

10/94  
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

**PROJET DE FIN D'ETUDES**

**SUJET**

**ETUDE ET APPLICATION D'UN  
ELEMENT FINI DANS UN ECOULEMENT  
QUASI TRIDIMENSIONNEL**

Proposé par :

**M. BOUDJEMAA**

Etudié par :

**H. MESSAOUDI  
O. SALAHOUELHADJ**

Dirigé par :

**M. BOUDJEMAA**

PROMOTION

**1993 - 1994**

E. N. P 10, Avenue Hassen Badi - EL-HARRACH - ALGER

### ملخص:

هدف هذا العمل هو دراسة  
لديسياب سائل قابل للضغط  
في آلة تربينية بطريقة  
العناصر المنتهية.

### RESUME :

Le but de ce travail est l'étude d'un écoulement compressible dans une roue de turbomachine par la méthode des éléments finis.

### ABSTRACT :

In this work we study a through-flow compressible fluid in an arbitrary turbomachine using a finite elements method.

## DEDICACES

Je dédie ce modeste  
travail à mon père, et surtout  
à ma mère qui a tout sacrifié  
pour que je puisse atteindre ce niveau.  
A mes chers Freres: Rafik et Imad  
A mes sœurs: Amel et Souad  
A tous mes amis.

Hani  
Fessouddi

## DEDICACES

Je dédie ce travail  
à mes parents qui m'ont soutenu  
tout le long de mes études afin  
de me voir atteindre ce niveau.  
A mes sœurs : Safia, Samia, Yamina, Salima  
et Beila.  
A mon unique frère : Abdellah.  
et à tous mes amis.

D. Salahouelhadj

## REMERCIEMENTS :

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à notre promoteur Monsieur M. BOUDJEMAA, qui a su susciter en nous un grands intérêt pour la mécanique des fluides, et pour ce sujet en particulier, on remercie le vivement.

Nous remercions tous les enseignants qui ont contribué à notre formation, ainsi qu'à la réalisation de ce projet de fin d'étude, en particulier Mr. F. BELBLIDIA et Mr. ATIF enseignant à l'U.S.T.H.B.

Nous remercions tout particulièrement notre chère ami N. CHIKHI, pour les multiples conseils et le soutien constant qu'il nous a prodigués tout au long de cet année

**TABLE DES MATIERES :**

INTRODUCTION GENERALE .....	1
CHAPITRE I	
I. ETUDE DE L'ECOULEMENT TRIDIMENSIONNEL PAR LA MODELISATION DE "WU" .....	3
I.1. INTRODUCTION .....	3
I.2. ETUDE DE L'ECOULEMENT MERIDIONAL (MOYEN) .....	5
I.2.1. EQUATION DE CONTINUTE .....	5
I.2.2. EQUATIONS DU MOUVEMENT .....	6
I.2.3. EQUATION D'ENERGIE .....	7
I.2.4. INTRODUCTION DE LA FONCTION DE COURANT .....	10
I.2.5. CONDITIONS AUX LIMITES .....	12
I.3. ETUDE DE L'ECOULEMENT AUBE A AUBE (EQUILIBRE RADIAL) ..	14
I.3.1. EQUATION DE CONTINUTE .....	14
I.3.2. EQUATION DU MOUVEMENT .....	16
I.3.3. CONDITIONS AUX LIMITES .....	17
CHAPITRE II	
II. FORMULATION .....	20
II.1. INTRODUCTION .....	20
II.2. FORMULATION DU PROBLEME .....	21
II.2.1. PROBLEME CONTINU .....	21
II.2.2. PROBLEME VARIATIONNEL .....	24
METHODE DES RESIDUS PONDERES .....	24
A- RESIDUS .....	24
B- FORME INTEGRALE .....	25
C- CHOIX DES FONCTIONS DE PONDERATION .....	26

---

II.3. DESCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS TRIANGULAIRES.....	26
II.3.1. INTERPOLATION PAR ELEMENTS FINIS TRIANGULAIRES	
II.3.1.1. CHOIX DE L'ELEMENT .....	27
II.3.1.2. MAILLAGE .....	29
II.3.1.3. REGLES DE PARTITIONS DU DOMAINE EN ELEMENTS.....	29
• SINGULARITE DE LA MATRICE JACOBIENNE .....	30
II.3.2. ECRITURE MATRICIELLE .....	30
II.3.2.1. CALCUL DE LA FONCTION DE COURANT .....	30
II.3.2.2. CALCUL DES COMPOSANTES DES VITESSES .....	34
II.3.3. INTEGRATION NUMERIQUE .....	36
II.4. CONDITIONS DE CONVERGENCE DE LA SOLUTION .....	39
CHAPITRE III	
METHODE NUMERIQUE .....	40
CONCLUSION	
ANNEXE 1	
ANNEXE 2	
ANNEXE 3	
ANNEXE 4	
BIBLIOGRAPHIE	

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## CHAPITRE 0



## INTRODUCTION GENERALE :

Ce n'est que récemment que *la méthode des éléments finis* a été appliquée systématiquement à différents types de problèmes de mécanique des fluides, bien que plusieurs ouvrages aient déjà été publiés sur le sujet. Il n'en demeure pas moins que *la méthode des éléments finis* s'affirme, comme un instrument très puissant de résolution numérique; son développement est actuellement très rapide et dispose désormais d'un bon nombre de techniques utiles et efficaces.

*La méthode des élément finis* est une méthode numérique largement utilisée de nos jours car elle représente un excellent outil de modélisation des différents phénomènes physiques. Toute fois, la conception d'un modèle reste extrêmement délicate, du faite qu'elle exige une parfaite connaissance des équations mathématiques régissant ces mêmes phénomènes.

Notre intérêt, porte sur l'écoulement dans une turbomachine centrifuge, qui est très complexe vu l'aspect tridimensionnel et instationnaire. Devant cette complexité, les ingénieurs chargés d'appliquer les connaissance de mécanique des fluides à l'étude de ces machines, se voit contraint d'effectuer des modèles très poussés.

Le problème du calcul de l'écoulement dans une turbomachine ne peut être actuellement abordé qu'en effectuant les hypothèses simplificatrices suivantes :

- ① Fluide parfait .
- ② Ecoulement stationnaire.
- ③ Axisymétrie des surfaces de courant.

ces hypothèses seront développées plus loin.

La description de cet écoulement peut être approchée de façon classique par la décomposition de l'écoulement réel tridimensionnel, en deux écoulements quasi tridimensionnels appelés :

- *Ecoulement moyen* ou *méridional*.
- *Ecoulement aube à aube* ou *équilibre radial*.

cette modélisation à été proposée par C.H.WU [4].

Le but de ce travail est l'élaboration d'une formulation en *éléments finis* qui permet de modéliser l'écoulement d'un fluide dans une turbomachine centrifuge. Pour cela on choisit *un élément quadratique* ( triangle, 6 noeuds,  $C^0$  ), c'est l'élément le plus utilisé en mécanique des fluides. Pour assurer la convergence, deux conditions doivent être vérifiées :

- Le degré du polynôme d'interpolation doit être complet.
- La continuité de  $u$  et de ses dérivées premières dans l'élément, et entre éléments.

La première condition est vérifiée, par contre la seconde est à moitié vérifiée, car l'élément choisit n'assure pas la continuité entre élément. C'est la raison pour laquelle la convergence du problème reste à vérifier.

C'est selon cette ordre que nous avons structuré ce mémoire en trois parties essentielles :

- a. La première partie présente les équations aux dérivées partielles caractérisant l'écoulement tridimensionnel selon la décomposition de *C.H.WU* [4].
- b. La deuxième partie traite la formulation du modèle en *élément finis*.
- c. Enfin, l'organigramme du problème numérique est donné dans la troisième partie.

# CHAPITRE I

## I. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT TRIDIMENSIONNEL PAR LA MODELISATION DE "WU":

### I.1. INTRODUCTION :

La description de l'écoulement dans une turbomachine centrifuge se fait le plus souvent par superposition des solutions de problèmes classiques d'écoulements.

On adopte dans notre travail la modélisation de *C.H.WU* [4], qui consiste à la décomposition de l'écoulement tridimensionnel en deux écoulements bidimensionnels :

- Un écoulement qualifié de "*moyen*" (*through flow*), dont la principale caractéristique est d'être à symétrie axiale, c'est-à-dire qu'il admet une famille de surfaces de courant de révolution (S2). (voir fig.1-a).

- Un écoulement de "*grille*" (*blade to blade flow*) , dont la surface de courant (S1) est décrite dans la roue par l'ensemble des particules fluides se trouvant sur un cercle concentrique à l'axe de la machine. (voir fig.1-b).

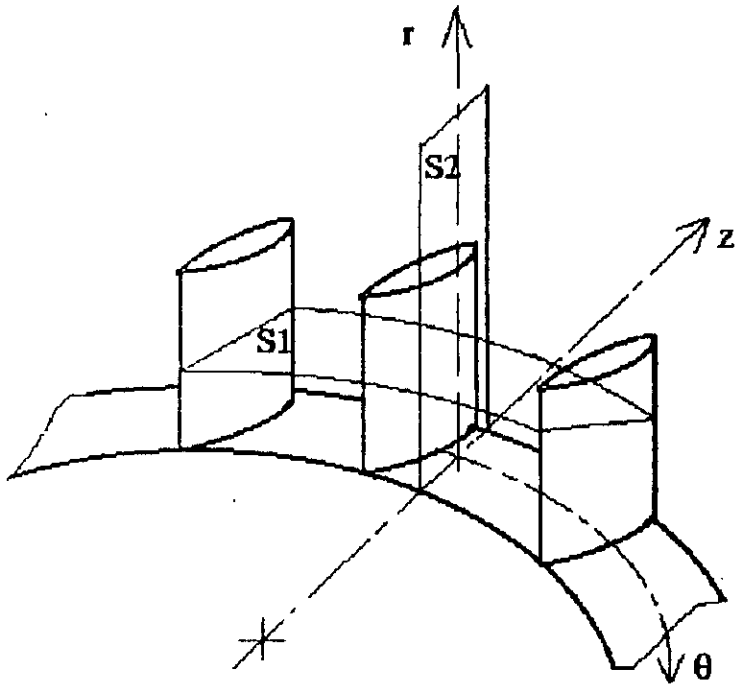
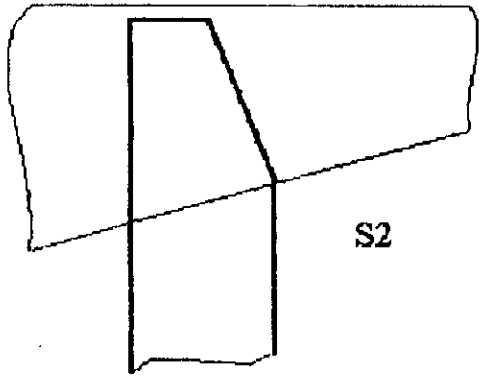
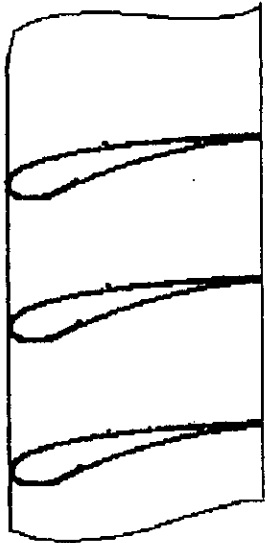


fig.1



fig(1.a)



S1

fig(1.b)

## I.2. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT MÉRIDIIONAL (MOYEN) :

### HYPOTHESES :

- ① Fluide parfait : Les forces de viscosité sont considérées nulles ( $\mu=0$ ),
- ② Écoulement stationnaire : La variation de toute grandeur dans le temps est nulle ( $\partial/\partial t=0$ )

### DERIVEES SPECIALES :

La résolution des équations de continuité, mouvement et énergie en bidimensionnel, nécessite l'introduction des dérivées spéciales afin de prendre en considération l'effet géométrique tridimensionnel.

Pour une grandeur  $q(r, \theta, z)$  les dérivées spéciales sont données par :

$$\begin{cases} \bar{\partial}q = \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{n_r}{m_\theta} \frac{\partial q}{\partial \theta} \\ \bar{\partial}q = \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{n_z}{m_\theta} \frac{\partial q}{\partial \theta} \end{cases}$$

Dans l'étude de l'écoulement méridional, les coordonnées  $r$  et  $z$  sont suffisantes pour définir n'importe quel point de la surface (S2).

### I.2.1. EQUATION DE CONTINUITÉ :

L'équation de continuité en coordonnées cylindriques est donnée par (écrite dans un repère relatif)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r w_r] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho w_\theta] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho w_z] = 0 \quad (I.1)$$

avec :  $w_r, w_\theta$  et  $w_z$  sont les composantes de  $\vec{w}$ .

introduisons les dérivées spéciales dans (I.1): (voir Annexe 1).

$$\frac{1}{r} \bar{\partial} [\rho r w_r] + \bar{\partial} [\rho w_z] = c(r, z) \quad (I.2)$$

### I.2.2. EQUATIONS DU MOUVEMENT :

Pour un écoulement stationnaire non visqueux l'équation du mouvement dans le repère relatif est:

$$2\omega \wedge \vec{W} - \vec{W} \wedge (\nabla \wedge \vec{W}) = \nabla I + T \nabla S \quad (I.3)$$

avec :

$\vec{W}$  : La vitesse de l'écoulement dans le repère relatif.

$\omega$  : La vitesse angulaire de la roue.

T : La température moyenne.

S : L'entropie.

I : La rothalpie ( $I = H - \omega r V_\theta$ )

où H : Enthalpie totale  $\left( H = h + \frac{V^2}{2} + gz \right)$

$V_\theta$  : composante selon  $\theta$  de vitesse dans le repère absolu.

