

وزارة التعليم العالي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

## ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : G · MECANIQUE

AEX

# PROJET DE FIN D'ETUDES

### SUJET

Etude de la singularité  
élastique des contraintes  
par la méthode des éléments  
finis

Proposé par :

N. Boudjema

Etudié par :

E. Fettah

Dirigé par :

N. Boudjema

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

وزارة التعليم العالي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

## ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : G. MECANIQUE

# PROJET DE FIN D'ETUDES

### SUJET

Etude la singularité élastique des  
contraintes  
par la méthode des éléments finis

Proposé par :  
N. Boudjemaa

Etudié par :  
E. Fettah

Dirigé par :  
N. Boudjemaa

PROMOTION : Juin : 1990

-000- ( / / - - ) E D I C A C E S -000-

( / / - - ) LA MEMOIRE DE MES GRANDS PARENTS,  
( / / - - ) MES PARENTS, QUI ONT TANT AIME ME VOIR  
ATTEINDRE CE BUT, ET A QUI JE SERAIS  
TOUJOURS RECONNAISSANT POUR LEUR  
SOUTIENT MORAL ET MATERIEL.

( / / - - ) MES FRERES ET SOEURS

( / / - - ) TOUTE MA FAMILLE

( / / - - ) MES DEUX AMIS : BOUGUELMOUNA I. ET  
BOUSSEKINE A.

( / / - - ) TOUS CEUX QUI CROIENT EN DIEU ET LE  
CRAIGNENT.

JE DEDIE CE MEMOIRE.

FETTAH EL HOUARI.  
-----

-000- // - }  E M E R C I E M E N T S  -000-

Je remercie vivement mon Promoteur Monsieur BOUDJEMAA N. pour ses aides, conseils et directives qui me les a réservés au cours de l'élaboration de ce projet ainsi que pour son apport moral et scientifique.

Je remercie également le personnel du Centre de Calcul de l'Ecole Nationale Polytechnique pour sa serviabilité.

Mes remerciements à tous les Enseignants de l'E.N.P. et en particulier à ceux du Département Mécanique qui ont contribué à ma formation.

-000\*\*\*\*\*-000-

QUELQUES SYMBOLES UTILISES

-----

- a : longueur de la fissure  
b : demi-largeur de la fissure  
L : demi-longueur de l'éprouvette  
l : largeur de l'éprouvette  
t : épaisseur de l'éprouvette  
rp: rayon de la zone plastique  
E : module d'élasticité  
 $\nu$  : coefficient de poisson  
 $\mu$  : module de cisaillement  
KI: facteur d'intensité de contrainte associé au mode I  
de rupture.  
KC: facteur d'intensité de contrainte critique  
G : taux de restitution d'énergie  
 $[K]^e$  : matrice de rigidité élémentaire  
 $[F]^e$  : vecteur force élémentaire  
 $\{q\}^e$  : vecteur déplacement  
 $[K]$  : matrice de rigidité globale  
 $[D]$  : matrice d'élasticité  
 $f(x,y)$  : fonction de déplacement  
 $[N]$  : fonction d'interpolation ou de forme  
A : aire de l'élément finis triangulaire  
 $\emptyset$  : fonction de contrainte d'Airy  
 $\sigma_e$  : limite élastique du matériau.

INTRODUCTION

... PARTIE I. : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

CHAPITRE I. : THEORIE D'ELASTICITE

- I.1. Introduction
- I.2. Equations différentielle d'équilibre
- I.3. Equations de compatibilité
- I.4. Elasticité plane
  - I.4.1. Déformation plane
  - I.4.2. Contrainte plane
- I.5. Resolution des problèmes de fissure

CHAPITRE II. : THEORIE DE LA MECANIQUE LINEAIRE  
ELASTIQUE DE LA RUPTURE.

- II.1. Introduction
- II.2. Modes de rupture
- II.3. Analyse élastique des contraintes
- II.4. Théorie de "GRIFFITH"
- II.5. Théorie d'"IRWIN"
- II.6. Corrélation entre les théories d'IRWIN et de GRIFFITH
- II.7. Résolution du problème de singularité
- II.8. Limite de validité.

CHAPITRE III. : PRESENTATION DE LA METHODE DES  
ELEMENTS FINIS.

- III.1. Introduction
- III.2. Discrétisation d'une structure
- III.3. Matrice de rigidité élémentaire pour un élément triangulaire.

III.4. Vecteur charge élémentaire pour un élément triangulaire.

III.5. Généralisation au domaine entier.

CHAPITRE IV. : APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS A LA MECANIQUE DE LA RUPTURE.

IV. 1. Introduction

IV.2. Evaluation du facteur d'intensité de contrainte.

IV.2.1. Méthode globale

IV.2.2. Méthode locale.

IV.3. Objectif de l'étude numérique.

... PARTIE II. : ORGANISATION DU PROGRAMME ELEMENTS FINIS APPLIQUE A LA MECANIQUE DE LA RUPTURE.

CHAPITRE I. : INTRODUCTION

CHAPITRE II. : PRESENTATION DU PROGRAMME

II.1. Maillage

II.2. Entrée des données

II.2.1. Lecture du maillage

II.2.2. Introduction des paramètres

II.2.3. Lecture des conditions aux limites

II.3. Construction de la matrice et du vecteur élémentaires

II.4. Assemblage

II.5. Résolution du système d'équations

II.6. Evaluation des contraintes et déformations

II.7. Détermination du facteur d'intensité de contrainte

II.8. Impression des résultats.

.../...

CHAPITRE III. : ORGANIGRAMMES

- III.1. Organigramme du programme éléments finis
- III.3. Organigramme du programme de génération.

CHAPITRE IV. : EXEMPLE D'APPLICATION ET COMMENTAIRES

- IV.1. Matériau utilisé
- IV.2. Résultats obtenus
- IV.3. Commentaires.

CONCLUSION GENERALE.

BIBLIOGRAPHIE.

## INTRODUCTION :

Partant de la seule considération de la force de cohésion interatomique, on peut constater que la contrainte de rupture  $\sigma_{th}$  est approximativement égale au rapport  $E/\pi$ . Cependant, les essais expérimentaux de rupture ont montré que la contrainte réelle de rupture  $\sigma_r$  est plusieurs fois plus inférieure à  $\sigma_{th}$ . La raison de cette différence est que tous les matériaux, sans exception, contiennent des défauts dus à la constitution microscopique du matériau lui-même, à sa mise en oeuvre ou à la conception de la pièce (présence d'entailles, trous, soudures etc). D'où le développement de la mécanique de la rupture, qui peut se définir comme la science de l'étude du comportement d'une structure avec ses défauts.

La mécanique de la rupture a rigoureusement pris naissance vers 1920 ; l'année où "GRIFFITH" (physicien Anglais) présenta ses réflexions sur la rupture fragile des matériaux en mettant en évidence le rôle des imperfections dans les matériaux. Il fallut toute fois attendre une vingtaine d'année pour que "IRWIN" donne, en définissant un facteur K appelé facteur d'intensité de contrainte, la formulation générale du champ de contraintes et déplacements.

Certains matériaux, dans les conditions de températures et de chargements données, présentent une déformation plastique à la pointe de la fissure suffisamment peu étendue pour que l'on puisse considérer le comportement de ces matériaux comme élastique linéaire, ce qui justifie l'extension de la mécanique de la rupture aux matériaux semi-ductils (aciers, alliages métalliques...ect). Cette approche est connue sous le nom de la mécanique linéaire élastique de la rupture (M.L.E.R).

L'application de la notion de tolérance à la M.L.E.R. requiert la connaissance de deux paramètres :

.../...

- d'une part, la résistance à la rupture du matériau  $K_c$  ou facteur d'intensité de contrainte critique  $K_c$ , caractéristique intrinsèque du matériau.
- d'une part, la valeur du facteur d'intensité de contrainte  $K$  pour une longueur de défaut et un chargement donnés, il est donc nécessaire de connaître, l'évolution de  $K$  en fonction de la longueur de fissure et veiller à ce que  $K$  soit inférieure à  $K_c$ .

Seulement dans le cas de géométries simples il est possible de trouver une relation analytique entre  $K$  et la longueur de fissure pour un chargement donné. Mais si la structure est complexe, on doit avoir recours à l'expérimentation pour passer de la compliance aux taux de restitution d'énergie  $G$  puis au facteur d'intensité de contrainte  $K$ . Ceci est obtenu en effectuant des essais de traction ou de flexion, selon la mécanique de la rupture, sur un grand nombre d'éprouvettes entaillées et en relevant les diagrammes charges/déplacements pour différentes longueurs de fissure.

Une autre solution est d'utiliser les techniques numériques telle que la méthode des éléments finis qui consiste à discrétiser la structure en éléments finis suivant un maillage adéquat.

BUT DU TRAVAIL :

Le but de ce projet de fin d'étude est d'élaborer un programme informatique pour l'application de la méthode des éléments finis à la mécanique linéaire élastique de la rupture.

Ce programme nous permet de déterminer :

- le champ de contraintes et de déplacements au voisinage du front d'entaille réalisée sur éprouvette S.E.N (Single Edge Notch) normalisée (A.S.T.M) en flexion 3 points, en déformation plane.
- le facteur d'intensité de contrainte pour des longueurs d'entailles et des chargements donnés en faisant tendre l'angle d'entaille vers zéro pour approcher le plus possible à une fissure réelle.

Le calcul de K se fait par une technique dite méthode d'extrapolation des déplacements qui s'adopte au mieux aux problèmes élastiques, qui est exposée dans le Chapitre IV. de la 1ère Partie.

Enfin, nous faisons une comparaison entre les résultats obtenus par le calcul élément finis et ceux obtenus analytiquement, puisque la structure étudiée est de géométrie simple (éprouvette S.E.N) avec un chargement également simple.

Pour mieux exposer le travail, on a divisé notre étude en deux parties :

- la 1ère partie consiste en une étude bibliographique sur la théorie de l'élasticité et de la mécanique linéaire élastique de la rupture, et sur la méthode des éléments finis et ses applications au domaine de la M.L.E.R.

.../...

- la 2ème partie consiste en une présentation du programme d'éléments finis élaboré.

Notons enfin que cette étude est menée en parallèle par une étude expérimentale portant sur la détermination du facteur d'intensité de contrainte K pour l'acier utilisé par la S.N.V.I pour la fabrication des châssis des véhicules industriels.

11- ARTIE I.

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE  
-----

## THEORIE D'ELASTICITE

### CHAPITRE I.

#### I.1. Introduction :

La théorie de l'élasticité permet d'étudier le comportement des solides élastiques sous l'action des systèmes de forces extérieures appliquées. En particulier, la théorie de l'élasticité convient remarquablement pour l'étude de contrainte et de déformation au voisinage de trous, entailles ou autres irrégularités locales dans un corps. Dans ce rapport la théorie de l'élasticité est exposée brièvement en vue de la solution des problèmes plans de fissures.

La solution d'un problème selon la théorie de l'élasticité consiste à déterminer :

- les équations d'équilibre.
- les équations de compatibilité.

#### I.2. Equations différentielles d'équilibre :

Etudions l'équilibre d'un parallépipède rectangle de côtés de longueurs  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , représenté dans la Fig. (I.1)

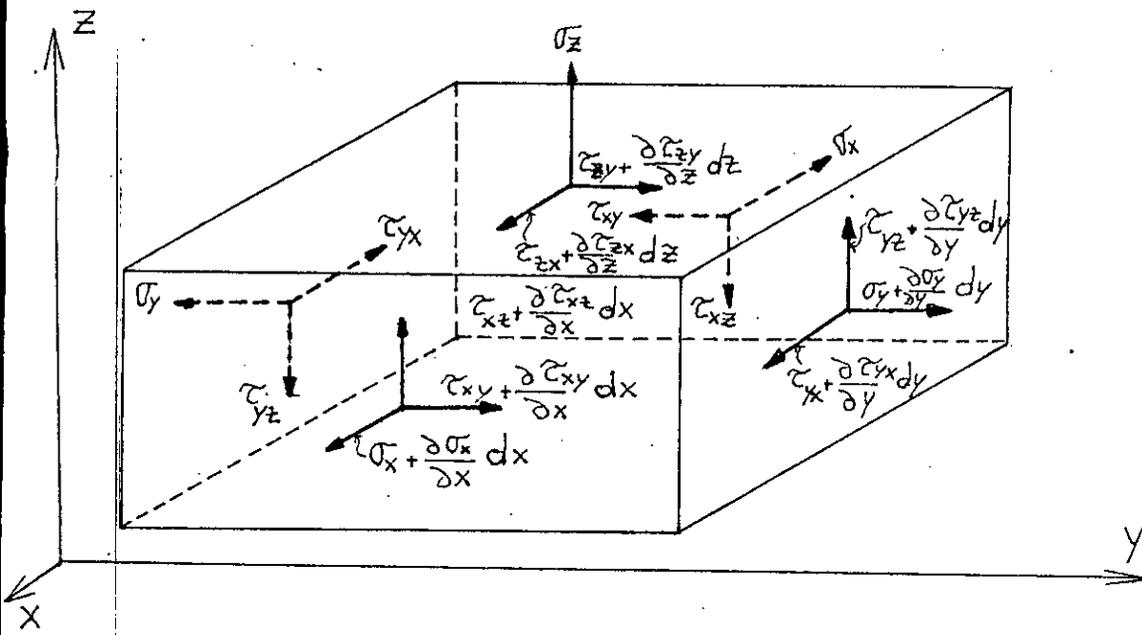


FIG. (I. 1)

L'équation exprimant l'équilibre des forces dans la direction  $x$ , en tenant compte des forces de volume  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ , donne :

$$\sum X_i = 0 \implies \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

de même; pour les directions  $y$  et  $z$  on obtient : (I.1)

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + Z = 0$$

Pour que l'équilibre existe, il faut que ces trois équations soient satisfaites en tous les points du corps.

.../...

### I.3. Equations de compatibilité :

Considérons deux segments de droites AB et AC situés dans le plan (x, y) représentés dans la Fig. (I.2).

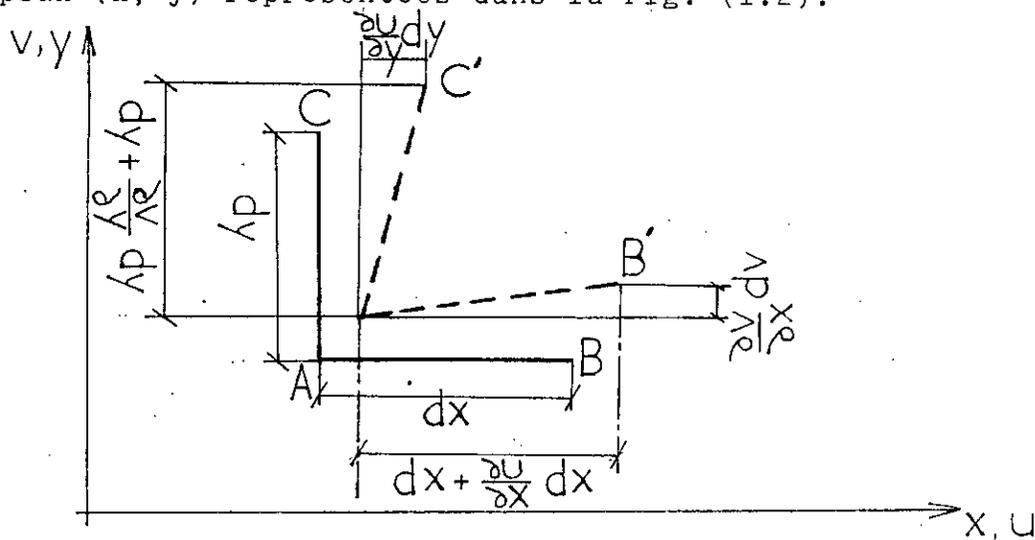


FIG. (I.2)

La déformation suivant x est exprimée par :

$$\epsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB}$$

avec  $AB = dx$  et  $A'B' = dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$

Ce qui donne :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

et

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (I.2)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

.../...

En éliminant les déplacements de ces équations, on obtient les six équations de compatibilité :

$$\begin{aligned} \partial^2 \varepsilon_x / \partial y^2 + \partial^2 \varepsilon_y / \partial x^2 &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \partial^2 \varepsilon_z / \partial y^2 &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \cdot \partial z} \\ \partial^2 \varepsilon_z / \partial x^2 + \partial^2 \varepsilon_x / \partial z^2 &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \cdot \partial z} \end{aligned} \quad (I.3)$$

$$\partial^2 \varepsilon_x / \partial y \cdot \partial z = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\partial^2 \varepsilon_y / \partial x \cdot \partial z = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right)$$

$$\partial^2 \varepsilon_z / \partial x \cdot \partial y = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right)$$

Dans tous les problèmes, les déformations doivent satisfaire l'ensemble de ces six équations pour avoir un champ de déformation continu et univoque.

#### I.4. Elasticité plane :

Pour étudier un problème dans le plan, on considère l'un des deux types d'élasticité plane.

.../...

### I.4.1. Déformation plane :

Par définition un solide est en déformation plane parallèle à un plan  $(x, y)$  si des sections parallèles à  $(x, y)$  ne sont déformées que sur elles-mêmes, sans déplacement dans la direction  $Z$ . Cette définition s'écrit :

$$u_x, u_y \quad \text{fonctions de } x, y \text{ seuls}$$

$$u_z = 0$$

$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

dans ce cas la loi de HOOKE s'écrit :

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \right]$$

$$0 = \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right]$$

$$\text{d'où } \sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$[\sigma] = [D] \cdot \{\epsilon\} \quad (I.4)$$

.../...

#### I.4.2. Contrainte plane :

Par définition un solide est en contrainte plane parallèle à un plan (x, y) lorsque les contraintes dont les deux indices ne sont pas dans ce plan sont nulles, c'est à dire :

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

dans ce cas la loi de HOOKE, sous forme matricielle, s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\epsilon\} \quad (I.5)$$

où  $[D]$  est la matrice d'élasticité.

#### I.5. Resolution des problèmes de fissure :

La satisfaction simultanée des conditions d'équilibre et de compatibilité peut être simplifiée par l'introduction d'une fonction, généralement polynomiale, dite fonction de contrainte d'AIRY qui, en la différentiant, conduit aux contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  et qui satisfait l'équation biharmonique suivante : dans le cas où  $X = 0$  et  $Y = -g$

$$\text{en coordonnées cartésiennes : } \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^4} = 0$$

$$\text{en coordonnées polaires : } \frac{d^4 \phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\phi}{dr} = 0$$

$$\text{soit : } \nabla^4 \phi = 0 \quad (I.6)$$

.../...

