

وزارة التربية الوطنية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT GENIE-MECANIQUE

# PROJET DE FIN D'ETUDES

## SUJET

APPLICATION DU MODE INVERSE  
AUX ECOULEMENTS TRANSSONIQUES

Proposé par :

Mr . M . BOUDJEMA

Etudié par :

Mr . K . TOUFOUTI  
Mr . K . HELAL

Dirigé par

Mr . M . BOUDJEMA

PROMOTION

JUIN 1994

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

قُلْ إِنْ صَلَائِي وَنِسَائِي  
وَأُمَّتَايَ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ  
لَا شَرِيكَ لَهُ وَبِذَلِكَ أُمِرْتُ وَأَنَا  
أَوَّلُ الْمُسْلِمِينَ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ

أهلي

إلى أبي المحزون

إلى أبي الكريم

إلى جميع إخوتي

إلى كافة الأقارب

إلى جميع أبناء الحركة الإسلامية الواعية

أهلي هذه الهدايا المتواضعة

حالا

والله اعلم

إلى والده الكريم - الأم المحنون والآب الكريم

إلى جميع إخواني

إلى شقيقي الأصغر "صغير العائل محمد الزهراء"

إلى كافة الأهل والأقارب

إلى جميع إخواني في العقيدة، أبناء الحركة

إلى سيد الواسعة

أهدي هذه المذكرة

قاصد

ملخص  
يهدف في هذا العمل إلى تطبيق طريقة تشبه عكسية لتصميم  
مقطع من لسان دولاب في حالة السريان عبر صوتي  
تتالي البعد للمائع مثالي وكذا محاولة صياغة طريقة  
"ضبط الصدمة" لمعالجة الحدودية لتوجات الصدم.

#### RESUME

L'objectif de ce travail est l'application d'une méthode semi-inverse pour la conception d'un profil d'aube de turbomachine en écoulement transsonique bidimensionnel d'un fluide parfait, ainsi qu'une tentative de formulation d'une méthode "d'ajustement de choc" pour le traitement numérique des discontinuités.

#### ABSTRACT

This work aims at applying a semi-invers method to the design of turbomachine blade profile in a bidimensional transonic flow, as also the attempt to formulate the method of "shock fitting" for the numerical treatment of shock waves.

# SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## CHAPITRE 0

Introduction générale, 1

## CHAPITRE I

Généralités, 4

I.1	Introduction .....	4
I.2	Description des écoulements des turbomachines ....	4
I.3	Equations caractérisant l'écoulements à travers une turbomachine .....	5
I.4	Hypothèses simplificatrices.....	6
I.4.1	Hypothèse de localisation des effets de la viscosité .....	6
I.4.2	Hypothèse de l'écoulement instationnaire .....	6
I.4.3	Décomposition de l'écoulement tridimensionnel ..	7
I.5	Problèmes technologiques liés aux turbomachine .....	7
I.5.1	Turbines transsoniques .....	7
I.5.2	Problèmes posés dans les turbines .....	8
I.5.3	Compresseur transsonique .....	8
I.5.4	Les limites de fonctionnement des compresseurs .....	10
I.6	Interaction onde de choc-couche limite et Les procédés de contrôles.....	12
I.6.1	Description sommaire de l'interaction .....	12
I.6.2	Procédés de contrôle .....	14
I.7	Conclusion .....	15

## CHAPITRE II

Méthode semi-inverse

Application aux aubages transsonique, 16

II.1	Introduction .....	16
II.2	Position du problème .....	16
II.3	Mise en équations .....	18
II.3.1	Système de coordonnées .....	18

II.3.2	Equations de mouvement ..	20
II.3.3	Transformation du système .....	23
II.3.4	Etude de la variation d'entropie .....	24
II.4	Existence et unicité de la solution .....	26
II.4.1	Cas hyperbolique ou problème de CAUCHY .....	26
II.4.2	Cas elliptique .....	27
II.5	Résolution des problèmes aux valeurs initiales et aux valeurs aux limites .....	29
II.5.1	Principe de discrétisation en D.F. ....	30
II.5.1.1	Calcul de la courbure des lignes de courant.....	30
II.5.1.2	Schema de discrétisation .....	30
II.5.3	Conditions initiales et aux limites .....	34
II.5.4	Etude de la stabilité du schéma explicite ..	35
II.5.5	Etude de la précision du schéma explicite ..	37
II.5.6	Etude de la précision du schéma implicite ..	38
II.5.7	Adaptation du schéma aux conditions aux limites .....	39
II.6	Traitement Numerique des discontinuités .....	39
II.7	Conclusion.....	47

**CHAPITRE III**

**METHODE DIRECTE**

**CALCUL D'ÉCOULEMENT TRANSSONIQUE, 48**

III.1	introduction.....	48
III.2	Principe de la methode.....	48
III.3	Formulation du probleme.....	49
III.3.1	Equations du mouvement.....	49
III.3.2	Conditions initiales et conditions aux limites.....	50
III.3.2.1	Conditions initiales.....	51
III.3.2.2	Conditions aux limites.....	51
III.4	Modèle numérique.....	54
III.4.1	Changement de coordonnées.....	54
III.4.2	Ecriture des équations dans le plan de calcul.....	55
III.4.3	Discrétisation des équations.....	56
III.4.4	Condition de stabilité.....	60
III.5	Conclusion.....	61

**CHAPITRE IV: APPLICATIONS**

**RESULTATS ET COMMENTAIRES, 62**

IV.1 Introduction.....	62
IV.2 Application aux écoulements sans choc.....	62
IV.2.1 Cas des écoulements subsoniques .....	62
IV.2.2 Etude numérique de la précision des schémas de type implicite.....	62
IV.2.3 Cas d'écoulement supersonique.....	63
IV.3 Calcul de propagation d'onde de choc droit .....	64
IV.4 Applications aux écoulement transsoniques	
tracé d'aubage de turbomachine .....	64
IV.4.1 Trace d'aubage de turbine .....	64
IV.4.2 Trace d'aubage de compresseur .....	64
IV.5 Résultats et commentaires .....	65
IV.6 Conclusion .....	67

**CONCLUSION GENERALE, 77**

**BIBLIOGRAPHIE**

**ANNEXES, 79**

ANNEXE A .....	79
ANNEXE B .....	82
ANNEXE C .....	88



---

---

# chapitre 0

## INTRODUCTION

## GENERALE

---

---

L'introduction des ordinateurs joue un rôle d'un outil, certes très efficace, utilisée pour l'amélioration des méthodes de simulation numérique des phénomènes d'écoulements pour une large et variété d'application.

Ces méthodes visent, dans le cas de turbomachines, à l'amélioration de leurs caractéristiques aérodynamiques qui nécessite la maîtrise de la répartition de vitesse à la paroi de l'aubage considéré.

Il est bien connu en effet que l'importance des zones visqueuses et l'intensité des ondes de choc qui conditionne l'efficacité d'un étage de compresseur ou de turbine: les couches limites se développant le long d'une paroi, ont fortement tendance à s'épaissir voire même à décoller dès que l'écoulement est ralenti, particulièrement sous l'effet d'une onde de choc. Si on veut alors améliorer les performances de l'aubage, il est nécessaire de rechercher une géométrie de la paroi, conduisant à une distribution de vitesse qui minimisera l'intensité des ondes de choc et les effets visqueux.

Une telle recherche peut être réalisée itérativement en modifiant la paroi et les calculs successifs. Mais ce processus est long; et ne permet pas toujours d'obtenir les résultats escomptés, toujours que le problème demeure sur l'existence d'un meilleur profil.

Il est, par contre, beaucoup plus fructueux d'utiliser une méthode inverse où l'on se donne une répartition de vitesses, choisi de manière à minimiser l'importance des couches limites, et la géométrie résulte du calcul. Il faut toutefois remarquer que la géométrie obtenue peut ne pas correspondre à une situation réaliste: profil mince ou même des épaisseurs négatives, ou bien ne répondant pas aux impératifs technologique, tel que l'encombrement, mais dans ce cas on aura la preuve que la distribution de vitesse désirée est impossible à obtenir.

Les méthodes utilisées à l'origine en mode inverse ont été les méthodes de type singularités, les aubages étant représenté par des répartitions de sources et de tourbillons le long de la corde [ref. 1].

D'autres techniques assez largement mise en oeuvre ont été utilisées les propriétés des transformations conformes, permettant de transformer l'écoulement autour de grilles de cercles ou d'ellipses en écoulement autour de profils [ref.2].

Les possibilités de résoudre numériquement des systèmes d'équations aux dérivées partielles, apparues au cours des années soixante a fait apparaître de nouvelles méthodes. Voici maintenant brièvement résumées les principales d'entre elles:

#### METHODE DU POTENTIEL [ref.3]

Le travail se fait sur un plan transformé: plan fonction de courant et potentiel de vitesse ( $\phi, \psi$ ). Il convient cependant de remarquer que cette vitesse n'est pas imposée en fonction de l'abscisse curviligne, ce qui peut présenter un inconvénient en cas de couplage avec une méthode de calcul de couche limite.

#### METHODE DE L'HODOGRAPHE [ref. 4]

Dans ce cas le plan transformé est: le plan module de la vitesse et son inclinaison par rapport à la direction axiale  $\theta$ . Les mêmes remarques que celles effectuées dans le cas des méthodes du potentiel.

Ces deux méthodes, présentent certains inconvénients considérés comme importants actuellement

- Leur mise en oeuvre suppose l'existence d'un potentiel des vitesses, ce qui exclut autre le calcul des écoulements avec chocs.

- Ensuite, elles ne s'appliquent (à quelque exception près [ref. 3] qu'à des écoulement strictement bidimensionnel.

- Enfin, ces méthodes ne permettent généralement pas de traiter simplement le cas des écoulements mixtes supersonique-subsonique (type elliptique-hyperbolique) rencontré dans le cas d'aubages transsoniques. Il convient de mentionner ici que la méthode des caractéristiques souvent utilisée en couplage avec ces méthodes pour résoudre ce genre d'écoulement.

De nouvelles méthodes ont apparues il y'a quelques années dont la méthode décrite au chapitre II et les méthodes pseudo-instationnaire développée par Méauze [ref. 5]. Cette méthode permet de s'affranchir des inconvénients mentionnés plus haut. Par contre, elle exige des temps de calcul très important.

La tendance observée actuellement est à étendre les méthodes précédentes à des cas tridimensionnel. Celles-ci sont obtenues généralement par couplage entre une méthode quasi 3D (type précédent) et une méthode de calcul de l'équilibre radial associées dans un même programme [ref. 6].

Le travail qui fait l'objet du présent mémoire a pour thème principal "L'APPLICATION DU MODE SEMI-INVERSE POUR LE TRACE DE PROFIL D'AUBAGE EN ECOULEMENT TRANSSONIQUE" pour une loi d'épaisseur et une distribution de vitesse imposée uniquement sur l'extrados.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté brièvement les modèles les plus couramment utilisés pour représenter les écoulements dans les turbomachines, ainsi que la description des problèmes posés dans les machines transsoniques.

Un exposé de la méthode semi-inverse fait l'objet du second chapitre suivi d'une étude de la stabilité et de précision est effectuée.

Le troisième chapitre concerne le développement des méthodes de calcul d'écoulement mise en oeuvre dans le processus de tracé, est de type directe. Il s'agit d'une méthode pseudo-instationnaire.

Les applications de la méthode semi-inverse au tracé de tuyère et à divers types d'aubages sont présentées dans le quatrième chapitre.

---

---

# chapitre 1

## GENERALITES

---

---

## I.1 INTRODUCTION

Les turbomachines sont utilisées dans pratiquement tous les secteurs de l'industrie et des transports. En raison des quantités d'énergie, souvent très importantes, introduites et transformées dans ces machines, l'amélioration de leurs performances constitue une nécessité économique de premier plan. Cela est sujettée; en pratique à plusieurs contraintes de différentes natures (mécaniques aérodynamique, ...etc). Ce qui a suscité les chercheurs à essayer de trouver des modèles qui approchent le mieux la réalité.

Dans ce chapitre nous allons, tout d'abord décrit les principaux modèles d'écoulement dans les turbomachines. puis, nous allons évoqué les problèmes; du point de vue technologique, liés aux turbomachines; en insistant sur les phénomènes de décollement qui sont dûs principalement à l'interaction onde de choc-couche limite. Nous donnerons des solutions qui sont actuellement adoptées, pour chaque cas.

## I.2 DESCRIPTION DES ECOULEMENT DANS LES TURBOMACHINES

A travers une turbomachine un échange d'énergie est effectué entre un fluide en mouvement et un arbre en rotation.

L'énergie mise en jeu peut être apportée par un organe extérieur, généralement un moteur (compresseur) ou par le fluide lui-même (turbine).

Au cours du processus d'échange d'énergie entre le fluide et les parties tournantes de la machine, déflexions, accélérations et diffusions sont imposées à l'écoulement à travers les passages limités par les parois du moyeu et du carter externe. ces parois ne présente pas en général une forme simple, aussi l'écoulement est donc de type interne, tridimensionnel et très complexe.

De plus, l'écoulement est instationnaire (périodique dans le temps), bien souvent, il est compressible et comporte des domaines limités par des ondes de choc. Il est également soumis aux effets de viscosité, donc de caractère dissipatif.

Afin de pouvoir résoudre un certain nombre de cas, il est nécessaire d'effectuer des hypothèses simplificatrices conduisant à des modèles utilisables en pratique.

### I. EQUATIONS CARACTERISANT L'ECOULEMENT TRAVERS UNE TURBOMACHINE

L'écoulement à travers une turbomachine obéit aux équations de NAVIER-STOKES instationnaires qui peuvent être représentées dans le repère relatif comme suit :

$$\text{continuité} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (I.1a)$$

$$\text{quantité de mouvement} \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + g \vec{\nabla} \text{ad} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \wedge \text{rot} \vec{v} + \Gamma_e + \Gamma_c + \frac{1}{\rho} g \vec{\nabla} \text{ad} p + \frac{1}{\rho} \vec{F}_f = 0 \quad (I.1b)$$

$$\text{énergie} \quad T g \vec{\nabla} \text{ad} s = g \vec{\nabla} \text{ad} h - \frac{1}{\rho} g \vec{\nabla} \text{ad} p \quad (I.1c)$$

avec  $\Gamma_e = -\omega^2 r$  est l'accélération d'entraînement

$\Gamma_c = 2 \omega \wedge q$  est l'accélération de Coriolis.

$F_f$  représente les forces dissipatives.

$v, p, T, s$  représentent respectivement la vitesse, la pression, la température et l'entropie.

Les équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme suivante [réf. 7] :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{v} - \frac{\vec{v}}{a^2} g \vec{\nabla} \text{ad} \left( \frac{v^2 + \omega^2 \cdot r^2}{2} \right) - \frac{\vec{v}}{R} g \vec{\nabla} \text{ad} s = 0 \quad (I.2a)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \wedge \text{rot} \vec{v} = T g \vec{\nabla} \text{ad} s - g \vec{\nabla} \text{ad} H_R + \frac{\vec{F}_f}{\rho} \quad (I.2b)$$

$$\vec{v} \cdot \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + g \vec{\nabla} \text{ad} H_R \right) = 0 \quad (I.2c)$$

tel que  $H_R = h - \omega^2 \cdot r^2 / 2$  ( $h$  étant l'enthalpie totale relative) est la rothalpie qui joue le même rôle que l'enthalpie totale dans le cas du repère fixe.

#### I.4 HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES FONDAMENTALES

Les hypothèses ayant permis de définir des modèles pratiquement utilisables sont:

- hypothèse de localisation des effets de la viscosité
- hypothèse de l'écoulement instationnaire
- décomposition de l'écoulement tridimensionnel

##### I.4.1 HYPOTHESE DE LOCALISATION DES EFFETS DE LA VISCOSITE

Elle consiste à supposer que les effets de viscosité et de conductivité ne sont sensibles que dans une couche très mince le long des parois de la veine et des profils d'où le concept de couche limite [ref. 8].

Le modèle ainsi proposé simplifie énormément l'écoulement qui est alors supposé non visqueux hors du voisinage immédiat des parois. En pratique cela est valable dans la mesure où les gradients (vitesse et température) suivant la direction normale à celle de l'écoulement restent faibles. Si la validité de ce modèle doit être limitée, il est cependant difficile de s'en affranchir en l'état actuel des connaissances.

##### I.4.2 HYPOTHESE DE L'ÉCOULEMENT INSTATIONNAIRE

Plusieurs méthodes de calcul d'écoulement autour de profils d'aubage reposent sur cette hypothèse. Sur le plan expérimentale on peut citer la grille plane par exemple.

Bien que l'écoulement à l'entrée d'une turbomachine est généralement uniforme et instationnaire, l'écoulement interne présente des fluctuations dues au mouvement relatif entre les pâles voisines (sillage) et aux instabilités tourbillonnaires (écoulements secondaires) qui se superposent à l'écoulement moyen et diminuent l'efficacité de transfert d'énergie et génèrent des bruits dont le contrôle est très important dans le domaine de la propulsion aéronautique.



D'autres phénomènes apparaissent en s'éloignant des conditions d'adaptations tels que: le décrochage tournant, le pompage et les ondes de choc dans le cas des compresseur transsoniques.

Si cette hypothèse paraît raisonnable, son domaine de validité par contre reste difficile à définir.

#### I.4.3 DECOMPOSITION DE L'ÉCOULEMENT TRIDIMENSIONNEL

C'est l'une des techniques les plus utilisées actuellement pour approcher l'écoulement réel. Ce modèle a été développé par WU. Il consiste à considérer deux types d'écoulement bidimensionnel le long des surfaces de courant qui s'appuient respectivement sur cercles centrés sur l'axe (surface S1) et sur des rayons perpendiculaires à l'axe (surface S2).

nous n'allons pas tarder à exposer cette méthode en détail car elle a fait l'objet de plusieurs mémoires de fin d'étude au cours des années précédente [réf. 9].

#### I.5 PROBLEMES TECHNOLOGIQUES LIES AUX TURBOMACHINES

L'utilisation des compresseur et turbines dont l'écoulement comporte des régions supersoniques avec ondes de choc s'est généralisée aux cours des dernières décennies pour bon nombre d'applications

Plus les performances sont meilleures, plus les vitesses de rotation sont importantes. Ceux ci sont limitées par des contraintes principalement d'ordre aérodynamique.

nous traitons ici uniquement les particularités des écoulements dans les aubages des turbomachines transsoniques.

##### I.5.1 LES TURBINES TRANSSONIQUES

L'utilisation des étages de turbines transsoniques dans les turbines à gaz et les turboréacteurs se justifie par le besoin d'accroître la chute d'enthalpie réalisable par étage et donc de diminuer le nombre des étages nécessaires. Ceci impose des vitesses de rotation élevées, les limitations de ces dernières du

point de vue résistance des matériaux à hautes température n'ont pas permis de tirer systématiquement profit des possibilités offertes par les turbines transsoniques. Leur utilisation, par contre, est courante dans les turbines à vapeur à grande puissance (1200 MW) où elles constituent la seule solution possible pour les étages à basse pression [ref. 10].

### I.5.2 PROBLEMES POSES DANS LES TURBINES

Les limitations de vitesses ont été augmentées (650 m/s) par l'introduction de matériaux légers tels que le titane et les alliages réfractaires. La technologie actuelle des paliers permet d'atteindre des vitesses de rotations de l'ordre de 20 000 tr/mn.

Les hautes températures auxquelles sont exposées les aubes de turbine augmentent la plasticité du matériau et par suite diminuent sa résistance. Ceci nécessite des matériaux plus résistants aux sollicitations thermiques, et permettent une amélioration des procédés de refroidissement; on emploie généralement des aubes formées de matériaux poreux ou des aubes à ailettes pour augmenter la surface d'échange et provoquer la formation d'un écoulement turbulent qui facilite le transfert de chaleur.

Les aubages sont sujettés aussi aux vibrations soit mécanique; par l'interaction des pièces fixes et des pièces mobiles, soit aérodynamique (le flottement), c'est ainsi qu'ont été employés des matériaux légers et résistants comme les aciers alliés à base de Nickel et de Cobalt.

### I.5.3 LES COMPRESSEURS TRANSSONIQUES

L'étage d'un compresseur remplit deux fonctions:

- a. Augmenter l'enthalpie d'arrêt de l'écoulement ce qui est réalisé dans la roue mobile (rotor).
- b. Accroître la pression statique, ce qui est réalisé en partie ou en totalité dans le redresseur (stator).

Le degré de réaction est le rapport entre l'augmentation de la pression statique dans le rotor et son augmentation dans tout l'étage:

$$\epsilon = \frac{\Delta P_r}{\Delta P_e}$$

$\epsilon$  est pris généralement égale à 1/2 .

Deux types de compresseurs sont largement utilisés dans l'aviation et les installations terrestre; le compresseur axial et le compresseur centrifuge.

Les avantages de ce dernier sont le grand taux de compression par étage et l'encombrement axial réduit, mais son efficacité est faible. Par contre, le compresseur axial accorde la possibilité d'avoir des taux de compression très importants en conservant une bonne efficacité en utilisant plusieurs étages, chose qui est très compliquée dans le cas du compresseur centrifuge.

Ces performances en plus de la grande poussée qui nous permet d'obtenir, expliquent la large utilisation du compresseur axial, mais les avantages du compresseur centrifuge notamment son encombrement axial réduit ont stimulé les recherches consacrées à celui-ci et en particulier son diffuseur afin d'améliorer son efficacité. Pour ce type de machine, il se pose deux problèmes majeurs:

a. La détermination des configurations des ondes de choc à l'entrée du canal où on peut observer des décollements de la couche limite nettement visible au de la du Mach 1.4 [ref. 11], ce qui réduit considérablement le débit pénétrant. Ceci parait être dû au comportement de la couche limite des parois latérales et non pas à celle des profits.

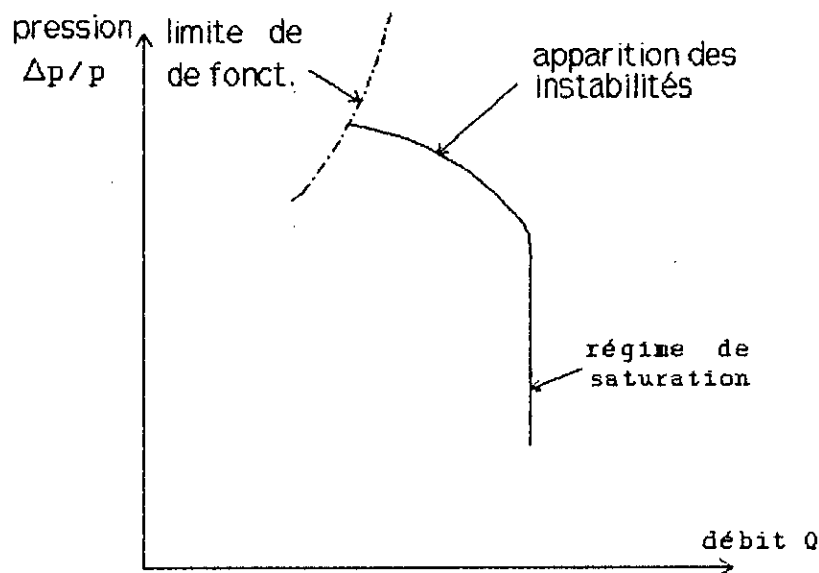
b. La détermination de l'écoulement interne où le compression fait par un système d'onde de choc, où subsiste ainsi le problème du décollement de la couche limite; absorbant l'énergie récupérable sous forme potentielle, et limitant par conséquent le taux de compression par étage qui est dû cette fois-ci à la contre

pression élevée, le sillage des profils peut même induire des ondes de choc qui se réfléchissant dans les passages et se concentrent pour former un choc à la sortie.

