

# THESE

Présentée à:

L'ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Par: **M. Ibrahim KACHA**

Ingénieur d'Etat en Electronique (E.N.P)

Pour l'Obtention du Diplôme de:

## **MAGISTER** en Electronique

Option: .

Acquisition et Traitement de l'Information

THEME

**CONTROLE AUTO-AJUSTABLE  
DES SYSTEMES EN CASCADE**

Soutenue en Octobre 1993

Devant le Jury composé de:

M. A. ZERGUERRAS	Maître de Conférences	Président
M. M. S. AIT CHEIKH	Chargé de Cours	Rapporteur
M. A. FARAH	Maître de Conférences	Examineur
M. F. CHIGARA	Chargé de Cours	Examineur
M. B. DERRAS	Ph.D	Examineur
M. H. BENCHOUBANE	Ph.D	Invité

"...Ce que l'on conçoit bien s'enonce clairement. Et les mots pour le dire arrivent aisément."

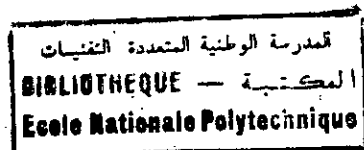
Boileau.

## AVANT PROPOS

Ce travail a été mené et réalisé au Laboratoire d'Automatique du Département d'Electronique de l'Ecole Nationale Polytechnique d'El-Harrach.

Les calculs ont été effectués sur compatible IBM-386 'HP-RS 25'. Tous les programmes ont été élaborés en langage PASCAL et en utilisant le compilateur 'Turbo-Pascal' version 6.0 de *Borland Inc.* Les courbes ont été tracés par le logiciel de graphisme 'Grapher', version 1.75 de *Golden Software Inc.* La réalisation du Mémoire a été entièrement faite par le logiciel de traitement de texte 'Chi-Writer', version 3.15, de *Horstmann Software design corporation.*

## REMERCIEMENTS



Je ne saurais présenter cette étude sans remercier tous ceux qui ont contribué à son aboutissement.

Ainsi, je tiens à remercier la Direction du Département d'Electronique de L'Ecole Nationale Polytechnique de m'avoir donné la possibilité d'effectuer le présent travail.

J'adresse mes remerciements à Monsieur M.S.AIT CHEIKH, qui fut mon Directeur de Thèse, sa disponibilité et son aide toujours renouvelée m'ont été très précieuses, qu'il trouve ici le signe de ma reconnaissance et de ma gratitude.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur A.ZERGUERRAS pour avoir accepté la présidence du jury.

Je serais toujours reconnaissant à Messieurs F.CHIGARA et B.DERRAS d'avoir accepté de lire, corriger et d'examiner le présent mémoire, et qui au long de ce travail ont pu me faire bénéficier de leurs connaissances et de leurs expériences, qu'ils trouvent ici le signe de ma gratitude.

Mes remerciements vont également à Monsieur A.FARAH pour avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury.

Je ne saurais oublier dans mes remerciements mes amis et collègues du "Deuxième Etage", particulièrement Messieurs M.TAGHI, L.ABDELOUEL, A.NASRI et M<sup>elle</sup> N.ABINA.

I.KACHA:

## DEDICACES

A mes très chers Parents.

A mes Soeurs et Frères.

A Nacera, ma Femme.

Brahim

"En réalité la conception politique moderne du monde musulman est elle-même un élément hétérogène, un emprunt qui ne s'adapte pas à sa situation...

On peut étudier le degré de civilisation en observant la manière dont l'homme s'adapte à son milieu.

Au stade de la vie végétative, l'homme s'adapte par un moindre effort. Pour réagir contre le froid, il garde ses calories, en dépense le moins possible, fait par conséquent un minimum de mouvement, se blottit, se recroqueville... A ce stade de l'évolution on s'adapte par une sorte de sous-effort.

Au stade de la vie active, par contre, l'homme s'adapte par un sureffort. Il s'organise. Contre le froid, il crée tout un système de chauffage; et quand il ne peut en disposer en certaines circonstances de sa vie, il réagit d'une manière différente, en dépensant des calories, en exécutant des mouvements...

Or c'est le passage de la vie végétative à la vie active qui marque le début d'une civilisation ou d'une renaissance."

TABLE D'ABREVIATIONS ET SYMBOLES UTILISES

$P(z^{-1})$  : Polynome en  $z^{-1}$ , de la forme  $P(z^{-1}) = p_0 + p_1 z^{-1} + \dots + p_i z^{-i} + \dots$ .

$z^{-1}$  : Opérateur retard, tel que  $f(t-1) = z^{-1} f(t)$ .

$g(t)$  : Grandeur  $g(t)$  (signal, vecteur, matrice)

$\hat{g}(t)$  : Estimation de  $g(t)$ .

$g^*(t)$  : Prédiction de  $g(t)$ .

$\tilde{g}(t)$  : Erreur d'estimation (ou de prédiction) de  $g(t)$ .

$g_i(t)$  : Grandeur relative à la boucle  $i$ .

$t$  : temps discret (ou continu).

Deg[P] : Degré du polynome  $P$ .

$E[g(t)]$  : Esperance mathématique de  $g(t)$ .

$g^T(t)$  : Transposé de  $g(t)$ .

MCR : Moindres Carrés Réursive.

MCE : Moindres Carrés Etendue.

STC : Self Tuning Control

MRAC : Model Reference Adaptive Control

"...Ce qui est simple est toujours faux.  
Ce qui ne l'est pas est inutilisable."

Paul Valéry.

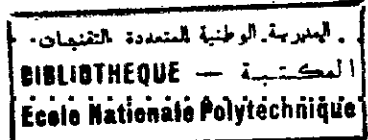
" Mauvaises pensées ".



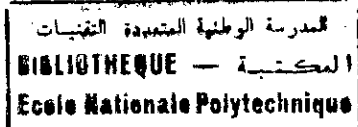
# SOMMAIRE

INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1 INTRODUCTION A LA THEORIE DU CONTROLE ADAPTATIF.....	3
1.1 Introduction et bref historique.....	3
1.2 Techniques de contrôle adaptatif.....	4
1.2.1 Contrôle adaptatif avec modèle de référence.....	4
1.2.2 Contrôle auto-ajustable.....	5
CHAPITRE 2 CONTROLE AUTO-AJUSTABLE MONO-BOUCLE à VARIANCE MINIMALE GENERALISEE.....	8
2.1 Introduction.....	8
2.2 Modélisation.....	8
2.2.1 Classe des modèles.....	8
2.2.2 Modèles prédictifs.....	10
2.3 Estimation des paramètres par la méthode des moindres carrés étendue.....	13
2.4 Contrôle auto-ajustable à variance minimale généralisée.....	16
2.4.1 Prédiction au sens des moindres carrés et commande.....	17
2.4.2 Auto-ajustage.....	21
2.4.3 Commande auto-ajustable avec modèle de référence .....	23
2.5 Stabilité et convergence.....	25
2.5.1 Système en boucle fermée.....	27
2.5.2 Stabilisation et convergence.....	33
2.6 Conclusion.....	35

<b>CHAPITRE 3</b>	<b>CONTROLE AUTO-AJUSTABLE DES SYSTEMES EN CASACDE</b>	<b>36</b>
3.1	Introduction	36
3.2	Configuration en cascade	36
3.3	Contrôle mono-boucle	39
3.4	Contrôle en cascade	42
3.4.1	Contrôle avec dynamique de boucle interne négligée	43
3.4.2	Contrôle avec dynamique de boucle interne non- négligée	48
3.5	Contrôle par la méthode du prédicteur récursif	54
3.5.1	Prédiction	55
3.5.2	Génération de la commande et auto-ajustage	58
3.5.3	Algorithme	60
3.6	Conclusion	61
<b>CHAPITRE 4</b>	<b>EXEMPLES DE SIMULATION ET RESULTATS</b>	<b>63</b>
4.1	Introduction	63
4.2	Exemple 1: Système à deux boucles	63
4.3	Exemple 2: Etude de l'effet de la boucle interne	92
4.4	Exemple 3: Système à 4-boucles	99
4.5	Commande auto-ajustable en casacde d'un moteur à courant continu	106
4.5.1	Modélisation	106
4.5.2	Régulation	110
4.5.1	Interprétation des résultats	112
4.6	Conclusion	112
<b>CONCLUSION GENERALE</b>		<b>114</b>
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b>		<b>117</b>
<b>ANNEXE A: ESTIMATION RECURSSIVE DES PARAMETRES</b>		<b>120</b>
<b>ANNEXE B: CONTROLEUR A VARIANCE MINIMALE GENERALISEE</b>		<b>129</b>



## INTRODUCTION



Le développement extraordinaire de la micro-électronique et de l'informatique, a provoqué des changements importants dans la conception des systèmes de contrôle, pour des procédés industriels. Ces changements ont eu lieu aussi bien sur le plan des équipements, que sur le plan méthodologie. Le contrôle adaptatif en général, et le contrôle auto-ajustable en particulier constituent les vecteurs de pénétration privilégiés des méthodes modernes de contrôle. Ces méthodes sont utilisées effectivement dans des applications industrielles.

Le contrôle de procédés multi-blocs, en particulier la configuration en cascade, se base sur une conception modulaire du schéma de commande. Dans certains procédés industriels, pouvant être représentés par un modèle en cascade, il est possible de recueillir des informations, en effectuant des mesures à différents niveaux du procédé. Les méthodes de contrôle auto-ajustable mono-boucle ne pouvant pas utiliser de telles informations, un contrôle en cascade de ces systèmes permet d'exploiter ces informations, et contribue à une amélioration certaine des performances de ces systèmes.

A l'exception des travaux de Anbumani, Sarma et Patnaik [1] et de Gawthrop [15,16], une importance minime a été donnée au contrôle auto-ajustable appliqué à des systèmes représentés par un modèle en cascade. Cette Thèse présente une extension des méthodes de contrôle auto-ajustable mono-boucle à des systèmes en cascade. Il est développé une nouvelle approche, utilisant des modules de contrôle auto-ajustable mono-boucle comme de simples composants d'un schéma global de contrôle en cascade. L'approche développée par Gawthrop [15], concerne des systèmes en cascades continus,

non-perturbés et ayant un temps de retard nul. Nous proposons dans cette étude un algorithme pour des systèmes en cascade discrets, pouvant être perturbés et ayant un temps de retard qui peut être non-nul. Cette nouvelle approche basée sur l'algorithme du prédicteur récursif, permet d'utiliser des contrôleurs auto-ajustables pour des systèmes mono-boucle, comme de simples éléments d'un schéma de contrôle de systèmes en cascade. Les résultats obtenus par cette nouvelle approche sont comparés à ceux des approches conventionnelles.

Le présent mémoire se compose de quatre chapitres. Le premier introduit des généralités sur la théorie du contrôle adaptatif. Alors que le second, traite de la théorie de base sur laquelle s'articule notre étude. La modélisation, l'estimation récursive des paramètres et la stratégie de commande à variance minimale généralisée y sont traitées. Dans le troisième chapitre, nous développons les différentes approches du contrôle auto-ajustable, appliquées à des systèmes en cascade. Les résultats de simulation et leur analyse sont présentés au quatrième chapitre. Une conclusion générale où les résultats obtenus sont mis en valeurs et où les éventuelles perspectives y sont présentées. Termine cette thèse.

## INTRODUCTION A LA THEORIE DU CONTROLE ADAPTATIF

## 1.1 INTRODUCTION ET BREF HISTORIQUE

*Le contrôle adaptatif est l'ensemble des techniques utilisées pour l'ajustement en temps réel des régulateurs de boucles de commande, afin de réaliser ou de maintenir un certain niveau de performance quand les paramètres du procédé à commander sont soit inconnus, soit variables dans le temps [19]. De tels procédés étant très répandus dans l'industrie (machine à papier, fours de séchage de minerais, réacteurs chimiques, ..etc..). Le champ d'application du contrôle adaptatif est donc des plus étendu.*

Les premiers articles concernant le contrôle adaptatif sont apparus durant les années cinquante, Ces articles contenaient en général des rapports concernant des travaux qui avaient pour but la conception de systèmes de pilotage automatique pour avions [18]. Mais le support théorique de ces travaux était relativement insuffisant. Durant les années soixante, beaucoup de travaux en théorie du contrôle ont contribué au développement du contrôle adaptatif en particulier l'espace d'état, la stabilité et le contrôle stochastique. La programmation dynamique introduite par Bellman [5], et les travaux fondamentaux de Tsytkin [25] ont aussi contribuer énormément à la compréhension des systèmes adaptatifs.

La renaissance du contrôle adaptatif s'est effectuée durant les années soixante-dix, grâce à une combinaison entre différentes méthodes d'estimation des paramètres en temps réel et diverses stratégies de contrôle [3]. Ce n'est que vers le début des années quatre-vingts qu'apparurent des démonstrations correctes et rigoureuses concernant la stabilité des systèmes adaptatifs. Ces démonstrations reposaient sur des hypothèses très restrictives. Dans le but de justifier la nécessité de ces hypothèses,

d'intéressants travaux de recherche en robustesse des systèmes adaptatifs sont apparus [4,7].

## 1.2 TECHNIQUES DE CONTROLE ADAPTATIF

En contrôle adaptatif, deux approches ont été essentiellement considérées pour le développement des stratégies de commande destinées aux procédés à paramètres inconnus et/ou variables dans le temps [20]:

- Les systèmes de contrôle auto-ajustable (Self-Tuning Control: STC).
- Le contrôle adaptatif avec modèle de référence (Model Reference Adaptive Control: MRAC).

Cette classification est une séparation entre problèmes d'auto-ajustage et problèmes d'adaptation. Dans des problèmes d'auto-ajustage, les paramètres du procédé à contrôler sont supposés constants mais inconnus; alors que dans des problèmes d'adaptation ils sont supposés variables dans le temps [4,7]. Ces deux techniques relativement simple à mettre en oeuvre, sont les plus utilisées en pratique.

### 1.2.1 Contrôle adaptatif avec modèle de référence

L'idée de base de cette technique est illustrée par la Fig.1.1. Les performances désirées sont exprimées par

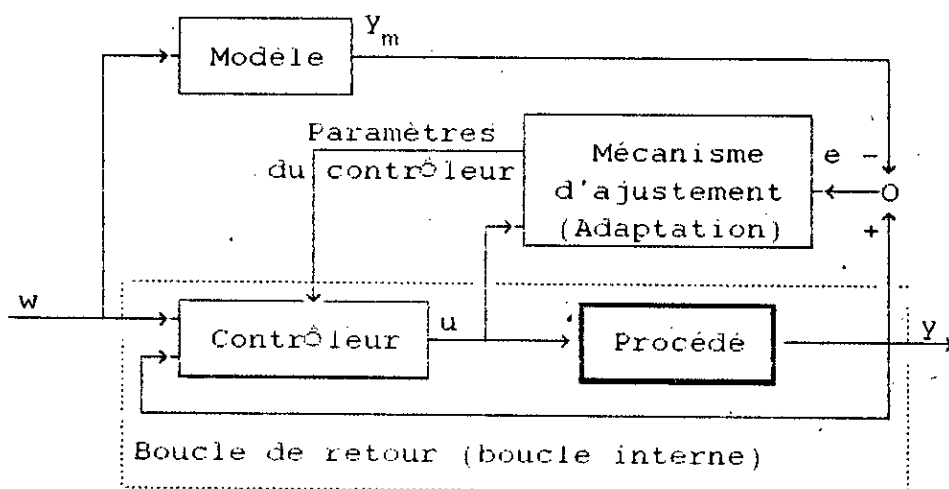


Fig.1.1 : Système adaptatif avec modèle de référence

l'intermédiaire d'un modèle de référence, qui donne la réponse désirée  $y_m(t)$  au signal d'entrée  $w(t)$ . Le système possède aussi une boucle de retour composée du procédé et du contrôleur. L'erreur  $e(t)$  est la différence entre la sortie  $y(t)$  du système et celle du modèle de référence. Les paramètres du contrôleur changent en fonction de cette erreur. Le contrôle adaptatif avec modèle de référence est une approche générale qui permet de faire varier les paramètres du contrôleur de façon à ramener la fonction de transfert en boucle fermée à celle décrite par le modèle.

Le schéma original d'un système adaptatif avec modèle de référence proposé dans [21] est celui de la Fig.1.1, dans ce schéma, deux nouvelles idées ont été introduites. La première est que les performances du système sont spécifiées par un modèle. La deuxième concerne l'ajustage des paramètres du contrôleur qui se fait de façon à éliminer l'erreur  $e(t)$ .

### 1.2.2 Contrôle auto-ajustable

Dans un système adaptatif, il est supposé que les paramètres du contrôleur sont ajustés continuellement. Ces paramètres changeant selon les variations de la dynamique du procédé, il est difficile d'analyser la stabilité et la convergence d'un tel système. Pour simplifier le problème, il est supposé que le procédé a des paramètres constants mais inconnus. Avec un procédé connu, la procédure de synthèse de la commande donne des valeurs fixes aux paramètres du contrôleur. Les paramètres du contrôleur adaptatif doivent donc converger vers ces valeurs quand le procédé est inconnu. Un contrôleur possédant cette propriété est dit auto-ajustable du moment qu'il ajuste automatiquement le système aux performances désirées.

L'idée de base d'un contrôleur auto-ajustable (STC) est de séparer la phase d'estimation des paramètres inconnus de la phase de synthèse de la commande. Cette idée est illustrée par le schéma

fonctionnel de la Fig.1.2. Les paramètres inconnus sont estimés en temps réel, en utilisant une méthode d'estimation récursive. Les paramètres estimés sont traités comme s'ils étaient vrais. Les incertitudes sur ces paramètres estimés ne sont pas considérées. C'est ce qu'on appelle le principe d'équivalence certaine [4]. Plusieurs méthodes d'estimation peuvent être utilisées, on peut citer les méthodes des moindres carrés, des moindres carrés récursives, des moindres carrés généralisées et étendues et la méthode du maximum de vraisemblance [4,7,10].

L'approche la plus simple est d'estimer les paramètres de la fonction de transfert du procédé. Les paramètres du contrôleur ne sont pas mis à jour directement, mais indirectement via l'estimation du modèle du procédé. Cette approche donne un algorithme adaptatif indirect.

Il est souvent possible de reparamétriser le modèle en fonction des paramètres du contrôleur, ces derniers peuvent être estimés directement, et qui conduisent alors à un algorithme adaptatif direct.

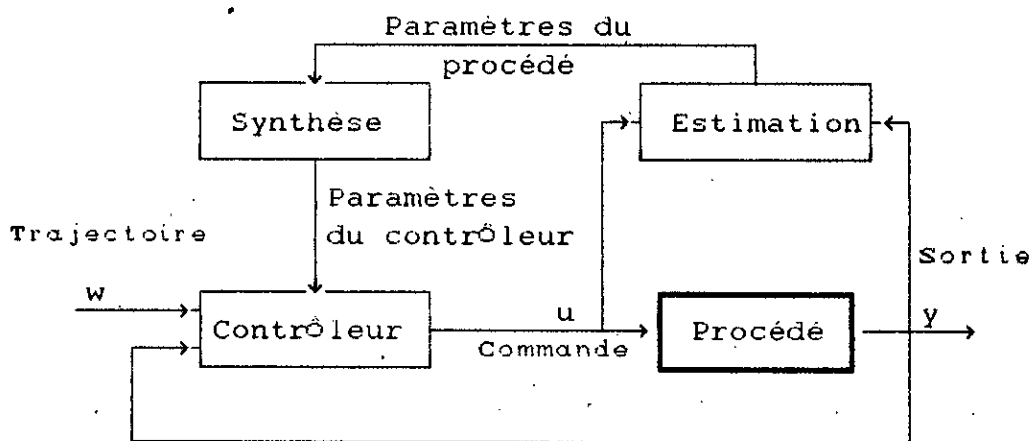


Fig.1.2: Schéma bloc d'un contrôleur auto-ajustable

Plusieurs stratégies de commande peuvent être adoptées. Deux approches polynomiales sont le plus souvent utilisées, il s'agit de la commande à variance minimale et de la commande par placement de pôles. De ce fait, les contrôleurs auto-ajustables sont divisés



en deux catégories principales. La première catégorie comprend des ajusteurs qui minimisent une fonction de coût quadratique des variables du procédé. Les ajusteurs de la deuxième catégorie essaient de placer les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée dans des positions pré-spécifiées.

Le premier algorithme adaptatif, basé sur une combinaison entre une méthode d'estimation et une stratégie de contrôle, a été décrit par Kalman [19], mais sans donner d'analyse sur les propriétés du système en boucle fermée. L'analyse des propriétés asymptotiques d'un régulateur auto-ajustable a été faite pour la première fois par Åström et Wittenmark [3], de même que le terme *Self-tuning* (Auto-ajustage) a été utilisé pour la première fois. Le régulateur d'Åström et Wittenmark est basé sur une estimation par la méthode des moindres carrés et un contrôle à variance minimale. Clarke et Gawthrop [8,9] ont développé une approche similaire, basée sur une estimation par la méthode des moindres carrés étendue et un contrôle à variance minimale généralisée. Cette dernière approche, sur laquelle s'articule essentiellement le travail que nous présenterons dans cette thèse, a donné lieu à d'intenses travaux de recherche et à un développement de plusieurs types de contrôleurs auto-ajustables [4,7,8].

## CONTROLE AUTO-AJUSTABLE MONO-BOUCLE A VARIANCE MINIMALE GENERALISEE

### 2.1 INTRODUCTION

Dans cette partie, nous développerons les éléments théoriques de base sur lesquels s'articule notre travail. Il s'agit d'abord de présenter la classe des modèles de systèmes mono-boucle, auxquels un contrôle auto-ajustable est envisageable. Ces systèmes pouvant être les composants d'un système multi-boucle en cascade. Une méthode d'estimation récursive des paramètres du procédé, sera choisie pour le développement d'algorithmes d'auto-ajustage. la stratégie de contrôle auto-ajustable à variance minimale généralisée sera ensuite traitée.

### 2.2 MODELISATION

La modélisation paramétrique d'un procédé est une technique qui consiste à déterminer un modèle mathématique simulant le comportement externe du processus de génération du signal de sortie du procédé. Sans tout fois prétendre à l'exactitude pour son comportement interne. Ce modèle est défini à l'aide d'un certain nombre de paramètres à déterminer.

#### 2.2.1 Classe des modèles

Bien qu'en pratique tous les procédés sont non-linéaires, un bon contrôle peut être réalisé en utilisant des modèles qui sont des fonctions de transfert issues d'une linéarisation du système autour du point de fonctionnement. De même nous savons qu'en

général les algorithmes de contrôle sont implémentés autour de calculateurs numériques. Alors la classe des modèles discrets de systèmes linéaires mono-boucle mono-variable, liant la sortie mesurée  $y(t)$  à l'entrée de commande  $u(t)$ , donnée par l'équation de récurrence suivante :

$$y(t) = - \sum_{i=1}^n a_i y(t-i) + \sum_{i=0}^n b_i u(t-k-i) \quad (2.1)$$

semble appropriée pour une représentation des dynamiques de ce type de systèmes.

$t$ : Instant d'échantillonnage

$n$ : Nombre entier, représentant l'ordre du système.

$k$ : Nombre entier, représentant le retard du système.

Si  $z^{-1}$  est l'opérateur retard tel que:  $f(t-1) = z^{-1} f(t)$ . Alors, l'équation (2.1) peut être écrite sous la forme polynomiale suivante :

$$y(t) = z^{-k} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t) \quad (2.2)$$

avec:

$$A(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i} \quad ; \quad B(z^{-1}) = \sum_{i=0}^n b_i z^{-i} \quad (2.3)$$

Dans le cas où un système évolue dans un environnement perturbé, l'effet des perturbations est représenté par un signal  $d(t)$  agissant sur la sortie au point de fonctionnement. En utilisant le théorème de superposition,  $d(t)$  peut être considéré comme étant la somme de trois composantes :

- Une composante continue, due au fait qu'un signal de commande nul ne donne pas toujours une sortie du système nulle.
- Une composante représentant toutes les perturbations mesurables.
- Une composante représentant toutes les perturbations non-

mesurables (stochastiques).

Les composantes continues et celles représentant les perturbations mesurables, peuvent être éliminées par l'inclusion de compensateurs appropriés dans la boucle directe du système. Nous nous limiterons donc à considérer la composante stochastique. Ce qui donne un modèle du système perturbé de la forme:

$$y(t) = z^{-k} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t) + d(t) \quad (2.4)$$

$d(t)$  est une perturbation stochastique (aléatoire) donnée par le modèle :

$$d(t) = \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \xi(t) \quad (2.5)$$

Où:

$\xi(t)$  est un bruit blanc discret, de moyenne nulle et de variance finie.

$C(z^{-1})$  est un polynôme en  $z^{-1}$  qui caractérise la perturbation, il est donné par :

$$C(z^{-1}) = 1 + \sum_{l=1}^n c_l z^{-l} \quad (2.6)$$

D'après le théorème de représentation [4],  $C(z^{-1})$  doit avoir toutes ses racines à l'intérieur du cercle unité.

### 2.2.2 Modèles prédictifs

Plusieurs stratégies auto-ajustables, particulièrement les méthodes implicites, sont basées sur une synthèse prédictive de la commande, au sens des moindres carrés. L'horizon de prédiction est le temps de retard du système  $k$ . Le choix de cette largeur est motivé par le fait que la commande  $u(t)$  à l'instant  $t$  n'aura d'influence sur la sortie qu'à l'instant  $t+k$ , c'est à dire sur  $y(t+k)$ .

Le modèle prédictif est une reparamétrisation du modèle, faisant apparaître les paramètres du contrôleur dans l'équation du prédicteur de la sortie. Ce qui fait que ceux-ci peuvent être estimés directement. La sortie à l'instant  $t+k$  est :

$$y(t+k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t) + d(t+k) \quad (2.7)$$

avec :

$$d(t+k) = \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \xi(t+k) \quad (2.8)$$

Le signal de perturbation  $d(t+k)$  peut être considéré comme étant la somme de deux termes, l'un représentant les perturbations futures ( $\xi(t+1), \dots, \xi(t+k)$ ), qui sont indépendantes des  $y(t), y(t-1), \dots; u(t), u(t-1), \dots$ , l'autre représentant les perturbations passées, qui peuvent être calculées. Pour expliciter ceci, on introduit l'identité suivante :

$$\frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} = E(z^{-1}) + z^{-k} \frac{F(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (2.9)$$

$E(z^{-1})$  et  $F(z^{-1})$  sont des polynômes en  $z^{-1}$  de degrés  $(k-1)$  et  $(n-1)$  respectivement, qui sont donnés par :

$$E(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} e_i z^{-i} ; \quad F(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i z^{-i} \quad (2.10)$$

Les coefficients de  $E(z^{-1})$  et  $F(z^{-1})$  peuvent être obtenus en divisant  $C(z^{-1})$  par  $A(z^{-1})$ ,  $E(z^{-1})$  correspondra au quotient et  $z^{-k} F(z^{-1})$  au reste. Une autre méthode pour déterminer ces coefficients, consiste à identifier les coefficients des différentes puissances de  $z^{-1}$ .

Les équations (2.7) et (2.9) peuvent être réécrites comme suit :

$$A(z^{-1})y(t+k) = B(z^{-1})u(t) + A(z^{-1})d(t+k) \quad (2.11)$$

$$E(z^{-1})A(z^{-1}) = C(z^{-1}) - z^{-k}F(z^{-1}) \quad (2.12)$$

Quand on multiplie (2.11) par  $E(z^{-1})$  on trouve :

$$E(z^{-1})A(z^{-1})y(t+k) = E(z^{-1})B(z^{-1})u(t) + E(z^{-1})A(z^{-1})d(t+k)$$

$$C(z^{-1})y(t+k) - F(z^{-1})y(t) = G(z^{-1})u(t) + D(z^{-1})d(t+k)$$

Avec :

$$G(z^{-1}) = E(z^{-1})B(z^{-1}) \quad ; \quad D(z^{-1}) = E(z^{-1})A(z^{-1}) \quad (2.13)$$

Ce qui donne :

$$y(t+k) = \frac{F(z^{-1})}{C(z^{-1})} y(t) + \frac{G(z^{-1})}{C(z^{-1})} u(t) + \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} d(t+k) \quad (2.14)$$

On définit la prédiction de  $y(t+k)$  à l'instant  $t$  par  $y^*(t+k/t)$ , et l'erreur de prédiction par  $\tilde{y}(t+k)$ , nous aurons alors:

$$y(t+k) = y^*(t+k/t) + \tilde{y}(t+k) \quad (2.15)$$

avec :

$$y^*(t+k/t) = \frac{F(z^{-1})}{C(z^{-1})} y(t) + \frac{G(z^{-1})}{C(z^{-1})} u(t) \quad (2.16)$$

$$\tilde{y}(t+k) = \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} d(t+k) = E(z^{-1})\xi(t+k) \quad (2.17)$$

Les équations (2.15), (2.16), et (2.17) donnent un modèle prédictif du système donnée par (2.7) et (2.8).

Notant que  $y^*(t+k/t)$  et  $\tilde{y}(t+k)$  sont orthogonaux, ceci est dû au fait que les séquences  $\xi(t+i)$  sont incorrélées avec les  $y(t-i)$  et les  $u(t-i)$  pour  $i \geq 0$ . Donc  $y^*(t+k/t)$  est un prédicteur optimal au sens des moindres carrés de  $y(t+k)$  à l'instant  $t$ .

## 2.3 ESTIMATION DES PARAMETRES PAR LA METHODE DES MOINDRES CARRES ETENDUE

L'estimation (identification) des paramètres inconnus du modèle du procédé, représente une étape très importante dans la mise en oeuvre d'un système de contrôle auto-ajustable. Cette opération consiste à ajuster les paramètres du modèle choisi de manière à représenter le mieux possible le système réel, dans des conditions de fonctionnement données.

Une approche naturelle de l'identification est de recueillir toutes les mesures nécessaires et ensuite de déterminer par leur étude statistique les paramètres du modèle. L'identification est alors dite en temps différé (OFF LINE). Un algorithme comme celui des moindres carrés peut être adopté pour ce genre de traitement. Cette approche est souvent mise en défaut, lorsque les paramètres du système sont variables dans le temps. De même, la quantité de données à stocker ainsi que le nombre d'opérations à effectuer deviennent très importants. Ce qui est indésirable lors de la mise en oeuvre d'un algorithme de contrôle auto-ajustable. Ces inconvénients peuvent être contournés par une reformulation des équations de l'estimateur sous forme récursive, ce qui permet une réactualisation à chaque instant des paramètres identifiés. L'identification est alors dite en temps réel (ON LINE). Un algorithme comme celui des moindres carrés récursif (MCR) peut résoudre ce problème.

Considérons le modèle décrit par l'équation de récurrence issue de (2.7) et (2.8) :

$$y(t) = - \sum_{i=1}^n a_i y(t-i) + \sum_{i=0}^n b_i u(t-k-i) + \varepsilon(t) \quad (2.18)$$

$$\varepsilon(t) = \xi(t) + \sum_{i=1}^n c_i \xi(t-i) \quad (2.19)$$

$\varepsilon(t)$  est l'erreur.

Prenons le cas où  $\varepsilon(t) = \xi(t)$  ( $c_i = 0$  ;  $i=1, \dots, n$ ). L'équation (2.18) s'écrit alors sous la forme :

$$y(t) = x^T(t)\vartheta + \varepsilon(t) \quad (2.20)$$

Où :

-  $\vartheta$  est un vecteur de paramètres inconnus (supposés constants).

$$\vartheta = [a_1, \dots, a_n; b_0, \dots, b_n]^T \quad (2.21)$$

-  $x^T(t)$  est un vecteur de données connues.

$$x^T(t) = [-y(t-1), \dots, -y(t-n); u(t-k), \dots, u(t-k-n)] \quad (2.22)$$

-  $\varepsilon(t)$  est dans ce cas, une erreur statistiquement indépendante des  $u(t-i)$  et  $y(t-i)$  pour  $i > 0$ .

-  $y(t)$  est une sortie observable.

L'estimation  $\hat{\vartheta}(t)$  du vecteur  $\vartheta$  à l'instant  $t$  par la méthode des moindres carrés récurrente (MCR), (voir Annexe A), est obtenue en minimisant une fonction perte, définie comme étant l'énergie de l'erreur :

$$L = \sum_t \beta^i \varepsilon^2(t-i) \quad \text{pour } i \geq 0 \quad (2.23)$$

$\beta$  est le facteur d'oubli positif, inférieur à l'unité.

L'algorithme des MCR est donné par le système d'équations suivant [10] :

$$\hat{\vartheta}(t) = \hat{\vartheta}(t-1) + K(t)[y(t) - x^T(t)\hat{\vartheta}(t-1)] \quad (2.24a)$$

$$K(t) = \frac{P(t-1)x(t)}{\beta + x^T(t)P(t-1)x(t)} \quad (2.24b)$$

$$P(t) = \frac{1}{\beta} \left[ I - K(t)x^T(t) \right] P(t-1) \quad ; \quad P(0) = p_0 \cdot I > 0 \quad (2.24c)$$

Dans ce cas  $\hat{\vartheta}(t)$  est un estimateur non-biaisé.

(Pour les détails et les démonstrations voir Annexe A).

Considérons maintenant le cas général, où l'erreur  $\varepsilon(t)$  contient des valeurs précédentes de  $\xi(t)$  ( $c_i \neq 0$  pour  $i=1, \dots, n$ ).



De ce fait l'application de l'algorithme des MCR donne une estimation biaisée du vecteur  $\hat{\theta}$  défini par (2.21). D'une manière générale, ce biais affecte très souvent les propriétés d'auto-ajustage surtout quand le rapport signal/bruit est faible [10].

On redéfinit les vecteurs étendus  $\hat{\theta}$  et  $x^T(t)$  comme suit :

$$\hat{\theta} = [a_1, \dots, a_n; b_0, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n]^T \quad (2.25)$$

$$x^T(t) = [-y(t-1), \dots, -y(t-n); u(t-k), \dots, u(t-k-n); \xi(t-1), \dots, \xi(t-n)] \quad (2.26)$$

L'algorithme des MCR peut être utilisé pour estimer le vecteur  $\hat{\theta}$  défini par (2.25) seulement quand les variables  $\xi(t-i)$  pour  $i \geq 1$  sont connus; ce qui n'est pas le cas.

La méthode des moindres carrés étendue (MCE) [10], consiste à approximer les  $\xi(t-i)$  par des estimation  $\hat{e}(t-i)$ , du résidu  $e(t-i)$  donné par :

$$e(t) = y(t) - x^T(t)\hat{\theta}(t) \quad (2.27)$$

puis à utiliser par la suite l'algorithme des MCR.

L'algorithme des MCE est donné par le système d'équations suivant [10]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}^T(t) = [-y(t-1), \dots, -y(t-n); u(t-k), \dots, u(t-k-n); \hat{e}(t-1), \dots, \hat{e}(t-n)] \quad (2.28a) \\ \hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t)[y(t) - \hat{x}^T(t)\hat{\theta}(t-1)] \quad (2.28b) \\ K(t) = \frac{P(t-1)\hat{x}(t)}{\beta + \hat{x}^T(t)P(t-1)\hat{x}(t)} \quad (2.28c) \\ P(t) = \frac{1}{\beta} \left[ I - K(t)\hat{x}^T(t) \right] P(t-1) \quad ; \quad P(0) = p_0 \cdot I > 0 \quad (2.28d) \\ \hat{e}(t) = y(t) - \hat{x}^T(t)\hat{\theta}(t) \quad (2.28e) \end{array} \right.$$

Les valeurs initiales  $\hat{\theta}(0)$ ,  $\hat{e}(0)$ ,  $\hat{e}(1)$ , ... sont en général nulles.

## 2.4 CONTROLE AUTO-AJUSTABLE A VARIANCE MINIMALE GENERALISEE

En Automatique, on cherche souvent à conduire un procédé industriel de façon à avoir un produit fini de qualité à un coût réduit. Compte tenu des perturbations qui agissent sur le système, on ne peut pas maintenir ces performances constantes, mais seulement réduire leurs variations ou leurs fluctuations. Pour se faire nous allons faire appel à la notion de variance qui représente l'écart quadratique d'une variable aléatoire par rapport à sa moyenne.

Un des premiers régulateurs auto-ajustables à variance minimale qui a eu des applications industrielles est celui de K.J.Astrom et B.Wittenmark [3]. Ce régulateur a été conçu de façon à minimiser les fluctuations de la sortie d'un système aléatoirement perturbé autour de zéro. Néanmoins pour certains systèmes, quelques difficultés d'ordre numérique et pratique apparaissent (nécessité d'un effort de commande très élevé par exemple). Une autre faiblesse de ce régulateur provient du fait qu'il ne concerne que la régulation de la sortie du procédé sans tenir compte de la réponse transitoire du système, quand son point de fonctionnement change.

Pour pallier à l'ensemble de ces difficultés, D.W.Clarke et P.J.Gawthrop [8,9] ont introduit le contrôleur auto-ajustable à variance minimale généralisée, qui constitue un développement et une généralisation du régulateur auto-ajustable à variance minimale [3]. Dans la synthèse de ce nouveau contrôleur, on cherche à minimiser une fonction coût quadratique qui incorpore les fluctuations de l'entrée, de la sortie et de la trajectoire désirée. Ce qui revient à déterminer une commande qui minimise les fluctuations autour de zéro, non-pas de la sortie du système mais d'une sortie auxiliaire (Pour plus de détails voir Annexe B).

### 2.4.1 Prédiction au sens des moindres carrés et commande

Le contrôleur auto-ajustable est conçu de façon à minimiser la variance d'une fonction coût  $\phi$ . Cette fonction est une sortie auxiliaire, du système donné par l'équation (2.4). Cette sortie auxiliaire (Fig.2.1) est défini par:

$$\phi(t) = S(z^{-1})y(t) + Q(z^{-1})u(t-k) - R(z^{-1})w(t-k) \quad (2.29)$$

$w(t)$  est la trajectoire désirée.

$P, Q$  et  $R$  des fonction de transfert en  $z^{-1}$ , choisies par l'utilisateur et spécifiées par :

$$S(z^{-1}) = \frac{S_N(z^{-1})}{S_D(z^{-1})} ; Q(z^{-1}) = \frac{Q_N(z^{-1})}{Q_D(z^{-1})} ; R(z^{-1}) = \frac{R_N(z^{-1})}{R_D(z^{-1})}$$

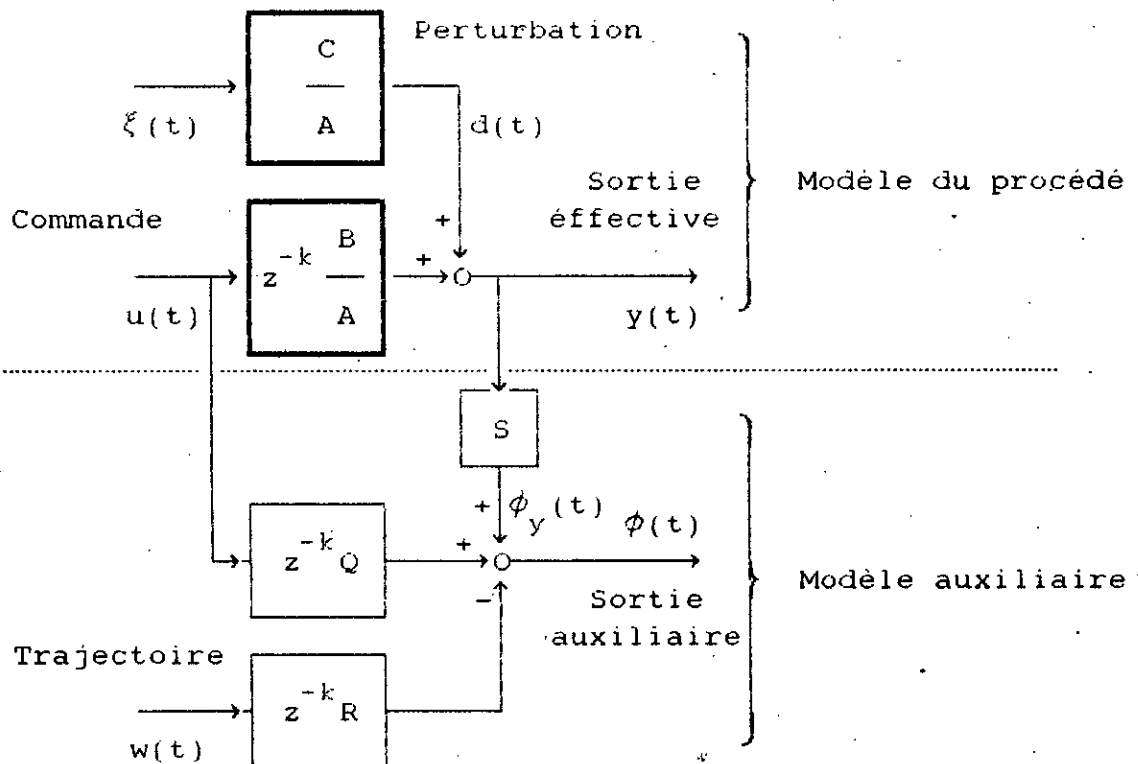


Fig.2.1: Structure du procédé et du modèle auxiliaire

#### Remarque:

Dans la suite de notre étude nous ometterons volontairement l'opérateur retard ( $z^{-1}$ ), et ceci pour alléger l'écriture des expressions faisant intervenir des polynômes en  $z^{-1}$ .

A l'instant  $t-k$  les signaux  $Qu(t-k)$  et  $Rw(t-k)$  sont connus. Alors le problème de prédiction de la sortie auxiliaire  $\phi(t)$  se réduit alors à la prédiction, au sens des moindres carrés, de la quantité:

$$\phi_y(t) = S.y(t) \quad (2.30)$$

En tenant compte de (2.4) et de (2.30), à l'instant  $t+k$ , on a :

$$\phi_y(t+k) = \frac{S_N B}{S_D A} u(t) + \frac{S_N}{S_D} d(t) \quad (2.31)$$

E et F sont des polynômes en  $z^{-1}$  et des solutions de l'identité :

$$\frac{CS_N}{AS_D} = E + z^{-k} \frac{F}{AS_D} \quad (2.32)$$

avec :

$$E(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{ne} e_i z^{-i} ; \quad F(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{nf} f_i z^{-i} \quad (2.33)$$

$$ne = \text{Deg}(E) = k-1 \quad (2.34)$$

$$nf = \text{Deg}(F) = \text{Sup} \left[ \left[ n-k + \text{Deg}(S_N) \right], \left[ n-1 + \text{Deg}(S_D) \right] \right] \quad (2.35)$$

alors,  $\phi_y(t+k)$  s'écrit sous la forme prédictive suivante :

$$\phi_y(t+k) = \phi_y^*(t+k/t) + \tilde{\phi}_y(t+k) \quad (2.36)$$

$\phi_y^*(t+k/t)$  est la prédiction à l'instant  $t$  de  $\phi_y(t+k)$ ;  $\tilde{\phi}_y(t+k)$  est l'erreur de prédiction.

$$\phi_y^*(t+k/t) = \frac{F}{CS_D} y(t) + \frac{G}{C} u(t) \quad (2.37)$$

$$\tilde{\phi}_y(t+k) = \frac{D}{C} d(t+k) = E \xi(t+k) \quad (2.38)$$

G et D sont des polynômes en  $z^{-1}$  définis par (2.13). On remarque aisément que  $\phi_y^*(t+k/t)$  et  $\tilde{\phi}_y(t+k)$  sont orthogonaux. Alors la prédiction est optimale au sens des moindres carrés. De même, l'équation (2.37) donne la raison pour laquelle le polynôme C doit

avoir toutes ces racines à l'intérieur du cercle unité. C'est dans le cas où il y a des erreurs dans les conditions initiales des équations du prédicteur. L'effet de ces erreurs tend asymptotiquement vers zéro à une vitesse qui dépend des positions de ces racines.

De même, d'après les équations (2.29), (2.30) et (2.31),  $\phi(t+k)$  peut être donné par la forme prédictive suivante:

$$\phi(t+k) = \phi^*(t+k/t) + \tilde{\phi}(t+k) \quad (2.39)$$

$\phi^*(t+k/t)$  est la prédiction à l'instant  $t$  de  $\phi(t+k)$ ,  $\tilde{\phi}(t+k)$  est l'erreur de prédiction.

Avec :

$$\phi^*(t+k/t) = \phi_y^*(t+k/t) + Qu(t) - Rw(t) \quad (2.40)$$

$$\tilde{\phi}(t+k) = \tilde{\phi}_y(t+k) \quad (2.41)$$

Dans ce cas aussi (voir Annexe B),  $\phi^*(t+k/t)$  et  $\tilde{\phi}(t+k)$  sont orthogonaux. Alors la prédiction est optimale au sens des moindres carrés.

