

وزارة التعليم العالي
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة - BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : Génie Mécanique

122

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

VIBRO - ISOLATION OPTIMUM

D'UN

TRACTEUR

ROUTIER

Proposé par :

M.KSIAZEK

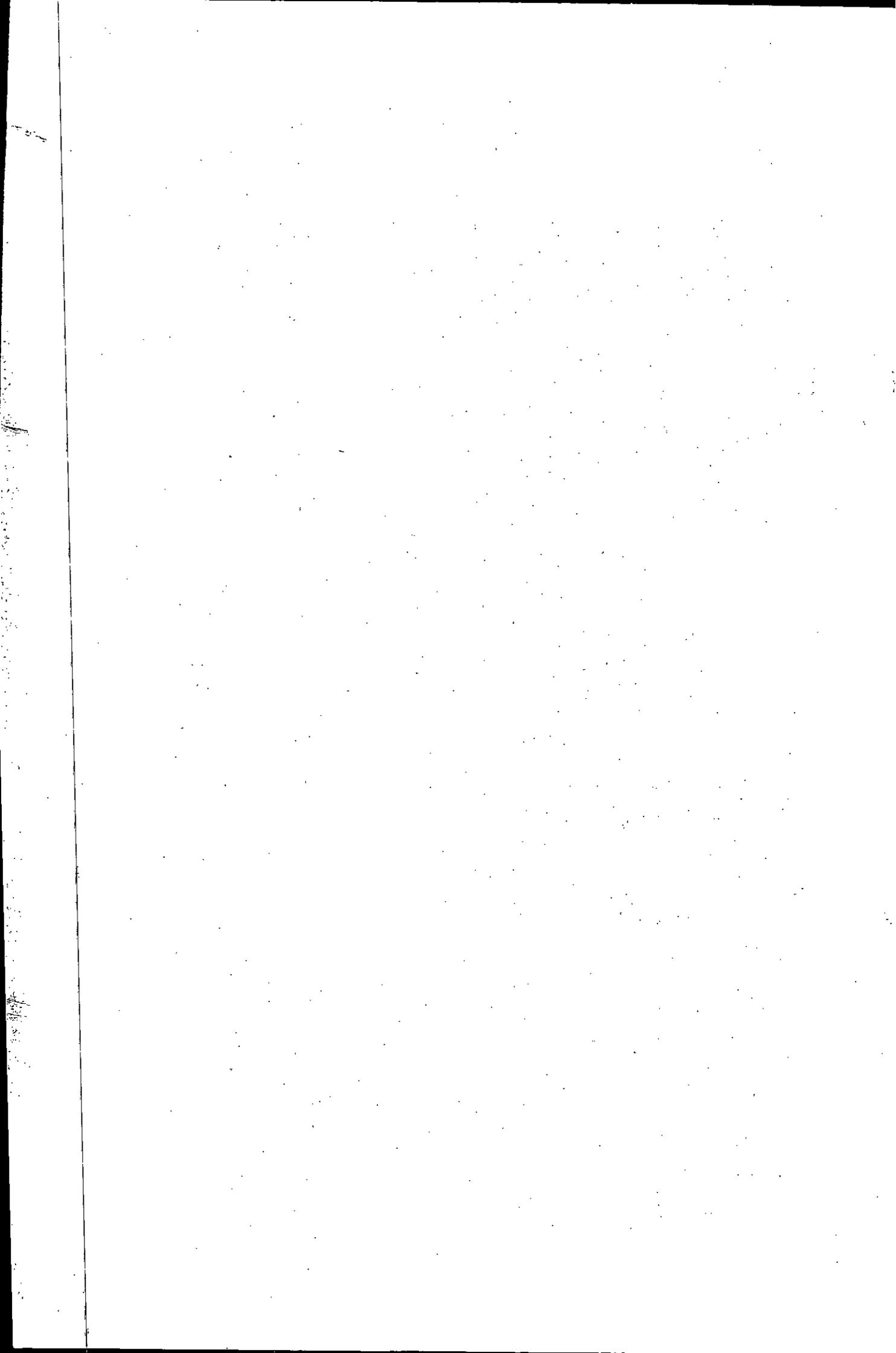
Etudié par :

ZOUANI_A

Dirigé par :

M.KSIAZEK

PROMOTION : juin 90



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله الذي هدانا لهذا وما كنا لنهتدي

لولا أن هدانا الله.

اللهم تقبل منا أعمالنا واجعلها خالصة لوجهك

الكريم ووقفنا للعمل بها في مرضاتك.

اللهم انفعنا بما علمتنا وعلما ما ينفعنا

وزدنا علما.

الأمين

Remerciements

Au terme de ce modeste travail, je tiens à exprimer mes remerciements à toute personne ayant contribué de près ou de loin à ma formation et en particulier aux enseignants du département de génie mécanique.

Je réitère ma gratitude et ma reconnaissance à Mr M.KSIAZEK pour m'avoir estimé capable de mener à bien ce projet, pour son suivi et pour les conseils judicieux qu'il m'a prodigués.

Que tous ceux qui ont participé au bon déroulement de cette étude, en particulier Mr A.KEMOUN, trouvent ici l'expression de ma respectueuse reconnaissance.

Dedicates

Je dédie ce modeste travail

- A mes chers parents .
- A mes frères et sœurs .
- A tous mes amis•

A.ZOUANI

Sommaire

	<u>Pages</u>
Introduction	1
But du projet	2
I. Généralités sur les vibrations aléatoires	4
I.1 Processus stochastiques et leurs caractéristiques	4
1.1.1-Définition d'une fonction aléatoire	4
1.1.2-Réalisation d'une fonction aléatoire	4
1.1.3-Processus ou champ stochastique	4
1.1.4-Propriétés fondamentales d'un processus aléatoire	5
1.2 Processus stationnaire	6
1.3 Processus ergodique	6
1.4 Représentation spectrale d'une fonction aléatoire stationnaire	7
1.5 Solution des équations différentielles à coefficients constants	8
II. Transformation linéaire et stationnaire	10
11.1 Système linéaire stationnaire	10
11.2 Système stable	10
11.3 Système réalisable	11
11.4 Spécification des fonctions de transfert par leurs pôles et zéros	11
III. Critères d'optimisation	12
111.1 Problématique des critères	12
111.2 Critères choisis	12
111.2.1 Critère de confort et de sécurité du chauffeur	12

III.2.2-Critère de sécurité des marchandises	13
IV. Microprofil de la route	14
IV.1 Détermination expérimentale de la fonction de corrélation du microprofil de la route	14
IV.2 Densité spectrale du microprofil de la route	15
V. Evaluation du comportement dynamique d'un véhicule lourd	
(Tracteur routier-Semi-remorque)	17
V.1 Critères de modélisation	17
V.2 Le modèle adopté du véhicule	17
V.3 Relations géométriques	18
V.4 Equations du mouvement et leurs solutions	19
V.5 Calcul des fonctionnelles C_1 et C_2	23
V.5.1-Fonctions de transfert	23
V.5.2-Calcul des densités spectrales et des dispersions	25
V.5.3-Calcul des fonctionnelles	25
V.6 Organigramme de calcul	25
V.7 Application	26
V.8 Calcul des fréquences propres de vibration	36
V.8.1-Organigramme de calcul	37
V.8.2-Présentation des résultats	38
V.9 Discussion des résultats	39
V.10 Conclusion	42
VI. Synthèse des systèmes de vibro-isolation (S.V.I)	44
VI.1 Fonctions de transfert	44
VI.2 Expressions des densités spectrales	47
VI.3 Expressions des fonctionnelles	47
VI.3.1-Critère de confort et de sécurité du chauffeur	47
VI.3.2-Critère de sécurité des marchandises	48
VI.4 Formulation mathématique du problème de filtration de Wiener-Hopf	48
VI.4.1-Optimisation selon le critère de confort et de sécurité du chauffeur	49

VI.4.2-Optimisation selon le critère de sécurité des marchandises	50
VI.5 Détermination des "S.V.I"	51
VI.5.I-Algorithmes de factorisation spectrale des matrices rationnelles.	53
VI.5.2-Résolution finale des équations de Wiener- Hopf	65
VII. Mise en évidence de l'efficacité des systèmes de vibro- isolation	71
VIII. Conclusion	75
Annexe	76

INTRODUCTION :

Avec le soucis d'améliorer la capacité de travail et la sécurité des utilisateurs, l'aspect confort prend une place de plus en plus importante en tant que critère de qualité et de choix des véhicules industriels.

Le terme "confort" est une entité complexe dépendante d'une part de la somme réelle de tous les facteurs présents dans l'environnement induit et d'autre part de la sensibilité des individus à l'égard de ces facteurs.

Dans notre étude, on se limitera à l'aspect du confort lié aux vibrations, chocs et secousses transmises par la route au cours de la conduite du véhicule.

La réponse du corps humain à ces vibrations est extrêmement complexe, elle est à la fois fonction de la fréquence d'excitation, de l'amplitude et de la direction des vibrations.

Le confort étant l'état du bien-être subjectif par rapport au milieu environnant induit, son évaluation se base le plus souvent sur des méthodes subjectives; cette évaluation est essentielle pour agir efficacement sur l'amélioration des conditions d'utilisation du véhicule.

Pour un véhicule industriel, le critère de confort du chauffeur étant établi, il faut s'assurer que le comportement dynamique du véhicule n'altère pas la sécurité du chargement.

Dans un véhicule, la qualité des suspensions est l'un des principaux facteurs qui déterminent le niveau de confort et de sécurité. La suspension est une partie intégrante du véhicule et sert essentiellement comme interface entre le véhicule et son environnement. Les performances du système de vibro-isolation, que constituent les suspensions, sont tributaires des pneumatiques ainsi que des suspensions du châssis, de la cabine et du siège du chauffeur.

Plusieurs études ont trait à l'optimisation de ces différentes suspensions pour améliorer le confort et la sécurité routière.

& BUT DU PROJET &

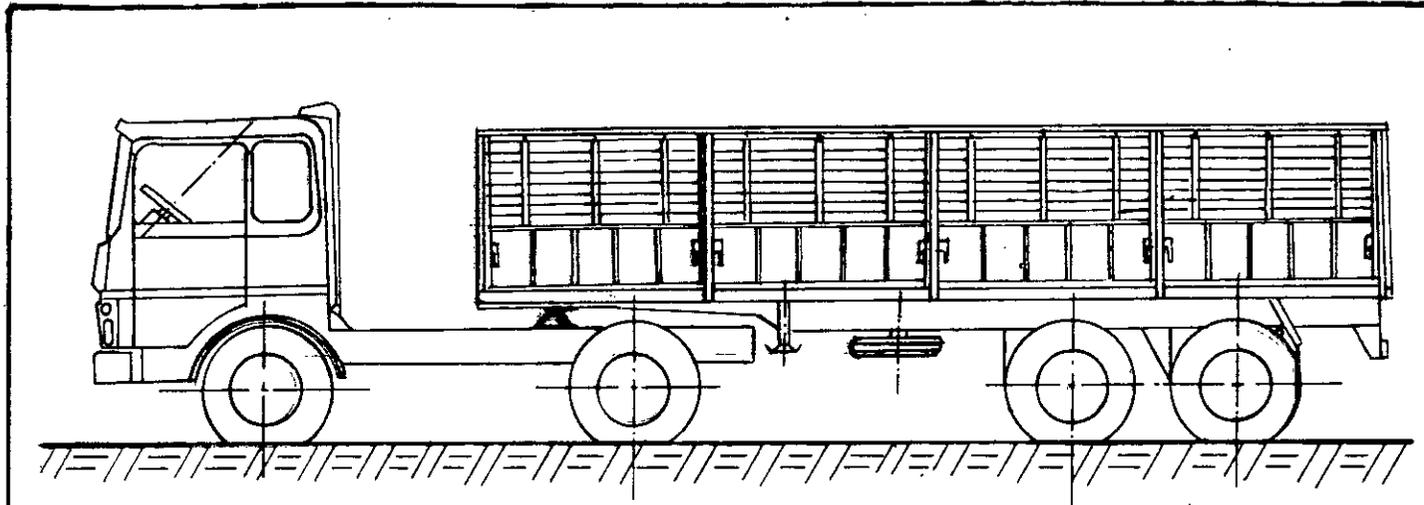
Cette étude est composée de deux parties complémentaires:

a-) Evaluation du comportement dynamique du système vibratoire : "Route-Corps du chauffeur-Véhicule", en faisant valoir l'influence des irrégularités du microprofil de la route.

On fait l'investigation de la réponse, aléatoire, du système à ces excitations pour deux types de routes et en distinguant entre le cas du véhicule en charge et celui du véhicule à vide.

b-) Amélioration du confort et de la sécurité routière, moyennant une vibro-isolation optimale. On prévoit trois systèmes de vibro-isolation que l'on optimise, selon un critère bien déterminé, à l'aide de la méthode de WIENER-HOPF.

L'étude concernera le tracteur routier TB260 fabriqué par la SNVI de ROUIBA, ainsi que le semi-remorque de type "Plateau ridelles avec réhausse" produit par la SNVI de TIARET.



**Fig.1- Tracteur Routier
et
Semi-Remorque**

GENERALITES SUR LES VIBRATIONS ALEATOIRES

Pour évaluer la qualité d'un véhicule et analyser sa réponse aux excitations stochastiques provenant des irrégularités du microprofil de la route, deux méthodes peuvent être utilisées.

a-) L'approche déterministe de la réponse en fréquence : cette méthode considère une excitation sinusoidale.

b-) L'approche par la densité spectrale de puissance : cette méthode fait appelle à la théorie de corrélation. L'utilisation de cette méthode, plus réaliste que la précédente, est rendue possible grâce à la grande puissance des ordinateurs et aux techniques modernes de profilographie.

Dans ce qui suit, on rappellera les bases de la théorie des vibrations aléatoires, qui seront utilisées dans l'évaluation du comportement dynamique du véhicule.

1.1-Processus stochastiques et leurs caractéristiques :

1.1.1-Définition d'une fonction aléatoire :

Une fonction est dite aléatoire, lorsque pour toute valeur de la variable indépendante, sa valeur est aléatoire.

1.1.2-Réalisation d'une fonction aléatoire :

Tout enregistrement d'une fonction aléatoire effectué au cours d'une expérience s'appelle réalisation ou épreuve de cette fonction.

1.1.3-Processus ou champ stochastique :

Un processus stochastique est un processus se développant indéfiniment dans le temps, gouverné au moins partiellement par des lois probabilistes.

Mathématiquement, un processus stochastique est une fonction de deux variables $h(k,t) = h^k(t)$ où k prend ses valeurs dans un espace des épreuves et t sur l'axe réel des temps. Pour chaque valeur particulière $t=t'$, $h^k(t')$ est une fonction aléatoire définie sur l'ensemble des nombres k (voir figure 2).