#### I.5.4 LES LIMITES DE FONCTIONNEMENT DU COMPRESSEUR

le compresseur doit opérer dans une large plage de débits et des rapports de pression suivant les conditions d'utilisation requises. C'est pourquoi, il est classique de représenter la caractéristique d'un compresseur par une courbe débit-pression (voir fig I.1)

Une telle courbe met en évidence un débit pour lequel le rapport de pression est maximum, correspondant à une incidence des aubages, en moyenne, proche de sa valeur optimal. si on s'écarte de ce régime, des instabilités apparaissent et les performances du compresseur diminuent rapidement.



(fig. I.1) Courbe caractéristique d'un compresseur transsonique

Parmi ces instabilités on cite le pompage, le décrochage tournant et le flottement [ref. 12].

#### I.5.4-a LE POMPAGE

C'est un régime oscillatoire qui affecte l'ensemble compresseur-circuit récepteur. Il apparait quand le sens de l'écoulement est renversé suite à un gradient de pression défavorable. il est caractérisé par un débit à faible fréquence et à grande amplitude.

Ce phénomène présente un hystérésis important d'où la difficulté de sortir de ce régime. Il peut aussi engendrer une rupture instantanée de la machine.

#### I.5.4-b LE DECROCHAGE TOURNANT

C'est un régime pour lequel certain passages inter-aubes captent un débit supérieur au débit moyen, au détriment des passages voisins. ces zones de saturations en débit, régulièrement répartie, se propage circonférentiellement autour de la roue dans une direction opposées aux mouvements de celles-ci. Ce phénomène peut avoir pour conséquence des fluctuations de la portance des profiles pouvant avoisiner plus de 50% de sa valeur moyenne.

#### I.5.4-c LE FLOTTEMENT

Ce phénomène est dû l'interaction d'un mouvement oscillatoire des aubages (flexion ou torsion) et d'un comportement aérodynamique instable (décollement, choc...etc), l'interaction des pièces fixes et mobiles engendrent aussi un mouvement vibratoire des aubes et des disques.

Ce phénomène peut causer la déformation des aubes et des disques qui aura un effet désastreux sur la machine. Lorsque le flottement devient gênant, il est nécessaire de trouver un artifice modifiant le comportement dynamique de la structure disque-aubes. Actuellement, on ajoute sur les aubes des nageoires qui modifient les fréquences de résonance et introduisent un amortissement par frottement des nageoires entre elles. On peut actuellement accroître l'amortissement mécanique par l'emploi de matériaux spéciaux.

## I.6 L'INTERACTION ONDE DE CHOC-COUCHE LIMITE ET LES PROCÉDES DE CONTROLE

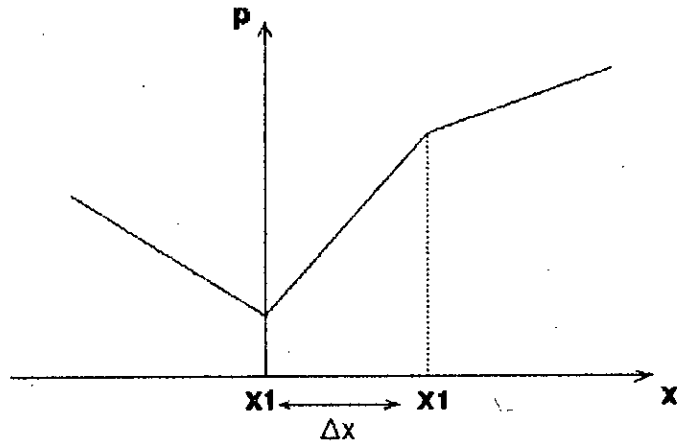
On a vu dans le paragraphe précédent §(I.5) que les écoulements transsoniques sont inévitablement traversés par des ondes de choc obligeant la vitesse à redevenir subsonique. ces ondes restent en contact avec la couche limite qui se développe sur la paroi. Il se produit localement un phénomène qui augmente les effets dissipatifs dus au gradient de pression défavorable auquel la couche limite est soumise. Il s'ensuit une dégradation de sa distribution de vitesse, jusqu'à la formation fréquente d'un décollement.

### I.6.1 DESCRIPTION SOMMAIRE DE L'INTERACTION ONDE DE CHOC-COUCHE LIMITE

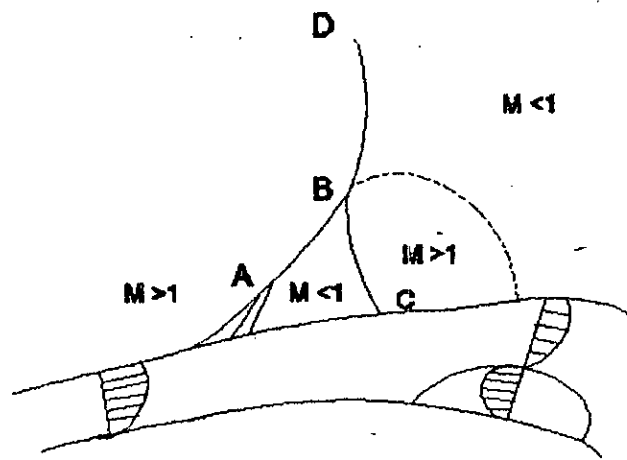
En dehors de la zone d'interaction, le saut de pression à la traversée de l'onde de choc est établi sur une distance extrêmement courte. Cependant, dans la couche limite, on observe une zone d'épaisseur  $\Delta x$  sur laquelle la pression croît de manière importante mais non brutale (fig. I.2 )

L'explication de ce phénomène tient dans la nature elliptique de la zone de la couche visqueuse située à proximité immédiate de la paroi. Cette zone retransmit vers l'amont du choc l'information liée à la présence à l'aval d'une pression élevée.

En conséquence, la couche visqueuse va réagir à l'élévation de la pression avant d'atteindre le choc. L'épaisseur de la couche limite augmente ainsi en amont du choc formant un coin (figI.3) qui introduit dans l'écoulement une onde de choc oblique (AB). Cette onde (AB) intercepte l'onde de choc principale (BD), et introduit une deuxième branche(BC). Il se forme donc un système d'onde de choc en  $\Lambda$ .



(fig 1.2) saut de pression dans une couche limite à travers une onde de choc



(fig 1.3) reflexion d'un choc avec décollement

La figure (I.3) révèle que le décollement s'organise en une bulbe séparant d'une part le fluide venant de l'amont et poursuivant son chemin vers l'aval, et d'autre part le fluide qui est faute d'énergie suffisante se trouve piégé dans la bulbe.

En conclusion l'interaction onde de choc-couche limite dépend des paramètres suivant:

- L'état de la couche limite en amont du choc (en particulier le profil de vitesse).
- La répartition de la pression amont et aval.
- l'intensité du choc.

### I.6.2 PROCÉDES DE CONTROLE

Afin de prévenir les effets néfastes de ce phénomène de l'interaction deux procédés sont généralement employés :

- a- Soit un calcul d'aubage de telle façon qu'une grande partie de la compression se fait isentropiquement d'où le nombre de Mach amont faible. Cette idée fait l'objet du chapitre II.
- b- Soit en employant des techniques de contrôle qui reposent sur l'idée d'augmenter l'énergie de la couche limite de façon à lui permettre de franchir le choc avec le minimum de perturbation.

Nous citerons, brièvement ces techniques qui se basent uniquement sur des considérations expérimentales [ref. 13]:

- En modifiant les caractéristique de la couche limite qui va aborder le choc en faisant un prélèvement ou un apport de débit qui augmente la résistance de la couche limite.
- En aspirant la couche limite qui consiste à rendre perméable une partie de l'extrados pour assurer une circulation naturelle du fluide de l'aval vers l'amont du choc en vue de créer des ondes de compression affaissant ainsi le choc sur l'extrados.
- En injectant un gaz dans la région décollée entraînant une dilatation de la bulbe de décollement d'où l'augmentation du niveau de pression de la zone dissipative.



### I.7 CONCLUSION

Nous avons essayé dans ce chapitre, d'introduire les phénomènes propres aux turbomachines en présence d'onde de choc

on peut se rendre compte que si la description qualitative des phénomènes peut se faire physiquement et dans la plupart des cas mathématiquement, un effort considérable doit être fourni pour permettre la prédiction rigoureuse des performances. Le problème mettant en jeu des phénomènes d'onde de choc et d'interaction onde de choc-couche limite ou sillage, et particulièrement difficile à résoudre et sa solution ne représente qu'un pas vers la détermination des écoulements réels tridimensionnels et instationnaires se produisant dans les machines. C'est pourquoi la plupart des études élaborées; dont le présent mémoire, font appel aux modèles d'écoulements décrits au début du chapitre.

---

---

**CHAPITRE 2**

**METHODE**

**SEMI-INVERSE**

---

---

CHAPITRE II  
METHODE SEMI-INVERSE

### II.1 INTRODUCTION

Au cours du chapitre précédent on a décrit succinctement le phénomène d'interaction onde de choc-couche limite. On a vu aussi qu'on procédé généralement de deux façons pour contourner ce problème, soit en agissant sur la couche limite par différents techniques de contrôle, soit en élaborant un tracé d'aubage en vue de délimiter le décollement particulièrement au cours de l'interaction.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser au deuxième procédé. Pour cela la littérature offre plusieurs méthodes, en majorité, numériques. Mais, puisque dans le cas des écoulements transsoniques les équations sont de type mixte elliptique-hyperbolique correspondant à un écoulement subsonique ou supersonique respectivement. Le souci essentiel donc, est de chercher un seul schéma pour traiter ce problème mixte. La méthode pseudo-stationnaire en est un exemple souvent utilisé. Cependant à cause de son temps d'exécution très long, d'autres méthodes ont été développées, dont celle décrite dans ce chapitre.

### II.2 POSITION DU PROBLEME

L'écoulement est calculé dans un domaine limité par deux lignes de courant  $L_1$  et  $L_2$  et deux frontières arbitraires  $C_1$  et  $C_2$  connectant  $L_1$  avec  $L_2$  (fig II.1).

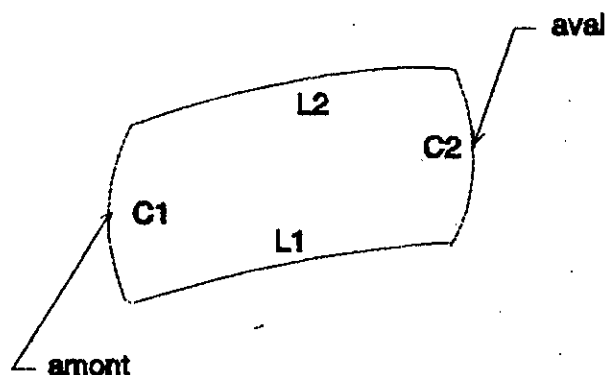


Fig. II.1

Le vecteur vitesse est défini en grandeur et en direction sur la ligne de courant initiale  $L_1$ , avec des conditions imposées sur la frontière amont  $C_1$  et éventuellement aval  $C_2$  si une solution subsonique est imposée. On détermine ainsi la forme d'un canal (et la répartition des vitesses). Pour l'application au calcul d'aubage,  $L_1$  représente l'extrados et  $L_2$  (défini seulement à la fin du calcul) correspondant à l'intrados de l'aube suivante.

La forme du profil d'aube est obtenue par une translation tangentielle d'un pas de grille (pitch).  $C_1$  et  $C_2$  sont généralement choisies pour coïncider avec les plans des bords d'attaque et de fuite respectivement.

Les principaux avantages de cette méthode sont [ref. 14]:

- La possibilité de traitement des écoulements transsoniques (où les deux types d'écoulements subsonique et supersonique coexistent).
- La possibilité de traitement des écoulements semi-tridimensionnels (variation de la hauteur de veine, variation du rayon des coupes d'aube).
- Rapidité d'exécution.

Son principal inconvénient est lié à son application aux grilles de profils, par dessein des canaux inter-aubes.

Il est en effet rendu difficile de tenir compte des conditions de périodicité de l'écoulement en amont et en aval des aubages.

Pour cette raison, il est indispensable d'utiliser la présente méthode couplée avec une méthode directe.

## II.3 MISE EN EQUATIONS

### II.3.1 SYSTEME DE COORDONNEES

Le plan étant rapporté au repère orthonormé  $(ox,oy)$ , soit  $C$  une ligne de courant dans ce plan,  $M$  un point de  $C$  (fig. II.2).

On définit un autre repère  $(m,y)$  lié aux déplacements des particules fluides, en se basant sur les vecteurs tangents aux lignes de courant en  $M$  et perpendiculaire à l'axe machine  $ox$ :

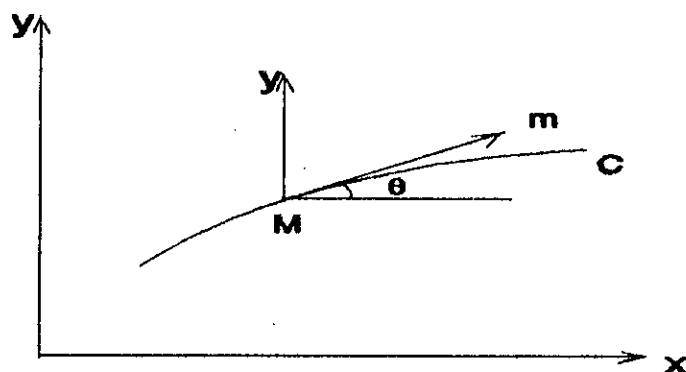


Fig.II.2

Il existe entre les dérivées partielles dans les deux repères, les relations :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial m} \\ \frac{\partial}{\partial n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{II.1a})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos\theta} & -\text{tg}\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial m} \\ \frac{\partial}{\partial n} \end{bmatrix} \quad (\text{II.2b})$$

$\theta$  : désignant l'angle de la tangente en M à C avec l'axe ox.

## II.3.2 EQUATIONS DE MOUVEMENT

On se limitera ici au cas d'écoulement plan avec contraction de veine. On supposera ainsi qu'il s'effectue dans le plan de symétrie d'un canal délimité par deux parois distantes de  $h(x)$  (fig II.3).

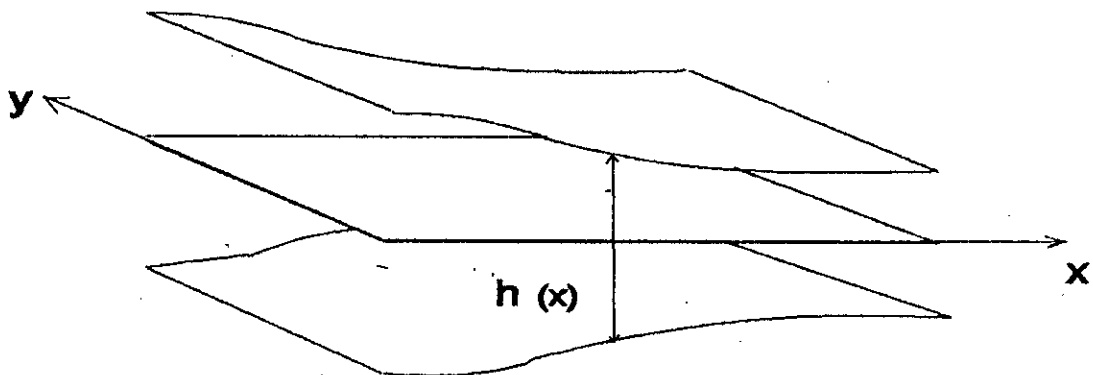


Fig. II.3

Les équations de l'écoulement supposé isoénergétique, permanent et non visqueux s'écrivent:

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} + \rho u \frac{d\omega}{dx} = 0 \quad (\text{II.2a})$$

$$\vec{v} \wedge \operatorname{rot} \vec{v} + T \operatorname{grad} s = 0 \quad (\text{II.2b})$$

$$\operatorname{grad} s \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{II.2c})$$

$$H = \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{(\gamma-1)} = \frac{v_0^2}{(\gamma-1)} = \text{cte} \quad (\text{II.2d})$$

$$a^2 = \gamma p / \rho \quad (\text{II.2e})$$

$$s / r = \ln(p / \rho^\gamma) / (\gamma-1) \quad (\text{II.2f})$$

Pour l'équation (II.2a), le terme additionnel  $\rho u d\omega/dx$  exprime la contraction de veine et son coefficient, tel que [ref. 15].

$$\omega(x) = \ln\left(\frac{h(x)}{h(0)}\right) \quad (\text{II.2h})$$

D'autres auteurs [ref. 11] ont mis une corrélation entre le coefficient de contraction de l'écoulement:

$$\omega = \frac{\rho_1 u_{x1}}{\rho_2 u_{x2}} < 1 \quad (\text{II.2h'})$$

Et les performances maxima de la grille  $\rho_1 u_{x1}$  et  $\rho_2 u_{x2}$  désignant respectivement les composantes du débit de l'écoulement en amont et en aval, mesurés à mi-hauteur d'aube. Ce coefficient mesure la convergence de l'écoulement à travers les aubages, soit en raison de la convergence des parois latérales (cas d'un rotor par exemple) ou du développement des couches limites le long de ses parois. Les expériences ont montré que ce coefficient, est généralement, supérieur dans le cas de la grille plane à ce lui obtenu en rotor. Mais on a constaté que si l'on peut rendre ces valeurs identiques dans les deux types d'écoulements, les performances coïncident.

Il paraît donc absolument nécessaire de se donner un moyen d'agir sur le coefficient de contraction. On constate aussi que ce coefficient permet de rendre compte des phénomènes tridimensionnels dans le modèle bidimensionnel.

Essayons maintenant de trouver l'équation (II.2b) dans le cas où la convergence du canal dépend uniquement de  $x$  (fig. II.4).

La conservation du débit dans le régime permanent donne:

$$\begin{aligned} (\rho u h) dy + (\rho v h) dx - \left( \rho u h + \frac{\partial(\rho u h)}{\partial x} dx \right) dy \\ - \left( \rho v h + \frac{\partial(\rho v h)}{\partial y} dy \right) dx = 0 \end{aligned}$$

d'où



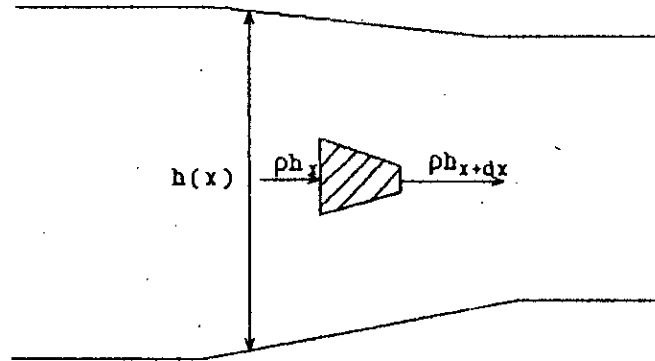


Fig. II.4

$$\frac{\partial(\rho u h)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v h)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{dh}{dx}$$

puisque  $h=h(x)$ . Enfin nous obtenons:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\rho u}{h} \frac{dh}{dx} = 0 \quad (\text{II.2a})$$

En injectant l'expression (II.2h) dans (II.2a), l'équation (II.2a) en découle.

Définissons les nouvelles variables:

$$\tilde{v} = \ln(v / v_0) \quad \text{et} \quad \tilde{s} = s / r$$

Les équations du système (II.2) peuvent s'écrire dans le repère  $(m, y)$  défini ci-dessus sous la forme:

$$\frac{\partial}{\partial y} \{u\} = [A] \frac{\partial}{\partial m} \{u\} + \{b\} \quad (\text{II.3})$$

tels que:

\{u\} est le vecteur:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \theta \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

[A] étant la matrice:

$$\begin{bmatrix} \sin\theta & (M^2-1)\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$$

et \{b\} le vecteur:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta \frac{\partial \varphi}{\partial m} - \cos\theta \frac{d\omega}{dx} \\ \frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} \end{bmatrix}$$

En plus l'équation d'énergie (II.2c) donne:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial m} = 0 \quad (\text{II.3c})$$

### II.3.3 TRANSFORMATION DU SYSTEME (III.3)

En explicitons le système (II.3) tel que:

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial \theta}{\partial m} + (M^2-1)\cos\theta \frac{\partial \varphi}{\partial m} + \cos\theta \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial m} - \cos\theta \frac{d\omega}{dx} \quad (\text{II.3a})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} + \sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial m} - \frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} \quad (\text{II.3b})$$

Il peut être placé sous une forme plus proche de la forme conservative en tenant compte de (II.3c) et en définissant une fonction G .

$$G = \frac{Me^{-s}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}} \quad (\text{II.4a})$$

tel que :

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial m} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial m} (\ln(G h(x))) \quad (\text{II.4b})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial m} + \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial m} + \frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial y} \quad (\text{II.4c})$$

et en notant que :

$$\frac{\partial \theta}{\partial m} = C \quad (26)$$

C désignant la courbure locale de la ligne de courant

L'équation de continuité(III-5a) traduit que dans le plan (x,y) la divergence d'un vecteur h(x). G colinéaire à la vitesse est nulle. Appliquons à travers un tube de courant du plan (x,y), de hauteur  $\Delta y(x)$ , on peut écrire en chaque section de ce tube.

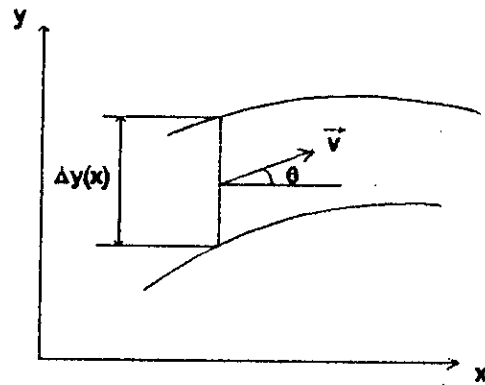
$$\int_0^{\Delta y(x)} [h \cdot G \cdot \cos \theta] (x) dy = \Delta Q \quad (\text{II.4a'})$$

$\Delta Q$  représente le débit (indépendant de x) du tube de courant représenté dans la figure (II.5).

