

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

2/94

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

***Elaboration d'un logiciel
calculant la dynamique
de l'attelage mobile des
moteurs en ligne et en V***

Proposé par :

Mr BOUKABACHE

Etudié par :

BACHSAIS Mustapha

Dirigé par

Mr BOUKABACHE

PROMOTION 94

ANNEE : 1994

DEPARTEMENT : E.N.P

NUMERO DU PFE :

AUTEURS : Mustapha BACHSAIS

DU TITRE : ELABORATION D'UN LOGICIEL CALCULANT LA DYNAMIQUE DE
L'ATTELAGE MOBILE DES MOTEURS EN LIGNE ET EN V

ENCADREMENT DU PFE : Mr BOUKABACHE (E.N.P)

PARTENAIRES DU PFE : Mr BOUKABACHE

NUMBER DE PAGE : (87)

NUMBER DE FIGURES: () NUMBER DE TABLEAU: () NUMBER DE PLANS: () NUMBER DE PHOTOS: ()

NUMBER DE REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES: ()

RESUME :

CE PROJET CONSISTE A ELABORER UN LOGICIEL PERMETANT DE FAIRE UN
CALCUL DYNAMIQUE DE L'ATTELAGE MOBILE (EFFORTS, MOMENTS ET
COUPLES) DES MOTEURS EN LIGNE ET EN V (bielle biellette). CE
LOGICIEL EST INFORMATISE EN LANGAGE FORTRAN 5.1

MOTS CLES : BIELLE, PISTON, CHEMISE, BIELLETTE, VILEBREQUIN

PARTIE A REMPLIR PAR LE PROFESSEUR RESPONSABLE DU PROJET

ACCESSIBILITE DE CE RAPPORT (entourer la mention correcte):

LIBRE - ENP SEULEMENT - CONFIDENTIEL

DATE:

1994

SIGNATURE:

ملخص

يهدف هذا العمل إلى إعداد برنامج يمكننا من دراسة الديناميك
في العضو المتحرك (القوة، العزم) للمحركات ذات الإستقامة
والتي على شكل V.
لهذا البرنامج ٦ أنجز بلغة الفورتران ٥.٥.

RESUME:

Ce projet consiste a élaborer un logiciel permettant de faire un
calcul dynamique de l'attelage mobile (efforts, moments et couples)
des moteurs en ligne et en V (bielle biellette). Ce logiciel est
informatise en langage fortran 5.1.

SUMMERING:

The heart of this work is to elaborate a software able to
perform dynamical calculus of the motion part (strains, momenta and
torques) of the aligned and a V type motors (rods small rods). This
software is implemented by using Fortran 5.1 language.

DEDICACES

- U ma grande mere
- U ma chere mere
- U mon cher pere
- U mes freres et soeurs
- U mes amis

je dedie ce modeste travail

Bachsis Mustapha

REMERCIEMENT

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à monsieur Hadj ali A/M qui ma fournit tous le matériel pour l'élaboration de ce projet. Ainsi que monsieur BEL BLIDIA qui a eu l'aimable sollicitation de me suivre dans ce travail, sans oublier tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

Que tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce projet trouvent ici ma sincère gratitude.

SOMMAIRE

INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1	INTRODUCTION
I-1. Généralités.....	2
I-2. Fonctionnement du moteur.....	2
I-3. Classification des moteurs.....	3
I-4. Embiellage.....	3
CHAPITRE 2	CINEMATIQUE
Cinématique Des moteurs en ligne.....	7
II-1. Introduction.....	7
II-2. Définition des points et mise en place des repères.....	7
II-3. Cinématique du point Gb.....	8
II-4. Cinématique du point B.....	9
II-5. Définition des angles.....	10
II-6. Calcul de déplacement x du piston.....	11
II-7. Formules de passage entre repères.....	12
Cinématique des moteur en V.....	14
II-1. Introduction.....	14
II-2. Définition des points et mise en place des repères.....	14
II-3. Cinématique de la bielle.....	16
II-3.1. Coordonnées d'un point quelconque.....	16
II-3.2. Vitesses des points caractéristiques de la bielle.....	18
II-3.3. Accélération des points caractéristiques de la bielle.....	18
II-4. Cinématique de la biellette.....	19
II-4.1. Coordonnées d'un point quelconque.....	19
II-4.2. Vitesses des points caractéristique de la biellette.....	21
II-4.3. Accélération des points caractéristique de la biellette.....	21
II-5. Définition des angles.....	22
II-6. Calcul des déplacements des pistons (P1, P2).....	24
II-7. Formules de passage entre repères.....	25
CHAPITRE 3	DYNAMIQUE
Dynamique des moteurs en ligne.....	27
III-1. Introduction.....	27
III-2. Etude dynamique du piston.....	27
III-2.1. Analyse des actions mécaniques sur le piston.....	27
III-2.2. Equations vectorielles fondamentales du piston.....	29
III-3. Etude dynamique de la bielle.....	32
III-3.1. Analyse des actions mécaniques sur le bielle.....	32
III-3.2. Equations vectorielles fondamentales de la bielle.....	34
Dynamique des moteurs en V.....	38
III-1. Introduction.....	38
III-2. Etude dynamique du piston 1 (côté bielle).....	38
III-3. Etude dynamique du piston 2 (côté biellette).....	39

III-3. Etude dynamique de la bielle.....	41
III-4. Etude dynamique de la bielle.....	42
III-5. Equation de la dynamique.....	43
III-5.1. Principe fondamental.....	43
III-5.2. Moment dynamique.....	44
III-6. Equations scalaires du moteur en V.....	49
III-7. Solution des equations.....	52
Dynamique en un point G du moteur.....	54
III-1. Les moteurs en ligne.....	54
III-1.1. Définition des efforts et moments sur le blocmoteur.....	54
III-2. Les moteurs en V.....	58
III-2.1. Définition des efforts et moments sur le blocmoteur.....	58
CHAPITRE 4	COUPLE MOTEUR
IV-1. Calcul des couples pour les moteurs en ligne.....	60
IV-1.1. Couple moteur pour un monocylindre.....	60
IV-1.2. Couple moteur à n cylindre en ligne.....	61
IV-1.2.1. Couple dûs aux gaz.....	62
IV-1.2.2. Couple dûs aux inerties.....	62
IV-2. Calcul des couples pour les moteurs en V.....	62
IV-2.1. Couple moteur pour un monocylindre.....	62
IV-2.2. Couple moteur à n cylindre en V.....	63
IV-2.2.1. Couple dûs aux gaz.....	64
IV-2.2.2. Couple dûs aux inerties.....	64
ORGANIGRAMME.....	66
CHAPITRE 5	APPLICATION
- Application au moteur F4L912.....	69
- Application au moteur en V.....	81
CONCLUSION.....	86
BIBLIOGRAPHIES.....	87

INTRODUCTION

INTRODUCTION

La conception d'un nouveau type de moteur impose bien évidemment l'étude mécanique de tous les organes même si ces derniers sont directement dérivés de modèles similaires déjà éprouvés industriellement. Les nouvelles conditions de fonctionnement créent de nouvelles répartitions de charges et donc un comportement différent.

L'étude dynamique de l'attelage mobile et liée à l'étude du cycle thermodynamique, on considère dans notre travail que le problème de base (pressions, températures), on été résolu et on n'en recherchera que l'impact au niveau mécanique.

Notre étude est basé sur les moteurs en ligne et en V (bielle-biellette), se sont des moteurs à quatre temps, cette étude dynamique de l'attelage de chacun des moteurs est relié à une étude cinématique qui détermine les accélérations des points particuliers de l'attelage.

Le travail présenté aborde deux problèmes, le premier concerne la recherche des efforts aux niveau des liaisons (piston-bielle; bielle-manivelle, piston-chemise), ainsi qu'aux couples le second s'intéresse à la recherche des efforts en un point G du moteur, ainsi que les moments autour des axes du repère lié au bloc moteur.

Le but de notre travail consiste à établir un logiciel faisant un calcul dynamique de l'attelage mobile des moteurs en ligne et en V (bielle-biellette), les résultats de calcul seront affichées sous formes des tableaux aux garphes.

Enfin une dernière partie est une application sur un moteur existant F4L912 a été faite avec ce logiciel.



chapitre 1

INTRODUCTION

LE MOTEUR

I.1. GENERALITES:

Un moteur est une machine qui reçoit de l'énergie sous une forme et la restitue sous une autre forme utilisable pour le travail mécanique.

Les moteurs sont des machines transformant en travail mécanique de l'énergie calorifique que le combustible produit en brûlant à l'intérieur de leurs cylindres; ces moteurs sont dits à combustion interne. Ils se subdivisent suivant le mode de formation et d'inflammation du mélange combustible (moteur Diesel et moteur à carburation), suivant le nombre de temps constituant le cycle de fonctionnement (moteur à quatre et à deux temps), selon le nombre de cylindres (moteur monocylindrique, bicylindrique et multicylindrique).

I.2. FONCTIONNEMENT DU MOTEUR:

Le moteur en marche, le piston se déplace dans le cylindre en s'approchant ou en s'éloignant de l'axe du vilebrequin, entre deux positions extrêmes dites point mort haut (PMH) et point mort bas (PMB).

Lorsque le piston est au PMH, il se trouve le plus éloigné de l'axe de vilebrequin et quand le piston est au PMB, il est le plus rapproché du vilebrequin.

La distance parcourue par le piston entre les points morts est dénommée course du piston. Chaque course du piston entraîne la rotation du vilebrequin d'un demi-tour.

Le volume situé au-dessus du piston au PMH constitue la chambre de combustion, au la chambre de compression, tandis que le volume au-dessus du piston au PMB est dit cylindrée.

Le volume du cylindre compris entre les PMH et PMB s'appelle cylindrée unitaire. La somme des cylindrées unitaires de tous les cylindres, exprimée en litres, est dite cylindrée totale du moteur.

La culasse comporte des lumières d'admission et d'échappement fermées par les soupapes. Aux moments bien déterminés, les soupapes s'ouvrent ou ferment sollicitées par un mécanisme de distribution qui, outre les soupapes, comporte l'arbre à cames, les pièces de transmission de mouvement et les pignons de distribution.

I.3. CLASSIFICATION DES MOTEURS:

La grande majorité des véhicules actuelles sont équipés de moteurs à combustion interne.

Suivant le mode de formation du mélange gazeux et l'inflammation des combustibles, les moteurs à piston à combustion interne se divisent en deux groupes:

i)- les moteurs à carburation externe et allumage commandé par des étincelles électriques (moteurs à explosion dits à carburation et moteurs à gaz);

ii) les moteurs à carburation interne et allumage au contact avec l'air fortement chauffé dans le cylindre par suite de la compression (moteur Diesel).

I.4. EMBIELLAGE:

I.4-1. Forces et moments agissants:

L'embielage se compose d'organes fixes les cylindres coiffés par la culasse, et d'organes mobiles les pistons avec segments et axes, les bielles avec paliers, le vilebrequin avec le volant. Toutes les pièces de l'embielage se situent dans le bloc cylindre et dans le carter.

Le moteur en marche, les pièces de l'embielage sont soumises à l'action de différentes forces dont la grandeur et la direction varient toujours. Quelques unes de ces forces sont utilisées et assurent le fonctionnement du moteur. Tandis que d'autres sont nuisibles et provoquent l'usure des pièces du moteur.

Les forces de pression des gaz qui est engendrée dans le

cylindre pendant le temps moteur appartient aux forces utiles. Elle atteint son maximum au début du temps moteur.

Aux forces nuisibles appartiennent les forces d'inertie des pièces mobiles et les forces de frottement qui se manifestent pendant le mouvement.

Le moteur en marche, la vitesse de déplacement du piston n'est pas régulière; elle diminue lorsque le piston s'approche d'un point mort et augmente avec l'éloignement du piston de ce point. Le piston et les autres pièces en mouvement ayant obtenu une accélération et en s'efforçant de conserver leur vitesse résistent à la variation de la grandeur de cette dernière.

C'est du fait d'un tel mouvement irrégulier dans l'embellage qu'agissent les forces d'inertie.

La pression est fonction de la quantité de combustible consommée par cycle et de certains autres facteurs et varie à mesure que le piston se déplace dans le cylindre.

La force d'inertie dépend de la masse de la pièce en mouvement, de l'accélération de la vitesse de rotation du vilebrequin et varie également avec le déplacement du piston dans le cylindre.

Les forces d'inertie et de pression des gaz sollicitent le piston, l'axe du piston, la bielle et le vilebrequin; si les jeux d'articulation de ces pièces sont exagérés, les forces variables en grandeur et en direction provoquent l'usure excessive des pièces.

Les conditions de fonctionnement du cylindre, du piston, des segments et de l'axe de piston sont aggravées par l'action chimique des gaz chaux.

Toutes les pièces du moteur sont conçues et fabriquées en tenant compte des particularités ci-dessus, et leur fonctionnement de longue durée sans défaillance ne sera possible qu'à condition que la réalisation de l'entretien du moteur soit correct.

I.4-2. Rôle du l'embellage:

Le rôle principale de l'embellage est de transformer le mouvement rectiligne et alternatif en un mouvement de rotation du vilebrequin.

I.4-3. Définition de quelque éléments de l'embliage:

- a)- Le cylindre: Le cylindre réalise la chambre d'évolution des différentes phases du cycles; il contient le piston et lui sert de guide. Le cylindre d'un moteur à refroidissement par eau est coulé en font. La surface intérieur du cylindre à haute qualité d'usinage.
- b)- Le piston: le piston transmet à la bielle, par l'intermédiaire de l'axe, les efforts qu'il subit pendant la combustion (la pression des gaz et les forces d'inerties). Animé d'un mouvement alternatif et rectiligne dans le cylindre, il détermine ainsi l'admission, la compression et l'échappement.
- c)- La bielle: la bielle est l'organe de liaison entre le piston et le vilebrequin. Elle est fabriquée en acier et soumise au traitement thermique; la bielle se compose de trois parties:

- le pied de bielle;
- la tête de bielle;
- le corps de la bielle.

La section du corps de la bielle est en I; cette forme le rend assez résistant pour sa faible masse. En règle générale, la bielle est:

- plus longue, mieux elle transmet la force qui lui est appliquée, cette longueur est en général, voisine de 4 fois le rayon de la manivelle;
- plus courte doit être, afin de limiter les valeurs des forces d'inertie;

La bielle supporte:

- les efforts d'inertie alternatifs (masse du piston);
- les efforts tournants (rotation du vilebrequin);
- les efforts alternatifs mineurs dus aux frottements du piston et des segment sur le

cylindre.

d)- Le vilebrequin: Le vilebrequin reçoit les efforts transmis par chaque bielle pendant le temps moteur pour les transformer, à l'aide d'autres pièces de l'embellage, en couple moteur et l'envoyer aux organes de la transmission sur véhicule; le vilebrequin en acier comporte les manetons et les tourillons, les flasques, le nez et la queue; le nombre des manetons des vilebrequins des moteurs en ligne est égal à celui des bielles, le nombre des manetons des moteurs en V est deux fois plus petit, chaque maneton recevant deux bielles, une bielle de chaque rangée de cylindre. Les manetons et les tourillons sont usinés avec une grande précision.

e)- Le volant: Le volant diminue l'irrégularité de rotation du vilebrequin, permet aux pistons de franchir les points morts et aide le moteur de surmonter les surcharges qui apparaissent au démarrage du véhicule, leurs dimensions dépendent de la rotation du vilebrequin et du nombre de cylindres.



chapitre 2

CINEMATIQUE



CINEMATIQUE

des moteurs en ligne

CINEMATIQUE DE L'ATTELAGE MOBILE DES MOTEURS EN LIGNE

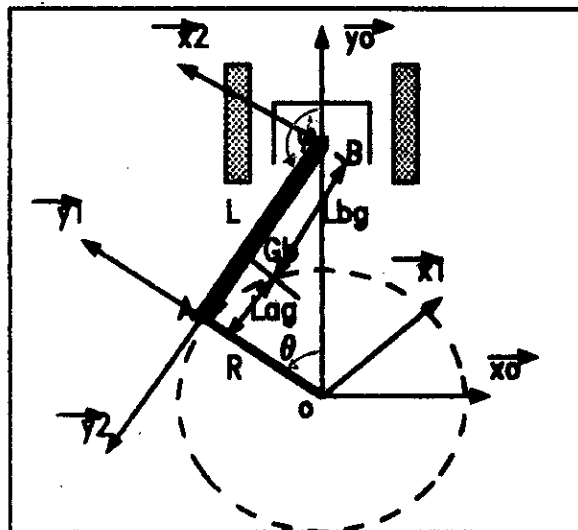
II-1. INTRODUCTION:

Cette étude porte sur l'ensemble bielle-manivelle situé sur un moteur en ligne, schématisé sur la figure 1. La cinématique permet de connaître la position, la vitesse et l'accélération en tout point de l'embellage et ce en fonction de la rotation du vilebrequin. On traitera successivement la bielle et le piston. Trois types de repères seront utilisés au cours de cette étude: un repère cartésien fixe $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti moteur et deux repères polaires $(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ lié à bielle $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié à la manivelle.

Tous les calculs seront exprimés dans le repère fixe $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

II-2 Définition des points et mise en place des repères:

Dans le système bielle manivelle (fig 1), nous avons trois repères définis comme suit:



(fig 1) Ensemble bielle manivelle

- Repère fixe lié au cylindre: $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

→ o : centre du vilebrequin;

- \vec{y}_0 : axe du cylindre;
- \vec{z}_0 : axe du vilebrequin dirigé suivant le volant moteur.

- Repère mobile lié au vilebrequin: $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

- \vec{y}_1 : porte la manivelle;
- θ : angle de rotation du vilebrequin (\vec{y}_0, \vec{y}_1)
- $\dot{\theta}$: la vitesse angulaire de rotation du vilebrequin
supposé constante c-à-d $d\theta/dt = \omega$, et on note que:
 $\vec{\Omega}_{1,0} = \dot{\theta} \vec{z}_0$.

- A : Le centre de tête de bielle;
- R : le rayon de manivelle.

- Repère mobile lié à la bielle: $(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

- \vec{y}_2 : lié à la bielle;
- ϕ : angle de rotation de la bielle (\vec{y}_0, \vec{y}_2)
- $\dot{\phi}$: la vitesse de rotation instantanée de la bielle, et on
note que $\vec{\Omega}_{2,0} = \dot{\phi} \vec{z}_0$
- B : le centre de pied de bielle;
- L : l'entraxe de bielle;
- Gb : centre de gravité de la bielle;
- Lbg : distance entre B et Gb;
- Lag : distance entre A et Gb.

II-3. CINEMATIQUE DU POINT Gb:

II-3.1. Vitesse du point Gb:

Le point Gb est le centre de gravité de la bielle.

On utilisant le champ des vitesses d'un solide indéformable:

$$\vec{V}_{(Gb,2/0)} = \frac{d(\vec{OGb})}{dt} = \vec{V}_{(B,2/0)} + \vec{\Omega}_{2,0} \wedge \vec{BGb} \quad (II-1)$$

avec $\vec{V}_{(b,2/0)} = \frac{d(\vec{OB})}{dt}$

$$\vec{OB} = (R \cdot \cos(\theta) - L \cdot \cos(\phi)) \cdot \vec{y}_0$$

$$\vec{V}_{(B,2/0)} = (-R \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) + L \cdot \dot{\phi} \cdot \sin(\phi)) \cdot \vec{y}_0$$

et $\vec{\Omega}_{2,0} = \dot{\phi} \vec{z}_0$

$$\vec{BG}_b = L_{bg} \cdot \vec{y}_o = \begin{cases} -L_{bg} \cdot \sin(\phi) \\ L_{bg} \cdot \cos(\phi) \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix}$$

D'où on obtient:

$$\vec{V}_{(ab,2/o)} = \begin{cases} -L_{bg} \cdot \dot{\phi} \cdot \cos(\phi) \\ -R \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) + L \cdot \dot{\phi} \cdot \sin(\phi) - L_{bg} \cdot \dot{\phi} \cdot \cos(\phi) \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix}$$

II-3.2. Accélération du point Gb:

Par définition de l'accélération est la dérivée de la vitesse, donc:

$$\vec{\Gamma}_{(ab,2/o)} = \frac{d^{\circ} \vec{V}_{(ab,2/o)}}{dt} \quad (\text{II-2})$$

En dérivant la vitesse $\vec{V}_{(ab,2/o)}$, nous aurons:

$$\vec{\Gamma}_{(ab,2/o)} = \begin{cases} -L_{bg} \cdot (\dot{\phi} \cdot \cos(\phi) - \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\phi)) \\ -R \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) + L \cdot \ddot{\phi} \cdot \sin(\phi) + \dot{\phi}^2 \cdot \cos(\phi) \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix}$$

II-4. CINEMATIQUE DU POINT B:

II-4.1. Vitesse du point B:

Le point B est le centre de pied de bielle, il appartient au piston.

On utilise la définition de la vitesse :

$$\vec{V}_{(B,2/o)} = \frac{d^{\circ} \vec{OB}}{dt} \quad (\text{II-3})$$

avec

$$\vec{OB} = (R \cdot \cos(\theta) - L \cdot \cos(\theta)) \cdot \vec{y}_o$$

D'où

$$\vec{V}_{(B,2/o)} = \begin{cases} 0 \\ -R \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) + L \cdot \dot{\phi} \cdot \sin(\phi) \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix}$$

II-4.2. Accélération du point B:

Par définition de l'accélération est la dérivée de la vitesse.

$$\vec{\Gamma}_{(B,2/o)} = \frac{d^{\circ} \vec{V}_{(B,2/o)}}{dt} \quad (\text{II-4})$$

Donc

$$\vec{\Gamma}_{(B,2/o)} = \begin{pmatrix} 0 \\ R.\dot{\theta}(\phi - \theta)\cos(\theta) + R.\ddot{\phi}.\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix}$$

II-5. DEFINITION DES ANGLES:

II-5.1. Definition de l'angle ϕ :

ϕ est l'angle de rotation de la bielle, d'après la figure bielle manivelle, on peut tirer la relation cinématique fondamentale qui relie l'angle ϕ à l'angle θ :

$$R.\sin(\theta) = L.\sin(\phi) \quad (\text{II-5})$$

Donc

$$\sin(\phi) = \left(\frac{R}{L}\right).\sin(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\lambda} \quad \text{avec } \lambda = \frac{L}{R}$$

et comme $\cos^2(\phi) = 1 - \sin^2(\phi)$

alors $\cos(\phi) = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\sin(\theta)}{\lambda}\right)^2}$

Finalement l'angle ϕ sera:

$$\phi = \text{Arcsin}\left(\frac{\sin(\theta)}{\lambda}\right) \quad (\text{II-6})$$

II-5.2. Definition de $\dot{\phi}$:

$\dot{\phi}$ est la vitesse de rotation de la bielle, la definition de $\dot{\phi}$ suffit seulement de derivier la relation cinématique fondamentale par rapport au temps.

$$\frac{d(R.\sin(\theta))}{dt} = \frac{d(L.\sin(\phi))}{dt}$$

$$\dot{\phi} = \frac{R.\dot{\theta}.\cos(\theta)}{L.\cos(\phi)} = \frac{\dot{\theta}.\cos(\theta)}{\lambda.\cos(\phi)}$$

D'où

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{\theta}.\cos(\theta)}{\lambda.\cos(\phi)} \quad (\text{II-7})$$

II-5.3. Definition de $\ddot{\phi}$:

$\ddot{\phi}$ est l'accélération angulaire de la bielle, sa definition

suffit de dériver une deuxième fois la relation cinématique fondamentale:

$$\frac{d^2(R.\sin(\theta))}{dt^2} = \frac{d^2(L.\sin(\phi))}{dt^2}$$

$$\text{D'où} \quad R.\ddot{\theta}.\cos(\theta) - R.\dot{\theta}^2.\sin(\theta) = L.\ddot{\phi}.\cos(\phi) - L.\dot{\phi}^2.\cos(\phi)$$

puisque on a supposé que $\dot{\theta} = \text{constante}$, donc $\ddot{\theta} = 0$
d'où:

$$\ddot{\phi} = - \frac{R.\dot{\theta}^2.\sin(\theta)}{L.\cos(\phi)} + \dot{\phi}^2.\text{tg}(\phi)$$

d'après la relation cinématique fondamentale, la forme finale de $\ddot{\phi}$ sera:

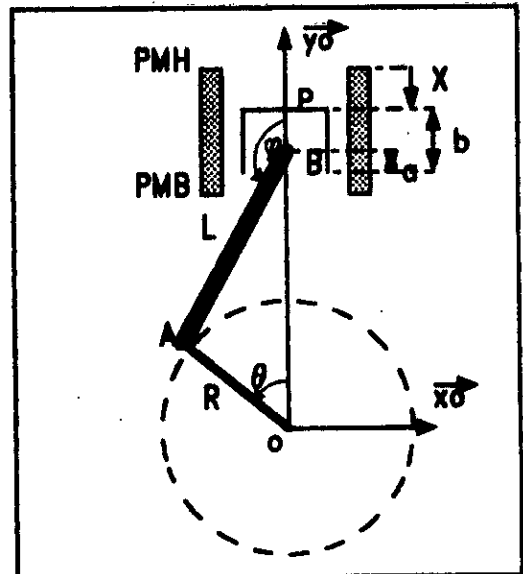
$$\ddot{\phi} = (\dot{\phi}^2 - \dot{\theta}^2).\text{tg}(\phi) \quad (\text{II-8})$$

II-6. CALCUL DE DEPLACEMENT X DU PISTON:

Le déplacement x est la distance parcourue par le piston à partir du PMH. Soit P, un point appartenant au piston sa position est indiquée sur la figure (fig 2)

Le vecteur déplacement du piston est donné par:

$$\vec{x} = -((R + L + b - a)\vec{y}_0 - \vec{OP})$$



(fig 2) Ensemble bielle manivelle

avec

$$\vec{OP} = \vec{OB} + \vec{BP} = \begin{Bmatrix} R.\cos(\theta) & 0 \\ 0 & -L.\cos(\phi) \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} + \begin{Bmatrix} 0 & b - a \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$\text{D'où} \quad X = (R(1 - \cos(\theta)) + L(1 + \cos(\theta))) \quad (\text{II-9})$$

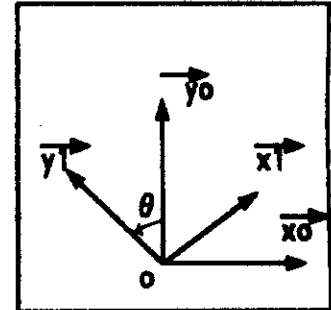
II-7. FORMULES DE PASSAGE ENTRE REPERES:

1°- Passage du repère $(o, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ au repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

Il suffit de projeter les axes (\vec{x}_1, \vec{y}_1) sur (x_0, y_0) (fig 3), donc:

- la vitesse de rotation de repère 1 par rapport au repère 0 est donné par:

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \theta \cdot \vec{z}_0$$



(fig 3)

- le vecteur position:

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = \cos(\theta) \cdot \vec{x}_0 + \sin(\theta) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{y}_1 = -\sin(\theta) \cdot \vec{x}_0 + \cos(\theta) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{z}_1 = \vec{z}_0 \end{cases}$$

2°- Passage du repère $(o, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ au repère $(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

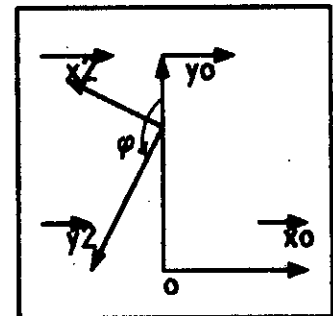
Il suffit de projeter les axes (\vec{x}_2, \vec{y}_2) sur (\vec{x}_0, \vec{y}_0) (fig 4), donc:

- la vitesse de rotation de repère 2 par rapport au repère 0 est donné par:

$$\vec{\Omega}_{2/0} = \phi \cdot \vec{z}_0$$

- le vecteur position:

$$\begin{cases} \vec{x}_2 = \cos(\phi) \cdot \vec{x}_0 + \sin(\phi) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{y}_2 = -\sin(\phi) \cdot \vec{x}_0 + \cos(\phi) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{z}_2 = \vec{z}_0 \end{cases}$$



(fig 4)

3°- Passage du repère $(o, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ au repère $(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

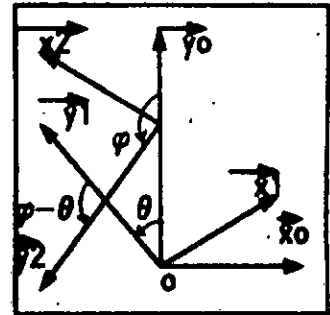
Il suffit de projeter les axes (\vec{x}_2, \vec{y}_2) sur (\vec{x}_1, \vec{y}_1) (fig 5), donc:

- la vitesse de rotation de repère 2
par rapport au repère 1 est donné par:

$$\overline{\Omega_{2/1}} = (\dot{\phi} - \dot{\theta}) \cdot \vec{z}_0$$

- le vecteur position:

$$\begin{cases} \vec{x}_2 = \cos(\phi - \theta) \vec{x}_1 + \sin(\phi - \theta) \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 = -\sin(\phi - \theta) \vec{x}_1 + \cos(\phi - \theta) \vec{y}_1 \\ \vec{z}_2 = \vec{z}_1 \end{cases}$$



(fig 5)

CINEMATIQUE DE L'ATTELAGE MOBILE DES MOTEURS EN V

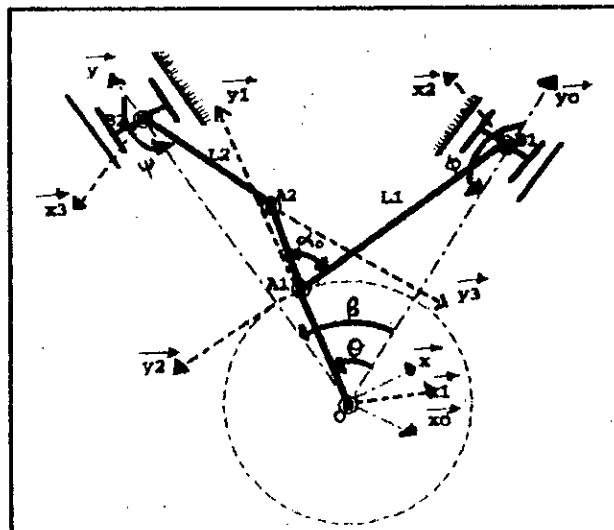
II-1. INTRODUCTION

Cette étude porte sur l'ensemble bielle-biellette situé sur un moteur en V, schématisé sur la figure 6 dont on n'étudie qu'une tranche c-à-d si le moteur possède 6 cylindres, nous aurons 3 tranches. La cinématique permet de connaître la position, la vitesse et l'accélération en tout point de l'embliage et ce en fonction de la rotation du vilebrequin. On traitera successivement la bielle, la biellette et les pistons. Cinq types de repères seront utilisés au cours de cette étude: deux repères cartésiens fixes $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ liés au bâti moteur et trois repères polaires $(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ lié à la bielle $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ lié à la biellette $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié à la manivelle.

Tous les calculs seront exprimés dans le repère fixe $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

II-2 Définition des points et mise en place des repères:

Dans le système bielle biellette (fig 6), nous avons cinq repères définies comme suit:



(fig 6) Coupe schématisée d'une tranche de moteur et appellation des différents points caractéristique

- Repère fixe lié aux cylindres de premier rangé ($\vec{0}, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$):

- O : centre du vilebrequin;
- \vec{y}_0 : axe de la première rangé des cylindres;
- \vec{z}_0 : axe du vilebrequin dirigé suivant le volant moteur;
- $R = OA_1$: le rayon du manivelle;
- $R_1 = A_1A_2$: le bras de la bielle;
- $L_1 = A_1B_1$: la longueur de la bielle;
- θ : angle de rotation du vilebrequin (\vec{y}_0, \vec{y}_1);
- $\dot{\theta}$: vitesse angulaire de rotation du vilebrequin, supposé constante;
- $A_1Q_1 = D_1$: distance au point quelconque de la bielle;
- α_0 : angle position du point d'articulation A_2 par rapport au bras de la bielle;
- α : angle positionnant le point quelconque Q_1 de la bielle.

- Repère fixe lié aux cylindres de deuxième rangé ($\vec{0}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$):

- \vec{y} : axe de la deuxième rangé des cylindres;
- \vec{z} : axe du vilebrequin;
- β : angle d'ouverture du V (\vec{y}_0, \vec{y});
- $L_2 = A_2B_2$: la longueur de la biellette;
- $A_2Q_2 = D_2$: distance au point quelconque de la biellette.

- Repère mobile lié à la manivelle ($\vec{0}, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$):

- \vec{y}_1 : axe portant la manivelle;
- $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$

- Repère mobile lié à la bielle ($B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2$):

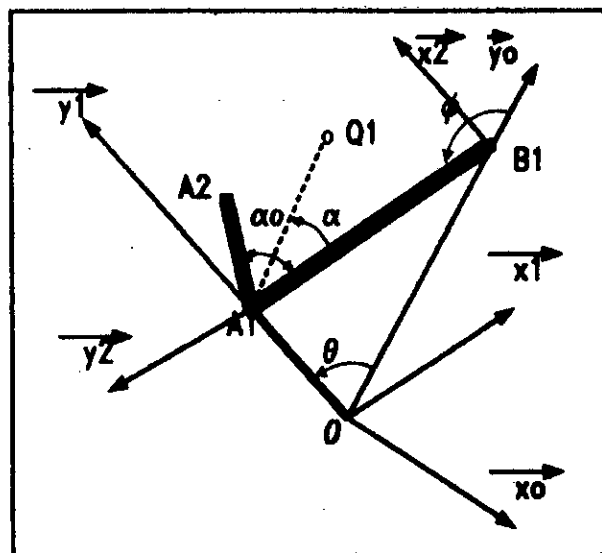
- \vec{y}_2 : axe portant la bielle;
- $\vec{z}_2 = \vec{z}_0$
- B_1 : centre de pied de bielle;
- ϕ : angle de rotation de la bielle (\vec{y}_0, \vec{y}_2);
- $\dot{\phi}$: vitesse angulaire de la bielle;

- Repère mobile lié à la biellette ($B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3$):

- \vec{y}_3 : axe portant la bielle;
- $\vec{z}_3 = \vec{z}_0$
- B_2 : centre de pied de bielle;
- ψ : angle de rotation de la bielle (\vec{y}, \vec{y}_3)
- $\dot{\psi}$: vitesse angulaire de la bielle;
- δ : angle positionnant le point quelconque Q_2 de la bielle.

II-3. CINEMATIQUE DE LA BIELLE: (fig 7)

II-3.1. Coordonnées d'un point quelconque:



(Fig 7) Schema de la bielle

Soit Q_1 un point quelconque, appartenant au repère $(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ telque:

$$\vec{OQ}_1 = \vec{OA}_1 + \vec{A_1Q_1}$$

avec

$$\vec{OA}_1 = \begin{cases} -R.\sin(\theta) \\ R.\cos(\theta) \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

et

$$\vec{A_1Q_1} = \begin{cases} D_1(\cos(\alpha).\sin(\phi) + \sin(\alpha).\cos(\phi)) \\ -D_1(\cos(\alpha).\cos(\phi) - \sin(\alpha).\sin(\phi)) \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$\vec{A_1Q_1} = \begin{cases} D_1\sin(\phi + \alpha) \\ -D_1\cos(\phi + \alpha) \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

ainsi

$$\vec{OQ_1} = \begin{cases} -R.\sin(\theta) + D_1.\sin(\phi + \alpha) \\ R.\cos(\theta) - D_1.\cos(\phi + \alpha) \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (a)$$

de cette expression on peut deduire les coordonnées

i)- POINT B1:

B1 est le point de pied de la bielle.

Posons dans l'expression (a) ($D_1 = L_1$, $\alpha = 0$, $Q_1 = B_1$)

d'où:

$$\vec{OB_1} = \begin{cases} -R.\sin(\theta) + L_1.\sin(\phi) \\ R.\cos(\theta) - L_1.\cos(\phi) \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

finalement cette expression devient:

$$\vec{OB_1} = \begin{cases} 0 \\ R.\cos(\theta) - L_1.\cos(\phi) \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

ii)- POINT G1:

G1 est le point de centre d'inertie de la bielle.

posons dans l'expression (a) ($D_1 = DG_1$, $\alpha = \alpha_0$, $Q_1 = G_1$)

d'où:

$$\vec{OG_1} = \begin{cases} -R.\sin(\theta) + DG_1.\sin(\phi + \alpha_0) \\ R.\cos(\theta) - DG_1.\cos(\phi + \alpha_0) \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

II-3.2. Vitesses des points caracteristiques de la bielle:

La vitesse du point Q1 est donnée par

$$\vec{V}(Q1,2/o) = \frac{d(\vec{OQ1})}{dt} \quad (II-10)$$

On derive l'expression de $\vec{OQ1}$ par rapport au temps, nous aurons:

$$\vec{V}(Q1,2/o) = \begin{cases} -R.\dot{\theta}.\cos(\theta) + D1.\dot{\phi}.\cos((\phi+\alpha)) \\ -R.\dot{\theta}.\sin(\theta) + D1.\dot{\phi}.\sin((\phi+\alpha)) \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix} \quad (b)$$

de cette expression on peut deduire les vitesses:

i)- VITESSE DU POINT B1:

Posons dans l'expression (b) ($D1 = L1$, $\alpha = 0$, $Q1 = B1$)

$$\vec{V}(B1,2/o) = \begin{cases} 0 \\ -R.\dot{\theta}.\sin(\theta) + L1.\dot{\phi}.\sin(\phi) \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix}$$

ii)- VITESSE DU POINT G1:

posons dans l'expression (b) ($D1 = DG1$, $\alpha = \alpha\alpha$, $Q1 = G1$)

$$\vec{V}(G1,2/o) = \begin{cases} -R.\dot{\theta}.\cos(\theta) + DG1.\dot{\phi}.\cos((\phi+\alpha\alpha)) \\ -R.\dot{\theta}.\sin(\theta) + DG1.\dot{\phi}.\sin((\phi+\alpha\alpha)) \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix}$$

II-3.3. Accélération des points caracteristiques de la bielle:

L'accélération du point Q1 est donnée par:

$$\vec{\Gamma}(Q1,2/o) = \frac{d \vec{V}(Q1,2/o)}{dt} \quad (II-11)$$

On derivant l'expression de $\vec{V}(Q1,2/o)$ par rapport au temps, nous aurons:

$$\vec{\Gamma}(Q1,2/o) = \begin{cases} +R.\dot{\theta}^2.\sin(\theta) + D1.\dot{\phi}.\cos(\phi+\alpha) - D1.\dot{\phi}.\sin^2(\phi+\alpha) \\ -R.\dot{\theta}^2.\cos(\theta) + D1.\dot{\phi}.\sin(\phi+\alpha) + D1.\dot{\phi}^2.\cos(\phi+\alpha) \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix} \quad (c)$$

de cette expression on peut deduire les accélérations:

1)- ACCELERATION DU POINT B1:

Posons dans l'expression (c) ($D_1 = L_1$, $\alpha = 0$, $Q_1 = B_1$)

$$\vec{\Gamma}_{(B1,2/0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R.\ddot{\theta}.\cos(\theta) + L_1.\ddot{\phi}.\sin(\phi) + L_1.\dot{\phi}^2.\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

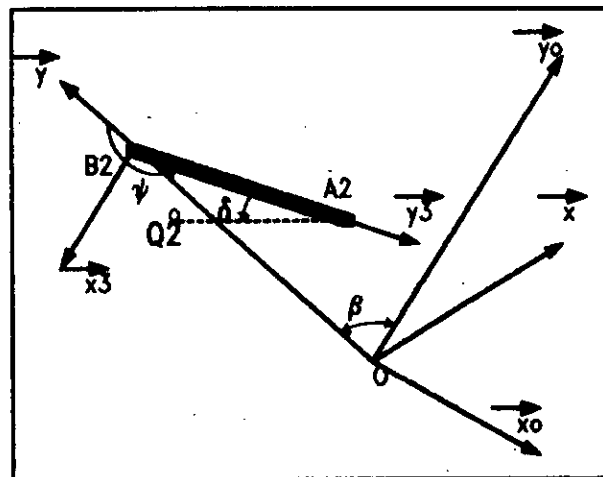
11)- ACCELERATION DU POINT G1:

Posons dans l'expression (c) ($D_1 = DG_1$, $\alpha = \alpha_0$, $Q_1 = G_1$)

$$\vec{\Gamma}_{(G1,2/0)} = \begin{pmatrix} +R.\ddot{\theta}.\sin(\theta) + DG_1.\ddot{\phi}.\cos(\phi+\alpha_0) - DG_1.\dot{\phi}^2.\sin(\phi+\alpha_0) \\ -R.\ddot{\theta}.\cos(\theta) + DG_1.\ddot{\phi}.\sin(\phi+\alpha_0) + DG_1.\dot{\phi}^2.\cos(\phi+\alpha_0) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

II-4. CINEMATIQUE DE LA BIELLETTE: (fig 8)

II-4.1. Coordonnées d'un point quelconque:



(fig 8) Schema de la bielle

Soit Q_2 un point quelconque, appartenant au repère $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ telque:

$$\vec{OQ}_2 = \vec{OA}_2 + \vec{A_2Q}_2$$

- Calcul de \vec{OA}_2 :

posons dans l'expression (a) ($D_1 = R_1$, $\alpha = \alpha_0$, $Q_1 = A_2$)

$$\vec{OA}_2 = \begin{pmatrix} -R.\sin(\theta) + R_1.\sin(\phi+\alpha_0) \\ R.\cos(\theta) - R_1.\cos(\phi+\alpha_0) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

- Calcul de \vec{AQ}_2 :

le vecteur \vec{AQ}_2 est donné dans le repère ($B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3$) par:

$$\vec{AQ}_2 = \begin{pmatrix} D.\sin(\delta) \\ -D.\cos(\delta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix}$$

La projection de AQ dans le repère fixe ($O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$) sera:

$$\vec{A_2Q_2} = \begin{pmatrix} D_2(\sin(\delta).\cos(\phi+\beta) + \cos(\delta).\sin(\phi+\beta)) \\ -D_2(-\sin(\delta).\sin(\phi+\beta) + \cos(\delta).\cos(\phi+\beta)) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\vec{A_2Q_2} = \begin{pmatrix} D_2.\sin(\delta+\phi+\beta) \\ -D_2.\sin(\delta+\phi+\beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\vec{OQ_2} = \begin{pmatrix} -R.\sin(\theta)+R_1.\sin(\phi+\alpha_0)+D_2.\sin(\psi+\delta+\beta) \\ R.\cos(\theta)-R_1.\cos(\phi+\alpha_0)-D_2.\cos(\psi+\delta+\beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad (d)$$

de cette expression on peut deduire les coordonnées:

i)- POINT B₂:

B₂ est le point de pied de la biellette.

Posons dans l'expression (d) ($D_2 = L_2$, $\delta = 0$, $Q_2 = B_2$)

d'où:

$$\vec{OB_2} = \begin{pmatrix} -R.\sin(\theta)+R_1.\sin(\phi+\alpha_0)+L_2.\sin(\psi+\beta) \\ R.\cos(\theta)-R_1.\cos(\phi+\alpha_0)-L_2.\cos(\psi+\beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

ii)- POINT G₂:

G2 est le point de centre de la bielle.

Posons dans l'expression (d) ($D_2 = DG_2$, $\delta = \delta\alpha$, $Q_2 = G_2$)

d'où

$$\overrightarrow{OG_2} = \begin{pmatrix} -R.\sin(\theta) + R_1.\sin(\phi + \alpha_0) + DG_2.\sin(\psi + \delta\alpha + \beta) \\ R.\cos(\theta) - R_1.\cos(\phi + \alpha_0) - DG_2.\cos(\psi + \delta\alpha + \beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

II-4.2. Vitesses des points caractéristiques de la bielle:

la vitesse du point Q2 est donnée par:

$$\overrightarrow{V(Q_2, 3/0)} = \frac{d(\overrightarrow{OQ_2})}{dt} \quad (II-12)$$

On dérive l'expression de $\overrightarrow{OQ_2}$ par rapport au temps, nous aurons:

$$\overrightarrow{V(Q_2, 3/0)} = \begin{pmatrix} -R.\dot{\theta}.\cos(\theta) + R_1.\dot{\phi}.\cos(\phi + \alpha_0) + D_2.\dot{\psi}.\cos(\psi + \delta + \beta) \\ -R.\dot{\theta}.\sin(\theta) + R_1.\dot{\phi}.\sin(\phi + \alpha_0) + D_2.\dot{\psi}.\sin(\psi + \delta + \beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (e)$$

de cette expression on peut déduire les vitesses :

i)- VITESSE DU POINT B2:

Posons dans l'expression (e) ($D_2 = L_2$, $\delta = 0$, $Q_2 = B_2$)

d'où:

$$\overrightarrow{V(B_2, 3/0)} = \begin{pmatrix} -R.\dot{\theta}.\cos(\theta) + R_1.\dot{\phi}.\cos(\phi + \alpha_0) + L_2.\dot{\psi}.\cos(\psi + \beta) \\ -R.\dot{\theta}.\sin(\theta) + R_1.\dot{\phi}.\sin(\phi + \alpha_0) + L_2.\dot{\psi}.\sin(\psi + \beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

ii)- VITESSE DU POINT G2:

posons dans l'expression (e) ($D_2 = DG_2$, $\delta = \delta\alpha$, $Q_2 = G_2$)

d'où

$$\overrightarrow{V(G_2, 3/0)} = \begin{pmatrix} -R.\dot{\theta}.\cos(\theta) + R_1.\dot{\phi}.\cos(\phi + \alpha_0) + DG_2.\dot{\psi}.\cos(\psi + \delta\alpha + \beta) \\ -R.\dot{\theta}.\sin(\theta) + R_1.\dot{\phi}.\sin(\phi + \alpha_0) + DG_2.\dot{\psi}.\sin(\psi + \delta\alpha + \beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

II-4.3. Accélération des points caractéristiques de la bielle:

L'accélération du point Q2 est donnée par:

$$\overrightarrow{\Gamma(Q_2, 3/0)} = \frac{d \overrightarrow{V(Q_2, 3/0)}}{dt} \quad (II-13)$$

On dérivant l'expression de $\overrightarrow{V(Q_2, 3/0)}$ par rapport au temps, nous aurons

$$\overrightarrow{\Gamma_{(B2, S)/O}} = \begin{pmatrix} R.\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + R_1.\ddot{\phi} \cos(\phi + \alpha_0) - R_1.\dot{\phi}^2 \sin(\phi + \alpha_0) + \\ -R.\dot{\theta}^2 \cos(\theta) + R_1.\dot{\phi} \sin(\phi + \alpha_0) + R_1.\dot{\phi}^2 \cos(\phi + \alpha_0) + \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} D_2.\ddot{\psi} \cos(\psi + \delta + \beta) - D_2.\dot{\psi}^2 \sin(\psi + \delta + \beta) \\ D_2.\dot{\psi} \sin(\psi + \delta + \beta) + D_2.\dot{\psi}^2 \cos(\psi + \delta + \beta) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{x}_O \\ \vec{y}_O \\ \vec{z}_O \end{array} \quad (f)$$

1)- ACCELERATION DU POINT B2:

posons dans l'expression (f) ($D_2 = L_2$, $\delta = 0$, $Q_2 = B_2$)

d'où

$$\overrightarrow{\Gamma_{(B2, S)/O}} = \begin{pmatrix} R.\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + R_1.\ddot{\phi} \cos(\phi + \alpha_0) - R_1.\dot{\phi}^2 \sin(\phi + \alpha_0) + \\ -R.\dot{\theta}^2 \cos(\theta) + R_1.\dot{\phi} \sin(\phi + \alpha_0) + R_1.\dot{\phi}^2 \cos(\phi + \alpha_0) + \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} L_2.\ddot{\psi} \cos(\psi + \beta) - L_2.\dot{\psi}^2 \sin(\psi + \beta) \\ L_2.\dot{\psi} \sin(\psi + \beta) + L_2.\dot{\psi}^2 \cos(\psi + \beta) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{x}_O \\ \vec{y}_O \\ \vec{z}_O \end{array}$$

11)- ACCELERATION DU POINT G2:

posons dans l'expression (f) ($D_2 = DG_2$, $\delta = \delta\alpha$, $Q_2 = G_2$)

d'où

$$\overrightarrow{\Gamma_{(G2, S)/O}} = \begin{pmatrix} R.\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + R_1.\ddot{\phi} \cos(\phi + \alpha_0) - R_1.\dot{\phi}^2 \sin(\phi + \alpha_0) + \\ -R.\dot{\theta}^2 \cos(\theta) + R_1.\dot{\phi} \sin(\phi + \alpha_0) + R_1.\dot{\phi}^2 \cos(\phi + \alpha_0) + \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} DG_2.\ddot{\psi} \cos(\psi + \delta\alpha + \beta) - DG_2.\dot{\psi}^2 \sin(\psi + \delta\alpha + \beta) \\ DG_2.\dot{\psi} \sin(\psi + \delta\alpha + \beta) + DG_2.\dot{\psi}^2 \cos(\psi + \delta\alpha + \beta) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{x}_O \\ \vec{y}_O \\ \vec{z}_O \end{array}$$

II-5. DEFINITION DES ANGLES :

II-5.1. Definition de l'angle ψ :

ψ est l'angle de rotation de la biellette; pour la détermination de ψ , nous remarquons que les projections de $\overrightarrow{B_2A_2}$ et $\overrightarrow{OA_2}$ par rapport à x sont égales, donc:

- pour $\overrightarrow{B_2A_2}$:

$$\text{on a: } \overrightarrow{B_2A_2} = L_2.\vec{y}_B$$

$$\vec{B2A2} = \begin{cases} -L_2 \cdot \sin(\psi) \\ L_2 \cdot \cos(\psi) \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

- pour $\vec{OA2}$:

$$\text{on a: } \vec{OA2} = \vec{OA1} + \vec{A1A2} = \begin{cases} -R \cdot \sin(\theta) \\ R \cdot \cos(\theta) \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} + \begin{cases} R_1 \cdot \sin(\phi + \alpha_0) \\ -R_1 \cdot \cos(\phi + \alpha_0) \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

donc le vecteur $\vec{OA2}$ a pour expression:

$$\vec{OA2} = \begin{cases} -R \cdot \sin(\theta - \beta) + R_1 \cdot \sin(\phi + \alpha_0 - \beta) \\ R \cdot \cos(\theta - \beta) - R_1 \cdot \cos(\phi + \alpha_0 - \beta) \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

on égalisant les projection de $B2A2$ et $OA2$ suivant l'axe x , nous obtenant la relation cinématique fondamentale:

$$-R \cdot \sin(\theta - \beta) + R_1 \cdot \sin(\phi + \alpha_0 - \beta) = -L_2 \cdot \sin(\psi) \quad (\text{II-14})$$

$$\text{donc } \sin(\psi) = \frac{R \cdot \sin(\theta - \beta)}{L_2} - \frac{R_1 \cdot \sin(\phi + \alpha_0 - \beta)}{L_2}$$

d'où

$$\cos(\psi) = -\sqrt{1 - \sin^2(\psi)}$$

auquel on obtient:

$$\psi = \pi - \text{Arcsin} \left(\frac{R \cdot \sin(\theta - \beta)}{L_2} - \frac{R_1 \cdot \sin(\phi + \alpha_0 - \beta)}{L_2} \right) \quad (\text{II-15})$$

