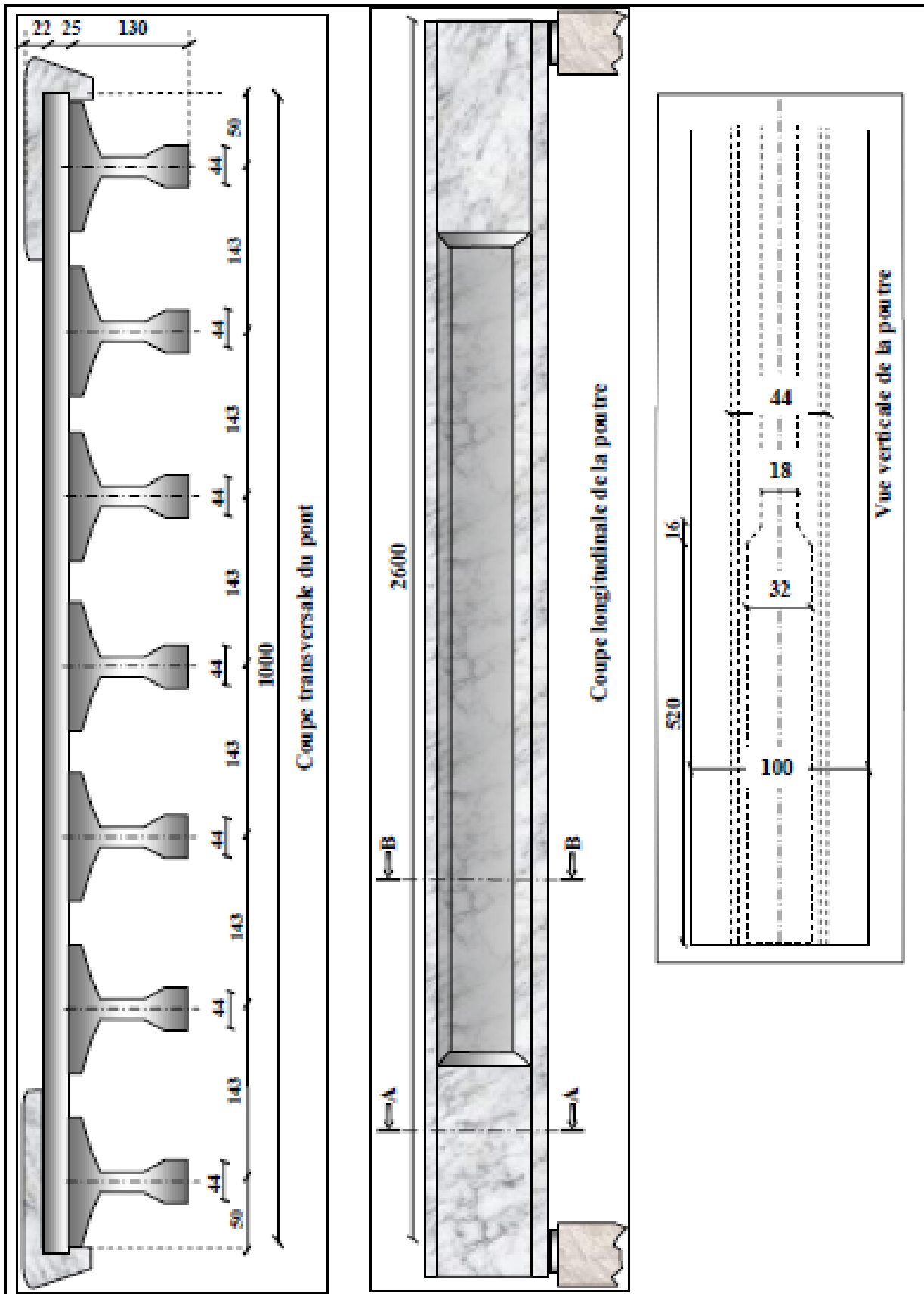


Figure IV.6. Tablier du pont [22].

Section de la poutre équivalente : ($h_1=17.94m$, $h_2=79.97m$, $h_3= 32.1m$)

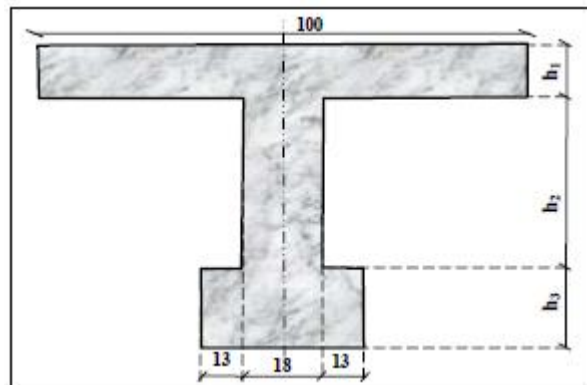


Figure IV.7. Section transversale équivalente [22].

IV.3.1.2. Matériaux de réalisation :

a/ Béton :

- Résistance à la compression à 28 jours : $f_{c28} = 35$ MPa.
- Résistance à la traction à 28 jours : $f_{t28} = 2,7$ MPa.
- Contraintes admissibles en compression :
 - En service : $\sigma_{bc} = 0,5 f_{c28} = 17,5$ MPa.
- Contraintes admissibles en traction :
 - En service : $\sigma_{bc} = f_{t28} = 2,7$ MPa.
- Module d'élasticité instantané : $E_{bi} = 11000 \sqrt[3]{f_{c28}} = 35981,73$ MPa .
- Module d'élasticité différé : $E_{bd} = \frac{E_{bi}}{3} = 11993,91$ MPa.

b/ Aciers actifs :

Les câbles utilisés sont de type *12 T 15 TBR* (ALGA) de caractéristiques suivantes [22] :

- Section du câble : $AC = 1800$ mm².
- Diamètre extérieur de la gaine : $D = 80$ mm.
- Module d'élasticité : $E_p = 1,95 \times 10^5$ MPa.
- Limite élastique garantie : $F_{peg} = 1585$ MPa.
- Contrainte de rupture garantie : $F_{prg} = 1800$ MPa.
- Coefficient de déviation angulaire : $k = 0,011$ rad/m.
- Coefficient de frottement en courbe : $f = 0,18$ /rad (toron nu).
- Coefficient de frottement en ligne : $\varphi = k \cdot f = 0,002$ /m.
- Contrainte utile : $\sigma_{p0} = 0,8 F_{prg} = 1426,5$ MPa.
- Tassement d'ancrage ou retour des coins : $r = 6$ mm.
- Relaxation à 1000 heures : $\rho_{1000} = 2,5$ %.
- Mise en tension aux deux extrémités.

c/ Aciers passifs :

- Haute adhérence *FeE 40*.
- Limite d'élasticité : $F_e = 400$ MPa.
- Contrainte de rupture : $F_r = 480$ MPa.

IV.3.2. Actions :

Charges permanentes :

Le tableau suivant représente les moments dus aux charges permanentes sous chaque type de poutre [22] :

Tableau IV.3. Moments dus aux charges permanentes.

ELEMENT	POUTRE DE RIVE	POUTRE INTERMEDIAIRE
Moment à mi-travée= $GL^2/8$ (KN.m)	2662.68	2083.80

Charges variables :

Les moments maximaux pour les poutres intermédiaires et de rive sous les différents systèmes de charges sont donnés dans le tableau suivant [22]:

Tableau IV.4. Moments fléchissants sous les différents systèmes de charge.

		A	B _C	B _T	M _{C120}	D ₂₄₀	Trottoir
M (KN.m)	Poutre intermédiaire	1062.35	1077.65	685.61	1156.95	2150.29	48.82
	Poutre de rive	1059.17	906.61	671.30	1073.97	1586.45	35.31

Combinaisons d'actions :

Les règles du B.P.E.L (Béton Précontraint aux Etats Limites) donnent les combinaisons suivantes pour la détermination des efforts maximum [22] :

Tableau IV.5. Combinaisons d'actions selon le B.P.E.L.

Actions	Poids propre (PP)	A	B _C	B _T	M _{C120}	D ₂₄₀	Trottoir (T)
ELU	1,35	1,6	1,6	1,6	1,35	1,35	1,6
ELS	1	1,2	1,2	1,2	1	1	1,2

Tableau IV.6. Sollicitation pour la poutre intermédiaire [22].

Actions de la combinaison	ELS (KN.m)		ELU (KN.m)
	M _{min}	M _{max}	
PP, A, T	2083.80	3416.704	4590.327
PP, B _C , T	2083.80	3435.065	4614.807
PP, B _T , T	2083.80	2964.616	3987.543
PP, M _{C120} , T	2083.80	3298.834	4452.449
PP, M _{D240} , T	2083.80	4292.174	5793.458

Tableau IV.7. Sollicitations de la poutre de rive [22].

Actions de la combinaison	ELS(KN.m)		ELU (KN.m)
	M_{min}	M_{max}	
PP, A, T	2662.68	3976.056	5345.786
PP, B _C , T	2662.68	3792.984	5101.690
PP, B _T , T	2662.68	3510.612	4725.194
PP, M _{C120} , T	2662.68	3779.022	5100.970
PP, M _{D240} , T	2662.68	4291.502	5792.820

Comme on peut le voir dans les tableaux ci-dessus, la poutre la plus sollicitée en flexion est la poutre intermédiaire sous son poids propre et le système de chargement D₂₄₀.

IV.3.3. Flèches dues à la précontrainte :

Tableau IV.8. Valeurs de la flèche due à la précontrainte [22].

Flèche due à la précontrainte intérieure (rive)	-03.80cm
Flèche due à la précontrainte extérieure (rive)	-06.46cm
Flèche totale (poutre de rive réparée)	-10.26cm
Flèche due à la précontrainte (autres poutres)	-11.55cm

IV. 4. Description de l'étude :

IV.4.1. Calcul déterministe (par éléments finis) :

Une description générale de la méthode des éléments finis, a été développée au Chapitre I. Pour le cas d'une poutre, la formulation variationnelle a été détaillée en rappel (paragraphe IV.2.1). Dans notre cas, nous allons appliquer la méthode aux problèmes de flexion de nos poutres, soumises au système de charge qui les sollicite le plus, à savoir sous le convoi exceptionnel D240, les poutres ont les dimensions, ainsi que les propriétés de matériaux suivants :

Tableau IV.9. Paramètres de calcul de la poutre.

Paramètres	Notation	Valeurs	Unités
Module de Young	E	11994	MPa
Inertie	I	0.1973	m ⁴
Longueur	L	26	m
Flèche admissible	F _{adm}	0.052	m

La Figure (IV.8.) montre la poutre, soumise à son poids propre (P_1), et à la Charge D240 (q).

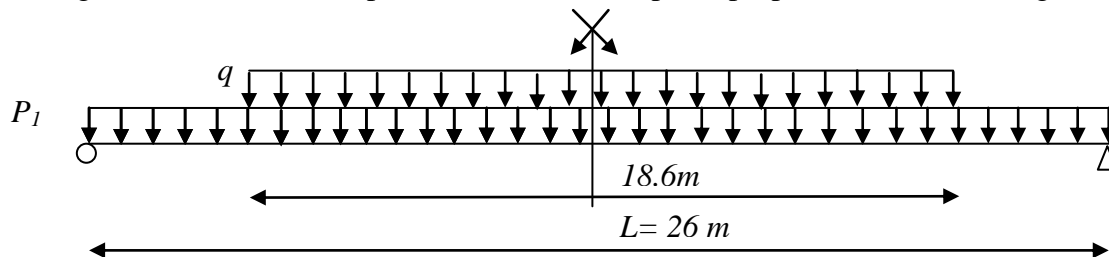


Figure IV.8. Poutre soumise à la sollicitation maximale.

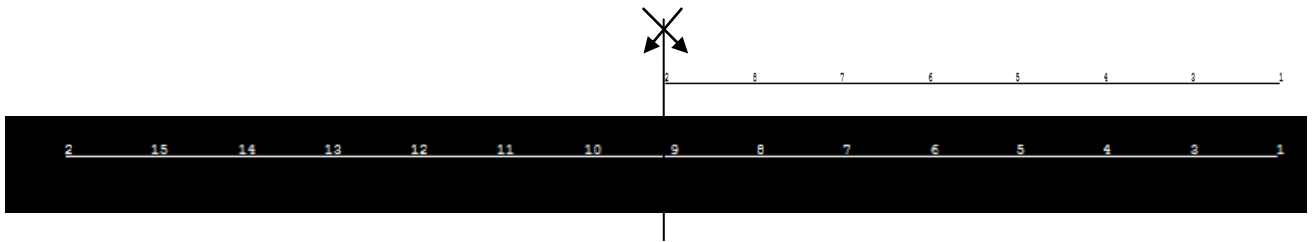


Figure IV.9. Discretisation en éléments finis de :
 a). La demi- poutre ($n_G= 2, h^K= 1.85m, n_c=8$).
 b). Toute la poutre ($n_G= 2, h^K= 1.85m, n_c=15$).

Comme le chargement est symétrique, nous allons étudier la demi-poutre, soit 13m de longueur. Grâce au logiciel CAST3M, nous pouvons visualiser le maillage qui a été pris en compte pour la demi-poutre (Figure IV.9.).

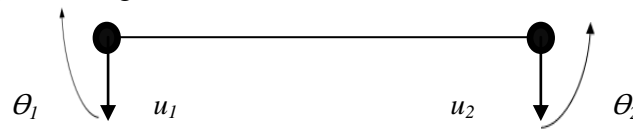


Figure IV.10. Présentation d'un élément.

Après avoir discrétiser notre demi-poutre en 7 éléments linéaires, chaque élément est caractérisé par 2 nœuds, tel que chaque nœud est à deux degrés de liberté, un déplacement u , et une rotation θ (Figure IV.10).

Remarque :

Nous avons utilisé le CAST3M uniquement pour illustrer le principe des éléments finis (Discretisation). La programmation du code de calculs EF, du code fiabiliste ainsi que de l'algorithme d'optimisation ont tous été réalisés sur MATLAB, pour faciliter le dialogue entre les deux codes du couplage et ainsi économiser en temps de calcul.

n_G = nœuds géométrique, n_C = nœuds de calcul ou d'interpolation, h^K = taille d'un élément (Chapitre I.8.1).

Description du maillage :

Deux tableaux sont utilisés pour la description du maillage de la (Figure IV.9.a) :

Tableau IV.10. Tableau des connectivités.

Tableau des connectivités		
Eléments	Nœud 1 (début)	Nœud 2 (fin)
1	1	3
2	3	4
3	4	5
4	5	6
5	6	7
6	7	8
7	8	2

Tableau IV.11. Tableau des coordonnées.