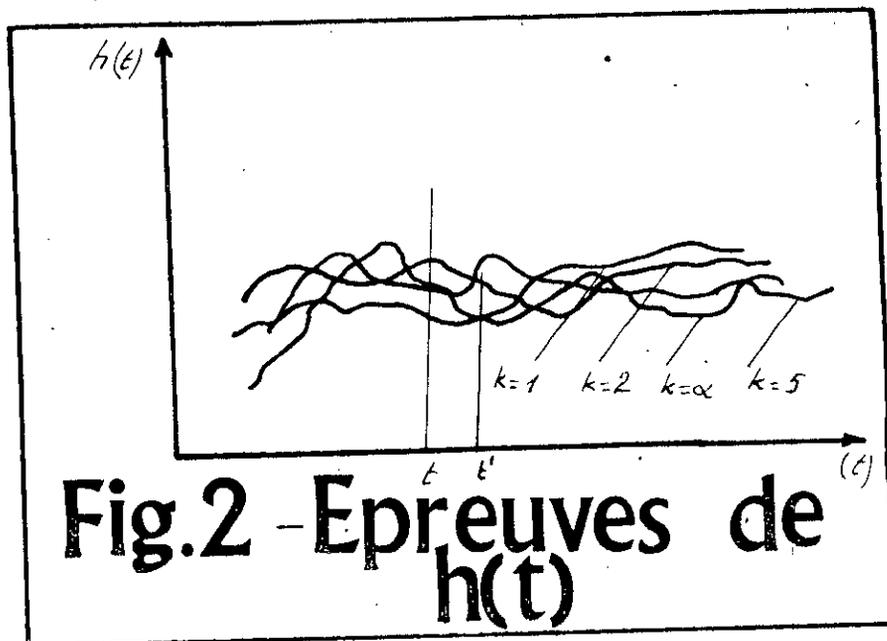


Fig.2 - Epreuves de $h(t)$

II.4-Propriétés fondamentales d'un processus aléatoire :

Pour décrire les propriétés fondamentales d'un processus aléatoire, exprimé par un ensemble $h^k(t)$, on utilise cinq fonctions non aléatoires dont certaines peuvent être de type temporel ou statistique suivant que l'on s'intéresse à l'une quelconque des réalisations ou à une section du processus $h^k(t)$ correspondante à un temps t fixé. Dans le cas d'une seule réalisation, on distingue :

1-La densité de probabilité $W(h,t)$

2-La valeur moyenne définie par :

$$\tilde{h} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h^k(t) dt \quad (I.1)$$

3-La moyenne quadratique définie par :

$$\tilde{h}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (h^k(t))^2 dt \quad (I.2)$$

4-La variance qui caractérise la dispersion des valeurs de la fonction autour de sa valeur moyenne. Elle est donnée par :

$$\sigma_h^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (h^k(t) - \tilde{h})^2 W(h,t) dh \quad (I.3)$$

5-La fonction de corrélation, qui établit le degré de dépendance de deux valeurs de la fonction aléatoire (correspondantes par exemple aux instants t et t' sur la figure 2). Elle est définie par :

$$K_h(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t) h_2(t') W(h_1(t), h_2(t'), t, t') dh_1 dh_2 \quad (I.4)$$

De cette définition, il résulte que cette fonction est symétrique:

$$K_h(t, t') = K_h(t', t) \quad (I.5)$$

I.2-Processus stationnaire :

Les processus aléatoires qui se déroulent approximativement de la même façon dans le temps et qui présentent l'aspect de vibration aléatoires, continue, relativement à une certaine valeur moyenne, avec des caractéristiques probabilistes ne variant pas sensiblement avec le temps ont obtenu une très large diffusion. De tels processus sont dits stationnaires. Les propriétés statistiques sont alors invariantes par rapport à un changement arbitraire de l'origine des temps.

Considérons la fonction de corrélation qui reste invariable pour une seule et même translation de valeur t'' des instants t et t' :

$$K_h(t, t') = K_h(t+t'', t'+t'') \quad (I.6)$$

En posons : $t'' = -t'$, nous obtenons:

$$K_h(t, t') = K_h(t-t', 0) \quad (I.7)$$

La fonction de corrélation d'une fonction aléatoire, stationnaire est une fonction non de deux, mais d'un seul argument $Z = t-t'$.

Comme la fonction de corrélation est symétrique, il résulte pour une fonction aléatoire stationnaire :

$$K_h(t-t') = K_h(t'-t) \quad (I.8)$$

ou

$$K_h(z) = K_h(-z) \quad (I.9)$$

Dans le cas particulier où $\tilde{h} = 0$, il vient que:

$$K_h(t, t) = \sigma_h^2(t) \quad (I.10)$$

Alors, pour une fonction aléatoire stationnaire, la variance s'écrit :

$$\sigma_h^2 = K_h(0) \quad (I.11)$$

I.3-Processus ergodique :

La propriété d'ergodicité consiste en ce que chaque réalisation particulière de la fonction aléatoire permet d'estimer les propriétés statistiques de l'ensemble entier des réalisations particulières. Cette propriété présente un grand intérêt pratique car cela permet de réduire le volume des études expérimentales et par la même de réduire les coûts.

I.4-Représentation spectrale d'une fonction aléatoire stationnaire :

En 1812, le baron Joseph Fourier inventa les séries qui portent son nom. Ces séries sont susceptibles de représenter les fonctions périodiques.

Soit une fonction périodique $f(t)$, de période T . La décomposition en séries de $f(t)$ s'exprime par :

$$f(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2\pi n t/T) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(2\pi n t/T) \quad (I.12)$$

b_0, a_n et b_n sont indépendants de t , ils sont définis par :

$$b_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (I.13)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(2\pi n t/T) dt \quad (I.14)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(2\pi n t/T) dt \quad (I.15)$$

Dans le domaine complexe, une telle décomposition s'exprime par :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \text{Exp}(j2\pi n t/T) \quad (I.16)$$

où C_n est l'amplitude complexe, donnée par :

$$C_n = \frac{1}{T} (a_n - j b_n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{Exp}(-j2\pi n t/T) dt \quad (I.17)$$

Posons : $\omega_n = 2\pi n/T$

L'ensemble des fréquences ω_n est appelé spectre de la fonction $f(t)$. Dans le cas où les ω_n sont en nombre fini, le spectre est discret.

Ce développement peut s'effectuer pour une fonction non périodique.

Il suffit d'effectuer le passage à la limite ($t \rightarrow \infty$). Dans ce cas,

après substitution de (I.17) dans (I.16), nous obtenons :

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Exp}(j2\pi n t/T) \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{Exp}(-j2\pi n t/T) dt \quad (I.18)$$

En faisant tendre T vers l'infini, on trouve :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \text{Exp}(j\omega t) d\omega \quad (I.19)$$

avec

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{Exp}(-j.\omega.t) dt \quad (1.20)$$

L'expression (1.19) représente une intégrale de Fourier, c'est une somme de sinusoides ayant une suite de fréquences ($\omega, \omega+d\omega$) dont l'amplitude est $S(\omega) \cdot d\omega$, cela signifie qu'on peut considérer $S(\omega)$ comme la densité d'amplitude répartie sur l'intervalle de fréquences ($\omega, \omega+d\omega$). La fonction $S(\omega)$ donnée par l'expression (1.20) s'appelle densité spectrale de puissance.

Dans le cas particulier où la fonction de corrélation $K_h(z)$ est prise à titre de fonction $f(t)$, on obtient :

$$K_h(z) = \frac{1}{2.\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_h(\omega) \text{Exp}(j.\omega.z) d\omega \quad (1.21)$$

$$S_h(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_h(z) \text{Exp}(-j.\omega.z) dz \quad (1.22)$$

La parité de la fonction de corrélation conduit aux formules dites de WIENER-KHINCHINE :

$$K_h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_h(\omega) \cos(\omega.z) d\omega \quad (1.23)$$

$$S_h(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_h(z) \cos(\omega.z) dz \quad (1.24)$$

1.5-Solution des équations différentielles à coefficients constants :

Considérons un système d'équations différentielles, linéaires et à coefficients constants, où les $y_k(t)$ ($k=1 \dots m$) sont les réponses et les $x_i(t)$ ($i=1 \dots n$) les excitations d'entrée.

Il est nécessaire de présenter un tel système sous forme opératoire. Pour cela, utilisons les transformées de LAPLACE. Les solutions s'écrivent alors :

$$\bar{y}_k(p) = \sum_{i=1}^n W_{ki}(p) \cdot \bar{x}_i(p) \quad (k=1, m) \quad (1.25)$$

avec: $\bar{y}_k(p), \bar{x}_i(p)$ - transformées de LAPLACE des fonctions $y_k(t)$ et $x_i(t)$

. p -variable de LAPLACE

. $W_{ki}(p)$ - fonction de transfert du système entre l'entrée $x_i(t)$ et la sortie $y_k(t)$, soit:

$$W_{ki}(p) = \frac{\bar{y}_k(p)}{\bar{x}_i(p)} \quad (1.26)$$

La relation (I.25) peut être présentée sous forme matricielle.

Pour cela, posons:

$$\bar{Y}(p) = \left\{ \bar{y}_k(p) \right\}_{k=1 \div m}$$

$$W(p) = [w_{ki}]_{\substack{k=1 \div m \\ i=1 \div n}}$$

$$\bar{X}(p) = \left\{ \bar{x}_i(p) \right\}_{i=1 \div n}$$

ainsi :

$$\bar{Y}(p) = W(p) \bar{X}(p) \quad (1.27)$$

d'après /I/, la densité spectrale de sortie est donnée par :

$$S_Y(p) = W(p) \cdot S_X(p) \cdot W^T(-p) \quad (1.28)$$

où S_X est la densité spectrale d'entrée.

Les densités spectrales des deux premières dérivées de la sortie Y sont:

$$S_Y^1(p) = p^1 \cdot W(p) \cdot S_X(p) \cdot W^T(-p) \quad (1.29)$$

$$S_Y^2(p) = p^2 \cdot W(p) \cdot S_X(p) \cdot W^T(-p) \quad (1.30)$$

Les différentes dispersions sont alors données par :

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{-j\infty}^{j\infty} S_Y(p) dp \quad (1.31)$$

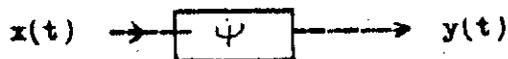
$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{-j\infty}^{j\infty} S_Y(p) dp \quad (1.32)$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{-j\infty}^{j\infty} S_Y(p) dp \quad (1.33)$$

TRANSFORMATION LINEAIRE ET STATIONNAIRE

II.1-Système linéaire stationnaire :

Soit $x(t)$ et $y(t)$ respectivement l'entrée et la sortie d'un système. Soit ψ un opérateur fonctionnel du système, qui transforme l'espace X des entrées dans l'espace Y des sorties.



$x(t)$ et $y(t)$ sont alors liées par :

$$y(t) = \psi [x(t)] \quad (2.1)$$

le système est dit stationnaire et linéaire si ψ est linéaire est si :

$$y(t+z) = \psi [x(t+z)] \quad (\forall z) \quad (2.2)$$

Dans le domaine fréquentiel, un système est caractérisé par sa fonction de transfert $H(p)$ définie par :

$$H(p) = Y(p)/X(p) \quad (2.3)$$

où : $-Y(p)$ respectivement $X(p)$ sont les transformées de LAPLACE de $y(t)$ respectivement $x(t)$.

$-p$ est la variable de LAPLACE ($p = \sigma + j.w$)

De (2.3) on déduit que $H(p)$ est la transformée de LAPLACE de la réponse impulsionnelle du système.

II.2-Système stable :

Un système est dit stable si à toute entrée bornée correspond une sortie bornée. Pour qu'un système soit stable, il faut :

a) dans le domaine des fréquences : la condition de stabilité requiert que le domaine de convergence de la fonction de transfert $H(p)$ contienne l'axe imaginaire $\sigma = 0$ ($p = j.w$).

$$|H(p)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \text{Exp}(-p.t) dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \text{Exp}(-\sigma t) dt$$

et pour $\sigma=0$:

$$|H(p)| < \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (2.4)$$

b) dans le domaine temporel la fonction de pondération doit être absolument intégrable, c.à.d :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (2.5)$$

II.3-Système réalisable :

Le système est dit réalisable, si l'application d'un signal à sa sortie ne peut précéder l'application d'un signal à son entrée.

Dans le domaine fréquentiel, le système est dit réalisable, si sa fonction de transfert $H(p)$ a pour domaine de convergence le demi-plan défini par $\text{Re}(p) > \sigma_0$, de telle façon que :

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(p) \text{Exp}(p.t) dp = 0 \quad \text{pour } t < 0 \quad (2.6)$$

Un système qui est à la fois stable et réalisable est dit physiquement réalisable.

II.4-Spécification des fonctions de transfert par leur pôles et zéros :

Considérons $LH(p)$ comme étant une fraction rationnelle de type :

$$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i \cdot p^i}{\sum_{j=0}^m b_j \cdot p^j} = N(p)/D(p) \quad (2.7)$$

avec : $p = j.w$ et $n < m$

Les coefficients a_i et b_j sont réels et sont fonctions des paramètres du système.

On établit les conclusions suivantes :

- a) Si les pôles et zéros de $H(p)$ sont complexes, ils doivent s'associer en paires conjuguées.
- b) Les pôles d'une fonction de transfert $H(p)$ d'un système stable doivent se trouver dans le demi-plan de gauche du plan complexe.
- c) Si la fonction de transfert a des pôles sur l'axe imaginaire, ils doivent être simples.
- d) Le nombre de zéros de la fonction de transfert d'un système stable doit être au plus égal au nombre de pôles.

CRITERES D'OPTIMISATION

IIII-Problématique des critères :

La combinaison des facteurs qui améliorent le confort et la sécurité routière, en diminuant les chocs et les vibrations, rend l'évaluation de la tenue à la route du véhicule extrêmement complexe.

Les véhicules routiers exposent l'homme à des vibrations mécaniques qui peuvent compromettre son confort, sa capacité de travail et, dans certaines circonstances, sa santé et sa sécurité.

Les limites d'exposition à ces vibrations s'appuient sur des données adéquates de l'intensité maximale recommandée pour l'exposition de l'individu en fonction d'un critère spécifique (par exemple celui de la limite par fatigue).

De même, pour assurer la sécurité des marchandises, il est conseillé de réduire le niveau maximal de l'intensité des vibrations ou des chocs de la remorque.

La diminution de l'intensité des vibrations nécessite des liaisons parfaitement molles, mais les déplacements deviennent très importants. Dans le cas contraire, des liaisons très rigides réduisent certes les déplacements, mais augmentent les accélérations. Pour cela la vibro-isolation optimum sera un compromis entre les deux exigences contradictoires.

III.2-Critères choisis :

III.2.1-Critère de confort et de sécurité du chauffeur :

Ce critère permet de réduire au maximum la dispersion d'accélération du corps du chauffeur, tout en limitant les grandes elongations des suspensions du véhicule et du siège du chauffeur.