#### II.3.4 ETUDE DE LA VARIATION D'ENTROPIE

L'équation (III-3c) montre que l'entropie demeure constante le long des lignes de courant tant que l'écoulement est subsonique. Lorsque l'écoulement est supersonique, l'accroissement d'entropie à travers une onde de choc de faible intensité est donné par :

$$\Delta \tilde{s} = \frac{\gamma(\gamma+1)}{12} M^6 \left(\frac{\Delta v}{v}\right)^3 + O\left[\left(\frac{\Delta v}{v}\right)^4\right] \quad (\text{II.5a})$$



avec 
$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\partial v}{\partial m} \Delta m + O(\Delta m^2)$$

Ce qui nous permet d'obtenir :

$$\Delta S = \frac{\gamma(\gamma+1)}{12} M^6 \left( \frac{\partial v}{\partial m} \right)^2 \Delta m^3 + O(\Delta m^4)$$

Ce qui prouve que l'accroissement d'entropie à travers un pas de calcul et d'ordre  $\Delta m^3$ , à condition que la quantité  $M^2 \partial v / \partial m$  demeure d'ordre 1. Sa dérivée suivant  $m$  défini par :

$$\Delta S = \frac{\partial S}{\partial m} \Delta m + O(\Delta m^2)$$

et donc d'ordre  $\Delta m^2$  et peut, dans ces conditions être négligée dans la mesure où la précision du schéma de différences finies mis en oeuvre n'est pas supérieure au second ordre .

Cela permet d'établir le critère suivant :

$$\Delta S > O(E) \quad (\text{II.5b})$$

E mesure l'erreur du schéma qui lorsque est vérifié, aiguille le calcul vers le traitement des ondes de choc exposé plus loin.

## II.4 EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION DU PROBLEME

Le système des équations aux dérivées partielles de 1<sup>er</sup> ordre (II.5), a une infinité de solutions. La solution désirée est déterminée par les conditions initiales et les conditions aux limites.

Dans notre cas le calcul est effectué par la donnée du vecteur vitesse, en grandeur et en direction, sur la ligne de courant initiale et, en grandeur ou en direction, le long de la frontière amont et éventuellement aval pour le cas subsonique.

### II.4.1 CAS HYPERBOLIQUE OU PROBLEME DE CAUCHY

Cela est obtenu en supposant que l'écoulement est entièrement supersonique à l'intérieur du domaine de calcul, le problème est bien posé comme un problème à valeurs initiales (données de  $v$  et de  $\partial v / \partial n$  sur une courbe autre qu'une courbe caractéristique). Le théorème de **CAUCHY** assure l'existence d'une solution unique du problème dans un certain voisinage de la courbe ou la solution est connue de façon régulière (remarque qui s'oppose au principe de calcul de certaines configurations d'écoulement, au voisinage d'un dièdre en régime subsonique par exemple) et que cette ligne ne constitue pas une direction caractéristique du système d'équations, cette restriction pose un problème supplémentaire en raison du système de coordonnées choisi, toute ligne de courant étant précisément caractéristique pour l'équation qui décrit la variation d'entropie (II.2.6).

Cependant si comme on l'admettra ici, le fluide est non visqueux, l'entropie n'est susceptible de croître qu'à travers une discontinuité de l'écoulement. On dispose des relations **RANKINE-HUGONIOT** pour évaluer localement les variations d'entropie ce qui nous évitera de la considérer comme une variable principale.

### II.4.2 CAS ELLIPTIQUE

Dans ce cas l'écoulement est supposé entièrement subsonique, le problème est elliptique nécessitant des données imposées le

long d'un contour fermé, l'introduction des données supplémentaires le long de la frontière aval ne paraît pas suffisante, caractérisant un problème parabolique. Le problème semble ainsi mal posé.

C'est pourquoi une technique de calcul (lissage) a été introduite qui a permis de discrétiser exactement des équations de type parabolique.

En conclusion, l'écoulement peut être calculé complètement le long de toute ligne de courant située à l'intérieur du domaine de calcul.

## II.5. RESOLUTION DU PROBLEME AUX VALEURS INITIALES ET VALEURS AUX LIMITES

Vu que le système (II.5) est aux dérivées partielles non linéaire du 1<sup>er</sup> ordre et de type mixte (hyperbolique-elliptique) que la résolution analytique reste non évidente jusqu'à présent, ce qui nous a obligé à recourir au numérique.

Dans ce cas il existe une variété d'approches dont on citera, l'approche par une discrétisation en éléments finis ou en différences finies. Puisque la première présente une difficulté pour le traitement des problèmes mixtes, on a opté pour la seconde.

On utilisera un schéma explicite pour le cas hyperbolique, qui par une technique de lissage permet de définir un schéma implicite pour traiter le cas elliptique. Les conditions initiales et aux limites sont choisis de façon appropriée.

### II.5.1 PRINCIPE DE DISCRETISATION EN DIFFERENCES FINIES

A l'intérieur d'un tube de courant de largeur  $\Delta y(x)$ , les relations (II.5) peuvent s'écrire de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^{\Delta y} F_1(y) dy \right] = 0 \quad (\text{II.6.1})$$

$$v(y+\Delta y) = v(y) + \int_0^{\Delta y} F_2(y) dy \quad (\text{II.6.2})$$

avec

$$F_1(y) = h(x) \cdot G \cdot \cos\theta$$

$$F_2(y) = F_{21}(y) \frac{\partial v}{\partial m} + F_{22}(y)$$

$$F_{21}(y) = \sin\theta$$

$$F_{22}(y) = \cos\theta \cdot C + \frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y}$$

Partant d'une répartition entièrement déterminée du vecteur vitesse le long d'une ligne de courant, on détermine aussi le profil d'une ligne de courant voisine par (II.6.1) et la répartition de vitesse correspondante par (II.6.2).

En procédant ainsi de proche en proche, on détermine la forme du canal délimité par la ligne de courant finale, ainsi que la répartition de vitesse sur ces parois.

Les intersections de ces différentes lignes de courant avec des parallèles à oy constituant un maillage en i suivant ox et en j suivant oy (cf fig II.6).

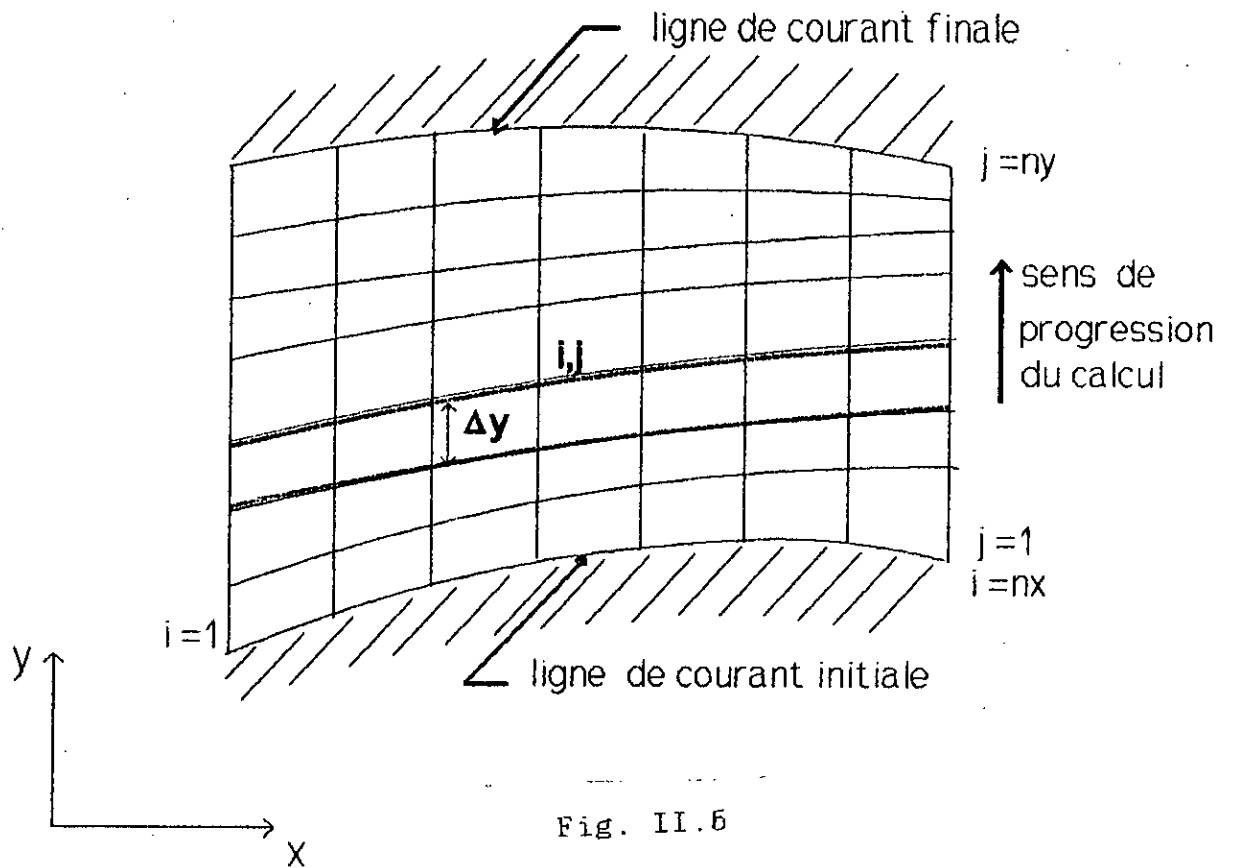


Fig. II.6

Le calcul consiste ainsi à déterminer à chaque abscisse  $x$  du maillage, l'épaisseur du tube de courant  $\Delta y$  et la répartition de la vitesse  $v(y+\Delta y)$ .



### II.5.1.1 CALCUL DE LA COURBURE DES LIGNES DE COURANT

Le long d'une ligne de courant définie par ses coordonnées  $(x,y)$ , la courbure est calculée comme celle d'un cercle passant par trois points consécutif du maillage sur cette ligne de courant(cf fig. II.7).

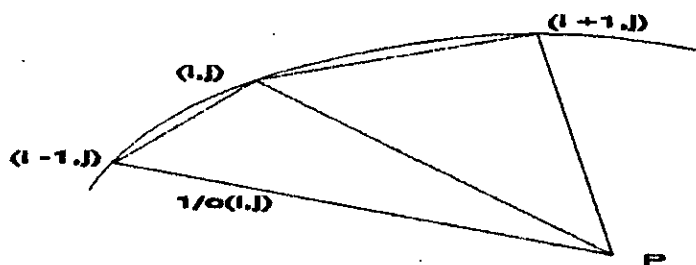


Fig. II.7

### II.5.1.2 SCHEMA DE DISCRETISATION

la grille de discrétisation est représentée dans la figure (II.8).

cette discrétisation comporte deux étapes.

#### II.5.1.2-a ETAPE EXPLICITE

En remplaçant dans (II.6.1) et (II.6.2) les dérivées par des différences finies, centrées autour du point  $(i,j)$ , on obtient:

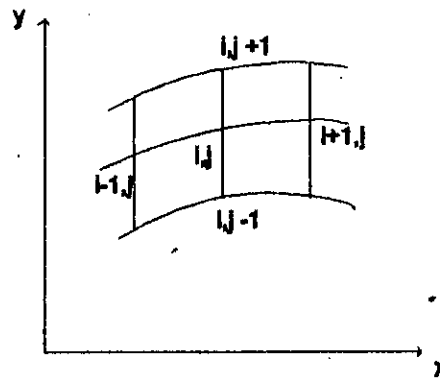


Fig. II.8

$$\bar{v}_{ij+1}^* = \bar{v}_{ij-1} + F_{2,ij}(y_{ij+1}^* - y_{ij-1}) \quad (\text{II.6.3})$$

le symbole \* caractérisant les grandeurs obtenues à l'issue de cette première étape, la fonction  $F_2$  étant discrétisée au point  $(i,j)$  par l'expression suivante :

$$F_{2,ij} = F_{21,ij} \frac{\bar{v}_{i+1j} - \bar{v}_{i-1j}}{\Delta m_{i-1j} + \Delta m_{i+1j}} + F_{22,ij} \quad (\text{II.6.4})$$

Ces opérations sont effectuées en chaque point le long de la ligne de courant.

Si l'écoulement est localement supersonique, on passe alors à la ligne de courant suivante. Sinon une étape supplémentaire doit être effectuée (lissage) pour assurer la stabilité du schéma.

#### II.5.1.2-b ETAPE IMPLICITE

Cette étape consiste à corriger les résultats obtenues lors du calcul explicite (\*) en utilisant des relations de la forme :

$$y_{ij+1} = y^*_{ij+1} - a_{1,ij} \frac{\partial^2 y}{\partial m^2} \Big|_{ij+1} \quad (\text{II.6.7})$$

$$v_{ij+1} = v^*_{ij+1} - a_{2,ij} \frac{\partial^2 v}{\partial m^2} \Big|_{ij+1} \quad (\text{II.6.8})$$

$a_{1ij}$  ,  $a_{2ij}$  étant des expressions de la forme :

$$a_{\alpha,ij} = k_{\alpha} (y^*_{ij+1} - y_{ij})^2 \cos^2 \theta_{ij} F(M_{ij}) \quad \alpha=1,2$$

où  $k_{\alpha}$  : étant une constante .

$$F(M_{ij}) = M^2_{ij} - 1$$

$a_{\alpha}$  : est un terme de viscosité artificielle ,qui est utilisé, pour renforcer le caractère parabolique des équations .

Par discrétisation des dérivées secondes au point  $(i,j+1)$ , c'est-à-dire:

$$\frac{\partial^2 \psi_{ij+1}}{\partial m^2} = \frac{\psi_{i+1j+1} - 2\psi_{ij+1} + \psi_{i-1j+1}}{\Delta m^2_{ij}}$$

En supposant  $\Delta m_{i-1j} = \Delta m_{ij}$

Les relations (II.6.7) et (II.6.8) se transforment en:

$$y^*_{ij+1} = \eta_1 y_{i+1j+1} + (1-2\eta_1) y_{ij+1} + \eta_1 y_{i-1j+1}$$

$$v^*_{ij+1} = \eta_2 v_{i+1j+1} + (1-2\eta_2) v_{ij+1} + \eta_2 v_{i-1j+1}$$

$$\text{avec} \quad \eta_{\alpha} = \frac{a_{\alpha,ij}}{\Delta m^2_{ij}}$$

Ecrites en chaque point de la ligne de courant, les relations précédentes fournissent deux systèmes linéaires tridiagonaux de la forme:

$$[A] \{X\}_{j+1} = \{X^*\}_{j+1}$$



Les grandeurs calculées au point  $(i, j+1)$  sont ainsi influencée par tous les points de la ligne de courant  $(i, j)$  (et non pas seulement par deux ou trois points comme dans le calcul explicite).

On peut montrer théoriquement qu'une telle opération de lissage revient à approximer le problème (hyperbolique-élliptique) réel par un problème (hyperbolique-parabolique) en ajoutant aux équations du calcul explicite un terme de viscosité artificielle  $a \partial^2 \psi / \partial m^2$ .

On introduit ainsi volontairement une erreur dans les schémas de discrétisation pour modifier la nature du problème.

Ces considérations sommaires permettent cependant d'expliquer que l'on puisse résoudre un problème à valeurs initiales, c'est à dire à l'intérieur d'un domaine ouvert.

Le type de conditions aux limites (ou initiales) nécessaires à la mise en oeuvre de la méthode en découle.

### II.5.3 CONDITIONS INITIALES ET AUX LIMITES

La formulation des conditions initiales et aux limites permet d'assurer l'existence, l'unicité et continuité par rapport aux données initiales et aux limites de la solution des équations (II.5).

Considérons un domaine de calcul (Fig. II.10) limité par :

- \_ une ligne de courant (1).
- \_ une ligne de courant (2).
- \_ des frontières amont (3) et aval (4) parallèles à  $oy$ .

Pour mettre en oeuvre la méthode on doit imposer :

#### II.5.3-a CONDITIONS INITIALES

on imposera le long de (1), le vecteur vitesse en grandeur et en direction dans tous les cas.

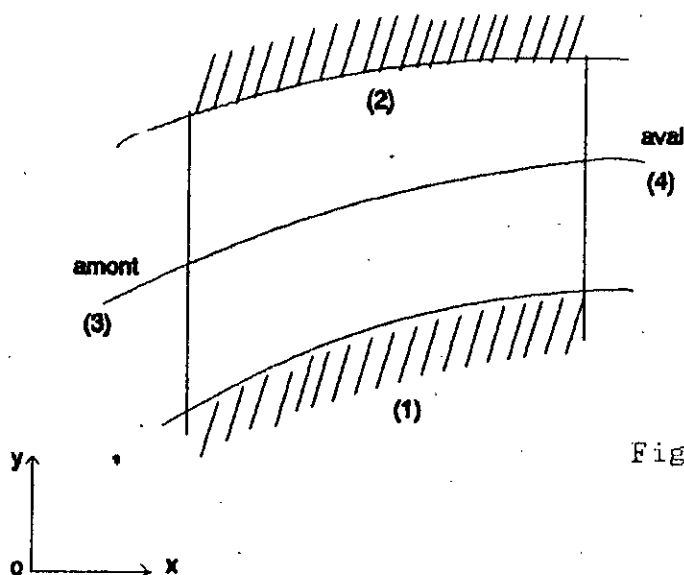


Fig. II.10

### II.5.3-b CONDITIONS AUX LIMITES

On n'imposera aucune condition le long de (2). on donnera en amont, (3), la grandeur de la vitesse et en aval, (4), une des composantes de la vitesse ( grandeur ou direction ) dans le cas subsonique. Pour un écoulement supersonique en aval, on n'imposera aucune condition .

### II.5.4 ETUDE DE LA STABILITE DU SCHEMA EXPLICITE

L'étude de la stabilité au sens de Von Neumann (voir annexe A) ne peut porter que sur la forme linéarisée et homogène du système d'équations (II.3) c'est-à-dire

$$\frac{\partial \{U\}}{\partial y} = [A] \frac{\partial \{U\}}{\partial m} \quad (\text{II.3'})$$

où la matrice [A] est supposée localement constante .

En appliquant le schéma explicite, le système (II.6) s'écrit:

$$\{U\}_{1j+1} = \{U\}_{1j-1} + \frac{y_{1j+1} - y_{1j-1}}{\Delta m_{1-1j} + \Delta m_{1j}} [A] [\{U\}_{1+1j} - \{U\}_{1-1j}] \quad (\text{II.7})$$

En supposant que le pas est constant le long des lignes de courant ( $\Delta m_{1-1j} = \Delta m_{1j}$ ) et posons que :

Le système (II.7) peut s'écrire :

$$\{v\}_{kj-1} = \{v\}_j e^{ikm}$$

$$\{v\}_{kj} = \{w\}_j e^{ikm}$$

$$\{w\}_{j+1} = \{v\}_j + \frac{\Delta y}{\Delta m} 2i [A] \sin(k\Delta m) \{w\}_j \quad (\text{II.7.1})$$

En ajoutant la relation triviale

$$\{v\}_{j+1} = \{w\}_j \quad (\text{II.7.2})$$

et en posant  $a = (\Delta y / \Delta m) \sin(k\Delta m)$  d'où

$$\begin{bmatrix} \{v\}_{j+1} \\ \{w\}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} & : & \{1\} \\ \dots & : & \dots \\ \{1\} & : & 2ia[A] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{v\}_j \\ \{w\}_j \end{bmatrix}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} \{v\}_{j+1} \\ \{w\}_{j+1} \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \{v\}_j \\ \{w\}_j \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

[A] est la matrice d'amplification associée au schéma définie par :

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2iasin\theta & 2ia(M^2-1)\cos\theta \\ 0 & 1 & 2iacos\theta & 2iasin\theta \end{bmatrix}$$

Appliquons la condition de Von Neumann pour déterminer le critère de stabilité du système (II.8) : [A] doit être définie positive c'est-à-dire :

$$\rho([A]) < 1 \quad \text{et} \quad |\lambda_{\max}| < 1 \quad (\text{II.9.1})$$

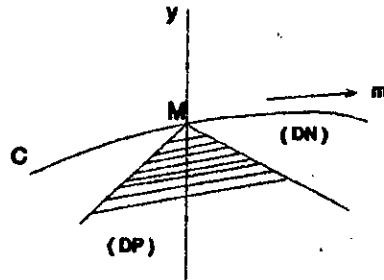
où  $\rho([A])$  désigne le rayon spectral de la matrice [A] et  $\lambda_{\max}$  la valeur propre de [A] telle que :

$$\lambda_{\max}^2 = 2a^2 (M^2 \cos^2 \theta - 1) + \sqrt{4a^2 (M^2 \cos^2 \theta - 1) - 1}$$

On en conclut que la stabilité du schéma (II.6) ne peut être assurée que pour  $M^2 \cos^2 \theta - 1 > 0$ , le pas de calcul devant, de plus, vérifier la condition suivante :

$$a < \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{M^2 \cos^2 \theta - 1}} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta y}{\Delta m} < \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{M^2 - 1}} \quad (\text{II.9.2})$$

Relation qui traduit que le domaine de dépendance physique (DP) d'un point doit être compris à l'intérieur de son domaine de dépendance numérique (DN) qui appelée aussi "condition de courant-friedricks-lewy" ou de CFL (fig. II.11) [ref. 16].



### II.5.5 ETUDE DE LA PRECISION DU SCHEMA

Cette précision peut être évaluée en déterminant le système d'équations aux dérivées partielles effectivement discrétisé par le schéma (II.6.7) et (II.6.8) appelées système d'équations modifiées [réf. 17].

Ce système peut être obtenue en exprimant dans le schéma chaque différence finie à l'aide de son développement en série de TAYLOR autour du point  $(i, j)$ .



ce système s'écrit en supposant  $\Delta m_{i,j-1} = 0 (\Delta m_{i,j})$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} = [A] \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{2} (M^2 \cos^2 \theta - 1) ((\Delta m_{i,j} - \Delta m_{i-1,j}) \\ + (y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1})) \frac{\partial^2 U}{\partial m^2} + O(\Delta m^2) \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Qui ne représente, au second ordre près, l'équation modifiée que si le terme suivant :

$$\frac{1}{2} (M^2 \cos^2 \theta - 1) ((\Delta m_{i,j} - \Delta m_{i-1,j}) + (\Delta y_{i,j} - \Delta y_{i,j-1})) \frac{\partial^2 U}{\partial m^2}$$

est une quantité d'ordre  $\Delta m^2$

#### II.5.6 ETUDE DE LA PRECISION DU SCHEMA IMPLICITE

En admettant que l'introduction d'une matrice tridiagonale, puis son inversion ne modifiant en rien, ni la précision, ni la nature du problème. L'équation effectivement modifiée s'écrit en développant  $\{U\}$  en fonction de  $y$ , au voisinage de  $(i,j)$ .