Tableau des coordonnées	
Nœud	Coordonnée
1	0.00
3	1.857142
4	3.714284
5	5.571426
6	7.428568
7	9.28571
8	11.142852
2	13.00

Matrice de rigidité :

La matrice de rigidité pour un élément de maillage est :

$$K_e = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}, \text{ dans notre cas, les éléments } e_i \text{ sont tous égaux (} l, E, \text{ et } I$$

constants).

Et ainsi afin d'obtenir la matrice de rigidité de la demi-poutre, il suffit donc d'assembler les matrices de rigidité K_e de chaque élément e_i .

Dans notre cas, pour 7 éléments, notre matrice de rigidité de la demi-poutre est de l'ordre de (16x16). Cet ordre est dû au fait que notre demi-poutre possède 8 nœuds, donc 16 degrés de liberté (chaque nœud à deux degrés de liberté).

Conditions aux limites :

Le Pont étudié est isostatique, ainsi se référant aux Figures (IV.8 et IV.9.), l'élément 1 est sur un appui double, où le déplacement vers le bas ainsi que la rotation sont bloqués ($u_1=0$, et $\theta_1=0$). Nous avons également à la mi-travée où l'on obtient la flèche maximale, la rotation nulle ($\theta_2=0$).

Résolution :

$$\text{Résolution du système } \{U\} = [K]^{-1}\{F\}$$

Et tirer le déplacement maximum parmi tout les u_i qui représente donc le déplacement à l'extrémité de la demi-poutre soit le u_2 , la flèche sous le chargement le plus sollicitant.

La flèche (déplacement maximal obtenu à l'extrémité de la demi-poutre, u_2), sous le chargement le plus sollicitant et sous les paramètres, considérés ici tous déterministes, (Tableau IV.9.) est :

Tableau IV.12. Flèches obtenues.

	Flèche
Poutre la plus sollicitée (intermédiaire)	$ - 3.0591 \text{ cm} < F_{adm}$
Poutre de rive (réparée)	$ - 2.3097 \text{ cm} < F_{adm}$
Poutre de rive (non réparée)	$ - 3.5997 \text{ cm} < F_{adm}$

IV.4.2. Approche fiabiliste :

Nous abordons à présent l'essence même de ce travail. Nous allons donc appliquer l'approche mécano-fiabiliste aux poutres de notre pont.

Dans le cas de notre étude, les variables prises en comptes sont :

Tableau IV.13. Variables aléatoires et déterministes à considérer.

Paramètres et variables	Statut
Module de Young (E)	Aléatoire
Charge d'exploitation (q)	Aléatoire
Charge permanente (P_1)	Déterministe
Longueur (L)	Déterministe
Section (A)	Déterministe

- Module de Young (E): variable liée aux caractéristiques intrinsèques du matériau, sachant que la qualité du béton est fonction de plusieurs facteurs incontrôlables tel que la température du chantier, la qualité de main d'œuvre, l'agressivité de l'environnement,... donc nous ne pouvons pas, être certains que la valeur du module de Young soit exactement le même en tout point de la structure.
- Les charges d'exploitation : souvent supérieures à ce que l'on croit, avec l'apparition des nouveaux modèles de véhicules et de tonnage, des charges climatiques incontrôlables,...
- Pour ce qui est des caractéristiques géométriques, elles sont considérées déterministes, en supposant que l'incertitude sur les éléments est négligeable, car les poutres de ponts sont en général faites avec des coffrages très performants et très précis.
- La charge permanente est également considérée comme déterministe, car on suppose que cette charge reste en général quasi constante dans le temps, contrairement aux charges d'exploitation.

IV.4.2.1. Modélisation des variables aléatoires par des lois de densité de probabilité:

Donc, l'enjeu à ce stade est de préciser les paramètres incertains pouvant jouer un rôle significatif sur la fiabilité de la structure, appelés variables aléatoires de base ou variables de conception, et de quantifier leur variabilité.

La sélection des variables aléatoires est une étape cruciale pour le modèle fiabiliste qui nécessite une connaissance fine du matériau étudié (origine, microstructure, comportement mécanique) et de la structure considérée (fabrication, actions).

En général, d'après la littérature, pour les structures en béton armé et précontraint, les variables aléatoires que l'on peut considérer selon l'état limite que l'on étudie seront :

- la géométrie de la section (+ou -1cm), les charges d'exploitations (40%), charges permanentes (10%), résistance de l'Acier (7%), résistance du béton f_c (15%), l'enrobage c (10%),...

Dans notre cas, la fonction d'état limite sera fonction de deux variables aléatoires, tel que leurs lois de distribution seront considérées comme suit (Tableau IV.14.) :

- ✓ La loi de densité de probabilité du module de Young (E) pour les structures en béton précontraint, est prise comme étant Log-normale², avec un coefficient de variation (Cov) de 25%.
- ✓ Quant à la loi de densité de probabilité de la charge d'exploitation (q), elle sera prise comme étant Normale, avec un Cov de 30%. Ce choix est en général approprié quand les variations de la charge ou de la capacité sont la somme de plusieurs efforts dont aucun ne prédomine sur les autres. Ainsi, la distribution normale est largement utilisée pour modéliser des charges et capacités. La distribution log-normale est également utilisée, plus spécialement quand l'incertitude sur la contrainte ou la résistance est relativement grande [23].

Remarque :

Nous pouvons aller jusqu'à adopter un Cov = 40% pour la charge d'exploitation, si on fait référence au trafic, particulièrement dans le Nord Algérien, souvent très irrégulier.

Tableau IV.14. Variables aléatoires et leurs densités de probabilités.

Paramètres et variables	Densité	Dispersion
Module de Young (E)	Log- normale	C.V=25%
Charge du convoi exceptionnel (q)	Normale	C.V=30%
Charge permanente+trottoir (P_1)	Déterministe	--
Longueur (L)	Déterministe	--
Section (A)	Déterministe	--

² Donnés par Frédéric Duprat & Alain Sellier, Fiabilité des ponts en béton précontraint soumis au fluage [27].

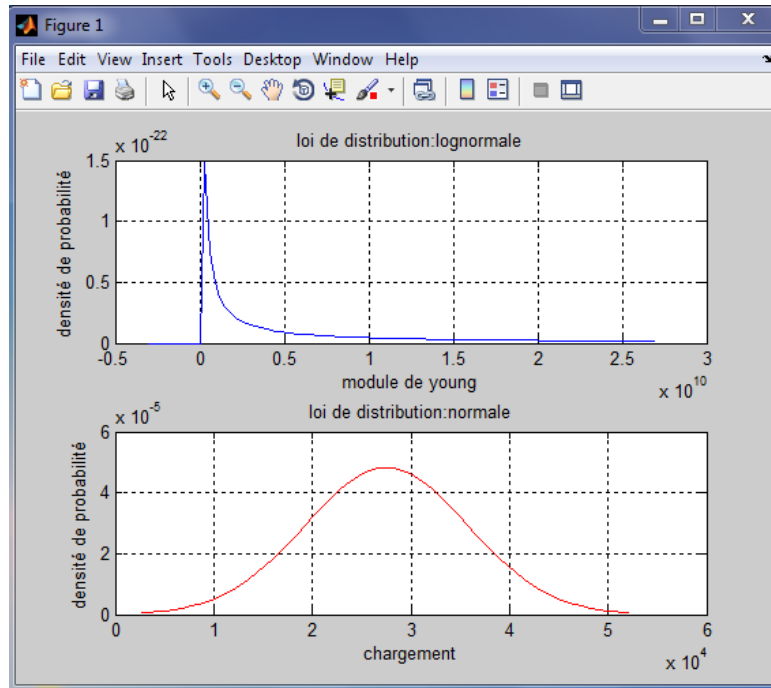


Figure IV.11. Lois de distributions des variables.

Remarque :

La fonction d'état limite doit être déterminée en fonction des variables de conception que l'on choisit. Dans notre cas, se référant à la littérature disponible, cependant limitée, nous avons décidé de prendre en considération deux variables de conception l'une faisant parti des aléas externes et l'autre faisant parti des aléas internes. Quant au choix final, il s'est porté sur le module de Young et la charge extérieure d'exploitation car (par rapport à la littérature, le climat algérien souvent agressif, et par rapport au trafic croissant) ces deux variables varient fortement.

IV.4.2.2. Fonction d'état limite :

Une structure peut se trouver soit dans un état de sûreté soit dans un état de défaillance. L'état limite sépare ces deux domaines. Il s'agit donc de préciser l'état limite au-delà duquel notre poutre n'est plus considérée comme fiable. Ces états limites correspondent principalement à des exigences en termes de tenue mécanique (la défaillance est associée à la ruine du système étudié) ou d'aptitude au service (la défaillance est associée à des dépassements excessifs de la capacité).

La défaillance peut prendre différentes formes : ruine, plastification, rupture, instabilité, déformation excessive, déplacement inadmissible, bruit, perte de production ou d'exploitation,... Pour notre étude, nous nous sommes intéressés à la flexion, nous considérons que le pont est défaillant lorsque la flèche dépasse la valeur admissible, d'où la fonction d'état limite donnée par :

$$G = 0.052 - f \tag{4.20}$$

Où : G : fonction d'état limite.

f : flèche réelle.

$$F_{adm} = \frac{l}{500} = 0.052 : \text{flèche admissible } (F_{adm}).$$

IV.4.2.3. Recherche du point de conception P^* (ou β -point) :

La recherche du point de conception P^* peut être effectuée par une méthode d'optimisation.

Le problème de ces méthodes est qu'on ne peut pas assurer la convergence. C'est donc pour cela que notre choix s'est porté sur la méthode FORM, car elle est considérée comme étant l'une des plus efficaces en termes de rapport entre temps de calcul et précision de la réponse, elle fait parti des méthodes les plus utilisées et qui conviennent dans la majorité des cas (90 % des cas) [14, 23].

Rappelons que pour le calcul du point de conception P^* , nous devons calculer l'indice de fiabilité d'Hasofer et Lind, qui lui est défini comme étant la distance minimale de l'origine de l'espace standardisé à un point de la surface d'état limite $H(u)$, et qui est solution du problème d'optimisation suivant :

$$\beta_{HL} = \min \sqrt{u^T u} \text{ sous la contrainte } H(u) = 0 \tag{4.21}$$

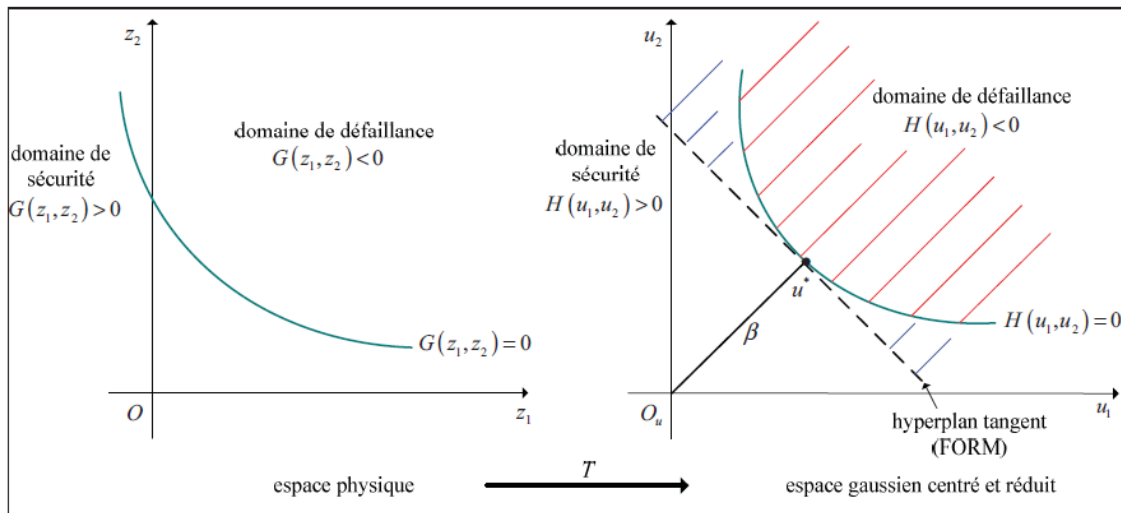


Figure IV.12. Calcul de β en utilisant la méthode FORM.

✓ **Passage de l'espace physique à l'espace normé :**

La Figure IV.12. illustre bien le changement d'espace pour le calcul de l'indice de fiabilité, il faut cependant savoir que pour passer de l'espace physique X à l'espace standardisé U , il est nécessaire d'intégrer toute l'information probabiliste disponible.

Dans notre cas, notons que nos deux variables sont indépendantes, donc il n'y a pas de corrélation entre elles.

Tableau IV.15. Corrélations.

Var.de conceptions	E	Q
E	1	0
Q	0	1

La transformation des variables fera appel à une transformation isoprobabiliste (que l'on notera T) (voir Chapitre II.5.3.1). Cependant si celles-ci étaient corrélées, il nous faudrait utiliser les transformations de Nataf ou de Rosenblatt (chapitre II.5.3.2 / II.5.3.3).

✓ **Choix de l'algorithme d'optimisation :**

Il existe plusieurs algorithmes pour résoudre un problème d'optimisation sous contrainte (voir Annexe B). L'un des algorithmes les plus utilisés est l'algorithme de Rackwitz- Fiessler ;

✚ **Illustration de l'algorithme Rackwitz- Fiessler pour la détermination de β_{HL} :**

La résolution de ce problème d'optimisation (4.21) utilise le gradient de la fonction d'état limite, qui va être calculé numériquement par un schéma de différences finies. Nous sommes dans la situation où la fonction à dériver se présente comme la composition d'une fonction qui n'est pas analytiquement explicite et d'une transformation isoprobabiliste connue :

$$\frac{\partial H(u)}{\partial u_i} = \frac{\partial G(x)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_i} = \frac{\partial G(x)}{\partial x_i} \frac{\partial T^{-1}(u_i)}{\partial u_i} \tag{4.22}$$

On approche les deux termes par une formule simple de différences finies:

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x_i} \approx \frac{G(x_1, \dots, x_i + \delta x_i, \dots, x_n) - G(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\delta x_i} + O(\delta x_i^2) \tag{4.23}$$

$$\text{et } \frac{\partial T^{-1}(u_i)}{\partial u_i} \approx \frac{T^{-1}(u_i + \delta u_i) - T^{-1}(u_i)}{\delta u_i} \tag{4.24}$$

Lorsque δx_i tend vers zéro, les termes du premier ordre tendent vers les valeurs exactes des dérivées partielles.