II-5.1. Definition de l'angle $\dot{\psi}$:

$\dot{\psi}$ est la vitesse angulaire de la bielle, on dérivant l'expression de ψ , nous aurons:

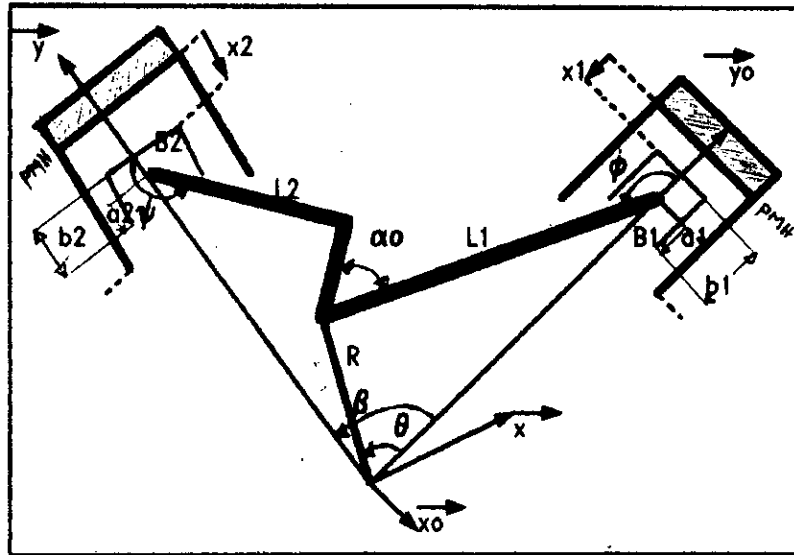
$$\dot{\psi} = \frac{1}{\cos(\psi)} \left(\frac{R \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta - \beta)}{L_2} - \frac{R_1 \cdot \dot{\phi} \cdot \cos(\phi + \alpha_0 - \beta)}{L_2} \right) \quad (\text{II-16})$$

II-5.2. Definition de l'angle $\ddot{\psi}$:

$\ddot{\psi}$ est l'accélération angulaire de la bielle, on dérivant l'expression de $\dot{\psi}$, nous aurons:

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{\cos(\psi)} \left(\frac{-R \dot{\theta}^2 \cos(\theta - \beta)}{L_2} - \frac{R_1 \dot{\phi} \cos(\phi + \alpha_0 - \beta)}{L_2} \right) + \frac{R_1 \dot{\phi}^2 \sin(\phi + \alpha_0 - \beta)}{L_2} + \dot{\psi}^2 \sin(\psi) \quad (\text{II-17})$$

II-6. CALCUL DES DEPLACEMENTS DES PISTONS (P1, P2): (fig 9)



(Fig 9) Ensemble bielle biellette

II-6.1. Déplacement du piston 1 [x1]:

Soit un point P1 appartenant au piston 1, ces coordonnées sont données par:

$$\vec{OP_1} = \vec{OB_1} + \vec{B_1P_1} = \begin{pmatrix} R \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & -L \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_1 - a_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur déplacement du piston 1 est donné par:

$$\vec{X_1} = -((R + L_1 + b_1 - a_1)\vec{y}_0 - \vec{OP_1})$$

d'où:

$$\vec{X_1} = -((R(1 - \cos(\theta)) + L_1(1 + \cos(\phi)))\vec{y}_0 \quad (\text{II-18})$$

II-6.1. Déplacement du piston 2 [x1]:

Soit un point P2 appartenant au piston 2, ces coordonnées sont données par:

$$\vec{OP}_2 = \vec{OB}_2 + \vec{B}_2P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \cdot \cos(\theta - \alpha_0) - r \cdot \cos(\phi + \beta - \alpha_0) - L_2 \cdot \cos(\psi) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 - a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur déplacement du piston 2 est donné par:

$$\vec{X}_2 = -((R + r + L_2 + b_2 - a_2)\vec{y} - \vec{OP}_2)$$

d'où

$$X_2 = -(R(1 - \cos(\theta - \alpha_0)) + r(1 + \cos(\phi + \beta - \alpha_0)) + L_2(1 + \cos(\psi)))$$

(II-19)

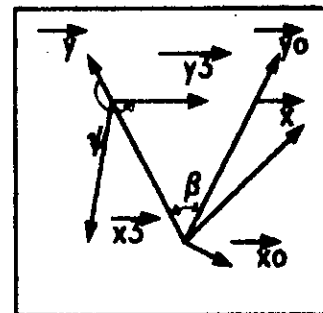
II-7. FORMULES DE PASSAGE ENTRE REPERES

1° - Passage du repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ au repère $(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$:

Il suffit de projeter les axes (\vec{x}_3, \vec{y}_3) sur (\vec{x}_0, \vec{y}_0) (fig 10), donc:

- Le vecteur position:

$$\begin{cases} \vec{x}_3 = \cos(\psi + \beta) \cdot \vec{x}_0 + \sin(\psi + \beta) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{y}_3 = -\sin(\psi + \beta) \cdot \vec{x}_0 + \cos(\psi + \beta) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{z}_3 = \vec{z}_0 \end{cases}$$



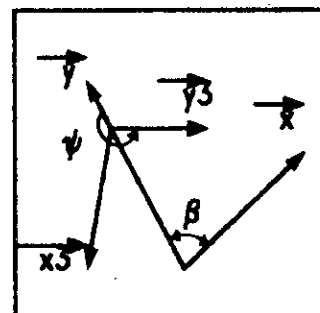
(fig 10)

2° - Passage du repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ au repère $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$:

Il suffit de projeter les axes (\vec{x}_3, \vec{y}_3) sur (\vec{x}, \vec{y}) (fig 11), donc:

- Le vecteur position:

$$\begin{cases} \vec{x}_3 = \cos(\psi) \cdot \vec{x} + \sin(\psi) \cdot \vec{y} \\ \vec{y}_3 = -\sin(\psi) \cdot \vec{x} + \cos(\psi) \cdot \vec{y} \\ \vec{z}_3 = \vec{z}_0 \end{cases}$$



(fig 11)

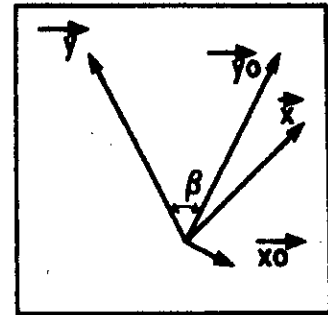
3° - Passage du repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ au repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

Il suffit de projeter les axes

(\vec{x}, \vec{y}) sur (\vec{x}_0, \vec{y}_0) (fig 12), donc:

- Le vecteur position:

$$\begin{cases} \vec{x} = \cos(\beta) \cdot \vec{x}_0 + \sin(\beta) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{y} = -\sin(\beta) \cdot \vec{x}_0 + \cos(\beta) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{z} = \vec{z}_0 \end{cases}$$



(fig 12)



chapitre 3

DYNAMIQUE

RAPPEL DES HYPOTHESES

- On suppose que les contacts sont ponctuels et sans frottement;
- Nous négligeons les variations de la vitesse de rotation
($\omega = \text{constante}$);
- On suppose que les éléments mécaniques (bielle, pistons,...) sont géométriquement parfaits.
- Tous les paliers sont considérés comme des liaisons parfaites sans frottement.
- On suppose que les pistons ne sont pas desaxes.

[2]



DYNAMIQUE des moteurs en ligne

LES MOTEURS EN LIGNE

III-1. INTRODUCTION:

L'étude dynamique a pour but de définir les efforts dus aux liaisons ou au contact piston sur chemise, en fonction du cycle moteur, on définit les efforts aux points caractéristiques. L'étude du type de liaisons (supposées parfaites), entraîne la connaissance du torseur dynamique et donc les composantes des actions, celles-ci sont définies sur la bielle et le pistons.

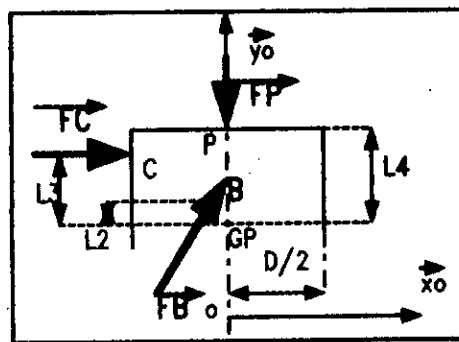
Le bilan global des forces ainsi que les équations générales de la dynamique conduisent à un système d'équations qui permet de définir la résultante des efforts. Il est à noter que toute les efforts sont exprimées dans le repère fixe $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

III-2. ETUDE DYNAMIQUE DU PISTON

III-2.1. Analyse des actions mécaniques sur le piston:

On isole le piston (fig 13), il y'a trois actions exterieures appliquées à celles-ci:

- actions de l'axe piston sur le piston au point B (F_B);
- action de la chemise sur le piston au point C (F_C);
- action des gaz de combustion sur le piston au point P (F_P).



(fig 13) repartition des efforts sur le piston

Nous avons: $\vec{G}_pB = L_2 \cdot \vec{y}_0$; $\vec{G}_pP = L_4 \cdot \vec{y}_0$; $\vec{G}_pC = (D/2) \cdot \vec{x}_0 + L_3 \cdot \vec{y}_0$

i)- Action de l'axe du piston sur le piston au point B:

* Torseur au point B: $\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_B \\ \vec{M}_B \end{array} \right\}_B$

avec:
$$-\vec{F}_B = \begin{Bmatrix} -XB \\ -YB \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{array}{l} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{array} ; \quad \vec{M}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{array}{l} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{array}$$

ii)- Action de la chemise sur le piston au point C:

* Torseur au point C: $\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_C \\ \vec{M}_C \end{array} \right\}_C$

- la chemise étant immobile et géométriquement parfaite, elle n'exerce aucun moment sur le piston.
- si le piston est géométriquement parfait et que sa tête est plate, les gaz n'exercent aucun effort selon \vec{z}_0 . Le point de contact chemise-piston est donc situé sur une génératrice du piston dans le plan (\vec{x}_0, \vec{y}_0) , soit C ce point (position quelconque).

Donc:
$$\vec{F}_C = \begin{Bmatrix} XC \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{array}{l} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{array} ; \quad \vec{M}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{array}{l} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{array}$$

iii)- Action des gaz sur le piston au point P:

- On suppose que la pression des gaz est uniformément répartie sur la tête du piston et que le point d'application de l'effort résultant est centré sur la tête de piston; de ce fait, les gaz n'exercent de moment sur le piston.
- si la tête du piston est plate, il n'y a pas d'effort sur \vec{x}_0 et \vec{z}_0 , les efforts dus aux gaz sont uniquement dirigés suivant \vec{y}_0 et dépendent de l'angle vilebrequin.

* Torseur au point P: $\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_P \\ \vec{M}_P \end{array} \right\}_P$

$$\text{Donc: } \vec{-F}_P = \begin{Bmatrix} 0 \\ -Y_P \\ 0 \end{Bmatrix}_{\substack{x_0 \\ y_0 \\ z_0}}; \quad \vec{M}_P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\substack{x_0 \\ y_0 \\ z_0}}$$

$$\text{Avec: } Y_P = \begin{cases} P \cdot S & \text{pour un cycle théorique} \\ (P - P_0) \cdot S & \text{pour un cycle quasi-réel} \end{cases}$$

- P : pression des gaz de combustion;
- P₀: pression à l'intérieur du carter moteur;
- S : surface de la tête du piston.

III-2.2. Equations vectorielles fondamentales du piston:

les équations vectorielles fondamentales du piston sont:

$$M_p \cdot \vec{\Gamma}(G_p, \text{piston}/o) = \Sigma \vec{F}(\text{ext}/\text{piston}) \quad (3.1)$$

$$\vec{\delta}(\text{piston}/G_p) = \Sigma \vec{M}(\text{F}_{\text{ext}}/G_p) \quad (3.2)$$

Le piston est un solide indéformable, son mouvement est une translation, donc tous ses points ont la même vitesse et la même accélération. En particulier, le point G_p a la même accélération que le point B, ce qui nous permet d'écrire:

$$\vec{\Gamma}(G_p, \text{piston}/o) = \vec{\Gamma}(B, 2/o) \quad (3.3)$$

i) - Calcul du moment dynamique:

Le moment dynamique est définie par:

$$\vec{\delta}(\text{piston}/G_p) = \frac{d^0}{dt} (\vec{\sigma}(\text{piston}/G_p)) \quad (3.4)$$

avec: σ : est le moment cinétique du piston par rapport à son centre de gravité G_p.

L'expression du moment cinétique est donnée par:

$$\vec{\sigma}(\text{piston}/G_p) = I_{\substack{(\text{piston}/G_p) \\ (G_p, x_0, y_0, z_0)}} \cdot \vec{\Omega}(\text{piston}/o) \quad (3.5)$$

Le piston n'a aucune rotation par rapport au repère fixe $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, donc le vecteur rotation instantanée du piston par rapport au repère fixe est nul.

$$\vec{\Omega}_{(\text{piston}/o)} = \vec{0}$$

Ainsi on aura pour : - le moment cinétique $\sigma_{(\text{piston}/o_p)} = 0$
 - le moment dynamique $\delta_{(\text{piston}/o_p)} = 0$

ii)- Calcul des moments des différents efforts:

Les moments des extérieures au piston seront ramenés au centre de gravité G_p

-*- Moment de la force \vec{F}_B

Par définition du moment:

$$\vec{M}_{(\vec{F}_B/o_p)} = \vec{M}_{(\vec{F}_B/B)} + \vec{G}_p B \wedge \vec{F}_B \quad (3.6)$$

Avec:

$$\vec{G}_p B = L_2 \vec{y}_0 \quad \text{et} \quad \vec{M}_{(\vec{F}_B/B)} = \vec{0}$$

Donc

$$\vec{M}_{(\vec{F}_B/o_p)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ L_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \wedge \begin{Bmatrix} -XB \\ -YB \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_2 \cdot XB \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

-*- Moment de la force \vec{F}_c :

par définition du moment:

$$\vec{M}_{(\vec{F}_c/o_p)} = \vec{M}_{(\vec{F}_c/c)} + \vec{G}_p C \wedge \vec{F}_c \quad (3.7)$$

Avec:

$$\vec{G}_p C = \frac{D}{2} \vec{x}_0 + L_3 \vec{y}_0 \quad \text{et} \quad \vec{M}_{(\vec{F}_c/c)} = \vec{0}$$

Donc

$$\vec{M}_{(\vec{F}_c/o_p)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} + \begin{Bmatrix} D/2 \\ L_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \wedge \begin{Bmatrix} XC \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_3 \cdot XC \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

-*- Moment de la force F_p :

Puisque F_p passe par le centre de gravité du piston G_p donc,

le moment sera nul:

$$\vec{M}(\vec{FP}/\vec{GP}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

III-2.3. Equation scalaire du piston:

D'après l'équation vectorielle fondamentale (3.1), on obtient:

$$M_p \begin{Bmatrix} 0 \\ R.\theta.(\phi-\theta).\cos(\theta)+R.\phi.\sin(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} -XB \\ -YB \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} + \begin{Bmatrix} XC \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -Y_p \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

La projection de cette expression sur les axes, nous donne:

$$\vec{x}_0 : \quad -XB + XC = 0 \quad (1)$$

$$\vec{y}_0 : \quad M_p.[R.\theta.(\phi-\theta).\cos(\theta)+R.\phi.\sin(\theta)] = -YB - Y_p \quad (2)$$

$$\vec{z}_0 : \quad 0 = 0$$

D'après l'équation vectorielle fondamentale (3.2), on obtient:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_2.XB \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_3.XC \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

La projection de cette expression sur les axes, nous donne:

$$\vec{x}_0 : \quad 0 = 0$$

$$\vec{y}_0 : \quad 0 = 0$$

$$\vec{z}_0 : \quad -L_2.XB - L_3.XC = 0 \quad (3)$$

Remarque: l'étude dynamique du piston a un système de trois équations (1), (2) et (3) à cinq inconnues XB, XC, YB, L₂ et L₃.

Nous remarquons que les deux équations (1) et (3) ne sont compatibles que si L₂ = L₃, l'équation (3) est donc en plus.

LE SYSTEME D'EQUATION DU PISTON

$$- X_B + X_C = 0$$

(3.8)

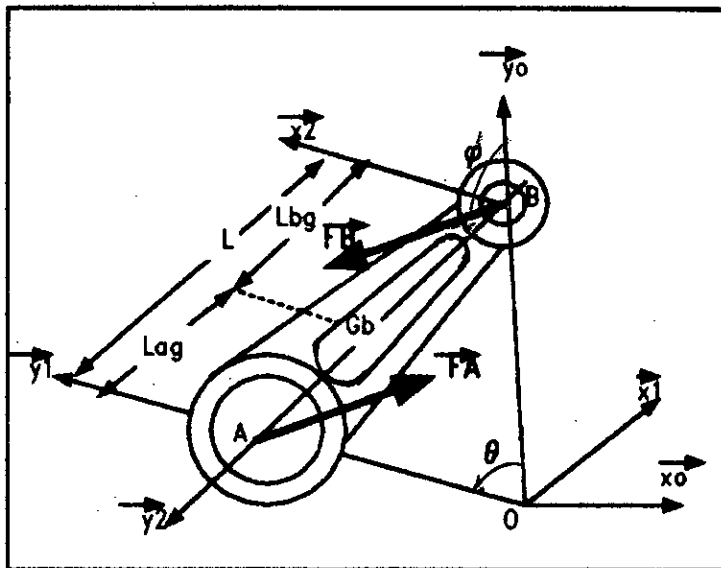
$$M_p \cdot [R \cdot \ddot{\theta} \cdot (\phi - \theta) \cdot \cos(\theta) + R \cdot \dot{\phi} \cdot \sin(\theta)] = - Y_B - Y_p$$

III-3. ETUDE DYNAMIQUE DE LA BIELLE

III-3.1. Analyse des actions mécaniques appliquées à la bielle:

on isole la bielle (fig 14); il y a deux actions extérieures appliquées à celle-ci:

- action du maneton sur la bielle au point A (F_A);
- action de l'axe de piston sur la bielle au point B ($-F_B$).



Nous avons:

$$\vec{G_b A} = (L - L_{bg}) \cdot \vec{y_2}$$

(fig 14) Analyse des actions mécaniques appliquées à la bielle

i)- Action du maneton sur la bielle au point A:

La liaison est du type verrou, donc:

$$\vec{F}_A \cdot \vec{z} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{M}_A \cdot \vec{z} = \vec{0}$$

Les pièces en mouvement étant géométriquement parfaites, la bielle ne transmet pas de moment au maneton, le torseur des actions mécaniques au point A se résume donc à:

$$\star \text{ Torseur au point A: } \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_A \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A$$

- dans le repère fixe $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{F}_A = \left\{ \begin{array}{c} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{array}, \quad \vec{M}_A = \vec{0}$$

- dans le repère lié au maneton $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

$$\vec{F}_A = \left\{ \begin{array}{c} X_A \cos(\theta) + Y_A \sin(\theta) \\ -X_A \sin(\theta) + Y_A \cos(\theta) \\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{array}; \quad \vec{M}_A = \vec{0}$$

- dans le repère lié à la bielle $(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

$$\vec{F}_A = \left\{ \begin{array}{c} X_A \cos(\phi) + Y_A \sin(\phi) \\ -X_A \sin(\phi) + Y_A \cos(\phi) \\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{array}; \quad \vec{M}_A = \vec{0}$$

ii)- Action de l'axe de piston sur la bielle au point B:

De même qu'au point A, la liaison au point B est du type verrou, donc:

$$\vec{F}_B \cdot \vec{z} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{M}_B \cdot \vec{z} = \vec{0}$$

Les pièces en mouvement étant géométriquement parfaites l'axe de piston ne transmet pas de moment à la bielle. Le torseur des actions mécaniques au point B se résume à:

$$\star \text{ Torseur au point B: } \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_B \\ \vec{M}_B \end{array} \right\}_B$$

- dans le repère fixe $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{F}_B = \begin{Bmatrix} XB \\ YB \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} ; \quad \vec{M}_B = \vec{0}$$

- dans le repère lié au maneton (A, $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$)

$$\vec{F}_B = \begin{Bmatrix} -XB \cdot \cos(\theta) - YB \cdot \sin(\theta) \\ -XB \cdot \sin(\theta) - YB \cdot \cos(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix} ; \quad \vec{M}_B = \vec{0}$$

- dans le repère lié à la bielle (B, $\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2$)

$$\vec{F}_B = \begin{Bmatrix} -XB \cdot \cos(\phi) - YB \cdot \sin(\phi) \\ XB \cdot \sin(\phi) - YB \cdot \cos(\phi) \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix} ; \quad \vec{M}_A = \vec{0}$$

III-3.2. Equations vectorielles fondamentales de la bielle:

Les équations vectorielles fondamentales de la bielle sont:

$$M_b \cdot \vec{\Gamma}(G_b, \text{bielle}/o) = \sum \vec{F}(\text{ext}/\text{bielle}) \quad (3.9)$$

$$\vec{\delta}(\text{bielle}/G_b) = \sum \vec{M}(\text{F}_{\text{ext}}/G_b) \quad (3.10)$$

1)- Calcul du moment dynamique:

Le moment dynamique est définie par:

$$\vec{\delta}(\text{bielle}/G_b) = \frac{d^0}{dt} (\sigma(\text{bielle}/G_b)) \quad (3.11)$$

avec: σ : est le moment cinétique du bielle par rapport à son centre de gravité G_b .

L'expression du moment cinétique est donnée par:

$$\vec{\sigma}(\text{bielle}/G_b) = \underset{G_b, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2}{I}(\text{bielle}/G_b) \cdot \vec{\Omega}(\text{bielle}/o) \quad (3.12)$$

Remarque: Le tenseur d'inertie et le vecteur rotation instantanée doivent être exprimés dans le même repère.

Le vecteur rotation instantanée de la bielle par rapport au repère fixe est définie par:

$$\vec{\Omega}(\text{bielle}/o) = \vec{\Omega}(z/o) = \dot{\phi} \cdot \vec{z}_2 = \dot{\phi} \cdot \vec{z}_0$$

La bielle a deux plans de symétrie (\vec{x}_2, \vec{y}_2) et (\vec{x}_2, \vec{z}_2), donc les trois produits d'inertie sont nuls; d'où le moment cinématique est:

$$\frac{z}{\alpha(\text{bielle}/\text{ab})} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi \cdot I_z \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix}$$

le moment dynamique est donné par:

$$\vec{\delta}(\text{bielle}/\text{ab}) = \phi \cdot I_z \cdot \vec{z}_2 = \phi \cdot I_z \cdot \vec{z}_0$$

ii) - Calcul des moments des différents efforts:

Puisque le moment dynamique est calculé par rapport au centre de gravité de la bielle, il faut ramener les moments des forces extérieures appliquées à la bielle au centre de gravité.

-*- Moment de la force F_B :

par définition du moment:

$$\vec{M}(\vec{F}_A/\text{ab}) = \vec{M}(\vec{F}_A/A) + \vec{G}B \wedge \vec{F}_A \quad (3.13)$$

$$\vec{M}(\vec{F}_A/\text{ab}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} + \begin{Bmatrix} L_{bg} \cdot \sin(\phi) \\ L_{bg} \cdot \cos(\phi) \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \begin{Bmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$\vec{M}(\vec{F}_A/\text{ab}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_{bg}(X_A \cdot \cos(\phi) + Y_A \cdot \sin(\phi)) \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

-*- Moment de la force F_B :

Par définition du moment:

$$\vec{M}(\vec{F}_B/\text{ab}) = \vec{M}(\vec{F}_B/B) + \vec{G}LB \wedge \vec{F}_B \quad (3.14)$$

$$\vec{M}(\vec{F}_B/\text{ab}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} + \begin{Bmatrix} L_{bg} \cdot \sin(\phi) \\ -L_{bg} \cdot \cos(\phi) \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \begin{Bmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$\vec{M}(\vec{F}_B/\text{ab}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_{bg}(X_B \cdot \cos(\phi) + Y_B \cdot \sin(\phi)) \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

III-3.3. Equation scalaire de la bielle:

D'après l'équation vectorielle fondamentale (3.9), on obtient:

$$Mb. \begin{cases} -Lbg. (\dot{\phi} \cos(\phi) - \dot{\phi}^2 \sin(\phi)) \\ -R. \dot{\theta}^2 \cos(\theta) + Lag (\ddot{\phi} \sin(\phi) + \dot{\phi}^2 \cos(\phi)) \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{cases} XA+XB \\ YA+YB \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

La projection sur les axes, nous donne:

$$- \vec{x}_0 : -Mb.Lbg. (\dot{\phi} \cos(\phi) - \dot{\phi}^2 \sin(\phi)) = XA+XB \quad (3)$$

$$- \vec{y}_0 : -Mb(R. \dot{\theta}^2 \cos(\theta) + Lag (\ddot{\phi} \sin(\phi) + \dot{\phi}^2 \cos(\phi))) = YA+YB \quad (4)$$

$$- \vec{z}_0 : 0 = 0$$

D'après l'équation vectorielle fondamentale (3.10), on obtient:

$$\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \phi.Iz \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -Lag(XA \cos(\phi) + YA \sin(\phi)) \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ Lbg(XB \cos(\phi) + YB \sin(\phi)) \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

La projection sur les axes, nous donne:

$$- \vec{x}_0 : 0 = 0$$

$$- \vec{y}_0 : 0 = 0$$

$$- \vec{z}_0 : \phi.Iz = -Lag(XA \cos(\phi) + YA \sin(\phi)) + Lbg(XB \cos(\phi) + YB \sin(\phi))$$

(5)

LE SYSTEME D'EQUATION DE LA BIELLE

$$-Mb.Lbg. (\dot{\phi} \cos(\phi) - \dot{\phi}^2 \sin(\phi)) = XA+XB$$

$$-Mb(R. \dot{\theta}^2 \cos(\theta) + Lag (\ddot{\phi} \sin(\phi) + \dot{\phi}^2 \cos(\phi))) = YA+YB$$

$$\phi.Iz = -Lag(XA \cos(\phi) + YA \sin(\phi)) + Lbg(XB \cos(\phi) + YB \sin(\phi))$$

(3.15)

Remarque: L'étude dynamique de la bielle aboutit à un système de trois équations linéaires (3), (4) et (5) à deux inconnues.