La projection de l'équation vectorielle sur les différents axes est :

$$(I.4) \quad \begin{cases} -\frac{w_\theta}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r w_\theta) - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} + 2\omega r \right] + w_z \left( \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) = -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial S}{\partial r} \\ \frac{w_r}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r w_\theta) - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} + 2\omega r \right] - w_z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\partial w_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial \theta} + \frac{T}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} \\ -w_r \left( \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) + w_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\partial w_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{\partial I}{\partial z} + T \frac{\partial S}{\partial z} \end{cases}$$

or  $w_\theta = V_\theta - \omega r$  (composition des vitesses)

par suite on obtient :

$$(I.5) \quad \begin{cases} -\frac{w_\theta}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right] + w_z \left( \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) = -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial S}{\partial r} \\ \frac{w_r}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right] - w_z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\partial w_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial \theta} + \frac{T}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} \\ -w_r \left( \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) + w_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\partial w_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{\partial I}{\partial z} + T \frac{\partial S}{\partial z} \end{cases}$$

après l'introduction des dérivées spéciales on obtient : (voir Annexe 1)

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{w_\theta}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) \right] + w_z \left( \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) &= -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial S}{\partial r} + F_r \dots\dots\dots (I.6) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{w_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) + \frac{w_z}{r} \frac{\partial}{\partial z} (rV_\theta) &= F_\theta \dots\dots\dots (I.7) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} -w_r \left( \frac{\partial w_z}{\partial z} - \frac{\partial w_r}{\partial r} \right) - \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial z} (rV_\theta) &= -\frac{\partial I}{\partial z} + T \frac{\partial S}{\partial z} + F_z \dots\dots\dots (I.8) \end{aligned} \right.$$

avec :

$$\vec{F} = -\frac{1}{r\rho n_\theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} \vec{n}$$

### I.2.3. EQUATION D'ENERGIE :

L'Equation d'énergie est donnée par :  $w_r \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial I}{\partial \theta} + w_z \frac{\partial I}{\partial z} = Q$

Pour un écoulement adiabatique ( $Q = 0$ ) introduisant les dérivées spéciales; on obtient après calcul :

$$w_r \frac{\partial I}{\partial r} + w_z \frac{\partial I}{\partial z} = 0 \tag{I.9}$$

ou bien :

$$T \left( w_r \frac{\partial S}{\partial r} + w_z \frac{\partial S}{\partial z} \right) = 0 \tag{I.10}$$

L'équation (I.10) nous donne la variation d'entropie (S).

Pour un fluide non visqueux, le vecteur force  $\vec{F}$  est normal à la surface de courant s, et donc il est normal à la vitesse relative  $\vec{W}$ , ainsi :

$$\vec{W} \cdot \vec{F} = 0 \Leftrightarrow W_r \cdot F_r + W_\theta \cdot F_\theta + W_z \cdot F_z = 0 \tag{I.11}$$

et 
$$\vec{W} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow W_r \cdot n_r + W_\theta \cdot n_\theta + W_z \cdot n_z = 0 \tag{I.12}$$



des deux équations précédentes on obtient :

$$w_{\theta} = -w_r \frac{F_r}{F_{\theta}} - w_z \frac{F_z}{F_{\theta}} \quad (I.13)$$

et

$$w_{\theta} = -w_r \frac{n_r}{n_{\theta}} - w_z \frac{n_z}{n_{\theta}} \quad (I.14)$$

d'où par identification on obtient :

$$\frac{F_r}{F_{\theta}} = \frac{n_r}{n_{\theta}} = \operatorname{tg} \lambda' \quad (I.15)$$

$$\frac{F_z}{F_{\theta}} = \frac{n_z}{n_{\theta}} = \operatorname{tg} \mu' \quad (I.16)$$

voir figure 2

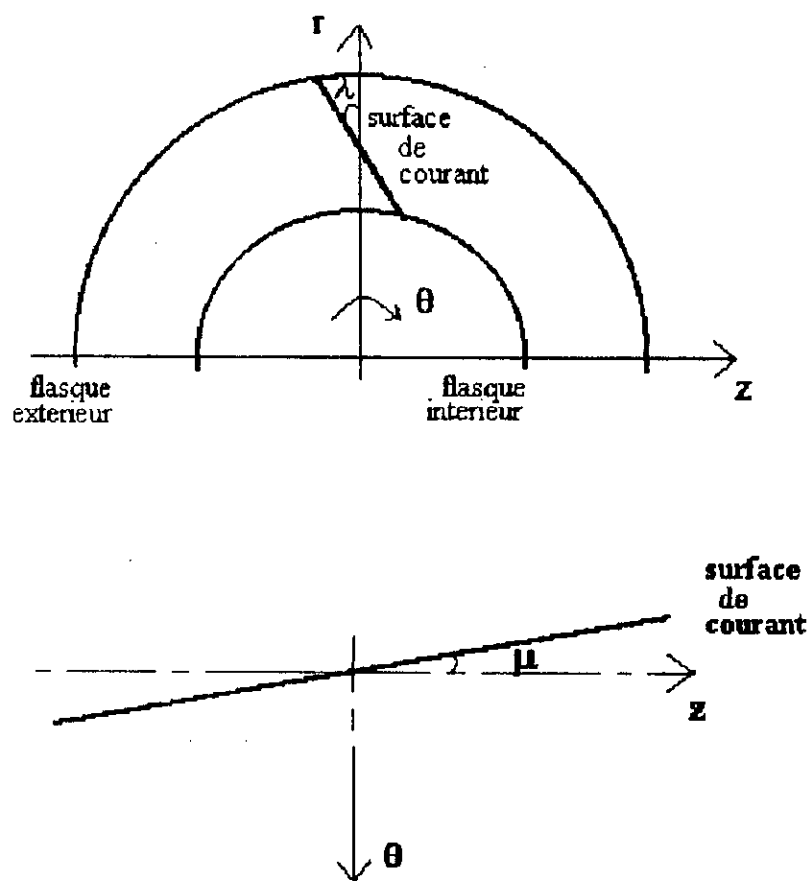


Fig.2

et par suite :

$$w_{\theta} = -w_r \operatorname{tg} \lambda' - w_z \operatorname{tg} \mu' \quad (\text{I.17})$$

L'équation (I.17) représente la condition géométrique, qui permet au fluide de rester sur la surface moyenne de courant.

Afin d'obtenir une équation pour la fonction de courant,  $WU$  [4] a introduit un facteur d'intégration  $B$  dans l'équation de continuité de façon à avoir :

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\rho Bw_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho Bw_z) = 0 \quad (\text{I.18})$$

en dérivant, on obtient :

$$B \frac{\partial}{\partial r}(r\rho w_r) + (r\rho w_r) \frac{\partial B}{\partial r} + B \frac{\partial}{\partial z}(r\rho w_z) + (r\rho w_z) \frac{\partial B}{\partial z} = 0 \quad (\text{I.19})$$

ou encore :

$$B \frac{\partial}{\partial r}(r\rho w_r) + (r\rho w_r) \frac{\partial B}{\partial r} + rB \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_z) + (r\rho w_z) \frac{\partial B}{\partial z} = 0 \quad (\text{I.20})$$

en divisant par  $B \cdot r$ , on aura :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho w_r) + \frac{\rho w_r}{B} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_z) + \frac{\rho w_z}{B} \frac{\partial B}{\partial z} = 0 \quad (\text{I.21})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho w_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_z) = - \left[ \frac{\rho w_r}{B} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\rho w_z}{B} \frac{\partial B}{\partial z} \right] \quad (\text{I.22})$$

Le premier membre de l'égalité dans l'équation (I.22) représente l'équation de continuité; ainsi:

$$- \left[ \frac{\rho w_r}{B} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\rho w_z}{B} \frac{\partial B}{\partial z} \right] = C(r,z) \quad (\text{I.23})$$

où :  $B = \frac{\text{Largeur circonférentielle du canal entre aubes}}{\text{Pas d'aube}}$

#### 1.2.4. INTRODUCTION DE LA FONCTION DE COURANT :

On introduit la fonction de courant de façon à ce que l'équation de continuité soit vérifiée pour tout  $r, z$ .

L'équation de continuité est :

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\rho Bw_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho Bw_z) = 0$$

on a :

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = r\rho Bw_z \quad (I.24)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -r\rho Bw_r \quad (I.25)$$

des équations (I.17) et (I.18) on obtient :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}(r\rho Bw_z) \quad (I.26)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial z}(r\rho Bw_r) \quad (I.27)$$

l'équation (I.26) donne :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = w_z \frac{\partial}{\partial r}(r\rho B) + (r\rho B) \frac{\partial w_z}{\partial r} \quad (I.28)$$

d'où on obtient :

$$\frac{\partial w_z}{\partial r} = \frac{1}{(r\rho B)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - w_z \frac{\partial}{\partial r} [\ln(r\rho B)] \quad (I.29)$$

de même l'équation (I.27) donne :

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = w_r \frac{\partial}{\partial z}(r\rho B) + (r\rho B) \frac{\partial w_r}{\partial z} \quad (I.30)$$

alors :

$$\frac{\bar{\partial} w_r}{\partial z} = -\frac{1}{(r\rho B)} \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial z^2} - w_r \frac{\bar{\partial}}{\partial z} [\ln(r\rho B)] \quad (I.31)$$

Afin d'obtenir une formulation de l'équation de mouvement radial en fonction de courant, on substitut les équations (I.29) et (I.31) dans l'équation (1.6); ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{(r\rho B)} \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial z^2} - w_r \frac{\bar{\partial}}{\partial z} [\ln(r\rho B)] - \frac{1}{(r\rho B)} \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial r^2} - w_z \frac{\bar{\partial}}{\partial r} [\ln(r\rho B)] \\ & = \frac{1}{w_z} \left[ -\frac{\bar{\partial} I}{\partial r} + T \frac{\bar{\partial} S}{\partial r} + \frac{w_\theta}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} (rV_\theta) + F_r \right] \end{aligned} \quad (I.32)$$

on aura après calcul :

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} [\ln(r\rho B)] + \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial z} \frac{\bar{\partial}}{\partial z} [\ln(r\rho B)] \\ & + \frac{(r\rho B)}{w_z} \left[ \frac{\bar{\partial} I}{\partial r} - T \frac{\bar{\partial} S}{\partial r} - \frac{w_\theta}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} (rV_\theta) - F_r \right] \end{aligned} \quad (I.33)$$

avec :  $w_z = \frac{1}{r\rho B} \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r}$  et  $w_r = -\frac{1}{r\rho B} \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial z}$

De la même façon; après substitution des équations (I.24) et (I.25) dans l'équation (I.8), on obtient l'équation du mouvement axial en fonction de courant:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} [\ln(r\rho B)] + \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial z} \frac{\bar{\partial}}{\partial z} [\ln(r\rho B)] \\ & - \frac{(r\rho B)}{w_r} \left[ \frac{\bar{\partial} I}{\partial z} - T \frac{\bar{\partial} S}{\partial z} - \frac{w_\theta}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial z} (rV_\theta) - F_z \right] \end{aligned} \quad (I.34)$$

Les équations (I.33) et (I.34) sont les deux formes de l'équation de  $WU$  [4], cela nous permet d'utiliser l'une des deux formes, pour obtenir une solution de la fonction de courant qui satisfait toutes les équations gouvernant l'écoulement réversible sur la surface de courant moyenne.

Les deux dernières formes de l'équation principale de  $WU$  [4] sont identiques par suite on a :

$$\frac{(r\rho B)}{w_z} \left[ \frac{\partial I}{\partial r} - T \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) - F_r \right] = - \frac{(r\rho B)}{w_r} \left[ \frac{\partial I}{\partial z} - T \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial z} (rV_\theta) - F_z \right]$$

Ce qui justifie le fait de suffisance de la résolution d'une seule équation des deux formes de l'équation principale de  $C.H.WU$  [4], afin d'obtenir la fonction de courant.

En plus des hypothèses prises précédemment, on considère l'axisymétrie des surfaces de courant ce qui revient à annuler les variations des grandeurs vectorielles par rapport à la direction circonférentielle, et ainsi les dérivées spéciales coïncident avec les dérivées partielles.

On considère ainsi que l'évolution isentropique du fluide étudié, ce qui supprime toute variation d'entropie.

Compte tenu de toutes ces hypothèses l'équation de  $C.H.WU$  [4] donnant la fonction de courant est la suivante :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = q(r, z)$$

avec :

$$q(r, z) = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} [\ln(r\rho B)] + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} [\ln(r\rho B)] + \frac{(r\rho B)}{w_z} \left[ \frac{\partial I}{\partial r} - T \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) - F_r \right] \quad (I.35)$$

### I.2.5. CONDITIONS AUX LIMITES :

La fonction de courant, solution de l'équation différentielle (I.27) doit vérifier les conditions aux limites suivantes :

$$\psi_2 - \psi_1 = q$$

avec :

- $\psi_1$  : la valeur de la fonction de courant sur le flasque avant (carter).
- $\psi_2$  : la valeur de la fonction de courant sur le flasque arrière (moyeu).
- $q$  : le débit massique.

### RECAPITULATION :

Pour un écoulement stationnaire, parfait, axisymétrique et isentropique à travers une turbomachine axiale, l'équation de *C.H. WU* [4] dans le plan méridional est :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = q(r, z)$$

$$\text{où } \Delta\psi = q(r, z)$$

avec :

$$q(r, z) = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} [\ln(r\rho\beta)] + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} [\ln(r\rho\beta)] \\ + \frac{(r\rho\beta)}{w_r} \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial r} - T \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{w_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) - \gamma \right]$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont donnés suivant le domaine d'étude :

a. En amont ou en aval de la roue :

$$\alpha = H; \beta = 1; \gamma = 0$$

b. Dans la roue :

$$\alpha = I = H - \omega \Gamma$$

avec  $\Gamma = r V_\theta$  ( $\Gamma$ : moment cinétique)

$$\beta = B \text{ (hauteur d'aube).}$$

$$\gamma = F_r = F_\theta \operatorname{tg} \lambda'$$

### 1.3. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT AUBE A AUBE (EQUILIBRE RADIAL) :

On adopte les mêmes hypothèses que pour l'écoulement méridional.