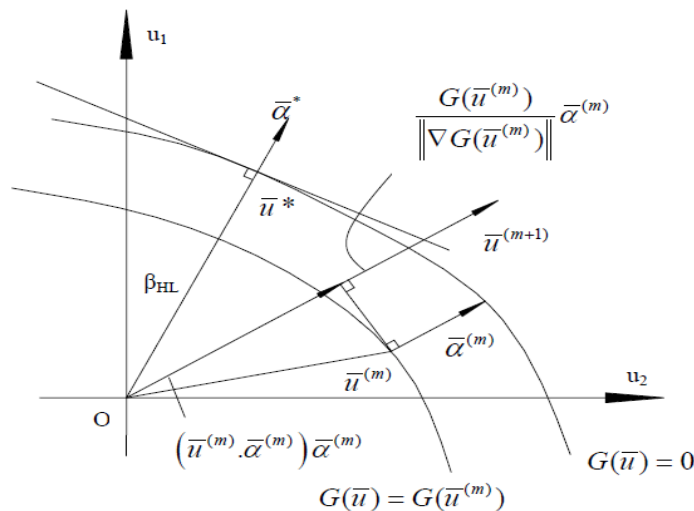


Figure IV.13. Illustration de l'algorithme de Rackwitz-Fiessler [14].

Le point P^* correspond au point de conception x^* dans l'espace physique, il est proportionnel au vecteur unitaire α^* normale à la surface de défaillance en P^* , soit :

$$P^* = \beta_{HL} \alpha^* \quad (4.25)$$

Le point P^* est déterminé comme la limite d'une séquence de $u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)} \dots, u^{(m)}$. Le vecteur unitaire normal à la surface définie par $H(u)=H(u^{(m)})$ au point $u^{(m)}$ est noté $\alpha^{(m)}$. Le vecteur $\alpha^{(m)}$ est parallèle au vecteur gradient en $u^{(m)}$ et dirigé vers le domaine de défaillance :

$$\alpha^{(m)} = - \frac{\nabla H(u^{(m)})}{\|\nabla H(u^{(m)})\|} \quad (4.26)$$

Où $\nabla H(u)$ est le vecteur gradient : $\nabla H(u) = \left(\frac{\partial H(u)}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial H(u)}{\partial u_n} \right)$.

L'origine du repère peut être prise comme point initial dans la séquence. La méthode d'itération est alors basée sur une linéarisation à chaque pas. Au pas m , la surface $H(u)=H(u^{(m)})$ est remplacée par le plan tangent à celle-ci en $u^{(m)}$. Le point suivant $u^{(m+1)}$ est situé sur la droite issue de l'origine et parallèle à la direction du vecteur normal au plan tangent $\alpha^{(m)}$. Ce point est alors obtenu comme la somme de deux termes :

$$u^{(m+1)} = (u^{(m)T} \cdot \alpha^{(m)}) \cdot \alpha^{(m)} + \frac{\nabla H(u^{(m)})}{\|\nabla H(u^{(m)})\|} \cdot \alpha^{(m)} \quad (4.27)$$

Où le premier terme de (4.27) représente le résultat de la projection de $u^{(m)}$ sur la droite précédente, et où le second terme est le vecteur permettant de corriger la projection précédente en tenant compte de la valeur de $H(u^{(m)})$.

Lorsque β est suffisamment stationnaire entre deux itérations m et $m+1$, la convergence de la séquence est atteinte [18].

Remarque :

L'algorithme est en général stoppé selon un critère d'arrêt calculé soit à partir d'une norme du vecteur $\{u\}$, par exemple : $\|\{u\}^{(m+1)} - \{u\}^{(m)}\| < \varepsilon$, soit à partir d'une tolérance sur toutes les composantes du vecteur $\{u\}$.

Critères d'arrêts de l'algorithme (que l'on a pris) :

1. Nombre d'itérations $n=100$.
2. Tolérance sur β ($\varepsilon_\beta = 10^{-6}$).
3. Tolérance sur g ($\varepsilon_H = 10^{-6}$).
4. Tolérance sur u ($\varepsilon_u = 10^{-6}$).

Etapes de l'algorithme :

1. Choisir le point de départ $u^{(0)}$, généralement l'origine du repère.
2. Evaluer de la fonction d'état limite $G(X)$ dans l'espace normé : $H(U)$

3. Calculer le gradient de l'état limite $\{ \nabla H(u^{(m)}) \}$ et sa norme $\| \nabla H(u^{(m)}) \|$, en déduire $\alpha^{(m)}$ par (4.24).
4. Calculer $\beta^{(m)}$ par la relation (4.23).
5. Calculer $u^{(m+1)}$ par la relation (4.25).
6. Si les tolérances sont atteintes, le programme s'arrête, sinon retour à 2.

IV.4.2.4. Résultats de l'étude:

Indice de fiabilité et probabilité de défaillance :

Nos variables d'entrées (variables de départ) sont rappelées dans le Tableau IV.16. suivant :

Tableau IV.16. Variables aléatoires et leurs densités de probabilité.

Paramètres et variables		Densité	Moyenne	Dispersion
Module de Young (E)		Log- normale	11994MPA	C.V=25 %
Charge du convoi exceptionnel(q)	Poutre intermédiaire	Normale	37.4 KN	C.V=30 %
	Poutre de rive		27.5 KN	C.V=30 %
Charge permanente + trottoir(P ₁)		Déterministe	--	--
Longueur (L)		Déterministe	--	--
Section (A)		Déterministe	--	--

Les principaux résultats que nous donne l'analyse fiabiliste sont l'indice de fiabilité β et la probabilité de défaillance, représentés dans le tableau suivant :

Tableau IV.17. Résultats fiabilistes (E log-normale).

	Indice de fiabilité β	Probabilité de défaillance	Point de conception P*	
			Valeur de E	Valeur de q
Poutre intermédiaire	2.55	$5.3 \cdot 10^{-3}$	6330 MPA	44.392 KN
Poutre de rive réparée	2.52	$5.8 \cdot 10^{-3}$	6330 MPA	31.685 KN
Poutre de rive non réparée	2.84	$2.2 \cdot 10^{-3}$	5861 MPA	32.199 KN

A titre de comparaison, si on prenait la distribution de la variable E comme étant normale, on obtiendra les résultats suivants :

Tableau IV.18. Résultats fiabilistes en utilisant une distribution de E normale.

	Indice de fiabilité β	Probabilité de défaillance	Point de conception P*	
			Valeur de E	Valeur de q
Poutre intermédiaire	1.27	$10.16 \cdot 10^{-2}$	15597 MPA	32.739 KN
Poutre de rive réparée	1.93	$2.67 \cdot 10^{-2}$	6233 MPA	29.919 KN

Interprétations :

Rappelons que le pont étudié est un échangeur, pont de première classe à 2 voies, construit sur la RN03 reliant Biskra à Batna. Si nous prenons en considération ces caractéristiques pour en tirer la fiabilité cible (à partir du tableau IV.2.), Nous classerions sûrement ce pont dans la catégorie des structures à conséquences économiques moyennes. Cependant, Les experts ont affirmé, qu'en réalité, un pont d'une si grande classe n'était pas nécessaire, vu le trafic très léger qui passe par là. Et qu'en cas de défaillance, ce dernier pourrait être remplacé par un rond point, vu l'espace disponible.

Donc, en se référant à l'avis des experts, il sera considéré qu'en cas de défaillance, notre pont n'aurait aucune incidence économique et que le nombre de personnes mises en danger serait réduit. A partir de là, le tableau IV.2. nous donne comme valeurs cibles (un indice de fiabilité $\beta = 3$, et une probabilité de défaillance associée $P_f = 10^{-3}$). Ces valeurs cibles nous serviront de référence, et les résultats fiabilistes que nous obtenons y seront comparés pour évaluer l'état actuel de la structure.

Notre étude, que nous appellerons étude standard, donne les résultats consignés au Tableau IV.17.

Comme on peut le voir, la probabilité de défaillance des trois types de poutres étudiées, est de l'ordre de 10^{-3} , une probabilité de défaillance qui n'est pas très éloignée de la probabilité de défaillance cible (10^{-3}).

Par rapport à l'indice de fiabilité, la différence est plus apparente :

- Pour une poutre intermédiaire, la différence obtenue est de $\Delta = |3 - 2.55| = 0.45 > 0.25$, une différence de fiabilité estimée assez significative³. Donc, la poutre intermédiaire est considérée comme non fiable.
- Pour la poutre de rive réparée $\Delta = 0.48 > 0.25$. Cette poutre est également considérée inapte à accomplir sa mission.
- Pour ce qui est de la poutre de rive non réparée, la différence de fiabilité est égale ici à $\Delta = 0.16 < 0.25$. On pourrait considérer alors que cette différence n'est pas très importante, et que cette poutre pourrait être considérée encore fiable.

Notons que l'étude a été réalisée avec un coefficient de variation de E de 25 %. On estime que cette valeur ne peut être atteinte qu'après un âge avancée de la structure (à partir de 90 ans environ). Or notre pont n'est âgé que de 8 ans. Par conséquent, ces résultats ne peuvent être pris en compte.

C'est pour ces raisons que l'étude a été reprise pour des coefficients de variation de 10 %, 15 % et 20 %.

³ En se référant à [24].

IV.4.2.5. Analyse de sensibilité :

Dans ce paragraphe, nous effectuons quelques changements au niveau de la loi de distribution de E, et des coefficients de variation considérés dans les calculs précédents (étude standard) pour :

- Comprendre l'influence d'une variable sur la fiabilité lorsque cette dernière change de distribution.
- Egalement, pour évaluer réellement la fiabilité du pont de Biskra. En effet, d'après l'avis d'un expert⁴, le béton atteindrait sa valeur utile au bout de 5 ans. Sachant que notre pont n'a que 8 ans d'âge, il est clair que le béton vient juste d'entamer sa vie utile (Figure IV.14) et toujours d'après l'avis de l'expert, la variabilité sur le béton ne devrait certainement pas dépasser les 5 à 10 %.

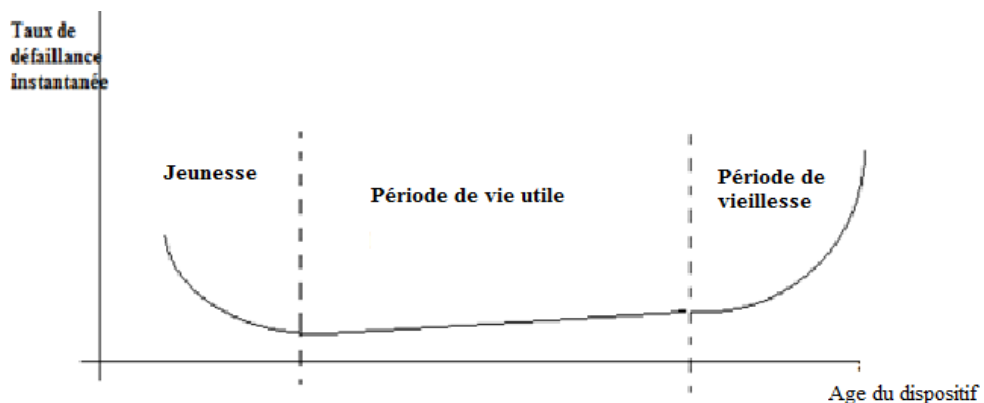


Figure IV.14. Allure de l'évolution du taux de défaillance « courbe en baignoire ».

1. Analyse de fiabilité pour différents coefficients de variation de E:

Pour déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires, nous nous basons sur les données scientifiques générales et sur l'avis d'experts reconnus dans le domaine, puisque dans la réalité, la détermination mathématique de ces lois est le plus souvent impossible, surtout en l'absence de répétabilité (traçabilité) de résultats expérimentaux. Pour cela, les chercheurs sont souvent confrontés au problème du choix d'une loi représentative pour une variable donnée [19].

Nous effectuons cette analyse de sensibilité, pour comprendre dans un sens l'incidence de la distribution d'une variable sur la probabilité de défaillance de notre structure, et également pour avoir une idée sur la façon dont la fiabilité évolue. Rappelons que notre pont est neuf, et qu'il est clair qu'en 8 ans d'âge il est peu probable que la variabilité sur le module de Young atteigne les 25 %.

⁴ Expert de la SAPTA.

Tableau IV. 19. Résultats de l'analyse de sensibilité.

Poutre, Avec q (normale, Cov= 30%)	Paramètre de distribution		B	P _f	Valeurs optimales	
	Distribution de E	COV de E			E*	q*
Intermédiaire	Normale	10%	4.68	1.43 10 ⁻⁶	6665 MPA	53,74 KN
		15%	3.20	6.64 10 ⁻⁴	6355 MPA	45.087 KN
		20%	2.43	7.5 10 ⁻³	6238 MPA	41.81 KN
Rive non réparée	Normale	10%	5.10	1.68 10 ⁻⁷	6053 MPA	37.466 KN
		15%	3.45	2.74 10 ⁻⁴	5858 MPA	32.12 KN
		>15%	Non convergence de l'algorithme			
Rive réparée	Normale	10%	4.69	1.34 10 ⁻⁶	6555 MPA	37.48 KN
		15%	3.18	7.15 10 ⁻⁴	6346 MPA	32.10 KN
		20%	2.41	8 10 ⁻³	6270 MPA	30.13 KN
Intermédiaire	Log- normale	10%	5.79	3.34 10 ⁻⁹	7196 MPA	68.57 KN
		15%	4.13	1.78 10 ⁻⁵	6688 MPA	54.38 KN
		20%	3.17	7.54 10 ⁻⁴	6454 MPA	47.86 KN
Rive non réparée	Log- normale	10%	6.67	1.22 10 ⁻¹¹	6509 MPA	50.31 KN
		15%	4.66	1.54 10 ⁻⁶	6117 MPA	39.36 KN
		20%	3.55	1.92 10 ⁻⁴	5948 MPA	34.62 KN
Rive réparée	Log- normale	10%	5.94	1.38 10 ⁻⁹	6964 MPA	48.03 KN
		15%	4.15	1.63 10 ⁻⁵	6580 MPA	38.12 KN
		20%	3.15	7.98 10 ⁻⁴	6414 MPA	33.86 KN

Interprétations :

Le tableau ci-dessus donne les différents produits de l'analyse de fiabilité, obtenus pour différents coefficients de variations de E.

