

M0040/93A

THESE

Présentée à

L'ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



Par: **Doudja SOUAG**

Pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER
en hydraulique

THEME

**CONTRIBUTION A LA GESTION D'UN
RESERVOIR PAR LES MODELES DE
REGLE DE DECISION LINEAIRE (LDR)
ET MODELISATION DES DEBITS**

Soutenu en NOVEMBRE 1993

Devant le Jury composé de:

- | | | |
|--------------|---|---|
| Président: | Mr A.KETTAB | MAITRE DE CONFERENCES E.N.P |
| Rapporteurs: | Mr N.DECHEMI
Mr A.BERMAD | CHARGE DE COURS E.N.P
MAITRE ASSISTANT E.N.P |
| Examineurs: | Mr A.OUABDESSALEM
Mr Y.MOULOUDI
Mr M.CHERRARED | CHARGE DE COURS E.N.P
MAITRE ASSISTANT E.N.P
MAITRE ASSISTANT E.N.P |
| Invité: | Mr B.MOKRANE | MAITRE ASSISTANT A.N.B |

THESE

Présentée à

L'ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Par: Doudja SOUAG
Pour l'obtention du diplôme de

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

MAGISTER
en hydraulique

THEME

CONTRIBUTION A LA GESTION D'UN
RESERVOIR PAR LES MODELES DE
REGLE DE DECISION LINEAIRE (LDR)
ET MODELISATION DES DEBITS

Soutenue en NOVEMBRE 1993

Devant le Jury composé de:

Président:	Mr A.KETTAB	MAITRE DE CONFERENCES E.N.P
Rapporteurs:	Mr N.DECHEMI Mr A.BERMAD	CHARGE DE COURS E.N.P MAITRE ASSISTANT E.N.P
Examineurs:	Mr A.OUABDESSALEM Mr Y.MOULOUDI Mr M.CHERRARED	CHARGE DE COURS E.N.P MAITRE ASSISTANT E.N.P MAITRE ASSISTANT E.N.P
Invité:	Mr B.MOKRANE	MAITRE ASSISTANT A.N.B

Ce mémoire a été réalisé sous la direction de Mr N. DECHEMI qui m'a initié à la recherche et guidé jusqu'à ce jour, qu' il soit remercié et trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à Mr A. BERMAD pour la documentation qu'il a bien voulu mettre à ma disposition et pour les conseils avertis qu'il me prodigua tout au long de ce travail.

Mes vifs remerciements s'adressent également à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

A Mr A. KETTAB qui m'a fait l'honneur de s'intéresser à ce travail et d'accepter d'assurer la présidence de mon jury, Mr A. OUABDESSALAM, Mr Y. MOULOUDI et Mr M. CHERRARED qui ont bien voulu examiner mon document et faire partie de mon jury.

Je remercie aussi Mr F. SADDAT pour m'avoir facilité l'acquisition de données et Mr D. ZOUAD pour sa contribution à la réalisation finale de ce document.

Je ne saurais oublier mon amie Mme L. HAMPLAOUI qui n'a cessé de m'apporter son soutien.

