

4/94

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

CALCUL DU CHAMP DE CONTRAINTES DANS
UN MASSIF SEMI-INFINI SOUMIS
A UN CHARGEMENT NORMAL

Proposé par :

M. BELHANECHÉ H.

Etudié par :

M. BELALOUÏ Hamza
M. FLIH Sid-Ali

Dirigé par :

M. BELHANECHÉ H.

PROMOTION 1993-1994

E.N.P. 10, Avenue Hacén Badi - El-Harrach - ALGER

المدسة الوطنفة المفعفة الففنفاف
BIBLIOTHEQUE — المففففة
Ecole Nationale Polytechnique

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**CALCUL DU CHAMP DE CONTRAINTES DANS
UN MASSIF SEMI-INFINI SOUMIS
A UN CHARGEMENT NORMAL**

Proposé par :

M. BELHANECHÉ H.

Etudié par :

M. BELALOUÏ Hamza
M. FLIÏH Sid-Ali

Dirigé par :

M. BELHANECHÉ H.

PROMOTION 1993-1994

E.N.P. 10, Avenue Hacen Badi - El-Harrach - ALGER

DEDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

*A ma patrie,
à ma grand mère,
et à mes parents.*

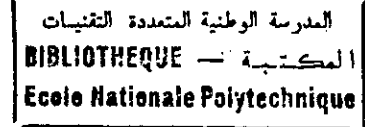
Sid-Ali

Je dédis ce modeste travail à mes Frères et Soeurs et surtout à mes chers Parents à qui je dois tout.

Sans oublier tous mes amis et les gens qui ont su être présents dans les moments difficiles.

HAMZA

REMERCIEMENTS



Nous tenons à remercier avant tout notre Professeur et Promoteur, Monsieur BELHANECHÉ Hacene, Enseignant à l'Ecole Nationale Polytechnique, pour nous avoir donné la chance de traiter ce sujet et pour ces connaissances et ses compétences qui nous ont été très utiles.

Nous tenons aussi à remercier tous les enseignants qui ont contribué à notre formation.

Sans oublier le personnel de la bibliothèque de l'E.N.P. qui sont autant agréables que serviables.

Nous remercions aussi de tout coeur les étudiants de Post-Graduation à l'E.N.P. Messieurs Abdelssamed et Rabia pour leurs judicieux conseils.

ملخص
إن تحليل عمل مشوار ميكانيزمات (دواليب، مسننات، ...)
تستلزم معرفة سلوك الوسط المكون لها، في أماكن
بعيدة عن سطح الالتماس.
دراستنا تهدف إلى وضع برنامج حسابي معتمداً عليه
على طريقة كالكير، يقوم بتحديد حقل القوى في جسم
خاضع لضغوط عمودياً على سطح الالتماس.

RESUME :

L'analyse des conditions de fonctionnement des mécanismes (roulements, engrenages...) nécessite la connaissance du comportement des matériaux dont ils sont constitués, dans des zones qui se trouvent à une certaine profondeur de la surface de contact.

Notre étude consiste à mettre au point un programme numérique qui calcul le champ de contraintes dans un massif, dû à une distribution de pressions normales en surface, par la méthode de Kalker.

ABSTRACT :

The analyse of working conditions of mechanisms (Bearings, Gears, ...) needs to know materials comportement of these mechanisms, in places that are deep in relation with the contact surface.

Our study consists in the establishment of numerical program that calculate the elastic field in a half-space by the KALKER procedure.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE

CHAPITRE I

GENERALITES.....	1
I.1- INTRODUCTION.....	1
I.2- DEFINITION DES GRANDEURS PHYSIQUES.....	1
I.3- HYPOTHESES DE L'ELASTICITE LINEAIRE.....	2
I.4- LES EQUATIONS DE LAME.....	2
I.5- CORPS ELASTIQUES NON HOMOGENES.....	4
I.6-CONCLUSION.....	5

CHAPITRE II

SOLUTIONS DES EQUATIONS DE LAME.....	6
II.1- INTRODUCTION.....	6
II.2- DEFINITION DU MASSIF SEMI-INFINI.....	6
II.3- SOLUTION DES EQUATION DE LAME.....	7
II.3.1- Sollicitations purement normales sur un massif semi-infini.....	7
II.3.1.1- Théorème d'Almansi.....	8
II.3.1.2- Recherche des fonctions harmoniques.....	8
II.3.1.3- Recherche des fonctions harmoniques.....	10
II.3.1.4- Vérification des équations de Lamé.....	11
II.3.2- Sollicitations purement tangentielles sur un massif semi-infini.....	14
II.3.3- Sollicitation quelconque dans un espace élastique (Représentation de Grodski).....	16
II.3.4- Problèmes liés à la construction d'une solution des équations de Lamé pour une couche élastique.....	18
II.3.4.1- Conditions aux limites pour une couche élastique soumise à une sollicitation normale.....	18
II.3.4.2- Problème de l'extension de la solution des équations de Lamé pour une couche élastique.....	18
II.4- CONCLUSION.....	21

CHAPITRE III

FORMULATION DU PROBLEME DE CONTACT.....	22
III.1- INTRODUCTION.....	22
III.2- MODELE DE CONTACT.....	22
III.3- HYPOTHESES DE CONTACT.....	23
III.4- TYPES DE CONTACT.....	23
III.4.1- Contact sans frottement.....	23
III.4.2- Contact avec frottement.....	23
III.4.2.1- Loi de frottement (Loi de Coulomb).....	24

III.5- Le contact Hertzien.....	24
III.6- PROBLEME DE BOUSSINESQ	26
III.6.1- INTRODUCTION	26
III.6.2- Cas de champ de pression purement normale.....	26
III.6.2.1- Position du problème.....	26
III.6.2.2- Explicitation des contraintes et des déplacements.....	28
III.7- METHODES DE RESOLUTION DU CONTACT	30
III.7.1- Introduction	30
III.7.2- Méthode directe.....	30
III.7.3- Méthode inverse	30
III.8-CONCLUSION	31

CHAPITRE IV

PRESENTATION DE LA METHODE DE KALKER	32
IV.1- INTRODUCTION	32
IV.2- PRINCIPALES HYPOTHESES.....	32
IV.3- METHODE DE KALKER.....	32
IV.4- MAILLAGE	33
IV.5- CALCUL DES DEPLACEMENTS ET CONTRAINTES	35
IV.6.- CALCUL DU CHAMP D'ISO-CONTRAINTES	35
IV.7- VALIDATION.....	36
IV.8- ORGANIGRAMME	36

CHAPITRE V

RESULTATS ET INTERPRETATIONS.....	41
V.1- INTRODUCTION	41
V.2- RESULTATS	41
V.3- INTERPRETATIONS.....	61
V.3.1- Raffinement du maillage (NX×NY).....	61
V.3.1.1- Contact Hertzien (Bille/Plan)	61
V.3.1.2- Contact rectangulaire	61
V.3.1.3- Contact quelconque.....	61
V.3.2- Augmentation du nombre de niveaux (NL).....	62
V.3.3- Changement de l'ordonnée du plan de calcul (NYCP).....	62
V.3.3.1- Contact Hertzien (Bille/Plan)	63
V.3.3.2- Contact rectangulaire	63
V.3.3.3- Contact quelconque.....	63

CONCLUSION GENERALE

NOMENCLATURE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
 المكتبة — BIBLIOTHEQUE
 Ecole Nationale Polytechnique

a, b	Demi-axe de l'ellipse de contact
A, B	Constante intervenant dans la solution des équations de Lamé pour une sollicitation normale
A', B', C'	Constante intervenant dans la solution des équations de Lamé pour une sollicitation tangentielle
B _j	Fonction harmonique intervenant dans la solution de Grodski
D	Aire de contact
F	Force appliquée sur les corps en contact
F	Frontière z = 0 du demi-espace élastique
f(x,y)	Fonction caractérisant la géométrie des corps en contact
F', G', H'	Fonction harmoniques intervenant dans la solution des équations de Lamé pour une sollicitation tangentielle
G, H	Fonctions harmoniques intervenant dans la solution des équations de Lamé pour une sollicitation normale
h	Épaisseur d'une couche élastique
G _i	Valeur de la fonction G au point (x _i , y _j , z _k)
u, v, w	Déplacement suivant les directions x, y, z
u _i	Déplacement suivant x, y, z
x, y	Coordonnées du point courant
x ₁ , y ₁	Coordonnée du point source
ε _{ij}	Déformation suivant x, y, z
σ _{ij}	Tenseur de contrainte
σ _x , σ _y , σ _z	Contraintes normales suivant les directions x, y, z
τ _{xy} , τ _{yz} , τ _{xz}	Contraintes de cisaillement
ω _x , ω _y , ω _z	Rotation suivant x, y, z
U	Vecteur déplacement
V	Domaine intérieur du massif semi-infini
Δ	Laplacien
δ	Déplacement du solide
δ _{ij}	Symbole de Kroneker
ψ	Potentiel logarithmique
φ	Potentiel newtonien
ν	Coefficient de Poisson
μ, λ	Coefficients de Lamé
θ	Dilatation cubique
I	Indice des cellules

INTRODUCTION GENERALE

La résolution du problème de contact entre deux corps élastiques constitue un domaine de recherches très important pour les tribologues. Cette recherche s'inscrit dans la théorie classique de l'élasticité linéaire qui s'intéresse d'une façon générale au comportement d'un milieu déformable soumis à des sollicitations diverses.

La résolution du problème de comportement de milieux déformables pour des configurations quelconques n'a connue que des développements très limités pendant longtemps. Ce n'est qu'avec l'introduction d'outils numériques vraiment performants, qu'on a pu résoudre la plupart des problèmes qui se posent en Mécanique des Milieux Continus. Ces outils font appel aux méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles et des équations intégrales.

Cependant, la modélisation de l'interaction de deux corps en contact n'a pas eu le même essor, car ces problèmes constituent encore de nos jours un domaine particulier dans les applications de la théorie de l'élasticité linéaire. Ce domaine est aujourd'hui connu sous le nom de "*Mécanique des Contacts*".

L'intérêt professionnel consiste en la mise au point de méthodes industrielles, d'analyse des conditions de fonctionnement de mécanismes, comme les roulements, les engrenages...etc.

Enfin, l'étude proposée dans ce travail consiste à mettre au point un outil informatique pour le calcul du champ de contraintes dans un massif provoquées par des sollicitations normales et sa validation.

CHAPITRE I

GENERALITES

I.1- INTRODUCTION

L'étude de l'interaction entre deux corps élastiques en contact repose sur la modélisation mathématique du comportement d'un milieu élastique soumis à divers sollicitations en contraintes ou en déplacement. Il convient donc de définir les grandeurs qui caractérisent l'état du milieu que nous étudions, de préciser les hypothèses de la théorie d'élasticité et enfin d'établir les équations de base de cette théorie, appelées équations de Lamé.

I.2- DEFINITION DES GRANDEURS PHYSIQUES

Intéressons nous aux déformations et contraintes qui affectent chaque point d'un milieu subissant une sollicitation quelconque. Dans un espace à trois dimensions, ces grandeurs se résument à :

- un vecteur déplacement U avec comme composantes u, v, w dans les trois directions de l'espace,
- un tenseur de déformation ε_{ij} symétrique avec six composantes $u_{i,j}$ qui rendent compte de toutes les déformations homogènes,
- un tenseur de contrainte σ_{ij} symétrique caractérisé donc par six composantes indépendantes.

Nous devons définir aussi deux grandeurs qui permettent de décrire la nature rhéologique du matériau qui compose le milieu élastique. Il s'agit du coefficient de Poisson ν et du module de Young E .

Le premier mesure le rapport entre une déformation suivant la ligne d'action d'une tension et la déformation produite dans une direction perpendiculaire à celle-ci.

Le second mesure le rapport entre une tension et la déformation qu'elle produit sur sa ligne d'action.

Le coefficient de Poisson ν a des valeurs comprises entre 0.25 et 0.35 pour des matériaux peu déformables et 0.35 à 0.45 pour des matériaux très déformables. Le module de Young E a des valeurs comprises entre 1 M.Pa et 500 G.Pa.

On peut utiliser aussi, pour rendre compte de la rhéologie du matériau, les coefficients de Lamé λ et μ qui sont liés à E et ν par les relations suivantes:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases} \quad (I.1)$$

I.3- HYPOTHESES DE L'ELASTICITE LINEAIRE

SOLOMON [1], explicite l'ensemble des hypothèses qui doivent caractériser le comportement du corps élastique. On distingue deux sortes d'hypothèses :

- Hypothèses fondamentales :

- L'utilisation des lois de la mécanique classique,
- milieu continue, qui permet d'avoir une représentation macroscopique et donc l'utilisation des outils classiques d'analyse mathématique,
- discrétisation du milieu pour la formulation des équations d'équilibres sous forme différentielle,
- dépendance locale des grandeurs qui caractérisent le milieu élastique,
- définir une correspondance biunivoque entre les déformations et les tensions, ce qui impose un caractère réversible pour la déformation.

- Hypothèses simplificatrices :

- les propriétés mécaniques sont invariables pour tout point du milieu élastique et sont indépendantes des directions considérées autour de ces points (corps homogènes et isotropes),
- la linéarité géométrique entre les déformations et les dérivées des déplacements,
- le travail mécanique est indépendant des états successifs qui conduisent de l'état initial à l'état final.

I.4- LES EQUATIONS DE LAME

Pour déterminer les grandeurs que nous avons définies, nous devons construire un système d'équations établi à partir de :

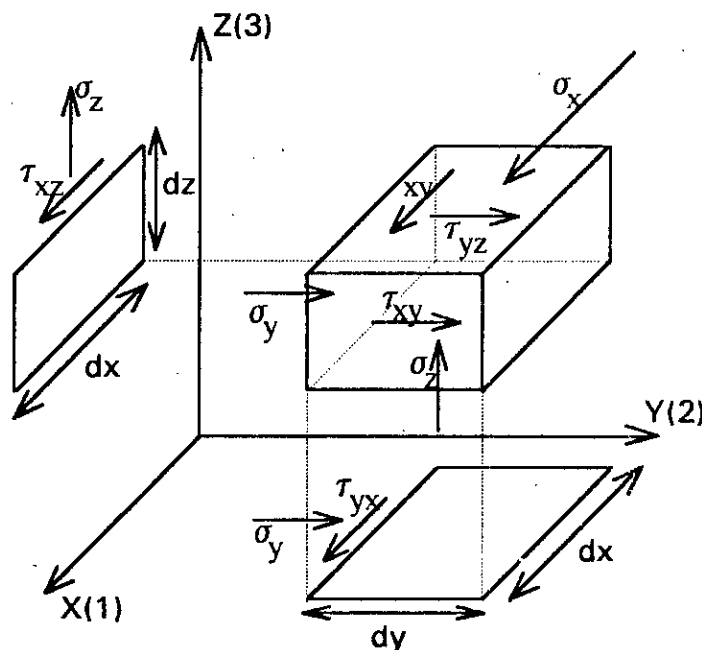
- six équations géométriques traduisant l'hypothèse de linéarité géométrique :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (I.2)$$

- six équations d'équilibre que l'on déduit en exprimant que la résultante des forces sur un parallélépipède de dimension $dx \, dy \, dz$ (figure I.1) en équilibre d'un point de vue mécanique est nulle, le vecteur de contraintes étant symétrique, les six équations d'équilibres se réduisent à 3 :

$$\sum_j (\sigma_{ij,j}) + F_i = 0 \quad (I.3)$$

où F_i représente les trois composantes des forces volumiques.



σ = contraintes normales sur élément de volume $dx \, dy \, dz$
 τ = contraintes de cisaillement sur élément de volume $dx \, dy \, dz$

-figure I.1- Contraintes sur un élément de volume.

- six équations physiques explicitées par la loi de Hooke simplifiée, et exprimant ici la dépendance linéaire entre les déformations et les contraintes.

Ces six équations physiques s'expriment en fonction des coefficients de Lamé λ et μ :

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (I.4)$$

ou du module de Young E et du coefficient de Poisson ν :

$$\sigma_{ij} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \theta \delta_{ij} + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} \quad (I.5)$$

$$(\delta_{ij} = 1 \text{ pour } i=j, \delta_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j)$$

La grandeur θ est la dilatation cubique

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (I.6)$$

En remplaçant σ_{ij} par son expression (I.4) dans les relations d'équilibres (I.3), on a :

$$\lambda u_{i,ji} \delta_{ij} + \mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ji} = 0 \quad (I.7)$$

Qui se simplifie et se met sous la forme suivante:

$$(\lambda + \mu)\theta_{,i} + \mu \Delta u_i = 0 \quad (I.8)$$

Le calcul à partir des coefficients E et ν conduit au système suivant :

$$\theta_{,i} + (1 - 2\nu)\Delta u_i = 0 \quad (I.9)$$

Le système d'équations (1.8) est le système d'équations de Lamé pour des forces de volume nulles et pour un milieu homogène.

En dérivant chaque équation de (1.8) respectivement par rapport à x, y, z et en additionnant les trois équations, on démontre que la dilatation est une fonction harmonique ($\Delta\theta = 0$).

En appliquant l'opérateur Δ sur (1.8) on a :

$$(\lambda + \mu)\Delta\theta_{,i} + \mu\Delta\Delta u_i = 0$$

on en déduit $\Delta\Delta u_i = 0 \quad (I.10)$

Nous mettons ainsi en évidence une biharmonicité des composantes de déplacement..

Nous avons donc affaire ici à un système d'équations dont les variables vérifient des propriétés intéressantes propres aux corps homogènes et isotropes, d'où la relative facilité de construire une solution des équations de Lamé pour des conditions aux limites variées.

I.5- CORPS ELASTIQUES NON HOMOGENES

Dans ce cas les paramètres rhéologiques (λ, μ) ou (E, ν) sont variables dans la loi de Hooke. L'introduction de cette loi dans les relations d'équilibre qui s'explicitent à

partir des dérivées des contraintes par rapport à x, y, z donnerait alors des équations en, terme de déplacement, extrêmement complexes et lourdes à manipuler.

Pour cela on prend généralement une variation d'un des deux paramètres rhéologiques dans une seule direction (la direction liée à la profondeur du massif semi-infini). On garde alors comme paramètres variables le coefficient μ ou E ; hypothèse qui réduit énormément le champ possible des matériaux à considérer.

Nous présentons ici les équations d'équilibre avec E fonction de z et ν constant, ce qui est équivalent aussi à λ et μ fonctions de z .

Pour $\lambda = \lambda(z)$ et $\mu = \mu(z)$, nous avons :

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dx} + \mu \Delta u + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dy} + \mu \Delta v + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dz} + \mu \Delta w + 2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (I.11)$$

Pour $E = E(z)$ et $\nu = \text{constante}$, nous avons :

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dx} + (1 - 2\nu) \left[\Delta u + \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = 0 \\ \frac{d\theta}{dy} + (1 - 2\nu) \left[\Delta v + \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] = 0 \\ \frac{d\theta}{dz} + (1 - 2\nu) \left[\Delta w + \frac{2}{E} \frac{\partial E}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{2\nu}{E} \frac{\partial E}{\partial z} \theta = 0 \end{cases} \quad (I.12)$$

Dans ces relations d'équilibre, nous ne pouvons plus établir la biharmonicité des composantes du déplacement.

La recherche d'une solution à partir de la théorie du potentiel s'avère ici particulièrement fastidieuse.

I.6-CONCLUSION

Dans ce chapitre on a mis en place un outil de travail qui consiste en la définition des grandeurs physiques, qui est la base de la formulation des problèmes d'élasticité, et l'explicitation des hypothèses de l'élasticité linéaire. Ce qui nous pouvons remarquer, c'est la difficulté de manipuler les équations dont les paramètres rhéologiques (E, ν) sont variables dans la loi de Hooke, d'où l'avantage de travailler sur des corps homogènes et isotropes.

CHAPITRE II

SOLUTIONS DES EQUATIONS DE LAME

II.1- INTRODUCTION

La recherche des solutions des équations de Lamé pour une sollicitation quelconque est une étape nécessaire pour la formulation des problèmes direct et inverse (qui seront traités ultérieurement) afin de résoudre les problèmes de contact.