La loi de contrôle est spécifiée en choisissant le signal de commande  $u(t)$  de façon à minimiser une fonction coût qui n'est autre que la variance de  $\phi(t+k)$ , cette variance est définie par :

$$I = E[\phi^2(t+k)] \quad (2.42)$$

La fonction  $I$  est minimale (voir annexe B), quand la prédiction de  $\phi(t+k)$  à l'instant  $t$  est nulle; ce qui signifie que :

$$\phi^*(t+k/t) = 0 \quad (2.43)$$

Alors :

$$\phi_y^*(t+k/t) = Rw(t) - Qu(t) \quad (2.44)$$

Tenant compte des équations (2.40) et (2.37), la commande retour qui satisfait les équations (2.43) et (2.44) est donné par :

$$u(t) = \frac{CRw(t) - Fy(t)/S_D}{G + CQ} \quad (2.45)$$

La fonction de transfert en boucle fermée est obtenue en combinant les équations (2.45) concernant la loi de commande et (2.4) concernant la sortie. Nous aurons donc, pour la sortie :

$$y(t) = \frac{A(G+QC)}{C(SB+QA)} d(t) + \frac{BR}{SB+QA} w(t-k) \quad (2.46)$$

$$y(t) = \frac{G+QC}{SB+QA} \xi(t) + \frac{BR}{SB+QA} w(t-k) \quad (2.47)$$

et pour le signal de commande :

$$u(t) = -\frac{FA}{CS_D(SB+QA)} d(t) + \frac{A}{SB+QA} w(t-k) \quad (2.48)$$

$$u(t) = -\frac{F/S_D}{SB+QA} \xi(t) + \frac{A}{SB+QA} w(t-k) \quad (2.49)$$

De ce fait, l'équation caractéristique en boucle fermée est donnée par :

$$SB + QA = 0 \quad (2.50)$$

D'après l'équation (2.45), Le système en boucle fermée peut être illustré par la Fig.2.2.

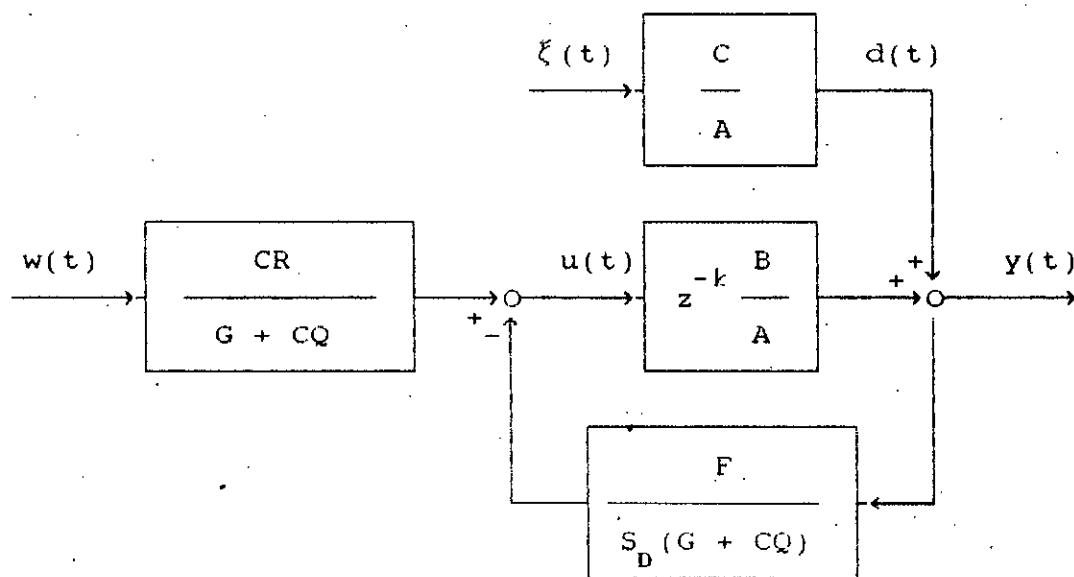


Fig.2.2 : Schéma bloc du système en boucle fermée.

## 2.4.2 Auto-ajustage

La loi de contrôle déterminée à partir de l'équation 2.45 est donnée en fonction des polynômes G, F et C. Les coefficients de ces polynômes sont les paramètres du modèle prédictif du système ayant pour sortie  $\phi_y(t)$  (éq.2.30). Le calcul de la commande nécessite la connaissance préalable de ces coefficients.

Les méthodes auto-ajustables sont appliquées en général à des systèmes ayant une structure connue avec paramètres inconnus. Ce qui fait que la connaissance de la borne supérieure des degrés des polynômes A, B et C ainsi que le temps de retard du système k est nécessaire.

L'équation du prédicteur de  $\phi_y(t)$  à l'instant (t-k) est :

$$\phi_y^*(t/t-k) = \frac{F}{CS_D} y(t-k) + \frac{G}{C} u(t-k) \quad (2.51)$$

La forme récurrente de (2.51) est :

$$\begin{aligned} \phi_y^*(t/t-k) = & \sum_{i=0}^{nf} f_i y(t-k-i)/S_D + \sum_{i=0}^{ng} g_i u(t-k-i) \\ & - \sum_{i=1}^n c_i \phi_y^*(t-i/t-k-i) \end{aligned} \quad (2.52)$$

avec :

$$ng = \text{Deg}(G) = n+k-1 \quad (2.53)$$

Définissons les vecteurs :

$$\theta^T = [g_0, \dots, g_{ng}; f_0, \dots, f_{nf}; -c_1, \dots, -c_n] \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} x^T(t) = & [u(t), \dots, u(t-ng); y(t)/S_D, \dots, y(t-nf)/S_D; \\ & \phi_y^*(t+k-1/t-1), \dots, \phi_y^*(t+k-n/t-n)] \end{aligned} \quad (2.55)$$

Alors, il convient d'écrire :

$$\hat{\phi}_y^*(t/t-k) = \hat{x}^\tau(t-k)\hat{\theta} \quad (2.56)$$

$$\hat{\phi}_y(t) = \hat{x}^\tau(t-k)\hat{\theta} + \tilde{\hat{\phi}}_y(t) \quad (2.57)$$

Si le vecteur  $\hat{x}(t-k)$  contient des données connues à l'instant  $t$ , et si l'erreur de prédiction  $\tilde{\hat{\phi}}_y(t)$  est blanche alors, le vecteur  $\hat{\theta}$  peut être estimé par la méthode des MCR (voir Annexe A et §2.3). Seulement, les données  $\hat{\phi}_y^*$  du vecteur  $\hat{x}(t-k)$  sont inconnues (saur si  $\hat{\theta}$  est connu où  $\xi$  est nul); et quand ( $k > 1$ ), l'erreur de prédiction n'est plus blanche.

L'approche d'auto-ajustage que nous adopterons (inspirée de la méthode des MCE, voir §2.3), remplace les  $\hat{\phi}_y^*$  du vecteur  $\hat{x}(t)$  par des approximations  $\hat{\phi}_y^*$  qui peuvent être calculées. Ensuite, on utilise la méthode des MCR pour estimer le vecteur  $\hat{\theta}$  comme si l'erreur de prédiction est blanche.

L'algorithme d'auto-ajustage récursif est donnée par le système d'équations suivant [8,9]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}^\tau(t) = [u(t), \dots, u(t-ng); y(t)/S_D, \dots, y(t-nf)/S_D; \\ \hat{\phi}_y^*(t+k-1/t-1), \dots, \hat{\phi}_y^*(t+k-n/t-n) ] \quad (2.58a) \end{array} \right.$$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t-k)[\hat{\phi}_y(t) - \hat{x}^\tau(t-k)\hat{\theta}(t-1)] \quad (2.58b)$$

$$K(t) = \frac{P(t-1)\hat{x}^\tau(t)}{\beta + \hat{x}^\tau(t)P(t-1)\hat{x}(t)} \quad (2.58c)$$

$$P(t) = \frac{1}{\beta} \left[ I - K(t)\hat{x}^\tau(t) \right] P(t-1) \quad ; \quad P(0) = p_0, I > 0 \quad (2.58d)$$

$$\hat{\phi}_y^*(t+k/t) = \hat{x}^\tau(t)\hat{\theta}(t) \quad (2.58e)$$

L'équation (2.58b) nécessite l'utilisation de l'équation (2.30) pour générer  $\hat{\phi}_y(t)$ .  $\beta$  est un facteur d'oubli exponentiel.

La loi de commande correspondant à l'équation (2.45) est :



$$u(t) = \frac{\hat{C}Rw(t) - \hat{F}y(t)/S_D}{\hat{G} + \hat{C}Q} \quad (2.59)$$

où les coefficients des polynômes  $\hat{C}$ ,  $\hat{F}$  et  $\hat{G}$  sont des éléments du vecteur  $\hat{\theta}(t)$ .

### 2.4.3 Contrôle auto-ajustable avec modèle de référence

Selon le choix des polynômes  $S$ ,  $Q$  et  $R$ , les équations (2.47) et (2.49) présentent plusieurs interprétations. Dans ce paragraphe nous choisirons ces polynômes de façon à développer un contrôleur auto-ajustable particulier qui sera à la base du travail qui suit dans la présente étude.

Ce contrôleur est présenté comme étant un nouveau type de contrôleurs adaptatifs avec modèle de référence. Ce contrôleur n'est pas conçu en utilisant les techniques standards du contrôle adaptatif avec modèle de référence [4], mais en utilisant la technique du contrôle auto-ajustable à variance minimale généralisée.

Considérons la classe particulière des lois de contrôle, définie par l'équation (2.42), avec :

$$S = \frac{1}{M} ; \quad Q = 0 ; \quad R = 1 \quad (2.60)$$

où  $M$  est une fonction de transfert rationnelle en  $z^{-1}$ .

D'après les équations (2.44) et (2.45), la fonction coût  $I$  donnée par l'équation (2.42) est minimale quand la prédiction de  $\phi_y(t+k)$  à l'instant  $t$  est égale à la valeur de la trajectoire désirée au même instant, ce qui signifie que :

$$\phi_y^*(t+k/t) = w(t) \quad (2.61)$$

où  $w(t)$  est la trajectoire désirée.

La loi de commande est donné par :

$$u(t) = \frac{Cw(t) - Fy(t)/S_D}{G} \quad (2.62)$$

Quand les paramètres du système sont inconnus, on utilise alors l'algorithme d'auto-ajustage donné par le système d'équations (2.58) afin de les estimer. La loi de commande est alors donnée par:

$$u(t) = \frac{\hat{C}w(t) - \hat{F}y(t)/S_D}{\hat{G}} \quad (2.63)$$

Les coefficients de  $\hat{C}$ ,  $\hat{F}$  et  $\hat{G}$  sont des éléments du vecteur  $\hat{\theta}(t)$  donné par l'équation (2.58b).  $\hat{\theta}(t)$  est une estimation du vecteur  $\theta$  donné par (2.54).

L'équation de la sortie en boucle fermée est:

$$y(t) = z^{-k} Mw(t) + ME\xi(t) \quad (2.64)$$

De l'équation (2.64), on remarque aisément que non seulement cette classe de lois de contrôle amène la sortie du système à suivre celle d'un modèle défini par la fonction de transfert  $M$ , ayant pour entrée  $w(t)$  et un retard  $k$ , mais aussi que le processus de perturbation en boucle fermée suit la sortie d'un modèle  $M$  ayant pour entrée  $E\xi(t)$ . Cette entrée est un processus à moyenne glissante d'ordre  $k-1$ . Ce résultat implique en outre que la forme du spectre des perturbations en régime permanent soit aussi fonction du modèle  $M$ .

## 2.5 STABILITE ET CONVERGENCE [13, 26, 27, 28]

La stabilité dans le sens entrée bornée, sortie bornée et la convergence sont les propriétés recherchées d'un contrôleur auto-ajustable. L'analyse de ces propriétés nécessite de faire quelques hypothèses sur le système à contrôler. Les hypothèses les plus prépondérantes sont:

- L'existence d'un modèle.
- Connaissance de la structure de ce modèle.
- Les signaux de perturbation doivent être bornés avec une densité spectrale de puissance rationnelle.

Ces hypothèses doivent être limitées au maximum et facilement vérifiables dans la pratique.

L'algorithme de contrôle auto-ajustable est représenté par une connexion, avec retour, d'un certain nombre de blocs. L'analyse de la stabilité et de la convergence du système globale, consiste à étudier séparément chacun des blocs constitutifs de cet algorithme, déduire les propriétés que présentent ces blocs, et finalement juxtaposer ces propriétés pour étudier la stabilité et la convergence de l'ensemble.

L'utilisation du critère standard de stabilité "entrée borné - sortie bornée", de l'opérateur conique et du théorème du gain faible [26,27,28] est nécessaire pour tirer les conditions de stabilité et de convergence de l'algorithme de contrôle auto-justable du système globale.

D'après les paragraphes précédents, on considère la classe des systèmes, donnée par le modèle suivant :

$$A.y(t) = B.u(t-k) + C.\xi(t)$$

on définit la sortie auxiliaire :

$$\phi_y(t) = S.y(t)$$

$\phi_y(t+k)$  peut s'écrire sous la forme prédictive suivante :

$$\phi_y(t+k) = \phi_y^*(t+k/t) + \tilde{\phi}_y(t+k)$$

avec :

$$\phi_y^*(t+k/t) = \frac{F}{CS_D} y(t) + \frac{G}{C} u(t) = x^T(t) \cdot \theta$$

$$\tilde{\phi}_y(t) = E.\xi(t)$$

$$\hat{\vartheta}^T = [g_0, \dots, g_{ng}; f_0, \dots, f_{nf}; -c_1, \dots, -c_n]$$

$$\hat{x}^T(t) = [u(t), \dots, u(t-ng); y(t)/S_D, \dots, y(t-nf)/S_D; \hat{\phi}_y^*(t+k-1/t-1), \dots, \hat{\phi}_y^*(t+k-n/t-n)]$$

le vecteur  $\hat{\vartheta}$  est estimé par l'algorithme suivant :

$$\hat{\vartheta}(t) = \hat{\vartheta}(t-1) + K(t-k)[\hat{\phi}_y(t) - \hat{x}^T(t-k)\hat{\vartheta}(t-1)]$$

$$K(t) = \frac{P(t-1)\hat{x}(t)}{\beta + \hat{x}^T(t)P(t-1)\hat{x}(t)}$$

$$P(t) = \frac{1}{\beta} \left[ I - K(t)\hat{x}^T(t) \right] P(t-1) \quad ; \quad P(0) = p_0 \cdot I > 0$$

$$P^{-1}(t) = H(t) = \beta \cdot H(t-1) + \hat{x}(t) \cdot \hat{x}^T(t) \quad ; \quad H(0) = h_0 \cdot I > 0 \quad (2.65)$$

$$\hat{x}(t) = [u(t), \dots, u(t-ng); y(t)/S_D, \dots, y(t-nf)/S_D; \hat{\phi}_y^*(t+k-1/t-1), \dots, \hat{\phi}_y^*(t+k-n/t-n)]$$

$$\hat{\phi}_y^*(t+k/t) = \hat{x}^T(t)\hat{\vartheta}(t)$$

La loi de commande  $u(t)$  est choisie de façon à ce que :

$$\hat{\phi}_y^*(t+k/t) + Q \cdot u(t) - R \cdot w(t) = 0$$

$w(t)$  est la trajectoire désirée.

Si les paramètres du système sont connus, alors l'entrée et la sortie en boucle fermée sont donnés par :

$$u_0(t) = -\frac{F/S_D}{SB+QA} \xi(t) + z^{-k} \frac{A}{SB+QA} w(t)$$

$$y_0(t) = \frac{G+QC}{SB+QA} \xi(t) + z^{-k} \frac{BR}{SB+QA} w(t)$$

### 2.5.1 Système en boucle fermée [13]

L'algorithme de contrôle auto-ajustable décrit dans le paragraphe précédent, peut être représenté par l'interconnexion de trois systèmes. Une classe d'estimateurs de  $\hat{\phi}_y^*(t/t-k)$  est définie comme suit :

$$\hat{\phi}_l(t) = \hat{x}^T(t-k) \cdot \hat{\vartheta}(t-i) \quad \text{pour } 0 < i < k \quad (2.66)$$

alors :

$$\hat{\phi}_1(t) = \hat{x}^T(t-k) \cdot \hat{\vartheta}(t-1) \quad (2.67)$$

Définissons :

$$e(t) = \tilde{\phi}_y(t) \quad (2.68)$$

$$\hat{e}(t) = \hat{\phi}_y(t) - \hat{\phi}_1(t) \quad (2.69)$$

$$\tilde{\vartheta}(t) = \hat{\vartheta}(t) - \vartheta \quad (2.70)$$

$$v_1(t) = \hat{x}^T(t-k) \cdot \tilde{\vartheta}(t-1) \quad (2.71)$$

$$e_1(t) = \hat{e}(t) \quad (2.72)$$

L'équation (2.69) est représentée par un système  $\Sigma_1$ , ayant pour entrée  $e_1(t)$  et pour sortie  $v_1(t)$ . Le système  $\Sigma_1$  est alors donné par :

$$\tilde{\vartheta}(t) = \tilde{\vartheta}(t-1) + K(t-k) \cdot e_1(t) \quad (2.73)$$

$$v_1(t) = \hat{x}^T(t-k) \cdot \tilde{\vartheta}(t-1)$$

Définissons :

$$v_2(t) = \tilde{e}(t) = \hat{\phi}_y^*(t/t-k) - \hat{\phi}_1(t)$$

$$v_2(t) = \hat{e}(t) - e(t)$$

$$v_2(t) = e_1(t) - e(t) \quad (2.74)$$

De ce fait, l'équation du prédictor (éq.(2.56)) combinée avec celle de l'estimation du prédictor (éq.(2.67)), donnera :

$$\begin{aligned} v_2(t) &= \hat{x}^T(t-k) \cdot \vartheta - \hat{x}^T(t-k) \cdot \hat{\vartheta}(t-1) \\ &= \hat{x}^T(t-k) \cdot \hat{\vartheta}(t-1) - [\hat{x}^T(t-k) - \hat{x}^T(t-k)] \cdot \vartheta \\ &= -v_1(t) - (C-1) [\hat{\phi}_y^*(t/t-k) - \hat{\phi}_k(t)] \end{aligned}$$

$$v_2(t) = -v_1(t) - (C-1)[v_2 + \hat{\phi}_1(t) - \hat{\phi}_k(t)] \quad (2.75)$$

$$v_3(t) = -\left[1 - \frac{1}{C}\right][\hat{\phi}_1(t) - \hat{\phi}_k(t)] \quad (2.76)$$

$$e_2(t) = -[v_1(t) + v_3(t)] \quad (2.77)$$

$$\dot{v}_2(t) = \frac{1}{C} e_2(t) \quad (2.78)$$

En utilisant les équations (2.68), (2.69) et (2.65), on aura :

$$v_3(t) = 0 \quad \text{pour } k=1. \quad (2.79)$$

$$v_3(t) = \left[1 - \frac{1}{C}\right] \cdot x^\tau(t-k) \cdot \left[ \sum_{i=1}^{k-1} H^{-1}(t-k-i) \cdot \hat{x}^\tau(t-k-i) \cdot v_2(t-i) \right] \quad \text{pour } k>1 \quad (2.80)$$

On définit aussi:

$$e_3(t) = \tilde{e}(t) = v_2(t) \quad (2.81)$$

Il s'en suit que l'équation (2.56) du prédicteur, est traduite par une interconnexion du système  $\Sigma_2$ , ayant pour entrée  $e_2(t)$  et pour sortie  $v_2(t)$ , et le système  $\Sigma_3$ , ayant pour entrée  $e_3(t)$  et pour sortie  $v_3(t)$ . Les trois systèmes  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_3$  forment un système interconnecté, ayant pour entrée l'erreur de prédiction optimale  $e(t)$  et pour sortie  $\tilde{e}(t)$ . Ce système est représenté par la Fig.2.3.

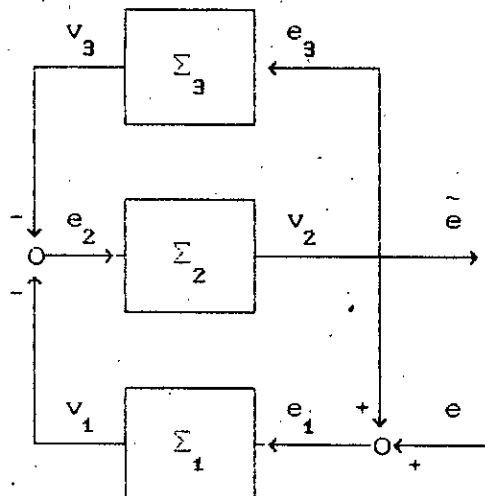


Fig.2.3 : Le système en boucle fermée.

Le système  $\Sigma_1$  dépend de la séquence  $\hat{x}(t)$ , le système  $\Sigma_2$  dépend du polynôme  $C$ , alors que le système  $\Sigma_3$  dépend de  $\hat{x}(t)$  et de  $C$  à la fois.

L'analyse des propriétés de stabilité de ces trois systèmes interconnectés, est basée sur la notion de système dissipatif [26,27,28]. En particulier, les systèmes  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont sensés avoir les propriétés de conicité, et  $\Sigma_3$  doit avoir un gain faible.

a/ Conicité de  $\Sigma_1$

Lemme 2.1 [13,27]:

On définit un scalaire  $\sigma(t)$  tel que:

$$\sigma(t) = \hat{x}^T(t) \cdot H^{-1}(t) \cdot \hat{x}(t) \quad (2.82)$$

Il est possible de choisir  $\sigma_0$ , tel que :

$$0 \leq \sigma(t) < \sigma_0 \leq 1$$

de façon à ce que le système  $\Sigma_1$ , soit un opérateur extérieur au cône de centre :

$$c_1 = -1 \quad (2.83)$$

et de rayon :

$$r_1 = \sqrt{1 - \sigma_0} \quad (2.84)$$

b/ Stabilité de  $\Sigma_1$  et de  $\Sigma_2$

Considérant le système  $\Sigma_{12}$ , ayant pour entrée  $e_{12}$  et pour sortie  $v_{12}$ , formé par l'interconnexion de  $\Sigma_1$  et de  $\Sigma_2$ , tel représenté dans la Fig.2.4.

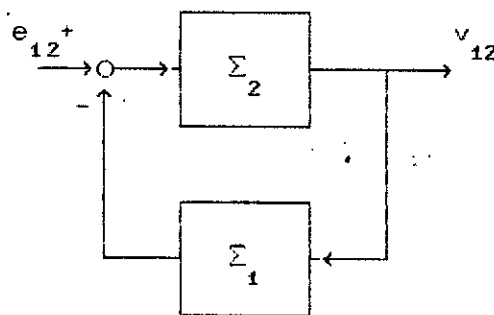


Fig.2.4: Sous-système en boucle fermée

D'après la Fig.2.3, on peut constater que:

$$e_{12} = v_3 \quad (2.85)$$

L'application du lemme 2.1 et du théorème de l'opérateur conique [27,28], donne lieu au lemme suivant:

*Lemme 2.2* [13]:

Le système  $\Sigma_{12}$ , donné par la Fig.2.4, est stable à gain fini, pour  $t > t_0$ , si :

(a)  $\sigma(t) > \sigma_0$ , pour  $t > t_0$ .

(b) Le lieu de Nyquist, dans le plan complexe, de:

$$\frac{1}{C(e^{j\omega})} \text{ pour } 0 \leq \omega \leq 2\pi$$

se trouve strictement à l'intérieur du cercle, de centre:

$$c = 1/\sigma_0 \quad (2.86)$$

et de rayon:

$$r = \sqrt{(1-\sigma_0)/\sigma_0} \quad (2.87)$$

Le gain,  $g_{12}$ , du système  $\Sigma_{12}$ , est borné par :

$$g_{12} = \sup_{(e_{12}), Nt} \left[ \frac{\sum_{t=t_0}^{Nt} v_{12}^2}{\sum_{t=t_0}^{Nt} e_{12}^2} \right]^{1/2} \leq d(0) \cdot \frac{(1+c/r)}{(1-d(c))/r} \quad (2.88)$$

avec :

$$d(c) = \sup_{0 < \omega < 2\pi} \left[ \frac{1}{C(e^{-j\omega})} \right] - c \quad (2.89)$$

### c/ Propriétés de $\Sigma_3$

Des équations qui définissent  $\Sigma_3$ , on tire le lemme suivant:

*Lemme 2.3* [13]:

Si, au moins, une des conditions suivantes est satisfaite:



(a)  $C = 1$

(b)  $k = 1$

alors:

$$v_3(t) = 0 \quad (2.90)$$

Si, aucune de ces conditions n'est satisfaite, l'analyse du système  $\Sigma_3$  nécessite l'introduction du lemme suivant:

Lemme 2.4 [13]:

On définit :

$$\sigma_1(t, i) = \hat{x}^T(t+i) \cdot H^{-1}(t) \cdot \hat{x}(t) \quad (2.91)$$

Si:

(a)  $\beta = 1$ , (pas d'oubli)

(b)  $0 < i < \infty$  (i constante positive finie)

(c)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0$

Alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_1(t, i) = 0 \quad (2.92)$$

En utilisant la définition de l'équation (2.91), et les équations (2.80) et (2.81), le système  $\Sigma_3$ , est donné par:

$$v_3(t) = \left(1 - \frac{1}{C}\right) \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_1(t-k-i, i) e_3(t-i) \quad (2.93)$$

Le lemme suivant donne une propriété du gain du système  $\Sigma_3$ .

Lemme 2.5 [13]:

On définit le gain du système  $\Sigma_3$ , par:

$$g_3 = \sup_{\{e_3\}, Nt} \left[ \frac{\sum_{t=t_0}^{Nt} v_3^2}{\sum_{t=t_0}^{Nt} e_3^2} \right]^{1/2} \quad (2.94)$$

$Nt$  est le nombre d'échantillons.

Si:

$$(a) \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 0$$

$$(b) C(z^{-1}) \neq 0, \text{ pour } |z| \geq 1$$

alors:

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} q_3(t_0) = 0$$

Les lemmes de 2.2 à 2.5 sont suffisants pour déduire la stabilité du système interconnecté de la Fig.2.3. Le lemme suivant résume ces résultats.

*Lemme 2.6* [13]:

Si :

(a) Les conditions du lemme 2.2 sont satisfaites.

(b) Les conditions du lemme 2.3 ou celles du lemme 2.5 sont satisfaites.

Alors, le système interconnecté de la Fig.2.3, est stable au sens entrée bornée-sortie bornée, pour  $t > t_0$ .

On aura en particulier:

$$\sum_{t=t_0}^{Nt} \tilde{e}^2(t) < G_1 \sum_{t=t_0}^{Nt} e^2(t) + G_2 \quad (2.95)$$

$G_1$  et  $G_2$  sont des constantes positives finies.

### 2.5.2 Stabilisation et convergence

A partir des résultats du lemme 2.6 et des expressions de l'entrée et de la sortie du système en boucle fermée (éqs.(2.49) et (2.47)), les résultats concernant la stabilité du système sont résumés dans le théorème suivant :

*Théorème 2.1* [13]:

Si:

$$(a) \frac{1}{Nt} \sum_{t=1}^{Nt} \xi^2(t) < \infty$$

$$(b) \frac{1}{Nt} \sum_{t=1}^{Nt} w^2(t) < \infty$$

$$(c) \sup_{t > t_0} \sigma(t) < 1$$

(d) Le polynôme caractéristique du système en boucle ouverte, n'a pas de racines à l'extérieur du cercle unité.

$$S.B + Q.A \neq 0, \text{ pour } |z| \geq 1.$$

Alors, le contrôleur auto-ajustable a les propriétés de stabilisation suivantes:

$$\frac{1}{Nt} \sum_{t=1}^{Nt} [y(t) - y_0(t)]^2 < \infty \quad (2.96)$$

$$\frac{1}{Nt} \sum_{t=1}^{Nt} [u(t) - u_0(t)]^2 < \infty \quad (2.97)$$

$$\frac{1}{Nt} \sum_{t=1}^{Nt} \hat{x}(t) \cdot \hat{x}^T(t) = \frac{H(Nt)}{Nt} < \infty \quad (2.98)$$

De même les conditions de convergence sont résumées dans le théorème suivant :

*Théorème 2.2* [13]:

Si, les conditions suivantes :

$$(a) \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0$$

$$(b) \frac{1}{C} - \frac{1}{2}, \text{ est strictement réelle positive}$$

sont satisfaites, alors:

$$\lim_{Nt \rightarrow \infty} \frac{1}{Nt} \sum_{t=0}^{Nt+t_0} e^{\sim 2}(t) = 0 \quad (2.99)$$

Si, en plus:

(c) Le polynôme caractéristique du système en boucle ouverte, n'a pas de racines à l'extérieur du cercle unité.

$$S.B + Q.A \neq 0, \text{ pour } |z| \geq 1.$$

alors:

$$\lim_{Nt \rightarrow \infty} \frac{1}{Nt} \sum_{t=1}^{Nt} [y(t) - y_0(t)]^2 = 0 \quad (2.100)$$

et:

$$\lim_{Nt \rightarrow \infty} \frac{1}{Nt} \sum_{t=1}^{Nt} [u(t) - u_0(t)]^2 = 0 \quad (2.101)$$

Il est à noter que la stabilité des méthodes auto-ajustables, dépend de l'interaction des propriétés de la séquence scalaire,  $\sigma(t)$  (éq.(2.82)), et des propriétés, dans le domaine fréquentiel, de la fonction de transfert  $C$  du bruit.

## 2.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté des éléments de la théorie du contrôle auto-ajustable à variance minimale généralisée de systèmes mono-boucle. De même nous avons développé un contrôleur auto-ajustable particulier, qui est présenté comme étant un nouveau type de contrôleurs adaptatifs avec modèle de référence, conçu en utilisant des techniques de contrôle auto-ajustable à variance minimale. Ce qui nous permettra de profiter des avantages des deux techniques. Dans la dernière partie de ce chapitre nous avons présenté une analyse de la stabilité et de la convergence des systèmes de contrôle auto-ajustables.

connue sous le nom de système de contrôle en cascade (Fig.3.2).

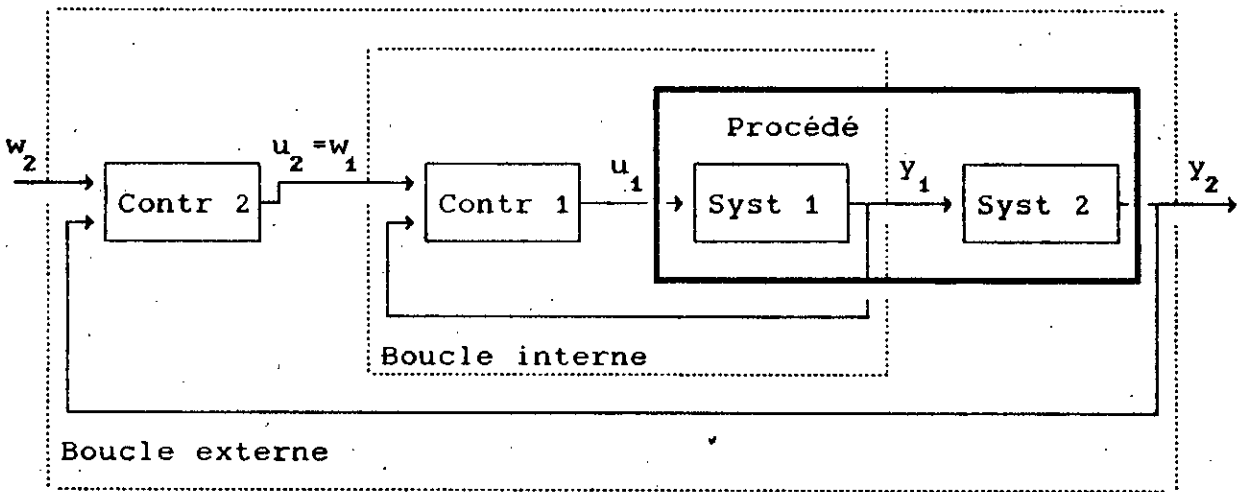


Fig.3.2 : Système de contrôle en cascade

Le schéma représenté sur la Fig.3.2 peut être simplifié si les contrôleurs sont dans un système à retour unitaire (Fig.3.3). La plupart des applications se retrouvent dans cette configuration.

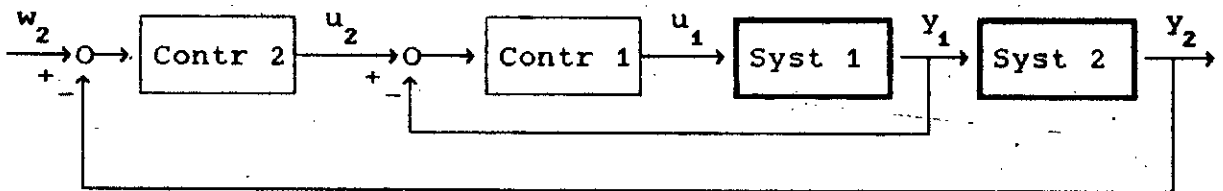


Fig.3.3 : Configuration en cascade

Cette configuration est particulièrement commode quand la valeur de la variable intermédiaire influe sur la conduite de la sortie du procédé. De ce fait et pour des raisons de sécurité du système, la variable intermédiaire et la sortie doivent être impérativement contrôlées. Le schéma du système de contrôle en cascade pour deux-boucles est extensible à un réseau de N-boucle en cascade.

La classe de systèmes auxquels un contrôle en cascade peut être destiné est caractérisée par la connexion d'une série de N sous-systèmes ayant la forme décrite au paragraphe 2.2 et la figure 3.4. Chaque sous-système est donné par l'équation :

$$y_i(t) = \frac{B_i}{A_i} u_i(t-k_i) + d_i(t) \quad \text{pour } i=1, \dots, N. \quad (3.1)$$

L'inter-connexion de ces sous-systèmes est spécifiée par :

$$u_i(t) = y_{i-1}(t) \quad \text{pour } i=2, \dots, N. \quad (3.2)$$

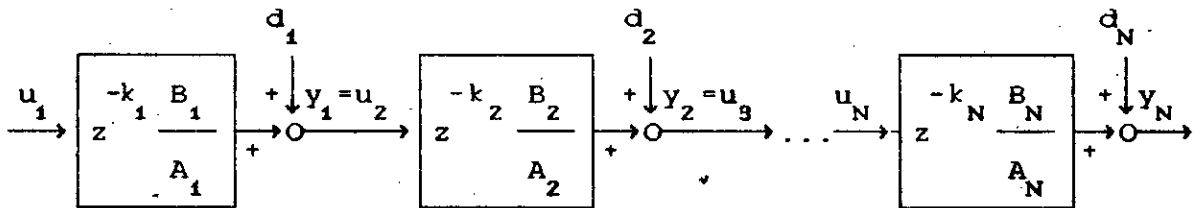


Fig.3.4 : Système de N-boucles en cascade

$y_N(t)$ : sortie à contrôler.

$u_1(t)$ : entrée de commande disponible.

$y_i(t)$ ,  $i=1, \dots, N-1$  : sorties intermédiaires mesurables.

$d_i(t)$ : perturbation aléatoire.

Cette perturbation est donnée par le modèle :

$$d_i(t) = \frac{C_i}{A_i} \xi(t) \quad (3.3)$$

$\xi(t)$  : bruit blanc discret.

$A_i, B_i, C_i$ ,  $i=1, \dots, N$ : polynômes en  $z^{-1}$ , ayant des coefficients supposés constants mais inconnus.

Les racines de  $C_i$  doivent être à l'intérieur du cercle unité.

Ces polynômes sont donnés par :

$$A_i = 1 + \sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j} z^{-j} ; \quad B_i = \sum_{j=0}^{n_i} b_{i,j} z^{-j} ; \quad C_i = 1 + \sum_{j=1}^{n_i} c_{i,j} z^{-j}. \quad (3.4)$$

$k_i$  et  $n_i$  sont respectivement le temps de retard et l'ordre de chaque sous-système  $i$ .

Le but de ce contrôle en cascade est de donner un système globale en boucle fermée de la forme (voir §2.4.3) :

$$y_N(t) = z^{-k} Mw(t) \quad (3.5)$$

où k est le temps de retard total du système:

$$k = k1_N \quad (3.6)$$

avec:

$$k1_i = \sum_{j=1}^i k_j \quad (3.7)$$

M étant le modèle par lequel les performances désirées du système sont spécifiées. M est une fonction de transfert rationnelle en  $z^{-1}$  choisie de sorte que :

$$M = \frac{1}{S} ; S = L_N \quad (3.8)$$

avec :

$$L_i = \frac{LN_i}{LD_i} = \prod_{j=1}^i S_j ; S_j = \frac{SN_j}{SD_j} \quad (3.9)$$

Cet objectif doit être atteint par une extension du contrôle auto-ajustable avec modèle de référence des systèmes mono-boucle développé au paragraphe 2.4.3, à des systèmes en cascade. Plusieurs manières de faire l'extension des méthodes auto-ajustables mono-boucle pour contrôler des systèmes en cascade sont envisageables. Certaines d'entre elles sont prises en compte pour leur simplicité, d'autres pour leurs performances.

### 3.3 CONTROLE MONO-BOUCLE

La façon la plus simple de commander un système en cascade est d'adopter une stratégie de contrôle auto-ajustable qui ignore les signaux intermédiaires  $y_i(t)$ , pour  $i=1, \dots, N-1$ . Le système est considéré comme étant mono-boucle, de sortie  $y_N(t)$  et d'entrée  $u_1(t)$ . Compte tenu de l'équation (3.2), ce système peut être représenté par les équations (2.4) et (2.5), avec :

$$y(t) = y_N(t) ; u(t) = u_1(t) ; d(t) = d1_N(t) \quad (3.10)$$

$$A = A1_N ; B = B1_N ; C = C1_N \quad (3.11)$$

ou :

$$A1_i = \prod_{j=1}^i A_j ; B1_i = \prod_{j=1}^i B_j \quad (3.12)$$

$d1_i(t)$  est un signal de perturbation issu de tous les sous-systèmes précédant le  $i^{\text{ème}}$ , et qui s'ajoute au signal  $y_i(t)$ .

Ce signal est donné par la forme récursive suivante :

$$d1_i(t) = \begin{cases} d_1(t) & \text{pour } i=1 \\ \frac{B_i}{A_i} d1_{i-1}(t-k_i) + d_i(t) & \text{pour } i=2, \dots, N \end{cases} \quad (3.13)$$

$C1_i$  est un polynôme en  $z^{-1}$  qui caractérise la perturbation  $d1_i(t)$ ; il est donné par la forme récursive suivante :

$$C1_i = \begin{cases} C_1 & \text{pour } i=1 \\ z^{-k_i} B_i C1_{i-1} + C_i A1_{i-1} & \text{pour } i=2, \dots, N \end{cases} \quad (3.14)$$

Le polynôme C défini par (3.11) et (3.14) doit avoir toutes ses racines à l'intérieur du cercle unité [4].

D'après (3.6) et (3.7), le temps de retard du système est donné par :

$$k = \sum_{j=1}^N k_j \quad (3.15)$$

alors que son ordre est :

$$n = \sup \left[ \deg(A), \deg(B), \deg(C) \right] = \sum_{i=1}^N n_i + \sum_{i=2}^N k_i \quad (3.16)$$

L'auto-ajustage des paramètres du contrôleur et le calcul de la commande, qui ramène la sortie du système au modèle donné par l'équation (3.5), se fait alors par les mêmes procédures que dans le cas mono-boucle, décrit en détail au paragraphe 2.4.



L'algorithme utilisé est le suivant :

- A l'instant  $t_0 = 0$ , Initialisation

- $\hat{\theta}(0) = [0, \dots, 0]$ .
- $P(0) = p_0 I$ ,  $p_0 > 0$ .

- A chaque instant d'échantillonnage  $t > t_0$

1. Mesure de la sortie du système  $y(t)$ .
2. Calcul de la sortie auxiliaire  $\phi_y(t) = Sy(t)$ .
3. Estimation des paramètres du contrôleur, donnés par le modèle prédictif (équations (2.56) et (2.57)), en utilisant la méthode des MCE:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t-k) [\phi(t) - \hat{x}^T(t-k) \hat{\theta}(t-1)]$$

$$\left[ \begin{array}{l} \hat{\theta}^T = [\hat{g}_0, \dots, \hat{g}_{ng}; \hat{f}_0, \dots, \hat{f}_{nf}; -\hat{c}_1, \dots, -\hat{c}_n] \\ \text{coefficients de } \hat{G}_i, \hat{F}_i \text{ et } \hat{C}_i \end{array} \right]$$

4. Calcul de la commande :

$$u(t) = \frac{\hat{C}w(t) - \hat{F}y(t)/SD}{\hat{G}}$$

5. Envoi de la commande  $u(t)$  à l'entrée du système.
6. Mise à jour et sauvegarde des vecteurs et matrices de données; pour les utiliser dans les futures itérations :

$$\hat{x}^T(t) = [u(t), \dots, u(t-ng); y_s(t), \dots, y_s(t-nf); \hat{\phi}_y^*(t+k-1/t-1), \dots, \hat{\phi}_y^*(t+k-n/t-n)]$$

$$K(t) = \frac{P(t-1)x(t)}{\beta + \hat{x}^T(t)P(t-1)x(t)}$$

$$P(t) = \frac{1}{\beta} \left[ I - K(t)\hat{x}^T(t) \right] P(t-1)$$

$$\hat{\phi}_y^*(t+k/t) = \hat{x}^T(t) \hat{\theta}(t).$$

7. Refaire les étapes (1) jusqu'à (6).

### 3.4 CONTROLE EN CASCADE

La façon la plus sûre et la plus performante de commander un système en cascade est d'adopter un schéma de contrôle qui tient compte des variables intermédiaires  $y_i(t)$  pour  $i=1, \dots, N-1$  et qui ramène la sortie du système  $y_N(t)$  au modèle donné par l'équation (3.5).

D'après l'équation (2.64), lorsqu'on considère  $Q=0$ ,  $R=1$  et  $S=1/M$ , la  $(i-1)^{\text{ème}}$  boucle fermée en cascade donne le système :

$$y_{i-1}(t) = z^{-k_{i-1}} M_{i-1} w_{i-1}(t) + M_{i-1} E_{i-1} \xi(t) \quad (3.17)$$

$M_{i-1}$  étant le modèle par lequel les performances de la  $i^{\text{ème}}$  boucle sont spécifiées.  $w_i(t)$  est la trajectoire du  $i^{\text{ème}}$  contrôleur; avec:

$$M_{i-1} = \frac{1}{L_i} \quad (3.18)$$

Le contrôle de la  $i^{\text{ème}}$  boucle, qui est considéré comme boucle externe, se fait selon l'importance de la dynamique de la  $(i-1)^{\text{ème}}$  boucle, considérée elle, comme boucle interne. Cette dynamique, caractérisée par le modèle  $M_{i-1}$ , peut être négligée devant celle de la boucle externe.

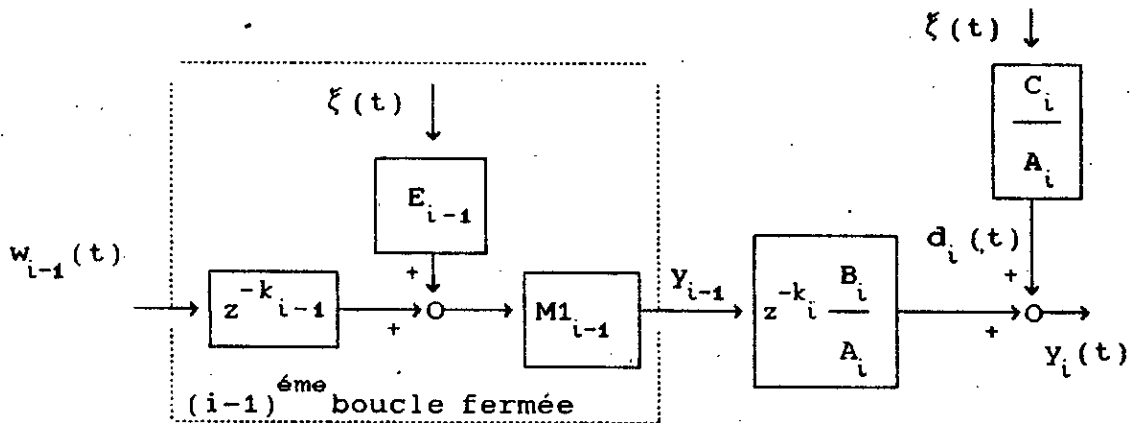


Fig. 3.5: Système en boucle ouverte

La synthèse de la commande pour la  $i^{\text{ème}}$  boucle de contrôle est conçue sur la base du système en boucle ouverte, représenté dans la figure 3.5.

### 3.4.1 Contrôle avec dynamique de boucle interne négligée

Dans le cas où les dynamiques des boucles internes sont négligeables devant celles des boucles externes, ce qui est le cas quand les sous-systèmes sont ordonnés tels que leurs constantes de temps augmentent. La synthèse de la commande pour la  $i^{\text{ème}}$  boucle est faite comme si  $M1_{i-1} \simeq 1$ .