Pour calculer les contraintes et déformations au voisinage du front de fissure, IRWIN admet une fonction D'AIRY de la forme : en se referant à la Fig. (I.4).

$$\phi(r, \theta) = \operatorname{Re} \left[ \bar{z} \psi(z) + \chi(z) \right]$$

$$\text{tel que } \bar{z} \psi(z) + \chi(z) = A_1 r^{3/2} e^{-i\frac{\theta}{2}} + B_1 r^{3/2} e^{3i\frac{\theta}{2}} + \dots$$

ce qui donne :

$$\phi(r, \theta) = K_I \frac{r^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} \left( \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right) - K_{II} \frac{r^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} \left( \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \dots$$

qui vérifie l'équation biharmonique  $\nabla^4 \phi = 0$

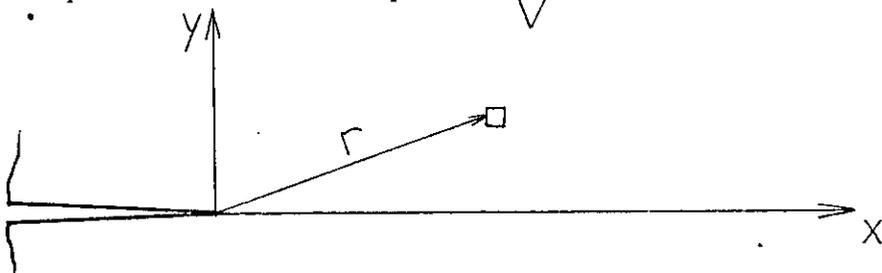


FIG.(I.4)

Cependant le choix de la fonction de contrainte d'AIRY vérifiant l'équation biharmonique devient difficile dans le cas des problèmes complexes de fissures, ce qui rend le recours aux méthodes numériques nécessaire pour la détermination du champ de contraintes et de déformations.

Parmi ces méthodes numériques, on trouve la méthode des éléments finis qui a donné des résultats assez satisfaisantes dont une présentation simple est présentée dans le Chapitre III.

THEORIE DE LA MECANIQUE LINEAIRE  
ELASTIQUE DE LA RUPTURE

CHAPITRE II.

II.1. Introduction :

Les progrès continus tant dans la conception des structures, que dans la nature des matériaux utilisés ont rendu l'analyse quantitative de la rupture particulièrement d'actualité.

La mécanique de la rupture, partant de la constatation que les ruptures résultent souvent de la présence de défauts créés au cours de la fabrication, établit une relation entre les contraintes appliquées, la dimension d'une fissure et la tenacité du matériau, c'est à dire la résistance qu'il oppose à l'amorçage et la propagation des fissures.

Il est en effet essentiel de chiffrer l'influence d'une fissure au sein d'une structure afin d'évaluer les risques réels de ruine de la structure.

On envisagera que le problème macroscopique, où la rupture est caractérisée par la séparation irréversible d'un milieu élastique en deux parties, de plus le matériau sera supposé élastique, linéaire et fragile.

II.2. Modes de rupture :

On définit trois modes élémentaires de déplacement des bords d'une fissure Fig. (II.1).

.../...

Pour le problème plan :

Mode I ouverture

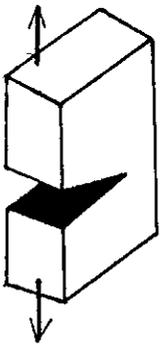
Mode II glissement parallèle ou cisaillement

et pour le problème anti-plan :

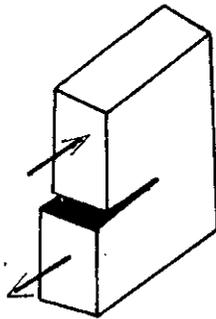
Mode III glissement perpendiculaire où déchirement

Toute fissure réelle ne peut être que la combinaison de ces trois modes élémentaires (I + II + III).

MODE I



MODE II



MODE III

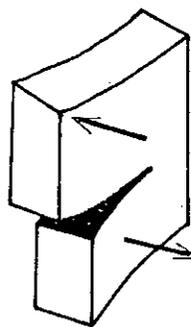


Fig. (II.1)

### II.3. Analyse élastique des contraintes :

Les résultats de la théorie de l'élasticité pour un problème plan d'une fissure soumise à une contrainte d'ouverture (Mode I) permettent d'écrire qu'en un point de coordonnées polaire  $r$  et  $\theta$ , Fig. (II.2), les contraintes et les déplacements au voisinage d'une fissure sont donnés par les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{array} \right\} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) \left\{ \begin{array}{l} 1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \cos(3\theta/2) \\ 1 + \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) \end{array} \right\} \quad (\text{II.1})$$

.../...

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \nu (\sigma_x + \sigma_y) \\ \tau_{xz} &= \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \right\} \text{déformation plane}$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ contrainte plane}$$

et

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} (2\alpha - 1) \cos(\theta/2) - \cos(3\theta/2) \\ (2\alpha + 1) \sin(\theta/2) - \sin(3\theta/2) \end{Bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

$$\alpha = 3 - 4\nu \quad \text{déformation plane}$$

$$\alpha = (3 - \nu)/(1 + \nu) \text{ contrainte plane.}$$

$$w = 0 \quad \text{déformation plane}$$

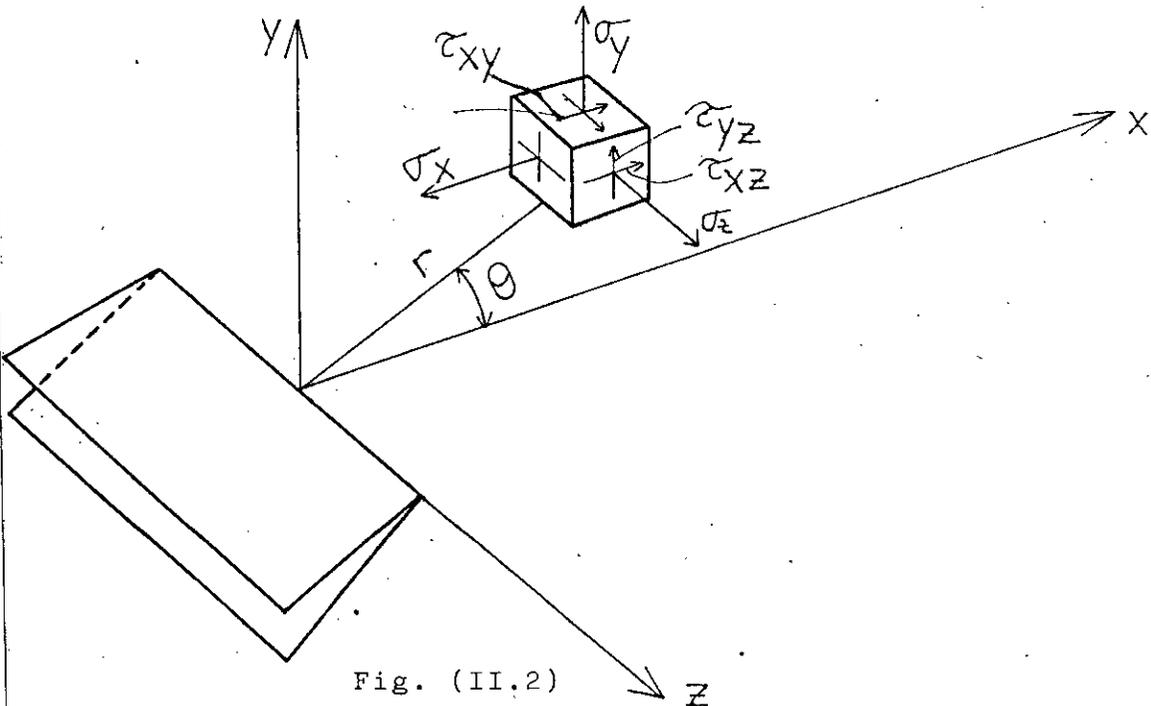


Fig. (II.2)

#### II.4. Théorie de GRIFFITH :

GRIFFITH établit la première approche de la mécanique linéaire élastique de la rupture étudiant l'équilibre énergétique d'une structure contenant une fissure de surface A et chargée par des forces  $F_i$ .

Il définit le taux de restitution d'énergie élastique  $G$  comme étant la variation de l'énergie de déformation élastique par unité de surface :

$$G = - \frac{\partial P}{\partial A} = - \frac{1}{t} \frac{\partial P}{\partial a}$$

où  $P$  : est l'énergie potentielle totale de la structure fissurée.

Si  $G$  est supérieur à une valeur critique  $G_c$ , la fissuration se produit.

Soit, pour le problème de GRIFFITH, une plaque infinie, contenant une fissure de longueur  $2a$  et soumise à une contrainte normale Fig. (II.3) ; le taux de restitution d'énergie élastique a pour expression :

$$G = \frac{\sigma^2 \cdot \pi a}{E'} \quad (\text{II.3})$$

Soit, au seuil critique :

$$\sigma_c^2 a = \frac{E' \cdot G_c}{\pi} = \text{Cte} \quad (\text{II.4})$$

Cette relation met en évidence le fait que, pour une entaille de profondeur donnée, la rupture de la structure se produit pour une valeur critique de contrainte appliquée.

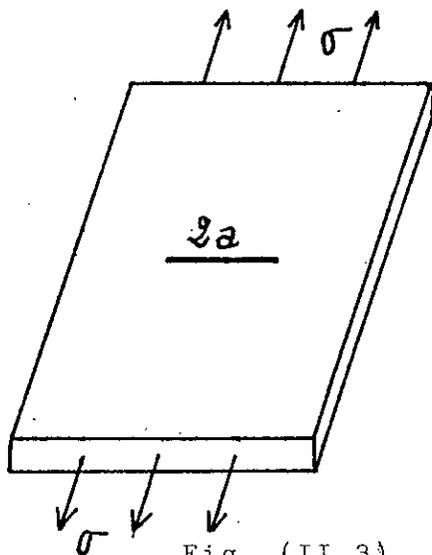


Fig. (II.3)

.../...

avec

$$E' = E / (1 - \nu^2) \quad \text{déformation plane}$$

$$E' = E / (1 - \nu) (1 - 2\nu) \quad \text{contrainte plane}$$

A chaque mode de rupture est associée un taux de restitution d'énergie :  $G_I$ ,  $G_{II}$ ,  $G_{III}$

$G$  s'exprime en  $[J/m^2]$  ou  $[N/m]$  s'appelle aussi force d'extension de la fissure.

### II.5. Théorie d'IRWIN :

La deuxième approche établie par "IRWIN" étudie l'état de contrainte dans la zone proche de l'extrémité de la fissure. IRWIN a pu, d'une façon générale, donner la forme du champ de contraintes et déformation au voisinage du fond de fissure en introduisant un facteur  $K$  qui dépend du solide, de la fissure et du chargement appelé facteur d'intensité de contrainte, voir équations (II.1) et (II.2).

Dans le cas d'une plaque infinie Fig. (II.3), le facteur d'intensité de contrainte en Mode I a pour expression :

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi \cdot a} \quad (II.5)$$

Il y a rupture de la structure lorsque  $K_I$  atteint une valeur critique  $K_{IC}$ , facteur intrinsèque au matériau.

$$K_{IC} = \sigma_C \sqrt{\pi \cdot a} \quad (II.6)$$

A chaque mode de rupture est associé un facteur d'intensité de contrainte :  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ .

$K$  s'exprime en  $[MPa \sqrt{m}]$ .

Remarque : Il ne faut confondre entre le facteur d'intensité de contraintes  $K_C$  et le coefficient de concentration de contrainte  $K_t$  qui lui est un coefficient théorique dépendant des paramètres extérieurs (géométrie de la pièce, accuité d'entail,...) et a l'expression suivante :

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}}$$

#### II.6. Corrélation entre les théories d'IRWIN et de GRIFFITH :

Il existe une relation simple entre les expressions du taux de restitution d'énergie et du facteur d'intensité de contrainte :

$$\text{En déformation plane : } K^2 (1 - \nu^2) = EG \quad (\text{II.7})$$

$$K^2 = EG \quad (\text{II.8})$$

#### II.7. Résolution du problème de singularité :

Dans les équations qui décrivent le champ de contraintes se pose un problème de singularité qui a été résolu en introduisant la zone de déformation plastique qui limite ces contraintes.

En effet, les valeurs de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  tendent vers l'infini au voisinage du fond d'entaille, ce qui est inconcevable physiquement.

D'après les équations (II.1), la contrainte normale  $\sigma_y$  varie en fonction de  $r$  selon :

$$\sigma_y = \frac{KI}{\sqrt{2\pi r}} \quad (\text{II.9})$$

.../...

Il existe donc une zone au voisinage du front de fissure où la contrainte atteint la limite élastique  $\sigma_e$ , ceci se produit quand  $r < r_p$ , Fig. (II.4), tel que :

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_e} \right)^2 \quad (\text{II.10})$$

Lorsque l'on est en état de déformation plane, le rayon de la zone plastique devient :

$$r_p = \frac{1}{6\pi} (K_I / \sigma_e)^2 \quad (\text{II.11})$$

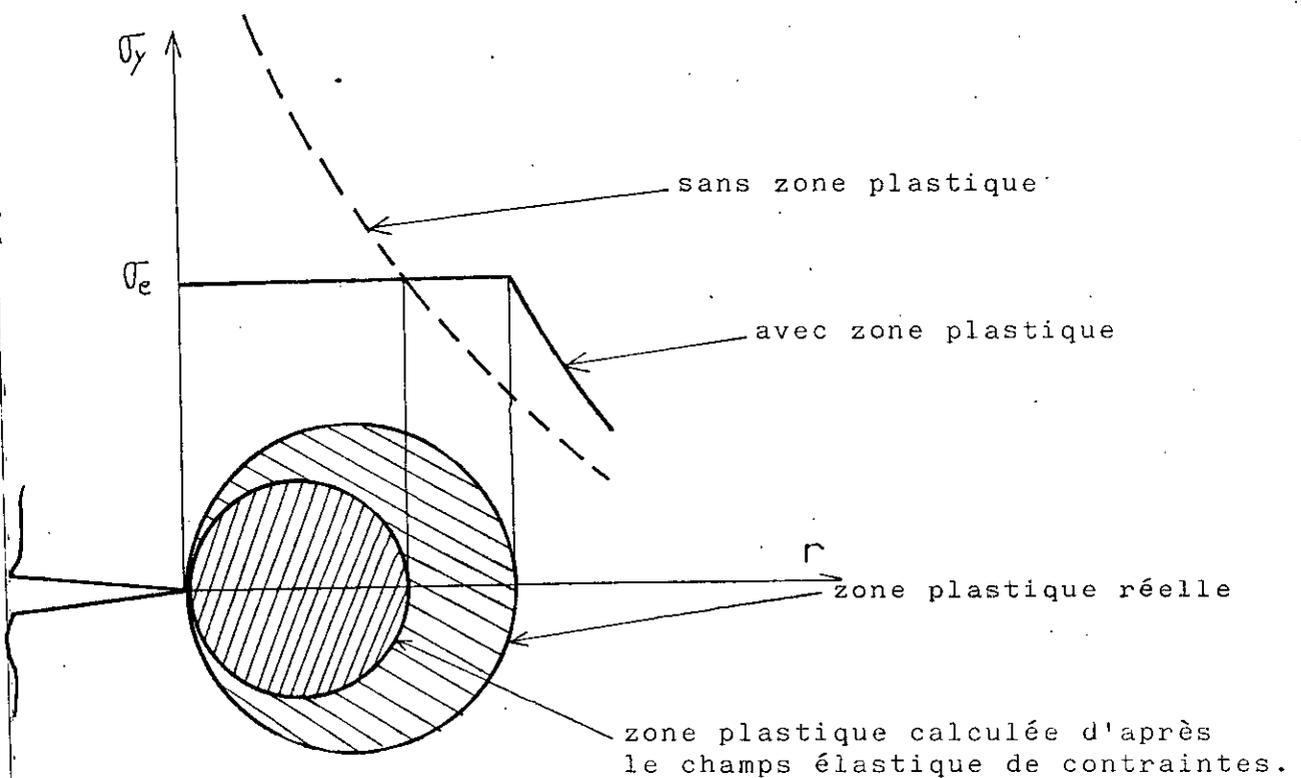


Fig. (II.4)

### II.8. Limite de validité :

Les concepts précédemment énoncés ne sont valable que dans le cas d'un matériau isotrope ayant un comportement élastique. Par ailleurs, la concentration de contrainte en fond d'entaille crée une plastification locale, Fig. (II.4), il est donc nécessaire que la taille de cette zone plastique reste petite par rapport à la longueur de la fissure et aux dimensions de la structure de façon à ne pas perturber la distribution élastique des contraintes, telle qu'elle est donnée par les formules (II.1).

La mécanique linéaire élastique de la rupture est d'autant plus applicable que la zone plastique est petite c'est à dire confinée dans la structure, ce qui impose aux éprouvettes utilisées dans les essais pour le calcul du facteur d'intensité de contraintes d'avoir des dimensions très supérieurs par rapport à la taille de cette zone.

Des conditions sont faites sur l'épaisseur  $t$  et la longueur  $a$  de la fissure des éprouvettes normalisées utilisées pour le calcul de  $K_I$  :

$$t, a \geq 2,5 \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_e} \right)^2 \quad (II.12)$$

Cette condition veut dire qu'en état de contrainte plane l'épaisseur  $t$  et la longueur de fissure  $a$  doivent être supérieur à 17 fois la taille de la zone plastique.

En effet  $K_I$  décroît lorsque l'épaisseur croît jusqu'à ce que soient atteintes les conditions d'un état de déformation plane Fig. (II.5).

.../...

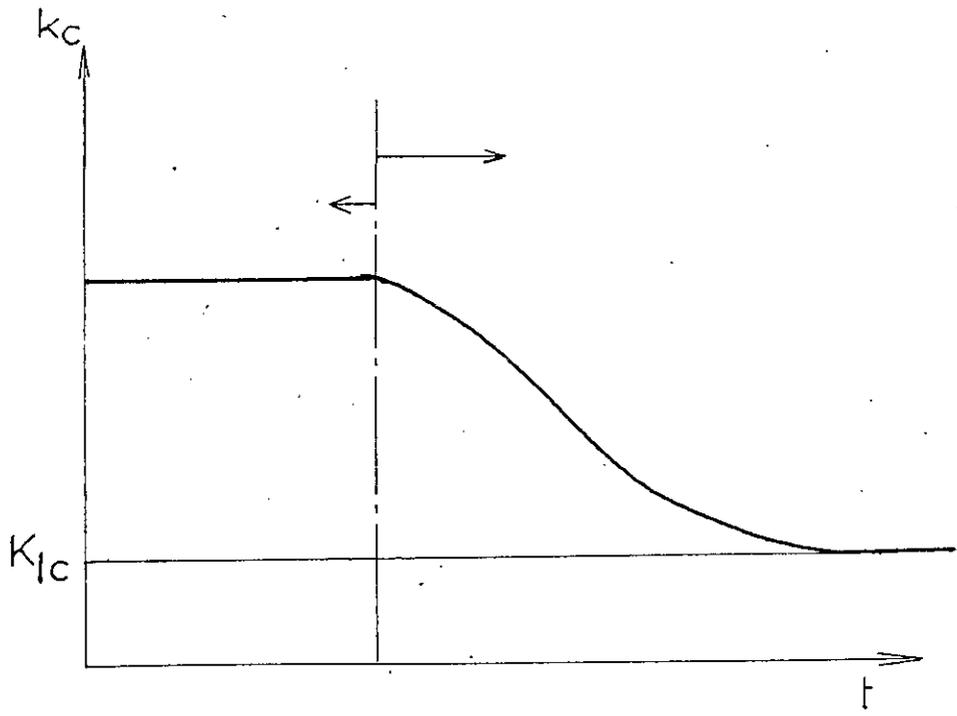


Fig. (II.5)

Il reste à signaler que l'éprouvette que nous avons utilisé pour le calcul du  $K_I$  par éléments finis satisfait les conditions de la mécanique linéaire élastique de la rupture. Il s'agit de l'éprouvette S.E.N (Single Edge Notch) en flexion trois points, dont les dimensions sont représentés dans la Fig. (II.6).