Enfin, rien ne pourra exprimer la profonde gratitude à mes parents qui m'ont toujours apporté leur soutien et leurs encouragements, je leur dédie ce mémoire.

~~~~~

# مختصر

من هذه الدراسة هو بين رئيسي: (الأول يتخلف به السنة وهفوفات  
 التدفق لإيجاد النموذج المناسب لتمثيلها، أما الثانية  
 فهو محاولة إيجاد الطريقة المثلى لتوزيع مياه السدود  
 لتحقيق الهدف الأول اخترانا طبقاً نماذج من نوع ARMA  
 على ستة هفوفات شهرية وإثنتان عشرية بعد تحويلها من  
 إلى هفوفات متطابقة باستخدام طرق لوجاريتمية  
 "BOX-COX" و "BEARD" (مقارنة بين النموذج  
 التي على أساس اختبار قدرة هذه الأخيرة على شروط  
 التناسب وتشابه الخواص الإحصائية للمهفوفات  
 القديمة والمؤلفة أنتت إلى اختيار النماذج  
 ARMA(1,2) و ARMA(2,1) مرفوقان بالتحويلات  
 اللوغاريتمية للمهفوفات الشهرية والنماذج  
 الشهرية ARMA(1,2) و SAR للشمسية  
 أما بالنسبة للإدرف الثاني فقد اخترانا دراسة النموذج LDR  
 ومقارنتها بنموذج بسيط ميرز إليه بـ SOR بعد حساب  
 الخسارة الناتجة عن استعمال كل هذه النماذج  
 انهننا الخ اقتراح النموذج LDR2 لتوزيع مياه  
 سدنا بعنايه.

R8PUM8

Notre étude a deux objectifs : Le premier est la modélisation des débits pour la simulation et le deuxième concerne la contribution à la recherche de la meilleure règle de gestion d'un réservoir .

Concernant le premier objectif, on a choisi les modèles stochastiques du type ARMA à coefficients constants, six séries de débits mensuels et deux au pas de temps décennaires ont été utilisées après transformation en séries normales par les méthodes du Log translaté, Log translaté périodique, Box-Cox et Beard. Les comparaisons des modèles sur la base des tests d'adéquation et, de ressemblance des caractéristiques statistiques ont conduit à choisir les modèles ARMA(1,2) et ARMA(2,1) accompagnés des transformations du Log translaté et du Log translaté mensuel pour les séries de débits mensuels et les modèles ARMA(1,2) et SAR pour celles décennaires transformées par le Log translaté et Beard.

En ce qui concerne le deuxième objectif, on a utilisé les modèles d'optimisation de Règle de Décision Linéaire ( LDR ) et le modèle direct dit de "règle de politique standard". Les comparaisons des pertes mensuelles et globales dues au fonctionnement du réservoir ont conduit à choisir le modèle LDR2 pour la gestion du barrage de la Cheffia.

ABSTRACT

Our study has two objectives: the first one is to find the adequate model for the generation of streamflows series. The second one is a contribution to find the best rule for the operating reservoir.

For the first objective, we have chosen the stochastic models of type ARMA with constant coefficients, six series of monthly streamflows and two of 10-days period streamflows have been used after transformation to normal series using the Log translated, periodic Log translated, Box-Cox and Beard methods. Comparisons of the models on the basis of the goodness of fit tests and the reproduction of the historical characteristics led to choice the ARMA(1,2) and ARMA(2,1) models for the monthly streamflows with the Log translated and monthly Log translated transformations, and to recommend the ARMA (1,2) and SAR models for the 10-days period series with approximately stationary autocorrelation functions.

For the second objective, we have used the optimization models of linear decision rules (LDR) and a direct model of standard policy rules. On the basis of comparisons of the monthly and total losses resulting from the operation of the reservoir, we have retained the model designed by LDR2 for the Cheffia reservoir operating.

|                                                                                           | Page |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| INTRODUCTION GENERALE.....                                                                | 1    |
| I - MODELES AUTOREGRESSIFS ET DE MOYENNE MOBILE ARMA.....                                 | 4    |
| I.1 - Introduction .....                                                                  | 4    |
| I.2 - Description des modèles ARMA .....                                                  | 4    |
| I.2.1 - Justification physique de l'utilisation<br>des modèles ARMA.....                  | 5    |
| I.2.2 - Formulation mathématique des modèles<br>ARMA.....                                 | 7    |
| I.3 - DIFFERENTES PHASES DE LA MODELISATION .....                                         | 9    |
| I.4 - IDENTIFICATION DE LA FORME DU MODELE ARMA .....                                     | 10   |
| I.5 - ESTIMATION DES PARAMETRES DU MODELE ARMA .....                                      | 15   |
| I.5.1 - Méthode des moments .....                                                         | 15   |
| I.5.2 - Méthode du maximum de vraisemblance.....                                          | 22   |
| I.5.3 - Estimation non linéaire .....                                                     | 23   |
| I.6 - TESTS DU MODELE .....                                                               | 24   |
| I.6.1 - Tests d'adéquation.....                                                           | 24   |
| I.6.2 - Tests de ressemblance des caractéristiques<br>statistiques.....                   | 28   |
| I.6.3 - Tests de validation .....                                                         | 29   |
| I.7 - MODELES ARMA A COEFFICIENTS PERIODIQUES .....                                       | 33   |
| I.7.1 - Coefficients d'autocovariance des modèles<br>ARMA à coefficients périodiques..... | 35   |
| I.7.2 - Estimation des paramètres des modèles<br>ARMA à coefficients périodiques .....    | 36   |
| I.7.3 - Tests des modèles .....                                                           | 39   |
| I.8 - MODELES AUTOREGRESSIFS SIMPLIFIES .....                                             | 40   |

|                                                                              |    |
|------------------------------------------------------------------------------|----|
| II - TRAITEMENT PREALABLE DES DONNEES .....                                  | 41 |
| II.1 - INTRODUCTION .....                                                    | 41 |
| II.2 - PROBLEME DE NORMALITE .....                                           | 41 |
| II.2.1 - Transformation de Box- Cox .....                                    | 42 |
| II.2.2 - Transformation de BEARD .....                                       | 43 |
| II.2.3 - Transformation du Log translaté .....                               | 44 |
| II.3 - PROBLEME DE PERIODICITE .....                                         | 44 |
| II.4 - PROBLEME D'AUTOCORRELATION .....                                      | 47 |
| III - RESULTATS DE LA MODELISATION PAR ARMA A COEFFICIENTS<br>CONSTANTS..... | 48 |
| III.1 - INTRODUCTION.....                                                    | 48 |
| III.2 - RESULTATS DU TRAITEMENT DES DONNEES .....                            | 48 |
| III.3 - RESULTATS DE LA MODELISATION DES DEBITS<br>MENSUELS.....             | 55 |
| III.3.1 - Résumé de la procédure de modélisation.....                        | 55 |
| III.3.2 - Présentation des résultats.....                                    | 59 |
| III.4 - ESSAI DE MODELISATION DES SERIES DE DEBITS<br>DECADAIRES.....        | 71 |
| III.5 - CONCLUSION .....                                                     | 79 |
| IV - MODELES DE GESTION D'UN RESERVOIR .....                                 | 80 |
| IV.1 - INTRODUCTION .....                                                    | 80 |
| IV.2 - MODELE DE REGLE DE DECISION LINEAIRE (LDR) .....                      | 80 |
| IV.2.1 - Choix du modèle LDR .....                                           | 86 |
| IV.2.2 - Détermination des paramètres des modèles ...                        | 89 |
| IV.2.3 - Algorithme de résolution du système<br>linéaire du modèle LDR.....  | 92 |
| IV.3 - MODELE DE REGLE DE POLITIQUE STANDARD "SOP" .....                     | 95 |

LISTE DES TABLEAUX

|                                                                                                                            | Page |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Tableau III.1 - Transformation du Log translaté.....                                                                       | 50   |
| Tableau III.2 - Transformation de Box-Cox.....                                                                             | 51   |
| Tableau III.3 - Résultats de l'identification.....                                                                         | 60   |
| Tableau III.4 - Résultats comparatifs des méthodes des<br>moments et du maximum de vraisemblance.....                      | 62   |
| Tableau III.5 - Paramètres des modèles ARMA de la série<br>de Cheurfa.....                                                 | 63   |
| Tableau III.6 - Classement des six premiers modèles<br>suivant le test d'Akaike.....                                       | 65   |
| Tableau III.7 - Moyennes des erreurs relatives des<br>caractéristiques statistiques globales<br>(série de Cheffia).....    | 67   |
| Tableau III.8 - Classement général des modèles après<br>tests d'adéquation et de ressemblance des<br>caractéristiques..... | 68   |
| Tableau III.9 - Modèles à étudier pour les séries de<br>débits décennaires.....                                            | 74   |
| Tableau III.10 - Paramètres des modèles ARMA de la série<br>de débits décennaires de Cheffia.....                          | 74   |
| Tableau III.11 - Paramètres des modèles ARMA de la série<br>de débits décennaires de oued Fodda.....                       | 75   |
| Tableau III.12 - Classement des modèles suivant le test<br>d'Akaike.....                                                   | 76   |
| Tableau III.13 - Erreurs relatives sur les caractéristiques<br>statistiques.....                                           | 77   |
| Tableau III.14 - Classement des modèles suivant chaque<br>caractéristique.....                                             | 78   |
| Tableau V.1 - Paramètres des modèles LDR1 et LDR2.....                                                                     | 100  |

IV.4 - FONCTIONS PERTES UTILISEES POUR LA COMPARAISON  
 DES MODELES LDR ET SOP..... 96

V - RESULTATS DES MODELES DE GESTION ..... 97

V.2 - INTRODUCTION..... 97

V.2 - RESULTATS DES MODELES LDR ..... 97

V.3 - RESULTATS DU MODELE SOP ..... 118

V.4 - COMPARISON DES MODELES LDR ET SOP ..... 120

V.5 - CONCLUSION ..... 123

CONCLUSION GENERALE ..... 125

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES..... 127

ANNEXES..... 132

|                                                                                                         |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tableau V.2 - Quantiles mensuels des modèles LDR1 et LDR2....                                           | 102 |
| Tableau V.3 - Volumes minimums fournis des modèles LDR en<br>fonction de la probabilité $\beta_3$ ..... | 104 |
| Tableau V.4 - Capacités du réservoir en fonction de $\beta_3$<br>avec $\beta^*$ fixée.....              | 110 |
| Tableau V.5 - Variables de décision $b_T$ des modèles LDR.....                                          | 112 |
| Tableau V.6 - Résultats comparatifs des capacités des<br>modèles LDR.....                               | 113 |
| Tableau V.7 - Capacités utilisées pour la comparaison<br>des modèles.....                               | 115 |
| Tableau V.8 - Résultats des pertes mensuelles et globales<br>des modèles LDR (fonction perte 1).....    | 117 |
| Tableau V.9 - Résultats des pertes mensuelles et globales<br>des modèles LDR (fonction perte 2).....    | 118 |
| Tableau V.10 - Résultats des pertes mensuelles et<br>globales du modèle SOP (fonction perte 1).....     | 121 |
| Tableau V.11 - Comparaison des pertes globales des<br>modèles LDR et SOP.....                           | 122 |

|                                                                                                                                  | Page |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Figure I.1 - Représentation du processus pluie-débit.....                                                                        | 6    |
| Figure I.2 - formes des fonctions $\rho_k, \phi_{kk}, \rho_{ik}, \phi_{ikk}$ pour les modèles ARMA(p,q).....                     | 13   |
| Figure I.3 - Caractéristiques des périodes extrêmes.....                                                                         | 30   |
| Figure I.4 - Graphique des périodes critiques .....                                                                              | 30   |
| Figure III.1a - Représentations graphiques de la série historique de Cheffia.....                                                | 51   |
| Figure III.1b - Représentation graphique de la série historique standardisée.....                                                | 51   |
| Figure III.2 - Fonctions d'autocorrélations et d'autocorrélations partielles de la série historique standardisée de Cheffia..... | 59   |
| Figure III.3 - Classement des modèles ARMA à coefficients constants après tests d'adéquation et de ressemblance .....            | 70   |
| Figure III.4 - Série historique des débits décennaires standardisée de Cheffia .....                                             | 72   |
| Figure III.5 - Série historique des débits décennaires standardisée de Oued Fodda.....                                           | 72   |
| Figure III.6 - Fonction d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle de la série décennale de Cheffia.....                   | 73   |
| Figure V.1 - Variation des volumes minimums fournis en fonction de la probabilité $\beta_3$ - Modèle LDR1.....                   | 105  |
| Figure V.2 - Variation des volumes minimums fournis en fonction de la probabilité $\beta_3$ - Modèle LDR2.....                   | 105  |
| Figure V.3 - Variation des volumes minimums fournis en                                                                           |      |

|                                                                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| fonction de la probabilité $\beta_3$ - Modèle LDR3.....                                                           | 106 |
| Figure V.4 - Variation des volumes minimums fournis en<br>fonction de la probabilité $\beta_3$ - Modèle LDR4..... | 106 |
| Figure V.5 - Capacité en fonction de la probabilité $\beta_3$<br>avec $\beta^*$ fixée - Modèle LDR1.....          | 108 |
| Figure V.6 - Capacité en fonction de la probabilité $\beta_3$<br>avec $\beta^*$ fixée - Modèle LDR2.....          | 108 |
| Figure V.7 - Capacité en fonction de la probabilité $\beta_3$<br>avec $\beta^*$ fixée - Modèle LDR3.....          | 109 |
| Figure V.8 - Classement des modèles de gestion utilisés.....                                                      | 124 |

|                                                                                                                            | Page |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| ANNEXE A : Caractéristiques statistiques de base des séries chronologiques.....                                            | 132  |
| ANNEXE B : Procédure d'identification par les fonctions R et S et la fonction d'autocorrélation partielle généralisée..... | 138  |
| ANNEXE C : Méthodes d'estimation des paramètres.....                                                                       | 143  |
| ANNEXE D : Présentation de quelques tests statistiques.....                                                                | 146  |
| ANNEXE E : Représentations graphiques des séries historiques et des séries standardisées.....                              | 146  |
| ANNEXE F : Corrélogrammes et corrélogrammes partiels des séries historiques standardisées.....                             | 153  |
| ANNEXE G : Organigramme du programme de simulation par les modèles ARMA (ARMA-C).....                                      | 171  |
| ANNEXE H : Résultats de la modélisation par ARMA à coefficients constants.....                                             | 177  |
| ANNEXE I : Organigramme du programme de gestion LDR.....                                                                   | 181  |
| ANNEXE J : Résultats des modèles de gestion.....                                                                           | 184  |

## INTRODUCTION GENERALE

Au cours de la dernière décennie plusieurs milliards de dinars ont été consacrés à la réalisation des barrages. Cet effort considérable n'ayant pas été accompagné d'une politique de gestion rationnelle de ces derniers, il n'a pas permis, paradoxalement, d'atteindre les résultats escomptés en matière de satisfaction de la population en eau.

En effet, les années de sécheresse qu' a récemment connue l'Algérie ont montré à quel point l'introduction de méthodes rigoureuses de gestion des réservoirs est nécessaire.

L'absence totale de telles méthodes et l'utilisation non planifiée de la ressource hydrique a conduit à une situation critique dans le domaine de la gestion des eaux.

Les problèmes connus par le complexe d'El hadjar représente un exemple type d'une mauvaise exploitation du barrage de la Cheffia (W. de Annaba) qui auraient pu être évités si des méthodes de gestion adéquates avaient été appliquées.

La recherche d'une politique de gestion d'un barrage réservoir nécessite la connaissance de l'état de celui-ci (volume stocké dans le réservoir) pour chaque période de décision (jours, mois, ...). Le volume stocké dépend des débits entrants au réservoir, une simulation de séries synthétiques pour prévoir une politique de gestion future est donc indispensable.

Pour la simulation, on a choisi d' utiliser les modèles stochastiques du type ARMA.

Notre étude a porté sur:

- L'utilisation des modèles ARMA à coefficients constants pour la génération de séries de débits mensuels et un essai d'application pour un autre pas de temps inférieur au mois (pas de 10 jours: decadaire).

- L'application des modèles de règle de décision linéaire pour le dimensionnement et la gestion d'un réservoir et la recherche de la meilleure règle possible de fourniture d'eau.

Elle est constituée comme suit:

- Le premier chapitre est consacré à la présentation des modèles stochastiques du type ARMA (à coefficients constants et périodiques) ainsi qu'à la description détaillée des différentes étapes de la modélisation et les différentes méthodes utilisées.

- Le chapitre deux donne un aperçu sur le traitement préalable que doivent subir les séries de données historiques avant de passer à la modélisation proprement dite.

- Les résultats du traitement préalable des données ainsi que ceux de la modélisation par ARMA à coefficients constants sont présentés au chapitre trois.

- Au chapitre quatre, on entame la deuxième partie de ce travail . Une présentation des modèles utilisés est faite, celle-ci concerne les modèles de règle de décision linéaire et le modèle de règle de politique standard.

- Le chapitre cinq donne les résultats des différents modèles étudiés.

Une conclusion générale synthétise l'ensemble des résultats obtenus et met l'accent sur l'intérêt de l'utilisation des modèles de gestion dans l'exploitation des barrages.

## MODELES AUTOREGRESSIFS ET DE MOYENNE MOBILE ARMA

## I.1 - INTRODUCTION :

Dans ce chapitre, on présente une étude théorique des modèles autorégressifs et de moyenne mobile (ARMA : AutoRegressif Moving Average), en commençant par leur description puis la présentation des différentes étapes de modélisation :

Identification, estimation des paramètres, tests d'adéquation et de ressemblance des caractéristiques statistiques.

## I.2 - DESCRIPTION DES MODELES ARMA :

Les modèles mathématiques en hydrologie se classent en modèles déterministes ou stochastiques. Dans cette étude, on considère une classe de processus stochastiques en temps discret susceptible de modéliser les séries chronologiques des débits. Ces séries se caractérisent par une forte dépendance entre observations successives, on supposera de plus qu'elles peuvent être représentées par des modèles linéaires.

Le modèle linéaire autorégressif (AR) présente un intérêt particulier dans la modélisation des séries chronologiques en hydrologie. Chaque valeur du processus est une somme pondérée et finie de  $p$  valeurs de celui ci à laquelle on ajoute une variable aléatoire.

C'est l'un des modèles qui s'adapte particulièrement bien aux étiages des rivières dont les débits sont alors dus à la contribution des eaux souterraines, c'est à dire de la vidange du stockage dans le bassin.

Un autre processus linéaire dit de moyenne mobile (CMA) représente la valeur au temps  $t$  par la somme pondérée et finie de  $q$  valeurs antérieurs d'une variable aléatoire ou bruit blanc.

La combinaison de ces deux modèles donne lieu au processus mixte autorégressif d'ordre  $p$  et de moyenne mobile d'ordre  $q$ , ARMA ( $p, q$ ) qui regroupe d'une part le tarissement (partie autorégressive) et d'autre part les apports aléatoires des pluies (partie de moyenne mobile). Ce genre de modèles se prête généralement bien à la représentation des débits de rivières.

En outre, les modèles ARMA peuvent être construit avec moins de paramètres à estimer qu'un modèle autorégressif de grand ordre. La flexibilité obtenue en ajoutant la composante de moyenne mobile rend la construction du modèle possible avec un minimum de paramètres à estimer. Cette propriété est particulièrement intéressante dans le cas des modèles ARMA, puisque ces paramètres sont estimés à partir des données.

D'autre part, en considérant les apports des pluies et la contribution des eaux souterraines, et en utilisant l'équation de continuité de stockage, on pourra modéliser les débits au pas de temps mensuel par les modèles ARMA.

#### I.2.1 - Justification physique de l'utilisation des modèles ARMA :

En examinant le système hydrologique (figure (I.1)), on peut voir qu'un débit  $Z_t$  est dû à la contribution des eaux de stockage  $C.S_{t-1}$  et des eaux de ruissellements  $d.e_t$ .

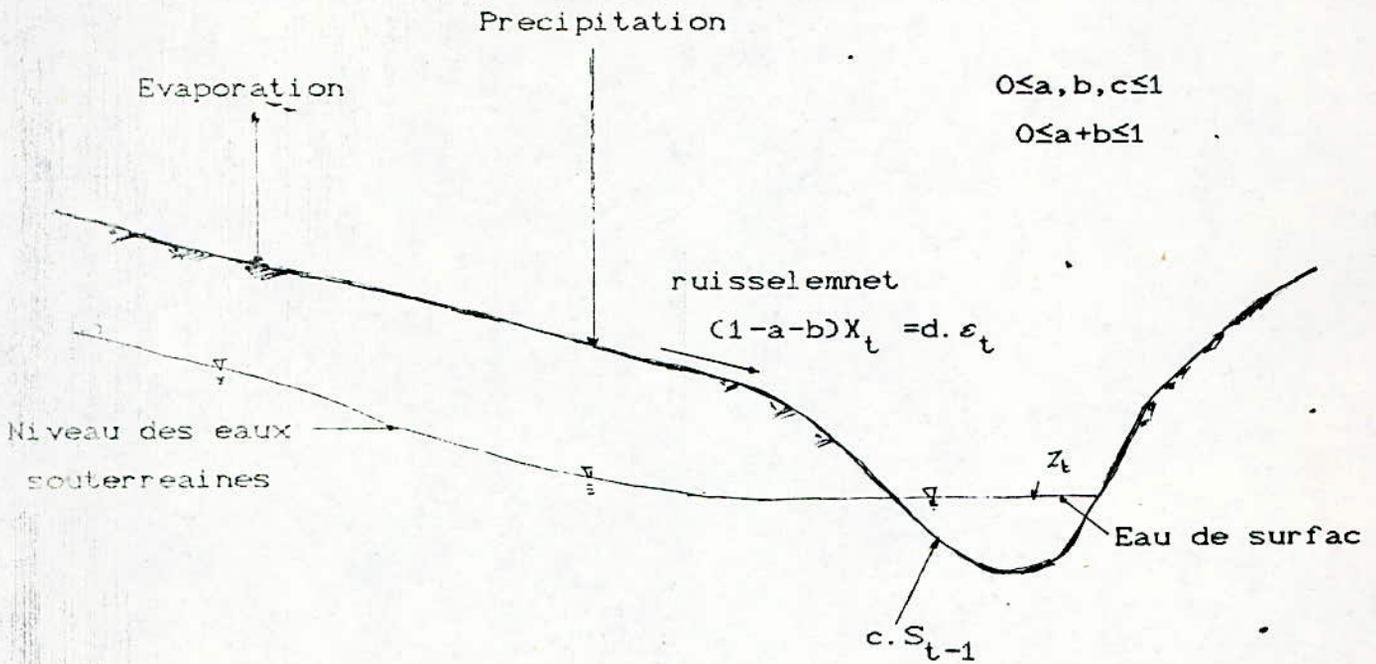


Figure (I.1)- Représentation du processus pluie - Débit (Sals et Smith, 1980a)

$$Z_t = C.S_{t-1} + d.e_t \quad (I.1)$$

avec c et d des coefficients de pondération,  $0 \leq C, d \leq 1$ .

En considérant l'équation de continuité pour le problème de stockage :

$$S_t = S_{t-1} + a.e_t - C.S_{t-1} \quad (I.2)$$

Et en combinant les deux équations (I.1) et (I.2) SALAS et SMITH (1980) ont montré que la modélisation des débits  $Z_t$  pourrait être

donnée par :

$$Z_t = (1-c).Z_{t-1} + d.\varepsilon_t - [(1-c).d - a.c] \varepsilon_{t-1} \quad (I.3)$$

Connaissant la forme d'un modèle ARMA (1,1) qui est donnée par :

$$Z_t = \phi.Z_{t-1} + \varepsilon_t - \theta.\varepsilon_{t-1}$$

et par analogie, on peut dire que c'est le cas d'un modèle ARMA (1,1).

### I.2.2 - Formulation mathématique des modèles ARMA :

Les séries chronologiques représentées par un modèle ARMA sont supposées stationnaires et approximativement normales. Considérons une série hydrologique  $Z_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, N$ .

Un modèle de moyenne mobile d'ordre  $q$  est donné par :

$$Z_t = \varepsilon_t - \theta_1.\varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q.\varepsilon_{t-q} \quad (I.4)$$

ou

$$Z_t = - \sum_{j=0}^q \theta_j.\varepsilon_{t-j}$$

avec  $\theta_0 = -1$

$\varepsilon_t$  = Variable aléatoire indépendante avec une moyenne nulle et une variance  $\sigma_\varepsilon^2$ .

Les paramètres du modèle sont : La moyenne  $\mu$  la variance  $\sigma_\varepsilon^2$  de la variable indépendante  $\varepsilon_t$  et les coefficients  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  soit  $q+2$  paramètres à déterminer à partir des données.

Le modèle autorégressif d'ordre  $p$  est représenté par :

$$Z_t = \phi_1 \cdot Z_{t-1} + \phi_2 \cdot Z_{t-2} + \dots + \phi_p \cdot Z_{t-p} + \varepsilon_t \quad (I.5)$$

ou

$$Z_t = \sum_{j=1}^p \phi_j \cdot Z_{t-j} + \varepsilon_t$$

Les paramètres du modèle sont: la moyenne  $\mu$ , la variance  $\sigma_\varepsilon^2$  de la variable indépendante  $\varepsilon_t$  et les coefficients  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  soit au total  $p+2$  paramètres à estimer à partir des données.

Un modèle autorégressif d'ordre  $p$  et un modèle de moyenne mobile d'ordre  $q$  peuvent être combinés pour donner le modèle mixte autorégressif et de moyenne mobile (ARMA) de coefficients  $(p,q)$ . Il est défini, par :

$$Z_t = \phi_1 \cdot Z_{t-1} + \phi_2 \cdot Z_{t-2} + \dots + \phi_p \cdot Z_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \cdot \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \cdot \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \cdot \varepsilon_{t-q} \quad (I.6)$$

ou sous forme condensée :

$$Z_t = \sum_{j=1}^p \phi_j Z_{t-j} - \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad \text{avec } \theta_0 = -1$$

Les paramètres du modèle ARMA sont  $\mu$ ,  $\sigma_\varepsilon^2$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , ...,  $\theta_q$  et  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ , ...,  $\phi_p$ . Au total  $p + q + 2$  paramètres à estimer à partir des données.

### 1.3 - DIFFERENTES PHASES DE LA MODELISATION :

La procédure de modélisation obéit généralement à six phases principales, (Salas et Smith, 1980) :

- 1- Identification de la composition du modèle;
- 2- Identification du type du modèle;
- 3- Identification de la forme du modèle;
- 4- Estimation des paramètres du modèle;
- 5- Tests d'adéquation des modèles;
- 6- Tests de ressemblance des caractéristiques statistiques.

Dans la première étape, on choisit si le modèle sera à une ou plusieurs variables. La seconde étape, consiste à choisir un modèle parmi les différents types disponibles en hydrologie stochastique parmi lesquels, on peut citer :

- Les modèles autorégressifs (AR);
- Modèles autorégressifs et de moyenne mobile (ARMA);
- Modèle du bruit gaussien fractionnaire (FGN);
- Modèle de la ligne brisée (BL);
- Modèles de désaggregation...

Une fois le type du modèle choisi, la forme ou l'ordre du modèle doit être identifié en troisième étape. Dans le cas du choix d'un modèle ARMA, cette étape consiste à déterminer les ordres  $p$  et  $q$  représentant respectivement le nombre de paramètres autorégressifs (AR) et de moyenne mobile MA ( $\phi$  et  $\theta$ ).

Les paramètres identifiés, sont alors estimés en quatrième étape puis s'assurer en cinquième étape que les séries générées à partir du modèle vérifient les tests d'adéquation.

L'étape six comprend les tests de ressemblance des caractéristiques statistiques (moyenne, variance, coefficient d'asymétrie, ...), et les tests de validation.

Si les tests précités ne donnent pas satisfaction, la forme ou le type du modèle doit être changé et la procédure répétée jusqu'à la satisfaction.

On présentera ci-dessous les détails des étapes 3, 4, 5 et 6 de la procédure de modélisation.

#### 1.4 - IDENTIFICATION DE LA FORME DU MODELE :

La composition et le type du modèle étant choisis : soit le modèle ARMA ( $p, q$ ) à coefficient constant à une variable tel que:

$$Z_t = \sum_{j=1}^p \phi_j Z_{t-j} - \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad (I.7)$$

$$\theta_0 = -1$$

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  sont des paramètres de moyenne mobile

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  sont des paramètres autorégressifs.

$\varepsilon_t$  sont des variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\varepsilon^2$ .

$Z_t$ , ( $t=1,2,\dots,N$ ) est la série à modéliser.

La structure de dépendance des processus ARMA (I.7) est généralement représentée par la fonction d'autocorrélation  $\rho_k$  et la fonction d'autocorrélation partielle  $\phi_{kk}$  (Box et Jenkins, 1970).

D'autre part, Cleveland (1972) avait donné la fonction d'autocorrélation inverse  $\rho_{ik}$  du processus ARMA (p,q) :

$$\rho_{ik} = \frac{\int_0^1 \exp(2\pi i k f) \cdot S_i(f) df}{\int_0^1 S_i(f) df}$$

où  $S_i(f)$  est la densité spectrale inverse de  $S(f)$  des processus (ARMA)

Cleveland a montré que si  $\rho_k(\phi, \theta)$  et  $\rho_{ik}(\phi, \theta)$  étant les fonctions

d'autocorrélation et d'autocorrélation inverse du processus (I.7)

respectivement, alors  $\rho_{ik}(\phi, \theta) = \rho_k(\theta, \phi)$ , c'est à dire que la fonction d'autocorrélation inverse (FAI) d'un processus ARMA (p,q) est la même que la fonction d'autocorrélation (FA) d'un processus ARMA (p,q) avec  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_q$  paramètres autoregressifs et  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$  paramètres de moyenne mobile (Salas et Obeysekera, 1982).

De plus Hippel et al.(1977) ont défini la fonction d'autocorrélation partielle inverse (FAPI)  $\phi_{ikk}$  d'un processus ARMA (p,q) qui peut être obtenue en remplaçant  $\rho_k$  par  $\rho_{ik}$  et en résolvant le système d'équations de Yule-Walker pour  $\phi_{kk}$  (notée maintenant par  $\phi_{kk}$ ).

Pour un processus ARMA (p,q) donné avec des ordres p et q connus et des paramètres  $\phi_1, \dots, \phi_p$  et  $\theta_1, \dots, \theta_q$  connus, les fonctions  $\rho_k, \phi_{kk}, \rho_{ik}$  et  $\phi_{ikk}$  sont définies de façon unique.

Le problème d'identification peut donc être posé comme suit : connaissant les fonctions  $\rho_k, \phi_{kk}, \rho_{ik}, \phi_{ikk}$  les ordres p et q peuvent-ils être déterminés? Pour répondre à cette question, un résumé de quelques propriétés (utiles) des fonctions d'autocorrélation est donné ci-dessous suivant les travaux de Box et Jenkins (1970), Cleveland (1972) et Hippel et al. (1977). (Salas et Obeysekera, 1982).