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + (y_{i,j+1} - y_{i,j}) \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|_{i,j} (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2$$

$$U_{i,j-1} = U_{i,j} + (y_{i,j-1} - y_{i,j}) \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|_{i,j} (y_{i,j-1} - y_{i,j})^2$$

En faisant la différence, membre à membre de ces deux équations, et en injectant l'équation (II.3'), on obtient :

$$U_{i,j+1} - U_{i,j-1} = (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) [A] \frac{\partial U}{\partial m} \Big|_{i,j} + \frac{1}{2} [A]^2 (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2 \frac{\partial^2 U}{\partial m^2} \Big|_{i,j}$$

$$[A]^2 = \cos^2 \theta (M^2 - 1)$$

$$U_{i,j+1} = U_{i,j-1} + \frac{1}{2} \cos^2 \theta (M^2 - 1) (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2 \frac{\partial^2 U}{\partial m^2} \quad (\text{II.11})$$

### II.5.7 ADAPTATION DU SCHEMA AUX CONDITIONS AUX LIMITES INFLUENCE D'UN TERME DE VISCOSITE ARTIFICIELLE

Les expériences numériques effectuées sur le schéma implicite [ref. 11] ont montré que pour assurer la stabilité des calculs, il était nécessaire d'introduire un terme dissipatif ou de viscosité artificielle  $a_{\alpha ij} \partial^2\{U\}/\partial m^2$  (voir ANNEXE C) compte tenu duquel le schéma s'écrit comme suit :

$$U_{ij+1} = U^*_{ij+1} + a_{\alpha ij} \frac{\partial^2 U}{\partial m^2} |_{ij+1} + O(\Delta m^2) \quad (\text{II.11'})$$

avec

$$a_{\alpha ij} = K_{\alpha} (y^*_{ij+1} - y_{ij})^2 \cos^2 \theta (M^2 - 1)$$

L'effet du coefficient de viscosité artificielle  $k_{\alpha}$  était ainsi de renforcer le caractère parabolique de l'équation et de stabiliser le processus de calcul.

### II.6 TRAITEMENT NUMERIQUE DES DISCONTINUITES

Les équations du mouvement ne peuvent être placées sous une forme conservative, à cause du système de coordonnées choisi, ce qui empêche d'utiliser la méthode de capture de choc pour calculer l'écoulement à travers les discontinuités.

La détection d'une discontinuité entre deux points du maillage le long d'une ligne de courant est effectuée à l'aide de la relation (II.5b).

L'existence d'une discontinuité entre deux points consécutifs du maillage le long d'une ligne de courant ne signifie pas qu'il existe une seule onde de choc passant entre ces deux points. L'inverse est, en effet, fréquent (lors de l'intersection de deux chocs par exemple). La méthode utilisée consiste à se fixer un nombre maximum de chocs pouvant se situer simultanément entre deux points du maillage le long d'une même ligne de courant. Par raison de simplicités, ce nombre maximum a été fixé à deux chocs obliques et un choc droit, choix qui permet la représentation convenable d'un grand nombre de configurations d'écoulements.

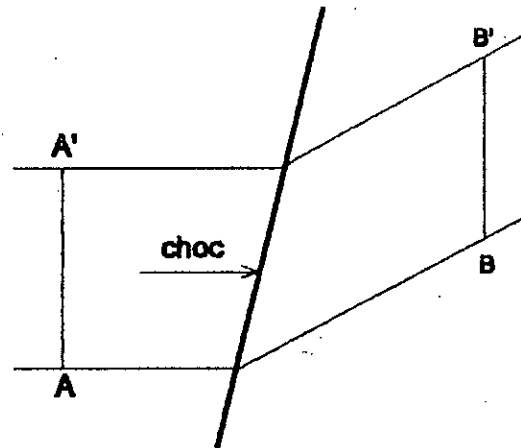


Fig.II.12

Considérons alors une onde de choc coupant une ligne de courant  $L$  entre deux points du maillage  $A$  et  $B$  (fig II.12). Si le calcul de l'écoulement en  $A'$  et  $B'$  homologues de  $A$  et  $B$  le long de la ligne de courant suivante  $L'$  peut être effectué exclusivement à partir des données de l'écoulement en amont et en aval de  $A$  et  $B$  respectivement, la "conservation" de la discontinuité sera réalisée. Le problème consiste par conséquent à prévoir (à partir des données de l'écoulement le long de  $L$ ) les positions relatives des points  $A'$  et  $B'$  et de l'onde de choc le long de  $L'$ . Cette prévision constitue le principe de la méthode "d'ajustement de choc" basée sur les étapes suivantes:

- Etape 1: Détection et caractérisation des ondes de choc entre  $A$  et  $B$
- Etape 2: Localisation des ondes de choc par rapport aux points de maillage
- Etape 3: Calcul du vecteur vitesse (dans le cas supersonique ou subsonique) en tenant compte des étapes 1 et 2.

#### ETAPE 1 CARACTERISATION D'UN EVENTUEL SYSTEME D'ONDE DE CHOC ENTRE DEUX POINTS CONSECUTIFS DU MAILLAGE LE LONG D'UNE LIGNE DE COURANT

Pour une variante, tenant compte de deux chocs obliques et un choc droit, au plus, entre deux points consécutifs du maillage, les relations de RANKINE- HUGONIOT permettent d'écrire entre deux points consécutifs  $(i-1,j)$  et  $(i,j)$  le long d'une ligne de

courant, 2 relations faisant intervenir les variations du vecteur vitesse (en grandeur et en direction) entre ces deux points (nous allons écrire  $\nabla\beta$  pour désigner  $\Delta\beta_{1-1j}$  pour alléger les expressions).

$$\text{Arctg}(\alpha f(M_{i-1j}, x)) + \text{Arctg}(\alpha' f(M', x')) = \nabla\beta \quad (\text{II.12.1a})$$

$$g(M_{i-1j}, x) \cdot g(m', x') \cdot g(M', M'^2) = e^{2\nabla\beta} \quad (\text{II.12.1b})$$

En posant

$$X = M_{ij}^2 \cdot \sin^2\theta$$

$\theta$  désignant l'angle du choc avec la direction de l'écoulement en amont, les quantités accentuées  $(M', X')$  et  $M''$  caractérisant d'une part, l'écoulement entre les deux chocs obliques, et d'autre part, entre le second choc oblique et le choc droit.

On admet que  $\alpha$  et  $\alpha'$  soient égaux à  $+1$  ou  $-1$ , et que  $F(M, x)$  étant les fonctions définies par les relations suivantes:

$$F(M, x) = \left| \frac{(\gamma+1)M^2}{2(X-1)} - 1 \right| \left( \frac{X}{M^2 - X} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$g(M, X) = 1 - \frac{4(X-1)(\gamma X+1)}{(\gamma+1)^2 M^2 X}$$

Les relations (II.12) peuvent s'écrire sous la forme d'un système de deux équations à deux inconnues  $x$  et  $x'$

$M'$  et  $M''$  étant donnés respectivement par les relations:

$$\frac{\alpha \alpha' F(M_{i-1j}, X) f(M', X') - 1}{\alpha F(M_{i-1j}, X) + \alpha' F(M', X')} = \text{Cotg} \nabla \beta \quad (\text{II.12.1'})$$

$$g(M_{i-1j}, X) g(M', X') g(M'', X'') = e^{2\nabla \nu}$$

$$M^2 = \frac{(\gamma+1)^2 M_{i-1j}^2 X - 4(X-1)(\gamma X+1)}{(2\gamma X - (\gamma-1))((\gamma-1)X+2)}$$

$$M_{ij}^2 = \frac{(\gamma-1)M'^2 + 2}{2\gamma M'^2 - (\gamma-1)}$$

En réalité, le troisième choc (droit) ne doit être envisagé que si, l'écoulement au point (i,j) est subsonique, et que  $M_{i,j}$  soit inférieur à la valeur limite :

$$M_i = \left[ \frac{(\gamma+1)^2 X'_1 M_i'^2 - 4(X'_1-1)(\gamma X'_1+1)}{(2\gamma X'_1 - (\gamma-1))((\gamma-1)X'_1+2)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Expression donnant la valeur minimale du nombre de Mach derrière un choc oblique,  $x'_1$  étant donné par la relation :

$$X'_1 = \frac{1}{4\gamma} \left[ (\gamma+1)M^2 - 4 + \sqrt{(\gamma+1) \left[ (\gamma+1)M^4 + 8(\gamma-1)M^2 + 16 \right]} \right]$$

C'est pour cela que le système d'équations (II.12') est résolu dans tous les cas en supposant dans un premier temps, qu'il existe seulement 2 ondes de choc obliques entre (i,j) et (i-1,j).

On obtient alors le système suivant :

$$\frac{\alpha \alpha' F(M_{i-1j}, X) f(M', X') - 1}{\alpha F(M_{i-1j}, X) + \alpha' F(M', X')} = \text{Cotg} \nabla \beta \quad (\text{II.12.2a})$$

$$g(M', X') = \frac{e^{2\nabla \nu}}{g(M_{i-1j}, X)} \quad (\text{II.12.2b})$$

En posant :

$$B = \frac{(1-\gamma)}{\gamma} + \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2 \frac{M^2}{\gamma} \left[ \frac{e^{2v\alpha}}{g(M_{i-1j}, X)} - 1 \right]$$

La relation (II.12.2b) fournit une expression analytique donnant  $x'$

$$x' = -\frac{B}{2} + \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + \frac{1}{\gamma}}$$

En l'associant à l'équation (II.12.2a), on obtient un système d'une équation à une inconnue  $x$ , donnée sous la forme:

$$H(X, \nabla \tilde{v}, \nabla \beta, \alpha, \alpha') = 0 \quad (\text{II.12.3})$$

dont la solution est obtenue itérativement en attribuant successivement à  $x$  et  $x'$  les valeurs indiquées ci-dessous suivant le signe de  $\nabla \beta$  :

$\nabla \beta$	$>0$	$<0$	$=0$
$(\alpha, \alpha')$	(1,1)	(-1,-1)	(-1,1)
	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)
	(1,-1)	(1,-1)	

ETAPE-2- LOCALISATION DES ONDES DE CHOC PAR  
RAPPORT AUX POINTS DU MAILLAGE

On supposera dans ce qui suit que la détection des discontinuités à déjà été effectuée et que les nouveaux points nécessaires introduits dans le maillage, correspondant à ce que toute discontinuité entre deux de ces points puisse être représentée par un seul choc

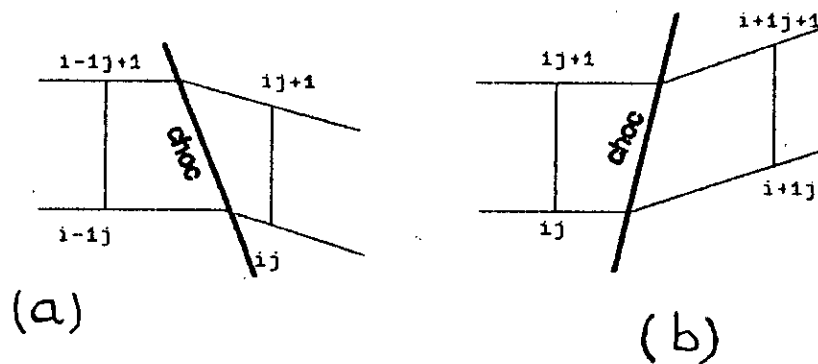
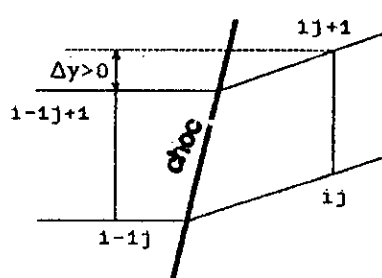
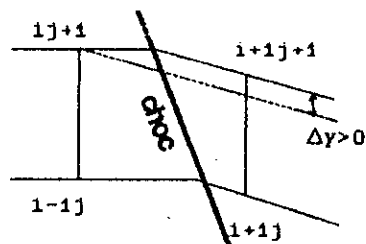


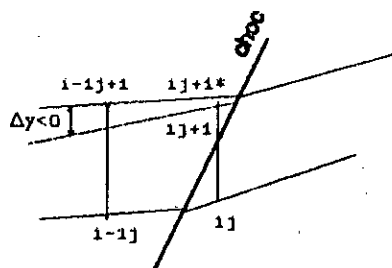
Fig.II.13



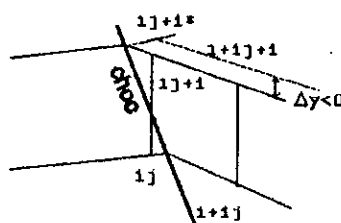
(c)



(d)



(e)



(f)

TEST I

On considère deux points consécutifs  $(i-1, j)$  et  $(i, j)$  le long d'une ligne de courant où l'écoulement est connu et entre lesquels passe une onde choc. Deux cas peuvent être envisagés :

$-\nabla\beta < 0$  (fig. II.13-a)



Dans ce cas l'onde de choc se dirige vers l'amont. Le point  $(i,j+1)$  est alors situé nécessairement en aval du choc.

$$-\nabla\beta > 0$$

Deux possibilités peuvent être envisagées suivant la position du point  $(i,j)$  par rapport au choc.

Dans la première figure (II.13-c) le point  $(i,j+1)$  est situé en aval du choc. Par contre, dans la seconde figure (II.13-e) il  $(i,j+1)$  se situe en amont du choc.

La condition pour que le point  $(i,j+1)$  soit situé en amont du choc peut s'écrire dans ces conditions

$$y_{ij+1} < y_{i-1j+1} + \Delta x \operatorname{tg}\beta_{i-1j}$$

$\Delta x$  étant le pas de calcul suivant  $x$ .

## TEST II

On s'intéresse maintenant au couple de points  $(i,j)$  et  $(i+1,-j)$ , ce dernier étant situé en aval du point  $(i,j)$ .K

Deux cas peuvent à nouveau être envisagés:

$$-\Delta\beta > 0 \text{ (fig. II.13-b)}$$

Dans ce cas, l'onde de choc se dirige vers l'aval. Le point  $(i,j+1)$  est alors nécessairement situé en amont du choc.

$$-\Delta\beta < 0$$

Deux possibilités peuvent être à nouveau envisagées suivant la position du point  $(i,j)$  par rapport au choc.

Dans le premier cas (fig. II.13-d) le point  $(i,j+1)$  est situé en amont du choc. Tandis que dans le second cas (fig. II.13f) il est situé en aval du choc.

La condition pour que le point  $(i,j+1)$  soit situé en aval du choc peut s'écrire dans ce cas :

$$y_{1j+1} > y_{1+1j+1} - \Delta x \operatorname{tg} \beta_{1+1j}$$

### I.7 CONCLUSION

Les bases d'une méthode de calcul d'aubage transsonique par différences finies ont été exposées dans ce chapitre cette méthode se distingue nettement des méthodes transitoires et des méthodes de relaxation mise en oeuvre habituellement.

Le traitement des discontinuités est prévu par une méthode de SHOCK-FITTING (ou d'ajustement de choc).

Toute fois, permettant de déterminer l'écoulement à travers un canal inter-aubes, en partant de la géométrie et de la répartition des vitesses sur l'une des parois, cette méthode permet ainsi de connaître à priori l'état de la couche limite sur cette paroi ce qui constitue un avantage significatif.

Le seul inconvénient de la méthode est qu'elle ne tient pas en compte de la condition de périodicité pour palier à ce problème, il faut donc l'associer avec une méthode directe dans un processus itératif jusqu'à la convergence.

La présentation de cette méthode directe sera l'objet du chapitre suivant.

---

---

# CHAPITRE 3

## METHODE

### PSEUDO-INSTATIONNAIRE

---

---

## CHAPITRE III

### METHODE DIRECTE

#### III.1 INTRODUCTION

A la fin du chapitre précédent, nous avons signalé que l'application du calcul semi-inverse aux grilles d'aubes pose des problèmes, car elle ne tient pas compte de la condition de périodicité. Donc ce calcul ne présente qu'une ébauche du profil recherché, d'où la nécessité de le coupler à un calcul direct dans un processus itératif jusqu'à atteindre une forme satisfaisante du profil. Pour cela, il existe plusieurs approches.

Dans le cas des écoulements transsoniques, les méthodes de relaxation utilisant l'équation du potentiel telle que celle exposée dans la référence [ref. 19], pour un écoulement irrotationnel; cette méthode n'est pas applicable que pour des écoulements qui ne présentent pas de chocs intenses, mais cette dernière approche reste la plus utilisée dans la plage suivante:  $0.7 \leq M \leq 1$ . La méthode d'éléments finies et la méthode spectrale peuvent donner des solutions [ref. 20]. Les seules méthodes largement utilisées sont les méthodes instationnaires [ref. 5] et [ref. 16].

Le but de cette partie est de présenter les modèles mathématique et numérique de la méthode ainsi que les conditions initiales et les conditions aux limites choisies.

#### III.2 PRINCIPE DE LA METHODE

Elle consiste à utiliser les équations d'EULER sous forme instationnaire, c'est-à-dire de type hyperbolique dans tout le champs de l'écoulement quelle que soit la valeur du nombre de Mach local, et à obtenir l'écoulement stationnaire comme solution limite de ces équations pour les valeurs importantes du temps.

Le schéma aux différences retenu est de type prédicteur-correcteur; il permet le calcul des ondes de choc par une technique de viscosité artificielle ( voir Annexe C).

### III.3 FORMULATION DU PROBLEME

#### III.3.1 EQUATIONS DE MOUVEMENT

Nous garderons les mêmes hypothèses avancées au chapitre précédent § II.3.2. L'écoulement dans une grille de turbomachine (fig III.1) est décrit par les équations d'EULER qui s'écrivent sous la forme suivantes :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = H \quad (\text{III.1-a})$$

où U, F, G et H sont des vecteurs ayant pour composantes:

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \end{pmatrix} \quad H = -U \frac{1}{h} \frac{dh}{dx} \quad (\text{III.1-b})$$

$\rho$  étant la densité du fluide; u et v les composantes de sa vitesse suivant x et y; p sa pression statique et  $H_0$  son enthalpie totale liée aux précédentes quantités par la relation :

$$H_0 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \quad (\text{III.1-c})$$

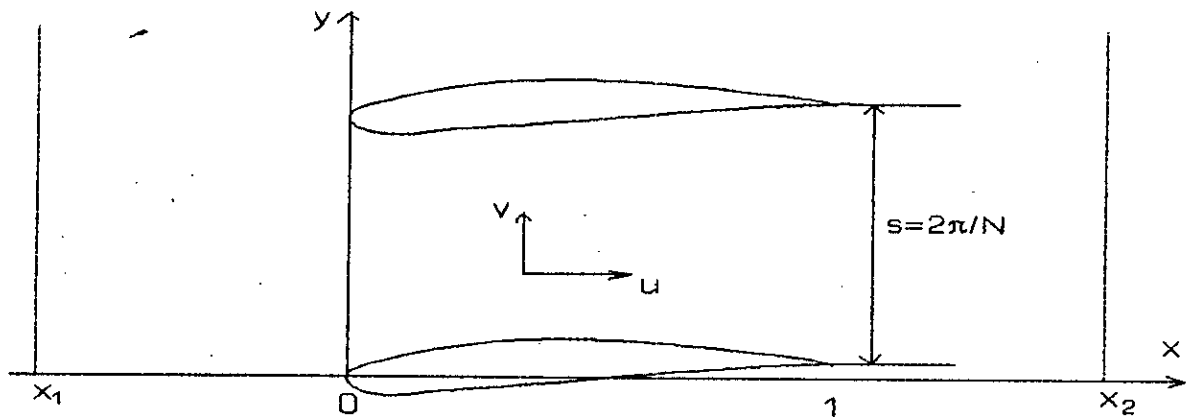


Fig. III.1

Ces quatre équations (III.1) où n'interviennent que les variables  $t, x$  et  $y$  pour les quatre inconnues  $\rho, u, v$  et  $p$  régissent l'écoulement bidimensionnel de grille sur chaque ligne de courant.

Nous soulignons que l'enthalpie totale a été prise uniforme et indépendante du temps, dans un souci de diminuer le temps de calcul, considéré comme l'inconvénient majeur des méthodes instationnaires. Cela est possible, car d'une part, le caractère instationnaire est introduit comme un artifice de calcul dans le but de rendre les équations (III.1-a) de type hyperbolique dans tout le champ de l'écoulement et, en conséquence, de ne pas avoir à utiliser qu'un seul schéma de discrétisation; d'autre part, cette simplification est en effet consistante avec l'écoulement stationnaire recherché dans le cas d'un fluide parfait dont l'enthalpie totale est uniforme à l'amont.

### III.3.2 CONDITIONS INITIALES ET CONDITIONS AUX LIMITES

La formulation des conditions initiales et les conditions aux limites permet d'assurer l'existence, l'unicité et la continuité par rapport aux données initiales et aux limites de la solution des équations (III.1), et constitue un problème mathématique d'une grande difficulté qui n'a pas été résolu dans toute sa généralité. Certains résultats peuvent toutefois être énoncés en considérant le caractère hyperbolique du système d'équation

(III.1) qui se traduit par l'existence d'un domaine de dépendance pour chaque point du calcul.

### III.3.2.1 CONDITIONS INITIALES

A l'instant  $t=0$ , les composantes du vecteur  $U$  sont données arbitrairement en prenant soin, toutefois, de leur attribuer des valeurs vérifiant les conditions aux limites décrites au paragraphe suivant et suffisamment continues pour éviter l'apparition, aux instants ultérieurs, de ligne de discontinuité non significatives.