1. Le Coefficient de variation sur un béton jeune de 8 ans ne devrait pas dépasser les 10 %. D'après le Tableau IV.19., nous voyons clairement que pour une distribution de E (log-normale) avec un Cov = 10 %, toutes les poutres vérifient les conditions de résistance, avec des indices de fiabilité tous nettement supérieur à la valeur cible ($\beta = 3$). La différence nous permet même d'affirmer que nos poutres sont surdimensionnées.
2. Nous constatons également, que plus le Coefficient de variation est grand, plus la probabilité de défaillance de la structure augmente (indice de fiabilité diminue). Nous remarquons cependant que même en atteignant 20 % de variation sur le module de Young E, les trois types de poutres satisfont les conditions de résistance.
3. Partant des produits de l'analyse de fiabilité, obtenues pour un Cov =10 %, nous pouvons à présent, analyser la différence de fiabilité entre les poutres et la qualité de réparation du pont de Biskra :

Pour ce qui est de la différence de fiabilité entre les différentes poutres, on rapporte :

- une différence de fiabilité ($\Delta = 0.88 > 0.25$), entre les poutres intermédiaires et la poutre de rive originale. Sachant que nos 7 poutres ont les mêmes caractéristiques. Nous rapportons cet écart, à la différence de répartition des charges entre ces poutres, ce qui est évident, puisque les poutres intermédiaires sont plus sollicitées par le chargement q .
- la différence de fiabilité entre les deux poutres de rive, est rapportée à la réparation. Nous pouvons donc conclure que la réparation n'a pas réussi à rendre à la poutre réparée sa résistance initiale.

En ce qui concerne la réparation :

- on peut remarquer que la fiabilité de la poutre réparée est inférieure à la fiabilité de la poutre non réparée, mais qui reste cependant bien plus que satisfaisante.
- On peut également voir, que la fiabilité de la poutre réparée est supérieure à la fiabilité de la poutre la plus sollicitée, ce qui confirme le fait qu'elle vérifie largement ses conditions de résistance.

Nous pouvons à partir de ces deux résultats affirmer que la réparation par précontrainte extérieure ne ramène pas l'état de l'élément réparé à un état aussi bon que neuf. Mais à un état meilleur qu'avant la réparation.

4. Enfin, nous pouvons constater qu'un mauvais choix de la distribution d'une variable influe considérablement sur les résultats que l'on obtient. Les différences que l'on peut voir dans le Tableau IV.19. en témoignent (pour la poutre de rive réparée : $\beta_{norm} = 4.69$, $\beta_{lg_norm} = 5.94$). En conclusion, le choix de la distribution est *décisif* dans l'analyse fiabiliste, tel qu'un mauvais choix qui ne reflète pas la variation réelle des incertitudes, donnerait des résultats qui ne reflètent pas la résistance réelle de la structure.

2. Facteurs d'importances :

Rappelons que l'objet principal de cette étude fiabiliste est d'obtenir la probabilité de défaillance de notre structure. Cependant, il est très important d'effectuer une étude de sensibilité des variables qui donne l'influence de chacune d'entre elles sur la structure par rapport à la fonction d'état limite considérée. Cette étude de sensibilité va mettre en évidence les variables les plus significatives, ce qui va nous permettre de mieux les maîtriser selon leur rôle, et en les soumettant à de sévères contrôles de qualité.

Au point de conception, le vecteur normal à la surface d'état limite donne une idée sur les poids des variables normalisées sur la fiabilité au voisinage de ce point. Les cosinus directeurs α_i^* , sont donc importants pour examiner les poids relatifs des différentes variables normées. Ils sont représentés sur les figures suivantes sous forme de camemberts. Les valeurs α_i^* sont ainsi appelées *facteurs de sensibilité*. Les composantes α_i^* vérifient la condition de normalisation $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$, et les facteurs α_i^2 sont interprétés comme les *facteurs d'importance* normés des variables aléatoires associées.

Etude standard :

Tableau IV.20. Facteurs de sensibilité pour E (log normale).

Poutre	Intermédiaire	Rive réparée	Rive non réparée
$(\alpha^*) \begin{cases} \alpha_E^* \\ \alpha_q^* \end{cases}$	- 0.9690 0.2470	- 0.9795 0.2011	- 0.9797 0.2004

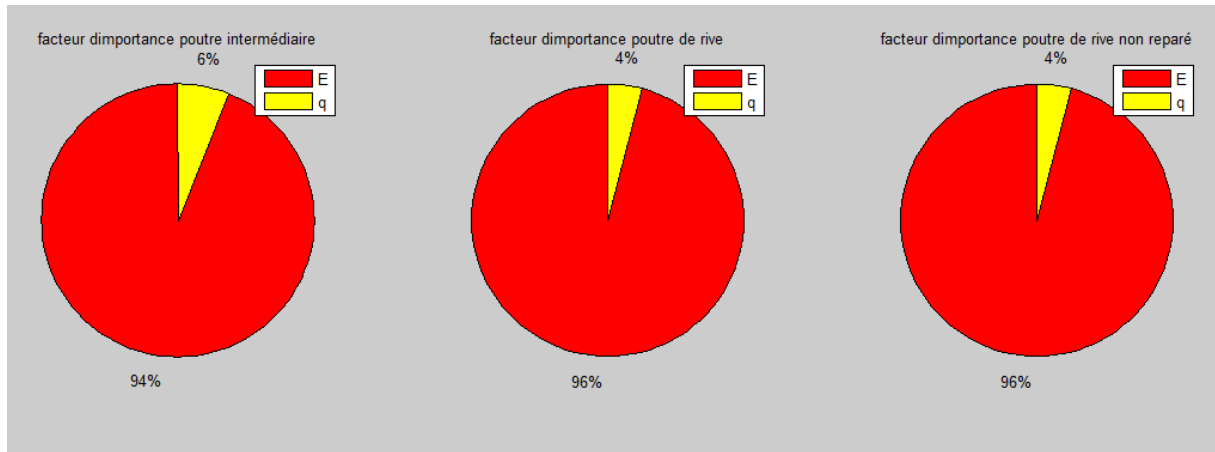


Figure IV.15. Facteurs d'importance associés.

Si on étudiait la sensibilité des variables du même modèle avec une distribution normale de E à un Cov=25 %, on obtiendrait les camemberts suivants :

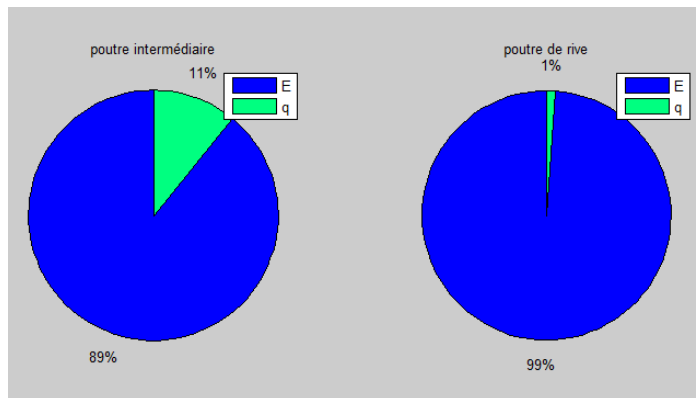


Figure IV.16. Facteurs d'importance avec une distribution de E normale.

Interprétations:

L'étude de l'importance des variables aléatoires et de leurs paramètres de distribution permet d'avoir une idée claire et précise sur le comportement mécano-fiabiliste. D'après la Figure IV.15., on peut clairement voir que c'est le module de Young qui influe le plus sur la fiabilité de notre élément car il joue sur le matériau (influence à long terme qui aurait pu être bien illustrée avec une étude de fiabilité temporelle), alors que la charge influe très peu sur la fiabilité de nos poutres (influence à court terme ou instantanée sur le comportement de la

poutre). Nous pouvons donc en conclure que la charge est correctement prise en compte dans le processus de dimensionnement actuel.

En général, l'étude de fiabilité pour un ouvrage se fait à plusieurs états limites (flexion, cisaillement, poinçonnement, fatigue, ...), en considérant au minimum 3 sources d'incertitudes et c'est l'étude de sensibilité des variables qui permet de déterminer quelles variables sont les plus influentes pour chacun de ces états limites. Ceux qui influenceront le moins pourront être considérés comme déterministes, et ceux qui influenceront le plus sur la résistance feront l'objet de sérieux contrôles de qualité, visant à maîtriser leurs effets.

Nous pouvons tirer de notre étude des facteurs de sensibilité pour l'état limite de flexion (à l'étude standard), que le module de Young influe en grande proportion, contrairement à la charge d'exploitation qui n'influe pas autant sur la fiabilité (toujours par rapport à E). Cependant, nous ne pouvons pas prendre en compte la charge q comme étant déterministe, car nous le verrons plus tard, l'influence de q sur la poutre influe différemment lorsque celle-ci est plus résistante.

Remarque :

1. On peut voir dans le Tableau IV.20. des valeurs de sensibilité négatives. En effet, une valeur de sensibilité varie entre -1 et 1, où une valeur positive indique que la variable contribue à une diminution de β , donc une variable liée aux sollicitations, alors qu'une valeur négative indique que la variable contribue à une augmentation de β , donc une variable liée aux résistances, ce qui justifie nos résultats : Le module de Young E (sensibilité en valeurs négatives) est une caractéristique du matériau (résistance), et la charge q (sensibilité en valeurs positives) est une sollicitation.
2. Une étude de sensibilité est plus intéressante lorsqu'on évalue la sensibilité de la structure à plusieurs variables (au moins 3).

Etude de sensibilité

a. Poutres intermédiaires :

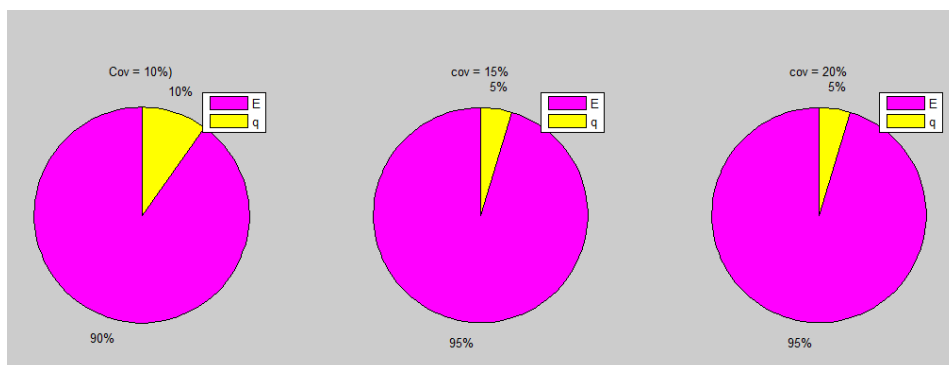


Figure IV.17. Facteurs d'importance poutre intermédiaire (E normale).

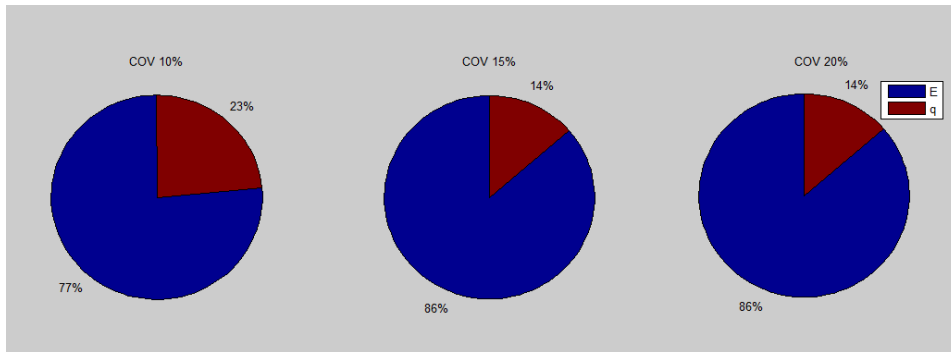


Figure IV.18. Facteurs d'importance poutre intermédiaire (E log-normale).

Interprétations :

- Selon que E suit une loi normale ou log-normale, on constate que c'est toujours le module de Young qui influe le plus sur la fiabilité de nos éléments, et que dans les deux cas, plus il y a des incertitudes sur E plus E influe sur la fiabilité (influence négative – la probabilité de défaillance augmente).
- On remarque également que l'influence des sollicitations est non négligeable lorsque la variabilité sur le matériau n'est pas grande. En revanche, lorsque l'élasticité du matériau est sujette à une forte variabilité, l'influence de q sur la résistance de la poutre est considérée négligeable par rapport à l'impact du matériau.

b. Poutres de rive :

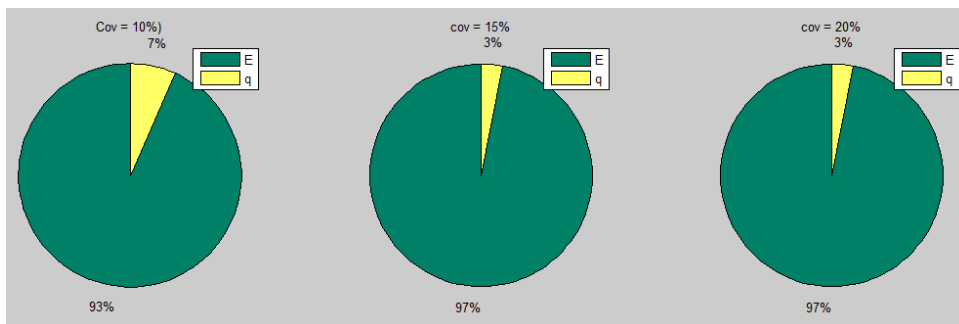


Figure IV.19. Facteurs d'importance poutre de rive réparée (E normale).

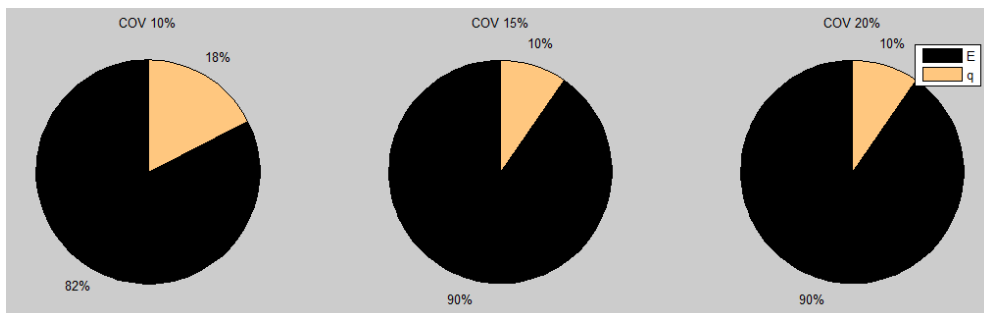


Figure IV.20. Facteurs d'importance poutre de rive réparée (E log-normale).