#### 1.3.1. EQUATION DE CONTINUITÉ :

La position d'un point sur la surface (S1) est décrite par ses coordonnées  $m$  et  $\theta$  (voir fig.3).

on a :

$$(1.36) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial m} = \cos\alpha \frac{\partial}{\partial z} + \sin\alpha \frac{\partial}{\partial r} \\ \vec{W} = w_\theta \vec{i}_1 + w_m \vec{i}_2 \\ \frac{w_m}{w_\theta} = \operatorname{tg}\beta = r \frac{d\theta}{dm} \\ w_m^2 = w_z^2 + w_r^2 \end{cases}$$

en prenant compte des hypothèses et des équations (1.36), l'équation de continuité s'écrira comme suit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho w_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial m} (\rho r w_m) + \rho w_m K_n = 0 \quad (1.37)$$

avec :

$K_n$  : courbure de la ligne méridienne PP' tel que :

$$K_n = \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial m} \quad \text{où } b: \text{ hauteur d'aubages.}$$

or  $b = f(m)$

d'où l'équation (1.37) devient :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (b \rho w_\theta) + \frac{\partial}{\partial m} (b \rho r w_m) = 0 \quad (1.38)$$

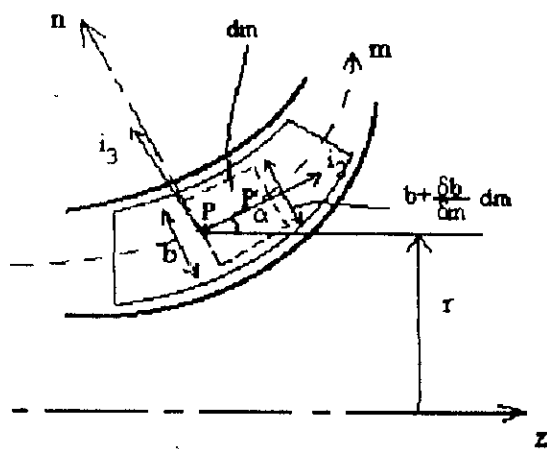
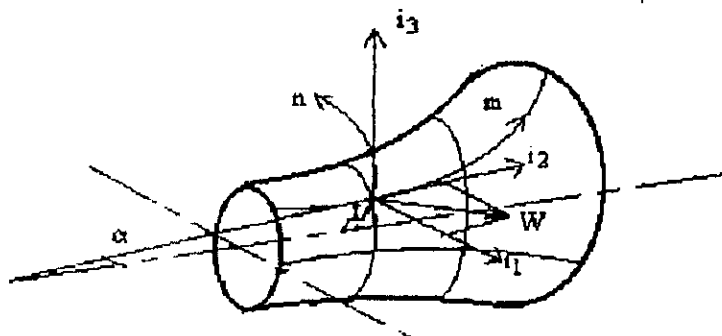


Fig.3

la fonction de courant qui satisfait l'équation (I.38) est telle que :

$$(I.39) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial m} = b \rho w_0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -b \rho r w_m \end{cases}$$



### I.3.2. EQUATION DU MOUVEMENT :

Etant donné que  $\vec{W}$  doit vérifier l'équation de mouvement simplifiée donnée en coordonnées  $(m, \theta, n)$  par la forme :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{W} + 2\vec{\omega} = & \left[ \frac{\partial w_m}{\partial n} - w_m K_m \right] \vec{i}_1 + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial n} (r w_\theta + \omega r^2) \right] \vec{i}_2 \\ & + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial w_m}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial m} (r w_\theta + \omega r^2) \right] \vec{i}_3 = \vec{0} \end{aligned} \quad (I.40)$$

avec :  $K_m = -\frac{1}{W_m} \frac{\partial W_m}{\partial n}$  est la courbure de la surface (S1) au point P.

$n$  : étant la normale au point P à la surface (S1).

La projection de l'équation (I.40) sur  $\vec{i}_3$  donne :

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial w_m}{\partial \theta} - \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial m} \right) = 2\omega \frac{\partial r}{\partial m} \quad (I.41)$$

on substitut le système (I.39) dans l'équation (I.41), et comme  $b$  et  $r$  ne varient pas en fonction de  $\theta$ , on obtient l'équation suivante :

$$\frac{1}{br} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] + r \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{1}{\rho b} \frac{\partial \psi}{\partial m} \right] + \frac{\partial r}{\partial m} \frac{1}{b\rho} \frac{\partial \psi}{\partial m} = -2\omega r \frac{\partial r}{\partial m} \quad (I.40)$$

On introduit la fonction de courant adimensionnelle  $Y$  définie par :

$$Y = -\frac{\psi}{q} \quad (I.41)$$

où

$q$  : désigne le débit massique traversant la roue entre deux aubes adjacentes et deux surfaces (S1) distantes de  $\Delta n = 1$ .

ainsi on aura :

$$(I.44) \quad \begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial m} = \frac{b\rho w_\theta}{q} \\ \frac{\partial Y}{\partial \theta} = -\frac{b\rho r w_m}{q} \end{cases}$$

sachant que  $\frac{\partial r}{\partial m} = \sin \alpha$ , et en passant à la fonction de courant adimensionnelle  $Y$ , l'équation (I.40) devient alors après réarrangement :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial m^2} - \frac{1}{\rho r^2} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \left[ \frac{\sin \alpha}{r} - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial m} (br) \right] \frac{\partial Y}{\partial m} = \frac{2b\rho w}{q} \sin \alpha \quad (I.45)$$

### I.3.3. CONDITIONS AUX LIMITES :

La fonction de courant adimensionnelle  $Y$ , solution de l'équation différentielle (I.45), doit vérifier les conditions aux limites du domaine d'étude, soit une surface de courant (S1) définie par la rotation autour de l'axe de la machine d'une ligne de courant méridienne : celle-ci se trouve découpée périodiquement par les aubes dans la direction périphérique en domaines élémentaires tel que le montre la figure 4.

Compte tenu de la définition de  $Y$  et si  $Y_{II}$  et  $Y_I$  sont les valeurs de  $Y$  correspondant respectivement aux limites FG et BC du domaine élémentaire, on doit avoir :

$$Y_{II} - Y_I = \frac{\text{debit massique passant entre BC et FG}}{q} \quad (I.46)$$

ainsi pour :

$$Y_I = 0 \quad \text{sur BC} \quad (a)$$

$$Y_{II} = 1 \quad \text{sur FG} \quad (b)$$

alors :

$$Y_{II} - Y_I = 1 \quad (I.47)$$

Les conditions (a) et (b) sont complètement équivalentes aux conditions de tangence des vecteurs vitesses à la surface des aubes:

- L'écoulement est supposé uniforme loin à l'amont AH et à l'aval DE, et la connaissance de  $\vec{W}$  nous permet de connaître les valeurs de la fonction de courant sur ces frontières.

- On a de plus la condition de périodicité pour les deux domaines comprise entre AB, HG et CD, FE.

donne :

$$(I.48) \quad \begin{cases} Y_{HG} = Y_{AB} + 1 \\ Y_{FE} = Y_{CD} + 1 \end{cases}$$

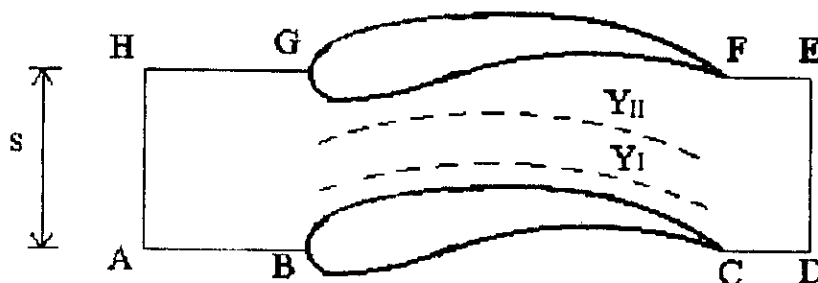


fig.4

**\* CONDITION DE KUTTA-JOUKOWSKI :**

En plus des conditions aux limites et des conditions de périodicité de l'écoulement, la condition de *Kutta-Joukowski* doit être satisfaite, dont l'énoncé est :

Pour un écoulement de fluide parfait autour d'un profil dont l'intrados et l'extrados se terminent suivant une tangente commune, et la ligne de courant issue du bord de fuite doit quitter ce dernier suivant cette tangente.

Vérifier la condition de *Kutta-Joukowski* sous cette forme pose un problème dans le cas de profils à bord arrondi ou en forme de dièdre, et la position du point d'arrêt n'étant pas connue, une petite erreur commise sur sa détermination peut en effet engendrer une grande erreur dans les résultats. Il est alors préférable de remplacer cette condition par une symétrie de la répartition des pressions ou des vitesses relatives sur l'intrados et l'extrados du profil, le plus près possible du bord de fuite.

En résumé pour un profil donné, à un angle d'attaque donné, le fluide quitte le bord de fuite sans perturbation si :

- Le bord de fuite est un angle fini, donc c'est un point d'arrêt pour  $V_1 = V_2 = 0$ .
- Le bord de fuite a la forme de biseau, les vitesses quittant l'intrados et l'extrados, sont égales en module, et tangentes à la ligne médiane.

### RECAPITULATION :

L'équation donnant la fonction de courant adimensionnelle  $y$  de l'écoulement dans une turbomachine centrifuge dans le plan aube à aube est donnée par :

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial m^2} - \frac{1}{\rho r'} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \left[ \frac{\sin \alpha}{r} - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial m} (br) \right] \frac{\partial Y}{\partial m} = \frac{2b\rho\omega}{q} \sin \alpha$$

en tenant compte des hypothèses suivantes :

- ① Fluide stationnaire  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ .
- ② Fluide non visqueux  $\mu = 0$ .
- ③ Ecoulement adiabatique  $Q = 0$ .
- ④ Conservation de la rothalpie  $\delta I = 0$ .
- ⑤ Ecoulement réversible.

## **CHAPITRE II**

## II. FORMULATION :

### II.1. INTRODUCTION :

Ce travail est une introduction à la résolution du problème de la mécanique des fluides par la *méthode des éléments finis*.

La *méthode des éléments finis* s'est avérée sans discussion possible comme l'outil de base dans la résolution numérique des problèmes de la mécanique des solides. La situation se présente par contre de manière très différente en mécanique des fluides où les méthodes de différence finis, ont atteint malgré leur manque de souplesse un stade de développement remarquable. Ce n'est qu'assez récemment que la *méthode des éléments finis* a été appliquée systématiquement à ce type de problèmes.

Néanmoins, son développement est actuellement très rapide et on dispose désormais d'un bon nombre de techniques utiles et efficaces.

Il n'en demeure pas moins à notre avis que la *méthode des éléments finis* s'affirme comme un instrument très puissant de résolution numérique en mécanique des fluides.

Nous avons choisi de traiter l'écoulement méridional d'un fluide stationnaire, non visqueux et compressible à travers une roue de turbomachine centrifuge, le modèle sera étendu par la suite, après convergence à un écoulement aube à aube.

## II.2. FORMULATION DU PROBLEME :

### II.2.1. PROBLEME CONTINU :

La *méthode des éléments finis* est reconnue comme un outil général de résolution d'équations aux dérivées partielles. (voir fig.1).

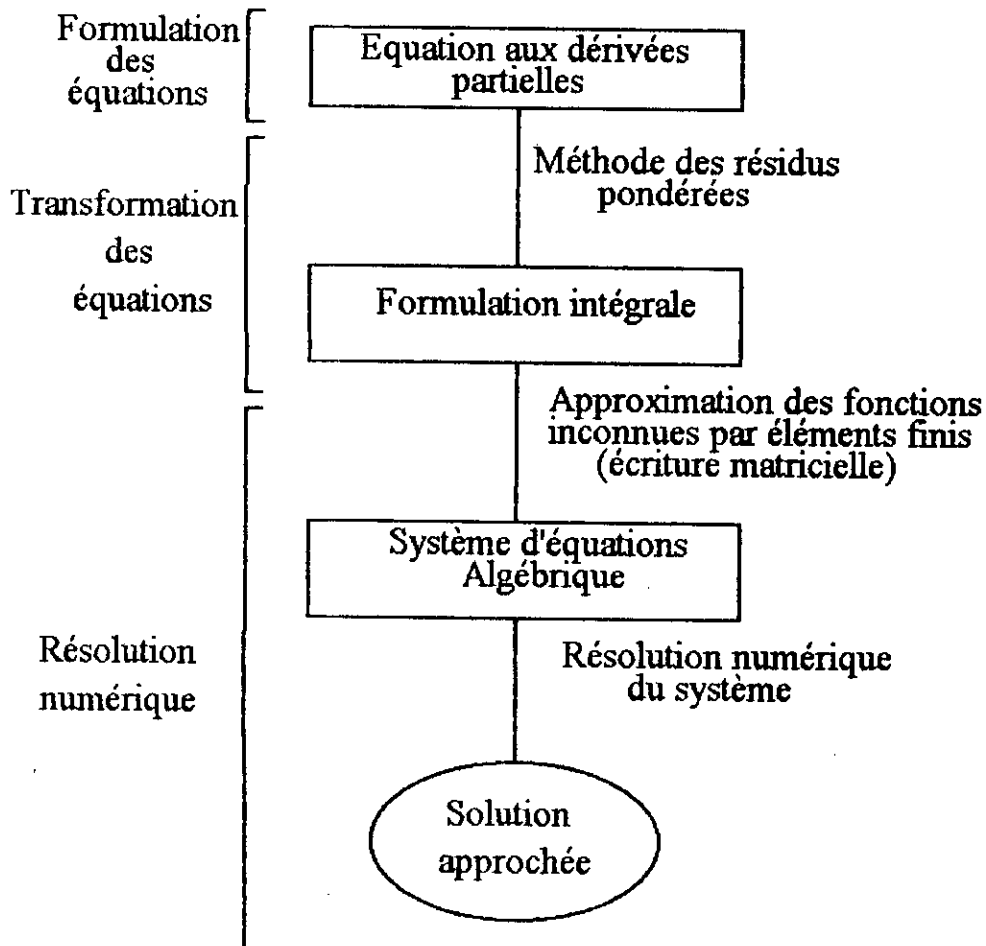


fig.1

Notre problème est régi par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \Delta_1 \frac{\partial \psi}{\partial r} - \Delta_2 \frac{\partial \psi}{\partial z} = \Delta_3 \frac{\partial I}{\partial r} - \Delta_4 \frac{\partial \Gamma}{\partial r} - \Delta_5 F_r \quad (\text{II.1})$$

avec :