Le problème revient à minimiser la fonctionnelle C, donnée par :

$$C_1 = \sigma_{\dot{x}_c}^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{\Delta x_i}^2 \quad (3.1)$$

où :

- $\sigma_{\dot{x}_c}^2$: est la dispersion d'accélération du corps du chauffeur.
- $\sigma_{\Delta x_i}^2$: est la dispersion d'elongation de la $i^{ème}$ suspension du véhicule y compris celle du siège.
- λ_i : coefficient de pondération de LAGRANGE.

III.2.2-Critère de sécurité des marchandises :

Pour assurer un maximum de sécurité aux marchandises, il faut diminuer les dispersions d'accélération verticale et angulaire du semi-remorque, en veillant à ce que les élongations des suspensions de cette dernière, n'atteignent pas le seuil de craquement.

Pour résoudre ce problème, on minimise la fonctionnelle C_2 , donnée par :

$$C_2 = \sigma_{\ddot{x}_r}^2 + \chi \sigma_{\ddot{\varphi}_r}^2 + \sum_{i=1}^m \beta_i \sigma_{\Delta x_i}^2 \quad (3.2)$$

où :

- $\sigma_{\ddot{x}_r}^2$ est la dispersion d'accélération verticale du centre de gravité du semi-remorque.
- $\sigma_{\ddot{\varphi}_r}^2$ est la dispersion d'accélération angulaire du centre de gravité du semi-remorque.
- $\sigma_{\Delta x_i}^2$ est la dispersion d'élongation de la $i^{\text{ème}}$ suspension du semi-remorque, et du tracteur routier.
- χ et β_i sont les coefficients de pondération de LAGRANGE.

NB : Dans le cas générale, une fonctionnelle sera écrite sous la forme

$$C = \sigma_y^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{x_i}^2 \quad (3.3)$$

où :

- σ_y^2 est la principale dispersion à minimiser.
- $\sigma_{x_i}^2$ est une dispersion considérée comme contrainte.
- λ_i est le coefficient de pondération de LAGRANGE.
- $\sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{x_i}^2$ est le terme de balance de la fonctionnelle.

MICROPROFIL DE LA ROUTE

IV.1-Détermination expérimentale de la fonction de corrélation du microprofil de la route:

Le microprofil de la route est une fonction aléatoire du chemin parcouru, chaque enregistrement du microprofil constitue une réalisation de la fonction aléatoire. Les enregistrements seront différents pour chaque passage effectué et suivant la vitesse de relèvement du microprofil.

Les irrégularités du microprofil de la route ne peuvent jamais être décrits dans le domaine temporel par une fonction élémentaire. Pour cela on a préféré passer du domaine temporel au domaine fréquentiel. Ainsi on s'intéressera au spectre des perturbations se rapportant à la route.

A partir d'un enregistrement sur une bande magnétique du microprofil d'une route, on obtient la fonction de corrélation $K_h(x, x + x_s)$ et par la suite la densité spectrale et ce à l'aide d'un appareil corrélateur représenté sur la figure simplifiée ci-dessous.

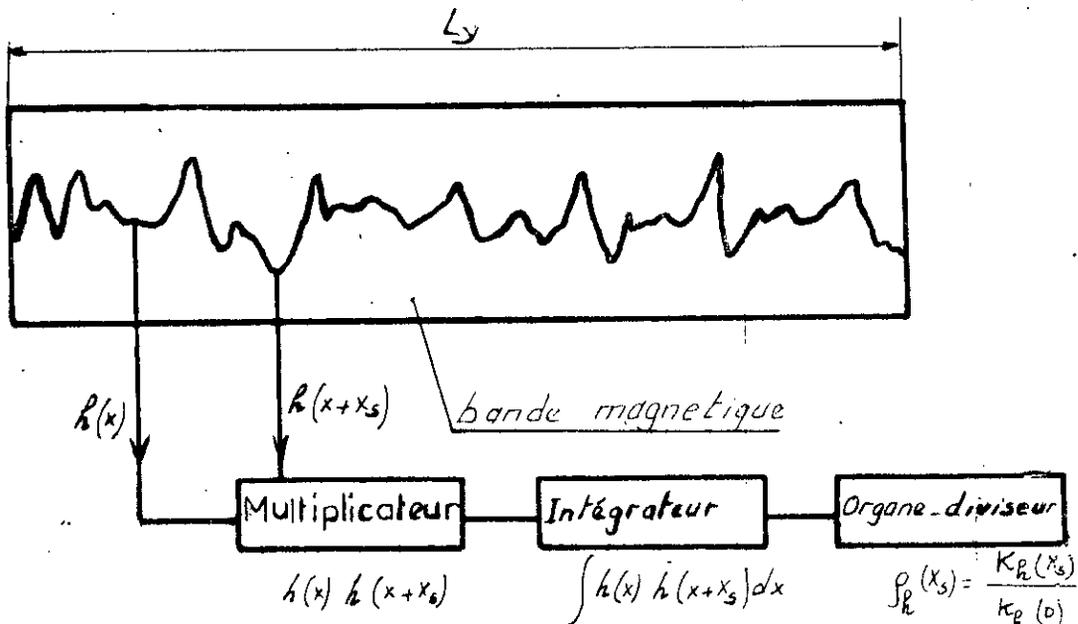


Fig.3 - Schéma d'un corrélateur

IV.2-Densité spectrale du microprofil de la route :

Le microprofil de la route est une fonction aléatoire du chemin parcouru; chaque portion de la route comporte des irrégularités d'étendue et de forme différentes. La succession des creux et des saillies est tout à fait aléatoire.

Les conditions remplies par cette fonction sont d'après /1/ :

- a) la fonction aléatoire est stationnaire et ergodique.
- b) les irrégularités sont limitées, elles ne prennent pas des valeurs trop grandes par rapport à la moyenne.
- c) les ordonnées du microprofil sont distribuées suivant la loi normale en fonction du temps.

i Supposons que le véhicule se meut à vitesse constante v , le long d'une route dont le microprofil $h(x)$ est une fonction aléatoire qui obéit aux conditions su-citées.

Le spectre du chemin parcouru est donné par une équation de la forme (d'après /3/):

$$\Delta_h(\Omega) = \alpha \cdot \sigma^2 / \pi \cdot (\alpha^2 + \Omega^2) \quad (IV.1)$$

avec :

Ω - fréquence angulaire spatiale (rd/m²)

σ^2 - variance des irrégularités du microprofil (m²)

α - constante qui dépend de la surface de la route.

Suivant le type de route, la référence /3/ donne pour les paramètres α et σ^2 les valeurs suivantes :

Type de route	σ^2 (m ²)	α (m ⁻¹)
(a) goudronnée	9	0.25
(b) pavée	300	0.45

Sachant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = v \cdot t \\ \text{et} \\ w = v \cdot \Omega \end{array} \right. \quad (IV.2)$$

où :

x - distance parcourue en (m)

w - fréquence temporelle en (rd/sec)

La densité spectrale $\Delta_h(\Omega)$ du processus $\{h(t)\}$ est lié à la densité

spectrale $\Delta_h(\Omega)$ du processus $\{h(x)\}$ par :

$$\Delta_h(w) = \frac{1}{v} \Delta_h(\Omega) = \alpha \cdot v \cdot \sigma^2 / \pi (\alpha^2 \cdot v^2 + w^2) \quad (IV.3)$$

Dans le cas du véhicule représenté sur la figure I, la densité spectrale d'entrée (de la route) est une matrice carrée d'ordre 4 dont les éléments diagonaux sont donnés par :

$$S_{h_i h_i}(w) = \Delta_h(w) \quad (i = 1 \div 4) \quad (IV.4)$$

En supposant que les excitations dues aux irrégularités du microprofil de la route sont les mêmes pour chaque roue, mais séparées par une constante de temps $Z_{ik} = l_{ik}/v$ où l_{ik} est la distance entre le i et le k essieu, les éléments hors diagonale de la matrice densité spectrale $S_h(w)$ sont alors donnés par :

$$S_{h_i h_k}(w) = \text{Exp}(-j \cdot w \cdot Z_{ik}) S_{h_i h_i}(w) \quad (IV.5)$$

on en déduit :

$$S_{h_k h_i}(w) = S_{h_i h_k}^*(w) \quad (IV.6)$$

Dans le cas d'un système vibratoire tel celui de la figure 4, la matrice densité spectrale $S_h(w)$, des excitations de la route, s'écrit donc :

$$S_h(w) = \begin{pmatrix} 1 & \text{Exp}(-j \cdot \beta_{12}) & \text{Exp}(-j \cdot \beta_{13}) & \text{Exp}(-j \cdot \beta_{14}) \\ \text{Exp}(+j \cdot \beta_{21}) & 1 & \text{Exp}(-j \cdot \beta_{23}) & \text{Exp}(-j \cdot \beta_{24}) \\ \text{Exp}(j \cdot \beta_{31}) & \text{Exp}(j \cdot \beta_{32}) & 1 & \text{Exp}(-j \cdot \beta_{34}) \\ \text{Exp}(j \cdot \beta_{41}) & \text{Exp}(j \cdot \beta_{42}) & \text{Exp}(j \cdot \beta_{43}) & 1 \end{pmatrix} \cdot \Delta_h(w) \quad (IV.7)$$

avec :

$$\begin{aligned} \beta_{12} &= w(b_1 + b_2)/v \\ \beta_{13} &= w(b_1 + b_3 + b_4 + b_5 - b_6/2)/v \\ \beta_{14} &= w(b_1 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6/2)/v \\ \beta_{23} &= w(b_2 + b_4 + b_5 - b_2 - b_6/2)/v \\ \beta_{24} &= w(b_2 + b_4 + b_5 - b_2 + b_6/2)/v \\ \beta_{34} &= w \cdot b_6/v \end{aligned}$$

EVALUATION DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UN VEHICULE LOURD
(TRACTEUR ROUTIER-SEMI-REMORQUE)

L'analyse fréquentielle du comportement dynamique du système Route-Tracteur routier-Semi-remorque-Corps du chauffeur, permet de juger la stabilité des masses suspendues et d'évaluer le niveau de confort et de sécurité du véhicule industriel.

Pour cela, nous nous proposons de calculer les différentes densités spectrales de puissance ainsi que les dispersions correspondantes.

V.1-Critères de modélisation :

Les critères de modélisation du véhicule représenté sur la figure (I) sont les suivants :

a-) Le véhicule est décomposé en 7 principales masses vibrantes, liées élastiquement (modèle discret)

M_1 : masse de l'essieu avant du tracteur routier.

M_2 : masse de l'essieu arrière du tracteur routier.

M_3 : masse du premier essieu du semi-remorque.

M_4 : masse du deuxième essieu du semi-remorque.

M_t : masse du tracteur routier + accessoires.

M_r : masse totale du semi-remorque.

M_c : masse du chauffeur et de son siège assemblés.

b-) Chacune des masses représente un ensemble rigide.

c-) On suppose que la structure ainsi que ses paramètres ne dépendent pas du temps.

d-) On ne considère que les degrés de liberté qui sont en relation avec les excitations dues aux irrégularités de la surface de la route.

e-) On ne considère que les vibrations dans le plan longitudinal du véhicule.

V.2-Le modèle adopté du véhicule :

Le modèle adopté du véhicule est illustré à la figure 4. Le tracteur routier et le semi-remorque sont supposés s'articuler autour de la selle. Le chauffeur et son siège sont modélisés par une masse à un seul

degré de liberté, attachée au châssi du tracteur.

Suite à ces considérations, le modèle inclut 8 degrés de liberté:

- Translation verticale et rotation du centre de gravité du tracteur.
- Rotation du centre de gravité du semi-remorque (Tangage)
- Translation verticale de chaque essieu (ou pont).
- Translation verticale du corps du chauffeur avec son siège.

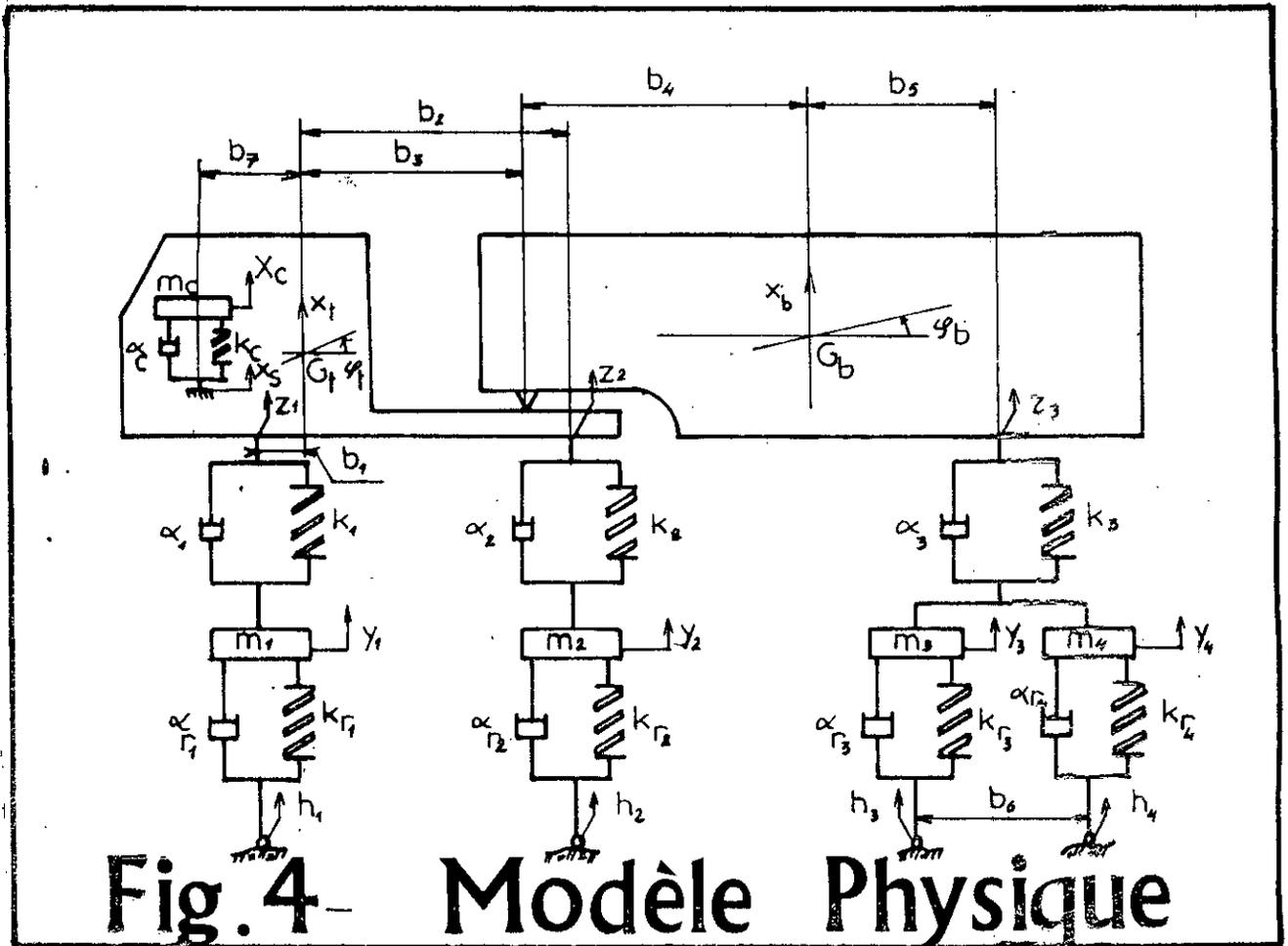


Fig. 4 - Modèle Physique

V.3-Relations géométriques:

À partir du schéma ci-dessus, on déduit les relations géométriques suivantes :

$$Z_1 = X_t - b_1 \cdot \varphi_t \tag{V.1}$$

$$Z_2 = X_t + b_2 \cdot \varphi_t \tag{V.2}$$

$$X_s = X_t - b_3 \cdot \varphi_t \tag{V.3}$$

Le fait que la selette est considérée comme étant une charnière, autour de laquelle s'articule le tracteur routier et le semi-remorque, conduit à :

$$Xb - b_4 \cdot \varphi_b = X_t + b_3 \cdot \varphi_t$$

ou

$$Xb = X_t + b_3 \cdot \varphi_b + b_4 \cdot \varphi_b \quad (V.4)$$

$$Z_3 = Xb + b_5 \cdot \varphi_b \quad \text{ou} \quad Z_3 = X_t + b_3 \cdot \varphi_t + (b_4 + b_5) \cdot \varphi_b \quad (V.5)$$

V.4-Equations du mouvement et leurs solutions :

Pour établir ces équations, nous utilisons les équations de LAGRANGE de 2nd espèce .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (j=1,2,\dots,8) \quad (V.6)$$

où :

- T: somme des énergies cinétiques de toutes les masses vibrantes.
- U: somme des énergies potentielles du système vibratoire.
- D: fonction de dissipation de RAYLEIGH.
- q: coordonnées généralisées qui décrivent la position de chaque élément du système.