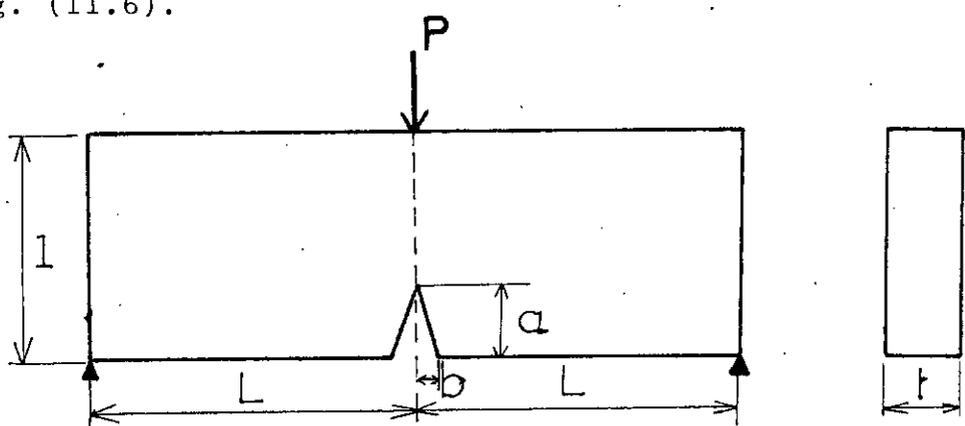


Fig. (II.6)

De plus sa largeur vérifie :

$$l \geq 5,0 \left( \frac{K_{Ic}}{e} \right)^2 \quad (II.13)$$

.../...

Si l'éprouvette ne peut pas être assimilée à une plaque de dimension infinie, comme c'est le cas dans le problème de GRIFFITH, il convient de remplacer le facteur  $\Pi$  de l'expression (II.5) par une fonction  $Y^2$  rendant compte des effets de bords. La fonction  $Y$  a été déterminée pour des essais de flexion et de traction de divers types d'entaille, dont l'expression analytique générale est de la forme :

$$Y = \sum_{i=0}^n a_i \left( \frac{a}{l} \right) \quad (\text{II.14})$$

$\frac{a}{l}$  : est la profondeur réduite d'entaille ou de demi-entaille (suivant le type d'éprouvette).

$a_i$  : sont des constantes ne dépendant que de la longueur et de la largeur de l'échantillon.

$n$  : est un nombre entier positif suffisamment grand pour obtenir une bonne estimation de la valeur  $Y$ .

Pour l'essai de flexion d'une éprouvette S.E.N, les valeurs des coefficients  $a_i$  sont données dans le tableau suivant :

2L/l.	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
4	+ 1,93	- 3,07	+ 14,53	- 25,11	+ 25,80
8	+ 1,96	- 2,75	+ 13,66	- 23,98	+ 25,22

PRESENTATION DE LA METHODE  
DES ELEMENTS FINIS

CHAPITRE III.

III.1. Introduction :

Le concept de base de la méthode des éléments finis consiste dans le fait que la structure peut être considérée comme un assemblage d'éléments indépendants.

L'idée nouvelle de la méthode des éléments finis est l'utilisation d'éléments de dimensions 2 et 3 pour la modélisation du continu, cette subdivision peut être obtenue de la manière suivante :

- \* le milieu continu est divisé par des lignes, ou des surfaces imaginaires en un certain nombre d'éléments finis.
- \* les éléments sont supposés reliés entre eux en un certain nombre fini de points nodaux situés sur leurs frontières; les déplacements de ces noeuds seront les inconnus de base du problème.
- \* on choisit une (ou des) fonctions permettant de définir de manière unique le champ de déplacement à l'intérieur de chaque élément fini en fonction des déplacements de ses noeuds.
- \* les fonctions de déplacements définissent l'état de déformation à l'intérieur d'un élément en fonction des déplacements nodaux, ces déformations définissent l'état de contraintes en tout point de l'élément est par conséquent sur ses frontières.

- \* on détermine un système de forces concentrés aux noeuds qui équilibre les contraintes s'exerçant aux frontières, il en résulte une relation de rigidité.

### III.2. Discrétisation d'une structure :

La méthode des éléments finis représente l'extension des méthodes matricielles pour les structures treillis à l'étude des structures continues.

Des lors, il est indispensable de substituer la structure continue par un modèle composé d'un grand nombre d'éléments finis, les parties continues sont reliées uniquement par des noeuds.

Il y a un grand nombre d'éléments finis, chacun ayant ses avantages particuliers. Dans ce présent travail, nous opterons pour un élément fini triangulaire linéaire à trois noeuds et six degrés de liberté.

La subdivision initiale en éléments finis de la structure étudiée a des caractéristiques suivantes :

- \* la nature de la modélisation par éléments finis a pour conséquence qu'en général la précision de la solution augmente avec le nombre d'éléments considérés.
- \* on peut utiliser une subdivision graduelle en élément pour permettre une étude plus détaillée des régions où on apprécie une grande concentration de contrainte.
- \* dans le cas de charges concentrées, le maillage doit être choisi de façon que les noeuds se trouvent aux points d'application des charges.

### III.3. Matrice de rigidité élémentaire pour l'élément triangulaire :

Le calcul de la matrice de rigidité élémentaire suit six étapes de base :

\* Etape I : Choix d'un système de coordonnées convenables et numérotation des noeuds.

- la numérotation des noeuds se fera dans le sens trigonometrique. Fig. (III.1).

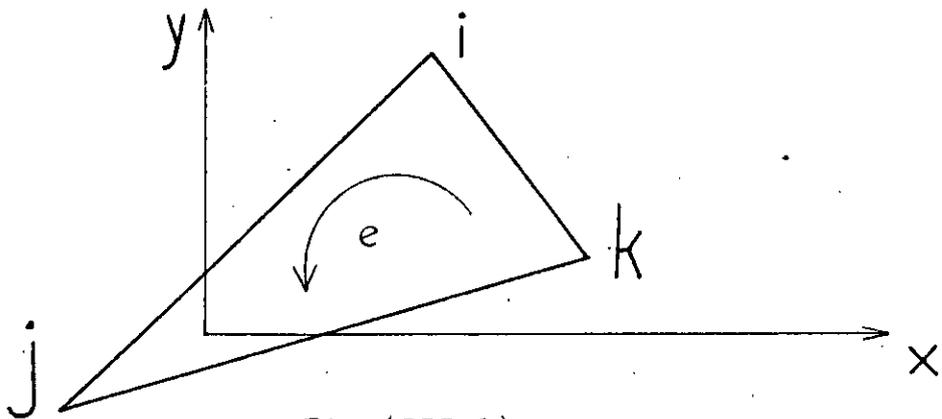


Fig (III.1)

- le vecteur déplacement et les forces correspondantes en chaque noeuds sont représentés dans la Fig. (III.2)

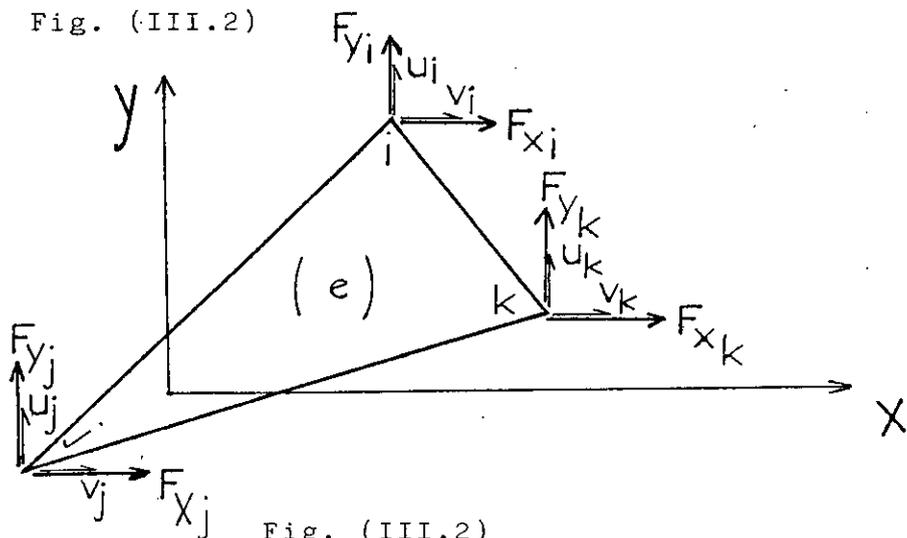


Fig. (III.2)

- les vecteurs forces et déplacements pour l'élément triangulaire s'écrivent :

.../...

$$\left\{ q^e \right\} = \left\{ \begin{matrix} q_i \\ q_j \\ q_k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{matrix} \right\}$$

et

$$\left\{ F^e \right\} = \left\{ \begin{matrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{xk} \\ F_{yk} \end{matrix} \right\}$$

\* Etape II : Choix de la fonction de déplacement  $[f(x, y)]$ .

La fonction de déplacement est choisie de manière à garantir la continuité des déplacements, et de définir de façon unique les paramètres nodaux. Dans le cas d'un élément triangulaire à six degrés de liberté on a besoin de six coefficients inconnus dans le polynôme représentant le mode de déplacement permis :

$$\begin{aligned} U &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ V &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

Sous forme matricielle

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

ou plus simplement :

$$\{q(x, y)\} = [f(x, y)] \cdot \{\alpha\} \quad (\text{III.2})$$

où

$[f(x, y)]$  : fonction reliant le déplacement d'un noeud de coordonnées  $(x, y)$  aux six coefficients inconnus .

\* Etape III : détermination de l'expression de l'état de déplacement en chaque point de l'élément en fonction des déplacements nodaux.

On calcule les fonctions d'interpolation à partir de la matrice  $[f(x, y)]$ , puis on construit une matrice  $[A]$  qui lie les déplacements nodaux aux coefficients inconnus  $\alpha$  en remplaçant chaque noeud par ses coordonnées et en plaçant les blocs selon la numérotation adoptée.

On obtient :

$$\{q^e\} = [A] \cdot \{\alpha\} \quad (\text{III.3})$$

.../...

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \} \\ \} \\ \} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1/1 \\ 1/2 \\ 1.3 \end{array}$$

Dans ce système d'équation, on peut exprimer le vecteur colonne des coefficients inconnus en fonction des déplacements nodaux :

$$\alpha = [A]^{-1} \cdot \{q^e\} \quad (\text{III.4})$$

En remplaçant l'équation (III.4) dans (III.2), on peut exprimer le déplacement en n'importe quel point en fonction des déplacements nodaux :

$$q(x, y) = [f(x, y)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{q^e\} \quad (\text{III.5})$$

soit

$$q(x, y) = [N] \cdot \{q^e\} \quad (\text{III.6})$$

avec

$$[N] = \left[ [N]^1, [N]^2, [N]^3 \right] \text{ fonction de forme ou d'interpolation.}$$

\* Etape IV : établissement de la relation entre les déformation  $\{\epsilon(x, y)\}$  et les déplacements nodaux.

L'équation (I.2) établit l'expression de l'état de déformation dans l'élément pour le problème de l'élasticité plane.

En remplaçant U et V par leurs expressions polynomiales données par l'équation (III.1), on obtient une équation qui peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\epsilon(x, y) = [Q] \cdot \{\alpha\}$$

.../...

En remplaçant le vecteur  $\{\alpha\}$  par l'équation (III.4), on obtient la relation déformation-déplacements nodaux :

$$\mathcal{E}(x, y) = [Q] [A]^{-1} \{q^e\} \quad (\text{III.7})$$

soit

$$\mathcal{E}(x, y) = [B] \cdot \{q^e\} \quad (\text{III.8})$$

avec :

$$B = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{où } A = 1/2 \cdot (c_3 b_2 - c_2 b_3) \quad (\text{III.9})$$

Les coefficients  $b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$  et  $c_3$  sont données par :

$$\begin{aligned} b_1 &= y_j - y_k & c_1 &= x_k - x_j \\ b_2 &= y_k - y_i & c_2 &= x_i - x_k \\ b_3 &= y_i - y_j & c_3 &= x_j - x_i \end{aligned} \quad \text{et} \quad (\text{III.10})$$

\* Etape V : établissement de la relation entre les contraintes  $\{\sigma(x, y)\}$  et déplacements nodaux.

Les équations (I.4) et (I.5) permettent de relier les contraintes aux déformations dans l'élément à l'aide de la matrice d'élasticité  $[D]$  selon le cas d'élasticité plane.

$$\text{avec } D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

En remplaçant  $\{\mathcal{E}(x, y)\}$  par l'équation (III.8), on aboutira à la relation : contraintes - déplacements nodaux :

$$\sigma(x, y) = [D] \cdot [B] \cdot \{\hat{q}\} \quad (\text{III.11})$$

soit

$$\sigma(x, y) = [H] \cdot \{\hat{q}\} \quad (\text{III.12})$$

.../...

\* Etape VI : Etablissement de la relation entre les forces nodaux et les déplacements nodaux.

Nous utilisons le principe des travaux virtuels, pour cela, imposons un déplacement virtuel  $\Delta(\hat{q})$  aux noeuds de l'élément. Le principe est d'égaliser le travail extérieur avec l'énergie de déformation interne.

- le travail extérieur produit lors du déplacement virtuel  $\Delta(\hat{q})$  est :

$$W_{\text{ext}} = \Delta(\hat{q})^T \cdot \{ \hat{F} \}$$

- l'énergie de déformation interne est :

$$W_{\text{int}} = \int_{V^e} \{ \varepsilon(x, y) \}^T \cdot \{ \sigma(x, y) \} \, dV$$

En substituant  $\varepsilon(x, y)$  et  $\sigma(x, y)$  par leurs expressions données par (III.8) et (III.11) on aura :

$$W_{\text{int}} = \int_{V^e} \Delta\{\hat{q}\}^T \cdot [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot \{\hat{q}\} \, dV$$

En égalisant  $W_{\text{ext}}$  et  $W_{\text{int}}$ , on obtient :

$$\Delta\{\hat{q}\}^T \cdot \{ \hat{F} \} = \Delta\{\hat{q}\}^T \left( \int_{V^e} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV \right) \{\hat{q}\}$$

analogue à :  $\{ \hat{F} \} = [K] \cdot \{\hat{q}\}$

d'où par identification on a :

$$[K^e] = \int_{V^e} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \, dV \quad (\text{III.13})$$

avec

$$[B]^T = [A^{-1}]^T \cdot [Q]^T$$

.../...

En remplaçant la matrice  $[B]$  par son expression (III.8) on obtient :

$$[K^e] = [A^{-1}]^T \int_{V^e} [Q]^T \cdot [D] \cdot [Q] \, dV \cdot [A^{-1}]$$

Soit :  $[K^e] = [A^{-1}]^T [R] \cdot [A^{-1}]$  (III.14)

Avec :  $[R] = \int_{V^e} [Q]^T \cdot [D] \cdot [Q] \, dV$  (III.15)

Pour le cas spécifique d'un élément triangulaire, on remplace l'expression

$$\int_{V^e} dV \quad \text{par} \quad t \iint dx \cdot dy = t \cdot A$$

où :

$t$  : épaisseur de l'élément supposée constante

$A$  : aire de l'élément triangulaire donné par l'équation (III.9).

De là, pour obtenir explicitement l'expression de  $K^e$ , on calcul en 1er lieu le produit ( $[Q]^T \cdot [D] \cdot [Q]$ ) puis on l'intègre et on effectue en 2ème lieu le produit ( $[A^{-1}] \cdot [R] \cdot [A]$ ).

$[K^e]$  s'écrira sous la forme explicite suivante :

$$[K^e] = \frac{t}{4A} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ & & & & K_{55} & K_{56} \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix}$$

Symétrique

.../...

avec :

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= d_{11} b_1^2 + d_{33} c_1^2 & K_{22} &= d_{22} c_1^2 + d_{33} b_1^2 \\
 K_{12} &= d_{12} c_1 b_1 + d_{33} c_1 b_1 & K_{23} &= d_{12} b_2 c_1 + d_{33} c_2 b_1 \\
 K_{13} &= d_{11} b_1 b_2 + d_{33} c_1 c_2 & K_{24} &= d_{22} c_1 c_2 + d_{33} b_1 b_2 \\
 K_{14} &= d_{12} c_2 b_1 + d_{33} c_1 b_2 & K_{25} &= d_{21} c_1 b_3 + d_{33} c_3 b_1 \\
 K_{15} &= d_{11} b_3 b_1 + d_{33} c_3 c_1 & K_{26} &= d_{22} c_3 c_1 + d_{33} b_3 b_1 \\
 K_{16} &= d_{12} c_3 b_1 + d_{33} c_1 b_3 \\
 \\ \\
 K_{33} &= d_{11} b_2^2 + d_{33} c_1^2 & K_{44} &= d_{22} c_2^2 + d_{33} b_2^2 \\
 K_{34} &= d_{12} c_2 b_2 + d_{33} c_2 b_2 & K_{45} &= d_{21} c_2 b_3 + d_{33} c_3 b_2 \\
 K_{35} &= d_{11} b_3 b_2 + d_{33} c_2 c_3 & K_{46} &= d_{22} c_2 c_3 + d_{33} b_3 b_2 \\
 K_{36} &= d_{12} c_3 b_2 + d_{33} c_2 b_3 \\
 \\ \\
 K_{55} &= d_{11} b_3^2 + d_{33} c_3^2 & K_{66} &= d_{22} c_3^2 + d_{33} b_3^2 \\
 K_{56} &= d_{12} c_3 b_3 + d_{33} c_3 b_3
 \end{aligned}$$

Les coefficients  $b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$  et  $c_3$  sont donnés par l'expression (III.10).

#### III.4. Vecteur charge élémentaire pour l'élément triangulaire :

Afin de pouvoir calculer les forces nodales statiquement équivalente aux chargements réparties sur les frontières de l'élément, on impose un déplacement virtuel  $\Delta(\hat{q})$  arbitraires aux noeuds de l'élément, puis on égalise les expressions des travaux intérieurs et extérieurs.

.../...