$\psi$  : Fonction de courant

On définit les différents termes de l'équation différentielle de la manière suivante:

$$(II.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = \frac{1}{\rho r B} \\ \Delta_2 = \rho r B \\ \Delta_3 = \frac{\rho r B}{w_r} \\ \Delta_4 = \frac{\rho B w_\theta}{w_z} \end{array} \right.$$

$$F_r = F_\theta \operatorname{tg} \lambda' \quad (II.3)$$

$$F_\theta = -\frac{w_r}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + \frac{w_z}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \quad (II.4)$$

$$\Gamma = r V_\theta$$

$$\text{avec : } V_\theta = w_\theta + r \omega$$

par suite :

$$\Gamma = r^2 \omega + r w_\theta \quad (II.5)$$

$$w_\theta = -w_r \operatorname{tg} \lambda' - w_z \operatorname{tg} \mu' \quad (II.6)$$

d'autre part :

$$I = h + \frac{V^2}{2} - \omega r V_\theta \quad (II.7)$$

avec :

$$V = \left( w_r^2 + w_\theta^2 + w_z^2 + \omega^2 r^2 + 2\omega r V_\theta \right)^{\frac{1}{2}} \quad (II.8)$$

$$\text{et } h = h_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(\gamma-1)} \quad (II.9)$$

L'équation aux dérivées partielles (II.1) permet de trouver la valeur de la fonction de courant  $\psi$ .



On utilise les équations suivantes :

$$w_r = -\frac{1}{\rho r B} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (\text{II.10})$$

$$w_z = \frac{1}{\rho r B} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (\text{II.11})$$

pour déterminer les composantes de la vitesse: radiale  $w_r$ , axiale  $w_z$  et par suite la composante circonférentielle  $w_\theta$ .

On calcule la masse volumique  $\rho$  en utilisant la formule suivante : (voir Annexe 4)

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(\gamma-1)} = \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M_0^2 \left[ 1 - \frac{w_r^2 + V_\theta^2 + w_z^2 - 2\omega r V_\theta}{V_0^2} \right] \right\} \quad (\text{II.12})$$

Pour la résolution de notre problème, on choisit le canal entre deux aubes successives comme volume de contrôle, en tenant compte des conditions aux limites suivantes :

- $\bar{\psi}_1 = 0$  sur  $\Sigma_1$

voir fig.2

- $\bar{\psi}_2 = 1$  sur  $\Sigma_2$

avec :

$\bar{\psi}$  : est la fonction de courant adimensionnelle.

$\Sigma_1$  : surface entre fluide et aube inférieure.

$\Sigma_2$  : surface entre fluide et aube supérieure.

et  $\psi_2 - \psi_1 = q$

où  $q$  : est le débit massique passant par tout le canal.

sachant que :

$$\bar{\psi} = \frac{\text{debit massique passant}}{q}$$

alors:  $\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1 = 1$

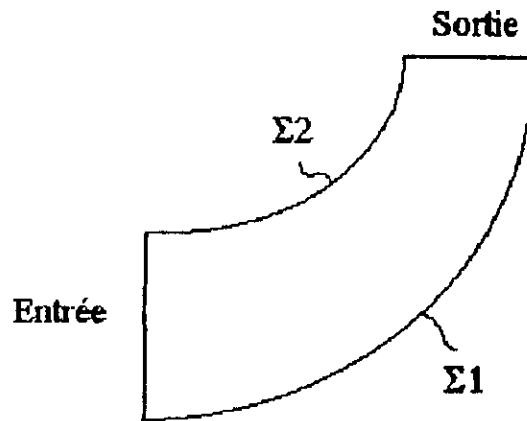


fig.2 Canal méridional.

### II.2.2. PROBLEME VARIATIONNEL :

Nous nous intéressons à la formulation variationnelle (ou intégrale) de l'équation aux dérivées partielles. La *méthode des éléments finis*, discrétise une formulation intégrale pour conduire à un système d'équations algébriques qui fournit une solution approchée du problème.

On introduit la *méthode des résidus pondérés* qui, en utilisant des fonctions de pondération, permet de passer d'un système d'équations aux dérivées partielles à une formulation intégrale.

### METHODE DES RESIDUS PONDERES :

#### A- RESIDUS :

Toute équation aux dérivées partielles, peut être écrite sous la forme :

$$\mathcal{L}(u) + f_v = 0 \quad (\text{II.13})$$

sur le domaine  $V_c$ .

en tenant compte des conditions aux limites, afin de bien cerner le problème.

On appelle résidu la quantité  $R(u)$  définie par :

$$R(u) = \mathcal{L}(u) + f_v \quad (\text{II.14})$$

avec :

$$R(u) = 0 \quad \text{quand } u \text{ est solution du problème .}$$

Etant donné que  $u$  est pratiquement une solution approchée de l'équation aux dérivées partielles, par conséquent le résidu sera proche de zéro ( $R(u) \approx 0$ ).

## B- FORME INTEGRALE :

La *méthode des résidus pondérés* consiste à chercher des fonctions  $u$  qui annulent la forme intégrale :

$$W(u) = \int_V \langle \phi \rangle \{ R(u) \} dV \quad (\text{II.15})$$

ou

$$W(u) = \int_V \langle \phi \rangle \{ \mathcal{L}(u) + f_v \} dV \quad (\text{II.16})$$

ainsi on aura :

$$\int_V \langle \phi \rangle \{ \mathcal{L}(u) + f_v \} dV = 0 \quad (\text{II.17})$$

avec :

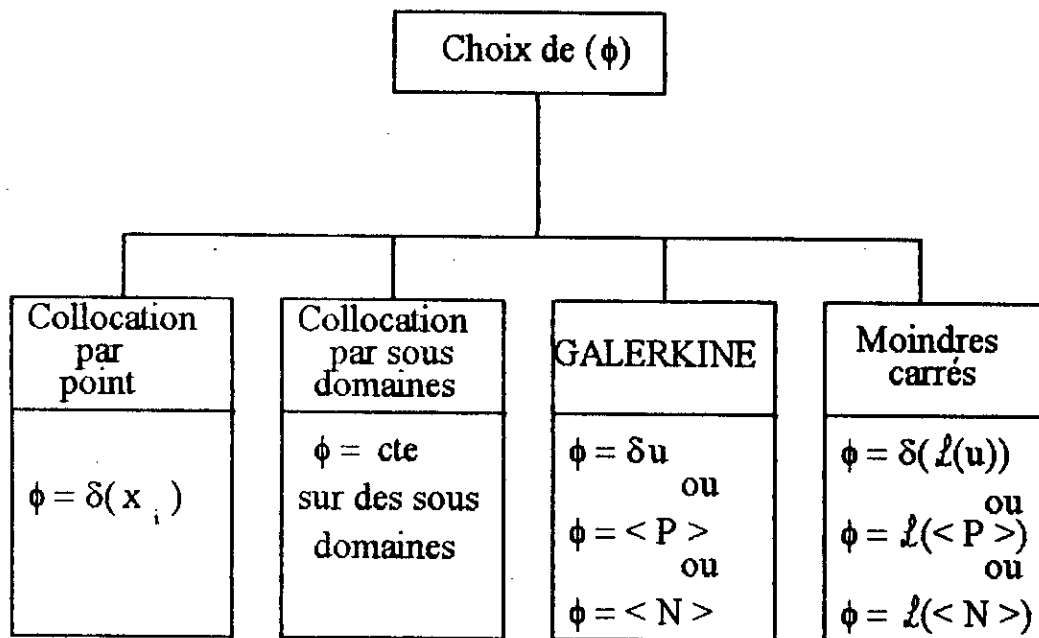
$\phi$  : fonction de pondération.

Toute solution  $U$  qui vérifie (II.13), vérifie nécessairement (II.17); par contre si  $U$  est solution de l'équation (II.17), elle est une solution approchée du problème.

C'est ainsi que nous utilisons en fait la *méthode des résidus pondérés*.

### C- CHOIX DES FONCTIONS DE PONDERATION :

Pour choisir la fonction de pondération  $\phi$ , on a différentes méthodes, qui se résument sur le tableau suivant : [8]



On choisit la *méthode de Galerkin* qui est la plus utilisée, et on prend  $\phi = \langle N \rangle$  comme fonction de pondération.

## II.3.DESCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS TRIANGULAIRES

### II.3.1.INTERPOLATION PAR ELEMENTS FINIS

#### TRIANGULAIRES :

Nous choisissons sur le domaine  $V$  un ensemble de  $n$  noeuds d'interpolation de coordonnées  $x_i$ , confondus ou non, avec les noeuds géométriques. Sur chaque élément  $V^e$ , nous utilisons une approximation nodale de la fonction exacte  $u_{ex}(x)$ :

$$u_{ex}(x) \approx u(x)$$

avec :

$$u(x) = \langle N_1(x) \ N_2(x) \dots \dots \dots N_{ne}(x) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{ne} \end{Bmatrix}$$

ou encore :

$$u(x) = \langle N(x) \rangle \{u_n\} \quad (II.18)$$

où  $x$  : appartient à  $V^e$ .

$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$  : Sont les valeurs de  $u_{ex}$  aux noeuds  $n^e$  d'interpolation de l'élément, ou variables nodales.

$N(x)$  : Sont les fonctions d'interpolation sur l'élément réel.

Remplaçons approximation sur l'élément réel par approximation correspondante sur l'élément de référence :

$$u_{ex}(\xi) \approx u(\xi)$$

avec 
$$u(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{u_n\} \quad (II.19)$$

et 
$$x(\xi) = \langle \bar{N}(\xi) \rangle \{u_n\} \quad (II.20)$$

où :

$u_n$  : Sont les variables nodales de l'élément.

$\langle N(\xi) \rangle$  : Sont les fonctions d'interpolations sur l'élément de référence.

$\langle \bar{N}(\xi) \rangle$  : Sont les fonctions de transformation géométrique.

### II.3.1.1. CHOIX DE L'ELEMENT :

Vue le caractère des équations aux dérivées partielles et la forme du domaine d'étude, on choisit *l'élément triangulaire à six noeuds*, dont trois noeuds sont aux sommets et les trois autres aux milieu de chaque côté.

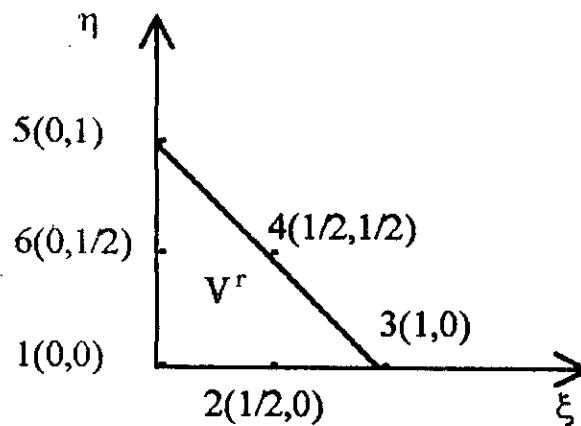
Le choix d'un triangle nous permet d'avoir un maillage qui épouse bien la forme du domaine d'étude.

L'ordre du degré du polynôme d'interpolation correspondant à l'élément choisit est de "deux".

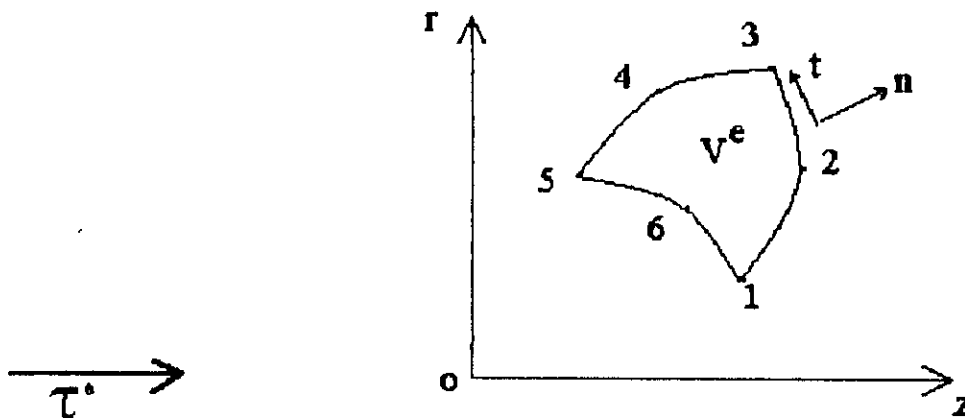
La continuité de l'élément est de type  $C^0$ :  $u$  et  $\frac{\partial u}{\partial n}$  sont continues sur chaque côté, donc sur tout le domaine, mais  $\frac{\partial u}{\partial n}$  est discontinue entre éléments.

De manière à simplifier la définition analytique des formes complexes; introduisant la notion de l'élément de référence :

Un élément de référence  $V^r$  est un élément de forme très simple repéré dans un espace de référence qui peut être transformé en chaque élément réel  $V^e$  par une transformation géométrique  $\tau^e$  : (voir fig.3).