### III.3.2.2 CONDITIONS AUX LIMITES

#### a/ CONDITION DE GLISSEMENT

Elle est appliquée sur l'extrados et l'intrados des aubes. Si  $y=Y(x)$  représente l'équation de l'intersection d'une aube avec la ligne de courant  $\psi=cte.$  de l'écoulement, cette condition s'écrit :

$$v = u \cdot \frac{df_p}{dx} \Big|_{y=Y(x)}$$

#### b/ CONDITION DE PERIODICITE

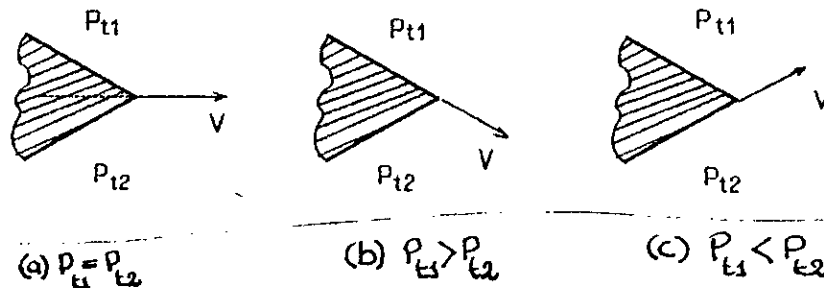
Elle est imposée à l'amont et à l'aval du canal inter-aubes. La solution stationnaire recherchée étant périodique par rapport à la variable  $y$ , de période  $s=2\pi/N$  où  $s$  est le pitch et  $N$  le nombre d'aubes de la grille considérée, cette condition sera imposée en régime transitoire :

$$U(x, y, t) = U(x, y+s, t)$$

#### c/ CONDITION DE KUTTA-JOUKOWSKY

Cette condition n'est prise en compte que si l'écoulement est subsonique au bord de fuite des aubes. Dans le cas où l'écoulement sur l'extrados et l'écoulement sur l'intrados d'une même aube ont des pressions totales identiques on imposera à l'écoulement confluent au bord de fuite, d'avoir la direction de la

bissectrice du dièdre formé par le bord de fuite de l'aube (fig III.2-a); dans le cas contraire, par exemple, dans le cas où un choc d'intensité variable se développe dans le canal inter-aubes, l'écoulement confluent sera tangent au côté du dièdre où la pression totale est la plus élevée (fig III.2-b et c).



#### d/ conditions à l'infini amont et aval

Le domaine de calcul qui théoriquement, s'étend de l'infini amont à l'infini aval est pratiquement limité par deux plans perpendiculaires à l'axe de la grille  $x=x_1$  et  $x=x_2$  (fig. III.1). La théorie des caractéristiques pour les équations hyperboliques montre que le nombre et la nature des conditions aux frontières ne sont pas arbitraires.

Cette analyse a montré que pour un Mach axial ( $M_1 \cos \alpha_1$ ) supérieur à l'unité le domaine de dépendance d'un point  $p_1$  de la frontière amont, par exemple, à l'instant  $t=t_0+\Delta t$ , étant entièrement extérieur au domaine de calcul (fig. III.3-a). Les différentes variables n'y sont donc pas connues, il est clair que toute les caractéristiques de l'écoulement doivent être imposées; en revanche, dans le cas où ( $M_1 \cos \alpha_1 < 1$ ), ce domaine de dépendance étant partiellement intérieur au domaine de calcul (fig III.3-b) et quelques caractéristiques de l'écoulement peuvent être déterminées par les grandeurs calculées à l'instant  $t=t_0$ .



En ce qui concerne la frontière aval ( $x=x_2$ ), les considérations analogues permettent de parvenir aux conclusions suivantes: dans le cas où  $(M_2 \cos \alpha_2 > 1)$ , le domaine de dépendance d'un point  $p_2$  à l'instant  $t=t_0+\Delta t$ , est entièrement à l'intérieur du domaine de calcul, toutes les grandeurs doivent donc être calculées, dans le cas contraire; le domaine de dépendance du point  $p_2$  coupe la frontière  $x=x_2$ , il n'est donc pas possible de calculer toutes les grandeurs et certains d'entre elle doivent être imposées.

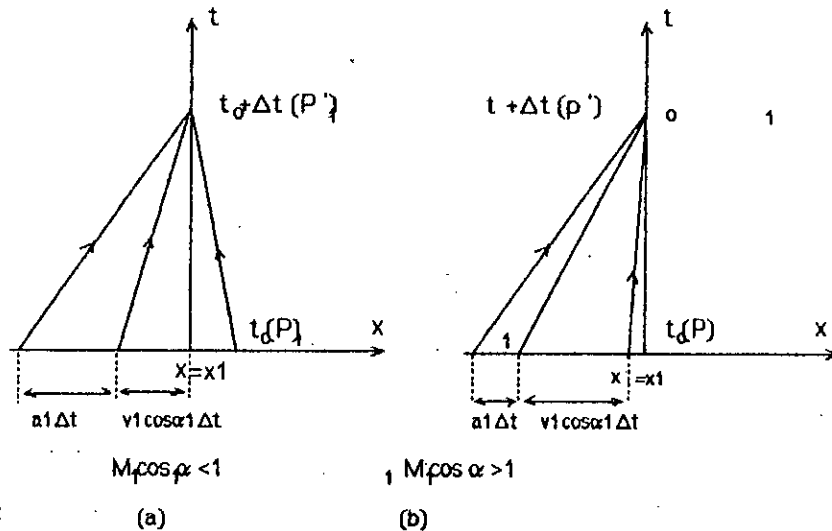


Fig. III.3

Dans le cas pratique, le Mach axial est le plus souvent inférieur à l'unité à l'amont comme à l'aval (ref. veuillot).

Nous avons donc retenu que les résultats suivants :

i/ Sur la frontière ( $x=x_1$ ), on se donne la pression totale  $P_{01}$ , la température totale  $T_{01}$  (implicitement imposée puisque  $H_0=cte.$ ) et une autre caractéristique de l'écoulement qui peut être soit la direction de la vitesse ( $\alpha_1$ ) soit le nombre de Mach ( $M_1$ ); le débit résulte du calcul.

ii/ Sur la frontière aval ( $x=x_2$ ) la pression statique ( $p_2$ ) est imposée.

## III.4 LE MODELE NUMERIQUE

La procédure générale pour résoudre le problème du calcul de l'écoulement transsonique est donnée de la façon suivante :

## III.4.1 ETAPE I: CHANGEMENT DE COORDONNEES

La formulation des schémas au différences finies se trouve notablement simplifiée notamment en ce qui concerne les conditions aux limites lorsqu'on dispose d'un maillage rectangulaire et des frontières parallèles aux axes de coordonnées, nous avons été amenés à effectuer une transformation de coordonnées du plan physique  $(x,y)$  (fig. III.4-a), en un plan de calcul  $(X,Y)$  (fig. III.4-b) à l'aide d'une transformation définie par:

$$\begin{cases} x = x(X, Y) \\ y = y(X, Y) \end{cases} \quad (\text{III.4.1})$$

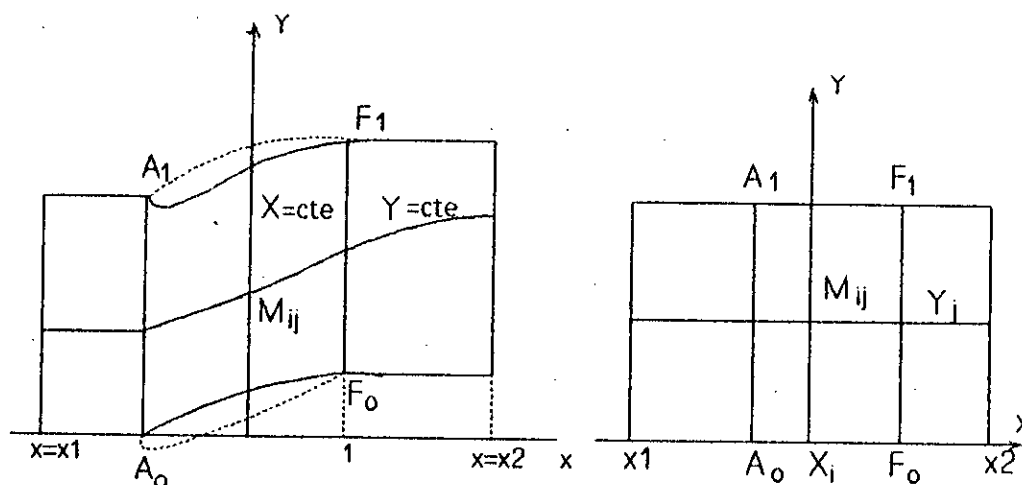
qu'il n'est pas nécessaire d'explicitier seules les positions des points  $(i,j)$  par rapport au système de coordonnées cartésien d'origine  $(x,y)$  sont requises.

Les relations entre les dérivées partielles des deux systèmes de coordonnées sont :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial X} \\ \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{III.4.2})$$

La transformée inverse est :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial Y} & -\frac{\partial y}{\partial X} \\ -\frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \end{bmatrix} \quad (\text{III.4.3})$$



(a) plan physique

(b) plan de calcul

avec  $j$  le jacobien de la transformation II.4.1:

$$J = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial y}{\partial Y} - \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial y}{\partial X} \quad (\text{III.4.4})$$

### III.4.2 ETAPE II: ECRITURE DES EQUATIONS DANS LE PLAN DE CALCUL

D'après la relation (II.4.3), on peut exprimer les dérivées partielles de (II.1-a) dans le plan de calcul (X,Y)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{1}{J} \left( \frac{\partial y}{\partial Y} \frac{\partial F}{\partial X} - \frac{\partial y}{\partial X} \frac{\partial F}{\partial Y} \right) \\ \frac{\partial G}{\partial y} &= \frac{1}{J} \left( -\frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial G}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial G}{\partial Y} \right) \end{aligned}$$

L'équation II.1-a devient :

$$J \frac{\partial U}{\partial t} = \left( \frac{\partial y}{\partial Y} \frac{\partial F}{\partial X} - \frac{\partial y}{\partial X} \frac{\partial F}{\partial Y} \right) + \left( \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial G}{\partial Y} - \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial G}{\partial X} \right) = J H(U) \quad (\text{III.5})$$

avec U, F, G et H comme définis au paragraphe §(III.4.1)

### III.4.3 ETAPE III: DISCRETISATION DES EQUATIONS II.5

On définit dans le domaine de calcul du plan (X,Y) un maillage carré dont les noeuds  $M_{ij}$  ont pour coordonnées  $X_i, Y_j$ . L'approximation de  $U(x,y,t)$  à l'instant  $t_n = n \cdot \Delta t$  et au point de discrétisation  $M_{ij}$  sera notée:  $U_{ij}^n$ .

#### III.4.3.1 DISCRETISATION AU POINT $M_{ij}$ INTERIEUR AU DOMAINE DE CALCUL

Le schéma utilisé comporte les trois étapes suivantes:

a/ calcul du prédicteur  $U_{ij}^{*n+1}$

Connaissant  $U_{ij}^n$  on calcule une première approximation de  $U_{ij}^{n+1}$  en utilisant les différences avancées pour approcher les dérivées d'espace:

$$U_{ij}^{*n+1} = U_{ij}^n + \Delta t \cdot H_{ij}^n + A_{ij}^n \left[ \left\{ \frac{\partial y}{\partial Y} (F_{i+1,j}^n - F_{ij}^n) - \frac{\partial y}{\partial X} (F_{ij+1}^n - F_{ij}^n) \right\} + \left\{ \frac{\partial x}{\partial X} (G_{i+1,j}^n - G_{ij}^n) - \frac{\partial x}{\partial Y} (G_{i+1,j}^n - G_{ij}^n) \right\} \right] \quad (\text{III.6.1})$$

où les coefficients  $A_{ij}^n$  sont définis par  $A_{ij}^n = - \Delta t / \Delta 1 / J_{ij}$ .

b/ Calcul du correcteur  $U_{ij}^{n+1}$

La valeur  $U_{ij}^{*n+1}$  est ensuite corrigée en utilisant, cette fois-ci, des différences retardées pour approcher les dérivées d'espace

$$U_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ (U_{ij}^{*n+1} + U_{ij}^n) + \Delta t \cdot H_{ij}^{n+1} + A_{ij}^{n+1} \left[ \left\{ \frac{\partial y}{\partial Y} (F_{ij}^{n+1} - F_{i-1,j}^{n+1}) - \frac{\partial y}{\partial X} (F_{ij}^{n+1} - F_{i,j-1}^{n+1}) \right\} + \left\{ \frac{\partial x}{\partial X} (G_{ij}^{n+1} - G_{i,j-1}^{n+1}) - \frac{\partial x}{\partial Y} (G_{ij}^{n+1} - G_{i-1,j}^{n+1}) \right\} \right] \right] \quad (\text{III.6.2})$$

Le schéma ainsi limité à ces deux étapes est précis au second ordre et conditionnellement stable, c'est-à-dire que le pas

d'espace ( $\Delta X = \Delta Y = \Delta$ ) étant fixé, il existe une valeur maximum du pas de temps ( $\Delta t$ ) au delà de laquelle les calculs divergent rapidement (voir ANNEXE A), la détermination de cette condition de stabilité est abordée au paragraphe §(III.4.4). L'expérience montre toutefois que cette condition est bien souvent insuffisante pour assurer le bon déroulement des calculs, les oscillations apparaissent notamment dans les régions à fort gradients de pression. Il est alors nécessaire d'amortir ces oscillations par exemple par un procédé de lissage effectué à chaque itération.

### c/ Calcul d'une valeur lissée du correcteur

La valeur lissée du correcteur est obtenue par l'expression suivante :

$$(U_{ij}^{n+1})_{lis.} = U_{ij}^{n+1} + \epsilon (U_{i+1j}^{n+1} + U_{i-1j}^{n+1} + U_{ij+1}^{n+1} + U_{ij-1}^{n+1} - 4 U_{ij}^{n+1}) \quad (III.6.3)$$

où  $\epsilon$  est un coefficient déterminé empiriquement de façon à obtenir un bon amortissement des oscillations sans détériorer excessivement la précision de calcul qui est du second ordre, passe à l'ordre  $O(\epsilon \Delta)$ . L'expression (III.6.3) peut être interprétée comme l'adjonction à l'équation (III.5) d'un terme dissipatif  $\epsilon \Delta^2 / \Delta t \Delta U$  (où  $\Delta U$  est le laplacien de  $U$  dans le plan  $(X, Y)$ ) et un coefficient  $\nu = \epsilon \Delta^2 / \Delta t$  comme un coefficient de viscosité artificielle (voir ANNEXE B).

#### III.4.3.2 Traitement des points situés sur les frontières du domaine de calcul

Les points du maillage situés sur la frontière du domaine de calcul présentant les particularités suivantes :

1. Le schéma numérique défini par les équations (III.6.1), (III.6.2) et (III.6.3) ne peut y être appliqué strictement car il n'est pas possible d'utiliser des différences finies décentrées vers l'extérieur du domaine de calcul.

2. Les valeurs de  $U$  en ces points doivent vérifier outre les équations (III.1), les conditions aux limites du paragraphe §(III.3.2); c'est-à-dire que l'on dispose pour le calcul de  $U$ , d'un nombre d'informations surabondant.

La technique utilisée pour remédier à ces difficultés est la suivante:

1. Aux points du maillage situés sur la frontière, les équations (III.6.1) et (II.6.2) sont modifiées par l'emploi de différences finies systématiquement décentrées vers l'intérieur du domaine de calcul; par exemple, la dérivée  $\partial F/\partial Y$  sur la frontière  $Y=0$  (III.4-b) est approximée de la manière suivante :

- à l'étape du prédicteur (formule inchangée):

$$\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_{1j_0} = \frac{F_{1j_0+1} - F_{1j_0}}{\Delta Y}$$

- à l'étape du correcteur (formule modifiée):

$$\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_{1j_0} = \frac{-F_{1j_0+2} + 3F_{1j_0+1} - 2F_{1j_0}}{\Delta Y}$$

Cette méthode utilisée par veuillot [ref. 16] permet de conserver une précision du second ordre.

Pour les frontières  $X=X_1$  et  $X=X_2$ , les formules ont été conservées bien que la précision n'est que du premier ordre.

2. Les trois composantes du vecteur  $U$  sont ainsi calculées par application du schéma, avec les modification indiquées, puis les valeurs obtenues sont lissées par une formule analogue à (III.6.-3), mais unidimensionnelle (sur la frontière  $X=X_1$ , toutefois, les grandeurs sont supposées uniforme et égales aux moyennes des valeurs obtenues à l'étape du correcteur). Pour tenir compte des différents conditions aux limites, les valeurs lissées sont alors modifiées comme suit :

**a/ Condition de glissement**

La vitesse calculée par application du schéma en un point du profil de l'aubage n'est pas, en général, tangente à celui-ci, le procédé utilisé pour tenir compte de la condition de glissement consiste alors à annuler la composante normale au profil et à ne retenir que la composante tangentielle pour le calcul du pas de temps suivant :

$$v_{1j0}^{n+1} = u_{1j0}^{n+1} \operatorname{tg}\theta_p$$

où  $\theta_p$  désigne la pente du profil .

**b/ Condition de périodicité**

Les composantes du vecteur U sont calculées par le schéma sur les parties des frontières  $Y=0$  et  $Y=1$  situées en amont et en aval de l'aubage (fig. III.4-b); la condition de périodicité est appliquée comme valeur commune pour le calcul du pas de temps suivant i.e. :

$$U^{n+1}(X, Y=0 \text{ ou } 1) = \frac{U^{n+1}(X, Y=0) + U^{n+1}(X, Y=1)}{2}$$

**c/ Condition amont :**

Dans le cas où  $M_{10} \cos \alpha_1 < 1$ , les conditions imposées ont été précisées dans le paragraphe §(III.3.2-d). Le débit est déterminé de la façon suivante : la valeur du débit à travers la section amont  $X=X_1$  à la  $(n+1)^{\text{ème}}$  itération est prise égale à celle du débit à travers une section  $X=\text{cte}$  intérieur à l'aubage calculée à la  $n^{\text{ème}}$  itération. Les composantes de U sont alors entièrement déterminées.

**d/ Condition aval**

Toujours dans le cas d'un écoulement axial subsonique, les composantes  $U_2$  et  $U_3$  du vecteur U sont calculées par le schéma; connaissant la pression statique aval ( $p_2$ ) imposée à la frontière aval  $X_2$ , on déduit  $U_1$  de l'équation de l'énergie (III.1-c):

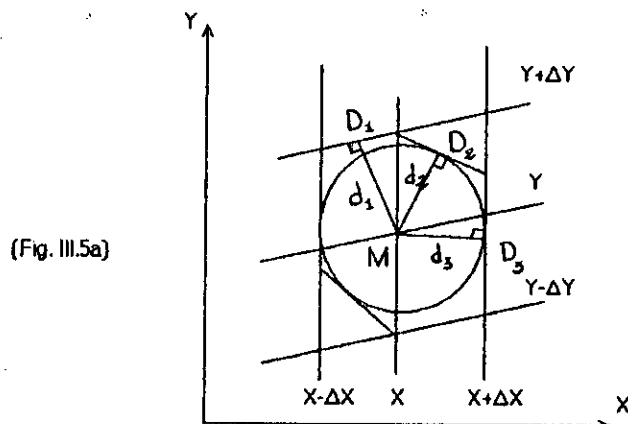
$$H_0 U_1^2 - \frac{\gamma P_2}{\gamma - 1} U_1 - \frac{1}{2} (U_2^2 + U_3^2)$$

On notera que cette équation du second ordre admet toujours une et une seule racine positive .

#### III.4.4 CONDITION DE STABILITE

La condition de stabilité a été déterminée par application de la règle de C.F.L ( Courant-Friederichs-Lewy ) déjà citée dans le chapitre précédent.

Le domaine de dépendance numérique d'un point  $M_{1j}$  peut être assimilé à un hexagone en approchant au voisinage du point  $M_{1j}$  les courbes  $X=cste$  et  $Y=cste$  par des droites  $D_1, D_2, D_3 \dots etc.$  (fig III.5-a), en fait, pour simplifier, on remplace cet hexagone par le plus grand cercle inscrit de centre  $M_{1j}$  .



Le domaine de dépendance physique de  $M_{1j}$  est une ellipse [ref. 16] dont les caractéristiques sont données à la figure III.5-b

Si  $d_1, d_2$  et  $d_3$  sont les distances des droites  $D_1, D_2, D_3$  au point  $M_{1j}$  (fig.III.5a) et  $d_{min}$  la plus petite de ces distances, la condition de C.F.L s'écrit pour la point  $M_{1j}$ :





---

---

# CHAPITRE 4

# APPLICATIONS

---

---

---

---

## CHAPITRE IV

### APPLICATION

---

---

#### IV.1 INTRODUCTION

Plusieurs configurations d'écoulement ont été calculées, permettant de mettre en évidence les possibilités actuelles de la méthode semi-inverse présentée au chapitre II et sont présentées ici. Les performances correspondantes ont été réalisées et mises au point dans le cadre de cette étude.

#### IV.2 APPLICATION AUX ECOULEMENTS SANS CHOC

##### IV.2.1 CAS D'ÉCOULEMENT SUBSONIQUE TRACE D'UNE TUYÈRE

Un exemple de calcul d'écoulement subsonique est représenté à la figure (IV.1a) décrivant la tuyère utilisée lors de l'étude numérique de la précision des schémas de type implicite.

Il s'agit d'une tuyère convergente-divergente, présentant un col sonique en son milieu, calculée à partir de la répartition du nombre de Mach imposée le long de son axe.

##### IV.2.2 ÉTUDE NUMÉRIQUE DE LA PRÉCISION DES

##### SCHEMAS DE TYPE IMPLICITE

Une étude numérique de la précision du schéma de type implicite a été effectuée à l'aide d'un modèle d'écoulement à travers une tuyère (fig.IV.1a) caractérisé par les conditions aux limites suivantes :

- L'écoulement est supposé uniforme et de type purement axial, le long des frontières amont et aval (caractérisé par un nombre de Mach égal 0.2).
- La distribution du nombre de Mach est imposée le long de la ligne de courant initiale, coïncidant avec l'axe de la tuyère qui présente un col sonique situé à égales distances de ses extrémités amont et aval.

Deux points A et B ayant été définis à la paroi de la tuyère dans les sections situées respectivement à des distances de l'extrémité amont représentant 25% et 50% de la longueur de celle-ci, l'évolution du nombre de Mach calculé en ces deux points suivant la valeur du rapport des pas transversal et longitudinal  $\sigma = \Delta y_0 / \Delta x_0$  sur la frontière amont du domaine de calcul et également suivant la valeur du coefficient de viscosité artificielle  $\alpha_a$ , défini au paragraphe § , a été étudiée. Les résultats obtenus, représentés aux figures (IV.2a et b), correspondent chacune aux points A et B.

### IV.2.3 CAS D'ÉCOULEMENT SUPERSONIQUE

#### IV.2.3-a DETENTE CENTREE

La figure (IV.2a) présente les résultats du calcul d'une détente centrée autour de dièdre d'angle  $7,5^\circ$  à travers laquelle l'écoulement passant d'un nombre de Mach uniforme égale à 1,7 à un nombre égale à 1,9.

#### IV.2.3b COMPRESSION ISENTROPIQUE

La figure (IV.3b) présente le calcul de l'écoulement à travers une compression isentropique produite par une rampe, dont les caractéristiques sont également représentées sur la figure, le long de laquelle l'écoulement passe progressivement d'un nombre de Mach égal à 1,7 à un nombre égal à 1,5, la déviation étant de  $7^\circ$ .

### IV.3 CALCUL DE PROPAGATION D'ONDE DE CHOC

#### ONDE DE CHOC DROITE

La figure (IV.4) représente l'évolution du nombre de mach à travers un choc droit en présence d'un écoulement uniforme en amont

(  $M=1,2$  ) et en aval (  $M = 0,84$  ).