- le travail effectué par les forces nodales directement appliquées aux noeuds est égal à la somme des produits de chaque composante des forces par le déplacement correspondant s'écrit :

$$\Delta\{\hat{q}\}^T \cdot \{\hat{F}\}$$

- le travail intérieur effectué par les contraintes et les chargements répartis  $\{P\}$ , obtenu par intégration sur le volume de l'élément est :

$$\int_{V^e} \Delta\{\xi(x, y)\}^T \cdot \{\sigma(x, y)\} \, dV - \int_{V^e} \{q(x, y)\} \cdot \{P\} \, dV$$

Ou encore en remplaçant  $\xi(x, y)$  et  $q(x, y)$  respectivement par les équations (III.8) et (III.6) on aura :

$$\int_{V^e} \Delta\{\hat{q}\}^T \cdot \left( [B]^T \cdot \{\sigma(x, y)\} - [N]^T \cdot \{P\} \right) \, dV$$

En égalent les expressions des 2 travaux :

$$\Delta\{\hat{q}\} \cdot \{\hat{F}\} = \Delta\{\hat{q}\} \cdot \left( \int_{V^e} \left( [B]^T \cdot \{\sigma(x, y)\} - [N]^T \cdot \{P\} \right) \, dV \right)$$

Comme cette équation est valable pour n'importe quel déplacement virtuel, elle entraîne l'égalité des matrices par lesquelles sont multipliés ces déplacements, on a donc :

$$\{\hat{F}\} = \int_{V^e} \left( [B]^T \cdot \{\sigma(x, y)\} - [N]^T \cdot \{P\} \right) \, dV$$

.../...

et comme pour un comportement linéaire élastique  $\{\sigma(x, y)\}$  est donnée par l'expression (III.11), on aura :

$$\{\hat{F}\} = \left( \int_{V^e} [B]^T \cdot [D] [B] dV \right) \{\hat{q}\} - \int_{V^e} [N]^T \{p\} dV$$

soit en tenant compte de (III.13) :

$$\{\hat{F}\} = [K^e] \{\hat{q}\} - \int_{V^e} [N]^T \{P\} dV$$

qui peut s'écrire :

$$\{\hat{F}\} = [K^e] \{\hat{q}\} - \{\hat{F}\}^a \quad (\text{III.16})$$

avec  $\{\hat{F}\}^a = \int_{V^e} [N]^T \{P\} dV$  est la forces nodales statiquement équivalente à une charge répartie  $\{P\}$  s'exerçant sur l'élément.

Le vecteur charge répartie a 2 composantes :  $\{P\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$  où X et Y désignent les composante de la force de masse, et en remplaçant  $[N]^T$  par son expression on obtient :

$$\{\hat{F}\}^a = [A]^{-1} \cdot [Q] \iint [f(x, y)] dx dy. \quad (\text{III.17})$$

### III.5. Généralisation au domaine entier :

#### - Règle d'assemblage.

Le principe d'assemblage est basé sur la méthode conventionnelle de l'équilibrage direct des forces nodales auxquelles contribue chaque élément. Le raisonnement suivi dans le paragraphe précédant pour la détermination de la matrice rigidité élémentaire peut s'appliquer directement au milieu continu entier.

.../...

Pour cela, l'équation (III. 6) peut être généralisée à la structure toute entière en notant par :

- $\bar{N}$  : fonction de forme ou d'interpolation généralisée avec
  - $\bar{N}_i = N_i^e$  si le point considéré est à l'intérieur de l'élément (e) et que i est un point associé à cet élément.
  - $\bar{N}_i = 0$  si le point i ne figure pas dans l'élément
- $\bar{q}$  : déplacement généralisé regroupant les déplacements de tous les points nodaux.
 
$$\{q(x, y)\} = [\bar{N}] \{\bar{q}\}$$

De même la matrice  $[\bar{B}]$  sera défini semblablement à  $[\bar{N}]$ . On peut maintenant appliquer le principe des travaux virtuels à toute la structure.

- le travail extérieur associé à un déplacement virtuel de tous les noeuds  $\Delta(\bar{q})$  est :

$$W_{\text{ext}} = \Delta(\bar{q})^T \cdot \{\bar{F}\}$$

- le travail virtuel intérieur a pour expression :

$$W_{\text{int}} = \int_V \Delta\{\epsilon(x, y)\}^T \cdot \{\sigma(x, y)\} dV - \int_V \Delta\{\bar{q}\}^T \cdot \{\bar{P}\} dV$$

En introduisant les équations (III.6) et (III.11) généralisées sur tous le domaine dans l'expression du  $W_{\text{int}}$  et en égalisent les deux travaux on obtient finalement :

$$[K] = \int_V [\bar{B}]^T \cdot [D] \cdot [B] dV \quad (\text{III.18})$$

Si l'on considère la relation entre  $[\bar{B}]$  et  $[B]$ , il est évident que :

$$[K] = \sum_{e=1}^m [K^e] \quad (\text{III.19})$$

avec  $[K]$  : matrice de rigidité globale

$[K]^e$  : matrice de rigidité élémentaire.

$m$  : nombre totale d'éléments de la structure.

Finalement, d'après ce que nous venons de décrire, on peut dire que l'assemblage se fait en deux étapes :

- . Construction de la matrice de rigidité élémentaire  $[K]^e$  et du vecteur force élémentaire  $\{F\}^e$  de chaque élément.
- . Addition des matrices et vecteurs élémentaires.

Les techniques d'assemblage sont traitées abondamment dans ce rapport, je renvoie le lecteur aux Chapitre (II.4) de la 2ème Partie.

APPLICATION DE LA METHODE DES  
ELEMENTS FINIS A LA MECANIQUE  
DE LA RUPTURE

CHAPITRE IV.

IV.1. Introduction :

L'application de la méthode des éléments finis à la mécanique linéaire élastique de la rupture constitue une méthode générale et bien appropriée. En effet, elle permet de modéliser des géométries complexes soumises à des sollicitations quelconques.

Le développement extraordinaire des moyens de calcul par ordinateur fait de cette méthode un outil puissant pour l'étude des fissures.

IV.2. Evaluation du facteur d'intensité  
de contrainte :

La méthode des éléments finis est devenue une procédure standard pour la solution des problèmes pratiques de rupture. Un nombre de techniques avait été suggéré pour l'évaluation du facteur d'intensité de contrainte par la méthode des éléments finis, mais la représentation adéquate de la singularité au fond de fissure reste le problème commun à toutes ces techniques.

Ces techniques peuvent être classées en deux catégories :

- celles qui dérivent de grandeurs intégrées sur un volume ou une surface entourant la fissure, cette méthode est dite Globale.

.../...

- celles qui utilisent des valeurs locales des champs de contraintes ou des déplacements près de l'extrémité de la fissure, cette méthode est dite Locale.

#### IV.2.1. Méthode globale :

- Méthode de perturbation : dite technique de l'extension fictive de fissure.

Considérons une fissure de longueur  $a$  qui se propage d'une valeur fictive  $\Delta a$ , causant ainsi une énergie de déformation

Fig. (IV.1).

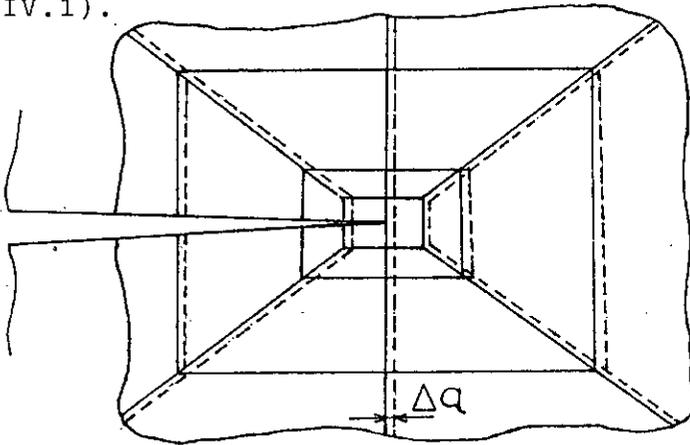


Fig. (IV.1)

Extension virtuelle de la fissure dans la direction de propagation.

Pour le calcul par élément finis, on peut utiliser la méthode suivante : notant par l'indice 1 les grandeur avant propagation virtuelle  $\Delta a$ , et par l'indice 2 celles après propagation. Si les sollicitations externes ne sont pas modifiées par l'avancée on a :

$$G = \frac{U_2 - U_1}{\Delta a}$$

.../...

"HELLEN" a montré que : 
$$G = - \frac{1}{2} \{q^T\} \frac{\Delta[K]}{\Delta a} \{q\} \quad (IV.1)$$

où

$\{q\}^T$  : vecteur transposé du vecteur champ de déplacement.  
 $[K]$  : matrice de rigidite globale.

Après avoir résolu le système linéaire  $[K] \cdot \{q\}^T = \{F\}$  (où  $\{F\}$  est le vecteur des forces externes) pour une longueur de fissure  $2a$ , on garde les déplacements  $\{q\}^e$  ainsi que les matrices de rigidité élémentaire  $[K]^e$  des éléments qui seront affectés par la propagation fictive de la fissure.

- on calcul numériquement les matrices de rigidité élémentaires des éléments modifiés, après avancés du fond de fissure, c'est à dire pour une fissure de longueur  $2a + \Delta a$ .

- on calcul :

$$G = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^m \{q^e\}^T \left\{ \frac{[K^e(2a + da) - K^e(2a)]^e}{\Delta a} \right\} \{q^e\} \quad (IV.2)$$

où  $m$  est le nombre de matrices élémentaires modifiées.

- on calcul le facteur d'intensité de contrainte par l'equation (II.7).

#### IV.2.2. Méthode locale :

##### - Méthode d'extrapolation des déplacements

L'expression analytique de la variation des déplacements le long d'une ligne radiale émanant du fond de fissure, Fig. (IV.2), en se référant à l'équation (II.2), est de la forme :

$$U_i = C K_I \sqrt{r} F_i(\theta) \quad (IV.3)$$

où

$$C = \frac{K_I}{4 G \sqrt{2 \pi}}$$

$F_i(\theta)$  : fonction polaire dépendant de l'angle

Ce qui fait que connaissant le déplacement  $U_i$  au noeud  $i$  par un calcul éléments finis, on peut calculer  $K_I$  par :

.../...

$$K_{Ii} = \frac{U_i}{c \sqrt{r_i} F_i(\theta)} \quad (\text{IV.4})$$

En déterminant  $K_I$  en plusieurs noeuds le long d'une direction radiale, on peut extraire la valeur effective de  $K_I$  en  $r = 0$  par extrapolation.

L'emploi de cette méthode nécessite un maillage assez dense près de la pointe de la fissure, elle est surtout applicable dans le cas des problème élastique.

On adoptera cette méthode pour le calcul de  $K_I$  varie la simplicité de sa mise en oeuvre.

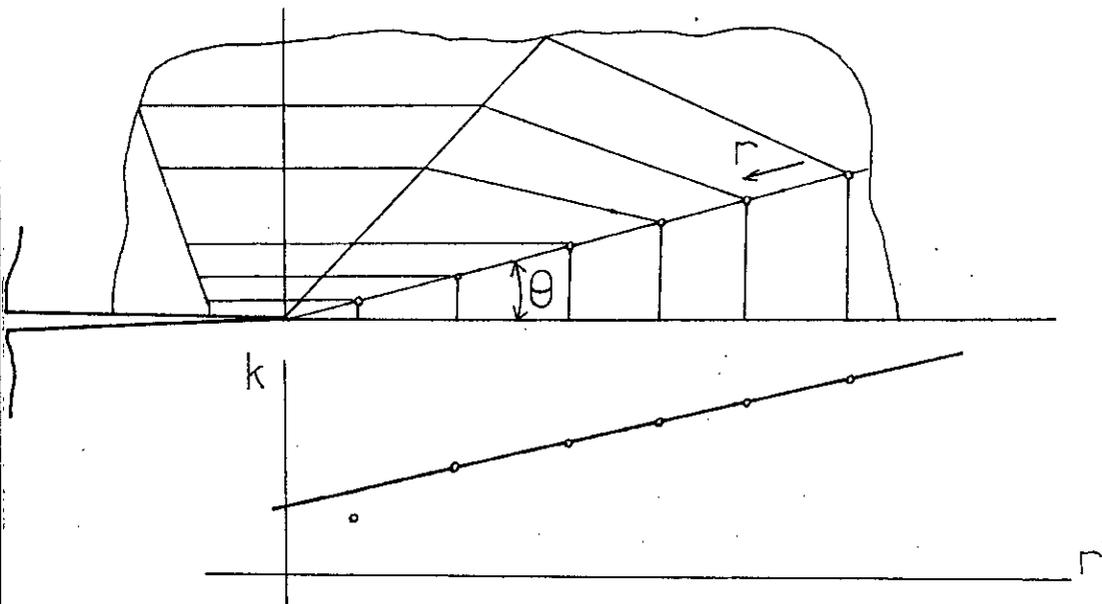


Fig. (IV.2) : Facteur d'intensité de contrainte évalué par extrapolation.

#### IV.3. Objectif de l'étude numérique :

L'objectif des calculs éléments finis est d'obtenir des résultats théoriques qui peuvent être comparés aux mesures expérimentales.

.../...

Pour les corps fissurés, les calculs éléments finis utilisent les théories de l'élasticité (solide élastique) et de la mécanique linéaire de la rupture, il est donc intéressant de faire une corrélation entre la réalité physique et l'approche théorique.

D'autre part, on peut comparer les résultats obtenus par le calcul élément finis avec ceux obtenus analytiquement puisque la structure étudiée est de géométrie simple (Eprouvette S.E.N) et sollicité par un chargement également simple.

Enfin cette étude permet d'acquérir l'expérience de la modélisation numérique des phénomènes de rupture afin d'appliquer ces méthodes à des cas complexes. Pour ceux-ci, il n'existe aucune solution analytique même approchée ni même la possibilité de faire efficacement des mesures en laboratoire. On trouve là tout l'intérêt de la méthode des éléments finis.

)  
     A R T I E    I I .

ORGANISATION DE PROGRAMME ELEMENTS FINIS  
APPLIQUE A LA MECANIQUE  
DE LA RUPTURE.

-----

ORGANISATION DE PROGRAMME ELEMENTS FINIS  
APPLIQUE A LA MECANIQUE DE LA RUPTURE.

I. INTRODUCTION :

Le principe de la méthode des éléments finis a été exposé dans le Chapitre III de la 1ère Partie. Nous entamons dans cette 2ème partie la mise en oeuvre de cette méthode sous la forme d'un programme "FORTRAN" simple. Afin d'illustrer la méthode, nous considérons un exemple particulièrement significatif en mécanique de la rupture : c'est l'étude de la singularité des contraintes dans l'entaille réalisée sur une pièce.

II. PRESENTATION DU PROGRAMME :

Le programme élaboré présente la 2ème partie de notre travail, il étudie la déformation plane d'une éprouvette entaillée en V, posée simplement à ses extrémités sur deux appuis et sollicitée par une charge concentrée P qui est en fait répartie sur toute l'épaisseur. Le programme éléments finis a été élaboré d'une façon structurée, il est constitué par un programme principal qui fait appel à neuf sous-programme SURBROUTINE.

II.1. Maillage :

Vue que l'éprouvette présente une parfaite symétrie et dans la géométrie et dans le chargement, la moitié de l'éprouvette sera maillée à condition de tenir compte des conditions aux limites appropriées qui résultent de cette restriction.

Le maillage est réalisé de façon à ce que, par déformation continue du réseau, on puisse transformer le contour ABCD en un rectangle abcd.

Pour cela, il suffit de choisir judicieusement les sommets. La numérotation se fait dans l'ordre indiqué du Fig. (II.1), ce qui permet de localiser les éléments très facilement sur la structure réelle.

Les zones de fort gradient des contraintes se trouvent sous la sollicitation et au fond de l'entaille, c'est pourquoi on a concentré le maillage dans ces zones.

## II.2. Entrée des données :

### II.2.1. Lecture de maillage :

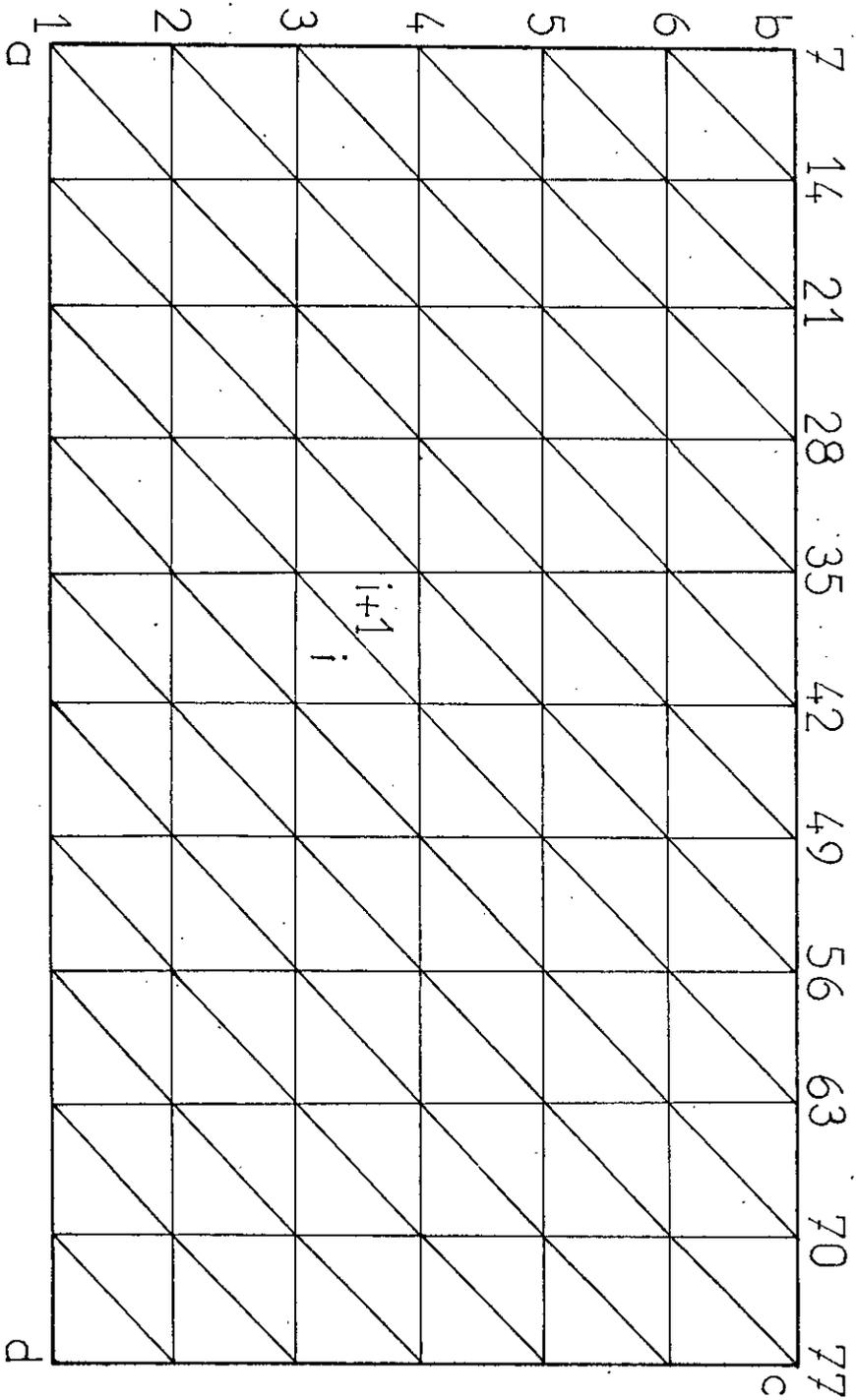
La lecture des coordonnées des noeuds et connectivités se fait par le sous-programme "LECT".