Élément de référence



Élément réel

fig.3

L'élément ainsi choisi est un élément isoparamétrique car les fonctions de transformation géométrique  $\bar{N}(\xi)$  sont identiques aux fonctions d'interpolation  $N(\xi)$  ceci implique que les noeuds géométriques sont confondus avec les noeuds d'interpolations.

### II.3.1.2. MAILLAGE :

Il est toujours possible de recouvrir très exactement le domaine d'étude  $V$ , par l'ensemble des triangles  $V^e$ , appelés *éléments finis* et constituant une partition du domaine  $V$ , on dit ainsi qu'on a un maillage ou bien une triangulation (dans notre cas). (voir fig.4).

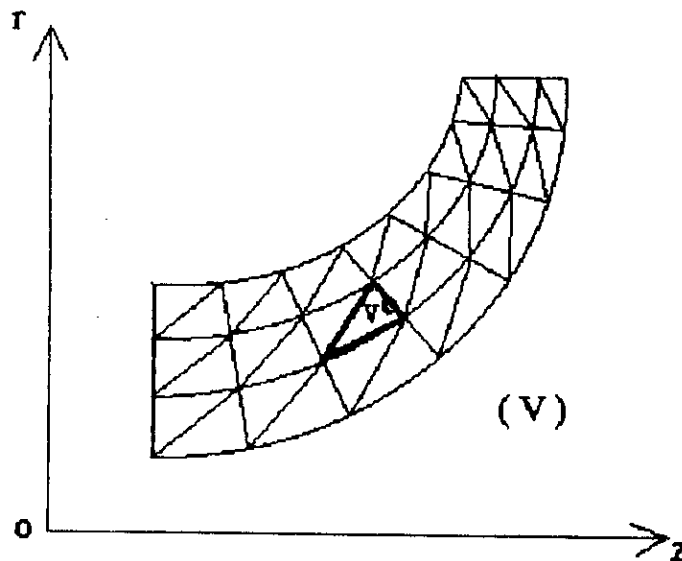


fig.4 Maillage du canal méridional

### II.3.1.3. REGLES DE PARTITIONS DU DOMAINE EN ELEMENTS:

La partition du domaine  $V$  en élément  $V^e$  doit respecter les deux règles suivantes :

❶ Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur leur frontière commune, si elle existe. Cette condition exclut le *recouvrement* de deux éléments.

Les frontières peuvent être des points, des courbes ou des surfaces.

❷ L'ensemble de tous les éléments  $V^e$  doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donné  $V$ . Nous excluons en particulier *les trous* entre éléments.

Lorsque la frontière du domaine  $V$  est constituée par des courbes ou des surfaces plus complexes que celles qui définissent les frontières des éléments, une erreur est inévitable, cette erreur est appelée *erreur de discrétisation géométrique*; elle peut être réduite en diminuant la taille des éléments, ou en augmentant l'ordre du degré du polynôme d'interpolation.

• SINGULARITE DE LA MATRICE JACOBIENNE :

La singularité de [ J ] en un point de l'élément de référence implique que la transformation de l'élément de référence vers l'élément réel n'est pas bijective. Cette singularité apparaît lorsque l'on déforme beaucoup l'élément de référence. Il est prudent de vérifier que le déterminant de la matrice jacobienne [ J ] soit toujours positif en tout point  $\xi$  de l'élément de référence.

Pour éviter cette singularité, ZIENKIEWICZ [14] propose les conditions suivantes:

- Les trois angles du triangle ne doivent pas être trop proche de 0° et de 180° .
- Les noeuds milieux sont situés dans le tiers central de chaque côté.

II.3.2. ECRITURE MATRICIELLE :

II.3.2.1. CALCUL DE LA FONCTION DE COURANT :

La forme intégrale élémentaire  $W^e$  est donnée par :

$$W^e(\psi) = \int_{V^e} \langle \phi \rangle \{ R(\psi) \} dV = 0 \quad (II.21)$$

où :

$\phi \equiv \langle N \rangle$  : fonction de pondération

et

$$R(\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \Delta_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta_2}{\partial x} - \Delta_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Delta_2}{\partial z} - \Delta_3 \frac{\partial I}{\partial x} + \Delta_4 \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \Delta_3 F_r \quad (II.22)$$

avec :

$$(II.23) \quad \begin{cases} \ell(\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \Delta_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta_2}{\partial x} - \Delta_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Delta_2}{\partial z} \\ f_v = -\Delta_3 \frac{\partial I}{\partial x} + \Delta_4 \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \Delta_3 F_r \end{cases}$$



rappelons que :

$$R(\psi) = \mathcal{L}(\psi) + f_v \quad (\text{II.24})$$

si on pose :

$$\mathcal{L}(\psi) = \mathcal{L}_1(\psi) + \mathcal{L}_2(\psi) \quad (\text{II.25})$$

avec :

$$\mathcal{L}_1(\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (\text{II.26-a})$$

et

$$\mathcal{L}_2(\psi) = -\Delta_1 \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Delta_2}{\partial r} - \Delta_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Delta_2}{\partial z} \quad (\text{II.26-b})$$

d'où la forme intégrale  $W^e$  devient :

$$\int_v \langle N \rangle \{ \mathcal{L}_1(\psi) \} dV + \int_v \langle N \rangle \{ \mathcal{L}_2(\psi) \} dV = \int_v \langle N \rangle \{ f_v \} dV \quad (\text{II.27})$$

ainsi on aura à calculer trois intégrales :

- calcul de :  $\int_v \langle N \rangle \{ \mathcal{L}_1(\psi) \} dV = [KE1] \{ \psi_i \} \quad (\text{II.28})$

KE1 : matrice de rigidité élémentaire représentant l'opérateur  $\mathcal{L}_1(\psi)$ .

En substituant (II.26-a) dans (II.28) et en remplaçant  $dV$  par  $\det J d\xi d\eta$  on obtient :

$$[KE1] \{ \psi_i \} = \int_v \langle N \rangle \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right\} \det J d\xi d\eta \quad (\text{II.29})$$

avec :

$$\psi = \langle N \rangle \{ \psi_i \}$$

où  $N$  : fonction de forme.

En utilisant l'Annexe 3, on pourra écrire les différentes dérivées partielles dans un domaine de référence  $V^e$  en  $\xi$  et  $\eta$  comme variables, on obtient la forme des éléments de la matrice KE1; sous la forme suivante : (II.30)

$$\begin{aligned}
 KE1(I, J) = \int_v \left\{ N(I) \left[ T1(1,1) \frac{\partial N}{\partial \xi}(J) + T1(1,2) \frac{\partial N}{\partial \eta}(J) + T2(1,1) \frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2}(J) \right. \right. \\
 + T2(1,2) \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2}(J) + T2(1,3) \frac{\partial^2 N}{\partial \xi \partial \eta}(J) + T1(2,1) \frac{\partial N}{\partial \xi}(J) + T1(2,2) \frac{\partial N}{\partial \eta}(J) \\
 \left. \left. + T2(2,1) \frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2}(J) + T2(2,2) \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2}(J) + T2(2,3) \frac{\partial^2 N}{\partial \xi \partial \eta}(J) \right] \right\} \det J d\xi d\eta
 \end{aligned}$$

avec :  $I, J = \overline{1, 6}$

• calcul de :  $\int_v \langle N \rangle \{ \mathcal{L}_2(\psi) \} dV = [KE2] \{ \psi_i \}$  (II.31)

KE2: matrice de rigidité élémentaire représentant l'opérateur  $\mathcal{L}_2(\psi)$ .  
En substituant (II.26-b) dans (II.31) et en remplaçant  $dV$  par  $\det J d\xi d\eta$

on obtient :

$$[KE2] \{ \psi_i \} = \int_v \langle N \rangle \left\{ -\Delta_1 \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Delta_2}{\partial r} - \Delta_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Delta_2}{\partial z} \right\} \det J d\xi d\eta \quad (II.32)$$

avec :

$$(II.33) \quad \begin{cases} \psi = \langle N \rangle \{ \psi_i \} \\ \Delta_1 = \langle N \rangle \{ \Delta_1^i \} \\ \Delta_2 = \langle N \rangle \{ \Delta_2^i \} \end{cases}$$

où :

$\psi_i, \Delta_1^i, \Delta_2^i$  : sont respectivement les valeurs des variables  $\psi, \Delta_1, \Delta_2$ .  
 $N$  : fonction de forme.

En utilisant l'Annexe 3, on obtient les éléments de la matrice KE2; sous la forme suivante : (II.34)

$$\begin{aligned}
 KE2(I, J) = \int_v \left\{ N(I) N(J) \det J \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial \xi}(I) + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial \eta}(I) \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial \xi}(J) \right. \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial \eta}(J) \right) + \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial N}{\partial \xi}(I) + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial N}{\partial \eta}(I) \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial N}{\partial \xi}(J) + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial N}{\partial \eta}(J) \right) \right] \right\} d\xi d\eta
 \end{aligned}$$

avec :  $I, J = \overline{1, 6}$

• calcul de : 
$$\int_V \langle N \rangle \{-f_v\} dV = FE \quad (II.35)$$

FE: Vecteur force élémentaire représentant  $f_v$ .

où: 
$$f_v = -\Delta_3 \frac{\partial I}{\partial \alpha} + \Delta_4 \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} + \Delta_3 F_r$$

et  $dV = \det J d\xi d\eta$

ainsi on a :

$$FE = \int_V \langle N \rangle \left\{ \Delta_3 \frac{\partial I}{\partial \alpha} \frac{\partial \Delta_2}{\partial \alpha} - \Delta_4 \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} - \Delta_3 F_r \right\} \det J d\xi d\eta$$

sachant que:

$$(II.36) \quad \begin{cases} \Delta_3 = \langle N \rangle \{ \Delta_3^i \} \\ \Delta_4 = \langle N \rangle \{ \Delta_4^i \} \\ \Gamma = \langle N \rangle \{ \Gamma_i \} \\ I = \langle N \rangle \{ I_i \} \\ F_r = \langle N \rangle \{ F_{r_i} \} \end{cases}$$

$\Delta_3^i, \Delta_4^i, \Gamma_i, I_i, F_{r_i}$  : sont respectivement les valeurs des variables  $\Delta_3, \Delta_4, \Gamma, I, F_r$  aux noeuds.

N: Fonction de forme.

En utilisant l'Annexe 3, on obtient des éléments du vecteur force élémentaire FE; sous la forme suivante: (II.37)

$$\begin{aligned}
 FE(I) = \int_v \left\{ N(I)N(J) \det J \left[ \Delta_3(\text{kloce}(I)) \cdot I(\text{kloce}(I)) \right. \right. \\
 - \Delta_3(\text{kloce}(I)) \cdot \Gamma(\text{kloce}(I)) \left. \left. \right] \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial \xi}(I) + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial \eta}(I) \right) \right. \\
 - (N(I)N(J) \det J) \left[ w_z(\text{kloce}(I)) \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial N}{\partial \xi}(I) + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial N}{\partial \eta}(I) \right) \right. \\
 \left. \left. - w_r(\text{kloce}(I)) \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial \xi}(I) + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial \eta}(I) \right) \right] \left( \tan(\lambda(\text{kloce}(I))) \right) \right. \\
 \left. \Gamma(\text{kloce}(I)) \Delta_3(\text{kloce}(I)) / r(\text{kloce}(I)) \det J \right\} d\xi d\eta
 \end{aligned}$$

avec :  $I, J = \overline{1, 6}$

et  $\text{kloce}$ : est la table de localisation donnant les numéros des noeuds constituant chaque élément.

Après avoir calculé les différentes intégrales, on obtient après assemblage un système d'équation d'inconnue  $\psi$  à déterminer.

### II.3.2.2. CALCUL DES COMPOSANTES DES VITESSES :

On calcule les composantes  $w_r, w_z$  à partir de la fonction de courant  $\psi$ , en utilisant:

$$(II.38) \quad \begin{cases} w_r = -\Delta_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ w_z = \Delta_1 \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$$

et les formes intégrales associées sont:

$$W^c 1 = \int_{V^c} \phi \{R(w_r)\} dV = 0 \quad (\text{II.39})$$

$$W^c 2 = \int_{V^c} \phi \{R(w_z)\} dV = 0 \quad (\text{II.40})$$

sachant que:

$$(\text{II.41}) \quad \begin{cases} \mathcal{L}(w_r) = W_r \\ \mathcal{L}(w_z) = W_z \end{cases}$$

et:

$$(\text{II.42}) \quad \begin{cases} FW1 = -\Delta_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ FW2 = \Delta_1 \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$$

on aura :

$$(\text{II.43}) \quad \begin{cases} R(w_r) = w_r + \Delta_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ R(w_z) = w_z - \Delta_1 \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$$

avec:

$$\begin{aligned} \phi &= \langle N \rangle \\ \psi &= \langle N \rangle \{ \psi_i \} \\ \Delta_1 &= \langle N \rangle \{ \Delta_1^i \} \\ w_r &= \langle N \rangle \{ w_{r_i} \} \\ w_z &= \langle N \rangle \{ w_{z_i} \} \\ dV &= \det J d\xi d\eta \end{aligned}$$

D'où après substitution dans (II.43), on obtient deux systèmes d'équations:

$$(\text{II.44}) \quad \begin{cases} [KW] \{ w_r \} = FW1 \\ [KW] \{ w_z \} = FW2 \end{cases}$$

avec :

KW: est la matrice de rigidité élémentaire correspondant aux deux systèmes.

où :

$$KW = \int_{V_e} \langle N \rangle^T \langle N \rangle \det J d\xi d\eta \quad (\text{II.45})$$

et :

$$(\text{II.46}) \quad \begin{cases} \text{FW1} = \int_{V_e} -(\Delta_i^i)(\psi_i) \langle N \rangle^T \langle N \rangle \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial N}{\partial \xi}(\text{I}) + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial N}{\partial \eta}(\text{I}) \right) \\ \text{FW2} = \int_{V_e} (\Delta_i^i)(\psi_i) \langle N \rangle^T \langle N \rangle \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial \xi}(\text{I}) + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial \eta}(\text{I}) \right) \end{cases}$$

ainsi on obtient la forme des éléments de la matrice KW et des vecteurs FW1 et FW2:

$$KW(\text{I}, \text{J}) = \int_{V_e} N(\text{I}) N(\text{J}) \det J d\xi d\eta \quad (\text{II.47})$$

$$\begin{aligned} \text{FW1}(\text{I}) &= \int_{V_e} -N(\text{I}) N(\text{J}) \det J (\Delta_i(\text{kloce}(\text{I}))) (\psi(\text{kloce}(\text{I}))) \\ &\quad \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial N}{\partial \xi}(\text{I}) + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial N}{\partial \eta}(\text{I}) \right) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

$$\begin{aligned} \text{FW2}(\text{I}) &= \int_{V_e} N(\text{I}) N(\text{J}) \det J (\Delta_i(\text{kloce}(\text{I}))) (\psi(\text{kloce}(\text{I}))) \\ &\quad \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial \xi}(\text{I}) + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial \eta}(\text{I}) \right) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

Les deux systèmes présentés précédemment nous permettent de déduire  $w_r, w_z$  après assemblage; d'où la composante circonférentielle  $w_\theta$ .