Compte tenu des équations (3.1), (3.2), (3.3) et (3.17), le système en boucle ouverte est donné par:

$$y_i(t) = \frac{B2_i}{A2_i} w_{i-1}(t - k1_i) + \frac{C2_i}{A2_i} \xi(t). \quad (3.19)$$

$A2_i$  et  $B2_i$  sont des polynômes en  $z^{-1}$ , donnés par :

$$A2_i = A_i \quad ; \quad B2_i = B_i. \quad (3.20)$$

$C2_i$  est un polynôme en  $z^{-1}$ , qui caractérise la perturbation. Il est donné par la forme récursive suivante:

$$C2_i = \begin{cases} C_1 & \text{pour } i=1 \\ z^{-k_i} E2_{i-1} \cdot B_i + C_i & \text{pour } i=2, \dots, N \end{cases} \quad (3.21)$$

Le polynôme  $C2_i$  doit avoir toutes ses racines à l'intérieur du cercle unité.

Le polynôme en  $z^{-1}$ ,  $E_i$  donné en (3.17), est égal à  $E2_i$ , avec :

$$E2_i = 1 + \sum_{j=1}^{ne_i} e2_{i,j} z^{-j} \quad (3.22)$$

Le polynôme  $E2_i$  est solution de l'identité :

$$\begin{cases} \frac{C_1 \cdot S_1}{A_1} = E2_1 + z^{-k_1} \frac{F2_1}{A_1 \cdot SD_1} & \text{pour } i=1 \\ \frac{C2_i \cdot L_i}{A2_i} = E2_i + z^{-k1_i} \frac{F2_i}{A2_i \cdot LD_i} & \text{pour } i=2, \dots, N \end{cases} \quad (3.23)$$

et de degré :

$$ne_i = \deg(E2_i) = k1_i - 1. \quad (3.24)$$

L'ordre de chaque système i est :

$$n1_i = \sup \left[ \deg(A2_i), \deg(B2_i), \deg(C2_i) \right] = n_i + k1_i - 1. \quad (3.25)$$

### a/ Prédiction

On définit la sortie auxiliaire  $\phi_{yi}(t)$  du  $i^{\text{ème}}$  sous-système par :

$$\phi_{yi}(t) = L_i y_i(t) \quad (3.26)$$

d'après le paragraphe 2.4.1, la sortie auxiliaire,  $\phi_{yi}(t)$  peut être écrite sous la forme prédictive suivante :

$$\phi_{yi}(t+k1_i) = \phi_{yi}^*(t+k1_i/t) + \tilde{\phi}_{yi}(t+k1_i) \quad (3.27)$$

$\phi_{yi}^*(t+k1_i/t)$  est la prédiction à l'instant t de  $\phi_{yi}(t+k1_i)$ ;

$\tilde{\phi}_{yi}(t+k1_i)$  est l'erreur de prédiction.

$$\phi_{yi}^*(t+k1_i/t) = \frac{F2_i}{C2_i \cdot LD_i} y_i(t) + \frac{G2_i}{C2_i} w_{i-1}(t) \quad (3.28)$$

$$\tilde{\phi}_{yi}(t+k1_i) = E2_i \xi(t+k1_i) \quad (3.29)$$

$$G2_i = E2_i B2_i = \sum_{j=0}^{ng_i} g2_{i,j} z^{-j} ; ng_i = \deg(G2_i) = n1_i + k1_i - 1. \quad (3.30)$$

Les polynômes  $E2_i$  et  $F2_i$  sont des solutions de l'identité (3.23).  $E2_i$  est donné par (3.22), alors que,  $F2_i$  est donné par :

$$F2_i = \sum_{j=0}^{nf_i} f2_{i,j} z^{-j} \quad (3.31)$$

avec :

$$nf_i = \deg(F_i) = \sup \left[ \left[ n1_i - k1_i + \deg(LN_i) \right], \left[ n1_i - 1 + \deg(LD_i) \right] \right]. \quad (3.32)$$

L'équation du prédicteur de  $\phi_{yi}(t)$  à l'instant  $(t-k1_i)$  est :

$$\phi_{yi}^*(t/t-k1_i) = \frac{F2_i}{C2_i \cdot LD_i} y_i(t-k1_i) + \frac{G2_i}{C2_i} w_{i-1}(t-k1_i). \quad (3.33)$$

La forme récurrente de (3.33) est :

$$\begin{aligned} \phi_{yi}^*(t/t-k1_i) = & \sum_{j=0}^{n1_i} f2_{i,j} y_i(t-k1_i-j)/LD_i + \sum_{j=0}^{ng_i} g2_{i,j} w_{i-1}(t-k1_i-j) \\ & - \sum_{j=1}^{n1_i} c2_{i,j} \phi_{yi}^*(t-j/t-k1_i-j) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Définissons les vecteurs :

$$\vartheta_i^T = [g2_{i,0}, \dots, g2_{i,ng_i}; f2_{i,0}, \dots, f2_{i,n1_i}; -c2_{i,1}, \dots, -c2_{i,n1_i}] \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} x_i^T(t) = & [w_{i-1}(t), \dots, w_{i-1}(t-ng_i); y_i(t)/LD_i, \dots, y_i(t-n1_i)/LD_i; \\ & \phi_{yi}^*(t+k1_i-1/t-1), \dots, \phi_{yi}^*(t+k1_i-n1_i/t-n1_i)] \end{aligned} \quad (3.36)$$

Alors, il convient d'écrire :

$$\phi_{yi}^*(t/t-k1_i) = x_i^T(t-k1_i) \vartheta_i \quad (3.37)$$

$$\phi_{yi}(t) = x_i^T(t-k1_i) \vartheta_i + \tilde{\phi}_{yi}(t) \quad (3.38)$$

## b/ Génération de la commande et auto-ajustage

Dans un schéma de contrôle en cascade (voir paragraphe 3.2), chaque contrôleur  $i$ ,  $i=1, \dots, N$ ; génère une commande  $u_i(t)$  qui servira de trajectoire à la  $(i-1)^{\text{ème}}$  boucle de contrôle. Ce qui signifie que :

$$w_{i-1}(t) = u_i(t) \quad \text{pour } i=1, \dots, N. \quad (3.39)$$

La loi de commande, pour la  $i^{\text{ème}}$  boucle de contrôle, est spécifiée en choisissant le signal de commande,  $u_i(t) = w_{i-1}(t)$ , de façon à minimiser la variance de  $\phi_{yi}(t+k1_i)$  autour de la trajectoire

$w_i(t)$ . Cette variance est définie par :

$$I_i = E \left[ \left( \phi_{y_i}(t+k1_i) - w_i(t) \right)^2 \right]. \quad (3.40)$$

D'après (2.61), la fonction  $I_i$  est minimale quand :

$$\phi_{y_i}^*(t+k1_i/t) = w_i(t). \quad (3.41)$$

Tenant compte des équations (3.28) et de (3.39) le signal de commande est donné par :

$$w_{i-1}(t) = \frac{C2_i w_i(t) - F2_i y_i(t)/LD_i}{G2_i}. \quad (3.42)$$

Quand les paramètres du système sont inconnus, on les estime par l'algorithme d'auto-ajustage suivant [8,9]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_i^T(t) = [w_{i-1}(t), \dots, w_{i-1}(t-ng_i); y_i(t)/LD_i, \dots, y_i(t-nf_i)/LD_i; \\ \hat{\phi}_{y_i}^*(t+k1_i-1/t-1), \dots, \hat{\phi}_{y_i}^*(t+k1_i-n1_i/t-n1_i)] \end{array} \right. \quad (3.43a)$$

$$\hat{\vartheta}_i(t) = \hat{\vartheta}_i(t-1) + K_i(t-k1_i) \left[ \phi_{y_i}(t) - \hat{x}_i^T(t-k1_i) \hat{\vartheta}_i(t-1) \right] \quad (3.43b)$$

$$K_i(t) = \frac{P_i(t-1) \hat{x}_i(t)}{\beta + \hat{x}_i^T(t) P_i(t-1) \hat{x}_i(t)} \quad (3.43c)$$

$$P_i(t) = \frac{1}{\beta} \left[ I - K_i(t) \hat{x}_i^T(t) \right] P_i(t-1); P_i(0) = p_{i,0} \quad I > 0 \quad (3.43d)$$

$$\hat{\phi}_{y_i}^*(t+k1_i/t) = \hat{x}_i^T(t) \hat{\vartheta}_i(t) \quad (3.43e)$$

La loi de commande est alors donnée par l'équation:

$$w_{i-1}(t) = \frac{\hat{C}2_i w_i(t) - \hat{F}2_i y_i(t)/LD_i}{\hat{G}2_i}; \quad (3.44)$$

où les coefficients des polynômes  $\hat{C}2_i$ ,  $\hat{F}2_i$  et  $\hat{G}2_i$  sont des

éléments du vecteur  $\hat{\vartheta}_i(t)$ .

### c/ Algorithme

- A l'instant  $t_0 = 0$ , initialisation

De  $i=1, \dots, N$  : (N étant le nombre de sous-systèmes)

$$\cdot \hat{\vartheta}_i(0) = [0, \dots, 0].$$

$$\cdot P_i(0) = p_{i,0} I, \quad p_{i,0} > 0.$$

- A chaque instant d'échantillonnage  $t > t_0$

1. Estimation des paramètres des N contrôleurs :

De  $i=1, \dots, N$  :

• Mesure de la sortie du système i,  $y_i(t)$ .

• Calcul de la sortie auxiliaire  $\phi_{y_i}(t) = L_i y_i(t)$ .

• Estimation des paramètres du  $i^{\text{ème}}$  contrôleur, donnés par le modèle prédictif (équations (3.37) et (3.38)), de la  $i^{\text{ème}}$  sortie auxiliaire, en utilisant la méthode des MCE :

$$\hat{\vartheta}_i(t) = \hat{\vartheta}_i(t-1) + K_i(t-k1_i) \left[ \phi_{y_i}(t) - \hat{x}_i^T(t-k1_i) \hat{\vartheta}_i(t-1) \right]$$

$\left[ \hat{\vartheta}_i(t), \text{ contient les coefficients de } \hat{C2}_i, \hat{F2}_i \text{ et } \hat{G2}_i \right]$

2. Calcul de la commande :

$$\cdot w_N(t) = w(t).$$

• De  $i = N, \dots, 1$  :

$$w_{i-1}(t) = \frac{\hat{C2}_i w_i(t) - \hat{F2}_i y_i(t) / LD_i}{\hat{G2}_i}$$

$$\cdot u(t) = u_1(t) = w_0(t).$$

3. Envoi de la commande  $u(t)$  à l'entrée du système.

4. Mise à jour et sauvegarde des vecteurs et matrices de données; pour les prochaines itérations :

De  $i = 1, \dots, N$  :

$$\begin{aligned} \cdot \hat{x}_i^T(t) &= [w_{i-1}(t), \dots, w_{i-1}(t-ng_i); y_i(t)/LD_i, \dots, y_i(t-nf_i)/LD_i; \\ &\quad \hat{\phi}_{y_i}^*(t+k1_i-1/t-1), \dots, \hat{\phi}_{y_i}^*(t+k1_i-n1_i/t-n1_i)] \\ \cdot K_i(t) &= \frac{P_i(t-1)\hat{x}_i(t)}{\beta + \hat{x}_i^T(t)P_i(t-1)\hat{x}_i(t)} \\ \cdot P_i(t) &= \frac{1}{\beta} \left[ I - K_i(t)\hat{x}_i^T(t) \right] P_i(t-1) \\ \cdot \hat{\phi}_{y_i}^*(t+k1_i/t) &= \hat{x}_i^T(t)\hat{\theta}_i(t) \end{aligned}$$

5. Refaire les étapes (1) jusqu'à (4).

### 3.4.2 Contrôle avec dynamique de boucle interne non-négligée

Dans le cas où les dynamiques des boucles internes ne sont pas négligeables devant celles des boucles externes, l'utilisation de l'approche précédente risque de donner de mauvais résultats et même des divergences. Ces problèmes peuvent être évités en tenant compte de la dynamique de la boucle interne lors de la synthèse de la commande pour la boucle externe. Dans ce cas la  $i^{\text{ème}}$  boucle de contrôle est conçue sur la base du système en boucle ouverte suivant :

$$y_i(t) = z^{-k1_i} \frac{B3_i}{A3_i} w_{i-1}(t) + \frac{C3_i}{A3_i} \xi(t) \quad (3.45)$$

$A3_i, B3_i$  et  $C3_i$  sont des polynômes en  $z^{-1}$  donnés par :

$$A3_i = \frac{A_i LN_{i-1}}{LN_{i-1}(0)} \quad (3.46)$$

$$B3_i = \frac{B_i LD_{i-1}}{LN_{i-1}(0)} \quad (3.47)$$



$$C3_i = \begin{cases} C_1 & \text{pour } i=1 \\ \frac{z^{-k_i} LD_{i-1} E_{i-1} B_i + C_i LN_{i-1}}{LN_{i-1}(0)} & \text{pour } i=2, \dots, N \end{cases} \quad (3.48)$$

Le polynôme  $C3_i$  doit avoir toutes ses racines à l'intérieur du cercle unité.

Le polynôme en  $z^{-1}$ ,  $E_i$  défini dans (3.17), est égal dans ce cas à  $E3_i$ , avec :

$$E3_i = 1 + \sum_{j=1}^{ne_i} e3_{i,j} z^{-j}. \quad (3.49)$$

Le polynôme  $E3_i$  est solution de l'identité :

$$\begin{cases} \frac{C_1 \cdot S_1}{A_1} = E3_1 + z^{-k_1} \frac{F3_1}{A_1 \cdot SD_1} & \text{pour } i=1 \\ \frac{C3_i \cdot L_i}{A3_i} = E3_i + z^{-k_i} \frac{F3_i}{A3_i \cdot LD_i} & \text{pour } i=2, \dots, N \end{cases} \quad (3.50)$$

et de degré :

$$ne_i = \deg(E3_i) = k_i - 1. \quad (3.51)$$

L'ordre de chaque système  $i$  est :

$$\begin{aligned} n1_i &= \sup \left[ \deg(A3_i), \deg(B3_i), \deg(C3_i) \right] \\ n1_i &= n_i + \sup \left[ \deg(LN_{i-1}), \deg(LD_{i-1}) + k_i - 1 \right] \end{aligned} \quad (3.52)$$

#### a/ Prédiction

On définit la sortie auxiliaire  $\phi_{y_i}(t)$  du sous-système  $i$  par :

$$\phi_{y_i}(t) = L_i y_i(t) \quad (3.53)$$

d'après le paragraphe 2.4.1, la sortie auxiliaire,  $\phi_{y_i}(t)$  peut être écrite sous la forme prédictive suivante :

$$\phi_{y_i}(t+k1_i) = \phi_{y_i}^*(t+k1_i/t) + \tilde{\phi}_{y_i}(t+k1_i) \quad (3.54)$$

$\phi_{y_i}^*(t+k1_i/t)$  est la prédiction à l'instant  $t$  de  $\phi_{y_i}(t+k1_i)$ ;

$\tilde{\phi}_{y_i}(t+k1_i)$  est l'erreur de prédiction.

$$\phi_{y_i}^*(t+k1_i/t) = \frac{F3_i}{C3_i \cdot LD_i} y_i(t) + \frac{G3_i}{C3_i} w_{i-1}(t) \quad (3.55)$$

$$\tilde{\phi}_{y_i}(t+k1_i) = E3_i \xi(t+k1_i) \quad (3.56)$$

$$G3_i = E3_i B3_i = \sum_{j=0}^{ng_i} g3_{i,j} z^{-j} ; ng_i = \deg(G3_i) = n1_i + k1_i - 1 \quad (3.57)$$

Les polynômes  $E3_i$  et  $F3_i$  sont des solutions de l'identité (3.23).

$E3_i$  est donné par (3.22), alors que  $F3_i$  est donné par :

$$F3_i = \sum_{j=0}^{nf_i} f3_{i,j} z^{-j} \quad (3.58)$$

avec :

$$nf_i = \deg(F3_i) = \sup \left[ \left[ n1_i - k1_i + \deg(LN_i) \right], \left[ n1_i - 1 + \deg(LD_i) \right] \right] \quad (3.59)$$

L'équation du prédicteur de  $\phi_{y_i}(t)$  à l'instant  $(t-k1_i)$  est :

$$\phi_{y_i}^*(t/t-k1_i) = \frac{F3_i}{C3_i \cdot LD_i} y_i(t-k1_i) + \frac{G3_i}{C3_i} w_{i-1}(t-k1_i) \quad (3.60)$$

La forme récurrente de (3.60) est :

$$\begin{aligned} \phi_{y_i}^*(t/t-k1_i) &= \sum_{j=0}^{nf_i} f3_{i,j} y_i(t-k1_i-j) / LD_i + \sum_{j=0}^{ng_i} g3_{i,j} w_{i-1}(t-k1_i-j) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n1_i} c3_{i,j} \phi_{y_i}^*(t-j/t-k1_i-j) \quad (3.61) \end{aligned}$$

Définissons les vecteurs :

$$\vartheta_i^T = [g3_{i,0}, \dots, g3_{i,ng_i}; f3_{i,0}, \dots, f3_{i,nf_i}; -c3_{i,1}, \dots, -c3_{i,n1_i}] \quad (3.62)$$

$$x_i^T(t) = [w_{i-1}(t), \dots, w_{i-1}(t-ng_i); y_i(t)/LD_i, \dots, y_i(t-nf_i)/LD_i; \phi_{yi}^*(t+k1_i-1/t-1), \dots, \phi_{yi}^*(t+k1_i-n1_i/t-n1_i)] \quad (3.63)$$

Alors, il convient d'écrire :

$$\phi_{yi}^*(t/t-k1_i) = x_i^T(t-k1_i)\vartheta_i \quad (3.64)$$

$$\phi_{yi}(t) = x_i^T(t-k1_i)\vartheta_i + \tilde{\phi}_{yi}(t) \quad (3.65)$$

### b/ Génération de la commande et auto-ajustage

Dans un schéma de contrôle en cascade (voir paragraphe 3.2, chaque contrôleur  $i$ ,  $i=1, \dots, N$ , génère une commande  $u_i(t)$  qui servira de trajectoire à la  $(i-1)$ <sup>ème</sup> boucle de contrôle. Ce qui signifie que :

$$w_{i-1}(t) = u_i(t) \quad \text{pour } i=1, \dots, N. \quad (3.66)$$

La loi de commande, pour la  $i$ <sup>ème</sup> boucle de contrôle, est spécifiée en choisissant le signal de commande,  $u_i(t) = w_{i-1}(t)$ , de façon à minimiser la variance de  $\phi_{yi}(t+k1_i)$  autour de la trajectoire  $w_i(t)$ . cette variance est définie par :

$$I_i = E \left[ \left[ \phi_{yi}(t+k1_i) - w_i(t) \right]^2 \right]. \quad (3.67)$$

D'après (2.61), la fonction  $I_i$  est minimale quand :

$$\phi_{yi}^*(t+k1_i/t) = w_i(t). \quad (3.68)$$

En tenant compte de (3.28) et de (3.39) le signal de commande est donné par :

$$w_{i-1}(t) = \frac{C3_i w_i(t) - F3_i y_i(t)/LD_i}{G3_i} \quad (3.69)$$

Quand les paramètres du système sont inconnus, on les estime par l'algorithme d'auto-ajustage suivant [8,9]:

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{x}_i^T(t) &= [w_{i-1}(t), \dots, w_{i-1}(t-ng_i); y_i(t)/LD_i, \dots, y_i(t-nf_i)/LD_i; \\ &\quad \hat{\phi}_{y_i}^*(t+k1_i-1/t-1), \dots, \hat{\phi}_{y_i}^*(t+k1_i-n1_i/t-n1_i)] \quad (3.70a) \\ \hat{\hat{s}}_i(t) &= \hat{\hat{s}}_i(t-1) + K_i(t-k1_i) \left[ \hat{\phi}_{y_i}(t) - \hat{x}_i^T(t-k1_i) \hat{\hat{s}}_i(t-1) \right] \quad (3.70b) \\ K_i(t) &= \frac{P_i(t-1) \hat{x}_i(t)}{\beta + \hat{x}_i^T(t) P_i(t-1) \hat{x}_i(t)} \quad (3.70c) \\ P_i(t) &= \frac{1}{\beta} \left[ I - K_i(t) \hat{x}_i^T(t) \right] P_i(t-1); P_i(0) = p_{i,0} I > 0 \quad (3.70d) \\ \hat{\phi}_{y_i}^*(t+k1_i/t) &= \hat{x}_i^T(t) \hat{\hat{s}}_i(t) \quad (3.70e) \end{aligned} \right.$$

La loi de commande est alors donnée par l'équation:

$$w_{i-1}(t) = \frac{\hat{C}_3 w_i(t) - \hat{F}_3 y_i(t)/LD_i}{\hat{G}_3} \quad (3.71)$$

où les coefficients des polynômes  $\hat{C}_3$ ,  $\hat{F}_3$  et  $\hat{G}_3$  sont des éléments du vecteur  $\hat{\hat{s}}_i(t)$ .

### c/ Algorithme

- A l'instant  $t_0 = 0$ , initialisation

De  $i=1, \dots, N$ :

- $\hat{\hat{s}}_i(0) = [0, \dots, 0]$ .
- $P_i(0) = p_{i,0} I$ ,  $p_{i,0} > 0$ .

- A chaque instant d'échantillonnage  $t > t_0$

1. Estimation des paramètres des N contrôleurs :

De  $i=1, \dots, N$ :

- Mesure de la sortie du système  $i$ ,  $y_i(t)$ .
- Calcul de la sortie auxiliaire  $\hat{\phi}_{y_i}(t) = L_i y_i(t)$ .

- Estimation des paramètres du  $i^{\text{ème}}$  contrôleur, donnés par le modèle prédictif (équations (3.64) et (3.65)), de la  $i^{\text{ème}}$  sortie auxiliaire, en utilisant la méthode des MCE :

$$\hat{\vartheta}_i(t) = \hat{\vartheta}_i(t-1) + K_i(t-k1_i) \left[ \phi_{y_i}(t) - \hat{x}_i^T(t-k1_i) \hat{\vartheta}_i(t-1) \right]$$

$\left[ \hat{\vartheta}_i(t), \text{ contient les coefficients de } \hat{C3}_i, \hat{F3}_i \text{ et } \hat{G3}_i \right]$

2. Calcul de la commande :

- $w_N(t) = w(t).$

- De  $i = N, \dots, 1$  :

$$w_{i-1}(t) = \frac{\hat{C3}_i w_i(t) - \hat{F3}_i y_i(t) / LD_i}{\hat{G3}_i}$$

- $u(t) = u_1(t) = w_0(t).$

3. Envoi de la commande  $u(t)$  à l'entrée du système.

4. Mise à jour et sauvegarde des vecteurs et matrices de données; pour les utiliser dans les futures itérations :

De  $i = 1, \dots, N$  :

- $\hat{x}_i^T(t) = [w_{i-1}(t), \dots, w_{i-1}(t-ng_i); y_i(t)/LD_i, \dots, y_i(t-nf_i)/LD_i; \hat{\phi}_{y_i}^*(t+k1_i-1/t-1), \dots, \hat{\phi}_{y_i}^*(t+k1_i-n1_i/t-n1_i)]$

- $K_i(t) = \frac{P_i(t-1) \hat{x}_i(t)}{\beta + \hat{x}_i^T(t) P_i(t-1) \hat{x}_i(t)}$

- $P_i(t) = \frac{1}{\beta} \left[ I - K_i(t) \hat{x}_i^T(t) \right] P_i(t-1)$

- $\hat{\phi}_{y_i}^*(t+k1_i/t) = \hat{x}_i^T(t) \hat{\vartheta}_i(t)$

5. Refaire les étapes (1) jusqu'à (4).

### 3.5 CONTROLE PAR "LA METHODE DU PREDICTEUR RECURSIF"

Si des cas particuliers de systèmes en cascade se présentent dans la pratique, il est préférable d'adopter des méthodes de contrôle qui tiennent compte des particularités de ces systèmes, et qui améliorent leurs performances, comparées à celles obtenues par des méthodes standards.

Considérons un cas particulier du système défini par les équations (3.1) à (3.4); où les temps de retard des sous-systèmes sont égaux :

$$k_i = d \quad \text{pour} \quad i=1, \dots, N. \quad (3.72)$$

De même, le système en boucle fermée doit être amené à suivre le modèle défini par l'équation (3.5), avec :

$$S_i = T = \frac{TN}{TD} \quad \text{pour} \quad i=1, \dots, N. \quad (3.73)$$

De ce fait, et d'après les équations de (3.5) à (3.9), le système en boucle fermée, doit réaliser les performances spécifiées par le modèle :

$$y_N(t) = z^{-N.d} \frac{1}{T^N} w(t). \quad (3.74)$$

Le contrôle de ce système particulier, peut être réalisé par une des méthodes précédemment présentées. Seulement pour ce cas, on développera une nouvelle méthode, qui est moins complexe et plus flexible que les précédentes.

Cette nouvelle méthode, "*Méthode du prédicteur récursif*", est une généralisation de celle de GAWTHROP [15]. En effet, la version présentée dans [15], est destinée aux systèmes en cascade, continus, non-perturbés et leurs sous systèmes ont des temps de retards nuls. Alors que celle que nous présenterons ici est destinée aux systèmes en cascade, discrets, pouvant être perturbés et dont les temps de retards peuvent être non-nuls mais égaux.

### 3.5.1 Prédiction

Soient les sorties auxiliaires définies par la fonction :

$$\phi_{i,j}(t) = T^i \cdot y_j(t) \quad \text{pour } j=1, \dots, N, \text{ et } i \leq j. \quad (3.75)$$

On remarque que :

$$\phi_{0,j}(t) = y_j(t) \quad \text{pour } j=1, \dots, N. \quad (3.76)$$

$$\phi_{0,0}(t) = y_0(t) = u_1(t). \quad (3.77)$$

Pour  $i=1$ , on obtient la sortie auxiliaire de chaque sous système individuel, défini par (3.1) et (3.2) :

$$\phi_{1,j}(t+d) = T \cdot y_j(t+d); \quad (3.78)$$

D'après (§2.2.2) et (§2.4.1) la sortie auxiliaire définie par (3.78), peut être réécrite sous la forme prédictive suivante :

$$\phi_{1,j}(t+d) = \phi_{1,j}^*(t+d/t) + \tilde{\phi}_{1,j}(t+d); \quad (3.79)$$

où  $\phi_{1,j}^*(t+d/t)$  est la prédiction de  $\phi_{1,j}(t+d)$  à l'instant  $t$ ;  $\tilde{\phi}_{1,j}(t+d)$  est l'erreur de prédiction. Si  $F_j$  et  $E_j$  sont des polynômes en  $z^{-1}$ , solutions de l'identité :

$$\frac{C_j \cdot T}{A_j} = E_j + z^{-d} \frac{F_j}{A_j \cdot TD} \quad \text{pour } j=1, \dots, N \quad (3.80)$$

qui sont donnés par :

$$E_i = 1 + \sum_{j=1}^{ne_i} e_{i,j} z^{-j} \quad ; \quad ne_i = \deg(E_i) = k_i - 1$$

$$F_i = \sum_{j=0}^{nf_i} f_{i,j} z^{-j} ;$$

$$nf_i = \deg(F_i) = \sup \left[ \left( n_i - k_i + \deg(TN_i) \right), \left( n_i - 1 + \deg(TD_i) \right) \right]$$

alors :

$$\phi_{1,j}^*(t+d/t) = \frac{F_j}{C_j \cdot TD} y_j(t) + \frac{G_j}{C_j} y_{j-1}(t) \quad (3.81)$$

$$\tilde{\phi}_{1,j}(t+d) = E_j \xi(t+d) \quad (3.82)$$

avec :

$$G_i = E_i B_i = \sum_{j=0}^{ng_i} g_{i,j} z^{-j} ; ng_i = \deg(G_i) = n_i + k_i - 1. \quad (3.83)$$

L'équation du prédicteur de  $\phi_{1,j}(t)$  à l'instant  $(t-d)$  est :

$$\phi_{1,j}^*(t/t-d) = \frac{F_j}{C_j \cdot TD} y_j(t-d) + \frac{G_j}{C_j} y_{j-1}(t-d) \quad (3.84)$$

La forme récurrente de (3.84) est :

$$\begin{aligned} \phi_{1,j}^*(t/t-d) = & \sum_{k=0}^{nf_j} f_{j,k} y_j(t-d-k)/TD + \sum_{k=0}^{ng_j} g_{j,k} y_{j-1}(t-d-k) \\ & - \sum_{k=1}^{n_j} c_{j,k} \phi_{1,j}^*(t-k/t-d-k) \end{aligned} \quad (3.85)$$

Définissons les vecteurs:

$$\vartheta_j^T = [g_{j,0}, \dots, g_{j,ng_j} ; f_{j,0}, \dots, f_{j,nf_j} ; -c_{j,1}, \dots, -c_{j,n_j}] \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} x_j^T(t) = & [y_{j-1}(t), \dots, y_{j-1}(t-ng_j) ; y_j(t)/TD, \dots, y_j(t-nf_j)/TD ; \\ & \phi_{1,j}^*(t+d-1/t-1), \dots, \phi_{1,j}^*(t+d-n_j/t-n_j)] \end{aligned} \quad (3.87)$$

Alors, il convient d'écrire :

$$\phi_{1,j}^*(t/t-d) = x_j^T(t-d) \vartheta_j \quad (3.88)$$

$$\phi_{1,j}(t) = x_j^T(t-d) \vartheta_j + \tilde{\phi}_{1,j}(t) \quad (3.89)$$



D'une manière générale, la forme récursive de  $\phi_{i,j}(t+i.d)$  est donnée par :

$$\phi_{i,j}(t+i.d) = T^i \cdot y_j(t+i.d) = T^{i-1} z^{(i-1).d} T \cdot y_j(t+d)$$

$$\phi_{i,j}(t+i.d) = T^{i-1} z^{(i-1).d} \left[ \frac{F_j}{C_j \cdot TD} y_j(t) + \frac{G_j}{C_j} y_{j-1}(t) + E_j \xi(t+d) \right]$$

d'après (3.75), on a :

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}(t+i.d) = & \frac{F_j}{C_j \cdot TD} \phi_{i-1,j}[t+(i-1).d] + \frac{G_j}{C_j} \phi_{i-1,j-1}[t+(i-1).d] \\ & + T^{i-1} \tilde{\phi}_{1,j}(t+i.d) \end{aligned} \quad (3.90)$$

La sortie auxiliaire, définie par (3.87), peut être réécrite sous la forme prédictive suivante :

$$\phi_{i,j}(t+i.d) = \phi_{i,j}^*(t+i.d/t) + \tilde{\phi}_{i,j}(t+i.d); \quad (3.91)$$

où :

$\phi_{i,j}^*(t+i.d/t)$  est la prédiction de  $\phi_{i,j}(t+i.d)$  à l'instant  $t$ .

$\tilde{\phi}_{i,j}(t+i.d)$  est l'erreur de prédiction.

Il existe plusieurs façons de choisir l'expression du prédicteur  $\phi_{i,j}^*(t+i.d/t)$ , mais pour que cette expression soit utilisable, il faut que l'erreur de prédiction dépende seulement des signaux de perturbations, et non du signal de contrôle. De ce fait, l'approximation par prédiction, de cette sortie auxiliaire, n'affecte pas la stabilité du système en boucle fermée:

La manière la plus originale de choisir l'équation du prédicteur est de lui donner l'expression suivante:

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^*(t+i.d/t) = & \frac{F_j}{C_j \cdot TD} \phi_{i-1,j}^*[t+(i-1).d/t] \\ & + \frac{G_j}{C_j} \phi_{i-1,j-1}^*[t+(i-1).d/t] \end{aligned} \quad (3.92)$$

L'erreur de prédiction est alors définie par :

$$\tilde{\phi}_{i,j}(t+i.d) = \phi_{i,j}(t+i.d) - \phi_{i,j}^*(t+i.d/t); \quad (3.93)$$

la forme récursive de cette erreur est alors :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{i,j}(t+i.d) = & \frac{F_j}{C_j \cdot TD} \tilde{\phi}_{i-1,j}[t+(i-1).d] + \frac{G_j}{C_j} \tilde{\phi}_{i-1,j-1}[t+(i-1).d] \\ & + T^{i-1} \tilde{\phi}_{1,j}(t+i.d) \end{aligned} \quad (3.94)$$

### 3.5.2 Génération de la commande et auto-ajustage

Dans le but d'amener la sortie du système, en boucle fermée, à la sortie du modèle donné par l'équation (3.74). La loi de commande est générée, de façon à minimiser la variance de la sortie auxiliaire:  $\phi_{N,N}(t+N.d)$ , autour de la trajectoire  $w(t)$ . Cette variance est définie par :

$$I_N = E \left[ \left( \phi_{N,N}(t+N.d) - w(t) \right)^2 \right]. \quad (3.95)$$

D'après (2.61)  $I_N$  est minimale quand :

$$\phi_{N,N}^*(t+N.d/t) = w(t) \quad (3.96)$$

Ce qui nous permettra d'après (3.92), de calculer les signaux donnés par :

$$\phi_{i-1,i-1}^* [t+(i-1).d/t] = \frac{C_i}{G_i} \phi_{i,i}^* (t+i.d/t) - \frac{F_i}{G_i \cdot TD} \phi_{i-1,i}^* [t+(i-1).d/t] \text{ pour } i=N, \dots, 1. \quad (3.97)$$

Les signaux:  $\phi_{i-1,i}^* [t+(i-1).d/t]$ ,  $i=N, \dots, 1$ ; de l'équation (3.97) sont obtenus à partir de l'équation (3.92) du prédicteur, pour  $i < j$ .

Enfin, le signal de commande est:

$$u_1(t) = \phi_{0,0}^* (t) = \frac{C_1}{G_1} \phi_{1,1}^* (t+d/t) - \frac{F_1}{G_1 \cdot TD} \phi_{0,1}^* (t) \quad (3.98)$$

Le calcul de la commande nécessite, au préalable, la connaissance des coefficients des polynômes  $F_i$ ,  $G_i$  et  $C_i$ . Comme ces coefficients sont inconnus, on les estimera alors par l'algorithme d'auto-ajustage suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_i^T(t) = [y_{i-1}(t), \dots, y_{i-1}(t-ng_i); y_i(t)/TD, \dots, y_i(t-nf_i)/TD; \\ \quad \hat{\phi}_{1,i}^* (t+d-1/t-1), \dots, \hat{\phi}_{1,i}^* (t+d-n_i/t-n_i)] \quad (3.99a) \\ \hat{\vartheta}_i(t) = \hat{\vartheta}_i(t-1) + K_i(t-d) [\hat{\phi}_{1,i}(t) - \hat{x}_i^T(t-d) \hat{\vartheta}_i(t-1)] \quad (3.99b) \\ K_i(t) = \frac{P_i(t-1) \hat{x}_i(t)}{\beta + \hat{x}_i^T(t) P_i(t-1) \hat{x}_i(t)} \quad (3.99c) \\ P_i(t) = \frac{1}{\beta} \left[ I - K_i(t) \hat{x}_i^T(t) \right] P_i(t-1); P_i(0) = P_{i,0} \quad I > 0 \quad (3.99d) \\ \hat{\phi}_{1,i}^* (t+d/t) = \hat{x}_i^T(t) \hat{\vartheta}_i(t) \quad (3.99e) \end{array} \right.$$

appliqué au système défini par l'équation (3.89).

### 3.5.3 Algorithme

- A l'instant  $t_0 = 0$ , initialisation

De  $i=1, \dots, N$  :

$$\hat{\theta}_i(0) = [0, \dots, 0].$$

$$P_i(0) = p_{i,0} I, \quad p_{i,0} > 0.$$

- A chaque instant d'échantillonnage  $t > t_0$

1. Estimation des coefficients des polynômes  $F_i$ ,  $G_i$  et  $C_i$  :

De  $i=1, \dots, N$  :

- Mesure de la sortie du système  $i$ ,  $y_i(t)$ .
- Calcul de la sortie auxiliaire:  $\phi_{1,i}(t) = T y_i(t)$ .
- Estimation des paramètres du modèle prédictif, donné par les équations (3.37) et (3.38), en utilisant la méthode des MCE :

$$\hat{\theta}_i(t) = \hat{\theta}_i(t-1) + K_i(t-d) \left[ \phi_{1,i}(t) - \hat{x}_i^T(t-d) \hat{\theta}_i(t-1) \right]$$

$$\left[ \begin{array}{l} \hat{\theta}_i^T = [\hat{g}_{i,0}, \dots, \hat{g}_{i,ngi}; \hat{f}_{i,0}, \dots, \hat{f}_{i,nfi}; -\hat{c}_{i,1}, \dots, -\hat{c}_{i,nfi}] \\ \text{Coefficients des polynômes } \hat{C}_i, \hat{F}_i \text{ et } \hat{G}_i \end{array} \right]$$

3. Calcul de la commande:

- Calcul des prédictions  $\hat{\phi}_{i,j}^*(t+i.d/t)$ , pour  $i < j$ , en utilisant l'expression (3.92) :

$$\hat{\phi}_{i,j}^*(t+i.d/t) = \frac{\hat{F}_j}{\hat{C}_j \cdot TD} \hat{\phi}_{i-1,j}^*[t+(i-1).d/t]$$

$$+ \frac{\hat{G}_j}{\hat{C}_j} \hat{\phi}_{i-1,j-1}^*[t+(i-1).d/t]$$

d'où, on obtient  $N$  valeurs  $\hat{\phi}_{i-1,i}^*[t+(i-1).d/t]$ , pour  $i=1, \dots, N$ .

- $\hat{\phi}_{N,N}^*(t+N.d/t) = w(t)$

• De  $i = N, \dots, 1$  :

$$\hat{\phi}_{i-1, i-1}^* [t+(i-1).d/t] = \frac{\hat{C}_i}{\hat{G}_i} \hat{\phi}_{i, i}^* (t+i.d/t) - \frac{\hat{F}_i}{\hat{G}_i \cdot TD} \hat{\phi}_{i-1, i}^* [t+(i-1).d/t]$$

•  $u(t) = u_1(t) = \hat{\phi}_{0,0}^*(t)$ .

4. Envoi de la commande  $u(t)$  à l'entrée du système.
5. Mise à jour et sauvegarde des vecteurs et matrices de données; pour les utiliser dans les futures itérations :

De  $i = 1, \dots, N$  :

•  $\hat{x}_i^T(t) = [y_{i-1}(t), \dots, y_{i-1}(t-n_{g_i}); y_i(t)/TD, \dots, y_i(t-n_{f_i})/TD ;$

$$\hat{\phi}_{1, i}^* (t+d-1/t-1), \dots, \hat{\phi}_{1, i}^* (t+d-n_i/t-n_i)]$$

•  $K_i(t) = \frac{P_i(t-1)\hat{x}_i^T(t)}{\beta + \hat{x}_i^T(t)P_i(t-1)\hat{x}_i(t)}$

•  $P_i(t) = \frac{1}{\beta} \left[ I - K_i(t)\hat{x}_i^T(t) \right] P_i(t-1)$

•  $\hat{\phi}_{1, i}^* (t+d/t) = \hat{x}_i^T(t)\hat{\delta}_i(t)$

6. Refaire les étapes de (1) jusqu'à (5).

### 3.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons développé la partie la plus importante de notre étude, à savoir, l'application du contrôle auto-ajustable à des systèmes en cascade. Pour atteindre ce but, nous avons envisagé plusieurs approches.

La première approche que nous avons présentée, considère le système comme étant mono-boucle. Cette approche est simple, son

application ne nécessite pas un algorithme spécial. Néanmoins, l'auto-ajusteur qui est utilisé doit correspondre à un système d'ordre supérieur à la somme des ordres de tous les sous-systèmes, ce qui peut être élevé.

Dans notre seconde approche, les informations issues des sorties intermédiaires sont prises en considération, ce qui donne un système de contrôle en cascade. Seulement lors de la synthèse de la commande, la dynamique de la boucle interne est négligée devant celle de la boucle externe. De ce fait, chaque auto-ajusteur individuel a une structure destinée à son sous-système correspondant. L'ordre de chaque sous-système est très inférieur à l'ordre du système en entier.

Les problèmes rencontrés dans l'approche précédente, peuvent être évités en tenant compte de la dynamique des boucles internes lors de la synthèse de la commande pour les boucles externes. Ce qui a été l'objet de notre troisième approche. Cette approche a les mêmes avantages que la précédente. De plus elle permet d'avoir une meilleure stabilité et une meilleure précision. Toutefois, la complexité de la synthèse de la commande augmente avec l'indice  $i$  de chaque boucle. La synthèse de la commande pour la dernière boucle est aussi complexe que celle du cas mono boucle.

La dernière approche que nous avons présentée est une nouvelle approche en contrôle auto-ajustable des systèmes en cascade. Son avantage majeur est qu'elle permet de contrôler un système de  $N$ -boucles (sous-systèmes) en cascade en utilisant  $N$  contrôleurs, chacun de ceux-ci est destiné à son sous-système et a une complexité qui lui correspond; l'effet des boucles internes est pris en compte sans qu'il ait interaction entre les boucles. La restriction faite pour cette approche est que les temps de retard doivent être égaux, et le modèle, que devra suivre chaque sous-système, est le même.

## SIMULATION & RESULTATS

### 4.1 INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents, nous avons développé plusieurs approches de contrôle auto-ajustable pour des systèmes en cascade. Quelques exemples illustrant l'utilisation de ces méthodes sont présentées. Une partie de ces exemples est à caractère pédagogique, son rôle est de contribuer à la compréhension des méthodes présentées. L'autre partie présente un exemple d'application.

### 4.2 EXEMPLE 1 : SYSTEME A DEUX BOUCLES

Considérons le système à deux boucles en cascade, représenté par le modèle donné par les équations suivantes :

$$y_1(t) = z^{-2} \frac{0.105}{1-0.606z^{-1}} u_1(t) + \frac{1}{1-0.606z^{-1}} \xi(t) \quad (4.1)$$

$$y_2(t) = z^{-2} \frac{1+0.833z^{-1}}{1-0.951z^{-1}} y_1(t) + \frac{1+0.264z^{-1}}{1-0.951z^{-1}} \xi(t) \quad (4.2)$$

$\xi(t)$ : bruit blanc discret de moyenne nulle et de variance finie.

$y(t) = y_2(t)$  est la sortie du système,  $u(t) = u_1(t)$  est l'entrée de commande.

Pour le sous-système 1, on a :

- $n_1 = 1$
- $k_1 = 2$
- $A_1(z^{-1}) = 1 - 0.606z^{-1}$
- $B_1(z^{-1}) = 0.105$
- $C_1(z^{-1}) = 1.$

Pour le sous-système 2, on a :

- $n_2 = 1$
- $k_2 = 2$
- $A_2(z^{-1}) = 1 - 0.951z^{-1}$
- $B_2(z^{-1}) = 1 + 0.833z^{-1}$
- $C_2(z^{-1}) = 1 + 0.264z^{-1}$

#### 4.2.1 Régulation

Il est souhaitable que la sortie du système en boucle fermée suit une consigne  $w(t)$  (Courbes en pointillé sur toutes les figures). Les différentes approches de contrôle en cascade sont appliquées ici, pour :

$$S_1(z^{-1}) = S_2(z^{-1}) = 1.$$

La figure 4.1, donne les signaux de sortie et de commande, et celui de l'erreur :  $e(t) = |y(t) - w(t)|$ , dans le cas où le système est non-perturbé ( $\xi(t) = 0$ ), et ceci, pour une consigne constante.

Les figures 4.2 à 4.5 illustrent le cas où le système est perturbé par un bruit blanc de moyenne nulle et de variance égale à 0.01 ( $\text{var}[\xi(t)] = 0.01$ ), pour une consigne constante.

Les figures 4.6 à 4.21 illustrent la même chose que précédemment pour des consignes triangulaires et rectangulaires.