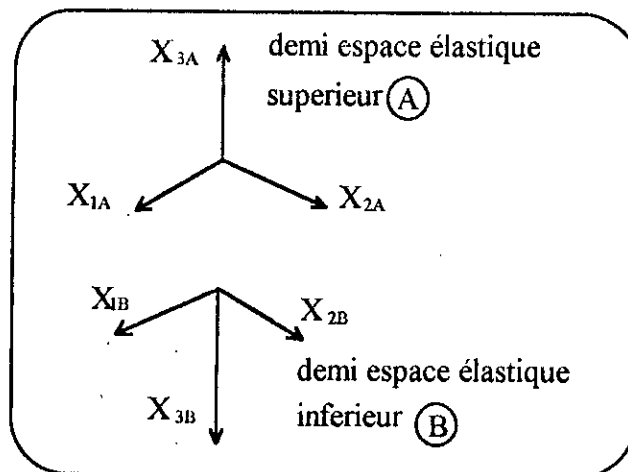
La première solution des équations de Lamé est exprimée directement sur un massif semi-infini, ce qui permet de formuler le problème direct à partir d'équations aux dérivées partielles très simples. Nous situons alors les limites des solutions mises en oeuvre en rappelant la solution des équations de Lamé sur un espace élastique quelconque (solution de Grodski).

II.2- DEFINITION DU MASSIF SEMI-INFINI

Dans la théorie de l'élasticité, la notion de demi-espace élastique (massif semi-infini) est un concept très important, lequel est un solide élastique qui dans le système cartésien (x_1, x_2, x_3) occupe la région définie par $\{(x_1, x_2, x_3) \text{ avec } x_3 \geq 0\}$.

Les problèmes de contact du type Hertzien sont caractérisés par l'existence d'une surface de contact de petite dimension, par rapport à celles des rayons de courbures des deux solides en contact où est concentrée une distribution de pression. On peut donc assimiler les solides à des demi-espaces élastiques, et définir explicitement le champ des déplacements de chaque solide à partir des pressions de contact, en utilisant la représentation intégrale de Boussinesq et Cerruti (Voir Chapitre III).

La figure (II.1) représente les systèmes de coordonnées cartésiennes pour les demi-espaces élastiques supérieur "A" et inférieur "B".



- **Figure II.1** - Coordonnées cartésiennes pour les D.E.E. supérieur et inférieur.

II.3- SOLUTION DES EQUATION DE LAME

Nous nous referons pour la résolution des équations de Lamé aux démarches qui font appel à la théorie du potentiel de Boussinesq et de Grodski.

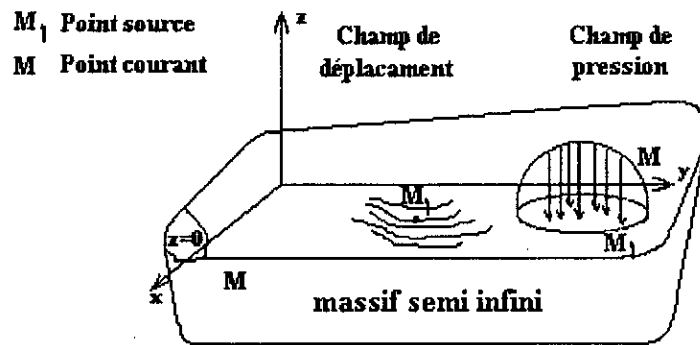
Boussinesq résoud directement un problème physique, qui se traduit par des conditions aux limites explicites au niveau de l'espace élastique. Il établit une solution des équations de Lamé pour une sollicitation en contrainte normale ou tangentielle sur la frontière $z = 0$ d'un massif semi-infini (Voir figure II.2). Cette solution s'écrit à partir de deux potentiels harmoniques pour une sollicitation en contrainte normale ou tangentielle.

Par contre, Grodski établit une solution mathématique intéressante des équations de Lamé pour un espace élastique quelconque, à partir de quatre fonctions harmoniques.

II.3.1- Sollicitations purement normales sur un massif semi-infini

Le milieu élastique que nous retiendrons ici se définit comme un demi-espace élastique de dimension infinie dans les directions x et y et borné dans la direction z par le plan $z = 0$ sur lequel peuvent s'exercer des sollicitations en contraintes ou en déplacement. Cette configuration de l'espace élastique permet de modéliser un grand nombre de problème de contact.

Ce problème peut être schématisé à partir de la figure ci-dessous:



- Figure II.2 - Champ de pressions normales sur un massif semi-infini

II.3.1.1- Théorème d'Almansi

Sur le massif ainsi défini, l'équation biharmonique $\Delta\Delta u$ admet comme solution :

$$\begin{aligned}
 u_i &= zu_{1i} + u_{2i} & \text{ou} & & \Delta\Delta u &= 0 \\
 & & & & \Delta u_{1i} &= 0 \\
 & & & & \Delta u_{2i} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{II.1}$$

La résolution des équations de Lamé n'impose pas l'explicitation de la nature de la sollicitation appliquée dans le plan $z = 0$. Seule la direction de la sollicitation nous est utile pour la formulation d'hypothèses spécifiques.

Nous supposons que les rotations dans les plans parallèles au plan xy sont nulles du fait que les contraintes de cisaillement τ_{xz} et τ_{xy} sont nulles sur le plan $z = 0$.

C'est à dire :

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x}
 \tag{II.2}$$

hypothèse que Boussinesq considère comme une condition d'intégrabilité sur le massif semi-fini.

II.3.1.2- Recherche des fonctions harmoniques u_{1i}

Nous allons donc chercher à exprimer les équations de Lamé en fonction de u_{1i} et u_{2i} .

Notre démarche consistera à éliminer les fonctions harmoniques u_{2i} de cette équation et à traduire une propriété intrinsèque aux équations de Lamé. Nous pouvons alors écrire les fonctions u_{1i} à partir d'une seule fonction harmonique G .

Les fonctions u_{2i} s'expriment simplement à partir d'une seule fonction harmonique H en vérifiant les conditions formulées sur les rotations. Il sera alors facile d'écrire une solution pour u, v, w , vérifiant termes à termes les équations de Lamé.

Ecrivons les équations de Lamé en remplaçant les u_i par u_{1i} et u_{2i} .

Nous avons :

$$\mu \Delta (z u_{1i} + u_{2i}) + (\lambda + \mu) \theta_{,i} = 0 \quad (\text{II.3})$$

En remarquant que $\Delta(zu) = 2 \frac{\partial u}{\partial z}$, nous avons en définitive le système d'équations simplifié :

$$2 \mu u_{1i} + (\lambda + \mu) \theta_{,i} = 0 \quad (\text{II.4})$$

Nous éliminons θ de l'expression (II.4), en soustrayant des dérivées croisées de celle-ci par rapport à x et y puis x et z puis y et z . Nous obtenons les relations suivantes sur u_{11}, u_{12}, u_{13} :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{11}}{\partial y} - \frac{\partial u_{12}}{\partial x} = F_1(x, y) \\ \frac{\partial u_{12}}{\partial z} - \frac{\partial u_{13}}{\partial y} = F_2(x, y) \\ \frac{\partial u_{13}}{\partial z} - \frac{\partial u_{11}}{\partial x} = F_3(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

où les $F_i(x, y)$ sont des fonctions scalaires.

Nous écrivons $\vec{F}_i(x, y) = 0$. Ce qui équivaut à établir que les rotations ω_x, ω_y et ω_z sont nulles, cas admissibles pour des contraintes normales.

les vecteurs \vec{u}_{1i} vérifient donc la relation suivante:

$$\vec{\text{rot}} u_{1i} = \vec{0} \quad (\text{II.6})$$

qui admet comme solution :

$$\vec{u}_{1i} = A \vec{\text{grad}} G \quad (\text{II.7})$$

u_1, v_1, w_1 s'expriment alors à partir d'une fonction scalaire G telle que :

$$u_{11} = A \frac{\partial G}{\partial x} \quad u_{12} = A \frac{\partial G}{\partial y} \quad u_{13} = A \frac{\partial G}{\partial z} \quad (\text{II.8})$$

A est une constante scalaire,

de plus :

$$\begin{aligned}\Delta u_{11} &= A \frac{\partial(\Delta G)}{\partial x} = 0 \\ \Delta u_{12} &= A \frac{\partial(\Delta G)}{\partial y} = 0 \\ \Delta u_{13} &= A \frac{\partial(\Delta G)}{\partial z} = 0\end{aligned}\quad (\text{II.9})$$

On en déduit : $\Delta G = \text{cte}$. En prenant cette constante nulle, G est alors une fonction harmonique et la dilatation cubique θ est nulle. Nous avons ici vérifié uniquement une propriété déduite des équations de Lamé concernant les u_{1i} .

II.3.1.3- Recherche des fonctions harmoniques u_{2i}

Les déplacements u_i s'écrivent en définitive

$$u_i = Az G_{,i} + u_{2i} \quad (\text{II.10})$$

Ecrivons les relations qui découlent des conditions sur les rotations.

Nous avons:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{23}}{\partial y} - \frac{\partial u_{22}}{\partial z} - A \frac{\partial G}{\partial y} \right) \neq 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{21}}{\partial z} - \frac{\partial u_{23}}{\partial x} - A \frac{\partial G}{\partial x} \right) \neq 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{22}}{\partial x} - \frac{\partial u_{21}}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Ces relations sont vérifiées si nous posons:

$$u_{21} = B \frac{\partial H}{\partial x} \quad u_{22} = B \frac{\partial H}{\partial y} \quad u_{23} = C \frac{\partial H}{\partial z} \quad (\text{II.12})$$

Nous remarquons que u_{2i} s'exprime à partir d'une fonction scalaire H telle que $\Delta H = 0$ pour les mêmes raisons que la fonction G .

II.3.1.4- Vérification des équations de Lamé

Les déplacements u, v, w s'expriment donc à partir de deux fonctions scalaires G et H .

$$\begin{cases} u = Az \frac{\partial G}{\partial x} + B \frac{\partial H}{\partial x} \\ v = Az \frac{\partial G}{\partial y} + B \frac{\partial H}{\partial y} \\ w = Az \frac{\partial G}{\partial z} + C \frac{\partial H}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Pour vérifier identiquement les équations de Lamé, nous calculons les quantités Δu , Δv , Δw et θ et nous les remplaçons dans (I.10).

~~Les dérivées sont obtenues par les relations suivantes :~~

$$\theta = Az \Delta G + B \Delta H + A \frac{\partial G}{\partial z} + (C - B) \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}$$

$$\Delta u = 2A \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z}$$

$$\Delta v = 2A \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$$

$$\Delta w = 2A \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z}$$

(II.14)

Cela nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial G}{\partial z} + D \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right) + 2\mu A \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial x} = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial G}{\partial z} + D \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right) + 2\mu A \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial y} = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial G}{\partial z} + D \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right) + 2\mu A \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

en posant $C = B + D$.

Ce système sera vérifié si on pose :

$$(\lambda + \mu) \left(A \frac{\partial G}{\partial z} + D \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right) + 2\mu A \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.16})$$

ou encore:

$$(\lambda + 3\mu) A \frac{\partial G}{\partial z} + (\lambda + \mu) D \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{II.17})$$

pour que la dernière équation soit vérifiée, il suffit de poser deux conditions:

La première est :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{\partial G}{\partial z} \quad (\text{II.18})$$

ou encore

$$\frac{\partial H}{\partial z} = G$$

En remplaçant (II.17) dans (II.16), nous déduisons la deuxième condition portant sur les constantes D et A .

$$D = -\frac{(\lambda + 3\mu)}{\lambda + \mu} A \quad (\text{II.19})$$

Nous avons ainsi déterminé une solution des équations de Lamé qui répond, en outre, à toutes les hypothèses que nous avons formulées concernant un massif semi-infini soumis à des sollicitations purement normales.

Cette solution s'écrit en définitive sous la forme:

$$\begin{cases} u = A z \frac{\partial G}{\partial x} + B \frac{\partial H}{\partial x} \\ v = A z \frac{\partial G}{\partial y} + B \frac{\partial H}{\partial y} \\ w = A z \frac{\partial G}{\partial z} + \left(B - \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} A \right) \frac{\partial H}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

$$\text{avec} \quad \frac{\partial H}{\partial z} = G$$

Nous déterminons complètement l'état élastique du corps en considérant, en outre, les équations de contraintes déduites à partir de la loi de Hooke .

Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = -\frac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu} A \frac{\partial G}{\partial z} + 2\mu \left(Az \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) \\ \sigma_y = -\frac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu} A \frac{\partial G}{\partial z} + 2\mu \left(Az \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + B \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_z = \left(\frac{2\mu(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} A - 2\mu B \right) \frac{\partial G}{\partial z} - 2\mu Az \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \\ \tau_{xy} = 2\mu \left(Az \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + B \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \right) \\ \tau_{xz} = 2\mu Az \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z} + 2\mu \left(B - \frac{\mu A}{\lambda+\mu} \right) \frac{\partial G}{\partial x} \\ \tau_{yz} = 2\mu Az \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z} + 2\mu \left(B - \frac{\mu A}{\lambda+\mu} \right) \frac{\partial G}{\partial y} \end{array} \right. \quad (\text{II.21})$$

Nous pouvons admettre que l'écriture de la solution en fonction de H n'est pas vraiment nécessaire, la détermination de H étant directement liée à G .

Les fonctions harmoniques G et H et les constantes scalaires A et B dépendent des problèmes que nous définissons sur le massif semi-infini.

A partir de cette solution, nous pouvons traduire sans difficulté les conditions que nous imposons ici sur les contraintes de cisaillement dans le plan $z = 0$.

La vérification de :

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{pour } z = 0$$

nous permet d'écrire la relation suivante entre A et B :

$$B = \frac{\mu A}{\lambda + \mu} \quad (\text{II.22})$$

II.3.2- Sollicitations purement tangentielles sur un massif semi-infini

Comme dans le cas précédant, la sollicitation tangentielle est exercée sur le plan $z = 0$ du massif semi-infini et dans une direction parallèle à celle-ci. Seulement, dans ce cas, nous ne pouvons plus définir de direction privilégiée nous permettant, comme dans le cas de sollicitation purement normale, d'écrire une hypothèse intéressante sur w_z . Nous pouvons lever cette hypothèse en ajoutant un terme à la solution des équations de Lamé exprimée en (II.20). Nous la déduisons à partir d'une solution banale de l'équation $\Delta\theta = 0$. Cette équation sera vérifiée si nous écrivons que la dilatation cubique θ est nulle.

Si nous cherchons cette solution à partir d'une fonction scalaire F' telle que $\Delta F' = 0$ pour vérifier identiquement les équations de Lamé, nous avons quatre cas possibles :

$$1^\circ) \quad u = \frac{\partial F'}{\partial x} \quad ; \quad v = \frac{\partial F'}{\partial y} \quad ; \quad w = \frac{\partial F'}{\partial z} \quad (\text{II.23})$$

$$2^\circ) \quad u = -\frac{\partial F'}{\partial y} \quad ; \quad v = \frac{\partial F'}{\partial x} \quad ; \quad w = 0 \quad (\text{II.24})$$

$$3^\circ) \quad u = 0 \quad ; \quad v = -\frac{\partial F'}{\partial z} \quad ; \quad w = \frac{\partial F'}{\partial y} \quad (\text{II.25})$$

$$4^\circ) \quad u = -\frac{\partial F'}{\partial z} \quad ; \quad v = 0 \quad ; \quad w = \frac{\partial F'}{\partial x} \quad (\text{II.26})$$

Les trois dernières solutions permettent effectivement une rotation non nulle dans le plan xy .

Toute sollicitation normale dans le plan $z = 0$ doit être en outre nulle.

Seule la solution explicitée en (II.24) vérifie cette dernière condition.

Nous poserons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_T = -C' \frac{\partial F'}{\partial y} \\ v_T = -C' \frac{\partial F'}{\partial x} \\ w_T = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.27})$$

C' est alors une constante à déterminer.

D'où une solution des équations de Lamé dans le cas de sollicitations purement tangentielles :

$$\begin{cases} u' = A'z \frac{\partial G'}{\partial x} + B' \frac{\partial H'}{\partial x} - C' \frac{\partial F'}{\partial y} \\ v' = A'z \frac{\partial G'}{\partial y} + B' \frac{\partial H'}{\partial y} - C' \frac{\partial F'}{\partial x} \\ w' = A'z \frac{\partial G'}{\partial z} + \left(B' - \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} A' \right) \frac{\partial H'}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

$$\text{avec } \frac{\partial H'}{\partial z} = G$$

Nous en déduisons les équations de contraintes, comme dans le cas de sollicitations purement normales à partir de la loi de Hooke :

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{2\mu\lambda A'}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2 H'}{\partial z^2} + 2\mu \left[A'z \frac{\partial^2 G'}{\partial x^2} + B' \frac{\partial^2 H'}{\partial x^2} - C' \frac{\partial^2 F'}{\partial x \partial y} \right] \\ \sigma_y = -\frac{2\mu\lambda A'}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2 H'}{\partial z^2} + 2\mu \left[A'z \frac{\partial^2 G'}{\partial y^2} + B' \frac{\partial^2 H'}{\partial y^2} - C' \frac{\partial^2 F'}{\partial x \partial y} \right] \\ \sigma_z = \left[-\frac{2\mu(\lambda + 2\mu)A'}{\lambda + \mu} + 2\mu B' \right] \frac{\partial^2 H'}{\partial z^2} + 2\mu A'z \frac{\partial^3 H'}{\partial z^3} \\ \tau_{xy} = \mu \left[2A'z \frac{\partial^2 G'}{\partial x \partial y} + 2B' \frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial y} - C' \frac{\partial^2 F'}{\partial y^2} + C' \frac{\partial^2 F'}{\partial x^2} \right] \\ \tau_{xz} = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left[2A'z \frac{\partial^2 H'}{\partial z^2} + 2 \left(B' - \frac{\mu A'}{\lambda + \mu} \right) \frac{\partial H'}{\partial z} \right] - \mu C' \frac{\partial^2 F'}{\partial y \partial z} \\ \tau_{yz} = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[2A'z \frac{\partial^2 H'}{\partial z^2} + 2 \left(B' - \frac{\mu A'}{\lambda + \mu} \right) \frac{\partial H'}{\partial z} \right] + \mu C' \frac{\partial^2 F'}{\partial x \partial z} \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

Notons que la sollicitation $\sigma_z = 0$ pour $z = 0$ nous donne une première relation pour déterminer les constantes A' , B' , C' . Nous avons :

$$\frac{2\mu(\lambda + 2\mu)A'}{\lambda + \mu} = 2\mu B' \quad (\text{II.30})$$

II.3.3- Sollicitation quelconque dans un espace élastique (Représentation de Grodski)

Contrairement aux solutions (II.20) et (II.28) qui sont liées à des problèmes spécifiques sur un massif semi-infini, dans cette configuration, la solution est sur un espace élastique quelconque et pour n'importe quel type de sollicitation. De toutes les représentations que nous rencontrons dans la littérature LOVE[3], SOLOMON[1] qui répondent à cette préoccupation, nous retenons celle de Grodski qui présente de nombreux avantages sur les autres, et est, de ce fait, la plus utilisée.

Elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u = B_1 - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} (xB_1 + yB_2 + zB_3 + B_0) \\ v = B_2 - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial y} (xB_1 + yB_2 + zB_3 + B_0) \\ w = B_3 - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} (xB_1 + yB_2 + zB_3 + B_0) \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

avec $\Delta B_1 = \Delta B_2 = \Delta B_3 = \Delta B_0 = 0$

Il est relativement aisé de retrouver, à partir de cette représentation, les solutions (II.20) et (II.28). On peut en déduire aussi sans trop de difficulté des solutions pour une sphère élastique sur laquelle s'applique des contraintes ou des déplacements.

Des développements analytiques pour d'autres configurations de milieu élastique tridimensionnel s'avèrent très difficiles, ce qui est notamment le cas pour des couches élastiques.