### II.3.3. INTEGRATION NUMERIQUE :

Vu la difficulté de calcul des différentes intégrales, on fait appel à l'intégration numérique, qui nous permet de construire les matrices et les vecteurs élémentaires.

Pour cela on adopte *la méthode directe*, qui transforme l'intégration de n'importe quelle fonction  $Y(\xi, \eta)$  sur le triangle de référence en une somme calculable numériquement ainsi, pour une intégrale :

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} Y(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (\text{II.50})$$

avec :

$Y(\xi, \eta)$  : est l'expression à intégrer.

donne, moyennant la méthode directe : [8]

$$I = \sum_{L=1}^r W_L Y(\xi_L, \eta_L) \quad (\text{II.51})$$

avec :

$r$  : est le nombre de points d'intégration choisi de façon à pouvoir intégrer exactement  $\det(J)$ .

D'après *ZIENKIEWICS* [14], pour les éléments isoparamétriques, le nombre de points d'intégration doit permettre l'intégration exacte de  $\det(J)$ , qui a la forme  $\xi^i \eta^j$  (car c'est un polynôme) pour lesquelles ( $i+j \leq m$ ).

avec :

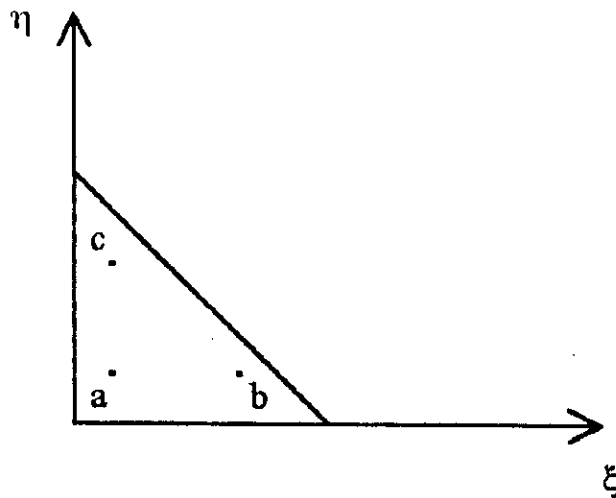
$m$  : est l'ordre de  $\det(J)$  (dans notre cas  $m = 2$ ).

de la table des formules directes d'intégration sur un triangle (table de *HAMMER*) [8] on choisit :

$$\begin{aligned} m &= 2. \\ \text{et } r &= 3. \end{aligned}$$

Ainsi on a les coordonnées des points d'intégration  $\xi_L, \eta_L$  et leurs chargements  $W_L$ :

Points	coordonnées		chargement
	$\xi_L$	$\eta_L$	$W_L$
a	1/6	1/6	1/6
b	2/3	1/6	1/6
c	1/6	2/3	1/6





## II.4. CONDITIONS DE CONVERGENCE DE LA SOLUTION :

Pour une solution  $u$ , la *méthode des éléments finis* fournit une solution approchée qui converge vers la solution exacte lorsque l'on diminue la taille des éléments, si l'approximation de  $u$  satisfait les deux conditions suivantes :

### ① Base polynomiale complète :

Pour que la solution approchée tende vers la solution exacte lorsque la taille des éléments  $h$  tends vers 0, il faut que l'erreur d'approximation de tous les termes de  $w^e$  ( forme intégrale élémentaire ) soit d'ordre  $h^n$  avec  $n \geq 1$ . Et l'approximation de  $u$  doit utiliser au moins une base polynomiale complète jusqu'à l'ordre  $m$  ( étant l'ordre des dérivées apparaissant dans l'équation aux dérivées partielles).

### ② Continuité :

La notion de continuité sur les frontières entre les éléments est une notion clé de la *méthode des éléments finis*. Elle est liée à la notion d'élément conforme ou non conforme pour une équation aux dérivées partielles d'ordre  $m$  et de variable  $u$ , il faut vérifier que  $u$  et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $m-1$  soient continues en tout point du domaine  $V$ . Dans ce cas l'élément est dit conforme et on peut écrire :

$$w = \sum w^e$$

Ainsi il est facile de satisfaire les conditions de continuité sur chaque élément, il est parfois difficile de les satisfaire sur les frontières entre éléments, un élément pareil est dit non conforme et on a :

$$w = \sum w^e + \sum w^d$$

où :  $w^d$  est un terme dû aux discontinuités entre éléments.

Pour que la convergence de la solution soit exacte il faut que  $w^d$  soit nul, ou borné et tende vers 0 avec la taille des éléments, c'est la technique du *patch test*.

## **CHAPITRE III**

## METHODE NUMERIQUE :

La méthode numérique, objet de ce paragraphe est fondée sur un schéma itératif à deux niveaux, en ce sens qu'une première série d'itérations permet pour une masse volumique connue dans tout le champ de *l'écoulement méridional*, de déterminer la fonction de courant  $\psi$  et ainsi les différentes composantes des vitesses  $v_r$ ,  $v_z$  et  $v_\theta$ . Et qu'une seconde série d'itérations prends en compte l'évolution de la masse volumique  $\rho$ .

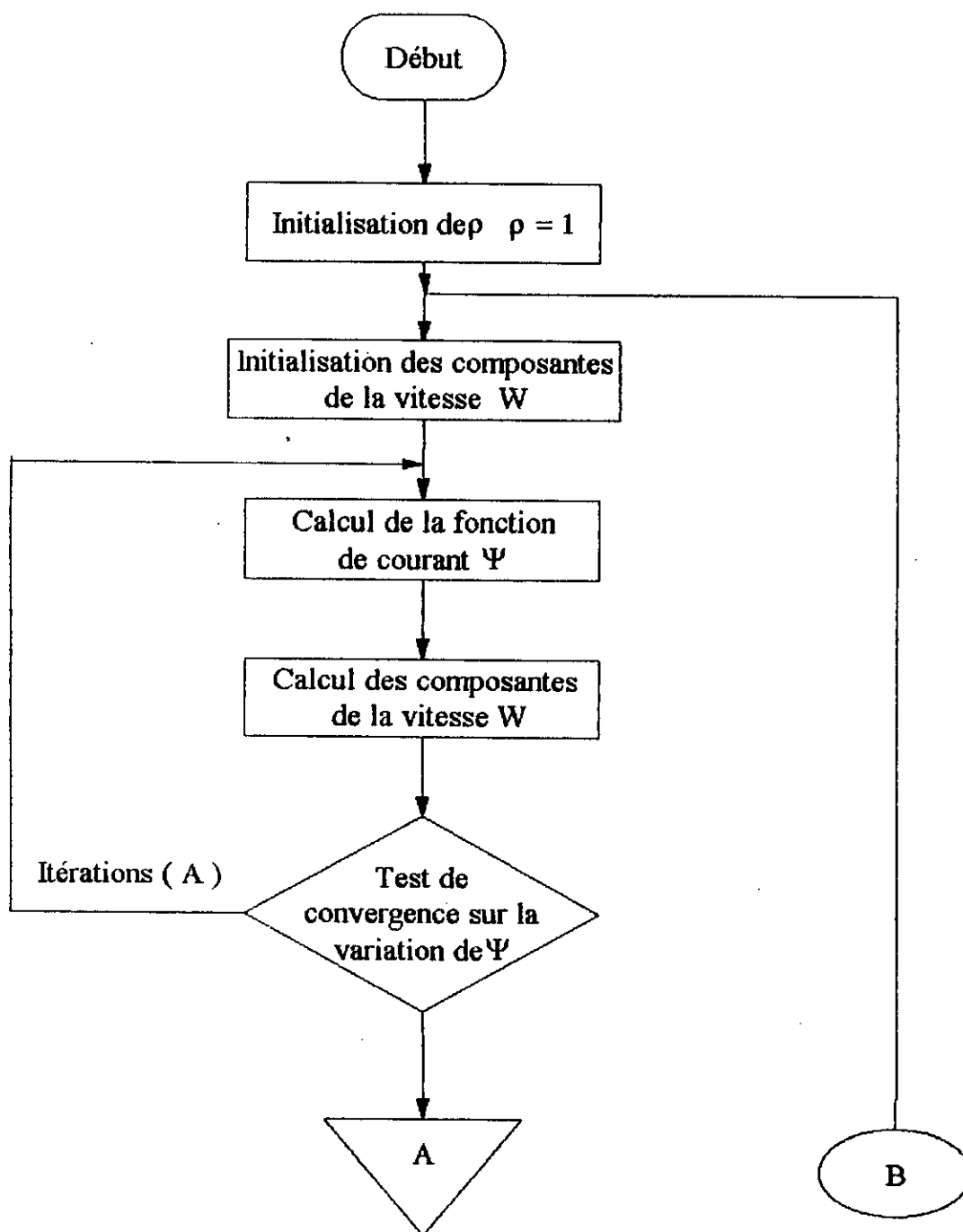
### A. PREMIERE SERIE D'ITERATIONS :

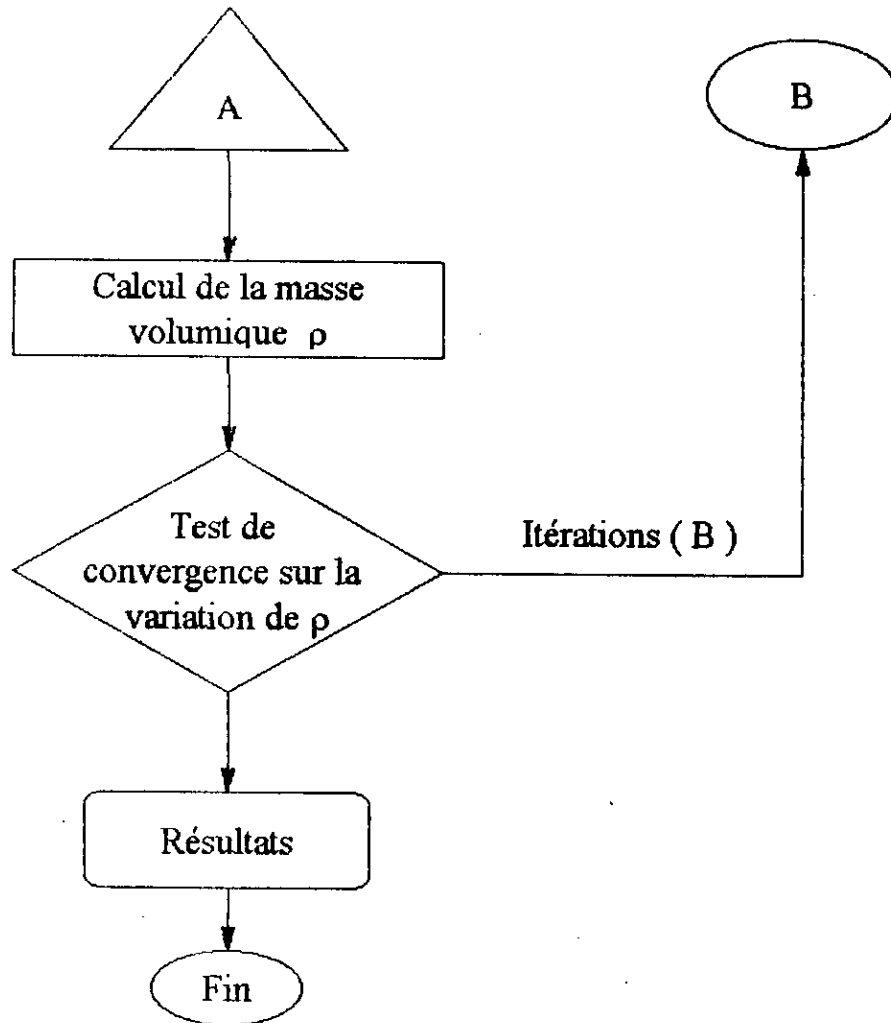
Au cours de ces itérations, la masse volumique  $\rho(r,z)$  est supposée connue, les seule inconnues sont la fonction de courant  $\psi$  et la vitesse  $\vec{V}$  déterminant le champ des vitesses dans le plan méridional.

### B. SECONDE SERIE D'ITERATIONS :

Ayant obtenu à l'aide de l'itération précédente une fonction de courant  $\psi$  et un champ de vitesse  $\vec{V}$ , on calcule la masse volumique qui va être différente de celle initialisée, on réinjecte ensuite la valeur de  $\rho$  à nouveau, et on procède ainsi jusqu'à convergence.

Le principe de calcul est résumé dans l'organigramme suivant :





Dans la pratique, on notera qu'il est préférable, qu'au début de chaque itération (B), d'initialiser le calcul de  $\psi$  et de  $\vec{V}$  par la dernière valeur obtenue au cours des itérations (A) précédentes.