A présent nous pouvons résoudre notre système d'équation qui comporte cinq équations à cinq inconnues (XA, YA, XB, YB, XC).

III-4. SOLUTION DU SYSTEME BIELLE-PISTON

Posons:

$$\Gamma_{py} = R \cdot \dot{\theta} \cdot (\dot{\phi} - \dot{\theta}) \cos(\theta) + R \cdot \ddot{\phi} \cdot \sin(\theta)$$

$$\Gamma_{bx} = -L_{bg} \cdot (\ddot{\phi} \cdot \cos(\phi) - \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\phi))$$

$$\Gamma_{by} = -R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta) + L_{ag} (\ddot{\phi} \cdot \sin(\phi) + \dot{\phi}^2 \cdot \cos(\phi))$$

Donc:

$$Y_B = -Y_p + M_p \cdot \Gamma_{py}$$

$$Y_A = -Y_B + M_b \cdot \Gamma_{by}$$

$$X_A = (L_{bg} (M_b \cdot \frac{L_{bg}}{L} \cdot R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\theta) + Y_B \cdot \sin(\phi)) - L_{ag} \cdot Y_A \cdot \sin(\phi) - \phi \cdot I_z) \frac{1}{L \cdot \cos(\phi)}$$

$$X_B = -X_A + M_b \cdot \Gamma_{bx}$$

$$X_C = X_B$$

III-4.1. CALCUL DES EFFORTS DUS AUX GAZ:

Pour obtenir des efforts dus aux gaz, il suffit d'égaliser la masse du piston ainsi que la masse et le moment d'inertie de la bielle à zéro, donc:

$$Y_{Bg} = -Y_p$$

$$Y_{Ag} = -Y_p$$

$$X_{Ag} = -Y_p \cdot \tan(\phi)$$

$$X_{Bg} = -X_{Ag}$$

$$X_{Cg} = X_{Bg}$$

III-4.2. CALCUL DES EFFORTS DUS AUX INERTIE:

pour obtenir des efforts dus aux inertie, il suffit d'égaliser la pression des gaz à zéro, donc:

$$Y_{Bi} = M_p \cdot \Gamma_{py}$$

$$Y_{Ai} = -Y_{Bi} + M_b \cdot \Gamma_{by}$$

$$X_{Ai} = (L_{bg} (M_b \cdot \frac{L_{bg}}{L} \cdot R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\theta) + Y_{Bi} \cdot \sin(\phi)) - L_{ag} \cdot Y_{Ai} \cdot \sin(\phi) - \phi \cdot I_z) \frac{1}{L \cdot \cos(\phi)}$$

$$Y_{Ai} = -X_{Ai} + M_b \cdot \Gamma_{bx}$$

$$X_{Ci} = X_{Bi}$$



DYNAMIQUE des moteurs en V

CALCUL DYNAMIQUE DES MOTEURS EN V

III-1. INTRODUCTION:

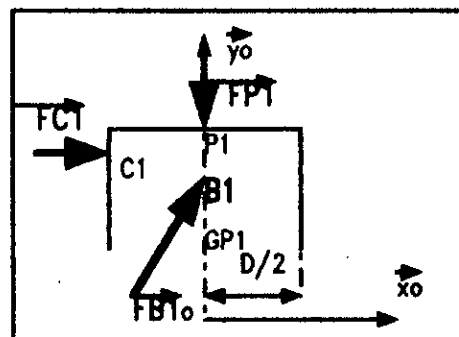
L'étude dynamique a pour but de définir les efforts dûs aux liaisons ou au contact piston sur chemise, en fonction du cycle moteur, on définit les efforts aux points caractéristiques. L'étude du type de liaisons (supposées parfaites), entraîne la connaissance du torseur dynamique et donc les composantes des actions. Celles-ci sont définies sur la bielle, la biellette et les pistons ainsi que sur le maneton du vilebrequin.

Le bilan global des forces ainsi que les équations générales de la dynamique conduisent à un système d'équations qui permet de définir la résultante des efforts. Il est à noter que toute les efforts sont exprimées dans le repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Indices utilisés:

- p1: piston côté bielle
- p2: piston côté biellette
- b1: bielle
- b2: biellette
- c1: chemise côté bielle
- c2: chemise côté biellette
- g : gaz
- v : vilebrequin.

III-2. ETUDE DYNAMIQUE DU PISTON 1 (côté bielle): (fig 15)



(Fig.15) piston cote bielle

i)- Action de la bielle sur le piston 1 au point B1:

-*- Torseur au point B1: $\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{b1/p1} \\ \vec{M}_{b1/p1} \end{array} \right\}_{B1}$

avec $\vec{F}_{(b1/p1, B1)} = \begin{Bmatrix} X_{B1} \\ Y_{B1} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{array}$; $\vec{M}_{(b1/p1, B1)} = \vec{0}$

$\vec{F}_{(b1/p1, B1)}$: effort de la bielle sur le piston 1 au point B1;

$\vec{M}_{(b1/p1, B1)}$: moment de l'effort de la bielle sur le piston 1 au point B1.

ii)- Action de la chemise sur le piston 1 au point C1:

-*- Torseur au point C1: $\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{c1/p1} \\ \vec{M}_{c1/p1} \end{array} \right\}_{C1}$

avec $\vec{F}_{(c1/p1, C1)} = \begin{Bmatrix} X_{C1} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{array}$; $\vec{M}_{(c1/p1, C1)} = \vec{0}$

$\vec{F}_{(c1/p1, C1)}$: effort de la chemise sur le piston 1 au point C1;

$\vec{M}_{(c1/p1, C1)}$: moment de l'effort chemise sur le piston 1 au point C1

iii)- Action des gaz sur le piston au point P1:

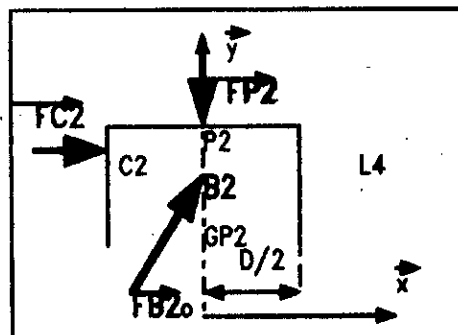
-*- Torseur au point P1: $\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{g/p1} \\ \vec{M}_{g/p1} \end{array} \right\}_{P1}$

avec $\vec{F}_{(g/p1, P1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -Y_{p1} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{array}$; $\vec{M}_{(g/p1, P1)} = \vec{0}$

$\vec{F}_{(g/p1, P1)}$: effort des gaz sur le piston 1 au point P1;

$\vec{M}_{(g/p1, P1)}$: moment de l'effort des gaz sur le piston 1 au point P1.

III-3. ETUDE DYNAMIQUE DU PISTON 2 (côté bielle): (fig 16)



(Fig 16) piston cote bielle

i)- Action de la bielle sur le piston 2 au point B2:

-*- Torseur au point B2: $\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{b2/p2} \\ \vec{M}_{b2/p2} \end{array} \right\}_{B2}$

$$\text{avec } \vec{F}_{(b2/p2, B2)} = \begin{Bmatrix} XB2 \\ YB2 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix} = \begin{Bmatrix} XB2 \cdot \cos(\beta) - YB2 \cdot \sin(\beta) \\ XB2 \cdot \sin(\beta) + YB2 \cdot \cos(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$\vec{M}_{(b2/p2, B2)} = \vec{0}$$

$\vec{F}_{(b2/p2, B2)}$: effort de la bielle sur le piston 2 au point B2;

$\vec{M}_{(b2/p2, B2)}$: moment de l'effort de la bielle sur le piston 2 au point B2.

ii)- Action de la chemise sur le piston 2 au point C2:

-*- Torseur au point C2: $\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{c2/p2} \\ \vec{M}_{c2/p2} \end{array} \right\}_{C2}$

$$\text{avec } \vec{F}_{(c2/p2, C2)} = \begin{Bmatrix} XC2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix} = \begin{Bmatrix} XC2 \cdot \cos(\beta) \\ XC2 \cdot \sin(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$\vec{M}_{(c2/p2, C2)} = \vec{0}$$

$\vec{F}_{(c2/p2, C2)}$: effort de la chemise sur le piston 2 au point C2;

$\vec{M}_{(c2/p2, C2)}$: moment de l'effort chemise sur le piston 2 au point C2.

iii)- Action des gaz sur le piston 2 au point P2:

-*- Torseur au point P2: $\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{g/p2} \\ \vec{M}_{g/p2} \end{array} \right\}_{P2}$

$$\text{avec } \vec{F}_{(g/p2, P2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -Yp2 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix} = \begin{Bmatrix} Yp2 \cdot \sin(\beta) \\ -Yp2 \cdot \cos(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$\vec{M}_{(g/p2, P2)} = \vec{0}$$

$\vec{F}_{(g/p2, P2)}$: effort des gaz sur le piston 2 au point P2;

$\vec{M}_{(g/p2, P2)}$: moment de l'effort des gaz sur le piston 2 au point

P2

i)- Action de la bielle sur le piston 2 au point B2:

-*- Torseur au point B2: $\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{b2/p2} \\ \vec{M}_{b2/p2} \end{array} \right\}_{B2}$

$$\text{avec } \vec{F}_{(b2/p2, B2)} = \begin{Bmatrix} X_{B2} \\ Y_{B2} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix} = \begin{Bmatrix} X_{B2} \cdot \cos(\beta) - Y_{B2} \cdot \sin(\beta) \\ X_{B2} \cdot \sin(\beta) + Y_{B2} \cdot \cos(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix}$$

$$\vec{M}_{(b2/p2, B2)} = \vec{0}$$

$\vec{F}_{(b2/p2, B2)}$: effort de la bielle sur le piston 2 au point B2;

$\vec{M}_{(b2/p2, B2)}$: moment de l'effort de la bielle sur le piston 2 au point B2.

ii)- Action de la chemise sur le piston 2 au point C2:

-*- Torseur au point C2: $\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{c2/p2} \\ \vec{M}_{c2/p2} \end{array} \right\}_{C2}$

$$\text{avec } \vec{F}_{(c2/p2, C2)} = \begin{Bmatrix} X_{C2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix} = \begin{Bmatrix} X_{C2} \cdot \cos(\beta) \\ X_{C2} \cdot \sin(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix}$$

$$\vec{M}_{(c2/p2, C2)} = \vec{0}$$

$\vec{F}_{(c2/p2, C2)}$: effort de la chemise sur le piston 2 au point C2;

$\vec{M}_{(c2/p2, C2)}$: moment de l'effort chemise sur le piston 2 au point C2.

iii)- Action des gaz sur le piston 2 au point P2:

-*- Torseur au point P2: $\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{g/p2} \\ \vec{M}_{g/p2} \end{array} \right\}_{P2}$

$$\text{avec } \vec{F}_{(g/p2, P2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -Y_{p2} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix} = \begin{Bmatrix} Y_{p2} \cdot \sin(\beta) \\ -Y_{p2} \cdot \cos(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix}$$

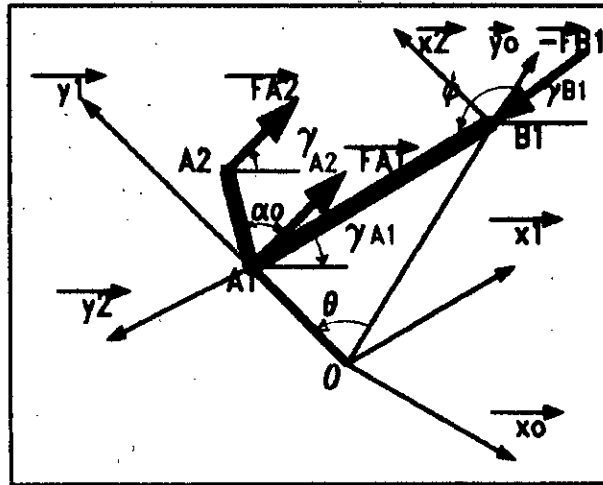
$$\vec{M}_{(g/p2, P2)} = \vec{0}$$

$\vec{F}_{(g/p2, P2)}$: effort des gaz sur le piston 2 au point P2;

$\vec{M}_{(g/p2, P2)}$: moment de l'effort des gaz sur le piston 2 au point

P2

III-3. ETUDE DYNAMIQUE DE LA BIELLE: (Fig 17)



(Fig 17) Action mécanique sur la bielle

i)- Action du piston 1 sur la bielle au point B1:

-- Torseur au point B1: $\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{p1/b1} \\ \vec{M}_{p1/b1} \end{array} \right\}_{B1}$

avec $-\vec{F}_{(p1/b1, B1)} = \begin{pmatrix} -XB1 \\ -YB1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$; $\vec{M}_{(p1/b1, B1)} = \vec{0}$

$\vec{F}_{(c2/p2, c2)}$: effort du piston 1 sur la bielle au point B1;

$\vec{M}_{(c2/p2, c2)}$: moment de l'effort piston 1 sur la bielle au point B1.

ii)- Action du vilebrequin sur la bielle au point A1:

-- Torseur au point A1: $\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{v/b1} \\ \vec{M}_{v/b1} \end{array} \right\}_{A1}$

avec $\vec{F}_{(v/b1, A1)} = \begin{pmatrix} XA1 \\ YA1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$; $\vec{M}_{(v/b1, A1)} = \vec{0}$

$\vec{F}(v/b1,A1)$: effort du vilebrequin sur la bielle au point A1;

$\vec{M}(v/b1,A1)$: moment de l'effort vilebrequin sur la bielle au point A1.

iii)- Action de la biellette sur la bielle au point A2:

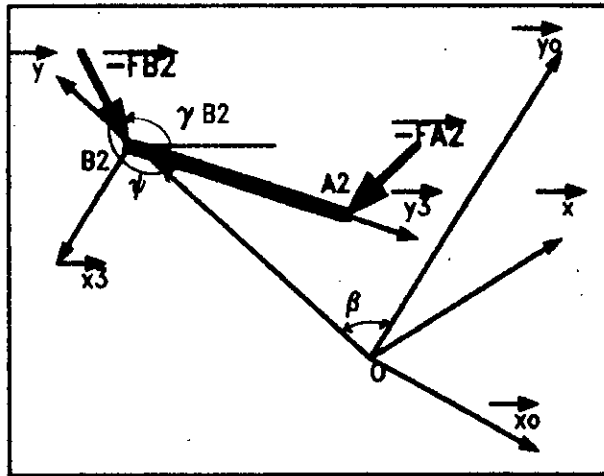
-*- Torseur au point A2: $\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{b2/b1} \\ \vec{M}_{b2/b1} \end{array} \right\}_{A2}$

avec $\vec{F}(b2/b1,A2) = \begin{Bmatrix} X_{A2} \\ Y_{A2} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$; $\vec{M}(b2/b1,A2) = \vec{0}$

$\vec{F}(b2/b1,A2)$: effort de la biellette sur la bielle au point A2;

$\vec{M}(b2/b1,A2)$: moment de l'effort biellette sur bielle au point A2.

III-4. ETUDE DYNAMIQUE DE LA BIELLETTE: (fig 18)



(fig 18) Action mecanique sur la biellette

i)- Action de la bielle sur la biellette au point A2:

-*- Torseur au point A2: $\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{b1/b2} \\ \vec{M}_{b1/b2} \end{array} \right\}_{A2}$

avec $-\vec{F}(b1/b2,A2) = \begin{Bmatrix} -X_{A2} \\ -Y_{A2} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -X_{A2} \cos(\beta) + Y_{A2} \sin(\beta) \\ -X_{A2} \sin(\beta) - Y_{A2} \cos(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$

$\vec{M}(b1/b2,A2) = \vec{0}$

$\vec{F}_{(b_1/b_2, A_2)}$: effort de la bielle sur la biellette au point A2;

$\vec{M}_{(b_1/b_2, A_2)}$: moment de l'effort bielle sur biellette au point A2.

ii)- Action du piston 2 sur la biellette au point B2:

-*- Torseur au point B2: $\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{p2/b2} \\ \vec{M}_{p2/b2} \end{array} \right\}_{B_2}$

avec $-\vec{F}_{(p2/b2, B_2)} = \begin{Bmatrix} -XB_2 \\ -YB_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix} = \begin{Bmatrix} -XB_2 \cos(\beta) + YB_2 \sin(\beta) \\ -XB_2 \sin(\beta) - YB_2 \cos(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$

$$\vec{M}_{(p2/b2, B_2)} = \vec{0}$$

$\vec{F}_{(b_1/b_2, A_2)}$: effort du piston 2 sur la biellette au point B2;

$\vec{M}_{(b_1/b_2, A_2)}$: moment de l'effort piston sur la biellette au point B2.

III-5. EQUATION DE LA DYNAMIQUE:

III-5.1. Principe fondamental:

La somme vectorielle des forces exterieures appliquees a un solide est egale a la quantite d'acceleration.

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{\Gamma}$$

L'application du principe fondamental aux differents organes du moteur bielle biellette, nous donne:

a)- Piston 1:

$$\vec{F}_{b1/b1} + \vec{F}_{c1/p1} + \vec{F}_{g/p1} = M_{p1} \cdot \vec{\Gamma}_{op1} \quad (3.16)$$

b)- Piston 2:

$$\vec{F}_{b2/p2} + \vec{F}_{c2/p2} + \vec{F}_{g/p2} = M_{p2} \cdot \vec{\Gamma}_{op2} \quad (3.17)$$

c)- Bielle :

$$\vec{F}_{p1/b1} + \vec{F}_{v/b1} + \vec{F}_{b2/b1} = M_{b1} \cdot \vec{\Gamma}_{ob1} \quad (3.18)$$

d)- Biellette:

$$\vec{F}_{p2/b2} + \vec{F}_{b1/b2} = M_{b2} \cdot \vec{\Gamma}_{ob2} \quad (3.19)$$

III-5.2. MOMENT DYNAMIQUE:

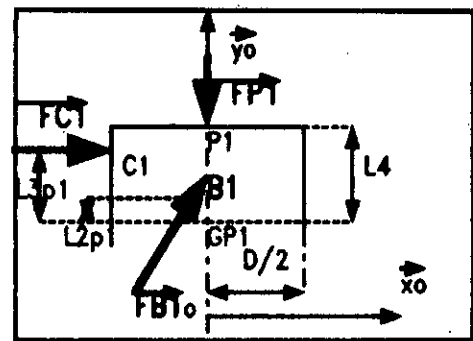
Le moment dynamique est la dérivée du moment cinétique appliqué au centre d'inertie d'un solide est égale au moment dynamique des forces extérieures appliquées au même point:

$$\vec{\delta\alpha} = \frac{d(\vec{\sigma\alpha})}{dt} = \sum \vec{MG}(\vec{F}_{ext}) \quad (3.20)$$

L'application du moment dynamique aux différents organes du moteur bielle biellette, nous donne:

a)- Piston 1: (fig 19)

Le piston n'a aucune rotation par rapport au repère fixe, son vecteur rotation instantané est donc nul, ce qui conduit au moment dynamique nul: $\vec{\delta\alpha} = \vec{0}$



(fig 19) piston cote bielle

Le moment dynamique des efforts extérieures appliquées au point Gp1 est:

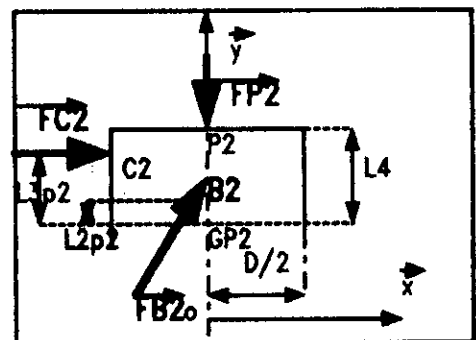
$$\vec{M}(\vec{F}_{ext}/Gp1) = -Lz_{p1}.XB1.\vec{z}_0 - Lsp1.XC1.\vec{z}_0 = \vec{0}$$

Ainsi

$$Lz_{p1}.XB1 + Lsp1.XC1 = 0 \quad (3.21)$$

b)- Piston 2: (fig 20)

Par analogie au piston 1, le piston 2 a:



(fig 20) piston cote biellette

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M}(\overrightarrow{F_{ext}}/Gp2) &= -L2p2.XB2.\vec{z}_0 - L3p2.XC2.\vec{z}_0 = \vec{0} \\ L2p2.XB2 + L3p2.XC2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

c)- Bielle: (fig 17)

Le vecteur rotation instantanée de la bielle par rapport au repère fixe est:

$$\overrightarrow{\Omega}(b1/o) = \overrightarrow{\Omega}(z/o) = \dot{\phi}.\vec{z}_2 = \dot{\phi}.\vec{z}_0$$

Le tenseur d'inertie de la bielle par rapport à son centre de gravité dans le repère fixe est donné par:

$$\overrightarrow{I}(b1/G1)(B,x2,y2,z2) = \begin{bmatrix} I_{x2} & -I_{x2y2} & -I_{x2z2} \\ -I_{y2x2} & I_{y2} & -I_{y2z2} \\ -I_{z2x2} & -I_{z2y2} & I_{z2} \end{bmatrix}$$

Le moment cinétique de la bielle par rapport à G1 dans le repère fixe s'écrira alors:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\sigma}(b1/G1) &= \begin{bmatrix} I_{x2} & -I_{x2y2} & -I_{x2z2} \\ -I_{y2x2} & I_{y2} & -I_{y2z2} \\ -I_{z2x2} & -I_{z2y2} & I_{z2} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -I_{x2z2}.\dot{\phi} \\ -I_{y2z2}.\dot{\phi} \\ I_{z2}.\dot{\phi} \end{Bmatrix} \\ \overrightarrow{\sigma}(b1/G1) &= \begin{Bmatrix} -I_{x2z2}.\dot{\phi}.\cos(\theta) + I_{y2z2}.\dot{\phi}.\sin(\theta) \\ -I_{x2z2}.\dot{\phi}.\sin(\theta) - I_{y2z2}.\dot{\phi}.\cos(\theta) \\ I_{z2}.\dot{\phi} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

D'où le moment dynamique exprimé dans le repère fixe est:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta}(b1/G1) &= \begin{Bmatrix} -I_{x2z2}(\dot{\phi}.\cos(\theta) - \dot{\theta}.\dot{\phi}.\sin(\theta)) + \\ -I_{x2z2}(\dot{\phi}.\sin(\theta) + \dot{\theta}.\dot{\phi}.\cos(\theta)) - \\ I_{z2}.\dot{\phi} \end{Bmatrix} \\ & \quad \begin{Bmatrix} I_{y2z2}(\dot{\phi}.\sin(\theta) + \dot{\phi}.\dot{\theta}.\cos(\theta)) \\ I_{y2z2}(\dot{\phi}.\cos(\theta) - \dot{\phi}.\dot{\theta}.\sin(\theta)) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

c)-1. calcul des moments (bielle):