La construction d'une solution des équations de Lamé, pour le massif infini, à partir de la représentation de Grodski, permet de mieux comprendre les limites des solutions que nous avons construites aux paragraphes (§ II.3.1.) et (§ II.3.2.). En effet, dans la mise en oeuvre de ces solutions, rien n'imposait explicitement que le massif semi-infini ait une dimension infinie dans la direction z . Toutes les hypothèses que nous avons formulées sont vérifiées, mêmes si la profondeur z est finie a priori.

Plaçons-nous par exemple dans le cas de contraintes purement normales.

Nous chercherons d'abord à vérifier que les contraintes de cisaillement sont nulles sur le plan pour $z = 0$ du massif semi-infini.

Des équations :

$$\begin{cases} \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \end{cases} \quad (z = 0) \quad (\text{II.32})$$

nous déduisons les relations suivantes:

$$\begin{cases} \frac{\partial B_1}{\partial z} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial B_3}{\partial x} = \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial B_1}{\partial z} + y \frac{\partial B_2}{\partial z} + \frac{\partial B_0}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial B_2}{\partial z} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial B_3}{\partial y} = \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial B_1}{\partial z} + y \frac{\partial B_2}{\partial z} + \frac{\partial B_0}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

Ces expressions seront vérifiées si on pose:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_1}{\partial z} &= \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial B_3}{\partial x} \\ \frac{\partial B_2}{\partial z} &= \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial B_3}{\partial y} \\ \frac{\partial B_0}{\partial z} &= \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left(x \frac{\partial B_3}{\partial x} + y \frac{\partial B_3}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

Les trois relations ci-dessus seront étendues dans tous le volume de l'espace élastique si celui-ci a une dimension infinie et si on suppose que les fonctions B_i ($i = 1, 2, 3$) et B_0 sont régulières à l'infini.

Nous écrivons alors:

$$\frac{\partial B_0}{\partial z} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left(x \frac{\partial B_3}{\partial x} + y \frac{\partial B_3}{\partial y} + z \frac{\partial B_3}{\partial z} \right) \quad (\text{II.35})$$

et

$$\frac{\partial B_i}{\partial z} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial B_3}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3$$

en posant $B_3 = C \frac{\partial H}{\partial z}$ et $G = \frac{\partial H}{\partial z}$ où G et H sont des fonctions harmoniques.

Nous déduisons les fonctions harmoniques B_1, B_2, B_3, B_0 .

$$\begin{cases} B_1 = -\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} C \frac{\partial G}{\partial x} \\ B_2 = -\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} C \frac{\partial G}{\partial y} \\ B_3 = -\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} C \frac{\partial G}{\partial z} \end{cases} \quad (II.36)$$

et

$$B_0 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} C \left(x \frac{\partial G}{\partial x} + y \frac{\partial G}{\partial y} + z \frac{\partial G}{\partial z} - G \right) \quad (II.37)$$

En remplaçant les expressions dans (II.30), nous avons une solution analogue à celle explicitée en (II.20) pour un massif semi-infini. Il est établi clairement dans la présente démarche que cette solution impose que la profondeur z soit infinie .

II.3.4- Problèmes liés à la construction d'une solution des équations de Lamé pour une couche élastique

II.3.4.1- Conditions aux limites pour une couche élastique soumise à une sollicitation normale

La couche élastique que nous considérons ici se modélise comme un massif semi-infini, de dimension infinie dans les directions x et y , mais borné par deux plans parallèles dans la direction z entre les valeurs $z = 0$ et $z = h$.

Sur la frontière $z = h$, nous pouvons admettre deux types de conditions aux limites.

- Le premier cas exprime que la couche élastique est "collée" sur un milieu dur, les déplacements u, v, w , doivent être alors imposés nuls.
- Le deuxième cas se rapporte à une couche élastique "posée" sur un milieu dur, le déplacement normale w est alors nul ainsi que les contraintes de cisaillement $\tau_{xz} = \tau_{yz}$

II.3.4.2- Problème de l'extension de la solution des équations de Lamé pour une couche élastique

En conservant le même esprit de la démarche qui a permis de mettre en oeuvre une solution de l'équation de Lamé sur un massif semi-infini, nous proposons ici une autre écriture de cette solution qui s'inscrit dans un cadre plus large .

La solution (II.20) vérifie un certain nombre de propriétés liés aux équations de Lamé et aux problèmes physiques qui nous intéresse.

Posons alors que G est une fonction telle que :

$$z \Delta G + K \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.38})$$

où G est une fonction harmonique et K une constante à déterminer.

Nous pouvons alors vérifier les équations de Lamé en imposant la relation suivante [8] entre A et D .

$$D = \frac{-A[-(1+2\mu)(K-1) + \mu]}{\lambda + \mu} \quad (\text{II.39})$$

Une solution plus générale des équations de Lamé s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = Az \frac{\partial G}{\partial x} + B \frac{\partial H}{\partial x} \\ v = Az \frac{\partial G}{\partial y} + B \frac{\partial H}{\partial y} \\ w = Az \frac{\partial G}{\partial z} + B \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{[\mu - (\lambda + 2\mu)(K-1)]}{\lambda + \mu} A \frac{\partial H}{\partial z} \end{array} \right. \quad (\text{II.40})$$

Nous retrouvons bien sûr la solution sur un massif semi-infini pour $K = 0$ dans le cas d'un champ de pressions purement normales (II.20).

Explicitons alors les contraintes σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} :

$$\begin{cases} \sigma_z = 2\mu Az \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + \left[2\mu B - \frac{(\lambda + 2\mu)[\lambda + (K - 1)(\lambda + 2\mu)]}{\lambda + \mu} A \right] \frac{\partial G}{\partial z} \\ \tau_{xz} = 2\mu Az \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z} + 2\mu \left[B + \frac{K(\lambda + 2\mu) - 2\mu}{2(\lambda + \mu)} A \right] \frac{\partial G}{\partial x} \\ \tau_{yz} = 2\mu Az \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z} + 2\mu \left[B + \frac{K(\lambda + 2\mu) - 2\mu}{2(\lambda + \mu)} A \right] \frac{\partial G}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

A partir de la condition aux limites $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ à la frontière $z = 0$ nous déduisons une relation entre A , B et K :

$$B + \frac{K(\lambda + 2\mu) - 2\mu}{2(\lambda + \mu)} A = 0 \quad (\text{II.42})$$

⊛ Si nous supposons que la couche élastique est collée sur un milieu dur à la frontière $z = h$, nous devons vérifier les relations suivantes :

$$\begin{cases} Az \frac{\partial G}{\partial x} + B \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ Az \frac{\partial G}{\partial y} + B \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \\ Az \frac{\partial G}{\partial z} + B \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{[\mu - (\lambda + 2\mu)(K - 1)]}{\lambda + \mu} A \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.43})$$

Ces trois relations sont équivalentes si nous posons:

$$B = -A - \frac{[\mu - (\lambda + 2\mu)(K - 1)]}{\lambda + \mu} A \quad (\text{II.44})$$

de (II.44) on déduit : $K = 2$

de (II.42) on déduit : $B + A = 0$

Le déplacement normal est égal alors à :

$$W = A z \frac{\partial G}{\partial z} \quad (\text{II.45})$$

- ⊕ Dans le cas où la couche élastique est posée sur un milieu dur, la vérification des conditions : $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$, $w = 0$, à la frontière $z = h$, nous amène à vérifier les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} A z \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{B + [K(\lambda + 2\mu) - 2\mu] A}{2(\lambda + \mu)} G = \text{fonction}(z) \\ A z \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{B - [\mu + (\lambda + 2\mu)(K - 1)] A}{\lambda + \mu} G = 0 \end{cases} \quad (\text{II.46})$$

Ces deux relations sont équivalentes si nous posons ici aussi $K = 2$. Nous nous retrouvons dans la même situation que celle évoquée précédemment.

II.4- CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons essayé de mettre en oeuvre en s'appuyant sur une recherche bibliographique [1], [3], [5], [6], [8] une solution des équations de Lamé dans un massif semi-infini.

Ce que nous pouvons conclure dans ce travail, est que, plus la configuration des corps et des sollicitations est complexe (espace élastique quelconque et sollicitations de direction quelconque), plus la recherche des solutions des équations de Lamé devient compliquée.

CHAPITRE III

FORMULATION DU PROBLEME DE CONTACT

III.1- INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous allons donner une vue du problème de contact élastique, puis situer les méthodes de traitement et de résolution.

Nous avons donc essayé de faire ressortir les étapes classiques du processus de résolution, telle qu'elles apparaissent dans la littérature [5], [6], [8]. En particulier nous avons distingué deux méthodes : méthode directe et méthode inverse (qui seront exposées ultérieurement).

III.2- MODELE DE CONTACT

Le problème de contact peut être représenté par la figure ci-dessous :

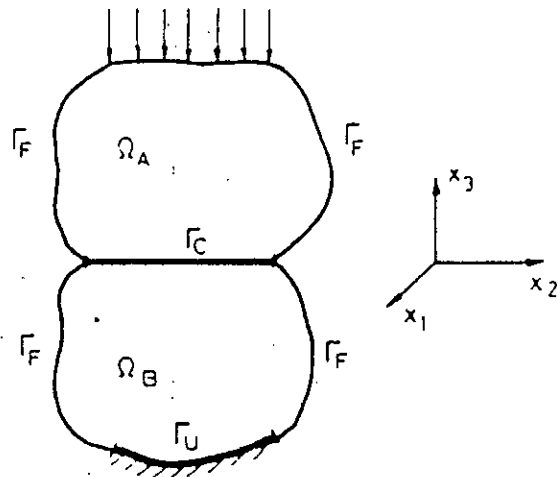


Figure III.1 - Représentation schématique de deux solides en contact

Les deux corps élastiques, A et B, sont mis en contact au moins en un point. Les domaines des corps A et B sont respectivement Ω_A et Ω_B , tels que :

$$\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$$

La frontière du domaine est divisée en trois parties [10], Γ_U où les déplacements sont imposés $u_i = \bar{u}_i$, Γ_F sur laquelle les efforts extérieurs sont connus, $F_i = \sigma_{ij} n_j$, et, finalement Γ_C , la surface de contact, où les conditions limites sont du types mixtes, c'est à dire en fonction des déplacements et des efforts extérieurs.

III.3- HYPOTHESES DE CONTACT

Pour traiter le modèle de contact de type Hertzien, de deux corps en contact, nous devons formuler trois conditions essentielles qui sont les suivantes:

- les dimensions de l'aire de contact sont petites devant le rayon de courbure des corps en contact,
- les surfaces des corps sont parfaitement lisses,
- aucune force tangentielle n'est transmise par la surface de contact. Le frottement par conséquent est nul.

III.4- TYPES DE CONTACT

III.4.1- Contact sans frottement

Le contact sans frottement (problème de Hertz) est un contact de deux corps élastiques pour des domaines semi-infinis entrant en contact au voisinage des points elliptiques de leur surface respective. Dans ce cas traité par Hertz, les surfaces sont développables au second ordre au voisinage du point de contact initial, et donc le problème se caractérise par le calcul des rayons de courbure et de constantes élastiques équivalentes au problème d'un poinçon rigide sur un massif infini. Cette schématisation est importante pour les contacts où les dimensions de l'aire de contact sont petites devant les caractéristiques dimensionnelles de chacun des corps, "cas d'un élément roulant sur un chemin de roulement". Le respect de la condition de cisaillement nul dans cette zone de contact est justifié avec plus ou moins de rigueur par :

- des considérations micro-géométriques,
- des conditions géométrique telles que symétrie ou corps identiques,
- des considérations physico-chimiques telles que contact parfaitement lubrifié.

III.4.2- Contact avec frottement

La résolution du problème de contact avec frottement suppose l'écriture d'une condition aux limites géométrique dans la zone de contact, et le cisaillement non nul dans cette même zone, car la plupart des contacts réels entre solides transmettent entre eux des efforts tangentiels, ou parce qu'il opposent une résistance à tout glissement.

La prise en compte de ces réactions surfaciques se fait par la formulation d'une loi de frottement.

III.4.2.1- Loi de frottement (Loi de Coulomb)

La loi de Coulomb, est la loi de frottement la plus utilisée car elle est plus facile à exprimer dans la zone de contact. Avec cette loi les contraintes tangentielles sont dans tout le contact proportionnelles aux contraintes normales.

III.5.1- Le contact Hertzien

Considérons un contact de deux poinçons rigides, une charge s'exerce sur les deux solides, les compriment et fait apparaître une aire de compression au lieu d'un point (voir Figure III.2). Deux points A_1 et A_2 sont placés sur une verticale commune avant l'établissement de la charge entre les deux corps en contact, restent sur une même verticale après chargement si on considère que les déplacements u et v sont négligeables devant les coordonnées (x,y) des points A_1 et A_2 .

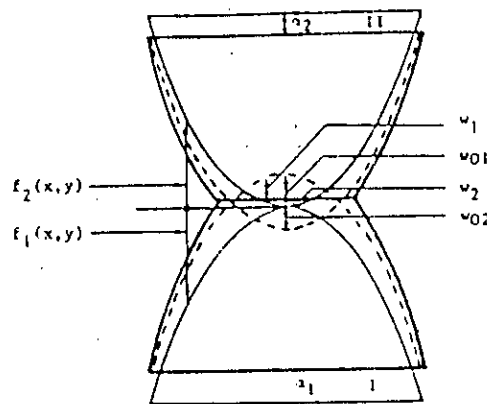


Figure III.2 : Contact Hertzien entre deux corps.

Cette considération [8], [9] nous donne un contact entre deux paraboloides d'équations : z_1 , z_2

avec :

$$z_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{R_1} + \frac{y_1^2}{R_2} \right) \quad (III.1)$$

$$z_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x_2^2}{R_1} + \frac{y_2^2}{R_2} \right)$$

La distance z^* entre A_1 et A_2 s'écrit en définitive :

$$z^* = z_1 + z_2 + w_1 + w_2 - (\alpha_1 + \alpha_2) \quad (III.2)$$

avec:

- $z_1 + z_2$: est la distance entre les points A_1 et A_2 après chargement,
- $\alpha_1 + \alpha_2$: est le déplacement des deux corps,
- $w_1 + w_2$: est le déplacement de A_1 et A_2 à l'intérieur de chaque corps.

➤ Dans l'aire de contact, nous avons $z = 0$

Donc :

$$w_1 + w_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - (z_1 + z_2)$$

ou encore:

$$w = \alpha - z(x, y) \quad (\text{III.3})$$

En dehors de l'aire de contact, nous avons $w > \alpha - z(x, y)$, avec w solution du problème de Boussinesq dans le plan $z = 0$ pour des sollicitations purement normales.

L'enfoncement des deux surfaces, est donc donné par:

$$w(x, y) = \left[\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right] \int_D \frac{P(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}} \quad (\text{III.4})$$

➤ Au centre de l'aire de contact $z(x, y) = 0$

Donc:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = w_1 + w_2 \quad (\text{III.5})$$

$$w(x, y) = \left[\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right] \int_D \frac{P(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \quad (\text{III.6})$$

Notons que la contribution du point (x_1, y_1) à l'enfoncement du point (x, y) est proportionnelle à $p(x_1, y_1)$, la proportionnalité ne dépend que de l'écart de position entre les deux solides.

III.6- PROBLEME DE BOUSSINESQ

III.6.1- INTRODUCTION

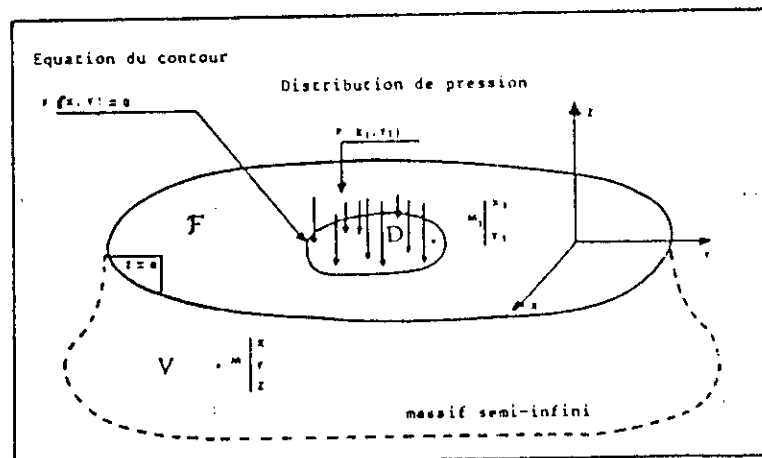
La résolution d'un problème de contact sur un massif semi-infini passe par la connaissance de l'état élastique du massif soumis à un champ de contrainte normale ou tangentielle. Le calcul des contraintes et des déplacements qui résultent d'un champ de pression qui s'exerce sur sa frontière est connu sous le nom de problème de Boussinesq. Ce dernier présente directement une solution donnant la réponse élastique aux sollicitations en contraintes, à partir de potentiels connus (le potentiel newtonien, le potentiel logarithmique et le second logarithmique) [8].

Dans ce qui va suivre nous proposons une solution issue des déplacements (II.20) qui vérifie les équations de Lamé pour le cas de sollicitations normales.

III.6.2- Cas de champ de pression purement normale

III.6.2.1- Position du problème

Nous dénommerons par F le plan $z=0$, D le domaine de sollicitation et V le massif semi-infini (voir Figure.III.3.).



- **Figure III.3** - Pressions normales sur un massif semi-infini

Le problème mécanique se définit à partir des conditions aux limites suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_z = -P(x_1, y_1) & \text{à l'intérieur de la zone de contact } D \\ \sigma_z = 0 & \text{à l'extérieur de la zone de contact } (F-D) \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 & \text{sur } F \text{ (plan } z = 0) \\ u, v, w \rightarrow \frac{k}{r} & \text{lorsque } (x, y, z) \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (\text{III.7})$$

La solution du problème de Boussinesq peut se construire directement à partir des potentiels newtoniens et logarithmiques. Néanmoins ici, nous en partant de la solution des équations de Lamé.

Revenons donc au modèle mathématique que nous avons défini. Nous avons écrit une solution des équations de Lamé, fonction de grandeurs explicitées sur un massif élastique, à partir des équations (II.20).

Nous avons donc à expliciter la fonction harmonique G et les constantes A et B intervenant dans la solution des équations de Lamé.

Des conditions : $\sigma_z = -P(x_1, y_1)$, sur D
et : $\sigma_z = 0$, sur $(F-D)$

nous déduisons la relation:

$$\frac{\partial G}{\partial z} = - \left[\frac{2\mu(\lambda + 2\mu)A}{\lambda + \mu} - 2\mu B \right]^{-1} f(x_1, y_1) = -2\pi f(x_1, y_1) \quad (\text{III.8})$$

avec :

$$\frac{2\mu(\lambda + 2\mu)A}{\lambda + \mu} - 2\mu B = -\frac{1}{2\pi} \quad (\text{III.9})$$

et : $f(x_1, y_1) = P(x_1, y_1)$, sur D et : $f(x_1, y_1) = 0$, sur $(F-D)$.

Des relations : $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, sur F , nous avons déjà déduit (II.22) une relation entre A et B :

$$B = \frac{\mu A}{\lambda + \mu} \quad (\text{III.10})$$

Nous déduisons alors que G est la solution du système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \Delta G = 0, & \text{sur } V \\ \frac{\partial G}{\partial z} = f(x_1, y_1), & \text{sur } F \\ G \rightarrow \frac{F}{r}, & \text{lorsque } r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

En sachant que G s'identifie au potentiel newtonien [8], lorsque nous avons affaire à un massif semi-infini :

$$G = \Phi = \int_D \frac{P(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{r} \quad (\text{III.12})$$

D'autre part H est une primitive de G ou encore du potentiel ϕ par rapport à la variable z :

$$G = \phi = \frac{\partial H}{\partial z} \quad (\text{III.13})$$

d'où :

$$H = \Psi = \int_D \text{Log}(z+r) P(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (\text{III.14})$$

ψ est la primitive de ϕ par rapport à z , elle est appelée potentiel logarithmique.