# CONCLUSION

## CONCLUSION :

Dans ce présent travail on a essayé de formuler le modèle de *WU*, par la *méthode des éléments finis*, mais malheureusement les résultats n'ont pas aboutis, ceci est dû aux deux conditions qu'on a évoqué à l'introduction.

Pour assurer la convergence on propose:

- ① L'utilisation de la forme intégrale faible, qui a les avantages suivants :
  - ♦ L'ordre maximum des dérivées de  $u$  qui apparaissent dans la forme intégrale diminue, les conditions de continuité de  $u$  et de ces dérivées sont donc moins fortes.
  - ♦ Certaines des conditions aux limites qui apparaissent dans la forme intégrale faible peuvent être prises en compte dans la formulation intégrale au lieu d'être satisfaites identiquement par  $u$ .
  
- ② Formuler avec l'élément linéaire ( triangle, 3 noeuds,  $C^0$  ).

**ANNEXE 1**



## I. INTRODUCTION DES DERIVEES SPECIALES DANS L'EQUATION DE CONTINUTE :

L'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r w_r] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho w_\theta] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho w_z] = 0 \quad (1)$$

Introduisant les dérivées spéciales :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r w_r] + \frac{n_r}{r^2 n_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho r w_r] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho w_\theta] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho w_z] \\ + \frac{n_z}{r n_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho w_z] = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

on aura :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r w_r] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho w_z] = - \frac{n_r}{r^2 n_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho r w_r] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho w_\theta] \\ - \frac{n_z}{r n_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho w_z] \end{aligned} \quad (3)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r w_r] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho w_z] = - \frac{1}{r n_\theta} \left[ n_r \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho r w_r) \right. \\ \left. - n_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho w_\theta) - n_z \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho w_z) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

On pose :

$$c(r, z) = - \frac{1}{r n_\theta} \left[ n_r \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho r w_r) - n_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho w_\theta) - n_z \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho w_z) \right] \quad (5)$$

l'équation (4) devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r w_r] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho w_z] = c(r, z) \quad (6)$$

## II. INTRODUCTION DES DERIVEES SPECIALES DANS L'EQUATION DU MOUVEMENT :

### A. EQUATION DU MOUVEMENT RADIAL :

L'équation du mouvement radial est donnée par :

$$-\frac{w_\theta}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right] + w_z \left( \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) = -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial S}{\partial r} \quad (7)$$

La dérivée spéciale pour toute quantité Q est donnée par :

$$\frac{\bar{\partial}(Q)}{\partial r, z} = \frac{\partial(Q)}{\partial r, z} + \frac{n_{r,z}}{r n_\theta} \frac{\partial(Q)}{\partial \theta}$$

ainsi l'équation du mouvement radial devient après introduction des dérivées spéciales :

$$\begin{aligned} -\frac{w_\theta}{r} \left[ \frac{\bar{\partial}}{\partial r} (rV_\theta) + \frac{n_r}{r n_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (rV_\theta) - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right] + w_z \left( \frac{\bar{\partial} w_r}{\partial z} + \frac{n_z}{r n_\theta} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} - \frac{\bar{\partial} w_z}{\partial r} \right. \\ \left. - \frac{n_r}{r n_\theta} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} \right) = -\frac{\bar{\partial} I}{\partial r} - \frac{n_r}{r n_\theta} \frac{\partial I}{\partial \theta} + T \frac{\bar{\partial} S}{\partial r} + T \frac{n_r}{r n_\theta} \frac{\partial S}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (8)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} -\frac{w_\theta}{r} \left[ \frac{\bar{\partial}}{\partial r} (rV_\theta) \right] + w_z \left( \frac{\bar{\partial} w_r}{\partial z} - \frac{\bar{\partial} w_z}{\partial r} \right) = \frac{n_r w_\theta}{r^2 n_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (rV_\theta) - \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \\ - \frac{n_z w_z}{r n_\theta} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} + \frac{n_r w_z}{r n_\theta} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\bar{\partial} I}{\partial r} - \frac{n_r}{r n_\theta} \frac{\partial I}{\partial \theta} + T \frac{\bar{\partial} S}{\partial r} + T \frac{n_r}{r n_\theta} \frac{\partial S}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (9)$$

Calcul des expressions  $\frac{\partial I}{\partial \theta}$  et  $\frac{\partial S}{\partial \theta}$

\* Calcul de  $\frac{\partial S}{\partial \theta}$

D'après le premier principe de la thermodynamique :

$$T dS = dU + p dv \quad (10)$$

avec :

$$h = U + p v \quad \Rightarrow \quad dh = dU + p dv + v dp$$

d'où :

$$dU = dh - p dv - v dp$$

ainsi :

$$T dS = dh - v dp$$

$$\Rightarrow T \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial h}{\partial \theta} - v \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (11)$$

avec :

$$v = \frac{1}{\rho}$$

l'équation (11) devient :

$$T \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (12)$$

\* Calcul de  $\frac{\partial I}{\partial \theta}$

La rothalpie I est donnée par :

$$I = H - \omega r V_0 \quad \text{avec : } \begin{array}{l} H : \text{enthalpie totale} \\ \omega : \text{vitesse angulaire} \\ V_0 : \text{vitesse circonférentielle} \end{array}$$

$$\text{où : } H = h + \frac{V^2}{2} \quad \text{avec : } \begin{array}{l} h : \text{enthalpie statique} \\ V : \text{vitesse absolue de la} \\ \text{particule} \end{array}$$

$$\text{d'où : } I = h + \frac{V^2}{2} - \omega r V_0 \quad (13)$$

$$\text{or } V \begin{cases} w_r \\ w_\theta + \omega r \\ w_z \end{cases} \Rightarrow V^2 = w^2 + \omega^2 r^2 + 2w_\theta \omega r$$

on aura :

$$I = h + \frac{W^2}{2} - \omega^2 \frac{r^2}{2}$$

en dérivant par rapport à  $\theta$  :

$$\frac{\partial I}{\partial \theta} = \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial w^2}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega^2 r^2)$$

après développement on obtient :

$$\frac{\partial I}{\partial \theta} = \frac{\partial h}{\partial \theta} + w_r \frac{\partial w_r}{\partial \theta} + w_\theta \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial \theta} \quad (14)$$

Substituant les équations (12) et (14) dans (9) on obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{w_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) + w_z \left( \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) &= -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{n_r}{r n_\theta \rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ -\frac{1}{r n_\theta} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} [w_r n_r + w_\theta n_\theta + w_z n_z] & \end{aligned} \quad (15)$$

Etant donné que  $\vec{n}$  et  $\vec{w}$  sont  $\perp$  alors :

$$w_r n_r + w_\theta n_\theta + w_z n_z = 0$$

Enfin on aura l'équation du mouvement radial :

$$-\frac{w_\theta}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) \right] + w_z \left( \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) = -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{n_r}{r \rho n_\theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (16)$$

ou encore :

$$-\frac{w_\theta}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) \right] + w_z \left( \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) = -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial S}{\partial r} + F_r \quad (17)$$

avec :

$$F_r = -\frac{n_r}{r \rho n_\theta} \frac{\partial P}{\partial \theta}$$

## B. EQUATION DU MOUVEMENT CIRCONFÉRENCIEL :

L'équation du mouvement ciconférenciel est donnée par :

$$\frac{w_r}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right] - w_z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\partial w_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial \theta} + \frac{T}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} \quad (18)$$

La dérivée spéciale pour toute quantité Q est donnée par :

$$\frac{\bar{\partial}(Q)}{\partial r, z} = \frac{\partial(Q)}{\partial r, z} + \frac{n_{r,z}}{r n_\theta} \frac{\partial(Q)}{\partial \theta}$$

ainsi l'équation du mouvement circonférenciel devient après introduction des dérivées spéciales :

$$\begin{aligned} & \frac{w_r}{r} \left[ \frac{\bar{\partial}}{\partial r} (rV_\theta) + \frac{n_r}{r n_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (rV_\theta) - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right] - w_z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\bar{\partial} w_\theta}{\partial z} - \frac{n_z}{r n_\theta} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} \right) \\ & = -\frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial \theta} + \frac{T}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (19)$$

En substituant les équations (12) et (14) dans l'équation (19) on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{w_r}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} (rV_\theta) + \frac{w_z}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial z} (rV_\theta) = -w_r \frac{n_r}{r n_\theta} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} - w_z \frac{n_z}{r n_\theta} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} \\ & - \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r \rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (20)$$

ou encore :

$$\frac{w_r}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} (rV_\theta) + \frac{w_z}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial z} (rV_\theta) = -\frac{1}{r n_\theta} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} (w_r n_r + w_\theta n_\theta + w_z n_z) - \frac{1}{r \rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (21)$$

avec :

$$w_r n_r + w_\theta n_\theta + w_z n_z = 0 \quad \text{car} \quad \vec{W} \cdot \vec{n} = 0$$

finalement, l'équation du mouvement circonférenciel s'écrit :

$$-\frac{w_r}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} (rV_\theta) + \frac{w_z}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial z} (rV_\theta) = F_\theta \quad (22)$$

avec :

$$F_{\theta} = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta}$$

### C. EQUATION DU MOUVEMENT AXIAL :

L'équation du mouvement axial est donnée par :

$$-w_r \left( \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) + w_{\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\partial w_{\theta}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial I}{\partial z} + T \frac{\partial S}{\partial z} \quad (23)$$

de même on introduit les dérivées spéciales :

$$\begin{aligned} & -w_r \left[ \frac{\bar{\partial} w_r}{\partial z} + \frac{n_z}{r n_{\theta}} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} - \frac{\bar{\partial} w_z}{\partial r} - \frac{n_r}{r n_{\theta}} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} \right] + w_{\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\bar{\partial} w_{\theta}}{\partial z} - \frac{n_z}{r n_{\theta}} \frac{\partial w_{\theta}}{\partial \theta} \right) \\ & = -\frac{\partial I}{\partial z} + \frac{n_z}{r n_{\theta}} \frac{\partial I}{\partial \theta} + T \frac{\bar{\partial} S}{\partial z} + T \frac{n_z}{r n_{\theta}} \frac{\partial S}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (24)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} & -w_r \left[ \frac{\bar{\partial} w_r}{\partial z} - \frac{\bar{\partial} w_z}{\partial r} \right] - \frac{w_{\theta}}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial z} (r V_{\theta}) = -\frac{\bar{\partial} I}{\partial z} + T \frac{\bar{\partial} S}{\partial z} - \frac{n_z}{r n_{\theta} \rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ & - \frac{1}{r n_{\theta} \rho} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} (w_{\theta} n_{\theta} + w_z n_z + w_r n_r) \end{aligned} \quad (25)$$

puisque :  $w_{\theta} n_{\theta} + w_z n_z + w_r n_r = 0$

l'équation du mouvement axial deviendra :

$$-w_r \left[ \frac{\bar{\partial} w_r}{\partial z} - \frac{\bar{\partial} w_z}{\partial r} \right] - \frac{w_{\theta}}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial z} (r V_{\theta}) = -\frac{\bar{\partial} I}{\partial z} + T \frac{\bar{\partial} S}{\partial z} + F_z \quad (26)$$

avec :

$$F_z = -\frac{n_z}{r n_{\theta} \rho} \frac{\partial P}{\partial \theta}$$

### III. INTRODUCTION DES DERIVEES SPECIALES DANS L'EQUATION D'ENERGIE :

L'équation d'énergie est donnée par :

$$w_r \frac{\partial I}{\partial r} + w_\theta \frac{\partial I}{\partial \theta} + w_z \frac{\partial I}{\partial z} = Q \quad (27)$$

$Q = 0$  pour un processus adiabatique, ce qui permet d'écrire :

$$w_r \frac{\partial I}{\partial r} + w_\theta \frac{\partial I}{\partial \theta} + w_z \frac{\partial I}{\partial z} = 0 \quad (28)$$

introduisant les dérivées spéciales dans l'équation (28):

$$w_r \left[ \frac{\partial \bar{I}}{\partial r} + \frac{n_r}{r n_\theta} \frac{\partial \bar{I}}{\partial \theta} \right] + \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial \bar{I}}{\partial \theta} + w_z \left[ \frac{\partial \bar{I}}{\partial z} + \frac{n_z}{r n_\theta} \frac{\partial \bar{I}}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (29)$$

$$w_r \frac{\partial \bar{I}}{\partial r} + w_z \frac{\partial \bar{I}}{\partial z} = - \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial \bar{I}}{\partial \theta} - \frac{n_r}{r n_\theta} w_r \frac{\partial \bar{I}}{\partial \theta} - \frac{n_z}{r n_\theta} w_z \frac{\partial \bar{I}}{\partial \theta}$$

ou bien :

$$w_r \frac{\partial \bar{I}}{\partial r} + w_z \frac{\partial \bar{I}}{\partial z} = - \frac{n_r}{r n_\theta} \frac{\partial \bar{I}}{\partial \theta} [n_r w_r + n_\theta w_\theta + n_z w_z]$$

puisque :  $\vec{n} \cdot \vec{W} = 0$

alors on aura :

$$w_r \frac{\partial \bar{I}}{\partial r} + w_z \frac{\partial \bar{I}}{\partial z} = 0 \quad (30)$$

**ANNEXE 2**



**LES FONCTIONS DE FORME ET LEURS DERIVEES :**

L'élément utilisé est un triangle à 6 noeuds dont les fonctions de forme et leurs dérivées sont données sur le tableau suivant :