- Pour un processus ARMA (0,q),  $\rho_k = 0$  pour  $k > q$ . Pour un processus ARMA(p,0) ou ARMA(p,q) la forme de  $\rho_k$  dépend des valeurs de p et q et des paramètres  $\theta$  et  $\phi$ .

- Pour un processus ARMA(p,0),  $\phi_{kk} = 0$  pour  $k > p$ . Pour un processus ARMA (0,q) ou ARMA (p,q),  $\phi_{kk}$  prend des formes qui dépendent

des valeurs de  $p$  et  $q$  et des valeurs des paramètres  $\phi$  et  $\theta$ .

3 - Pour un processus  $ARMA(0, q)$ ,  $\phi_{ikk} = 0$  pour  $k > q$ . Pour un processus  $ARMA(p, 0)$  ou  $ARMA(p, q)$ ,  $\phi_{ikk}$  prend les formes qui dépendent des valeurs de  $p$  et  $q$  et des valeurs des paramètres.

4 - Pour un processus  $ARMA(p, 0)$ ,  $\rho_{ik} = 0$ . Pour un processus  $ARMA(0, q)$  ou  $ARMA(p, q)$ , la forme de  $\rho_{ik}$  dépend des valeurs de  $p$  et  $q$  et des valeurs des paramètres.

Les propriétés (représentées en figure I.2) peuvent résoudre le problème d'identification. Par exemple si  $\rho_k$  est donnée par la figure (b) ou  $\phi_{ikk}$  donnée par la figure (k) alors dans ce cas l'ordre du modèle est clairement défini : c'est un modèle  $ARMA(0, q)$ . De même si  $\phi_{kk}$  est donnée par la figure (d) et  $\rho_{ik}$  est donnée par la figure (g) alors le modèle est un modèle  $ARMA(p, 0)$ .

En plus Cleveland (1972) et Hipel et al. (1977) avaient indiqué que dans l'identification des modèles ARMA, la fonction d'autocorrélation inverse  $\rho_{ik}$  identifiait mieux les modèles  $ARMA(p, 0)$ , que la fonction d'autocorrélation partielle  $\phi_{kk}$ , cependant, théoriquement, toutes les deux fonctions doivent identifier de tels modèles.

En d'autres termes, les modèles  $ARMA(p, 0)$  et  $ARMA(0, q)$  peuvent être identifiés de façon précise. Cependant ceci n'est pas le cas pour les modèles ARMA  $(p, q)$ , bien que les fonctions  $\rho_k$ ,  $\phi_{kk}$ ,  $\rho_{ik}$  et  $\phi_{ikk}$  soient parfaitement définies, elles ne peuvent identifier les ordres  $p$  et  $q$  quand  $p > 0$  et  $q > 0$  parcequ'elles ne possèdent aucunes propriétés particulières pour indiquer ces valeurs.

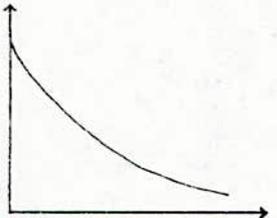
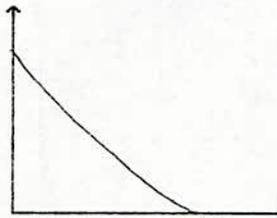
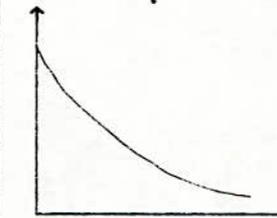
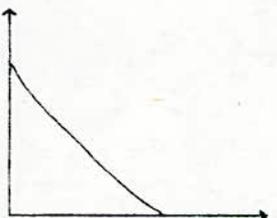
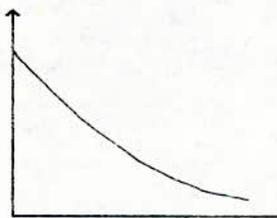
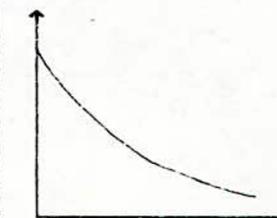
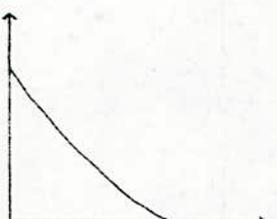
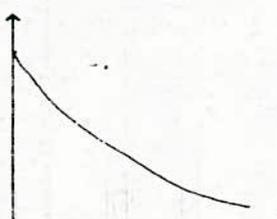
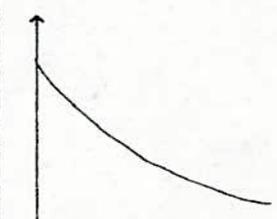
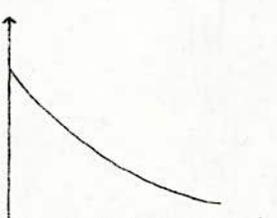
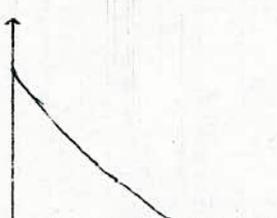
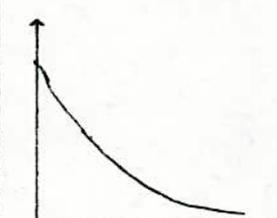
| FONCTION                                     | MODELES                                                                                        |                                                                                                |                                                                                             |
|----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                              | AR(p) ou ARMA(p,0)                                                                             | MA(q)                                                                                          | ARMA(p,q)                                                                                   |
| Correlogramme<br>ACF                         | <br>(a)       | <br>q+1 (b)   | <br>(c)   |
| Correlogramme<br>partiel<br>PACF             | <br>p+1 (d)  | <br>(e)      | <br>(f)  |
| Correlogramme<br>inverse<br>IACF             | <br>p+1 (g) | <br>(h)     | <br>(i) |
| Correlogramme<br>partiel<br>inverse<br>IPACF | <br>(j)     | <br>q+1 (k) | <br>(l) |

Figure I.2 - Formes des fonctions  $\rho_k, \phi_k, \rho_{ik}, \phi_{ik}$   
pour les modèles ARMA(p,q)

Une méthode qui peut être utilisée pour l'identification des modèles ARMA(p,q) est celle utilisant les fonctions d'autocorrelation partielle généralisée et des fonctions R et S (Gray et al., 1978; Woodward et Gray, 1979) dont la procédure est décrite en annexe (B).

5 - ESTIMATION DES PARAMETRES :

L'estimation des paramètres est généralement faite en trois phases de précision croissante :

- Estimation préliminaire (méthode des moments);
- méthode du maximum de vraisemblance;
- estimation non linéaire.

5.1 - Estimation préliminaire: (Box, Jenkins, 1970)

L'estimation préliminaire des paramètres d'un modèle ARMA(p,q) basée sur les premières  $p + q + 1$  valeurs des autocovariances  $C_j$  ( $j = 0, 1, \dots, p+q$ ) et procède en trois étapes :

- Estimation des paramètres autorégressifs, en résolvant le système d'équations de Yule-Walker.

$$C_k = \hat{\phi}_i C_{k-i} \quad k \geq q + 1 \quad (I.8)$$

$$i = 1, \dots, p$$

$\hat{\phi}_i$  = Sont les estimateurs des paramètres autorégressifs (à déterminer)

$C_k$  = Sont les estimateurs des autocovariances des  $Z_t$ , (qui peuvent

être, estimés à partir des données par l'équation A.4 (de l'annexe A)

L'équation I.8 peut aussi s'écrire sous la forme d'un système d'équations linéaires :

$$C_{q+1} = \hat{\phi}_1 C_q + \hat{\phi}_2 C_{q-1} + \dots + \hat{\phi}_p C_{q-p+1}$$

$$C_{q+2} = \hat{\phi}_1 C_{q+1} + \hat{\phi}_2 C_q + \dots + \hat{\phi}_p C_{q-p+2}$$

(I.9)

.....

$$C_{q+p} = \hat{\phi}_1 C_{q+p-1} + \hat{\phi}_2 C_{q+p-2} + \dots + \hat{\phi}_p C_q$$

La résolution du système (I.9) permet d'obtenir les  $\hat{\phi}_i$ .

2 - Calcul des autocovariances du processus de moyenne mobile résultant :

Une nouvelle série  $Z'_t$  est calculée, il s'agit de la différence entre la série originale et la série formée par le modèle autorégressif dont les paramètres sont estimés en première étape  $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p$ .

$$Z'_t = Z_t - \hat{\phi}_1 Z_{t-1} - \dots - \hat{\phi}_p Z_{t-p} \tag{I.10}$$

Cette série contient seulement la part MA du modèle.

Les autocovariances de la nouvelle série  $Z'_t$  sont exprimées en fonction des autocovariances des séries  $Z_t$  et sont données par :

$$C'_j = \sum_{i=0}^P \hat{\phi}_i \cdot C_j + \sum_{i=1}^P \hat{\phi}_0 \cdot \hat{\phi}_i + \hat{\phi}_1 \cdot \hat{\phi}_{i+1} + \dots + \hat{\phi}_{p-i} \cdot \hat{\phi}_p \cdot \phi_j \quad (I.11)$$

Où :  $j = 1, 2, \dots, q$

$$d_j = C_{j+i} - C_{j-i}$$

$$\hat{\phi}_0 = -1$$

3 - Estimation des paramètres de moyenne mobile :

Les estimations des paramètres MA  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_q$  utilisant les autocovariances  $C'_j$  peuvent être obtenues par l'un des processus itératifs suivants :

a - Processus itératif convergent linéairement :

Les paramètres  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_q$  peuvent être calculés au moyen des formules :

$$\sigma_\epsilon^2 = \frac{C'_0}{1 + \hat{\theta}_1^2 + \dots + \hat{\theta}_q^2} \quad (I.12)$$

$$\hat{\theta}_j = - \left( \frac{C'_j}{\sigma_\epsilon^2} - \hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_{j+1} - \hat{\theta}_2 \cdot \hat{\theta}_{j+2} \dots - \hat{\theta}_{q-j} \cdot \hat{\theta}_q \right) \quad (I.13)$$

où  $\sigma_\epsilon^2$  = variance des résidus

$C'_0$  et  $C'_j$  = sont la variance et autocovariance respectivement

calculées en deuxième étape.

Les valeurs  $\hat{\theta}_j$  à déterminer sont supposées nulles en première itération puis on détermine  $\sigma_\varepsilon^2$  et  $\theta_j$  pour  $j = q, q-1, \dots, 1$  par itérations successives.

\* pour  $q = 2$  on a :

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{C'_0}{1 + \hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_2^2}$$

$$\hat{\theta}_2 = - \frac{C'_0}{\sigma_\varepsilon^2}$$

$$\hat{\theta}_1 = - \left[ \frac{C'_1}{\sigma_\varepsilon^2} - \hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_2 \right]$$

b - Processus convergent quadratiquement :

Un processus de meilleures propriétés de convergence a été proposé par Wilson (1969) utilisant un algorithme de Newton-Raphson.

on note  $\tau = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_q)$

$$\tau_0 = \sigma_\varepsilon^2 \quad \theta_j = - \tau_j / \tau_0 \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (1.14)$$

Si  $\tau^i$  l'estimateur de  $\tau$  à la  $i^{\text{ème}}$  itération, les nouvelles valeurs à la  $(i+1)^{\text{ème}}$  itération sont obtenues à partir de :

$$\tau^{i+1} = \tau^i - (T^i)^{-1} \cdot f_i \tag{I.15}$$

où  $f' = (f_0, f_1, \dots, f_q)$

$$\text{et } f_j = \left( \sum_{i=0}^{q-j} \tau_i \tau_{i+j} - C_j' \right) \tag{I.16}$$

$$T = \begin{bmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \dots & \tau_{q-2} & \tau_{q-1} & \tau_q \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_{q-1} & \tau_q & 0 \\ \tau_2 & \tau_3 & \dots & \tau_q & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tau_k & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_q \\ 0 & \tau_0 & \tau_1 & \dots & \tau_{q-1} \\ 0 & 0 & \tau_0 & \dots & \tau_{q-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

(I.17)

Connaissant les valeurs de  $\tau$ , on peut avoir les paramètres MA  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  à partir de l'équation (I.14).

## I.5.2 - Méthode du maximum de vraisemblance :

L'estimation préliminaire permet de donner une première approximation des paramètres du modèle. Mais des estimateurs efficaces sont requis pour tenir compte du maximum d'information contenue dans les données.

L'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance répondra à cette exigence (Salas et Delleur, 1980).

On a pu montrer que (annexe B) les estimateurs du maximum de vraisemblance sont les mêmes que ceux des moindres carrés si les résidus donnés par :

$$\varepsilon_t = Z_t - \phi_1 \cdot Z_{t-1} - \dots - \phi_p \cdot Z_{t-p} + \theta_1 \cdot \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \cdot \varepsilon_{t-q} \quad (I.18)$$

Obéissent à la loi normale, on est alors ramené à une estimation des paramètres qui maximisent la fonction de vraisemblance logarithmique (annexe C) en minimisant la somme des carrés des résidus.

$$S(\hat{\phi}, \hat{\theta}) = \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2(\hat{\theta}, \hat{\phi}) \quad (I.19)$$

La variance des résidus est ensuite estimée par :

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N} \cdot S(\hat{\phi}, \hat{\theta}) \quad (I.20)$$

Pour le calcul des résidus, par exemple pour un modèle ARMA(1,1), on prend la valeur initiale  $\varepsilon_0 = 0$

$$\varepsilon_1 = Z_1 - \phi_1 \cdot Z_0$$

$$\varepsilon_2 = Z_2 - \phi_1 \cdot Z_1 + \theta_1 \cdot Z_1 - \theta_1 \cdot \phi_1 \cdot Z_0$$

$$\varepsilon_3 = Z_3 - \phi_1 \cdot Z_2 + \theta_1 \cdot Z_2 - \theta_1 \cdot \phi_1 \cdot Z_1 + \theta_1^2 \cdot Z_1 - \theta_1 \cdot \phi_1^2 \cdot Z_0$$

Les résidus sont donc des fonctions non linéaires des paramètres (MA). On utilise un algorithme itératif pour l'estimation des paramètres.

### I.5.3 - Estimation non linéaire :

Si des estimateurs plus précis sont requis. On détermine alors

les valeurs des paramètres  $\theta_i$  et  $\phi_i$  pour lesquels :

$$\frac{\partial S(\phi_i, \theta_i)}{\partial \phi_i} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial S(\phi_i, \theta_i)}{\partial \theta_i} = 0 \quad (\text{I.21})$$

Cependant, le processus de moyenne mobile est responsable de la non linéarité de la somme des carrés des résidus  $S(\phi, \theta)$  et les dérivées partielles (Equations I.21) sont non linéaires. Pour déterminer les paramètres, on utilise une approximation linéaire par le développement des  $\varepsilon_t$  en séries de Taylor puis résoudre le système linéaire obtenu (Box et Jenkins, 1970).

## I.6 - TESTS DU MODELE :

Après l'identification et l'estimation des paramètres du modèle, il faudrait effectuer des tests pour vérifier la capacité du modèle à reproduire toutes les caractéristiques des séries historiques. Ceci peut se faire au moyen des tests suivants :

- Tests d'adéquation qui comportent :
  - a- test d'indépendance des résidus;
  - b- test de normalité de résidus;
  - c- test d'indépendance des résidus vis à vis des variables à modéliser  $Z_t$ ;
  - d- test de parcimonie
- Tests de ressemblance des caractéristiques statistiques (moyenne, variance, coefficient d'asymétrie, ...).
- Tests de validation.

I.6.1. Tests d'adéquation :a - Test de l'indépendance des résidus :

Les tests qui sont généralement appliqués pour vérifier l'indépendance des résidus pour les modèles ARMA sont le test dit du Portemanteau et celui du périodogramme cumulatif, ce dernier sera présenté en annexe D.

Le test du Portemanteau considère la fonction d'autocorrélation des résidus  $r_k(\hat{\varepsilon})$  du modèle ARMA tel que:

$$Q = N \sum_{k=1}^L r_k^2(\hat{\varepsilon}) \quad k = 1, \dots, L \quad (I.22)$$

avec  $L \geq N/10 + p + q$  et  $p, q$  ordres du modèle ARMA est distribuée approximativement comme  $\chi_{\alpha}^2 (L-p-q)$ . L'adéquation du modèle peut être montrée en comparant  $Q$  avec la valeur théorique  $\chi_{\alpha}^2$  pour un nombre de degrés de libertés  $L-p-q$  et pour un seuil de confiance de 5% et 1% respectivement.

$$r_k(95\%) = \frac{-1 \pm 1.96 \sqrt{N-k-1}}{N-k} \quad (I.23)$$

$$r_k(99\%) = \frac{-1 \pm 2.326 \sqrt{N-k-1}}{N-k} \quad (I.24)$$

où  $N$  = taille de l'échantillon;

$k$  = ordre de l'autocorrélation.

Si le nombre des coefficients d'autocorrélation qui sont à l'extérieur de l'un des intervalles de confiance dépasse  $\alpha \cdot k_{\max}$  ( $\alpha$  seuil de confiance et  $k_{\max}$  ordre maximum des autocorrélations), on peut conclure que la série est autocorrélée pour cet intervalle et donc l'indépendance des résidus n'est pas vérifiée.

b - Test de l'indépendance des  $\varepsilon_t$  vis à vis des  $Z_t$ :

Pour ce test, il s'agit de montrer que les  $\varepsilon_t$  et les variables

du modèle  $Z_t$  sont indépendants, c'est à dire pour

$$k \geq 1 \quad \text{Cov}(\varepsilon_t, Z_{t-k}) = 0 \quad (\text{I.25})$$

pour cela, on calcule

$$C_k = \frac{\sum_{t=1}^N \varepsilon_t \cdot (Z_{t-k} - \bar{Z})}{\sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2 \cdot \left( \sum_{t=1}^N (Z_t - \bar{Z})^2 \right)^{1/2}} \quad (\text{I.26})$$

Les caractéristiques statistiques de  $C_k$  sont :

$$E(C_k) = 0$$

$$\text{Var}(C_k) = 1/N-k \quad k > 0$$

$C_k$  est significatif s'il satisfait la condition (pour un intervalle de confiance de 95%).

$$|C_k| > 2/\sqrt{N-k} \quad (\text{I.27})$$

#### C - Test de normalité des résidus :

Les modèles ARMA comme la plupart des modèles développés pour la génération stochastique des débits sont établis en admettant que les résidus suivent la loi normale.

Plusieurs tests peuvent être utilisés pour vérifier la

normalité parmi lesquels le test d'asymétrie et du coefficient d'aplatissement présenté au chapitre II et le test du  $\chi^2$  qui est donné en annexe D.

Un autre test généralement utilisé est celui du tracé du graphe des fréquences cumulées sur un papier Gausso-arithmétique et on regarde si les points placés sont alignés ou non.

d - Test de parcimonie :

Le problème de la modélisation est de trouver le modèle avec un nombre minimum de paramètres qui reproduit d'une manière adéquate les caractéristiques de la série historique : C'est le principe de parcimonie.

Si  $N$  est la taille de l'échantillon et  $k$  le nombre des paramètres du modèle, la parcimonie est mesurée par le rapport  $S \approx N/k$  et qui doit satisfaire la condition  $S > 15$ .

Une formulation mathématique du principe de parcimonie dans le développement des modèles ARMA est donnée par le critère d'information de Akaike (Akaike, 1974) A.I.C (p,q) exprimé par :

$$A I C (p, q) = N \cdot \ln (\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + 2 \cdot (p+q) \quad (I.28)$$

(  $\ln$  représente le logarithme Neperien )

où  $N$  = taille de l'échantillon

$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  = Variance des résidus estimée par le maximum de vraisemblance

Le modèle ARMA(p,q) choisi qui satisfait à ce test est celui qui conduit à la valeur minimale de l'A I C.

I.6.2. Tests de ressemblance des caractéristiques statistiques :

Ce test de ressemblance des caractéristiques consiste à comparer les résultats des caractéristiques des séries historiques avec ceux des séries générées .

Les caractéristiques statistiques concernées par ce test sont la moyenne, la variance et le coefficient d'asymétrie périodiques ou globales (série prise période par période ou globale) .

La comparaison des caractéristiques statistiques des séries historiques et générées est faite sur la base des statistiques qui dérivent des erreurs relatives périodiques ou globales (Srikantan et Mac Mahon, 1982) données par :

$$ER_{\tau} = \frac{CG_{\tau} - CH_{\tau}}{CH_{\tau}} \quad (I.29)$$

$$VER_n = \sum_{\tau=1}^{12} ER_{\tau}^2 / 12 \quad n = 1, 2, \dots, Nc \quad (I.30)$$

où  $ER_{\tau}$  = Erreur relative périodique correspondante à la période  $\tau$ ;

$CG_{\tau}$  = Caractéristique statistique de la série générée;

$CH_{\tau}$  = Caractéristique statistique de la série historique;

$VER_n$  = Moyenne des carrés des erreurs relatives correspondante à la caractéristique  $n$  ;

$Nc$  = Nombre de caractéristiques considérées.

Les mêmes expressions sont utilisées pour les séries globales.

Le classement des modèles suivant la reproduction des caractéristiques statistiques diffère d'une caractéristique à une autre, si ces dernières sont prises séparément, c'est à dire que pour une même série, si une caractéristique est bien reconstituée pour un modèle, les autres caractéristiques peuvent ne pas conduire au même résultat. Pour cela on utilise des moyennes des  $VER_n$  ( $n = 1, \dots, Nc$ ) pour les différents modèles et les comparer.

$$\overline{VER} = \sum_{n=1}^{Nc} VER_n / Nc \quad (I.31)$$

### I.6.3 - Tests de validation :

D'autres tests sont utilisés pour la validation des modèles ARMA et concernent la comparaison de nouvelles caractéristiques des séries chronologiques historiques et générées. Celles-ci sont :

- Caractéristiques des suites homogènes (run) des longueurs et des volumes d'eau pendant les périodes extrêmes.
- Caractéristiques des périodes critiques.

#### a - Caractéristiques des suites homogènes des longueurs et des volumes : (Salas et al., 1980)

Soit  $X_t$  une série de débits de taille  $N$ , représentée sur la figure (I.3). Celle-ci est coupée par une parallèle à l'axe des temps  $t$  à un certain niveau constant  $y$  ( $y$  représente une demande en eau et peut être prise égale à  $\alpha \cdot I$  où  $I$  est la moyenne des débits entrants et  $\alpha$  un coefficient de pondération).

Lorsque  $X_t$  est inférieur à  $y$  durant un ou plusieurs intervalles consécutifs, ceci correspond à un "run négatif", un "run positif" correspond au cas où  $X_t$  est consécutivement supérieur à  $y$ .

Les deux runs sont représentés par leurs longueurs (nombre d'intervalles de temps) et leurs volumes.

Le but de ce test est de faire la comparaison des caractéristiques des longueurs et des volumes de ces deux runs des séries historiques et générés.

Soit  $l(j)$  désignant  $l_{sup_1}, l_{sup_2}, \dots, l_{inf_1}, l_{inf_2}, \dots$  correspondant à la suite homogène des longueurs ( $j = 1, 2, \dots, M$ ).

Et  $V(j)$  désignant  $V_{sup_1}, V_{sup_2}, \dots, V_{inf_1}, V_{inf_2}, \dots$  correspondant à la suite homogène des volumes ( $j = 1, 2, \dots, M$ ).

Les expressions des caractéristiques des suites homogènes (ou run) des longueurs sont données par :

$$\text{Moyenne : } \bar{L}_N = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N l(j) \quad (I.32)$$

$$\text{Variance : } S_N^2(L) = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^N (l(j) - \bar{L}_N)^2 \quad (I.33)$$

$$\text{La longueur maximale } L_N^* = \max_M (l(1), l(2), \dots, l(M)) \quad (I.34)$$

Les caractéristiques des volumes sont :

$$\text{Moyenn\~e} : \bar{V}_N = \frac{1}{M} \cdot \sum_{j=1}^M VC(j) \quad (I.35)$$

$$\text{Variance} : S_N^2(v) = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M (VC(j) - \bar{V}_N)^2 \quad (I.36)$$

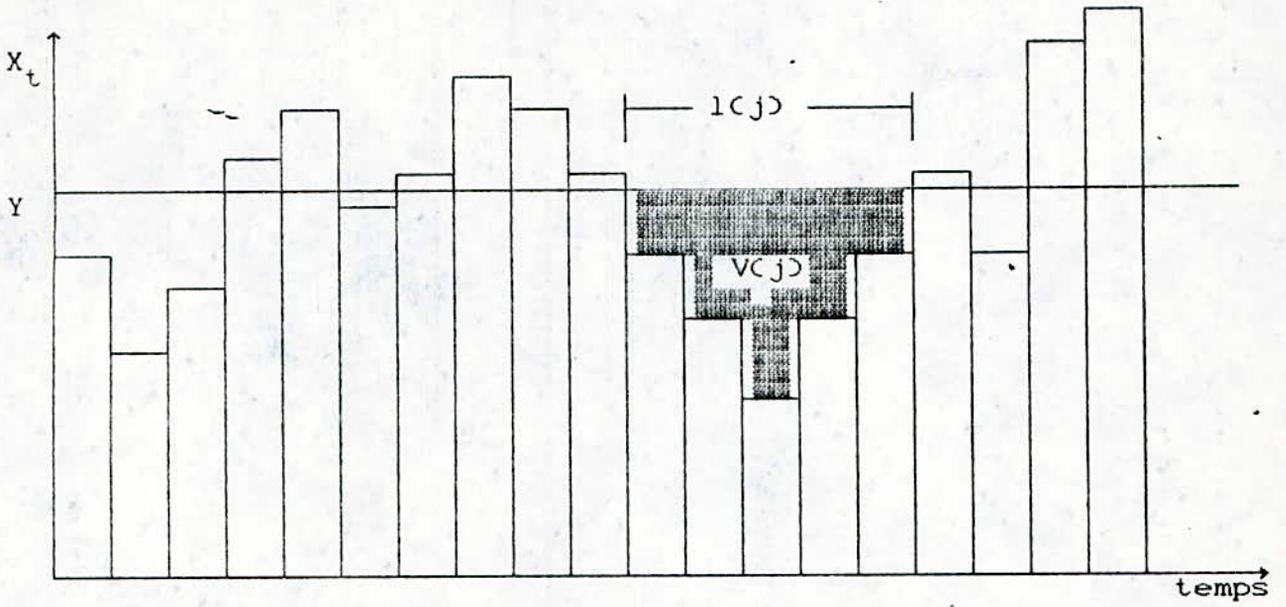


Figure (I.3) - Caractéristiques des périodes extrêmes

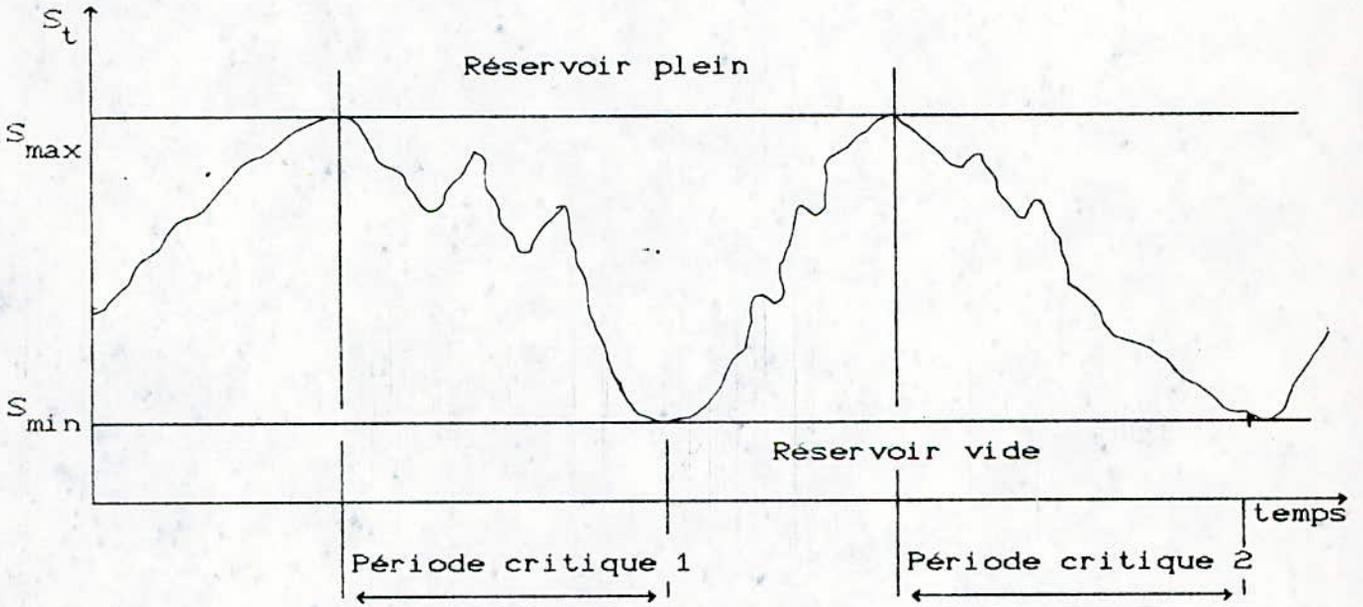


Figure (I.4) - Graphique des périodes critiques  
(Tiré de Mc MAHON et MEIN, 1978)

### b - Caractéristiques des périodes critiques :

Le fonctionnement d'un réservoir est soumis à des fluctuations, celles-ci peuvent atteindre les valeurs extrêmes (cas du réservoir vide ou plein). La période du passage de l'état où le réservoir est vide, à l'état où il est plein est appelée période critique du réservoir (figure I.4).

Les périodes critiques sont caractérisées par :

- La capacité du réservoir;
- Longueur totale des périodes critiques qui est égale à la somme des longueurs de toutes les périodes critiques.
- Probabilité d'échec représente le rapport entre le nombre de périodes pendant lesquelles le réservoir est vide sur le nombre total des périodes (mois, jours, ...) de la série (taille de la série).
- Nombre de périodes critiques.

Le but de ce test est de voir si le modèle utilisé permet de reproduire les caractéristiques des périodes critiques présentées ci-dessus.

### I.7 - MODELES ARMA A COEFFICIENTS PERIODIQUES :

Soit une série hydrologique périodique  $X_{v,\tau}$ ,  $v = 1, \dots, N$  et  $\tau = 1, \dots, \omega$  où  $N$  est le nombre total de données et  $\omega$  le nombre d'intervalles de temps (mois, jours, ...). En supposant que la distribution de probabilité de la série est asymétrique, l'une des méthodes citées au chapitre II peut être utilisée pour transformer  $X_{v,\tau}$  en série normale  $Y_{v,\tau}$ .

La variable  $Y_{v,\tau}$  peut être représentée par un modèle ARMA périodique donné par :

$$Y_{v,\tau} = \mu_{\tau} + \sigma_{\tau} Z_{v,\tau}$$

où  $\mu_{\tau}$  : est la moyenne périodique de  $Y_{v,\tau}$  ;

$\sigma_{\tau}$  : est l'écart type périodique de  $Y_{v,\tau}$  .

$Z_{v,\tau}$  peut être représentée par un modèle ARMA à coefficients constants (Equation I.2) ou à coefficients périodiques.

Le modèle ARMA à coefficients périodiques utilisé par Tao et Delleur (1976) est donné par :

$$Z_{v,\tau} = \sum_{j=1}^p \Phi_{j,\tau} \cdot Z_{v,\tau-j} - \sum_{i=1}^q \theta_{i,\tau} \cdot \varepsilon_{v,\tau-i} + \varepsilon_{v,\tau}$$

où  $\Phi_{j,\tau}$  et  $\theta_{i,\tau}$  sont les coefficients périodiques autorégressifs et moyenne mobile;

$\varepsilon_{v,\tau}$  : Variable aléatoire indépendante est suivant la loi normale.

La procédure de modélisation par ARMA a coefficients périodiques est la même que celle donnée au paragraphe I.3, cependant il n'existe pas de méthodes pour l'identification de la forme des modèles, on utilise généralement les modèles ARMA (p,1), AR(1) et AR(2). Ensuite et après estimation des paramètres les tests d'adéquation ainsi que les tests de validation décrits aux paragraphes précédents sont appliqués pour choisir le modèle qui représente le mieux la série étudiée.

I.7.1 - Fonction d'autocovariance des modèles ARMA à coefficients coefficients périodiques : (Salas et al 1982)

La fonction d'autocovariance des modèles ARMA à coefficients périodiques est donnée par :

$$\gamma_{k,\tau}(Z) = \sum_{j=1}^p \phi_{j,\tau} \cdot \gamma_{k-j,\tau} + \gamma_{k,\tau}(\varepsilon Z) - \sum_{j=1}^1 \theta_{j,\tau} \cdot \gamma_{k-j,\tau-j}(\varepsilon Z) \tag{I.41}$$

qui est aussi donnée par :

$$\gamma_{k,\tau}(Z) = E(Z_{v,\tau} Z_{v,\tau-k}) \tag{I.42}$$

où  $\gamma_{i,\tau}(\varepsilon Z)$  est la fonction de covariance d'ordre  $i$  entre  $\varepsilon$  et  $Z$  et elle est définie par :

$$\gamma_{i,\tau}(\varepsilon Z) = E(\varepsilon_{v,\tau}, Z_{v,\tau-i}) = \begin{cases} 0 & i > 0 \\ \neq 0 & i = 0 \\ 0 & i \leq 0 \end{cases}$$

Pour résoudre l'équation (I.42), les valeurs non nulles de  $\gamma_{i,\tau}(\varepsilon Z)$  doivent être connues. En multipliant l'équation (I.40) définie à  $\tau+i$  par  $\varepsilon_{v,\tau}$  et en prenant l'espérance mathématique de l'équation trouvée on obtient :

$$\gamma_{-i,\tau}(\varepsilon) = \sum_{j=1}^p \phi_{j,\tau+i} \cdot \gamma_{-i+j,\tau}(\varepsilon Z) - \left\{ \theta_{i,\tau} \right\} \sigma_{\tau}^2(\varepsilon) \tag{I.43}$$

$$\text{où } \left\{ \theta_{i,\tau} \right\} = \begin{cases} \theta_{i,\tau+i} & i = 1, \dots, p \\ -1 & i = 0 \\ 0 & i = 0 \end{cases}$$

Cette équation peut être utilisée par récurrence pour obtenir les  $\gamma_{i,\tau}(\varepsilon Z)$ .

L'équation (I.42) devient alors :

$$\gamma_{k,\tau}(Z) = \sum_{j=1}^p \Phi_{j,\tau} \cdot \gamma_{k-j,\tau-j}(Z) \quad (k > q) \quad (I.44)$$

et peut être écrite aussi sous la forme

$$\rho_{k,\tau} = \sum_{j=1}^p \Phi_{j,\tau} \cdot \rho_{k-j,\tau-j} \quad (k > q) \quad (I.45)$$

où  $\rho_{k,\tau}$  représente le coefficient d'autocorrélation périodique d'ordre  $k$ .

A partir de l'équation (I.41) on peut obtenir la variance  $\sigma_{0,z}$  et qui est donnée par :

$$\sigma_{0,\tau}(Z) = \sum_{j=1}^p \Phi_{j,\tau} \cdot \gamma_{-j,\tau-j}(Z) + \sigma_{0,z}(\varepsilon Z) - \sum_{j=1}^q \theta_{j,\tau} \gamma_{-j,\tau-j}(\varepsilon Z) \quad (I.46)$$

### I.7.2 - Estimation des paramètres périodiques :

Pour les modèles généralement utilisés ARMA(p,1), ARC(1) et ARC(2), Salas et al.(1982) ont présenté une méthode pour l'estimation des paramètres périodiques (autorégressifs et de moyenne mobile).

#### a - modèle ARMA (p,1) :

Avant de passer au modèle général ARMA (p,1) on donne ci-dessous les expressions utilisées pour l'estimation des paramètres

d'un modèle ARMA (1,1).

Le modèle ARMA (1,1) est donnée par :

$$Z_{v,\tau} = \Phi_{1,\tau} \cdot Z_{v,\tau-1} + \varepsilon_{v,\tau} - \theta_{1,\tau} \cdot \varepsilon_{v,\tau-1} \quad (\text{I.47})$$

Pour ce cas, trois séries de paramètres sont à déterminer  $\Phi_{1,\tau}$ ,  $\theta_{1,\tau}$  et  $\sigma_{\tau}^2(\varepsilon)$ ,  $\tau = 1, 2, \dots, \omega$  qui nécessitent donc 3 expressions. Ces dernières peuvent être obtenues en multipliant l'équation (I.47) par  $Z_{v,\tau}$ ,  $Z_{v,\tau-1}$  et  $Z_{v,\tau-2}$  et en prenant l'espérance mathématique de l'équation obtenue pour chaque cas, on aboutit à :

$$\Phi_{1,\tau} \cdot \rho_{1,\tau} + \sigma_{\tau}^2(\varepsilon) + \theta_{1,\tau}^2 \cdot \sigma_{\tau-1}^2(\varepsilon) - \theta_{1,\tau} \cdot \Phi_{1,\tau} \cdot \theta_{1,\tau} \cdot \sigma_{\tau-1}^2(\varepsilon) = 1$$

$$\tau = 1, 2, \dots, \omega \quad (\text{I.48})$$

$$\Phi_{1,\tau} - \theta_{1,\tau} \cdot \sigma_{\tau}^2(\varepsilon) = \rho_{1,\tau} \quad \tau = 1, 2, \dots, \omega \quad (\text{I.49})$$

$$\Phi_{1,\tau} \cdot \rho_{1,\tau-1} = \rho_{2,\tau} \quad \tau = 1, 2, \dots, \omega \quad (\text{I.50})$$

A partir de l'équation (I.50), on obtient le paramètre autorégressif périodique :

$$\Phi_{1,\tau} = \frac{\rho_{2,\tau}}{\rho_{1,\tau-1}} \quad \tau = 1, 2, \dots, \omega \quad (\text{I.51})$$

En combinant les équations (I.48) et (I.49), on peut montrer que les paramètres de moyenne mobile  $\theta_{1,\tau}$  doivent satisfaire au système d'équations suivant:

$$\theta_{1,\tau} = \Phi_{1,\tau} + \frac{(1 - \Phi_{1,\tau} \cdot \rho_{1,\tau})}{(\Phi_{1,\tau} - \rho_{1,\tau})} - \frac{(\Phi_{1,\tau+1} - \rho_{1,\tau+1})}{(\Phi_{1,\tau} - \rho_{1,\tau})} \theta_{1,\tau+1}$$

$$\tau = 1, 2, \dots, \omega \quad (I.52)$$

En résolvant le système d'équations (I.52), on obtient les paramètres  $\theta_{1,\tau}$  ; ensuite en utilisant l'équation (I.49) on détermine les variances des résidus  $\sigma_{\tau}^2(\varepsilon)$ .

Pour un modèle ARMA (p,1), les paramètres autorégressifs périodiques peuvent être trouvés en résolvant le système d'équations linéaires (I.45), alors que les paramètres de moyenne mobile  $\theta_{1,\tau}$  doivent satisfaire au système d'équations:

$$\theta_{1,\tau} = a_{\tau} + \frac{b_{\tau}}{\theta_{1,\tau+1}} \quad \tau = 1, 2, \dots, \omega$$

$$(I.53)$$

où  $a_{\tau}$  et  $b_{\tau}$  sont des paramètres dépendants de  $\Phi$  et de  $\rho$ . La résolution de ce système peut se faire soit par itérations, soit par la résolution de l'équation quadratique qui en dérive.

#### b - Modèles ARC(1) et ARC(2) :

Les paramètres des modèles ARC(1) et ARC(2) sont déterminés de la manière suivante:

- AR (1) :

$$\Phi_{1,\tau} = \rho_{1,\tau} \quad (I.54a)$$

$$\sigma_{\tau}^2(\varepsilon) = 1 - \rho_{1,\tau}^2 \quad (I.54b)$$

- AR(2) :

$$\Phi_{1,\tau} = \frac{-\rho_{1,\tau} \cdot \rho_{1,\tau-1} \cdot \rho_{2,\tau}}{1 - \rho_{1,\tau-1}^2} \quad (I.55a)$$

$$\Phi_{2,\tau} = \frac{\rho_{2,\tau} - \rho_{1,\tau} \cdot \rho_{1,\tau-1}}{1 - \rho_{2,\tau-1}^2} \quad (I.55b)$$

$$\sigma_{\tau}^2(\varepsilon) = 1 - \Phi_{1,\tau} \cdot \rho_{1,\tau} - \Phi_{2,\tau} \cdot \rho_{2,\tau} \quad (I.55c)$$

Des estimateurs finaux de  $\Phi$  et de  $\theta$  peuvent être obtenus en ajustant une fonction harmonique à leurs estimateurs initiaux.

### I.7.3 - Tests des modèles:

Pour comparer la performance des modèles ARMA à coefficient périodiques, les mêmes tests que ceux utilisés pour les modèles à coefficients constants peuvent être appliqués.

L'indépendance des résidus peut être vérifiée soit par le test d'Anderson décrit en § I.6 soit par le test dit du Portemanteau, Tao et Delleur (1976) ont remplacé la valeur non périodique de Q par:

$$Q_1 = N \sum_{k=1}^L \sum_{\tau=1}^{\omega} (r_{k,\tau})^2 \quad (I.57)$$

- où  $N$  : est le nombre d'années d'observations ;  
 $\omega$  : est le nombre d'intervalles de l'année ;  