En remplaçant G et H dans les équations (II.20) respectivement par les potentiels ψ et ϕ définis en (III.12) et (III.14), nous écrivons une solution du problème de Boussinesq:

$$\begin{cases} u = -\frac{z}{4\pi\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ v = -\frac{z}{4\pi\mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ w = -\frac{z}{4\pi\mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)} \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

III.6.2.2- Explication des contraintes et des déplacements

Les déplacements et les contraintes s'écrivent donc à partir de fonctions intégrales qui s'explicitent à partir de G et de H et de leurs dérivées.

En posant $dm = P(x_1, y_1) dx_1 dy_1$, nous avons en définitive,

pour les déplacements :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{4\pi\mu} \int_D \frac{z(x-x_1)dm}{r^3} - \frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)} \int_D \frac{(x-x_1)dm}{r(z+r)} \\ v = \frac{1}{4\pi\mu} \int_D \frac{z(y-y_1)dm}{r^3} - \frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)} \int_D \frac{(y-y_1)dm}{r(z+r)} \\ w = \frac{1}{4\pi\mu} \int_D \frac{z^2}{r^3} dm + \frac{\lambda+2\mu}{4\pi\mu(\lambda+\mu)} \int_D \frac{dm}{r} \end{array} \right. \quad (\text{III.16})$$

et pour les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{-\lambda}{2\pi(\lambda+\mu)} \int_D \frac{zdm}{r^3} - \frac{z}{2\pi} \int_D \frac{-r^2 + 3(x-x_1)^2}{r^5} dm - \\ \frac{\mu}{2\pi(\lambda+\mu)} \int_D \frac{r^2(z+r) - (x-x_1)^2(z+2r)dm}{r^3(z+r)^2} \\ \sigma_y = \frac{-\lambda}{2\pi(\lambda+\mu)} \int_D \frac{zdm}{r^3} - \frac{z}{2\pi} \int_D \frac{-r^2 + 3(y-y_1)^2}{r^5} dm - \\ \frac{\mu}{2\pi(\lambda+\mu)} \int_D \frac{r^2(z+r) - (y-y_1)^2(z+2r)dm}{r^3(z+r)^2} \\ \sigma_z = \frac{-1}{2\pi} \int_D \frac{3z^3}{r^5} dm \\ \tau_{xy} = \frac{-z}{2\pi} \int_D \frac{3(x-x_1)(y-y_1)dm}{r^5} + \frac{\mu}{2\pi(\lambda+\mu)} \int_D \frac{(x-x_1)(y-y_1)(z+2r)dm}{r^3(z+r)^2} \\ \tau_{xz} = \frac{-z}{2\pi} \int_D \frac{3(x-x_1)zdm}{r^5} \\ \tau_{yz} = \frac{-z}{2\pi} \int_D \frac{3(y-y_1)zdm}{r^5} \end{array} \right. \quad (\text{III.17})$$

III.7- METHODES DE RESOLUTION DU CONTACT

III.7.1- Introduction

Pour la résolution du problème de contact, il existe deux démarches que nous dénommerons, méthode inverse et méthode directe, termes qui ont déjà été utilisés par VILLECHAISE[5] et SOLOMON[1] pour définir deux étapes de la résolution des problèmes d'élasticité.

III.7.2- Méthode directe

Nous avons à résoudre les équations différentielles de base de l'élasticité (équations de Lamé), pour cela il nous faudra écrire des conditions aux limites mixtes (partant des relations qui explicitent le problème de contact), afin d'établir une solution physique des équations de Lamé. Les paramètres inconnus du contact sont ainsi une partie des résultats de cette démarche.

Nous faisons intervenir ici les conditions aux limites exprimées sur toute la frontière du massif semi-infini. Soulignons que la résolution du problème direct à partir des équations de Lamé s'avère très difficile, car on aboutit à une solution seulement pour des cas bien précis. Cependant, par manque de travaux sur cette manière d'aborder la résolution des problèmes de contact, on revient le plus souvent à une certaine étape de calcul, au problème inverse.

III.7.3- Méthode inverse

Nous partons de la solution de Boussinesq qui décrit l'état élastique d'un massif semi-infini, soumis à un champ de pression. Nous formulons une équation intégrale à partir des relations qui explicitent le problème du contact. La résolution de cette équation intégrale nous permet de retrouver les paramètres inconnus du contact, qui dans cette démarche sont les préoccupations principales. Nous redéfinissons au fait les données du problème de Boussinesq. Les corps en contact sont alors modélisés comme des massifs semi-infinis. Nous nous intéressons à une équation définie uniquement dans l'aire de contact.

Cette démarche a fait l'objet de nombreux travaux [5], [6], [8], [11], qui permettent aujourd'hui de cerner d'une façon relativement complète le problème du contact élastique normal. Notons que même les problèmes de contact avec frottement ont pu être cernés avec une efficacité satisfaisante.[5], [6]. En ce qui nous concerne, nous avons opté pour cette méthode, où nous avons considéré que les paramètres de contact (pression et aire de contact) sont connus, car notre but est le calcul du champ de contrainte à partir des équations intégrales de Boussinesq qui sont explicitées pour un massif semi-infini.

III.8-CONCLUSION

La mise en oeuvre d'outils mathématiques pouvant résoudre les problèmes de contact normal est une tâche très difficile .

Mais, notons que l'utilisation de la méthode inverse permet de modéliser de nombreuses configurations d'une manière assez.

Connaissant le champ de pression et l'aire de contact nous pouvons calculer la distribution de contraintes dans un massif semi-infini à partir de la formulation de Boussinesq[11].

CHAPITRE IV

PRESENTATION DE LA METHODE DE KALKER

IV.1- INTRODUCTION

Dans un contact, la connaissance de l'aire de contact et du champ de pression réelle en surface ne suffit pas; il faut connaître les phénomènes se produisant en profondeur dans un massif.

C'est pourquoi nous avons mis en place un modèle de calcul des contraintes dus à un champ de pressions normales en surface, en se basant sur les travaux de J.J. Kalker [11].

IV.2- PRINCIPALES HYPOTHESES

- On considère un massif semi-infini, les dimensions de l'aire de contact sont petites en comparaison des rayons de courbure des corps.
- Les corps en contact sont parfaitement élastiques, isotropes et homogènes.
- Les déformations restent petites.

IV.3- METHODE DE KALKER

On part des équations de Boussinesq satisfaisant aux équations de Lamé et aux conditions aux limites à la surface du solide élastique semi-infini.

Kalker [11] a exprimé le champ de déplacement dans chaque point du massif dû à un rectangle de pressions normales constantes, appliqués en surface, sous forme d'intégrales (IV.1)

$$v_{1mm} = \left(\frac{1}{4 \pi E} \right) \iint \left\{ \frac{1}{W} + \frac{y_m^2}{W^3} + (1-2\nu) \left[\frac{1}{(z+W)} - \frac{y_m^2}{W(z+W)^2} \right] \right\} dA$$

$$v_{1mm'} = v_{1m'm} = \left(\frac{1}{4 \pi E} \right) \iint \left\{ \frac{y_1 y_2}{W^3} - (1-2\nu) \frac{y_1 y_2}{W(z+W)^2} \right\} dA$$

$$v_{1m3} = \left(\frac{1}{4 \pi E} \right) \iint \left\{ -\frac{y_m z}{W^3} - (1-2\nu) \frac{y_m}{W(z+W)} \right\} dA \quad (IV.1)$$

$$v_{13m} = \left(\frac{1}{4 \pi E} \right) \iint \left\{ -\frac{y_m z}{W^3} + (1-2\nu) \frac{y_m}{W(z+W)} \right\} dA$$

$$v_{133} = \left(\frac{1}{4 \pi E} \right) \iint \left\{ \frac{z^2}{W^3} + \frac{2(1-\nu)}{W} \right\} dA$$

Avec $m = 1, 2$, $m' = 3-m$
et

$$W = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \quad (IV.2)$$

$$y_1 = x_{11} - x_1 ; \quad y_2 = x_{12} - x_2 ; \quad y_3 = z$$

Le problème global est résolu en discrétisant la région d'application de la charge normale en une union finie de rectangles distincts (exposé au paragraphe § IV.4).

La tension de surface est discrétisée en la prenant constante sur chaque rectangle.

Les déplacements et les contraintes en un point arbitraire du demi-espace dû à la charge discrétisée, sont déterminés par la sommation des contributions de chaque charge élémentaire sur ce point.

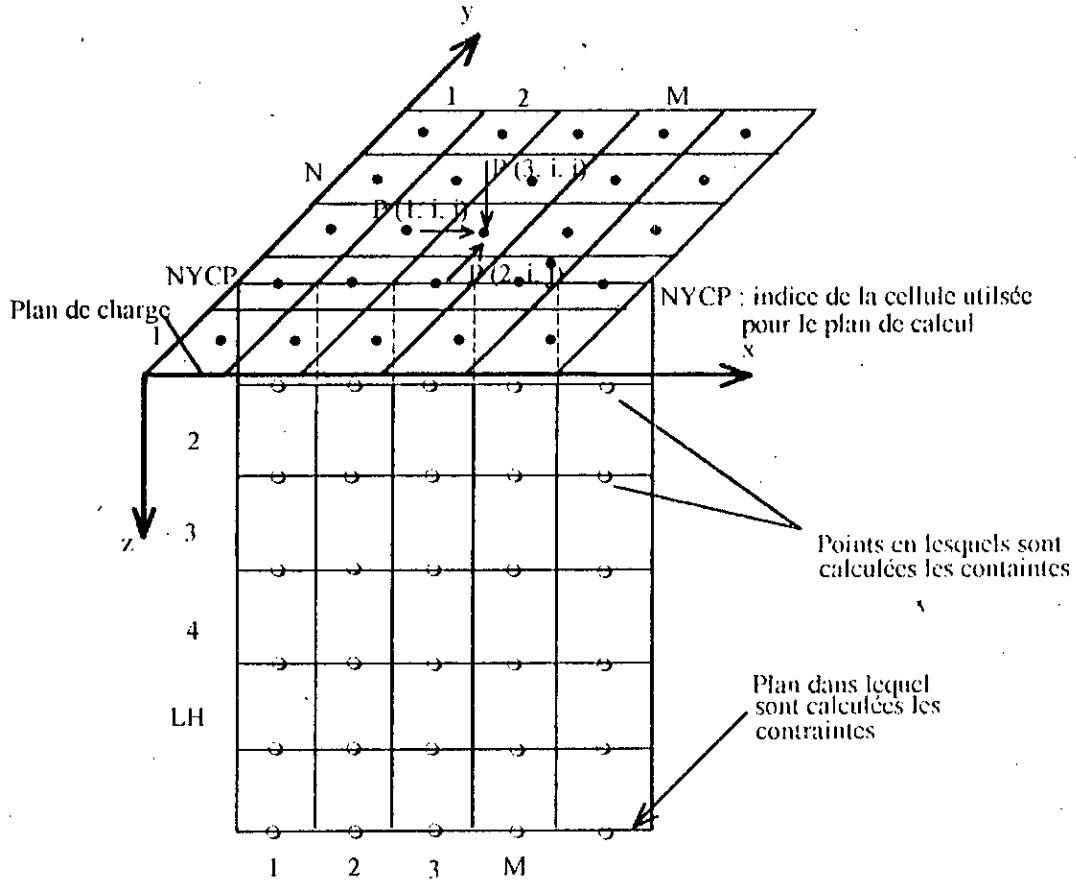
IV.4- MAILLAGE

Le contact est discrétisé en cellules rectangulaires dont le centre en sera représentatif (Voir figure IV.1).

De plus nous considérons que toutes les grandeurs utiles à la résolution du problème, pression, déplacement, sont constantes sur chaque cellule.

La discrétisation en rectangles de l'aire potentielle de contact et l'approximation de la pression par une constante sur chaque élément rendent possible l'intégration analytique des relations de Boussinesq. Il résulte de ce calcul une dépendance linéaire entre les déplacements et les pressions.

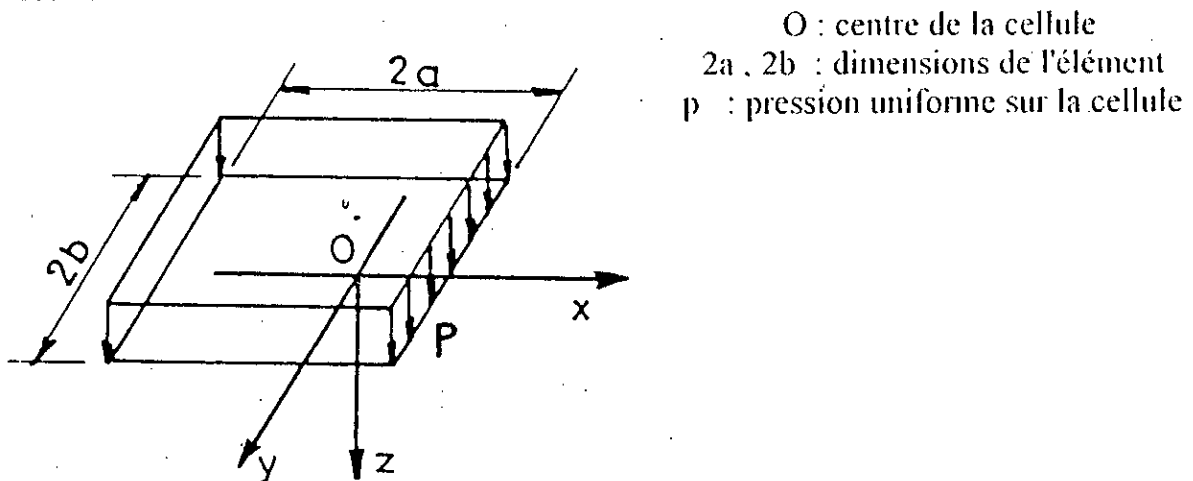
On discrétise aussi la profondeur en niveaux avec un pas donné. Et pour le calcul des contraintes, on choisit une ordonnée y dont le plan suivant x et z sera le plan où seront calculé et tracé les iso-contraintes.



- Figure IV.2 - Schéma du maillage.

⊗ **Détail d'une cellule:**

Considérons un élément de la surface discrétisée comme indiqué sur la figure ci-dessous :



- Figure IV.2 - Détail de la cellule de référence

IV.5- CALCUL DES DEPLACEMENTS ET CONTRAINTES

Le calcul du tenseur des contraintes s'effectue à partir de loi de Hooke

$$\sigma_{ij} = 2E \varepsilon_{ij} + \frac{2\nu E}{1-2\nu} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii} \delta_{ij} \quad (IV.3)$$

Avec
$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{si non} \end{cases}$$

E: module de Young

ν : coefficient de Poisson

Le tenseur des déformations ε_{ij} est donné par:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (IV.4)$$

$u_{i,j}$ et $u_{j,i}$ sont respectivement les gradients de déplacement et leurs transposées

$u_{i,j}$ est donné par:

$$u_{i,j} = \sum_{l=1}^3 v_{lki,j} p_{lk} \quad (IV.5)$$

Avec p_{lk} les pressions sur chaque cellule l appliques sur la surface de contact.

Et $v_{lki,j}$ le déplacement élémentaire d'un point arbitraire dans le massif semi-infini dû aux pressions appliqués sur chaque rectangle en surface. Ces déplacements élémentaires sont calculés à partir de (1) grâce à la concaténation finie d'opérations élémentaires qui sont développés dans le programme de calcul.

IV.6.- CALCUL DU CHAMP D'ISO-CONTRAINTES

Disposant du tenseur de contraintes en tout point du massif, nous calculons une contrainte équivalente pour chaque point. A partir de toutes ces valeurs des contraintes équivalentes nous allons tracer les iso-contraintes qui vont nous donner le champ de contraintes dans un massif semi-infini soumis à un chargement normal.

Cependant, pour le calcul de cette contrainte équivalente en chaque point, il faut choisir un critère de calcul.

En faisant une recherche bibliographique [1], [2], [6], [11], nous avons constaté que la contrainte équivalente la plus utilisée est celle de la contrainte de cisaillement maximum τ_{\max} , grandeur souvent utilisée dans les critères d'endommagement des surfaces. ce dernier est dénommé critère de Von-Mises.

critère d'En dommageement

La contrainte τ_{\max} y est définie par ϵ

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(s_1 - s_2) \quad \text{fresky} \quad (IV.6)$$

où s_1 et s_2 sont les contraintes principales maximum et minimum, racine de l'équation cubique:

$$s^3 + s_I s^2 + s_{II} s + s_{III} = 0 \quad (IV.7)$$

où s_I, s_{II}, s_{III} sont des invariants du tenseur des contraintes

$$\begin{aligned} s_I &= -(\bar{s}_x + \bar{s}_y + \bar{s}_z) \\ s_{II} &= \bar{s}_y \bar{s}_z + \bar{s}_x \bar{s}_z + \bar{s}_x \bar{s}_y + \tau_{yz}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2 \\ s_{III} &= -\bar{s}_x \bar{s}_y \bar{s}_z - 2\tau_{yz} \tau_{xy} \tau_{xz} + \bar{s}_x \tau_{xy}^2 + \bar{s}_y \tau_{xy}^2 \end{aligned} \quad (IV.8)$$

IL existe de nombreux critères d'endommagement utilisant des grandeurs physiques construit à partir du tenseur des contraintes. Dans le cadre de ce travail, nous limiterons au calcul de τ_{\max} , en chaque point du maillage.