Lors de son exécution le sous-programme "LECT" crée deux tables susceptibles de décrire le maillage :

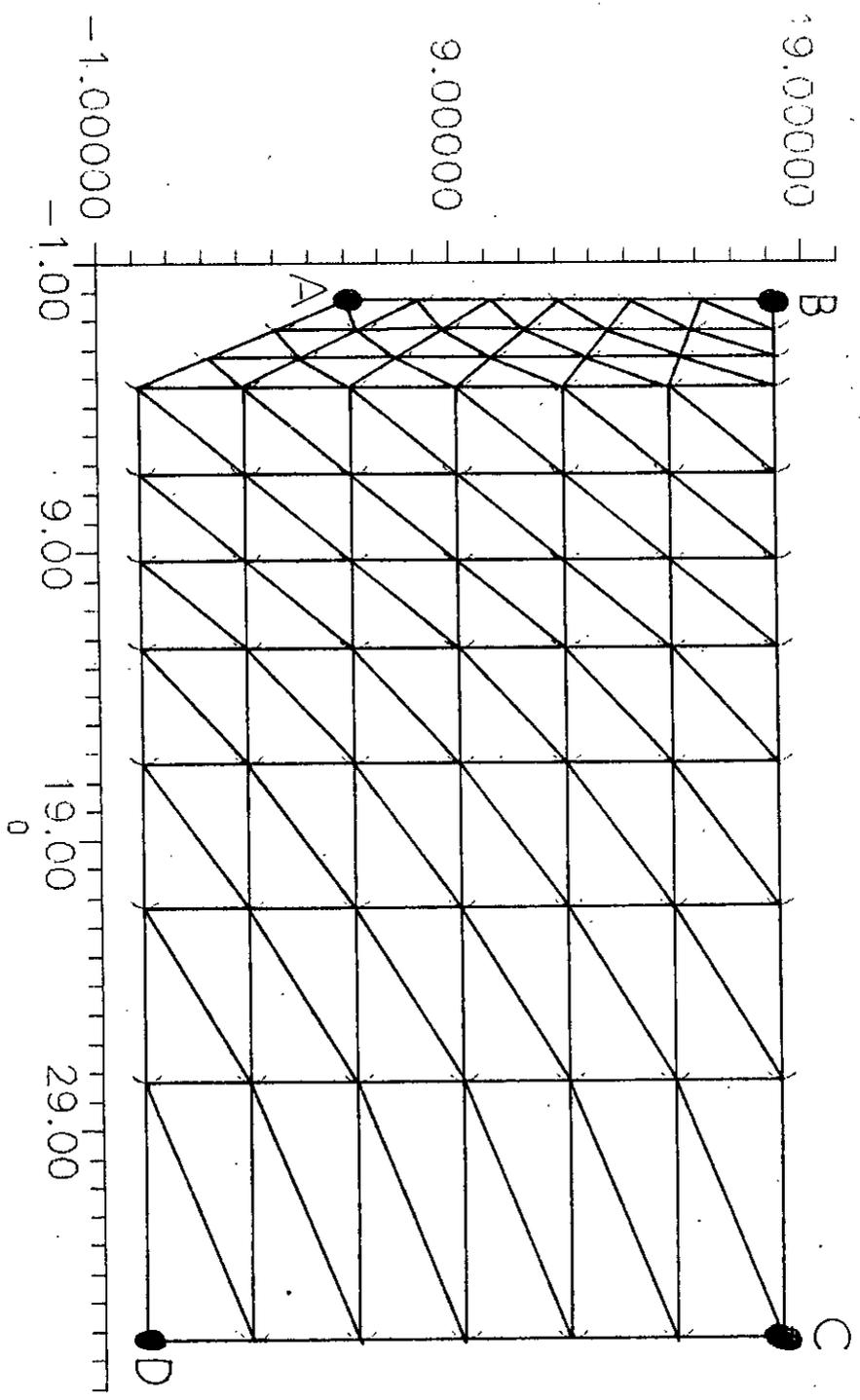
- \* TCORG : Table de Coordonnées Globales qui définit la position des noeuds du maillage dans un repère global.
- TCORG dépend du nombre de dimension du problème qui est égal à 2 dans notre cas (NDIM = 2), et du nombre de noeuds totale de la structure(NNT).
- On distingue 2 codes :
- . TCORG (1, IN)----- Abscisse x du noeud IN
- . TCORG (2, IN)----- Ordonnée y du noeud IN.

.../...

FIG.(II1)



Maillage et repérage des noeuds



\* TCON : Table de Connectivités qui permet de définir localement (dans un repère local) les numéros (i, j, k) de chaque noeuds.

Soit par exemple une structure discrétisée en 4 éléments triangulaires à 3 noeuds et 6 degrés de libertés par éléments, la structure a donc un nombre de noeuds total égal à 12, Fig. (II.2).

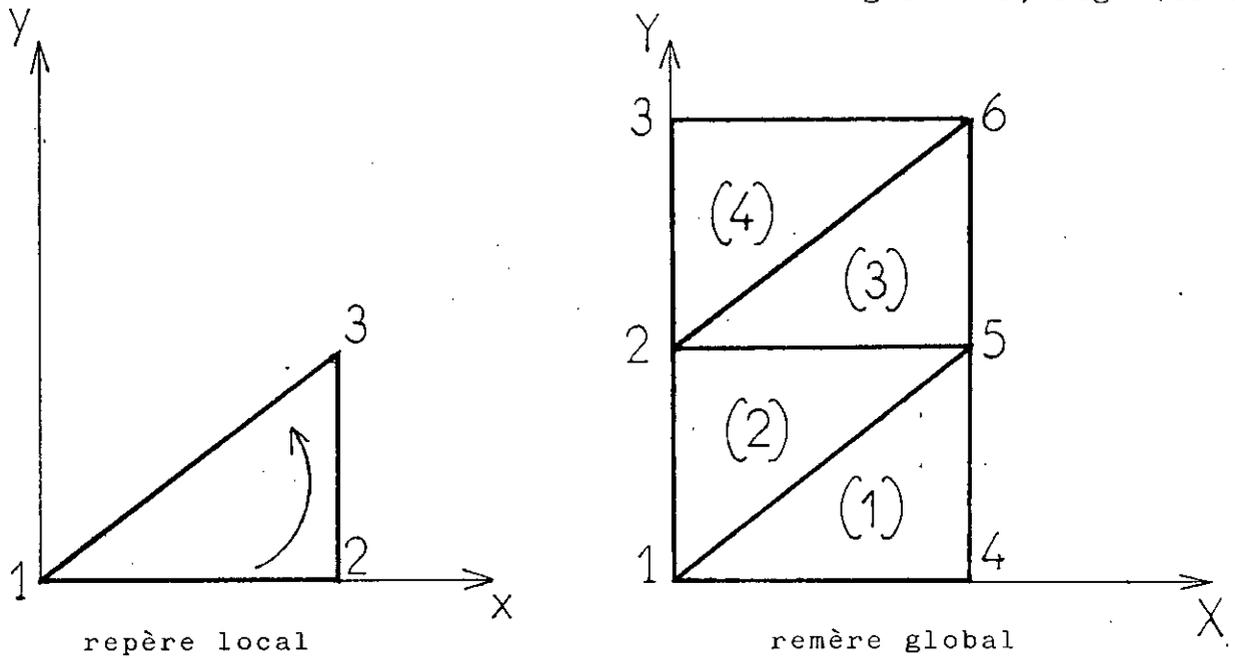


Fig. (II.2)

On isole chaque élément de la structure et on met les numéros de cet élément dans la liste des connectivité. Le tableau suivant montre lucidement cette opération.

.../...

N° de l'élément	Numéros du noeud		
	1	2	3
1	1	4	5
2	1	5	2
3	2	5	6
4	2	6	3

TCON dépend du nombre de noeud par élément (NNEL) et du nombre d'éléments total de la structure.

On distingue les 3 codes suivants :

- . TCON (1, NE) ----- 1er noeud de l'élément NE
- . TCON (2, NE) ----- 2ème noeud de l'élément NE
- . TCON (3, NE) ----- 3ème noeud de l'élément NE

### II.2.2. Introduction des paramètres :

Les paramètres géométriques et mécaniques de la structure sont introduits dans le programme principal par le sous-programme "PARAM" pour être utilisé par la suite par d'autres sous-programmes, on distingue :

- PROPS (1) épaisseur de l'éprouvette
- PROPS (2) longueur de l'éprouvette
- PROPS (3) longueur de la fissure
- PROPS (4) module de YOUNG (E)
- PROPS (5) coefficient de poisson.

### II.2.3. Lecture des conditions aux limites :

Les conditions aux limites sont lues par le programme principal lui même en utilisant une technique dite technique du terme diagonal dominant.

En fait, pour exécuter l'essai de flexion 3 points, l'éprouvette est poignée par un plateau d'une presse qui a une certaine largeur BE, Fig. (II.3). Pour pouvoir prendre en compte cela, on impose aux noeuds, affecté par le poinçon, un déplacement  $\Delta$ .

Les conditions aux limites du problème sont alors :

$$U = 0 \text{ sur l'axe de symétrie AB}$$

$$v = \Delta \text{ sur le poinçon BE}$$

$$v = 0 \text{ en D.}$$

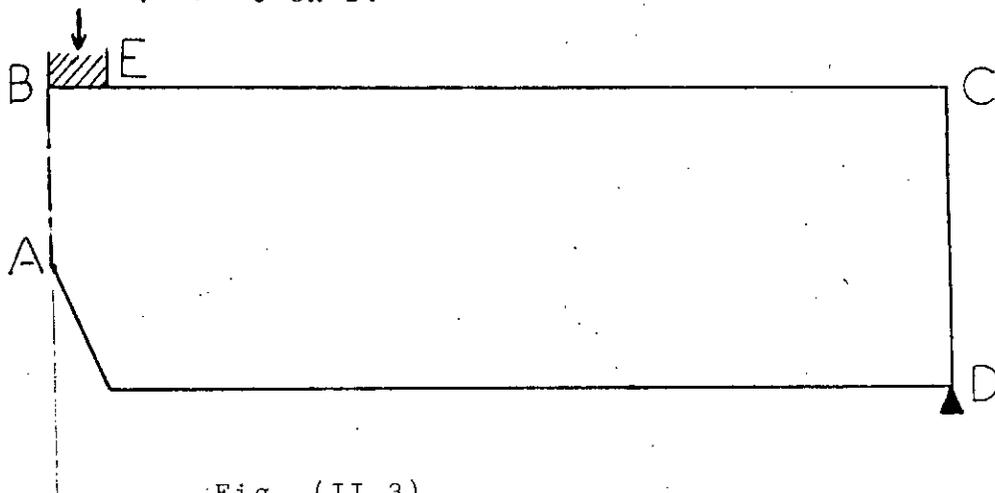


Fig. (II.3)

\* Technique du terme diagonal dominant

Soit  $q_{\alpha}^d$  la  $\alpha$ -ième donnée en déplacement généralisé. Remplaçons l'élément diagonal  $K_{\alpha\alpha}$  de la matrice de rigidité par le terme  $K_{\alpha\alpha} + \text{GRAND}$ .  
Où "GRAND" est un très grand, il est pris égal à  $10^{20}$ . puis mettons le terme  $q_{\alpha}^d$  à la place de la ligne ( $\alpha$ ) du vecteur force  $\{F\}$ .

.../...

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1\alpha} & \dots & K_{1n} \\ K_{\alpha 1} & \dots & K_{\alpha\alpha} + \text{GRAND} & \dots & K_{\alpha n} \\ K_{n1} & \dots & K_{n\alpha} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_\alpha \\ q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ q_\alpha^d \cdot \text{GRAND} \\ F_n \end{Bmatrix}$$

L'équation  $\alpha$  donne :

$$K_{\alpha 1} q_1 + K_{\alpha 2} q_2 + \dots + (K_{\alpha\alpha} + \text{GRAND}) q_\alpha + \dots + K_{\alpha n} q_n = q_\alpha^d \cdot \text{GRAND}$$

$$\rightarrow q_\alpha \cdot \text{GRAND} + \sum_{j=1}^n K_{\alpha j} q_j = q_\alpha^d \cdot \text{GRAND}$$

$$\text{Comme } \text{GRAND} \approx 10^{20} \gg \sum K_{\alpha j} q_j$$

La  $\alpha$ -ième équation du système linéaire se réduit pratiquement à l'équation :

$$q_\alpha = q_\alpha^d$$

A titre indicatif il existe d'autres techniques pour l'introduction des conditions aux limites, parmi-elles :

- technique du terme unitaire sur la diagonale.
- technique de la suppression des lignes et colonnes correspondantes au degré de liberté imposé.

### II.3. Construction de la matrice et du vecteur élémentaires :

Considérons un triangle (e) de sommets (i, j, k), il s'agit de trouver la contribution du triangle (e) au comportement de la structure, c'est ce que fournit la matrice de rigidité élémentaire  $[K^e]$  dont la somme étendue sur tout le domaine constitue la matrice globale  $[K]$ .

.../...

La tâche est fournie par le sous-programme "ELEMO", qui utilise la table de localisation créée par le sous-programme "LOCEF" qui localise tous les degrés de liberté pour chaque élément.

Dans notre cas les numéros des degrés de liberté sont codés comme suit :

2i - 1 ----- déplacement U

2i ----- déplacement V

Pour l'exemple précédent de la Fig. (II.2), le tableau de localisation est donné ci-dessous :

Element 1			Element 3		
Noeud	Localisation des D.D.L.		Noeud	Localisation des D.D.L.	
N°	U	V	N°	U	V
1	1	2	2	3	4
4	7	8	5	9	10
5	9	10	6	11	12
Element 2			Element 4		
1	1	2	2	3	4
5	9	10	6	11	12
2	3	4	3	5	6

#### II.4. Assemblage :

Cette opération est effectuée par le sous-programme "ASSEMB" en deux parties :

- élargissement des matrices et vecteurs élémentaires de chaque élément.

.../...

- sommation des matrices et vecteurs élémentaires.

Le programme élaboré stocke la matrice de rigidité globale sous forme d'un vecteur d'ordre (NEQ \* NEQ).

avec

$$NEQ = NNT \times NDLN.$$

où : NNT : est le nombre de noeud total

NDLN : nombre de degré de liberté par noeud (égal à 2)

NEQ : nombre d'équation du système.

#### II.5. Résolution du système d'équations :

La résolution du système d'équation  $[K] \cdot \{q\} = [F]$  est accomplie par le sous-programme "RESOL", pour cela on a utilisé la méthode d'élimination de Gauss.

A la fin de son exécution, le sous-programme "RESOL" nous donne les déplacements inconnus en chaque noeud.

La méthode de Gauss consiste à :

##### 1. Triangulation de la matrice :

$$\left[ \begin{array}{c} A \\ \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} X \\ \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} B \\ \end{array} \right\} \quad \longrightarrow \quad \left[ \begin{array}{c} \diagdown \\ \quad \quad \quad \diagup \\ 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} X \\ \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} B' \\ \end{array} \right\}$$

Cela s'effectue selon l'algorithme suivant :

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \left[ \begin{array}{c} (k-1) \\ a_{ik} \end{array} / \begin{array}{c} (k-1) \\ a_{kk} \end{array} \right] a_{kj}^{(k-1)}$$

$$b_i = b_i^{(k-1)} - \left[ \begin{array}{c} (k-1) \\ a_{ik} \end{array} / \begin{array}{c} (k-1) \\ a_{kk} \end{array} \right] b_k^{(k-1)}$$

.../...

avec

$$i = k + 1, \dots, n$$

$$j = k + 1, \dots, n$$

$$k = 1, \dots, n + 1$$

2. Résolution du système triangulaire supérieur :  
Cela s'effectue selon l'algorithme suivant :

$$x_n = b_n / a_{nn}$$

$$x_i = A / a_{ii} \left[ b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right]$$

avec

$$i = n - 1, n - 2, \dots, 1.$$

#### II.6. Evaluation des contraintes et des déformations :

Le sous-programme "DEFOR" permet de calculer les contraintes et les déformations dans chaque élément en faisant appel aux deux sous-programmes "BMAT" et "DMAT" qui construisent respectivement la matrice  $[B]$  reliant les contraintes aux déplacements selon l'équation (III.8), et la matrice d'élasticité  $[D]$  qui lie les contraintes aux déformations selon les équations (I.4) et (I.5) du Chapitre I de la 1ère Partie.

#### II.7. Détermination des facteurs d'intensité de contraintes :

Le sous-programme "KIC" met en oeuvre la méthode d'extrapolation des déplacements nodaux pour calculer le facteur d'intensité de contrainte.

Pour cela, le sous-programme choisit une direction radial émanant du point de fissure, puis localise les points nodaux situés sur cette ligne pour enfin calculer les  $KI_i$  de chaque'un

.../...

de ces noeuds selon l'équation (IV. 4 ) du Chapitre IV de la 1ère Partie.

### II.8. Impression des résultats :

Elle est assurée par le sous-programme "PRINTRES" qui imprime dans un fichier préalablement défini les résultats suivants :

- . les déplacements U et V de chaque noeuds
- . les contraintes :  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$
- . les déformations :  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$
- . les facteurs d'intensité de contraintes :  $KI_i$ .