 $r_{k,\tau}$  : est le coefficient de corrélation périodiques des résidus au temps  $\tau$  et au de pas  $k$  ;  
 $L$  : est le nombre maximum de pas.

$Q_1$  est appelée statistique modifiée du Portemanteau. Les propriétés statistique de  $Q_1$  ne sont pas connues mais une faible valeur de cette dernière indique une faible corrélation dans les séries.

### I.8 - MODELE AUTOREGRESSIF SIMPLIFIE : (BOUZIANE 1989)

Le modèle autorégressif simplifié SAR(1,  $\ell$ ,  $m$ ) est équivalent à un modèle autorégressif AR( $m$ ) avec  $m$  élevé et avec des coefficients intermédiaires nuls. Les coefficients non nuls de ce modèle se trouvent aux rangs 1,  $\ell$  et  $m$ . Le nombre de coefficients de ce modèle SAR est limité à 3 en raison du respect de la règle de parcimonie.

L'équation de ce modèle est donnée par :

$$Z_t = \Phi_1 \cdot Z_{t-1} + \Phi_\ell \cdot Z_{t-\ell} + \Phi_m \cdot Z_{t-m} + \varepsilon_t \quad (\text{I.58})$$

L'estimation préliminaire des paramètres se fait au moyen des équations de Yule-Walker simplifiées, suivant :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \Phi_1 + \Phi_\ell \cdot \rho_{\ell-1} + \Phi_m \cdot \rho_{m-1} \\ \rho_\ell &= \Phi_1 \cdot \rho_{\ell-1} + \Phi_2 + \Phi_m \cdot \rho_{m-2} \\ \rho_m &= \Phi_1 \cdot \rho_{m-1} + \Phi_\ell \cdot \rho_{m-\ell} + \Phi_m \end{aligned} \quad (\text{I.59})$$

Si on connaît les estimations des coefficients d'autocorrélation  $\rho$ ,  
La résolution dū-système ci-dessus conduit à connaître  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_m$ .

## TRAITEMENT PREALABLE DES DONNES

## II.1 - INTRODUCTION :

Avant d'entamer la modélisation des séries de débits proprement dite, un traitement préalable de ces dernières est requis afin d'avoir un aperçu sur leurs propriétés ( normalité, stationnarité, ...). Dans ce chapitre, on présentera les détails sur ce traitement préalable.

## II.2 - PROBLEME DE NORMALITE :

Les modèles ARMA utilisés pour la génération de séries de débits supposent que la variable étudiée suit une distribution de probabilité normale. Donc, on doit faire des tests de normalité avant de passer à la modélisation.

Parmi les tests disponibles pour la vérification de la normalité d'une série, on présentera ci-dessous le test d'asymétrie.

Le test d'asymétrie est basé sur le fait que le coefficient d'asymétrie pour une variable normale est nul.

L'estimateur du coefficient d'asymétrie d'une série  $X_t$  est donné par :

$$g = \frac{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^3}{\left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^2 \right]^{3/2}} \quad (\text{II.1})$$

où  $\bar{X}$  = Moyenne de l'échantillon.

N = Taille de l'échantillon.

Si la série est normalement distribuée  $g$  a une distribution asymptotiquement normale de moyenne nulle et de variance égale à  $6/N$  (Snedecor et Cochran, 1967). Les limites de l'intervalle de confiance pour une probabilité  $(1 - \alpha)$  pour  $g$  sont définies par :

$$\left[ - U_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma}{N}}, U_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma}{N}} \right] \quad (\text{II.2})$$

où

$U_{1-\alpha/2}$  est le quantile de la distribution normale correspondant à une probabilité de  $(1-\alpha/2)$ .

Si la valeur de  $g$  calculée par l'équation (II.1) est à l'intérieur de l'intervalle de confiance de l'expression (II.2) l'hypothèse de normalité est acceptée, sinon elle est rejetée.

En effet, le test ci-dessus n'est valable que pour les échantillons de taille  $N > 150$ . Pour les échantillons de petite taille, Snedecor et Cochran (1967) suggèrent de comparer les valeurs calculées du coefficient d'asymétrie avec les valeurs  $\gamma_{\alpha}(N)$  tabulées qui dépendent du seuil de probabilité choisi  $\alpha$  et de la taille de l'échantillon (Salas et Delleur, 1980). (Le tableau donnant les valeurs de  $\gamma_{\alpha}(N)$  pour  $\alpha = 0.02$  et  $\alpha = 0.10$  est donné en annexe D).

Par conséquent si  $g$  est inférieur à la valeur tabulée  $\gamma_{\alpha}(N)$ , L'hypothèse de normalité est alors acceptée.

Dans le cas où la variable à modéliser n'obéit pas à la loi normale, une transformation de la série asymétrique en série symétrique (normale ou presque normale) s'y impose. Pour cela différentes transformations ont été proposées parmi lesquelles :

- Transformation de Box-Cox;
- Transformation de Beard;

- Transformation de Log translaté;
- Transformation de Log translaté périodique.

### II.2.1 - Transformation de Box-Cox :

Cette transformation est de la forme :

$$Y_t = \lambda^{-1} [(X_t + C)^\lambda - 1] \quad \lambda \neq 0 \quad (II.3)$$

$$Y_t = \text{Ln}(X_t + C) \quad \lambda = 0$$

où C est une constante.

Pour trouver la valeur de  $\lambda$ , deux procédures ont été proposées: L'une donnée par Hipel, Mcleod et Lennox, (1977) qui procède comme suit :

Donner une valeur à la constante C tel que toutes les valeurs de la série soient supérieures à zéro, puis calculer la fonction de vraisemblance donnée par :

$$L_e \approx \frac{N}{2} \text{Ln} \frac{SS}{N} + (\lambda - 1) \sum_{t=1}^N \text{Ln}(X_t + C) \quad (II.4)$$

pour  $\lambda = 0, \pm 0.5, \pm 1$

avec SS : Somme des carrés des résidus ;

N : Taille de l'échantillon.

et choisir la valeur de  $\lambda$  donnant la plus grande valeur de  $L_0$ . Une autre procédure plus simple proposée par Hinkley (1977), soit : pour chaque valeur de  $\lambda = 0, \pm 0.1, \pm 0.2, \dots$ , on calcule la moyenne  $\bar{Y}$ , l'écart type  $\hat{\sigma}_Y$  et la médiane  $\xi_Y$  de la série transformée  $Y_t$ .

On forme

$$d\lambda = (\bar{Y} - \hat{\xi}_Y) / \hat{\sigma}_Y \quad (II.5)$$

Le  $d\lambda$  minimum correspond au  $\lambda$  cherché c'est à dire celui qui conduit à une transformation de la série originale en série symétrique.

### II.2.2 - Transformation de Beard : (Beard, 1972)

Cette transformation se présente comme suit :

$$Y_{v,\tau} = \text{Ln}(X_{v,\tau}) \quad (II.6)$$

$$\text{et } Z_{v,\tau} = (X_{v,\tau} - \bar{Y}_\tau) / \hat{\sigma}_\tau$$

La variable à étudier est définie par :

$$K_{v,\tau} = \frac{6}{g_\tau} \left[ (g_\tau \cdot Z_{v,\tau} / 2 + 1)^{1/3} - 1 \right] + \frac{g_\tau}{6} \quad (II.7)$$

$K_{v,\tau}$  est une variable standard normale de moyenne nulle et de variance égale à 1 ( $v$  correspond à l'année et  $\tau$  le mois).

$g_\tau$  est le coefficient d'asymétrie de  $Y_{v,t}$  pour le mois  $\tau$ ;

$Z_{v,\tau}$  Variable centrée réduite.

## II.2.3 - Transformation log translaté (Bouziane, 1989).

Une série transformée par le log Translatée est pour :

$$y_t = \text{Ln} (X_t - \alpha).$$

où  $\alpha$  est donné d'après Stedinger et Taylor (1982), par l'expression :

$$\alpha = \frac{X_{\max} \cdot X_{\min} - X_{\text{med}}^2}{X_{\max} \cdot X_{\min} - 2 \cdot X_{\text{med}}} \quad (\text{II.8})$$

$X_{\max}$  = Débit maximum de la série  $X_t$  ;

$X_{\min}$  = Débit minimum de la série  $X_t$  ;

$X_{\text{med}}$  = débit médian de la série  $X_t$  (Annexe A).

avec la condition que :  $X_{\max} \cdot X_{\min} - 2 \cdot X_{\text{med}} > 0$

La transformation par le log translaté mensuel est donnée par :

$$Y_{v,\tau} = \text{Ln} (X_{v,\tau} - \alpha_\tau) \quad (\text{II.9})$$

où  $\alpha_\tau$  est calculée pour chaque mois  $\tau$  par l'expression (II.8)

## II.3 - PROBLEME DE PERIODICITE: (Delleur, 1978).

Avant de parler du problème de périodicité on définit d'abord la stationnarité, une série est dite stationnaire si ces deux premiers moments sont invariants à une translation dans le temps (moyenne, variance). Les chroniques hydrologiques à des pas de temps plus petits que l'année présentent souvent des variations périodiques. Ces périodicités se traduisent par des pics dans le spectre de variance et par des oscillations périodiques dans la fonction d'autocorrelation.

Pour pouvoir caler un modèle de type ARMA les séries à modéliser, doivent donc être transformées en séries stationnaires.

Kavvas et Delleur (1975) ont étudié trois méthodes de filtrage des périodicités dans les séries mensuelles : par différence saisonnière (pas de 12), par différence non saisonnière (par unité) et par soustraction de la moyenne mensuelle, c'est à dire en formant la variable réduite.

Les modèles ARMA(p,q) appliqués aux séries filtrées par des différences sont appelés processus ARIMA(p,d,q) (Autoregressif Integrated Moving Average) où d désigne l'ordre de différenciation. Ces modèles non stationnaires ont une variance infinie et ne peuvent être employés dans la génération de séries hydrologiques synthétiques, mais peuvent néanmoins être utilisés pour la prévision. (Delleur, Tao et Kavvas, 1976) .

Pour dégager la périodicité de la moyenne et l'écart type, on peut utiliser deux méthodes :

- Méthode non paramétrique.
- Méthode paramétrique.

La première méthode consiste à faire la transformation :

$$Z_t = \frac{Y_{v,\tau} - \mu_\tau}{\sigma_\tau} \quad t = (v - 1) \cdot \omega + \tau \quad \text{(II.10)}$$

- avec
- $\mu_\tau$  moyenne de  $Y_{v,\tau}$  ;
  - $\sigma_\tau$  écart type de  $Y_{v,\tau}$  ;
  - $Z_{v,\tau}$  variable transformée (v désignant l'année et  $\tau$  période;
  - $\omega$  nombre d'intervalles (pour le cas mensuel  $\omega = 12$ )

Cette transformation s'appelle méthode non paramétrique de

standardisation de la variable  $Y_{V,\tau}$  (variable centrée réduite).

La deuxième méthode procède à la standardisation de  $Y_{V,\tau}$  par la transformation :

$$Z_t = \frac{Y_{V,\tau} - \mu'_\tau}{\sigma'_\tau} \quad (\text{II.11})$$

avec  $\mu'_\tau$  et  $\sigma'_\tau$  désignant respectivement la moyenne et l'écart type, calculés au moyen des séries de Fourier.

$$u'_\tau = \bar{u} + \sum_{j=1}^h \left[ A_j \cdot \text{COS}(2\pi j \cdot \tau / \omega) + B_j \cdot \text{SIN}(2\pi j \cdot \tau / \omega) \right] \quad (\text{II.12})$$

$$\tau = 1, 2, \dots, \omega$$

Où  $u'_\tau$  : caractéristique périodique ( $\mu'_\tau$  ou  $\sigma'_\tau$ ) ;

$\bar{u}$  : est la moyenne de  $u_\tau$  ;

$A_j$  et  $B_j$  : sont les coefficients des séries de FOURIER,  $j$  est l'harmonique ;

$h$  : est le nombre total d'harmoniques égal à  $\omega/2$  ou  $(\omega - 1)/2$  suivant que  $\omega$  est pair ou impair respectivement.

La moyenne  $\bar{u}$  et les coefficients  $A_j$  et  $B_j$  sont déterminés par :

$$\bar{u} = \frac{1}{\omega} \cdot \sum_{\tau=1}^{\omega} u_\tau \quad (\text{II.13})$$

$$A_j = \frac{2}{\omega} \cdot \sum_{\tau=1}^{\omega} u_\tau \cdot \text{COS} \left( \frac{2\pi j \tau}{\omega} \right) \quad (\text{II.14})$$

$$B_j = \frac{2}{\omega} \cdot \sum_{\tau=1}^{\omega} u_\tau \cdot \text{SIN} \left( \frac{2\pi j \tau}{\omega} \right) \quad (\text{II.15})$$

Quand  $\omega$  est un nombre pair les derniers coefficients  $A_h$  et  $B_h$  sont donnés par:

$$A_h = \frac{1}{\omega} \cdot \sum_{\tau=1}^{\omega} u_{\tau} \cdot \cos \left( \frac{2\pi j \tau}{\omega} \right) \quad (\text{II.16})$$

$$\text{et } B_h = 0 \quad (\text{II.19})$$

Ces deux méthodes conduisent à une variable approximativement stationnaire, car  $E(Z_t)$  et  $\text{Var}(Z_t)$  sont généralement proches de 0 et 1 respectivement.

#### II.4 - PROBLÈME D'AUTOCORRÉLATION :

Pour tester si les variables à modéliser sont dépendantes (autocorrélés), on utilise le test d'Anderson présenté au chapitre I.

## RESULTATS DE LA MODELISATION PAR UN MODELE ARMA A COEFFICIENTS CONSTANTS.

### III.1 - INTRODUCTION:

La première partie de cette étude concerne la recherche des meilleurs modèles de génération des séries synthétiques des débits.

Dans ce chapitre on présentera les résultats des différentes étapes de la modélisation en commençant par les résultats du traitement préalable des données utilisées dans cette étude

### III.2 - RESULTATS DU TRAITEMENT DES DONNEES :

Dans cette étude on a choisi de travailler sur six séries de débits mensuels et deux séries de débits decadaires appartenant à différentes régions du pays.

Les séries de débits utilisées dans ce travail ont été recueillies auprès de l'agence nationale des barrages (A.N.B)

Avant, toute étude utilisant des données hydrologiques, ces dernière doivent subir des tests de qualité, ces tests concernent :

- L'homogénéité des séries ;
- La tendance des séries.

Cette partie a été déjà faite dans le travail de Bermad (1990).

#### III.2.1- Problème de normalité :

Les modèles stochastiques utilisés pour la génération des débits supposent que les variables des séries à étudier obéissent à une loi normale. On a alors appliqué le test du coefficient d'asymétrie pour toutes les séries pour lesquelles il a été rejeté (séries non symétriques).

Pour transformer les séries asymétriques en séries symétriques différentes méthodes sont proposées, il s'agit de:

- Transformation du Log translaté ;
- Transformation du Log translaté périodique (mensuel ou decadaires);
- Transformation de Box - Cox ;
- Transformation de Beard.

Les résultats des transformations sont donnés ci-dessous.

a - Transformation de Log translaté :

La méthode de transformation par le Log translaté consiste à déterminer les coefficients de translation  $\alpha$  au moyen de l'équation (II.8), après vérification de la condition  $X_{\max} \cdot X_{\min} - X_{\text{med}} > 0$  (condition vérifiée pour toutes les séries étudiées).

Après transformation, les coefficients d'asymétrie des séries obtenues ont été de nouveau calculés pour vérifier si elles sont symétriques. Les résultats des coefficients de translation ainsi que les coefficients d'asymétrie et leurs intervalles de confiance sont donnés dans le tableau (III.1) . . .

Tableau III.1 - Transformation du Log translaté

|                                      | Série        | $\alpha$ | g       | IC $\pm 95\%$ |
|--------------------------------------|--------------|----------|---------|---------------|
| M<br>E<br>N<br>S<br>U<br>E<br>L<br>S | O. Bousselam | 0.1874   | 0.0594  | $\pm 0.2530$  |
|                                      | O. Dous      | -0.0381  | 0.0400  | $\pm 0.2530$  |
|                                      | O. Fodda     | 0.0016   | 0.0798  | $\pm 0.2809$  |
|                                      | Benibahdel   | 0.0752   | -0.0647 | $\pm 0.2530$  |
|                                      | Cheurfa      | -0.0585  | 0.0062  | $\pm 0.2530$  |
|                                      | Cheffia      | 0.0521   | 0.0520  | $\pm 0.2530$  |
| D<br>E<br>C<br>A<br>D                | Cheffia      | -0.0252  | 0.2558  | $\pm 0.2667$  |
|                                      | O. Fodda     | -0.0145  | 0.0146  | $\pm 0.2667$  |

On remarque que les coefficients d'asymétrie de toutes les séries sont à l'intérieur des intervalles de confiance.

b - Transformation du Log translaté périodique :

Cette transformation consiste à déterminer les coefficients de translation périodiques  $\alpha_{\tau}$ . Dans ce cas aussi les séries transformées sont symétriques.

c - Transformation de Box-Cox :

Pour certaines séries, la transformation par la méthode de Box-Cox a été écarté à l'avance (cas de la série de Benibahdal à cause de la présence de valeurs nulles pouvant engendrer des problèmes d'indétermination).

Pour les autres séries, les coefficients  $\lambda$  ainsi que les coefficients d'asymétrie et leurs intervalles de confiance sont présentés dans le tableau (III.2).

-Tableau III.2 - Transformation de Box-Cox

|                                      | Serie        | $\lambda$ | g       | IC $\pm 95\%$ |
|--------------------------------------|--------------|-----------|---------|---------------|
| M<br>E<br>N<br>S<br>U<br>E<br>L<br>S | O. Bousselam | -1.00     | -0.1300 | $\pm 0.2530$  |
|                                      | O. Dous      | -0.85     | 0.1750  | $\pm 0.2530$  |
|                                      | O. Fodda     | -1.00     | 0.0495  | $\pm 0.2809$  |
|                                      | Benibahdel   | -1.00     | 0.0454  | $\pm 0.2530$  |
|                                      | Cheurfa      | -1.00     | -0.0395 | $\pm 0.2530$  |
|                                      | Cheffia      | -0.75     | 0.0450  | $\pm 0.2530$  |
| D<br>E<br>C<br>A<br>D                | Cheffia      | -1.00     | 0.0550  | $\pm 0.2667$  |
|                                      | O. Fodda     | -0.55     | 0.1505  | $\pm 0.2667$  |

On remarque que les séries transformées dans ce cas sont symétriques. Cependant, les coefficients  $\lambda$  sont négatifs pour toutes les séries. Cette transformation sera donc écartée pour éviter les problèmes d'indétermination qui peuvent se poser.

d - Transformation de Beard :

Les problèmes d'indétermination peuvent se poser pour le cas de cette transformation pour les séries présentant des valeurs nulles puisque la variable doit d'abord passer par une transformation logarithmique. Pour cette raison seules les séries de Oued Dous, Oued Bousselam et Oued Fodda sont étudiées pour cette méthode. Les séries transformées sont symétriques.

III.2.2 Problème de stationnarité :

Après le test de normalité et la transformation en séries symétriques, ces dernières ont été testées pour savoir si elles sont périodiques ou non. Ce test a concerné la moyenne et l'écart-type des différentes séries étudiées.

Pour la stationnarisation, on a utilisé la méthode non paramétrique pour les séries de débits mensuels (formule (II.11))

Le dégagement de la périodicité étant fait; On a vérifié que les moyennes et les variances sont proches respectivement de zéro et un .

$$y_t = Z_t \cdot \sigma_y + \mu_y$$

où  $\mu_y$  et  $\sigma_y$  sont la moyenne et l'écart-type de la variable Y respectivement.

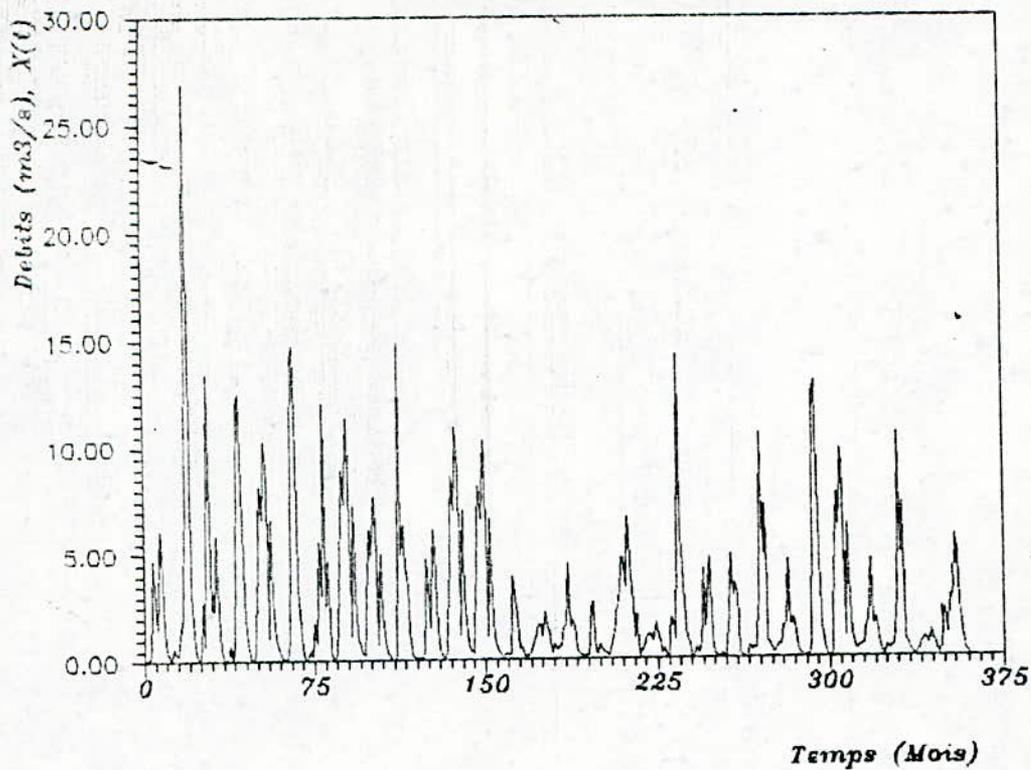


Figure (III.1a): Serie historique des debits mensuels  
(Serie de Oued DOUS)

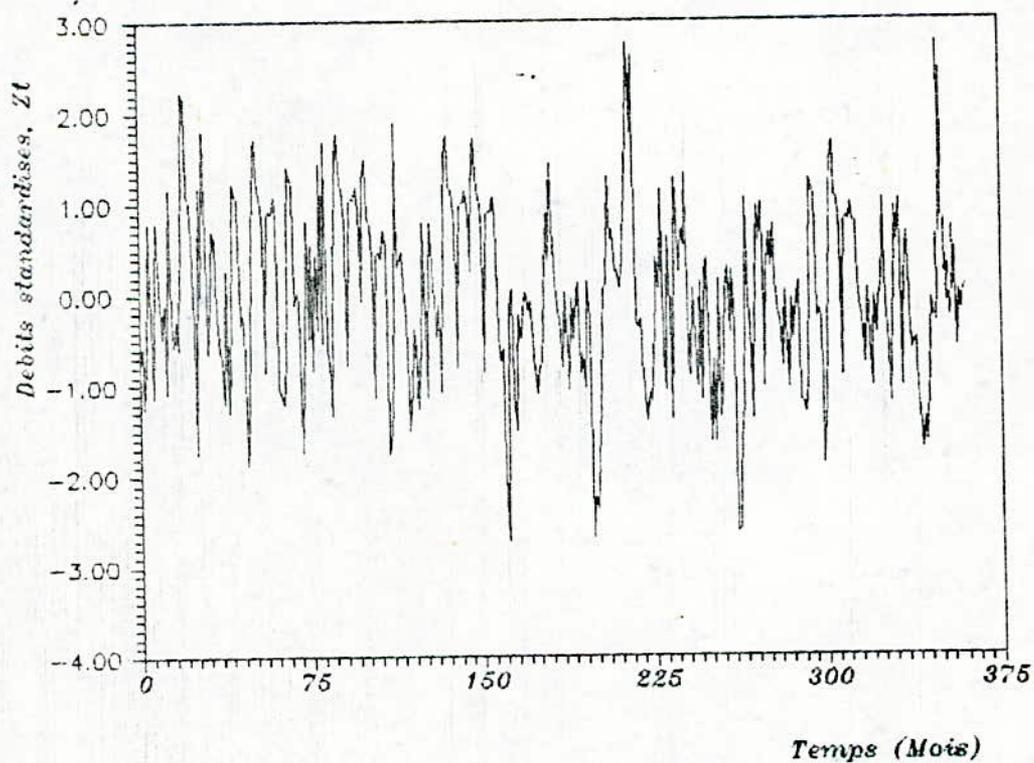


Figure (III.1b): Serie historique des debits mensuels  
standardises (Serie de Oued DOUS)

## III.3 - RESULTATS DE LA MODELISATION DES DEBITS MENSUELS.

Les différentes étapes de la modélisation des débits par les modèles ARMA-à coefficients constants présentés au chapitre I sont résumées dans cette partie, ensuite les résultats de chaque étape seront donnés.

III.3.1 - Résumé de la procédure de modélisation :

*Etape 1 :* Après transformation de la variable à modéliser en une variable normale et stationnaire, on calcule la moyenne  $\bar{Z}$  et la variance  $S^2$ , en utilisant les formules données en annexe (A).

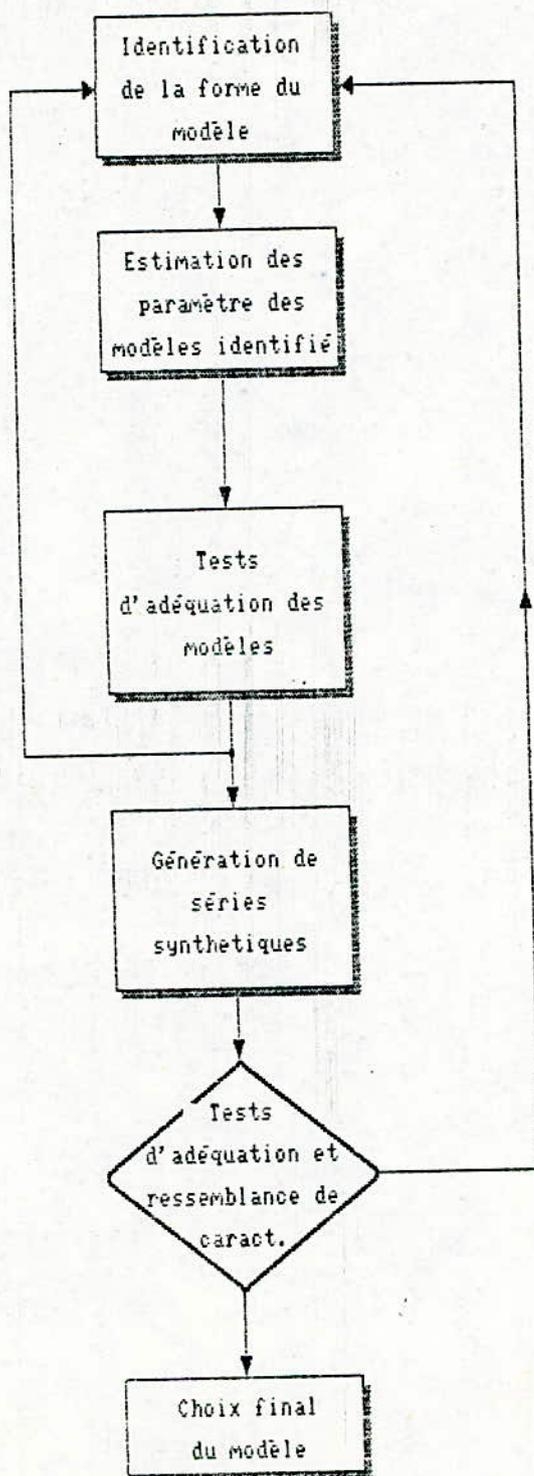
*Etape 2 :* Calculer et tracer la fonction d'autocovariance,  $C_k$  les coefficients d'autocorrélations  $r_k$  ainsi que les coefficients d'autocorrélations partielles  $\phi_k(k)$  en fonction du pas  $k$  ( $k=1, \dots, L$ ) où  $L$  est égal à au moins  $N/4$  mais inférieur à  $N$ . Les méthodes d'estimation de  $C_k$ ,  $r_k$  et  $\phi_k(k)$  sont données en annexe (A).

*Etape 3 :* A partir des fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielles, on identifie la forme du modèle à utiliser, c'est à dire on donne les valeurs des ordres  $p$  et  $q$  du modèle.

*Etape 4 :* Obtenir des estimateurs initiaux des paramètres autorégressifs  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  en résolvant le système de Yule-Walker (système d'équations (I.16) du chapitre I).

*Etape 5 :* Obtenir des estimateurs initiaux des coefficients de moyenne mobile et la variance des résidus  $\sigma_\varepsilon^2$ .

*Etape 6 :* Estimation des coefficients de moyenne mobile et autorégressifs par la méthode du maximum de vraisemblance, en

Organigramme général

minimisant la somme des carrés des résidus (Équation (I.23) du Chapitre I).

*Etape 7* : Tests du modèle, en commençant par la vérification de l'indépendance des résidus qui peut se faire soit par le test du Portemanteau ou le test d'Anderson.

Vérifier l'hypothèse de normalité des résidus, puis effectuer le test d'Akaike permettant de choisir les modèles qui seront concernés par les tests de ressemblance des caractéristiques statistiques.

*Etape 8* : Une fois le modèle ARMA choisi, on génère des séries synthétiques par :

$$Z_t = \sum_{j=1}^p \phi_j \cdot Z_{t-j} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \cdot \varepsilon_{t-j}$$

Il faut donc générer d'abord une variable aléatoire normale de moyenne nulle et d'écart-type 1, puis en la multipliant par  $\sigma_\varepsilon^2$  calculée en étape 7, on peut obtenir une variable aléatoire  $\varepsilon_t$  de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\varepsilon^2$ .

*Etape 9* : Faire les transformations inverses pour avoir les séries générées de la variable étudiée.

Si la série est standardisée par l'équation (II.11) (Chapitre II) la variance  $Y_t$  est obtenue à partir de :

$$Y_t = Z_t \cdot S_Y + \bar{Y} \quad (\text{III.1})$$

où  $\bar{Y}$  et  $S_Y$  sont respectivement la moyenne et l'écart-type de la variable  $Y_t$ .

Si la variable originale  $X_t$  a été normalisée par l'une des méthodes présentées au chapitre II, on doit effectuer les transformations inverses suivantes:

- Transformation de Box-Cox :

La variable  $Y_t$  étant générée,  $X_t$  peut être déterminée par :

$$X_t = (\lambda \cdot Y_t + 1)^{1/\lambda} \quad \lambda \neq 0 \quad (\text{III.2a})$$

$$X_t = \text{Exp}(Y_t) \quad \lambda = 0 \quad (\text{III.2b})$$

L'expression des  $X_t$  pour  $\lambda < 0$  pose des problèmes d'indétermination lorsque le terme  $\lambda \cdot Y_t + 1$  est négatif.

- Transformation de Beard :

Pour retrouver  $Z_{v,\tau}$ ,  $Y_{v,\tau}$  et  $X_{v,\tau}$  à partir des variables  $K_{v,\tau}$  générées, on applique les expressions suivantes:

$$Z_{v,\tau} = \frac{2}{g_\tau} \cdot \left[ \left( \frac{g_\tau}{6} \cdot (k_{u,\tau} - \frac{g_\tau}{6}) + 1 \right)^3 - 1 \right] \quad (\text{III.3})$$

$$Y_{v,\tau} = \bar{Y}_\tau + S_{Y\tau} \cdot Z_{v,\tau} \quad (\text{III.4})$$

$$X_{v,\tau} = \text{Exp}(\bar{Y} + S_{Y,\tau} \cdot Z_{v,\tau}) \quad (\text{III.5})$$

où  $\bar{Y}_\tau$ ,  $S_{Y\tau}$  et  $g_\tau$  sont la moyenne, l'écart-type et le coefficient d'asymétrie périodiques.

- Transformation du Log translaté :

Connaissant  $Y_t$  et  $\alpha$ ,  $X_t$  peut être déterminée par l'expression suivante :

$$X_t = \alpha + \text{Exp}(Y_t) \quad (\text{III.6})$$

### III.3.2 - Présentation des résultats :

#### a - Identification :

L'identification de la forme du modèle est faite sur la base des fonctions d'autocorrélations et d'autocorrélations partielles.

Les coefficients d'autocorrélations et d'autocorrélations partielles ont été calculés pour les différentes séries étudiées et pour les différentes transformations utilisées.

Les résultats des fonctions d'autocorrélations et d'autocorrélations partielles sont données sous forme graphique (figures (III.2a) et (III.2b)).

A partir de la fonction d'autocorrélation partielle, on localise les ordres des valeurs des coefficients qui sont significatifs à un intervalle de confiance de 95% et on propose d'étudier selon les cas :

- Les modèles autorégressifs ARMA (p,0) si l'ordre du dernier pic  $n_p$  ou de la dernière valeur significative à 95% est compris entre 1 et 7.
- Les modèles autorégressifs simplifiés SAR (1,1,m) si  $7 \leq n_p < 14$ .
- Les modèles ARMA (p,q) avec  $p \leq 2$  et  $q \leq 2$  pour le cas où  $n > 14$ .

Les représentations des fonctions d'autocorrélations partielles de l'ensemble des séries étudiées sont données en annexe (F).

On remarque que les résultats des fonctions d'autocorrélations

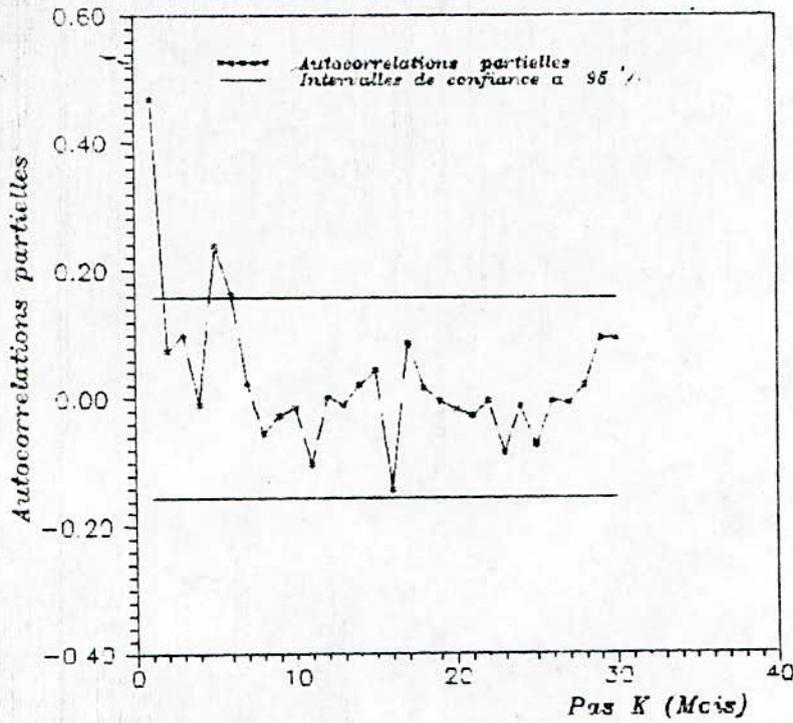


Figure (III.2b) - Fonction d'autocorrelation partielle des debits mensuels standardises (serie de CHEFFIA)

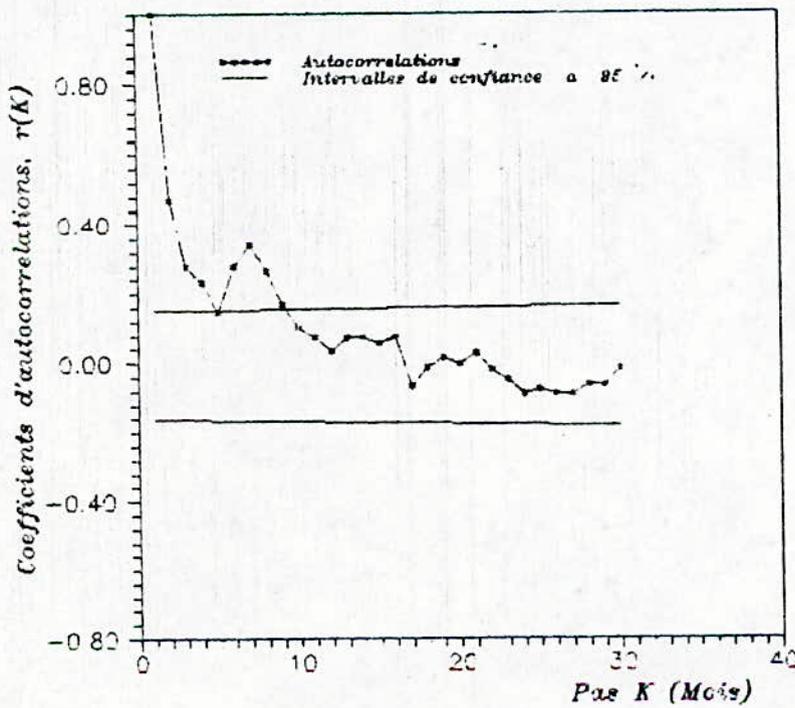


Figure (III.2a) - Fonction d'autocorrelation des debits mensuels standardises (serie de CHEFFIA)

et d'autocorrélations partielles ne diffèrent que légèrement d'une transformation à une autre et par conséquent, le type de transformation-utilisé n'influe pas sur l'identification du modèle.

Un nombre total de quatre vingt modèles ont été proposés pour l'étude. Ces derniers sont regroupés dans le tableau (III.3) .

Tableau III.3 - Résultats de l'identification

| SERIE          | Ordre des coefficients d'autocorrélations significatifs à 95% | Modèles proposés                                                                                         | transformations utilisées |
|----------------|---------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| OUED-BOUSSELAM | 1,25                                                          | ARMAC(1,0), ARMAC(1,1)<br>ARMAC(1,2), ARMAC(2,1)                                                         | LT<br>LTM<br>BD           |
| OUED DOUS      | 1,6,14<br>1,6,24<br>1,6,14                                    | ARMAC(1,0), ARMAC(6,0)<br>ARMAC(1,1), ARMAC(1,2)<br>ARMAC(2,1)                                           | LT<br>LTM<br>BD           |
| OUED-FODDA     | 1,11,14,25<br>2,17,14,25<br>2,11,14,25                        | ARMAC(1,0), ARMAC(2,0)<br>ARMAC(1,1), ARMAC(1,2)<br>ARMAC(2,1)                                           | LT<br>LTM<br>BD           |
| BENI-BAHDEL    | 1<br>1                                                        | ARMAC(1,0), ARMAC(2,1)<br>ARMAC(1,2), ARMAC(2,1)                                                         | LT<br>LTM                 |
| CHEFFIA        | 1,5,6,24                                                      | ARMAC(1,0), ARMAC(5,0)<br>ARMAC(6,0), ARMAC(1,1)<br>ARMAC(1,2), ARMAC(2,1)                               | LT<br>BD                  |
| CHEURFA        | 1,3,5,12,24<br>1,3,5,12,24                                    | ARMAC(1,0), ARMAC(3,0)<br>ARMAC(5,0), ARMAC(1,1)<br>ARMAC(1,2), ARMAC(2,1)<br>SARC(1,3,12), SARC(1,5,12) | LT<br>LTM                 |

LT - Transformation par le Log translaté.

LTM - Transformation par le Log translaté mensuel.

BD - Transformation de Beard.

b - Estimation des paramètres :

Pour l'estimation des paramètres des modèles identifiés, on a utilisé la méthode des moments pour avoir une première approximation de ces derniers, puis on a utilisé la méthode du maximum de vraisemblance, des résultats comparatifs entre les deux méthodes pour un modèle ARMA(1,1) appliqué à la série de Oued Dous sont donnés dans le tableau (III.4).

Tableau III.4 - Résultats comparatifs de la méthode des moments et du maximum de vraisemblance.

| transformation | Methode des moments |            |                        | Methode de M.L.E |            |                        |
|----------------|---------------------|------------|------------------------|------------------|------------|------------------------|
|                | $\phi_1$            | $\theta_1$ | $\sigma_\varepsilon^2$ | $\phi_1$         | $\theta_1$ | $\sigma_\varepsilon^2$ |
| LT             | 0.511               | 0.0119     | 0.7050                 | 0.514            | 0.010      | 0.7193                 |
| LTM            | 0.490               | -0.0061    | 0.7150                 | 0.485            | -0.035     | 0.7185                 |
| BD             | 0.500               | -0.0021    | 0.7180                 | 0.501            | -0.035     | 0.7155                 |

On a constaté que pour le cas de séries de grandes tailles (OUED DOUS, N = 360) la méthode des moments et celle du maximum de vraisemblance conduisent à des résultats assez proches.

Les résultats définitifs obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance donnés pour l'ensemble des séries de débits mensuels étudiées sont présentés dans les tableaux (III.5) et ceux donnés en annexe (H)

Tableau III.5 - Paramètres des modèles ARMA à coefficients constants série de Cheurfa

| T           | Modèle       | $\phi_1$ | $\phi_2$ | $\phi_3$ | $\phi_4$ | $\phi_5$ | $\phi_{12}$ | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $\sigma_e^2$ |
|-------------|--------------|----------|----------|----------|----------|----------|-------------|------------|------------|--------------|
| L<br>T      | ARMAC(1,0)   | .543     | -        | -        | -        | -        | -           | -          | -          | .6798        |
|             | ARMAC(3,0)   | .452     | .28      | .230     | -        | -        | -           | -          | -          | .6263        |
|             | ARMAC(5,0)   | .482     | -.013    | .258     | -.149    | .164     | -           | -          | -          | .6007        |
|             | ARMAC(1,1)   | .828     | -        | -        | -        | -        | -           | .460       | -          | .6494        |
|             | ARMAC(1,2)   | .980     | -        | -        | -        | -        | -           | .578       | .288       | .6272        |
|             | ARMAC(2,1)   | .867     | -.022    | -        | -        | -        | -           | .467       | -          | .6483        |
|             | SARC(1,3,12) | .462     | -        | .187     | -        | -        | .178        | -          | -          | .6007        |
|             | SARC(1,5,12) | .467     | -        | -        | -        | .178     | .178        | -          | -          | .6156        |
| L<br>T<br>M | ARMAC(1,0)   | .541     | -        | -        | -        | -        | -           | -          | -          | .6772        |
|             | ARMAC(3,0)   | .460     | .06      | .223     | -        | -        | -           | -          | -          | .6418        |
|             | ARMAC(5,0)   | .497     | -.029    | .245     | -.120    | .148     | -           | -          | -          | .6316        |
|             | ARMAC(1,1)   | .865     | -        | -        | -        | -        | -           | .510       | -          | .6512        |