L'énergie cinétique est :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \cdot \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot \dot{y}_3^2 + \frac{1}{2} m_4 \cdot \dot{y}_4^2 + \frac{1}{2} M_t \cdot \dot{X}_t^2 + \frac{1}{2} M_b \cdot \dot{X}_b^2 + \frac{1}{2} J_t \cdot \dot{\varphi}_t^2 + \frac{1}{2} J_b \cdot \dot{\varphi}_b^2 + \frac{1}{2} M_o \cdot \dot{X}_o^2$$

L'énergie potentielle est :

$$U = \frac{1}{2} K_{r1} (y_1 - h_1)^2 + \frac{1}{2} K_{r2} (y_2 - h_2)^2 + \frac{1}{2} K_{r3} (y_3 - h_3)^2 + \frac{1}{2} K_{r4} (y_4 - h_4)^2 + \frac{1}{2} k_1 (Z_1 - y_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (Z_2 - y_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 (Z_3 - \frac{y_3 + y_4}{2})^2 + \frac{1}{2} K_c (X_o - X_s)^2$$

La fonction de dissipation de RAYLEIGH est :

$$D = \frac{1}{2} \alpha_{r1} (\dot{y}_1 - \dot{h}_1)^2 + \frac{1}{2} \alpha_{r2} (\dot{y}_2 - \dot{h}_2)^2 + \frac{1}{2} \alpha_{r3} (\dot{y}_3 - \dot{h}_3)^2 + \frac{1}{2} \alpha_{r4} (\dot{y}_4 - \dot{h}_4)^2 + \frac{1}{2} \alpha_1 (\dot{Z}_1 - \dot{y}_1)^2$$

$$+\frac{1}{2} \alpha_2 (\dot{z}_2 - \dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2} \alpha_3 (\dot{z}_3 - \frac{\dot{y}_3}{2} + \frac{\dot{y}_2}{2})^2 + \frac{1}{2} \alpha_c (\dot{x}_c - \dot{x}_s)^2$$

Les coordonnées généralisées sont :

$$\begin{aligned} q_1 &= y_1 & ; & & q_2 &= y_2 & ; & & q_3 &= y_3 & ; & & q_4 &= y_4 \\ q_5 &= X_t & ; & & q_6 &= X_c & ; & & q_7 &= \varphi_t & ; & & q_8 &= \varphi_6 \end{aligned}$$

En exprimant T, U, et D en fonction des variables indépendantes ($q_i, i=1, 2, \dots, 8$) et en tenant compte des relations géométriques (V.1), (V.2), (V.3), (V.4) et (V.5), on obtient le système d'équations différentielles qui décrivent le mouvement du système.

$$m_1 \cdot \ddot{q}_1 + (\alpha_1 + \alpha_{r1}) \dot{q}_1 + (k_1 + k_{r1}) q_1 - \alpha_1 \dot{q}_5 - k_1 q_5 + \alpha_1 b_1 \dot{q}_7 + k_1 b_1 q_7 = \alpha_1 \dot{h}_1 + k_1 h_1$$

$$m_2 \cdot \ddot{q}_2 + (\alpha_2 + \alpha_{r2}) \dot{q}_2 + (k_2 + k_{r2}) q_2 - \alpha_2 \dot{q}_5 - k_2 q_5 - \alpha_2 b_2 \dot{q}_7 - k_2 b_2 q_7 = \alpha_2 \dot{h}_2 + k_2 h_2$$

$$\begin{aligned} m_3 \cdot \ddot{q}_3 + (\alpha_{r3} + \frac{\alpha_3}{4}) \dot{q}_3 + (k_{r3} + \frac{k_3}{4}) q_3 + \frac{\alpha_3}{4} \dot{q}_4 + \frac{k_3}{4} q_4 - \frac{\alpha_3}{4} \dot{q}_5 - \frac{k_3}{4} q_5 - \frac{\alpha_3 b_3}{2} \dot{q}_7 - \frac{k_3 b_3}{2} q_7 + \\ = -\frac{\alpha_3}{2} (b_4 + b_5) \dot{q}_7 - \frac{k_3}{2} (b_4 + b_5) q_7 = \alpha_3 h_3 + k_3 h_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_4 \cdot \ddot{q}_4 + (\alpha_4 + \frac{\alpha_3}{4}) \dot{q}_4 + (k_{r4} + \frac{k_3}{4}) q_4 + \frac{\alpha_3}{4} \dot{q}_3 + \frac{k_3}{4} q_3 - \frac{k_3}{2} q_5 - \frac{\alpha_3}{2} \dot{q}_7 - \frac{\alpha_3 b_3}{2} \dot{q}_7 + \\ = \frac{k_3 b}{2} q_7 - \frac{\alpha_3}{2} (b_4 + b_5) \dot{q}_7 - \frac{k_3}{2} (b_4 + b_5) q_7 = \alpha_4 \dot{h}_4 + k_4 h_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (M_b + M_t) \cdot \ddot{q}_5 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_c) \dot{q}_5 + (k_1 + k_2 + k_3 + k_c) q_5 - \alpha_1 \dot{q}_1 - k_1 q_1 - \alpha_2 \dot{q}_2 - k_2 q_2 - \frac{\alpha_3}{2} \dot{q}_3 + \\ - \frac{k_3}{2} q_3 - \frac{\alpha_3}{2} \dot{q}_4 - \frac{k_3}{2} q_4 - \alpha_c \dot{q}_c - k_c q_c + (\alpha_3 b_3 + \alpha_2 b_2 + \alpha_1 b_1 - \alpha_c b_r) \dot{q}_7 + (k_3 b_3 + k_2 b_2 + \\ + k_1 b_1 - k_c b_r) q_7 + M_b b_5 \ddot{q}_6 + M_b b_5 \dot{q}_6 + \alpha_3 (b_4 + b_5) \dot{q}_7 + k_3 (b_4 + b_5) q_7 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (J_t + M_b \cdot b_3^2) \ddot{q}_7 + (\alpha_1 b_1^2 + \alpha_2 b_2^2 + \alpha_3 b_3^2 + \alpha_c b_r^2) \dot{q}_7 + (k_1 b_1^2 + k_2 b_2^2 + k_3 b_3^2 + k_c b_r^2) q_7 - \alpha_1 b_1 \dot{q}_1 + \\ - k_1 b_1 q_1 - \frac{\alpha_2 b_2}{2} \dot{q}_2 - \frac{k_2 b_2}{2} q_2 - \frac{\alpha_3 b_3}{2} \dot{q}_3 - \frac{k_3 b_3}{2} q_3 + (\alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 - \alpha_c b_r - \alpha_1 b_1) \dot{q}_5 + \\ + (k_2 b_2 + k_3 b_3 - k_c b_r - k_1 b_1) q_5 + \alpha_1 b_1 \dot{q}_1 + k_1 b_1 q_1 + \alpha_c b_r \dot{q}_c + k_c b_r q_c + M_b b_5 (b_4 + b_5) \dot{q}_7 + \\ + k_3 b_3 (b_4 + b_5) q_7 + M_b b_5 \ddot{q}_6 + M_b b_5 \dot{q}_6 = 0 \end{aligned}$$

$$M_c \cdot \ddot{q}_6 + \alpha_c \dot{q}_6 + k_c q_6 - \alpha_c \dot{q}_5 - k_c q_5 + \alpha_c b_r \dot{q}_7 + k_c b_r q_7 = 0$$

$$\begin{aligned}
 & (Jb_1 + Mb_3) \ddot{q}_1 + \alpha_1 (b_4 + b_5) \dot{q}_1 + k_1 (b_4 + b_5) q_1 + Mb_3 b_4 \ddot{q}_7 + \alpha_1 b_2 (b_4 + b_5) \dot{q}_7 + k_3 b_2 (b_4 + b_5) q_7 \\
 & + Mb_4 b_5 \ddot{q}_5 + \alpha_3 (b_4 + b_5) \dot{q}_5 + k_3 (b_4 + b_5) q_5 + \frac{\alpha_2}{2} (b_4 + b_5) \dot{q}_3 - \frac{k_2}{2} (b_4 + b_5) q_3 - \frac{k_1}{2} (b_4 + b_5) q_4 \\
 & - \frac{\alpha_3}{2} (b_4 + b_5) \dot{q}_4 = 0
 \end{aligned}$$

L'application de la transformée de LAPLACE, nous permet d'écrire ce système sous la forme :

$$A \cdot \bar{q} = B_1 \cdot \bar{h}_1 + B_2 \cdot \bar{h}_2 + B_3 \cdot \bar{h}_3 + B_4 \cdot \bar{h}_4 \quad (V.7)$$

avec :

$$A = [a_{ij}] \quad \begin{matrix} i=1,8 \\ -j=1,8 \end{matrix}$$

$$B_k = \{b_{ki}\} \quad \begin{matrix} i=1,8 \\ (k=1,2,\dots,4) \end{matrix}$$

$$q = \{\bar{q}_i\} \quad i=1,8$$

ou encors :

$$b_{i1} = \begin{cases} \alpha_1 p + k_1 & i=1 \\ 0 & i \neq 1 \end{cases} \quad b_{i2} = \begin{cases} \alpha_{r2} \cdot p + k_2 & i=2 \\ 0 & i \neq 2 \end{cases}$$

$$b_{i3} = \begin{cases} \alpha_{r3} \cdot p + k_3 & i=3 \\ 0 & i \neq 3 \end{cases} \quad b_{i4} = \begin{cases} \alpha_{r4} \cdot p + k_4 & i=4 \\ 0 & i \neq 4 \end{cases}$$

$$a_{11} = m_1 p^2 + (\alpha_1 + \alpha_7) p + (k_1 + k_7)$$

$$a_{15} = -(\alpha_1 p + k_1)$$

$$a_{17} = b_2 (\alpha_1 p + k_1)$$

$$a_{32} = m_2 p^2 + (\alpha_2 + \alpha_{r2}) p + (k_2 + k_{r2})$$

$$a_{35} = -(\alpha_2 p + k_2)$$

$$a_{37} = -b_2 (\alpha_2 p + k_2)$$

$$a_{33} = m_3 p^2 + (\alpha_3 + \frac{\alpha_2}{4}) p + (k_3 + \frac{k_2}{4})$$

$$a_{35} = -(\alpha_3 p + k_3)/2$$

$$a_{37} = -(b_4 + b_5) (\alpha_3 p + k_3)/2$$

$$a_{44} = m_4 p^2 + (\alpha_{r4} + \frac{\alpha_2}{4}) p + (k_{r4} + \frac{k_2}{4})$$

$$a_{45} = -(\alpha_3 p + k_3)/2$$

$$a_{47} = -b_3(\alpha_3 p + k_3)/2$$

$$a_{48} = -(b_4 + b_5)(\alpha_3 p + k_3)/2$$

$$a_{66} = (Mb + Mt) p^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) p + (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$$

$$a_{56} = -(\alpha_2 p + k_2)$$

$$a_{57} = Mb \cdot b_3 \cdot p^2 + (\alpha_3 b_3 \alpha_4 b_4 - \alpha_4 b_4 - \alpha_2 b_3) p + (k_3 b_3 + k_2 b_2 - k_1 b_1 - k_4 b_4)$$

$$a_{58} = Mb \cdot b_4 \cdot p^2 + \alpha_3 (b_4 + b_5) p + k_3 (b_4 + b_5)$$

$$a_{66} = Mc \cdot p^2 + \alpha_4 p + Kc$$

$$a_{67} = b_7(\alpha_4 p + Kc)$$

$$a_{77} = (Jt + Mb \cdot b_3^2) p^2 + (\alpha_4 b_3^2 + \alpha_2 b_3^2 + \alpha_3 b_3^2 + \alpha_4 b_3^2) p + (k_1 b_1^2 + k_2 b_2^2 + k_3 b_3^2 + k_4 b_4^2)$$

$$a_{78} = Mb \cdot b_4 \cdot p^2 + \alpha_3 b_4 (b_4 + b_5) p + k_3 b_4 (b_4 + b_5)$$

$$a_{88} = (Jb + Mb \cdot b_5^2) p^2 + \alpha_3 (b_4 + b_5)^2 p + k_3 (b_4 + b_5)^2$$

La matrice A est symétrique et le reste de ses éléments sont nuls. Le système (V.7) étant linéaire, sa solution peut être décomposée en la somme de quatre termes respectivement solutions des équations :

$$\begin{cases} A \cdot \bar{q} = B_1 \cdot \bar{h}_1 \\ A \cdot \bar{q} = B_2 \cdot \bar{h}_2 \\ A \cdot \bar{q} = B_3 \cdot \bar{h}_3 \\ A \cdot \bar{q} = B_4 \cdot \bar{h}_4 \end{cases} \quad (V.8)$$

Comme on s'intéresse particulièrement aux fonctions de transfert, on cherchera donc la solution des systèmes :

$$\begin{cases} A \cdot (\bar{q}/\bar{h}_1) = B_1 & ; & A \cdot (\bar{q}/\bar{h}_2) = B_2 \\ A \cdot (\bar{q}/\bar{h}_3) = B_3 & ; & A \cdot (\bar{q}/\bar{h}_4) = B_4 \end{cases} \quad (V.9)$$

posons :

$$\begin{cases} \bar{q}/\bar{h}_1 = H_1 = \left\{ H_{1i} \right\}_{i=1,8} & ; & \bar{q}/\bar{h}_2 = H_2 = \left\{ H_{2i} \right\}_{i=1,8} \\ \bar{q}/\bar{h}_3 = H_3 = \left\{ H_{3i} \right\}_{i=1,8} & ; & \bar{q}/\bar{h}_4 = H_4 = \left\{ H_{4i} \right\}_{i=1,8} \end{cases} \quad (V.10)$$

Les systèmes d'équations (V.10) deviennent :

$$\begin{cases} A \cdot H_1 = B_1 & ; & A \cdot H_2 = B_2 \\ A \cdot H_3 = B_3 & ; & A \cdot H_4 = B_4 \end{cases} \quad (V.11)$$

La solution générale des systèmes d'équations (V.11), s'écrira alors :

$$\bar{q}_i = H_{i1} \bar{h}_1 + H_{i2} \bar{h}_2 + H_{i3} \bar{h}_3 + H_{i4} \bar{h}_4 \quad (i=1,2,\dots,8) \quad (V.I2)$$

NB:

La figure 5 est le schéma synoptique du système vibratoire. Ce dernier est une représentation schématique des équations de LAGRANGE qui décrivent le comportement dynamique du système.