### IV.4 APPLICATION AUX ECOULEMENTS TRANSSONIQUES

#### TRACE D'AUBAGE DE TURBOMACHINE

L'application de la méthode de calcul au tracé de grilles d'aubes n'a pu être encore étudiée de façon approfondie. Ce type de tracé pose en effet des problèmes particuliers, tels que le contrôle de la périodicité de l'écoulement en amont et en aval de la grille et également le choix des conditions le long de la ligne de courant de courant initiale permettant non seulement le contrôle de la couche limite le long des parois mais également qui corresponde à un profil présentant une répartition d'épaisseur satisfaisante.

#### IV.4.1 TRACE D'AUBAGE DE TURBINE

La répartition du nombre de Mach est imposée le long de l'extrados comme l'indique la figure (IV.4a) ainsi que la géométrie du canal (l'hauteur variant de 1 jusqu'à 1,5 dans la direction de l'écoulement).

L'évolution du nombre de Mach est imposée uniquement dans la frontière amont(fig. IV.4b).

La figure(IV.4c)représente le profil obtenu ainsi que le réseau des lignes de courant.

#### IV.4.2 TRACE D'AUBAGE DE COMPRESSEUR

La répartition du nombre de Mach est imposée le long de l'extrados de façon à soumettre l'écoulement à une compression isentropique (Fig. IV.5a).

L'évolution du nombre de Mach(c.L) est imposée uniquement à la frontière amont (Fig. IV.5b).

L'aubage obtenu par juxtaposition en amont et en aval des deux lignes de courant limitant le domaine de calcul, est représenté à la figure (Fig. IV.5c).

#### IV.5 RESULTATS ET COMMENTAIRES

Pour l'application au tracé d'une tuyère, Les résultats obtenus paraissent satisfaisants. Par contre près de l'entrée et de la sortie des irrégularités de la répartition des courbes isomach apparaissent de manière évidente. Ce phénomène peut être attribué aux valeurs imposées, dans cette région, à la viscosité artificielle, non adaptée à des valeurs du nombre de Mach local aussi faible.

La seconde application, concernant l'étude numérique de la stabilité des schémas implicites. Les résultats obtenues sont essentiellement les suivants:

Pour un coefficient de viscosité artificielle  $\alpha_2$  égal à 0,005, la solution diverge lorsque le pas de calcul  $\Delta y_0$  tend vers zéro, quel que soit la position du point de calcul.

Une réduction progressive mais uniformément répartie le long de la tuyère, du coefficient de viscosité  $\alpha_2$ , tend, en chaque point, à provoquer la convergence de la solution. Cette convergence paraît, d'autre part, d'autant plus rapide que le point considéré est plus éloigné du col sonique.

Suivant cette observation, une modulation de la viscosité artificielle suivant la valeur du nombre de Mach local a été effectuée. Ce choix a permis de contrôler les phénomènes dissipatifs en maintenant la stabilité des calculs. L'équilibre entre

les termes dissipatifs et l'erreur de troncature, conduit à une loi de la forme donnée dans le chapitre II.

Les résultats obtenus mettent en évidence l'importance de la viscosité artificielle sur le comportement de la solution, qui doit être choisie avec précautions pour que le calcul soit significatif.

Pour l'application aux écoulements supersonique celle-ci a été mise en oeuvre pour vérifier les capacités de la méthode de localisation des discontinuités utilisée, ainsi que la stabilité des calculs. Pour les deux premiers cas: discontinuité de la géométrie (détente et compression) les résultats sont acceptables. Pour les cas des chocs les discontinuités sont conservées et la stabilité est maintenue.

La dernière partie concerne l'application au tracé d'aubage qui est le but principal de cette étude. Nous avons considéré le cas sans chocs car la méthode "d'ajustement de choc" paraît difficile pour plus de deux chocs notamment l'étape de localisation du choc et les positions des points en amont et en aval de celui-ci.

Les aubages de turbine et de compresseur obtenus sont satisfaisants, cependant le bord de fuite paraît mince ce qui pose un problème du point de vue résistance mécanique.

En plus l'absence de conditions de périodicité de l'écoulement au bord de fuite se traduit par des différences importantes qui subsistent en ce point entre les nombres de mach et donc entre les vitesses à l'extrados et à l'intrados (Fig.IV.4e). L'égalité des pressions n'est donc pas assurée le long de la ligne de glissement prolongeant le bord de fuite, ce qui, en principe, s'oppose à la confluence des deux écoulements d'intrados et d'extrados aval. Ceci peut être attribué à l'absence de la condition de **KUTTA-JOUKOVSKI**.

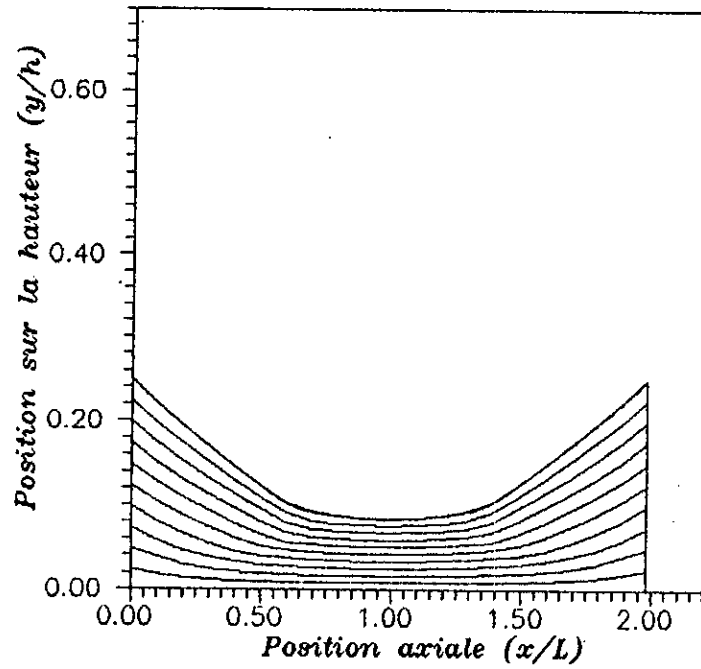
Ces remarques constituent les difficultés principales d'application de la méthode au calcul des grilles d'aubes qui devra faire l'objet d'une étude ultérieure.

**IV.6 CONCLUSION**

Ce chapitre a été consacré aux applications de la méthode semi-inverse pour le tracé de tuyère et d'aubage transsonique.

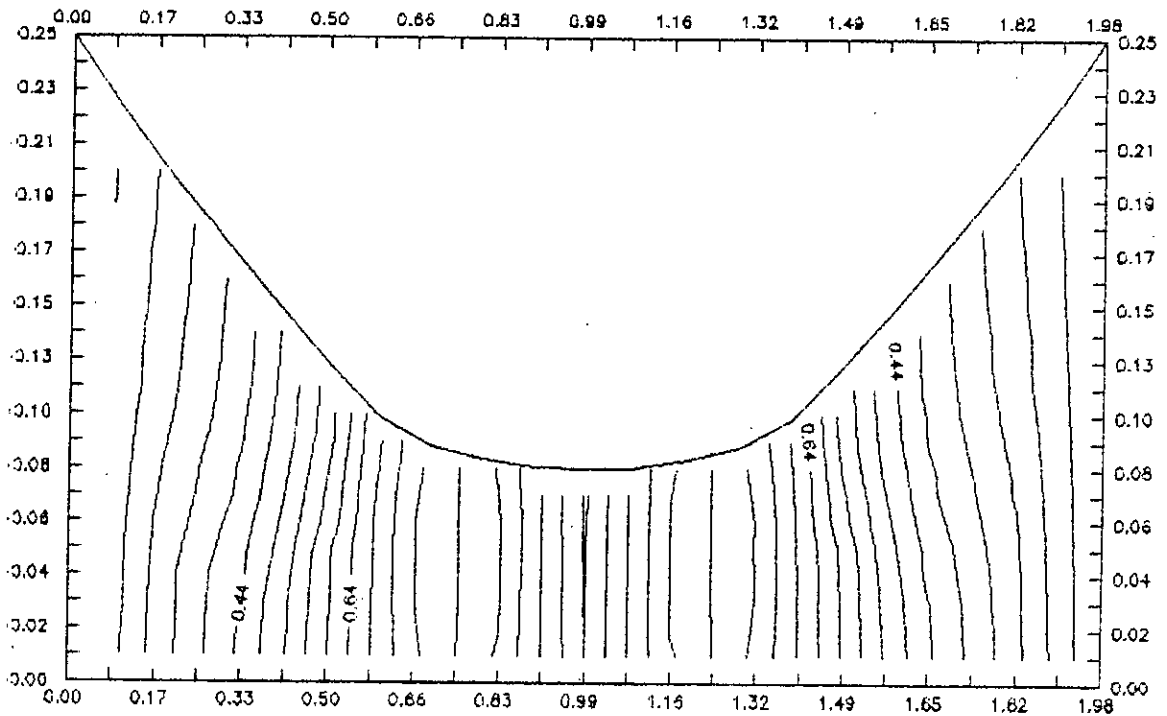
Nous avons pu constater les avantages et les inconvénients ainsi que les possibilités de la méthode.

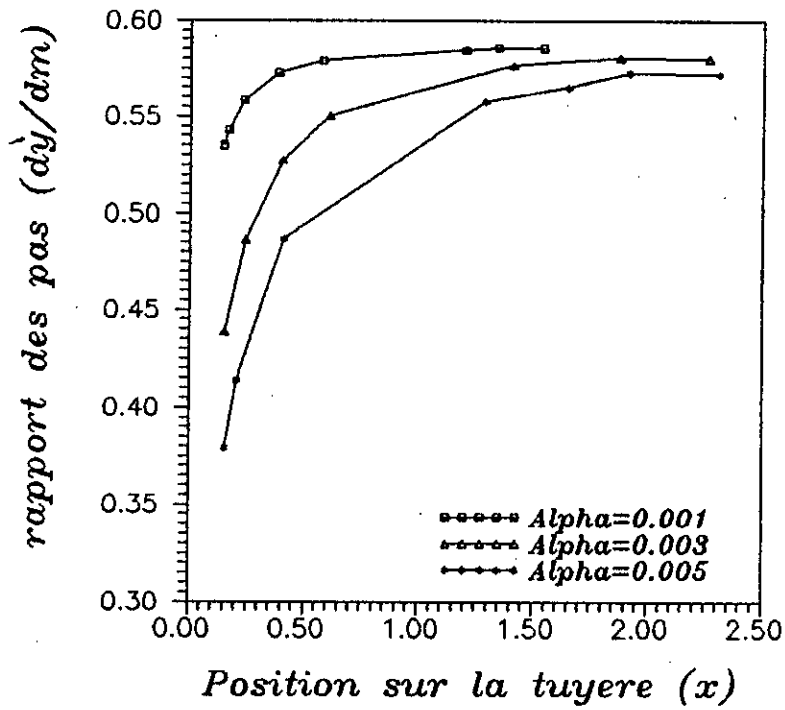




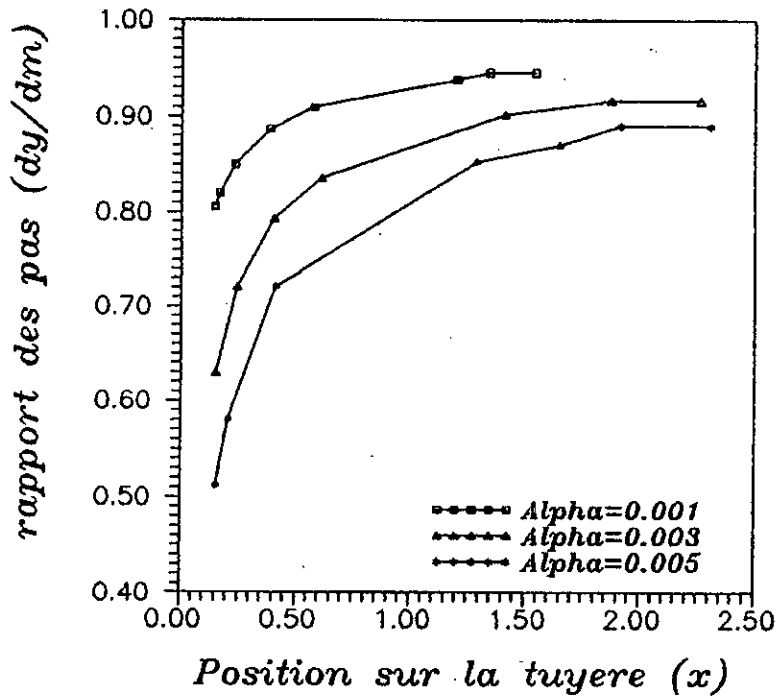
(Fig. IV.1) Dessin d'une tuyere de type convergent-divergent avec quelques lignes de courant (avec une grille de discretisation de 100 X 150)

(Fig. IV.1b) schematisation des lignes isomachete de la tuyere convergente-divergente

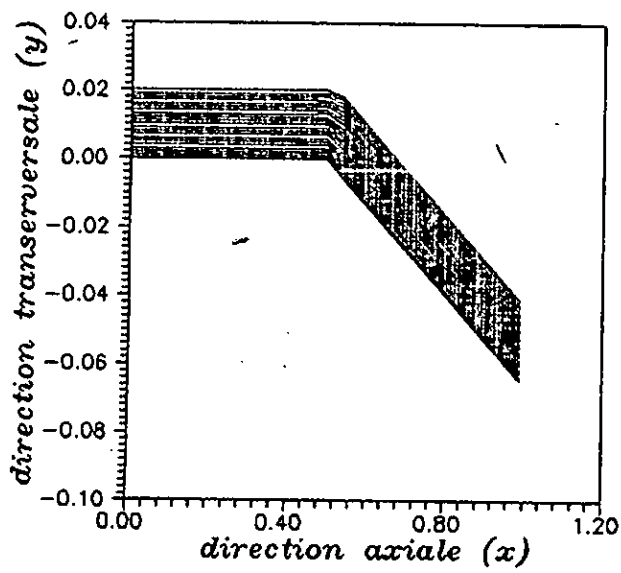




(fig IV.2a) Influence du terme de viscosite artificielle Alpha sur le rapport des pas du calcul en un point hors du col de la tuyere

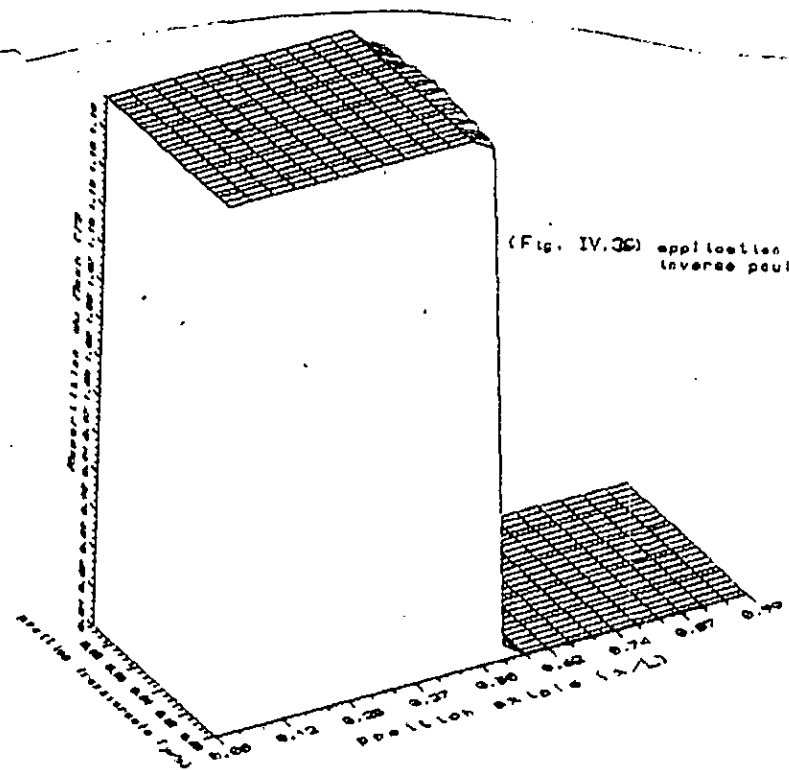
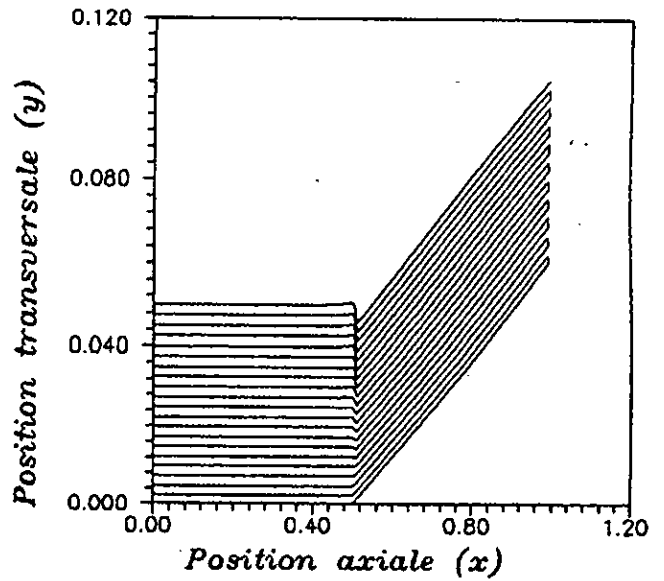


(fig IV.2c) Influence du terme de viscosite artificielle Alpha sur le rapport des pas de calcul au col de la tuyere

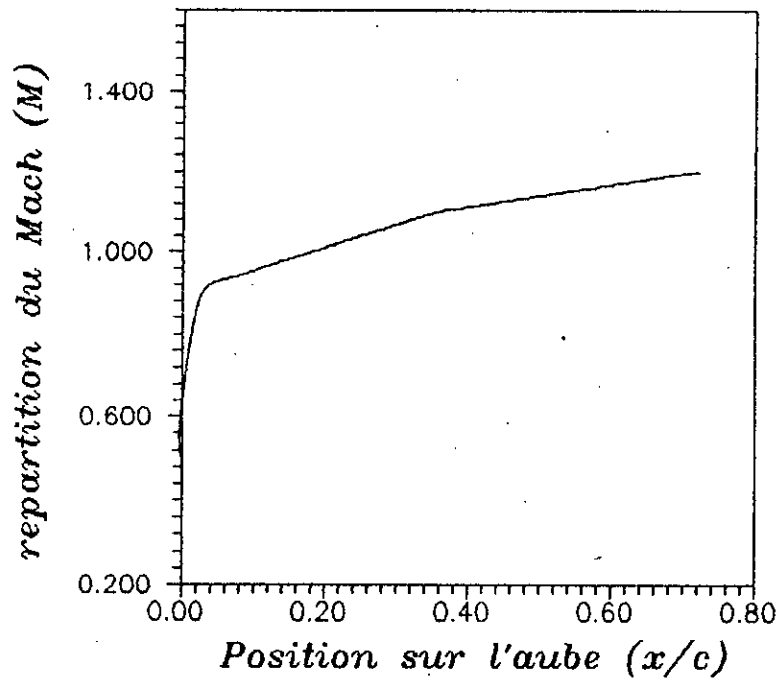


(Fig. IV.3a) application de la methode semi-inverse au cas de la détente centree

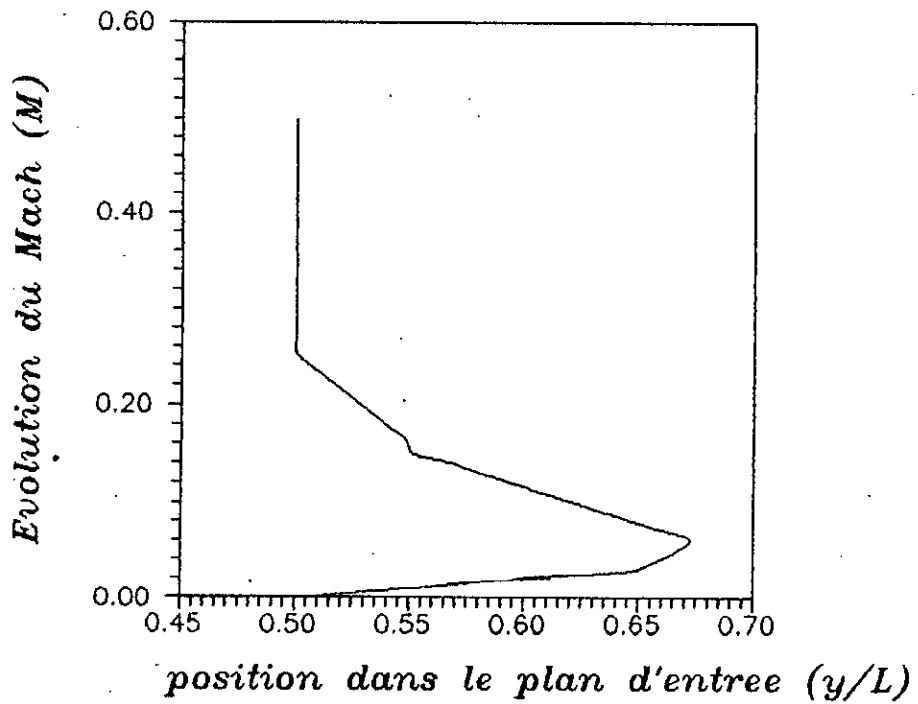
(Fig. IV.3b) application de la methode semi-inverse pour le cas de la compression isentropique



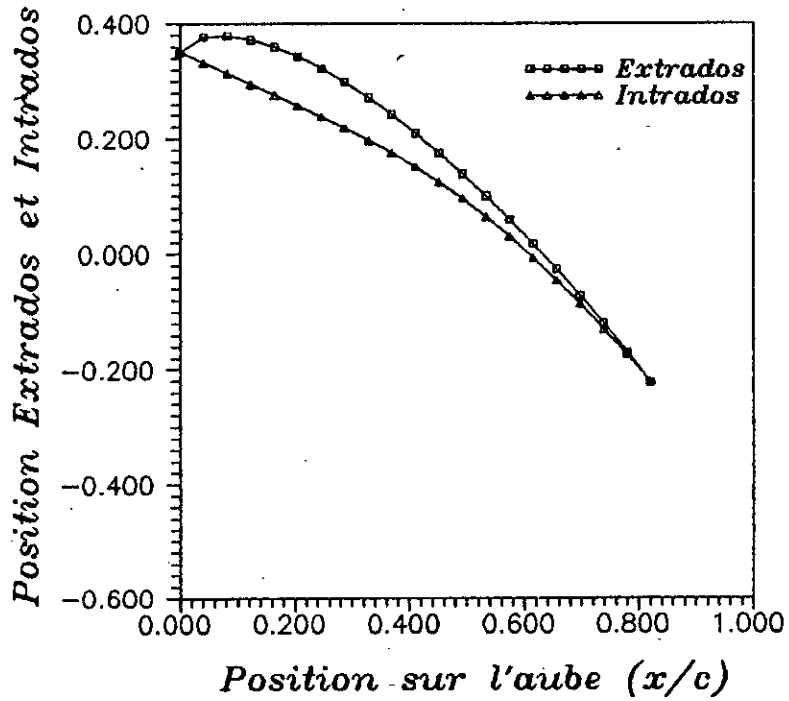
(Fig. IV.3c) application de la methode semi-inverse pour le cas d'un choc droit