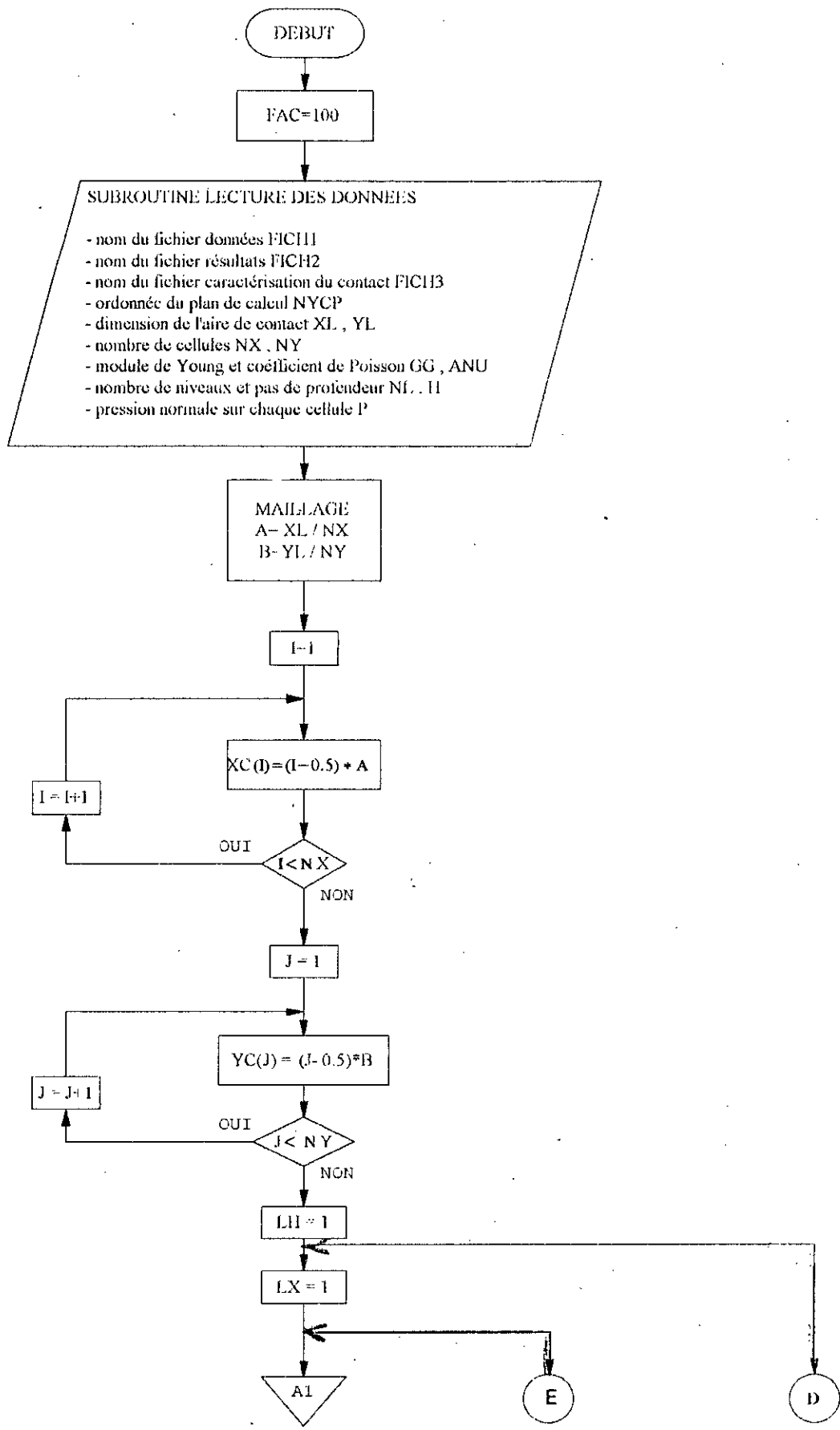
IV.7- VALIDATION

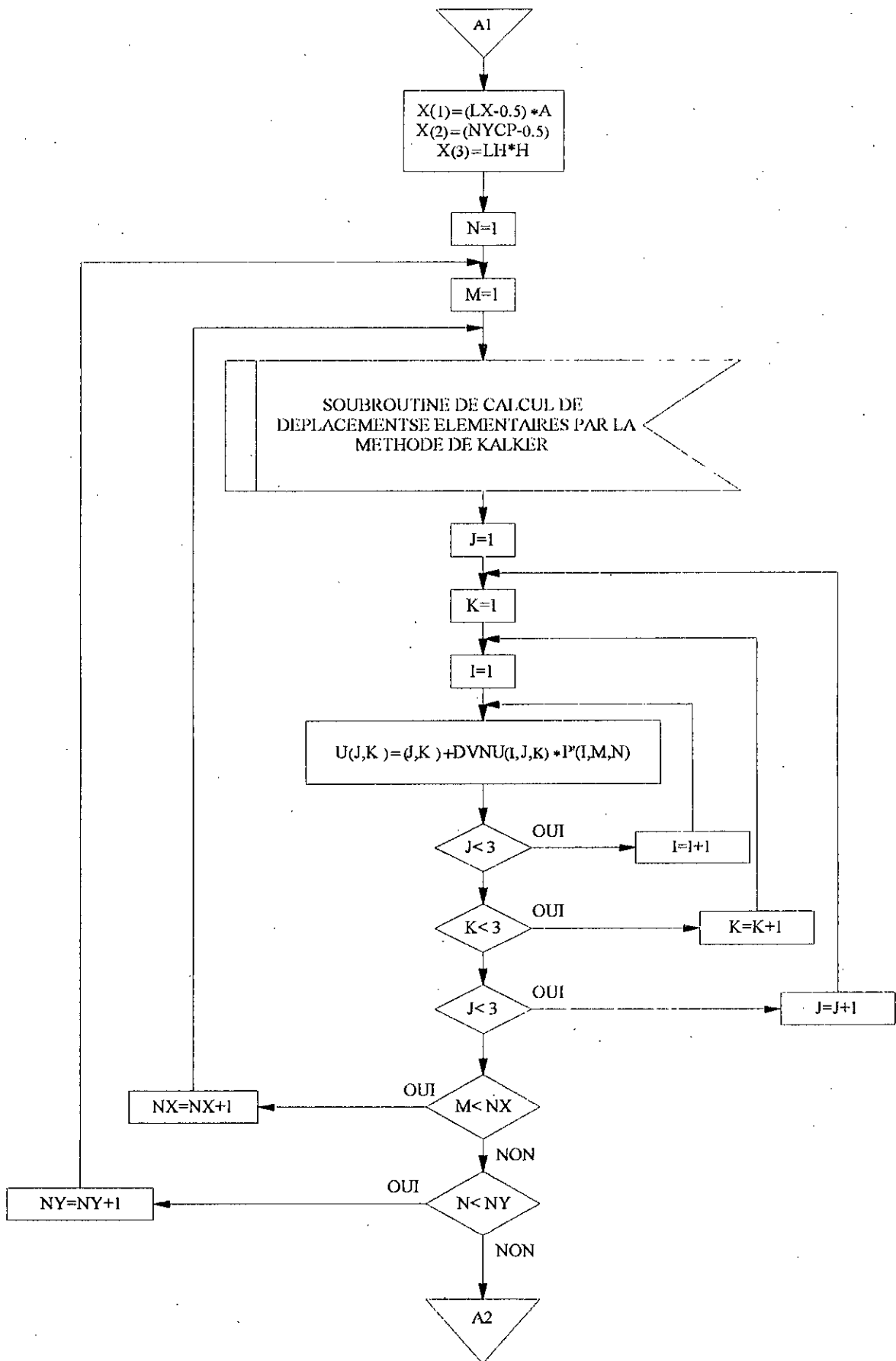
Dans le cas d'un contact hertzien (bille/plan) nous avons comparé nos résultats numériques à des résultats obtenus par Vergne[7] et Kalker[11].

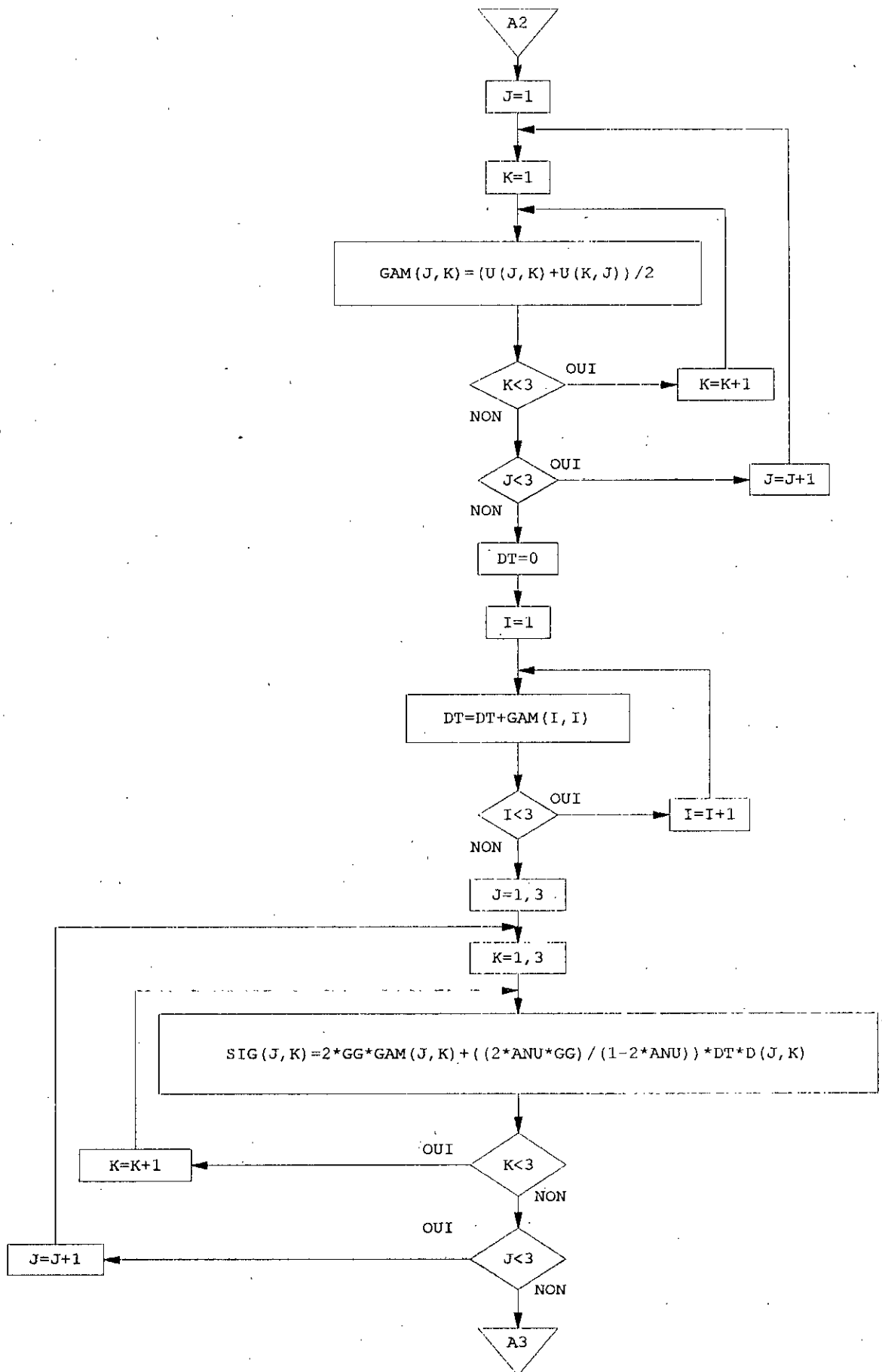
Même avec un maillage grossier (nombre de cellules entre 100 et 400) l'erreur du modèle numérique ne dépasse pas les 10%.

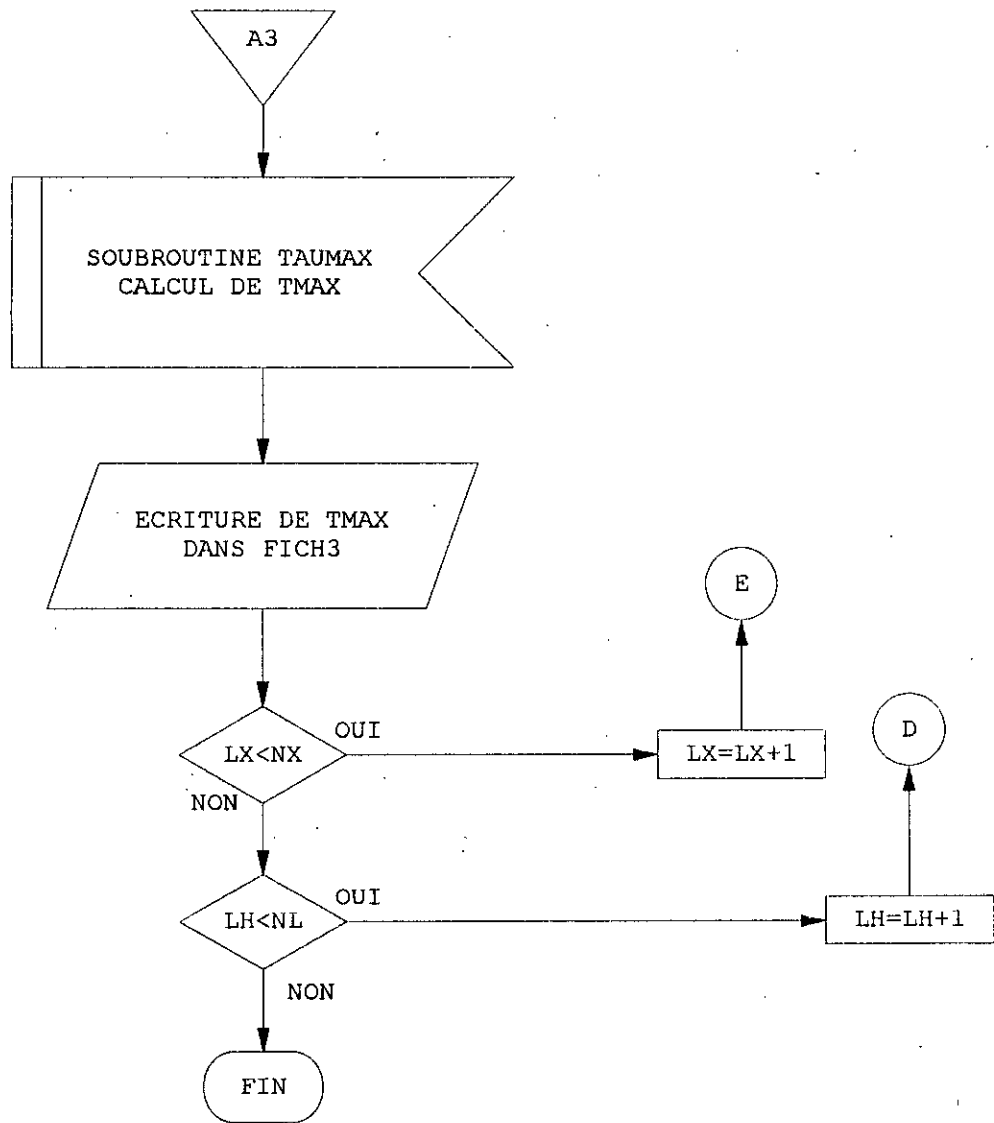
IV.8- ORGANIGRAMME

Nous allons maintenant montrer les démarches nécessaires pour la compréhension du programme, sous forme d'un organigramme avec l'explicitation de toutes les étapes nécessaires à l'exécution du programme.









CHAPITRE V

RESULTATS ET INTERPRETATIONS

V.1- INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous allons tester la validité de notre programme qui calcule le champ de contraintes dans un massif semi-infini soumis à un chargement normal.

Pour cela, on devra l'exécuter pour différentes cas de chargements, en essayant de varier à chaque fois une des données du problème considéré, soit :

- Le maillage : nombre de cellules NX , NY ,
- le nombre de niveaux de profondeurs NL ,
- l'ordonnée du plan de calcul des contraintes $NYCP$.

Enfin nous commenterons tous ces résultats en les comparant avec des travaux qui y ont été faits dans le même domaine.

Remarque : Pour faciliter l'interprétation des résultats et limiter le nombre de variables utilisées, nous avons préféré garder les valeurs du module de Young E et du coefficients de Poisson ν constantes et égales respectivement à $2E+12$ Pa et 0.3 .

V.2- RESULTATS

Nous allons maintenant exécuter quelques exemples pour mieux comprendre la procédure de calculs des contraintes.

Remarque : Le logiciel avec lequel nous avons tracé les courbes des iso-contraintes ne permet d'avoir la surface de contact vers le haut. Donc, toutes les figurés que nous obtenons ont la surface de contact qui se situe en bas celles-ci.

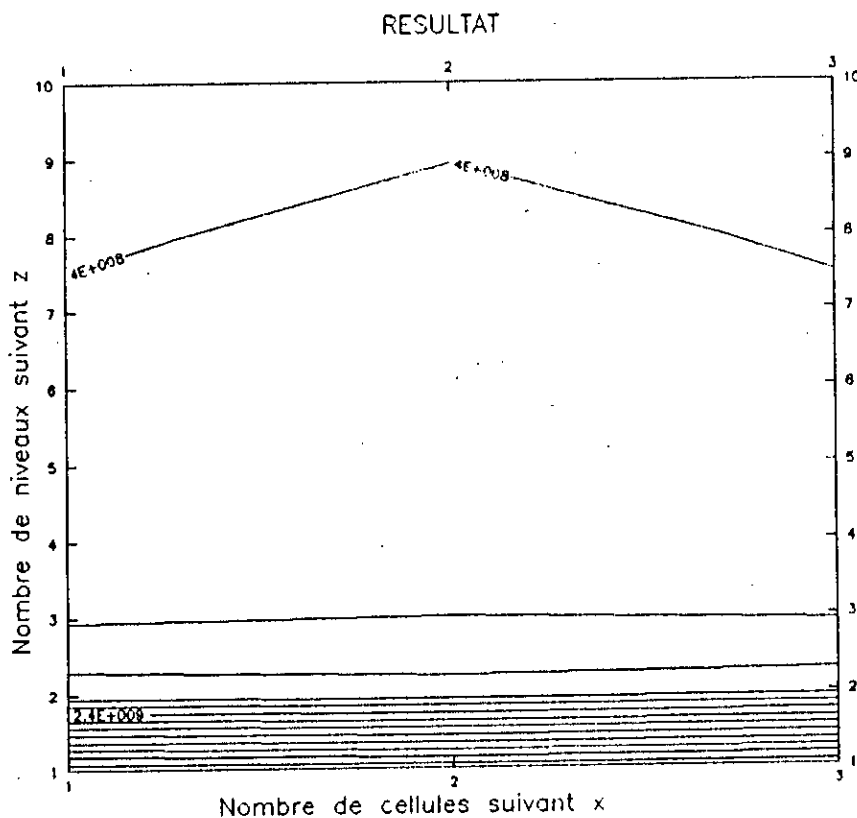
Type de contact:

CONTACT HERTZIEN (BILLE/PLAN) (3×3)

Données :

- Pression de contact : $P = 2E+09$ Pa
- Longueur de la surface de contact en x : $LX = .50E-03$ m
- Longueur de la surface de contact en y : $LY = .50E-03$ m
- Nombre de cellules en x : $NX = 3$
- Nombre de cellules en y : $NY = 3$
- Nombre de niveaux de profondeur : $NL = 10$
- Pas de profondeur en z : $H = .5E-04$ m
- Ordonnée du plan de calcul $NYCP = 2$

Chargement : Pression constante



- Figure V.1 -

Contrainte maximale $5.52E+09$ Pa
Contrainte minimale $3.23E+09$ Pa

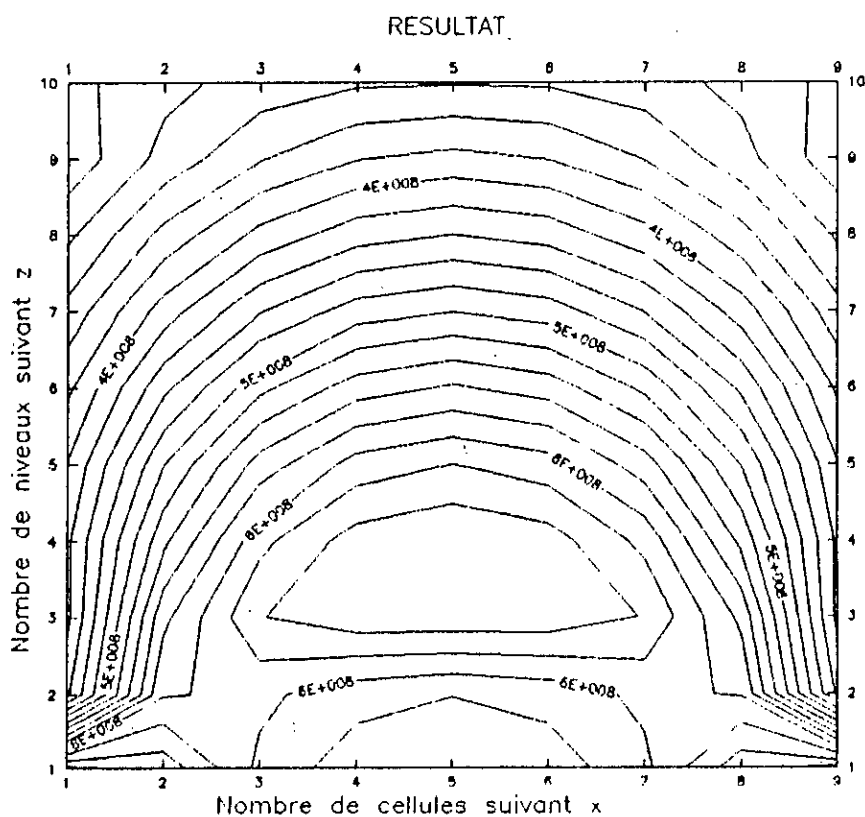
Type de contact:

CONTACT HERTZIEN (BILLE/PLAN) (9×9)

Données:

- Pression de contact : $P = 2E+09$ Pa
- Longueur de la surface de contact en x : $LX = .5E-03$ m
- Longueur de la surface de contact en y : $LY = .5E-03$ m
- Nombre de cellules en x : $NX = 9$
- Nombre de cellules en y : $NY = 9$
- Nombre de niveau de profondeur : $NL = 10$
- Pas de profondeur en z : $H = .5E-04$ m
- Ordonnée du plan de calcul $NYCP = 5$

Chargement : *Pression constante*



- Figure V.2. -

- Contrainte maximale $6.64E+08$ Pa
- Contrainte minimale $2.86E+08$ Pa

Type de contact :

CONTACT HERTZIEN (BILLE/PLAN) (15×15)

Données :