V.5-Calcul des fonctionnelles Q_1 et Q_2 :

V.5.I-Fonction de transfert :

A partir des relations géométriques (V.1),(V.2),(V.3),(V.4) et (V.5) et partant de la relation (V.I2), on exprimera en fonction des excitations h_i ($i=1,2,3,4$) :

a-) Le déplacement du point de fixation du siège :

$$\bar{x}_s = \sum_{i=1}^4 (H_{5i} - b_7 H_{7i}) \bar{h}_i \quad (V.I3)$$

b-) Le déplacement vertical du corps du chauffeur :

$$\bar{x}_c = \sum H_{6i} \bar{h}_i$$

Poseons :

$$\bar{h} = (\bar{h}_1 \quad \bar{h}_2 \quad \bar{h}_3 \quad \bar{h}_4)^t \quad \text{et} \quad W_1 = (H_{61} \quad H_{62} \quad H_{63} \quad H_{64}) \cdot P^2$$

L'accélération verticale du corps du chauffeur est alors :

$$\ddot{\bar{x}}_c = W_1 \cdot \bar{h} \quad (V.I4)$$

c-) Le déplacement du siège par rapport à sa fixation :

$$\bar{x}_c - \bar{x}_s = \sum_{i=1}^4 (H_{6i} - H_{5i} + b_7 H_{7i}) \cdot \bar{h}_i$$

Poseons :

$$W_2 = (H_{61} - H_{51} + b_7 H_{71} \quad H_{62} - H_{52} + b_7 H_{72} \quad H_{63} - H_{53} + b_7 H_{73} \quad H_{64} - H_{54} + b_7 H_{74})$$

L'écart ($\bar{x}_c - \bar{x}_s$) devient :

$$\bar{x}_c - \bar{x}_s = W_2 \cdot \bar{h} \quad (V.I5)$$

d-) Le déplacement du tracteur routier par rapport à son :

d.1) essieu avant :

$$\bar{z}_1 - \bar{y}_1 = \sum_{i=1}^4 (H_{8i} - b_4 \cdot H_{7i} - H_{1i}) \cdot \bar{h}_i$$

Poseons :

$$W_3 = (H_{81} - b_4 H_{71} - H_{11} \quad H_{82} - b_4 H_{72} - H_{12} \quad H_{83} - b_4 H_{73} - H_{13} \quad H_{84} - b_4 H_{74} - H_{14})$$

L'équation précédente devient :

$$\bar{z}_1 - \bar{y}_1 = W_3 \cdot \bar{h} \quad (V.16)$$

d.2) essieu arrière :

$$\bar{z}_2 - \bar{y}_2 = \sum_{i=1}^4 (H_{5i} + b_2 H_{7i} - H_{2i}) \cdot \bar{h}_i$$

ou encore :

$$\bar{z}_2 - \bar{y}_2 = W_4 \cdot \bar{h} \quad (V.17)$$

avec :

$$W_4 = (H_{51} + b_2 H_{71} - H_{21} \quad H_{52} + b_2 H_{72} - H_{22} \quad H_{53} + b_2 H_{73} - H_{23} \quad H_{54} + b_2 H_{74} - H_{24})$$

e-) L'accélération verticale du centre de gravité du semi-remorque :

$$\bar{x}_b = p^2 \bar{x}_b = p^2 \sum_{i=1}^4 (H_{5i} + b_3 H_{7i} + b_4 H_{8i}) \cdot \bar{h}_i$$

ou encore :

$$\bar{x}_b = W_5 \cdot \bar{h} \quad (V.18)$$

avec :

$$W_5 = p^2 (H_{51} + b_3 H_{71} + b_4 H_{81} \quad H_{52} + b_3 H_{72} + b_4 H_{82} \quad H_{53} + b_3 H_{73} + b_4 H_{83} \quad H_{54} + b_3 H_{74} + b_4 H_{84})$$

f-) L'accélération angulaire du semi-remorque :

$$\bar{\varphi}_b = p^2 \cdot \bar{\varphi}_b = p^2 \sum_{i=1}^4 H_{\theta i} \cdot \bar{h}_i$$

ou encore :

$$\bar{\varphi}_b = W_6 \cdot \bar{h} \quad (V.19)$$

avec :

$$W_6 = p^2 (H_{\theta 1} \quad H_{\theta 2} \quad H_{\theta 3} \quad H_{\theta 4})$$

g-) Le déplacement du semi-remorque par rapport :

g.1) à son premier essieu :

$$\bar{z}_3 - \bar{y}_3 = \sum_{i=1}^4 (H_{5i} + b_3 H_{7i} + (b_4 + b_5) H_{8i} - H_{3i}) \cdot \bar{h}_i$$

soit :

$$\bar{z}_3 - \bar{y}_3 = W_7 \cdot \bar{h} \quad (V.20)$$

où :

$$W_7 = (H_{51} + b_3 H_{71} + (b_4 + b_5) H_{81} - H_{31} \quad \dots \quad H_{54} + b_3 H_{74} + (b_4 + b_5) H_{84} - H_{34})^{i=1,4}$$

g.2) à son essieu arrière :

$$\bar{z}_3 - \bar{y}_4 = \sum_{i=1}^4 (H_{5i} + b_3 H_{7i} + (b_4 + b_5) H_{8i} - H_{3i}) \cdot \bar{h}_i$$

soit :

$$\bar{z}_3 - \bar{y}_4 = W_8 \cdot \bar{h} \quad (V.21)$$

où :

$$W_8 = (H_{51} + b_3 H_{71} + (b_4 + b_5) H_{81} - H_{31} \quad \dots \quad H_{54} + b_3 H_{74} + (b_4 + b_5) H_{84} - H_{34})^{i=1,4}$$

En remplaçant la variable de LAPLACE par (j.w), nous trouvons les fonctions de transfert dans le domaine fréquentiel.

V.5.2-Calcul des densités spectrales et des dispersions :

Les densités spectrales des grandeurs données par les relations (V.14), (V.15), (V.13), (V.16), (V.17), (V.18), (V.19), (V.20) et (V.21) seront calculées à partir de la relation (I.20).

$$\begin{aligned} S_{\dot{x}_c} &= W_1 \cdot S_h \cdot W_1^* \\ S_{\dot{x}_c - \dot{x}_3} &= W_2 \cdot S_h \cdot W_2^* \\ S_{\dot{x}_3 - \dot{x}_4} &= W_3 \cdot S_h \cdot W_3^* \\ S_{\dot{x}_4 - \dot{x}_5} &= W_4 \cdot S_h \cdot W_4^* \\ S_{\dot{x}_5 - \dot{x}_6} &= W_5 \cdot S_h \cdot W_5^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\dot{x}_c} &= W_1 \cdot S_h \cdot W_1^* \\ S_{\dot{x}_c - \dot{x}_3} &= W_2 \cdot S_h \cdot W_2^* \\ S_{\dot{x}_3 - \dot{x}_4} &= W_3 \cdot S_h \cdot W_3^* \\ S_{\dot{x}_4 - \dot{x}_5} &= W_4 \cdot S_h \cdot W_4^* \\ S_{\dot{x}_5 - \dot{x}_6} &= W_5 \cdot S_h \cdot W_5^* \end{aligned}$$

Les dispersions correspondantes à ces différentes densités spectrales seront calculées par intégration de ces dernières :

$$\begin{aligned} \sigma_{\dot{x}_c}^2 &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{-j\infty}^{j\infty} S_{\dot{x}_c}(p) dp \\ \sigma_{\dot{x}_c - \dot{x}_3}^2 &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{-j\infty}^{j\infty} S_{\dot{x}_c - \dot{x}_3}(p) dp \\ \sigma_{\dot{x}_3 - \dot{x}_4}^2 &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{-j\infty}^{j\infty} S_{\dot{x}_3 - \dot{x}_4}(p) dp \\ \sigma_{\dot{x}_4 - \dot{x}_5}^2 &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{-j\infty}^{j\infty} S_{\dot{x}_4 - \dot{x}_5}(p) dp \\ \sigma_{\dot{x}_5 - \dot{x}_6}^2 &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{-j\infty}^{j\infty} S_{\dot{x}_5 - \dot{x}_6}(p) dp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\dot{x}_c}^2 &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{-j\infty}^{j\infty} S_{\dot{x}_c}(p) dp \\ \sigma_{\dot{x}_c - \dot{x}_3}^2 &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{-j\infty}^{j\infty} S_{\dot{x}_c - \dot{x}_3}(p) dp \\ \sigma_{\dot{x}_3 - \dot{x}_4}^2 &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{-j\infty}^{j\infty} S_{\dot{x}_3 - \dot{x}_4}(p) dp \\ \sigma_{\dot{x}_4 - \dot{x}_5}^2 &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{-j\infty}^{j\infty} S_{\dot{x}_4 - \dot{x}_5}(p) dp \\ \sigma_{\dot{x}_5 - \dot{x}_6}^2 &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{-j\infty}^{j\infty} S_{\dot{x}_5 - \dot{x}_6}(p) dp \end{aligned}$$

V.5.3-Calcul des fonctionnelles C_1 et C_2 :

D'après (3.1) et (3.2) et en considérant le modèle discret du véhicule, les expressions des fonctionnelles C_1 et C_2 s'écrivent alors :

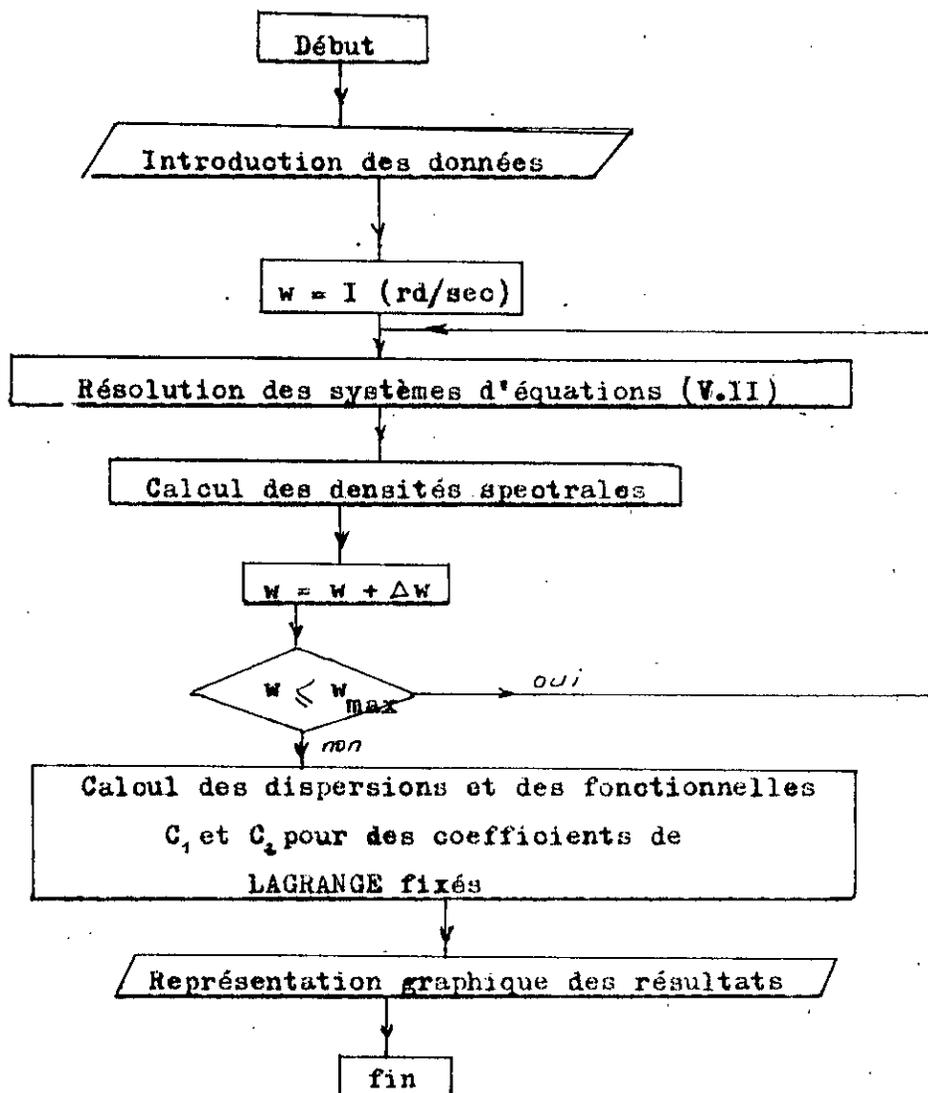
$$C_1 = \sigma_{\dot{x}_c}^2 + \lambda_1 \sigma_{\dot{x}_c - \dot{x}_3}^2 + \lambda_2 \sigma_{\dot{x}_3 - \dot{x}_4}^2 + \lambda_3 \sigma_{\dot{x}_4 - \dot{x}_5}^2 + \lambda_4 \sigma_{\dot{x}_5 - \dot{x}_6}^2 \quad (V.22)$$

$$C_2 = \sigma_{\dot{x}_6}^2 + \beta_1 \sigma_{\dot{x}_5 - \dot{x}_6}^2 + \beta_2 \sigma_{\dot{x}_4 - \dot{x}_5}^2 + \beta_3 \sigma_{\dot{x}_3 - \dot{x}_4}^2 + \beta_4 \sigma_{\dot{x}_c - \dot{x}_3}^2 \quad (V.23)$$

Les différents coefficients de pondération de LAGRANGE sont choisis de sorte que $\sigma_{\dot{x}_c}^2$ (respectivement $\sigma_{\dot{x}_6}^2$) soit du même ordre que la somme des termes restants de C_1 (respectivement de C_2).