Exemple 1

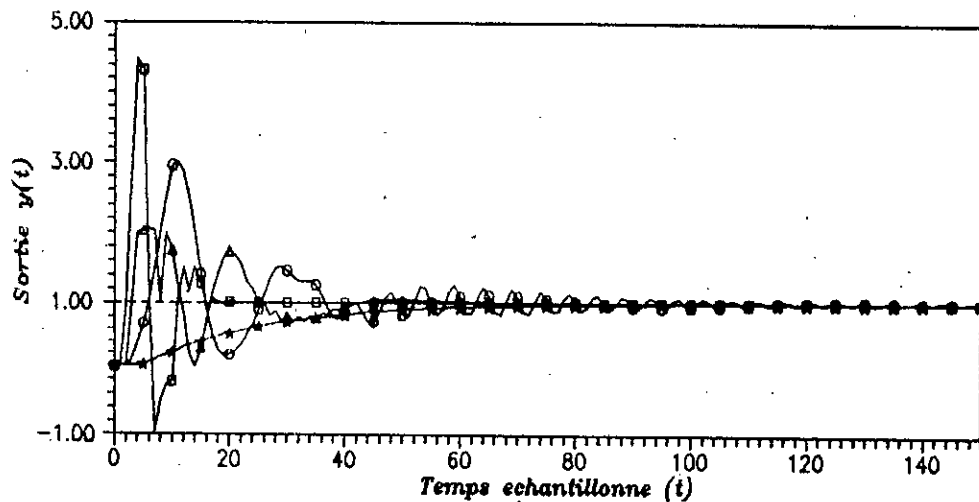


Fig.4.1.a Signaux de Sortie

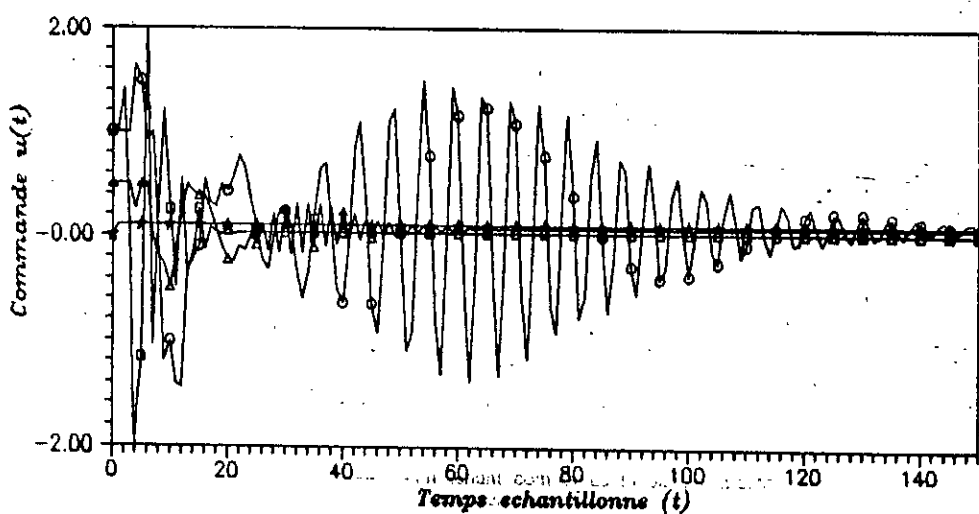


Fig.4.1.b Signaux de Commande

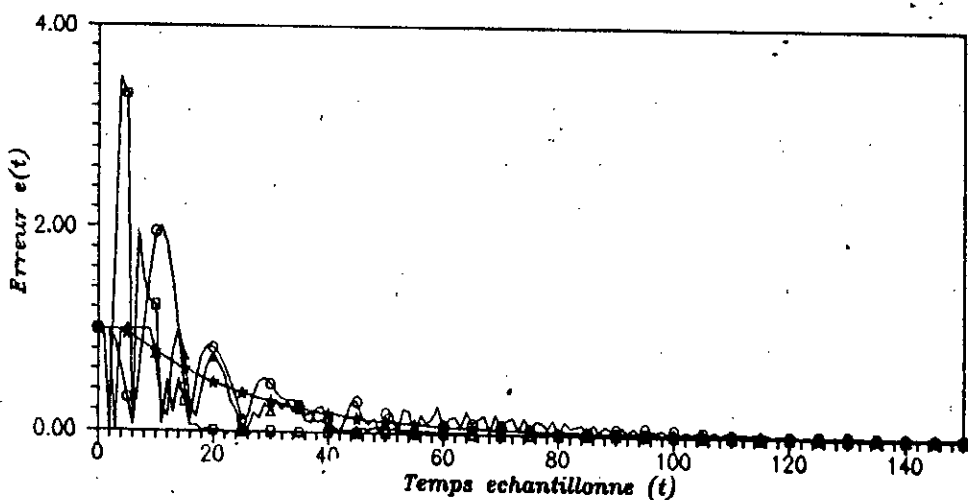


Fig.4.1.c Signaux d'Erreur

Fig.4.1 : Contrôle d'un système non-perturbé, à 2-boucles en cascade  
Régulation autour d'une consigne constante

- oooo Mono-boucle
- oooo En ignorant la boucle interne
- oooo En tenant compte de la boucle interne
- oooo Predicteur recursif

Exemple 1

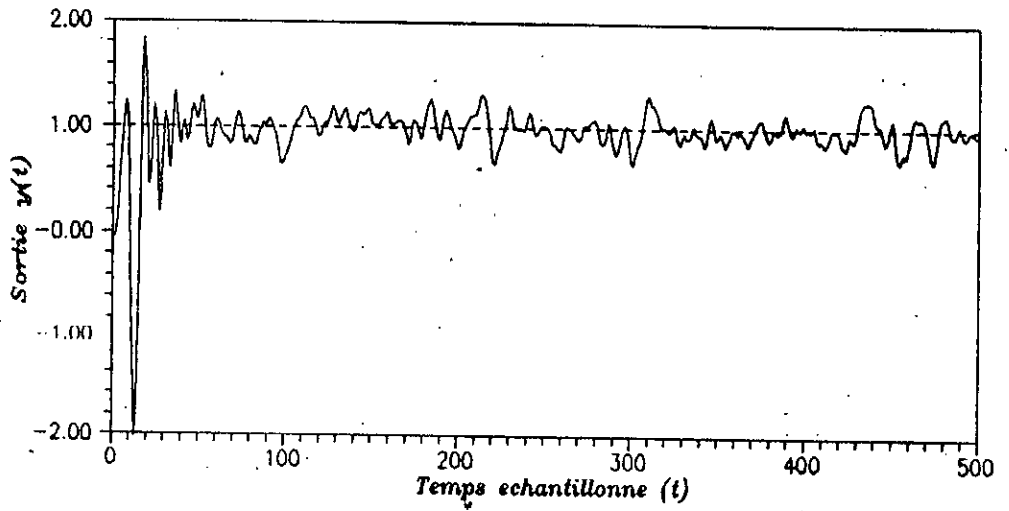


Fig.4.2.a Signal de Sortie

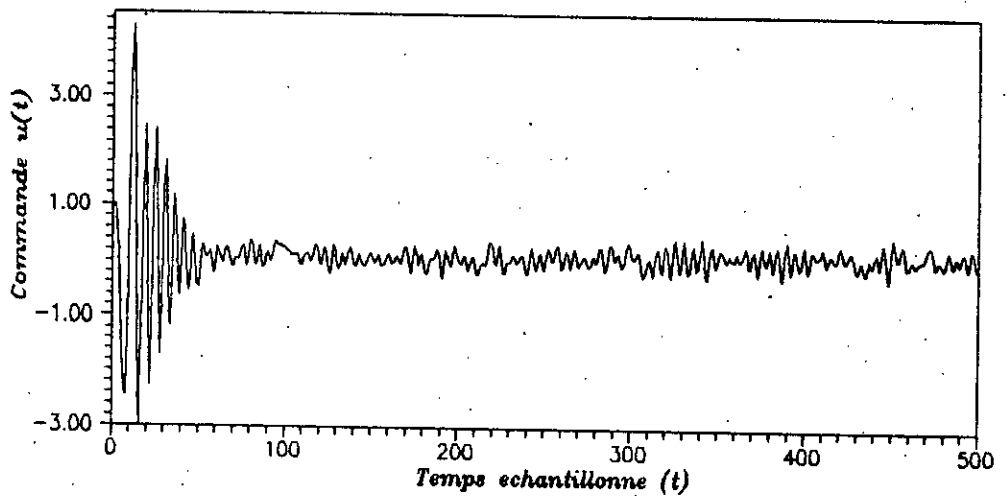


Fig.4.2.b Signal de Commande

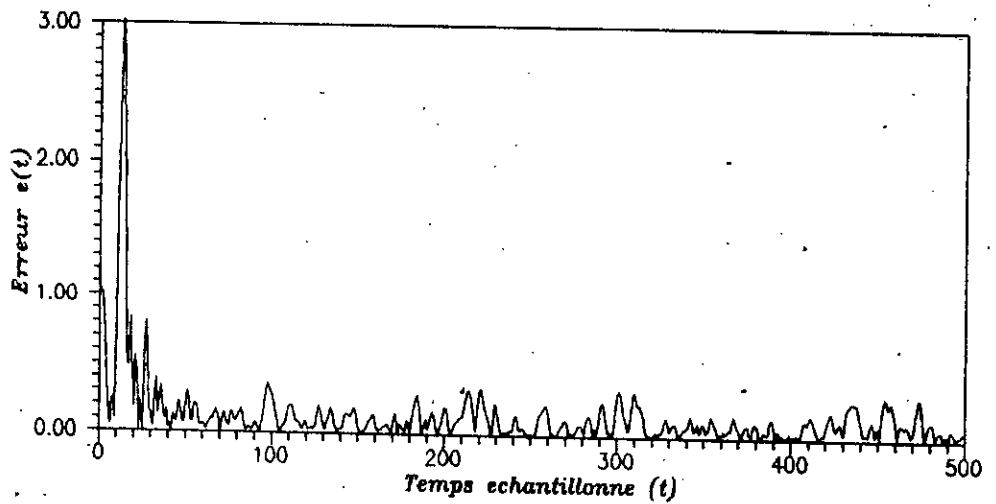


Fig.4.2.c Signal d'Erreur

Fig.4.2 : Controle mono-boucle, d'un systeme perturbe a 2-boucles en cascade  
Regulation autour d'une consigne constante

Exemple 1

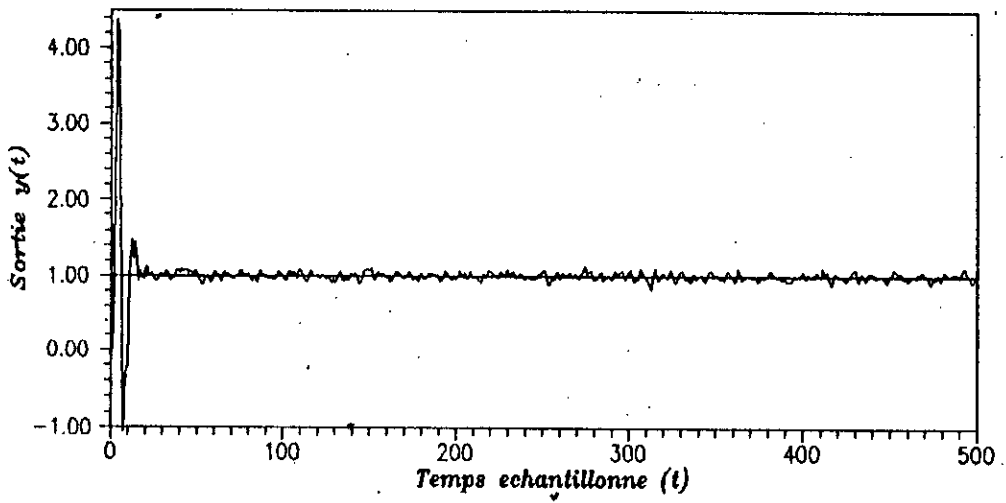


Fig.4.3.a Signal de Sortie

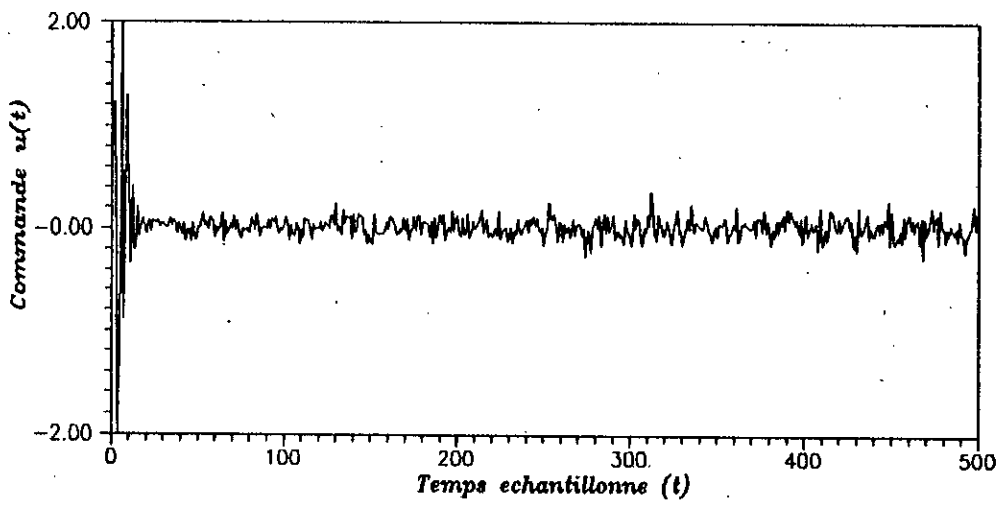


Fig.4.3.b Signal de Commande

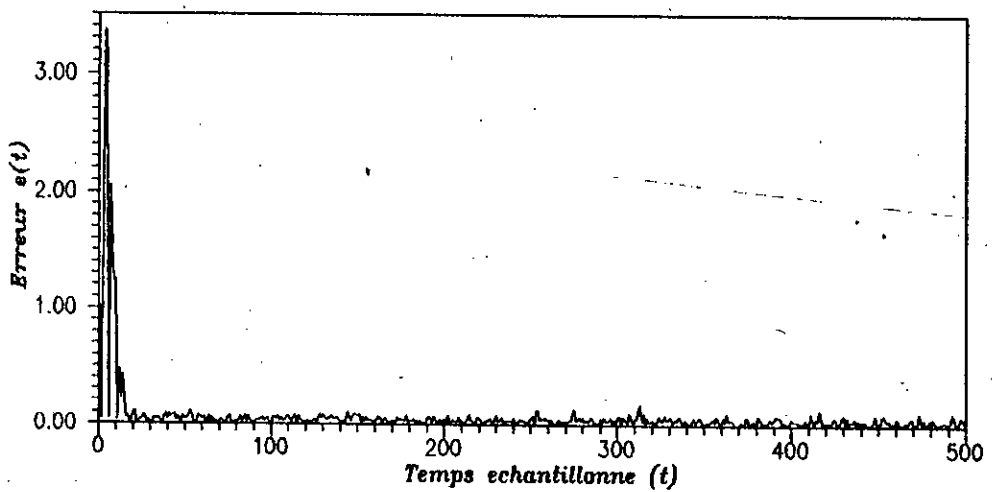


Fig.4.3.c Signal d'Erreur

Fig.4.3 : Controle en ignorant la boucle interne,  
d'un systeme perturbe a 2-boucles en cascade.  
Regulation autour d'une consigne constante.

Exemple 1

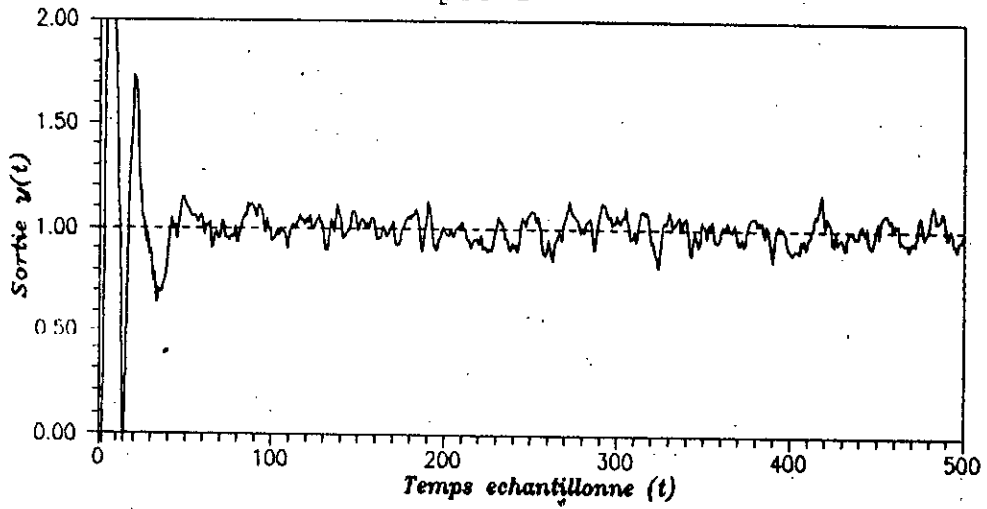


Fig.4.4.a Signal de Sortie

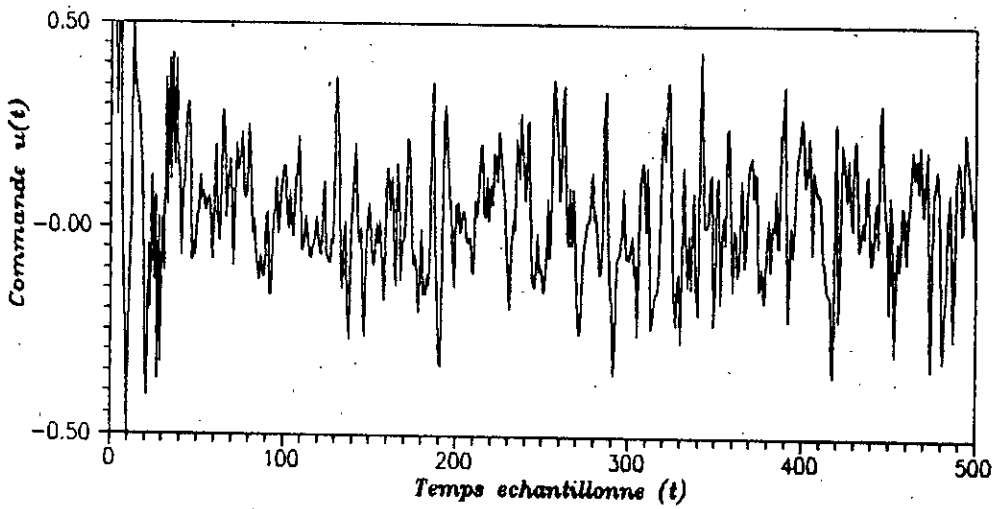


Fig.4.4.b Signal de Commande

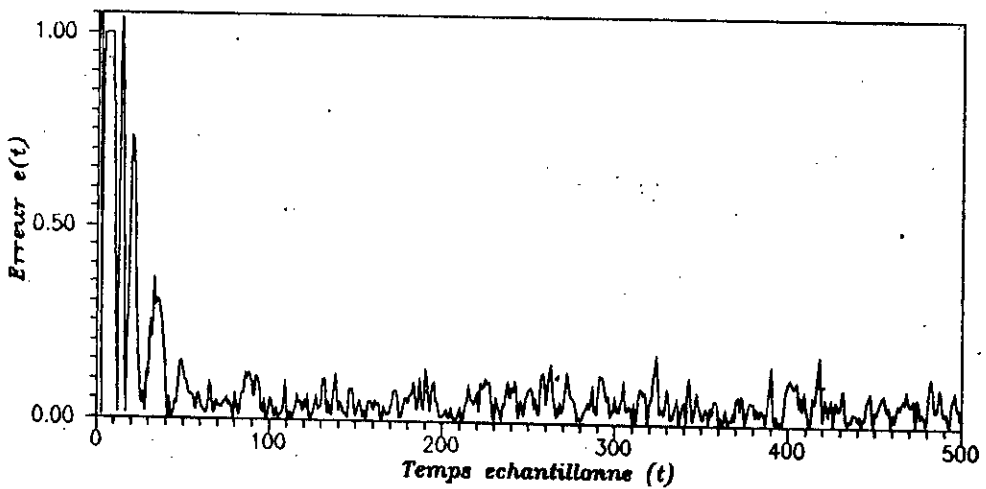


Fig.4.4.c Signal d'Erreur

Fig.4.4 : Contrôle en tenant compte de la boucle interne, d'un système perturbé à 2-boucles en cascade. Régulation autour d'une consigne constante.

Exemple 1

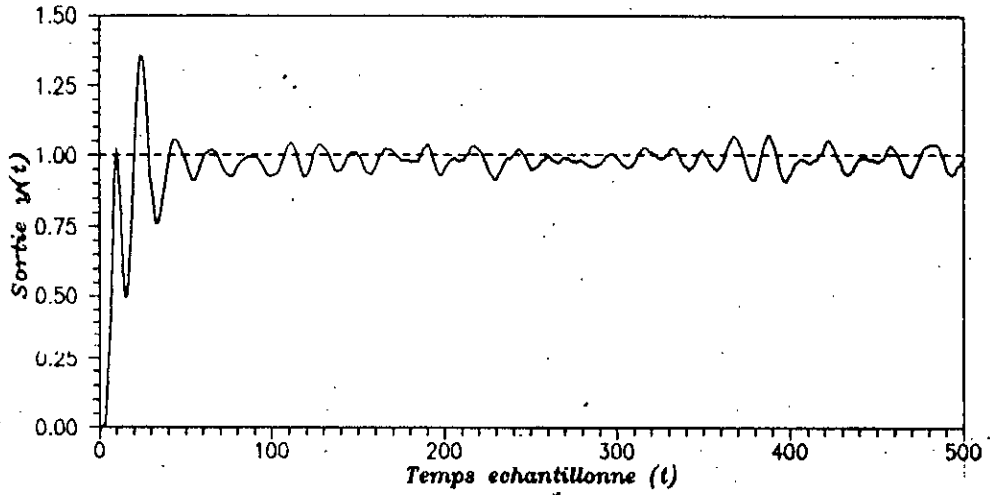


Fig.4.5.a Signal de Sortie

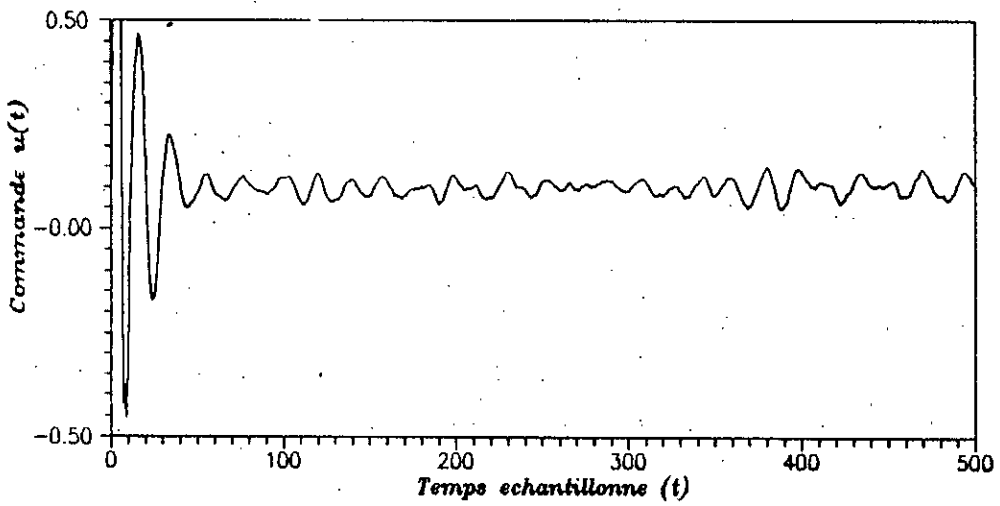


Fig.4.5.b Signal de Commande

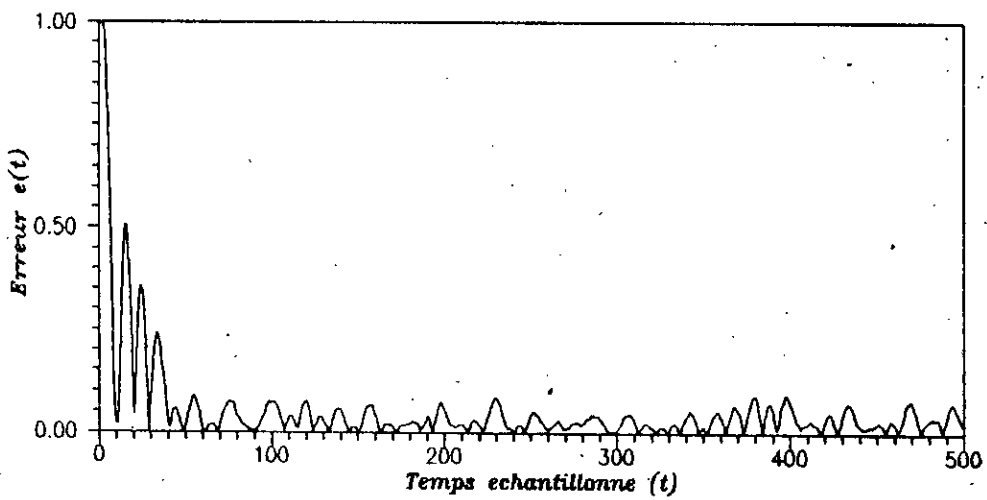


Fig.4.5.c Signal d'Erreur

Fig.4.5 : Controle par la methode du predicteur recursif, d'un systeme perturbe a 2-boucles en cascade. Regulation autour d'une consigne constante.

Exemple 1

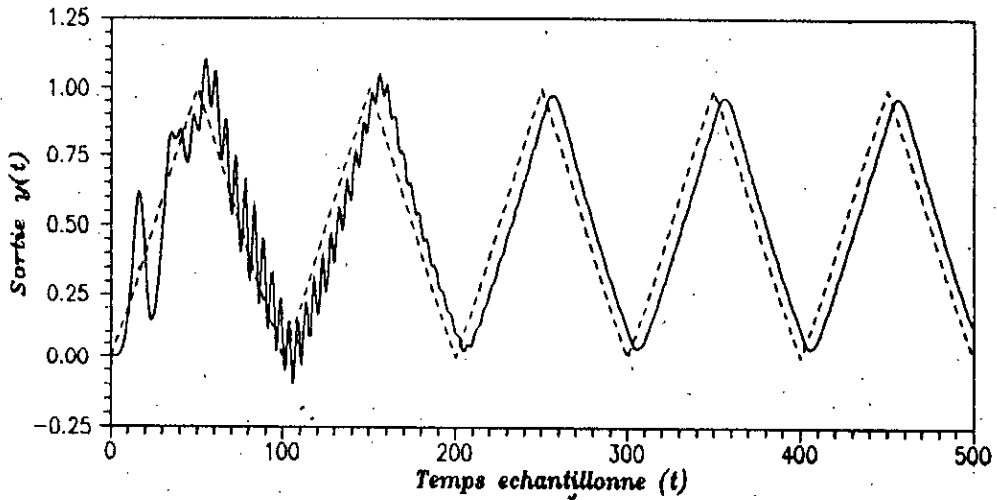


Fig.4.6.a Signal de Sortie

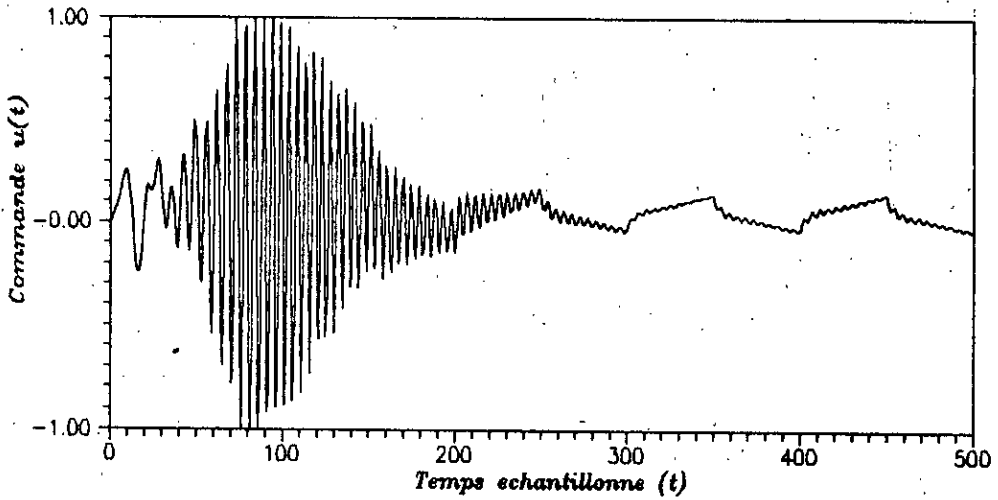


Fig.4.6.b Signal de Commande

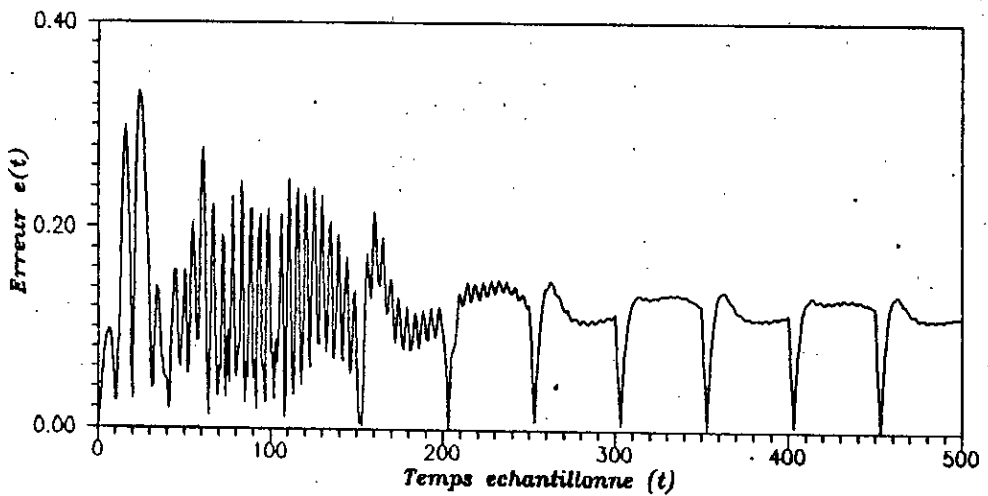


Fig.4.6.c Signal d'Erreur

Fig.4.6 : Contrôle mono-boucle, d'un système non-perturbé à 2-boucles en cascade  
Régulation autour d'une consigne triangulaire.

### Exemple 1

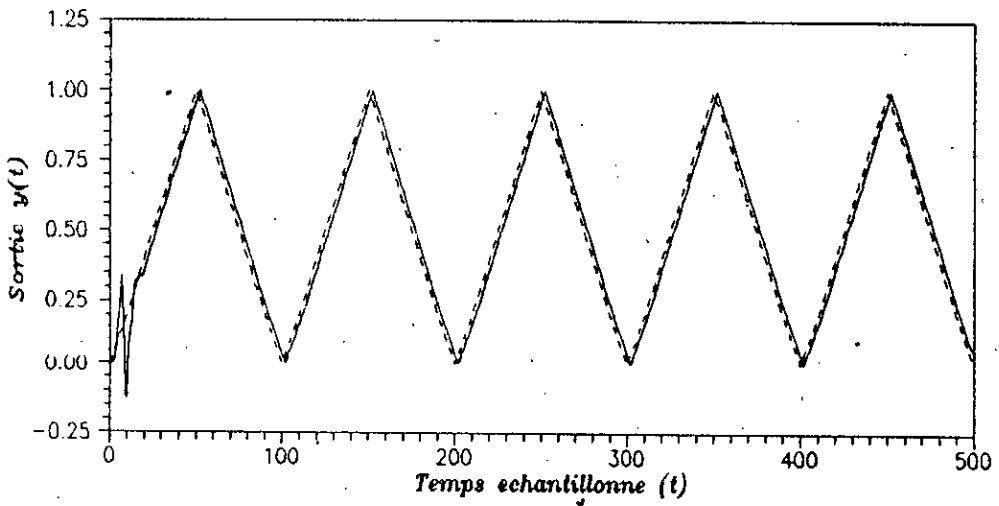


Fig.4.7.a Signal de Sortie

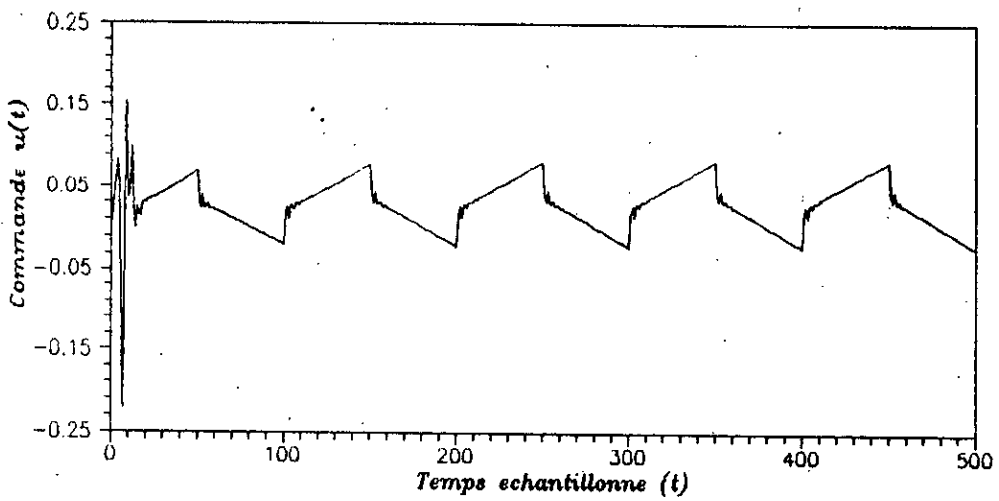


Fig.4.7.b Signal de Commande

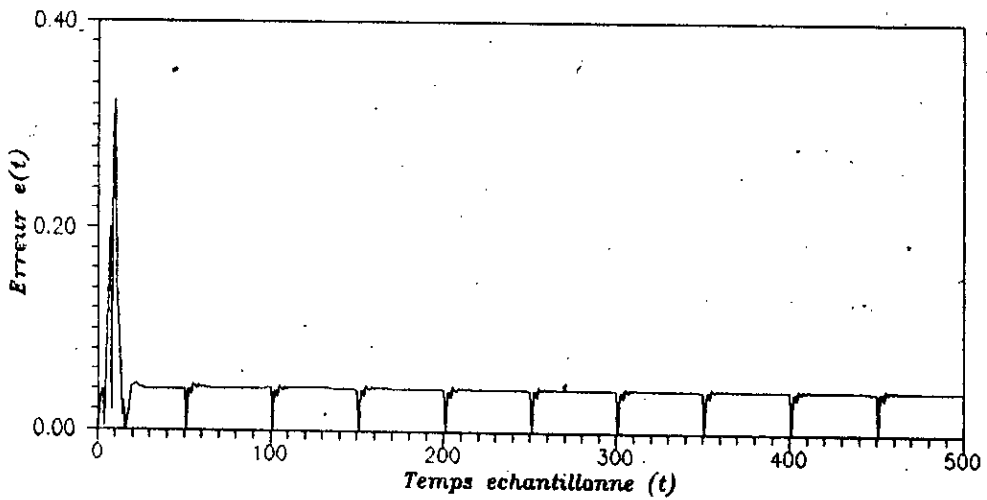


Fig.4.7.c Signal d'Erreur

Fig.4.7 : Controle en ignorant la boucle interne d'un systeme non-perturbe de 2-boucles en cascade. Regulation autour d'une consigne triangulaire.

Exemple 1

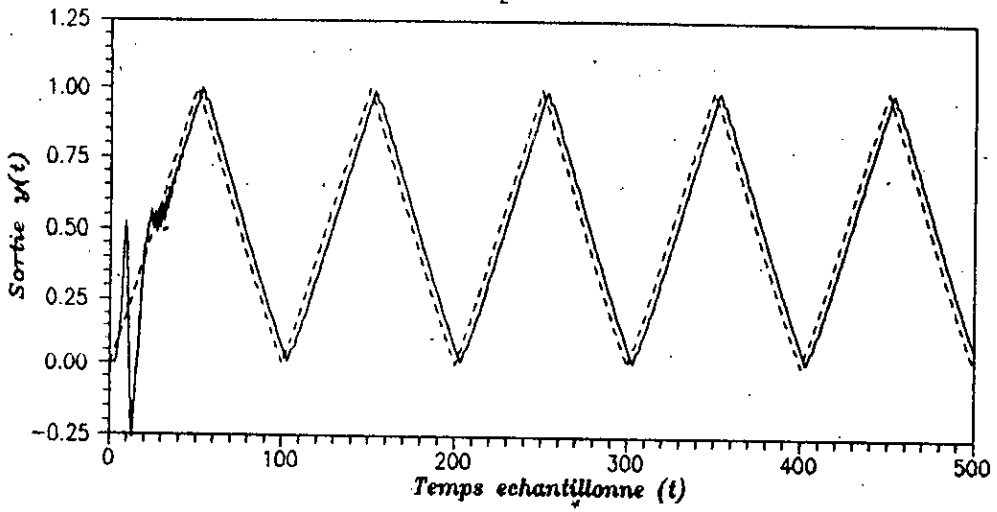


Fig.4.8.a Signal de Sortie

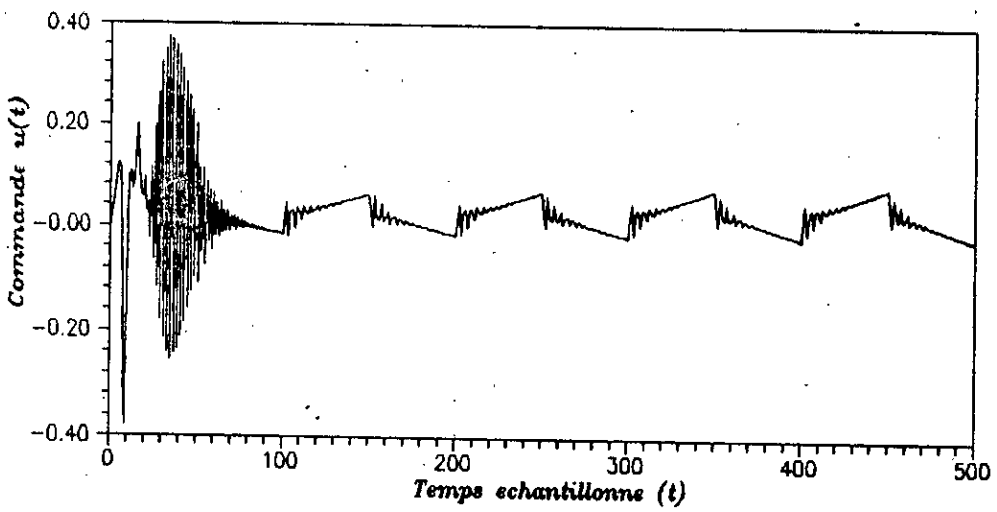


Fig.4.8.b Signal de Commande

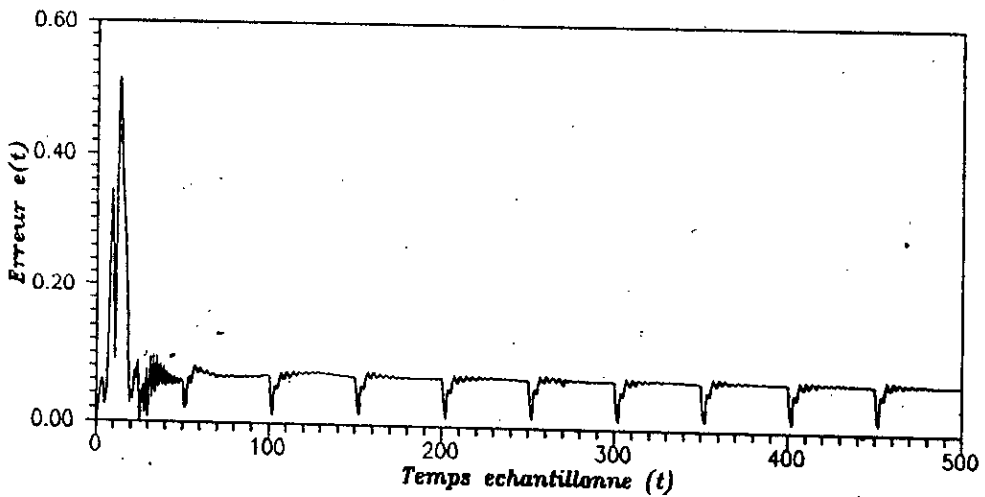


Fig.4.8.c Signal d'Erreur

Fig.4.8 : Contrôle en tenant compte de la boucle interne d'un système non-perturbé de 2-boucles en cascade. Régulation autour d'une consigne triangulaire.



Exemple 1

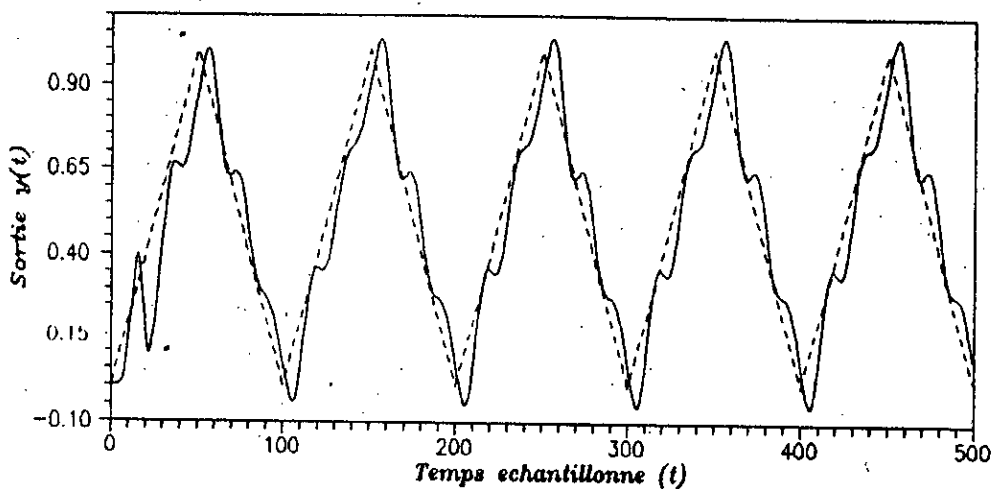


Fig.4.9.a Signal de Sortie

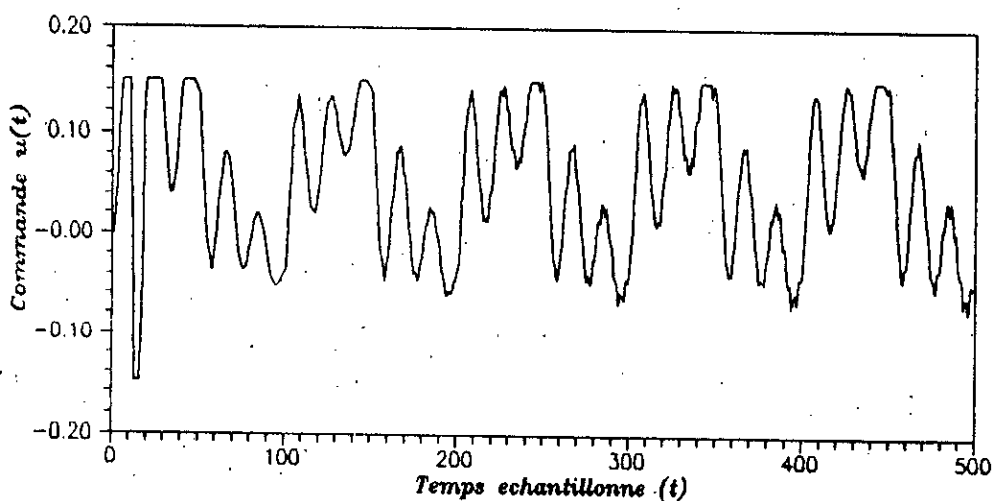


Fig.4.9.b Signal de Commande

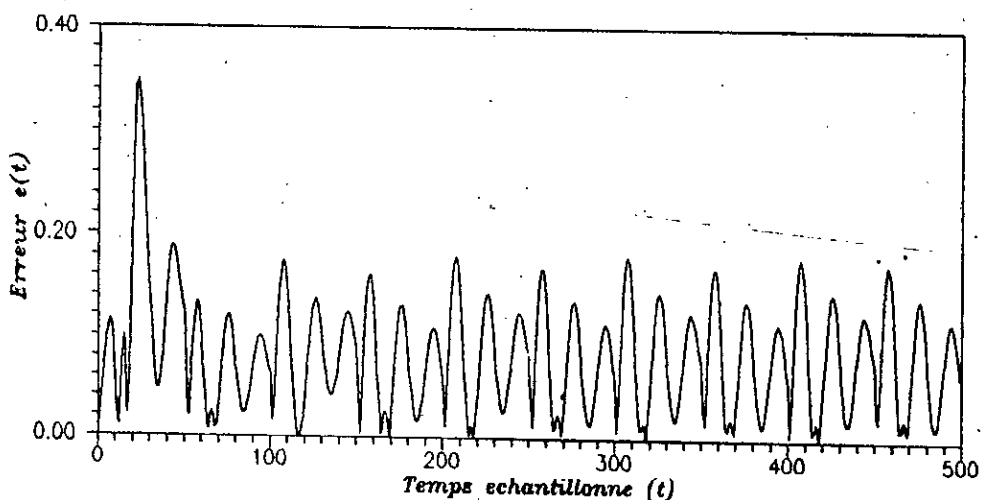


Fig.4.9.c Signal d'Erreur

Fig.4.9 : Contrôle par la méthode du prédicteur récursif d'un système non-perturbé de 2-boucles en cascade. Régulation autour d'une consigne triangulaire.