- Pression de contact $P = 2E+09$ Pa
- Longueur de la surface de contact en x : $LX = .5E-03$ m
- Longueur de la surface de contact en y : $LY = .5E-03$ m
- Nombre de cellules en x : $NX = 15$
- Nombre de cellules en y : $NY = 15$
- Nombre de niveaux de profondeur : $NL = 10$
- Pas de profondeur en z : $H = .5E-04$ m
- Ordonnée du plan de calcul : $NYCP = 8$

Chargement : Pression constante

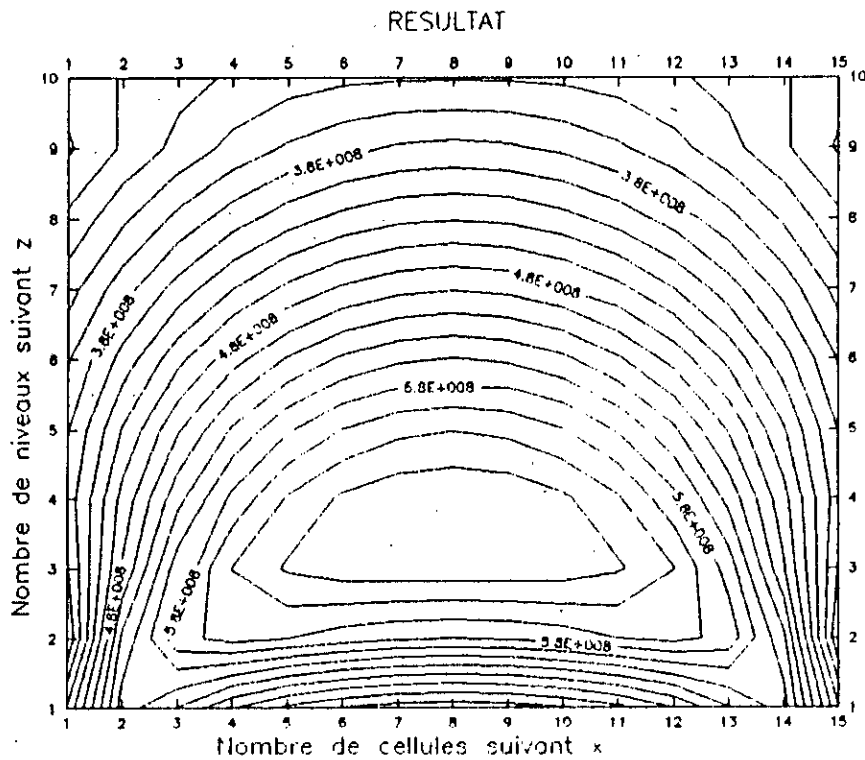


Figure V.3

Contrainte maximale 2.77E+08

Contrainte minimale 6.57E+08

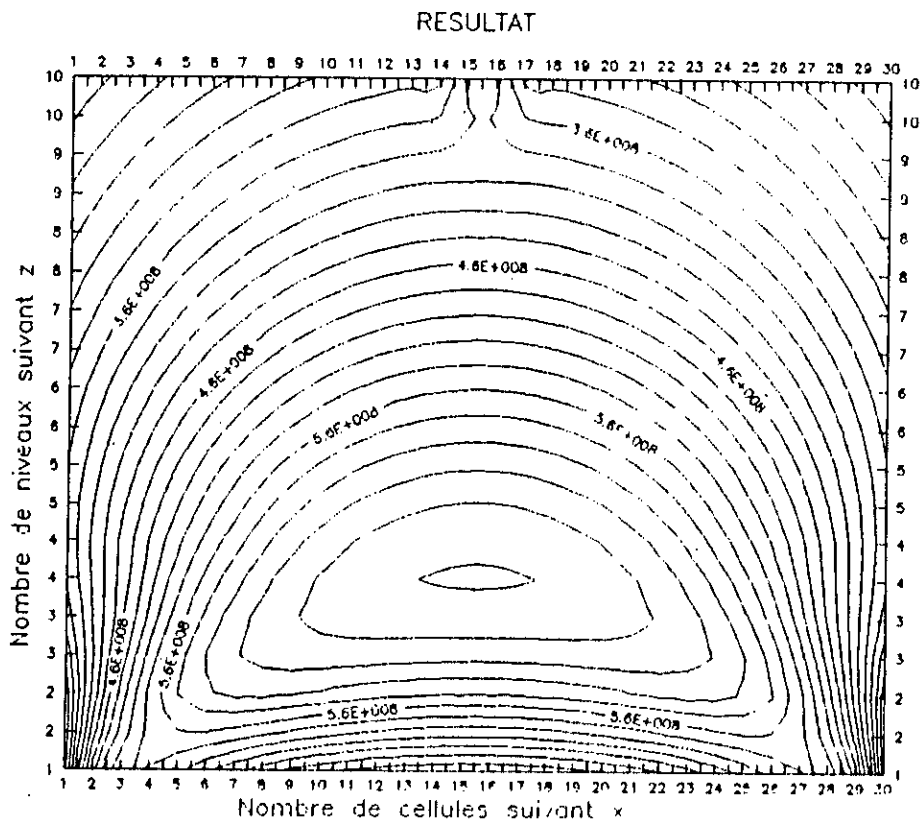
Type de contact :

CONTACT HERTZIEN (BILLE/PLAN) (30×30)

Données :

- Pression de contact : $P=2E+09$ Pa
- Longueur de la surface de contact en x : $LX=.5E-03$ m
- Longueur de la surface de contact en y: $LY = .5E-03$ m
- Nombre de cellules en x : $NX = 30$
- Nombre de cellules en y : $NY = 30$
- Nombre de niveaux de profondeur $NL = 10$
- Pas de profondeur en z : $H =.5E-04$ m
- Ordonnée du plan de calcul $NYCP = 16$

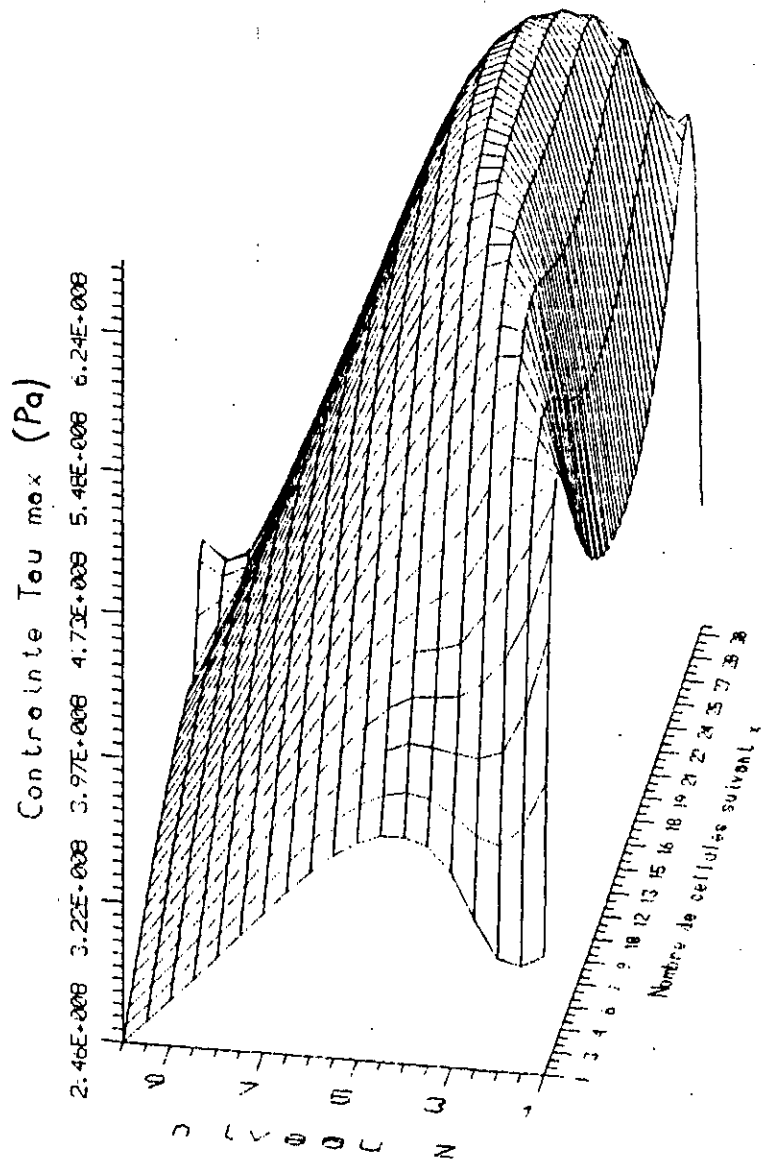
Chargement: *Pression constante*



- Figure V.4 -

Contrainte maximale 6.46E+08 Pa
Contrainte minimale 2.62E+08 Pa

*Représentation du champ de Contraintes en 3D
pour un contact Hertzien de maillage(30×30)*



- Figure V.5 -

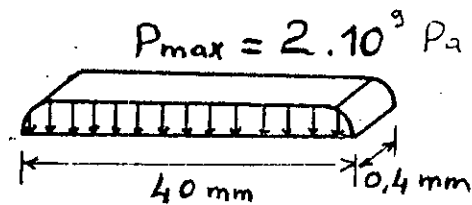
Type de contact :

CONTACT RECTANGULAIRE (7×7)

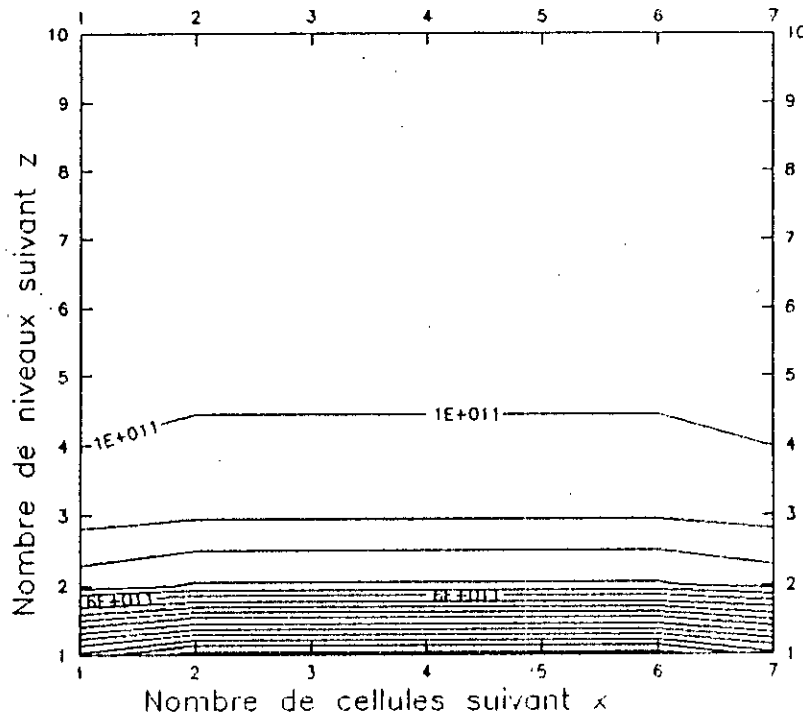
Données :

- Pression de contact : $P = 2E+09 \text{ Pa}$
- Longueur de la surface de contact en x : $LX = .4E-01 \text{ m}$
- Longueur de la surface de contact en y : $LY = .4-03 \text{ m}$
- Nombre de cellules en x : $NX = 7$
- Nombre de cellules en y : $NY = 7$
- Nombre de niveaux de profondeur : $NL = 10$
- Pas de profondeur en z : $H = .1E-04$
- Ordonnée du plan de calcul : $NYCP = 4$

Chargement:



RESULTAT



- Figure V.6 -

Contrainte maximale $1.66E+12 \text{ Pa}$
Contrainte minimale $3.27E+10 \text{ Pa}$



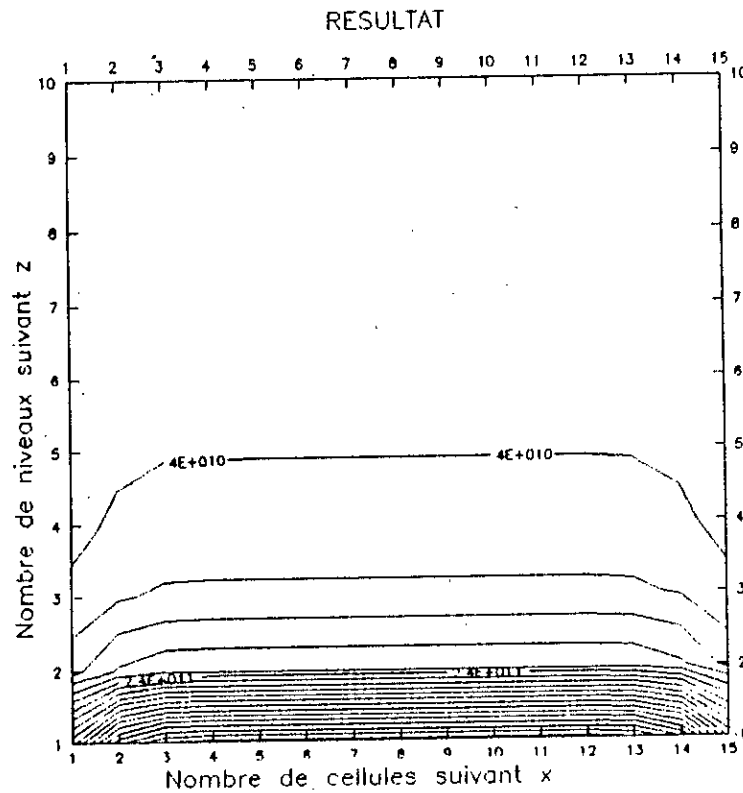
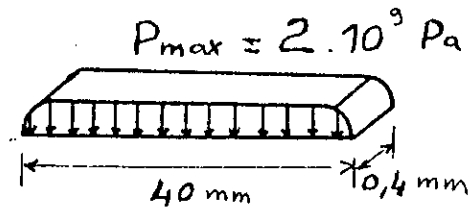
Type de contact :

CONTACT RECTANGULAIRE (15×7)

Données :

- Pression de contact : $P = 2E+09 \text{ Pa}$
- Longueur de la surface de contact en x : $LX = .4E-01 \text{ m}$
- Longueur de la surface de contact en y : $LY = .4E-03 \text{ m}$
- Nombre de cellules en x : $NX = 15$
- Nombre de cellules en y : $NY = 7$
- Nombre de niveaux de profondeur $NL = 10$
- Pas de profondeur en z : $H = .1E-04$
- Ordonnée du plan de calcul : $NYCP = 4$

Chargement :



- Figure V.7 -

Contrainte maximale $7.78E+11 \text{ Pa}$
Contrainte minimale $9.78E+09 \text{ Pa}$

Type de contact :

CONTACT RECTANGULAIRE (30×20)

Données:

Pression de contact $P = 2E+09$ Pa.

Longueur de la surface de contact en x : $LX = .4E-01$ m

Longueur de la surface de contact en y : $LY = .4E-03$ m

Nombre de cellules en x: $NX = 30$

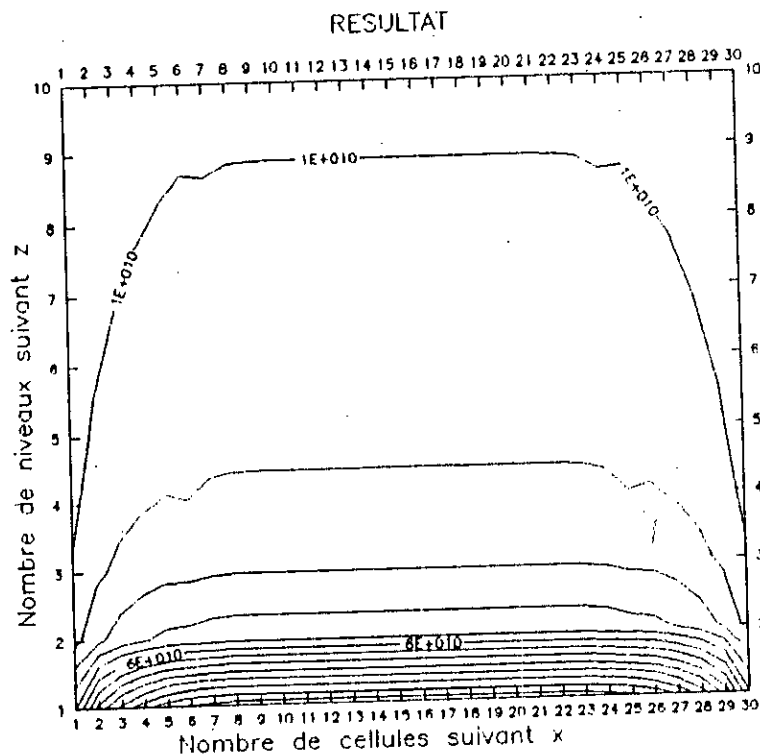
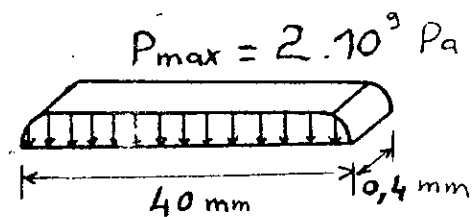
Nombre de cellules en y: $NY = 20$

Nombre de niveaux de profondeur $NL = 10$

Pas de profondeur en z: $H = .1E-04$

Ordonnée du plan de calcul $NYCP = 10$

Chargement :

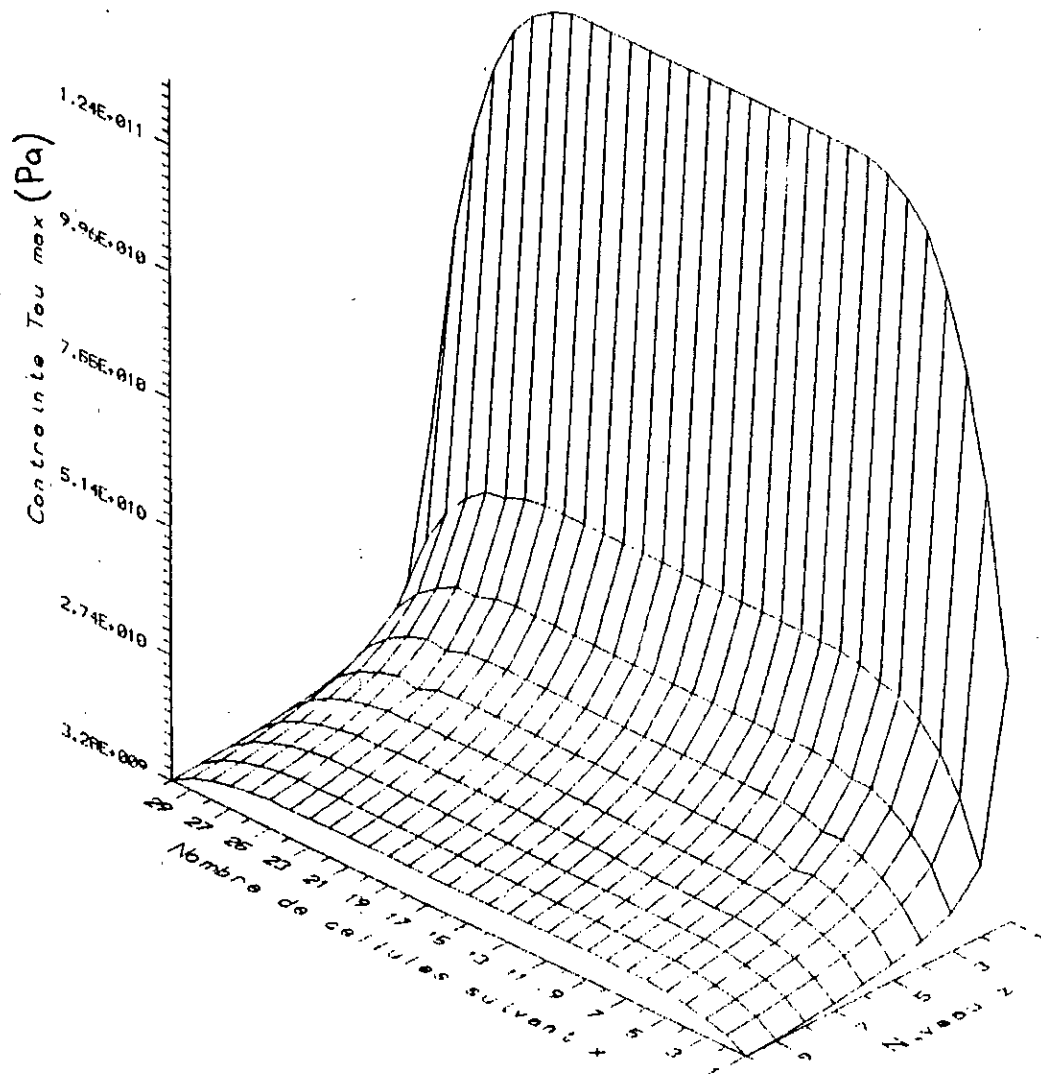


- Figure V.8 -

Contrainte maximale 1.36E+11

Contrainte minimale 3.28E+09

Représentation du champ de contrainte en 3D
pour un chargement rectangulaire de maillage (30 X 20)