V.6-Organigramme de calcul :

Le calcul des densités spectrales, dispersions et des fonctionnelles C_1 et C_2 est fait numériquement suivant l'organigramme ci-dessous. Pour le calcul des intégrales, on remplace les bornes infinies par w_{max} prise égale à 150 rd/sec.



V.7-Application :

Pour l'application numérique, nous avons choisi le tracteur routier TB260 produit par la SNVI de ROUIBA et le semi-remorque plateau ridelles à réhausse produit par la SNVI de TIARET.

Les caractéristiques de ce véhicule lourd, utilisées dans cette étude, sont présentées dans le tableau suivant :

1. Tracteur routier :

a-) Caractéristiques générales :

masse du châssis-cabine en ordre de marche (Mt)	6255 Kg
masse de l'essieu avant (m1)	400 Kg
masse de l'essieu arrière (m2)	764 Kg
moment d'inertie du tracteur (Jt)	12350 Kg.m ²

b-) Dimensions :

b1 = 1020 mm
b2 = 2180 mm
b3 = 1860 mm

2. Semi-remorque :

a-) Caractéristiques générales :

	en charge	à vide
masse du semi-remorque (Mb)	31255 Kg	6880 Kg
masse du 1er essieu (m3)	550 Kg	
masse du 2eme essieu (m4)	550 Kg	
moment d'inertie du semi-remorque (Jb)	240000 Kg.m ²	57780 Kg.m ²

b-) Dimensions :

b4 =	4512 mm	4810 mm
b5 =	3760 mm	3462 mm
b6 =	1360 mm	

3. Caractéristiques des suspensions :

k1 = 550 KN/m	$\alpha_1 = 14100$ N.sec/m
k2 = 800 KN/m	$\alpha_2 = 30000$ N.sec/m
k3 = 1200 KN/m	$\alpha_3 = 40000$ N.sec/m

4. Caractéristiques des pneumatiques :

k _{r1} = 2100 KN/m	$\alpha_{r1} = 950$ KN.sec/m
k _{r2} = 4200 KN/m	$\alpha_{r2} = 1400$ KN.sec/m
k _{r3} = 4200 KN/m	$\alpha_{r3} = 1400$ KN.sec/m
k _{r4} = 4200 KN/m	$\alpha_{r4} = 1400$ KN.sec/m

5. Corps du chauffeur et siège assemblés :

masse de l'ensemble (Mc)	90 Kg
rigidité de la suspension du siège (Kc)	30000 N/m
amortissement de la suspension du siège (α_c)	1400 N.sec/m
position du siège	b7 = 0.60 m

Pour calculer les fonctionnelles C_1 et C_2 , il est nécessaire de se fixer les valeurs des coefficients de pondération de LAGRANGE.

La sélection de l'ensemble de ces coefficients est un problème très compliqué puisqu'il n'existe aucune méthode, exacte, permettant de faire un choix objectif.

Nous proposons un choix basé sur :

a-) un ajustement entre l'intensité de l'ensemble des dispersions considérées comme des contraintes (terme de balance) et l'intensité de la dispersion principale à minimiser.

On considérera séparément les deux cas suivants :

-1^{er} cas : Le terme de balance et la dispersion principale contribuent successivement à 10% et 90 % de la valeur de la fonctionnelle.

-2^{ème} cas : Le terme de balance et la dispersion principale ont la même contribution à la valeur de la fonctionnelle.

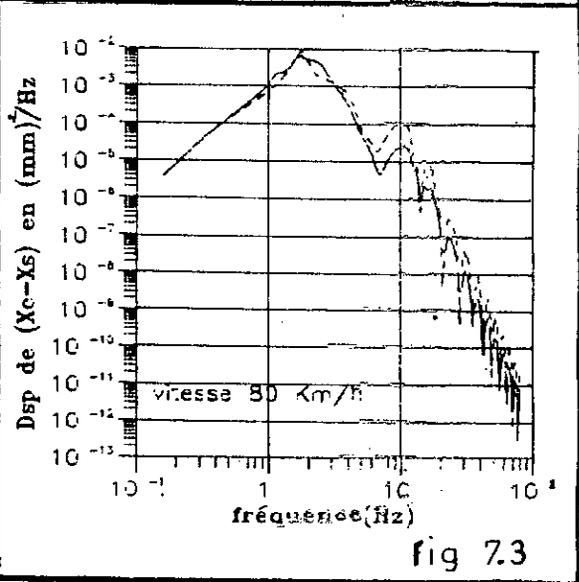
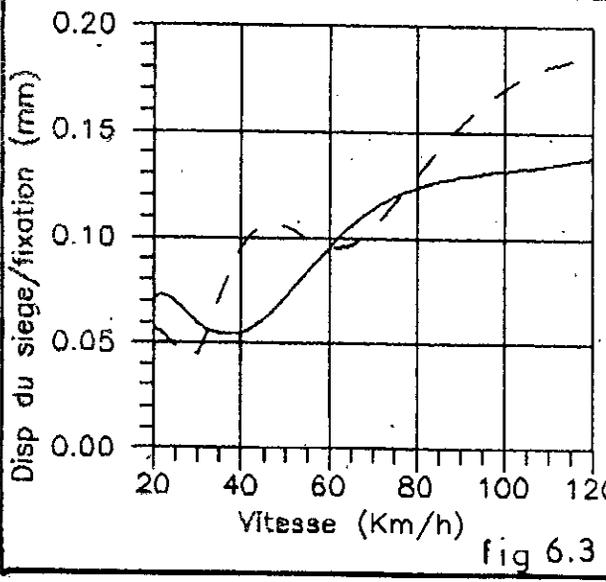
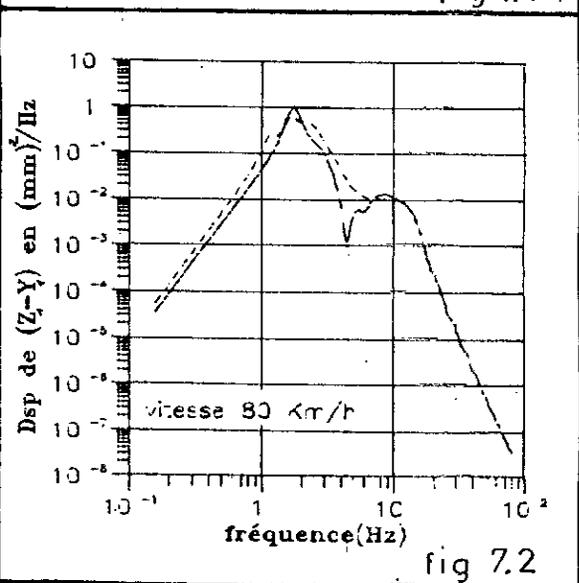
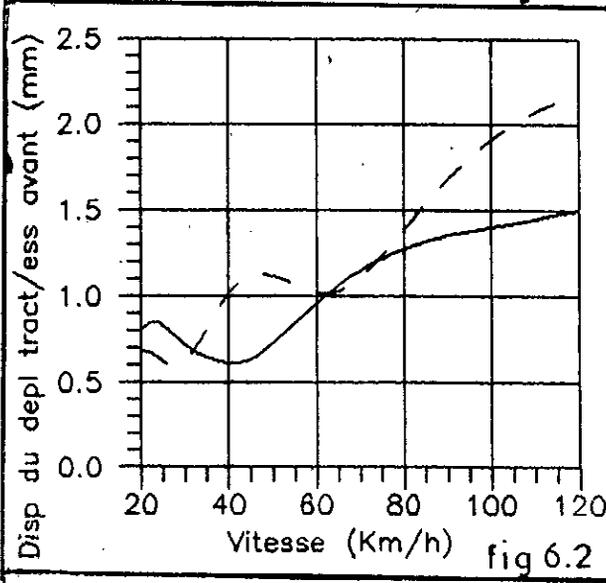
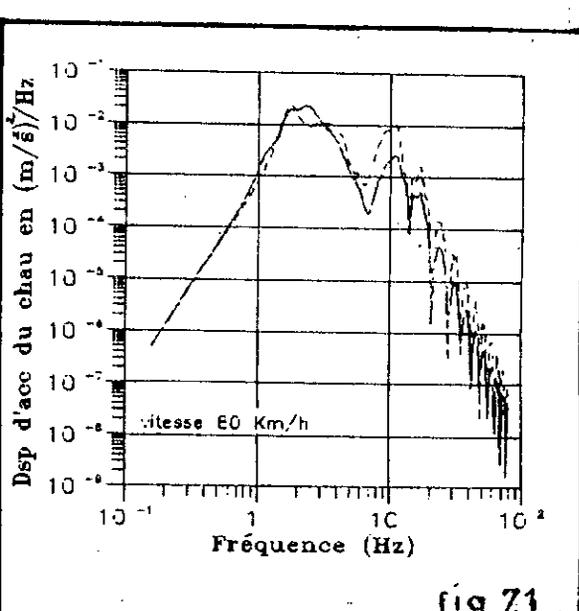
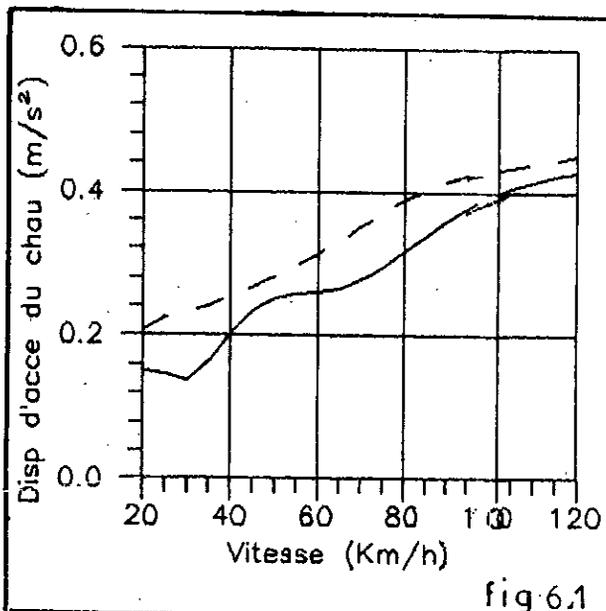
b-) un ajustement entre les composantes du terme de balance et ce en tenant compte de leur importance relative. Pour cela, il suffit que les coefficients de pondération de LAGRANGE soient tous égaux.

Pour chacun des cas cités précédemment, le choix sera fait pour le cas d'un véhicule en charge roulant à basse vitesse et pour le cas d'un véhicule vide roulant à grande vitesse, cela nous permettra d'avoir une approche du domaine de variation des fonctionnelles.

Les valeurs des coefficients de LAGRANGE ont alors pour commune valeur :

coefficient	route goudronnée		route pavée					
	véhicule en charge	véhicule à vide	véhicule en charge	véhicule à vide				
	cas 1	cas 2	cas 3	cas 4	cas 5	cas 6	cas 7	cas 8
	7822	970	13643	1516	6876	764	1015	113
	cas 9	cas 10	cas 11	cas 12	cas 13	cas 14	cas 15	cas 16
	5.7	0.63	3.75	0.417	3.97	0.44	4.5	0.5

Les dispersions ainsi que les fonctionnelles seront calculées pour des vitesses allant de 20 à 120 Km/h, tandis que les densités spectrales sont calculées pour une vitesse de 80 Km/h.