|             | ARMAC(1,2)   | .978     | -        | -        | -        | -        | -           | .578       | .247       | .6222        |
|             | ARMAC(2,1)   | .862     | -.022    | -        | -        | -        | -           | .467       | -          | .6495        |
|             | SARC(1,3,12) | .460     | -        | .178     | -        | -        | .178        | -          | -          | .5950        |
|             | SARC(1,5,12) | .466     | -        | -        | -        | .178     | .178        | -          | -          | .6100        |

C - Tests d'adéquation :

Les tests d'adéquation utilisés sont :

- Les tests d'indépendance des résidus  $\varepsilon_t$  et indépendance des  $\varepsilon_t$  vis à vis des  $Z_t$ .
- Test de normalité des résidus.
- Test d'Akaike.

Les tests d'indépendance des  $\varepsilon_t$  et d'indépendance des  $\varepsilon_t$  vis à vis des  $Z_t$  ont été effectués pour des intervalles de confiance de 95% et 99% au moyen des autocorrélation des résidus et des covariances des  $\varepsilon_t$  et  $Z_t$  respectivement.

Le test d'indépendance des résidus n'est pas vérifié pour tous les modèles. En effet, le test est non satisfait pour certains modèles des séries de oued Dous, oued Fodda et de Benibahdel, on a remarqué de plus que la transformation utilisée pour normaliser les séries a un effet sur la satisfaction de ce test.

Le test d'indépendance des  $\varepsilon_t$  vis à vis des  $Z_t$  a été vérifié pour tous les modèles et ne pose aucun problème.

Le test d'Akaike a pour but de choisir les modèles sur la base du critère de parcimonie (modèle avec le moins de paramètres à estimer) en comparant les valeurs des AIC calculées pour les différents modèles (par la formule I.31. du chapitre I)

Tableau III.6 - classement général des six premiers modèles suivant le test d'Akaike

| Modèle<br>serie | 1er                         | 2ème                        | 3ème                       | 4ème                       | 5ème                    | 6ème                    |
|-----------------|-----------------------------|-----------------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Oued-<br>Bouss  | SARC(1,3,12)<br>LTC-149.1)  | ARMA(1,2)<br>BDX-144.8)     | ARMA(1,0)<br>BDX-142.9)    | ARMA(1,1)<br>BDX-142.3)    | ARMA(1,2)<br>LTC-141.7) | ARMA(2,1)<br>LTC-141.4) |
| Oued-<br>Dous   | ARMA(1,0)<br>BDX-117.5)     | ARMA(1,1)<br>BDX-117.3)     | ARMA(1,0)<br>BDX-115.7)    | ARMA(2,1)<br>BDX-115.1)    | ARMA(1,2)<br>BDX-115.0) | ARMA(1,2)<br>LTC-114.4) |
| Oued-<br>Fodda  | SARC(1,2,11)<br>LTC-113.9)  | SARC(1,2,11)<br>LTMC-109.3) | SARC(1,2,11)<br>BDX-107.8) | SARC(1,2,14)<br>LTC-103.7) | ARMA(2,1)<br>LTC-100.1) | ARMA(2,1)<br>LTC-98.6)  |
| Beni-<br>bahd.  | ARMA(1,0)<br>LTM            | ARMA(1,1)<br>LTM            | ARMA(1,2)<br>LTM           | ARMA(1,2)<br>LT            | ARMA(2,1)<br>LT         | ARMA(2,1)<br>LT         |
| Chef-<br>fia    | ARMA(1,0)<br>BDX-77.3)      | SARC(1,5,12)<br>BDX-76.3)   | ARMA(1,2)<br>BDX-76.1)     | ARMA(5,0)<br>BDX-75.3)     | ARMA(6,0)<br>BDX-73.7)  | ARMA(1,0)<br>LTC-70.8)  |
| Cheu-<br>rfa    | SARC(1,3,12)<br>LTMC-118.6) | SARC(1,5,12)<br>LTMC-112.6) | ARMA(1,2)<br>LTMC-105.9)   | ARMA(5,0)<br>LTC-102.3)    | ARMA(3,0)<br>LTC-100.8) | ARMA(1,1)<br>LTC-99.6)  |

65

Les six premiers modèles classés selon le AIC minimum sont donnés dans le tableau (III.6) .

Les modèles les plus satisfaisant du point de vue test d'Akaike sont les modèles SAR et ARMA (p,q) (p et q  $\neq$  0).

Sur la base des résultats des tests présentés ci-dessus, au moins quatre modèles seront choisis pour chaque série pour passer la deuxième phase de tests. Ces derniers concernent les tests de ressemblance des caractéristiques statistiques.

Après le choix des modèles à utiliser , des séries générées à partir de ces derniers sont obtenues après avoir déterminé des variables aléatoires indépendantes. Ces dernières sont simulées à partir de variables aléatoires uniformes .

Pour la transformation de la variable uniforme (0,1), on utilise les équations (Box et Muller, 1958) suivantes :

$$\varepsilon_1 = (\text{Ln}(1/u_1))^{1/2} - \cos(2\pi \cdot u_2)$$

$$\varepsilon_2 = (\text{Ln}(1/u_1))^{1/2} + \cos(2\pi \cdot u_2)$$

où  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont des variables aléatoires suivant la loi normale,  $u_1$  et  $u_2$  variables aléatoires de la loi uniforme (0,1).

#### d - Tests de ressemblance des caractéristiques statistiques :

Pour la comparaison des différentes caractéristiques statistiques des séries historiques et simulées, le classement des modèles diffère d'une caractéristique à une autre comme le montre le tableau (III.7) .

Pour avoir un classement général, on a calculé la moyenne des carrés des erreurs relatives de toutes les caractéristiques prises en considération. (Equation I.32 à I.34)

Tableau III.7 - Moyennes des erreurs relatives des caractéristiques statistiques globales (série de la Cheffia)

| Modèle      | Moyenne | Variance | Coef. Asy |
|-------------|---------|----------|-----------|
| ARMA(1,0)LT | 0.0315  | 0.8562   | 0.6307    |
| ARMA(5,0)LT | -0.0688 | 0.3505   | 0.8325    |
| ARMA(6,0)LT | -0.0712 | 0.3240   | 0.7954    |
| ARMA(1,1)LT | -0.1479 | 0.2776   | 0.0165    |
| ARMA(1,2)LT | -0.0930 | 0.0423   | 0.2470    |
| ARMA(1,0)BD | -0.0346 | 0.4598   | 0.3731    |
| ARMA(5,0)BD | -0.1820 | -0.2553  | 0.3120    |
| ARMA(6,0)BD | -0.1946 | -0.2960  | 0.2953    |
| ARMA(1,1)BD | -0.1359 | -0.0135  | 0.3772    |
| ARMA(1,2)BD | 0.1255  | 0.0500   | 0.2350    |

Pour toutes les transformations utilisés et pour tous les modèles, on constate que la caractéristique qui est la mieux reproduite est la moyenne. Les transformations utilisées ont une influence sur les résultats.

Une autre remarque peut aussi être faite concernant les transformations utilisées: La transformation qui conduit aux erreurs minimales est la méthode de Beard quant son utilisation est possible suivie de la méthode du log translaté mensuel puis la méthode du log translaté .

Tableau III.8 - Classement général des six premiers modèles après les tests d'adéquation et de ressemblance des caractéristiques

| Modèle<br>serie | 1er               | 2ème                | 3ème                | 4ème                | 5ème               | 6ème               |
|-----------------|-------------------|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------|--------------------|
| Oued-<br>Dous   | ARMAC(1,2)<br>LTM | ARMAC(2,1)<br>BD    | ARMAC(1,1)<br>LTM   | ARMAC(2,1)<br>LTM   | ARMAC(1,2)<br>LTM  | ARMAC(1,2)<br>LT   |
| Oued-<br>Bouss  | ARMAC(2,1)<br>LT  | ARMAC(2,1)<br>LTM   | ARMAC(1,2)<br>BD    | ARMAC(2,1)<br>BD    | ARMAC(1,0)<br>LT   | SARC(1,3,12)<br>LT |
| Oued-<br>Fodda  | ARMAC(2,1)<br>LTM | SARC(1,2,11)<br>LTM | ARMAC(2,1)<br>LT    | ARMAC(1,2)<br>LTM   | ARMAC(1,1)<br>LTM  | ARMAC(1,1)<br>LTM  |
| Beni-<br>bahd.  | ARMAC(2,1)<br>LTM | ARMAC(1,1)<br>LTM   | ARMAC(1,2)<br>LTM   | ARMAC(1,2)<br>LT    | ARMAC(2,1)<br>LT   | ARMAC(2,1)<br>LT   |
| Chef-<br>fia    | ARMAC(1,2)<br>LT  | ARMAC(1,1)<br>LT    | ARMAC(1,2)<br>BD    | ARMAC(1,2)<br>BD    | ARMAC(6,0)<br>BD   | ARMAC(6,0)<br>BD   |
| Cheu-<br>rfa    | ARMAC(1,1)<br>LT  | ARMAC(2,1)<br>LT    | SARC(1,5,12)<br>LTM | SARC(1,3,12)<br>LTM | SARC(1,5,12)<br>LT | SARC(1,3,12)<br>LT |

En complément des tests utilisés, on a vérifié la capacité des modèles ARMA à reproduire les caractéristiques des périodes extrêmes. On a calculé les caractéristiques statistiques des périodes extrêmes (moyenne des longueurs des périodes extrêmes, variance, ...etc) par les équations données au chapitre I. (Équation 1.35 à 1.39).

- Les remarques qui peuvent être faites sont :

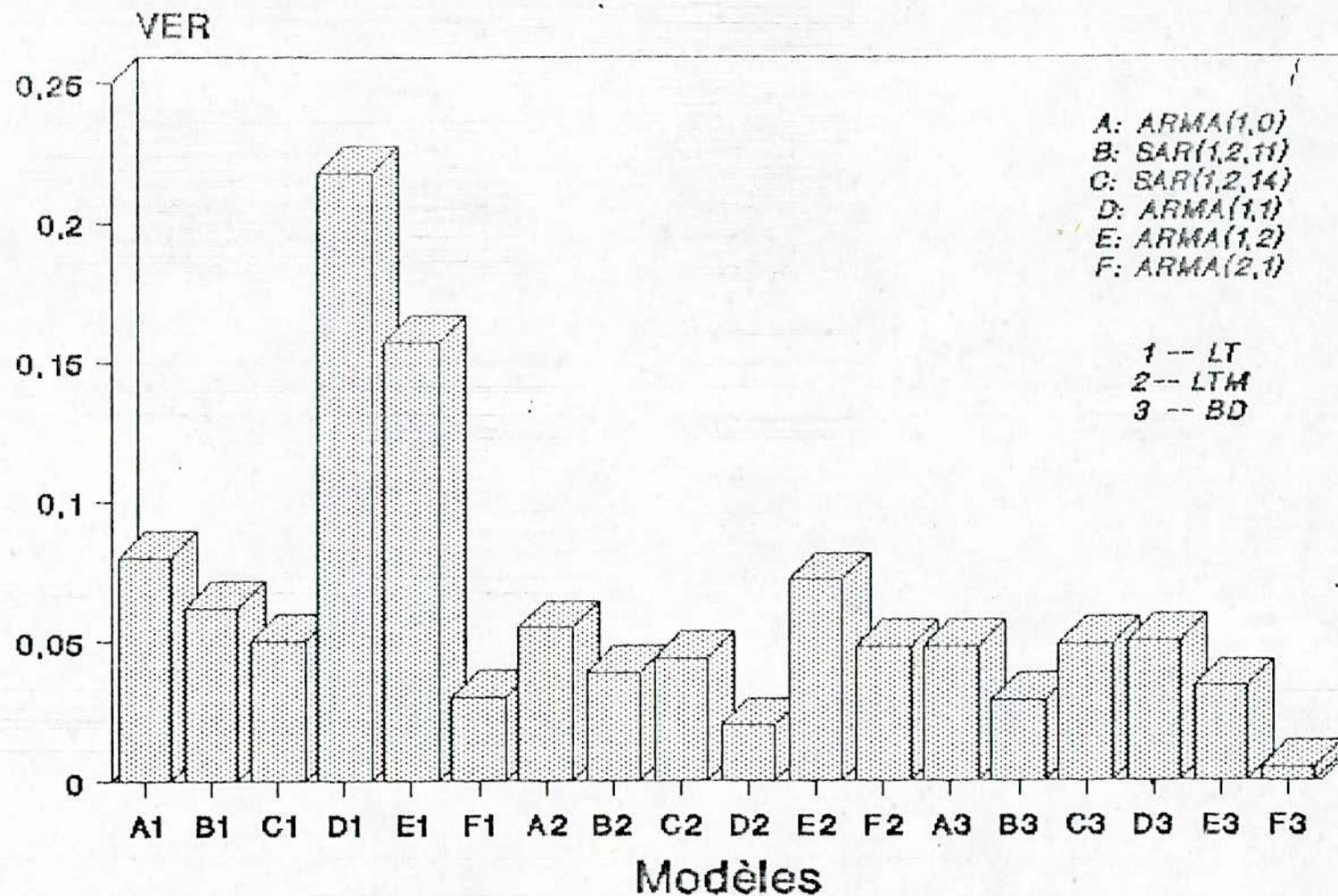
- Les modèles ARMA utilisées reproduisent mieux les caractéristiques des périodes humides que celles des périodes sèches.

- Les caractéristiques les mieux reconstituées sont les longueurs maximales des périodes extrêmes, les moyennes des longueurs ainsi que celles des volumes, celle qui est mal reconstituée est la variance.

Cependant, ces tests n'ont rien apporté de nouveau et n'affectent pas le classement des modèles fait sur la base des tests précédents.

Le meilleur modèle, en considérant les deux premiers choisis pour chaque série, est ARMA (2,1) (pour 5 séries sur 6) suivi de ARMA(1,1) et ARMA(1,2). Du point de vue transformations, celle qui conduit aux meilleurs résultats est le log translaté mensuel (4 séries sur 6) suivie de la transformation Log translaté (figure (III.3)).

Figure (III.3.) - Resultats du test de ressemblance des caractéristiques stat. (Série de Oued Fodda)



## III.4 - ESSAI DE MODELISATION DES SERIES DE DEBITS DECADEIRES :

Après simulation des débits mensuels par les modèles ARMA à coefficients constants, on a essayé de passer à un pas de temps inférieur au mois. On a utilisé deux séries de débits decadaires : Il s'agit des séries de Cheffia et de Oued Fodda.

Ces deux séries étant non symétriques (après test de normalité) ont été transformées par le Log translate et Beard et, stationnarisées par la méthode non paramétrique (figures (III.4) et (III.5)).

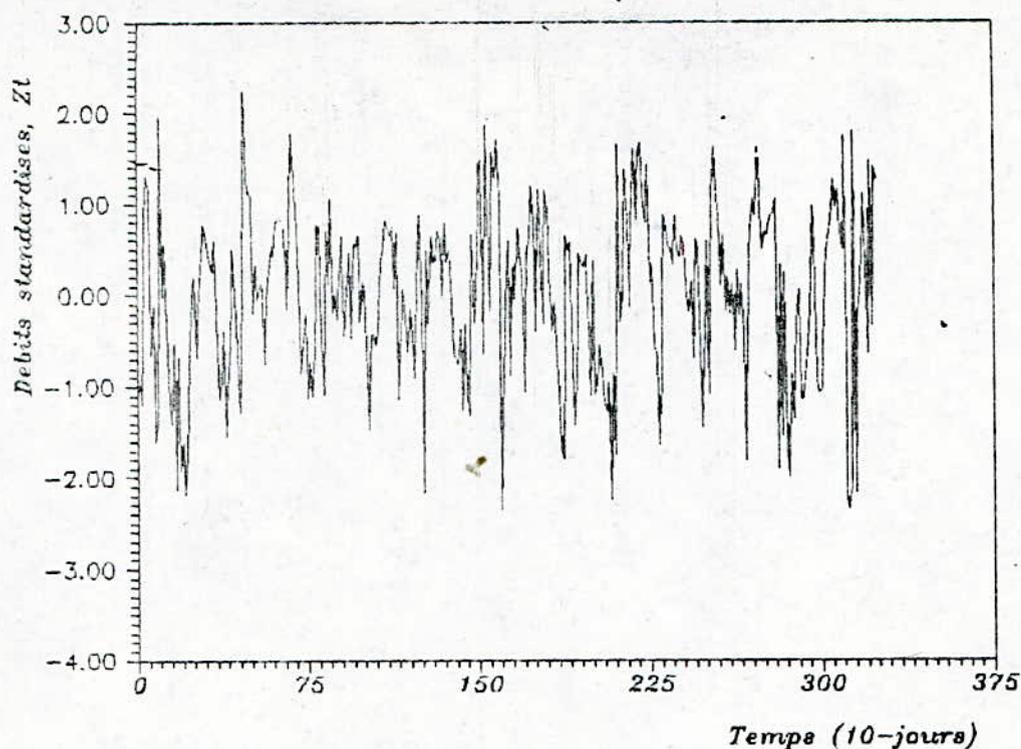


Figure (III.4): Serie historique des debits decadaires standardises (Serie de CHEFFIA)

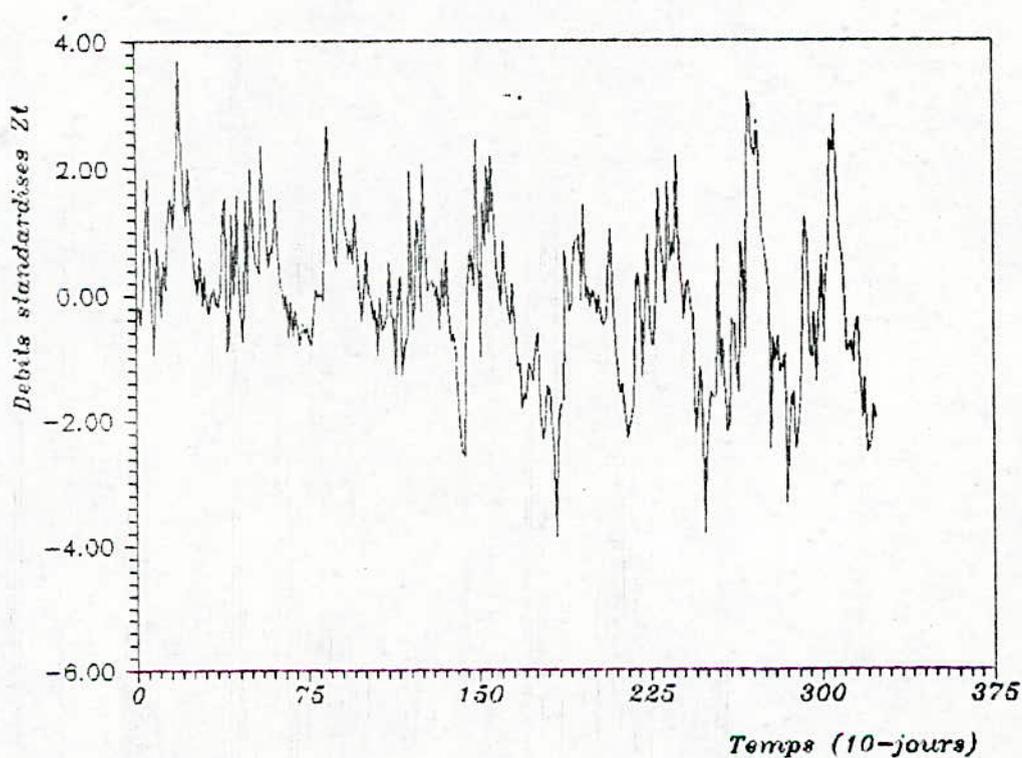


Figure (III.5): Serie historique des debits decadaires standardises (Serie de Oued FODDA)

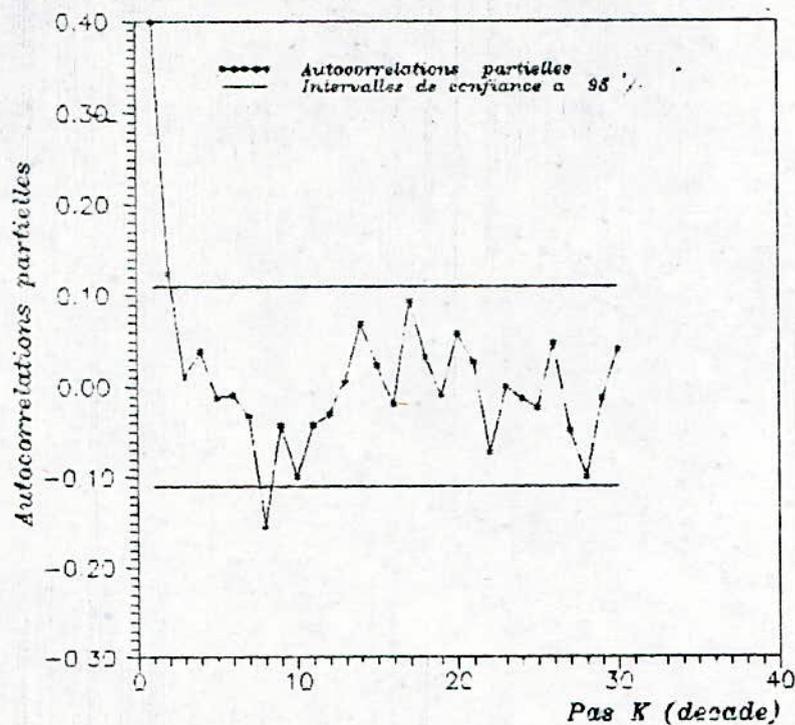


Figure 3.5b - Fonction d'autocorrelation partielle des debits standardises decadaires (serie de CHEFFIA)

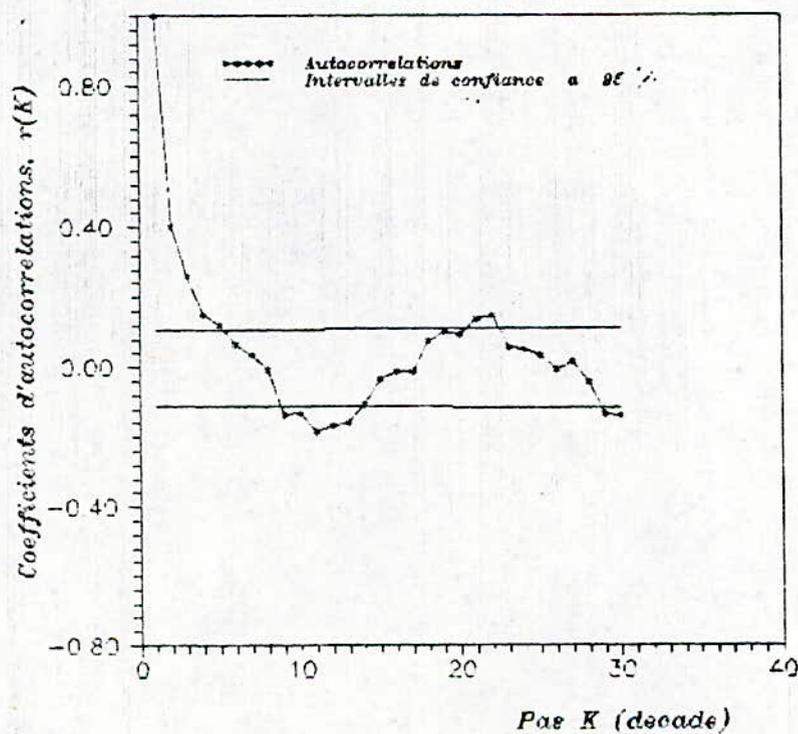


Figure 3.5a - Fonction d'autocorrelation des debits decadaires standardises (serie de CHEFFIA)

L'examen des fonctions d'autocorrélations partielles présentées par les figures (III.6b) pour la série de Cheffia et (F.7b) (annexe (F)) pour celle de Oued Fodda a conduit à proposer l'étude des 23 modèles donnés dans le tableau (III.9).

Tableau III.9 - Modèles à étudier pour les séries de débits decadaires

| Série          | Modèles                                                                                                                | Transformation               |
|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| CHEFFIA        | ARMAC(2,0), ARMAC(1,1), ARMAC(2,1),<br>ARMAC(1,2), SARC(1,2,8)                                                         | Log<br>translaté             |
| Oued-<br>Fodda | ARMAC(1,0), ARMAC(3,0), ARMAC(4,0),<br>ARMAC(2,2), ARMAC(1,2), ARMAC(2,1),<br>SARC(1,4,13), SARC(1,4,11), SARC(1,3,11) | Log translaté<br>et<br>Beard |

Les paramètres identifiés ont été estimés par la méthode du maximum de vraisemblance. Les résultats sont présentés dans les tableaux (III.10) et (III.11).

Tableau III.10 - Paramètres des modèles de la série de Cheffia

| TRASF.         | Modèle     | $\phi_1$ | $\phi_2$ | $\theta_1$ | $\theta_1$ | $\sigma_\epsilon^2$ |
|----------------|------------|----------|----------|------------|------------|---------------------|
| Log-<br>trans. | ARMAC(1,0) | 0.351    | 0.127    | -          | -          | 0.7386              |
|                | ARMAC(1,1) | 0.645    | -        | 0.053      | -          | 0.7321              |
|                | ARMAC(1,2) | 0.600    | -        | 0.247      | -0.022     | 0.7313              |
|                | ARMAC(2,1) | 0.838    | -0.022   | 0.378      | -          | 0.7314              |

Tableau III.11 - Paramètres des modèles de la série de Qued Fodda

| Trans.    | Modèle      | $\phi_1$ | $\phi_2$ | $\phi_3$ | $\phi_4$ | $\phi_{11}$ | $\phi_{13}$ | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $\sigma_\varepsilon^2$ |
|-----------|-------------|----------|----------|----------|----------|-------------|-------------|------------|------------|------------------------|
| Log-      | ARMA(1,0)   | 0.602    | -        | -        | -        | -           | -           | -          | -          | 0.5679                 |
|           | ARMA(4,0)   | 0.519    | 0.013    | 0.030    | 0.145    | -           | -           | -          | -          | 0.5493                 |
| Tran.     | SAR(1,4,11) | 0.578    | -        | -        | 0.178    | 0.178       | -           | -          | -          | 0.5200                 |
|           | SAR(1,4,13) | 0.578    | -        | -        | 0.178    | -           | 0.178       | -          | -          | 0.5184                 |
|           | ARMA(1,1)   | 0.579    | -        | -        | -        | -           | -           | 0.278      | -          | 0.5561                 |
|           | ARMA(1,2)   | 0.838    | -        | -        | -        | -           | -           | 0.267      | 0.178      | 0.5605                 |
|           | ARMA(2,1)   | 0.838    | -0.022   | -        | -        | -           | -           | 0.378      | -          | 0.5500                 |
| Beard     | ARMA(1,0)   | 0.601    | -        | -        | -        | -           | -           | -          | -          | 0.5596                 |
|           | ARMA(3,0)   | 0.541    | 0.014    | 0.123    | -        | -           | -           | -          | -          | 0.5064                 |
|           | SAR(1,4,13) | 0.526    | 0.012    | 0.053    | 0.128    | -           | -           | -          | -          | 0.5432                 |
|           | ARMA(4,0)   | 0.578    | -        | -        | -        | -           | -           | -          | -          | 0.5432                 |
|           | SAR(1,4,13) | 0.578    | -        | -        | -        | -           | -           | -          | -          | 0.5432                 |
|           | ARMA(1,1)   | 0.756    | -        | -        | -        | -           | -           | 0.256      | -          | 0.5064                 |
|           | ARMA(1,2)   | 0.838    | -        | -        | -        | -           | -           | 0.267      | 0.178      | 0.5412                 |
| ARMA(2,1) | 0.838       | -0.022   | -        | -        | -        | -           | 0.378       | -          | 0.5462     |                        |

Les tests d'indépendance des résidus ont été vérifiés pour tous les modèles étudiés pour un intervalle de confiance de 95%. Le tableau (III.12) montre le classement des 5 premiers modèles suivant le test d'Akaike (critère de parcimonie).

Tableau III.12 - Classement des modèles des séries de débits décennaires suivant le test d'Akaike

| Série      | 1 <sup>er</sup>   | 2 <sup>eme</sup>  | 3 <sup>eme</sup>  | 4 <sup>eme</sup>  | 5 <sup>eme</sup> |
|------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|------------------|
| Chef-ffia  | SAR(1,2,8)        | ARMA(1,1)         | ARMA(1,2)         | ARMA(2,1)         | ARMA(2,0)        |
| Oued-Fodda | SAR(1,4,13)<br>BD | SAR(1,3,11)<br>BD | SAR(1,4,13)<br>LT | SAR(1,4,11)<br>BD | ARMA(1,2)<br>BD  |

Comme pour le cas étudié des séries de débits au pas de temps mensuel, les modèles les plus satisfaisants du point de vue test d'Akaike sont les modèles SAR suivis des modèles ARMA(1,2) et ARMA(1,1).

Les tests de ressemblance des caractéristiques statistiques ont concerné les moyennes, variances et coefficients d'asymétrie décennaires (série prise par périodes) et globales. Les résultats des erreurs relatives des quatre premiers modèles classés suivant la moyenne des carrés des écarts des caractéristiques globales ( $\overline{VER}$  donnée par la formule I. ) sont présentés dans le tableau (III.13).

Tableau III.13 - Erreurs relatives sur les caractéristiques statistiques

| Serie      | Modèle        | Moyenne | Variance | Coef. var. |
|------------|---------------|---------|----------|------------|
| Cheffia    | ARMA(1,1)     | 0.1409  | 0.3957   | 0.2807     |
|            | ARMA(1,2)     | 0.0530  | 0.4307   | 0.4052     |
|            | ARMA(2,0)     | 0.1273  |          | 0.5172     |
| Oued-Fodda | SAR(1,4,11)LT | -0.0334 | -0.0386  | -0.4258    |
|            | SAR(1,4,13)BD | 0.0551  | 0.0015   | -0.2846    |
|            | ARMA(3,0)BD   | 0.0510  | 0.1892   | 0.1034     |
|            | ARMA(1,2)BD   | 0.0059  | -0.1196  | -0.2374    |

Les comparaisons des erreurs relatives des caractéristiques statistiques prises séparément conduit à faire le classement des quatre premiers modèles pour les séries de Cheffia et de Oued Fodda comme le montre le tableau (III.14).

Tableau III.14 - Classement des modèles pour chaque caractéristique

| Serie      | Classe | Moyenne       | Variance      | Coef. var.    |
|------------|--------|---------------|---------------|---------------|
| Cheffia    | 1      | ARMA(1,2)     | ARMA(1,1)     | ARMA(1,1)     |
|            | 2      | ARMA(2,0)     | ARMA(1,2)     | ARMA(1,2)     |
|            | 3      | ARMA(1,1)     | ARMA(2,0)     | ARMA(2,0)     |
| Oued-Fodda | 1      | ARMA(1,2)BD   | SAR(1,4,13)BD | ARMA(3,0)BD   |
|            | 2      | SAR(1,4,11)LT | ARMA(1,2)BD   | ARMA(1,2)BD   |
|            | 3      | ARMA(3,0)BD   | ARMA(3,0)BD   | SAR(1,4,13)BD |
|            | 4      | SAR(1,4,13)BD | SAR(1,4,11)LT | SAR(1,4,11)LT |

On voit que le classement des modèles diffère d'une caractéristique à une autre, mais si on considère les deux premiers pour les trois caractéristiques, les modèles à recommander pour la série de Cheffia sont ARMA(1,1) (deux caractéristiques sur trois), pour la série de Oued Fodda on choisira le modèle ARMA(1,2) suivi des modèles SAR(1,4,13) et ARMA(3,0) accompagnés de la transformation de Beard; puisque la moyenne est bien reproduite pour tous les modèles, on a fait le classement suivant la variance et le coefficient d'asymétrie.

Il est à noter que les écarts entre les caractéristiques decadaires pour la série de Oued Fodda sont satisfaisants ce qui n'est pas le cas pour la série de Cheffia. En effet l'examen de la fonction d'autocorrélation de la série de Cheffia (figure (III.6a)) montre que cette dernière est non stationnaire ce qui nous amène directement à dire que les résultats de la modélisation par ARMA à coefficients constants ne seront pas satisfaisants. Ce qui est en accord avec Salas et al. (1980, p.243). D'après ces auteurs, les modèles ARMA à

coefficients donnent de bons résultats lorsque la fonction d'autocorrélation de la série étudiée est stationnaire.

### III.5 - Conclusion:

L'objectif de cette première partie était la recherche des meilleurs modèles ARMA à coefficients constants pour la génération de séries de débits mensuels et décennaires de certaines rivières algériennes et on est arrivé aux conclusions suivantes:

- Dans le traitement préalable des données, le test de normalité appliqué aux séries de débits mensuels et décennaires a montré que ces dernières étaient non symétriques, alors les transformations de log translaté, Log translaté périodique, Beard et Box-Cox leur ont été appliquées pour les rendre normales.

La méthode de Box-Cox pose des problèmes d'indétermination pour toutes les séries étudiées, elle est donc non recommandée pour les séries de débits algériennes.

- L'élimination des périodicités des séries historiques par la méthode non paramétrique a conduit à des séries stationnaires et autocorrélées.

- L'identification de l'ordre du modèle a été faite au moyen de la fonction d'autocorrélation partielle pour les modèles  $ARMA(p,0)$  et SAR.

- L'estimation des paramètres par la méthode des moments et par la méthode du maximum de vraisemblance ont conduit aux mêmes résultats, cependant ceci n'a pas été vérifié pour les séries de petites tailles pour lesquelles les écarts entre les deux estimateurs étaient significatifs (plus de 20%). La méthode des moments ne peut

être utilisée que pour avoir une estimation préliminaire des paramètres.

- Le classement suivant le test d'Akaike ne coïncide pas toujours avec celui obtenu après application des autres tests de ressemblance des caractéristiques statistiques, aussi les valeurs correspondantes aux différents modèles ne varient pas considérablement d'un modèle à un autre. Ceci est peut être dû à l'importance de la taille des séries étudiées, ce qui rend le test peu sensible et insuffisant pour le choix final des modèles.

- Les tests de ressemblance des caractéristiques statistiques sont influencés par les méthodes de transformation utilisées. Pour la plupart des séries étudiées, les modèles sont classés par groupes obéissant à la même transformation.

- Les modèles ARMA à coefficients constants reproduisent plus facilement les caractéristiques des périodes humides que celles des périodes sèches, pour la plupart des séries ces dernières sont sous-estimées et les écarts correspondants dépassent 20%.

- Les modèles ARMA à coefficients constants recommandés pour les séries algériennes sont ARMA(1,2) et ARMA(2,1) auxquelles on applique les transformations Log translaté et Log translaté périodique. Les transformations de Beard et de Box-Cox sont à écarter pour éviter les problèmes d'indétermination qui peuvent se poser.

- La modélisation des séries de débits décennaires nous a amené à choisir les modèles ARMA(1,2) et SAR accompagnés des transformations de Beard et du Log translaté pour les séries dont la fonction d'autocorrélation est approximativement stationnaire.

- Pour les séries dont la fonction d'autocorrélation est non stationnaire (périodique), les modèles ARMA à coefficients constants ne satisfont pas le test de ressemblance des caractéristiques statistiques périodiques, ils sont donc à écarter et on propose de faire la modélisation par ARMA à coefficients périodiques.

## MODELES DE GESTION D'UN RESERVOIR

## IV.1 - INTRODUCTION:

La gestion de l'eau d'une retenue est un problème que connaît un gestionnaire quand il doit faire face à une demande en eau de différents usagers et aux différents périodes de l'année. Elle peut être faite à l'aide des méthodes directes utilisées jusqu'à maintenant en Algérie et qui on conduit plusieurs problèmes et défaillance comme on a pu le constater pour le barrage de la Cheffia durant ces dernières années.

Cependant, pour une gestion plus rigoureuse de cette ressource, l'introduction des méthodes d'optimisation pour la recherche de la meilleure règle de fourniture d'eau est nécessaire.

Les modèles mathématiques les plus utilisés dans ce domaine sont :

- La programmation linéaire.
- La programmation dynamique.

appliquées en environnement déterministe ou stochastique.

## IV.2 - MODELE DE REGLE DE DECISION LINEAIRE:

Une application de la programmation linéaire stochastique est le modèle de règle de décision linéaire. Ce modèle a été utilisé pour la première fois pour la gestion et le dimensionnement des réservoirs par Revelle et al. (1969).

Le modèle proposé est donné par :

$$R_t = S_{t-1} - b_t \quad (\text{IV.1})$$

où  $R_t$  : Volume fourni durant la période  $t$ ;  
 $S_{t-1}$  : Volume stocké à la fin de la période  $t-1$ ;  
 $b_t$  : Paramètre de décision à déterminer pour chaque période  $t$ .

Ce modèle a été par la suite amélioré par plusieurs auteurs :  
 Revelle et Kirby (1970) et Eastman et Revelle (1973).

Ensuite Revelle et Gundelach (1975) ont proposé une règle plus générale en introduisant les volumes entrant de plusieurs périodes antérieures.

La forme générale de ce modèle est :

$$R_t = S_{t-1} + \alpha_{\tau} \cdot I_t - \delta_{\tau-1} \cdot I_{t-1} - \gamma_{\tau-1} \cdot I_{t-2} + \dots + b_{\tau} \quad (\text{IV.2})$$

où  $\alpha_{\tau}$ ,  $\delta_{\tau-1}$ ,  $\gamma_{\tau-2}$  sont des coefficients de pondération à déterminer

$b_{\tau}$  : Variable de décision correspondant au mois  $\tau$  et qui est à déterminer;  
 $S_{t-1}$  : Volume du réservoir à la fin du mois  $t-1$ ;  
 $I_t$  : Volume entrant au réservoir pendant le mois  $t$ ;  
 $R_t$  : Volume fourni par le réservoir pendant le mois  $t$ ;  
 $\tau$  : Correspond au mois  $t$  de l'année  $v$ .

L'équation de continuité est :

$$S_t = S_{t-1} + I_t - R_t$$

La combinaison de l'équation (IV.2) avec l'équation de continuité donne :

$$S_t = (1 - \alpha_\tau) \cdot I_t + \delta_{\tau-1} \cdot I_{t-1} + \gamma_{\tau-2} \cdot I_{t-2} + \dots + b_\tau \quad (\text{IV.3})$$

et le volume fourni au temps t sera donné par :

$$R_t = \alpha_\tau \cdot I_t + (1 - \alpha_{\tau-1} - \delta_{\tau-1}) \cdot I_{t-1} + (\delta_{\tau-2} - \gamma_{\tau-2}) \cdot I_{t-2} + \gamma_{\tau-3} \cdot I_{t-3} + \dots - b_{\tau-1} + b_\tau \quad (\text{IV.4})$$

Si on pose :

$$J_t = (1 - \alpha_\tau) \cdot I_t + \delta_{\tau-1} \cdot I_{t-1} + \gamma_{\tau-2} \cdot I_{t-2} + \dots \quad (\text{IV.5})$$

$$K_t = \alpha_\tau \cdot I_t + (1 - \alpha_{\tau-1} - \delta_{\tau-1}) \cdot I_{t-1} + (\delta_{\tau-2} - \gamma_{\tau-2}) \cdot I_{t-2} + \gamma_{\tau-3} \cdot I_{t-3} + \dots \quad (\text{IV.6})$$

Les expressions de  $S_t$  et  $R_t$  deviennent

$$S_t = J_t - b_\tau \quad (\text{IV.7})$$

$$R_t = K_t - b_{\tau-1} + b_\tau \quad (\text{IV.8})$$

La fonction objectif du modèle LDR est la minimisation de la capacité du réservoir tout en satisfaisant trois groupes de contraintes probabilistes.

- Dissipation des crues
- Stockage minimum.
- Volume fourni minimum.

Une description des contraintes probabilistes du problème est donnée ci-dessous : (Revelle et Gundelach 1975)

\* CONTRAINTE DE DISSIPATION DES CRUES :

Le réservoir doit avoir une taille suffisante qui lui permet de prévoir une tranche pour la dissipation des crues dont le volume doit être d'au moins  $V_{\tau}$  avec une probabilité d'au moins  $\beta_1$  pour la période  $t$ .

La formulation probabiliste de cette contrainte est donnée par :

$$P \left[ C - S_t \geq V_{\tau} \right] \geq \beta_1 \quad \forall t, t = 1, 2, \dots, N \quad (\text{IV.9})$$

où  $C$  : Capacité du réservoir

$S_t$  : Volume du réservoir à la fin de la période  $t$ ;

$V_{\tau}$  : Tranche du réservoir destinée à la dissipation des crues pendant le mois  $\tau$

$\beta_1$  : Probabilité pour que  $V_{\tau}$  soit dépassée.

\* CONTRAINTE DE STOCKAGE MINIMUM :

Un volume d'eau stocké dans le réservoir supérieur ou égal à  $S_{\min}$  doit être maintenu avec une probabilité de réussite d'au moins  $\beta_2$  pour chaque période  $t$ . La forme de cette contrainte est :

$$P \left[ S_t \geq S_{\min} \right] \geq \beta_2 \quad \forall t, t = 1, 2, \dots, N \quad (\text{IV.10})$$

où  $S_{\min}$  : Volume minimum du réservoir au dessous duquel il ne faut pas descendre.

$\beta_2$  : Probabilité pour que  $S_{\min}$  soit dépassée.

## \* CONTRAINTE DE VOLUME FOURNI MINIMUM

Un volume supérieur ou égal à  $q$  doit être fourni par le réservoir avec une probabilité d'au moins  $\beta_3$  pour chacun des mois. La formulation probabiliste est :

$$P [R_t \geq q_t] \geq \beta_3 \quad \forall t, t = 1, 2, \dots, N \quad (\text{IV.11})$$

où  $q_t$  : Volume fourni minimum pendant la période  $t$ ;

$\beta_3$  : Probabilité pour  $q_t$  soit dépassée pendant une période.

Après substitution de  $S_t$  par son équation (IV.7) et  $R_t$  par l'équation (IV.8). Ces trois types de contraintes probabilistes peuvent être transformés en leurs équivalentes déterministes linéaires celles-ci sont données par :

$$\text{CONTRAİNTE I} \quad C + b_t \geq V_t + F_{jt}^{-1}(\beta_1) \quad (\text{IV.12})$$

$$\text{CONTRAİNTE II} \quad b_t \leq F_{jt}^{-1}(1-\beta_2) - S_{\min} \quad (\text{IV.13})$$

$$\text{CONTRAİNTE III} \quad b_t - b_{t-1} \geq q_c - F_{kt}^{-1}(1-\beta_3) \quad (\text{IV.14})$$

où  $F_{jt}$  et  $F_{kt}$  sont les fonctions de répartition des séries  $J_t$  et  $K_t$  respectivement.

La formulation mathématique pour obtenir une politique optimale de fourniture d'eau d'un réservoir s'écrira :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } C \\ C + b_{\tau-1} \geq V_{\tau} + F_{jt}^{-1} (\beta_1) \\ b_{\tau} \leq F_{jt}^{-1} (1-\beta_2) - S_{\min} \\ b_{\tau} - b_{\tau-1} > q_{\tau} - F_{kt}^{-1} (1-\beta_3) \quad \tau = 1, 2, \dots, 12 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(IV.15a)} \\ \text{(IV.15b)} \\ \text{(IV.15c)} \\ \text{(IV.15d)} \end{array}$$

La résolution du problème linéaire ci-dessus nécessite la connaissance des valeurs de  $S_{\min}$ ,  $V_{\tau}$  et  $q_{\tau}$ . Le volume stocké minimum  $S_{\min}$  est pris égal au volume mort du barrage, la valeur du volume minimum à fournir est déterminée (fixée) à partir de la condition de faisabilité du problème imposée par cette valeur.

En sommant les contraintes sur le volume minimum fourni sur l'ensemble des mois (équation (IV.15d)) on obtient la condition nécessaire pour que le problème linéaire soit réalisable:

$$\sum_{\tau=1}^{12} q_{\tau} \leq \sum_{t=1}^{12} F_{kt}^{-1} (1-\beta_3) \quad \text{(IV.16)}$$

La procédure de développement du modèle de règle de décision linéaire peut être résumé comme suit :

*Etape 1* - Vu la difficulté d'étudier le modèle présenté précédemment sous sa forme générale on est amené à définir une forme plus simple de la règle linéaire à utiliser pour la fourniture pour chaque période à partir de l'équation (IV.2), pour cela on a besoin de choisir le nombre de coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ , ...etc qui sont différents de zéro.

Etape 2 - Exprimer la règle linéaire choisie en étape (1) en fonction des volumes entrant (équation (IV.4)).

Etape 3 - Obtenir les expressions de la variance pour chaque  $R_t$  à partir de l'équation qui sera donnée ultérieurement. Une analyse statistique de la série historique sera ensuite faite pour déterminer les constantes  $\text{Var} (I_j)$  et  $\text{Cov} (I_j, I_k)$ .

Etape 4 - Déterminer les paramètres du modèle choisi  $\alpha_r, \delta_r, \dots$  ( $r = 1, 2, \dots, 12$ ).