- Figure V.9 -

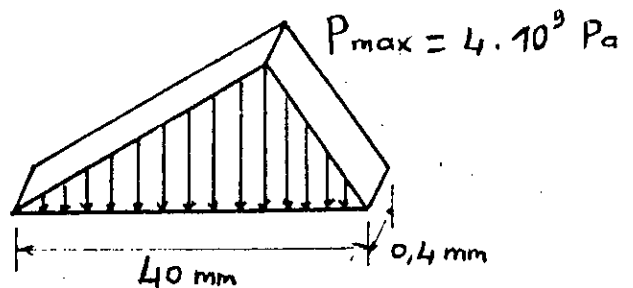
Type de contact :

CONTACT QUELCONQUE (10x5)

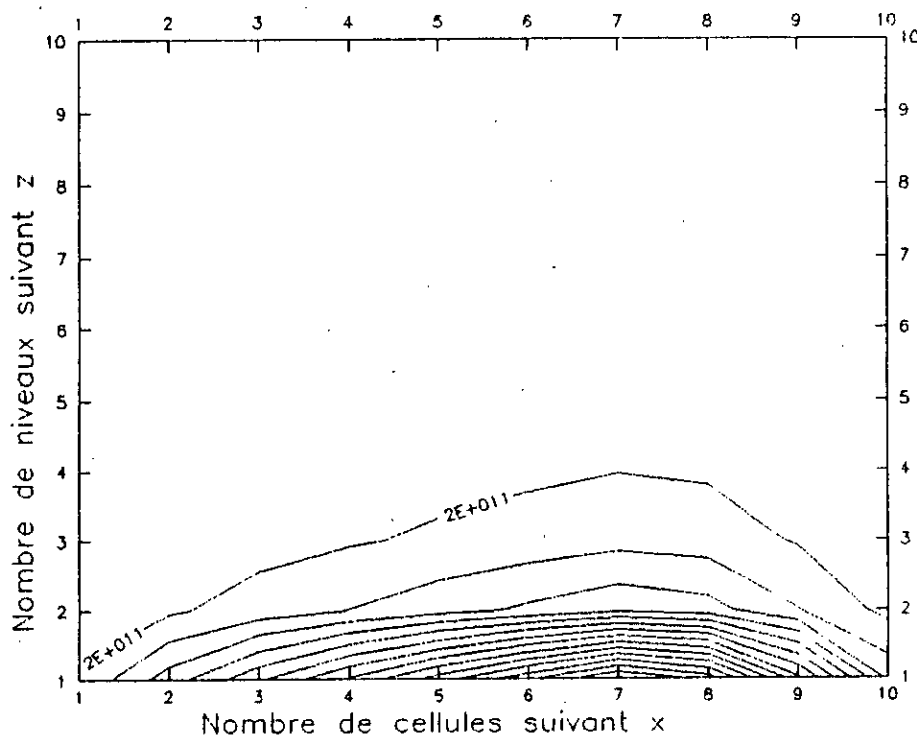
Données :

- Pression de contact $P = 4E+09 \text{ Pa}$
- Longueur de la surface de contact en x : $LX = .4E-01 \text{ m}$
- Longueur de la surface de contact en y : $LY = .4E-03 \text{ m}$
- Nombre de cellules en x : $NX = 10$
- Nombre de cellules en y : $NY = 5$
- Nombre de niveaux de profondeur $NL = 10$
- Pas de profondeur en z : $H = .1E-04 \text{ m}$
- Ordonnée du plan de calcul $NYCP = 3$

Chargement



RESULTAT



- Figure V.10 -

Contrainte maximale $3.02E+12 \text{ Pa}$
Contrainte minimale $3.84E+09 \text{ Pa}$

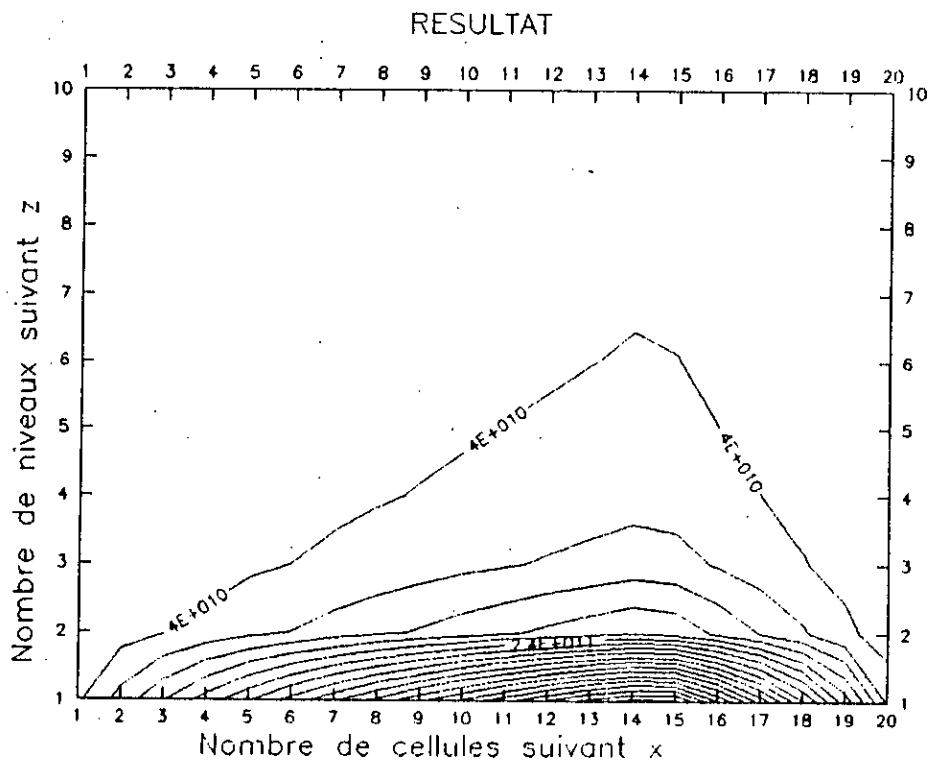
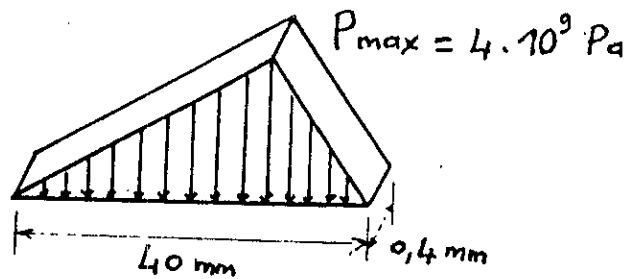
Type de contact :

CONTACT QUELCONQUE (20×10)

Données:

- Pression de contact $P = 4E+09 \text{ Pa}$
- Longueur de la surface de contact en x : $LX = .4E-01 \text{ m}$
- Longueur de la surface de contact en y: $LY = .4E-03 \text{ m}$
- Nombre de cellules en x: $NX = 20$
- Nombre de cellules en y: $NY = 10$
- Nombre de niveaux de profondeur $NL = 10$
- Pas de profondeur en z: $H = .1E-04 \text{ m}$
- Ordonnée du plan de calcul $NYCP = 5$

Chargement :



- Figure V.11 -

Contrainte maximale $7.77E+11 \text{ Pa}$
Contrainte minimale $9.51E+08 \text{ Pa}$

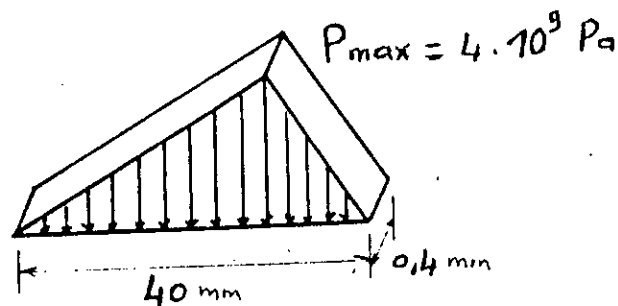
Type de contact:

CONTACT QUELCONQUE (40×20)

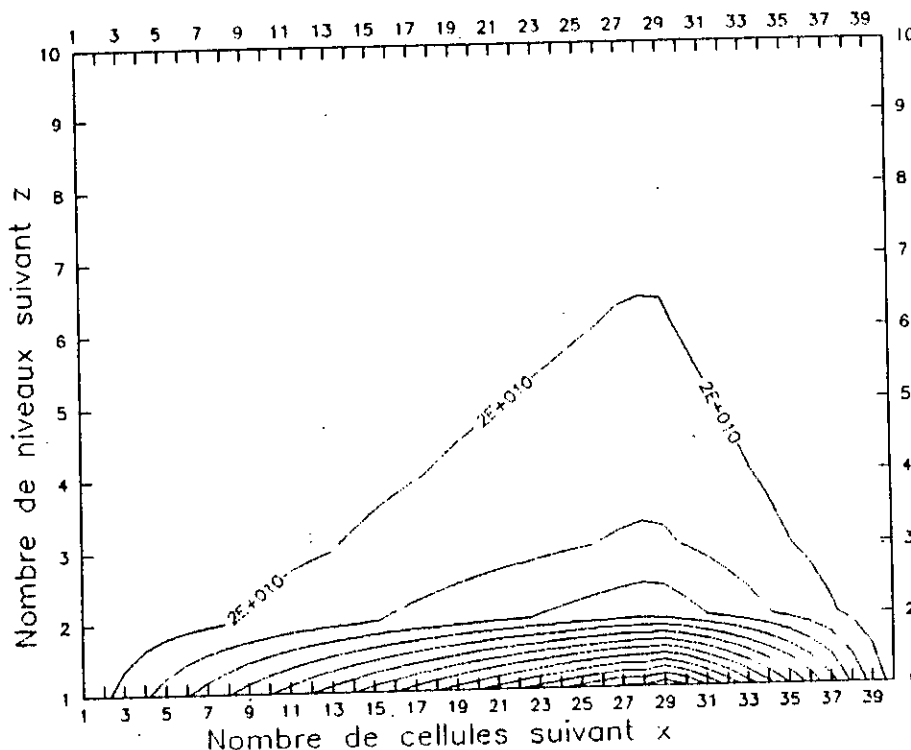
Données :

- Pression de contact $P = 4E+09$ Pa
- Longueur de la surface de contact en x : $LX = .4E-01$ m
- Longueur de la surface de contact en y : $LY = .4E-03$ m
- Nombre de cellules en x : $NX = 40$
- Nombre de cellules en y : $NY = 20$
- Nombre de niveaux de profondeur $NL = 10$
- Pas de profondeur en z : $H = .1E-04$ m
- Ordonnée du plan de calcul $NYCP = 10$

Chargement :



RESULTAT



- Figure V.12 -

Contrainte maximale 2.76E+11 Pa
Contrainte minimale 3.39E+09 Pa

*Représentation du champ de contraintes en 3D
pour un contact quelconque de maillage (40 × 20)*

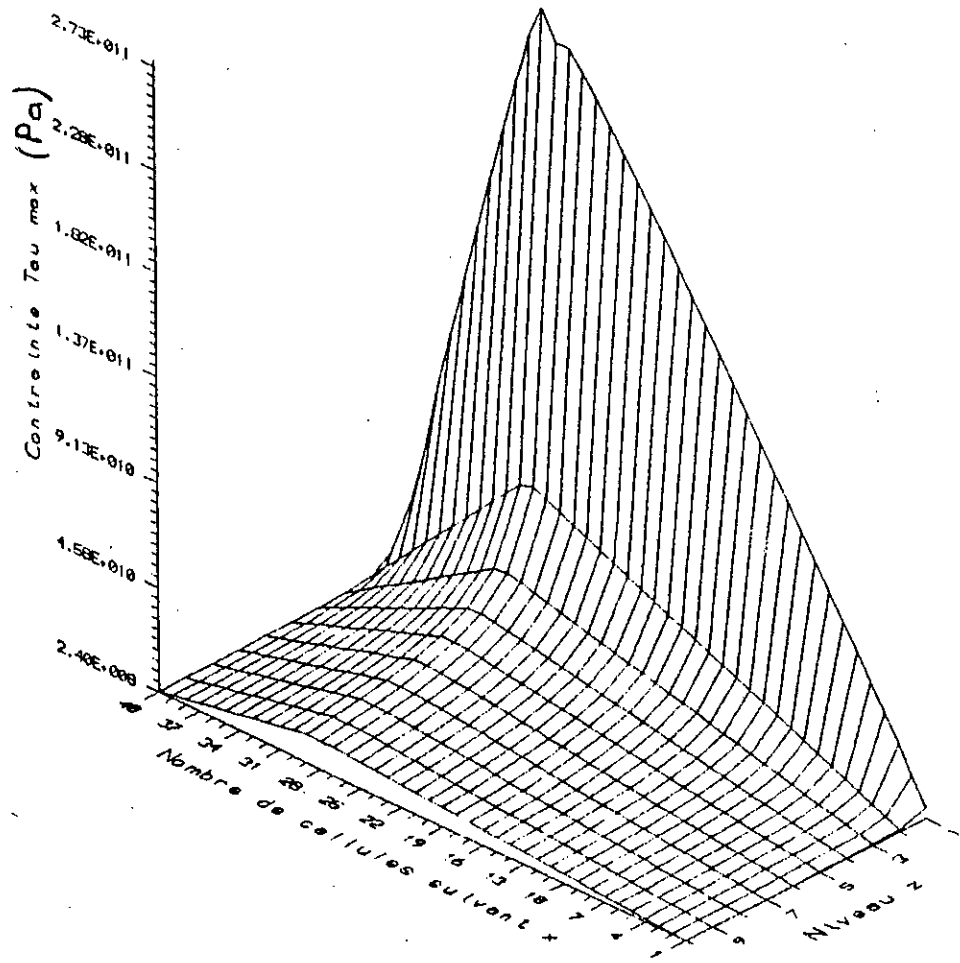


Figure V.13

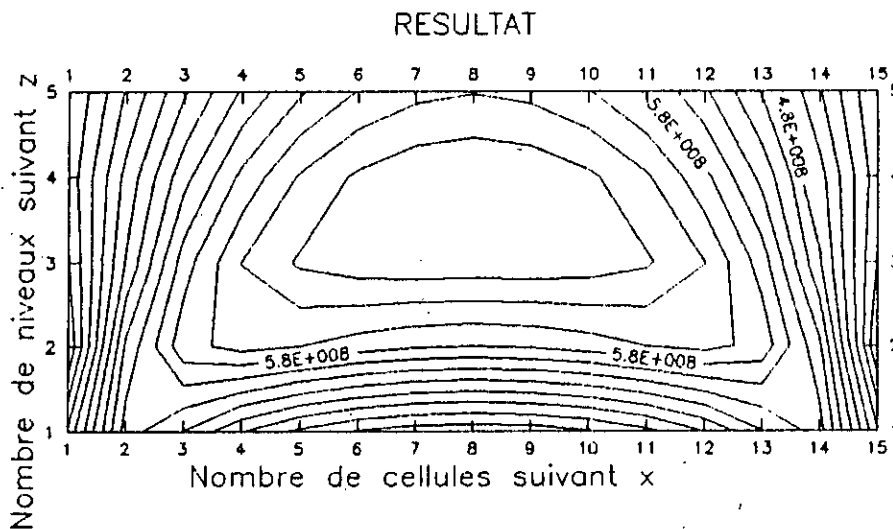
Type de contact:

CONTACT HERTZIEN (15×15)

Données :

- Pression de contact $P = 2E+09$ Pa
- Longueur de la surface de contact en x : $LX = .5E-03$ m
- Longueur de la surface de contact en y : $LY = .5E-03$ m
- Nombre de cellules en x: $NX = 15$
- Nombre de cellules en y: $NY = 15$
- Nombre de niveaux de profondeur $NL = 5$
- Pas de profondeur en z: $H = .5E-01$ m
- Ordonnée du plan de calcul $NYCP = 8$

Chargement : *Pression constante*



- Figure V.14 -

Contrainte maximale $6.57E+09$ Pa

Contrainte minimale: $3.60E+08$ Pa

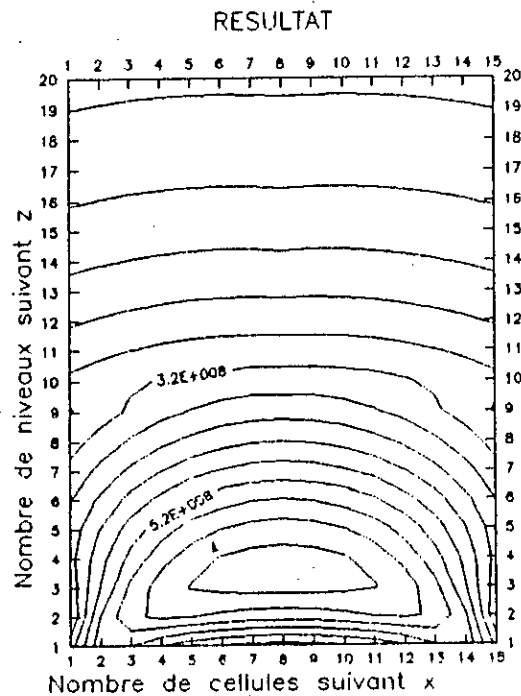
Type de contact:

CONTACT HERTZIEN (15×15)

Données :

- Pression de contact $P = 2E+09$ Pa
- Longueur de la surface de contact en x : $LX = .5E-03$ m
- Longueur de la surface de contact en y: $LY = .5E-03$ m
- Nombre de cellules en x: $NX = 15$
- Nombre de cellules en y: $NY = 15$
- Nombre de niveaux de profondeur $NL = 20$
- Pas de profondeur en z: $H = .5E-04$ m
- Ordonnée du plan de calcul $NYCP = 8$

Chargement : *Pression constante*



- Figure V.15 -

Contrainte maximale $6,57E+08$ Pa
Contrainte minimale $1,1E+08$ Pa

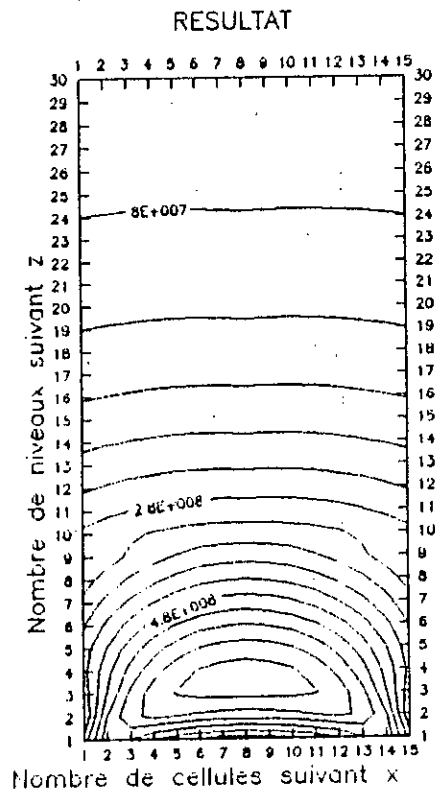
Type de contact :

CONTACT HERTZIEN (15×15)

Données :