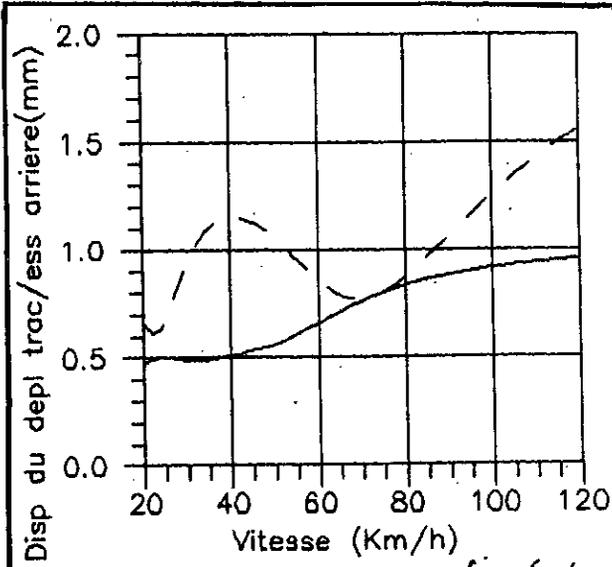


fig 6.4

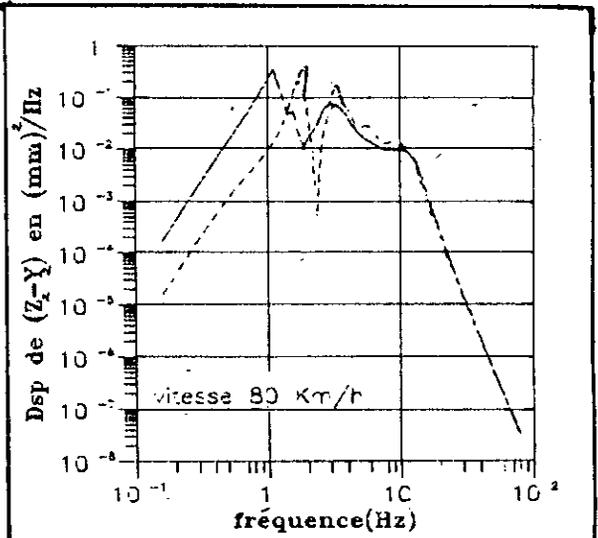


fig 7.4

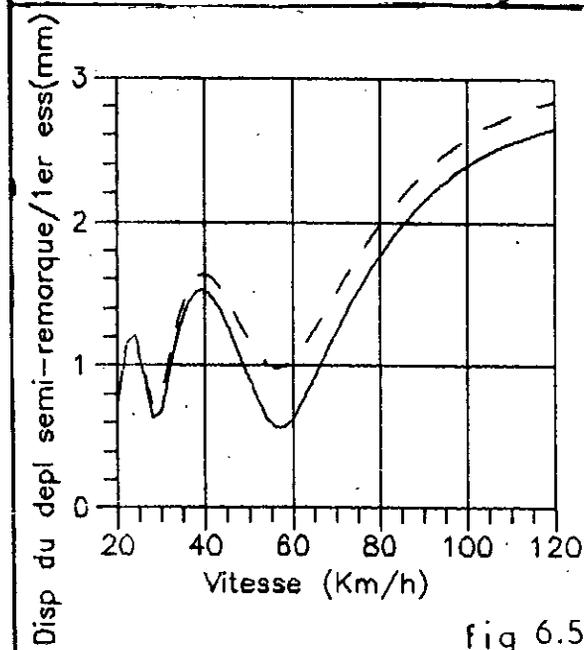


fig 6.5

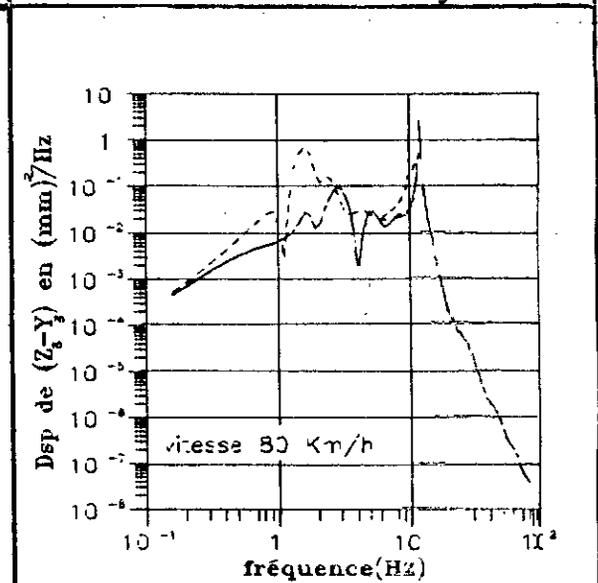


fig 7.5

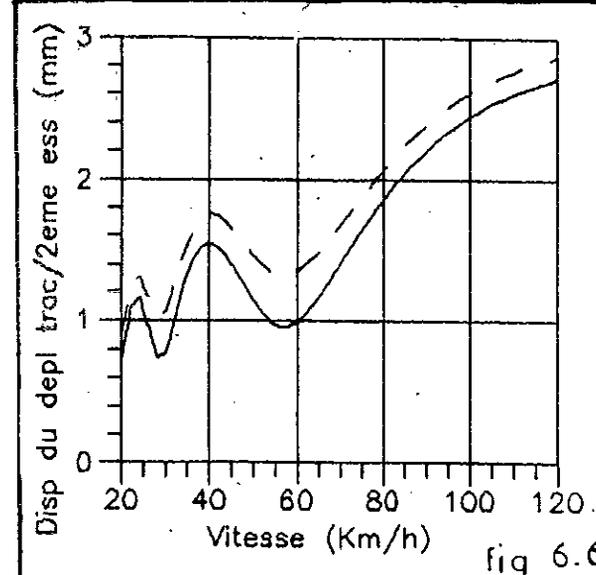


fig 6.6

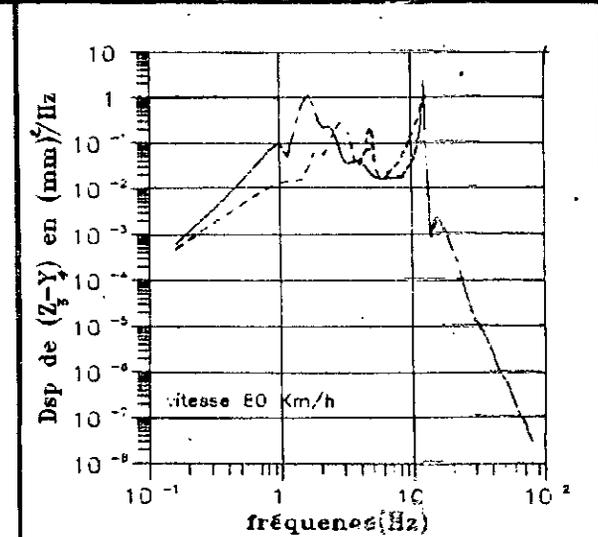


fig 7.6

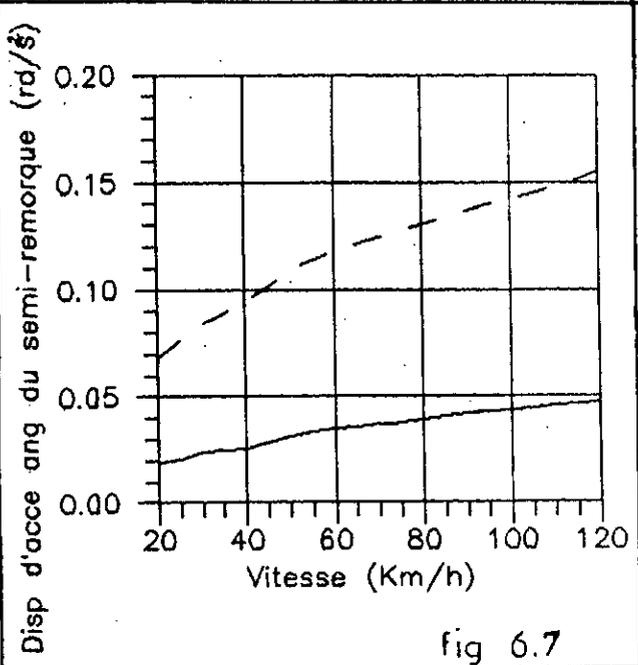


fig 6.7

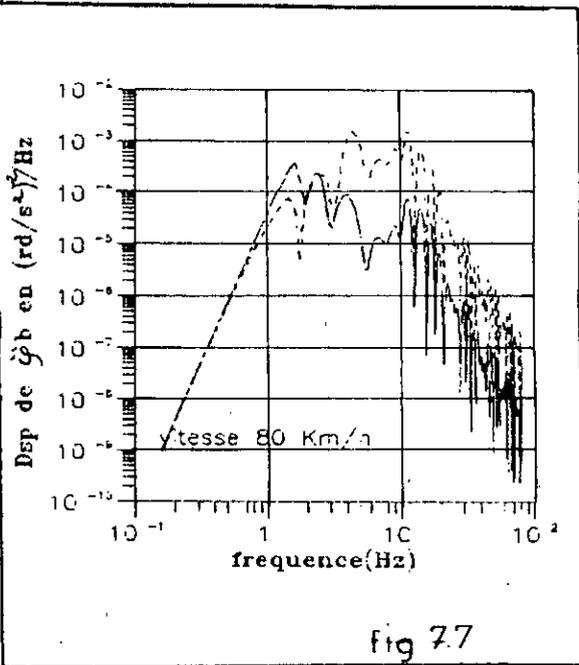


fig 7.7

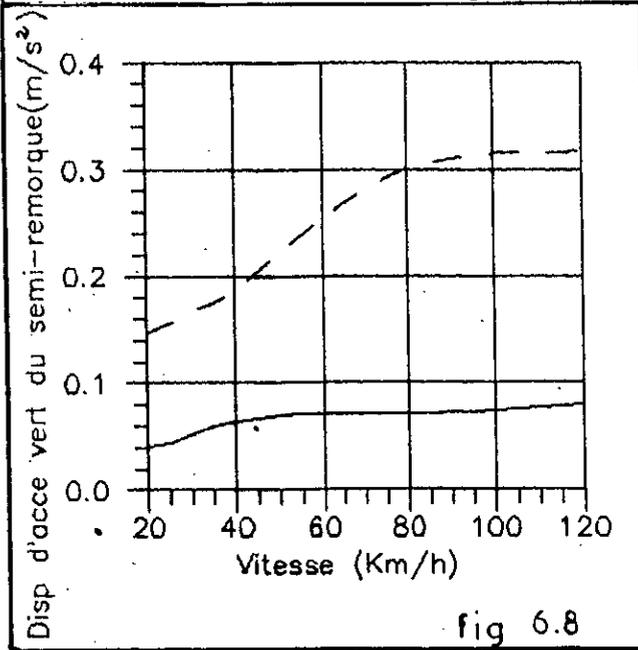


fig 6.8

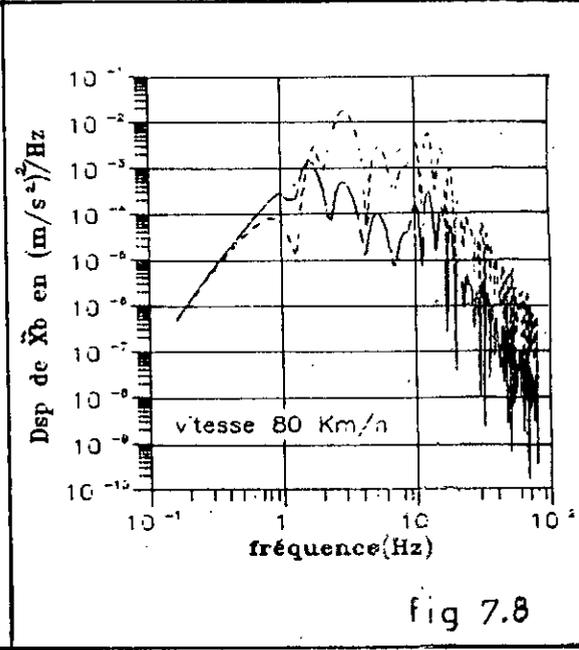


fig 7.8

Figure 6. Dispersions en fonction de la vitesse.
Route goudronnée.
— véhicule en charge. - - - véhicule à vide

Figure 7. Densités spectrales en fonction de la fréquence.
Route goudronnée. Vitesse 80 Km/h.
— véhicule en charge. - - - véhicule à vide