Etape 5 - A partir des coefficients du modèle déterminés en étape 4, on peut obtenir les séries  $J_t$  et  $K_t$  et leurs fonctions de répartition, on peut ensuite estimer les valeurs de  $F_{jt}^{-1}(\beta_1)$ ,  $F_{jt}^{-1}(1-\beta_2)$  et  $F_{kt}^{-1}(1-\beta_3)$ .

Etape 6 - Ayant fixé les valeurs de  $S_{min}$ ,  $V_r$  et  $q_r$  pour chaque période on peut résoudre le problème linéaire (IV.15) pour obtenir la capacité  $C$  et les variables de décision  $b_r$ .

La description des étapes ci-dessous est faite dans les paragraphes (I.5 et I.6).

#### IV.2.1 - Choix des modèles à étudier :

Des modèles différents peuvent dériver de la forme générale, quatre modèles seront choisis pour l'étude. Ces modèles sont désignés par LDR1, LDR2, LDR3, et LDR4 et sont présentés dans ce qui suit :

MODELE LDR1 :

Si on pose  $\alpha_\tau \neq 0$ ,  $\delta_{\tau-1} = \gamma_{\tau-2} = \dots = 0$  dans l'équation générale du modèle LDR (équation (IV.2)) on obtient la forme du modèle désigné par LDR1 et qui peut être écrit:

$$R_t = S_{t-1} + \alpha_\tau \cdot I_t + b_\tau \quad (\text{IV.17})$$

En prenant en considération l'équation de continuité on obtient :

$$S_t = (1-\alpha_\tau) \cdot I_{t-1} - b_\tau \quad (\text{IV.18})$$

et 
$$R_t = \alpha_\tau \cdot I_t + (1-\alpha_{\tau-1}) \cdot I_{t-1} + b_\tau - b_{\tau-1} \quad (\text{IV.19})$$

on pose 
$$J = (1-\alpha_\tau) \cdot I_{t-1} \quad (\text{IV.20})$$

et 
$$K_t = \alpha_\tau \cdot I_t + (1-\alpha_{\tau-1}) \cdot I_{t-1} \quad (\text{IV.21})$$

MODELE LDR2 :

Si on pose  $\delta_{\tau-1} \neq 0$ ,  $\alpha_\tau = \gamma_{\tau-2} = \dots = 0$ , on obtient le modèle LDR2 :

$$R_t = S_{t-1} - \delta_{\tau-1} \cdot I_{t-1} - b_\tau \quad (\text{IV.22})$$

La combinaison avec l'équation de continuité donne

$$S_t = I_t + \delta_{\tau-1} \cdot I_{t-1} - b_\tau \quad (\text{IV.23})$$

$$R_t = (1-\delta_{\tau-1}) \cdot I_{t-1} + \delta_{\tau-2} \cdot I_{t-2} + b_\tau - b_{\tau-1} \quad (\text{IV.24})$$

On pose :

$$J_t = I_t + \delta_{\tau-1} \cdot I_{t-1} \quad (\text{IV.25})$$

$$K_t = (1 - \delta_{\tau-1}) \cdot I_{t-1} + \delta_{\tau-2} \cdot I_{t-2} \quad (\text{IV.26})$$

MODELE LDR3 :

Le modèle LDR3 correspond au modèle LDR sous sa première forme celle donnée par Revelle et Eastman, (1969)

$$R_t = S_{t-1} + b_{\tau} \quad (\text{IV.27})$$

Les équations qui en découlent sont :

$$S_t = I_t - b_{\tau} \quad (\text{IV.28})$$

$$R_t = I_{t-1} + b_{\tau} - b_{\tau-1} \quad (\text{IV.29})$$

on pose :

$$J_t = I_t \quad (\text{IV.30})$$

$$\text{et } K_t = I_{t-1} \quad (\text{IV.31})$$

MODELE LDR4 :

Le modèle désigné par LDR4 est obtenu en formule  $\alpha_{\tau} = 1$  et  $\delta_{\tau-1} = \gamma_{\tau-2} = \dots = 0$  dans l'équation générale du modèle LDR :

$$R_t = S_{t-1} + I_t + b_{\tau} \quad (\text{IV.32})$$

Les équations qui découlent de la combinaison de l'équation (IV.32) avec l'équation de continuité sont:

$$S_t = -b_\tau \quad (\text{IV. 33})$$

$$R_t = I_t + b_\tau - b_{\tau-1} \quad (\text{IV. 34})$$

On pose  $J_t = 0 \quad (\text{IV. 35})$

et  $K_t = I_t \quad (\text{IV. 36})$

#### IV.2.2 - Determination des parametres du modele ldr:

La détermination des paramètres du modèle LDR ( $\alpha_\tau, \delta_\tau, \gamma_\tau \dots \tau = 1, 2, \dots, 12$ ), peut être faite par la méthode de minimisation de l'espérance mathématique de la somme pondérée des carrés des écarts entre les volumes fournis mensuels et les volumes demandés.

La fonction à minimiser est exprimée par :

$$\min Z = E \left[ \sum_{\tau=1}^{12} \omega_\tau \cdot (R_t - I_t)^2 \right] \quad (\text{IV. 37a})$$

où  $R_t$  : Volume fourni pendant le mois  $t$ ;

$I_t$  : Volume demandé pendant le mois  $t$ ;

$(R_t - I_t)^2$ : représente la fonction perte;

$\omega_\tau$  : Coefficients de pondération mensuels pendant le mois  $\tau$  de l'année  $v$ ,  $\tau = t \text{ Mod}(12)$

$$Z = \sum_{\tau=1}^{12} \omega_\tau \cdot \left[ E [R_t^2] - 2 \cdot I_t \cdot E [R_t] + I_t^2 \right] \quad (\text{IV. 37b})$$

D'autre part, la variance des  $R_t$  est définie par :

$$\text{Var } R_t = E [R_t^2] - (E [R_t])^2$$

Par substitution de  $E [R_t^2]$  dans (35b) on obtient :

$$\min Z = \sum_{\tau=1}^{12} \omega_{\tau} \cdot \text{Var } (R_{\tau}) + \sum_{\tau=1}^{12} \omega_{\tau} \cdot [E [R_{\tau}] - T_{\tau}]^2 \quad (\text{IV.38})$$

On peut ajouter une contrainte tel que le second terme de l'équation (IV.38) soit égal à zéro :

$$E [R_t] = T_t \quad (\text{IV.39})$$

L'expression de  $\min Z$  devient alors :

$$\min Z = \sum_{\tau=1}^{12} \omega_{\tau} \cdot \text{Var } (R_{\tau}) \quad (\text{IV.40})$$

l'équation du modèle LDR est donnée par :

$$R_t = \alpha_{\tau} \cdot I_t + (1 - \alpha_{\tau-1} - \delta_{\tau-1}) \cdot I_{t-1} + (\delta_{\tau-2} - \gamma_{\tau-2}) \cdot I_{t-2} + \dots - b_{\tau-1} + b_{\tau} \quad (\text{IV.41})$$

Si on note  $a_j$  les coefficients de  $I_j$  dans (IV.13) la variance des  $R_j$  peut être donnée par :

$$\text{Var } (R_j) = \sum_j^t a_j^2 \cdot \text{Var } (I_j) + \sum_{k \neq j}^t \sum_j^t a_j \cdot a_k \text{Cov } (I_j, I_k) \quad (\text{IV.42})$$

Après avoir fixé les valeurs des coefficients de pondération  $\omega_t$ , la détermination du minimum de la fonction (IV.40) se fait en annulant les dérivées de Z par rapport aux coefficients ( $\alpha_t, \delta_t, \gamma_t, \dots, \tau = 1, 2, \dots, 12$ ) et en résolvant le système linéaire qui en découle.

On présentera ci-dessous la démarche à suivre pour l'exemple particulier du modèle LDR1.

L'équation du modèle LDR1 est

$$R_t = \alpha_t \cdot I_t + (1 - \alpha_{t-1}) \cdot I_{t-1} + b_t - b_{t-1}$$

D'après l'équation (IV.42), on a

$$\text{Var}(R_t) = \alpha_t^2 \cdot \sigma_t^2 + (1 - \alpha_{t-1})^2 \cdot \sigma_{t-1}^2 + 2 \alpha_t \cdot (1 - \alpha_{t-1}) \cdot \sigma_{t, t-1} \quad (\text{IV.43})$$

$$\text{où } \sigma_j^2 = \text{Var}(I_j)$$

$$\text{et } \sigma_{j,k} = \text{Cov}(I_j, I_k)$$

Si on se propose d'accorder la même importance aux demandes de tous les mois de l'année, on prend  $\omega_t = 1 \forall t, t = 1, 2, \dots, 12$ .

Z s'écrit alors :

$$Z = \sum_{\tau=1}^{12} \left[ \alpha_{\tau}^2 \cdot \sigma_{\tau}^2 + (1 - \alpha_{\tau-1})^2 \cdot \sigma_{\tau-1}^2 + 2 \cdot \alpha_{\tau} \cdot (1 - \alpha_{\tau-1}) \cdot \sigma_{\tau, \tau-1} \right] \quad (\text{IV.44})$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \alpha_{\tau}} = (4 \alpha_{\tau} - 2) \sigma_{\tau}^2 + 2 (1 - \alpha_{\tau-1}) \cdot \sigma_{\tau, \tau-1} - 2 \alpha_{\tau+1} \cdot \sigma_{\tau+1, \tau} = 0 \quad (\text{IV.45})$$

La résolution du système ainsi obtenu permet l'obtention des paramètres du modèle LDR1  $\alpha_{\tau}$  ( $\tau = 1, 2, \dots, 12$ )

IV.2.3 - Algorithme de résolution du système linéaire du modèle ldr :  
(Gundelach et Reville, 1975).

En considérant la fonction objectif et le premier groupe de contraintes (IV.15b) on peut voir que la solution du problème peut être obtenue par :

$$C = \max \left[ F_{jt}^{-1} (\beta_1) + V_{\tau} - b_{\tau} \right] \quad (\text{IV.46})$$

$$\tau = 1, 2, \dots, 12$$

D'autre part à partir des contraintes des groupes II et III (Équations (IV.15b) et (IV.15c)) on a respectivement :

$$b_{\tau} \leq F_{jt}^{-1} (1 - \beta_2) - S_{\min}$$

$$b_{\tau} \leq b_{\tau+1} - q_{\tau+1} + F_{k\ell+1}^{-1} (1 - \beta_3)$$

Ces deux équations conduisant à :

$$b_{\tau} = \min \left[ b_{\tau+1} - q_{\tau+1} + F_{k\ell+1}^{-1} (1 - \beta_3), F_{jt}^{-1} (1 - \beta_2) - s_{\min} \right] \quad (\text{IV.47})$$

$$\tau = 1, 2, \dots, 12$$

On pose :  $J_k^{(1-\beta_2)} = F_{jt}^{-1}(1-\beta_2)$

et  $K_k^{(1-\beta_3)} = F_{Kt}^{-1}(1-\beta_3)$ .

L'algorithme de résolution proposé par Revelle et Gundelach, (1975) est donné comme suit :

ETAPE 1. Faire  $b_k^1 = J_k^{(1-\beta_2)} - S_{min}$  pour  $\forall k \in [1,12]$

ETAPE 2. Pour  $l = 1, 2, \dots, 11$  faire

$$b_{k-1}^1 = \min \left[ b_{k-1+1}^1 - q_{k-1+1} + K_{k-1+1}^{(1-\beta_3)}, J_{k-1}^{(1-\beta_2)} - S_{min} \right]$$

(pour  $j \leq 0, b_j = b_{12} + j$ )

ETAPE 3. Trouver

$$b_k^2 = \min \left[ b_{k+1}^1 - q_{k+1} + K_{k+1}^{(1-\beta_3)}, J_k^{(1-\beta_2)} - S_{min} \right]$$

- Si  $b_{k-1}^2 = b_k^1$  aller à l'étape 5

- Si  $b_k^2 < b_k^1$  poser  $b_k^1 = b_k^2$  et aller à l'étape 4.

ETAPE 4. Prendre  $l = 1$  et trouver

$$b_{k-1}^2 = \min \left[ b_{k-1+1}^2 - q_{k-1+1} + K \frac{(1-\beta_3)^{k-1}}{k-1}, J \frac{(1-\beta_2)^{k-1}}{k-1} - S_{\min} \right]$$

- Si  $b_{k-1}^2 = b_{k-1}^1$  aller à l'étape 5

- Si  $b_{k-1}^2 < b_{k-1}^1$  poser  $b_{k-1}^1 = b_{k-1}^2$  incrémenter  $l$  par 1 puis voir

• Si  $l < 12$  aller au début de l'étape 4

• Si  $l = 12$  STOP. le problème est non réalisable.

ETAPE 5. Faire  $b_i^1 = b_i^1$  ou  $i = 1, 2, \dots, 12$

ETAPE 6. Trouver  $C = \max (J\beta_1 + v_i - b_i)$  STOP. Les valeurs de  $C$  et des  $b_i^1 = b_i^1$  ( $i = 1, 2, \dots, 12$ ) sont les solutions du problème.

### IV.3 - MODELE DE REGLE DE POLITIQUE STANDARD :

Une méthode directe utilisée pour la gestion d'un réservoir est la règle de politique standard de fourniture d'eau SOP (Standard Policy for Reservoir Operation). Ce modèle sera utilisé pour la comparaison avec les modèles d'optimisation.

#### IV.3.1 - Présentation du modèle :

Pour la détermination des volumes fournis par la méthode de règle de politique standard on procède comme suit:

$$- \text{Si } S_{t-1} + I_t \leq T_t$$

Le volume fourni est donnée par :

$$R_t = S_{t-1} + I_t \quad (\text{IV. 47})$$

$$- \text{Si } T_t \leq S_{t-1} + I_t \leq I_t + S_{\text{max}}$$

$$R_t = T_t \quad (\text{IV. 48})$$

$$- \text{Si } S_{t-1} + I_t \geq T_t + S_{\text{max}}$$

$$R_t = I_t + S_{t-1} - S_{\text{max}} \quad (\text{IV. 49})$$

L'équation de continuité est :

$$S_t = S_{t-1} + I_t - R_t$$

où  $S_t$  : Volume stockée dans le réservoir à la fin de la période  $t$ ;

$I_t$  : Volume entrant dans le réservoir pendant la période  $t$ ;

$T_t$  : Volume demandé pendant la période  $t$ ;

$S_{\text{max}}$  : Volume maximum du réservoir, égal à la capacité de celui-ci.

#### IV.4 - FONCTIONS PERTES UTILISEES POUR LA COMPARAISON DES MODELES :

La comparaison entre les différents modèles utilisés pour la gestion sera faite sur la base des calculs des pertes dues à la non satisfaction de la demande.

La première fonction perte proposée ici est donnée par :

$$L(R_t) = (R_t - T_t)^2 \quad (\text{IV.50a})$$

où  $T_t$  : Volume demandé au temps  $t$ ;

$R_t$  : Volume fourni au temps  $t$ ;

Cette fonction pénalise de la même manière aussi bien les excédents d'eau que les déficits.

Une autre fonction perte (appelée fonction 2) est aussi utilisée. Cette dernière pénalise les déficits d'eau plus que les excédents, elle a pour équation :

$$L(R_t) = \omega \cdot (R_t - T_t^2) \quad (\text{IV.50b})$$

avec  $\omega = 1$   
 $\omega = 0.5$

$$R_t \leq T_t$$

$$R_t \geq T_t$$

Dans le cas d'un manque de données précises sur la demande en eau, une expression simplifiée de cette dernière a été proposée par Bhaskar et Witalatch (1987), qui permet d'étudier ce problème. La demande en eau est donnée par :

$$I_t = \alpha_r \cdot \bar{I} \quad (\text{IV.51})$$

avec  $\alpha_r$  : Coefficient de pondération mensuel. Ce coefficient est pris égal à une constante pour tous les mois et ses valeurs varient entre 0.5 et 1.5.

$\bar{I}$  : Moyenne mensuelle globale des volumes entrants au réservoir.

## RESULTATS DES MODELES DE GESTION

## V.1 - INTRODUCTION :

Les modèles de règle de décision linéaire (LDR1 à LDR4) présentés au chapitre IV, ont été appliqués pour déterminer la meilleure règle de fourniture d'eau à partir du barrage de la Cheffia. Les résultats de ces modèles d'optimisation ont été ensuite comparés à ceux d'un modèle direct, dit " règle de politique standard " (SOP).

## V.2 - RESULTATS DES MODELES DE REGLE DE DECISION LINEAIRE :

En suivant la procédure décrite au chapitre IV, on a appliqué les modèles LDR à la série historique des débits mensuels de la Cheffia.

La forme générale des modèles LDR est donnée par :

$$R_t = \alpha_T \cdot I_t + (1 - \alpha_{T-1} - \delta_{T-1}) \cdot I_{t-1} + (\delta_{T-2} - \gamma_{T-2}) \cdot I_{t-2} + \gamma_{T-3} \cdot I_{t-3} + \dots - b_{T-1} + b_T$$

Les modèles dérivant de la forme générale utilisés dans cette étude sont donnés par :

$$\text{LDR1 : } R_t = \alpha_T \cdot I_t + (1 - \alpha_{T-1}) \cdot I_{t-1} + b_T - b_{T-1}$$

$$\text{LDR2 : } R_t = (1 - \delta_{T-1}) \cdot I_{t-1} + \delta_{T-2} \cdot I_{t-2} + b_T - b_{T-1}$$

$$\text{LDR3 : } R_t = I_{t-1} + b_T - b_{T-1}$$

$$\text{LDR4 : } R_t = I_t + b_T - b_{T-1}$$

La détermination des paramètres  $\alpha_\tau$  et  $\delta_\tau$  ( $\tau = 1, 2, \dots, 12$ ) est fait après celle des variances des  $R_t$  (Equation (IV.42)) par la résolution des systèmes d'équations :

$$2 \cdot \alpha_\tau \cdot \sigma_\tau^2 - \alpha_{\tau-1} \cdot \sigma_{\tau, \tau-1} - \alpha_{\tau+1} \cdot \sigma_{\tau+1, \tau} = \sigma_\tau^2 - \sigma_{\tau, \tau-1} \quad (\tau = 1, 2, \dots, 12) \quad (V.1)$$

$$\text{et } 2 \cdot \delta_\tau \cdot \sigma_\tau^2 - \delta_{\tau, \tau-1} \cdot \sigma_{\tau, \tau-1} - \delta_{\tau+1} \cdot \sigma_{\tau+1, \tau} = \sigma_\tau^2 - \sigma_{\tau+1, \tau} \quad (\tau = 1, 2, \dots, 12) \quad (V.2)$$

Les résultats de cette étape sont donnés dans le tableau (V.1) pour les modèles LDR1 et LDR2.

Tableau V.1 - Paramètres des modèles LDR1 et LDR2

| Mois | $\alpha(\tau)$ | $\delta(\tau)$ |
|------|----------------|----------------|
| 1    | 0.542          | 0.458          |
| 2    | 0.426          | 0.574          |
| 3    | 0.184          | 0.816          |
| 4    | 0.483          | 0.517          |
| 5    | 0.255          | 0.745          |
| 6    | 1.447          | -0.447         |
| 7    | 0.893          | 1.107          |
| 8    | 0.589          | 0.411          |
| 9    | 0.380          | 0.620          |
| 10   | 0.529          | 0.471          |
| 11   | 0.692          | 0.308          |
| 12   | 0.701          | 0.299          |

Si on ajoute les équations (V.1) et (V.2) membre à membre on trouve  
 $\alpha_T + \delta_T = 1 \quad \forall T$ . Ceci est vérifié d'après les résultats donnés  
 ci-dessous.

Après détermination des paramètres des modèles LDR, on peut avoir  
 les séries  $J_t$  et  $K_t$  à partir des équations:

- IV.20 et IV.21 pour le modèle LDR1 ;
- IV.25 et IV.26 pour le modèle LDR2 ;
- IV.30 et IV.31 pour le modèle LDR3 ;
- IV.35 et IV.36 pour le modèle LDR4.

Pour le calcul des quantiles mensuels  $F_{J_t}^{-1}(\beta)$  et  $F_{K_t}^{-1}(\beta)$ ,  
 nécessaires pour la résolution de l'algorithme de Gundelach, on a  
 fait un lissage des fonctions de répartition des séries  $J_t$  et  $K_t$  par  
 la méthode du spline cubique. Le tableau (V.2) donne les résultats  
 obtenus pour les modèles LDR1 et LDR2 pour une probabilité  $\beta = 0,90$  ( $\beta_1$   
 $= \beta_2 = \beta_3 = \beta^*$ ).

Tableau V.2 - Quantiles mensuels des modèles LDR1 et  
LDR2 ( $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.90$ )

| Mois | Modèles         |                   |                   |                 |                   |                   |
|------|-----------------|-------------------|-------------------|-----------------|-------------------|-------------------|
|      | LDR1            |                   |                   | LDR2            |                   |                   |
|      | Fj( $\beta_1$ ) | Fj( $1-\beta_2$ ) | Fk( $1-\beta_3$ ) | Fj( $\beta_1$ ) | Fj( $1-\beta_2$ ) | Fk( $1-\beta_3$ ) |
| 1    | 33.003          | 0.789             | 1.452             | 76.349          | 2.267             | 0.363             |
| 2    | 56.333          | 1.396             | 2.656             | 129.926         | 4.286             | 1.452             |
| 3    | 32.555          | 2.602             | 3.273             | 85.828          | 6.019             | 2.656             |
| 4    | 26.619          | 0.461             | 3.281             | 61.298          | 4.007             | 3.273             |
| 5    | 7.368           | 1.221             | 1.186             | 35.370          | 2.529             | 3.281             |
| 6    | -0.100          | -1.683            | 1.345             | 8.766           | 1.344             | 1.186             |
| 7    | 0.508           | 0.015             | 0.127             | 3.079           | 0.143             | 1.345             |
| 8    | 1.594           | 0.178             | 0.256             | 4.386           | 0.435             | 0.127             |
| 9    | 2.558           | 0.033             | 0.191             | 5.722           | 0.211             | 0.256             |
| 10   | 1.516           | 0.032             | 0.190             | 4.875           | 0.329             | 0.191             |
| 11   | 5.694           | 0.056             | 0.259             | 19.184          | 0.312             | 0.190             |
| 12   | 18.145          | 0.160             | 0.573             | 66.177          | 0.795             | 0.259             |

Les tableaux des résultats obtenus pour les autres modèles (LDR3 à LDR4) sont donnés en annexe (J).

La résolution du problème nécessite aussi la connaissance des volumes minimums à fournir. Ces derniers sont déterminés à partir de la condition de faisabilité du problème:

$$\sum_{\tau=1}^{12} q_{\tau} \leq \sum_{t=1}^{12} F_{kt}^{-1} (1-\beta_3)$$

En prenant la même valeur pour tous les mois, le volume minimum à fournir est pris égal à la valeur maximale satisfaisant la condition IV.16, soit:

$$q = \left[ \sum_{t=1}^{12} F_{K_t}^{-1} (1-\beta_3) \right] / 12 \quad (V.3)$$

Les résultats concernant les volumes minimums fournis pour différentes probabilités  $\beta_3$  et pour les différents modèles sont donnés dans le tableau (V.3) .

$$\sum_{\tau=1}^{12} q_{\tau} \leq \sum_{t=1}^{12} F_{kt}^{-1} (1-\beta_3)$$

En prenant la même valeur pour tous les mois, le volume minimum à fournir est pris égal à la valeur maximale satisfaisant la condition IV.16, soit:

$$q = \left[ \sum_{t=1}^{12} F_{kt}^{-1} (1-\beta_3) \right] / 12 \quad (V.3)$$

Les résultats concernant les volumes minimums fournis pour différentes probabilités  $\beta_3$  et pour les différents modèles sont donnés dans le tableau (V.3) .

Tableau V.3 - Volumes minimums fournis (Mm3) des modèles LDR  
en fonction de la probabilité  $\beta_3$

| $\beta_3$ | MODELES |       |       |       |
|-----------|---------|-------|-------|-------|
|           | LDR1    | LDR2  | LDR3  | LDR4  |
| 0.50      | 5.426   | 5.486 | 4.793 | 4.793 |
| 0.55      | 4.738   | 4.486 | 4.261 | 4.261 |
| 0.60      | 4.295   | 4.246 | 3.832 | 3.832 |
| 0.65      | 3.828   | 3.788 | 3.180 | 3.180 |
| 0.70      | 3.397   | 3.278 | 2.517 | 2.517 |
| 0.75      | 2.780   | 2.739 | 2.043 | 2.043 |
| 0.80      | 2.339   | 2.343 | 1.735 | 1.735 |
| 0.85      | 1.890   | 1.873 | 1.408 | 1.408 |
| 0.90      | 1.232   | 1.215 | 0.960 | 0.960 |
| 0.95      | 0.727   | 0.701 | 0.497 | 0.497 |
| 0.96      | 0.658   | 0.630 | 0.424 | 0.424 |

Les figures (V.1) à (V.4) donnent les représentations graphiques de la variation du volume minimum en fonction de la probabilité de réussite  $\beta_3$  pour les modèles LDR (LDR1 à LDR4).

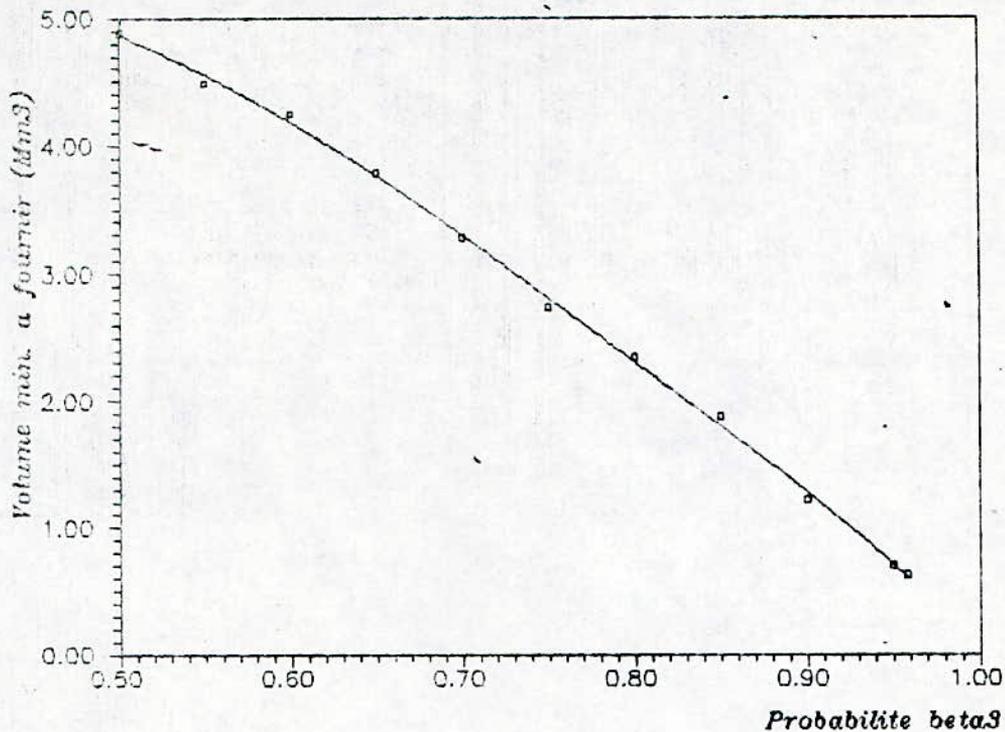


Figure (V.2): Variation du volume min. à fournir en fonction de la probabilité beta3 MODELE LDR2

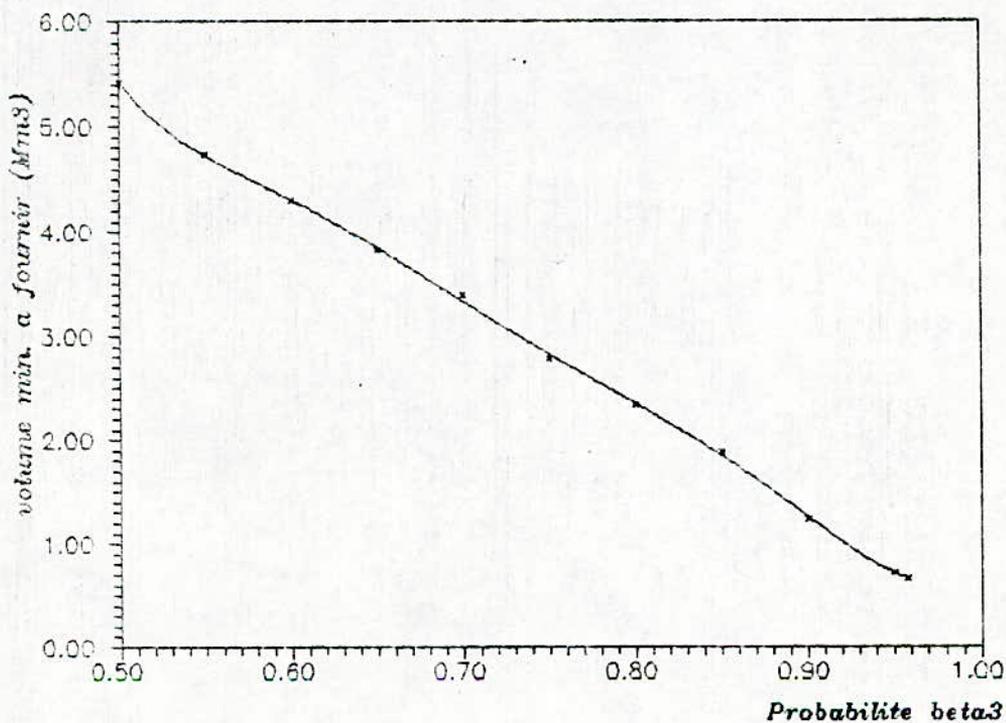


Figure (V.1): Variation du volume min. à fournir en fonction de la probabilité beta3 MODELE LDR1

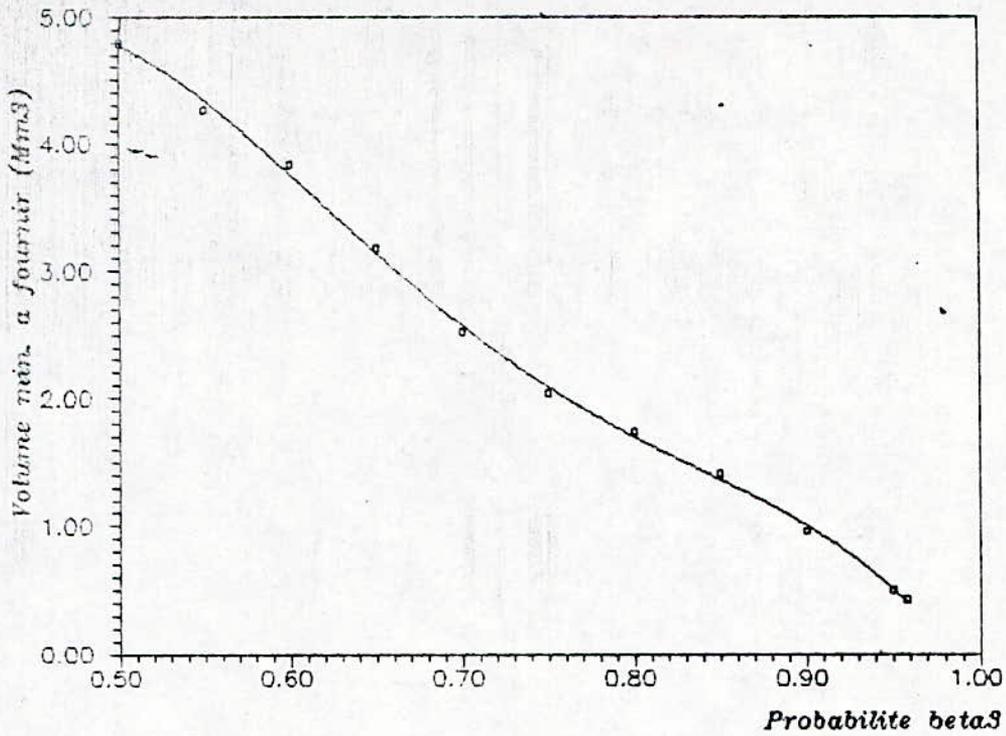


Figure (V.4): Variation du debit min. a fournir en fonction de la probabilite beta\* MODELE LDR3

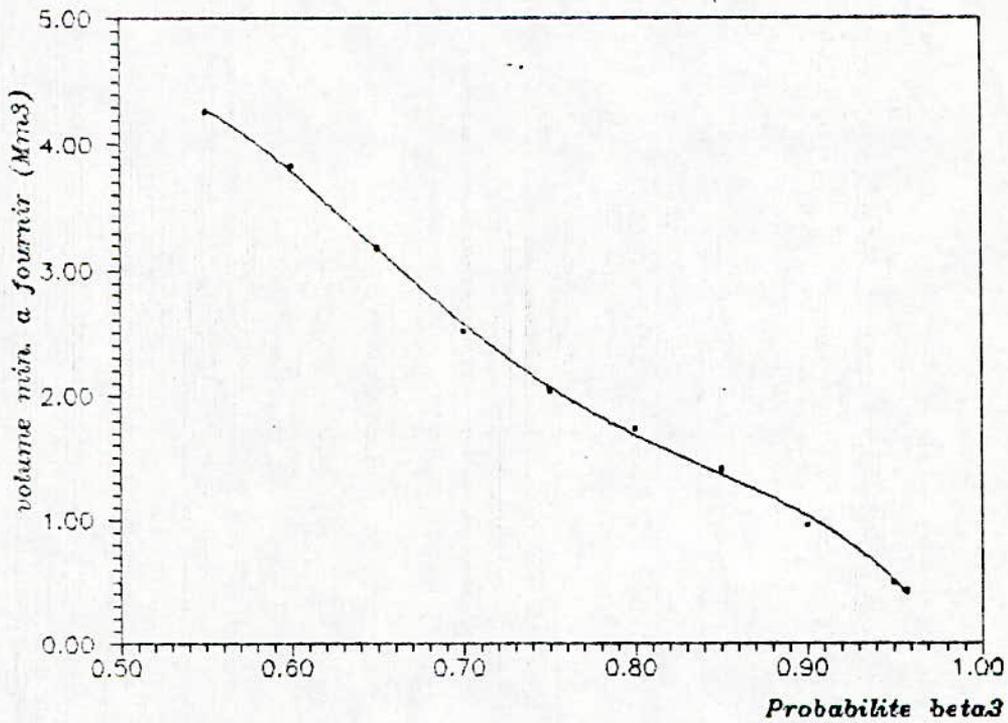


Figure (V.3): Variation du debit min. a fournir en fonction de la probabilite beta3 MODELE LDR4

On constate que les volumes minimums fournis pour le cas du modèle LDR1 sont approximativement les mêmes que ceux du modèle LDR2 la même remarque peut être faite pour les modèles LDR3 et LDR4, ceci dû au fait que la série  $K_t$  du modèle LDR1 n'est autre que la série  $K_t$  du modèle LDR2 translatée d'un pas de temps, elles ont donc les mêmes fonctions de répartition  $F_{K_t}$  (même chose pour LDR3 et LDR4).

$$- \text{LDR1} : K_t = \alpha_\tau \cdot I_t + (1 - \alpha_{\tau-1}) \cdot I_{t-1}$$

$$- \text{LDR2} : K_t = (1 - \delta_{\tau-1}) \cdot I_{t-1} + \delta_{\tau-2} \cdot I_{t-2}$$

$$- \text{LDR3} : K_t = I_{t-1}$$

$$- \text{LDR4} : K_t = I_t$$

La résolution du système linéaire (IV.15) est faite au moyen de l'algorithme de Gundelach et Revelle. Les résultats obtenus sont la capacité  $C$  et les variables de décision  $b_\tau$  ( $\tau = 1, 2, \dots, 12$ ) qui sont illustrés respectivement dans les tableaux (V.4) et (V.5).

Les figures (V.5), (V.6) et (V.7) donnent les représentations graphiques des capacités des modèles LDR

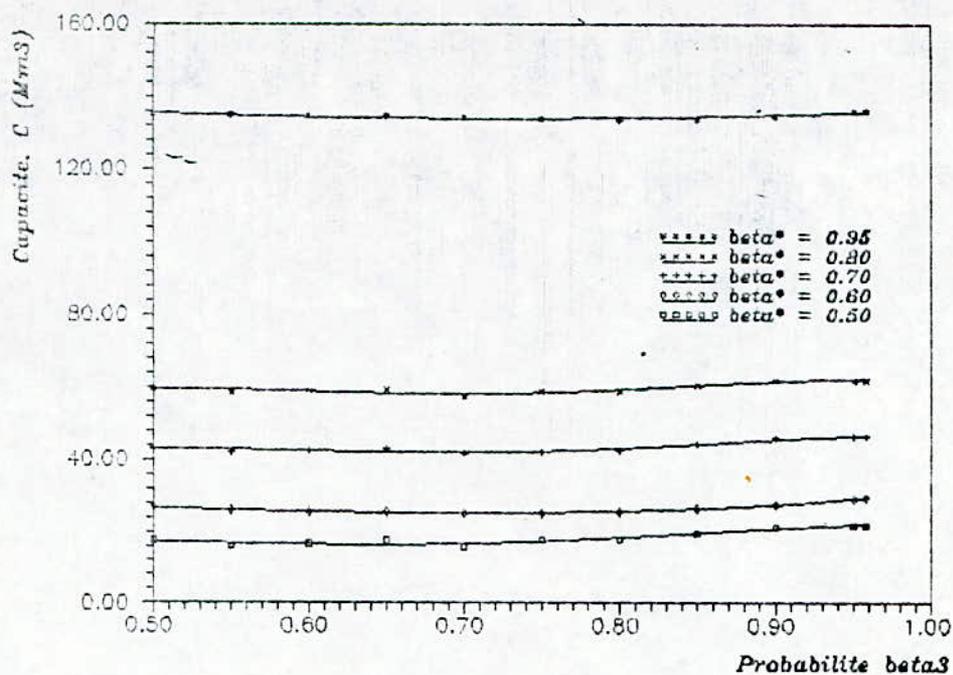


Figure (V.6): Variation de la capacite du reservoir en fonction de la probabilté  $\beta_3$  avec  $\beta^*$  fixée ( $\beta_1 = \beta_2 = \beta^*$ ) MODELE LDR2

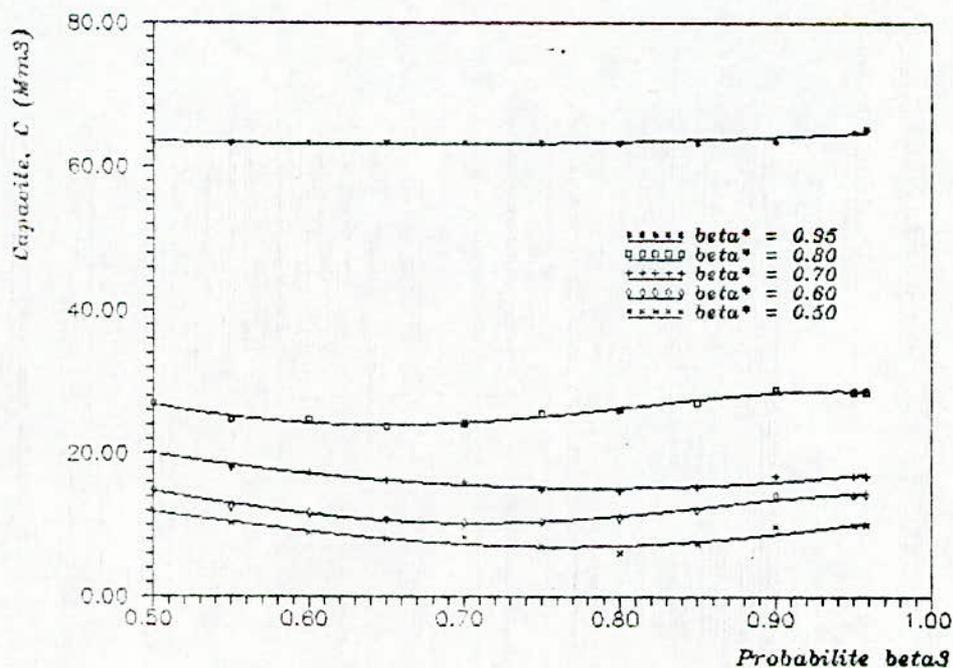
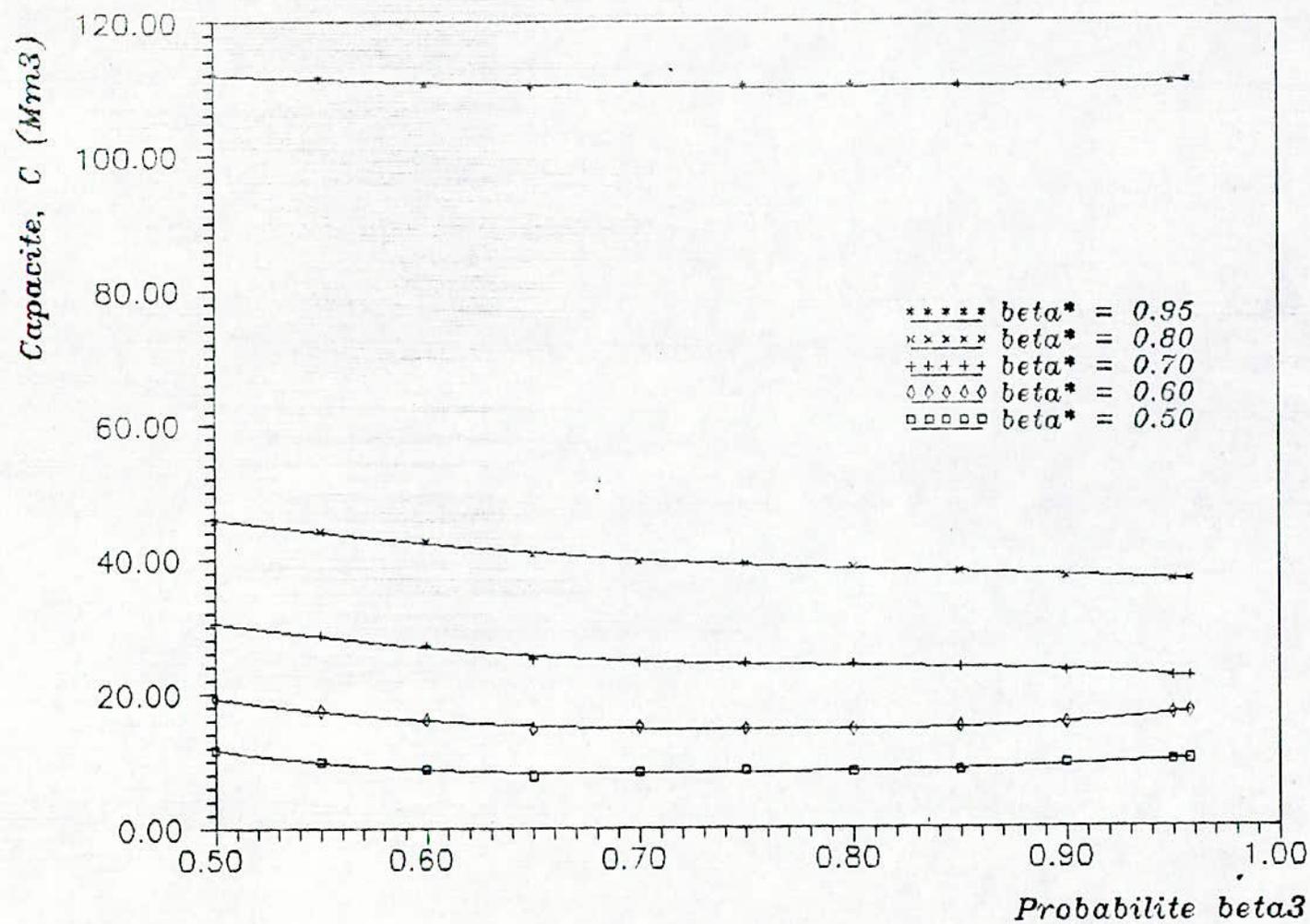


Figure (V.5): Variation de la capacite du reservoir en fonction de la probabilté  $\beta_3$  avec  $\beta^*$  fixée ( $\beta_1 = \beta_2 = \beta^*$ ) MODELE LDR1



109

Figure (v.7): Variation de la capacite du reservoir en fonction de la probabillite beta3 avec beta\* fixee (beta1= beta2= beta\*) MODELE LDR3

Tableau V.4 - Variation des capacités (Mm<sup>3</sup>) de modèles LDR en fonction de la probabilité  $\beta_3$  pour  $\beta^*$  fixée

| $\beta^*$ | $\beta_3$ | MODELES |         |         |        |
|-----------|-----------|---------|---------|---------|--------|
|           |           | LDR1    | LDR2    | LDR3    | LDR4   |
| 0.95      | 0.50      | 63.332  | 134.913 | 112.059 | 12.101 |
|           | 0.60      | 63.332  | 134.475 | 110.596 | 10.055 |
|           | 0.70      | 63.332  | 134.070 | 110.557 | 6.231  |
|           | 0.80      | 63.332  | 133.696 | 110.323 | 5.337  |
|           | 0.90      | 63.476  | 134.591 | 110.323 | 3.734  |
|           | 0.95      | 64.858  | 135.796 | 110.894 | 1.918  |
| 0.80      | 0.50      | 27.010  | 59.444  | 45.893  | 12.101 |
|           | 0.60      | 24.839  | 58.918  | 42.590  | 10.055 |
|           | 0.70      | 24.226  | 57.123  | 39.657  | 6.231  |
|           | 0.80      | 26.167  | 58.775  | 38.704  | 5.337  |
|           | 0.90      | 29.036  | 61.899  | 37.196  | 3.734  |
|           | 0.95      | 28.702  | 61.906  | 36.760  | 1.918  |
| 0.70      | 0.50      | 20.262  | 43.015  | 30.420  | 12.101 |
|           | 0.60      | 17.384  | 42.489  | 27.117  | 10.055 |
|           | 0.70      | 15.952  | 41.512  | 24.619  | 6.231  |
|           | 0.80      | 15.021  | 42.429  | 24.323  | 5.337  |
|           | 0.90      | 16.809  | 45.972  | 23.161  | 3.734  |
|           | 0.95      | 16.842  | 46.391  | 22.259  | 1.918  |
| 0.60      | 0.50      | 14.926  | 26.711  | 19.289  | 12.101 |
|           | 0.60      | 11.856  | 25.462  | 16.147  | 10.055 |
|           | 0.70      | 10.424  | 25.183  | 15.054  | 6.231  |

|      |      |        |        |        |        |
|------|------|--------|--------|--------|--------|
|      | 0.80 | 11.159 | 25.453 | 14.598 | 5.337  |
|      | 0.90 | 14.216 | 27.509 | 15.470 | 3.734  |
|      | 0.95 | 14.344 | 29.127 | 16.819 | 1.918  |
| 0.50 | 0.50 | 12.057 | 11.675 | 11.675 | 12.101 |
|      | 0.60 | 8.903  | 8.846  | 8.846  | 10.055 |
|      | 0.70 | 8.357  | 8.438  | 8.438  | 6.231  |
|      | 0.80 | 6.074  | 8.301  | 8.301  | 5.337  |
|      | 0.90 | 9.864  | 9.411  | 9.411  | 3.734  |
|      | 0.95 | 10.053 | 9.978  | 9.978  | 1.918  |

B\* = B1 = B2

Tableau V.5 - Variables de décision  $b_T$  des modèles LDR

| Cap = 16.355 |        |        |        |         |
|--------------|--------|--------|--------|---------|
| Mois         | LDR1   | LDR2   | LDR3   | LDR4    |
| 1            | 1.034  | 8.244  | 3.055  | -2.354  |
| 2            | -0.626 | 9.334  | 2.228  | -9.236  |
| 3            | -0.892 | 9.083  | 1.211  | -15.787 |
| 4            | -1.211 | 7.108  | 0.035  | -16.304 |
| 5            | -1.239 | -0.707 | 0.022  | -14.287 |
| 6            | -1.466 | -2.495 | -0.549 | -10.718 |
| 7            | -2.073 | -5.261 | -1.219 | -13.754 |
| 8            | -1.466 | -3.074 | -0.549 | -10.718 |
| 9            | -0.850 | -0.707 | -0.123 | -6.604  |
| 10           | -0.243 | 1.402  | 0.523  | -2.595  |
| 11           | 0.258  | 3.018  | 1.125  | 0.000   |
| 12           | 0.991  | 5.884  | 2.817  | -0.474  |

La comparaison des capacités des modèles LDR1, LDR2, LDR3 et LDR4 (tableau (V.6)) montre que le modèle qui conduit à la plus grande capacité est LDR2 pour différentes valeurs des probabilités  $\beta_3$  et  $\beta^*$  pour de fortes probabilités  $\beta_3$  on a:

$$C_{LDR2} > C_{LDR3} > C_{LDR1} > C_{LDR4}$$

Tableau V.6 - Résultats comparatifs des capacités des modèles LDR

|           |           | MODELES |         |         |        |
|-----------|-----------|---------|---------|---------|--------|
| $\beta^*$ | $\beta_3$ | LDR1    | LDR2    | LDR3    | LDR4   |
| 0.95      | 0.90      | 63.476  | 134.591 | 110.323 | 3.734  |
| 0.95      | 0.50      | 63.332  | 134.913 | 112.059 | 12.031 |
| 0.50      | 0.90      | 9.864   | 21.416  | 9.411   | 3.737  |

$$\beta^* = \beta_1 = \beta_2$$

pour de faibles probabilités  $\beta_3$  le même classement peut être maintenu mais avec des valeurs approximativement égales des capacités de LDR1 et LDR3

$$C_{LDR2} > C_{LDR3} \geq C_{LDR1} > C_{LDR4}$$

Après la détermination des paramètres des modèles LDR et de leurs capacités, le choix du modèle à utiliser pour la gestion du barrage

de la Cheffia sera fait sur la base des comparaisons des pertes. Le modèle choisi est celui qui conduit au minimum de pertes mensuelles et globales dont les expressions sont données par:

$$P_{m\tau} = \sum_{v=1}^{12} (R_{v,\tau} - T_{v,\tau})^2 / Na \quad (V.4)$$

avec :  $P_{m\tau}$  : Perte mensuelle du mois  $\tau$ ;

$R_{v,\tau}$  : Volume fourni pendant le mois  $\tau$  de l'année  $V$ ;

$T_{v,\tau}$  : Volume demandé pendant le mois  $\tau$  de l'année;

$Na$  : Nombre d'années.

$$P_g = \sum_{t=1}^N (R_t - I_t)^2 / N \quad (V.5)$$

$P_g$  : Perte globale;

$R_t$  : Volume fourni pendant le mois  $t$ ;

$I_t$  : Volume demandé pendant le mois  $t$ ;

$N$  : Nombre total de mois.

On a utilisé la série historique des volumes demandés par les différents usagers de la zone alimentée par le réservoir de la Cheffia (alimentation en eau potable, agriculture, et industrie). Les volumes fournis  $R_t$  sont calculés au moyen de l'expression générale :

$$R_t = a_\tau \cdot I_t + C_\tau I_{t-1} + d_\tau \cdot I_{t-2} + R_\tau$$

avec

\*  $a_\tau = \alpha$  pour LDR1,  $a_\tau = 1$  pour LDR4 et  $a_\tau = 0$  pour les autres modèles.

$$* c_{\tau} = 1 - \alpha_{\tau-1} \text{ pour LDR1, } c_{\tau} = 1 - \delta_{\tau-1} \text{ pour LDR2,}$$

$$c_{\tau} = 1 \text{ pour LDR3 et } c_{\tau} = 0 \text{ pour LDR4;}$$

$$* d_{\tau} = \delta_{\tau-2} \text{ pour LDR2, } d_{\tau} = 0 \text{ pour les autres modèles;}$$

$$* e_{\tau} = b_{\tau} - b_{\tau-1} \text{ pour tous les modèles.}$$

Pour la comparaison des résultats des modèles LDR on utilise la même valeur de la capacité fixée au préalable, et qu'on essaie de trouver par approche en appliquant les différents modèles LDR (en variant les probabilités  $\beta_3$  et  $\beta^*$ ).

Tableau V.7 - Capacités (Mm<sup>3</sup>) utilisées pour la comparaison des modèles de gestion ( $\beta^* = \beta_1 = \beta_2$ )

| Modèle | $\beta_3$ | $\beta^*$ | Capacités |
|--------|-----------|-----------|-----------|
| LDR1   | 0.675     | 0.958     | 16.358    |
| LDR2   | 0.500     | 0.720     | 16.355    |
| LDR3   | 0.600     | 0.936     | 16.355    |
| LDR4   | 0.958     | 0.451     | 16.304    |
| Moy.   |           |           | 16.343    |
| LDR1   | 0.800     | 0.850     | 27.177    |
| LDR2   | 0.258     | 0.879     | 27.176    |
| LDR3   | 0.680     | 0.575     | 27.175    |
| LDR4   | -         | -         | -         |
| Moy.   |           |           | 27.176    |
| LDR1   | 0.920     | 0.900     | 60.445    |
| LDR2   | 0.810     | 0.853     | 60.448    |
| LDR3   | 0.850     | 0.574     | 60.444    |
| LDR4   | -         | -         | -         |
| Moy.   |           |           | 60.445    |

Les capacités à utiliser pour la comparaison des différents modèles LDR sont présentés dans le tableau (V.7). Les résultats des pertes mensuelles et globales des différentes capacités utilisées sont présentés dans les tableaux (V.8) et (V.9).

Les résultats des pertes donnés dans le tableau (V.9) sont calculés en utilisant un coefficient de pondération pour les excédents et les déficits (Équation (IV.50b)).

Le modèle qui conduit au minimum de pertes quelque soit la capacité et quelque soit la fonction perte utilisées est LDR2 suivi de LDR1, LDR3 et de LDR4.

Le passage d'une capacité à une autre conduit à une diminution des pertes mensuelles et globales. Les modèles LDR sont donc classés comme suit par ordre de satisfaction.

- 1 - LDR2
- 2 - LDR1
- 3 - LDR3
- 4 - LDR4

Le résultat est celui qu'on avait prévu puisque pour la détermination des paramètres des modèles LDR1 et LDR2 on a posé une condition de minimisation des variances des volumes fournis et par conséquent des pertes cumulées.

Les variables de décision  $b_t$  sont considérées les mêmes pour toutes les années. L'examen des résultats des volumes fournis mensuels à partir des modèles LDR montre que les valeurs de certains mois des années sèches sont négatives. Ce qui nous amène à dire que le modèle LDR doit être spécifique à chaque période, il faut donc déterminer un modèle pour les périodes sèches et un autre pour les périodes humides.