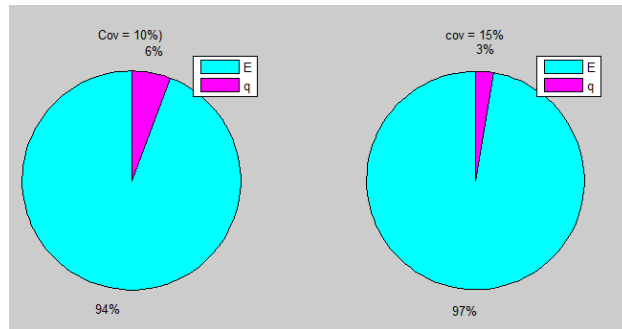


Figure IV.21. Facteurs d'importance poutre de rive non réparée (E normale).

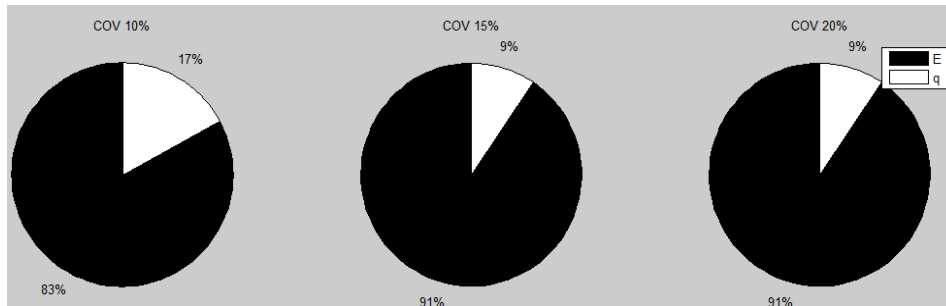


Figure IV.22. Facteurs d'importance poutre rive non réparée (E log-normale).

Interprétations :

Pour ce qui est des poutres de rive, que la distribution E suive une loi normale, ou log-normale, l'influence de E sur la fiabilité croît avec l'augmentation du taux de variation.

Nous remarquons que l'impact de E sur la fiabilité de nos poutres, pour une distribution normale, commence très tôt (à 10 %) avec une très grande proportion, et qu'il n'y a pas une grande différence, en vieillissant. Nous rapportons cela au fait que les poutres de rives ne reçoivent pas un grand impact de la part des sollicitations.

En revanche, pour une variation de E log-normale, la différence d'influence de q sur les poutres de rive entre une poutre où le Cov a atteint 10% et la même lorsque le Cov a atteint les 25 %, est égale à 14 %. Pour les poutres intermédiaires, cette différence atteint les 17 % ; des variations qui ne peuvent pas être négligées.

A partir de cette étude, il est clair qu'un mauvais choix de la loi de distribution d'une variable influe considérablement sur les valeurs que l'on obtient. Il est donc très important de bien choisir, et de bien évaluer la variabilité des sources d'incertitudes, en se basant sur des données scientifiques générales, et sur l'avis d'experts reconnus dans le domaine.

IV.5. Fiabilité du pont :

Pour pouvoir évaluer la fiabilité de tout le pont, nous devons donc passer par la fiabilité système (chapitre II). Cette approche nécessite des outils de calcul et un temps de calcul important.

Dans notre cas, nous n'avons étudié la fiabilité des poutres qu'à un seul état limite. Donc, si on finissait d'étudier la fiabilité de tout le pont à l'état limite de flexion, nous pourrions penser à modéliser notre pont en un système en parallèle (Figure IV.23.), où chaque bloc représenterait une poutre du pont:

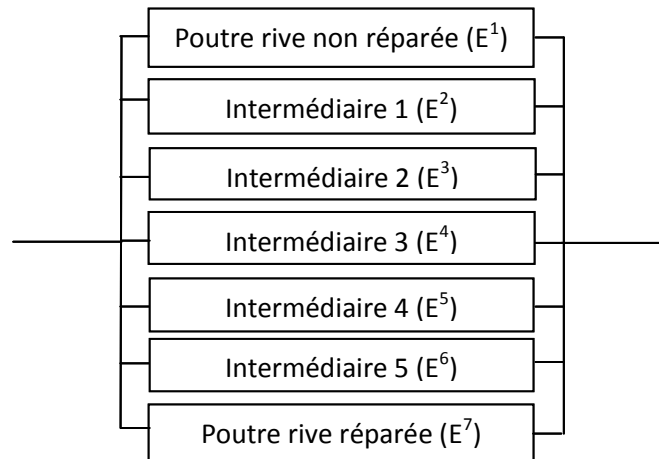


Figure IV.23. Architecture structurale du pont.

La relation entre les taux de défaillance des blocs et la fiabilité du système est affaire de modélisation mathématique. En supposant que la fiabilité prévisionnelle ne permet pas d'atteindre l'objectif fixé pour le système, il faut assigner à chacun des blocs des objectifs de fiabilité plus exigeants (moindre taux de défaillance ou moindre temps d'indisponibilité).

Pour l'étude de fiabilité de la poutre, nous avons pris en compte la défaillance à la flexion, avec un choix de variables supposés non corrélés entre elles. Dans le cas de la *fiabilité système*, on sait que la fiabilité du tout dépend de la fiabilité de ses composants et de la manière dans ces derniers sont liés. Donc, il y a une interdépendance entre eux.

Dans ce cas, si nous raisonnons toujours par rapport au modèle de la Figure IV.23., l'étude de fiabilité d'une poutre est évaluée sachant qu'il n'y a aucune corrélation ni entre les variables, ni entre les états limites (puisque dans notre cas, un seul état limite seulement est étudié). En revanche, pour la fiabilité de tout le pont, nous devons prendre en compte la corrélation des poutres entre elles. Plusieurs raisons peuvent l'expliquer :

1. La dalle transmet les charges sur les poutres [26] (Figure IV.24.):

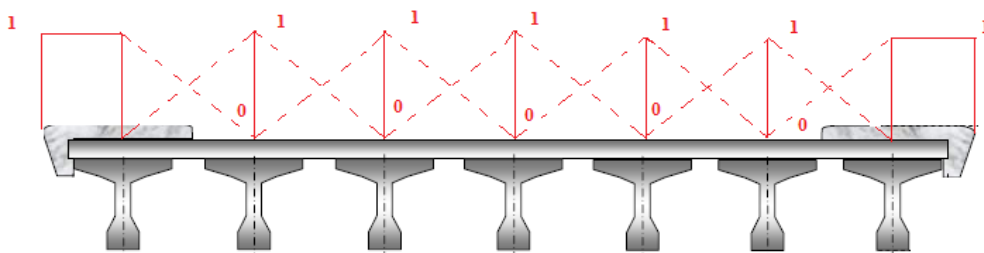


Figure IV.24. Répartition des sollicitations sur chaque poutre (ligne d'influence).

Nous trouvons aussi dans la littérature une autre explication, donnant une corrélation entre les poutres des ponts de 3 à 7 poutres égale à 0.5. Il est peu probable que la corrélation entre les poutres soit nulle car elles partagent sûrement les mêmes matériaux (même fournisseur de béton et d'acier). Toutefois, la corrélation n'est probablement pas parfaite et cela par rapport aux différentes étapes de construction et à la variabilité inévitable entre les gâchées de béton lors de sa production. Peu d'information est disponible à ce sujet; une corrélation de 0.5, soit à mi-chemin entre une corrélation nulle et parfaite, semble adéquate. Le coefficient de corrélation d'un pont à 2 poutres est posé égal à 0,8. Il est supposé que le nombre réduit de poutres permet d'avoir une plus grande uniformité dans les matériaux et dans la qualité des travaux de construction [24].

Le système est en parallèle, l'écriture (4.28) donne la combinaison d'événements qui entraînent l'événement indésirable :

$$P(\text{pont}) = \text{Prob}(E^1 \cap E^2 \cap E^3 \cap E^4 \cap E^5 \cap E^6 \cap E^7) \quad (4.28)$$

Si on essaye d'interpréter cela, on trouvera que pour que le pont soit en état de défaillance, il faudrait que toutes les poutres soient défaillantes simultanément. Sauf qu'en réalité, il ne suffirait que de 2 à 3 poutres soient défaillantes pour dire que le pont est défaillant.

La difficulté de la fiabilité de tout un système réside dans l'identification des modes de défaillance; pour cela des simplifications et des approximations peuvent être utilisées. La modélisation des systèmes en série ou en parallèle ne décrit pas la réalité des structures en béton; le modèle en série-parallèle est la modélisation la plus fidèle et réaliste. Cependant cette approche demande beaucoup de réflexion et sa mise en œuvre est très coûteuse [15].

En conclusion, la modélisation du pont de Biskra en un système complètement en parallèle ne peut définir la défaillance réelle du pont. Donc, nous définirons une autre modélisation par un système illustré en (Figure IV.25.), tel que si deux poutres successives (voisines) sont défaillantes, tout le pont sera considéré comme défaillant :

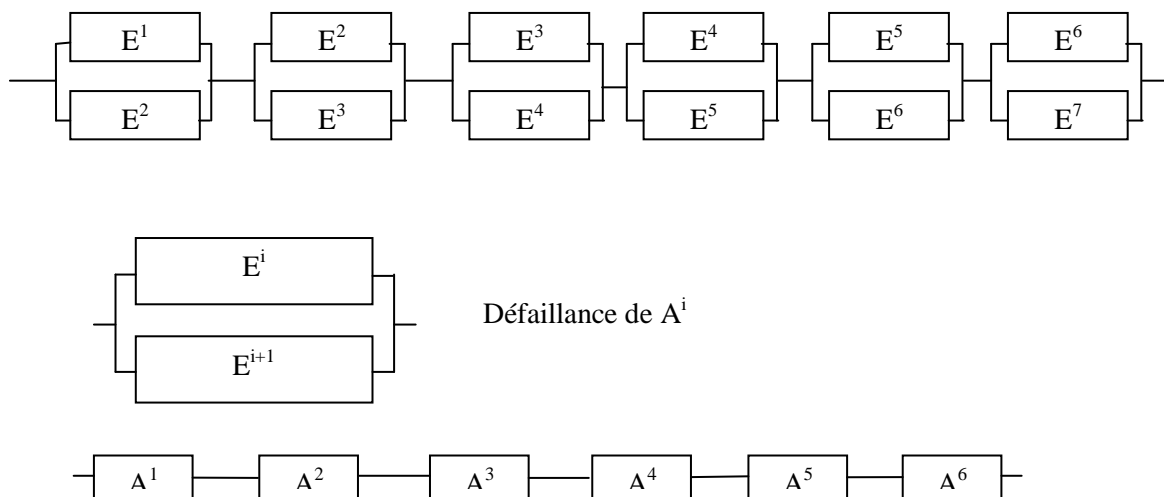


Figure IV.25. Défaillance du système lorsque 2 poutres successives sont défaillantes.

$$\text{Prob}(A^1) = E^1 \cap E^2$$

$$\text{Prob}(A^2) = E^2 \cap E^3$$

$$\text{Prob}(A^3) = E^3 \cap E^4$$

$$\text{Prob}(A^6) = E^6 \cap E^7$$

Ce qui nous donnera la formulation de tout le système en (4.29):

$$\text{Prob}(\text{Pont}) = \text{Prob}(A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup A^4 \cup A^5 \cup A^6) \quad (4.29)$$

En réalité, pour évaluer si le pont vérifie les conditions de résistance, l'analyse fiabiliste doit inclure tous les éléments structuraux du pont (poutres, piliers, suspension...).

Le raisonnement reste plus ou moins simple, selon le scénario de défaillance que l'on étudie. Cependant, le calcul de la fiabilité d'une combinaison d'éléments en parallèle ou en série, fait référence à un calcul de combinaison logique ET/OU des composants, ce qui nécessite des outils de calcul spécifique.

IV.6. Conclusion :

Dans ce chapitre, l'approche probabiliste nous a servi à évaluer la fiabilité du pont de Biskra, pont réparé par précontrainte extérieure. Les résultats obtenus à travers cette analyse nous ont permis d'avoir la précision que toutes les poutres du pont de Biskra vérifient largement les conditions de résistance, et qu'elles seraient même surdimensionnées.

Cette analyse fait ressortir également que la réparation par précontrainte extérieure a permis d'améliorer la fiabilité de l'élément dégradé sans toutefois lui redonner sa résistance originale.

Cette méthode peut également être utilisée pour l'étude de la fiabilité du pont dans le temps. Il pourrait également être très intéressant d'élaborer un programme de maintenance préventive en prenant en compte l'aspect Coût /Performance,... Cette approche reste très vaste, et permet au concepteur d'avoir une précision non négligeable sur la structure, car contrairement aux méthodes déterministes, cette analyse permet d'évaluer la structure en fonctions des incertitudes réelles.

CHAPITRE V

*Potentiel de l'approche et
Perspectives*

CHAPITRE V

Potentiel de l'approche et perspectives.

V.1. Introduction :

L'évaluation des ouvrages d'arts existants est une question de grande actualité. Dans la plupart des pays européens, le rythme de construction d'infrastructures nouvelles décroît régulièrement alors que l'on commence à mesurer les efforts financiers que nécessiteront la maintenance, le renforcement et lorsqu'il y a lieu, la réparation des ouvrages existants [21].

En Algérie, il a été clairement remarqué, ces dernières décennies, un accroissement du nombre d'ouvrages d'arts. L'évolution économique croissante et rapide du pays peut à la longue engendrer des nuisances telles que les fissurations,... Rappelons également que les ouvrages vieillissent naturellement, par corrosion, par fatigue..., et ce, quelle que soit leur perfection initiale. Il est donc nécessaire, de faire régulièrement des opérations d'inspection et de maintenance permettant de prévenir d'éventuelles défaillances. L'évaluation basée sur la théorie de la fiabilité est la méthode d'évaluation des ponts la plus avancée [20], et pourrait s'avérer très utile pour atteindre l'objectif : Coût/ Fiabilité.

Le domaine des probabilités est très vaste, et de ce fait, il est utilisé dans divers domaines et de diverses manières pour aider le concepteur à mieux évaluer sa structure, dans le temps ou pas, pour la conception, la maintenance ou la réparation.

Dans ce dernier chapitre, quelques applications de cette analyse utilisées dans le domaine du génie civil seront décrites brièvement.

V.2. Evaluation temporelle de la fiabilité:

La probabilité prévisionnelle se fait en fonction du temps. Cette probabilité n'a pas été traitée dans ce travail, mais elle est très importante. Comme on peut le voir en Annexe A, la majorité des travaux effectués sur la fiabilité prennent en considération le facteur temps.

Une approche indépendante du temps conduit au calcul de la probabilité [11]:

$$P_{f,i}(t) = Prob(G(t, x(t), w) \leq 0) \text{ à } t \text{ fixé.} \quad (5.1)$$

qui correspond à l'étude que l'on a faite, où t dans notre cas, représente un temps futur après réparation de l'ouvrage.