Exemple 1

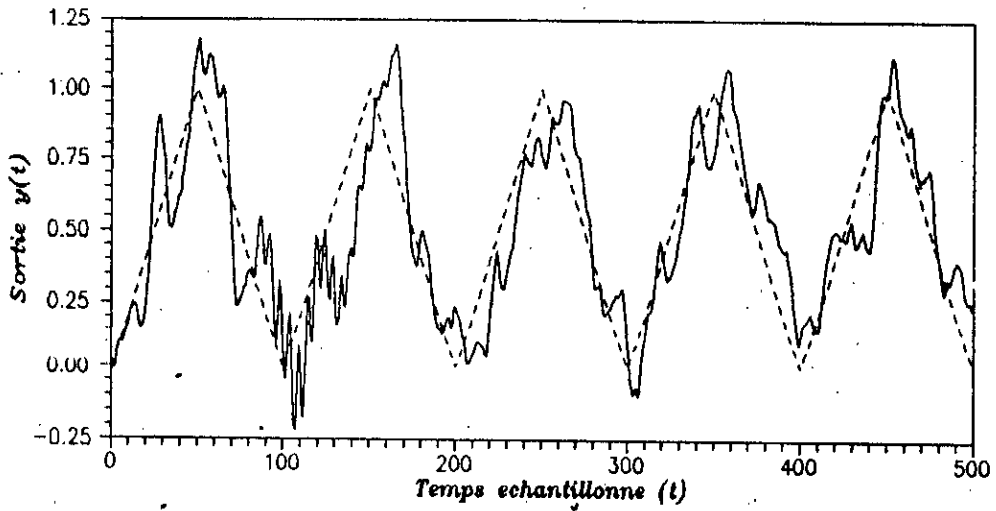


Fig.4.10.a Signal de Sortie

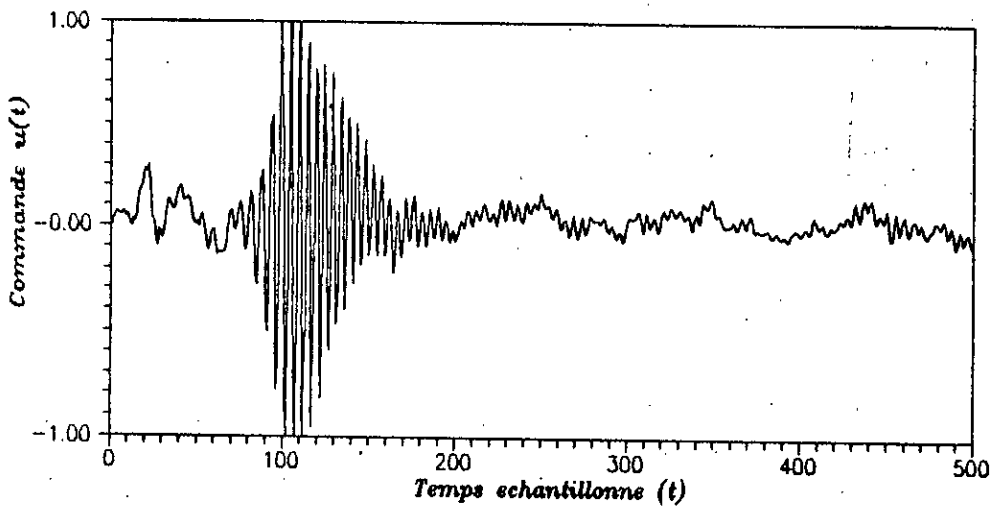


Fig.4.10.b Signal de Commande

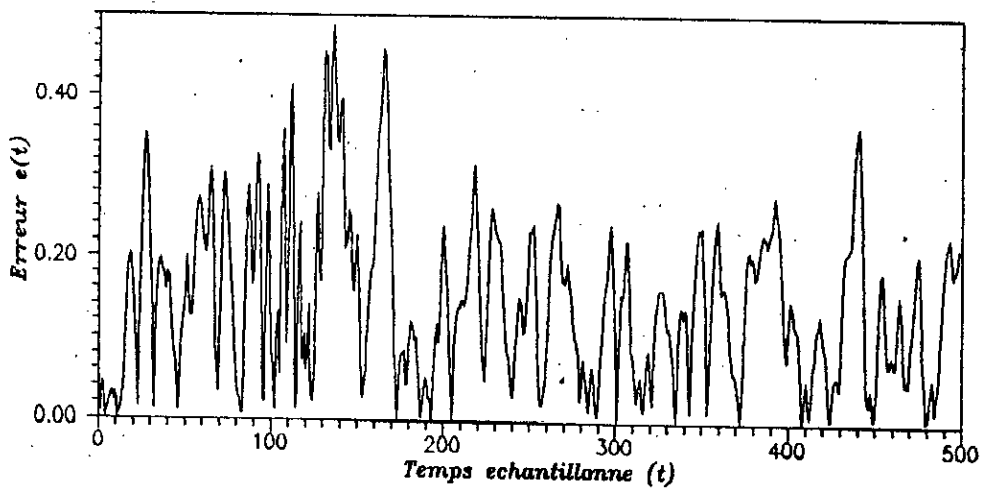


Fig.4.10.c Signal d'Erreur

Fig.4.10 : Controle mono-boucle, d'un systeme perturbe a 2-boucles en cascade  
Regulation autour d'une consigne triangulaire.

Exemple 1

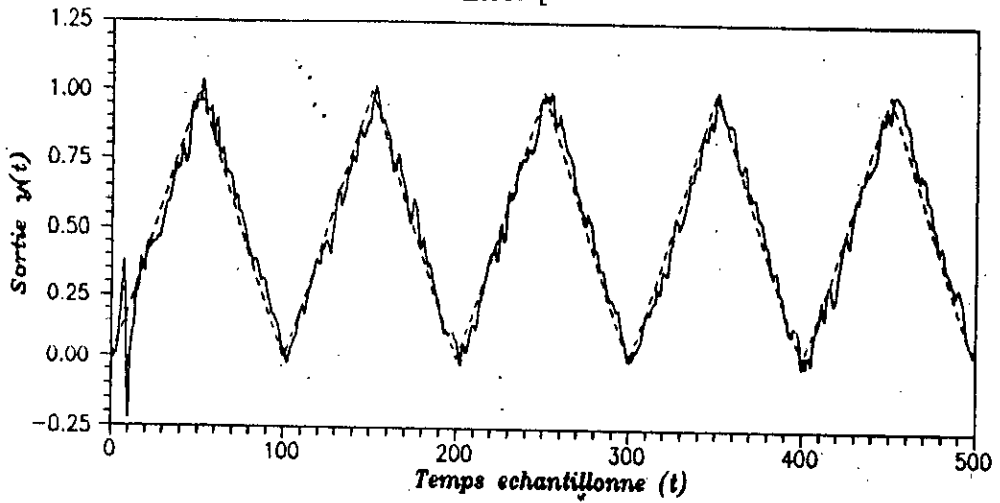


Fig.4.11.a Signal de Sortie

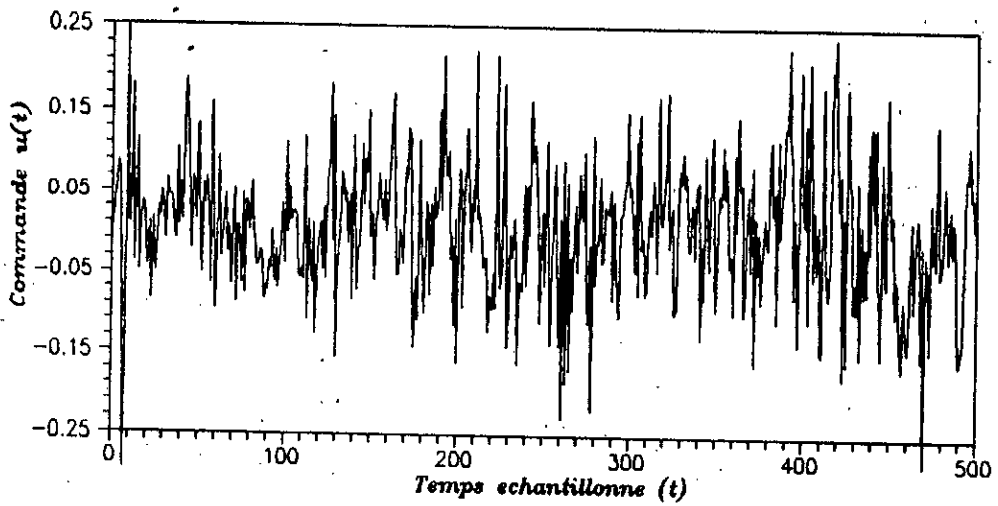


Fig.4.11.b Signal de Commande

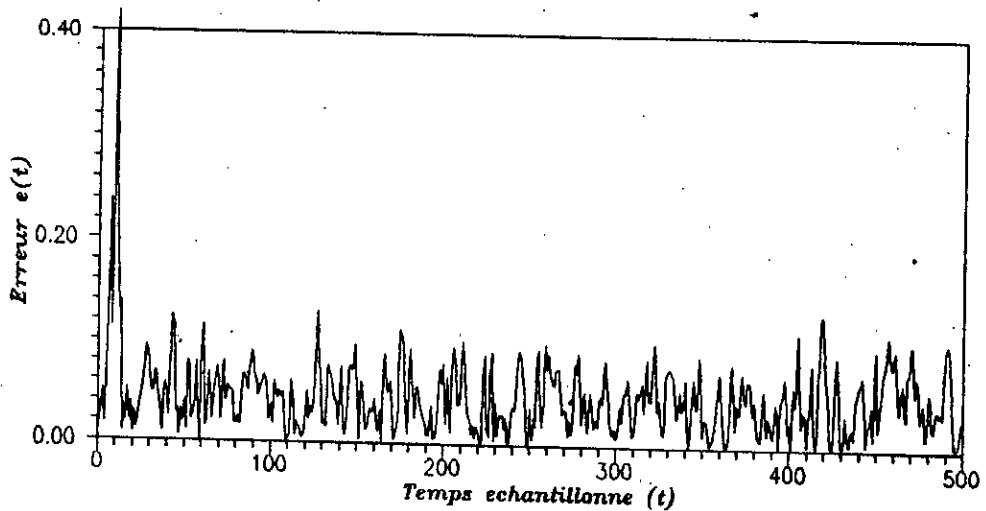


Fig.4.11.c Signal d'Erreur

Fig.4.11: Controle en ignorant la boucle interne  
d'un systeme perturbe de 2-boucles en cascade.  
Regulation autour d'une consigne triangulaire.

Exemple 1

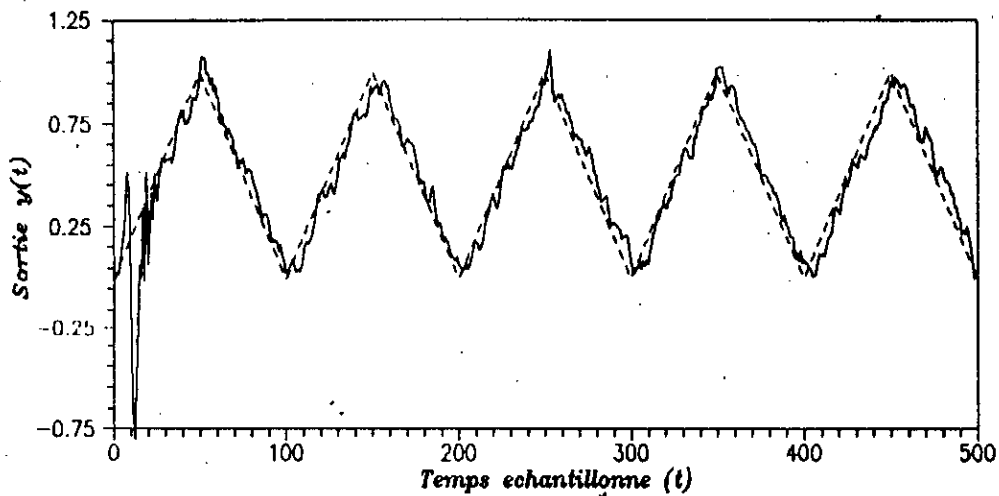


Fig.4.12.a Signal de Sortie

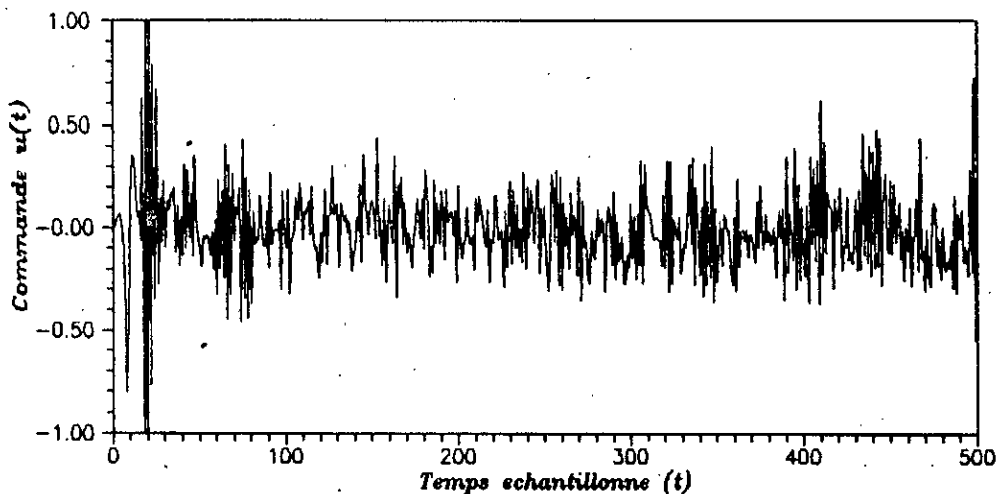


Fig.4.12.b Signal de Commande

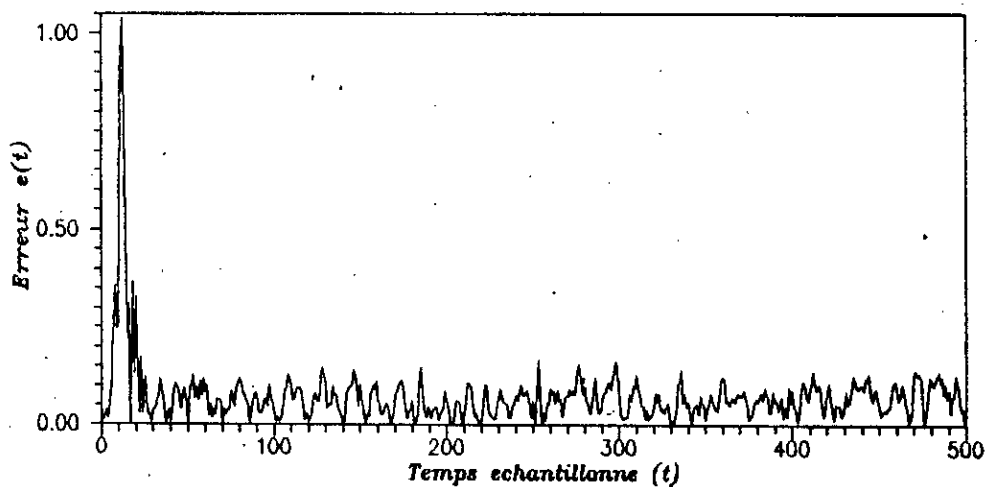


Fig.4.12.c Signal d'Erreur

Fig.4.12: Controle en tenant compte de la boucle interne d'un systeme perturbe a 2-boucles en cascade. Regulation autour d'une consigne triangulaire.

Exemple 1

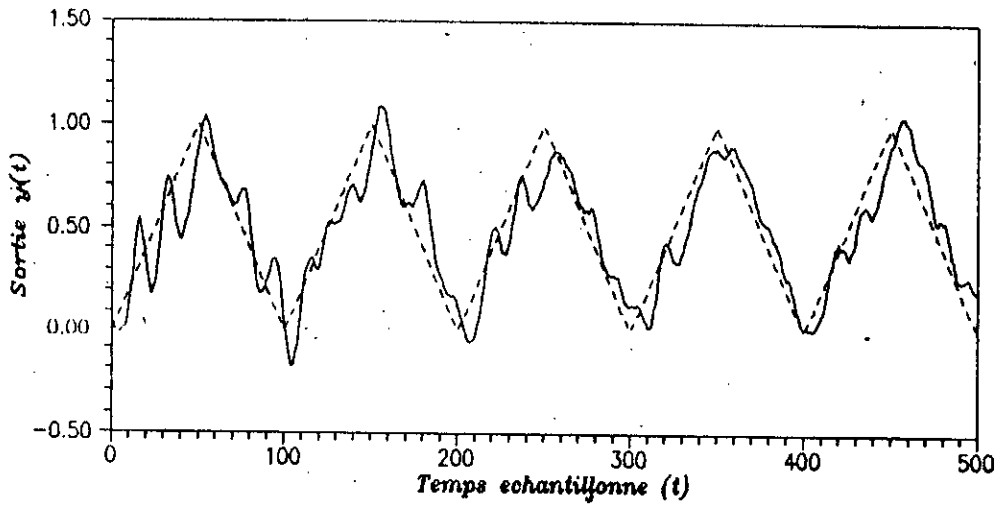


Fig.4.13.a Signal de Sortie

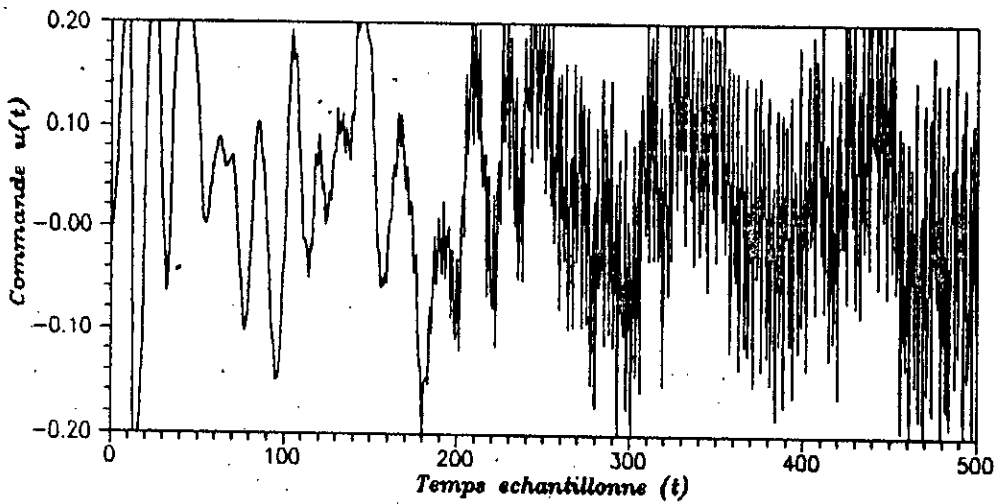


Fig.4.13.b Signal de Commande

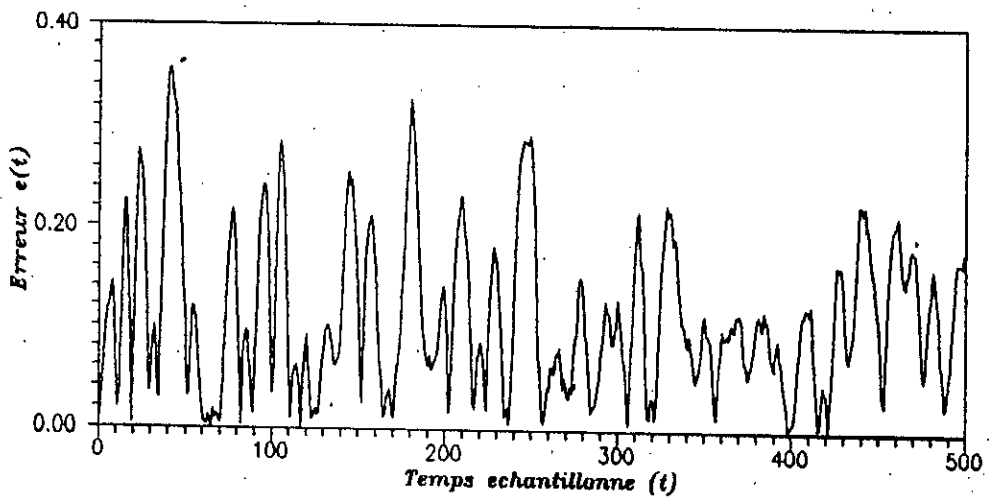


Fig.4.13.c Signal d'Erreur

Fig.4.13: Controle par la methode du predicteur recursif d'un systeme perturbe a 2-boucles en cascade. Regulation autour d'une consigne triangulaire.

Exemple 1

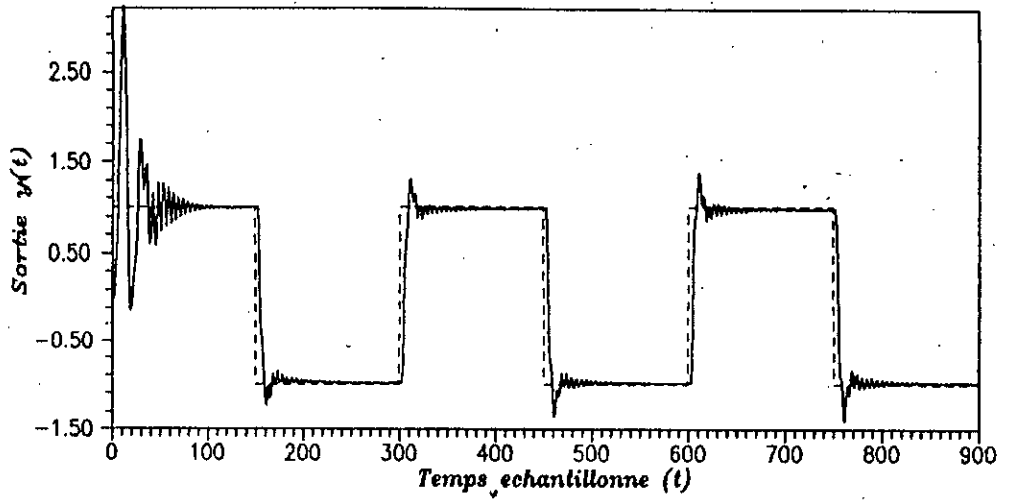


Fig.4.14.a Signal de Sortie

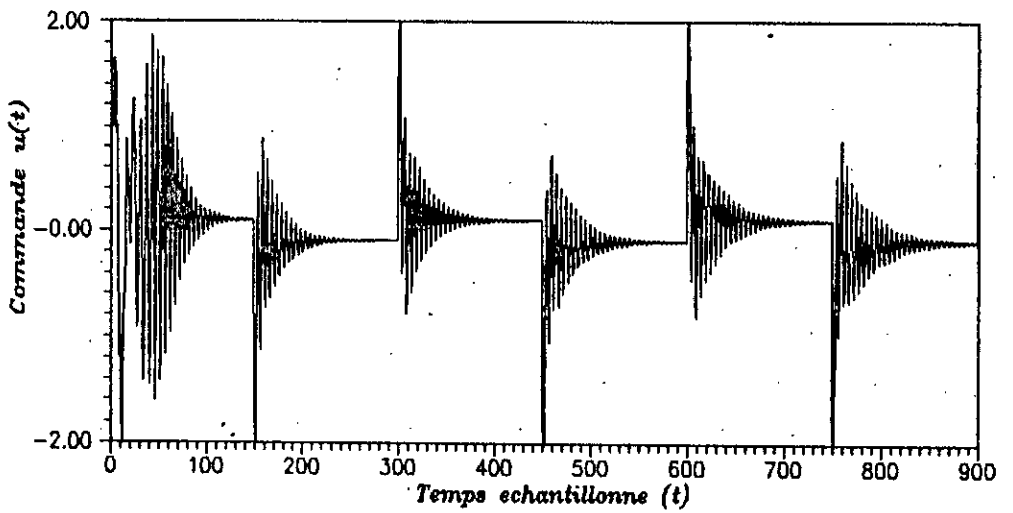


Fig.4.14.b Signal de Commande

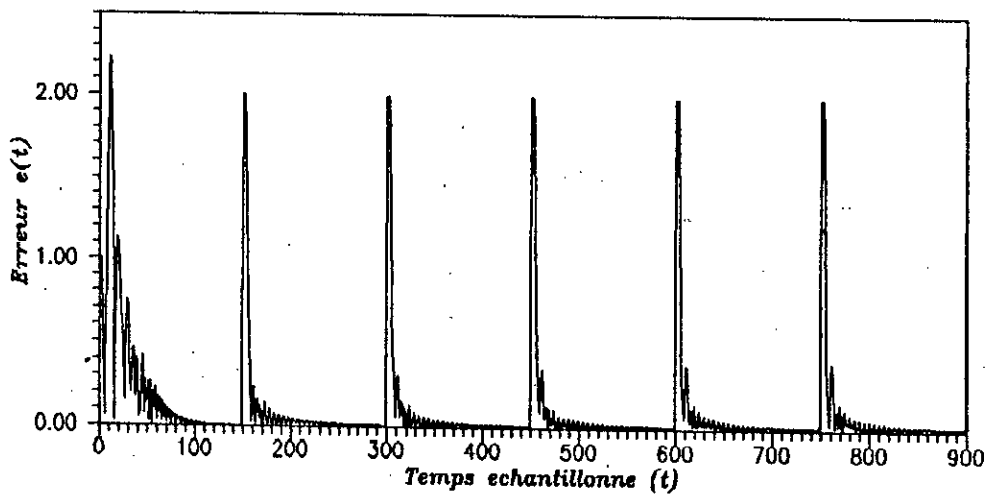


Fig.4.14.c Signal d'Erreur

Fig.4.14 : Controle mono-boucle, d'un systeme non-perturbe a 2-boucler en cascade. Regulation autour d'une consigne rectangulaire.

Exemple 1

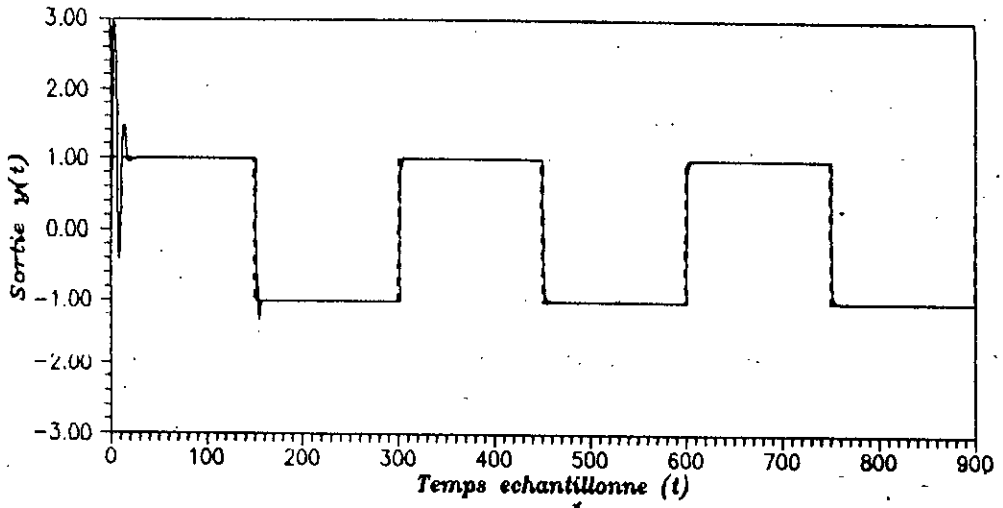


Fig.4.15.a Signal de Sortie

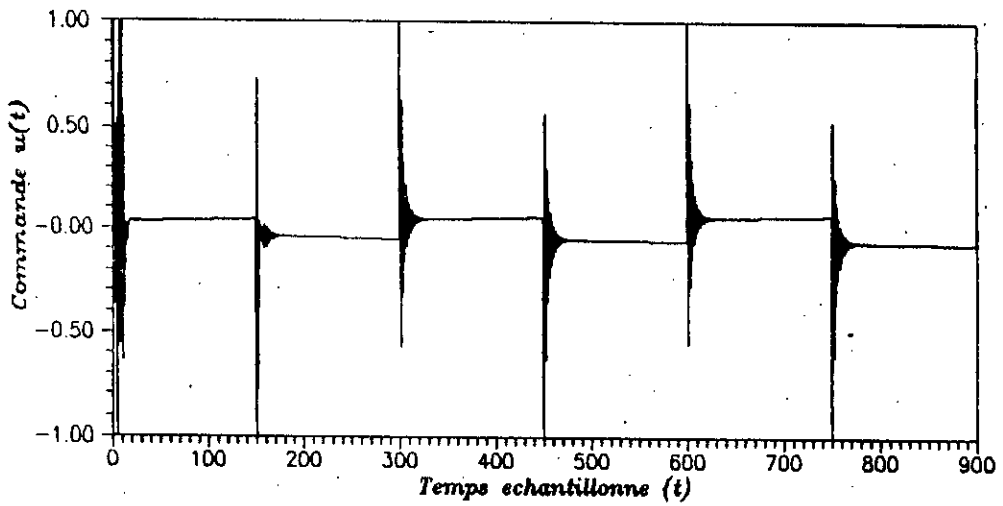


Fig.4.15.b Signal de Commande

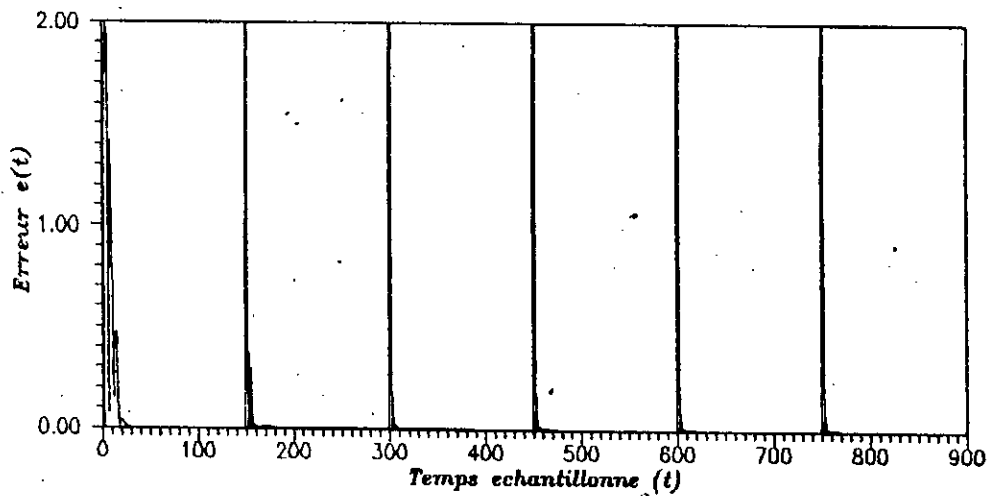


Fig.4.15.c Signal d'Erreur

Fig.4.15 : Controle en ignorant la boucle interne d'un systeme non-perturbe de 2-boucles en cascade. Regulation autour d'une consigne rectangulaire.

Exemple 1

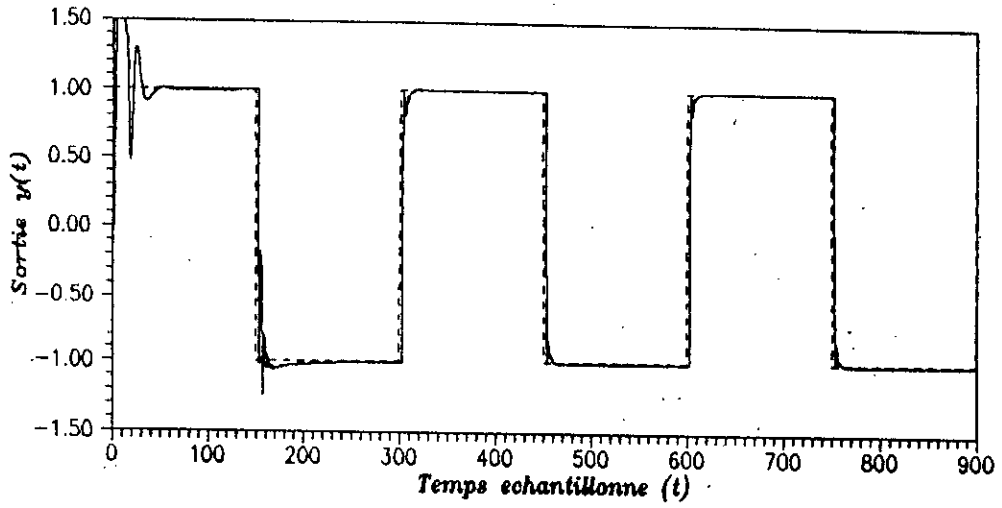


Fig.4.16.a Signal de Sortie

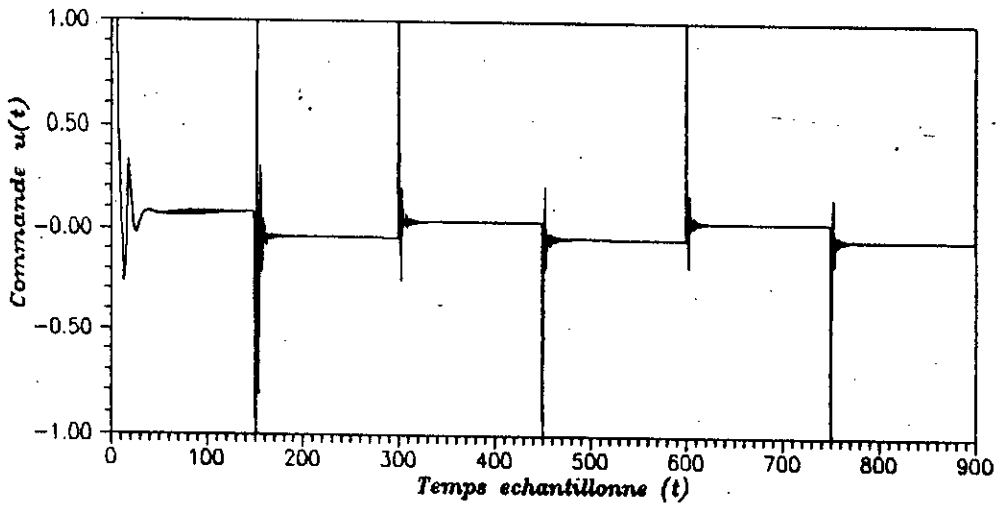


Fig.4.16.b Signal de Commande

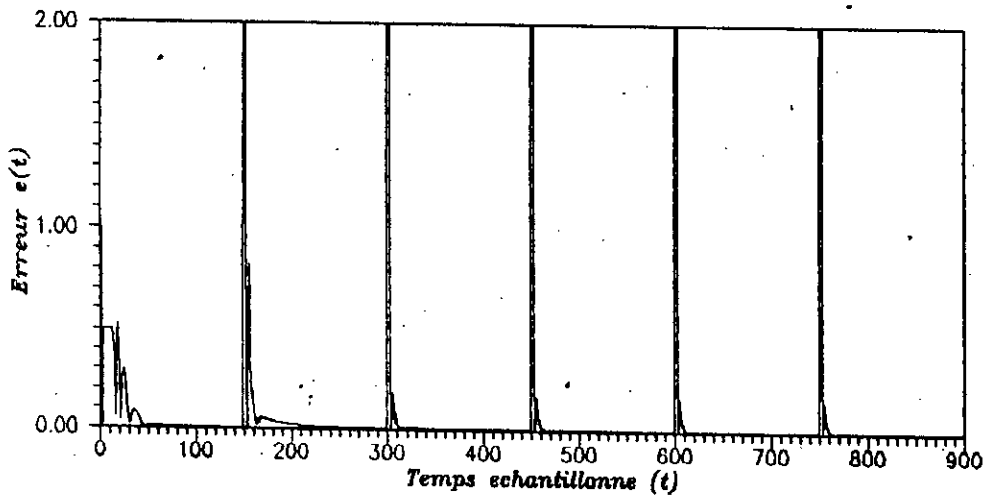


Fig.4.16.c Signal d'Erreur

Fig.4.16 : Controle en tenant compte de la boucle interne d'un systeme non-perturbe de 2-boucles en cascade. Regulation autour d'une consigne rectangulaire.



Exemple 1

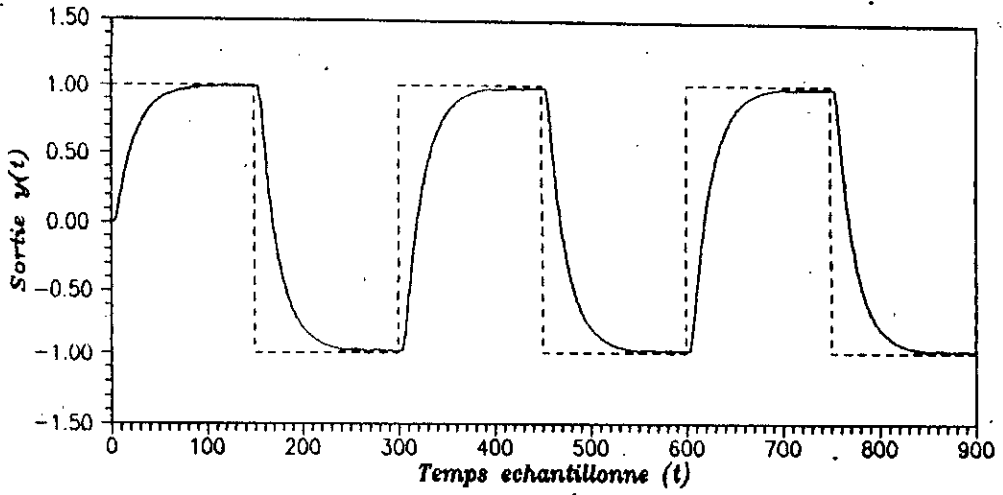


Fig.4.17.a Signal de Sortie

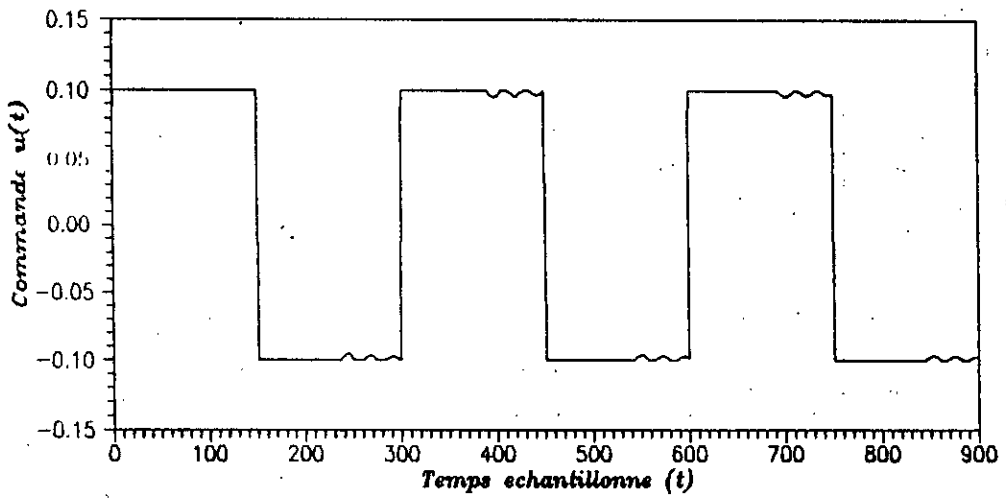


Fig.4.17.b Signal de Commande

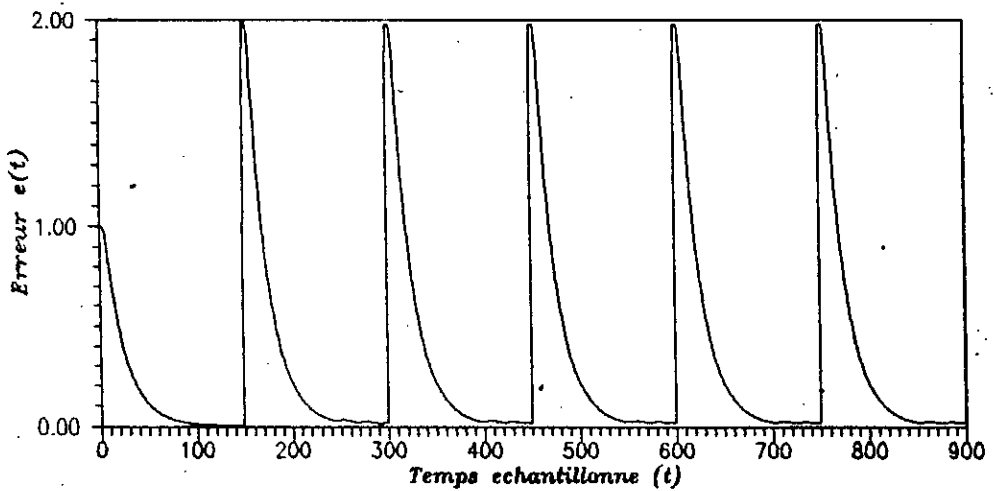


Fig.4.17.c Signal d'Erreur

Fig.4.17 : Controle par la methode du predicteur recursif d'un systeme non-perturbe de 2-boucles en cascade. Regulation autour d'une consigne rectangulaire.