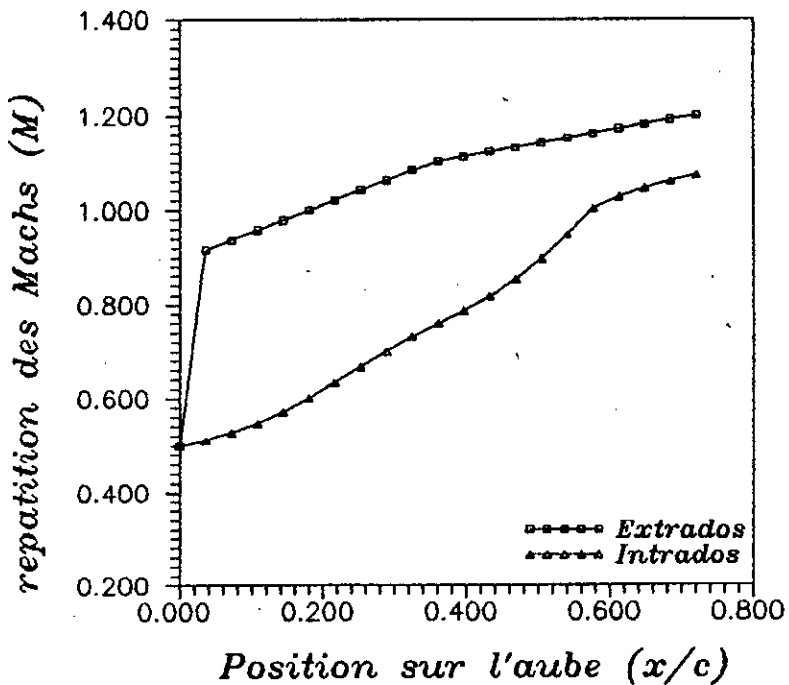
(Fig. IV.4a) repartition du nombre de Mach imposee sur l'extrados



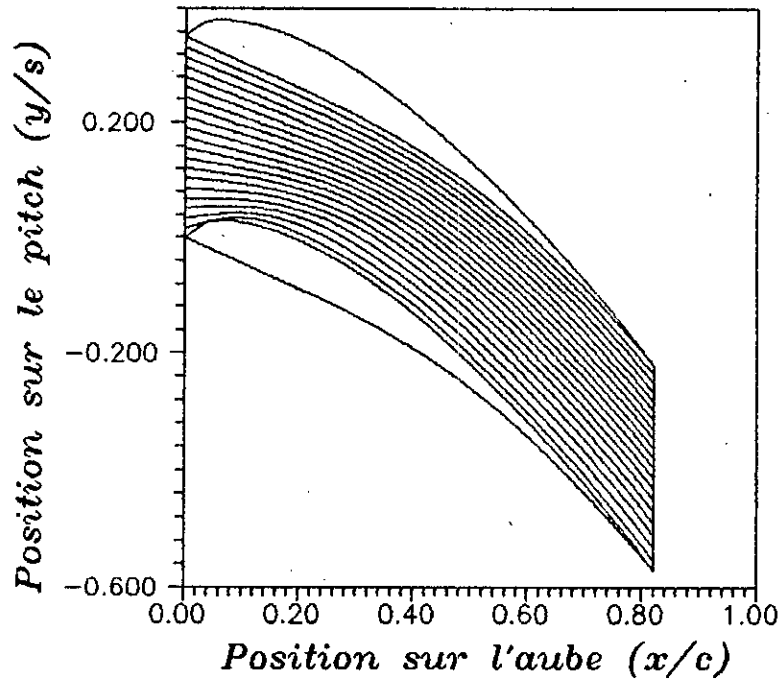
(fig IV.4b) distribution du nombre de Mach imposee dans le plan d'entree de l'aubage d'une turbine transsonique



(fig IV.4c) profil d'aube de turbine obtenu par le calcul semi-inverse pour une incidence  $\beta = -35$  degrés

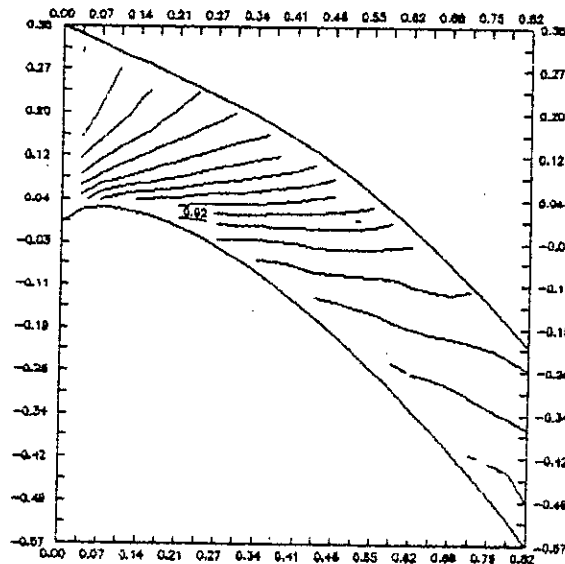


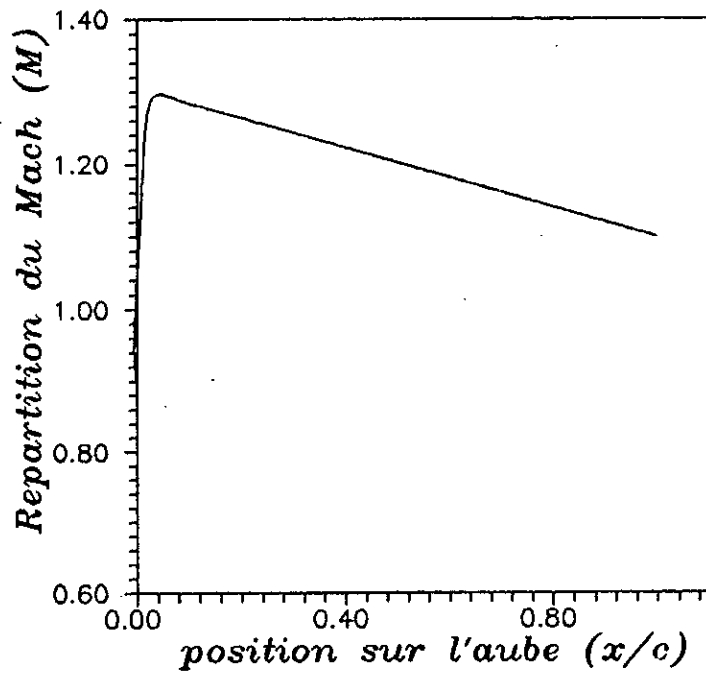
(fig IV.4d) distribution du nombre de Mach sur le profil d'aube de turbine obtenu par le calcul semi-inverse



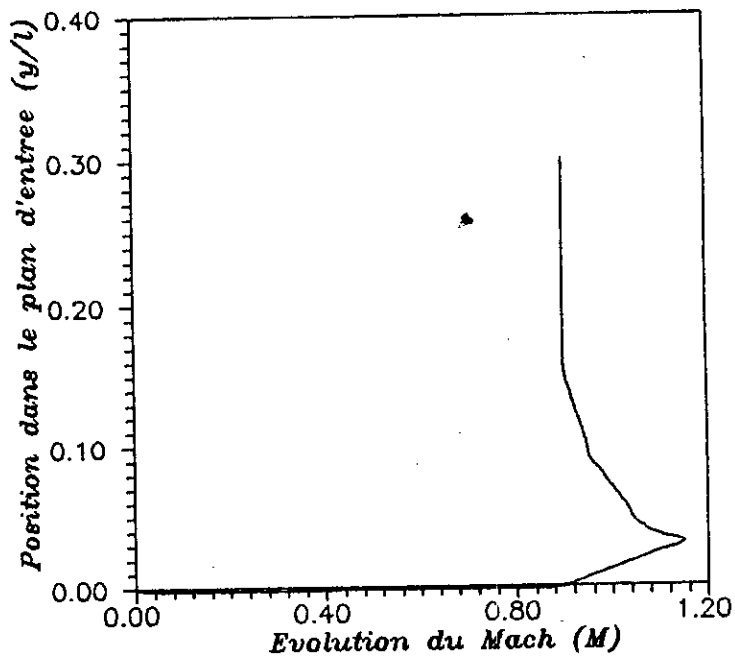
(Fig.IV.4e) Dessin d'un profil d'une aube de turbine avec les lignes de courant ( la taille de la grille de discretisation est de 100 X 200 )

(fig. IV.4f) schematisation des lignes isomach le long du canal inlet-aube d'une turbine transsonique

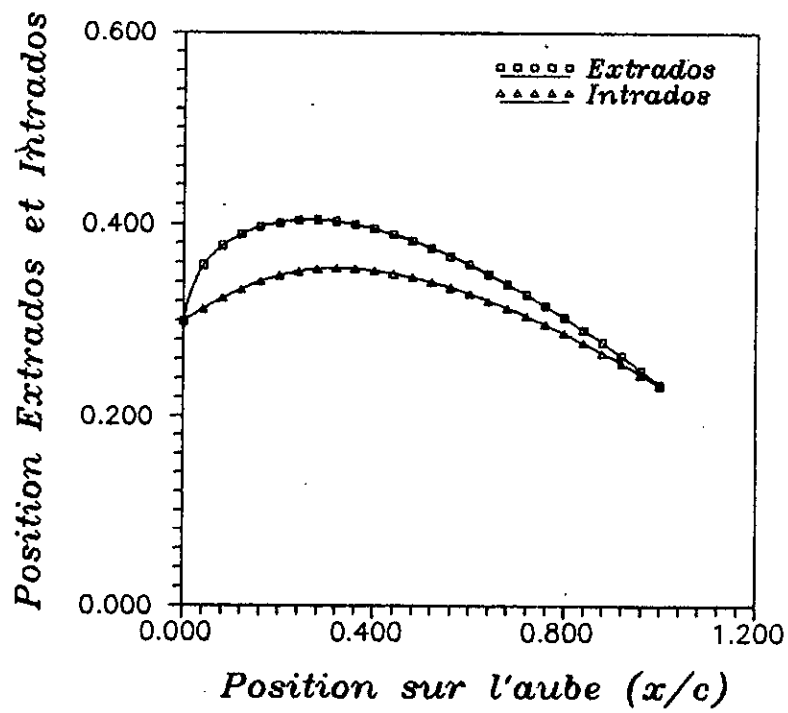




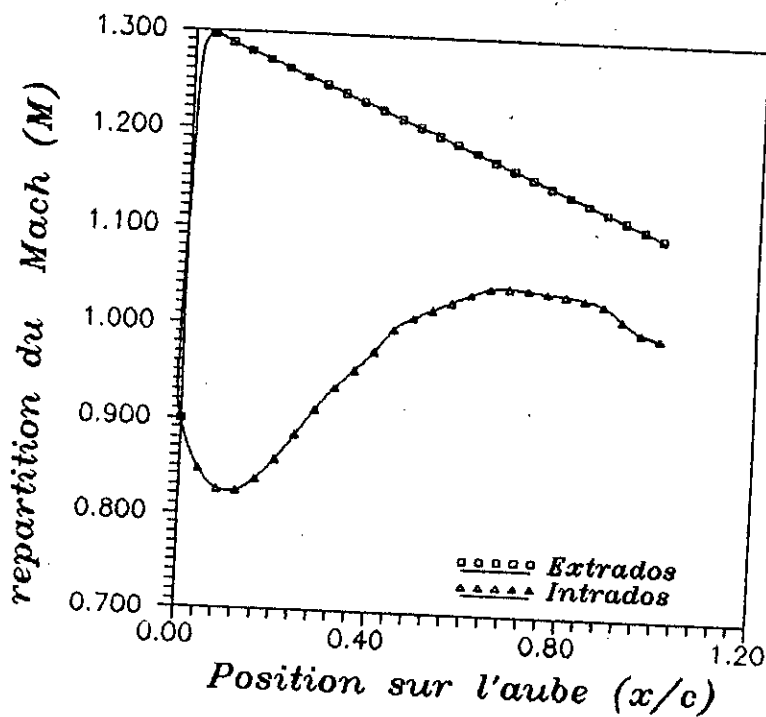
(Fig IV.5a) Repartition du nombre de Mach imposee sur l'extrados pour le cas du compresseur



(Fig IV.5b) Distribution du nombre de Mach imposee dans le plan d'entree de l'aubage d'un compresseur transsonique

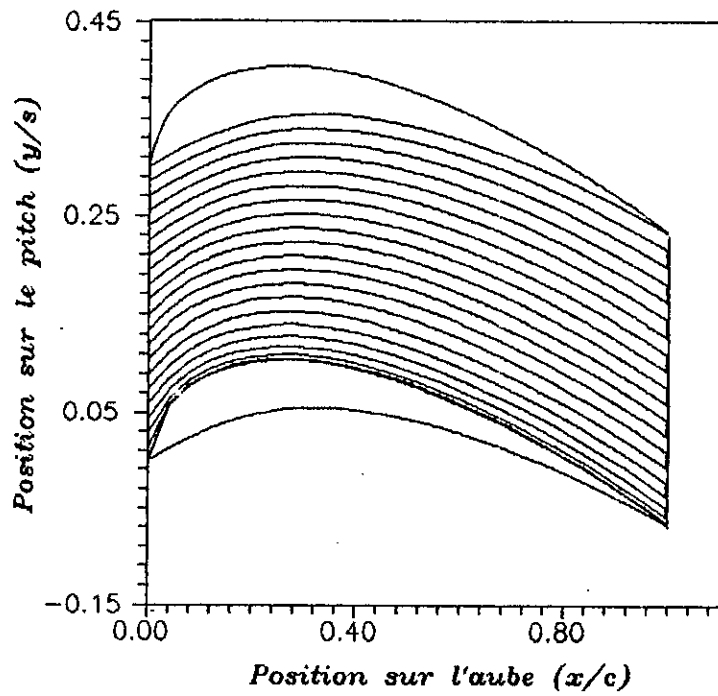


(fig IV.5c) profi d'aube de compresseur transsonique obtenu par le calcul semi-inverse pour une incidence  $\text{Beta} = -4$  degres

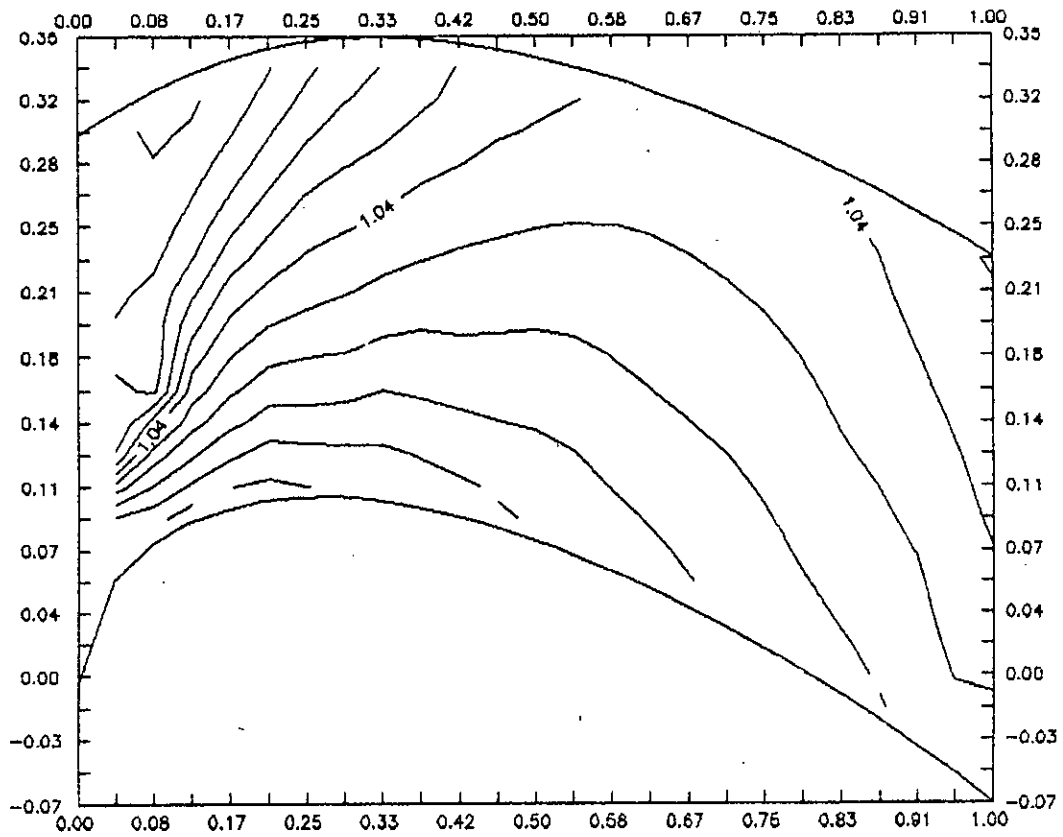


(Fig. IV.5d) distribution du nombre de Mach sur le profil d'aube d'un compresseur obtenu par le calcul semi-inverse





(Fig IV.5d) Dessin d'un profil d'aube de compresseur avec les lignes de courant (la taille de la grille de discetisation est de 150 X 250)



(Fig. IV.5f) schematisation des lignes isomachs le long du canal inter-aube d'un compresseur transsonique

---

---

**CONCLUSION**

**GENERALE**

---

---

**CONCLUSION GENERALE**

Le travail présenté dans ce mémoire est une tentative d'application d'un modèle mathématique pour la conception de profil d'aubage pour les écoulements transsoniques .

Ayant rappelé les problèmes posés par ces écoulements, notamment celui de l'interaction onde de choc-couche limite et les procédés de contrôle; on a mis en oeuvre une autre méthode de contrôle consiste en agissant sur l'écoulement extérieur en vue limiter l'intensité des ondes de choc au voisinage des parois, et de conserver autant que possible l'énergie contenue dans la couche limite.

La méthode de calcul pour les écoulements transsoniques faisant l'objet de cette étude a été développée dans ce but. Nous avons signalé la difficulté du problème du point de vue mathématique qui consiste à résoudre un problème de type mixte (hyperbolique-elliptique).

Cette méthode présente par contre des inconvénients dans sa formulation à savoir la non prise en compte de la condition de périodicité, qui est très importante dans le cas des grilles de turbomachines. Pour palier ce problème, nous proposons, pour une éventuelle poursuite du sujet, de l'associer à une méthode directe dans un processus itératif jusqu'à convergence. C'est pour cela nous avons développé la méthode pseudo-instationnaire proposée par VEUILLOT [REF. 16] et qui paraît mieux adaptée à notre cas. Le programme a été élaboré mais vu le temps machine insuffisant et le manque de moyens, on a pas pu le faire marcher. Nous pensons que la cause est le choix des conditions initiales qui doivent être compatibles avec les conditions aux limites.

Le traitement des discontinuités a été effectuée par une méthode "d'ajustement de choc" qui paraît difficile surtout pour la localisation de la discontinuité et suivre sa propagation. Il ne faut pas oublier la difficulté de programmation de la méthode et son adaptation à notre schéma de discrétisation. On propose d'essayer une autre méthode, par exemple celle du "capture de choc" mais il faut avant tout surmonter la difficulté mathématique qui consiste à rendre les équation de type conservatif.

Enfin concernant la possibilité de couplage de la méthode avec un calcul de couche limite, la méthode paraît bien adaptée car la vitesse est donnée suivant la coordonnée curviligne. Pour le de calcul avec onde de choc, sa modélisation est très compliqué et jusqu'à présent ce cas n'a été traité que pour un écoulement laminaire par le modèle de **MAC KORMACK** [ref. 22]

---

---

# BIBLIOGRAPHIE

---

---

## BIBLIOGRAPHIE

[1] RYHMING I.L.

Dynamique Des Fluides  
presse polytechnique, LAUSANE 1985

[2] CANTREL H.N., FOWLER J.E.

The Aerodynamic Design of two-Dimensional Turbine Cascades  
for Incompressible Flow with a High Speed Computer  
J. Basic Engineering trans. ASME, S.D., Vol. 81, N°1959-3

[3] SCHMIDT E.

Computation of Supercritical Compressor and Turbine Cascade  
with a Design Method for Transonic Flows  
J. Engineering for power, N° 79-GT-30, 1979-2

[4] COHEN M.J.

A Hodograph Design Method for Compressible flow Problems  
J. Basic Engineering Trans. ASME, S.E., Vol 84, N° 1962-3

[5] MEAUSE G.

An Inverse Time Marching Method for the  
Definition of Cascade Geometrie  
J. Engineering for power, N° 81-GT 167, N°1981-3

[6] JENNIONS I.K., STOW P.

A Quasi-Three-Dimensional Turbomachinery Blade Design  
-Part I: Through flow Analysis  
ASME paper 84-GT-26, 1984-3  
-Part II : Computerized System  
ASME paper 84-GT-27

[7] VAVRA M.H.

Aerodynamics and Flow in Turbomachines  
John Willey & sons Inc., 1960

[8] ROSHKO A., LIEPMANN H.W.

Elements of Gasodynamics  
Jhon Willey & Sons, Inc., 1957

[9] CHIKHI N.

Eléments d'un Code pour le Calcul d'un Ecoulement dans  
une roue de turbomachine  
Projet de Fin d'Etude, 1993

[10] JAUMOTTE A.L.

Chocs et Ondes de Choc, Tome II  
Masson & Cie, 1973

[11] MITON H.

Etude Théorique et Expérimentale de Problème Aéro-  
dynamique concernant les compresseurs transsonique  
Université d'Aix Marseille II, 1978

[12] LEBOEUF F., VOUILLARMET A., FERRAND P.

Aérodynamique des turbomachines  
Ecole Centrale de Lion, 1984

[13] DELLERY J.

L'Interaction Onde de Choc-Couche Limite Turbulente  
et son Contrôle  
Publication ONERA N°1984-21

[14] MITON H., SANKALE H.

Méthode Inverse De Calcul de Profils d'aubages  
Ecole Centrale de Lyon, Nov. 1984

[15] MITON H.

Semi-Inverse Method of Computation in Inviscid  
Transonic Flows -Application to the design of  
Turbomachine blades profils-  
ASME paper, N° 81-GT-206

[16] EUVRARD D.

Résolution numérique des équations aux dérivées partielles  
Méthode éléments finies, différences finies et singularités  
Edition Masson, 1990

[17] FERZIGER J.H.