Tableau V.8 - Resultats des pertes mensuelles et globales (Mm3) des modes LDR

Fonct. pertes :  $L(Rt) = (Rt - It)^2$ 

| Mois          | LDR1    | LDR2    | LDR3     | LDR4     | LDR1    | LDR2    | LDR3     | LDR4 | LDR1    | LDR2    | LDR3     | LDR4 |
|---------------|---------|---------|----------|----------|---------|---------|----------|------|---------|---------|----------|------|
| Cap.<br>(Mm3) | 16.358  | 16.355  | 16.355   | 16.304   | 27.177  | 27.176  | 27.175   | -    | 60.445  | 60.448  | 60.444   | -    |
| 1             | 249.700 | 107.260 | 151.290  | 668.530  | 265.610 | 90.790  | 156.670  | -    | 259.370 | 102.260 | 171.820  | -    |
| 2             | 752.750 | 267.750 | 700.880  | 1310.530 | 824.200 | 248.570 | 705.590  | -    | 798.370 | 253.560 | 683.910  | -    |
| 3             | 568.130 | 793.430 | 1541.060 | 140.810  | 538.940 | 762.610 | 1496.950 | -    | 519.840 | 768.690 | 1496.620 | -    |
| 4             | 360.980 | 521.210 | 225.530  | 431.750  | 231.670 | 519.800 | 141.990  | -    | 307.650 | 529.210 | 141.970  | -    |
| 5             | 123.200 | 164.920 | 444.660  | 19.040   | 123.850 | 244.270 | 427.130  | -    | 123.540 | 213.220 | 427.310  | -    |
| 6             | 20.120  | 105.910 | 52.070   | 22.600   | 22.780  | 102.120 | 38.130   | -    | 19.310  | 102.110 | 38.150   | -    |
| 7             | 145.030 | 86.400  | 131.800  | 170.190  | 162.270 | 60.100  | 150.160  | -    | 153.950 | 61.250  | 150.240  | -    |
| 8             | 96.360  | 70.330  | 71.880   | 45.970   | 83.270  | 88.040  | 59.450   | -    | 89.370  | 86.630  | 59.400   | -    |
| 9             | 46.850  | 26.020  | 39.970   | 10.230   | 37.200  | 40.340  | 28.640   | -    | 41.240  | 38.230  | 28.520   | -    |
| 10            | 18.960  | 12.910  | 23.560   | 1.710    | 13.070  | 20.100  | 11.100   | -    | 15.410  | 18.770  | 11.050   | -    |
| 11            | 47.660  | 4.940   | 11.500   | 120.610  | 50.130  | 6.930   | 2.840    | -    | 49.020  | 6.200   | 2.860    | -    |
| 12            | 518.100 | 56.120  | 108.420  | 1022.340 | 529.790 | 51.100  | 119.480  | -    | 516.120 | 47.290  | 119.570  | -    |
| PG.           | 245.654 | 184.767 | 291.888  | 330.361  | 240.231 | 186.233 | 278.177  | -    | 241.099 | 185.619 | 277.616  | -    |

Tableau V.9 - Resultats des pertes mensuelles et globales (Mm<sup>3</sup>) des modèles LDRFonct. pertes :  $L(Rt) = p. (Rt - Tt)^2$ 

| Mois                       | LDR1    | LDR2    | LDR3    | LDR4    | LDR1    | LDR2    | LDR3    | LDR4 | LDR1    | LDR2    | LDR3    | LDR4 |
|----------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|------|---------|---------|---------|------|
| Cap.<br>(Mm <sup>3</sup> ) | 16.358  | 16.355  | 16.355  | 16.304  | 27.177  | 27.176  | 27.175  | -    | 60.445  | 60.448  | 60.444  | -    |
| 1                          | 125.540 | 54.250  | 76.240  | 337.070 | 133.010 | 47.000  | 78.800  | -    | 130.040 | 51.980  | 86.120  | -    |
| 2                          | 378.520 | 133.990 | 351.850 | 669.370 | 412.360 | 124.840 | 354.050 | -    | 395.840 | 127.170 | 344.040 | -    |
| 3                          | 284.580 | 397.660 | 772.920 | 75.550  | 270.630 | 383.370 | 752.100 | -    | 261.800 | 386.150 | 751.950 | -    |
| 4                          | 180.490 | 262.440 | 112.790 | 216.370 | 116.020 | 261.800 | 76.710  | -    | 153.820 | 266.140 | 76.710  | -    |
| 5                          | 73.380  | 91.040  | 229.940 | 16.500  | 73.290  | 123.650 | 223.770 | -    | 73.330  | 109.840 | 223.830 | -    |
| 6                          | 20.120  | 80.260  | 52.070  | 22.600  | 22.780  | 69.540  | 37.990  | -    | 19.310  | 69.380  | 38.010  | -    |
| 7                          | 145.030 | 86.400  | 131.800 | 170.190 | 162.270 | 60.100  | 150.160 | -    | 153.950 | 61.250  | 150.240 | -    |
| 8                          | 96.360  | 70.330  | 71.880  | 45.970  | 83.270  | 88.040  | 59.450  | -    | 89.370  | 86.630  | 59.400  | -    |
| 9                          | 46.850  | 26.020  | 39.970  | 10.230  | 37.200  | 40.340  | 28.640  | -    | 41.240  | 38.230  | 28.520  | -    |
| 10                         | 18.960  | 12.910  | 23.560  | 1.710   | 13.070  | 20.100  | 11.100  | -    | 15.410  | 18.770  | 11.050  | -    |
| 11                         | 27.790  | 4.940   | 11.500  | 61.780  | 27.560  | 6.930   | 2.780   | -    | 27.540  | 6.200   | 2.790   | -    |
| 12                         | 259.870 | 28.750  | 56.980  | 512.570 | 265.470 | 26.990  | 60.930  | -    | 258.930 | 26.180  | 60.960  | -    |
| PE.                        | 138.126 | 104.083 | 160.959 | 178.327 | 134.744 | 104.392 | 153.039 | -    | 135.381 | 103.994 | 152.801 | -    |

## V.3 - RESULTATS DU MODELE SOP :

Les trois valeurs des capacités (16.343, 27.176 et 60.446 Mm<sup>3</sup>) sont utilisées pour le calcul des pertes engendrées par l'application du modèle SOP à la série historique des volumes entrants et des volumes demandés de la Cheffia dans le but d'une comparaison des résultats des modèles d'optimisation LDR et du modèle courant de règle de politique standard: SOP).

Les volumes fournis par le modèle SOP dépendent du volume stocké à la fin de la période t-1 (Equations IV.47 et IV.49), on a donc besoin de connaître le volume stocké au temps t = 0 pour cela, on a pris en considération les trois hypothèses suivantes sur l'état initial du réservoir:

- Réservoir plein;
- Réservoir à moitié rempli ;
- Réservoir vide.

Le tableau (V.10) donne les résultats des pertes mensuelles et globales, pour les diverses capacités utilisées précédemment et pour les trois hypothèses précitées.

La même remarque que pour les modèles LDR peut être faite pour le modèle SOP concernant l'augmentation des pertes mensuelles et globales quant la capacité du réservoir diminue.

Tableau V.10 - Resultats des pertes mensuelles et globales (Mm3) du modele SOP

Fonct. pertes :  $L(Rt) = (Rt - Tt)^2$

| Mois        | SOP†    |         |         | SOP††   |         |         | SOP†††  |         |         |
|-------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|             | 16.355  | 27.175  | 60.445  | 16.355  | 27.176  | 60.445  | 16.355  | 27.176  | 60.445  |
| Capa. (Mm3) | 16.355  | 27.175  | 60.445  | 16.355  | 27.176  | 60.445  | 16.355  | 27.176  | 60.445  |
| 1           | 8.47    | 5.58    | .00     | 8.47    | 5.58    | .00     | 10.17   | 7.28    | 1.70    |
| 2           | 12.03   | 6.01    | .00     | 12.03   | 6.01    | .00     | 12.38   | 6.37    | .36     |
| 3           | 8.00    | 3.60    | .13     | 8.00    | 3.60    | .13     | 8.10    | 3.71    | .10     |
| 4           | 23.58   | 7.39    | 7.04    | 23.58   | 7.39    | 7.04    | 23.63   | 7.45    | 6.63    |
| 5           | 574.64  | 397.37  | 152.15  | 574.75  | 397.35  | 152.15  | 576.11  | 398.83  | 153.38  |
| 6           | 1413.56 | 1413.55 | 1413.55 | 1413.56 | 1413.55 | 1413.55 | 1413.56 | 1413.55 | 1380.75 |
| 7           | 113.31  | 51.87   | 26.74   | 113.32  | 51.86   | 26.74   | 113.32  | 51.87   | 26.75   |
| 8           | 234.15  | 234.15  | 234.15  | 153.72  | 96.73   | 12.28   | 153.72  | 65.24   | 4.32    |
| 9           | 6.11    | .00     | .00     | 6.11    | .00     | .00     | 6.11    | .00     | .00     |
| 10          | 9.69    | .00     | .00     | 9.69    | .00     | .00     | 9.69    | .00     | .00     |
| 11          | 3.04    | .88     | .00     | 3.04    | .88     | .00     | 3.04    | .88     | .00     |
| 12          | 8.10    | 5.56    | .00     | 8.10    | 5.56    | .00     | 8.10    | 5.56    | .00     |
| FG.         | 201.22  | 177.16  | 152.81  | 194.53  | 165.70  | 134.32  | 194.83  | 163.39  | 131.17  |

† Reservoir plein  
 †† Reservoir a moitié plein  
 ††† Reservoir vide

## V.4 - COMPARAISON DES RESULTATS DES MODELES LDR ET SOP:

Pour le modèle SOP, on prend en considération l'hypothèse de l'état initial du réservoir vide. Le tableau (V.11) présente les résultats comparatifs des pertes globales des modèles LDR et du modèle SOP.

Tableau V.11 - Comparaison des pertes globales (Mm<sup>3</sup>) des modèles LDR et du modèle SOP

| Modèles | Capacités (Mm <sup>3</sup> ) |         |         |
|---------|------------------------------|---------|---------|
|         | 16.355                       | 27.175  | 60.445  |
| LDR1    | 245.654                      | 240.231 | 241.099 |
| LDR2    | 184.767                      | 186.233 | 185.619 |
| LDR3    | 291.888                      | 278.177 | 277.616 |
| LDR4    | 330.361                      | -       | -       |
| SOP*    | 194.828                      | 163.393 | 131.166 |

\* Etat initial du reservoir: Vide

L'examen des pertes globales montre que les modèles LDR et SOP conduisent à des résultats similaires (bien que le modèle SOP ne soit pas un modèle d'optimisation) pour le cas de grandes capacités; Qui sont aussi meilleurs que ceux de LDR1, LDR3 et LDR4 quelle que soit la capacité utilisée.

Cependant, le tableau (V.10) montre que même si les pertes pendant les mois (Janvier - Avril et Septembre - Décembre) sont nettement inférieures à celles obtenues pour les modèles LDR, les pertes engendrées par le modèle SOP pendant les mois secs (Mai - Août) sont très grandes.

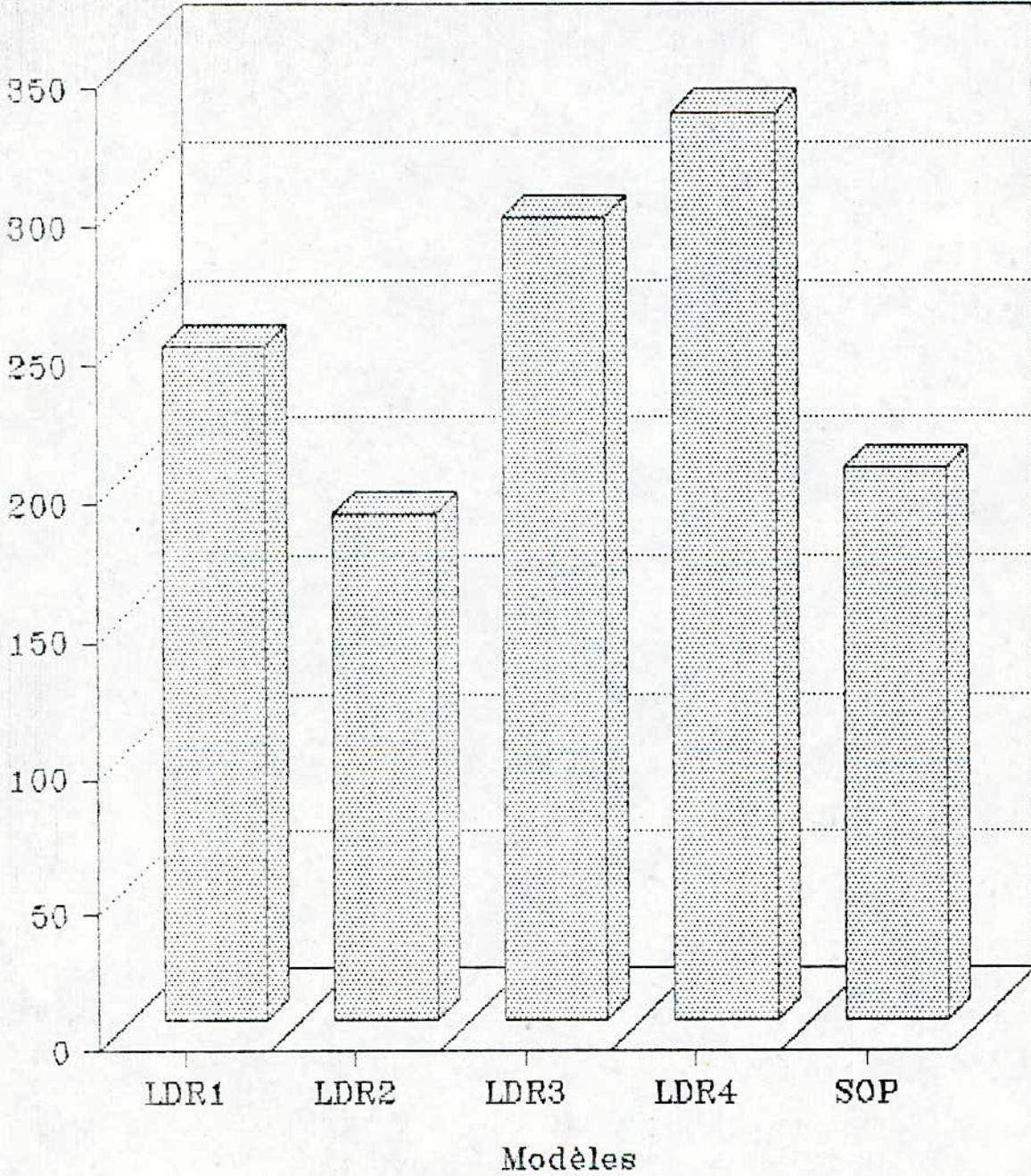
Le classement dans ce cas sera fait comme suit (Figure (V.8)) :

- 1 - LDR2
- 2 - LDR1
- 3 - SOP
- 4 - LDR3
- 5 - LDR4

On tient à noter que ce classement n'est pas influencé par le changement de la fonction perte (Equations IV.50a et IV.50b).

Figure (V.8) Comparaison des modèles de gestion utilisés (Cap = 16.355 Mm<sup>3</sup>)

Pertes globales



## V.5 - CONCLUSION:

Concernant le calcul des capacités des réservoirs par les modèles LDR, on peut dire que ces derniers sont intéressants de ce point de vue, autrement dit, les modèles LDR peuvent remplacer les méthodes courantes de dimensionnement des réservoirs qui conduisent généralement à de grandes valeurs des capacités et par conséquent à des surdimensionnements des ouvrages.

La comparaison des résultats des pertes mensuelles et globales présentés dans les tableaux de l'annexe (J) a conduit à conclure que le modèle LDR2 est le meilleur parmi ceux utilisés dans cette étude suivi du modèle LDR1. On peut conclure aussi que le modèle SOP est mieux que les modèles LDR3 et LDR4. Ces résultats ne sont pas influencés par la fonction perte utilisée. Le modèle qui est à recommander pour la gestion est LDR2.

Dans le cas où pour une raison quelconque on ne peut utiliser le modèle LDR2 ou LDR1, le modèle SOP est recommandé car c'est un modèle simple à utiliser et qui concurrence les modèles LDR2 et LDR1 du point de vue pertes globales pour le cas de grandes capacités.

CONCLUSION GENERALE

L'utilisation des modèles stochastiques ARMA pour la generation de séries de debits mensuels et decadaires a conduit à faire les conclusions suivantes:

- Concernant les transformations utilisées pour rendre les séries (non symetriques) normales, on recommande pour les séries algériennes celle du Log translaté et du Log translaté périodique, pour eviter tous les problèmes d'indetermination qui peuvent resulter de l'utilisation des methodes de Beard et de Box-Cox

- Les transformations utilisées ont une influence importante sur les tests d'adequation et de ressemblance des caractéristiques statistiques des séries simulées.

- Pour les séries dont la fonction d'autocorrelation est non stationnaire, les modèles ARMA à coefficients constants ne sont pas recommandés, on propose de faire l'étude des modèles ARMA à coefficients périodiques pour de telles séries. Cette conclusion est valable aussi bien pour les séries de débits mensuels que pour celles au pas de temps décadaire.

- Les modèles ARMA recommandés pour les séries étudiées sont ARMAC(1,2) et ARMAC(2,1) pour les débits mensuels avec les transformations Log translaté et Log translaté mensuel.

- Pour les séries de débits décennales, on recommande l'utilisation des modèles ARMA(1,2) et les modèles autoregressifs de grands ordres (autoregressifs simplifiés, SAR) avec les transformations du Log translaté et de Beard.

Pour la deuxième partie concernant la recherche de la meilleure règle de fourniture d'eau, on a utilisé les modèles de règles de décision linéaire et le modèle direct SOP, qu'on a appliqué pour différentes valeurs des capacités et on est arrivé aux conclusions suivantes:

- La valeur de la capacité du réservoir utilisée a une influence sur les résultats des pertes mensuelles et globales, ces dernières diminuent lorsque la capacité augmente.

- L'utilisation de deux fonctions pertes a conduit à conclure que les résultats du classement des modèles ne sont que légèrement influencés.

- Le modèle SOP qui n'est pas un modèle d'optimisation a conduit à de meilleurs résultats que ceux des modèles LDR3 et LDR4 qui ne sont pas conseillés pour la gestion des réservoirs.

- Vu que le modèle SOP a conduit à de grandes valeurs des pertes mensuelles, ceci nous amène à conclure que ce modèle est à écarter tant qu'on peut disposer des conditions nécessaires pour l'utilisation des modèles d'optimisation surtout pour le cas de réservoirs de petites capacités.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] - Aivazian, S., Enukov, I., Mechalkine, L., 1983. *Eléments de modélisation et traitement primaire des données*. Edition MIR.
- [2] - Akaike, H., 1974. *A new look at statistical model identification*. IEEE Trans. Automatic Control. As 19, 6, pp.716-723.
- [3] - Bermad, A., 1990. *Elaboration d'un modèle de gestion d'un barrage réservoir*. Thèse de magister, Ecole nationale polytechnique d'Alger.
- [4] - Bhaskar, N. R., and Whitlatch, E. E., 1987. *Comparison of reservoir linear operation rules using linear and dynamic programming*. Water Resources Bulletin, 23(6), pp. 1027-1036.
- [5] - Bouziane, A., 1989. *Contribution à la modélisation des débits mensuels et recherche de la meilleure règle de gestion d'un réservoir*. Thèse de doctorat, unité de génie civil, faculté des sciences appliquées, université de Louvain.
- [6] - Box, G. E. P., and Jenkins G. M., 1970. *Time series analysis forecasting and control*. San Fransisco, Holden-Day.
- [7] - Delleur, J. W., Tao, P. C., and Kavvas, M. L., 1976. *An evaluation of the practicality of some rainfall-runoff time series models*. Water Resources Research, 12(5), pp. 953-970.
- [8] - Delleur, J. W., 1978. *Les processus du type ARIMA pour la prévision et la simulation en hydrométéorologie*. La houille blanche, N° 6, pp. 391-400.

[9] - Eastman, J., and Revelle, C., 1973. *Linear decision in reservoir management and design. 3- Direct capacity determination and intraseason constraints.* Water Resources Research, 9(1), pp. 29-42.

[10] - Gundelach, J., and Revelle, C., 1975. *Linear decision rule in reservoir management and design. 5- A general algorithm.* Water Resources Research, 11(2), pp. 204-207.

[11] - Hipel, K. W., McLeod, A. I., and Lennox, W. C., 1977. *Advances in Box-Jenkins modeling. 1- Model construction.* Water Resources Research, 13(3), pp. 567-575.

[12] - Karamouz, M., and Houk, M. H., 1982. *Annual and monthly reservoir operating rules generated by deterministic optimization.* Water resources research, 18(5), pp. 1337-1344.

[13] - Kottegoda, N. T., 1980. *Stochastic water resources technology.* University of Birmingham, department of civil engineering, Mac Millan LTD.

[14] - Louks, D. P., Stedinger, J. R., D. A., and Haith, D. A., 1981. *Water resources systems planning and analysis.* Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

[15] - Pinon, P. Q., Lignelet, F., 1983. *Elements de statistiques, series chronologiques scalaires.* Centre d'etudes et de recherches en informatique, OPU.

[16] - Revelle, C., Joeres, E., and Kirby, W., 1969. *The linear decision rule in reservoir management and design. 2- Development of stochastic model.* Water Resources Research, 5(4), pp. 767-777.

[17] - Revelle, C., and Gundelach, J., 1975. *Linear decision rule in reservoir management and design. 4- A rule that minimises output variance.* Water Resources Research, 11(2), pp. 197-203.

[18] - Salas, J. D., and Smith, R. A., 1981. *Physical basis of stochastic models of annual flows.* Water Resources Research, 17(2), pp. 428-430.

[19] - Salas, J. D., and Obeysekera, J. T. B., 1982. *ARMA models identification of hydrologis=c time series.* Water Resources Research, 18(4), pp. 1011-1021.

[20] - Salas, J. D., Boes, D. C., and Smith, R. A., 1982. *Estimation of ARMA models with seasonal parameters.* Water Resources Research, 18(4), pp. 1006-1010.

[21] - Stedinger, J. R., and Taylor, M. R., 1982. *Synthetic streamflow generation. 1- Model verification and validation.* Water Resources Research, 18(4), pp. 909-918.

[22] - Tao, J. R., and Delleur, J. W., 1976b. *Seasonal and non-seasonal ARIMA models in hydrology.* ASCE, Journal of hydraulic division, 102, HY10, pp.1549-1559.

[23] - Yeh, W. W-C, 1985. *Reservoir managent and operation models state-of-the art review.* Water Resorces Research, 21(2), pp. 1797-1818.

[24] - Wheelwright, S. C., Markidakis, S., 1983. *Méthodes de prévision pour la gestion.* Les éditions d'organisation.

[25] - Yevjevich, V. N., 1972. *Stochastic process in hydrology.* Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado.

[26] - Yevjevich, V. N., Delleur, J. W., Salas, J. D., and Lane, W. L., 1980. *Applied modeling of hydrologic time series*. Water Resources publications, Fort Collins, Colorado.

[27] - Zelenhazic, E., and Savai, A., 1987. *A method of stream flow drought analysis*. Water resources research, 23(1), pp. 156-168.

|                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------|
| CARACTERISTIQUES STATISTIQUES DE BASE DES SERIES CHRONOLOGIQUES |
|-----------------------------------------------------------------|

On présente dans cette annexe quelques caractéristiques statistiques des séries chronologiques:

\* Une caractéristique de base d'une série  $X_t$ ,  $t=1, 2, \dots, N$  est la moyenne de l'échantillon donnée par:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{t=1}^N X_t \quad (A.1)$$

Où  $N$  est la taille de l'échantillon

La moyenne de l'échantillon  $\bar{X}$  est un estimateur de la moyenne de la population  $\mu$  (Espérance mathématique). Elle mesure la tendance centrale de la série  $X_t$ .

\* La médiane  $X_{med}$  est une des caractéristiques des séries chronologiques. C'est une valeur qui jouit de la propriété suivante: La probabilité que la variable  $X$  prenne des valeurs  $> X_{med}$  est égale à la probabilité qu'elle prenne des valeurs  $< X_{med}$ .

Pour estimer la valeur de médiane, on classe les valeurs de la série par ordre croissant puis on prend le  $\frac{1}{2}(N+1)$ -ième terme si  $N$  est impair et toute valeur comprise entre le  $\frac{N}{2}$ -ième terme et le  $(\frac{1}{2}N+1)$ -ième terme si  $N$  est pair .

\* Une autre caractéristique statistique des séries chronologiques est la variance de l'échantillon  $S^2$  donnée par :

$$S^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^2 \quad (\text{A.2a})$$

L'équation (A.2) donne l'estimateur biaisé de la variance de la population  $\sigma^2$ , un estimateur non biaisé est obtenu par :

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^2 \quad (\text{A.2b})$$

L'estimateur de l'équation (A.2b) est généralement le plus utilisé en hydrologie statistique pour des séries dont la taille est inférieure à 30 (pour  $N > 30$  on utilise l'équation (A.2a)). La racine carrée de la variance est appelée écart type, le rapport  $\mu/\sigma$  pour la population ou  $\bar{X}/S$  pour l'échantillon est le coefficient de variation.

L'écart type mesure la dispersion des  $X_t$  autour de la moyenne  $\bar{X}$ ; Pour une faible valeur de  $S$ , on parle d'une faible dispersion des  $X_t$  les valeurs  $X_1, X_2, \dots, X_N$  ne diffèrent pas beaucoup de  $\bar{X}$ , alors qu'une forte valeur de  $S$  indique une large dispersion des  $X_t$  autour de  $\bar{X}$ .

\* Le coefficient d'asymétrie d'une série est donné par :

$$g = \frac{\frac{1}{N} \cdot \sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^3}{S^3} \quad (\text{A.3a})$$

Où  $S$  est obtenu à partir de l'équation (A.2a), c'est un estimateur biaisé du coefficient d'asymétrie de la population  $\gamma$ . Un estimateur approximatif non biaisé est déterminé par :

$$g = \frac{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^3}{(N-1) \cdot (N-2) \cdot S^3} \quad (\text{A. 3b})$$

Le coefficient d'asymétrie mesure l'asymétrie d'une série  $X_t$ , si  $g=0$  la distribution de probabilité des  $X_t$  est symétrique centrée autour de  $\bar{X}$ .

\* Fonction d'autocovariance et fonction d'autocorrélation:

La fonction d'autocovariance mesure le degré de l'autodépendance linéaire des séries chronologiques.

L'autocovariance entre  $X_t$  et  $X_{t+k}$  peut être déterminée par :

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X}) \quad 0 \leq k < N \quad (\text{A. 4})$$

Où  $C_k$  est appelé autocovariance au pas  $k$  (estimateur de  $\gamma_k$ );

$k$  est le pas de temps entre les couples  $(X_t, X_{t+k})$ ;

$\bar{X}$  est la moyenne de l'échantillon;

$N$  est la taille de l'échantillon.

Pour le cas particulier où  $k = 0$ ,  $C_0$  devient la variance  $S^2$

$$S^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^2$$

La dépendance linéaire peut être aussi représentée par le rapport :

$$r_k = \frac{C_k}{C_0} = \frac{\sum_{t=1}^{N-t} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{N-t} (X_t - \bar{X})^2} \quad k = 0, 1, \dots, K \quad (\text{A. 5a})$$

Où  $r_k$  est appelé coefficient d'autocorrélation au pas  $k$ , ( $r_k$  est un estimateur de  $\rho_k$ ).

Un autre estimateur de la fonction d'autocorrélation  $\rho_k$  est donné par :

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (X_t - \bar{X}_t) \cdot (X_{t+k} - \bar{X}_{t+k})}{\left[ \sum_{t=1}^{N-k} (X_t - \bar{X}_t)^2 \cdot \sum_{t=1}^{N-k} (X_{t+k} - \bar{X}_{t+k})^2 \right]^{1/2}} \quad (\text{A. 5b})$$

Où  $\bar{X}$  est la moyenne des  $N-k$  premières valeurs  $X_1, X_2, \dots, X_{N-k}$  et  $\bar{X}_{t+k}$  est la moyenne des  $N-k$  dernières valeurs  $X_{k+1}, \dots, X_N$ . L'estimateur  $r_k$  de l'équation (A. 5b) est l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\rho_k$  quand  $(X_t, X_{t+k})$  est normale bivariable, c'est un bon estimateur quand il est considéré individuellement mais pas dans le cas où plusieurs estimateurs  $r_1, r_2, \dots$  sont requis.

Le tracé des coefficients d'autocorrélation en fonction du pas  $k$  est appelé : Fonction d'autocorrélation ou correlogramme.

\* Fonction d'autocorrélation partielle :

Pour un processus autorégressif, le coefficient d'autocorrélation partielle  $\phi_k(k)$  mesure l'association linéaire entre  $\rho_j$  et  $\rho_{j-k}$  pour  $j \leq k$  et  $\phi_k(k)$  pour  $k = 1, 2, \dots$  est la fonction d'autocorrélation partielle.

On peut écrire la fonction d'autocorrélation  $\rho_j$  sous la forme.

$$\rho_j = \phi_1(k) \cdot \rho_{j-1} + \phi_2(k) \cdot \rho_{j-2} + \dots + \phi_k(k) \cdot \rho_{j-k} \quad (\text{A.6})$$

$$j = 1, \dots, k$$

où  $\phi_j(k)$  est le  $j$  ème coefficient autorégressif d'un modèle AR (k). L'autocorrélation partielle est donnée par le dernier coefficient  $\phi_k(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$

L'équation (A.6) s'écrit sous forme développée de la manière suivante:

$$\phi_1(k) \cdot \rho_0 + \phi_2(k) \cdot \rho_1 + \dots + \phi_k(k) \cdot \rho_{k-1} = \rho_1$$

$$\phi_1(k) \cdot \rho_1 + \phi_2(k) \cdot \rho_0 + \dots + \phi_k(k) \cdot \rho_{k-2} = \rho_2$$

(A.7)

$$\phi_1(k) \cdot \rho_{k-1} + \phi_2(k) \cdot \rho_{k-2} + \dots + \phi_k(k) \cdot \rho_0 = \rho_k$$

La fonction d'autocorrélation partielle est déterminé par la résolution du système A.7 successivement pour  $k = 1, 2, \dots$

La fonction d'autocorrélation partielle peut aussi être calculée d'une manière récurssive par les formules de Durbin (1960) données par:

$$\phi_k(k) = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_j(k-1) \cdot \rho_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_j(k-1) \cdot \rho_j} \quad (\text{A.8a})$$

$$\phi_j(k) = \phi_j(k-1) + \phi_2(k) \cdot \phi_{k-j}(k-1) \quad (\text{A.8b})$$

Pour déterminer la fonction d'autocorrélation partielle (estimée)  $\hat{\phi}(k)$  de la série  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , on calcule les autocorrélations  $r_k$  à partir de l'équation (A.6) puis remplacer  $\rho$  par  $r$  dans les équations (A.7) ou (A.8).

L'intervalle de confiance de  $\phi_k(k)$  pour des limites  $1-\alpha$ , (Box-Jenkins, 1970) est :

$$\left( -u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{N}}, u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{N}} \right) \quad (\text{A.9})$$

PROCEDURE D'IDENTIFICATION PAR LES FONCTIONS R ET S ET  
 FONCTION D'AUTOCORRELATION PARTIELLE GENERALISEE (FAPG)

1 - Déterminer la fonction d'autocorrélation  $r_k$  par :

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})}{\left[ \sum_{t=1}^N (Z_t - \bar{Z})^2 \right]^{-1}}$$

où  $\bar{Z}$  est la moyenne de l'échantillon

2 - Estimer les fonctions  $R^*$  et  $S^*$  en utilisant les relations suivantes :

$$R_{n+1}^*(r_k) = R_1^*(r_k) \left[ \frac{S_n^*(r_k)}{S_n^*(r_{k-1})} - 1 \right]$$

$$S_n^*(r_k) = S_{n-1}^*(r_k) \left[ \frac{R_n^*(r_{k+1})}{R_1^*(r_k)} - 1 \right]$$

pour  $N = 1, \dots, 5$  et  $k = 0 \pm 1, \dots, \pm 9$

où  $S_0^*(r_k) = 1$  et  $R_1^*(r_k) = r_k$

3 - Estimer la FAPG en utilisant l'expression :

$$\phi_{kk}^{(j)} = (-1)^{k+1} \frac{S_k^* [(-1)^j * r_j]}{S_k^* [(-1)^{(-j-1)l} * r_{-j-l}]}$$

pour  $N = 1, \dots, 5$

et  $k = 0, 1, \dots, 9$

où  $l = 0$  pour l'argument  $r_i$  et  $l = 1$  pour l'argument  $(-1) r_i$ .

4 - Mettre les fonctions  $R^*$  et  $S^*$  sous forme de table ( les valeurs de  $n$  en colonnes et les valeurs de  $k$  en lignes) pour les deux arguments  $r_k$  et  $(-1) r_k$ .

Il est souvent préférable d'utiliser  $r_k$  pour des séries présentant de hautes fréquences et utiliser  $(-1)^k r_k$  pour les basses fréquences.

5 - A partir de la fonction  $S^*$  identifier  $p$  comme la colonne qui présente deux groupes de constantes suivies par des colonnes variables, ensuite identifier  $q$  comme le nombre de valeurs non constantes se trouvant au dessus ou au dessous de la ligne centrale (ligne entre  $k=0$  et  $k=-1$ ).

6 - Confirmer les valeurs de  $p$  et  $q$  par l'identification de la colonne  $p + 1$  de valeurs nulles de la fonction  $R^*$  et les  $2q + 1$  valeurs non nulles autour de la ligne du centre ( $k = 0$ ).

7 - Confirmer les valeurs de  $p$  et  $q$  par l'identification de la colonne  $p$  de constantes de la fonction d'autocorrélation partielle généralisée et la ligne  $q$  de valeurs nulles.

L'étape 7 est facultative puisque par expérience, on a trouvé que la fonction  $S^*$  est suffisamment bonne pour l'identification et  $R^*$  est suffisamment pour la vérification. (Salas et Obeysekera, 1982)

## METHODES DES D'ESTIMATION DES PARAMETRES

## C.1 - Méthode des moindres carrés :

Considérons le modèle de série chronologique  $y$  ( $t = 1, \dots, N$ ):

$$y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) + \varepsilon_t$$

où  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  sont les paramètres du modèle  
 $\varepsilon_t$  la série des résidus de moyenne nulle.

La méthode d'estimation des moindres carrés est basée sur la recherche des estimateurs  $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_p$  telque la somme des carrés des différences entre les valeurs observées et les valeurs estimées  $\hat{y}_t = f(y_{t-1}, \dots, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_p)$  ( $t = 1, \dots, N$ ) soit minimisée.

$$\sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^N (y_t - \hat{y}_t)^2 = \sum_{t=1}^N \left[ y_t - f(y_{t-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \right]^2 \quad (C.1)$$

Les paramètres  $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_p$  doivent donc satisfaire:

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^N (y_t - \hat{y}_t)^2}{\partial \alpha_1} = 0, \dots, \frac{\partial \sum_{t=1}^N (y_t - \hat{y}_t)^2}{\partial \alpha_p} = 0. \quad (C.2)$$

Donc  $p$  équations à  $p$  inconnues doivent être résolues pour obtenir les paramètres  $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_p$ .

## C.2 - Méthode du maximum de vraisemblance :

Considérons le modèle :  $y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) + \varepsilon_t$  représentant une série  $y_1, \dots, y_N$ . Le produit des probabilités jointes des résidus  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$  est appelée fonction de vraisemblance (L) et est exprimée par :

$$L = f(\varepsilon_1, \underline{\alpha}), f(\varepsilon_2, \underline{\alpha}), \dots, f(\varepsilon_N, \underline{\alpha}) = \prod_{t=1}^N f(\varepsilon_t, \underline{\alpha}) \quad (C.3)$$

où  $\underline{\alpha} = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \}$  ensemble des paramètres à estimer.

L'estimateur du maximum de vraisemblance est obtenu quand la fonction de vraisemblance est maximale. Les mêmes estimateurs peuvent être obtenus en maximisant le Logarithme de la fonction de vraisemblance.

$$LL = \text{Ln} \prod_{t=1}^N f(\varepsilon_t, \underline{\alpha}) = \sum_{t=1}^N \text{Ln} f(\varepsilon_t, \underline{\alpha}) \quad (C.4)$$

Les dérivés partielles de LL par rapport aux paramètres  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  doivent donc être nulles.