Le moment des efforts exterieures appliquees sur la bielle par rapport a son centre de gravite est donne par:

$$\vec{M}(\vec{F}_{ext}/ob_1) = \vec{Gb_1B_1} \wedge \vec{-F(p_1/b_1)} + \vec{Gb_1A_1} \wedge \vec{F(v/b_1)} + \vec{Gb_1A_2} \wedge \vec{F(b_2/b_1)} \quad (3.23)$$

i)- Moment de l'effort du piston 1 sur la bielle par rapport au centre de gravite de la bielle:

$$\vec{M}(\vec{F}(p_1/b_1)/ob_1) = \vec{Gb_1B_1} \wedge \vec{-F(p_1/b_1)} \quad (3.24)$$

$$\vec{M}(\vec{F}(p_1/b_1)/ob_1) = \begin{Bmatrix} -DG_1 \sin(\phi + \alpha_0) + L_1 \sin(\phi) \\ DG_1 \cos(\phi + \alpha_0) - L_1 \cos(\phi) \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix} \wedge \begin{Bmatrix} -XB_1 \\ -YB_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix}$$

$$\vec{M}(\vec{F}(p_1/b_1)/ob_1) = (YB_1(DG_1 \sin(\phi + \alpha_0) - L_1 \sin(\phi)) + XB_1(DG_1 \cos(\phi + \alpha_0) - L_1 \cos(\phi))) \vec{z}_o$$

ii)- Moment de l'effort de la manivelle sur la bielle par rapport au centre de gravite de la bielle:

$$\vec{M}(\vec{F}(v/b_1)/ob_1) = \vec{Gb_1A_1} \wedge \vec{F(v/b_1)} \quad (3.25)$$

$$\vec{M}(\vec{F}(v/b_1)/ob_1) = \begin{Bmatrix} -DG_1 \sin(\phi + \alpha_0) \\ DG_1 \cos(\phi + \alpha_0) \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix} \wedge \begin{Bmatrix} XA_1 \\ YA_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix}$$

$$\vec{M}(\vec{F}(v/b_1)/ob_1) = (-XA_1(DG_1 \cos(\phi + \alpha_0)) - YA_1(DG_1 \sin(\phi + \alpha_0))) \vec{z}_o$$

iii)- Moment de l'effort de la bielle sur la bielle par rapport au centre de gravite de la bielle:

$$\vec{M}(\vec{F}(b_2/b_1)/ob_1) = \vec{Gb_1A_2} \wedge \vec{F(b_2/b_1)} \quad (3.26)$$

$$\vec{M}(\vec{F}(b_2/b_1)/ob_1) = \begin{Bmatrix} R_1 \sin(\phi + \alpha_0) - DG_1 \sin(\phi + \alpha_0) \\ -R_1 \cos(\phi + \alpha_0) + DG_1 \cos(\phi + \alpha_0) \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix} \wedge \begin{Bmatrix} XA_2 \\ YA_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix}$$

$$\vec{M}(P(b_2/b_1)/a_1) = (YA_2(R_1 \sin(\phi + \alpha_0) - D\theta_1 \sin(\phi + \alpha_0)) + \\ XA_2(R_1 \cos(\phi + \alpha_0) - D\theta_1 \cos(\phi + \alpha_0)) \cdot \vec{z}_0$$

d)- *Biellette*: (fig 18)

Le vecteur rotation instantané de la biellette par rapport au repère fixe est donné par:

$$\vec{\Omega}(b_2/o) = \vec{\Omega}(x_3/o) = \psi \cdot \vec{z}_3 = \psi \cdot \vec{z}_0$$

La biellette possède deux plans de symétries x_3z_3 et y_3z_3 , donc tous les produits d'inertie par rapport aux 3 plans (x_3y_3 , y_3z_3 , z_3x_3) sont nuls:

$$c\text{-à-d} \quad I_{x_3y_3} = I_{y_3z_3} = I_{z_3x_3} = 0$$

Le tenseur d'inertie de la biellette est alors:

$$\overline{I}(b_2/o_2)/(o_2, x_3, y_3, z_3) = \begin{bmatrix} I_{x_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_3} \end{bmatrix}$$

Le vecteur moment cinétique de la biellette par rapport à G_2 dans le repère fixe est:

$$\vec{\sigma}(b_2/o_2) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{z_3} \cdot \psi \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

d'où le moment dynamique obtenu par dérivation du vecteur moment cinétique par rapport au temps:

$$\vec{\delta}(b_2/o_2) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{z_3} \cdot \dot{\psi} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

d)-1. calcul des moments (bielle):

Les moments des forces extérieures appliquées sur la bielle sont calculées par rapport au centre de gravité G₂, donc:

$$\vec{M}(\vec{F}_{\text{ext}}/G_2) = \vec{G}_2 \vec{B}_2 \wedge \vec{F}(\rho_2/b_2) + \vec{G}_2 \vec{A}_2 \wedge \vec{F}(b_1/b_2) \quad (3.27)$$

i)- Moment de l'effort du piston 2 sur la bielle par rapport au centre de gravité de la bielle:

$$\vec{M}(\vec{F}(\rho_2/b_2)/G_2) = \vec{G}_2 \vec{B}_2 \wedge \vec{F}(\rho_2/b_2) \quad (3.28)$$

$$= \begin{pmatrix} -DG_2 \cdot \sin(\psi + \delta\alpha + \beta) + L_2 \cdot \sin(\psi + \beta) \\ DG_2 \cdot \cos(\psi + \delta\alpha + \beta) - L_2 \cdot \cos(\psi + \beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \wedge$$

$$\begin{pmatrix} -XB_2 \cdot \cos(\beta) + YB_2 \cdot \sin(\beta) \\ -XB_2 \cdot \sin(\beta) - YB_2 \cdot \cos(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$\vec{M}(\vec{F}(\rho_2/b_2)/G_2) = (XB_2(DG_2 \cdot \cos(\psi + \delta\alpha) - L_2 \cdot \cos(\psi)) + YB_2(DG_2 \cdot \sin(\psi + \delta\alpha) - L_2 \cdot \sin(\psi))) \cdot \vec{z}_0$$

ii)- Moment de l'effort de la bielle sur la bielle par rapport au centre de gravité de la bielle, donc:

$$\vec{M}(\vec{F}(b_1/b_2)/G_2) = \vec{G}_2 \vec{A}_2 \wedge \vec{F}(b_1/b_2) \quad (3.29)$$

$$= \begin{pmatrix} -DG_2 \cdot \sin(\psi + \delta\alpha + \beta) \\ DG_2 \cdot \cos(\psi + \delta\alpha + \beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \wedge$$

$$\begin{pmatrix} -XA_2 \cdot \cos(\beta) + YA_2 \cdot \sin(\beta) \\ -XA_2 \cdot \sin(\beta) - YA_2 \cdot \cos(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$\vec{M}(\vec{F}(b_1/b_2)/G_2) = (XA_2(DG_2 \cdot \cos(\psi + \delta\alpha)) - YA_2(DG_2 \cdot \sin(\psi + \delta\alpha))) \cdot \vec{z}_0$$

III-6. EQUATIONS SCALAIRES DU MOTEUR EN V (bielle-biellette):

III-6.1. Equation scalaire du piston 1:

D'après (3.16) $\vec{F}_{b1/b1} + \vec{F}_{c1/p1} + \vec{F}_{g/p1} = M_{p1} \cdot \vec{\Gamma}_{\alpha p1}$

$$\begin{Bmatrix} XB_1 \\ YB_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix} + \begin{Bmatrix} XC_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -Y_{p1} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix} = M_{p1} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \Gamma_{\alpha p1 y_o} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix}$$

avec: $\Gamma_{\alpha p1 y_o} = -R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta) + L_1 \cdot \ddot{\phi} \cdot \sin(\phi) + L_1 \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos(\phi)$

la projection sur les axes, nous donne:

- \vec{x}_o : $XB_1 + XC_1 = 0$ [1]

- \vec{y}_o : $YB_1 - Y_{p1} = M_{p1} \cdot \Gamma_{\alpha p1 y_o}$ [2]

- \vec{z}_o : $0 = 0$

D'après (3.20), on a:

$$L_{z p2} \cdot XB_1 + L_{z p1} \cdot XC_1 = 0$$
 [3]

III-6.2. Equation scalaire de la bielle:

D'après (3.18): $\vec{F}_{p1/b1} + \vec{F}_{v/b1} + \vec{F}_{b2/b1} = M_{b1} \cdot \vec{\Gamma}_{\alpha b1}$

$$\begin{Bmatrix} -XB_1 \\ -YB_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix} + \begin{Bmatrix} XA_1 \\ YA_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix} + \begin{Bmatrix} XA_2 \\ YA_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix} = M_{b1} \cdot \begin{Bmatrix} \Gamma_{\alpha b1 x_o} \\ \Gamma_{\alpha b1 y_o} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_o \\ \vec{y}_o \\ \vec{z}_o \end{matrix}$$

avec: $\Gamma_{\alpha b1 x_o} = R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) + DG_1 \cdot \ddot{\phi} \cdot \cos(\phi + \alpha_0) - DG_1 \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\phi + \alpha_0)$

$$\Gamma_{\alpha b1 y_o} = -R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta) + DG_1 \cdot \ddot{\phi} \cdot \sin(\phi + \alpha_0) + DG_1 \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos(\phi + \alpha_0)$$

La projection sur les axes, nous donne:

- \vec{x}_o : $-XB_1 + XA_1 + XA_2 = M_{b1} \cdot \Gamma_{\alpha b1 x_o}$ [4]

- \vec{y}_o : $-YB_1 + YA_1 + YA_2 = M_{b1} \cdot \Gamma_{\alpha b1 y_o}$ [5]

- \vec{z}_o : $0 = 0$

D'après (3.20), on a:

$$I_{z z} \cdot \ddot{\phi} = YB_1 \cdot E_1 + XB_1 \cdot E_2 - YA_1 \cdot E_3 - XA_1 \cdot E_4 + YA_2 \cdot E_5 + XA_2 \cdot E_6$$
 [6]

avec:

$$E_1 = DG_1 \cdot \sin(\phi + \alpha_0) - L_1 \cdot \sin(\phi)$$

$$E_2 = DG_1 \cdot \cos(\phi + \alpha_0) - L_1 \cdot \cos(\phi)$$

$$E_3 = DG_1 \cdot \sin(\phi + \alpha_0)$$

$$E_4 = DG_1 \cos(\phi + \alpha_0)$$

$$E_5 = R_1 \sin(\phi + \alpha_0) - DG_1 \sin(\phi + \alpha_0)$$

$$E_6 = R_1 \cos(\phi + \alpha_0) - DG_1 \cos(\phi + \alpha_0)$$

III-6.2. Equation scalaire du piston 2:

$$\text{D'après (3.17)} \quad \vec{F}_{b_2/p_2} + \vec{F}_{c_2/p_2} + \vec{F}_{g/p_2} = M_{p_2} \vec{\Gamma}_{p_2}$$

$$\begin{Bmatrix} XB_2 \cos(\beta) - YB_2 \sin(\beta) \\ XB_2 \sin(\beta) + YB_2 \cos(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} + \begin{Bmatrix} XC_2 \cos(\beta) \\ XC_2 \sin(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} + \begin{Bmatrix} Yp_2 \sin(\beta) \\ -Yp_2 \cos(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = M_{p_2} \begin{Bmatrix} \Gamma_{p_2 x_0} \\ \Gamma_{p_2 y_0} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

avec:

$$\begin{cases} \Gamma_{p_2 x_0} = R \cdot \theta^2 \sin(\theta) + R_1 \cdot \phi \cdot \cos(\phi + \alpha_0) - R_1 \cdot \phi^2 \sin(\phi + \alpha_0) + \\ \quad L_2 \cdot \psi \cdot \cos(\psi + \beta) - L_2 \cdot \psi^2 \sin(\psi + \beta) \\ \Gamma_{p_2 y_0} = -R \cdot \theta^2 \cos(\theta) + R_1 \cdot \phi \cdot \sin(\phi + \alpha_0) - R_1 \cdot \phi^2 \cos(\phi + \alpha_0) + \\ \quad L_2 \cdot \psi \cdot \sin(\psi + \beta) + L_2 \cdot \psi^2 \cos(\psi + \beta) \end{cases}$$

La projection sur les axes, nous donne:

$$- \vec{x}_0 : XB_2 \cos(\beta) - YB_2 \sin(\beta) + XC_2 \cos(\beta) + Yp_2 \sin(\beta) = M_{p_2} \Gamma_{p_2 x_0} \quad [7]$$

$$- \vec{y}_0 : XB_2 \sin(\beta) + YB_2 \cos(\beta) + XC_2 \sin(\beta) - Yp_2 \cos(\beta) = M_{p_2} \Gamma_{p_2 y_0} \quad [8]$$

$$- \vec{z}_0 : \quad \quad \quad 0 = 0$$

D'après (3.22), on a:

$$L_{2p_2} \cdot XB_2 + L_{2c_2} \cdot XC_2 = 0 \quad [9]$$

III-6.3. Equation scalaire de la bielle:

$$\text{D'après (3.19)} \quad \vec{F}_{p_2/b_2} + \vec{F}_{b_1/b_2} = M_{b_2} \vec{\Gamma}_{b_2}$$

$$\begin{Bmatrix} -XB_2 \cos(\beta) + YB_2 \sin(\beta) \\ -XB_2 \sin(\beta) - YB_2 \cos(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} + \begin{Bmatrix} -XA_2 \cos(\beta) + YA_2 \sin(\beta) \\ -XA_2 \sin(\beta) - YA_2 \cos(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = M_{b_2} \begin{Bmatrix} \Gamma_{b_2 x_0} \\ \Gamma_{b_2 y_0} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

avec :

$$\begin{aligned}\Gamma_{b2x0} &= R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) + R_1 \cdot \ddot{\phi} \cdot \cos(\phi + \alpha_0) - R_1 \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\phi + \alpha_0) + \\ & DG_2 \cdot \dot{\psi} \cdot \cos(\psi + \delta\alpha + \beta) - DG_2 \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \sin(\psi + \delta\alpha + \beta) \\ \Gamma_{b2y0} &= -R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta) + R_1 \cdot \ddot{\phi} \cdot \sin(\phi + \alpha_0) - R_1 \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos(\phi + \alpha_0) + \\ & DG_2 \cdot \dot{\psi} \cdot \sin(\psi + \delta\alpha + \beta) + DG_2 \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \cos(\psi + \delta\alpha + \beta)\end{aligned}$$

la projection sur les axes, nous donne:

$$- \vec{x}_0: -XB_2 \cdot \cos(\beta) + YB_2 \cdot \sin(\beta) - XA_2 \cdot \cos(\beta) + YA_2 \cdot \sin(\beta) = Mb_2 \cdot \Gamma_{b2x0} \quad [10]$$

$$- \vec{y}_0: -XB_2 \cdot \sin(\beta) - YB_2 \cdot \cos(\beta) - XA_2 \cdot \sin(\beta) - YA_2 \cdot \cos(\beta) = Mb_2 \cdot \Gamma_{b2y0} \quad [11]$$

$$- \vec{z}_0: \quad \quad \quad 0 = 0$$

D'après (3.5), on a:

$$I_{z3} \ddot{\psi} = YB_2 \cdot E_7 + XB_2 \cdot E_8 + YA_2 \cdot E_9 + XA_2 \cdot E_{10} \quad [12]$$

avec:

$$E_7 = DG_2 \cdot \sin(\psi + \delta\alpha) - L_2 \cdot \sin(\psi)$$

$$E_8 = DG_2 \cdot \cos(\psi + \delta\alpha) - L_2 \cdot \cos(\psi)$$

$$E_9 = -DG_2 \cdot \sin(\psi + \delta\alpha)$$

$$E_{10} = DG_2 \cdot \cos(\psi + \delta\alpha)$$

Remarque: Nous avons maintenant un système d'équation de 12 équations à 12 inconnues. Avant de résoudre ces équations on peut remarqué que:

- les pistons p1 et p2 étant identiques, on prend:

$$Y_{p1} = Y_{p2} = Y_p$$

- Pour que les équations [1] et [3] soient compatibles, il faut que $L_{2p1} = L_{3p1}$.

- si $L_{2p2} = L_{3p2}$, l'équation [9] nous donne: $XC_2 = -XB_2$,

III-7. SOLUTION DES EQUATIONS:

$$YB_1 = Mp_1 \cdot \Gamma_{p1y_0} + Y_p$$

$$YB_2 = \frac{Mp_2 \cdot \Gamma_{p2y_0}}{\cos(\beta)} + Y_p$$

$$YA_2 = Mb_2(\sin(\beta) \cdot \Gamma_{ab2x_0} - \cos(\beta) \cdot \Gamma_{ab2y_0}) - YB_2$$

$$YA_1 = YB_1 - YA_2 + Mb_1 \cdot \Gamma_{ab1y_0}$$

$$XA_2 = (I_{z_3} \cdot \psi - YB_2 \cdot E_7 - YA_2 \cdot E_9 - E_8((YB_2 + YA_2) \cdot \tan(\beta) - \frac{Mb_2}{\cos(\beta)} \cdot \Gamma_{b2x_0})) \frac{1}{(E_{10} - E_8)}$$

$$XB_2 = (I_{z_3} \cdot \psi - YB_2 \cdot E_7 - YA_2 \cdot E_9 - XA_2 \cdot E_{10}) \frac{1}{E_8}$$

$$XA_1 = (E_2(Mb_1 \cdot \Gamma_{ab1x_0} - XA_2) + I_{z_2} \cdot \phi - YB_1 \cdot E_1 + YA_1 \cdot E_3 - YA_2 \cdot E_5 - XA_2 \cdot E_6) \frac{1}{(E_2 - E_4)}$$

$$XB_1 = XA_1 - Mb_1 \cdot \Gamma_{ab1x_0} + XA_2$$

$$XC_1 = -XB_1$$

$$XC_2 = -XB_2$$

$$L_{z_{p2}} = L_{s_{p2}} \text{ et } L_{z_{p1}} = L_{s_{p1}}$$

III-7.1. Calcul des efforts dus aux gaz:

Pour obtenir des efforts dus aux gaz, il suffit d'anuler les masses et les inerties à zéro ($M_{p1} = M_{p2} = I_{gz2} = I_{gz3} = 0$), donc:

$$YB_{10} = Y_p$$

$$YB_{20} = Y_p$$

$$YA_{20} = -YB_{20}$$

$$YA_{10} = YB_{10} - YA_{20}$$

$$XA_{20} = (-YB_{20} \cdot E_7 - YA_{20} \cdot E_9 - E_8((YB_{20} + YA_{20}) \cdot \tan(\beta))) \frac{1}{(E_{10} - E_8)}$$

$$XB_{20} = (-YB_{20} \cdot E_7 - YA_{20} \cdot E_9 - XA_{20} \cdot E_{10}) \frac{1}{E_8}$$

$$XA_{10} = (-E_2 \cdot XA_{20} - YB_{10} \cdot E_1 + YA_{10} \cdot E_3 - YA_{20} \cdot E_5 - XA_{20} \cdot E_6) \frac{1}{(E_2 - E_4)}$$

III-7.2. Calcul des efforts dûs aux gaz:

Pour obtenir des efforts dûs aux inerties, il suffit d'anuler la pression des gaz à zéro ($Y_p = 0$), donc:

$$Y_{B1i} = M_{p1} \cdot \Gamma_{p1y0}$$

$$Y_{B2i} = \frac{M_{p2} \cdot \Gamma_{p2y0}}{\cos(\beta)}$$

$$Y_{A2i} = M_{b2}(\sin(\beta) \cdot \Gamma_{ab2x0} - \cos(\beta) \cdot \Gamma_{ab2y0}) - Y_{B2i}$$

$$Y_{A1i} = Y_{B1i} - Y_{A2i} + M_{b1} \cdot \Gamma_{ab1y0}$$

$$X_{A2i} = \frac{(I_{z3} \cdot \psi - Y_{B2i} \cdot E_7 - Y_{A2i} \cdot E_8 - E_9((Y_{B2i} + Y_{A2i}) \cdot \tan(\beta) - \frac{M_{b2}}{\cos(\beta)} \cdot \Gamma_{b2x0}))}{(E_{10} - E_9)}$$

$$X_{B2i} = (I_{z3} \cdot \psi - Y_{B2i} \cdot E_7 - Y_{A2i} \cdot E_8 - X_{A2i} \cdot E_{10}) \frac{1}{E_9}$$

$$X_{A1i} = \frac{(E_2(M_{b1} \cdot \Gamma_{ab1x0} - X_{A2i}) + I_{z2} \cdot \phi - Y_{B1i} \cdot E_1 + Y_{A1i} \cdot E_3 - Y_{A2i} \cdot E_5 - X_{A2i} \cdot E_6)}{(E_2 - E_4)}$$



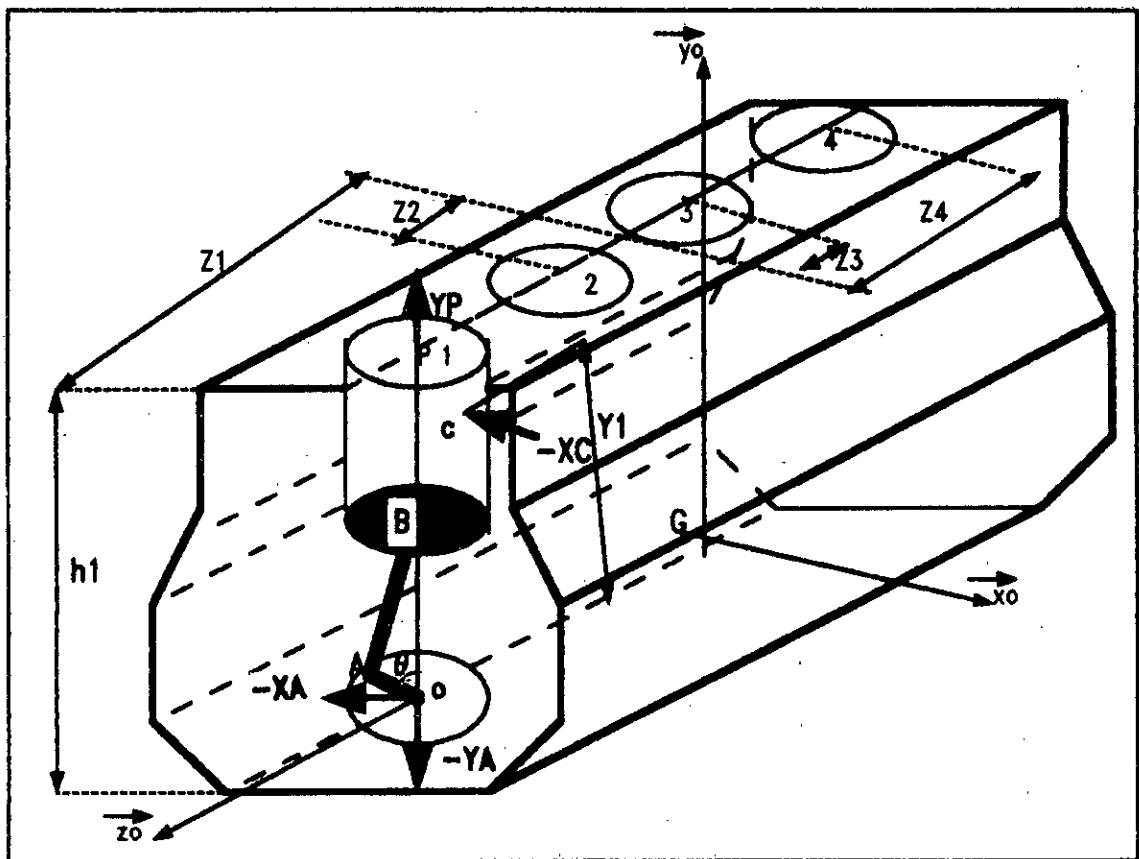
DYNAMIQUE
en un point G du
moteur

CALCUL DU TORSEUR DES ACTIONS MECANQUES EN UN POINT G DU MOTEUR

III-1. LES MOTEURS EN LIGNE

III-1.1. DEFINITION DES EFFORTS ET MOMENT SUR LE BLOC MOTEUR.

D'après l'étude dynamique qu'on a faite sur le système bielle piston, cette deuxième partie consiste à calculer les différents efforts et moments en un point G du moteur (l'axe de vilebrequin), pour cela on isole les bielles ainsi que les pistons qui se trouvent dans le bloc moteur voir figure (21).



(fig 21) Definition des efforts et des moments sur les trois axes

A/. DEFINITION DES EFFORTS SUR LE BLOC MOTEUR:

a)- Effort de tamis (ou de ballant): (F_x)C'est la resultante des efforts agissant sur le bloc moteur suivant l'axe \vec{x}_0 .b)- Effort de pilon (ou de rebondissement): (F_y)C'est la resultante des efforts agissant sur le bloc moteur suivant l'axe \vec{y}_0 .

B/. DEFINITION DES MOMENTS AGISSANT SUR LE BLOC MOTEUR:

a)- Moment de galop (ou de tangage): (M_x)C'est le moment des efforts agissant sur le bloc moteur autour de l'axe \vec{x}_0 .b)- Moment de lacet: (M_y)C'est le moment des efforts agissant sur le bloc moteur autour de l'axe \vec{y}_0 .c)- Moment de basculement (ou de roulis): (M_z)C'est le moment des efforts agissant sur le bloc moteur autour de l'axe \vec{z}_0 .

D'après la figure 21, nous retrouvons les efforts qui peuvent être représentés dans un repère fixe lié au bloc moteur ($G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$):

- * $-Y_p$: effort des gaz de combustion sur la culasse suivant l'axe \vec{y}_0 .
- * $-X_C$: effort du piston sur la chemise suivant \vec{x}_0 .
- * $-Y_A$: composante de l'effort de la bielle sur le vilebrequin suivant l'axe \vec{y}_0 .
- * $-X_A$: composante de l'effort de la bielle sur le vilebrequin suivant l'axe \vec{x}_0 .