Numerical Methods for Engineering Application  
John Willey & sons, 1981

[18] FORT J., KOZEL K.

Numerical Solution of inviscid Two-Dimensional Flow  
Through a cascade  
J. of Turbomachinery trans., ASME, Vol. 109 N°1987-1

[19] VEUILLOT J.P.

Calcul Numérique de l'Écoulement Transsonique  
d'un Fluide Parfait Dans une grille d'aubes  
La recherche aérospatiale, N°1975-6

[20] PEYRET R., TAYLOR T.D.

Computational Methods for fluid flow  
Springer-Verlag , Edition 1990



[21] BONNET A., LUNEAU J.

Théories de la Dynamique des Fluides  
Cepaude Editions, 1989

[22] MAC CORMACK

Numerical Method for Calculation of a Shock Wave-  
Boundary Layer Interaction in Laminar Flow..  
AIAA Journal, 1971

---

---

# ANNEXES

---

---

**ANNEXE A**  
**ANALYSE DE LA STABILITE DES**  
**SCHEMAS**  
**AUX DIFFERENCES FINIS**

Pour un schéma donné, il existe des valeurs du pas de calcul, pour lesquelles, les résultats numériques donnent des oscillations qui croissent rapidement et après un certain temps leur amplitude devient infinie tel que l'ordinateur passe en "overflow" et s'arrête.

Ce phénomène est caractéristique de l'instabilité numérique. En plus de cette raison, l'instabilité peut se produire par d'autres sources, par exemple, dans un cas non linéaire, pour des nombres de Reynolds importants, les causes d'instabilités sont : (i) les effets non linéaire, (ii) le changement rapide de la direction dans la région de décollement de l'écoulement, (iii) un fort gradient de pression, (iv) présence de parois ou de frontières au domaine de calcul. L'effet de telles instabilités qualifiées de "faible", n'est pas nécessairement une divergence rapide du calcul, mais souvent, ils provoquent des oscillations qui restent d'amplitude bornée [ref. 20].

Ce phénomène est corrigé soit en diminuant le rapport des pas de calcul; en le choisissant inférieur à la valeur donnée par la condition de Courant-Friederichs-Lewy (ou de C-F-L) (voir chapitre II et III) soit en introduisant un terme de dissipatif ou de viscosité artificielle.

Cela nous amène à introduire la notion de stabilité. Nous dirons qu'un schéma est stable si la solution du problème discrétisé reste bornée (pour une donnée initiale bornée, bien entendu) [ref. 16].

Examinons, maintenant, par l'analyse de Fourier, la stabilité du schéma suivant :

$$C_1 u_h^{n+1} + C_0 u_h^n + C_{-1} u_h^{n-1} = 0 \quad (\text{A.1})$$

où  $C_1, C_0$  et  $C_{-1}$  sont des opérateurs de différences finies,  $u_h^n = u(x_h, n \Delta t)$  avec  $u = (u_1, \dots, u_m)$ , et  $x = (x_1, \dots, x_d)$  tel que  $x_h$  désignent la discrétisation en espace  $x_h = (\gamma_1 \Delta x_1, \dots, \gamma_d \Delta x_d)$ , où  $\gamma_1, \dots, \gamma_d$  étant des entiers, l'indice  $n$  désigne la discrétisation en temps  $t_n = n \Delta t$ ,  $n$  un entier.

On suppose que la solution est de la forme :

$$u_h^n = U^n(k) \exp(ik \cdot x_h) \quad (\text{A.2})$$

où  $i = \sqrt{-1}$ , et  $k$  le vecteur nombre d'onde,  $k = (k_1, \dots, k_d)$  substituant (A.2) dans (A.1) et en divisant par un facteur commun  $\exp(ik \cdot x_h)$ , on obtient l'équation vectorielle :

$$G_1 U^{n+1} + G_0 U^n + G_{-1} U^{n-1} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Cette équation à trois niveaux est transformée en une équation à deux niveaux en introduisant une variable auxiliaire  $V^n = U^{n-1}$ . L'équation (A.3) devient donc :

$$\begin{aligned} G_1 V^{n+1} + G_0 V^n + G_{-1} V^{n-1} &= 0 \\ V^{n+1} - U^n &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

qui peut être écrite sous la forme :

$$\Phi^{n+1} = G \cdot \Phi^n \quad (\text{A.5})$$

ou  $\Phi = (U, V)$  est un vecteur à  $2m$  composants,  $G$  une matrice  $2m \times 2m$  déduite de (A.4) appelée matrice d'amplification.

La stabilité du schéma (au sens de Von Neumann) exige que le rayon spectrale de la matrice d'amplification  $G$  est inférieur à l'unité i.e.:

$$\rho(G) = \text{Max}|\lambda_j| \leq 1, \quad 0 \leq k_j \Delta x_j \leq 2\pi, \quad j=1 \dots d \quad (\text{A.6})$$

où  $\lambda_j$  sont les valeurs propres de  $G$  racines de l'équation caractéristique

$$\det (G - \lambda I) = f(\lambda) = 0 \quad (\text{A.7})$$

Dont les valeurs des  $\lambda$  résultent de l'étude des zéros de  $f(\lambda)$ . Une autre possibilité consiste à calculer directement les valeurs propres de  $G$  par des méthodes Numériques. Les calculs sont effectués en faisant varier les paramètres (Physique et numérique) du problème et en construisant les graphes des résultats. Pour une telle approche, il est recommandé de procéder à l'étude analytique préliminaire de la stabilité pour des cas simples ; pour l'instant, en (i) considérant le problème en dimension d'espace inférieur, (ii) annulant quelques paramètres physiques, ou (iii) Considérant quelque relations entre les composants du vecteur nombre d'onde ou éventuellement quelque valeurs d'entre eux. Une telle analyse préliminaire permet souvent la détermination d'une forme grossière du critère de stabilité qui peut être raffiner par le calcul numérique des valeurs propres.

ANNEXE B  
 RECHERCHE SYSTEMATIQUE DES DISCONTINUITES  
 RELATIONS DE RANKINE-HUGONIOT

Les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles du 2<sup>ème</sup> ordre qui nécessitent pour être résolues un nombre N de conditions aux limites réelles .

Par contre les équations d'Euler sont du 1<sup>er</sup> ordre .Elles nécessitent un nombre E de conditions aux limites inférieur à N.

Il est paradoxal de constater que P=N-E conditions réelles, deviennent des inconnues dans le problème d'Euler. La seule façon de soulever ce paradoxe est de supposer l'existence d'une surface de discontinuité .

Le calcul de ces discontinuités est effectuée par les relations dites de Rankine-Hugoniot , associées aux équations d'Euler , permettent le calcul de l'écoulement autour d'un obstacle de géométrie connue.

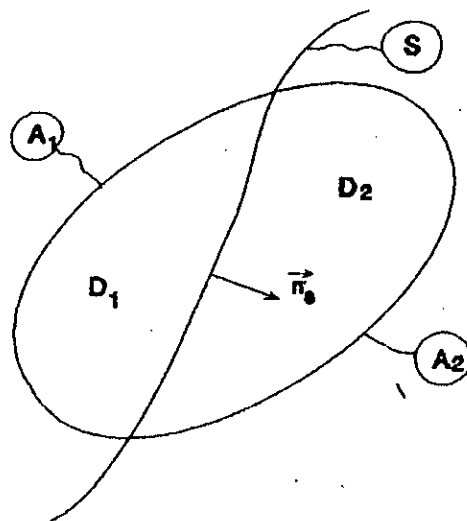
### B.1 EQUATIONS DE RANKINE-HUGONIOT

Ces équations désignent les relations de compatibilité entre les principes de conservation et l'existence des discontinuités.

Elles sont obtenue rapidement en posant :

$$V_n = \vec{V} \cdot \vec{n}_s$$

$n_s$  : la normale à la surface de discontinuité S (fig B.1).



L'équation de continuité prend la forme :

$$\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2} \quad (\text{B.1a})$$

L'équation de quantité de mouvement , s'écrit

$$\rho_1 \vec{V}_1 V_{n1} - \rho_2 \vec{V}_2 V_{n2} + (P_1 - P_2) \cdot \vec{n}_s = 0$$

D'où en projetant cette relation respectivement sur la normale et le plan tangent à la surface S, on obtient :

$$P_1 + \rho_1 V_{n1}^2 = P_2 + \rho_2 V_{n2}^2 \quad (\text{B.1b})$$

$$\rho_1 \vec{V}_{t1} V_{n1} = \rho_2 \vec{V}_{t2} V_{n2} \quad (\text{B.1c})$$

L'équation de l'énergie s'écrit :

$$\rho_1 \left( h_1 + \frac{V_1^2}{2} \right) V_{n1} + P_1 V_{n1} = \rho_2 \left( h_2 + \frac{V_2^2}{2} \right) V_{n2} + P_2 V_{n2} \quad (\text{B.1d})$$

## B.2 LIGNE OU SURFACE DE GLISSEMENT

Ces lignes ou surfaces sont définies en écrivant que le

fluide ne traverse pas la discontinuité soit :

$$V_{n1} = 0 \quad (\text{B.2a})$$

d'où ,en l'injectant dans le système (B.1), on obtient :

$$P_1 = P_2 \quad (\text{B.2b}) \quad \text{continuité de la pression}$$

$$V_{n1} = V_{n2} \quad (\text{B.2c}) \quad \text{continuité de la vitesse normale}$$

$\rho, V_t, h$  quantités éventuellement discontinues

Ce type de discontinuité apparaît généralement dans deux cas. Le premier, est le cas d'un contour extérieur d'un corps placé dans un fluide parfait. Il existe une zone d'épaisseur nulle au voisinage de la paroi qui est de type "surface de glissement" (fig. B.2a). Par conséquent la condition au limite qui est appliquée sur la paroi, pour résoudre les équations d'Euler est la nullité de la composante normale de la vitesse, c'est la condition dite de glissement, l'autre cas, est celui d'un jet débouchant dans l'atmosphère au repos. Il se forme, après un certain temps une discontinuité qui sépare le fluide contenu dans le jet et l'air ambiant (fig. B.2b).

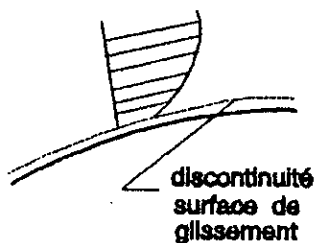


Fig. B.2.a

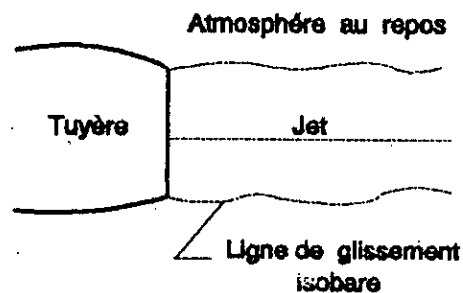


Fig. B.2.b

Compte tenu de l'identité des composantes normales  $V_{n1}$  et  $V_{n2}$



Les deux côtés de la ligne de glissement sont respectivement constitués des mêmes particules qui glissent les uns par rapport aux autres du fait de la discontinuité de la vitesse tangentielle.

### B.3 LES ONDES DE CHOCS

Les équations des ondes de choc sont obtenues en écrivant  $V_{n1} \neq 0$  dans les relations de Rankine-Hugoniot (B.1). Ceci implique, contrairement au cas précédent, une traversée de la discontinuité par les particules fluides.

Le système (B.1) est alors réécrit sous une forme plus simple, soit :

$$m = \rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2} \quad (\text{B.3a})$$

$$p_1 + m V_{n1} = p_2 + m V_{n2} \quad (\text{B.3b})$$

$$h_1 + \frac{1}{2} V_{n1}^2 = h_2 + \frac{1}{2} V_{n2}^2 \quad (\text{B.3c})$$

$$V_{t1} = V_{t2} \quad (\text{B.3d})$$

Le cas particulier des ondes de choc droites est obtenu en posant  $V_{t1} = V_{t2} = 0$ .

En manipulant, les équations (B.3) on obtient les relations dites d'Hugoniot :

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_{n1}^2 - 1) \quad (\text{B.4a})$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \left( \frac{1}{M_{n1}^2} - 1 \right) + 1 \right)^{-1} \quad (\text{B.4b})$$

Les autres quantités telles que  $h_1$ ,  $T_1$  et  $M_{n1}$  peuvent être déduites sans difficultés.

Dans la pratique, il est commode d'introduire aussi les pentes

locales  $\beta$  et celles de la ligne de courant aval  $\theta$ , par rapport à la direction de la vitesse initiale  $V_1$  (fig B.3).

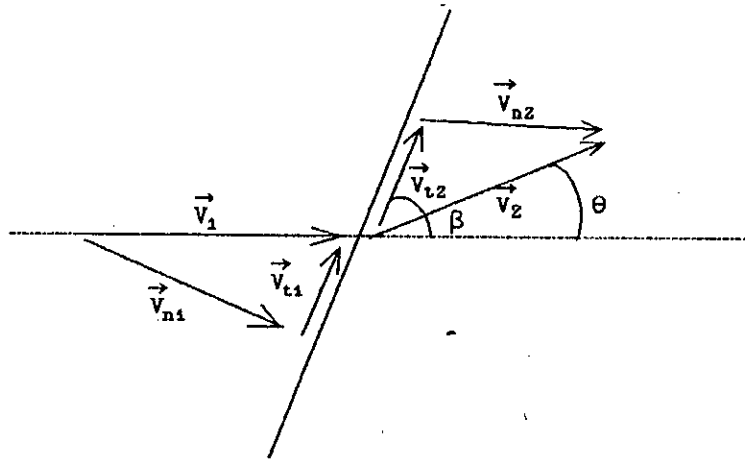


Fig. B.3

Les équations de continuité et de conservation des vitesses tangentiéllles s'écrivent alors :

$$\rho_2 V_2 \sin(\beta - \theta) = \rho_1 V_1 \sin\beta$$

$$V_2 \cos(\beta - \theta) = V_1 \cos\beta$$

Il en résulte une relation fondamentale :

$$\frac{\operatorname{tg}(\beta - \theta)}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (\text{B.5})$$

Cette relation peut être écrite sous la forme (ref liepmann[])

$$\operatorname{tg}\theta = 2 \operatorname{ctg}\beta \frac{M_1^2 \sin^2\beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \quad (\text{B.5'})$$

Cette expression s'annule pour  $\beta = \pi/2$  et  $\beta = \arcsin(1/M_1)$  appelé angle du Mach. Cette relation (B.5') traduit dans le plan  $(\theta, \beta)$  qu'il existe deux solutions  $\beta_1$  et  $\beta_2$  pour chaque valeur  $\theta \leq \theta_{\max}(M_1)$ . La valeur  $\sup(\beta_1, \beta_2)$  est appelée solution choc fort tandis que la valeur  $\inf(\beta_1, \beta_2)$  est appelée solution choc faible.

Pour  $\theta > \theta_{\max}(M_1)$ , aucune solution locale n'est compatible avec la valeur  $M_1$  fixée. Le choc ne peut être que détaché.

Ce type de discontinuité se se produit, soit à l'amont d'obstacles placés dans un courant supersonique (fig. B.5a) soit lors d'un changement brusque de la pente d'une paroi (fig. B.5b).

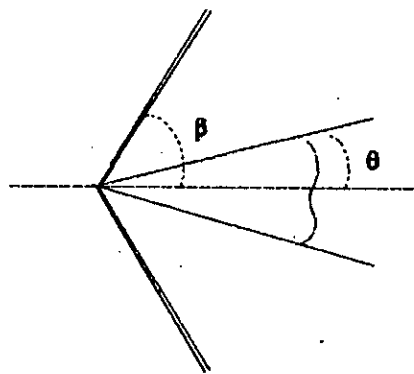


Fig. B.4a

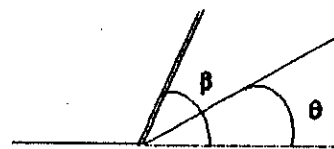


Fig. B.4b

## ANNEXE C

### TRAITEMENT NUMERIQUE DES ONDES DE CHOC NOTION DE VISCOSITE ARTIFICIELLE

Durant toute cette annexe, nous nous baserons sur l'équation de Burgers sous la forme (C.1) ou (C.2):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \nu = \text{cte} > 0 \quad (\text{C.2})$$

Lorsqu'une solution  $u(x,t)$  de l'équation de Burgers (C.1) présente un choc et qu'on discrétise le problème correspondant, il subsiste nécessairement, entre les points du maillage les plus proches du choc et situés de part et d'autre de celui-ci, une variation de  $u$  qui ne tend pas vers zéro, de sorte qu'un schéma aux différences finies, consistant n'a plus de sens.

#### C.1 METHODE DU "SHOCK-FITTING"

Elle consiste à considérer explicitement la position  $x_c$  du choc à chaque instant  $t$  comme une inconnue du problème, et à discrétiser l'équation (C.1) en différences finies de part et d'autre de  $x_c$ , et à imposer les conditions de choc (relations de Rankine-Hugoniot annexe B) une telle méthode appelée "shock fitting" est parfois utilisée, mais elle se heurte à trois difficultés principales [ref. 16]:

- (i) La difficulté informatique à suivre les chocs, qui sont parfois nombreux, et qui peuvent apparaître ou disparaître.
- (ii) La difficulté d'exprimer numériquement les relations de choc.
- (iii) La difficulté d'obtenir des schémas stables.

De sorte que cette méthode est assez peu étutilisée, sauf si on ne peut pas écrire l'équation traitée sous forme conservative.

### C.2 METHODE DU "SHOCK-CAPTURING"

Cette méthode consiste à perturber l'équation (C.1) selon le modèle (C.2), en lui adjoignant un terme de viscosité artificielle du type  $v' \partial^2 u / \partial x^2$ , l'équation résultant est, à la convergence : (a) du second ordre, et (b) suffisamment dissipative pour amortir les oscillations éventuelles,  $v'$  est un coefficient positif petit. Ce terme permet d'étaler le choc, bien que la structure du choc est faussée (car beaucoup plus épaisse qu'en réalité), mais à l'usage on constate heureusement que la position et l'intensité du choc sont correctement obtenues.

Dans la pratique, on peut :

- Soit introduire explicitement un terme  $v' \partial^2 u / \partial x^2$  au second membre de l'équation (C.1); qui s'écrit alors sous la forme (C.2), avec  $v'$  au lieu de  $v$  ( $v' > 0$ );
- Soit discrétiser (C.1) à l'aide d'un schéma dit dissipatif i.e. un schéma contenant implicitement un terme de viscosité artificielle, comme dans le procédé de lissage appliqué aux chapitres II et III.

### C.3 RESOLUTION D'UN CAS PARTICULIER

Nous allons appliquer la seconde méthode à l'équation (C.2) dans le cas stationnaire. Puisque ( $\partial/\partial t = 0$ ) cette équation permet d'avoir une équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{u^2}{2} \right) = v' \frac{d^2 u}{dx^2} \quad (C.3)$$

Dont la solution est de la forme :

$$u = u_* \frac{1 + k \cdot \exp\left(\frac{u_* x}{v}\right)}{1 - k \cdot \exp\left(\frac{u_* x}{v}\right)} \quad k = \pm \exp\left(\frac{u_* x}{v}\right) = cte \quad (C.4)$$

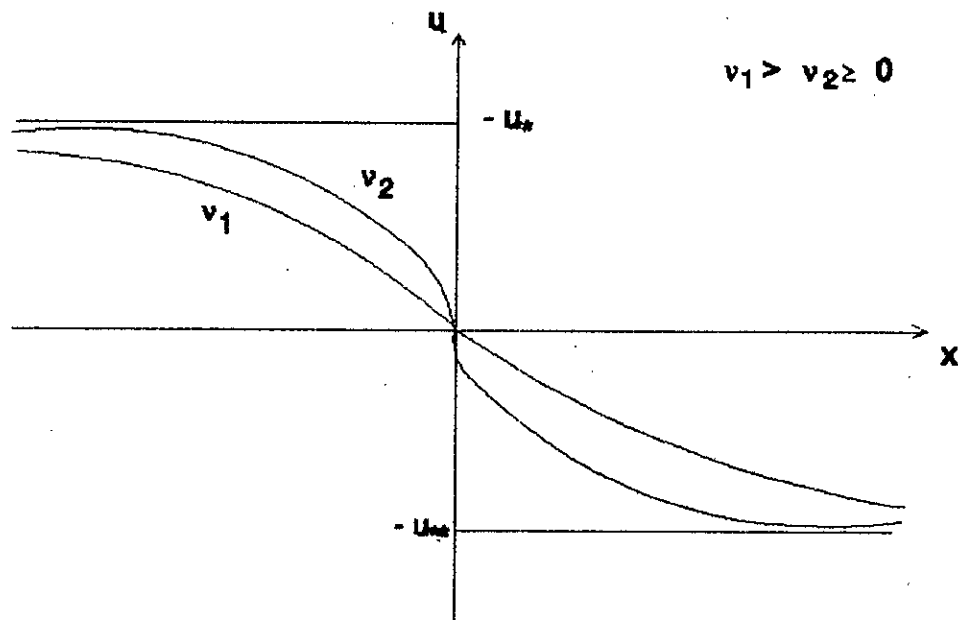
$u_* = u(x_*) = \text{cte}$  qu'on peut toujours supposée positive.  $v$  et  $u_*$  étant positifs, lorsque  $x$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$   $\exp(u_* x/v)$  varie de 0 à  $+\infty$ .

Nous supposons  $k > 0$  sinon le dénominateur peut s'annuler et  $u$  devient infini.

On peut aussi, sans perte de généralité, se ramener au cas où  $x_* = 0$  i.e.  $k=1$  d'où

$$u = u_* \operatorname{th}\left(\frac{u_* x}{2v}\right) \quad (\text{C.5})$$

Lorsque  $x$  croît de  $-\infty$  à  $+\infty$ ,  $u$  décroît de  $+u_*$  ( $>0$ ) à  $-u_*$ , d'abord lentement puis rapidement; au voisinage de  $x=0$ , et de nouveau lentement (figure ci-dessous):



D'après cette figure, on voit que lorsque le coefficient de dissipation  $\nu$  tend vers 0, le profil (C.5) se raidit. A la limite, on obtient un choc vérifiant la condition dite d'entropie (ou de choc):

$$u(x-0, t) \geq u(x+0, t) \quad (C.6)$$

La technique de viscosité artificielle sert aussi de façon très efficace à stabiliser les processus numériques.

Elle consiste à remplacer systématiquement  $\partial/\partial t$  par  $\partial/\partial t - \epsilon \Delta$  (où  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace en dimension  $n$ ), avec  $\epsilon$  positif et infiniment petit. Il s'agit d'une perturbation singulière, produit d'un coefficient  $\epsilon$  petit par une dérivée d'ordre plus élevé.