$$\frac{\partial LL}{\partial \alpha_1} = 0, \dots, \frac{\partial LL}{\partial \alpha_p} = 0 \quad (C.5)$$

La résolution du système d'équations (C.5) donne alors les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres  $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_p$

Si la variable résiduelle est supposée normale de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\varepsilon^2$  la fonction de vraisemblance peut être écrite comme :

$$L = \frac{1}{(\sqrt{2\pi} \sigma_\varepsilon)^N} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2\right)$$

Le logarithme de la fonction :

$$LL = - N \cdot \text{Ln} (\sqrt{2\pi} \sigma_\epsilon) - \frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} \cdot \sum_{t=1}^N \epsilon_t^2$$

$$LL = - N \cdot \text{Ln} (\sqrt{2\pi} \sigma_\epsilon) - \frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} \cdot \sum_{t=1}^N (y_t - \hat{y}_t)^2$$

avec  $\hat{y}_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_p)$

En prenant les dérivées partielles par rapport aux paramètres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ .

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^N (y_t - \hat{y}_t)^2}{\partial \alpha_1} = 0, \dots, \frac{\partial \sum_{t=1}^N (y_t - \hat{y}_t)^2}{\partial \alpha_p} = 0$$

On a pu montrer que les estimateurs de maximum de vraisemblance sont les mêmes que ceux des moindres carrés (Box et Jenkins, 1976) pour des séries suivant la loi normale.

## PRESENTATION DE QUELQUES TESTS STATISTIQUES

## D.I - Test du périodogramme cumulatif:

Le périodogramme cumulatif peut être utilisé pour vérifier l'indépendance d'une série donnée.

Considérons la série  $X_t$  ( $t = 1, \dots, N$ ) le périodogramme de  $X_t$  (noté MSDChj) est obtenu par :

$$\text{MSDChj} = \frac{2}{N^2} \left[ \left( \sum_{t=1}^N X_t (\cos(2\pi hjt)) \right)^2 + \left( \sum_{t=1}^N X_t (\sin(2\pi hjt)) \right)^2 \right] \quad (\text{D.1})$$

où  $hj = j/N$  est l'harmonique (ou fréquence)

si  $\sigma^2$  est la variance des  $X_t$ , le périodogramme cumulatif est donné par :

$$P_i = \frac{\sum_{j=1}^i \text{MSDChj}}{\frac{2}{\sigma^2}} \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{D.2})$$

Pour des séries non autocorrélées (indépendantes) le tracé de  $P$  en fonction de  $i$  doit être une droite joignant les points  $(0,0)$  et  $(0.5, 1)$ . Pour savoir si une déviation de cette ligne est significative (série dépendante) on peut tracer les lignes des limites de probabilité utilisant la statistique de SMIRNOV KOLMOGOROV (Box et Jenkins, 1970). Considérons un seuil de probabilité  $\alpha$ , les droites limites pour une série indépendante sont tracées approximativement aux distances  $\pm K_{\alpha} \sqrt{N}$  autour de la ligne théorique où  $N' = (N - 2)/2$  ou  $(N - 1)/2$  si  $N$  est pair ou impair, respectivement. Si un nombre supérieur

à  $\alpha \cdot N$  de points se trouvent à l'extérieur des intervalles de confiance, les  $X_t$  sont alors dépendants.

(  $K_\alpha$  sont des valeurs tabulées de la statistique de Smirnov Kolmogorov pour différentes probabilités  $\alpha$  ).

## D.2 - TEST DU $\chi^2$ :

Le test du  $\chi^2$  est un test statistique utilisé pour vérifier l'hypothèse qu'une série donnée suit une loi normale.

Considérons une série  $X_t$ ,  $t = 1, \dots, N$  de moyenne  $\bar{X}$  et d'écart type  $\sigma$  où  $N$  est la taille de l'échantillon. On suppose que la distribution fréquentielle des  $X_t$  est ajustée par une loi de distribution de probabilité normale de paramètres  $\bar{X}$  et  $\sigma$ ; la vérification de l'adéquation de l'ajustement peut se faire par le test du  $\chi^2$  en suivant la procédure suivante :

- Classer la série par ordre croissant et choisir un certain nombre  $k$  de classes avec une probabilité  $1/k$  dans chaque classe.

- A partir de la table de la loi normale déterminer les valeurs  $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$  correspondants aux probabilités cumulées  $1/k, 2/k, \dots, (k-1)/k$  telle que  $X'_1 = \bar{X} + \sigma U_1; X'_2 = \bar{X} + \sigma U_2, \dots, X'_{k-1} = \bar{X} + \sigma U_{k-1}$

- $N_i$  est la fréquence absolue dans la classe  $i$ ,  $i = 1, \dots, k$  est  $N/k$  est le nombre théorique de valeurs dans chaque classe la valeur définie par la relation :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - N/k)^2}{N/k} \quad (D.3)$$

a une distribution  $\chi^2$  avec  $(k-2)$  degrés de libertés. En considérant un seuil de probabilité  $\alpha$ , on peut obtenir la valeur tabulée du  $\chi^2_{1-\alpha}(k-2)$  telle que si  $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(k-2)$  l'hypothèse de normalité des  $X_t$  est acceptée sinon elle est rejetée.

Tableau du test d'asymetrie pour les echantillons de taille inferieur à 150 (D'après Snedecor et Cochran, 1967, p. 552)

| N  | $\alpha$ |       | N   | $\alpha$ |       |
|----|----------|-------|-----|----------|-------|
|    | 0.02     | 0.10  |     | 0.02     | 0.10  |
| 25 | 1.061    | 0.711 | 70  | 0.673    | 0.459 |
| 30 | 0.986    | 0.662 | 80  | 0.631    | 0.432 |
| 35 | 0.923    | 0.621 | 90  | 0.596    | 0.409 |
| 40 | 0.870    | 0.587 | 100 | 0.567    | 0.389 |
| 45 | 0.825    | 0.558 | 125 | 0.505    | 0.350 |
| 50 | 0.787    | 0.534 | 150 | 0.464    | 0.321 |
| 60 | 0.723    | 0.492 | 175 | 0.430    | 0.298 |

REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES DES SÉRIES  
HISTORIQUES ET DES SÉRIES STANDARDISÉES

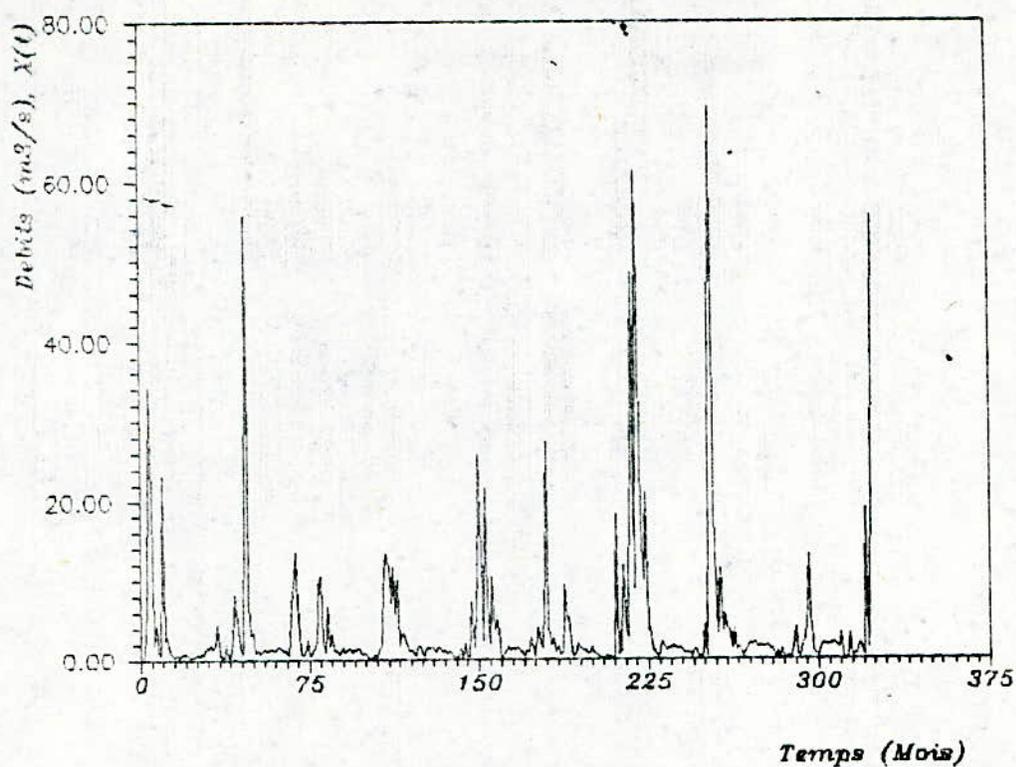


Figure (E.1a): Serie historique des debits mensuels  
(Serie de OUED BOUSSELAM)

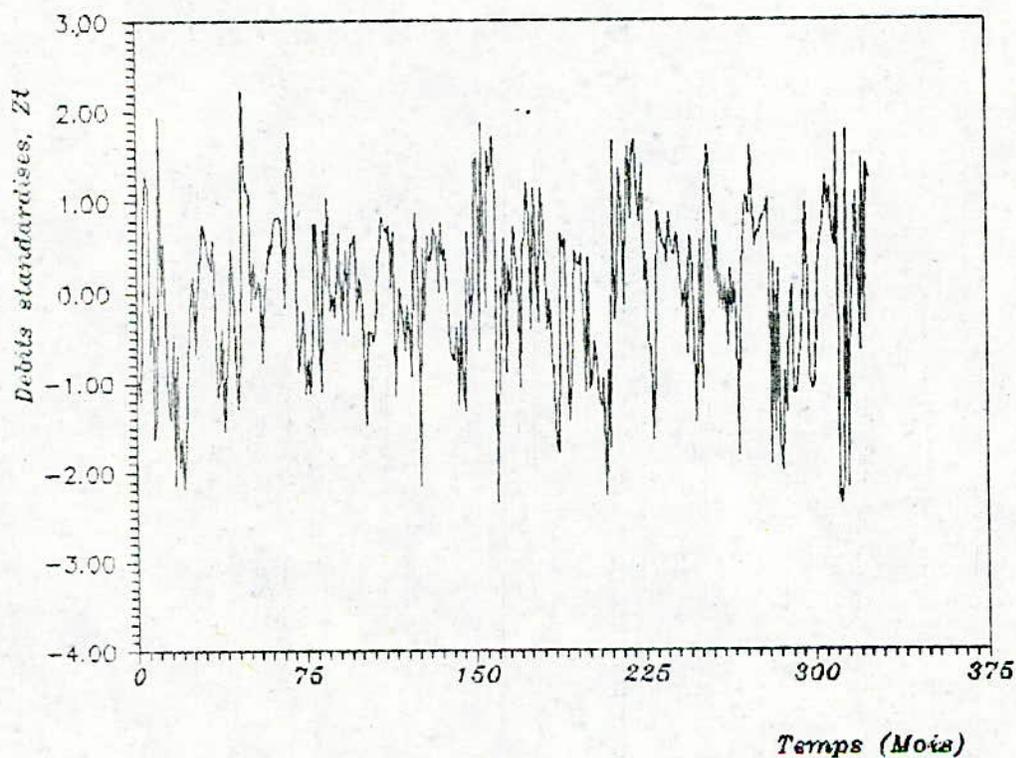


Figure (E.1b): Serie historique des debits mensuels  
standardiseses (Serie de OUED BOUSSELAM)

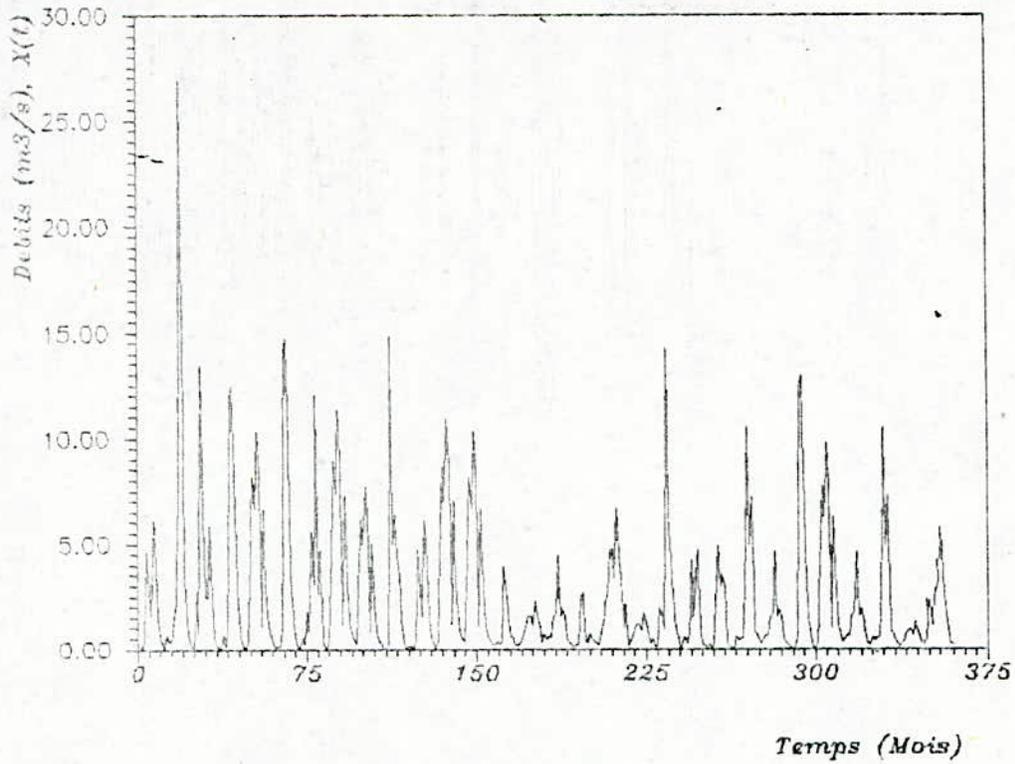


Figure (E.2a): Serie historique des debits mensuels  
(Serie de Oued DOUS)

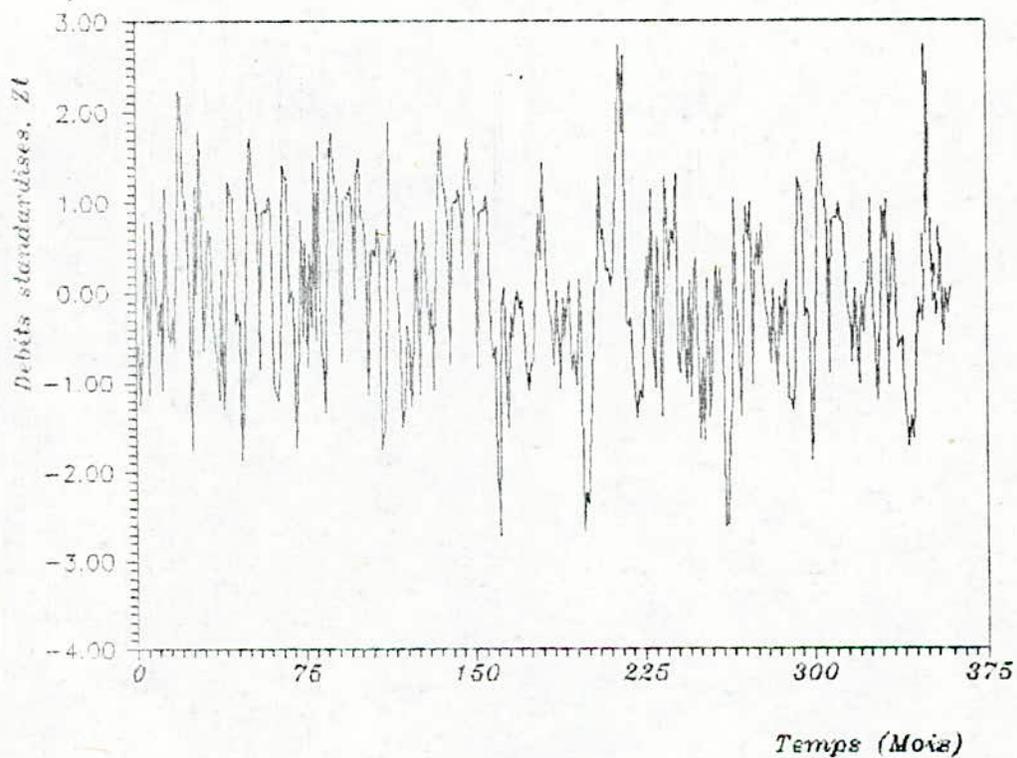


Figure (E.2b): Serie historique des debits mensuels  
standardises (Serie de Oued DOUS)

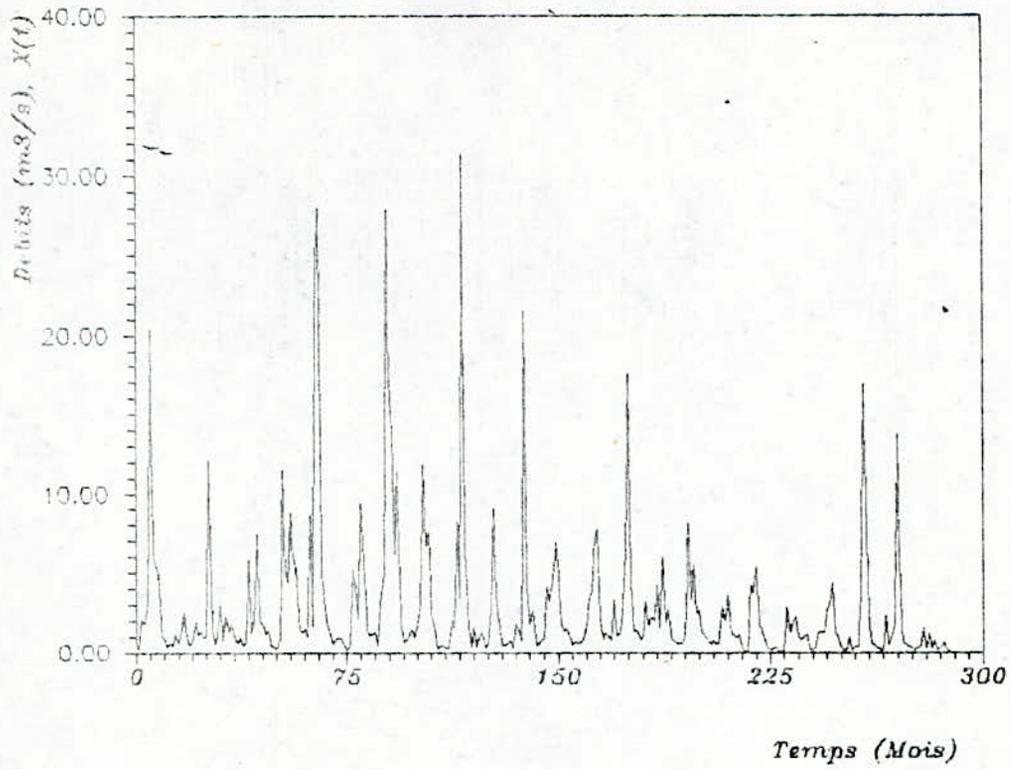


Figure (E.3a): Serie historique des debits mensuels  
(Serie de Oued FODDA)

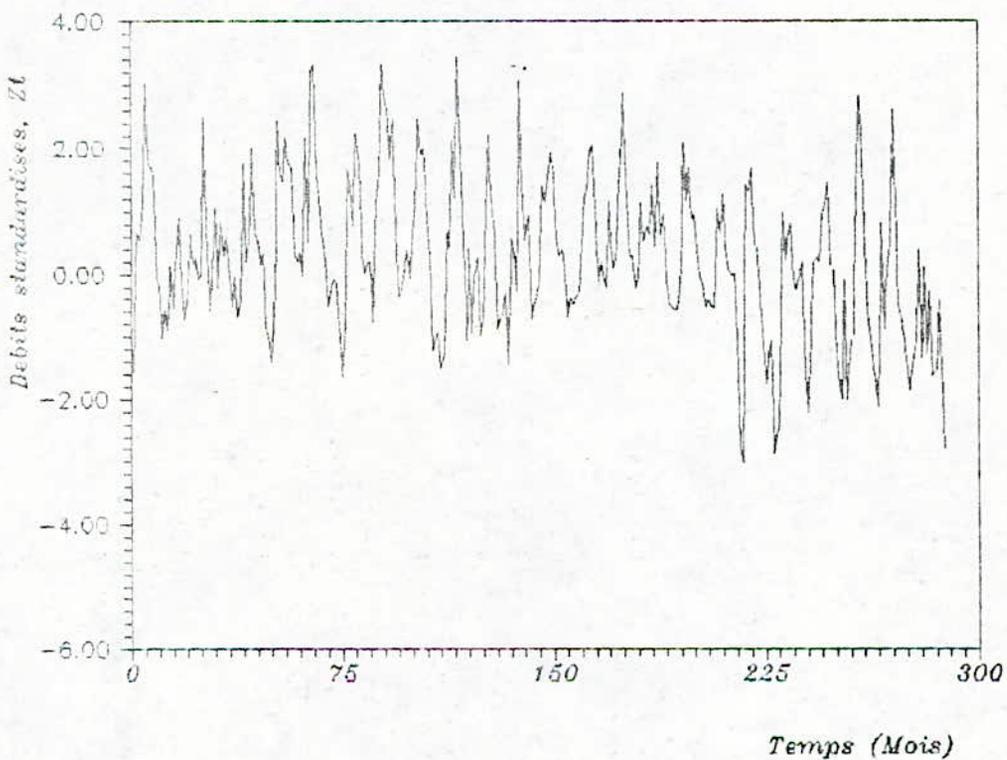


Figure (E.3b): Serie historique des debits mensuels  
standardises (Serie Oued FODDA)

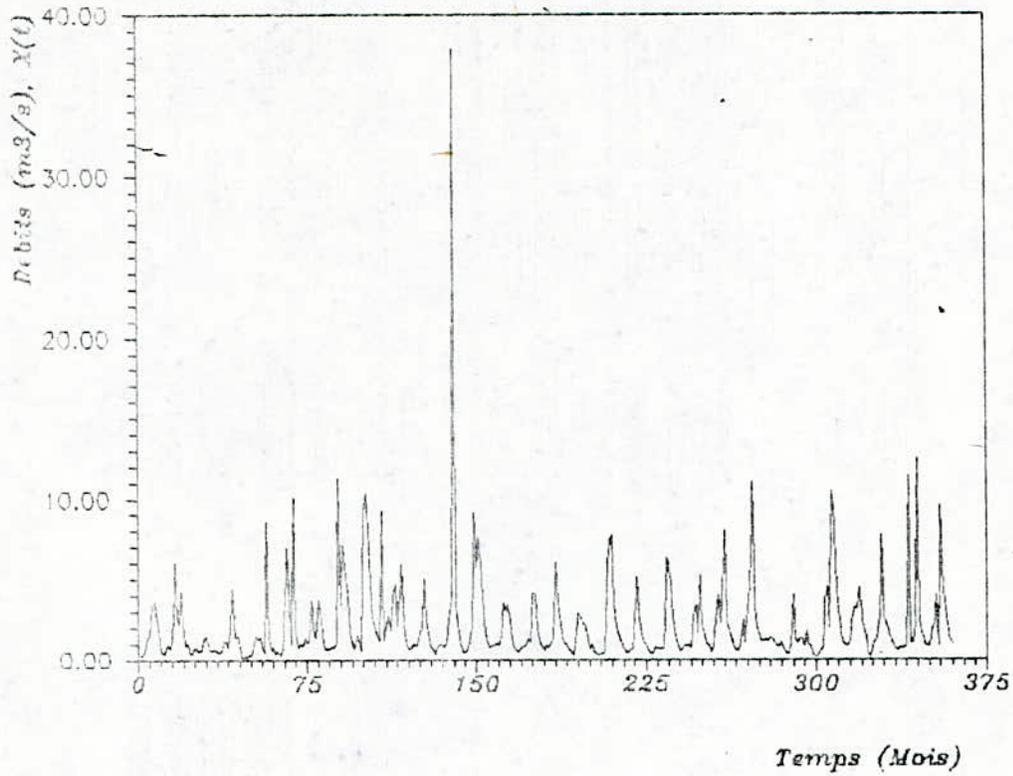


Figure (E.4a): Serie historique des debits mensuels (Serie de Benibahdel)

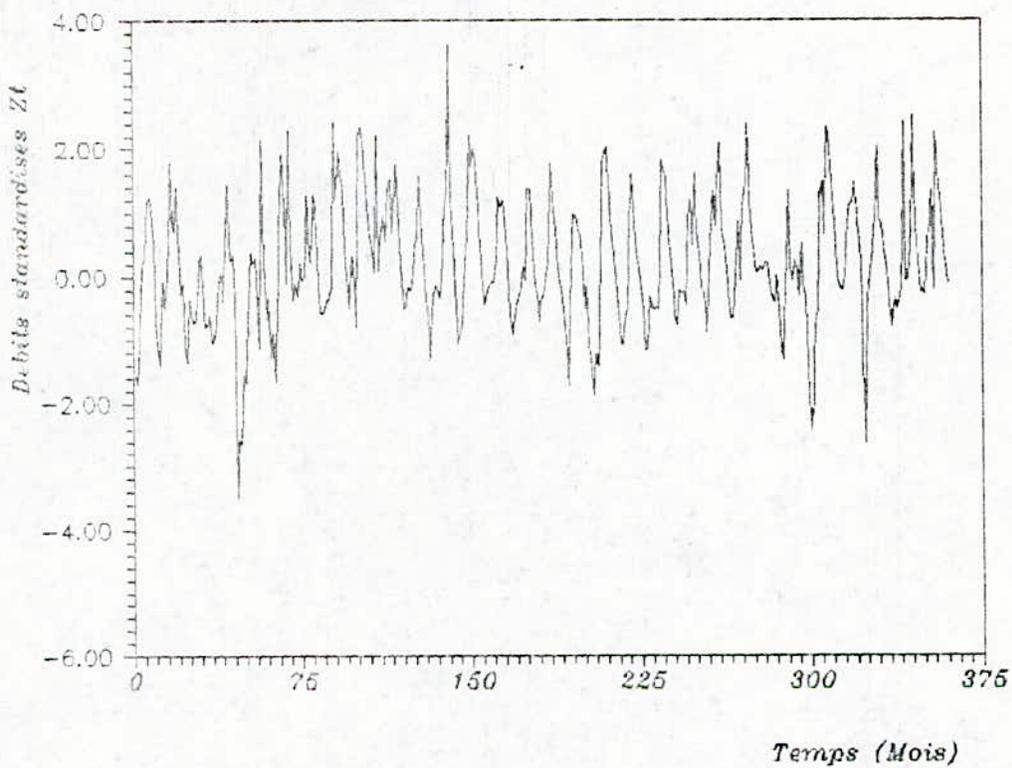


Figure (E.4b): Serie historique des des debits mensuels standardises (Serie de Benibahdel)

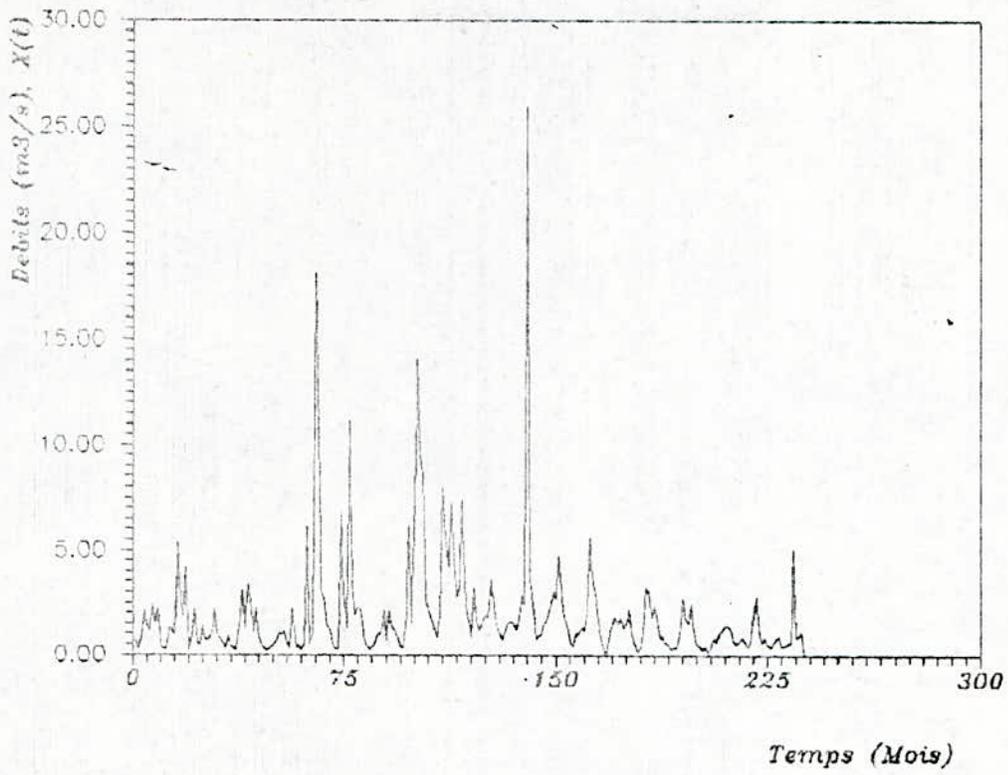


Figure (E.5a): Serie historique des debits mensuels  
(Serie de Cheurfa)

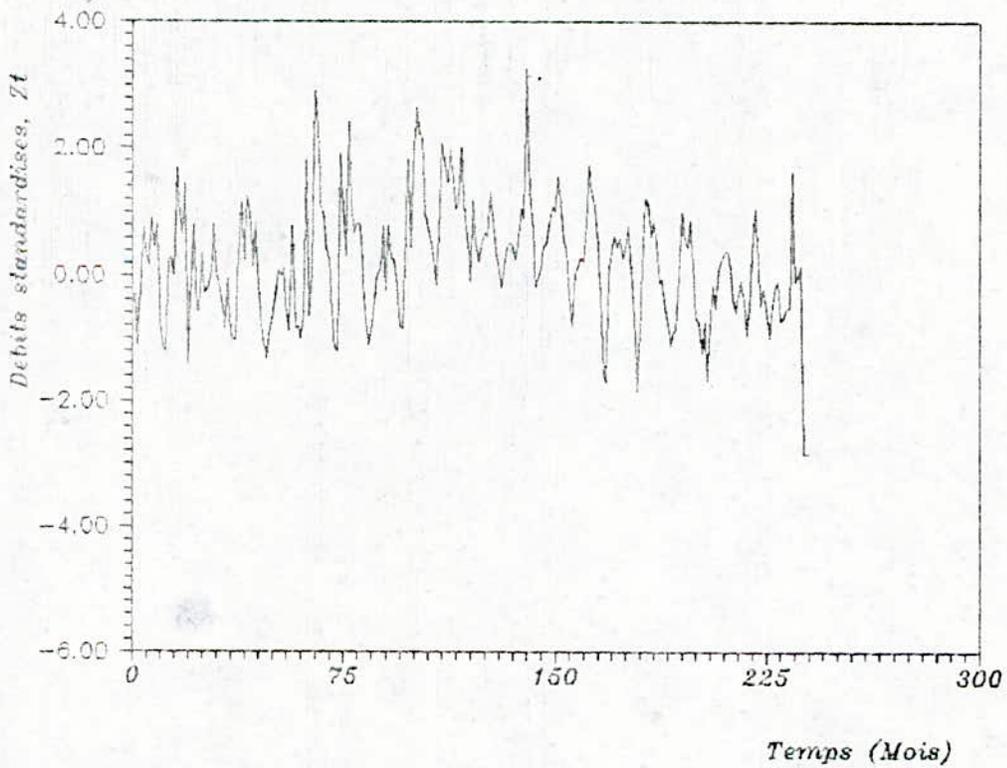


Figure (E.5b): Serie historique des debits mensuels  
standardiseses (Serie Cheurfa)

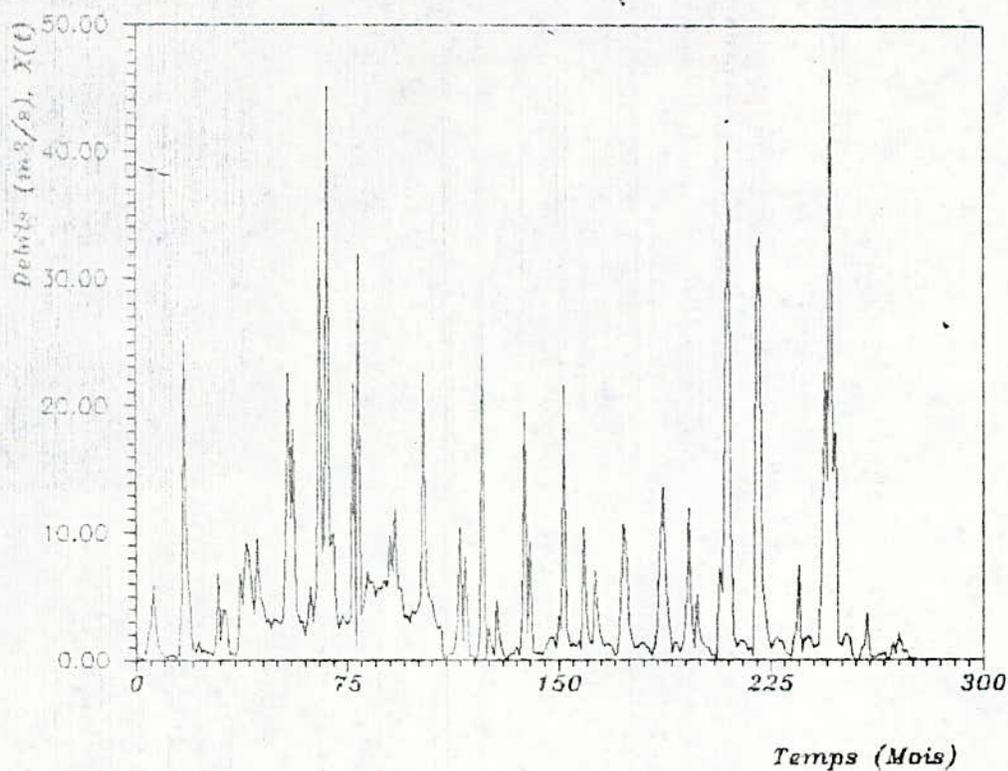


Figure (E.6a): Serie historique des debits mensuels  
(Serie CHEFFIA)

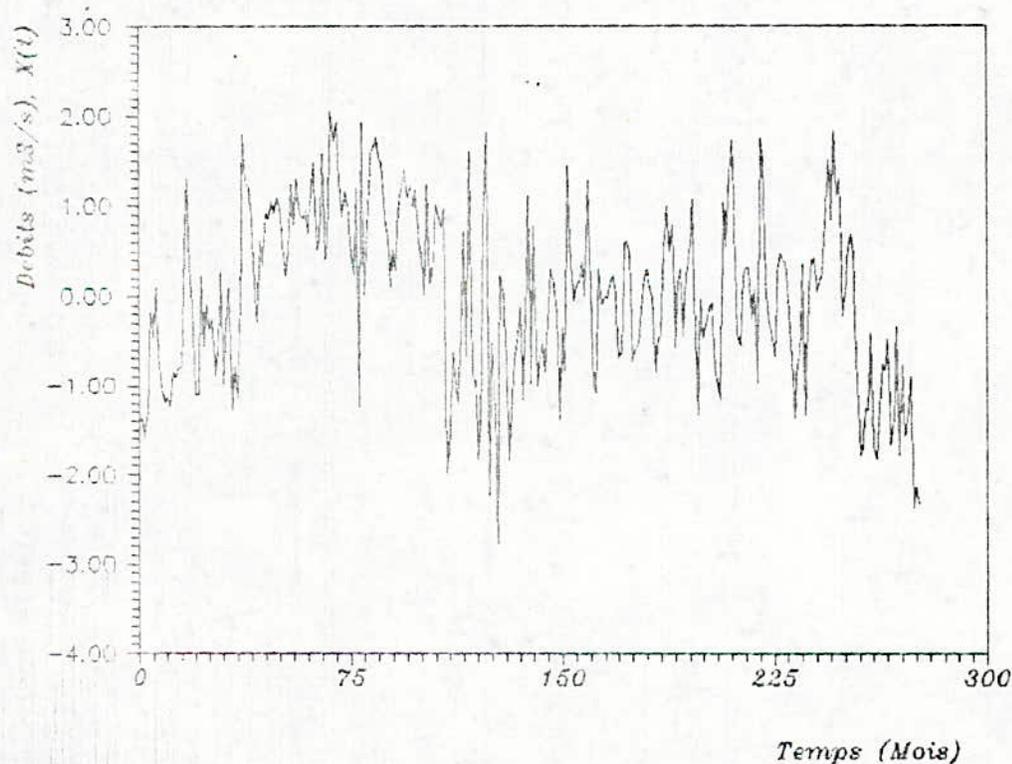


Figure (E.6b): Serie historique des debits mensuels  
standardises (Serie CHEFFIA)

CORRELOGRAMMES ET CORRELOGRAMMES PARTIELS DES  
SERIES HISTORIQUES STANDARDISEES

Transformation du Log translate

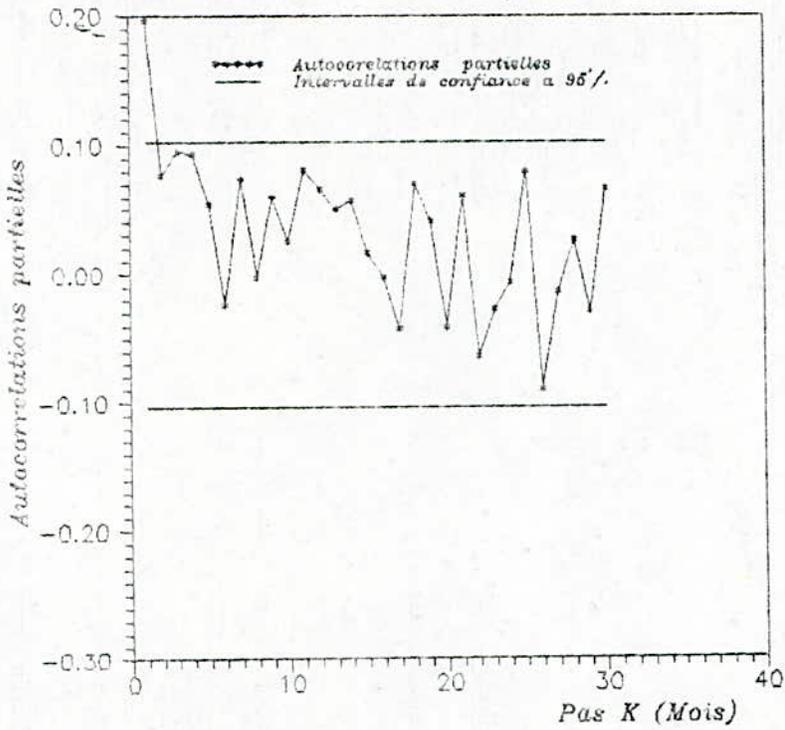


Figure F.1a - Fonction d'autocorrelation partielle des debits mensuels standardises (serie de OUED BOUSSELM)

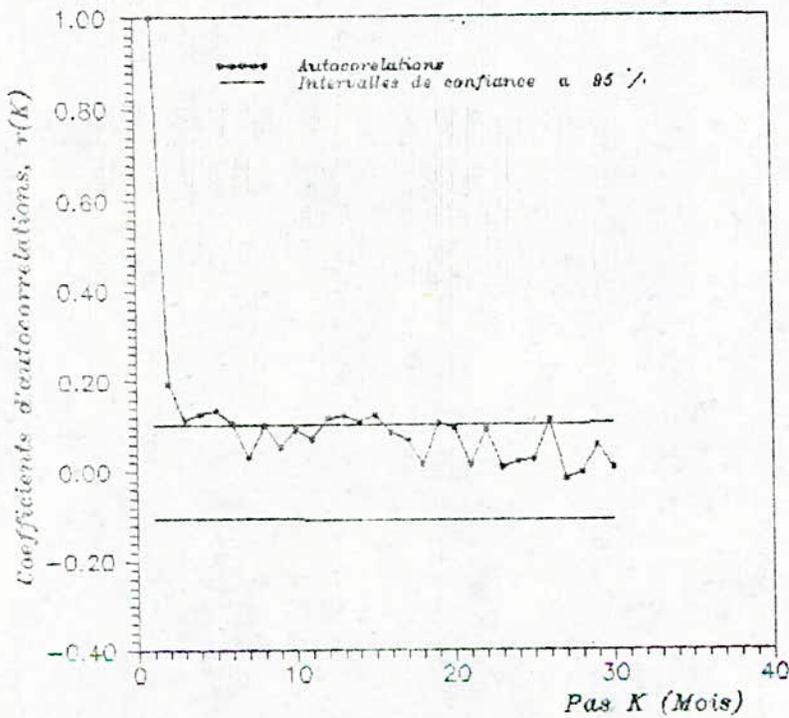


Figure F.1b - Fonction d'autocorrelation des debits mensuels standardises (serie de OUED BOUSSELM)

Transformation du Log translate mensuel

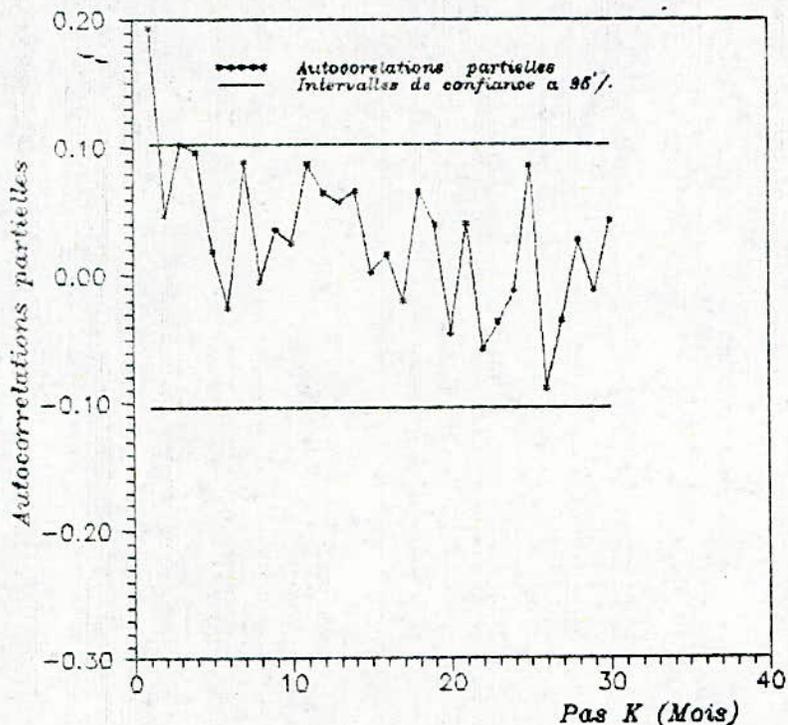


Figure F.1c - Fonction d'autocorrelation partielle des debits mensuels standardises (serie de OUED BOUSSELAM)

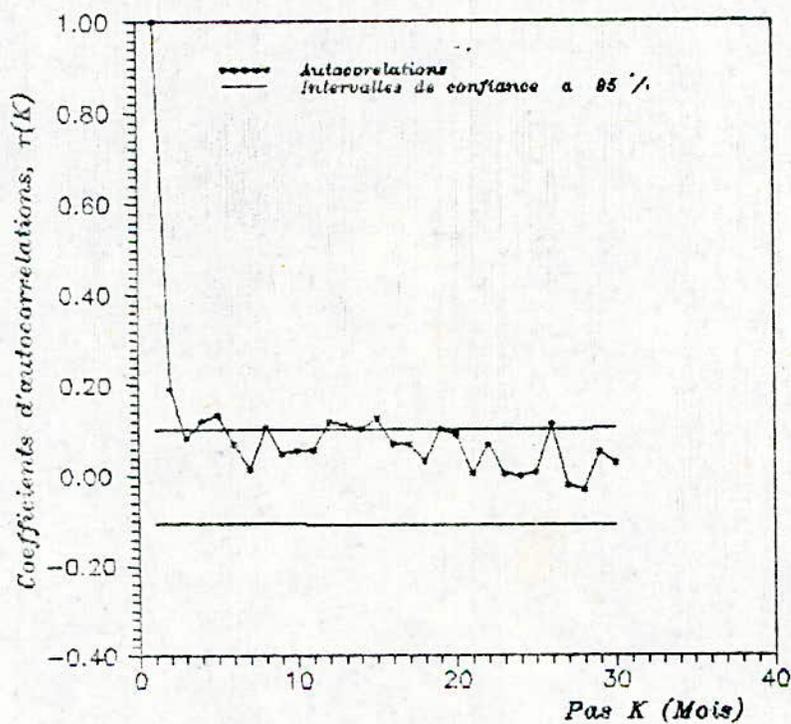


Figure F.1d - Fonction d'autocorrelation des debits mensuels standardises (serie de OUED BOUSSELAM)

Transformation de BEARD

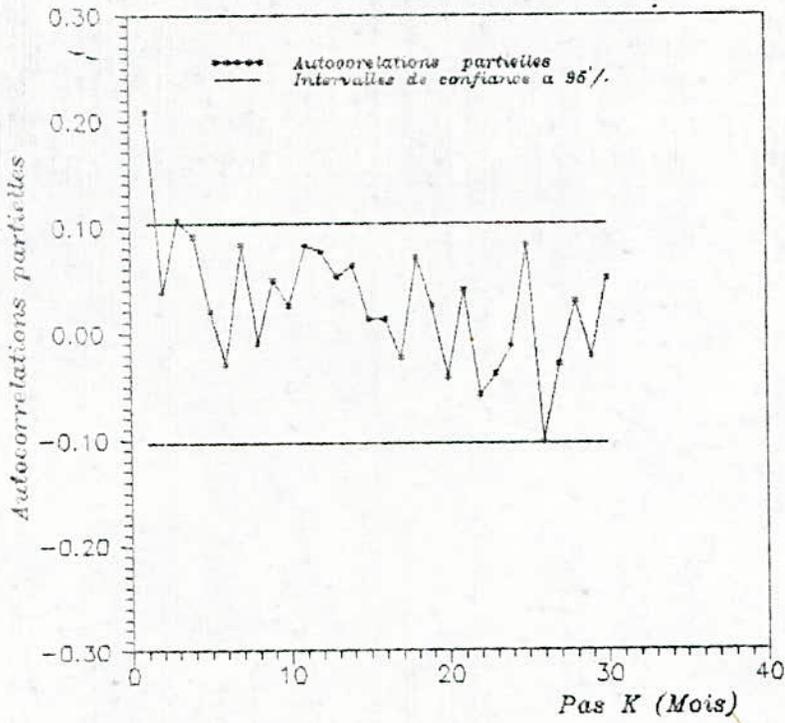


Figure F.1e - Fonction d'autocorrelation partielle des debits mensuels standardises (serie de OUED BOUSSELM)

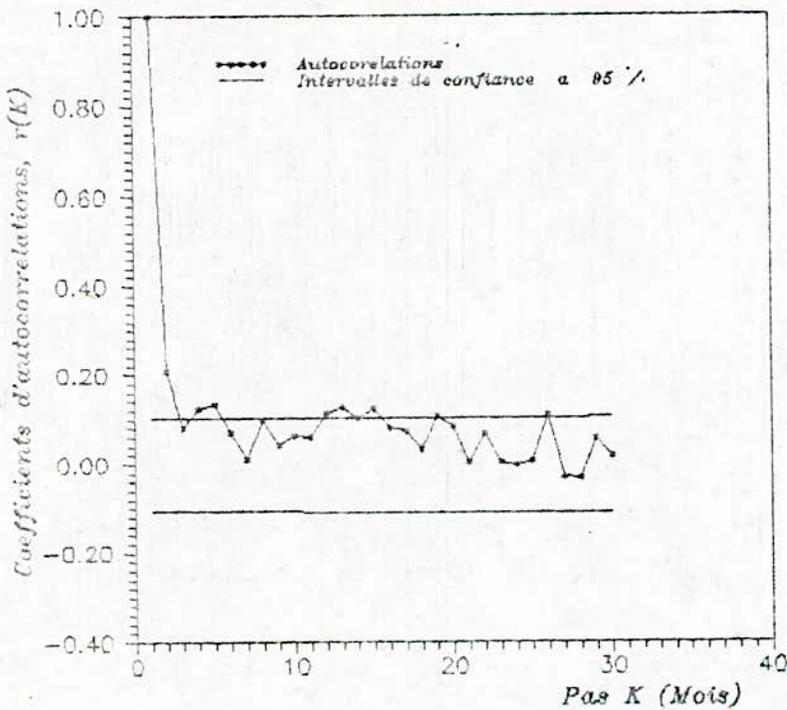


Figure F.1f - Fonction d'autocorrelation des debits mensuels standardises (serie de OUED BOUSSELM)

Transformation du Log translate

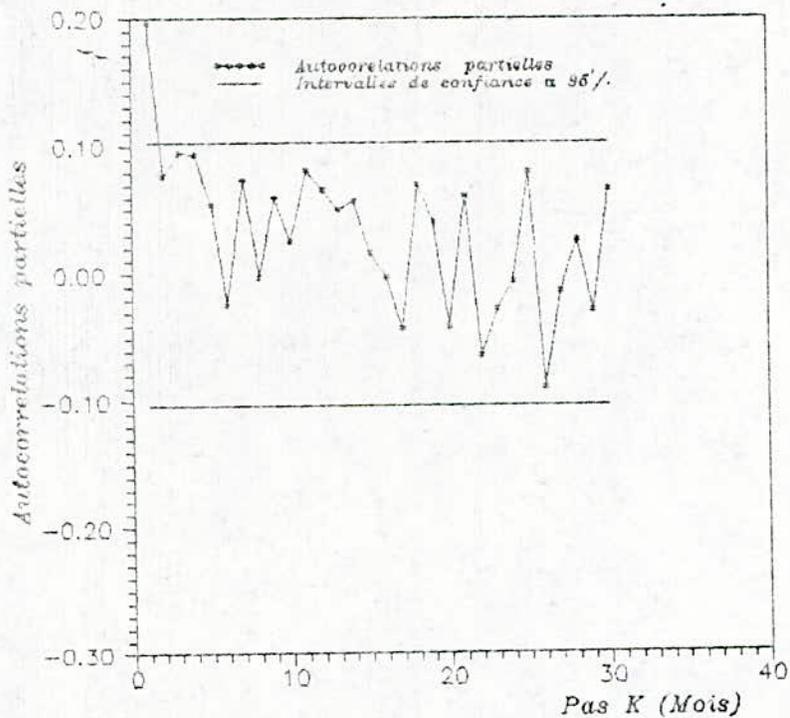


Figure F.2a - Fonction d'autocorrelation partielle des debits mensuels standardises (serie de OUED DOUS)

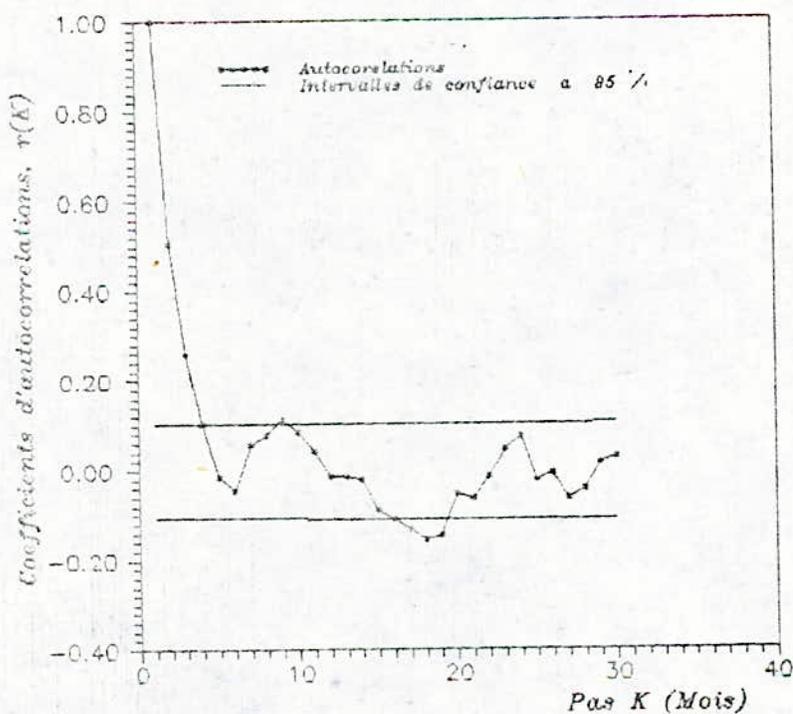


Figure F.2b - Fonction d'autocorrelation des debits mensuels standardises (serie de OUED DOUS)

Transformation du Log translate mensuel

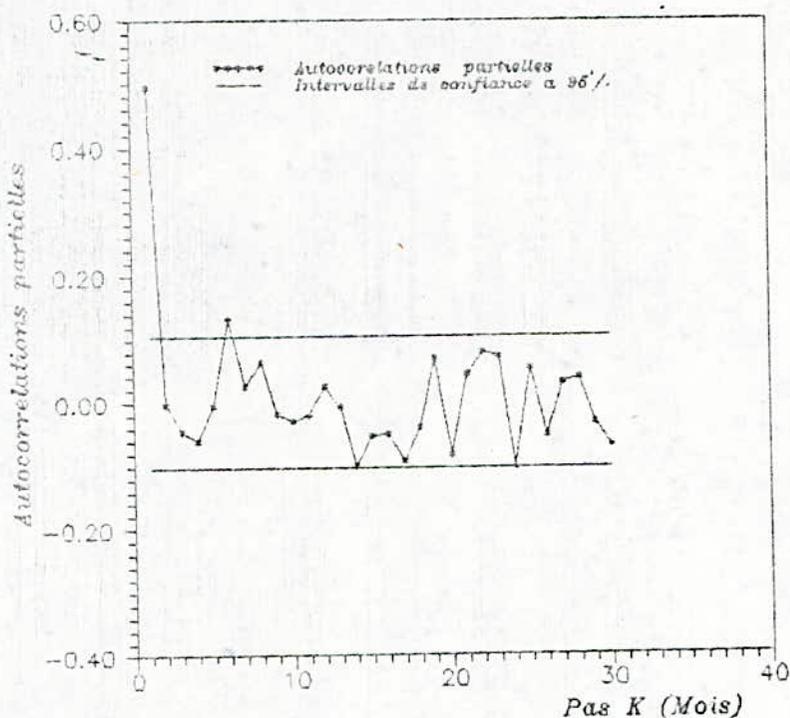


Figure F.2c - Fonction d'autocorrelation partielle des debits mensuels standardises (serie de OUED DOUS)

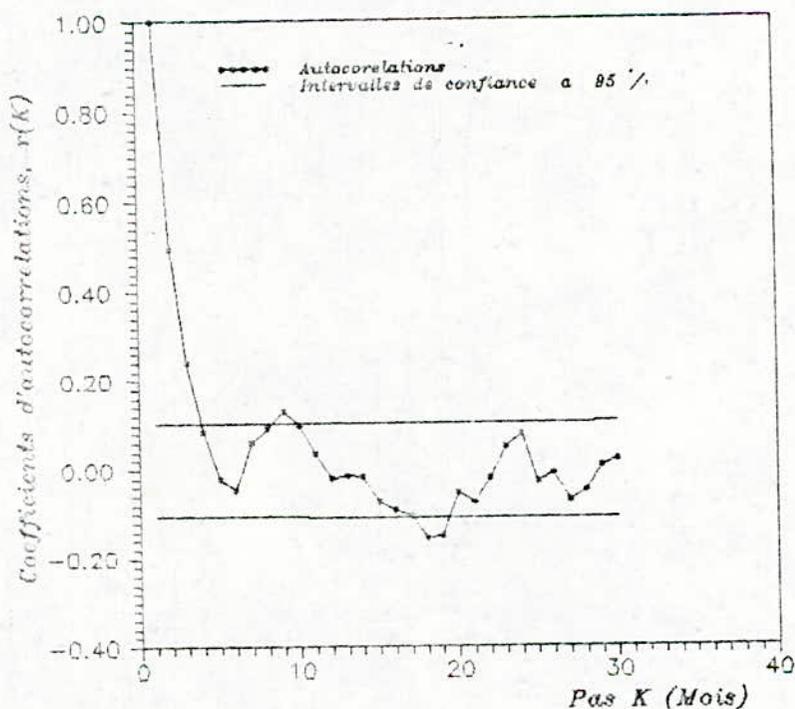


Figure F.2d - Fonction d'autocorrelation des debits mensuels standardises (serie de OUED DOUS)

## Transformation de BEARD

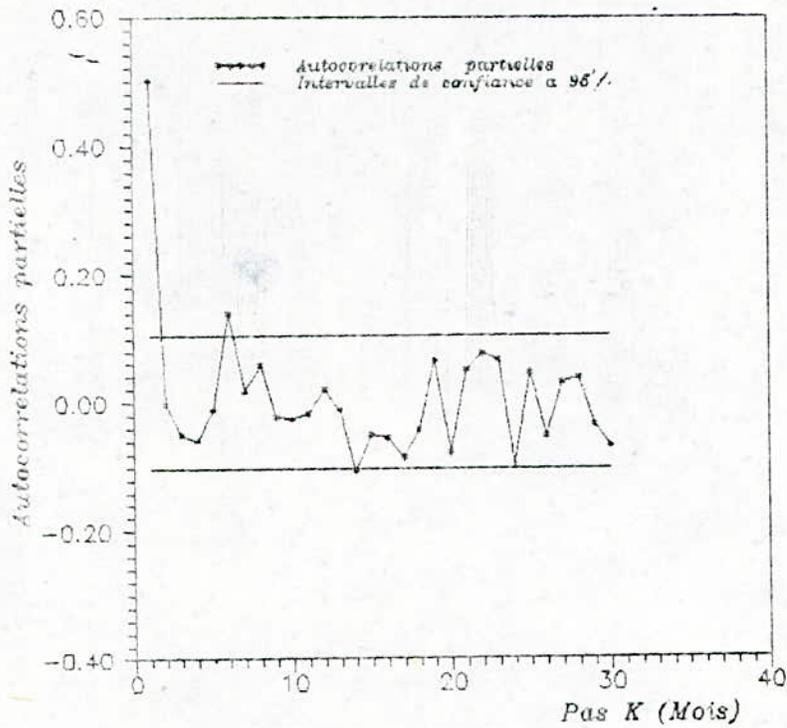


Figure F.2e - Fonction d'autocorrelation partielle des debits mensuels standardises (serie de OUED DOUS)

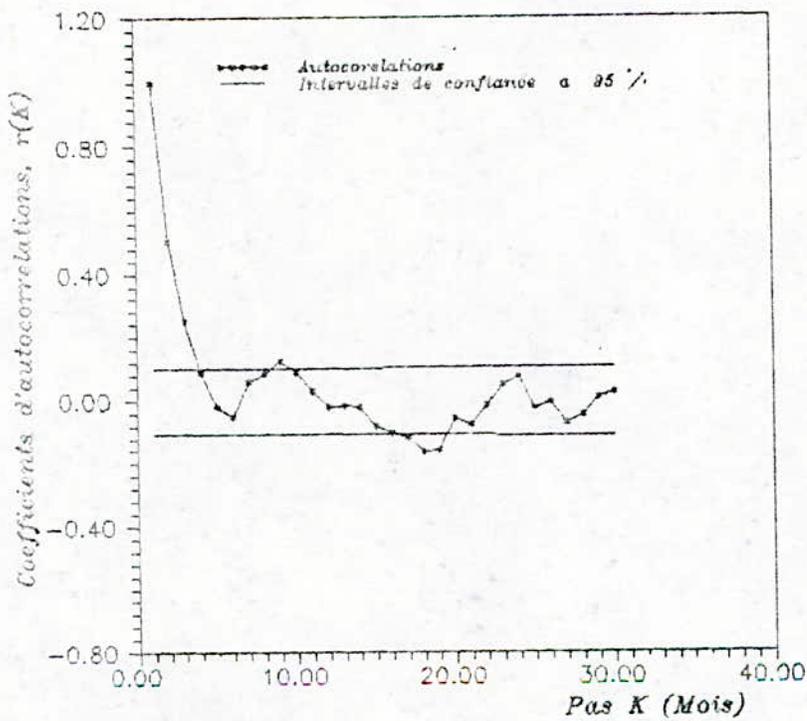


Figure F.2f - Fonction d'autocorrelation des debits mensuels standardises (serie de OUED DOUS)

Transformation du Log translate

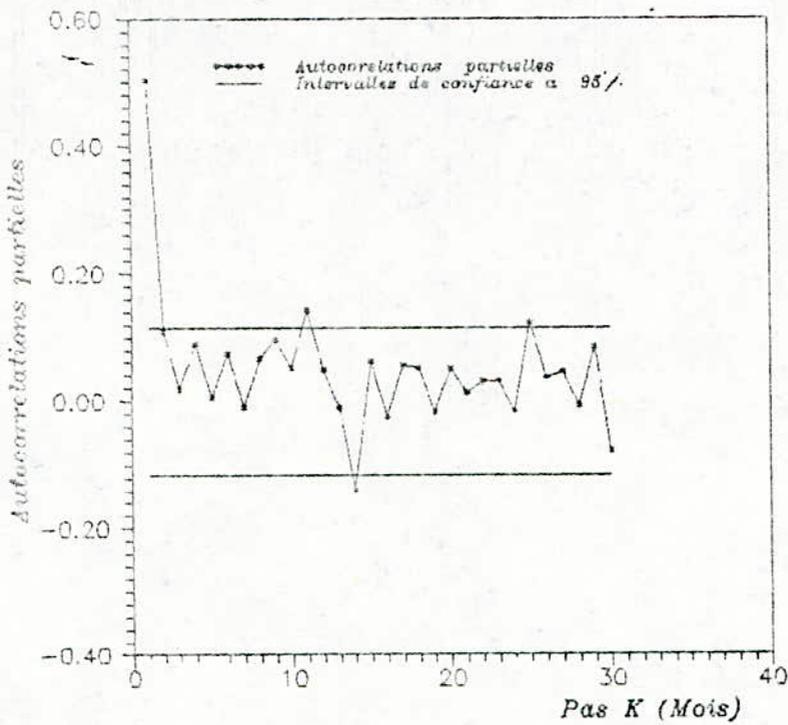


Figure F.3a - Fonction d'autocorrelation partielle des debits mensuels standardises (serie de OUED FODDA)

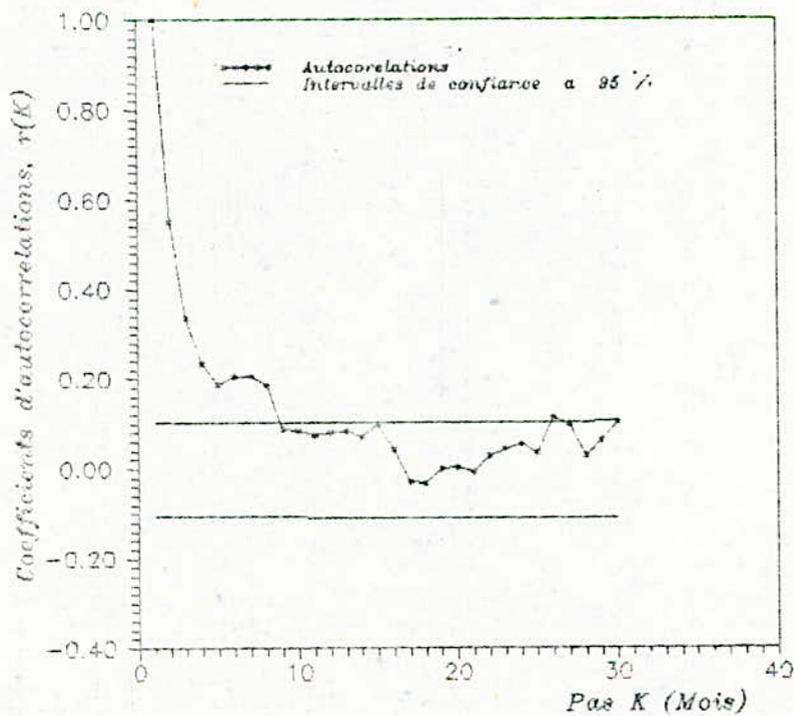


Figure F.3b - Fonction d'autocorrelation des debits mensuels standardises (serie de OUED FODDA)

Transformation du Log translate mensuel

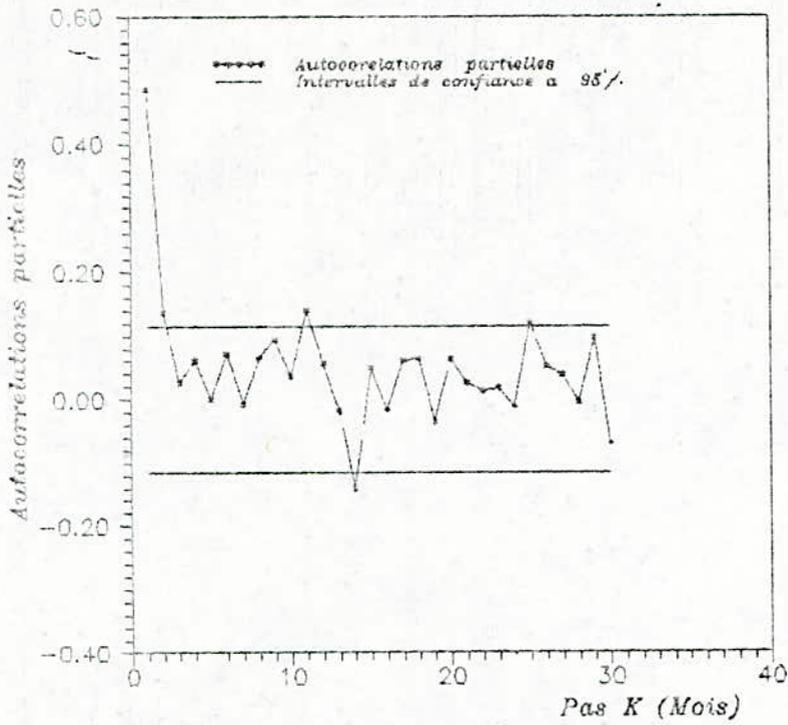


Figure F.3c - Fonction d'autocorrelation partielle des debits mensuels standardises (serie de OUED FODDA)

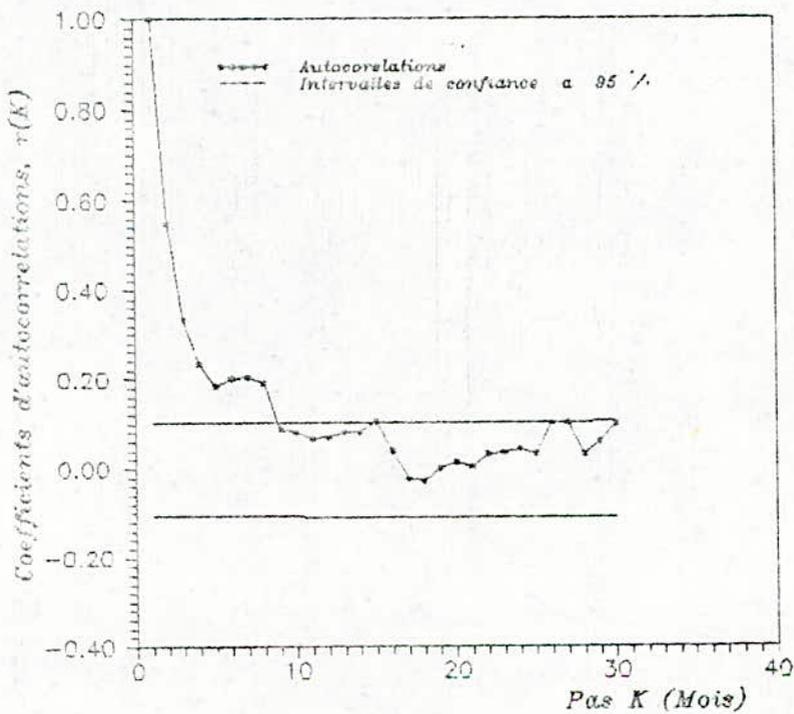


Figure F.3d - Fonction d'autocorrelation des debits mensuels standardises (serie de OUED FODDA)

## Transformation de BEARD

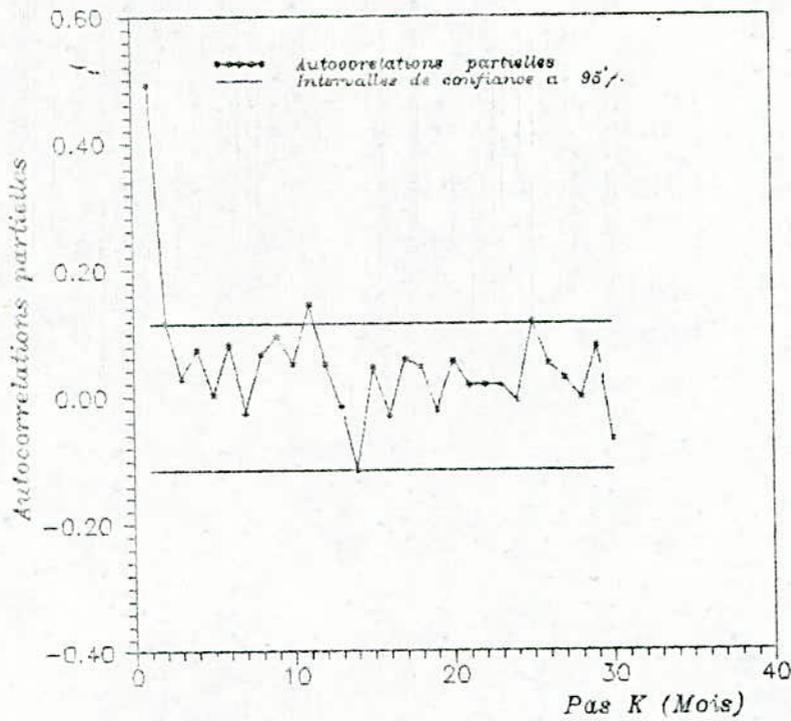


Figure F.3e - Fonction d'autocorrélation partielle des débits mensuels standardisés (serie de OUED FODDA)

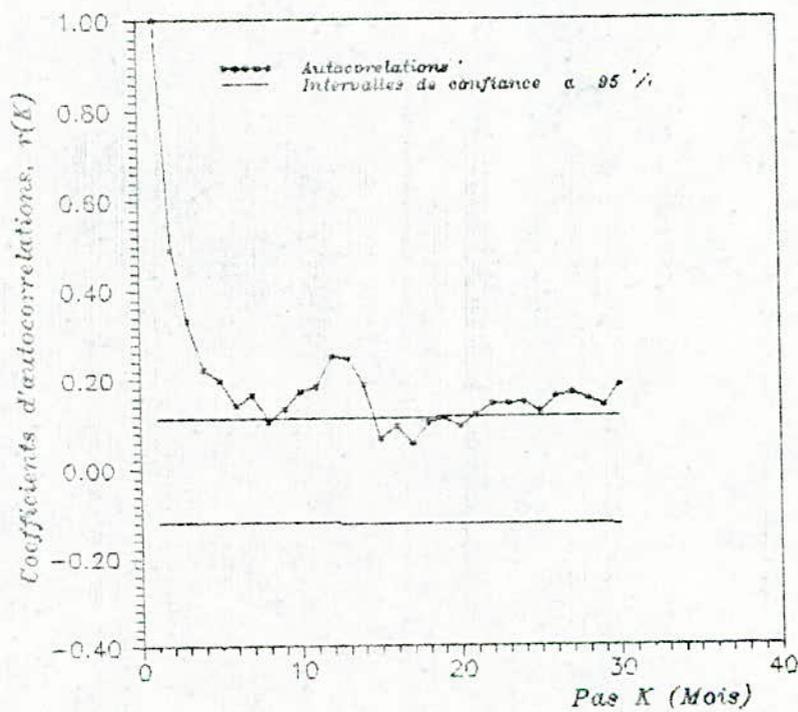


Figure F.3f - Fonction d'autocorrélation des débits mensuels standardisés (serie de OUED FODDA)

Transformation du Log translate

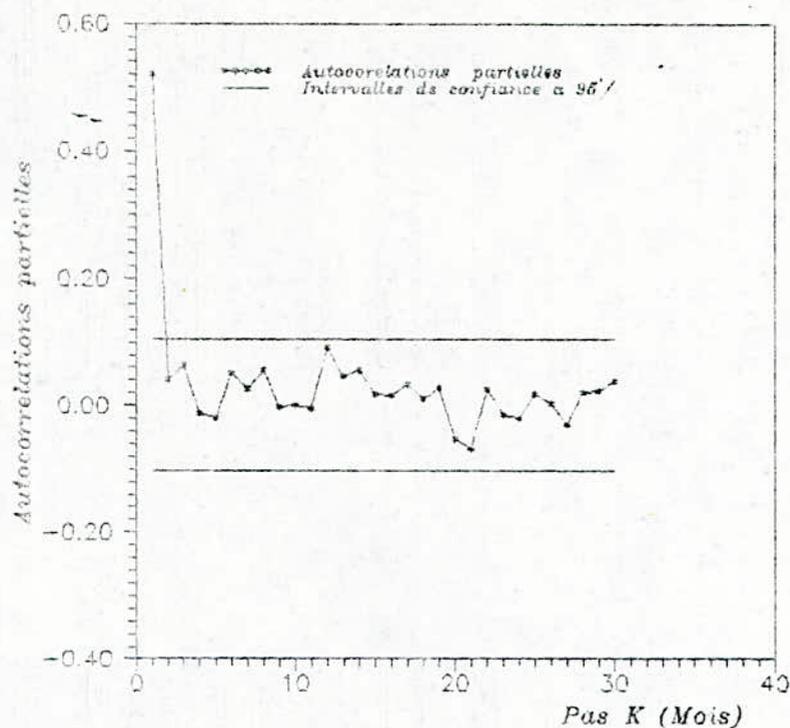


Figure F.4a - Fonction d'autocorrelation partielle des debits mensuels standardises (serie de BENIBAHEDEL)

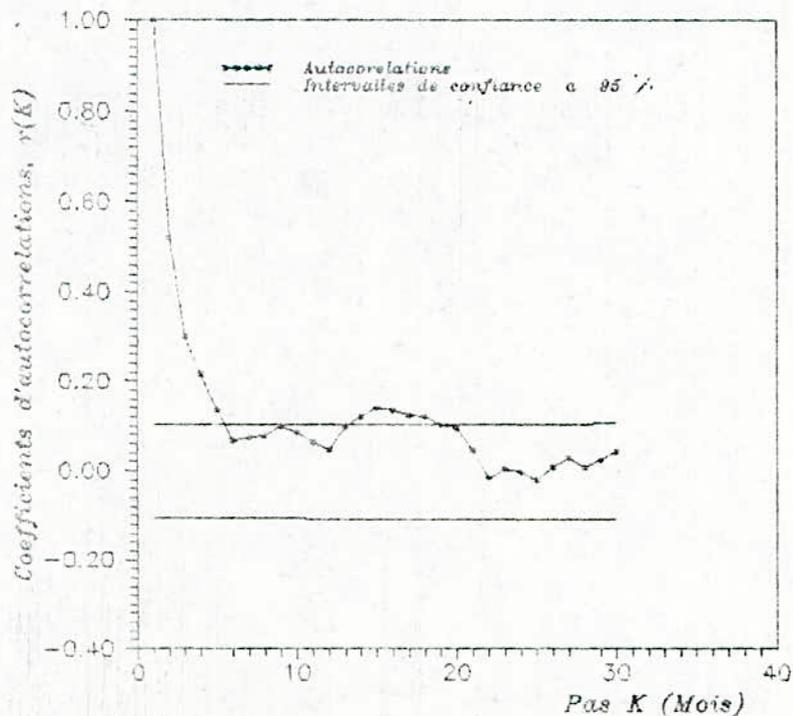


Figure F.4b - Fonction d'autocorrelation des debits mensuels standardises (serie de BENIBAHEDEL)

Transformation du Log translate mensuel

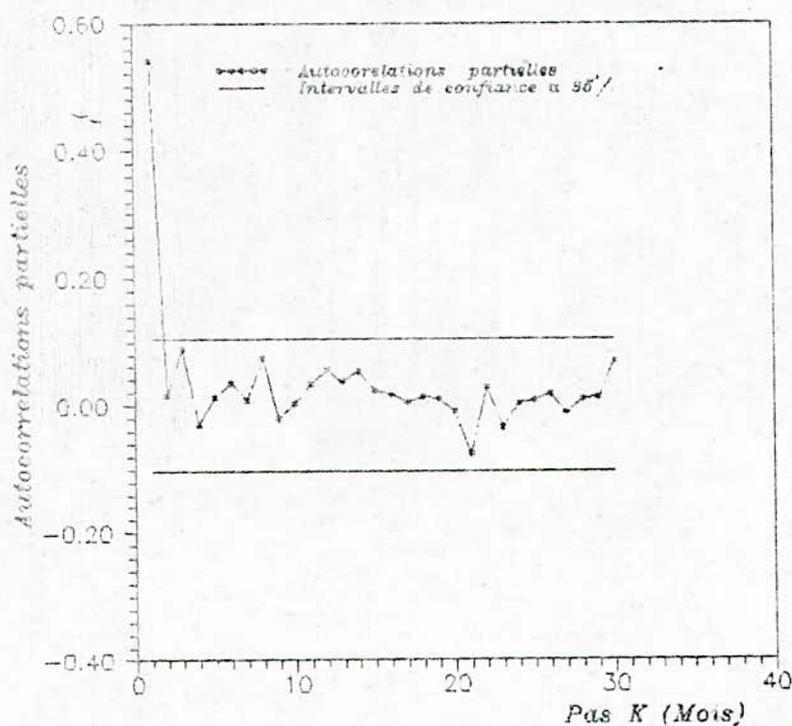


Figure F.4c - Fonction d'autocorrelation partielle des debits mensuels standardises (serie de BENIBAHDEL)

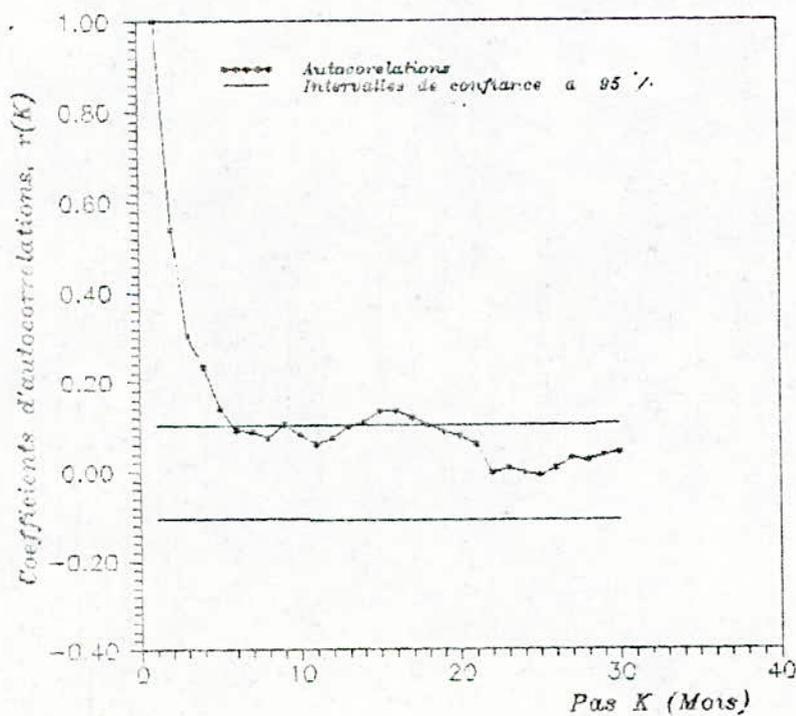


Figure F.4d - Fonction d'autocorrelation des debits mensuels standardises (serie de BENIBAHDEL)

Transformation du Log translate

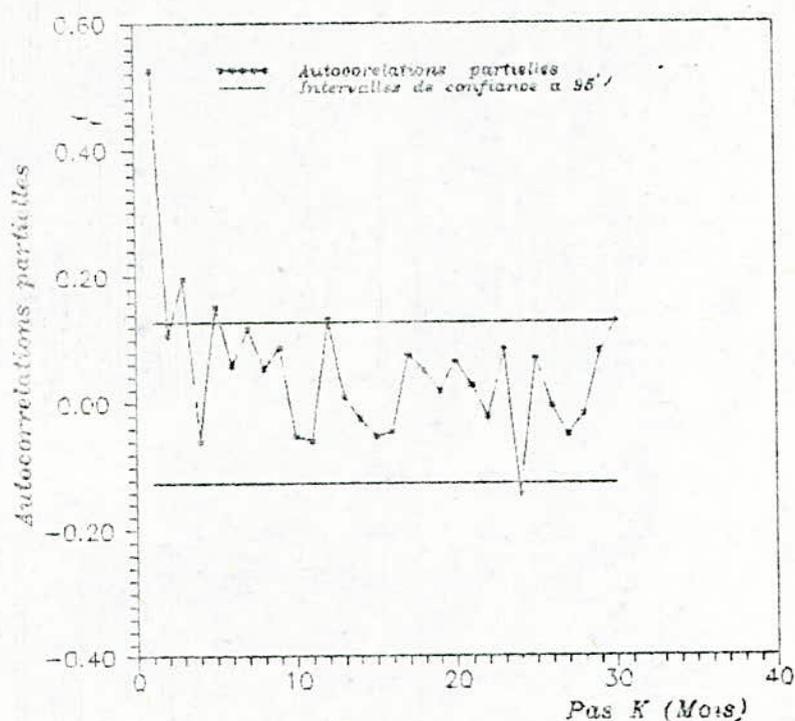


Figure F.5a - Fonction d'autocorrelation partielle des debits mensuels standardises (serie de CHEURFA)

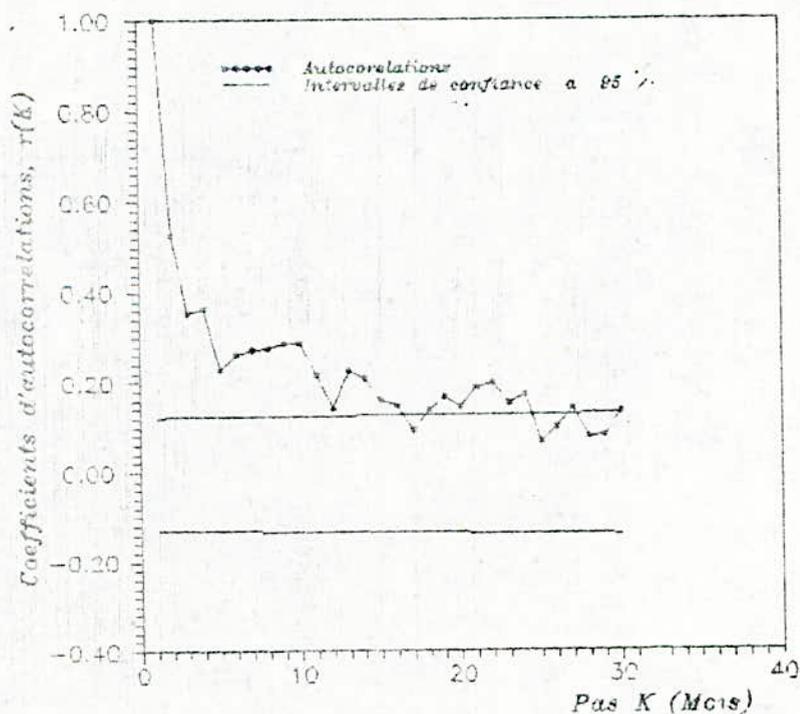


Figure F.5b - Fonction d'autocorrelation des debits mensuels standardises (serie de CHEURFA)

Transformation du Log translate mensuel

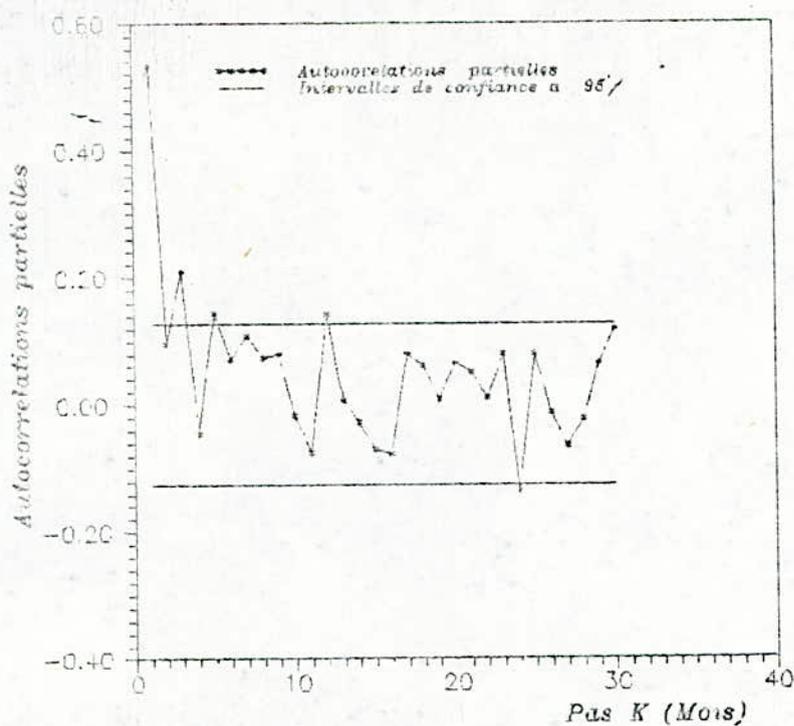


Figure F.5c - Fonction d'autocorrelation partielle des debits mensuels standardises (serie de CHEURFA)

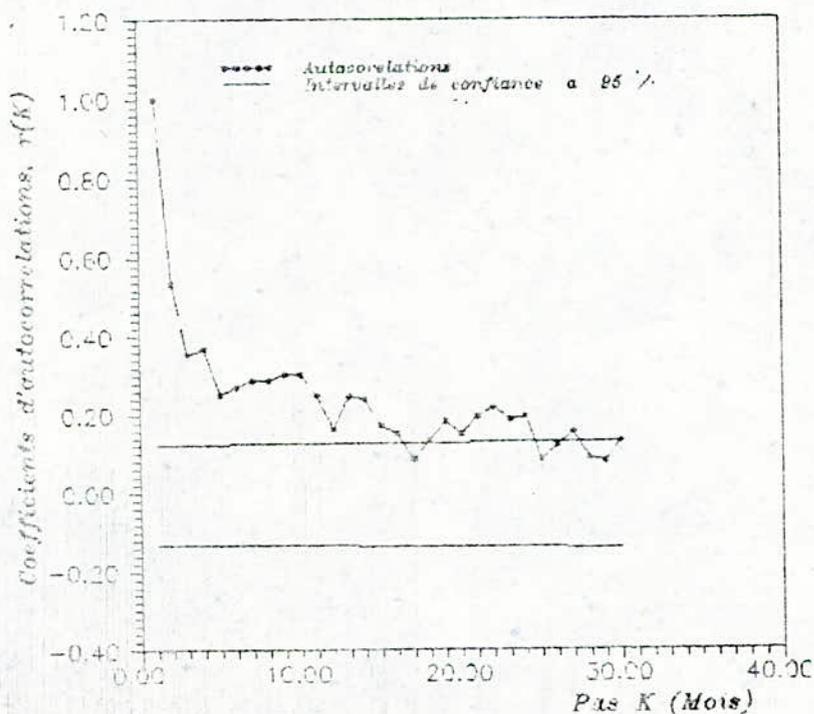


Figure F.5d - Fonction d'autocorrelation partielle des debits mensuels standardises (serie de CHEURFA)

Transformation du Log translate

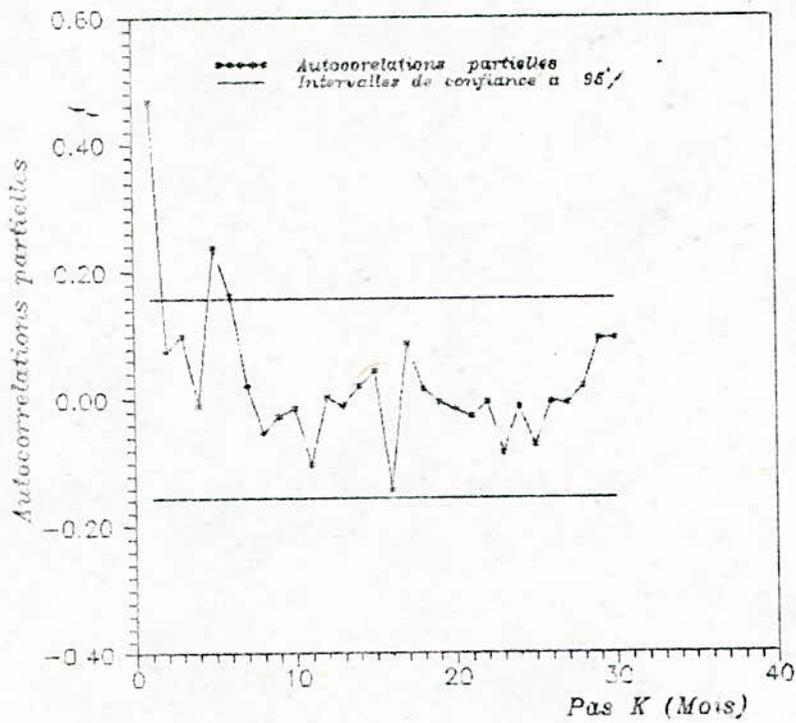


Figure F.6a - Fonction d'autocorrelation partielle des debits mensuels standardises (serie de CHEFFIA)

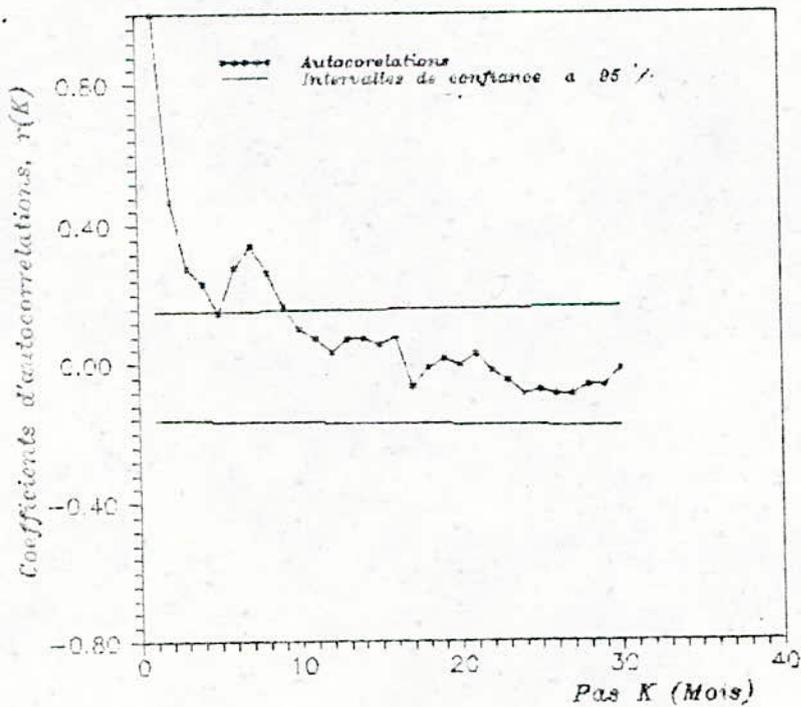


Figure F.6b - Fonction d'autocorrelation des debits mensuels standardises (serie de CHEFFIA)

Transformation de BEARD

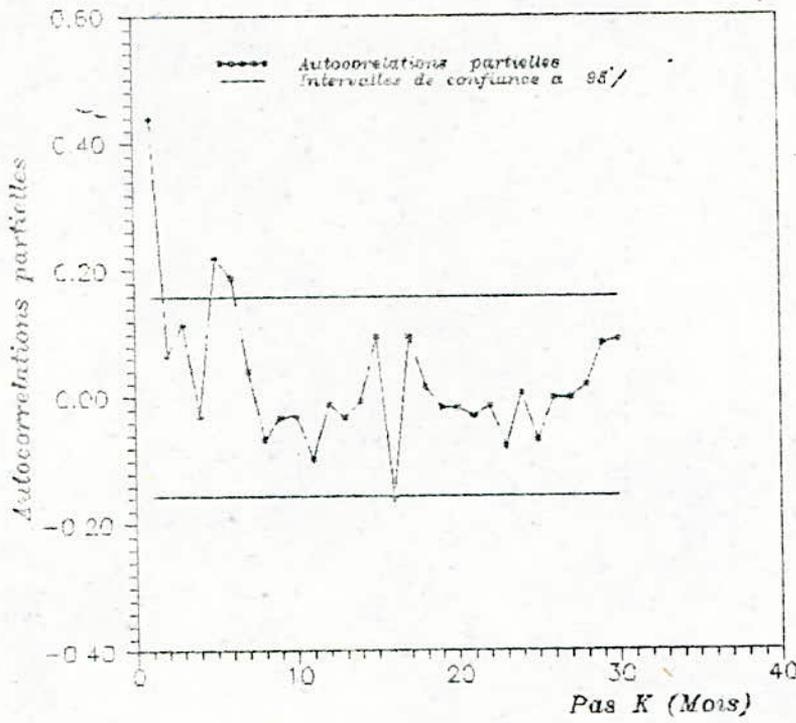


Figure F.6c - Fonction d'autocorrelation partielle des debits mensuels standardises (serie de CHEFFIA)

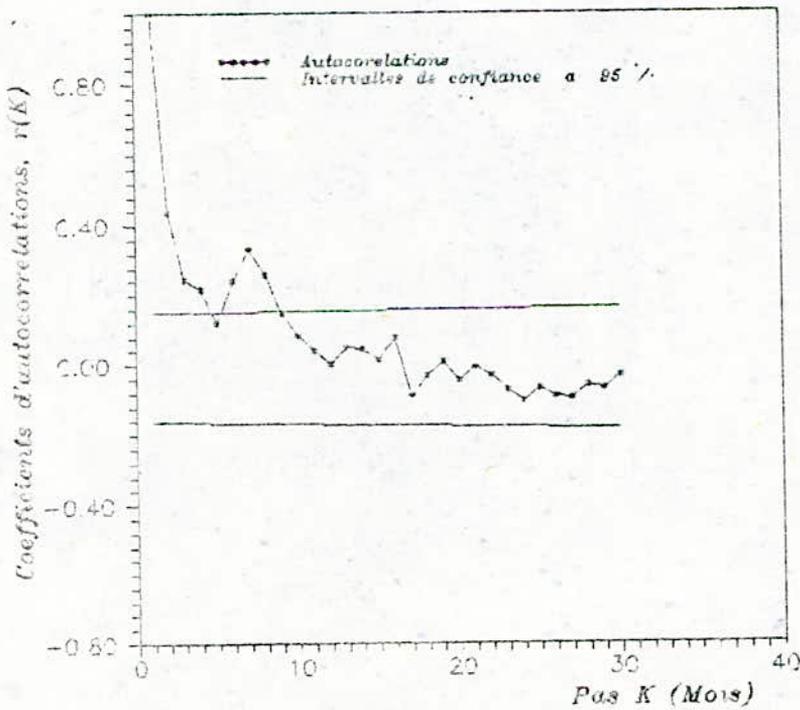


Figure F.6d - Fonction d'autocorrelation des debits mensuels standardises (serie de CHEFFIA)

Transformation du Log, translate

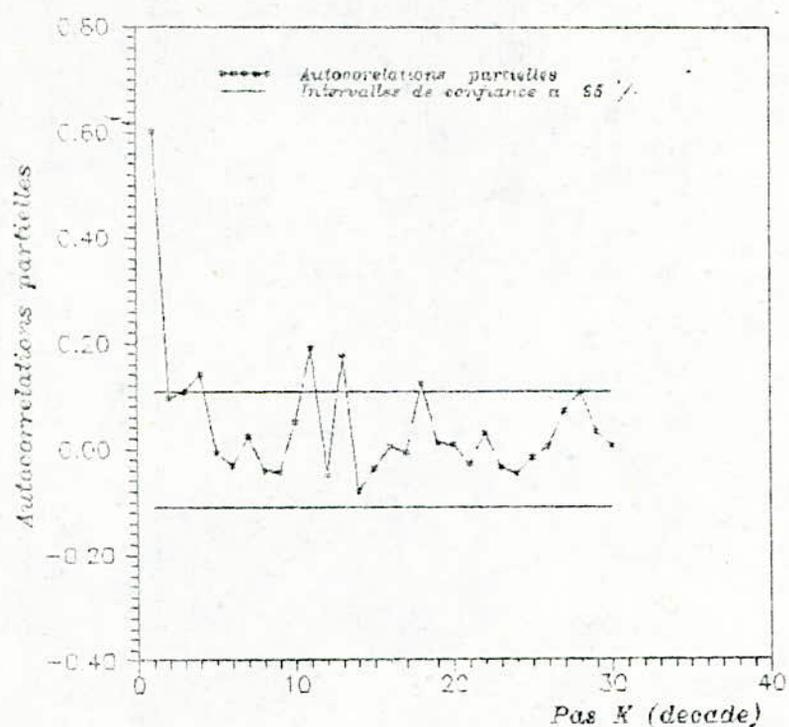


Figure F.7a - Fonction d'autocorrelation partielle des debits decadaires standardises (serie de OUED FODDA)

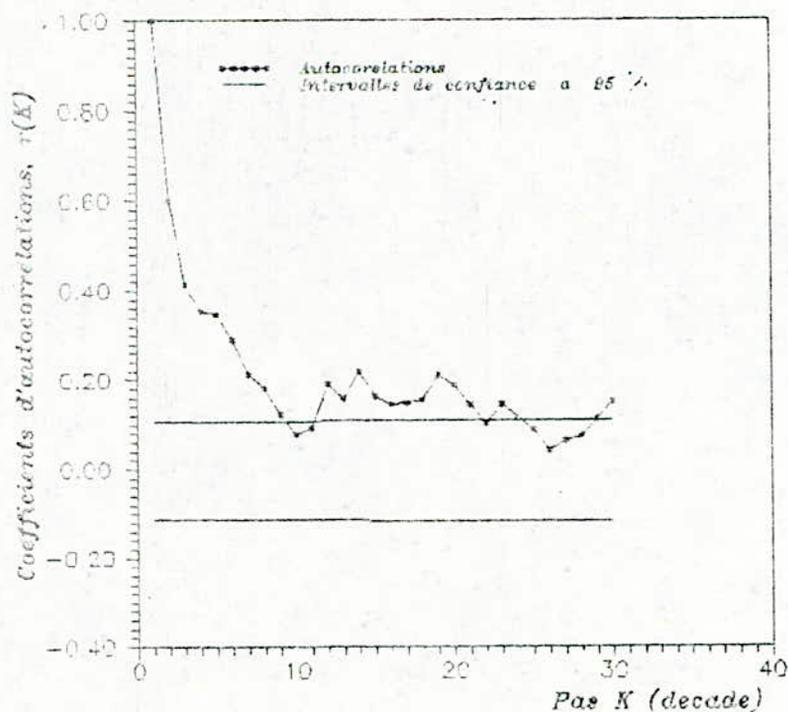


Figure F.7b - Fonction d'autocorrelation des debits decadaires standardises (serie de OUED FODDA)

## Transformation de REAPD

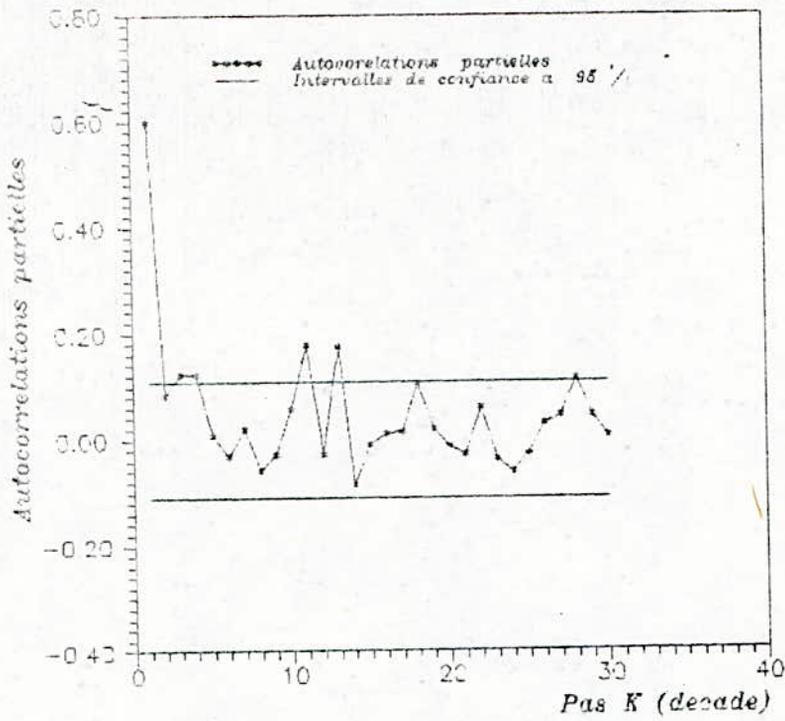


Figure F.7c - Fonction d'autocorrelation partielle des debits standardises decadaires (serie de OUED FODDA)

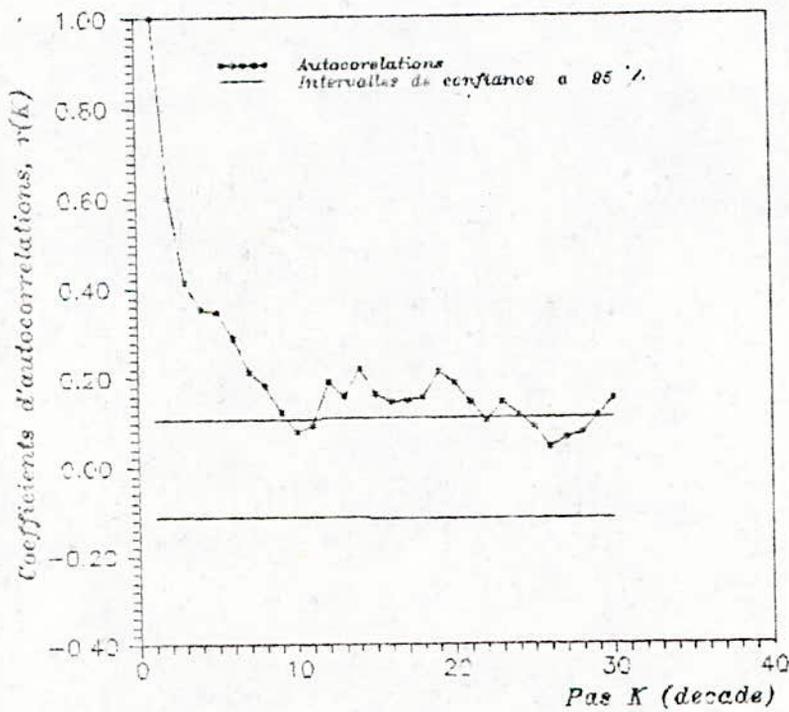
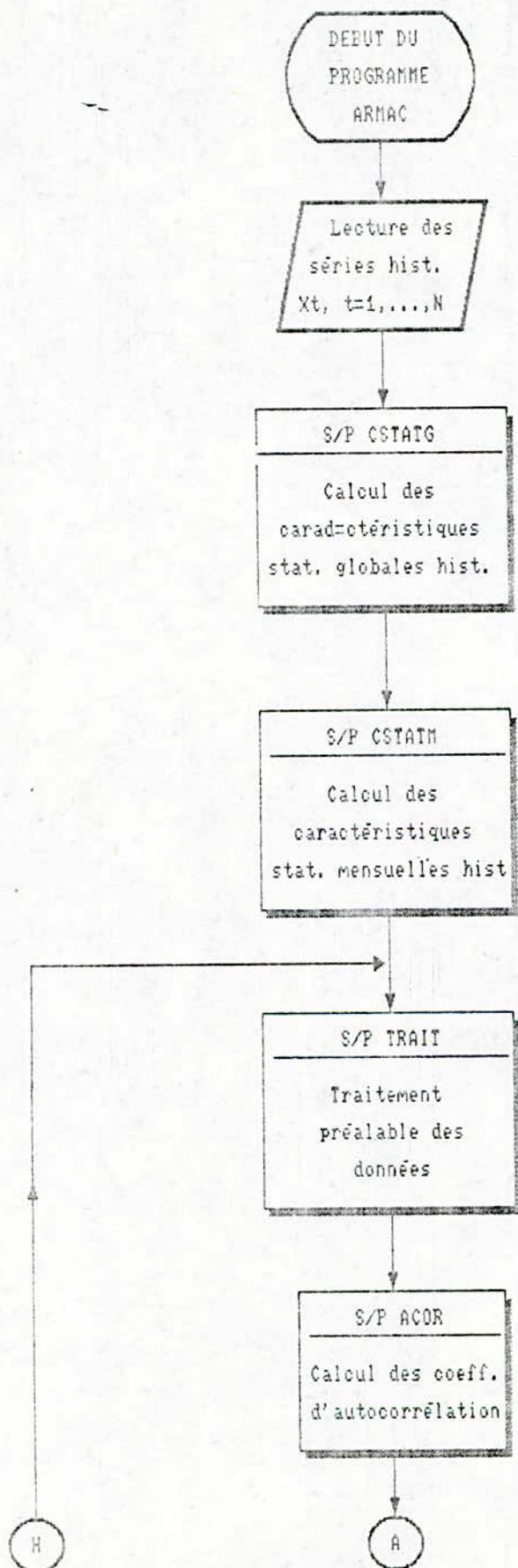
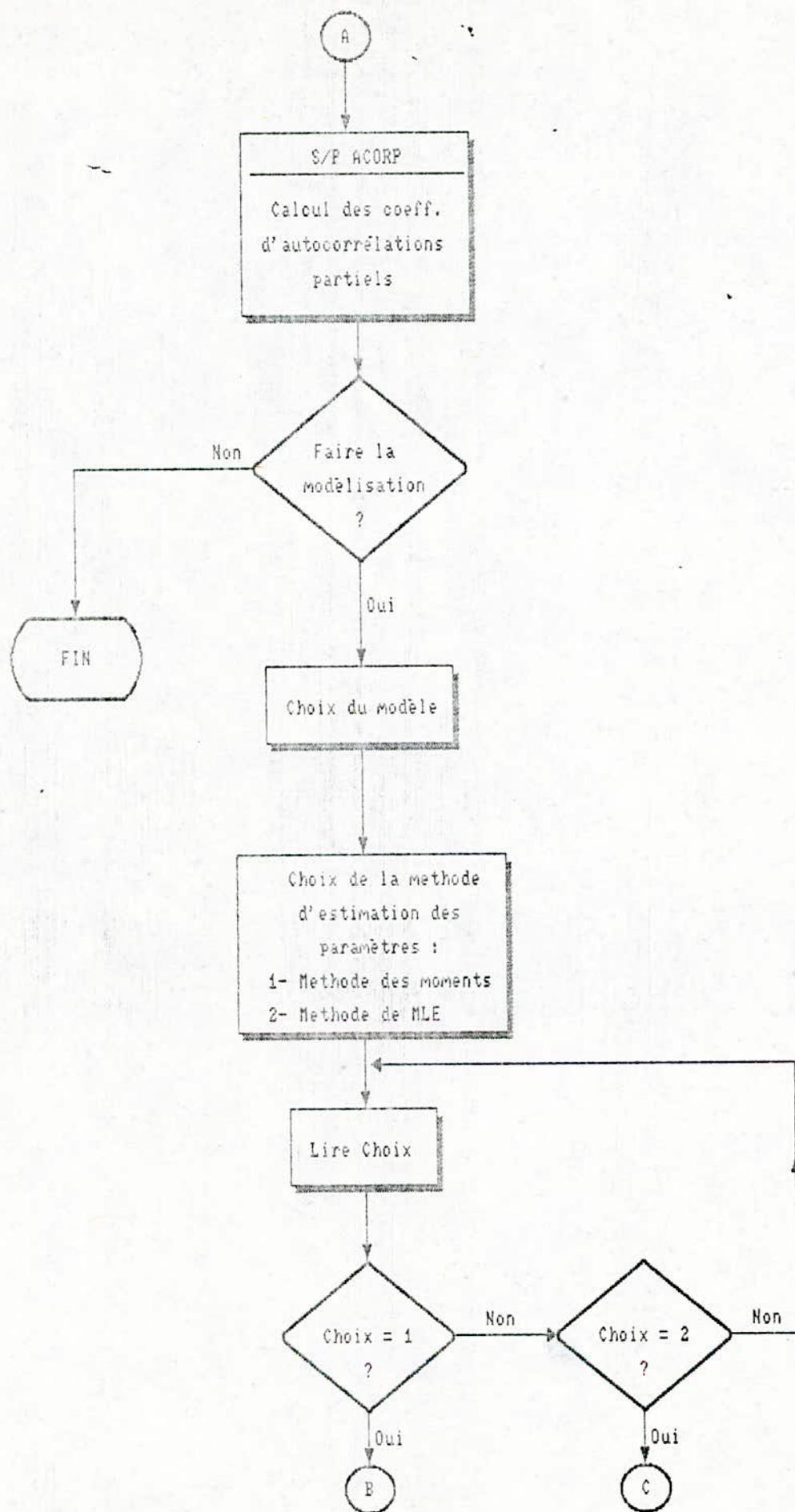


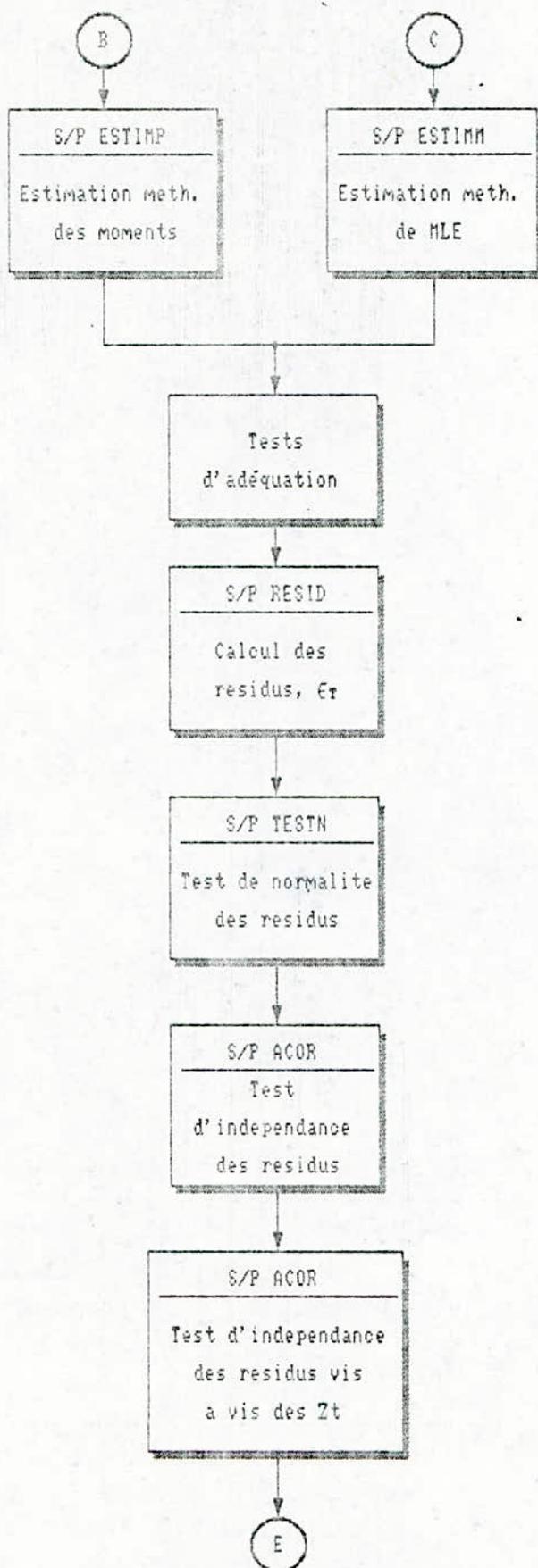
Figure F.7d - Fonction d'autocorrelation des debits standardises decadaires (serie de OUED FODDA)

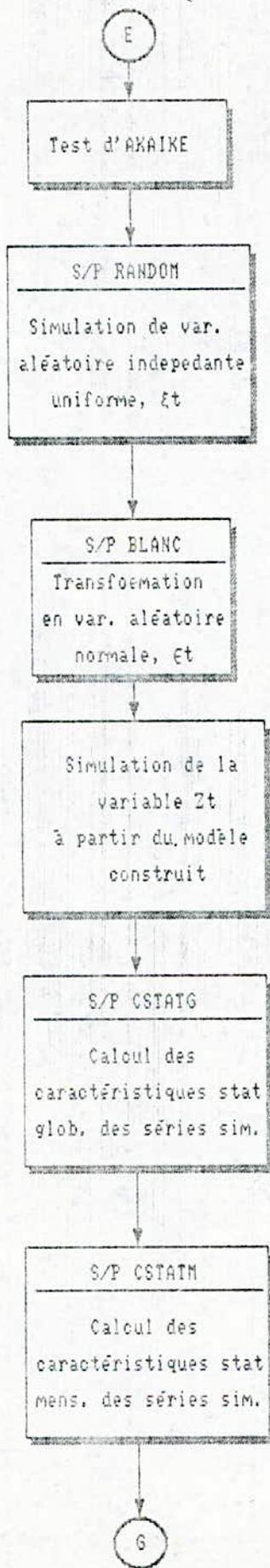
ORGANIGRAMME DU PROGRAMME DE SIMULATION PAR  
LES MODELES ARMA (ARMAC)

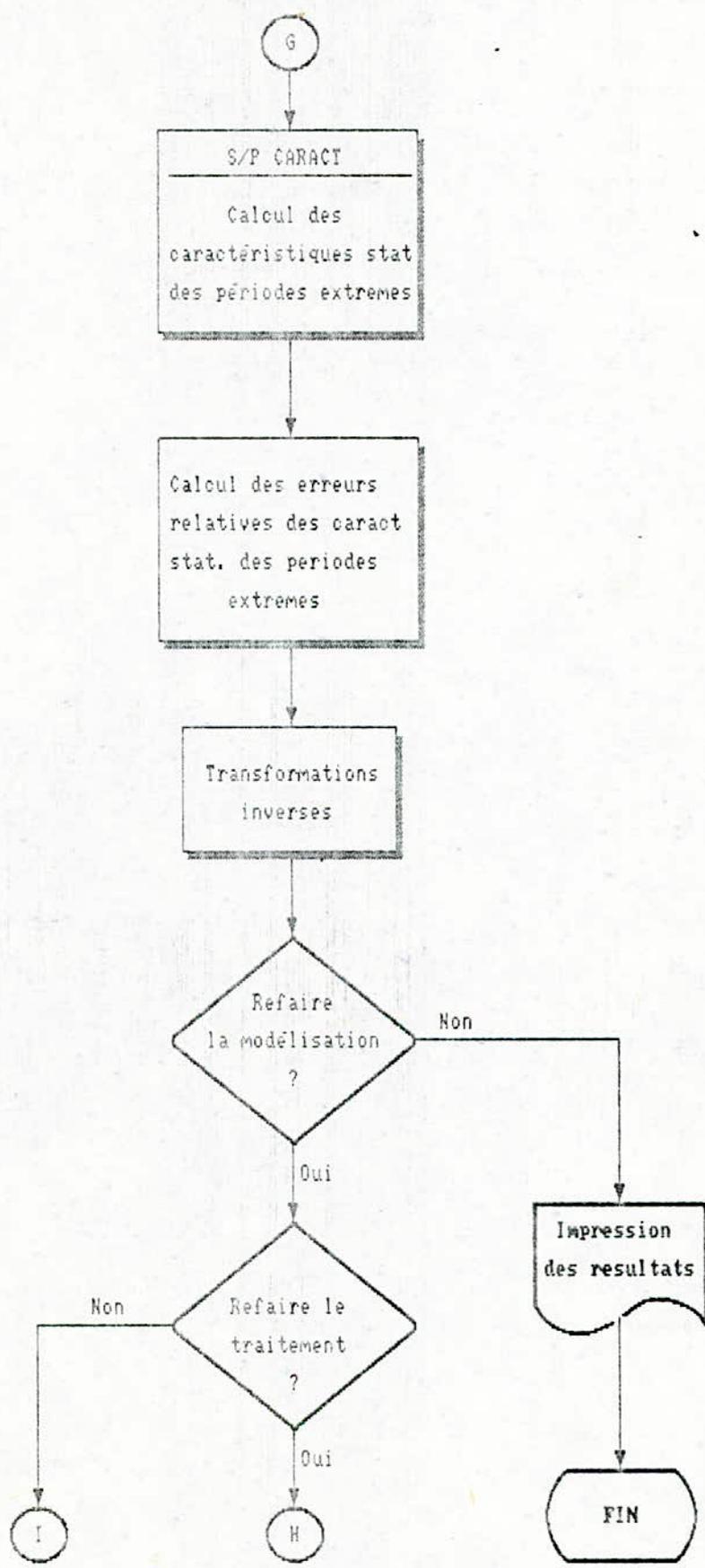
Organigramme du programme  
ARMAC











RÉSULTATS DE LA MODÉLISATION PAR ARMA à  
COEFFICIENTS CONSTANTS

Tableau H.1 - Paramètres des modèles de la série de Beni Bahdel

| Trans.                    | Modèle    | $\phi_1$ | $\phi_2$ | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $\sigma_\epsilon^2$ |
|---------------------------|-----------|----------|----------|------------|------------|---------------------|
| Log -<br>Trans.           | ARMA(1,0) | 0.524    | -        | -          | -          | 0.7038              |
|                           | ARMA(1,1) | 0.547    | -        | 0.047      | -          | 0.7074              |
|                           | ARMA(1,2) | 0.667    | -        | 0.125      | 0.022      | 0.6968              |
|                           | ARMA(2,1) | 0.598    | -0.014   | 0.067      | -          | 0.6794              |
| Log-<br>Trans.<br>mensuel | ARMA(1,0) | 0.544    | -        | -          | -          | 0.6829              |
|                           | ARMA(1,1) | 0.548    | -        | 0.121      | -          | 0.6864              |
|                           | ARMA(1,2) | 0.838    | -        | 0.144      | 0.014      | 0.6803              |
|                           | ARMA(2,1) | 0.838    | -0.022   | 0.054      | -          | 0.6500              |

Tableau H.2 - Paramètres des modèles de la série de Qued Dous

| Trans.                    | Modèle    | $\phi_1$ | $\phi_2$ | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $\sigma_\epsilon^2$ |
|---------------------------|-----------|----------|----------|------------|------------|---------------------|
| Log -<br>Trans.           | ARMA(1,0) | 0.505    | -        | -          | -          | 0.7115              |
|                           | ARMA(1,1) | 0.103    | -        | -0.397     | -          | 0.7241              |
|                           | ARMA(1,2) | 0.578    | -        | 0.067      | 0.018      | 0.7211              |
|                           | ARMA(2,1) | 0.578    | -0.022   | 0.067      | -          | 0.7195              |
| Log-<br>Trans.<br>mensuel | ARMA(1,0) | 0.494    | -        | -          | -          | 0.7194              |
|                           | ARMA(1,1) | 0.103    | -        | -0.397     | -          | 0.7184              |
|                           | ARMA(1,2) | 0.467    | -        | -0.022     | -0.022     | 0.7319              |
|                           | ARMA(2,1) | 0.067    | 0.218    | -0.422     | -          | 0.7303              |
| Beard                     | ARMA(1,0) | 0.499    | -        | -          | -          | 0.7155              |
|                           | ARMA(1,1) | 0.103    | -        | -0.397     | -          | 0.7139              |
|                           | ARMA(1,2) | 0.578    | -        | -0.022     | -0.018     | 0.7144              |
|                           | ARMA(2,1) | 0.067    | 0.224    | -0.422     | -          | 0.7142              |

Tableau H.3 - Paramètres des modèles de la série de Qued Bousselam

| Trans.        | Modèle      | $\phi_1$ | $\phi_2$ | $\phi_3$ | $\phi_{12}$ | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $\sigma^2_\epsilon$        |
|---------------|-------------|----------|----------|----------|-------------|------------|------------|----------------------------|
| Log-Trans.    | ARMA(1,0)   | 0.602    | -        | -        | -           | -          | -          | 0.5679                     |
|               | SAR(1,3,12) | 0.578    | -        | -        | 0.178       | 0.178      | -          | 0.5200                     |
|               | ARMA(1,1)   | 0.579    | -        | -        | -           | -          | -          | 0.5561                     |
|               | ARMA(1,2)   | 0.838    | -        | -        | -           | -          | -          | 0.5605                     |
|               | ARMA(2,1)   | 0.838    | -0.022   | -        | -           | -          | -          | 0.5500                     |
| Log - mensuel | ARMA(1,0)   | 0.601    | -        | -        | -           | -          | -          | 0.5064<br>0.5412<br>0.5462 |
|               | SAR(1,3,12) | 0.578    | -        | -        | -           | -          | -          |                            |
|               | ARMA(1,1)   | 0.756    | -        | -        | -           | -          | -          |                            |
|               | ARMA(1,2)   | 0.838    | -        | -        | -           | -          | -          |                            |
|               | ARMA(2,1)   | 0.838    | -0.022   | -        | -           | -          | -          |                            |
| Beard.        | ARMA(1,0)   | 0.601    | -        | -        | -           | -          | -          | 0.5596                     |
|               | SAR(1,3,12) | 0.578    | -        | -        | -           | -          | -          | 0.5064<br>0.5412<br>0.5462 |
|               | ARMA(1,1)   | 0.756    | -        | -        | -           | -          | -          |                            |
|               | ARMA(1,2)   | 0.838    | -        | -        | -           | -          | -          |                            |
|               | ARMA(2,1)   | 0.838    | -0.022   | -        | -           | -          | -          |                            |

Tableau H.4 - Paramètres des modèles de la série de Qued Fodda

| Trans.        | Modèle      | $\phi_1$ | $\phi_2$ | $\phi_{11}$ | $\phi_{14}$ | $1\theta$ | $2\theta$ | $\sigma^2_\epsilon$ |
|---------------|-------------|----------|----------|-------------|-------------|-----------|-----------|---------------------|
| Log-Trans.    | ARMA(1,0)   | 0.515    | -        | -           | -           | -         | -         | 0.7093              |
|               | SAR(1,2,11) | 0.397    | 0.177    | 0.177       | 0.178       | -         | -         | 0.6595              |
|               | SAR(1,2,14) | 0.438    | 0.438    | 0.178       | -           | -0.022    | 0.178     | 0.6784              |
|               | ARMA(1,1)   | 0.680    | -        | -           | -           | -         | -         | 0.6966              |
|               | ARMA(1,2)   | 0.667    | -        | -           | -           | 0.207     | 0.007     | 0.6968              |
|               | ARMA(2,1)   | 0.244    | 0.2182   | -           | -           | -0.022    | -         | 0.695               |
| Log - mensuel | ARMA(1,0)   | 0.601    | -        | -           | -           | -         | -         | 0.7084              |
|               | SAR(1,2,11) | 0.380    | 0.174    | 0.177       | 0.175       | -         | -         | 0.6600              |
|               | SAR(1,2,14) | 0.578    | 0.500    | 0.168       | -           | -0.175    | 0.173     | 0.6589              |
|               | ARMA(1,1)   | 0.756    | -        | -           | -           | -         | -         | 0.7001              |
|               | ARMA(1,2)   | 0.638    | -        | -           | -           | 0.250     | -0.021    | 0.6985              |
|               | ARMA(2,1)   | 0.238    | 0.122    | -           | -           | 0.005     | -         | 0.6996              |
| Beard.        | ARMA(1,0)   | 0.601    | -        | -           | -           | -         | -         | 0.7021              |
|               | SAR(1,2,11) | 0.392    | 0.175    | 0.172       | 0.174       | -         | -         | 0.6498              |
|               | SAR(1,2,14) | 0.578    | 0.521    | 0.177       | -           | 0.007     | 0.170     | 0.6689              |
|               | ARMA(1,1)   | 0.756    | -        | -           | -           | -         | -         | 0.6895              |
|               | ARMA(1,2)   | 0.739    | -        | -           | -           | 0.348     | 0.005     | 0.6935              |
|               | ARMA(2,1)   | 0.238    | -0.022   | -           | -           | 0.002     | -         | 0.7003              |

Tableau H.5 - Paramètres des modèles de la série de Cheffia

| Trans. | Modèle    | $\phi_1$ | $\phi_2$ | $\phi_3$ | $\phi_4$ | $\phi_5$ | $\phi_6$ | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $\sigma_\varepsilon^2$ |
|--------|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|------------|------------|------------------------|
| Log-   | ARMA(1,0) | 0.602    | -        | -        | -        | -        | -        | -          | -          | 0.5679                 |
|        | ARMA(5,0) | 0.519    | 0.013    | 0.030    | 0.145    | 0.021    | -        | -          | -          | 0.5493                 |
|        | ARMA(6,0) | 0.578    | 0.321    | -0.121   | 0.178    | 0.178    | 0.021    | -          | -          | 0.5200                 |
| Tran.  | ARMA(1,1) | 0.579    | -        | -        | -        | -        | -        | 0.278      | -          | 0.5561                 |
|        | ARMA(1,2) | 0.838    | -        | -        | -        | -        | -        | 0.267      | 0.178      | 0.5605                 |
|        | ARMA(2,1) | 0.838    | -0.022   | -        | -        | -        | -        | 0.378      | -          | 0.5500                 |
| Beard  | ARMA(1,0) | 0.601    | -        | -        | -        | -        | -        | -          | -          | 0.5596                 |
|        | ARMA(5,0) | 0.526    | 0.012    | 0.053    | 0.128    | -        | -        | -          | -          | 0.5432                 |
|        | ARMA(6,0) | 0.578    | 0.212    | 0.025    | 0.177    | 0.145    | 0.015    | -0.017     | -          | -                      |
|        | ARMA(1,1) | 0.756    | -        | -        | -        | -        | -        | 0.256      | -          | 0.5064                 |
|        | ARMA(1,2) | 0.938    | -        | -        | -        | -        | -        | 0.267      | 0.178      | 0.5412                 |
|        | ARMA(2,1) | 0.838    | -0.022   | -        | -        | -        | -        | 0.378      | -          | 0.5462                 |

ORGANIGRAMME DU PROGRAMME LDR

Organigramme du programme  
LDR.





RÉSULTATS DES MODELES DE GESTION

Tableau J.1 - Quantiles mensuels des modèles LDR3 et  
LDR4 ( $\beta_1=\beta_2=\beta_3=0.90$ )

| Mois | LDR3            |                   |                   | LDR4            |                   |                   |
|------|-----------------|-------------------|-------------------|-----------------|-------------------|-------------------|
|      | Fj( $\beta_1$ ) | Fj(1- $\beta_2$ ) | Fk(1- $\beta_3$ ) | Fj( $\beta_1$ ) | Fj(1- $\beta_2$ ) | Fk(1- $\beta_3$ ) |
| 1    | 72.107          | 1.723             | .536              | .000            | .000              | 1.723             |
| 2    | 98.130          | 2.431             | 1.723             | .000            | .000              | 2.431             |
| 3    | 39.892          | 3.189             | 2.431             | .000            | .000              | 3.189             |
| 4    | 51.485          | .892              | 3.189             | .000            | .000              | .892              |
| 5    | 9.891           | 1.639             | .892              | .000            | .000              | 1.639             |
| 6    | 3.768           | .224              | 1.639             | .000            | .000              | .224              |
| 7    | 4.762           | .143              | .224              | .000            | .000              | .143              |
| 8    | 3.878           | .434              | .143              | .000            | .000              | .434              |
| 9    | 4.128           | .054              | .434              | .000            | .000              | .054              |
| 10   | 3.216           | .067              | .054              | .000            | .000              | .067              |
| 11   | 18.474          | .183              | .067              | .000            | .000              | .183              |
| 12   | 60.707          | .536              | .183              | .000            | .000              | .536              |

Tableau J.3 - Resultats des pertes mensuelles et globales (Mm3)  
des modèles LDR et du modèle SOP

Fonct. pertes :  $L(Rt) = p.(Rt-Tt)^\dagger$

| LDR1   | LDR2   | LDR3   | LDR4   | SOP†   | LDR1   | LDR2   | LDR3   | LDR4 | SOP†   | LDR1   | LDR2   | LDR3   | LDR4 | SOP†   |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|------|--------|--------|--------|--------|------|--------|
| 16.358 | 16.355 | 16.355 | 16.304 | 16.355 | 27.177 | 27.176 | 27.175 | -    | 27.17  | 60.445 | 60.448 | 60.444 | -    | 60.445 |
| 125.54 | 54.25  | 76.24  | 337.07 | 8.47   | 133.01 | 47.00  | 78.80  | -    | 5.58   | 130.04 | 51.96  | 86.12  | -    | .00    |
| 378.52 | 133.99 | 351.85 | 669.37 | 12.03  | 412.36 | 124.84 | 354.05 | -    | 6.01   | 399.84 | 127.17 | 344.04 | -    | .00    |
| 284.58 | 397.66 | 772.92 | 75.55  | 5.82   | 270.63 | 383.37 | 752.10 | -    | 3.54   | 261.80 | 386.15 | 751.95 | -    | .07    |
| 180.49 | 262.44 | 112.79 | 216.37 | 11.96  | 116.02 | 261.80 | 76.71  | -    | 3.87   | 153.82 | 266.14 | 76.71  | -    | 3.52   |
| 73.38  | 91.04  | 229.94 | 16.50  | 287.36 | 73.29  | 123.65 | 223.77 | -    | 198.73 | 73.33  | 109.84 | 223.83 | -    | 76.07  |
| 20.12  | 80.26  | 52.07  | 22.60  | 706.78 | 22.78  | 69.54  | 37.99  | -    | 706.77 | 19.31  | 69.36  | 38.01  | -    | 706.77 |
| 145.03 | 86.40  | 131.80 | 170.19 | 56.66  | 162.27 | 60.10  | 150.16 | -    | 25.93  | 153.95 | 61.25  | 150.24 | -    | 13.37  |
| 96.36  | 70.33  | 71.88  | 45.97  | 117.07 | 83.27  | 88.04  | 59.45  | -    | 117.07 | 89.37  | 86.63  | 59.40  | -    | 117.07 |
| 46.85  | 26.02  | 39.97  | 10.23  | 6.11   | 37.20  | 40.34  | 28.64  | -    | .00    | 41.24  | 38.23  | 28.52  | -    | .00    |
| 18.96  | 12.91  | 23.56  | 1.71   | 9.49   | 13.07  | 20.10  | 11.10  | -    | .00    | 15.41  | 18.77  | 11.05  | -    | .00    |
| 27.79  | 4.54   | 11.50  | 61.78  | 3.04   | 27.56  | 6.93   | 2.78   | -    | .88    | 27.54  | 6.20   | 2.79   | -    | .00    |
| 259.87 | 28.75  | 56.96  | 512.57 | 8.10   | 265.47 | 26.99  | 60.93  | -    | 5.56   | 258.93 | 26.18  | 60.96  | -    | .00    |
| 138.12 | 104.06 | 160.95 | 178.32 | 102.75 | 134.74 | 104.39 | 153.03 | -    | 89.49  | 135.38 | 103.99 | 152.60 | -    | 76.40  |

† Reservoir plein (SOP)

Tableau J.2 - Resultats des pertes mensuelles et globales (M3)  
des modeles LDR et du modele SOP

Fonct. pertes :  $L(R_t) = (R_t - T_t)^2$

| LDR1   | LDR2   | LDR3    | LDR4    | SOP†    | LDR1   | LDR2   | LDR3    | LDR4 | SOP†    | LDR1   | LDR2   | LDR3    | LDR4 | SOP†    |
|--------|--------|---------|---------|---------|--------|--------|---------|------|---------|--------|--------|---------|------|---------|
| 16.358 | 16.355 | 16.355  | 16.304  | 16.355  | 27.177 | 27.176 | 27.175  | -    | 27.175  | 60.445 | 60.448 | 60.444  | -    | 60.445  |
| 249.70 | 107.26 | 151.29  | 668.53  | 8.47    | 265.61 | 90.79  | 156.67  | -    | 5.58    | 259.37 | 102.26 | 171.82  | -    | .00     |
| 752.75 | 267.75 | 700.88  | 1310.53 | 12.03   | 824.20 | 248.57 | 705.59  | -    | 6.01    | 798.37 | 253.56 | 683.51  | -    | .00     |
| 568.13 | 793.43 | 1541.06 | 140.81  | 8.00    | 538.94 | 762.61 | 1496.95 | -    | 3.60    | 519.84 | 768.69 | 1496.62 | -    | .13     |
| 360.98 | 521.21 | 225.93  | 431.75  | 23.58   | 231.67 | 519.80 | 141.99  | -    | 7.39    | 307.65 | 529.21 | 141.97  | -    | 7.04    |
| 123.20 | 164.92 | 444.66  | 19.04   | 574.64  | 123.85 | 244.27 | 427.13  | -    | 397.37  | 123.54 | 213.22 | 427.31  | -    | 152.15  |
| 20.12  | 105.91 | 52.07   | 22.60   | 1413.56 | 22.78  | 102.12 | 38.13   | -    | 1413.55 | 19.31  | 102.11 | 38.15   | -    | 1413.55 |
| 145.03 | 86.40  | 131.80  | 170.19  | 113.31  | 162.27 | 60.10  | 150.16  | -    | 51.87   | 153.95 | 61.25  | 150.24  | -    | 26.74   |
| 96.36  | 70.33  | 71.88   | 49.97   | 234.15  | 63.27  | 88.04  | 59.45   | -    | 234.15  | 89.37  | 86.63  | 59.40   | -    | 234.15  |
| 46.85  | 26.02  | 39.97   | 10.23   | 6.11    | 37.20  | 40.34  | 28.64   | -    | .00     | 41.24  | 38.23  | 28.52   | -    | .00     |
| 18.96  | 12.91  | 23.56   | 1.71    | 9.69    | 13.07  | 20.10  | 11.10   | -    | .00     | 15.41  | 18.77  | 11.05   | -    | .00     |
| 47.66  | 4.94   | 11.50   | 120.61  | 3.04    | 50.13  | 6.93   | 2.64    | -    | .88     | 49.02  | 6.20   | 2.86    | -    | .00     |
| 518.10 | 56.12  | 108.42  | 1022.34 | 8.10    | 529.79 | 51.10  | 119.48  | -    | 5.56    | 516.12 | 47.29  | 119.57  | -    | .00     |
| 245.65 | 184.77 | 291.88  | 330.36  | 201.22  | 240.23 | 186.23 | 278.18  | -    | 177.16  | 241.90 | 185.62 | 277.61  | -    | 152.81  |

† Reservoir plein (SOP)