L'approche dépendant du temps (time variant) pose la question du calcul de la probabilité cumulée :

$$P_{f,c}(t) = Prob(\exists \tau \in [t_0, t], tq. G(\tau, x(\tau), w) \leq 0) \quad (5.2)$$

où t_0 est la date de mise en service du système mécanique.

La réponse à cette question peut être abordée par différentes méthodes fondées sur la notion de taux de franchissements. Selon la formule de Rice, il s'agit d'estimer le nombre de trajectoires du processus qui entrent dans le domaine de défaillance sur l'intervalle $[t_0, t]$ [11].

V.2.1. Durée de vie d'un ouvrage :

En général, la résistance d'un objet réel sera, pendant un temps fini seulement, plus grande que la charge qui lui est appliquée puisque la résistance décroît généralement suite à sa détérioration. C'est pourquoi, les objets réels sont sans défauts pendant une période finie seulement. Pendant cette période, la fiabilité est égale à l'unité et après elle est nulle.

Si la charge et la résistance initiale instantanée des objets sont connues, la durée de vie peut être déterminée par une équation du type $R(t) = Q$

où : $R(t)$: résistance.

Q : charge.

Ceci est déterminé en résolvant l'équation fondamentale de détérioration qui se présente comme suit :

$$\text{Log}_e R = \text{Log}_e R_0 - k \cdot t \cdot e^{-\frac{Q}{E}} \tag{5.3}$$

R_0 : résistance instantanée.

k : constante dépendant de la déféctuosité.

La durée de vie de l'objet est donc:

$$t = \frac{1}{k} (\text{Log} R_0 - \text{Log} Q) e^{\frac{Q}{E}} \tag{5.4}$$

La solution graphique de cette équation est indiquée sur la Figure V.1.

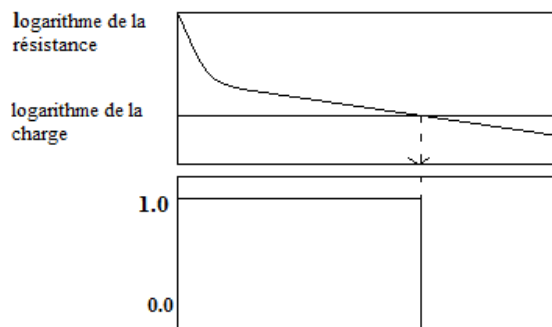


Figure V.1. Solution de l'équation de la durée de vie.

On dispose de 3 voies seulement pour modifier la durée de vie d'un objet :

1. Augmenter la résistance de l'objet ;
2. Réduire la charge appliquée à l'objet ;
3. Réduire la vitesse de détérioration de l'objet [25].

V.2.2. Prise en compte du temps dans le modèle étudié :

Avant de comprendre l'influence du temps dans une étude fiabiliste, nous répondrons d'abord à une question essentielle : Pourquoi arrive-t-on à la défaillance ?

La réponse à cette question est l'essence même des méthodes fiabilistes. Ce sont les aléas et les incertitudes qui font qu'un système bien conçu dévie de sa trajectoire *prévisionnelle*. Il faut donc identifier les variables de conception traduisant un niveau *significatif de fluctuation* ou d'incertitudes.

Dans l'étude de notre pont (Chapitre IV) nous avons gardé le formalisme traditionnel de l'approche. Nous avons étudié à un instant t la fiabilité des éléments structuraux d'un pont, tel qu'à cet instant t , le module de Young (E) suivait une variation de 25 % et la charge q une variation pouvant atteindre les 30 %.

En réalité, la résistance de l'élément se dégrade sous l'effet du vieillissement. Il devient important d'intégrer cette dégradation si l'application de la charge est répétée dans le temps, en particulier si la durée de service devient non négligeable vis-à-vis de la durée de vie de l'élément. Il est généralement proposé d'étendre le modèle calculant la fiabilité à partir de la distribution de la résistance afin qu'il intègre cette dimension temporelle.

Dans le cas de notre étude, si on devait introduire le facteur temps, l'évolution de la résistance devrait être compatible avec le modèle statique que nous avons mis en place. Il faudra donc chercher à déterminer la distribution de la résistance en fonction du temps.

La distribution de la résistance variant avec le nombre de cycles d'application de la charge (le temps), il est nécessaire de disposer d'un critère de rupture relié au temps (en introduisant le vieillissement dans le critère de défaillance). C'est là la différence majeure avec le fonctionnement général utilisé pour l'étude traditionnelle où le critère de défaillance et la distribution associée n'étaient pas reliés au temps [23].

V.3. Méthodes de fiabilité en mécanique :

En acceptant une approche par les probabilités, les méthodes de fiabilité en mécanique permettent de calculer des estimateurs de la fiabilité : indice de fiabilité, sensibilité de défaillance,...

Trois champs d'applications sont particulièrement visés :

- Les ouvrages exceptionnels ou très novateurs pour lesquels l'expérience accumulée au cours des siècles est insuffisante ;
- Les ouvrages et constructions tout à fait ordinaires dont la conception s'appuie sur les codes et règlements dont l'évolution actuelle intègre la possibilité d'une calibration de coefficients partiels par les méthodes fiabilistes ;
- Le suivi des ouvrages au cours de leur vie, qui fait souvent apparaître un état réel dégradé (à l'état par exemple, de fatigue) pour lequel la stratégie d'inspection-maintenance-réparation peut être optimisée par la fiabilité [11].

V.3.1. Calibrations des coefficients partiels :

Une approche scientifique de la détermination des coefficients partiels à introduire dans des règles de dimensionnement repose, entre autre, sur une procédure de calibration qui

s'appuie sur la capacité d'effectuer un calcul de fiabilité sur le meilleur modèle mécanique possible.

La démarche générale consiste tout d'abord, en la présentation du modèle mécanique et sa solution numérique par la méthode des éléments finis, puis en la description de la méthode de calibration consistant en la recherche d'un point de conception moyen optimal. Nous pouvons résumer en 6 étapes la procédure d'une méthode de calibration :

1. Choisir la classe de structures à calibrer en définissant :
 - l'élément mécanique ;
 - le ou les modèles de défaillance ;
 - les variables de conception ;
 - leurs champs de variation (moyenne, écart-type) .
2. Sélectionner un certain nombre de situations de conception et évaluer leurs poids w_i .
3. Définir un indice de fiabilité cible β_t .
4. Dimensionner chaque situation de conception i en ajoutant une variable de conception de telle manière que $\beta_i = \beta_t$ et en déduire les sensibilités α_i .
5. Choisir une fonction de pénalité M et rechercher δ par minimisation de:

$$\Delta = \sum_{domaines} \sum_{matériaux} \sum_{scénarios} \sum_{paramètres} w_i M(\beta_i, \beta_t); \text{ avec: } \beta_i = \beta_t \cdot \vec{\alpha}_i \cdot \vec{\delta}$$
6. Calcul des coefficients de sécurité par :

$$\gamma_x = \frac{x^*}{x_k} \quad \text{ou} \quad \gamma_x = \frac{x_k}{x^*}$$

Selon que la variable x est une sollicitation ou une résistance, où $x^* = F_x (\Phi(-\beta_t \cdot \delta))$

$\vec{\delta}$: composante de δ associée à la variable x .

x est la valeur de conception et x_k la valeur caractéristique [28].

V.3.2. Maintenance et réparation des ouvrages :

La durabilité des constructions a une importance capitale. Pour certaines constructions sujettes naturellement à des dégradations (tels que les ouvrages d'arts, les ouvrages exceptionnels,...), il est extrêmement important de tout mettre en œuvre pour éviter la défaillance du fonctionnement, défaillance qui pourrait être dangereuse et avoir des conséquences économiques graves. Par conséquent, il est nécessaire de penser à une stratégie de maintenance tout au long de la durée de vie de l'ouvrage, pour améliorer sa fiabilité, prévenir les défaillances et réduire les coûts de maintenance.

La maintenance peut être caractérisée, selon son effet sur l'état du système après avoir reçu une action de maintenance :

- Réparation (maintenance) parfaite : toute action de maintenance permettant de ramener le système à un état « *as good as new* ». après une maintenance parfaite, le système à le même taux de défaillance qu'un système neuf.
- Réparation (maintenance) minimale : toute action ramenant le taux de défaillance à celui qu'il avait juste avant la défaillance « *as bad as old* ».

- Réparation (maintenance) imparfaite : toute action permettant de ramener le système dans un état entre « *as good as new* » et « *as bad as old* ». Elle est considérée comme un cas général englobant les deux cas extrêmes. C'est le cas de notre application, après défaillance de notre poutre, celle-ci à été rattrapée [31].

La maintenance préventive a lieu seulement lorsque le taux de défaillance ou les autres indices de fiabilité atteignent un niveau prédéterminé et les défaillances sont corrigées par des réparations. Un élément est généralement maintenu à des intervalles de temps inégaux. Souvent les intervalles deviennent de plus en plus courts avec le temps, sachant que la majorité des éléments nécessitent des maintenances plus fréquentes avec l'âge [26].

Une étude de fiabilité prévisionnelle peut permettre d'élaborer un programme de maintenance préventive alliant coût et performance, en optimisant la périodicité des maintenances préventives pour allonger la durée de vie de l'ouvrage.

L'évaluation d'un tel programme nécessite la fonction de fiabilité, qui est déterminée par l'approche probabiliste. A partir de là, nous pourrions déterminer les intervalles de temps auxquels les opérations de maintenance sont nécessaires.

V.3.3. Fiabilité / Coût :

V.3.3.1. Coût de la fiabilité :

Le coût total qu'un fabricant dépense lors de la conception, fabrication et période de garantie d'un produit est appelé *coût de fiabilité*.

Ce concept de coût de fiabilité est relié à la notion de qualité [32].

$$TCOR = C_{rd} + C_{rm} + C_w \quad (5.5)$$

où : TCOR = coût total de la fiabilité (total cost of reliability).

C_{rd} = coût de la conception.

C_{rm} = coût de la fabrication.

C_w = coût de la garantie.

V.3.3.2. Analyse technico-économique :

Le principal intérêt d'une analyse de fiabilité est de quantifier la qualité d'un objet (produit, ouvrage,...) et d'essayer toutes les combinaisons possibles pour atteindre l'optimum de la qualité de service. Cependant, atteindre une telle qualité pourrait coûter cher. L'aspect économique de la fiabilité vise à minimiser une fonction objective. Cette dernière défini en fonction du niveau de fiabilité souhaité. Donc, l'étude technico-économique a pour objectif d'atteindre un maximum de fiabilité pour un coût minimum.

En général, une étude technico-économique est faite pendant la conception et/ou pendant l'élaboration du programme de maintenance. Pour cela, une étude économique est engagée estimant le coût de revient pour toute la durée de vie de l'ouvrage.

Coût d'un cycle de vie (life cycle cost) :

Le coût d'un cycle de vie vise à analyser toutes les dépenses faites pendant la durée de vie d'un objet.

Avantages d'une telle analyse :

- C'est un excellent moyen de comparer le prix des projets concurrents ;
- Contrôle les coûts de revient des programmes de maintenance et de réparation ;
- Aide à la décision lors du choix de remplacement ;
- Vise à réduire le coût total ;
- Principal outil de management et de planification.

Inconvénients :

- La collecte des informations consomme énormément de temps et d'argent.

Les informations obtenues ne sont pas toujours fiables [32].

V.4. Conclusion :

Il est important de comprendre le rôle que joue actuellement l'analyse de fiabilité dans la conception et l'évaluation des ouvrages en génie civil. Rappelons que cette analyse a déjà été adoptée par de nombreux pays, notamment au Royaume-Unis, aux U.S.A, au Canada, ..., et de nombreux règlements ont déjà été modifiés, avec la prise en compte de cette analyse probabiliste notamment dans les Eurocodes et les règlements Canadiens [20].

Ce type d'étude donne aux ingénieurs le moyen de prévenir la défaillance, de prolonger la durée de vie des ouvrages et tout cela au moindre coût possible, que ce soit au moment de la conception (par un meilleur choix des coefficients de sécurité) ou de la maintenance (définition des intervalles).

Ce qui a été présenté dans ce chapitre donne quelques applications actuelles de cette méthode dans le domaine des structures en génie civil particulièrement utilisées pour les ouvrages d'arts. Cependant, cette approche est également très utilisée en mécanique des sols, pour l'analyse du comportement des matériaux, ... [28] et de nombreuses entreprises se sont déjà spécialisées en *contrôle-fiabilité des structures* des ouvrages d'arts, bâtiments et matériel de construction.

Conclusion générale

Conclusion

L'objectif principal de ce travail consistait à utiliser une méthodologie basée sur le couplage mécano-fiabiliste pour l'analyse de fiabilité d'un échangeur à Biskra, dégradé en 2004 à la suite d'un choc, puis réparé quelques années plus tard.

Aujourd'hui, l'utilisation de cette méthodologie apporte une information complémentaire quant au jugement de la validité et de la pertinence des calculs déterministes (des règlements actuels) et offrent également des mesures des niveaux de confiance que l'on peut accorder à la règle de dimensionnement.

Les résultats obtenus à travers cette étude ne se traduit pas par un verdict final « bon ou mauvais », mais par une mesure probabiliste sous forme d'indice de fiabilité et de probabilité de défaillance.

Dans le cadre de notre étude, la mesure probabiliste en question a été obtenue après un couplage entre deux codes de calculs : un code déterministe qui fournit la réponse mécanique du système (flèche), piloté par un code fiabiliste qui introduit le caractère aléatoire des variables de conception (élasticité du béton, charge d'exploitation). Le couplage est effectué grâce à un algorithme d'optimisation basé sur une approximation FORM.

Un intérêt particulier a été porté sur le fait de programmer les deux codes du couplage sur un seul et même logiciel (Matlab), pour faciliter le dialogue entre eux et économiser le temps de calcul lors de la recherche du point de défaillance le plus probable.

Les produits de l'analyse fiabiliste réalisée, nous ont permis d'évaluer la résistance des poutres du pont de Biskra, en comparant ces résultats à des valeurs cibles minimales, qui se réfèrent aux conséquences économiques que pourrait engendrer une défaillance d'une part, et vis-à-vis des pertes humaines que cette défaillance pourrait engendrer d'autre part.

Ces résultats obtenus nous permettent d'affirmer que les poutres du pont en question vérifient largement les conditions de résistances et qu'elles sont même surdimensionnées. Nous pouvons également en conclure qu'un pont d'une telle classe n'est pas nécessaire sur cette route et qu'un pont d'une classe inférieure ou même simplement un rond point aurait été suffisant.