Noeud	$\{N\}$	$\{\delta N/\delta \xi\}$	$\{\delta N/\delta \eta\}$	$\{\delta^2 N/\delta \xi^2\}$	$\{\delta^2 N/\delta \eta^2\}$	$\delta^2 N/\delta \eta \delta \xi$
1	$-\lambda(1-2\lambda)$	$1-4\lambda$	$1-4\lambda$	4	4	4
2	$4\xi\lambda$	$4(\lambda-\xi)$	$-4\xi$	-8	0	-4
3	$-\xi(1-2\xi)$	$4\xi-1$	0	4	0	0
4	$4\xi\eta$	$4\eta$	$4\xi$	0	0	4
5	$-\eta(1-2\eta)$	0	$4\eta-1$	0	4	0
6	$4\eta\lambda$	$-4\eta$	$4(\lambda-\eta)$	0	-8	4

avec :

$$\lambda = 1 - \xi - \eta$$

**ANNEXE 3**

## LES DIFFERENTS TERMES DE LA TRANSFORMATION ISOPARAMETRIQUE :

On a une approximation de type *éléments finis* ainsi :

$$r(\xi, \eta) = \langle N \rangle (r_i) \quad (1)$$

et

$$z(\xi, \eta) = \langle N \rangle (z_i) \quad (2)$$

En remplaçant les valeurs des fonctions de forme (voir Annexe 2), on obtient:

$$\begin{aligned} r(\xi, \eta) = & -\lambda(1-2\lambda)r_1 + 4\xi\lambda r_2 - \xi(1-2\xi)r_3 + 4\xi\eta r_4 \\ & -\eta(1-2\eta)r_5 + 4\eta\lambda r_6 \end{aligned} \quad (3)$$

sachant que :

$$\lambda = 1 - \xi - \eta$$

on a :

$$\begin{aligned} r(\xi, \eta) = & (\xi + \eta - 1)(2\xi + 2\eta - 1)r_1 + 4\xi(1 - \xi - \eta)r_2 - \xi(1 - 2\xi)r_3 \\ & + 4\xi\eta r_4 - \eta(1 - 2\eta)r_5 + 4\eta(1 - \xi - \eta)r_6 \end{aligned} \quad (4)$$

d'où on obtient après réarrangement :

$$\begin{aligned} r(\xi, \eta) = & (2\xi^2 + 2\eta^2 + 4\xi\eta - 3\xi - 3\eta + 1)r_1 + (4\xi - 4\xi^2 - 4\xi\eta)r_2 \\ & + (2\xi^2 - \xi)r_3 + 4\xi\eta r_4 + (2\eta^2 - \eta)r_5 + (-4\eta^2 - 4\xi\eta + 4\eta)r_6 \end{aligned} \quad (5)$$

de même pour la coordonnée z :

$$\begin{aligned} z(\xi, \eta) = & (2\xi^2 + 2\eta^2 + 4\xi\eta - 3\xi - 3\eta + 1)z_1 + (4\xi - 4\xi^2 - 4\xi\eta)z_2 \\ & + (2\xi^2 - \xi)z_3 + 4\xi\eta z_4 + (2\eta^2 - \eta)z_5 + (-4\eta^2 - 4\xi\eta + 4\eta)z_6 \end{aligned} \quad (6)$$

ainsi les dérivées partielles de  $r$  et  $z$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial \xi} &= (4\xi + 4\eta - 3)r_1 + (4 - 8\xi - 4\eta)r_2 + (4\xi - 1)r_3 + 4\eta r_4 - 4\eta r_6 \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} &= (4\xi + 4\eta - 3)r_1 - 4\xi r_2 + 4\xi r_4 + (4\eta - 1)r_5 + (4 - 8\eta - 4\xi)r_6\end{aligned}\quad (7)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial \xi} &= (4\xi + 4\eta - 3)z_1 + (4 - 8\xi - 4\eta)z_2 + (4\xi - 1)z_3 + 4\eta z_4 - 4\eta z_6 \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} &= (4\xi + 4\eta - 3)z_1 - 4\xi z_2 + 4\xi z_4 + (4\eta - 1)z_5 + (4 - 8\eta - 4\xi)z_6\end{aligned}\quad (8)$$

d'où la matrice jacobienne  $[J]$  de la transformation isoparamétrique  $(z, r) \rightarrow (\xi, \eta)$ :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \end{bmatrix}\quad (9)$$

on a aussi la matrice jacobienne inverse  $[j]$  de la transformation isoparamétrique  $(\xi, \eta) \rightarrow (z, r)$ :

$$[j] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial r} \end{bmatrix}\quad (10)$$

dont les éléments sont :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial z} &= \frac{1}{\det J} \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial \eta}{\partial z} &= -\frac{1}{\det J} \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \xi}{\partial r} &= -\frac{1}{\det J} \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial \eta}{\partial r} &= \frac{1}{\det J} \frac{\partial z}{\partial \xi}\end{aligned}$$

avec :

$$\det J = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \quad (11)$$

les dérivées secondes des coordonnées z, r sont :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} = 4r_1 - 8r_1 + 4r_1, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = 4z_1 - 8z_1 + 4z_1, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial \eta^2} = 4r_1 + 4r_1 - 8r_1, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 4z_1 + 4z_1 - 8z_1, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 r}{\partial \eta \partial \xi} = 4r_1 - 4r_1 + 4r_1 - 4r_1, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi} = 4z_1 - 4z_1 + 4z_1 - 4z_1, \end{array} \right.$$

### A. EXPRESSION DES DERIVEES PREMIERES :

Pour toute variable  $\zeta$  on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(\zeta) &= \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \xi}(\zeta) + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \eta}(\zeta) \\ \frac{\partial}{\partial z}(\zeta) &= \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \xi}(\zeta) + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \eta}(\zeta) \end{aligned} \quad (13)$$

avec :

$$\frac{\partial \xi}{\partial r}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial r}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad \text{ont été défini précédemment.}$$

## B. EXPRESSION DES DERIVEES SECONDES :

On a pour toute variable  $\zeta$  :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial a^2}(\zeta) \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\zeta) \\ \frac{\partial^2}{\partial a \partial z}(\zeta) \end{Bmatrix} = [T_1] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi}(\zeta) \\ \frac{\partial}{\partial \eta}(\zeta) \end{Bmatrix} + [T_2] \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(\zeta) \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}(\zeta) \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}(\zeta) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

la matrice  $[T_2]$  est une matrice (3x2) dont les éléments sont construits à partir des éléments de la matrice  $[j]$  :

$$[T_2] = \begin{bmatrix} j_{11}^2 & j_{12}^2 & 2j_{11}j_{12} \\ j_{21}^2 & j_{22}^2 & 2j_{21}j_{22} \\ j_{11}j_{21} & j_{12}j_{22} & (j_{11}j_{22} + j_{12}j_{21}) \end{bmatrix} \quad (15)$$

avec :

$j_{ij}$  sont les termes de la matrice  $[j]$ .

la matrice  $[T_1]$  est définie par :

$$[T_1] = -[T_2][C_1][j] \quad (16)$$

où :

$$[C_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{11}}{\partial \xi} & \frac{\partial J_{12}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial J_{21}}{\partial \eta} & \frac{\partial J_{22}}{\partial \eta} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial J_{11}}{\partial \eta} + \frac{\partial J_{21}}{\partial \xi} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial J_{12}}{\partial \eta} + \frac{\partial J_{22}}{\partial \xi} \right) \end{bmatrix} \quad (17)$$

avec :

$J_{ij}$  sont les termes de la matrice jacobienne  $[J]$ .

enfin on aura :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\alpha^2}(\zeta) &= T_1^{11} \frac{\partial}{\partial \xi}(\zeta) + T_1^{12} \frac{\partial}{\partial \eta}(\zeta) + T_2^{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(\zeta) + T_2^{12} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}(\zeta) + T_2^{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}(\zeta) \\ \frac{\partial^2}{\alpha^2}(\zeta) &= T_1^{21} \frac{\partial}{\partial \xi}(\zeta) + T_1^{22} \frac{\partial}{\partial \eta}(\zeta) + T_2^{21} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(\zeta) + T_2^{22} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}(\zeta) + T_2^{22} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}(\zeta)\end{aligned}\quad (18)$$

**ANNEXE 4**



### CALCUL DE LA MASSE VOLUMIQUE :

La masse volumique se déduit à partir du fait que la rothalpie ( $I$ ), se conserve le long d'une ligne de courant à travers le canal entre un point "0" qui caractérise l'état du fluide en amont ( $I_0$ ) et un point où on veut avoir la masse volumique  $\rho$ .

ainsi :

$$I = I_0 \quad (1)$$

$$\text{avec : } I = h + \frac{V^2}{2} + \omega r V_\theta \quad (2)$$

où :

$$h = \frac{a^2}{(\gamma - 1)} \quad \text{et} \quad h_0 = \frac{a_0^2}{(\gamma - 1)}$$

après substitution de (2) dans (1) on aura :

$$h + \frac{V^2}{2} + \omega r V_\theta = h_0 + \frac{V_0^2}{2} + \omega r_0 V_\theta^0 \quad (3)$$

ce qui donne :

$$h = h_0 + \omega(r_0 V_\theta^0 - r V_\theta) + \left( \frac{V_0^2}{2} - \frac{V^2}{2} \right) \quad (4)$$

sachant que l'équation d'état est donnée par :

$$\frac{h}{h_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(\gamma-1)} \Rightarrow h = h_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(\gamma-1)} \quad (5)$$

on remplace dans l'équation (4), on obtient :

$$\left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(\gamma-1)} = 1 + \left( \frac{\gamma-1}{2a_0^2} \right) \left\{ V_0^2 - V^2 + 2\omega(r_0 V_\theta^0 - r V_\theta) \right\} \quad (6)$$

sachant que  $\vec{V}$  est le vecteur vitesse dont les composantes sont :

$$\vec{V} \begin{cases} w_r \\ w_\theta + \omega r \\ w_z \end{cases}$$

On substitue dans l'équation (6) afin de trouver une autre forme pour le calcul de  $\rho$  qui est :

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(\gamma-1)} = \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M_0^2 \left[ 1 - \frac{w_r^2 + V_\theta^2 + w_z^2 + 2\omega(r_0 V_\theta^0 - r V_\theta)}{V_0^2} \right] \right\} \quad (7)$$

avec :  $M_0^2 = \frac{V_0^2}{a_0^2}$

Les conditions en amont font que  $V_\theta^0 = 0$ , ainsi on aura les deux formes donnant la masse volumique  $\rho$  en tout point du canal :

$$(8) \quad \begin{cases} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(\gamma-1)} = \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma-1}{2a_0^2}\right) (V_0^2 - V^2 - 2\omega r V_\theta) \right\} \\ \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(\gamma-1)} = \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M_0^2 \left[ 1 - \frac{w_r^2 + V_\theta^2 + w_z^2 - 2\omega r V_\theta}{V_0^2} \right] \right\} \end{cases}$$

# **BIBLIOGRAPHIE**

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE :**

- [1] - S. BOUBENDIR et N. CHIKHI.  
Elément d'un code pour le calcul d'un écoulement dans une roue de turbomachine.  
Thèse, 1993
- [2] - D. BUISINE et P. MICHEAU.  
Ecoulement tridimensionnel dans une roue de turbomachine par la méthode S1-S2.  
Journal de mécanique théorique et appliquée, vol. 6, n° 4, 1987
- [3] - R. P. DRING and H. D. JOSLYNE.  
Through-flow modeling of axial turbomachinery.  
Journal of engineering for gaz turbines and power, vol. 188/247, 1986
- [4] - J. P. VEUILLOT.  
Calcul de l'écoulement moyen dans une roue de turbomachine axiale.  
Office national d'études et de recherches aérospatiales, 1973
- [5] - H. MITON.  
Etude théorique et expérimentale de problèmes aérodynamiques concernant les compresseurs transsoniques.  
Université d'AIX-MARSEILLE II, Thèse Doctorat, 1978
- [6] - J. H. HORLOCK.  
Axial flow turbines, fluid mechanics and thermodynamics.  
1973
- [7] - R. GHEZAL.  
Analyse de l'écoulement méridional dans une turbomachine.  
Thèse, 1991
- [8] - G. DHATT et G. TOUZOT.  
Une présentation de la méthode des éléments finis  
Deuxième édition, 1984

- [9] - P. E. ALLAIRE.  
Basics of the finite element method. Solid mechanics, Heat Transfer, and Fluid Mechanics.  
University of virginia.
- [10] - V. GIRAULT et P. A. RAVIART.  
Finite element methods for NAVIER- STOCKES equation. 1986
- [11] - P. A. RAVIART.  
Les méthodes d'éléments finis en mécanique des fluides.  
Eyrolles, 1981
- [12] - P. A. RAVIART et G. M. THOMAS.  
Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.  
Masson, 1983
- [13] - O. C. ZIENKIEWICZ and R. L. TAYLOR.  
The finite element method.  
3ième édition, Mc Graw-Hill, Londres, 1977  
Tome1, Tome 2
- [14] - O. C. ZIENKIEWICZ and R. L. TAYLOR.  
La méthode des éléments finis. Formulation de base et problèmes linéaires.  
4ième édition, AFNOR, 1991
- [15] - O. PIRONNEAU.  
Méthode des éléments finis pour les fluides.  
Masson, 1988
- [16]- G. TERRASSON.  
Simulation numérique en éléments finis d'écoulements de fluides visqueux incompressibles et compressibles par une méthode de couplage des équations de NAVIER- STOCKES et du potentiel.  
Thèse, 1989

[17] - H. MARSH.

A digital computer program for through-flow fluid mechanics in an arbitrary turbomachine using a matrix method.

Repport n° R.282,

1966

[18] - D. BUISINE.

Modélisation et calcul d'un écoulement tridimensionnel de fluide incompressible dans une turbomachine axiale.

Journal de mécanique appliquée,

vol5, n° 4, 1981

[19] - J. P. VEUILLOT.

Méthode de calcul tridimensionnel dans une roue de turbomachine.

Revue française de mécanique,

n° 55-56, 1975

[20] - RAPPORT N° 1 de CCPR,

1979