Exemple 1

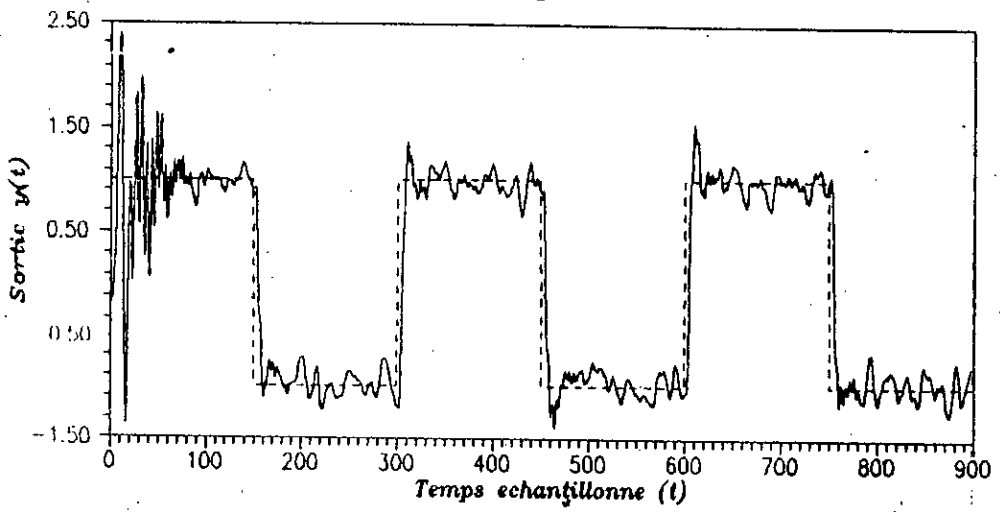


Fig.4.18.a Signal de Sortie

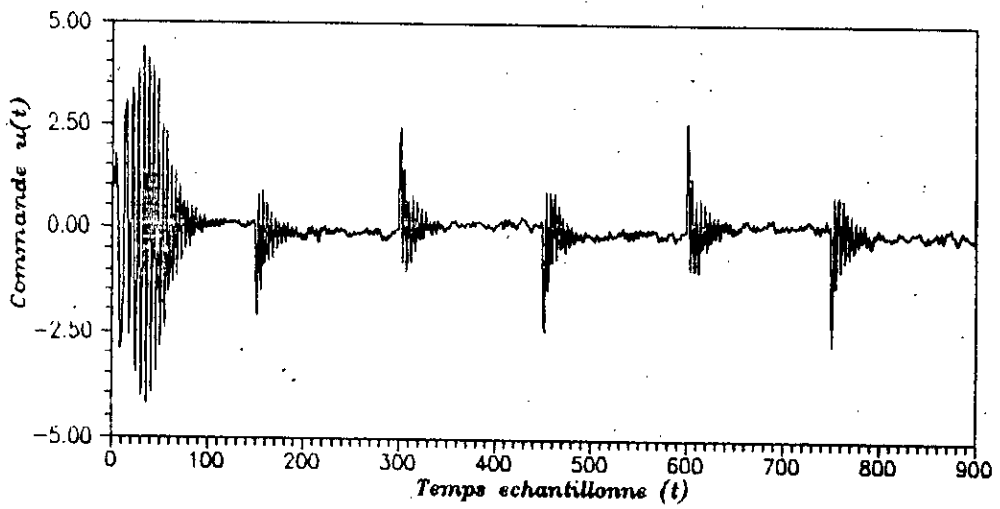


Fig.4.18.b Signal de Commande

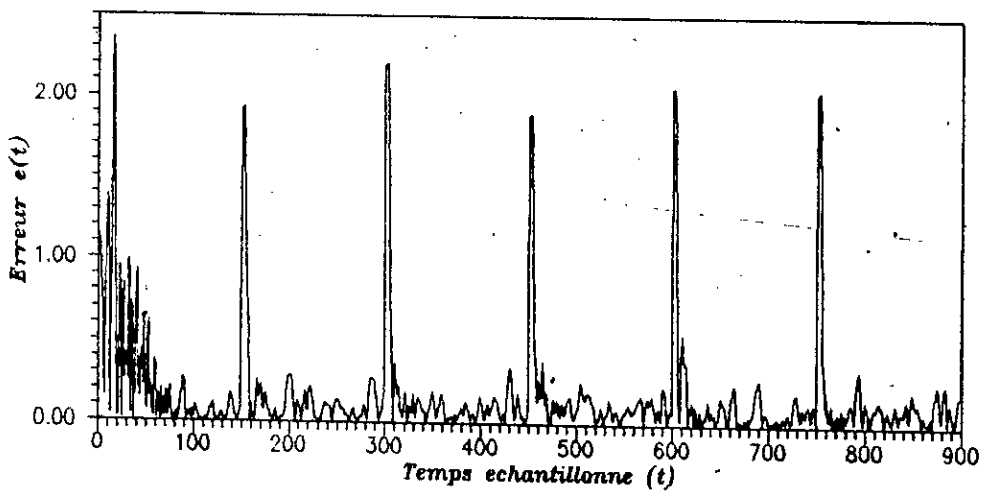


Fig.4.18.c Signal d'Erreur

Fig.4.18 : Controle mono-boucle, d'un systeme perturbe a 2-boucles en cascade  
Regulation autour d'une consigne rectangulaire

Exemple 1

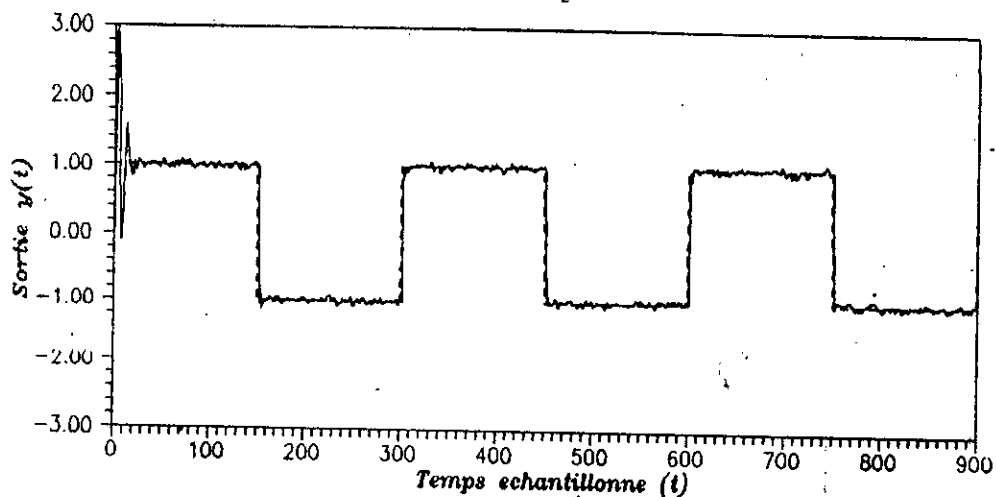


Fig.4.19.a Signal de Sortie

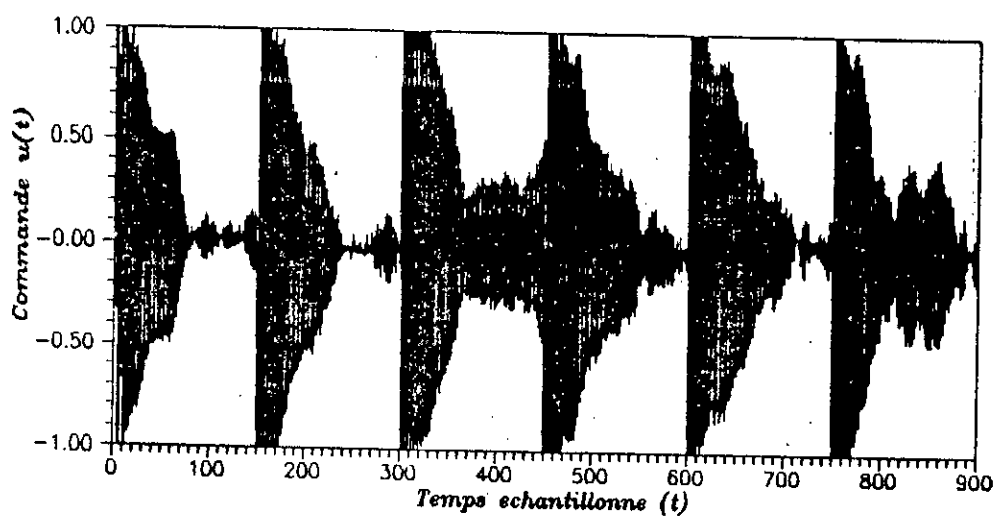


Fig.4.19.b Signal de Commande

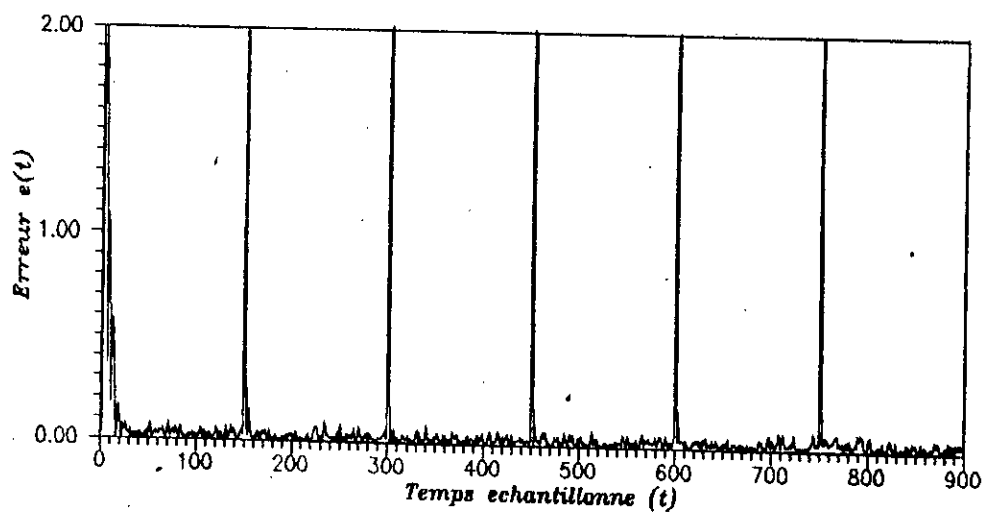


Fig.4.19.c Signal d'Erreur

Fig.4.19: Controle en ignorant la boucle interne d'un systeme perturbe de 2-boucles en cascade. Regulation autour d'une consigne rectangulaire.

Exemple 1

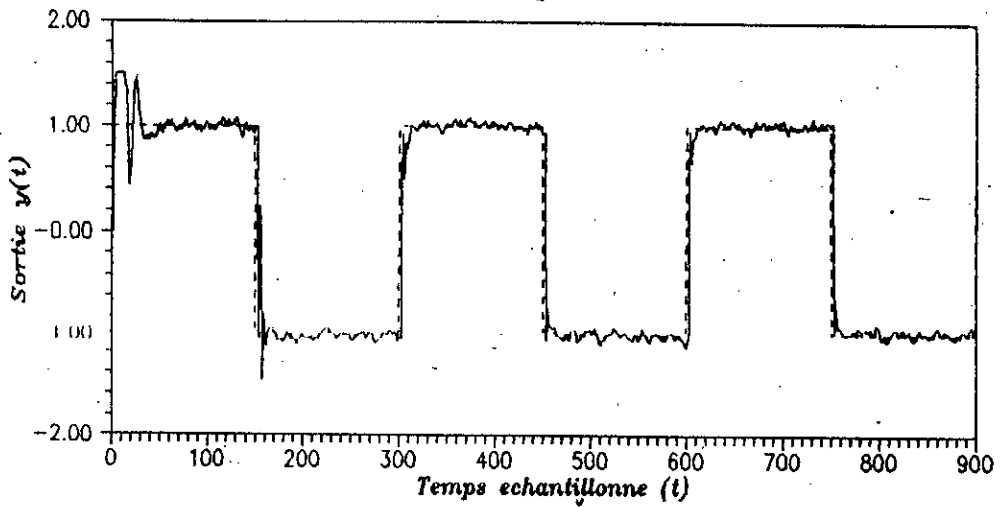


Fig.4.20.a Signal de Sortie

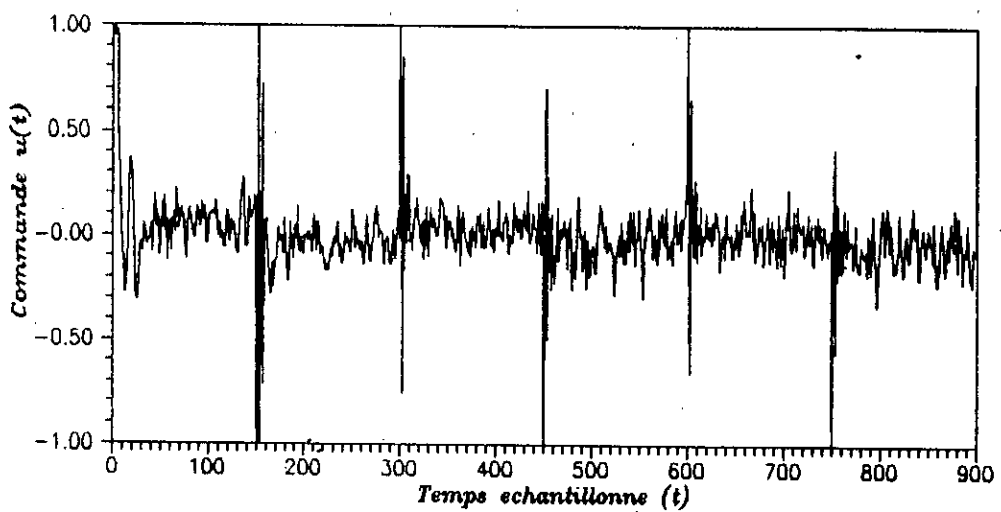


Fig.4.20.b Signal de Commande

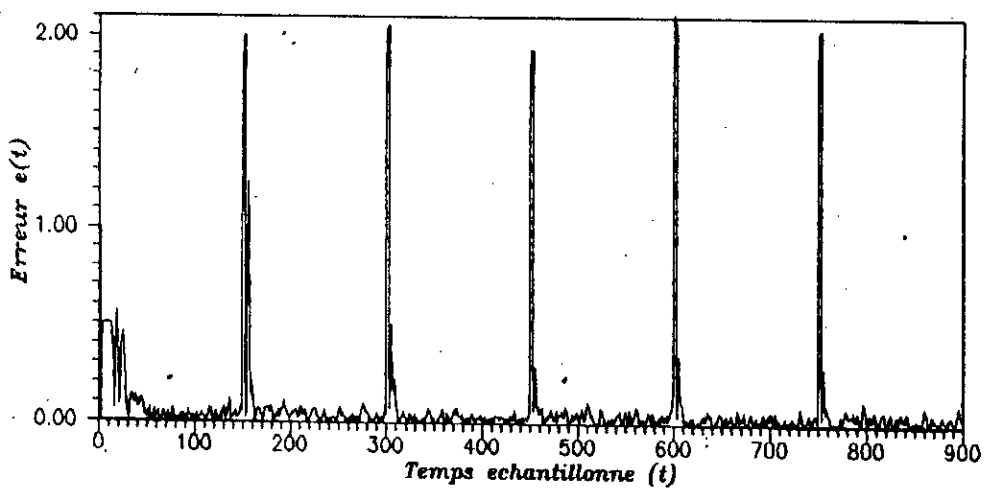


Fig.4.20.c Signal d'Erreur

Fig.4.20: Controle en tenant compte de la boucle interne d'un systeme perturbe a 2-boucles en cascade. Regulation autour d'une consigne rectangulaire.

Exemple 1

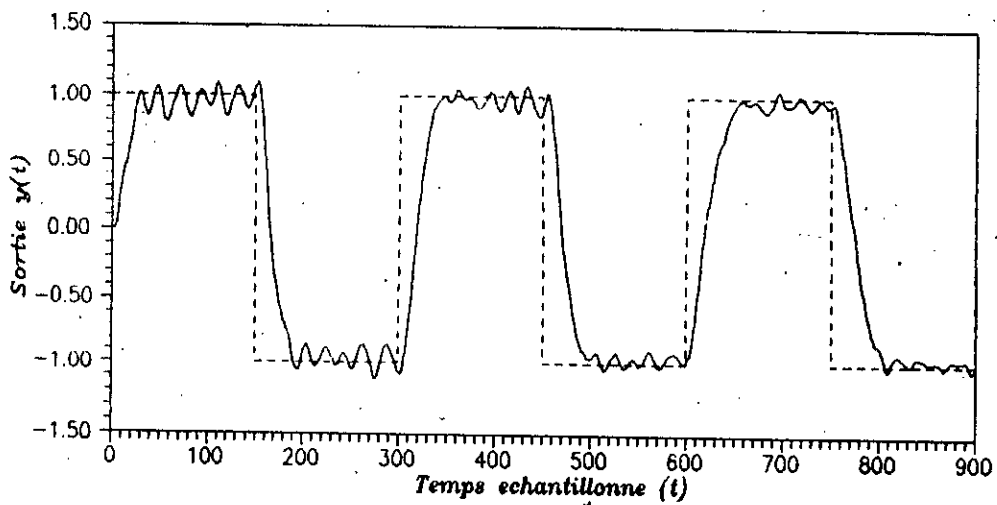


Fig.4.21.a Signal de Sortie

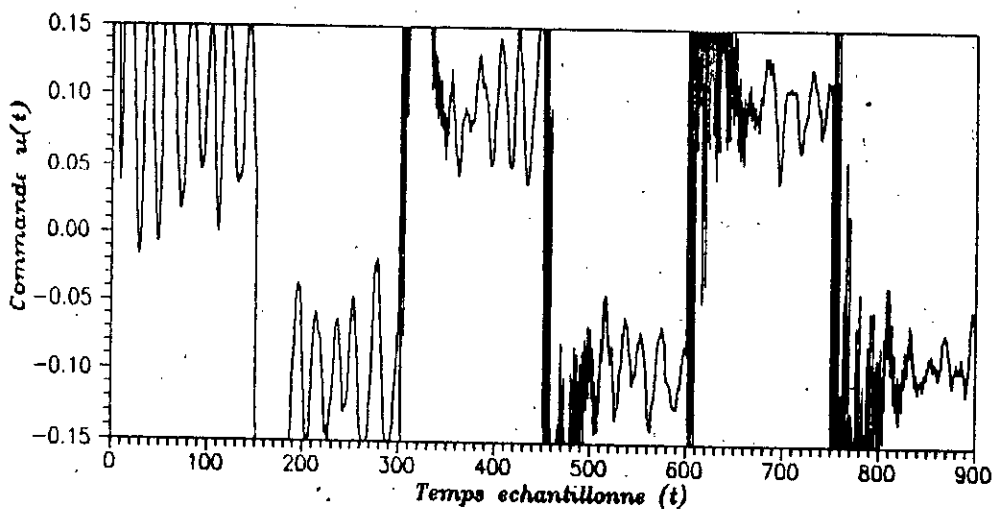


Fig.4.21.b Signal de Commande

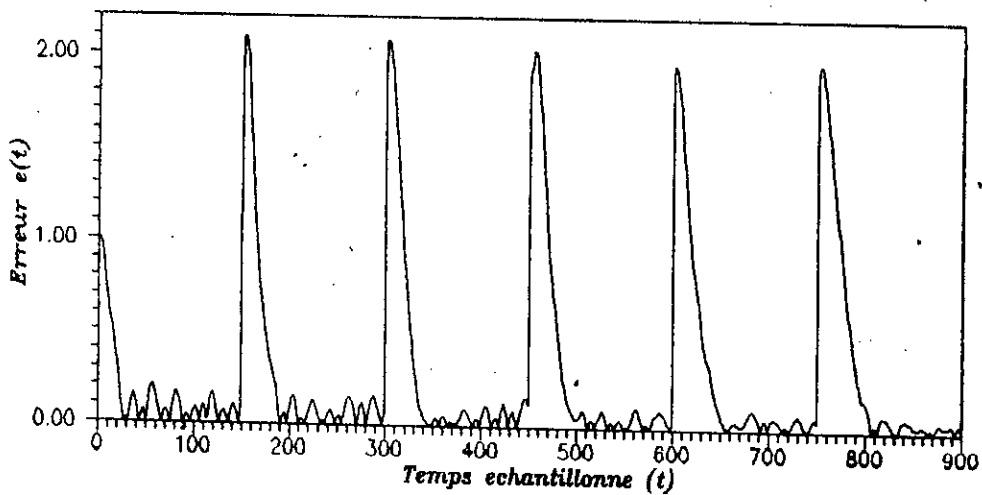


Fig.4.21.c Signal d'Erreur

Fig.4.21: Controle par la methode du predicteur recursif d'un systeme perturbe a 2-boucles en cascade. Regulation autour d'une consigne rectangulaire.

#### 4.2.2 Poursuite

Dans ce cas, il est souhaitable que la sortie du système en boucle fermée suit une trajectoire donnée par le modèle :

$$M(z^{-1}) = \frac{0.16}{(1-0.6z^{-1})^2} \quad (4.3)$$

D'après les relations (3.8) et (3.9) on a :

$$M(z^{-1}) = \frac{1}{S_1(z^{-1})^2 S_2(z^{-1})}$$

De ce fait, les différentes approches de contrôle en cascade sont appliquées pour :

$$S_1(z^{-1}) = S_2(z^{-1}) = 2.5(1-0.6z^{-1}). \quad (4.4)$$

Les figures 4.22 à 4.25 donnent les signaux de sortie, de commande et de l'erreur, pour une consigne  $w(t)$  (en pointillé), rectangulaire, dans le cas où le système est non-perturbé ( $\xi(t)=0$ ).

Exemple 1

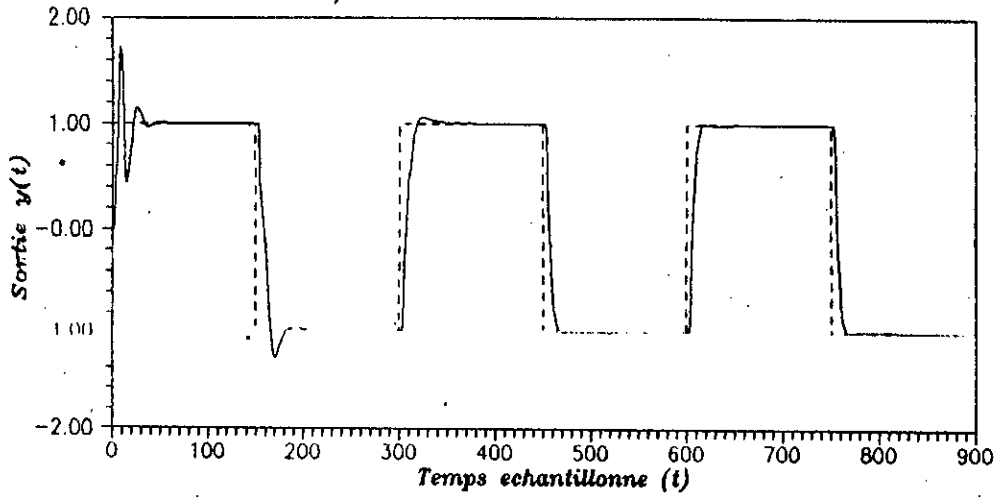


Fig.4.22.a Signal de Sortie

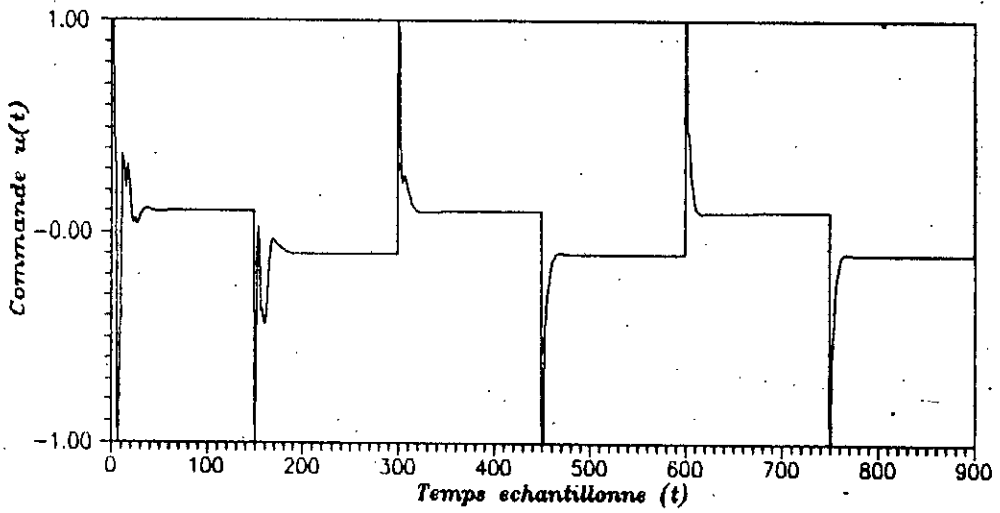


Fig.4.22.b Signal de Commande

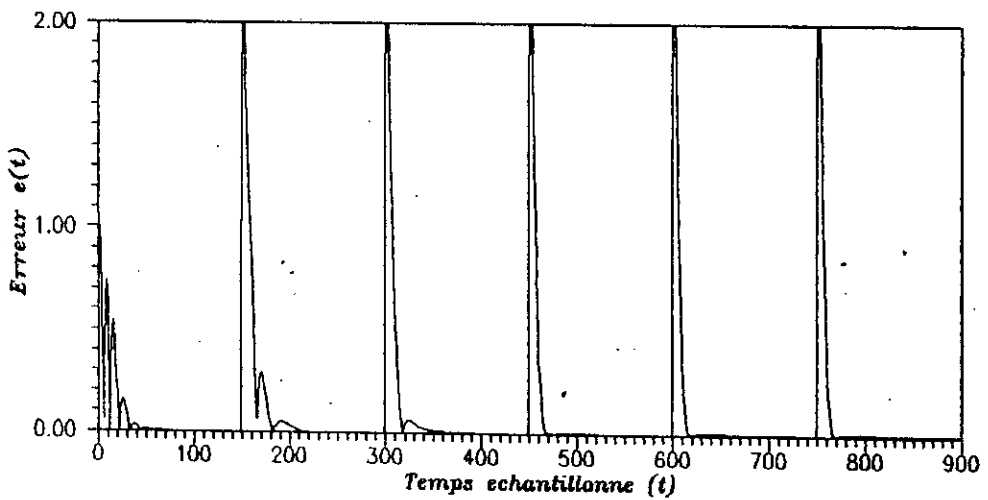


Fig.4.22.c Signal d'Erreur

Fig.4.22 : Controle mono-boucle, d'un systeme non-perturbe a 2-boucles en cascade. Poursuite d'un modele.

Exemple 1

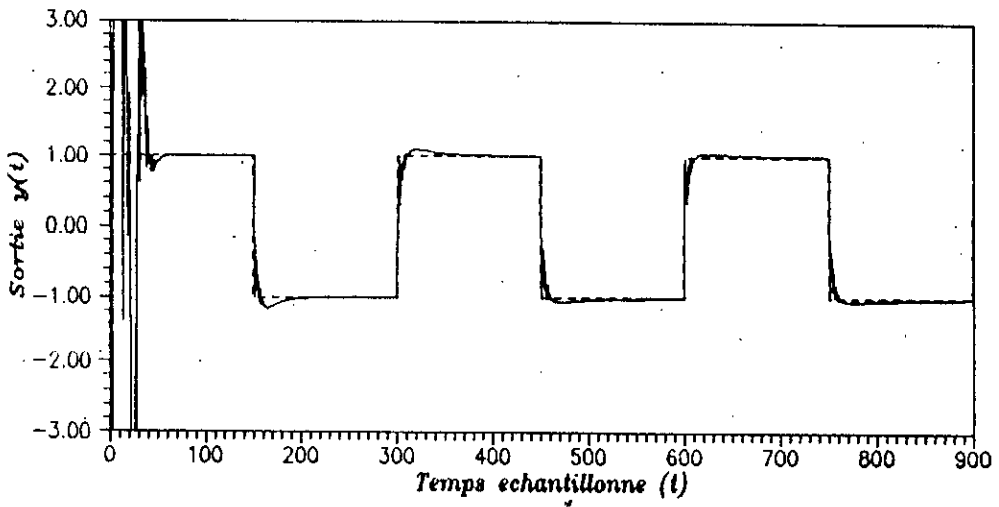


Fig.4.23.a Signal de Sortie

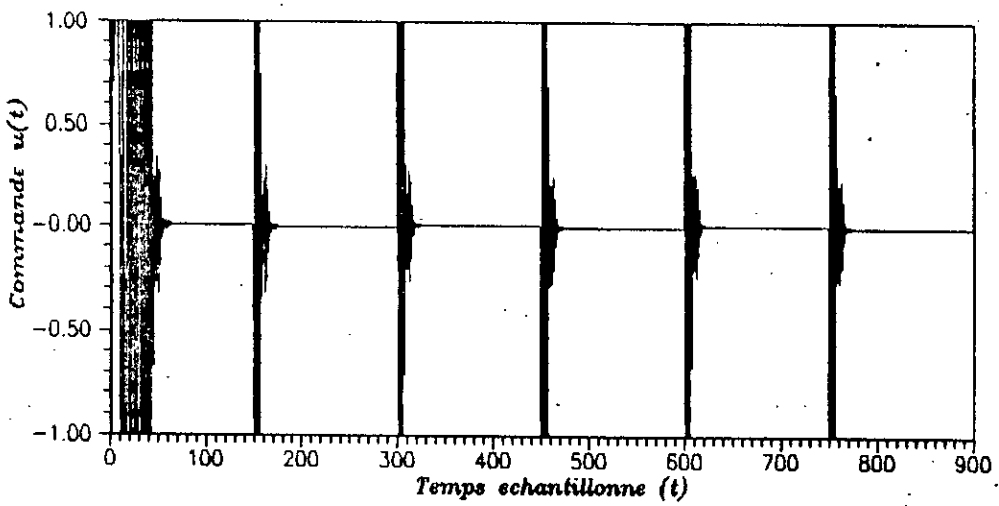


Fig.4.23.b Signal de Commande

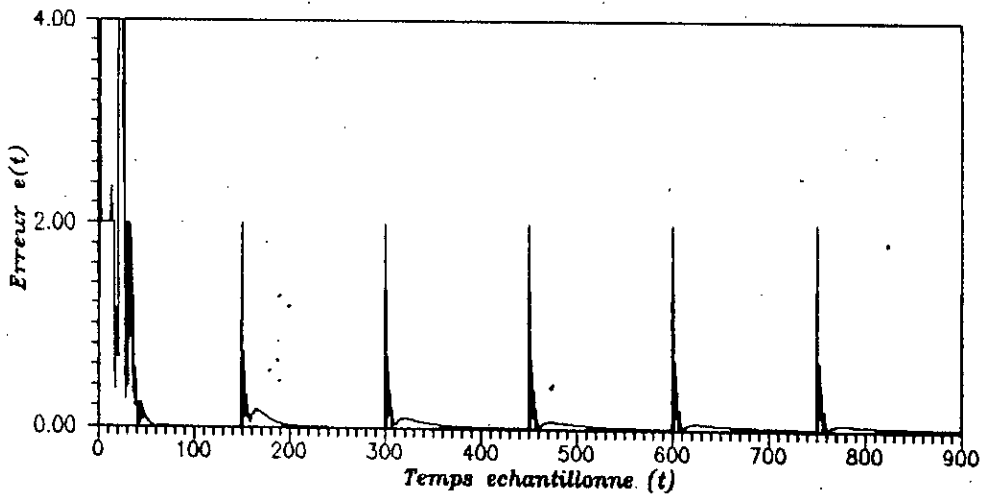


Fig.4.23.c Signal d'Erreur

Fig.4.23 : Controle en ignorant la boucle interne d'un systeme non-perturbe de 2-boucles en cascade. Poursuite d'un modele.



Exemple 1

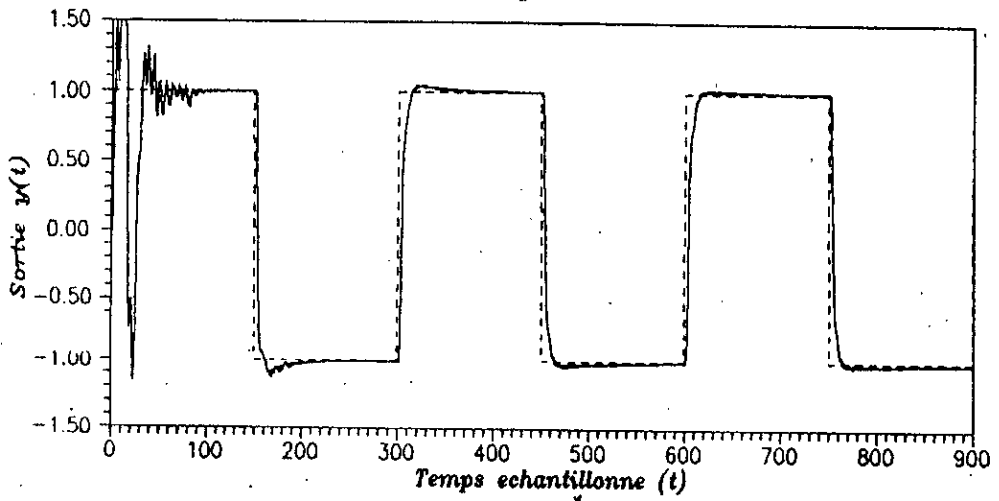


Fig.4.24.a Signal de Sortie

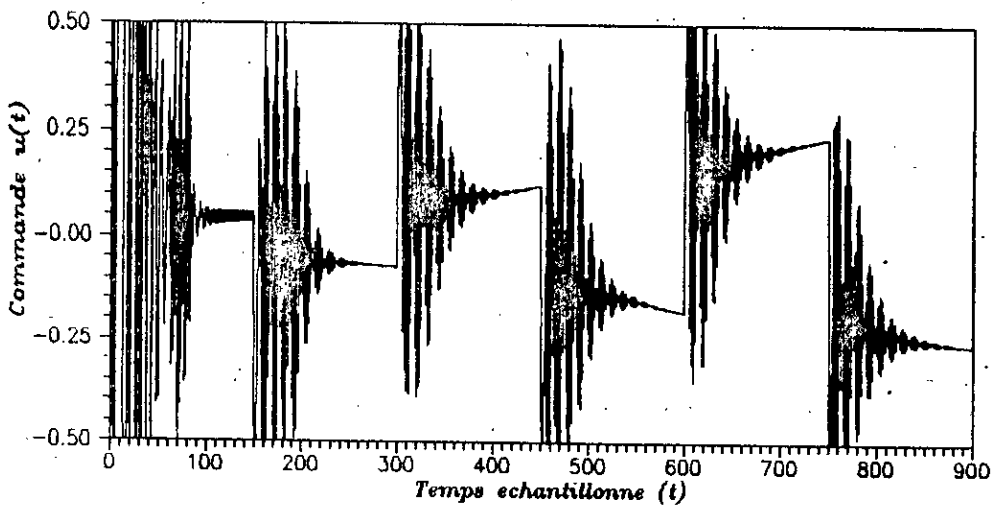


Fig.4.24.b Signal de Commande

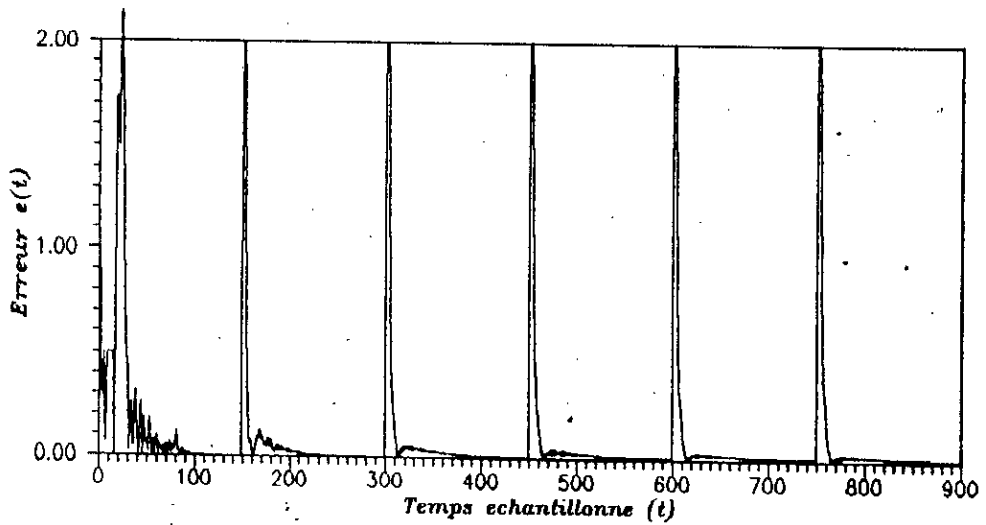


Fig.4.24.c Signal d'Erreur

Fig.4.24 : Controle en tenant compte de la boucle interne d'un systeme non-perturbe de 2-boucles en cascade. Poursuite d'un modele.

Exemple 1

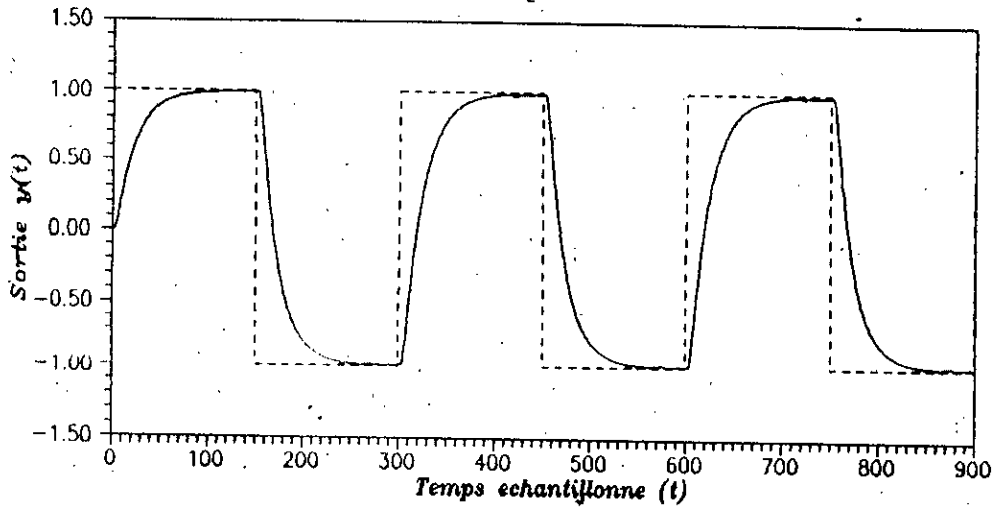


Fig.4.25.a Signal de Sortie

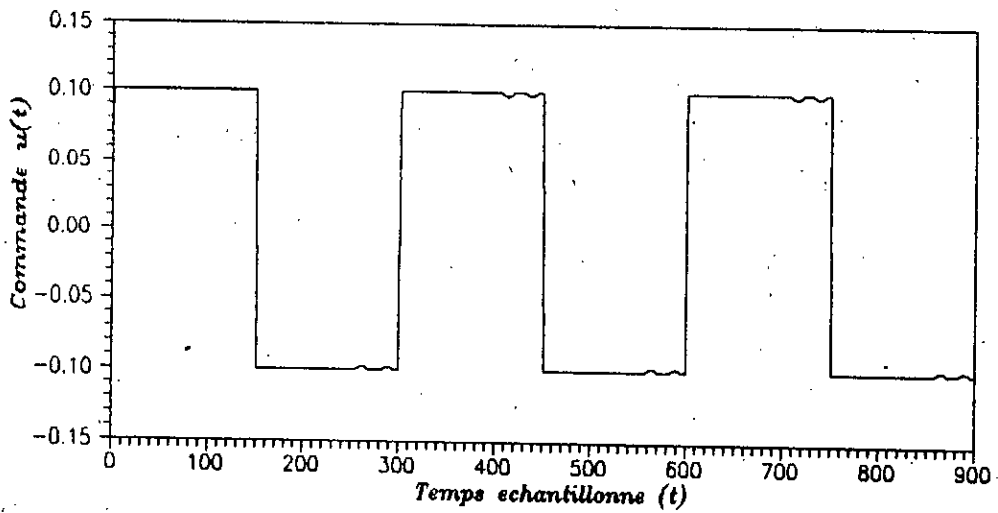


Fig.4.25.b Signal de Commande

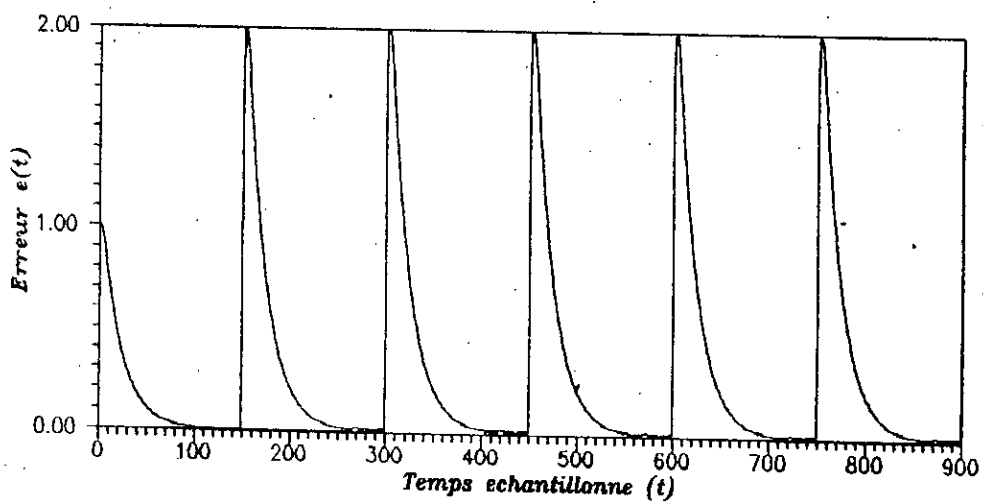


Fig.4/25.c Signal d'Erreur

Fig.4.25 : Controle par la methode du predicteur recursif d'un systeme non-perturbe de 2-boucles en cascade. Poursuite d'un modele.

### 4.2.3 Interpretation des résultats

D'après les courbes données par les figures 4.1 à 4.21, on remarque que les quatre approches adoptées pour le contrôle, conduisent le système aux performances désirées, à savoir, la régulation de la sortie du système autour d'une consigne donnée (constante, triangulaire, et rectangulaire).

Maintenant, si on compare la qualité des résultats, donné par chaque approche, on voit que le contrôle en cascade en tenant compte de la boucle interne conduit, en général, à de meilleures performances. C'est ce que montrent les figures 4.1, 4.3, 4.16, 4.20 et 4.24, pour les cas où les consignes sont constantes ou rectangulaires. Néanmoins pour le cas d'une consigne triangulaire les meilleurs résultats sont donnés par le contrôle en ignorant la boucle interne. C'est ce que montrent les figures 4.7 et 4.12. Ceci est dû, à notre avis, à la nature de la consigne triangulaire qui varie continuellement avec le temps. Alors que le contrôle du système par la "Méthode du Prédicteur Récurssif", nécessite le plus faible effort de commande.

L'introduction des polynômes de pondération donnés par l'équation (4.4), dans la fonction coût à minimiser, améliore nettement les performances du système, ce qui est illustré par les figures 4.22 à 4.25.

### 4.3 EXEMPLE 2 : ETUDE DE L'EFFET DE LA BOUCLE INTERNE

Un système en cascade peut être contrôlé, tout en négligeant la dynamique de la boucle interne devant celle de la boucle externe. Cette approximation est justifiée, quand la constante de temps de la boucle interne est faible devant celle de la boucle externe.

Dans l'exemple précédent (exemple 1), et dans le cas où le système poursuit le modèle donné par l'équation (4.3), les équations de la boucle interne et de la boucle externe, et d'après les relations (3.8), (3.9), (3.17) et (3.18), sont données, respectivement, par:

$$y_1(t) = z^{-2} \frac{0.4}{1-0.6z^{-1}} w_1(t) + \frac{0.6+0.006z^{-1}}{1-0.606z^{-1}} \xi(t)$$

$$y_2(t) = z^{-2} \frac{1+0.833z^{-1}}{1-0.951z^{-1}} \cdot y_1(t) + \frac{1+0.264z^{-1}}{1-0.951z^{-1}} \xi(t)$$

On remarque que la constante de temps (temps nécessaire pour que la sortie du système atteigne les deux tiers du régime permanent), de la boucle interne ( $\tau_{bi}=0.0195\text{sec}$ ) est inférieure à celle de la boucle externe ( $\tau_{be}=0.199\text{sec}$ ). De ce fait les résultats relatifs à cette approche et qui sont donnés par la figure 4.23, sont très satisfaisants. Ces résultats sont aussi bons que ceux donnés par l'approche qui tient compte de la dynamique de la boucle interne.

Considérons le système à deux boucles en cascade, représenté par le modèle donné par les équations suivantes :

$$y_1(t) = z^{-2} \frac{0.1}{1-0.4z^{-1}} u_1(t) + \frac{1}{1-0.4z^{-1}} \xi(t) \quad (4.5)$$

$$y_2(t) = z^{-2} \frac{1+0.7z^{-1}}{1-0.1z^{-1}} y_1(t) + \frac{1}{1-0.1z^{-1}} \xi(t) \quad (4.6)$$

$\xi(t)$ : bruit blanc discret de moyenne nulle et de variance finie.

$y(t) = y_2(t)$  est la sortie du système,  $u(t) = u_1(t)$  est l'entrée de commande.

Pour le sous-système 1, on a :

- $n_1 = 1$
- $k_1 = 2$
- $A_1(z^{-1}) = 1 - 0.4z^{-1}$
- $B_1(z^{-1}) = 0.1$
- $C_1(z^{-1}) = 1$ .

Pour le sous-système 2, on a :

- $n_2 = 1$
- $k_2 = 2$
- $A_2(z^{-1}) = 1 - 0.1z^{-1}$
- $B_2(z^{-1}) = 1 + 0.7z^{-1}$
- $C_2(z^{-1}) = 1$ .

Dans ce cas, il est souhaitable que la sortie du système en boucle fermée suive une trajectoire donnée par le modèle :

$$M(z^{-1}) = \frac{0.04}{(1-0.8z^{-1})^2} \quad (4.7)$$

D'après les relations (3.8) et (3.9), les différentes approches de contrôle en cascade sont appliquées pour :

$$S_1(z^{-1}) = S_2(z^{-1}) = 5(1-0.8z^{-1}). \quad (4.8)$$

Les figures 4.26 à 4.29 donnent les signaux de sortie, de commande et de l'erreur, pour une consigne  $w(t)$  (en pointillé), rectangulaire, dans le cas où le système est perturbé par un bruit blanc de moyenne nulle et de variance égale à 0.01 ( $\text{var}[\xi(t)] = 0.01$ ).

Exemple 2

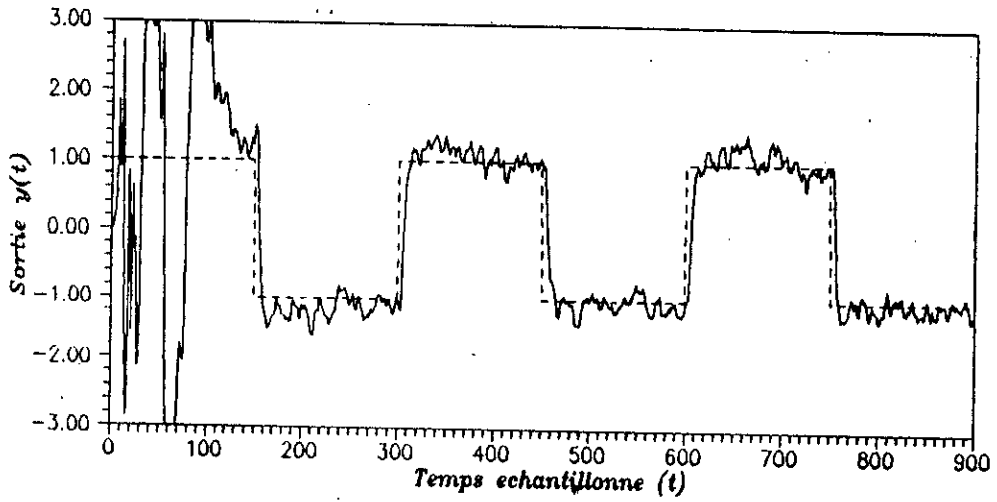


Fig.4.26.a Signal de Sortie

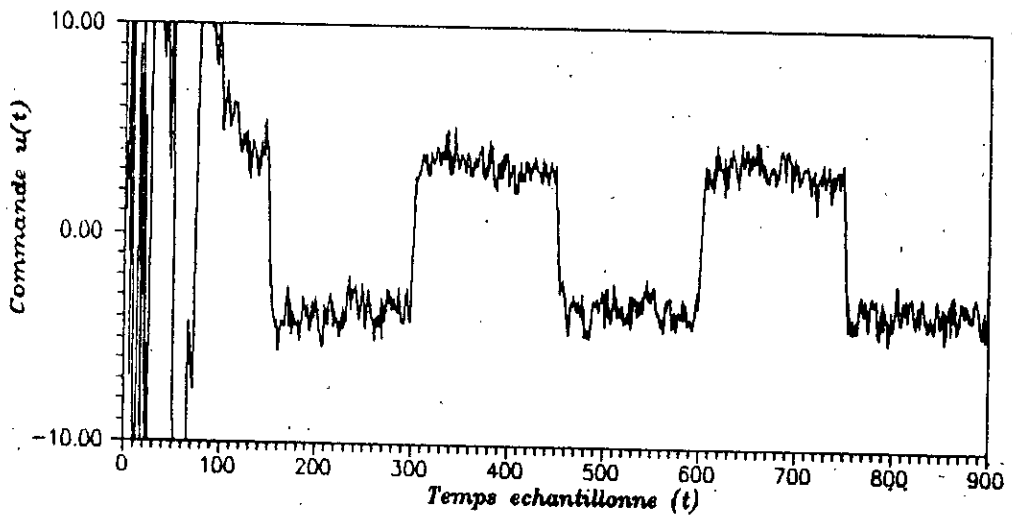


Fig.4.26.b Signal de Commande

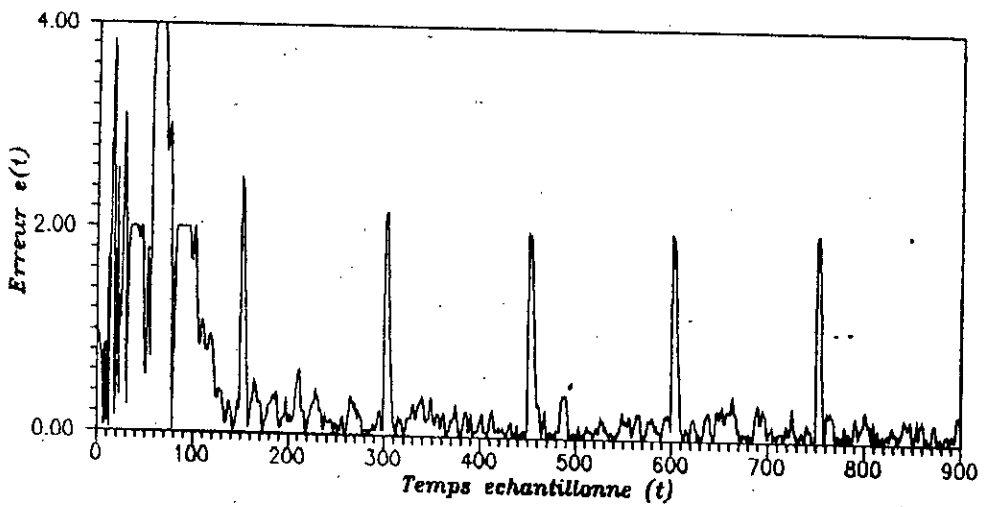


Fig.4.26.c Signal d'Erreur

Fig.4.26 : Controle mono-boucle, d'un systeme perturbe a 2-boucles en cascade. Poursuite d'un modele.