### Remarques :

\* Le programme élément finis peut être exécuté en contrainte ou déformation plane, ce choix est accompli par l'intermédiaire d'une constante  $C = \text{PROPS (6)}$  induite dans le sous-programme DMAT pour le calcul de la matrice d'élasticité  $[D]$  dont les termes  $d_{ij}$  sont introduit sous la forme :

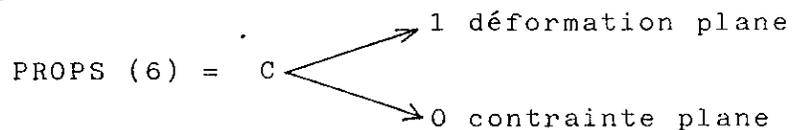
$$d_{11} = d_{22} = \frac{E (1 - C \nu)}{(1 + \nu) (1 - \nu - C \nu)}$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{d_{11}}{(1 - C \nu)}$$

$$d_{13} = E/2 (1 + \nu)$$

$$d_{13} = d_{23} = d_{31} = d_{32} = 0$$

de telle sorte que :

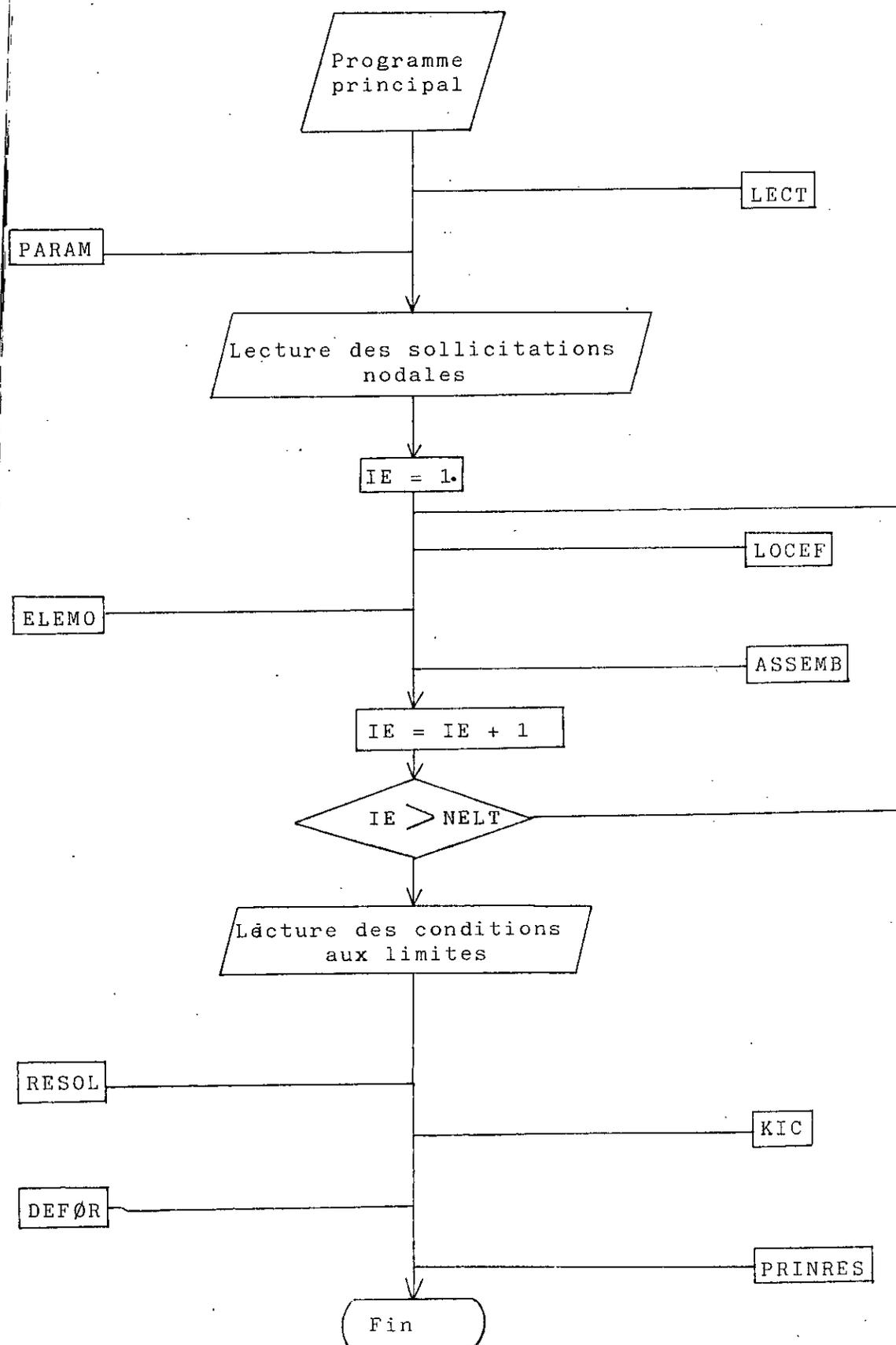


.../...

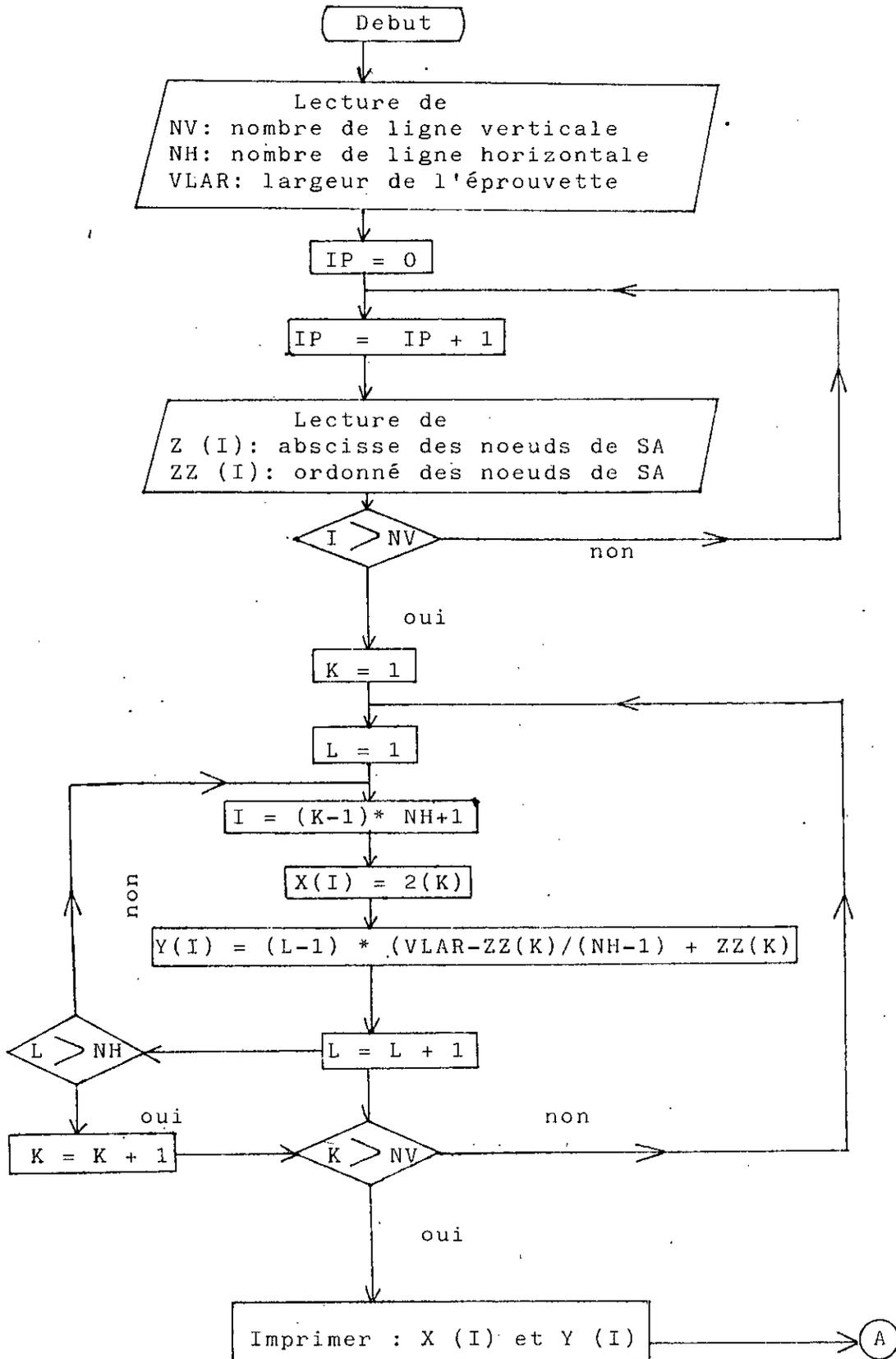
\* On a élaboré un programme appelé "GENER" pour générer automatiquement la lecture des coordonnées de chaque noeuds et les connectivités de chaque élément et les imprime dans un fichier qui sera utilisé comme un fichier DATA pour le programme élément finis.

Pour cela le programme "GENER" à besoin de connaître

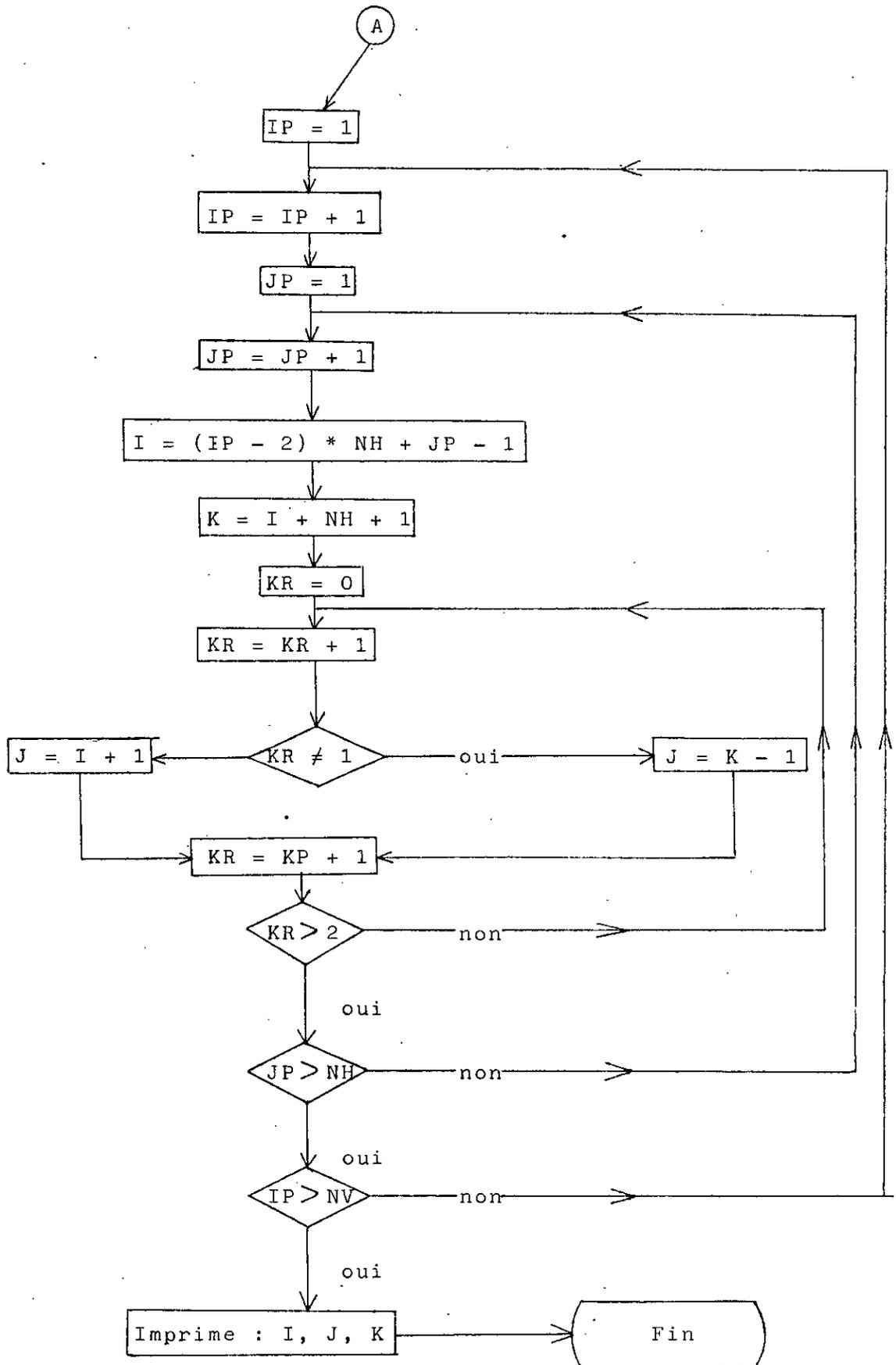
- . le nombre de ligne verticales (NV)
- . le nombre de ligne horizontales (NH)
- . les abscisses et les ordonnées des points nodaux situés sur la surface d'appuis AD voir Fig. (II.1).

III. ORGANIGRAMMES :III.1. Organigramme du programmeélément finis :

## III.2. Organigramme du programme "GENER"



(suite)



#### IV. EXEMPLE D'APPLICATION ET COMMENTAIRES

##### IV.1. Matériau utilisé :

- Les constantes élastiques du matériau utilisé sont :

$$E = 2.10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0,3$$

- Les constantes géométriques, en se référant à la Fig. (II.6), sont :

2L = 72 mm ----- distance entre-appuis ou longueur

l = 18 mm ----- largeur

t = 9 mm ----- épaisseur

avec

$$2L/l = 4$$

##### IV.2. Resultats obtenus :

###### IV.2.1. Facteur d'intensité de contrainte :

\* Par la méthode des éléments finis :

Pour une direction radiale émanant du front de fissure faisant un angle de 45° avec l'axe de symétrie, les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte  $KI_i$  des noeuds situés sur cette ligne radiale sont présentées dans le tableau ci-après :

. La valeur effective du facteur d'intensité de contrainte  $KI$  en  $r = 0$  est obtenue par extrapolation linéaire.

.../...

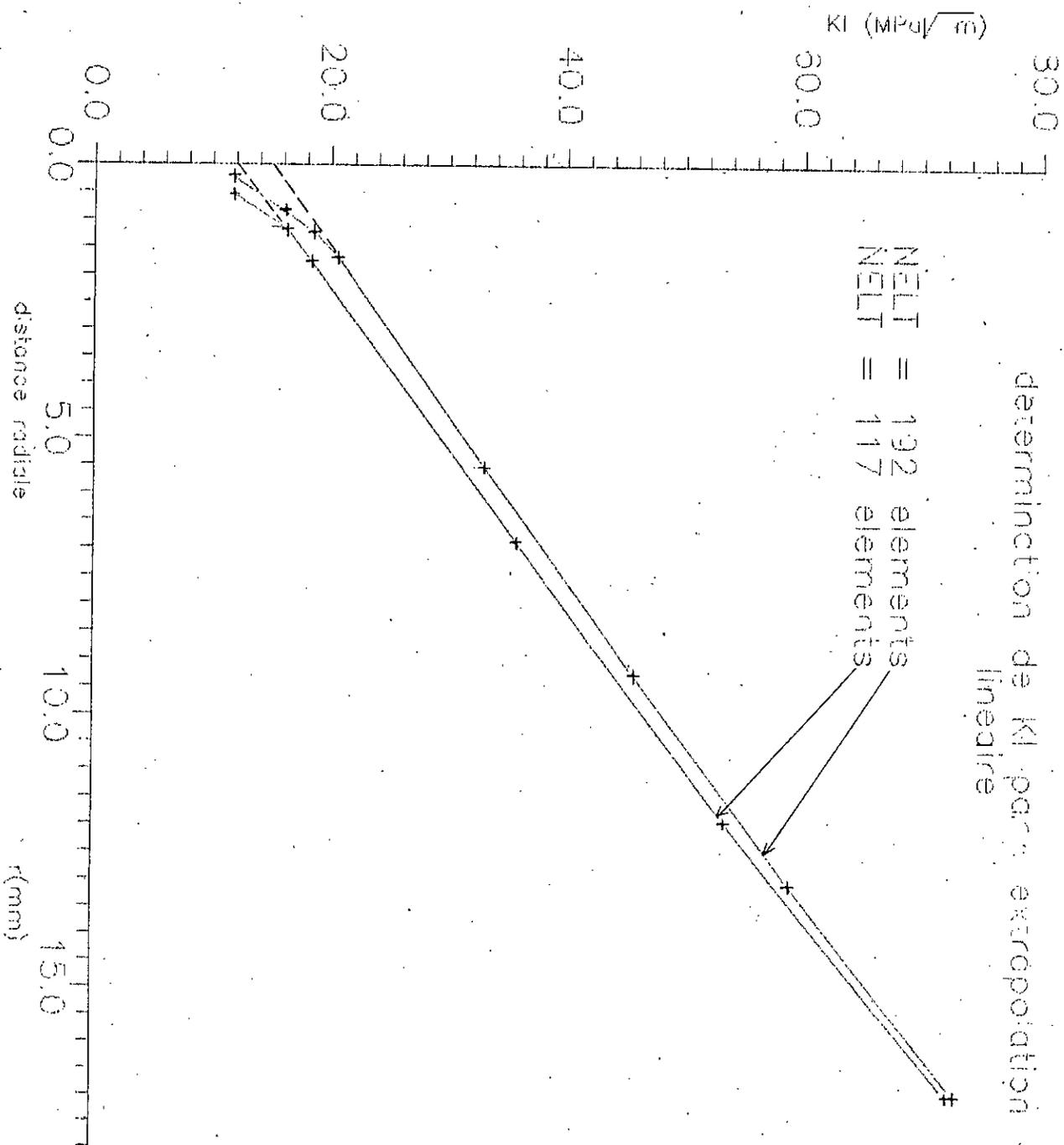
NELT = 120 Eléments	numéro du noeud	distance radiale r mm	KI MPa√m
	9	1,414	11,211
	17	2,828	17,195
	25	4,243	21,994
	33	7,071	32,361
	41	12,728	53,378
	49	16,970	69,849

Par extrapolation ----- KI = 12 MPa √m

NELT = 192 Eléments	numéro du noeud	distance radiale r mm	KI MPa√m
	11	0,244	11,847
	21	0,848	16,126
	31	1,273	18,785
	41	1,697	20,693
	51	5,515	32,910
	61	9,334	44,891
	71	13,152	58,973
81	16,970	72,679	

Par extrapolation ----- KI = 15,5 MPa √m

.../...