Le torseur de ces efforts au point G peut être exprimé par:

$$\tau \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \vec{F}_{\text{mot}/\text{ext}} \\ \Sigma \vec{M}_{\text{mot}/\text{ext}} \end{array} \right\}_G$$

Avec

$$\Sigma \vec{F}_{(\text{mot}/\text{ext}, G)} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}; \quad \Sigma \vec{M}_{(\text{mot}/\text{ext}, G)} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

i)- Torseur des efforts au point G, dû au cylindre 1 :
il est donné par:

$$\Sigma \vec{F}_1(\text{mot}/\text{ext}, G) = \begin{Bmatrix} -XA_1 - XC_1 \\ -YA_1 + Y_{P_1} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$\Sigma \vec{M}_1(\text{mot}/\text{ext}, G) = \begin{Bmatrix} M_{1x} \\ M_{1y} \\ M_{1z} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Le calcul des moments M_{1x} , M_{1y} et M_{1z} est donné par:

1°)- Le moment dû à l'effort Y_{P_1} : $M_1(Y_{P_1}/G)$

$$\begin{aligned} \vec{M}_1(Y_{P_1}/G) &= \vec{GP}_1 \wedge \vec{YP}_1 = (\vec{GO}_1 + \vec{O_1P_1}) \wedge \vec{YP}_1 \\ &= (Z_1 \vec{z}_0 + h_1 \vec{y}_0) \wedge Y_{P_1} \vec{y}_0 \end{aligned}$$

$$\vec{M}_1(Y_{P_1}/G) = -Z_1 Y_{P_1} \vec{x}_0$$

2°)- Le moment dû à l'effort XC_1 : $M_1(XC_1/G)$

$$\begin{aligned} \vec{M}_1(XC_1/G) &= \vec{GC}_1 \wedge \vec{XC}_1 = (\vec{GO}_1 + \vec{O_1C_1}) \wedge \vec{XC}_1 \\ &= (Z_1 \vec{z}_0 + Y_1 \vec{y}_0) \wedge -XC_1 \vec{y}_0 \end{aligned}$$

$$\vec{M}_1(XC_1/G) = -Z_1 XC_1 \vec{y}_0 + Y_1 XC_1 \vec{z}_0$$

3°)- Le moment dû à l'effort XA_1 : $M_1(XA_1/G)$

$$\begin{aligned} \vec{M}_1(XA_1/G) &= \vec{GO}_1 \wedge \vec{XA}_1 \\ &= Z_1 \vec{z}_0 \wedge -XA_1 \vec{x}_0 \end{aligned}$$

$$\vec{M}_1(XA_1/G) = -Z_1 XA_1 \vec{y}_0$$

4°)- Le moment dû à l'effort YA_1 : $M_1(YA_1/G)$

$$\begin{aligned} \vec{M}_1(YA_1/G) &= \vec{GO}_1 \wedge \vec{YA}_1 \\ &= Z_1 \vec{z}_0 \wedge -YA_1 \vec{y}_0 \end{aligned}$$

$$\vec{M}_1(YA_1/G) = Z_1 YA_1 \vec{x}_0$$

Donc:

* Le moment du cylindre 1 suivant \vec{x}_0 est:

$$\vec{M}_{1x_0} = Z_1(-Y_{P_1} + YA_1) \vec{x}_0$$

* Le moment du cylindre 1 suivant \vec{y}_0 est:

$$\vec{M}_{1y_0} = -Z_1(XC_1 + XA_1) \vec{y}_0$$

* Le moment du cylindre 1 suivant \vec{z}_0 est:

$$\vec{M}_{1z_0} = Y_1 \cdot X_{G1} \cdot z_0^{\rightarrow}$$

Avec le même calcul analogue, nous obtenons les torseurs des efforts au point G dûent aux cylindres 2, 3 et 4 dont les composantes sont exprimées par:

- cylindre 2:

$$\text{- effort: } \quad \Sigma \vec{F}_2(\text{mot/ext}, \theta) = \begin{Bmatrix} -X_{A2} - X_{C2} \\ -Y_{A2} + Y_{P2} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} x_0^{\rightarrow} \\ y_0^{\rightarrow} \\ z_0^{\rightarrow} \end{matrix}$$

$$\text{- moment: } \quad \begin{cases} \vec{M}_{2x_0} = Z_2(-Y_{P2} + Y_{A2})x_0^{\rightarrow} \\ \vec{M}_{2y_0} = -Z_2(X_{C2} + X_{A2})y_0^{\rightarrow} \\ \vec{M}_{2z_0} = Y_2 \cdot X_{C2} \cdot z_0^{\rightarrow} \end{cases}$$

- cylindre 3:

$$\text{- effort: } \quad \Sigma \vec{F}_3(\text{mot/ext}, \theta) = \begin{Bmatrix} -X_{A3} - X_{C3} \\ -Y_{A3} + Y_{P3} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} x_0^{\rightarrow} \\ y_0^{\rightarrow} \\ z_0^{\rightarrow} \end{matrix}$$

$$\text{- moment: } \quad \begin{cases} \vec{M}_{3x_0} = Z_3(-Y_{P3} + Y_{A3})x_0^{\rightarrow} \\ \vec{M}_{3y_0} = -Z_3(X_{C3} + X_{A3})y_0^{\rightarrow} \\ \vec{M}_{3z_0} = Y_3 \cdot X_{C3} \cdot z_0^{\rightarrow} \end{cases}$$

- cylindre 4:

$$\text{- effort: } \quad \Sigma \vec{F}_4(\text{mot/ext}, \theta) = \begin{Bmatrix} -X_{A4} - X_{C4} \\ -Y_{A4} + Y_{P4} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} x_0^{\rightarrow} \\ y_0^{\rightarrow} \\ z_0^{\rightarrow} \end{matrix}$$

$$\text{- moment: } \quad \begin{cases} \vec{M}_{4x_0} = Z_4(-Y_{P4} + Y_{A4})x_0^{\rightarrow} \\ \vec{M}_{4y_0} = -Z_4(X_{C4} + X_{A4})y_0^{\rightarrow} \\ \vec{M}_{4z_0} = Y_4 \cdot X_{C4} \cdot z_0^{\rightarrow} \end{cases}$$

Finalement on obtient les composantes du torseur des actions mécaniques en un point G du moteur en fonction de l'angle du vilebrequin, pour les J cylindres du moteur.

$$\Sigma \vec{F}(\theta)_{(\text{mot/ext}, \theta)} = \begin{Bmatrix} F_x(\theta) = \sum_{j=1}^{nc} [-X_{A(j, \theta)} - X_{C(j, \theta)}] \\ F_y(\theta) = \sum_{j=1}^{nc} [-Y_{A(j, \theta)} + Y_{P(j, \theta)}] \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} x_0^{\rightarrow} \\ y_0^{\rightarrow} \\ z_0^{\rightarrow} \end{matrix}$$

$$\Sigma \vec{M}(\theta)_{(mol/ext, \theta)} = \begin{cases} M_x(\theta) = \sum_{j=1}^{nc} z(j) [-Y_P(j, \theta) + Y_A(j, \theta)] \\ M_y(\theta) = \sum_{j=1}^{nc} z(j) [X_C(j, \theta) + X_A(j, \theta)] \\ M_z(\theta) = \sum_{j=1}^{nc} [Y_d(j, \theta) \cdot X_C(j, \theta)] \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

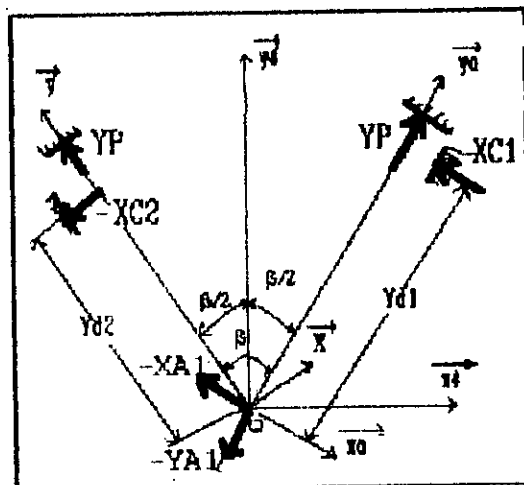
avec:

- $F_x(\theta)$: effort de tamis;
- $F_y(\theta)$: effort de pilon;
- $M_x(\theta)$: moment de galop;
- $M_y(\theta)$: moment de lacet;
- $M_z(\theta)$: moment de basculement.

III-2. LES MOTEURS EN V:

III-2.1. DEFINITION DES EFFORTS ET MOMENTS SUR LE BLOC MOTEURS:

Par analogue au moteur en ligne et d'après la fig(22), nous retrouvons les efforts qui peuvent être représentés dans un repère fixe lié au bloc moteur $(G, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$.



(fig 22) definition des efforts



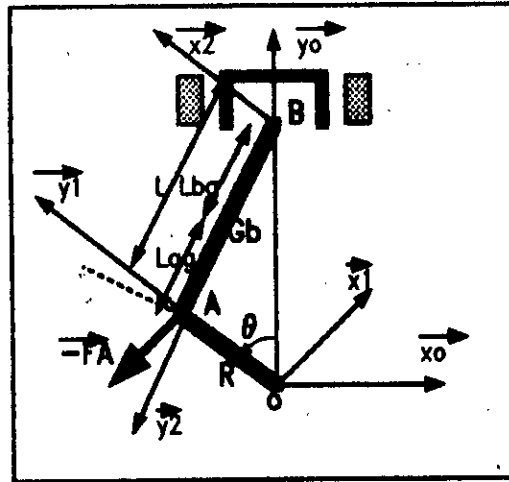
chapitre 4

COUPLE MOTEUR

IV-3. CALCUL DES COUPLES POUR LES MOTEURS EN LIGNE:

IV-3.1. Couple moteur pour un monocylindre:

Par définition, le couple moteur d'un monocylindre est le produit vectoriel de l'effort résultant de la bielle sur le maneton $-\vec{F}_A$ par le rayon vecteur \vec{OA} de la manivelle (fig 23), donc:



(Fig 23) Définition de couple moteur

$$\vec{CPt} = -\vec{F}_A \wedge \vec{OA}$$

avec

$$\vec{OA} = R \cdot \vec{y}_1 = \begin{Bmatrix} -R \cdot \sin(\theta) \\ R \cdot \cos(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

et

$$\vec{F}_A = \begin{Bmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$\text{D'où:} \quad \vec{CPt} = -R(X_A \cdot \cos(\theta) + Y_A \cdot \sin(\theta)) \cdot \vec{z}_0 \quad (4.1)$$

Ce couple moteur peut être décomposé en:

a)- Couple dû aux gaz:

Le couple moteur d'un monocylindre dû aux gaz est définie par:

$$CP_g = -R(X_{Ag} \cdot \cos(\theta) + Y_{Ag} \cdot \sin(\theta)) \quad (4.2)$$

b)- Couple dû aux inertie:

Le couple moteur d'un monocylindre dû aux inertie est définie par:

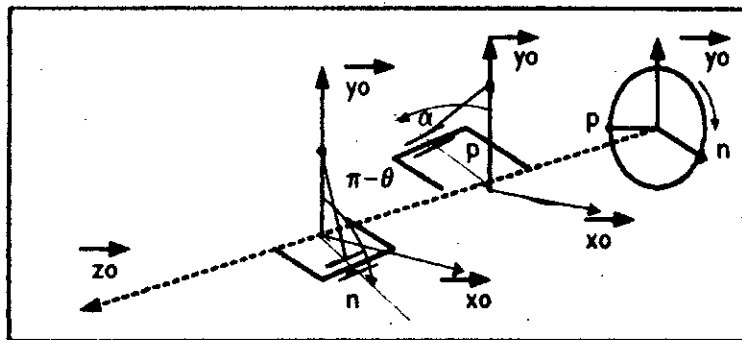
$$CP_i = -R(X_{Ai} \cdot \cos(\theta) + Y_{Ai} \cdot \sin(\theta)) \quad (4.3)$$

IV-3.2. Couple moteur à n cylindre en ligne:

Le couple instantané d'un moteur n cylindre s'obtient par composition du couple instantané du moteur monocylindre, le couple instantané dépend:

- 1- du nombre des cylindres et leur disposition ;
- 2- du vilebrequin utilisé: (pour un moteur quatre temps , on prend un vilebrequin dont les manétons son calés à $4\pi/nc$).
- 3- de l'ordre et de l'intervalle entre deux allumages.

Pour un moteur à n cylindres, l'angle de calage δ est égal à $4\pi/nc$. Si le cylindre n°1 (pris comme cylindre de référence) subit un couple $C(\theta)$, la manivelle du cylindre p subira un couple de $C(\alpha)$, avec $\alpha = \theta + (k - 1).4\pi/nc$; voir (fig 24), d'où:



(Fig 24) Moteur à n cylindres

$$C_1(\theta) = C(\theta)$$

$$C_2(\theta) = C(\theta + 4\pi/nc)$$

$$C_k(\theta) = C(\theta + (k - 1).4\pi/nc)$$

$$C_{nc}(\theta) = C(\theta + (nc - 1).4\pi/nc)$$

Le couple résultant du moteur multicylindre en ligne est de:

$$C_i(\theta) = C_1(\theta) + C_2(\theta) + \dots + C_k(\theta) + \dots + C_{nc}(\theta)$$

$$C_t(\theta) = C(\theta) + C(\theta + 4\pi/nc) + \dots + C(\theta + (p-1)4\pi/nc) + \dots + C(\theta + (nc - 1)4\pi/nc)$$

$$C_t(\theta) = \sum_{k=1}^{nc} C(\theta + (k - 1)4\pi/nc) \quad (4.4)$$

avec: k : indique l'ordre d'allumage des cylindres.
 Ce couple peut être décomposé en deux couples:

IV-3.2.1. Couple dûs aux gaz :

Par analogie au couple total, on a:

$$C_{tg}(\theta) = \sum_{p=1}^{nc} C_g(\theta + (p - 1)4\pi/nc) \quad (4.5)$$

IV-3.2.2. Couple dûs aux inerties:

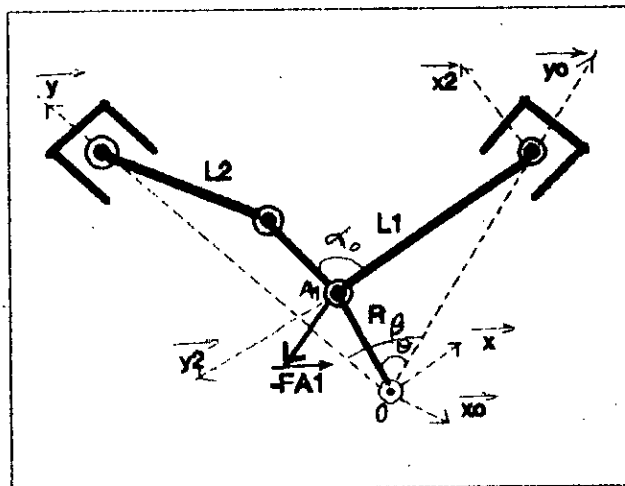
Par analogie au couple total, on a:

$$C_{ti}(\theta) = \sum_{p=1}^{nc} C_i(\theta + (p - 1)4\pi/nc) \quad (4.6)$$

IV-4 CALCUL DES COUPLES POUR LES MOTEURS EN V:

IV-4.1. Couple moteur pour un monocylindre:

Par définition, le couple moteur d'un monocylindre est le produit vectoriel de l'effort résultant de la bielle sur le maneton \vec{FA}_1 par le rayon vecteur \vec{OA}_1 de la manivelle (fig 25), donc:



(fig 25) définition de couple moteur

$$\vec{C}_{Pt} = - \vec{F}_{A1} \wedge \vec{OA}_1$$

avec

$$\vec{OA}_1 = R \cdot \vec{y}_1 = \begin{cases} -R \cdot \sin(\theta) \\ R \cdot \cos(\theta) \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

et

$$\vec{F}_{A1} = \begin{cases} X_{A1} \\ Y_{A1} \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$\text{D'où:} \quad \vec{C}_{Pt} = -R(X_{A1} \cdot \cos(\theta) + Y_{A1} \cdot \sin(\theta)) \cdot \vec{z}_0 \quad (4.7)$$

Ce couple moteur peut être décomposé en:

a)-Couple dû aux gaz:

Le couple moteur d'un monocylindre dû aux gaz est définie par:

$$C_{Pg} = -R(X_{A1g} \cdot \cos(\theta) + Y_{A1g} \cdot \sin(\theta)) \quad (4.8)$$

b)-Couple dû aux inertie:

Le couple moteur d'un monocylindre dû aux inertie est définie par:

$$C_{Pi} = -R(X_{A1i} \cdot \cos(\theta) + Y_{A1i} \cdot \sin(\theta)) \quad (4.9)$$

IV-4.2. Couple moteur à n cylindre en V:

L'étude de couple moteur à n cylindre en V, dépend de l'angle d'ouverture du V (β); deux cas se présentent:

IV-4.2.a. Premier cas: L'angle d'ouverture du V est $\beta = 4\pi/nc$

Nous remarquons que β est égal à la moitié de l'angle de calage des manetons, dans ce cas, le couple moteur est égal à celui du multicylindre en ligne ayant le même nombre de cylindres. L'intervalle

entre deux allumages est régulier et vaut $4\pi/nc$.

$$C_t(\theta) = C(\theta + 4\pi/nc) + C(\theta + 2.4\pi/nc) + C(\theta + 3.4\pi/nc) + \dots \\ + C(\theta + (2p-1).4\pi/nc)$$

$$C_t(\theta) = \sum_{k=1}^{nc} C(\theta + (k-1).4\pi/nc) \quad (4.10)$$

IV-4.2.b. Deuxième cas: L'angle d'ouverture du V est $\beta \neq 4\pi/nc$

Les intervalles entre deux allumages ne sont pas réguliers, ils valent $8\pi/nc - \beta$ et β ; ainsi le couple résultant est:

$$C_t(\theta) = C(\theta) + C(\theta + 8\pi/nc - \beta) + C(\theta + 8\pi/nc - \beta + \beta) + \dots \\ + C(\theta + (p-1).8\pi/nc) + \dots + C(\theta + p.8\pi/nc - \beta)$$

$$C_t(\theta) = \sum_{k=1}^{nc/2} [C(\theta + (k-1).8\pi/nc) + C(\theta + k.8\pi/nc - \beta)] \quad (4.11)$$

Ce couple peut être décomposé en deux couples:

IV-4.2.1. Couple dûs aux gaz :

Par analogie au couple total, on a:

$$\beta = 4\pi/nc$$

$$C_{tg}(\theta) = \sum_{k=1}^{nc} C_g(\theta + (k-1).4\pi/nc) \quad (4.12)$$

$$\beta \neq 4\pi/nc$$

$$C_{tg}(\theta) = \sum_{k=1}^{nc/2} [C_g(\theta + (k-1).8\pi/nc) + C_g(\theta + k.8\pi/nc - \beta)] \quad (4.13)$$

IV-4.2.2. Couple dûs aux inerties:

Par analogie au couple total, on a:

$$\beta = 4\pi/nc$$

$$C_{ii}(\theta) = \sum_{k=1}^{nc} C_i(\theta + (k-1)4\pi/nc) \quad (4.14)$$

$$\beta \neq 4\pi/nc$$

$$C_{ii}(\theta) = \sum_{k=1}^{nc/2} [C_i(\theta + (k-1)8\pi/nc) + C_i(\theta + k8\pi/nc - \beta)] \quad (4.15)$$



ORGANIGRAMME

PROGRAMME PRINCIPAL

Le programme principal se compose:

- subroutine choix: ce sous-programme d'écrit le choix du moteur
(moteur en ligne, moteur en V)
- subroutine Entre: c'est un sous-programme qui lie les données massiques et géométriques des différents éléments constituant l'attelage mobile considéré:

- si le choix est un moteur en ligne, l'entre des données sera:

Mp : masse du piston;
Mb : masse de la bielle;
Iz : moment d'inertie de la bielle/au centre de gravité;
L : entraxe bielle;
Lbg: La distance entre le centre de gravité de la bielle et le pied de bielle;
R : rayon du la manivelle;
Nc : le nombre des cylindres;
Nt : vitesse de rotation;
D : diamètre du piston;
Num: ordre d'allumages.

- si le choix est un moteur en V, l'entre des données sera:

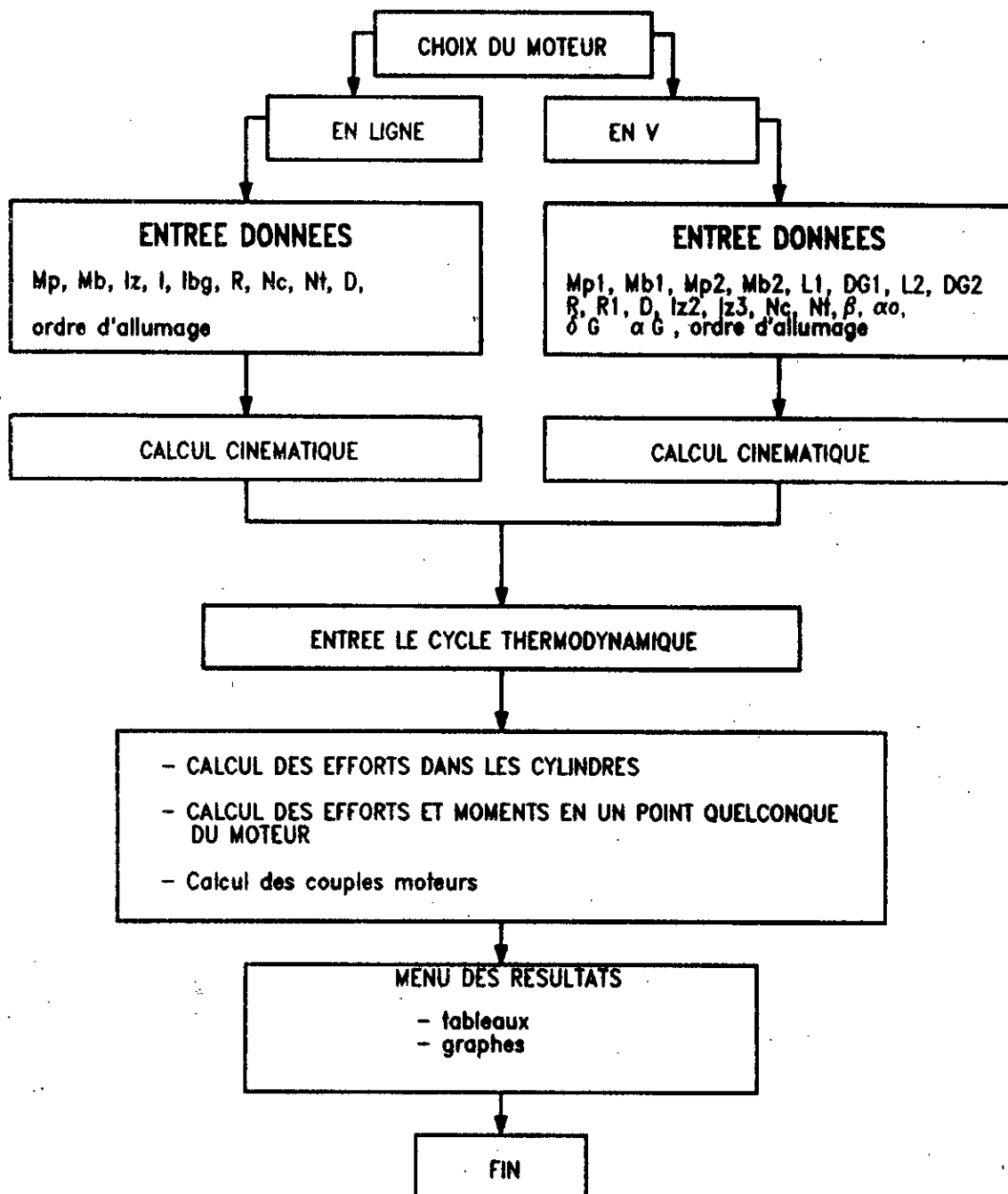
L1 : entraxe de la bielle;
DG1: la distance entre le centre de gravité de la bielle et le pied de beille;
D : diamètre du piston;
R : le rayon du manivelle;
Mp1: la masse du piston de la bielle;
Mb1: la masse de la biellette;
Iz : moment d'inertie de la bielle;
Nt : vitesse de rotation du vilebrequin;
Nc : le nombre de cylindres;
L2 : entraxe de la biellette;
DG2: la distance entre le centre de gravité de la biellette et le pied de biellette;

R1 : la distance entre A₁ et A₂;
Iz : moment d'inertie de la bielle;
Mb2: la masse de la bielle;
Mp2: la masse du piston de la bielle;
 β : angle d'ouverture du V;
 α_0 : angle bielle-bielle;
 α_0 : angle positionnant le centre de gravité de la bielle;
 δ_0 : angle positionnant le centre de gravité de la bielle;
Num: ordre d'allumages.

- subroutine accélération: Elle est établie pour le calcul des accélérations à des points particuliers de l'attelage mobile et qui sont utiles pour les calculs de dynamique et cela pour un cycle complet c'est à dire en faisant varier ωt de 0° à 720° avec un pas de 5°.
- subroutine cycle: ce sous-programme est établi pour lire les données d'un fichier du cycle thermodynamique variant de 0° à 720° avec un pas de 5°.
- subroutine calcul 1: Elle est établie pour le calcul des composantes des efforts XA, YA, XB, YB et XC, si le choix est un moteur en ligne XA1, YA1, XB1, YB1, XA2, YA2, XB2, YB2, XC1 et XC2 si le choix est un moteur en V. Ce calcul est fait pour un moteur monocylindre.
- Subroutine calcul n: ce sous-programme établit un calcul pour un moteur multicylindre, calculant les couples ainsi que les efforts en un point G du moteur (Fx, Fy).
- subroutine moments: cette subroutine établit le calcul des moments en un point G du moteur (Mx, My, Mz).

Le deuxième programme principale:

ce deuxième programme principale est établi pour lire les résultats obtenu du programme calcul et les affiche sous forme des tableaux au graphes.





APPLICATION AU MOTEUR F4L912

APPLICATION AU MOTEUR F4L912.