Exemple 2

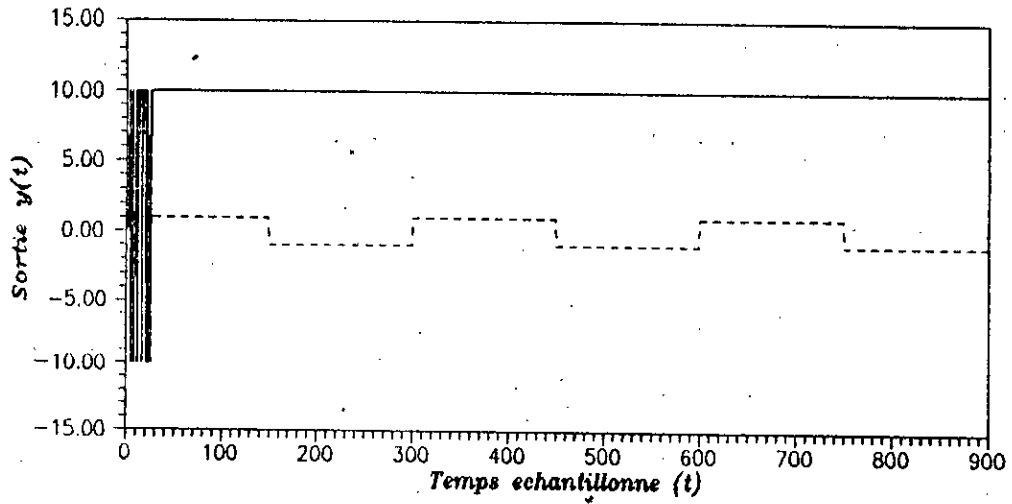


Fig.4.27.a Signal de Sortie

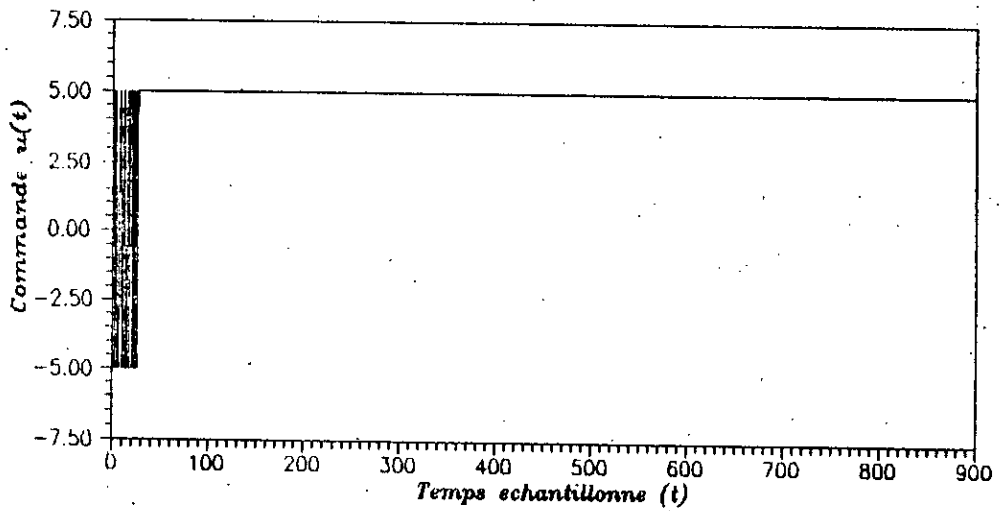


Fig.4.27.b Signal de Commande

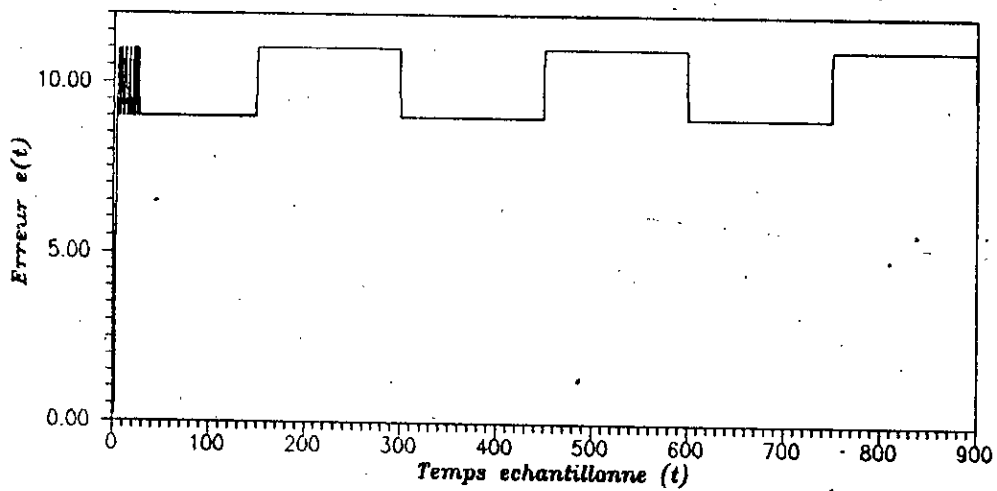


Fig.4.27.c Signal d'Erreur

Fig.4.27 : Controle en ignorant la boucle interne d'un systeme perturbe de 2-boucles en cascade. Poursuite d'un modele.

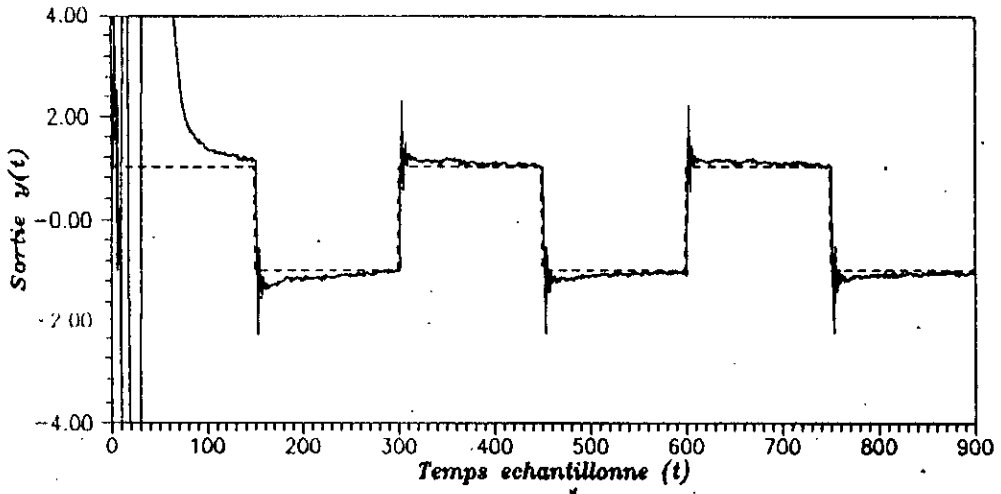


Fig.4.28.a Signal de Sortie

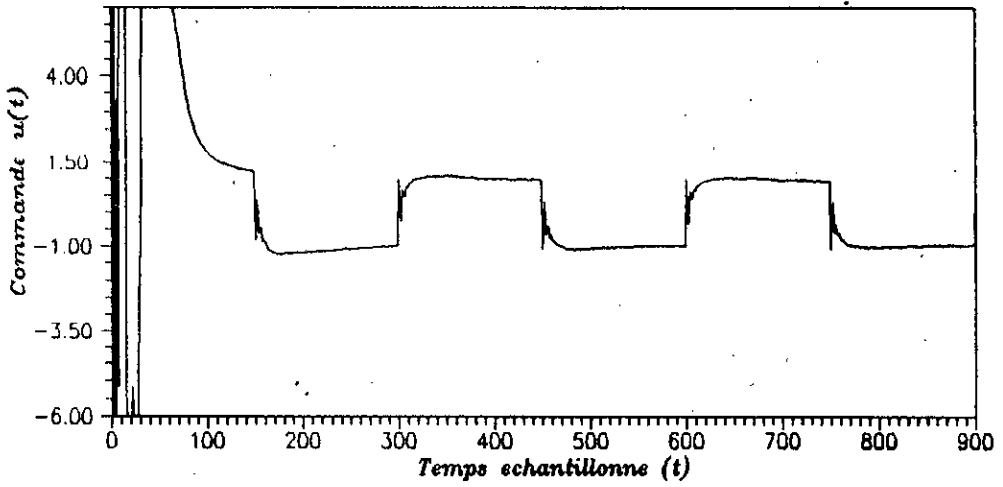


Fig.4.28.b Signal de Commande

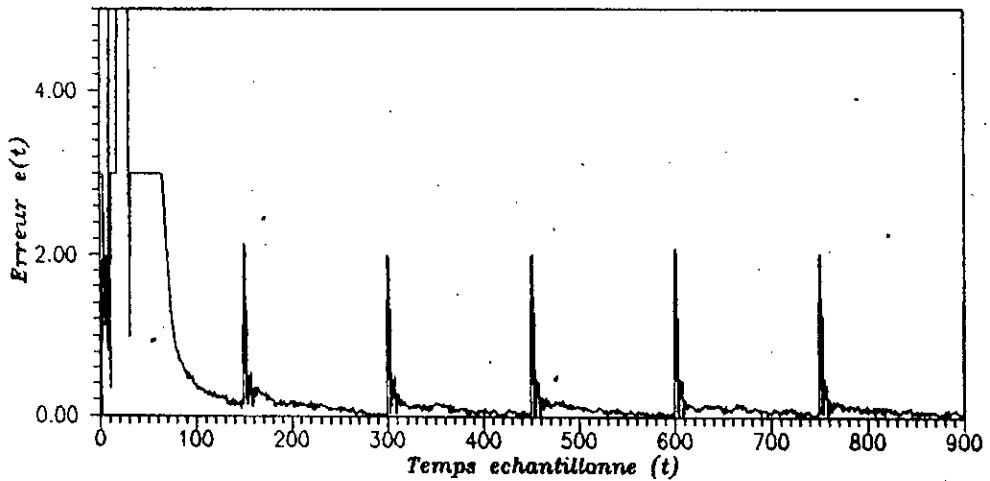


Fig.4.28.c Signal d'Erreur

Fig.4.28 : Controle en tenant compte de la boucle interne d'un systeme perturbe de 2-boucles en cascade. Poursuite d'un modele.



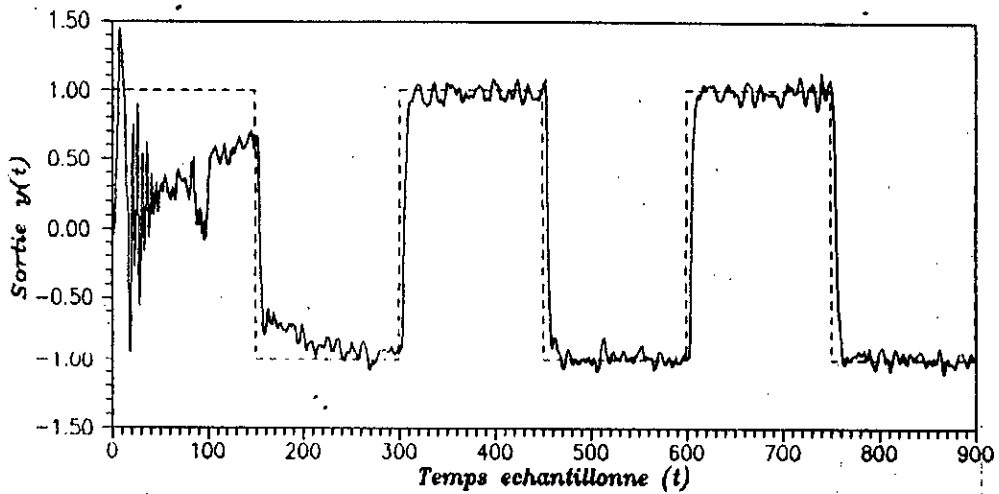


Fig.4.29.a Signal de Sortie

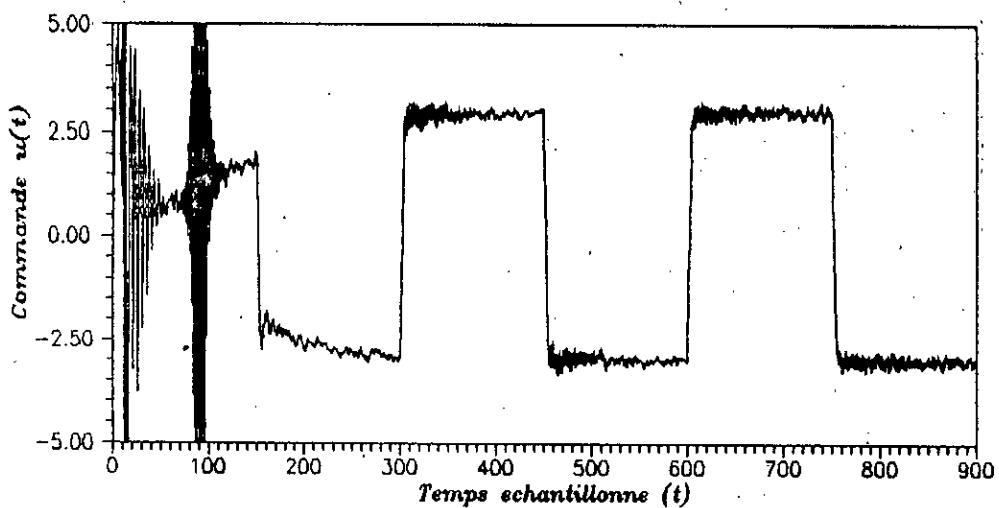


Fig.4.29.b Signal de Commande

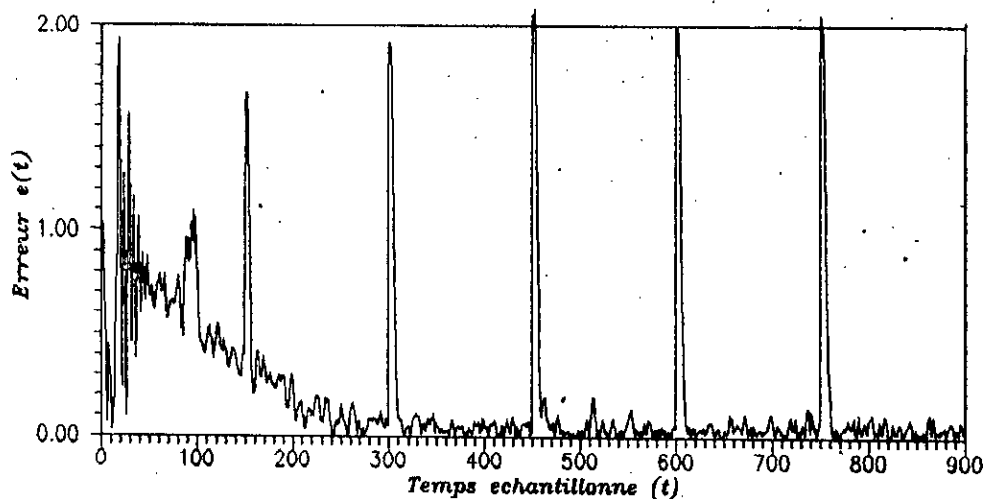


Fig.4.29.c Signal d'Erreur

Fig.4.29 : Controle par la methode du predicteur recursif d'un systeme perturbe de 2-boucles en cascade. Poursuite d'un modele.

Dans ce cas, les équations de la boucle interne et de la boucle externe, et d'après les relations (3.8), (3.9), (3.17) et (3.18), sont données, respectivement, par:

$$y_1(t) = z^{-2} \frac{0.4}{1-0.6z^{-1}} w_1(t) + \frac{0.6+0.006z^{-1}}{1-0.606z^{-1}} \xi(t)$$

$$y_2(t) = z^{-2} \frac{1+0.833z^{-1}}{1-0.951z^{-1}} y_1(t) + \frac{1+0.264z^{-1}}{1-0.951z^{-1}} \xi(t)$$

On remarque que la constante de temps de la boucle interne ( $\tau_{bi}=0.0448\text{sec}$ ) est supérieure à celle de la boucle externe ( $\tau_{be}=0.0043\text{sec}$ ). La dynamique de la boucle externe est plus rapide que celle de la boucle interne. Ceci rend impossible le contrôle du système en ignorant la dynamique de la boucle interne (système instable en boucle fermée). Ceci est illustré par la figure 4.27. Par contre l'application des autres approches donne de bons résultats. Ce qui est illustré par les figures 4.26, 4.28 et 4.29.

#### 4.4 EXEMPLE 3: SYSTEME A QUATRE BOUCLES

Considérons le système à quatre boucle en cascade, représenté par les équations suivantes :

$$y_1(t) = z^{-1} \frac{0.202}{1-0.412z^{-1}} u_1(t) + \frac{1}{1-0.412z^{-1}} \xi(t) \quad (4.9)$$

$$y_2(t) = z^{-1} \frac{1+0.744z^{-1}}{1-0.933z^{-1}} y_1(t) + \frac{1+0.363z^{-1}}{1-0.933z^{-1}} \xi(t) \quad (4.10)$$

$$y_3(t) = z^{-1} \frac{0.481}{1-0.784z^{-1}} y_2(t) + \frac{1}{1-0.784z^{-1}} \xi(t) \quad (4.11)$$

$$y_4(t) = z^{-1} \frac{1}{1-0.677z^{-1}} y_3(t) + \frac{1}{1-0.677z^{-1}} \xi(t) \quad (4.12)$$

$\xi(t)$ : bruit blanc discret de moyenne nulle et de variance finie.

$y(t) = y_4(t)$  est la sortie du système,  $u(t) = u_1(t)$  est l'entrée de commande.

Pour le sous-système 1, on a :

- $n_1 = 1$
- $k_1 = 1$
- $A_1(z^{-1}) = 1 - 0.412z^{-1}$
- $B_1(z^{-1}) = 0.202$
- $C_1(z^{-1}) = 1.$

Pour le sous-système 2, on a :

- $n_2 = 1$
- $k_2 = 1$
- $A_2(z^{-1}) = 1 - 0.933z^{-1}$
- $B_2(z^{-1}) = 1 + 0.744z^{-1}$
- $C_2(z^{-1}) = 1 + 0.993z^{-1}.$

Pour le sous-système 3, on a :

- $n_3 = 1$
- $k_3 = 1$
- $A_3(z^{-1}) = 1 - 0.784z^{-1}$
- $B_3(z^{-1}) = 0.481$
- $C_3(z^{-1}) = 1.$

Pour le sous-système 4, on a :

- $n_4 = 1$
- $k_4 = 1$
- $A_4(z^{-1}) = 1 - 0.677z^{-1}$
- $B_4(z^{-1}) = 1$
- $C_4(z^{-1}) = 1.$

Il est souhaitable que la sortie du système en boucle fermée suit une consigne  $w(t)$ , rectangulaire (Courbes en pointillé sur toutes les figures). Les différentes approches de contrôle en cascade sont appliquées pour :

$$S_1(z^{-1}) = S_2(z^{-1}) = S_3(z^{-1}) = S_4(z^{-1}) = 1.$$

Les figures 4.30 à 4.33, illustrent les résultats obtenus pour chacune des quatre approches utilisées, dans le cas où le système, donné par les équations (4.9) à (4.12), est perturbé par un bruit blanc de moyenne nulle et de variance égale à 0.01 ( $\text{var}[\xi(t)] = 0.01$ ).

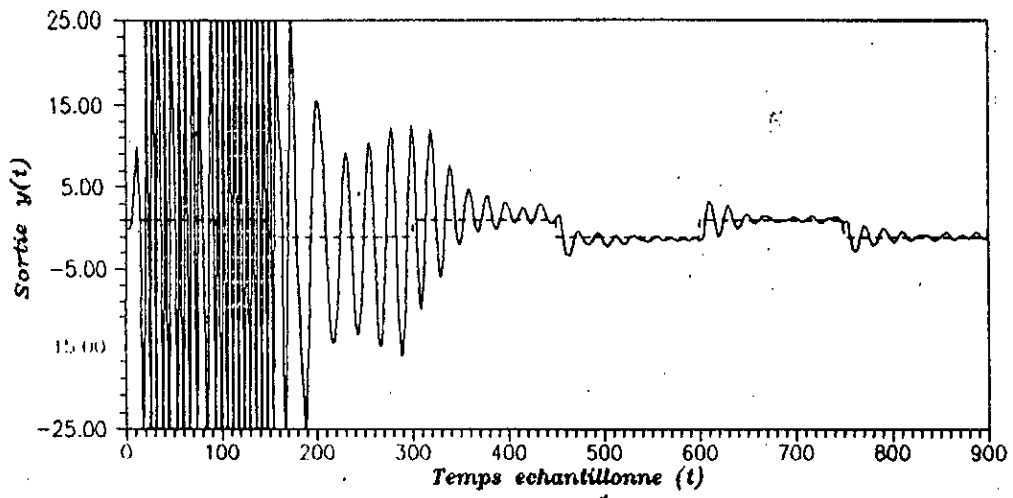


Fig.4.30.a Signal de Sortie

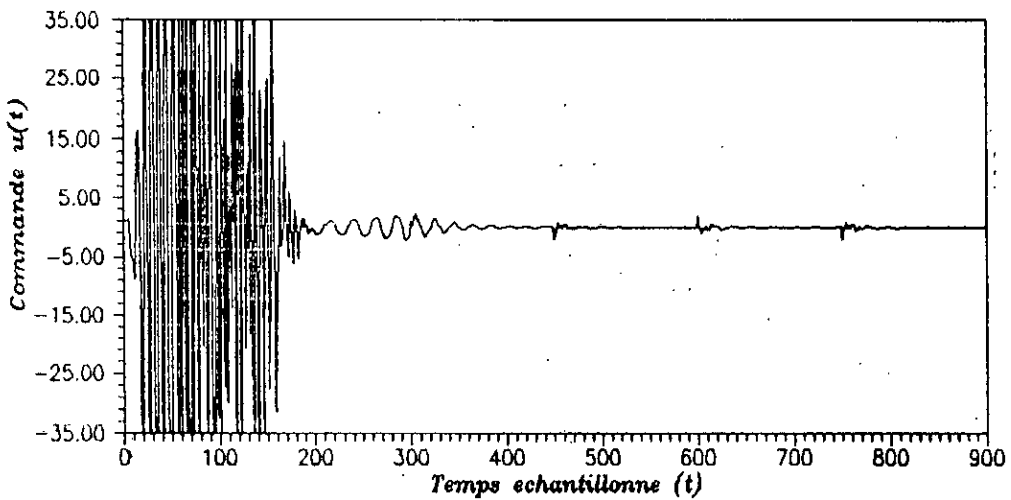


Fig.4.30.b Signal de Commande

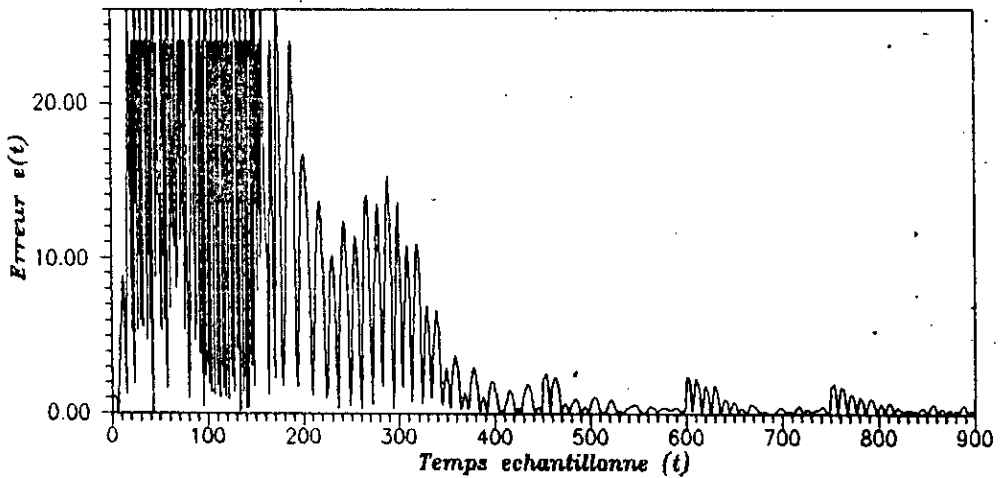


Fig.4.30.c Signal d'Erreur

Fig.4.30 : Controle mono-boucle, d'un systeme perturbe a 4-boucles en cascade. Regulation autour d'une consigne rectangulaire.

Exemple 3

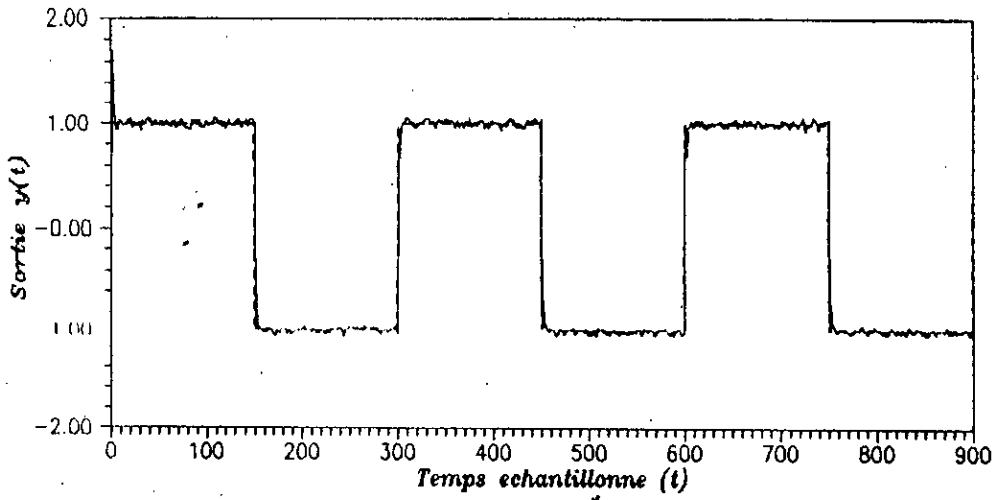


Fig.4.31.a Signal de Sortie

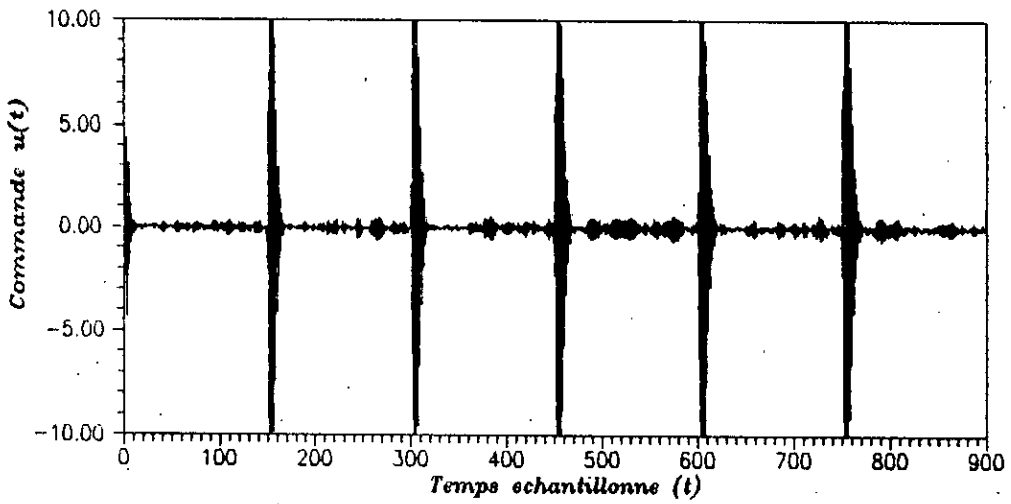


Fig.4.31.b Signal de Commande

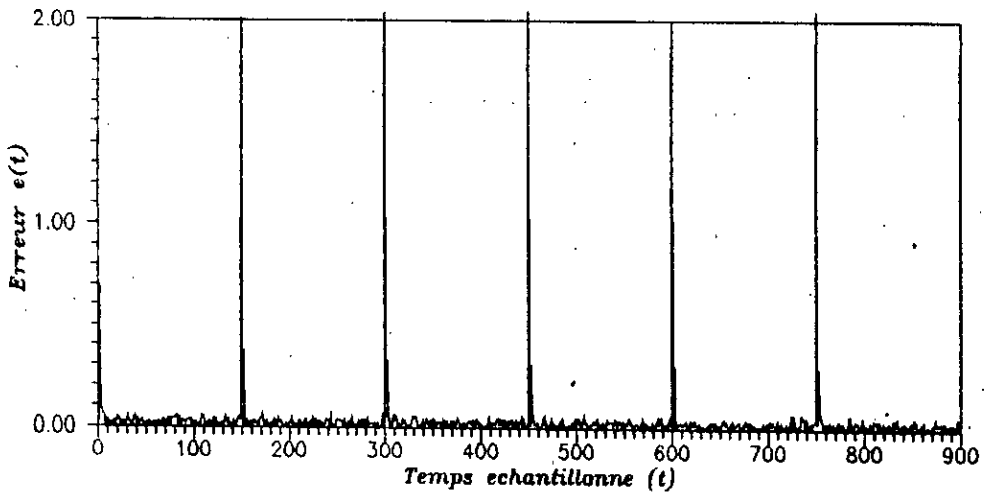


Fig.4.31.c Signal d'Erreur

Fig.4.31: Controle en ignorant la boucle interne d'un systeme perturbe de 4-boucles en cascade. Regulation autour d'une consigne rectangulaire.

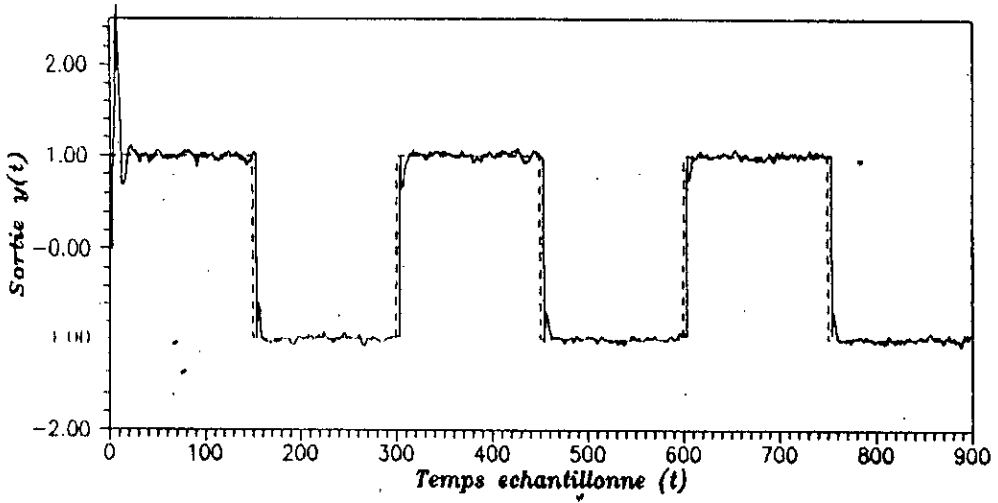


Fig.4.32.a Signal de Sortie

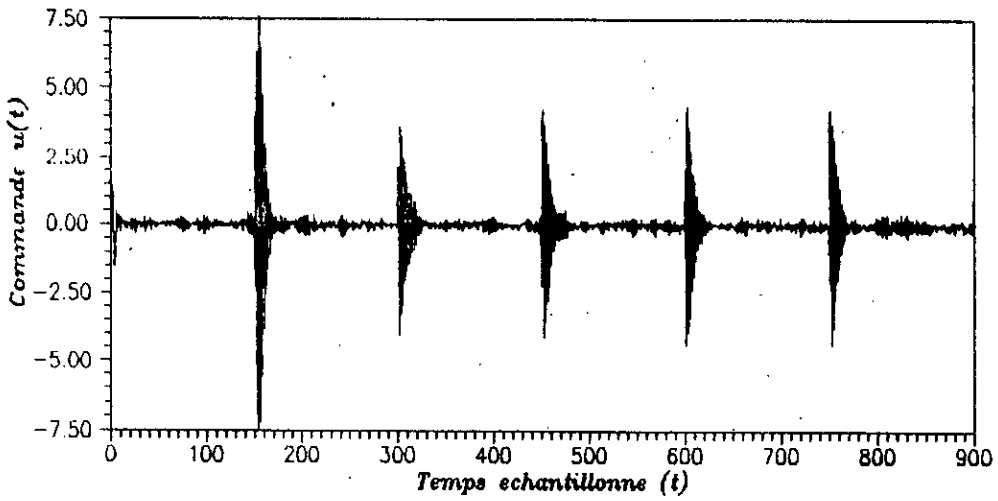


Fig.4.32.b Signal de Commande

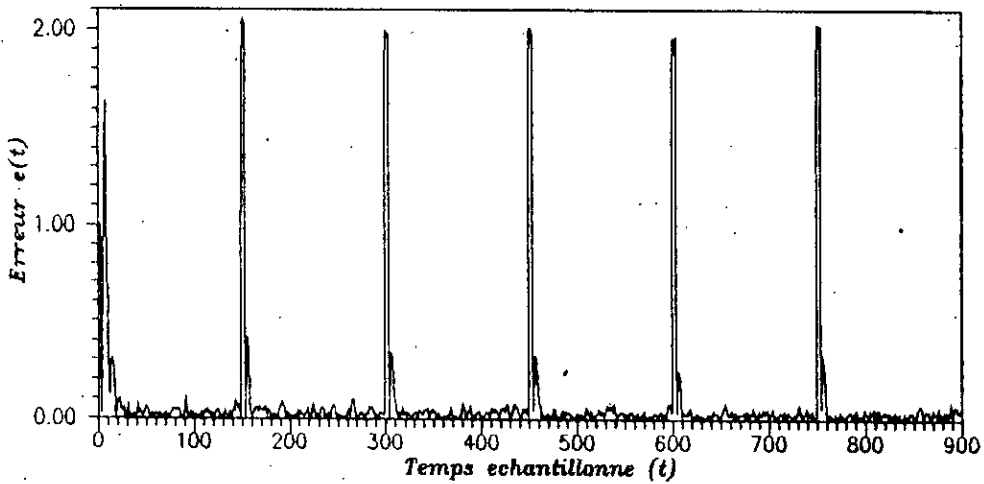


Fig.4.32.c Signal d'Erreur

Fig.4.32: Controle en tenant compte de la boucle interne d'un systeme perturbe a 4-boucles en cascade. Regulation autour d'une consigne rectangulaire.

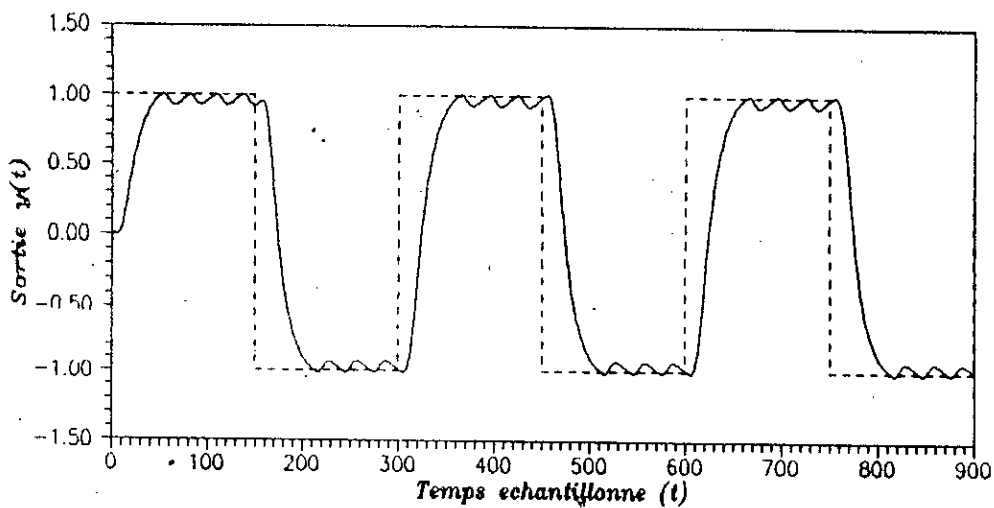


Fig.4.33.a Signal de Sortie

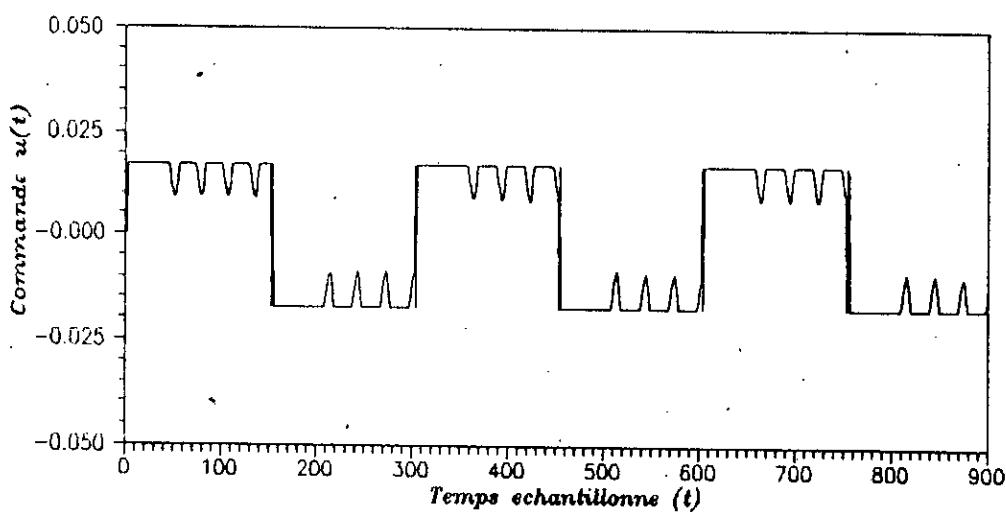


Fig.4.33.b Signal de Commande

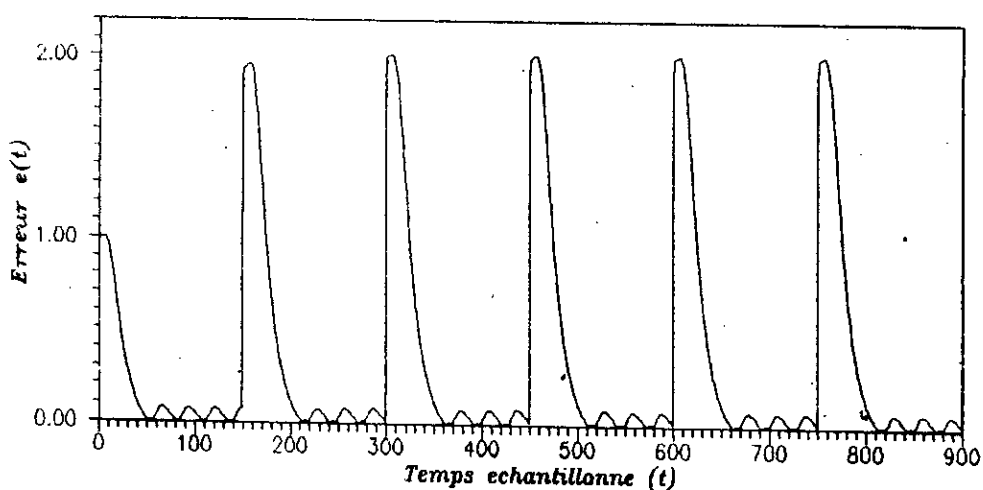


Fig.4.33.c Signal d'Erreur

Fig.4.33: Controle par la methode du predicteur recursif d'un systeme perturbe a 4-boucles en cascade. Regulation autour d'une consigne rectangulaire.



On remarque que les quatre approches adoptées pour le contrôle, conduisent le système aux performances désirées, à savoir, la régulation de la sortie du système autour d'une consigne rectangulaire.

Si on compare la qualité des résultats, donné par chaque approche par rapport à l'autre, on aboutit à la même conclusion que celle tirée de l'exemple 1. A savoir que le contrôle en cascade, en considérant la dynamique de la boucle interne, donne une meilleure précision et une convergence très rapide par rapport aux autre approches. Alors que le contrôle du système par la "méthode du prédicteur récursif", nécessite le plus faible effort de commande.

De même, et d'après les résultats obtenus de cet exemple, il est à noter, que l'utilisation du contrôle en cascade (en tenant compte de la boucle interne ou en l'ignorant), et du contrôle par la "méthode du prédicteur récursif", quand le nombre de boucle qui constituent le système devient important (trois boucles et plus), facilite le contrôle du système (réduction de l'effort de commande) et permet une meilleure rejection des perturbations. Par contre l'utilisation de la méthode mono-boucle donne des résultats médiocres (contrôle difficile du système, faible rejection des perturbations, convergence lente et mauvaise précision).

## 4.5 COMMANDE AUTO-AJUSTABLE EN CASCADE D'UN MOTEUR A COURANT CONTINU

Plusieurs approches de contrôle adaptatif en cascade appliquées à la commande des moteurs à courant continu, existent déjà [6,24]. Dans ce paragraphe, nous présenterons les résultats concernant l'application des différentes approches de contrôle auto-ajustable en cascade, développées au Chapitre précédent, à la commande d'un moteur à courant continu.

### 4.5.1 Modélisation

Suivant la nature de la commande qu'on veut appliquer, plusieurs types de modèles du moteur à courant continu peuvent être utilisés. Dans notre cas, le modèle que nous avons adopté est celui donné par P.C.Sen [23].

Soit un moteur à courant continu à excitation séparée, commandé par la tension aux bornes de l'inducteur (voir Fig.4.34).

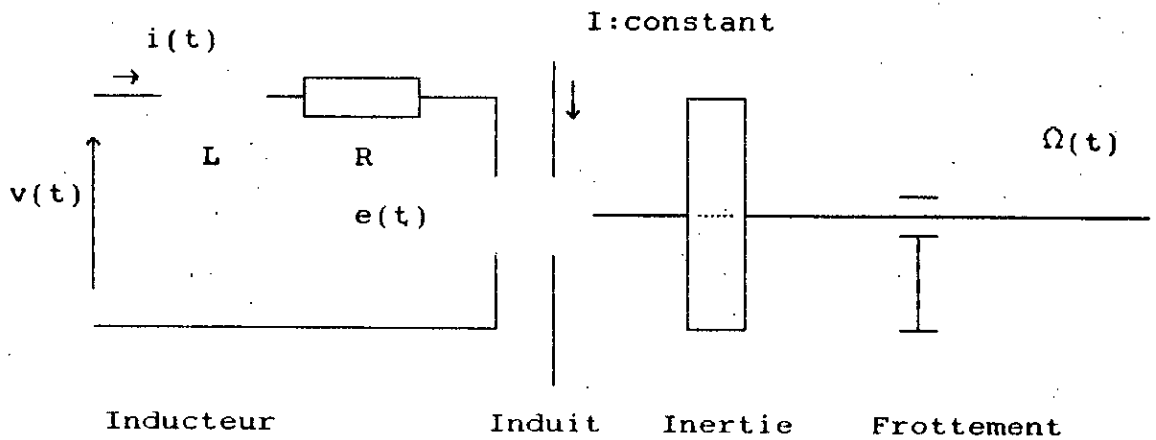


Fig. 4.34: Moteur à courant continu

Les lois de l'électricité et de la mécanique permettent d'écrire les équations suivantes :

$$v(t) = e(t) + R.i(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (4.13)$$

$$e(t) = K.\Omega(t) \quad (4.14)$$

$v(t)$  et  $i(t)$  : Tension et courant à l'entrée de l'inducteur.