\* Par la méthode de collocation

D'après la formule analytique donnée par l'équation (II.5) et en introduisant le facteur de forme Y donné par (II.14), le facteur d'intensité de contrainte prend la forme :

$$KI = \frac{3PL\sqrt{a}}{2l^2t} \quad (1,93 - 3,07 m + 14,53m^2 - 25,11m^3 + 25,8m^4)$$

La précision de cette formule est de 0,2% quand  $\frac{a}{b} \leq 0,6$  avec  $m = a/b$

P : charge appliquée causant le déplacement  $\Delta = 0,1$  on trouve :

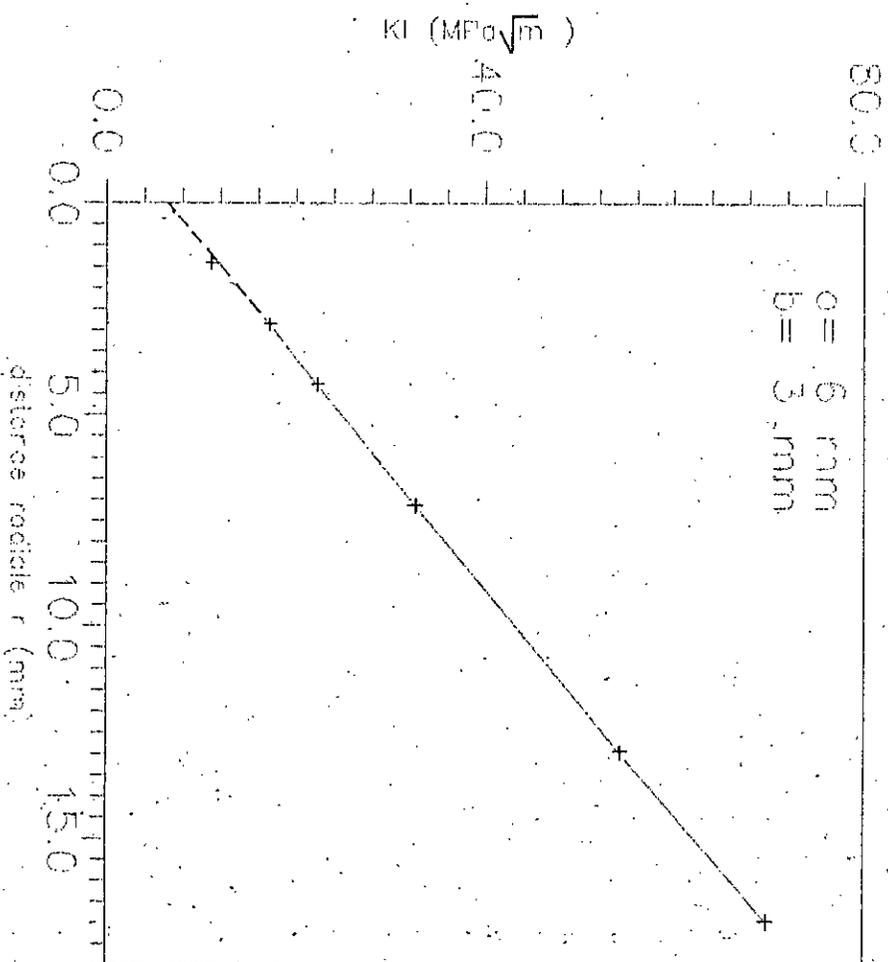
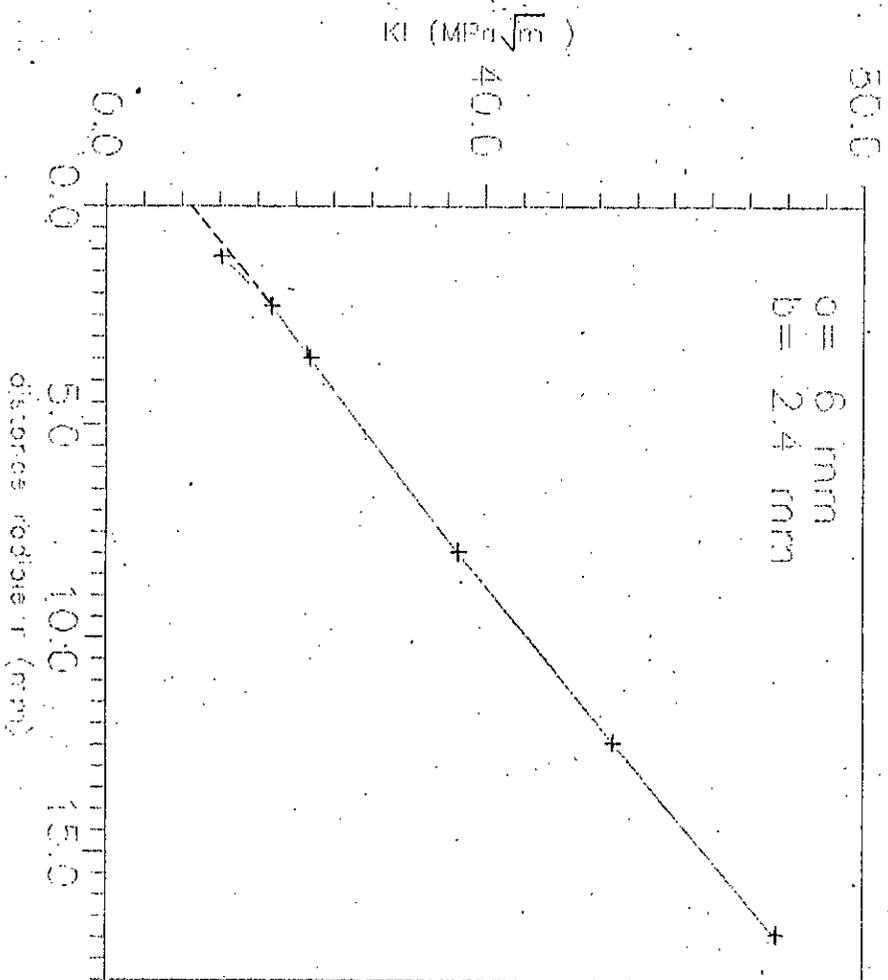
$$KI = 18,26 \text{ MPa} \sqrt{m}$$

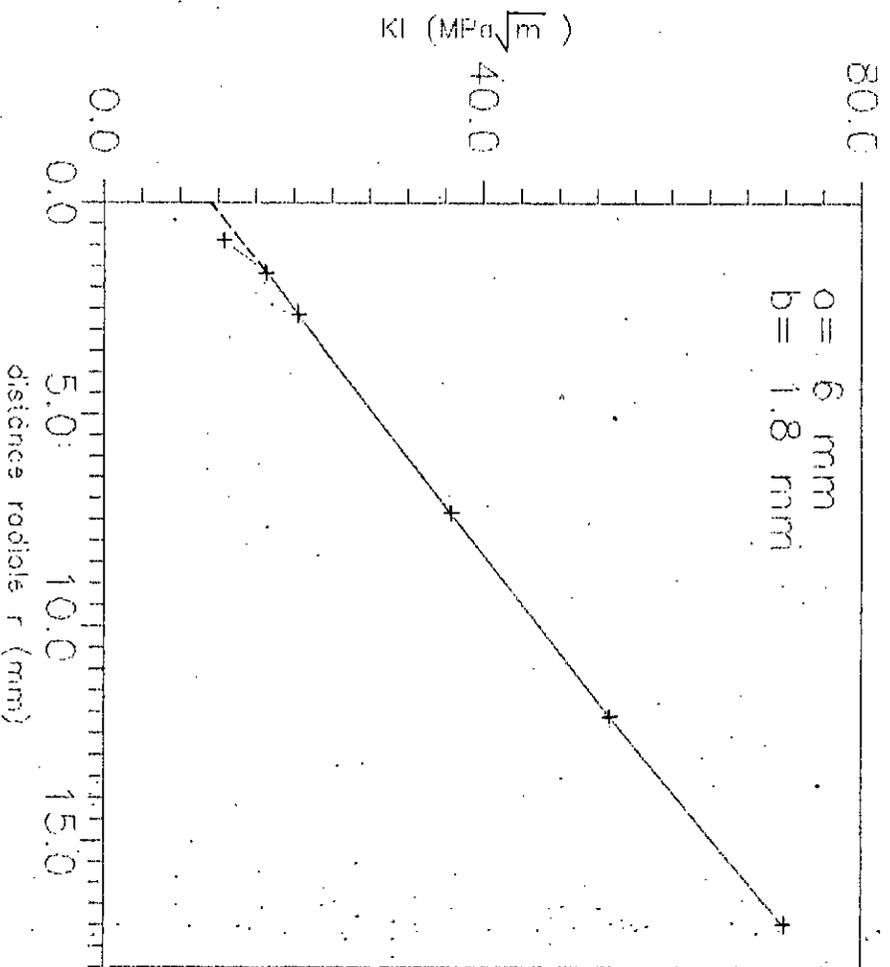
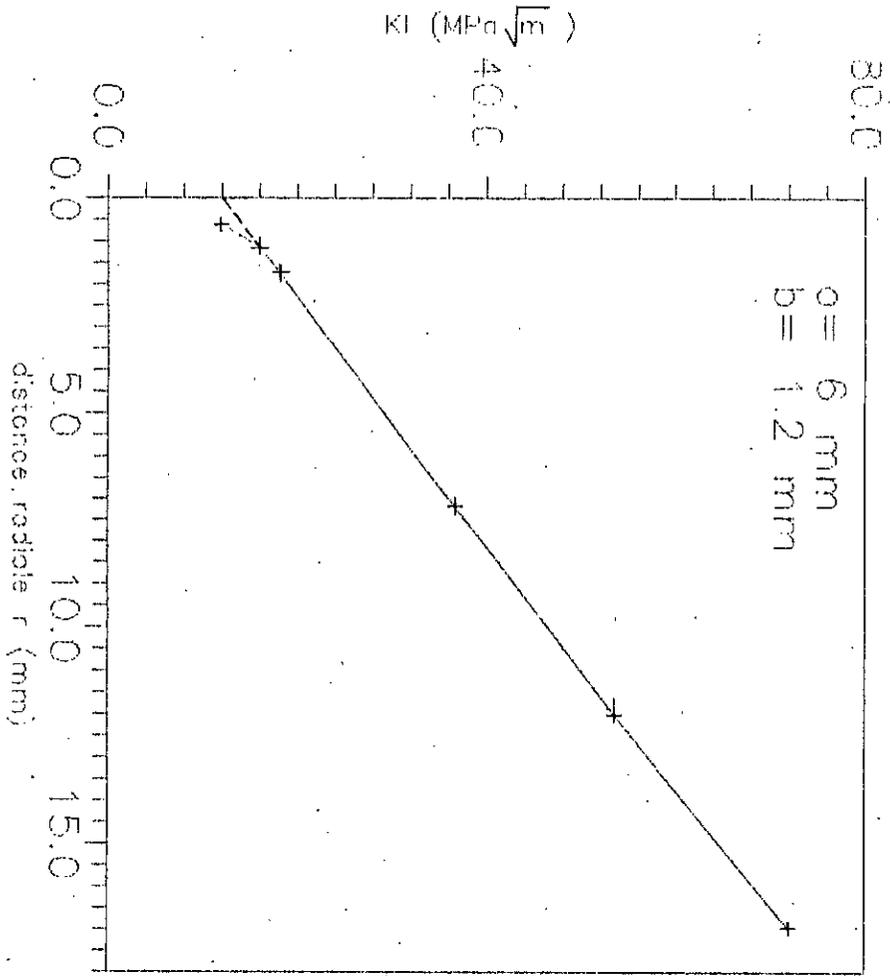
IV.2.2. Evolution du facteur d'intensité de contrainte :

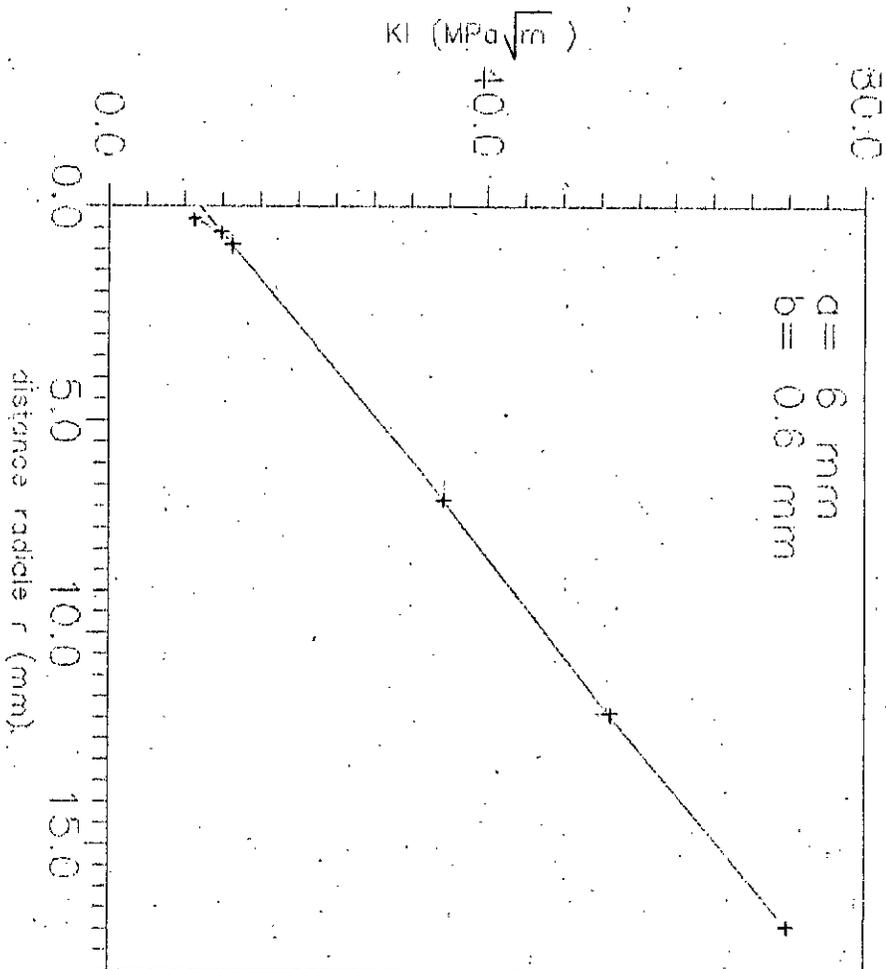
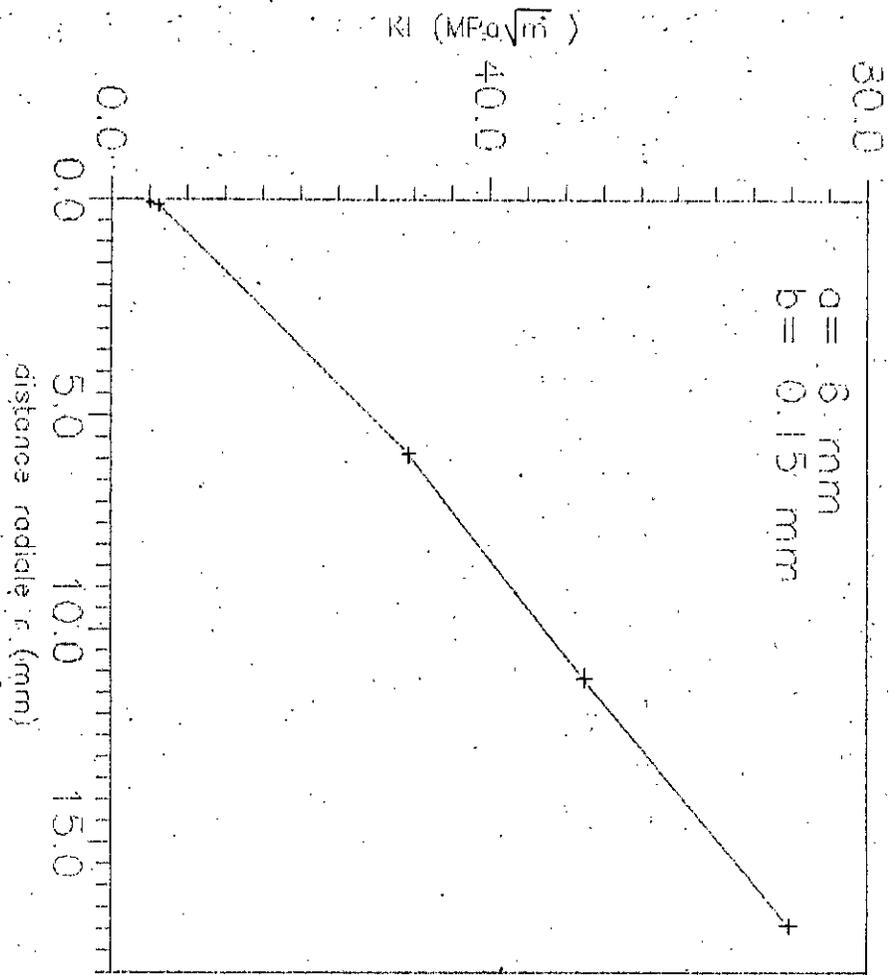
En faisant varier l'accuité de l'entaille par la variation du rayon de courbure  $RO = b^2/a$ , le KI varie de la façon suivante :

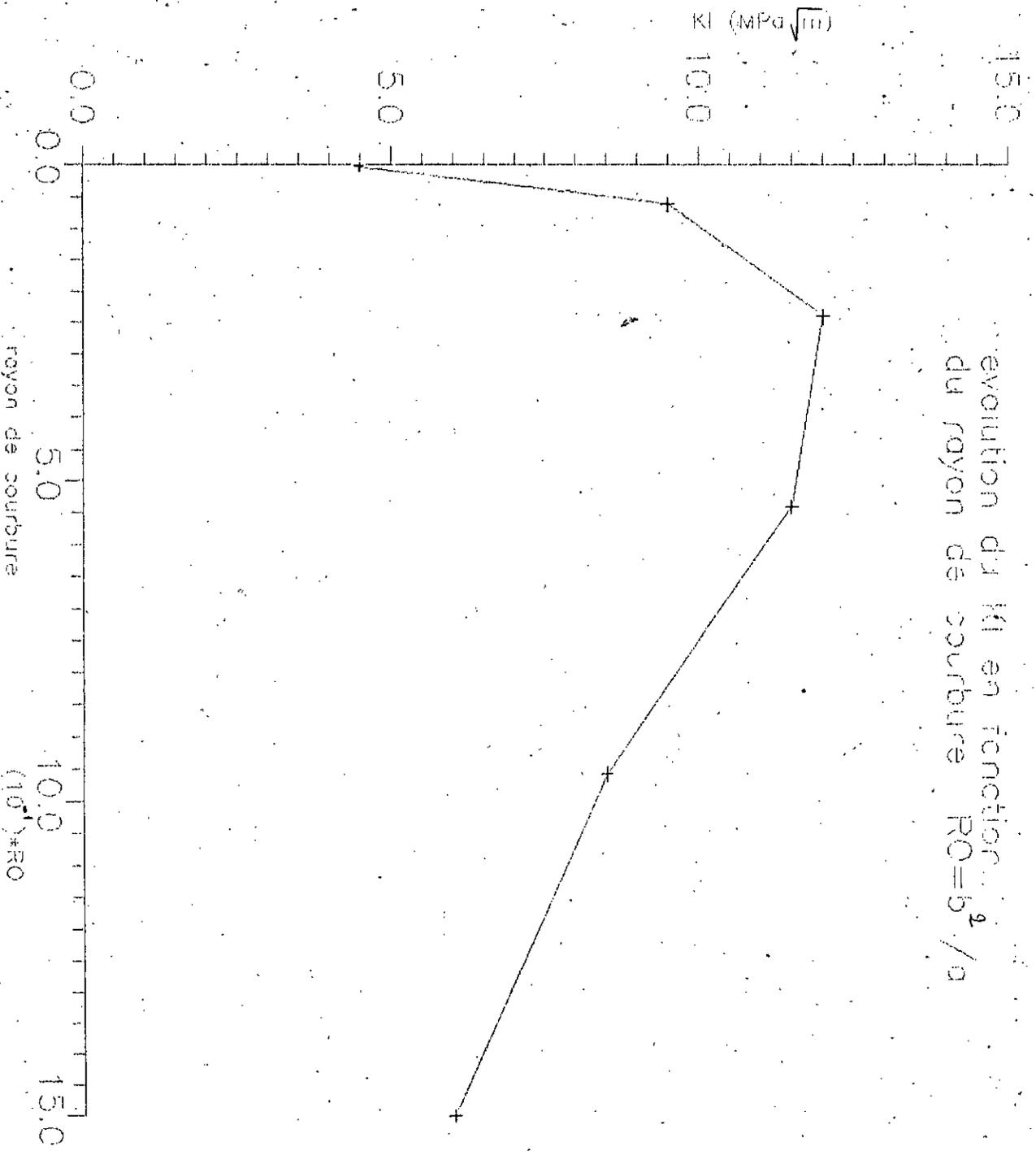
NELT = 120 Eléments	
RO = $b^2/a$ mm	KI MPa/ $\sqrt{m}$
0,00375	4,5
0,06	9,5
0,24	12
0,54	11,5
0,96	8,5
1,5	6,75

.../...