V- CARACTERISTIQUES DU MOTEUR:

- Alésage / course [mm]:	100/120
- Cylindrée globale [l]:	3.8
- Vitesse de rotation [tr/mn]:	2800
- Vitesse moyenne du piston [m/s]:	11.2
- Puissance [Kw]:	54
- Pression moyenne effective [bar]:	6.22
- Taux de compression:	1/17
- Pression max dans le cylindre [bar]:	61
- Moment d'inertie de la bielle par rapport à son centre de gravité [Kg.m ²]:	0.0207
- Masse bielle [Kg]:	1.7
- Masse piston [Kg]:	1.685
- Entraxe bielle [mm]:	210
- Position du centre de gravité de la bielle par rapport au pied de bielle [mm]:	140
- Nombre du cylindre:	4
- Ordre d'allumage:	1 3 4 2

Dans ce deuxième paragraphe, nous nous bornerons à donner quelques exemples sous forme de graphes tracés par ce logiciel:

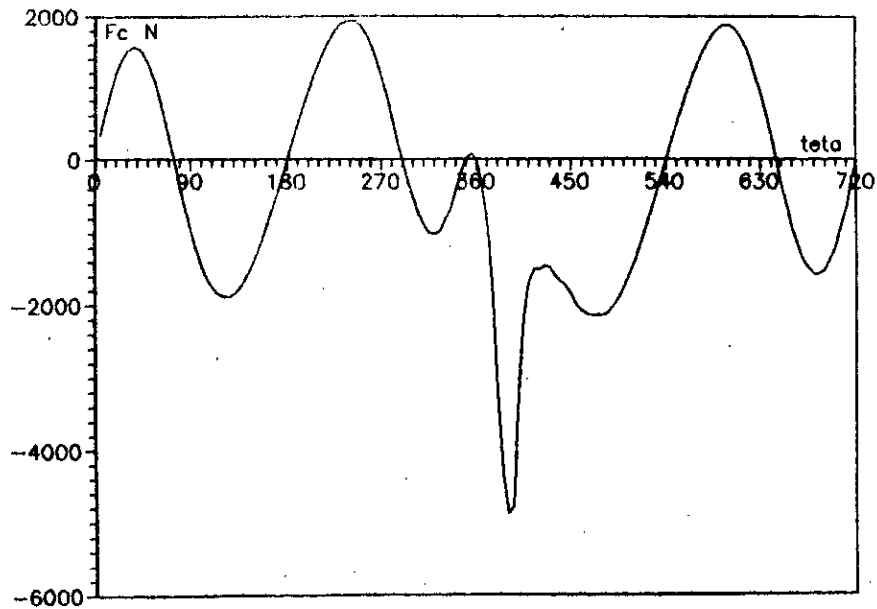
V-1. Effort lateral de la chemise sur le piston (C):

A. Moteur monocylindre 4 temps

$$\vec{F}_{(ch/p,c)} = \begin{cases} |\vec{F}_c| = |X_c| \\ \vec{F}_c // \vec{x}_0 \end{cases}$$

L'effort total est périodique de période 4π , il est composé de deux efforts antagonistes:

- l'effort dû aux gaz de période 4π , tend à pousser le piston sur la chemise dans le sens des \vec{x}_0 ;
- l'effort dû aux inerties de période 2π , symétrique par rapport à $\theta = \pi$. Ces deux efforts se composent et s'opposent au moment de la charge.

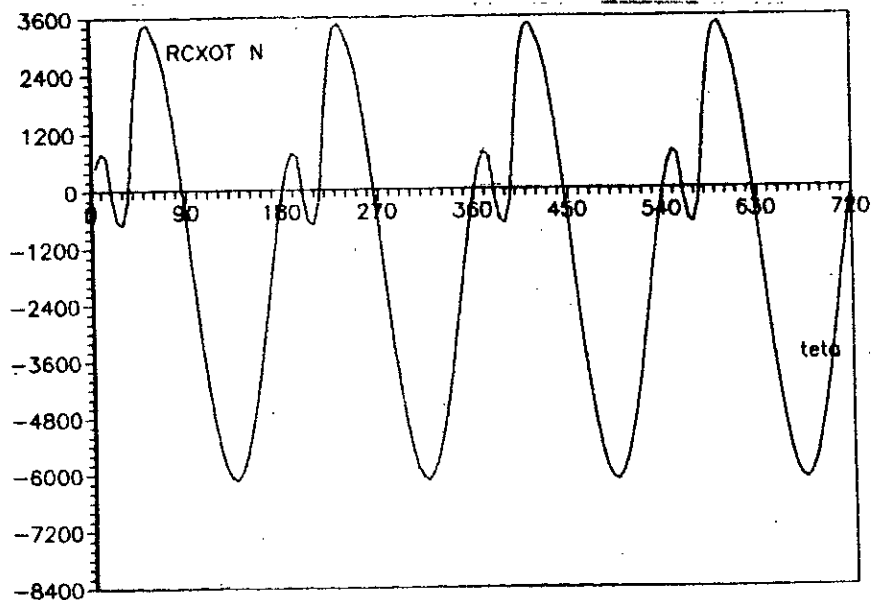


(fig 26) Effort latéral de la chemise sur le piston en fonction de vilebrequin pour un monocylindre

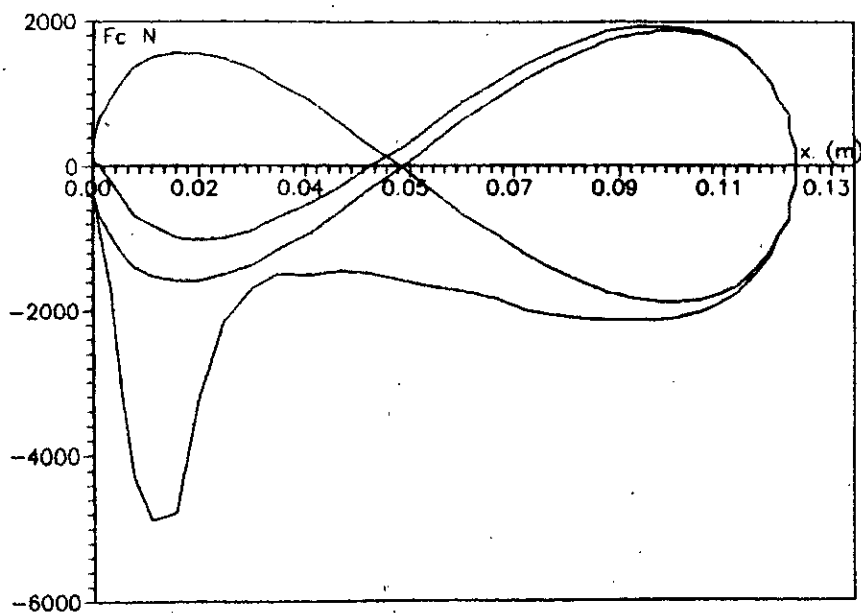
B. Moteur à n cylindres en ligne 4 temps

La résultante des efforts latéraux des chemises sur les pistons d'un moteur à n cylindres en ligne, s'obtient en composant les efforts \vec{F}_c du moteur monocylindre avec un déphasage de $4\pi/nc$, ce qui nous donne:

$$\vec{R}_c(\theta) = \sum_{p=1}^n \vec{F}_c\left(\theta + (p-1) \frac{4\pi}{nc}\right)$$

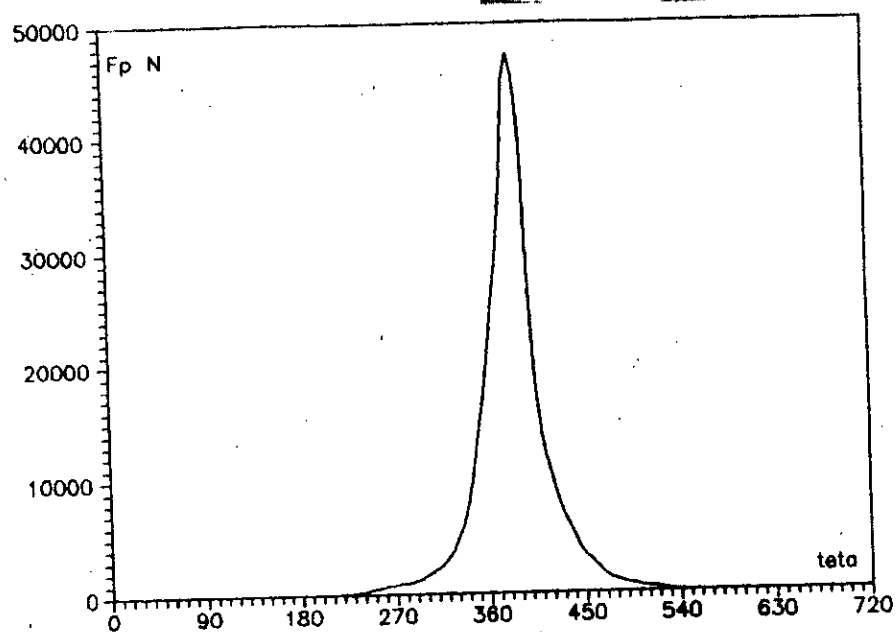


(fig 27) Effort latéral des chemises sur les pistons pour un moteur 4 cylindres en ligne

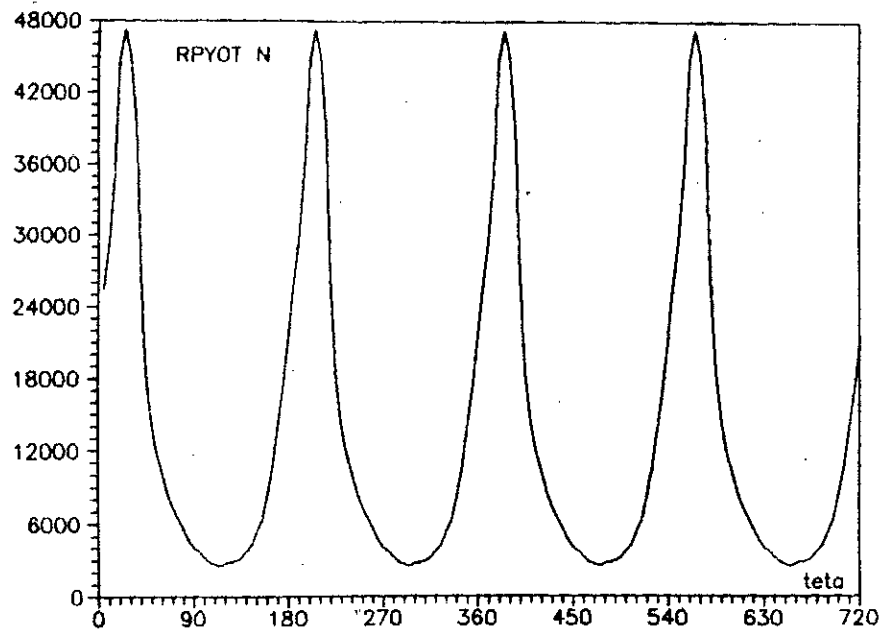


(fig 28) Efforts chemise sur piston en fonction du déplacement du piston entre (PMB-PMH)

V-2. Effort au niveau de la tête du piston (P):



(fig 29) Action des gaz de combustion sur la culasse



(fig 30) Action des gaz de combustion sur la culasse pour un moteur 4 cylindre en ligne.

V-3. Effort au point d'articulation piston-bielle (B):

A. Moteur monocylindre 4 temps

- Action de l'axe du piston sur la bielle dans le repère lié à la bielle:

L'effort $FBY2$ est la résultante de deux composantes, la première est portée par \vec{x}_2 , et la deuxième par \vec{y}_2 .

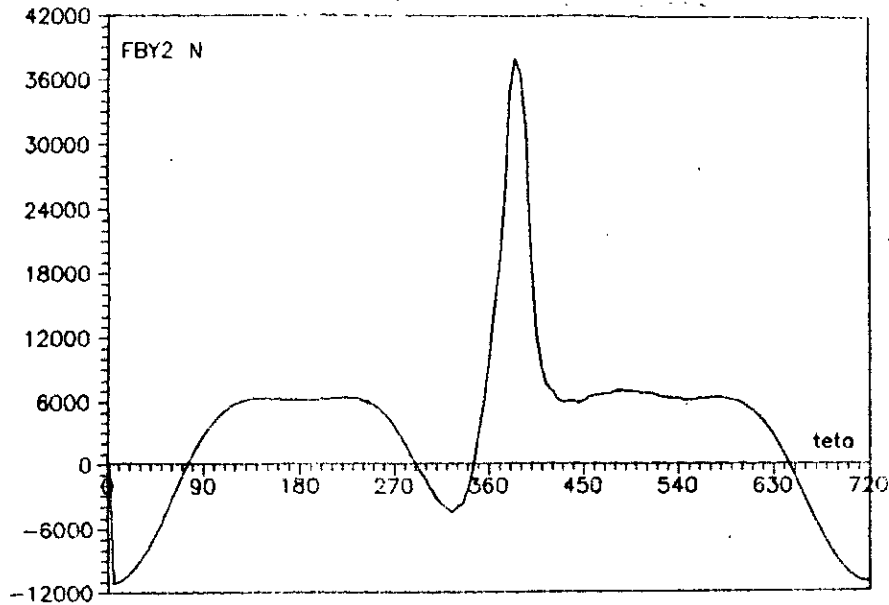
- composante de $FB2$ portée par \vec{y}_2 :

$$FBY2 = - XB.\sin(\phi) + YB.\cos(\phi)$$

L'effort total est périodique, de période 4π , il est composée de deux efforts:

- l'effort dû aux gaz de période 4π , qui tend à comprimer la bielle et engendre une action de l'axe du piston sur la bielle dans le sens de \vec{y}_2 négatif; ce qui donne une réaction $FBY2$ de la bielle sur l'axe du piston dans le sens de \vec{y}_2 positif.

- l'effort dû aux inerties de période 2π , symétrique par rapport à $\theta = \pi$, tend à étirer la bielle au PMB et à la comprimer au PMH.

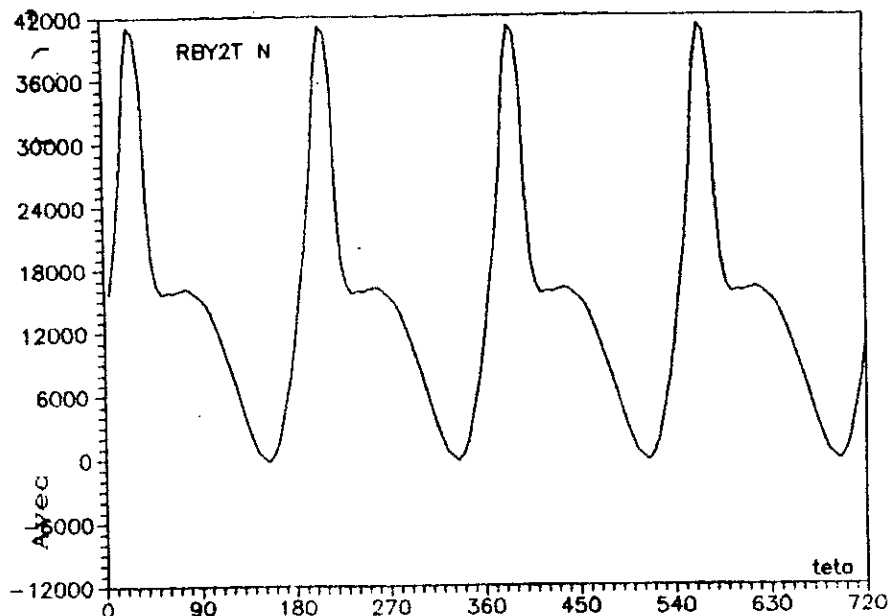


(fig 31) Action de l'axe du piston sur la bielle pour un moteur monocylindre.

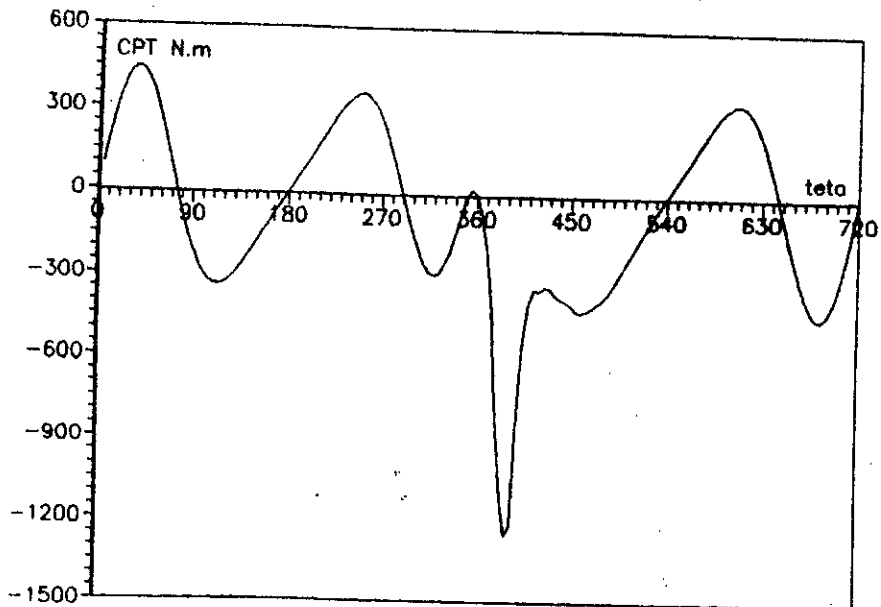
B. Moteur à n cylindre en ligne 4 temps

La résultante des efforts sur la bielle RBY2T s'obtient en composant les efforts FBY2 du monocylindre avec un déphasage de $4\pi/nc$, ce qui nous donne:

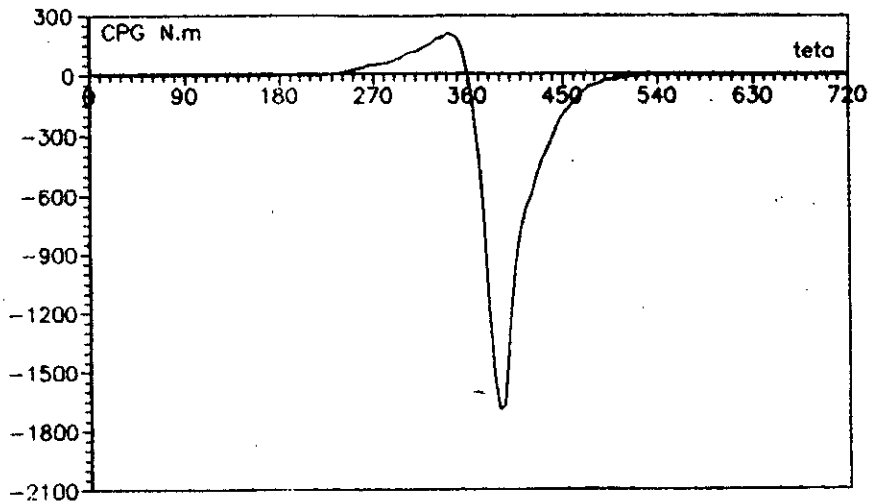
$$RBY2t(\theta) = \sum_{p=1}^n FBY2\left(\theta + (p-1) \frac{4\pi}{nc}\right)$$

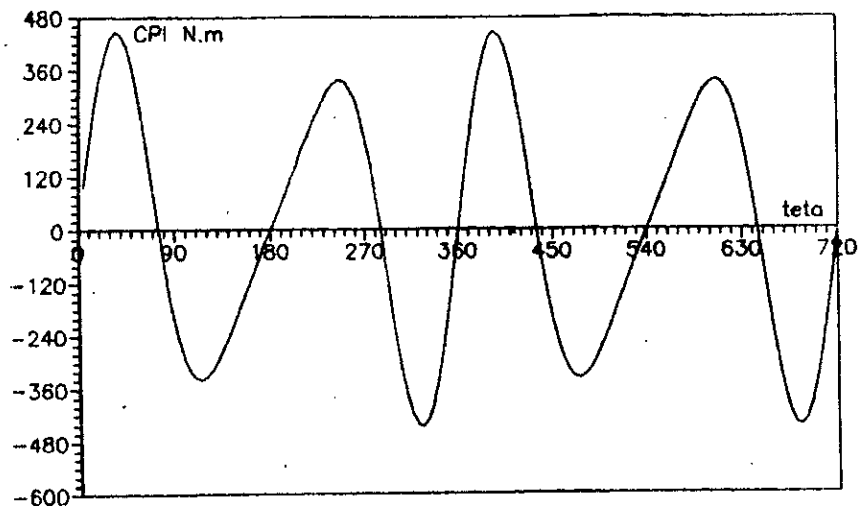


(fig 32) Action des bielles sur les pistons pour un moteur 4 cylindres en ligne.

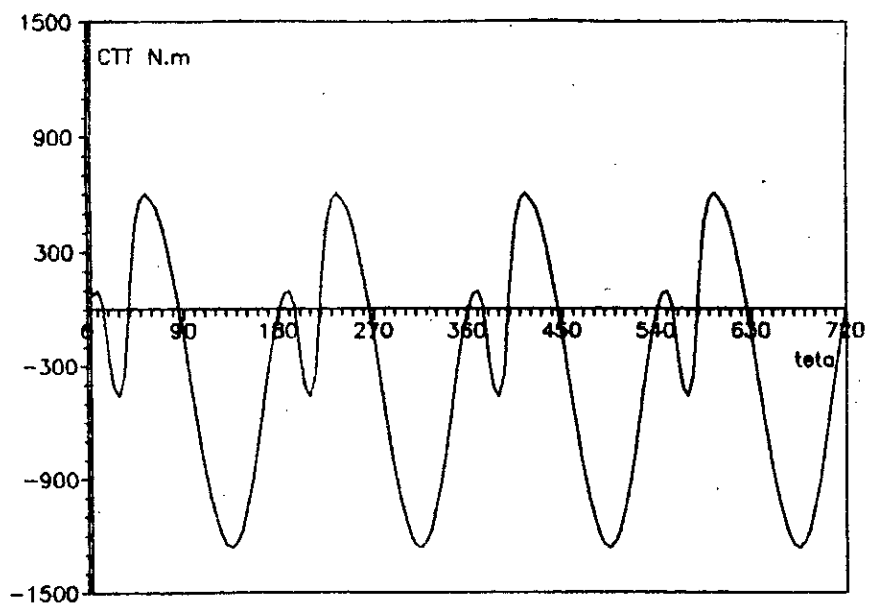
V-4. Couple moteur

(fig 33) Couple moteur pour un monocyindre

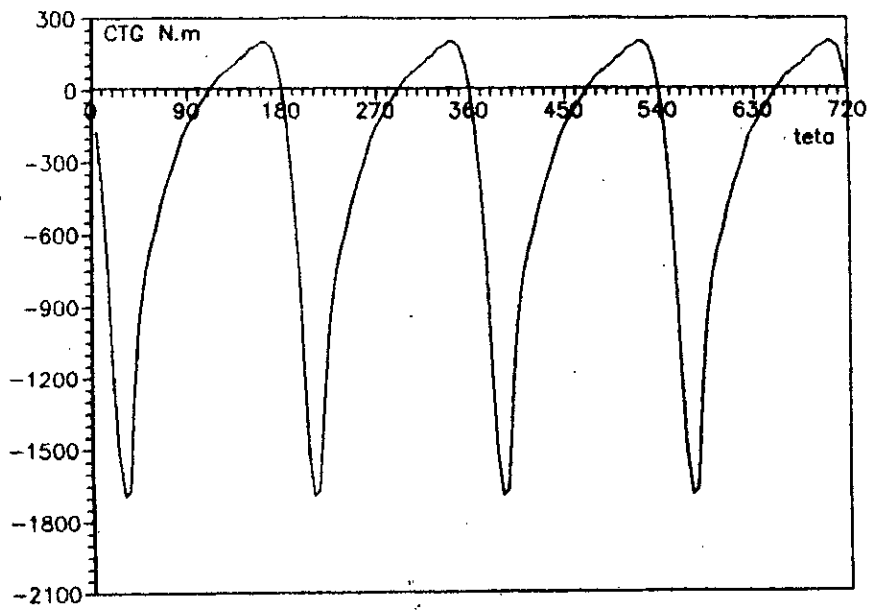
(fig 34) Couple moteur pour un monocyindre
du aux gaz.