- Pression de contact $P = 2E+09$ Pa
- Longueur de la surface de contact en x : $LX = .5E-03$ m
- Longueur de la surface de contact en y : $LY = .5E-03$ m
- Nombre de cellules en x: $NX = 15$
- Nombre de cellules en y: $NY = 15$
- Nombre de niveaux de profondeur $NL = 30$
- Pas de profondeur en z: $H = .5E-04$
- Ordonnée du plan de calcul $NYCP = 8$

Chargement : *Pression constante*



- Figure V.16 -

Contrainte maximale $6.57E+08$ Pa
Contrainte minimale $5.34E+07$ Pa

Type de contact:

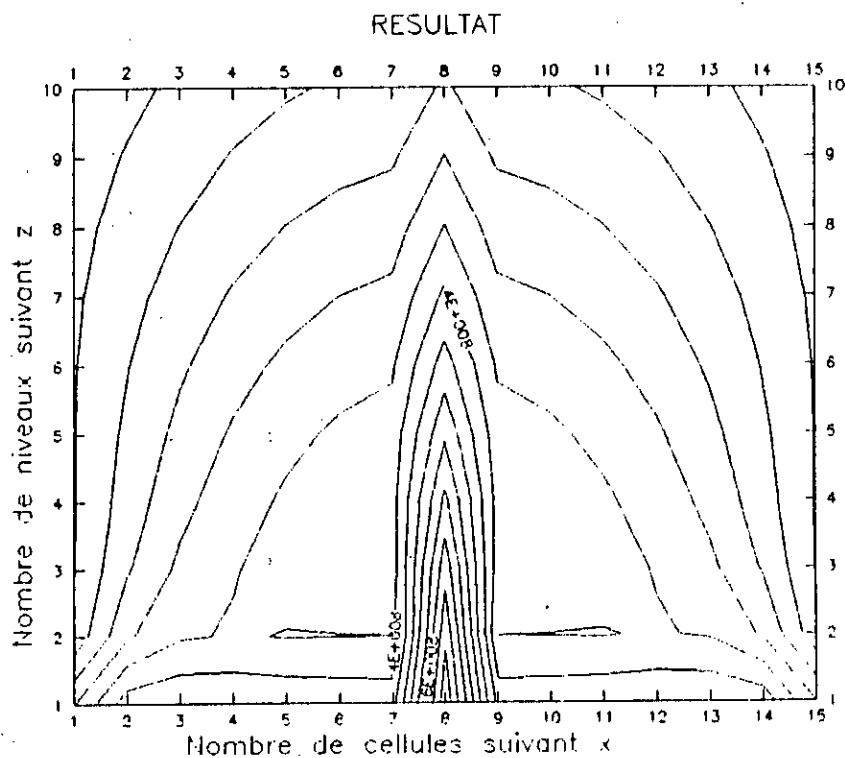
CONTACT HERTZIEN (15×15)

Données:

- Pression de contact $P = 2E+09$ Pa
- Longueur de la surface de contact en x : $LX = .5E-03$ m
- Longueur de la surface de contact en y : $LY = .5E-03$ m
- Nombre de cellules en x: $NX = 15$
- Nombre de cellules en y: $NY = 15$
- Nombre de niveaux de profondeur $NL = 10$
- Pas de profondeur en z: $H = .5E-04$ m
- Ordonnée du plan de calcul $NYCP = 15$

Chargement

Pression constante



-Figure V.17 -

Contrainte maximale $7.08E+08$ Pa

Contrainte minimale $1.71E+09$ Pa

Type de contact:

CONTACT RECTANGULAIRE (15×7)

Données:

Pression de contact $P = 2E+09$ Pa

Longueur de la surface de contact en x : $LX = .4E-01$ m

Longueur de la surface de contact en y: $LY = .4E-03$ m

Nombre de cellules en x: $NX = 15$

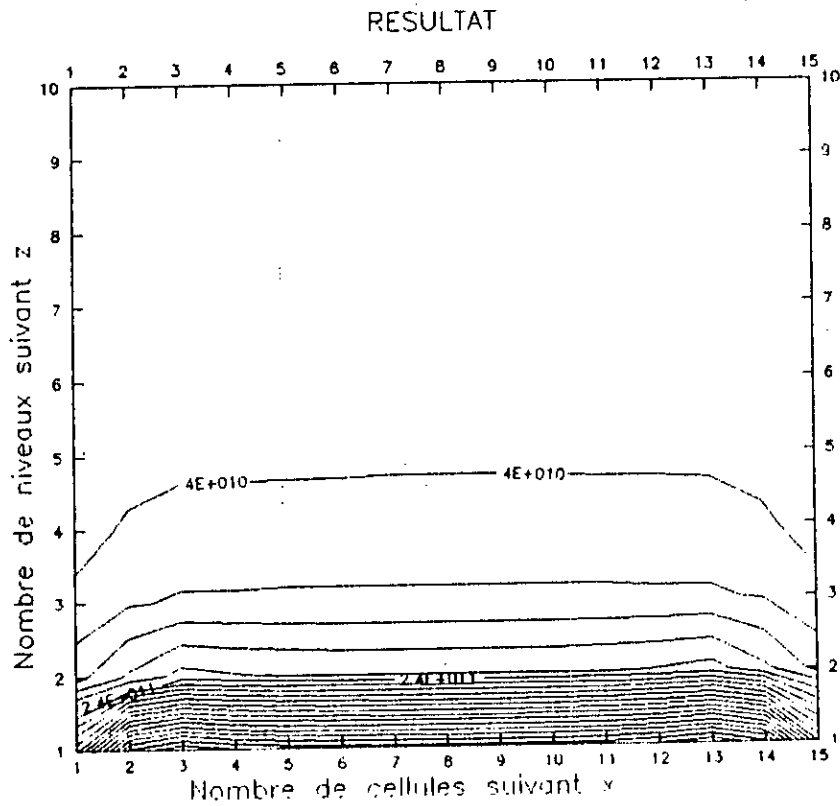
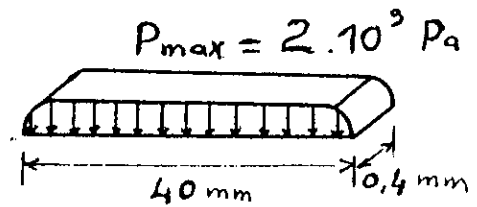
Nombre de cellules en y: $NY = 7$

Nombre de niveaux de profondeur $NL = 10$

Pas de profondeur en z: $H = .1E-4$ m

Ordonnée du plan de calcul $NYCP = 7$

Chargement :



- Figure V.18 -

Contrainte maximale $8.40E+11$ Pa

Contrainte minimale $7.03E+09$ Pa

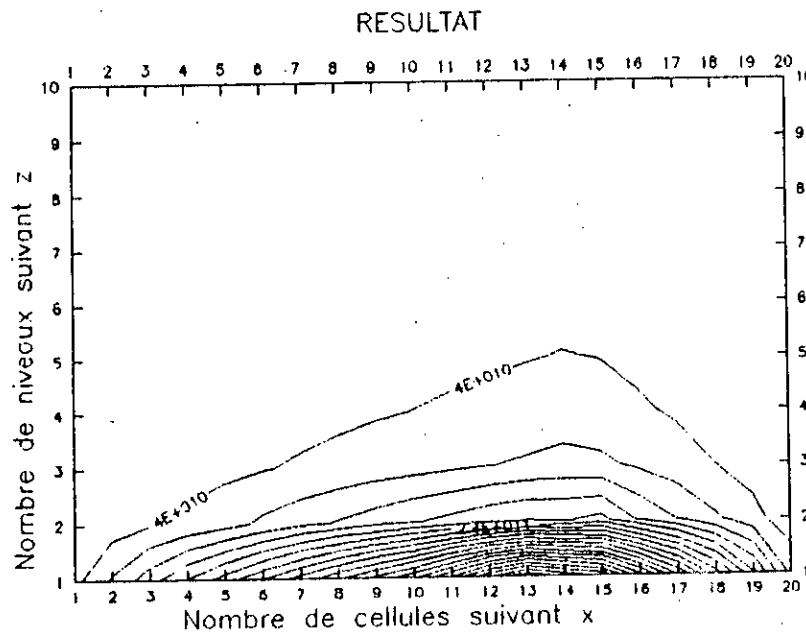
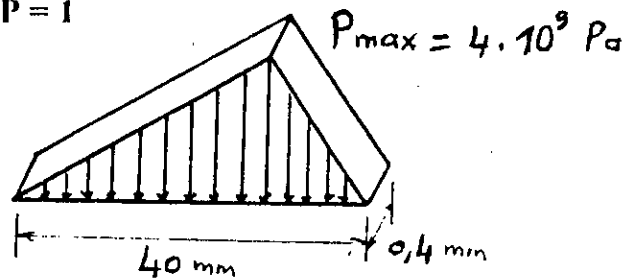
Type de contact :

CONTACT QUELCONQUE (20×10)

Données:

- Pression de contact $P = 4E+09 \text{ Pa}$
- Longueur de la surface de contact en x : $LX = .4E-01 \text{ m}$
- Longueur de la surface de contact en y: $LY = .4E-03 \text{ m}$
- Nombre de cellules en x: $NX = 20$
- Nombre de cellules en y: $NY = 10$
- Nombre de niveaux de profondeur $NL = 10$
- Pas de profondeur en z: $H = .1E-04 \text{ m}$
- Ordonnée du plan de calcul $NYCP = 1$

Chargement :



- Figure V.19 -

Contrainte maximale $8.35E+11 \text{ Pa}$
Contrainte minimale $6.23E+08 \text{ Pa}$

V.3- INTERPRETATIONS

V.3.1- Raffinement du maillage (NX×NY)

Dans ce cas nous avons gardé :

- le même nombre de niveaux de profondeur : $NL=10$,
- l'ordonnée du plan de calcul des contraintes NYCP au milieu du massif.

V.3.1.1- Contact Hertzien (Bille/Plan)

La première remarque qu'on peut faire est que l'augmentation du nombre de cellules affecte considérablement le champ de contraintes, car dans la figure (V.1) avec un maillage de 3×3 , nous voyons bien qu'il y a une concentration d'iso-contraintes sur les 2 premiers niveaux et une iso-contrainte à partir du 7^{ième} niveau; ce qui veut dire que la contrainte est pratiquement constante sur tout le plan. Ce qui ne correspond pas à la réalité. Car dans la figure (V.2) avec un maillage de 9×9 on constate déjà une nette amélioration de la distribution des iso-contraintes qui se rapproche beaucoup plus de la distribution réelle.

Enfin, avec un maillage de 30×30 (voir figure V.4), en comparaison avec des résultats obtenus dans [7], les iso-contraintes sont parfaitement distribuées.

De plus, la précision des valeurs des contraintes près de la surface de contact augmentent considérablement avec le raffinement du maillage, du fait qu'il y est plus de contraintes à calculer et donc leurs interpolations donnent de meilleurs résultats.

V.3.1.2- Contact rectangulaire

Pour ce type de chargement, l'augmentation du nombre de cellules fait croître la précision des valeurs des contraintes, en plus, comme pour le premier cas il faut un maillage précis pour faire ressortir la distribution réelle des iso-contraintes.

La figure (V.8) avec un maillage de 30×20 fait apparaître l'allure totale du chargement avec une courbure aux extrémités, alors que dans les figures (V.6) et (V.7) on ne la distingue pas d'une façon claire.

V.3.1.3- Contact quelconque

Pour ce cas nous avons proposé un chargement de forme quelconque (voir figures (V.10), (V.11), (V.12)) pour essayer de montrer la distribution du champ de contraintes dans le cas où on a pas affaire à un chargement uniforme.

On constate les mêmes changements que les cas précédents, c'est à dire l'évolution des iso-contraintes qui tendent à prendre la forme du chargement appliqué sur la surface de contact en augmentant le nombre de cellules.

V.3.2- Augmentation du nombre de niveaux (NL)

Dans ce cas nous avons gardé:

- NX et NY (maillage) constants,
- l'ordonnée du plan de calcul des contraintes NYCP constant.

Pour montrer l'influence de la diminution ou de l'augmentation du nombre de niveaux sur la distribution des iso-contraintes, nous avons choisi un seul type de contact parceque c'est suffisant pour illustrer ce cas de figure.

En l'occurrence, nous avons opté pour le cas du contact Hertzien qui est le cas le plus intéressant du point de vue de son importance dans la pratique.

Le changement du nombre de niveaux a été apporter sur le cas du contact Hertzien, avec un maillage de 15×15 et 10 niveaux de profondeur, voir figure (V.3).

Dans la figure (V.14) nous avons pris un nombre de niveaux $NL = 5$. On constate qu'il n'y a pas de changement dans la distribution des iso-contraintes dans le massif, seulement ce n'est que la moitié de la figure (V.3) qui apparaît.

Pour la figure (V.15) avec $NL = 20$, on remarque qu'elle contient la figure (V.3) qui apparaît du niveau 1 jusqu'au niveau 10, et du niveau 11 jusqu'au niveau 20 la suite de la distribution.

Idem pour la figure (V.16) avec $NL = 30$, où on retrouve la figure (V.3) du niveau 1 au niveau 10.

On remarque donc, à partir des figures (V.15) et (V.16) qu'en dépassant un certain niveau de profondeur (10 ou 11), les courbes d'iso-contraintes ont tendance à devenir rectiligne du faite de leurs éloignement de la zone d'application de la charge.

En résumé, l'augmentation ou la diminution du nombre de niveaux n'a aucune influence sur la distribution des iso-contraintes qui se produisent dans un massif semi-infini. En augmentant le nombre de niveaux à une certaine valeur, ça nous permet de visualiser cette distribution jusqu'au niveau considéré. En dépassant un certain seuil, les iso-contraintes ont tendance à devenir rectilignes. En diminuant le nombre de niveaux, on arrive à avoir un effet de "zoom", voir figures (V.14) et (V.3).

V.3.3- Changement de l'ordonnée du plan de calcul (NYCP)

Dans cette partie, nous avons changé l'ordonnée du plan de calcul de contraintes pour les différents cas de chargements avec :

- NX et NY constants,
- nombre de niveau NL constant.

V.3.3.1- Contact Hertzien (Bille/Plan)

Ici, on a repris le cas de la figure (V.3) avec un maillage 15×15 en prenant l'ordonnée du plan de calcul des contraintes à l'extrémité (NYCP = 15).

Les résultats obtenus nous montrent que la distribution des contraintes se rétrécit au centre, du fait de l'éloignement des cellules du plan considéré par rapport au centre (surface de contact carrée).

Donc, l'influence de NYCP est très remarquable pour le cas de contacts Hertiens (Bille/Plan).

V.3.3.2- Contact rectangulaire

On reprend le cas de la figure (V.7) en prenant NYCP = 7 (à l'extrémité). On remarque qu'il n'y a pratiquement pas de changement dans la distribution des iso-contraintes figure (V.18), cela est dû au fait que la surface de contact soit rectangulaire (longueur de contact suivant y très petite par rapport à la longueur suivant x), donc le pas suivant y est très petit.

Donc la variation de NYCP n'a pas d'influence sur le champ de contraintes pour ce type de chargement.

V.3.3.3- Contact quelconque

Comme dans le cas précédent on change l'ordonnée du plan de calcul pour le cas de la figure (V.11). En comparant ces résultats avec ceux de la figure (V.19), on remarque qu'il n'y a pas de changement dans la distribution des contraintes.

Dans ce cas aussi, NYCP n'a pas d'influence sur le champ de contraintes pour ce type de chargement.

CONCLUSION GENERALE

Nous avons pu, au cours de ce travail, mettre en oeuvre un ensemble d'outils mathématiques et numériques nous permettant la compréhension du comportement d'un corps soumis à un contact.

En outre, l'explicitation de ce comportement passe par la détermination de trois paramètres essentiels qui sont :

- La pression de contact,
- l'aire du contact,
- l'état de contraintes de la matière.

En ce qui nous concerne, nous avons opté pour la détermination du champ de contraintes dans un massif semi-infini soumis à une distribution de pressions normales en surface.

Ce travail nous a permis aussi de cerner deux approches différentes au niveau de la résolution du problème de contact normal, formulé soit comme un problème direct, soit comme un problème inverse.

Dans la première approche, la résolution du contact passe par la résolution des équations différentielles de base de l'élasticité (équations de Lamé).

Par contre, pour la deuxième approche, la résolution du problème de contact passe par la connaissance des conditions aux limites d'un problème physique bien défini, ce qui simplifie les difficultés de résolution qu'on trouve dans le premier cas.

D'ailleurs, notre outil numérique basée sur la méthode de Kalker s'inspire de la deuxième démarche.

Après validation du programme et son exécution pour plusieurs cas de figures de contact, les conclusions qu'on peut tirer sont :

- L'utilité d'avoir un maillage raffiné (nombre de cellules > 500) pour l'obtention de résultats se rapprochant le plus des résultats théoriques.
- La nécessité de choisir un niveau de profondeur qui soit le plus loin de la surface de contact pour une meilleure appréciation de l'évolution des iso-contraintes.
- Une différence de 5 à 15% dans les valeurs des contraintes, en balayant la surface de contact de la première ordonnée jusqu'à la dernière.

Notons que l'obtention de ces résultats, le temps de calcul du programme est assez élevé (exemple : un maillage de 15×15 avec 10 niveaux de profondeur, le temps de calcul est de 5 heures environ, un maillage de 40×15 avec le même nombre de niveaux, le temps de calcul était de 12 heures environ), d'où l'utilité de perfectionner le programme pour la diminution du temps de calcul.

Une amélioration pourra être apportée à ce programme, en considérons des pressions tangentielles qui modélisent les forces de frottement sur la surface de contact, qui, associées aux pressions normales donneront un chargement plus réel et donc des résultats plus précis.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] - **SOLOMON (L.)** - Elasticité linéaire - Paris, Masson 1968, 742 p.
- [2] - **TIMOSHENKO (S.) et GOODIER (J.N.)** - Théorie de l'élasticité - Mc Graw Hill Book Company, Inc 1951, 354 p.
- [3] - **LOVE (A.E.H.)** - A treatise on the mathematical theory of elasticity - Fourth edition, Dover publications New-York 1927, 643 p.
- [4] - **MUSKHELISHVILI (N.I.)** - Some basic problems of mathematical theory of elasticity, P. Noordhoff, L.t.d., 4ème édition, German Town, 1963.
- [5] - **VILLECHAISE (B.)** - Mécanique des Contacts : Elasticité et Rupture - Thèse de Docteur es-sciences, I.N.S.A. de Lyon, Lyon1, 1985, 125 p.
- [6] - **CARNEIRO ESTEVES (A.)** - Résolution du contact élastique entre deux corps rugueux - Thèse de Docteur en Mécanique, I.N.S.A. de Lyon - Lyon1, 1987, 157p.
- [7] - **VERGNE (F.)** - Le contact élastohydrodynamique ponctuel lubrifié par un fluide visqueux linéaire ou non - Thèse de Docteur en Mécanique, I.N.S.A. de Lyon, Lyon1, 1989, 225 p.
- [8] - **GATINA (J.C.)** - Contact de corps élastiques. Effets tangentiels et normaux. Formulation et résolution des problèmes inverses et directs - Thèse de Docteur Ingénieur : I.N.S.A. de Lyon, Lyon1, 1987, 213 p.
- [9] - **HAIHAHEM (A.)** - Aire réelle et raideur d'un contact normal rugueux sec ou lubrifié-Thèse de Docteur en Mécanique, I.N.S.A.de Lyon, Lyon1, 1989, 142 p.
- [10] - **SEABRA (J.O.)** - Influence de l'ondulation des surfaces sur le comportement des contacts Hertiens secs ou lubrifiés - Thèse de Docteur en Mécanique I.N.S.A. de Lyon, Lyon1, 1988, 209 p.
- [11] - **KALKER (J.J.)** - Numerical calculation of the elastic field in a half-space communication in applied numerical methods - Vol. 2, p 401-410, 1986.
- [12] - **SEABRA (J.) BERTHE (D)** - Influence of surface waviness and roughness on the normal pressure distribution in the Hertzian contact, Laboratoire de Mécanique des Contacts, I.N.S.A. de Lyon, vol 109, p 642-470, 1987.