#### IV.2.3. Les contraintes et déformations :

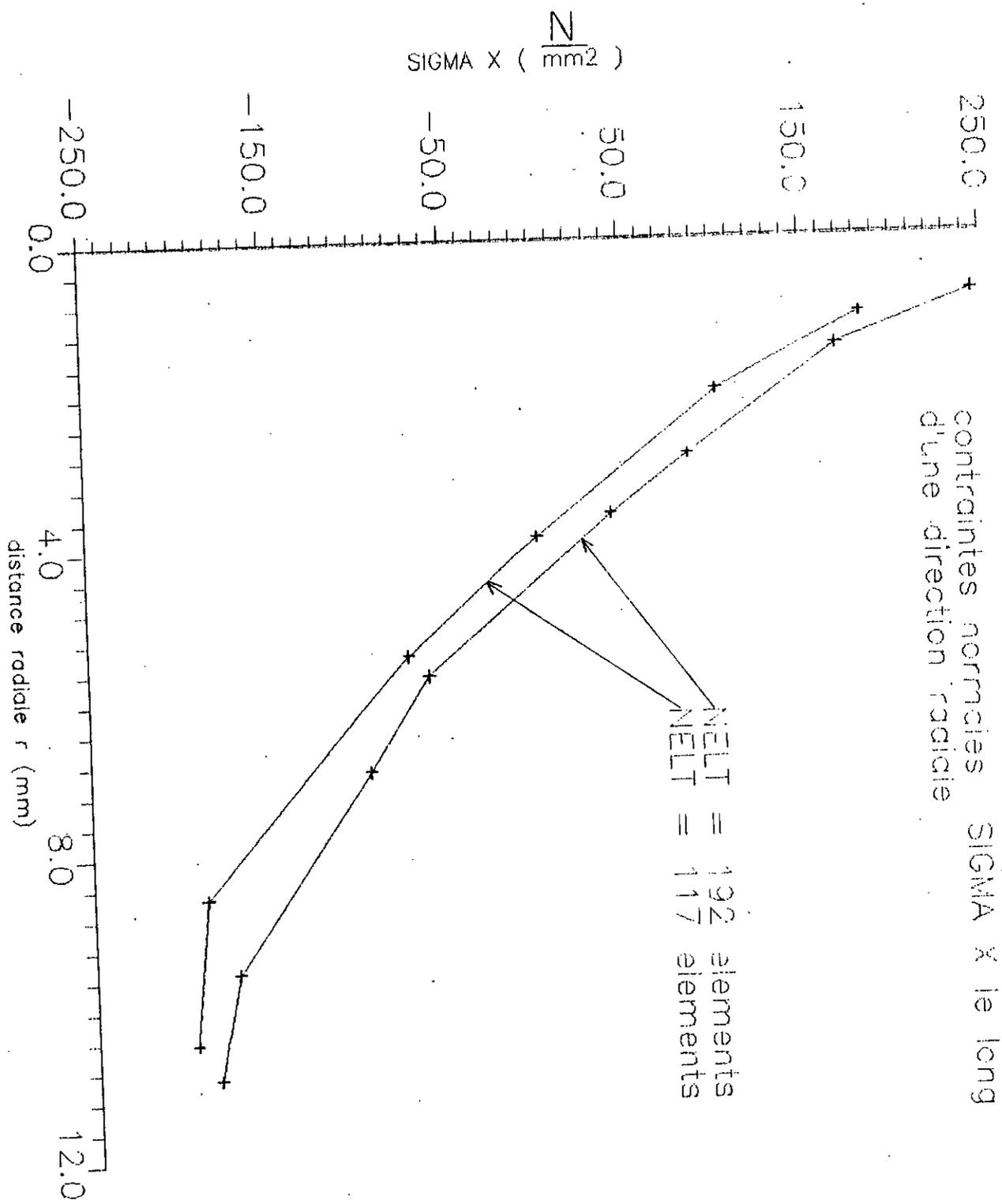
Le long d'une direction radiale emanant du fond de fissure, les contraintes et déformations sont données dans le tableau ci-dessous.

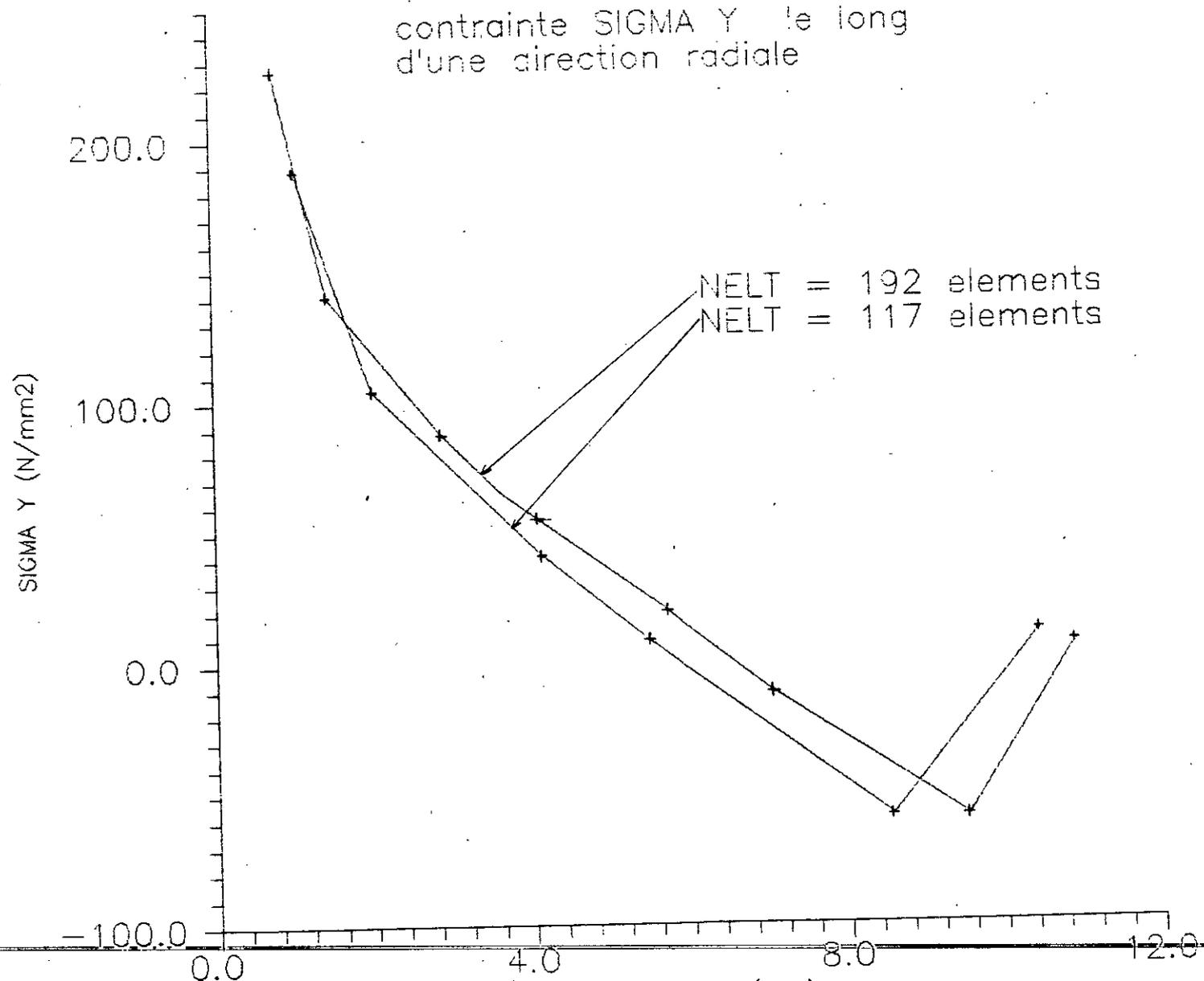
	Distance r [m-m]	$\sigma_x$ N/mm <sup>2</sup>	$\sigma_y$ N/mm <sup>2</sup>	$\epsilon_x$ N/mm <sup>2</sup>	$\epsilon_y$ N/mm <sup>2</sup>
NELT = 120 Eléments	1,05	183,24	188,98	0,50	0,50
	2,00	103,68	104,73	0,30	0,30
	4,11	- 10,30	42,10	-0,05	0,20
	5,48	- 74,19	8,87	-0,30	0,10
	8,55	-187,26	- 59,27	-0,90	0,20
	10,46	-195,32	11,24	-1,10	0,50
NELT = 192 Eléments	0,79	246,12	227,08	0,70	0,60
	1,46	170,27	140,43	0,50	0,30
	2,87	85,13	88,50	0,20	0,20
	3,62	43,12	65,60	0,10	0,10
	5,67	- 60,11	21,17	-0,20	0,06
	6,98	- 95,59	- 10,07	-0,50	0,10
	9,52	-170,81	- 59,62	-1,00	0,20
	10,91	-182,24	6,13	-1,20	0,50

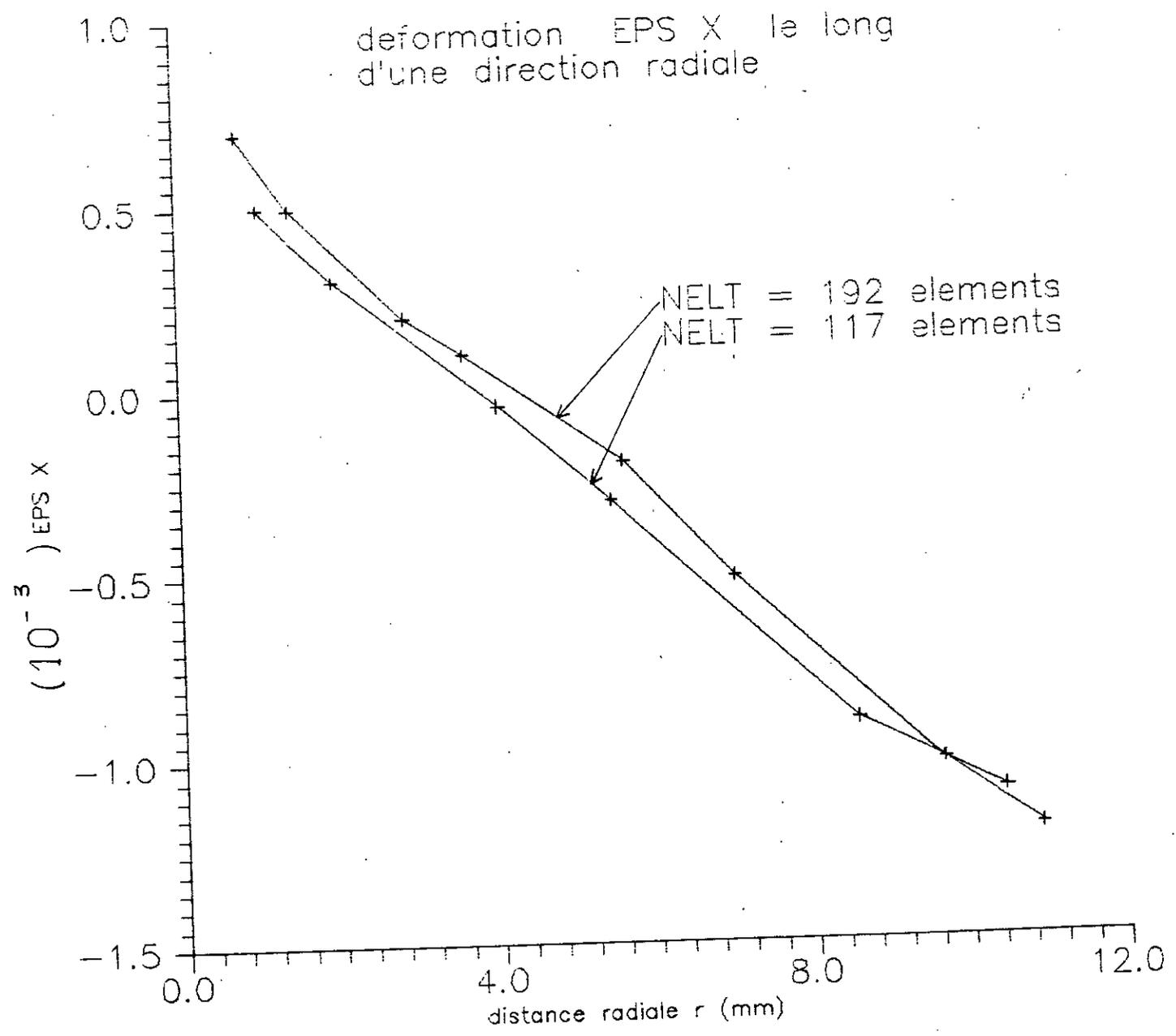
#### IV.3. Commentaires :

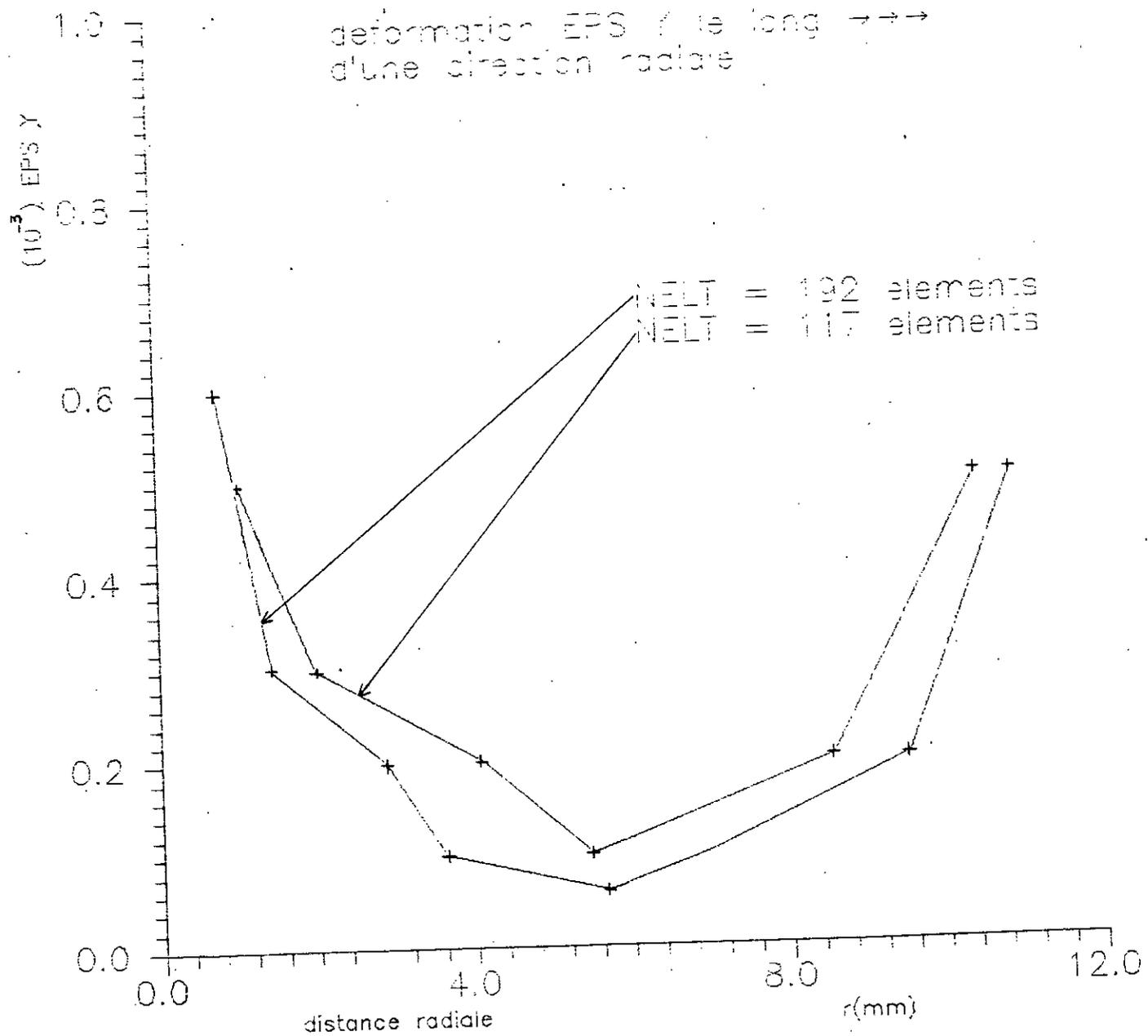
. A la vue de tous ces résultats, la première conclusion à tirer est que la précision de la solution obtenue par le calcul élément finis s'améliore avec l'accroissement du nombre d'éléments de la discrétisation.

.../...









. Il existe un petit écart entre les résultats obtenus par la méthode des éléments finis et ceux obtenus par la méthode de collocation. Cette différence est dûe simplement au fait qu'on a séparé le mode de rupture réel en ne tenant compte que du mode d'ouverture pur (Mode I), et au gradient de contrainte élevé que connaît les régions de la sollicitations et du fond de fissure. Pour remédier légèrement à ce problème on a essayé d'affiner le maillage près de ces zones.

. De plus, on peut constater qu'il est difficile de décrire quantitativement ou qualitativement l'influence de l'acuité d'entaille sur l'évolution du facteur d'intensité de contrainte, mais, néanmoins, on peut dire que les matériaux fragiles sont plus sensibles aux fissures aigues.

. On remarque aussi une certaine discontinuité dans les valeurs des contraintes et des déformations, cela est dû en premier lieu au choix de la fonction de déplacements, et du fait qu'on s'est imposé un champ de déplacement continu mais pas un champ de contrainte uniforme c'est ce que recommande la méthode des déplacements.

### CONCLUSION GENERALE :

La solution proposée dans cette étude pour l'étude du problème de fissure est une solution en déformation plane dans le plan médian, c'est une approximation puisque la déformation plane n'existe que près du front de fissure, et à une certaine distance des bords. Ailleurs, la déformation n'est pas plane. Le problème est en fait tridimensionnel.

Cependant des calculs tridimensionnels ont montré que l'approximation de la déformation plane était suffisante dans la plupart des cas.

Concernant l'élément fini triangulaire utilisé, ce dernier a l'avantage de pouvoir être utilisé pour la discrétisation des structures ayant des irrégularités (trous, fissures...) et sont ainsi plus pratiques pour l'obtention d'un maillage graduel et symétrique de part et d'autre de la fissure, d'autant plus qui offre une simplicité considérable dans le calcul.

En conclusion, on peut dire que les avantages de la méthode proposée pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte (simplicité de la programmation) compensent ses faiblesses d'autant plus que la précision des résultats reste assez satisfaisante.

On suggère de reformuler le problème étudié en utilisant des éléments à interpolation quadratique (classe  $C_0$ ), types quadrilatère à 8 noeuds ou triangle à 6 noeuds par exemple, et cela en apportant des modifications sur le programme élaboré.

On espère, en fin, que ce modeste travail sera complété par une étude dynamique afin de pouvoir décrire le comportement de la fissure rapide qui se produit après que le seuil d'instabilité ait été atteint.