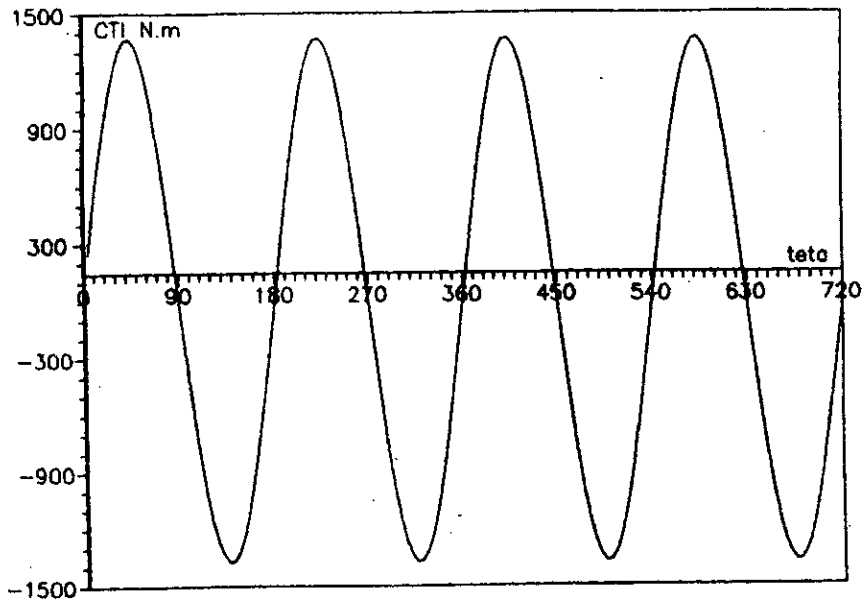
(fig 35) Couple moteur pour un monocylindre dû aux inerties



(fig 36) Couple total pour un moteur 4 cylindre en ligne



(fig 37) Couple total pour un moteur 4 cylindre en ligne dûs aux gaz



(fig 38) Couple total pour un moteur 4 cylindre en ligne dûs aux inerties

V-5. Diagramme polaire des efforts du système bielle-manivelle

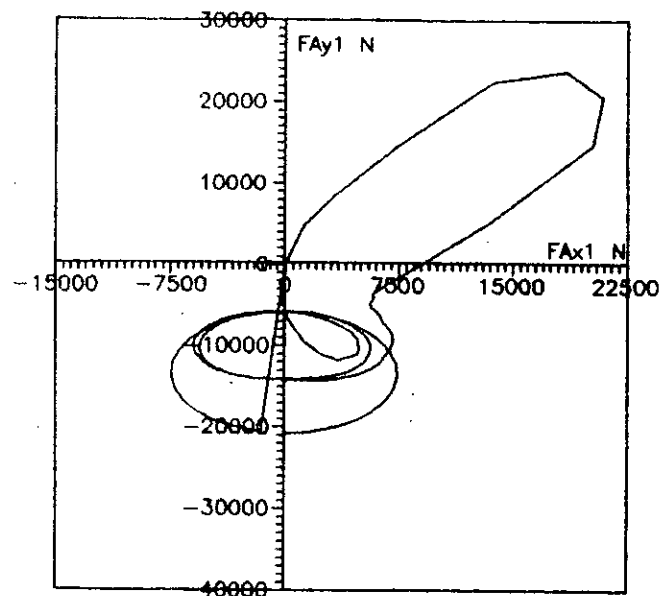
- Action de la bielle sur le maneton dans le repère lié au maneton

Ce diagramme obtenu en traçant les composantes de la force $\overrightarrow{F_{Ax1}}$ dans le repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

$$\overrightarrow{F_{(b/v,A)}} = \begin{cases} XA \cdot \cos(\theta) + YA \cdot \sin(\theta) \\ -XA \cdot \sin(\theta) + YA \cdot \cos(\theta) \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix}$$

Le diagramme polaire résultant (action bielle sur vilebrequin) est:

$F_{Ay1} = f(F_{Ax1})$



(fig 39) Action de la bielle sur le maneton dans le repère lié au maneton

Ce diagramme nous indique:

- L'intensité de l'effort maximal, ainsi que la direction des efforts, ce qui permet de déterminer la position des trous d'arrivée d'huile sur le maneton pour le graissage du coussinet de tête de bielle.

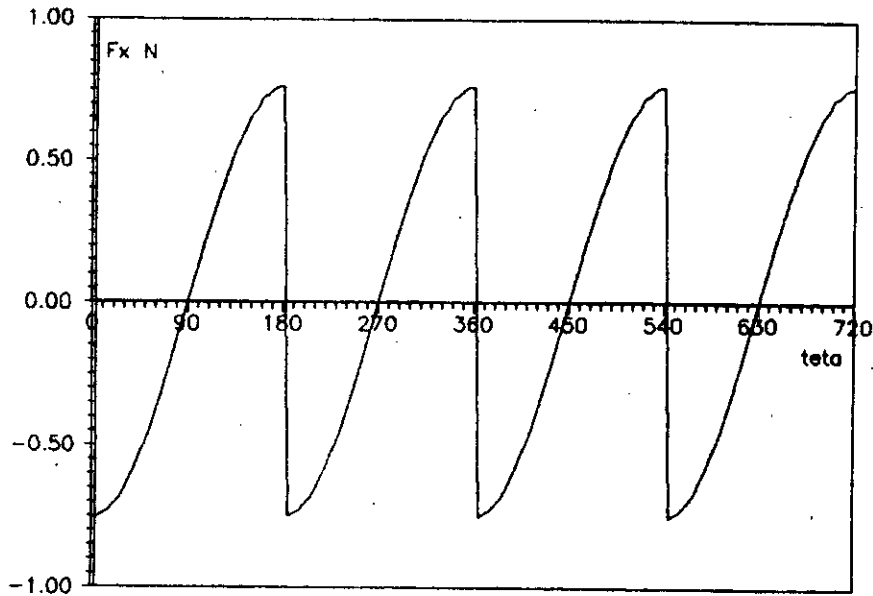
L'effort total est périodique de période 4π , il est composé de deux efforts:

- L'effort dû aux gaz de période 4π qui tend à comprimer la bielle et engendre une action de la bielle sur le maneton, d'où une réaction FA du maneton sur la bielle.

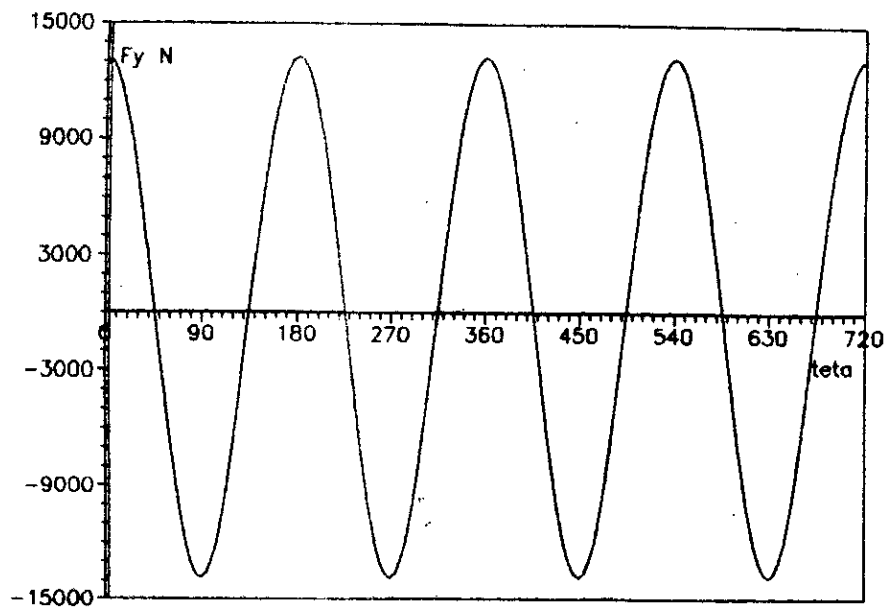
- L'effort dû aux inerties de période 2π , symétrique par rapport à $\theta = \pi$. Il tend à étirer la bielle au PMH et à la comprimer au PMB.

V-6. Efforts appliqués sur le bloc moteur:

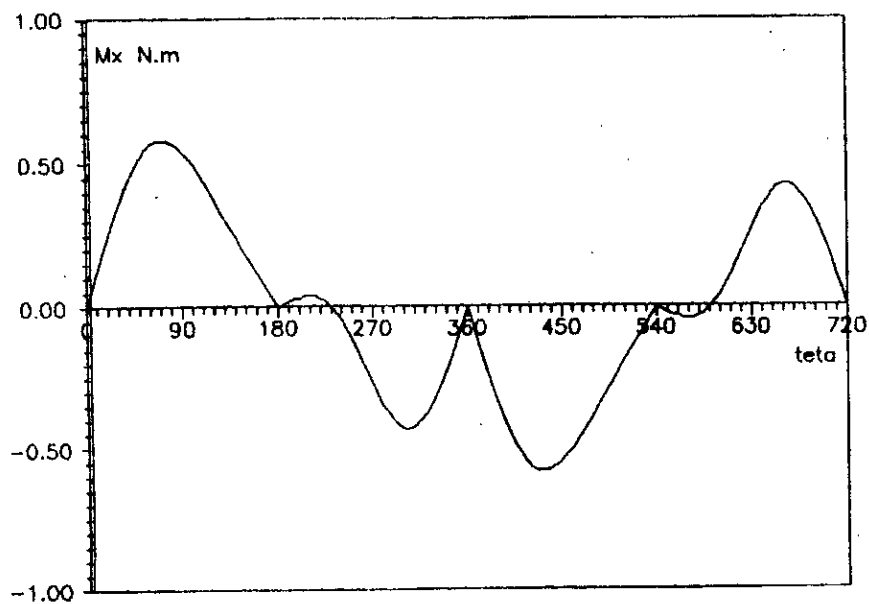
V-6.1. Effort sur le bloc moteur suivant l'axe $\vec{x_0}$:

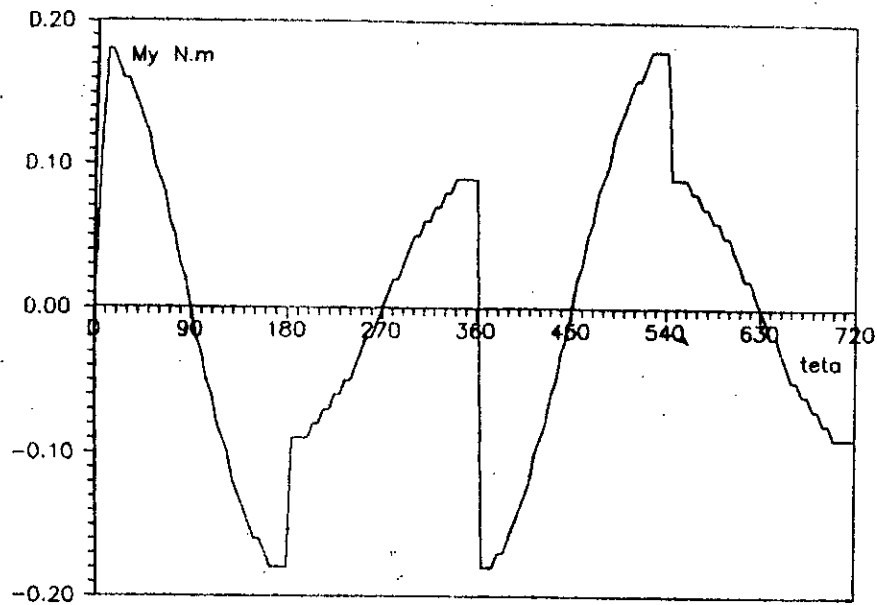


(fig 40) Effort moteur suivant l'axe des $\vec{x_0}$
(effort de tamis)

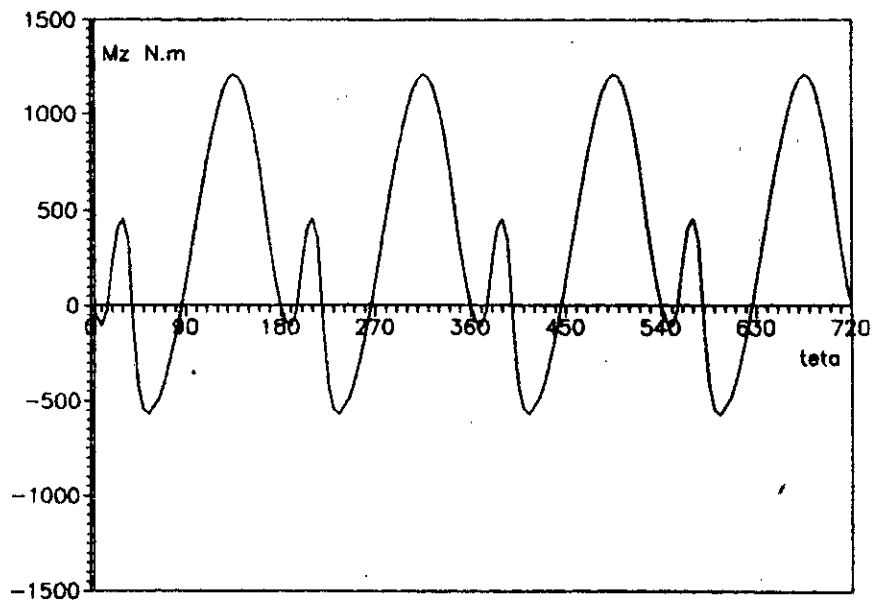
V-6.2. Effort sur le bloc moteur suivant l'axe \vec{y}_0 :(fig 41) Effort moteur suivant l'axe des \vec{y}_0
(effort de pilon)

V-7. Moment appliqués sur le bloc moteur:

(fig 42) Moment moteur autour de l'axe des \vec{x}_0
(moment de galop)



(fig 43) Moment moteur autour de l'axe des \vec{y}_0
(moment de lacet)



(fig 44) Moment moteur autour de l'axe des \vec{z}_0
(moment de basculement)



APPLICATION AU MOTEUR EN V

APPLICATION AU MOTEUR EN V

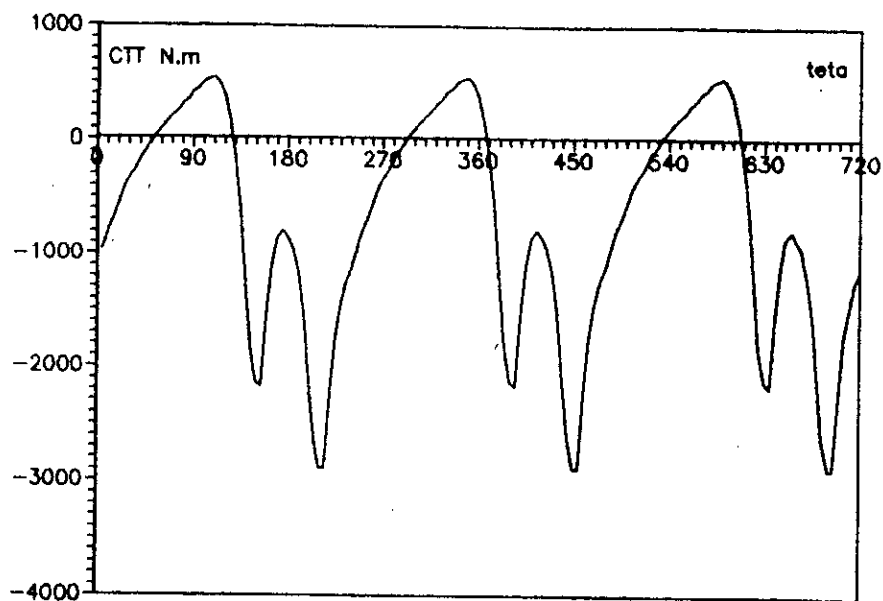
V- CARACTERISTIQUES DU MOTEUR:

- 1ère comparaison:

En prend les même données qu'au moteur F4L912, pour la bielle et la biellette et avec :

$R1 = 0$
 $\beta = 60^\circ$
 $\alpha_0 = 0$
 $\alpha\alpha = 0$
 $\delta\alpha = 0$
 $Nc = 6$
 $num = 1\ 6\ 3\ 5\ 2\ 4$

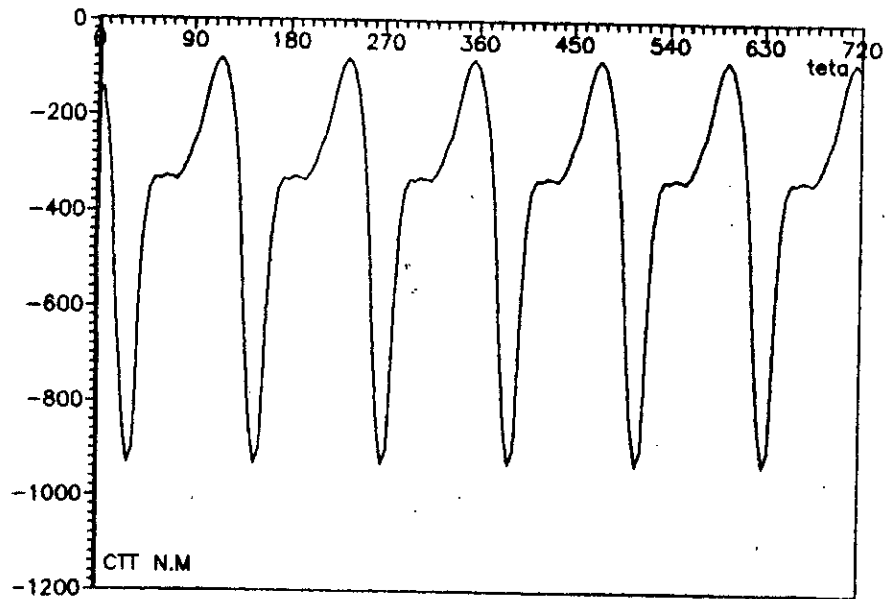
c'est à dire un moteur en V (bielle bielle à côté), la comparaison a été faite sur le couple trouver sur swoboda [1].



(fig 45) Couple total pour un moteur V6 ouvert à 60°

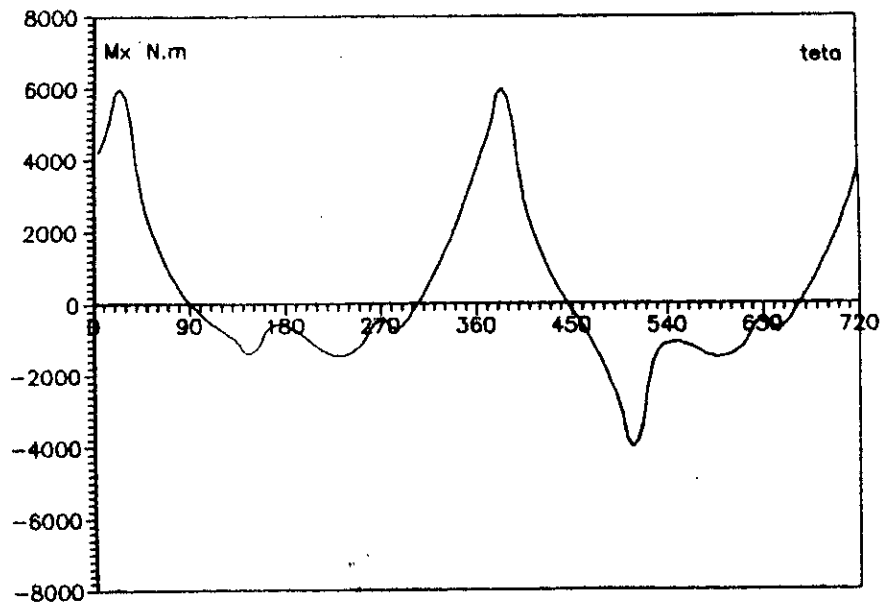
- 2ème comparaison:

avec Les données de swoboda [1] d'un moteur V6 ouvert à 120° , nous aurons:

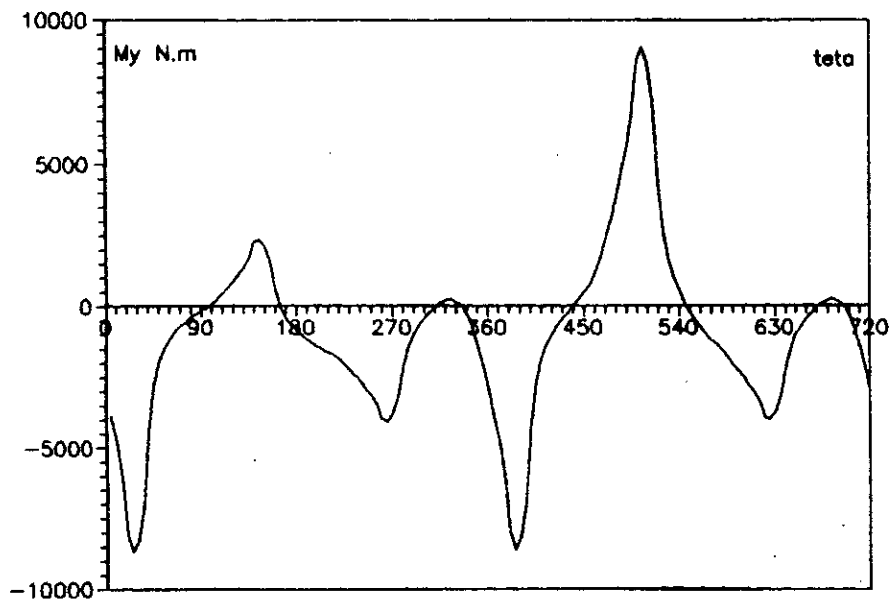


(fig 46) Couple total pour un moteur V6
ouvert à 120°

V-2. Moment appliqués sur le bloc moteur:

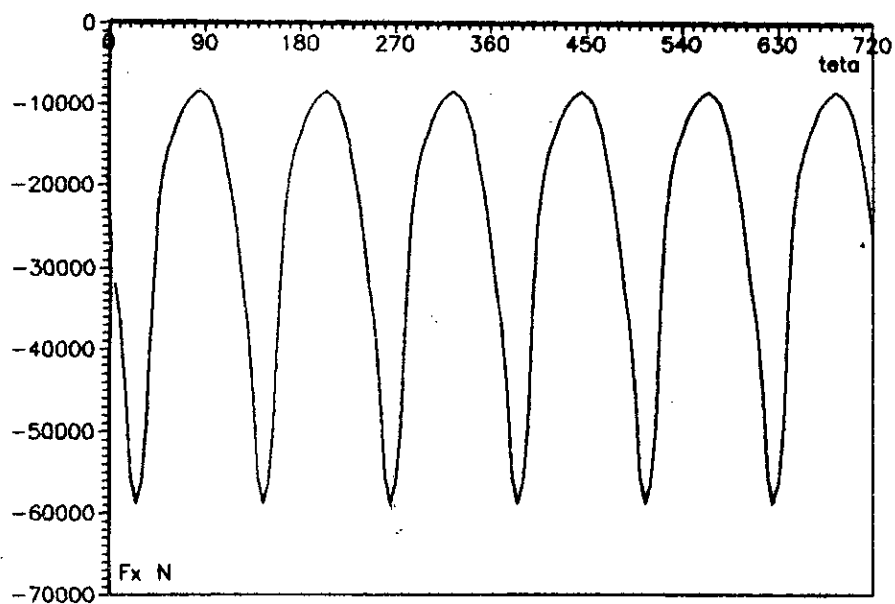
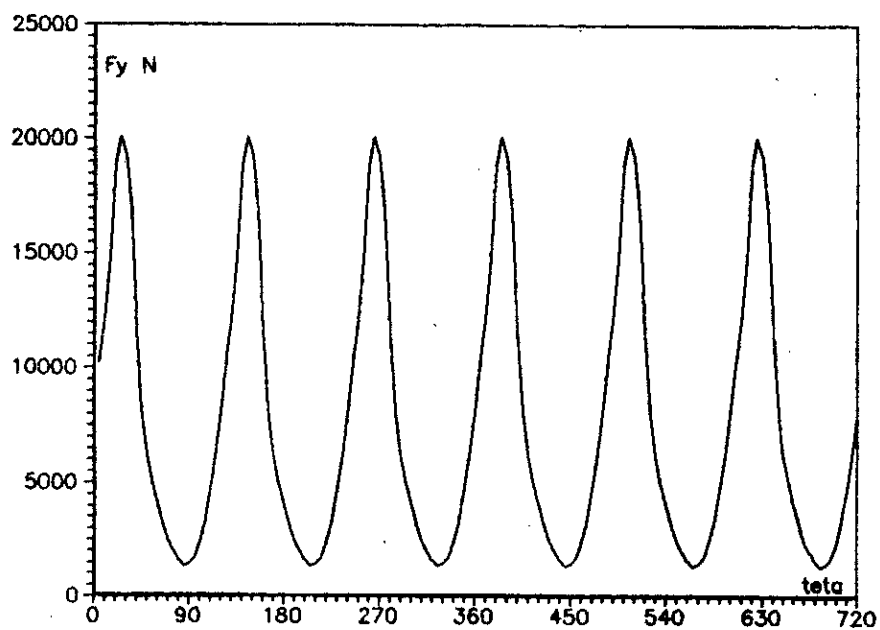


(fig 47) Moment moteur autour de l'axe des \vec{x}_0
(moment de galop)



(fig 48) Moment moteur autour de l'axe des \vec{y}_0
(moment de lacet)

V-3. Efforts appliqué sur le bloc moteur:

(fig 49) Efforts moteur suivant l'axe \vec{x}_o (fig 50) Efforts moteur suivant l'axe \vec{y}_o

INDICES UTILISES

Γ : accélération
 V : vitesse
 δ : moment dynamique
 σ : moment cinétique
 I : torseur d'inertie
 τ : torseur dynamique
cpt: couple moteur
 D : diamètre de piston
 G_{b1} : centre de gravite de la bielle
 G_{b2} : centre de gravite de la biellette
 C_1 : chemise côté bielle
 C_2 : chemise côté biellette
 P_1 : piston côté bielle
 P_2 : piston côté biellette
 b_1 : bielle
 b_2 : biellette
 v : vilebrequin
 g : gaz

CONCLUSION

Cette étude nous a permis d'élaborer un logiciel traitant un calcul dynamique des moteurs en ligne et en V (bielle biellette), ainsi que la maîtrise du graphisme en langage fortran 5.1.

Vu les résultats obtenus avec ce logiciel et après une comparaison aux graphes trouvés dans des bibliographies Swoboda [1] et Boukabache [2], sont satisfaisantes.

Il faut signaler que nous n'avons pas eu les données ainsi que des graphes pour les moteurs en V (bielle biellette) pour une comparaison sauf des graphes de couple moteur.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]- " MECANIQUE DES MOTEURS ALTERNATIFS "
SWOBODA
- [2]- " AIDE A LA CONCEPTION DES MOTEURS "
thèse doctorat BOUKABACHE
- [3]- " CONTRIBUTION A L'ETUDE MECANIQUE D'UN
MOTEUR DIESEL DEUX TEMPS, SURALIMENTE"
thèse doctorat CIMA Bernard
- [4]- " TECHNIQUE DE L'INGENIEUR "
LOURADOUR
- [5]- " LES TRACTEURS AGRICOLES "
B.GUELMAN
- [6]- " TRACTORS AND AUTOMOBILES "
G.RODICHEVA
- [7]- " LES MOTEURS "
MENARDON