Cette analyse nous a également permis de juger de la qualité de la réparation. En effet, les indices de fiabilité obtenus pour la poutre réparée en 2006 par précontrainte extérieure, nous indiquent que la poutre vérifie bien les conditions de résistance. Néanmoins, une réparation par précontrainte extérieure ne redonne pas à l'élément sa résistance originale. Une maintenance par précontrainte extérieure peut être considérée comme imparfaite.

L'analyse de sensibilité réalisée par la suite nous a permis de voir quelles sont les variables de conception qui influent le plus sur la fiabilité de l'élément. Dans notre cas, il a été montré que l'élasticité du matériau avait un impact bien plus important comparé aux sollicitations.

La méthode probabiliste reste très riche, mais parfois très coûteuse en temps de calcul. Cependant, elle apporte une précision sur un grand nombre d'éléments. Elle est d'autant plus importante pour les ouvrages existants, en vue des opérations d'inspection, de maintenance ou de réparation. De nombreux règlements ont commencé à utiliser ces méthodes (voir les Eurocodes, normes Canadiennes), et de nombreuses entreprises ont commencé à proposer leurs services dans le domaine de la fiabilité des structures, spécialement aux USA.

Vu le rythme de construction en Algérie, surtout en ce qui concerne des ouvrages exceptionnels, qui ne cesse d'augmenter en nombre et en taille, il est important de penser, dès à présent, à des stratégies de maintenance pour prolonger la durée de vie de ces ouvrages. En effet, le couplage mécano-fiabiliste peut également être utilisé pour l'optimisation de stratégies de maintenance, d'inspections et de réparation en prenant en compte les aspects coûts et performance. Ceci devient possible grâce à l'introduction de la fiabilité temporelle, permettant d'effectuer des prévisions sur les durées de vie.

Références bibliographiques

- [1] FORTIN A. & GARON A., *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*. Université Laval & Ecole polytechnique de Montréal, 1997.
- [2] KHENNANE A., *Méthode des éléments finis : Enoncé des principes de base*. Office des Publications Universitaire, 1997.
- [3] DHATT G. & TOUZOT G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S.A Ed., 1981.
- [4] SEGHIR A., *Méthode des éléments finis*. Notes de cours, Département de Génie Civil, Université A. Mira de Béjaia, 2010.
- [5] PRAT M., *Modélisation des ouvrages*, Hermes Ed., 1995.
- [6] RAO S.S., *The Finite Element Method in Engineering*. 4th edition, Publisher: Elsevier Science & Technology Books, December 2004.
- [7] CHASKALOVIC J., *Méthode des éléments finis pour les sciences de l'ingénieur*. TEC & DOC Ed., Lavoisier, 2004.
- [8] GARRIGUES J., *La méthode des éléments finis*. Ecole supérieure de Mécanique de Marseille, Janvier 2002.
- [9] REFFIS O. & ABOUBAKEUR M., *Calcul des déplacements et des contraintes des structures compte tenu de l'effet du demi- espace élastique par la méthode des éléments finis*. Projet de fin d'études, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, Juin 2007.
- [10] DESSOMBZ O., *Analyse dynamique de structures comportant des paramètres incertains*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2000.
- [11] LEMAIRE M. & CHATEAUNEUF A. & MITTEAU J.C., *Fiabilité des Structures*. Hermes Science, Lavoisier, 2005.
- [12] SMITH S., *Fiabilité, Maintenance et Risque*. Dunod Ed., 2006.
- [13] AUBERVILLE J.M., *Maintenance industrielle : de l'entretien de base à l'optimisation de la sûreté*. Ellipses Ed., Juin 2004.
- [14] NGUYEN X.S., *Algorithme probabilistes appliqués à la durabilité et à la mécanique des ouvrages en génie civil*. Thèse de doctorat, INSA de Toulouse, Octobre 2005.
- [15] AOUES Y., *Optimisation Mécano- fiabiliste des Structures en Béton- armé*. DEA, Université Blaise Pascal, Clermont II, 2003.

- [16] LANGLOIS A-M. & BASTIEN J. & JOLIN M., *Etude de la fiabilité structurale des Ponts en Béton Armé*. 17e Colloque sur la progression de la recherche québécoise sur les ouvrages d'art à l'Université Laval, Mai 2010.
- [17] MOHAMED A., *Fiabilité des structures pour la conception et l'optimisation robuste*. Habilitation à diriger des recherches, Université Blaise Pascal, Clermont II, 2005.
- [18] DJAOUANI Ak. & BERBACHE B., *Application du couplage mécano-fiabiliste pour une conception fiable*. Projet de fin d'études, Université de A. Mira de Béjaia, juillet 2005.
- [19] RAPHAEL W., *Etude fiabiliste du fluage des structures en béton armé et précontraint*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Paris, 2002.
- [20] DAS P. & MICIC T. & CHRYSSANTHOPOULOS M., *Evaluation des ponts routiers, basés sur la fiabilité*. Rapport préparé sous l'égide du Comité AIPCR des Ponts routiers, 1999. (http://publications.piarc.org/ressources/publications_files/2/874,11-10-f.pdf).
- [21] GAGLIARDINI O., *Principes généraux du dimensionnement des ouvrages*. IUP Génie civil et infrastructures, UJF-Grenoble I, 2004-2005.
- [22] BARKAT S., *Réparation d'un pont par précontrainte extérieure*. Projet de fin d'études, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, Juin 2008.
- [23] ZWINGMANN X., *Modèle d'évaluation de la fiabilité et de la maintenabilité au stade de la conception*. Thèse de Doctorat, Université Laval, Québec, 2005.
- [24] LANGLOIS A-M., *Influence de l'endommagement sur la fiabilité structurale de ponts en béton armé: études de cas*. Mémoire de Maître ès Science (M. Sc), Université Laval, 2010.
- [25] HAVILAND R.P., *Techniques de fiabilité et durée de vie des équipements*. Eyrolles Ed, Paris 1966.
- [26] CHERID D., *Cours de Pont*, Département de Génie Civil, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, 2011.
- [27] DUPRAT F. & SELIER A., *Fiabilité des ponts en béton précontraint soumis au fluage*. 6^{ème} journée nationales de fiabilité, Université de Toulouse, Mars 2010.
- [28] MEBARKI A. & BOISSIER D. & BREYSSE .D, *Fiabilité des matériaux et des structures*. HERMES Ed., décembre 1998.
- [29] HASOFER A.M. & LIND N.C., *An exact and invariant first order reliability format*. J. Eng. Mech, ASCE, 100, EM1, pp. 111-121, 1974.
- [30] ROUASKI L., *Fiabilité en géotechnique : applications aux fondations superficielles et profondes*. Mémoire de Magistère, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, (Directeur de thèse BELKACEMI S.).

- [31] LAGGOUNE R. & CHATEAUNEUF A. & AISSANI D., *Maintenance opportune des systèmes multi-composants*. Editions Universitaires Européennes, 2011.
- [32] DHILLON B.S., *Engineering Maintainability: How to Design for Reliability and Easy Maintenance*. Elsevier Science & Technology Books Ed, juin 1999.
- [33] SADOUNI A., *Fiabilité des ouvrages de soutènements*. Mémoire de fin d'études, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, (Directeur de thèse Mr ZEGHLACHE), 2004.
- [34] BENKHELLAT H. & HALET M., *Fiabilité des structures : application aux ouvrages de soutènement*. Mémoire de fin d'études, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, (Directeur de thèse Mr ZEGHLACHE), 2005.
- [35] HAMMOUTENE M. & TILIOUINE B. & ZERMOUT S.A., *Effects of reliability models on structural response under stochastic seismic excitation*. European Earthquake Engineering, Vol. 20, N° 1, pp 14-22, 2006.

ANNEXE A

Quelques travaux effectués dans le domaine de la fiabilité des ponts, et poutres.

L'évaluation des ponts en béton a fait l'objet de plusieurs projets de recherches ayant pour base l'approche probabiliste, une approche qui a permis de simuler plusieurs scénarios de défaillance, en prenant en compte, les dégradations du matériau (fatigue, corrosion, carbonatation, ...) et différents états de détérioration mécanique (flexion, cisaillement, poinçonnement,...), ce qui permet de mieux représenter les différentes résistances et sollicitations réelles de la structure, et d'obtenir un indice de fiabilité qui approche le mieux la réalité de l'ouvrage. Dans cette annexe, il est présenté quelques travaux effectués sur la base de la théorie de la fiabilité, par rapport aux éléments structuraux des ponts particulièrement.

Intitulé et Auteurs	Élément structural	Mode de défaillance	Endommagement	Variable temporelle	Variable spatiale
Etude de la Fiabilité Structurale des Ponts en Béton Armé. <u>Auteurs :</u> A-M.Langlois, J.Bastien, M. Jolin. Université Laval, Département de Génie civil, Québec, Canada, 2010.	Poutres.	Flexion et cisaillement.	Corrosion causée par l'application de sels déglaçant.	X	
Fiabilité des Ponts en Béton Précontraint soumis au Fluage. <u>Auteurs :</u> Frédéric Duprat, Alain Sellier. Université de Toulouse, Laboratoire Matériaux et Durabilité des Constructions.	Pont (passerelle en béton précontraint).	Franchissement du seuil de résistance en traction (fissuration).	Fluage du béton.	X	
System reliability of suspension bridges.(fiabilité du système de ponts suspendus) <u>Auteurs:</u> Kiyohiro Imai, planning division, Honshu Shikoku Bridge Authority,Japan. Dan M. Frangopol. Departement of Civil, Environmental, and Architectural Engineering, University of Colorado, Boulder, CO 80309-0428, USA.	Cable de suspension (8 bars)	Section du câble.	Evaluation de fiabilité sous différent scenarios d'endommagement (charges permanents, charges dues vent, et de la rigidité).	X	X
Reliability analysis of a	Pont en arc en	Rupture de la	Vents de charge	X	X

<p>long span steel arch bridge against wind-induced stability failure during construction. (analyse de la stabilité d'un pont en arc en acier contre le vent en cas de panne de stabilité induite lors de la construction).</p> <p><u>Auteurs:</u> Jin Cheng . Departement of Bridge Engineering, Tangji University, Shanghai, China. Q.S.Li. Departement of Building and construction, City University of Hong Kong.</p>	Acier.	stabilité.	statique.		
<p>Ultimate strenght reliability analysis of corroded steel- box girder bridges.</p> <p><u>Auteurs:</u> Yasser Sharif, Jeom Kee Paik. LRET research center of excellence, Pusan National university, Bussan, Republic of Korea.</p>	Plaques.	Resistance à la rupture des caissons métalliques.	Corrosion.	X	
<p>Structural reliability and error control in reinforced concrete design and construction. (Fiabilité structurelle et contrôle d'erreur dans la conception et la construction en béton armé).</p> <p>Auteur : Structural Safety, Volume 12, Issue 4, November 1993, Pages 277-292 M. G. Stewartlt to detect and correct</p>	Poutres en béton armé.	Dans toutes les opérations de réalisation, contrôle sur les erreurs de mesures qui mènent à une réduction de la fiabilité.	Erreur humaine.	X	X
<p>Random field stiffness propertes and reliability of laminated wood beams. (propriétés de rigidité et la fiabilité aléatoire de bois lamellé collé).</p> <p><u>Auteurs:</u> Yin TangWang. Ricardo O. Foschi</p>	Poutres en bois lamellé.	Etat limite de déformation maximale.	Fluctuation dans le module d'élasticité E.	X	
Structural analysis	Poutres				

<p>methods for system reliability. (Méthodes d'analyse structurelle pour la fiabilité du système). <u>Auteurs:</u> Richard M. Bennett.</p>	<p>partiellement en acier sobre, stabilité des talus.</p>				
<p>Reliability of corrosion damaged steel structures using several probability theory. (fiabilité des structures endommagés par la corrosion en utilisant différentes theories de probabilités). <u>Auteurs:</u> V. Sarveswaran, J.W. Smith, D.I. Blockley.</p>	<p>Steel beams (poutres en acier).</p>	<p>Effect of corrosion damage on the reliability of steel beams.</p>	<p>Corrosion.</p>	<p>X</p>	<p>X</p>
<p>Reliability evaluation of reinforced concrete beams (évaluation de la fiabilité des poutres en béton armé). <u>Auteurs:</u> Renjian Lu, Yuanhui Luo, Joel P. Conte</p>	<p>Poutres en béton armé.</p>	<p>Résistance à la flexion, cisaillement et torsion.</p>	<p>Flexion, cisaillement et torsion.</p>	<p>X</p>	<p>X</p>
<p>A sensitive analysis for various structural reliability models applied to timber beams in bending (analyse de sensibilité pour différents modèles de fiabilité structural appliqué à des poutres en bois en flexion). <u>Auteur:</u> C. B. Pierce.</p>	<p>Poutres.</p>	<p>Flexion.</p>	<p>Utilisation d'une distribution normale et log-normale pour représenter les charges et la résistance du matériau.</p>	<p>X (le comportement des modèles en réponse à une durée simple de chargement est aussi étudié).</p>	<p>X</p>
<p>Reliability study of prestressed concrete beam. <u>Auteur:</u> Claudio Floris.</p>	<p>Poutres en béton précontraint.</p>	<p>Flexion et cisaillement.</p>	<p>Flexion et cisaillement.</p>		<p>X</p>
<p>Integrating system reliability and optimization in prestressed concrete design. <u>Auteurs:</u> A. S.Al-Harthy, D.M.Frangopol</p>	<p>Poutres en béton précontraint.</p>	<p>Flexion</p>	<p>Chargement, propriétés des matériaux. Forces de précontraintes.</p>		<p>X</p>
<p>Nonlinear finite element analysis of reinforced and prestressed concrete</p>	<p>Structures en béton armé, et précontraint.</p>	<p>Réponse statique des structures.</p>	<p>Chargement ultime.</p>	<p>X</p>	

structures. <u>Auteurs:</u> H.A.Mang,G. Meschke					
Probabilistic design of prestressed concrete pōles. (Conception probabiliste de poteaux en béton précontraint). <u>Auteur :</u> S.S. Rao.	Poteaux en béton précontraint.	Compression.	Section du Poteau. Chargement sur le poteau. Et le bras de levier où la charge est appliquée.	X	X
Mechanical behaviour of pitting corrosion of flexural and shear reinforcement and its effect on structural reliability of corroding RC beams. <u>Auteur: Mark G. Stewart.</u> 10 July 2007; Centre for Infrastructure Performance and Reliability, School of Engineering, The University of Newcastle, Australia	Poutres en béton armé.	Etats limite de flexion et de cisaillement.	Corrosion (corrosion par piqûres)	X	X
Spatial variability of pitting corrosion and its influence on structural fragility and reliability of RC beams in flexure. <u>Auteur: Mark G. Stewart</u> 26 May 2003	Poutres en béton armé	Flexion, (état limite à mi-portée).	Corrosion par piqûres	X	X
Vibration and reliability of a rotating beam with random properties under random excitation. <u>Auteurs :</u> S.A.A. Hosseini, S.E. Khadem. 21 June 2006. Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modarres University, Tehran, Iran.	Poutre.	Vibrations.	Poutre modélisée sous une charge stochastique (bruit stationnaire)	X	X
Single objective reliability-based optimization of prestressed concrete beams. <u>Auteurs:</u> Samer Barakat. Nabil Kallas. Department of Civil Engineering, University of Sharjah, University City. United Arab Emirates.	Poutres en béton précontraint.	-Compression et traction e phase initiale et finale. - Pertes de précontrainte. - Etat limite ultime de Flexion et cisaillement. - Fissuration. -déviation		X	X