$e(t)$  : Force contre électro-motrice équivalente.

$\Omega(t)$  : vitesse de rotation du moteur.

$L$  : Induction total du circuit.

$R$  : Résistance total du circuit.

$K$  : Coefficient constant.

L'équation du couple mécanique absorbé est :

$$\Gamma_m(t) = \Gamma_c(t) + f.\Omega(t) + J \frac{d\Omega(t)}{dt} \quad (4.15)$$

$\Gamma_m(t)$  : Couple mécanique absorbé.

$\Gamma_c(t)$  : Couple de charge (couple résistant).

$f$  : Coefficient de frottement.

$J$  : Inertie totale.

Le couple électrique disponible ( $\Gamma_e(t)$ ) est proportionnel au courant d'entrée de l'inducteur :

$$\Gamma_e(t) = K.i(t)$$

L'égalité des couples électrique et mécanique, donne :

$$\Gamma_e(t) = \Gamma_m(t) = \Gamma(t) \quad (4.16)$$

L'application de l'opérateur Laplacien aux équations (4.13) à (4.15), en tenant compte de l'équation (4.16), donne les équations suivantes :

$$i(t) = \frac{[v(t)-e(t)](1/R)}{1 + \tau_e s} \quad (4.17)$$

$\tau_e$  : Constante de temps électrique du moteur.

$$\tau_e = \frac{L}{R}$$

$$\Omega(t) = \frac{[\Gamma(t) - \Gamma_c(t)](1/f)}{1 + \tau_m s} \quad (4.18)$$

$\tau_m$  : Constante de temps mécanique du moteur.

$$\tau_m = \frac{J}{f}$$

Les équations (4.17) et (4.18) sont représentées par le schéma fonctionnel de la figure 4.35.

Une manière pratique pour simplifier le modèle du moteur à courant continu, donné par les équations (4.17) et (4.18), est de considérer le couple résistant proportionnel à la vitesse :

$$\Gamma_c = K_c \cdot \Omega(t). \quad (4.19)$$

$K_c$  : Coefficient constant.

Alors l'équation (4.18) s'écrit comme suit :

$$\Omega(t) = \frac{\Gamma(t)(1/f')}{1 + \tau'_m s} \quad (4.20)$$

Avec :

$$f' = f + K_c \quad (4.21.a)$$

$$\tau'_m = \frac{\tau_m}{1 + K_c/f} \quad (4.21.b)$$

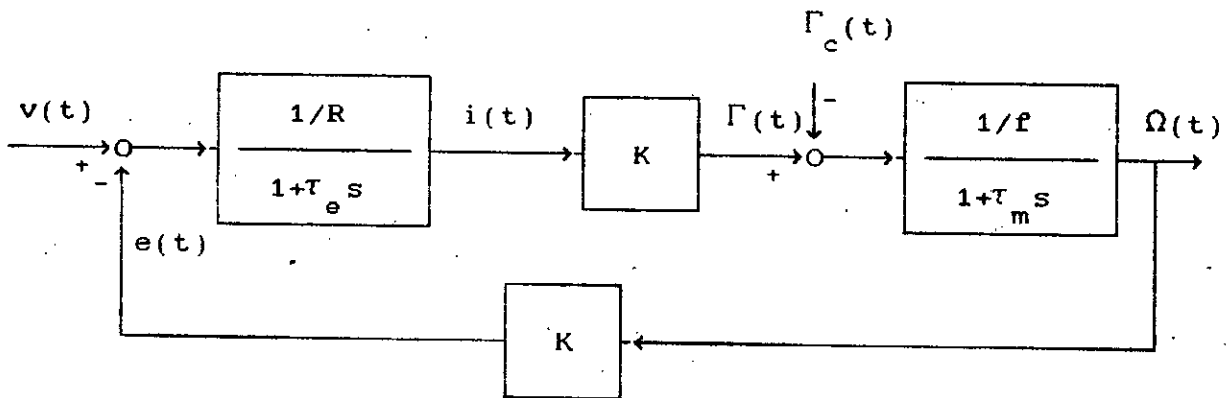


Fig.4.35 : Schéma fonctionnel d'un moteur à courant continu.

Pour le modèle donné dans [23], on a :

- $R=0.4 \Omega$
- $L=76 \text{ mH}$
- $f=0.612 \text{ N.m.sec/rad}$
- $J=1.17 \text{ Kg.m}^2$
- $K=2.05 \text{ N.m/A (V.sec/rad)}$
- $K_c=0.02 \text{ N.m.sec/rad}$

d'où on aura :

- $\tau_e=0.19 \text{ sec}$
- $f'=0.614 \text{ N.m.sec/rad}$
- $\tau_m=1.91 \text{ sec}$
- $\tau'_m=1.85 \text{ sec}$

La fonction de transfert entre le courant  $i(t)$  et la tension  $v(t)$  est :

$$H_1(s) = \frac{i(t)}{v(t)} = 0.144 \frac{1+1.85s}{1+0.114s+0.02s^2} \quad (4.22)$$

De même la fonction de transfert entre la vitesse et le courant  $i(t)$  est :

$$H_2(s) = \frac{\Omega(t)}{i(t)} = \frac{3.33}{1+1.85s} \quad (4.23)$$

La discrétisation du système est faite par un échantillonneur bloqueur d'ordre zéro avec une période d'échantillonnage  $T_e=3.33\text{ms}$ . Si  $H_1(z^{-1})$  et  $H_2(z^{-1})$  sont les transformées en Z de  $H_1(s)$  et de  $H_2(s)$ , alors on aura :

$$H_1(z^{-1}) = \frac{i(t)}{v(t)} = z^{-1} \frac{4.393(1-0.999z^{-1})}{1-1.980z^{-1}+0.981z^{-2}} \quad (4.24)$$

$$H_2(z^{-1}) = \frac{\Omega(t)}{i(t)} = \frac{0.006}{1-0.998z^{-1}} \quad (4.25)$$

Pour que le modèle du moteur à courant continu soit conforme à la configuration donnée par les équations (3.1) et (3.3), le modèle donné par les équations (4.24) et (4.25) est réécrit comme suit :

$$i(t) = z^{-k_1} \frac{B_1}{A_1} v(t) + \frac{C_1}{A_1} \xi(t) \quad (4.26)$$

$$\Omega(t) = z^{-k_2} \frac{B_2}{A_2} i(t) + \frac{C_2}{A_2} \xi(t) \quad (4.27)$$

avec :

- $\xi(t) = 0$
- $n_1 = 2$
- $k_1 = 1$
- $A_1(z^{-1}) = 1 - 1.980z^{-1} + 0.981z^{-2}$
- $B_1(z^{-1}) = 0.042(1 - 0.998z^{-1})$
- $C_1(z^{-1}) = 1.$
- $n_2 = 1$
- $k_2 = 1$
- $A_2(z^{-1}) = 1 - 0.998z^{-1}$
- $B_2(z^{-1}) = 0.006$
- $C_2(z^{-1}) = 1.$

#### 4.5.2 Régulation

Dans ce cas il est souhaitable que la vitesse du moteur soit régulée autour d'une consigne constante égale à 200 rad/sec. Les différentes approches de contrôle sont alors appliquées pour :

$$S_1(z^{-1}) = S_2(z^{-1}) = 1.$$

La figure 4.36 donne les variations de la vitesse et du courant, en fonction du temps. Et ceci pour les différentes approches développées.

Commande d'un moteur à courant continu

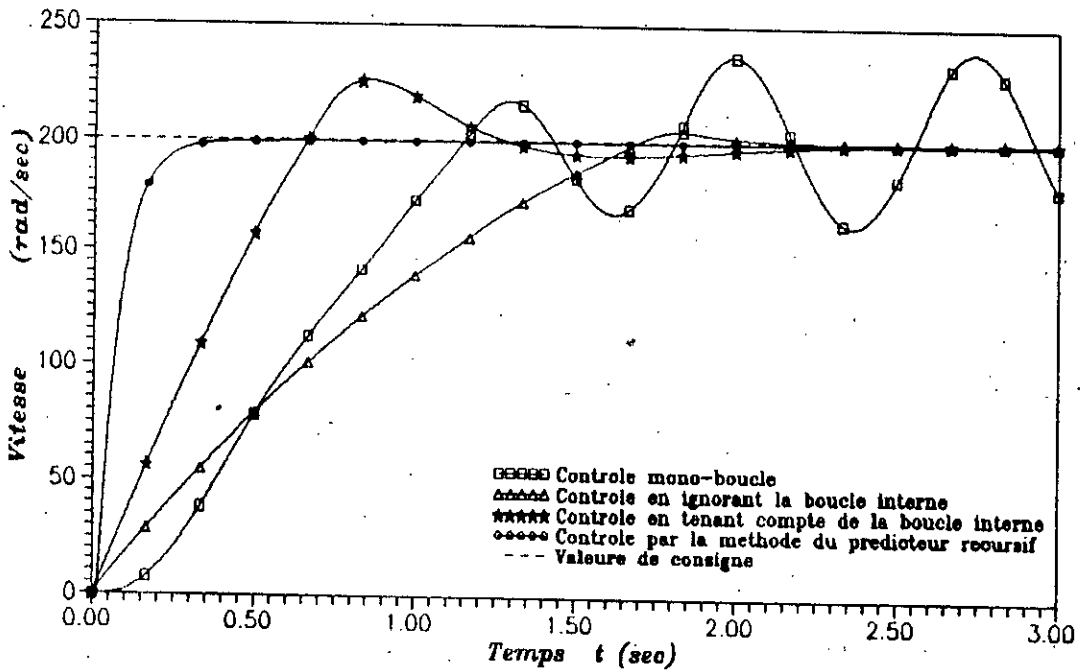


Fig.4.36.a : Caractéristique de Vitesse

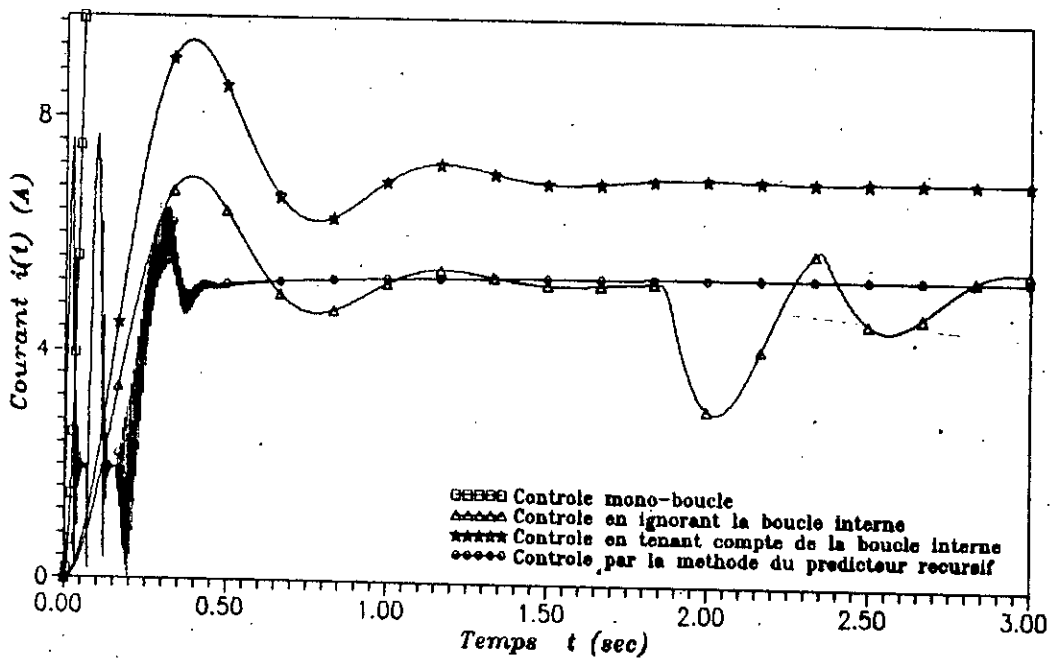


Fig.4.36.b : Caractéristique de Courant

Fig.4.38 : Controle auto-ajustable d'un moteur a courant continu.  
 Regulation de la vitesse autour d'une consigne constante.  
 (a) Vitesse.  
 (b) Courant.

### 4.5.3 Interpretation des résultats

Les résultats donnés par la figure 4.36 montrent que le contrôle du moteur à courant continu par l'approche mono-boucle est quasiment impossible, vu la médiocrité des résultats obtenus en utilisant cette approche. Par contre le contrôle du moteur en utilisant les autres approches a donné de bons résultats. Les meilleures performances sont obtenues en utilisant le contrôle par la méthode du prédicteur récursif. Par l'utilisation de cette dernière méthode on a obtenu le dépassement, le temps de montée (de la sortie du système  $\Omega(t)$ ) et le courant d'entrée les plus faibles. Comparé au contrôle en cascade en ignorant la boucle interne, le contrôle en cascade en tenant compte de la boucle interne donne un temps de montée plus faible, alors que le dépassement et le courant d'entrée sont plus importants.

### 4.6 CONCLUSION

Le premier constat qu'on a tiré des résultats de cette simulation est que les quatre approches développées conduisent le système aux performances désirées. Que ce soit la régulation de la sortie du système autour d'une consigne donnée, ou la poursuite d'une trajectoire donnée. Il est à noter que pour la deuxième approche, la condition pour négliger la dynamique de la boucle interne devra être satisfaite.

Maintenant si on compare les résultats obtenus par chacune des méthodes, on remarque que dans le cas d'un contrôle mono-boucle du système, le fait d'ignorer les informations issues des sorties intermédiaires, rend le contrôle du système difficile (effort de commande considérable). Ce qui pose des problèmes de sécurité du système. De même, on a une faible réjection des perturbations.

Dans le cas d'un contrôle en cascade, l'utilisation des informations issues des sorties intermédiaires facilite le



contrôle et permet une meilleure réjection des perturbations et une meilleure sécurité du système. Néanmoins dans le cas d'un contrôle en cascade en ignorant la dynamique de la boucle interne, les résultats n'étaient satisfaisants, que lorsque les sous-systèmes sont ordonnés de façon à voir leurs constantes de temps augmenter. Dans le cas contraire, les performances obtenues par cette approche étaient médiocres et très souvent des instabilités surgissent. De ce fait, l'utilisation du contrôle en cascade en tenant compte de la boucle interne ou par la méthode du prédicteur récursif, garantit un bon niveau de performance, sans toutefois imposer des contraintes supplémentaires sur la structure et la configuration du système à contrôler.

## CONCLUSION GENERALE

Dans cette thèse nous avons développé plusieurs approches de contrôle auto-ajustable pour une classe de systèmes en cascade. Nous avons aussi élaboré des programmes qui simulent ces différentes approches.

Dans la première approche nous avons considéré le système comme étant mono-boucle. Les informations issues des sorties intermédiaires sont alors ignorées. Ceci permet d'avoir un algorithme de commande simplifié. En contre partie les résultats qui en sont déduits ne sont pas toujours satisfaisants. Quand le nombre de boucles est important, l'ordre du système devient alors élevé et le contrôle du système par l'approche mono-boucle difficile. Une de ces difficultés est l'importance de l'effort de commande, cette inconvénient pose des problèmes de fiabilité du système. Par ailleurs la convergence est lente et la réjection des perturbations est faible.

Dans la deuxième et la troisième approche, une extension du contrôle auto-ajustable mono-boucle à des systèmes en cascade est présentée. Les informations issues des sorties intermédiaires sont alors prises en considération. L'utilisation de ces informations facilite le contrôle du système et permet une meilleure réjection des perturbations et une meilleure fiabilité du système. Toutefois la synthèse de la commande néglige la dynamique de la boucle interne quand la constante de temps de cette boucle est relativement faible. chaque auto-ajusteur, (Algorithme d'auto-ajustage) individuel est destiné à son sous-système correspondant. L'ordre de chaque sous-système est, évidemment, inférieur à l'ordre du système global .

Quand la condition suscitée n'est pas satisfaite, les performances

obtenues par cette approche sont donc médiocres et conduisant souvent des divergences importantes.

Dans la troisième approche, la dynamique de la boucle interne est prise en compte. Une meilleure stabilité et une meilleure précision sont alors obtenues au dépend d'une complexité de synthèse de la commande.

La dernière approche présente une généralisation des travaux de Gawthrop [15,16]. Elle est considérée comme une nouvelle approche en contrôle auto-ajustable appliqué à des systèmes en cascade. Son avantage majeur est qu'elle permet de contrôler un système de N-boucles (N-sous systèmes) en cascade en utilisant N-contrôleurs, chacun de ceux-ci est destiné à son sous-système avec une complexité relative. L'effet des boucles internes est pris en considération sans qu'il y ait interaction entre les boucles. La restriction faite pour cette approche est que le modèle, que devra suivre chaque sous système est le même. Comparée aux autres approches, les tests de simulation sur différentes applications, ont montré que cette approche donne des résultats plus que satisfaisants.

Il est important de noter que malgré les bons résultats des essais de simulation, des problèmes d'ordre pratique peuvent surgir lors de l'implémentation de ces algorithmes auto-ajustables.

En effet, le système de contrôle doit fonctionner en temps réel. Il est important alors de réduire le nombre d'opérations pour chaque itération. Dans ce cas il est préférable d'implémenter l'algorithme des Moindres Carrés Rapide [11], au lieu de celui des Moindres Carrés Etendu. Si l'implémentation s'effectue autour de processeurs qui manipulent des mots courts (moins de 4 bits), des instabilités numériques apparaissent dans l'algorithme d'estimation des paramètres. Ces instabilités sont dues à la négativité de la matrice  $P(t)$  (éq.(2.58.d)). Dans ce cas, l'utilisation de la forme "Racine Carrée" des Moindres Carrés

négativité de la matrice  $P(t)$  (éq.(2.58.d)). Dans ce cas, l'utilisation de la forme "Racine Carrée" des Moindres Carrés Réursive [22], pour estimer les paramètres du contrôleur garantie la non-négativité de la matrice  $P(t)$ .

Notre travail peut être enrichi, en faisant l'extension de ces méthodes à des systèmes multi-variables en cascade. Ce type de modèles est plus approprié pour simuler le comportement de procédés réels.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] K.Anbumani, I.G.Sarma and L.M.Patnaik, "Self-tuning cascade control of non-linear systems," *IFAC symposium on Theory and Applications of Digital Control*, New Delhi, India, 1982.
- [2] J.A.Aseltine, A.R.Mancini and C.W.Sarture, "A survey of adaptive control systems," *IRE Trans.A.C*, vol.6, pp.102-108, 1958.
- [3] K.J.Åström and B.Wittenmark, "On the self-tuning regulators," *Automatica*, vol.9, no.2, pp. 185-199, 1973.
- [4] K.J.Åström and B.Wittenmark, *Adaptive control*, Addison-Wesley Publishing, N.Y, U.S.A, 1989.
- [5] R.Bellman, *Adaptive control - A guided tour*, Princeton university press, Princeton, N.J, U.S.A, 1961.
- [6] P.Boucher, D.Dumur and S.Daumüller, "Parameters automatic design of predictive cascaded controllers," *IFAC symposium on Adaptive Systems in Control and Signal Processing*, pp.573-578, Grenoble, France, 1992.
- [7] V.V.Chalam, *Adaptive control systems - Techniques and applications*, Marcel Dekker INC, N.Y, U.S.A, 1987.
- [8] D.W.Clarke and P.J.Gawthrop, "Self-tuning controller," - *Proc.IEE*, vol.122, no.9, pp.929-934, 1975.
- [9] D.W.Clarke and P.J.Gawthrop, "Self-tuning control," *Proc.IEE*, vol.126, no.6, pp.633-640, 1979.
- [10] D.W.Clarke, "Introduction to self-tuning controllers," in *self-tuning and adaptive control*, Harris and Billings, Eds,

N.Y, U.S.A, 1981.

- [11] D.W.Clarke, "Implementation of self-tuning controllers," in *self-tuning and adaptive control*, Harris and Billings, Eds, N.Y, U.S.A, 1981.
- [12] P.J.Gawthrop, "Some interpretation of the self-tuning controller," *Proc.IEE*, vol.124, no.10, pp.889-894, 1977.
- [13] P.J.Gawthrop, "On the stability and and convergence of a self-tuning controller," *Int.J.Contr.*, vol.31, no.5, pp.973-998, 1980.
- [14] P.J.Gawthrop, "Some properties of discrete adaptive controllers," in *self-tuning and adaptive control*, Harris and Billings, Eds, N.Y,, U.S.A, 1981.
- [15] P.J.Gawthrop, "Multi-loop self-tuning control: Cascade systems," in *Preprints of the 9th IFAC triennial world congress*, K.J.Astrom, Eds, vol.VII, pp.127-132, Budapest, Hungary, 1984.
- [16] P.J.Gawthrop, "Cascade control," in *Continuous-time self tuning control*, Research studies press, Letchworth, England, 1987.
- [17] G.C.Goodwin, K.S.Sin, *Adaptive filtering prediction and control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, U.S.A, 1984.
- [18] P.C.Gregory, Ed - *Proc.Self adaptive flight control symposium*, Report no.59-49, Wright air development center, Ohio, U.S.A, 1959.
- [19] R.E.Kalman, "Design of a self-optimizing control system," *Trans.ASME*, vol.86, pp.468-478, 1958.
- [20] I.D.Landau, *la commande adaptative-Aspects pratiques et théoriques*, Masson, Paris, France, 1986.

- [21] P.V.Osburn, H.P.Whitaker and A.Kezer, "New developements in the design of adaptive control systems," *ISA 29th annual meeting*, Paper 61-39, Inst.Aeronautical Sciences,N.Y, U.S.A, 1961.
- [22] V.Peterka, "A square-root filter for real-time multivariable regression," *Kybernetika*, vol.11, pp.53-67, 1975.
- [23] P.C.Sen, "Separately excited DC motor drives," in *Thyristor DC Drives*, Wiley and Sons, N.Y, U.S.A, 1981.
- [24] R.M.Stephan and V.Hahn, "Cascade adaptive speed control of a thyristor-driven DC motor," *Proc.IEE*, vol.135, no.1, pp.49-55, 1988.
- [25] Y.Z.Tsyppkin, *Adaptation and learning in automatic systems*, Academic press, N.Y, U.S.A, 1971.
- [26] J.C. Willems, "Stability, invertibility and causality," *SIAM J.Contr.*, vol.7, pp.645-671, 1969.
- [27] J.C. Willems, *The analysis of feedback systems*, M.I.T. Press, Massachussets, U.S.A, 1971.
- [28] J.C. Willems, "Mechanisms for the stability and instability in feedback systems," *Proc.IEEE*, vol.64, no.1, 1976.

## ESTIMATION RECURSIVE DES PARAMETRES

## A.1 METHODE DES MOINDRES CARRES

Considérons le modèle donné par l'équation :

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^{np} \vartheta_i \cdot x_i(t) + \varepsilon(t) \quad (\text{A.1})$$

cette équation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\phi(t) = x^T(t) \cdot \vartheta + \varepsilon(t) \quad (\text{A.2})$$

$\vartheta$  est un vecteur de np paramètres inconnus.  $x(t)$  est un vecteur de données connues.  $\varepsilon(t)$  est une erreur statistiquement indépendante des  $x_i(t)$ .  $\phi(t)$  est une sortie observable.

$$\vartheta = [\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{np}]^T$$

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_{np}(t)]^T$$

Supposons qu'on ait N observations, avec  $N > np$ . La collection d'informations telle l'équation (A.1), donne le système suivant :

$$\Phi_N = X_N \cdot \vartheta + \varepsilon_N \quad (\text{A.3})$$

$\Phi_N$  et  $\varepsilon_N$  sont des vecteurs d'ordre N,  $X_N$  est une matrice d'ordre  $N \times np$ .

$$\Phi_N = [\phi(t-N+1), \phi(t-N+2), \dots, \phi(t-1), \phi(t)]^T$$

$$\varepsilon_N = [\varepsilon(t-N+1), \varepsilon(t-N+2), \dots, \varepsilon(t-1), \varepsilon(t)]^T$$

$$X_N = \begin{bmatrix} x_1(t-N+1), x_2(t-N+1), \dots, x_{np}(t-N+1) \\ x_1(t-N+2), x_2(t-N+2), \dots, x_{np}(t-N+2) \\ \vdots \\ x_1(t-1), x_2(t-1), \dots, x_{np}(t-1) \\ x_1(t), x_2(t), \dots, x_{np}(t) \end{bmatrix}$$



L'estimation  $\hat{\vartheta}$ , du vecteur  $\vartheta$  est obtenue en minimisant une fonction perte :

$$L = \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon^2(t-i) = \varepsilon_N^T \cdot \varepsilon_N$$

D'après la relation (A3), on a :

$$\varepsilon_N = \Phi_N - X_N \cdot \vartheta$$

alors :

$$L = \Phi_N^T \cdot \Phi_N - 2\vartheta^T \cdot X_N^T \cdot \Phi_N + \vartheta^T \cdot X_N^T \cdot X_N \cdot \vartheta$$

l'estimation  $\hat{\vartheta}$ , est obtenu de façon à ce que :

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = -2X_N^T \cdot \Phi_N + 2X_N^T \cdot X_N \cdot \vartheta = 0$$

on obtient alors :

$$\hat{\vartheta} = (X_N^T \cdot X_N)^{-1} \cdot X_N^T \cdot \Phi_N \quad (\text{A.4})$$

en remplaçant (A3) dans (A4) on a :

$$\hat{\vartheta} = \vartheta + (X_N^T \cdot X_N)^{-1} \cdot X_N^T \cdot \varepsilon_N$$

L'erreur d'estimation est définie par :

$$\tilde{\vartheta} = \vartheta - \hat{\vartheta} = -(X_N^T \cdot X_N)^{-1} \cdot X_N^T \cdot \varepsilon_N$$

#### - Propriétés

P1:  $\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0$ , représente un minimum, car  $\frac{\partial^2 L}{\partial \vartheta^2} = X_N^T \cdot X_N$  est

strictement positif.

P2: Comme les  $x_i(t)$  et  $\varepsilon(t)$  sont statistiquement indépendants (par hypothèse) et si, en plus, le bruit  $\varepsilon(t)$  à une moyenne nulle, alors :

$$E[\tilde{\vartheta}] = 0 \text{ et } E[\hat{\vartheta}] = \vartheta.$$

Ce qui veut dire que l'estimation est non-biaisé.

P3: La matrice de covariance de  $\tilde{\theta}$  est :

$$X_N^T \cdot E[\varepsilon_N \cdot \varepsilon_N^T] \cdot X_N \cdot (X_N^T \cdot X_N)^{-1}$$

Si  $\varepsilon_N$  est un vecteur aléatoire dont les éléments sont non-corrélés, de moyenne nulle ( $E[\varepsilon_N] = 0$ ) et de variance  $\sigma^2$  ( $E[\varepsilon_N \cdot \varepsilon_N^T] = \sigma^2 \cdot I$ ), alors :

$$E[\tilde{\theta} \cdot \tilde{\theta}^T] = \sigma^2 (X_N^T \cdot X_N)^{-1}$$

## A.2 METHODE DES MOINDRES CARRES RECURSIVE

D'après les équations trouvées ci-dessus (équ.(A.4)), on remarque que l'algorithme des moindres carrés est mieux adapté à un traitement en temps différé. Et lorsque le nombre d'observation  $N$ , augmente la quantité de données à stocker ainsi que le nombre d'opérations à effectuer devient très important. Ce qui est indésirable lors de la mise en oeuvre d'un algorithme de contrôle auto-ajustable. Cet inconvénient peut être contourné par une reformulation de ces équations sous une forme récursive.

On remarque que l'ordre de la matrice  $X_N^T \cdot X_N$  ne dépend pas de  $N$ . On définit :

$$H(t) = X_t^T \cdot X_t$$

$X_t$  est la matrice de données connues, acquises à l'instant  $t$ .

Avec un petit abus de notation, écrivons l'équation (A.3) sous une forme partitionnée :

$$\begin{bmatrix} \Phi_{t-1} \\ \phi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{t-1} \\ x^T(t) \end{bmatrix} \cdot \theta + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t-1} \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix}$$

avec :

$$\Phi_{t-1} = [\phi(t-N+1), \phi(t-N+2), \dots, \phi(t-1)]^T$$

$$\varepsilon_{t-1} = [\varepsilon(t-N+1), \varepsilon(t-N+2), \dots, \varepsilon(t-1)]^T$$

$$X_{t-1} = \begin{bmatrix} x_1(t-N+1), x_2(t-N+1), \dots, x_{np}(t-N+1) \\ x_1(t-N+2), x_2(t-N+2), \dots, x_{np}(t-N+2) \\ \vdots \\ x_1(t-1), x_2(t-1), \dots, x_{np}(t-1) \end{bmatrix}$$

Soit  $\hat{\vartheta}(t)$  une estimation du vecteur  $\vartheta$ , obtenue en utilisant toutes les données acquises jusqu'à l'instant  $t$ . L'équation (A.4) peut être alors écrite comme suit :

$$\hat{\vartheta}(t) = H^{-1}(t) \cdot X_t^T \cdot \Phi_t$$

$$\hat{\vartheta}(t) = H^{-1}(t) \cdot [X_{t-1}^T, x(t)] \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{t-1} \\ \phi(t) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\vartheta}(t) = H^{-1}(t) \cdot [H(t-1) \cdot \hat{\vartheta}(t-1) + x(t) \cdot \phi(t)]$$

Notons que :

$$H(t) = X_t^T \cdot X_t = X_{t-1}^T \cdot X_{t-1} + x(t) \cdot x^T(t) = H(t-1) + x(t) \cdot x^T(t)$$

Ce qui donne :

$$\hat{\vartheta}(t) = \hat{\vartheta}(t-1) + H^{-1}(t) \cdot x(t) \cdot [\phi(t) - x^T(t) \cdot \hat{\vartheta}(t-1)]$$

Enfin on obtient :

$$\hat{\vartheta}(t) = \hat{\vartheta}(t-1) + K(t) \cdot [\phi(t) - x^T(t) \cdot \hat{\vartheta}(t-1)] \quad (\text{A.5a})$$

avec :

$$K(t) = H^{-1}(t) \cdot x(t)$$

L'équation (A.5a) traduit une mise à jour récursive de  $\hat{\vartheta}$ .  $K(t)$  est un vecteur d'ordre  $np$  (appelé souvent "Gain de Kalman"). Cette équation n'est pas très commode pour l'analyse de la convergence, parce qu'elle invoque l'inversion de la matrice  $H(t)$  à chaque fois qu'on fait une nouvelle estimation. Pour y remédier, on peut utiliser le "Lemme d'inversion matricielle", qui introduit la matrice  $P(t)$ , inverse de  $H(t)$  :

$$P(t) = H^{-1}(t) = [H(t-1) + x(t).x^T(t)]^{-1}$$

Pour calculer cette expression, nous aurons à utiliser le lemme d'inversion d'une matrice qui se présente sous la forme suivante :

$$A = B + C.D^T$$

la matrice  $A^{-1}$ , inverse de  $A$ , quand elle existe est donnée par la relation :

$$A^{-1} = B^{-1} - B^{-1}.C.D^T.B^{-1}[1 + D^T.B^{-1}.C]^{-1}$$

si on pose,  $B = H(t-1)$ ,  $C = D = x(t)$ , l'application de ce lemme donne :

$$P(t) = P(t-1) - \frac{P(t-1).x(t).x^T(t).P(t-1)}{1 + x^T(t).P(t-1).x(t)}$$

$$K(t) = P(t).x(t)$$

$$K(t) = \frac{P(t-1).x(t)}{1 + x^T(t).P(t-1).x(t)} \quad (A.5b)$$

d'où on aura :

$$P(t) = [I - K(t).x(t)].P(t-1) \quad (A.5c)$$

En définitif, l'algorithme des moindres carrés recursifs est donné par les équations (A.5a), (A5.b) et (A5.c). On remarque aisément qu'aucune opération d'inversion matricielle n'est effectuée. Néanmoins, il faut noter que la matrice  $H^{-1}(t)$  n'existera qu'après la présence de  $np$  observations. De ce fait, il convient d'initialiser l'algorithme par un choix approprié de  $P(0)$ .

Généralement,  $P(0)$  est considérée comme étant une matrice diagonale:  $\alpha.I$ , où  $\alpha$  est une constante positive. Une grande valeur de  $\alpha$  (de l'ordre de  $10^4$ ), donne une estimation  $\hat{\vartheta}(0)$  très éloignée de la valeur réelle et des variations initiales très rapides à  $\hat{\vartheta}(t)$ . Alors qu'une petite valeur de  $\alpha$  (de l'ordre de 1), donne une

estimation raisonnable de  $\vartheta$ , et des variations très lentes à  $\hat{\vartheta}(t)$ .

D'autre part, il est important d'attirer l'attention du lecteur sur un problème d'ordre pratique lié à la mise à jour de la matrice  $P(t)$ . En effet, lors de l'implémentation de méthodes auto-ajustables autour de microprocesseurs qui manipulent des mots courts, des instabilités, dues à des calculs numériques, surgissent dans l'algorithme d'estimation des paramètres. Ces instabilités apparaissent quand la matrice  $P(t)$  devient définie négative. De ce fait  $P(t)$  doit rester toujours symétrique, définie positive. La solution à cette forme d'instabilité numérique est, de remplacer la mise à jour de  $P(t)$  donnée par la relation (A.5b), par la mise à jour d'un facteur de  $P(t)$ . Ce qui garantit la non-négativité de  $P(t)$ . PETERKA [22] a élaboré un algorithme dans lequel  $P(t)$  est factorisée comme suit:

$$P(t) = M(t).M^T(t)$$

$M^T(t)$  est une matrice triangulaire supérieure appelée "racine carré" de  $P(t)$ .  $M(t)$  est mise à jour à chaque itération (pour plus de détails voir [22]).

### A.2.1 Introduction du facteur d'oubli

L'algorithme des moindres carrés récursifs est un algorithme à gain décroissant. Ceci est dû au fait que la norme  $\|H\|$  de la matrice  $H(t)$  est initialement petite, mais tendra vers l'infini par la suite, pourvu que  $x(t)$  soit "suffisamment excitée". Ce qui fait que la norme  $\|K\|$  du vecteur  $K(t)$  tend vers zéro et  $\hat{\vartheta}(t)$  tend vers un vecteur constant  $\vartheta$ . Ceci est valable quand les paramètres à estimer sont constants. Dans le cas où ces paramètres varient dans le temps, l'algorithme des moindres carrés récursifs défini par les équations (A.5a), (A.5b) et (A.5c) ne peut pas suivre ces variations. Car d'après l'expression de la fonction perte, cet algorithme donne aux récentes mesures le même degré d'importance

qu'aux anciennes quand l'horizon d'identification devient grand.

Une manière d'obtenir un algorithme capable de suivre les variations des paramètres est de reformuler l'expression de la fonction perte de façon à introduire un "oubli" des anciennes mesures par une séquence de pondération appropriée. Selon la nature de la séquence de pondération on aboutit à des schémas divers de l'algorithme des moindres carrés récursifs:

- Algorithme à gain constant.
- Algorithme à facteur d'oubli variable.
- Algorithme à facteur d'oubli fixe.
- Algorithme à trace constante.

Le choix de la nature de cette séquence dépend de la nature du système à identifier. Vu que le contrôle auto-ajustable convient aux systèmes à paramètres constants ou très lentement variables dans le temps, nous avons choisi l'algorithme à facteur d'oubli fixe, car il convient parfaitement pour l'identification de tels systèmes. Dans ce cas la fonction perte est redéfinie comme suit :

$$L = \sum_{i=0}^{N-1} \beta^i \cdot \varepsilon^2(t-i) = \varepsilon_N^T \cdot B_N \cdot \varepsilon_N$$

avec :

$$B_N = \begin{bmatrix} \beta^{N-1} & , 0 & , \dots & , 0 \\ 0 & , \beta^{N-2} & , 0 & , \dots & , 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & , & \dots & , 0 & , \beta & , 0 \\ 0 & , & \dots & , 0 & , 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \cdot B_{N-1} & , 0 \\ 0 & , 1 \end{bmatrix}$$

alors :

$$L = \Phi_N^T \cdot B_N \cdot \Phi_N - 2\vartheta^T \cdot X_N^T \cdot B_N \cdot \Phi_N + \vartheta^T \cdot X_N^T \cdot B_N \cdot X_N \cdot \vartheta$$

l'estimation  $\hat{\vartheta}$ , est obtenu de façon à ce que :

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = -2X_N^T \cdot B_N \cdot \Phi_N + 2X_N^T \cdot B_N \cdot X_N \cdot \vartheta = 0$$

on obtient alors :

$$\hat{\vartheta} = (X_N^T \cdot B_N \cdot X_N)^{-1} \cdot X_N^T \cdot B_N \cdot \Phi_N$$

pour mettre l'expression de  $\hat{\vartheta}$  sous une forme récursive, on définit :

$$H(t) = X_t^T \cdot B_N \cdot X_t = \beta \cdot H(t-1) + x(t) \cdot x^T(t)$$

Ce qui donne :

$$\hat{\vartheta}(t) = \hat{\vartheta}(t-1) + K(t) \cdot [\phi(t) - x^T(t) \cdot \hat{\vartheta}(t-1)] \quad (\text{A.6a})$$

$$K(t) = \frac{P(t-1) \cdot x(t)}{\beta + x^T(t) \cdot P(t-1) \cdot x(t)} \quad (\text{A.6b})$$

$$P(t) = \beta^{-1} [I - K(t) \cdot x(t)] \cdot P(t-1) \quad (\text{A.6c})$$

Dans ce cas, on remarque que les normes  $\|P\|$  et  $\|K\|$  ne tendent pas vers zéro. Donc  $\hat{\vartheta}(t)$  peut suivre les variations de  $\vartheta$  dans le temps. Les valeurs typiques de  $\beta$  sont de l'ordre de 0.95 (pour des variations rapides) et de 0.999 (pour des variations lentes).

### A.2.2 Application aux modèles dynamiques

En affectant différentes variables aux  $x_t(t)$  et différentes interprétations aux éléments de  $\vartheta$ , une variété de structures de modèles peut être formulée. Considérant le modèle donné par l'équation suivante :

$$y(t) = z^{-k} \frac{B}{A} u(t) + \frac{C}{A} \xi(t)$$

prenant le cas où le polynôme  $C = 1$ . L'équation aux récurrences aura la forme suivante:

$$y(t) = - \sum_{i=1}^n a_i y(t-i) + \sum_{i=0}^n b_i u(t-k-i) + \xi(t) \quad (\text{A.7})$$

En posant :

$$\theta^T = [a_1, a_2, \dots, a_n; b_0, \dots, b_n]$$

$$x^T(t) = [-y(t-1), \dots, -y(t-n); u(t-k), \dots, u(t-k-n)]$$

$$\varepsilon(t) = \xi(t)$$

l'algorithme des moindres carrés récursifs peut être utilisé pour estimer les paramètres du modèle dynamique donné par (A.7). Et comme  $\xi(t)$  est une séquence aléatoire incorrélée, de même qu'elle n'est pas corrélée avec les  $u(t-i)$  et  $y(t-i)$ , l'algorithme des moindres carrés récursif donne une estimation optimale et non biaisée de ces paramètres.



## CONTROLEUR A VARIANCE MINIMALE GENERALISEE

Lors de la synthèse d'un contrôleur à variance minimale généralisée, on cherche à minimiser une fonction coût quadratique, qui incorpore les fluctuations de l'entrée de commande  $u(t)$ , de la sortie  $y(t)$ , du système donné par les équations (2.4) et (2.5), et de la trajectoire désirée. Ce qui revient à déterminer une commande qui minimise les fluctuations autour de zéro, non pas de la sortie du système comme c'est le cas de [3], mais d'une sortie auxiliaire [8].

Soit le système donné par le modèle :

$$y(t) = z^{-k} \frac{B}{A} u(t) + \frac{C}{A} \xi(t)$$

A, B et C polynômes en  $z^{-1}$ , de degré n.  $\xi(t)$  est un bruit blanc discret (séquences de variables aléatoires indépendantes), de moyenne nulle et de variance finie. La fonction coût à minimiser est de la forme :

$$J = E \left\{ \left[ \sum_{i=0}^{ns} s_i y(t+k-i) - \sum_{i=0}^{nr} r_i w(t-i) \right]^2 + \left[ \sum_{i=0}^{nq} q'_i u(t-i) \right]^2 \right\} \quad (B.1)$$

Cette fonction s'écrit sous la forme polynomiale suivante :

$$J = E \left\{ \left[ S \cdot y(t+k) - R \cdot w(t) \right]^2 + \left[ Q' \cdot u(t) \right]^2 \right\} \quad (B.2)$$

S, R et  $Q'$ , sont des polynômes en  $z^{-1}$ .

D'après §2.2.2, on peut écrire :

$$y(t+k) = y^*(t+k/t) + \tilde{y}(t+k) \quad (\text{B.3})$$

Avec :

$$y^*(t+k/t) = \frac{F'}{C} y(t) + \frac{G'}{C} u(t)$$

$$\tilde{y}(t+k) = E' \xi(t+k)$$

$E'$  et  $F'$  sont des polynômes en  $z^{-1}$ , de degrés  $k-1$  et  $n-1$  respectivement, et sont des solutions de l'identité :

$$\frac{C}{A} = E' + z^{-k} \frac{F'}{A}$$

En substituant (B.3) dans (B.2), on obtient :

$$J = E \left\{ \left[ S \cdot [y^*(t+k/t) + \tilde{y}(t+k)] - R \cdot w(t) \right]^2 + \left[ Q' \cdot u(t) \right]^2 \right\}$$

comme  $\tilde{y}(t+i)$  incorrélié avec  $y(t-i)$  et  $u(t-i)$  pour  $i \geq 0$ , de même  $y^*(t+k/t)$ ,  $u(t)$  et  $w(t)$  sont connus à l'instant  $t$ , alors :

$$J = \left[ S \cdot y^*(t+k/t) - R \cdot w(t) \right]^2 + \left[ Q' u(t) \right]^2 + E \left\{ \left[ S \cdot \tilde{y}(t+k) \right]^2 \right\}$$

Si :

$$\sigma^2 = E \left\{ \left[ S \cdot \tilde{y}(t+k) \right]^2 \right\}$$

alors :

$$J = \left[ S \cdot y^*(t+k/t) - R \cdot w(t) \right]^2 + \left[ Q' u(t) \right]^2 + \sigma^2$$

$J$  est minimisé en choisissant la commande  $u(t)$  de façon à avoir :

$$\frac{\partial J}{\partial u(t)} = 2q'_0 \left[ S \cdot y^*(t+k/t) - R \cdot w(t) \right] + 2q'_0 \cdot Q' \cdot u(t) = 0$$

Sachant que :  $q'_0 = b'_0$ , la loi de commande est donnée par la relation :

$$S.y^*(t+k/t) + Q.u(t) - R.w(t) = 0 \quad (B.4)$$

avec :

$$Q = \frac{q'_0 \cdot Q'}{b_0}$$

Si  $\phi^*(t+k/t)$  est une fonction donnée par :

$$\phi^*(t+k/t) = S.y^*(t+k/t) + Q.u(t) - R.w(t) \quad (B.5)$$

alors la loi de commande donnée par la relation (B.4) est donnée par :

$$\phi^*(t+k/t) = 0 \quad (B.6)$$

de même on peut définir la fonction  $\phi(t+k)$  par :

$$\phi(t+k) = S.y(t+k) + Q.u(t) - R.w(t) \quad (B.7)$$

il suit que :

$$\phi(t+k) = \phi^*(t+k/t) + \tilde{\phi}(t+k) \quad (B.8)$$

avec :

$$\tilde{\phi}(t+k) = S.\tilde{y}(t+k)$$

Si maintenant on définit une autre fonction coût :

$$I = E\left[\phi^2(t+k)\right] = \left[\phi^*(t+k/t)\right]^2 + \sigma^2 \quad (B.9)$$

le calcul de  $u(t)$  qui minimise  $I$ , est fait de façon à ce que :

$$\frac{\partial I}{\partial u(t)} = 2(q'_0 + q_0)\phi^*(t+k/t) = 0$$

la loi de commande est alors donnée par la relation :

$$\phi^*(t+k/t) = S.y^*(t+k/t) + Q.u(t) - R.w(t) = 0$$

qui est la même que celle donnée par la relation (B.4).

En conclusion, faire la synthèse d'un contrôleur qui minimise la fonction coût défini par la relation (B.1), revient à minimiser la fonction coût défini par la relation (B.9), qui traduit les fluctuations autour de zéro d'une sortie auxiliaire du système, donnée par la relation (B.7).