<p>Mohammed Q. Taha. Technical Laboratory for Soil and Building Material Testing, Dubai, United Arab Emirates. 17 June 2002.</p>		<p>initiale, et déviation finale.</p>			
<p>Reliability analysis of a glulam beam. <u>Auteurs:</u> 11 September 2006 T.Toratti, VTT Technical Research centre of Finland, S.Schnabl, G.Turk. University of Ljubljana, Faculty of Civil and Geodetic Engineering, Jamova 2, 1000 Ljubljana, Slovenia.</p>	<p>Faisceau lamellé collé.</p>	<p>Flexion à la section critique.</p>	<p>Sous la neige, Dans une situation d'incendie.</p>	<p>X</p>	<p>X</p>
<p>Spatial time-dependent reliability analysis of corroding pretensioned prestressed concrete bridge girders. <u>Auteurs:</u> 6 March 2006. M. Sigit Darmawan, Department of Civil Engineering, Surabaya Institute Technology, Indonesia. Mark G. Stewart. Centre for Infrastructure Performance and Reliability, School of Engineering, The University of Newcastle, Newcastle, NSW 2308, Australia.</p>	<p>Poutres de pont en béton précontraint.</p>	<p>Etats limite de flexion et entretien.</p>	<p>Corrosion par piqûres.</p>	<p>X</p>	<p>X</p>
<p>Finite element modeling of prestressed concrete spandrel beams. <u>Auteurs:</u> 20 June 2010. B.Mercan, A.E. Schultz, H.K. Stolarski. Department of Civil Engineering, University of Minnesota, 500 Pillsbury Dr. SE, Minneapolis, MN 55455, USA</p>	<p>Poutres en béton précontraint. (poutres en double T)</p>	<p>Déviations verticale, Déformation latérale.</p>	<p>Sous les effets combinés de cisaillement, torsion et moment de flexion.</p>	<p>X</p>	
<p>Flexural response predictions of reinforced concrete beams strengthened with prestressed CFRP plates. <u>Auteurs:</u> 20 September 2009. Weichen Xue, Yuan Tan, Lei Zeng. Department of Building Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, PR China</p>	<p>Poutres en béton armé.</p>	<p>Etat limite de flexion.</p>	<p>Rupture à la compression, à la traction, et au décollement.</p>		<p>X</p>
<p>Updating the reliability of a concrete bridge structure based on condition assessment with uncertainties.</p>	<p>Structure de pont.</p>	<p>Réponse structural sous différentes positions de charges.</p>	<p>Charges dû au trafic.</p>	<p>X</p>	<p>X</p>

<p><u>Auteurs:</u> 4 October 2009. S.S. Law, J. Li. Civil and Structural Engineering Department, Hong Kong Polytechnic University, Hungohm, Kowloon, Hong Kong, China.</p>					
---	--	--	--	--	--

Tableau A. Travaux de recherches bases sur la fiabilité pour les ponts.

ANNEXE B

Rappel de Probabilité et de fiabilité, Notions sur les algorithmes d'optimisation.

B.I. Notions de probabilités :

B.I.1 – Variables aléatoires [19] :

Pour pouvoir tenir compte des incertitudes sur les variables de conception dans les modèles fiabilistes, on leur associe des propriétés statistiques pour représenter leurs variabilités dans la réalité. Ces paramètres sont alors considérés comme étant des variables aléatoires.

Une variable aléatoire X est une grandeur pouvant prendre, lors d'une même expérience, telle ou telle valeur x avec différentes probabilités. A chaque variable aléatoire est donc associée une fonction de répartition qui exprime la probabilité qu'une variable aléatoire X prenne une valeur inférieure à x :

$$F(x) = \text{Prob}(X \leq x)$$

Si la fonction de répartition est dérivable, on appelle alors densité de probabilité la fonction :

$$f(x) = \frac{dF}{dx}$$

La densité de probabilité permet un calcul plus facile de la probabilité qu'a une variable aléatoire de se trouver entre deux valeurs a et b :

$$\text{Prob}(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

A chaque variable aléatoire sont aussi associés la valeur moyenne et l'écart type.

La valeur moyenne ou espérance mathématique est définie par :

$$E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

Si l'intégrale est convergente. Pour une variable aléatoire discrète ou pour calculer la moyenne de n réalisations de la variable, on a :

$$\mu = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

x_i est la valeur de la réalisation i de la variable aléatoire.

p_i = (nombre de réalisations de la valeur x_i / nombre total de réalisations) est la probabilité d'avoir la valeur x_i pour la variable X .

L'écart-type est un indicateur de la dispersion autour de la valeur moyenne. Il est défini comme étant la racine carrée de la variance qui s'écrit :

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

Pour une variable aléatoire discrète, on a, avec les mêmes notations que précédemment :

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i$$

On définit alors le coefficient de variation qui est le rapport entre l'écart-type et la moyenne :

En général, pour bien caractériser une variable aléatoire, il est suffisant de donner sa loi de distribution $f(x)$, qui contient l'information sur la moyenne et l'écart-type en général (sauf cas particuliers).

Il est aussi à noter que les paramètres qui sont à la base des phénomènes observés suivent de manière générale des lois de distribution bien connues dont les principales (qui vont être utilisées par la suite) sont données ci-dessous.

B.I. 2 – Modèles probabilistes [19]:

B.I. 2.1 - Loi Normale (ou Loi de Gauss) :

La loi Normale de moyenne μ et d'écart-type σ s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

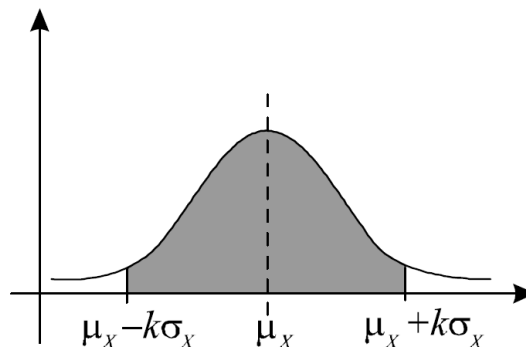


Figure B.1. Loi de Gauss (distribution normale).

On démontre dans le théorème central limite que la somme de n variables aléatoires, indépendamment de la loi de chaque variable, converge en probabilité vers une loi normale lorsque n tend vers l'infini. Il n'est donc pas surprenant que plusieurs phénomènes dans la nature suivent cette loi.

On appelle la loi normale centrée réduite, la loi normale de moyenne nulle et d'écart-type égale à l'unité.

B.I.2.2 - Loi Log-normale :

On démontre que le produit de n variables aléatoires arbitraires converge en probabilité vers la loi log-normale. Cette loi s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{xs\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x)-m)^2}{2s^2}\right)$$

avec m et s des coefficients liés à la valeur moyenne et à la variance par les relations suivantes :

- La valeur moyenne $\mu = \exp(m + 0.5s^2)$.
- la variance $\sigma^2 = \exp(2m + s^2) * (\exp(s^2) - 1)$



Figure B.2. Loi Log-Normale.

Plusieurs phénomènes aussi suivent cette loi. Elle est surtout utile dans le cas de phénomènes pour lesquels on n'a pas de valeurs négatives. On l'emploie en général pour représenter la variabilité des propriétés des matériaux (résistances).

B.II. Notions sur les algorithmes d'optimisation [11]:

B.II.1. Généralités :

Les méthodes les plus efficaces pour le calcul de la fiabilité sont basées sur la recherche du point de conception P^* . La connaissance de celui-ci est la base des approximations de la probabilité de défaillance dans le cadre des méthodes FORM/SORM (présentées en chapitre II).

Le modèle fiabiliste est chargé de piloter les directions de recherche tandis que le modèle mécanique s'occupe de l'évaluation de la fonction d'état limite.

Le principe des algorithmes d'optimisation consiste à partir d'un point initial, à déterminer la meilleure direction de descente et à parcourir un certain chemin selon cette direction. Le choix de la direction résulte d'informations sur la fonction, ses dérivées premières, voire secondes [11].

En pratique, dans les codes de dimensionnement, par exemple les Eurocodes, l'indice de fiabilité d'Hasofer-Lind β_{HL} est préconisé comme estimateur de la fiabilité.

Le calcul de β_{HL} est un problème d'optimisation sous contrainte, et la littérature nous propose de nombreux algorithmes pour la résolution d'un problème de ce type, parmi lesquels nous pouvons distinguer quatre catégories principales :

a. Méthodes d'ordre zéro :

L'avantage de ces méthodes est qu'elles ne nécessitent pas le calcul des gradients de la fonction d'état limite. Cependant, leur vitesse de convergence est lente. On trouve donc les méthodes de:

- dichotomie.
- simplex non linéaire.

b. Méthodes du premier ordre :

Où la convergence de ces méthodes dépend de la détermination des gradients de la fonction d'état limite, on trouve donc :

- méthode du gradient.
- méthode du gradient projeté.
- méthode des pénalités.
- méthode du lagrangien augmenté.

Remarque :

L'un des algorithmes les plus réputés est l'algorithme de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler, utilisé dans notre application.

c. Méthodes du second ordre :

Ces méthodes requièrent l'évaluation des dérivées première et seconde de la fonction d'état limite et l'estimation de la matrice Hessienne (matrice carrée composée des dérivées partielles secondes), nous trouvons ici :

- Méthode de Newton.
- Méthode de programmation Quadratique Séquentielle (SQP).

Remarque :

Pour les algorithmes d'ordre deux où la matrice Hessienne est approchée sans être calculée, on trouve l'algorithme d'Abdo et Rackwitz (1990). Cette méthode est une variante de l'algorithme de Rackwitz-Fiessler. Elle possède les mêmes propriétés mais elle est globalement convergente.

d. Méthodes hybrides :

- Méthode DFP et BFGS.

B.II.2. Algorithmes de résolution [21] :

a. Algorithme de Rackwitz- Fiessler pour la détermination de β_{HL} (HLRF) [25] :

Cet algorithme est une adaptation de la méthode du gradient projeté au problème d'optimisation en fiabilité mécanique (Rackwitz, 1976 ; Rackwitz et Fiessler, 1979) ; dans laquelle le calcul de l'indice de fiabilité de Hasofer Lind β_{HL} est un problème d'optimisation sous contrainte :

$$\text{Minimiser } \|u\|^2 \text{ sous la contrainte } H(u) = 0.$$

où $H(u)$ est la fonction d'état dans l'espace normé réduit.

La fonction à minimiser est la distance euclidienne dans l'espace standardisé. L'algorithme de Rackwitz et Fiessler résout itérativement le problème en générant une suite de points qui converge vers une solution optimale. Le point de défaillance le plus probable est obtenu par itérations successives lorsque les précisions souhaitées sur la fonction d'état limite ε_H et sur deux points consécutifs de l'algorithme ε_H sont obtenues, soit pour deux itérations successives k et $k+1$:

$$|H(u^{(k)})| \leq \varepsilon_H \quad \text{et} \quad \|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| \leq \varepsilon_H$$

L'indice $\beta_{HL}^{(k+1)}$ est la norme du vecteur des variables aléatoires dans l'espace standardisé. $u^{(k+1)}$, déduit de $u^{(k)}$ par :

$$u^{(k+1)} = \left((u^{(k)})^T \alpha^{(k)} + \frac{H(u^{(k)})}{\|\nabla H(u^{(k)})\|} \right) \cdot \alpha^{(k)}$$

La singularité de cette méthode réside dans la nécessité d'évaluer le vecteur gradient de la fonction d'état.

b. Algorithme SQP [21]:

L'algorithme de programmation quadratique séquentielle SQP utilise les courbures de la fonction d'état limite, en plus des gradients pour améliorer la convergence. Le problème est posé sous la forme suivante :

Minimiser $\|\{u\}\|^2$ sous la contrainte $H(\{u\}) = 0$ revient à minimiser le Lagrangien :

$$L(\{u\}, \lambda) = \frac{1}{2} \|u\|^2 + \lambda H(\{u\})$$

Où $\{u\}$ et λ sont les inconnues, sous les contraintes :

$$\nabla_u L(\{u\}, \lambda) = 0 \text{ et } H(\{u\}) = 0$$

Après développement en série de Taylor au premier ordre du point $\{u\}^k$, on obtient le système itératif suivant :

$$\begin{bmatrix} [\nabla_u^2 L(\{u\}, \lambda)]^{(k)} & \{\nabla_u H(\{u\})\}^{(k)} \\ \{\nabla_u H(\{u\})\}^{(k)} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \{\Delta u\} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\{u\}^{(k)} \\ -H(\{u\})^{(k)} \end{bmatrix}$$

Nous déterminons donc à chaque itération le vecteur $\{u\}$ qui donne la direction de la descente vers la convergence. L'algorithme SQP est considéré comme efficace et robuste, mais il nécessite un plus grand coût de calcul puisqu'il doit déterminer les dérivées secondes. Pour n variables aléatoires, il nécessite $n!$ appels au modèle mécanique.

c. Algorithme d' Abdo- Rackwitz [21]:

Il suit le même principe que l'algorithme SQP, mais il propose de remplacer la Hessienne (les dérivées secondes) par la matrice identité, ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} 2[I] & \{\nabla H\} \\ \{\nabla H\} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \{u^{(k+1)}\} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\{u^k\} \\ H^k \end{bmatrix}$$

L'élimination de la Hessienne permet une économie dans le coût de calcul. Il est efficace pour un nombre important de variables aléatoires et converge plus rapidement que l'algorithme de Rackwitz- Fiessler mais plus lentement que la SQP.

d. Algorithme BFGS [21]:

Dans ce cas, la Hessienne est remplacée par une forme approchée qui s'améliore à chaque itération. Cette méthode évite le coût élevé du calcul de la Hessienne tout en gardant une bonne précision. L'algorithme peut représenter le meilleur compromis entre coût de calcul et précision.