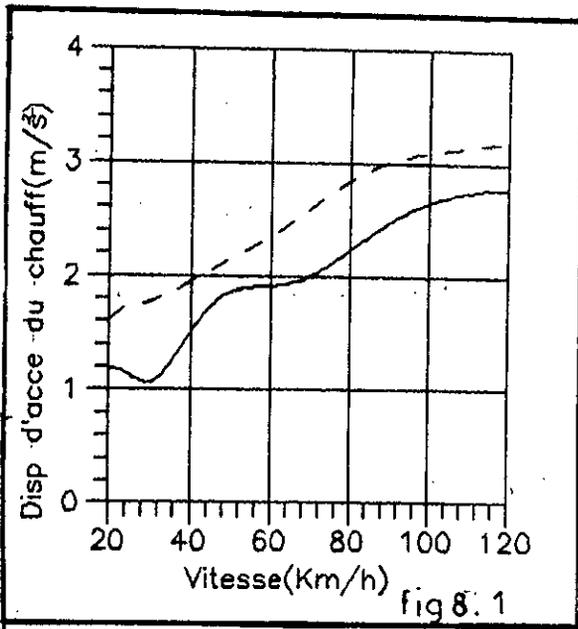


fig 8.1

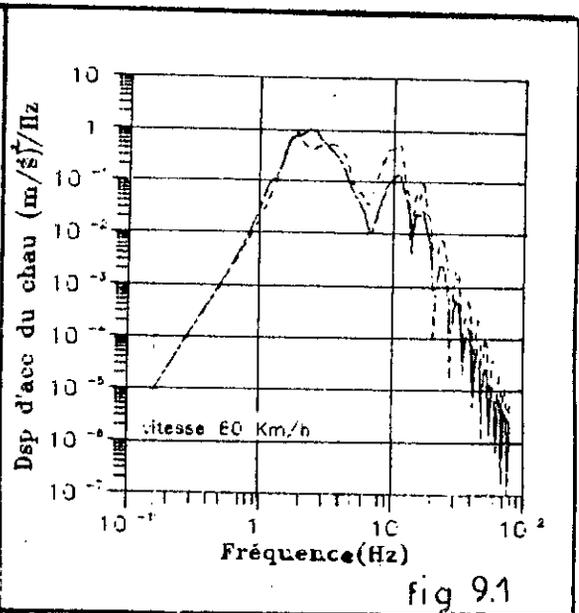


fig 9.1

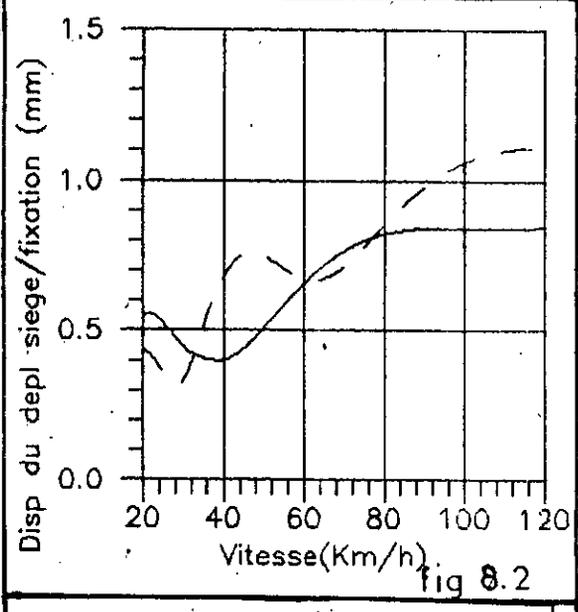


fig 8.2

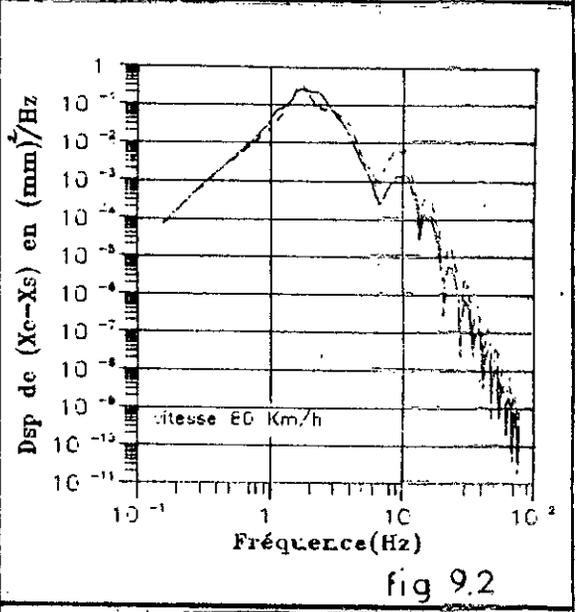


fig 9.2

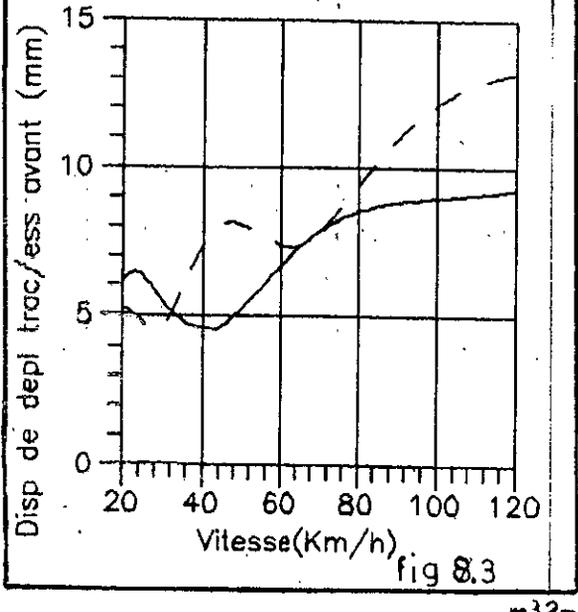


fig 8.3

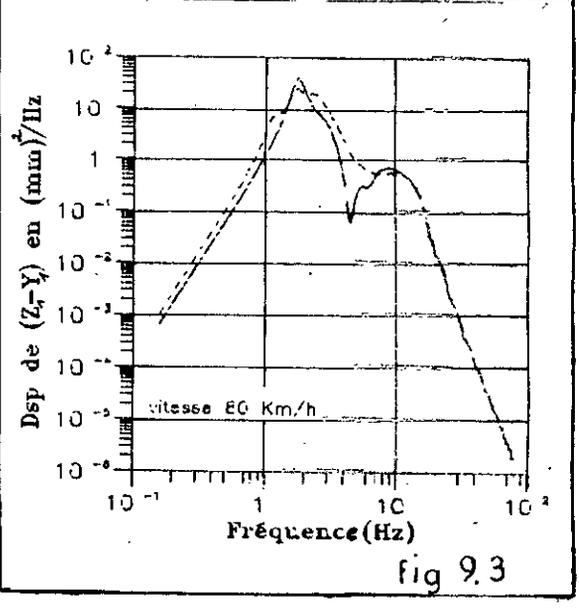


fig 9.3

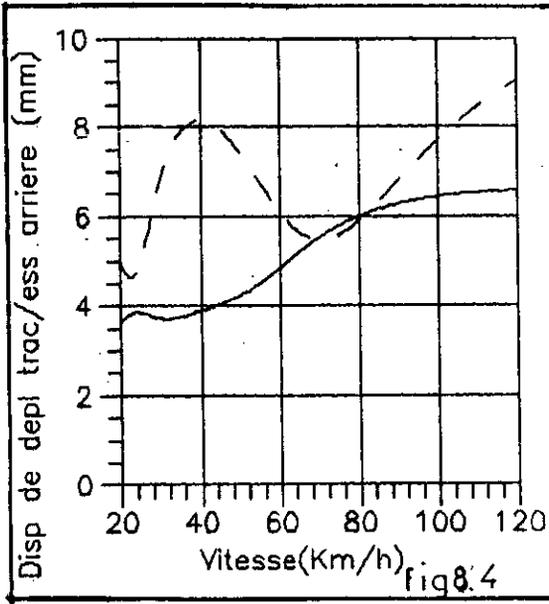


fig 8.4

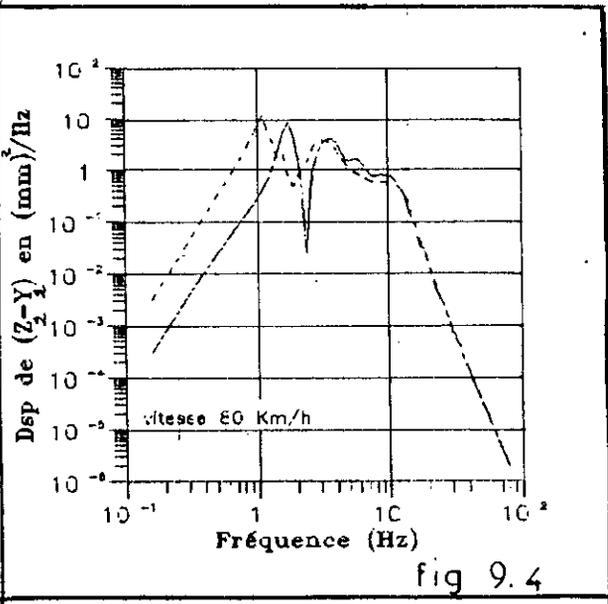


fig 9.4

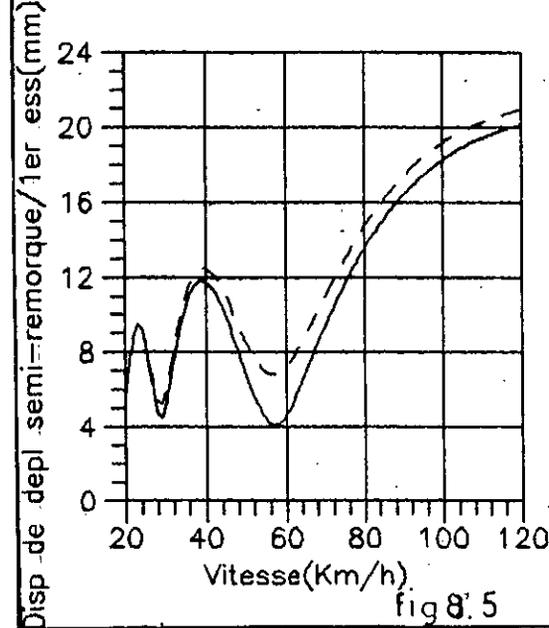


fig 8.5

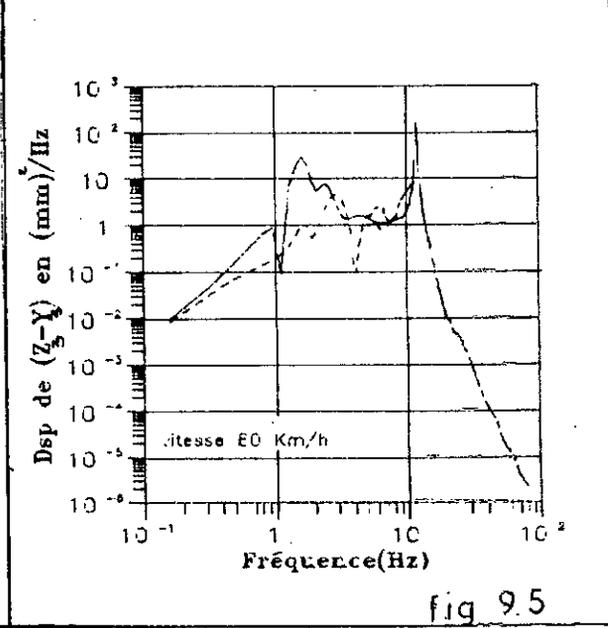


fig 9.5

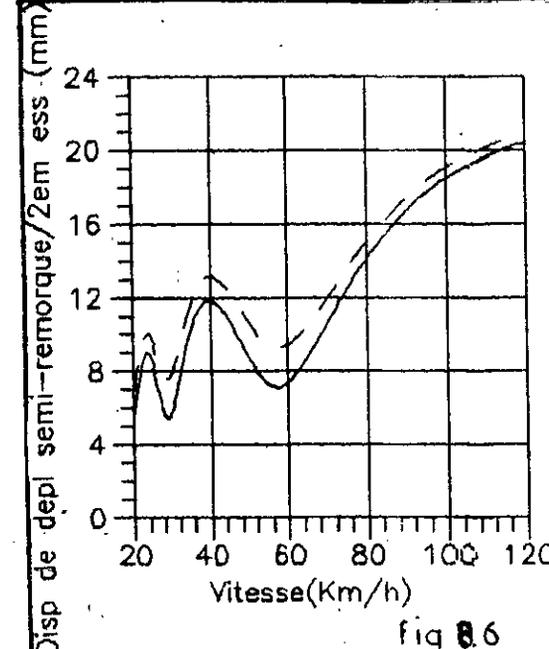


fig 8.6

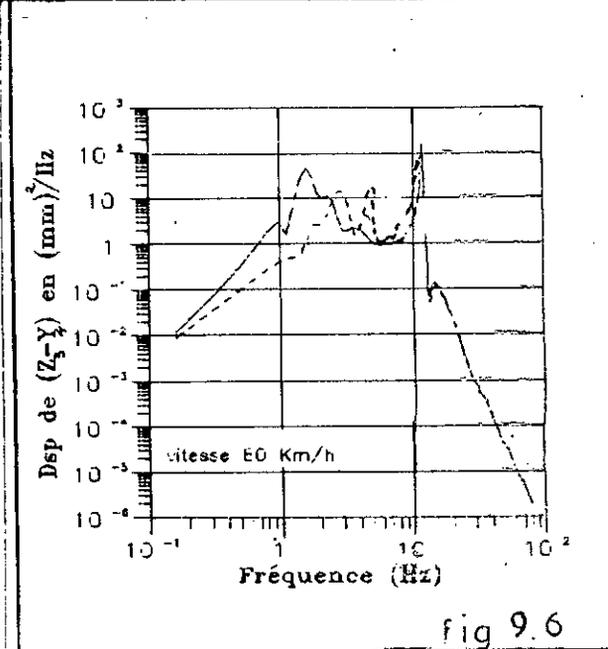


fig 9.6

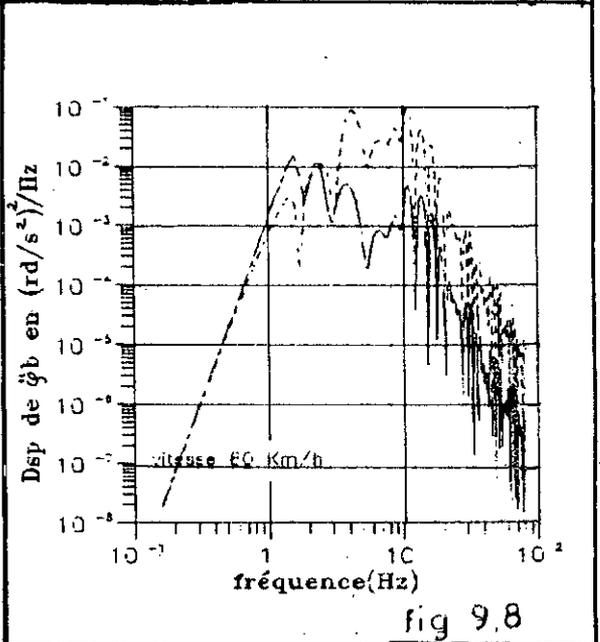
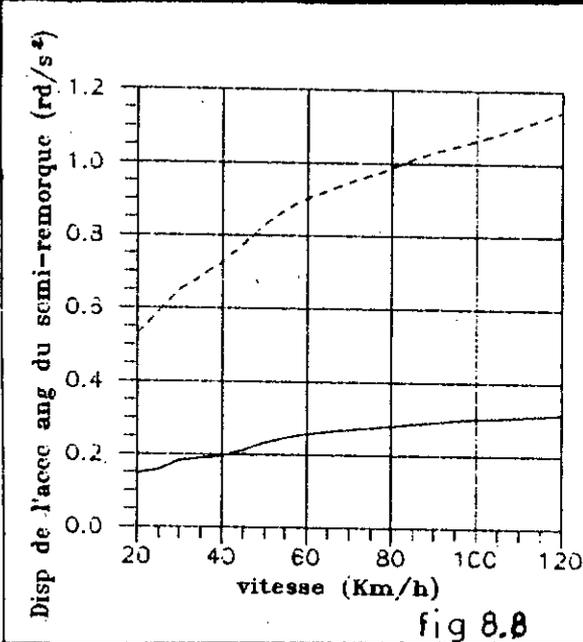
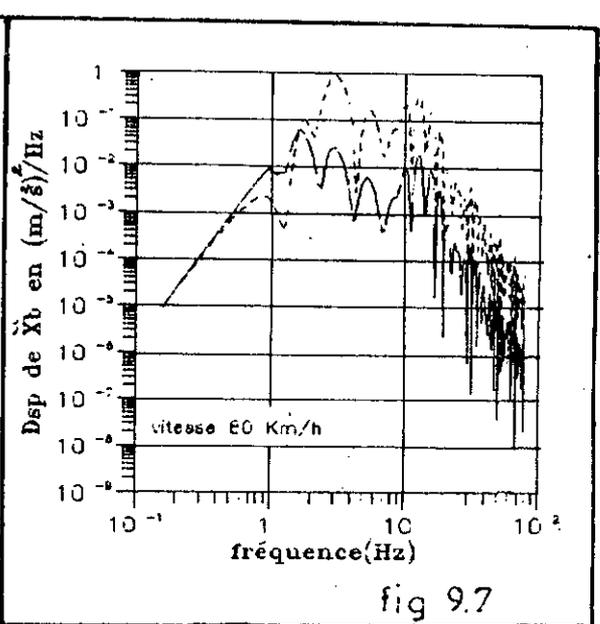
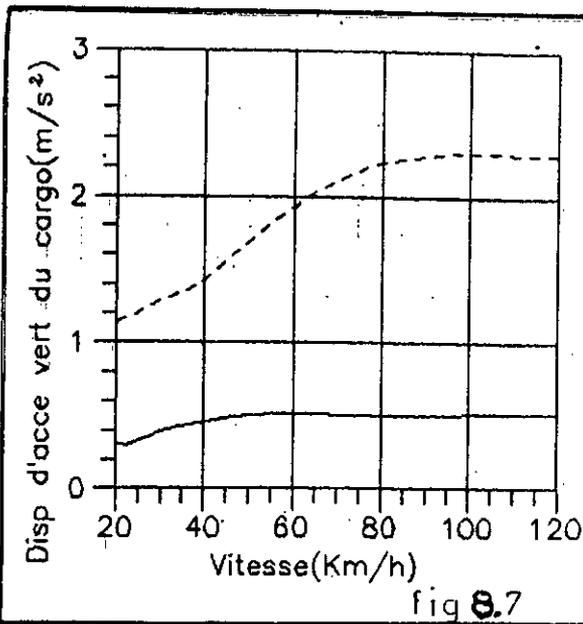


Figure 8. Dispersions en fonction de la vitesse.
Route pavée.
—véhicule en charge. - - -véhicule à vide.

Figure 9. Densités spectrales en fonction de la fréquence.
Route pavée. Vitesse 80 Km/h.
—véhicule en charge. - - -véhicule à vide.

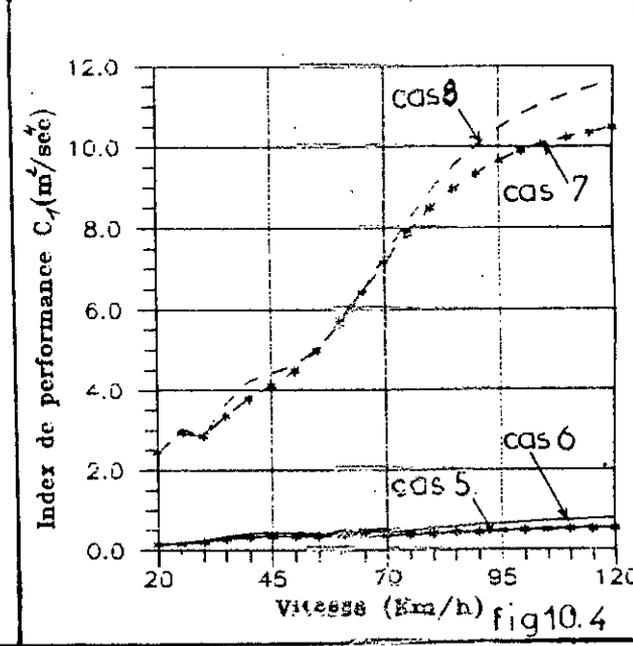
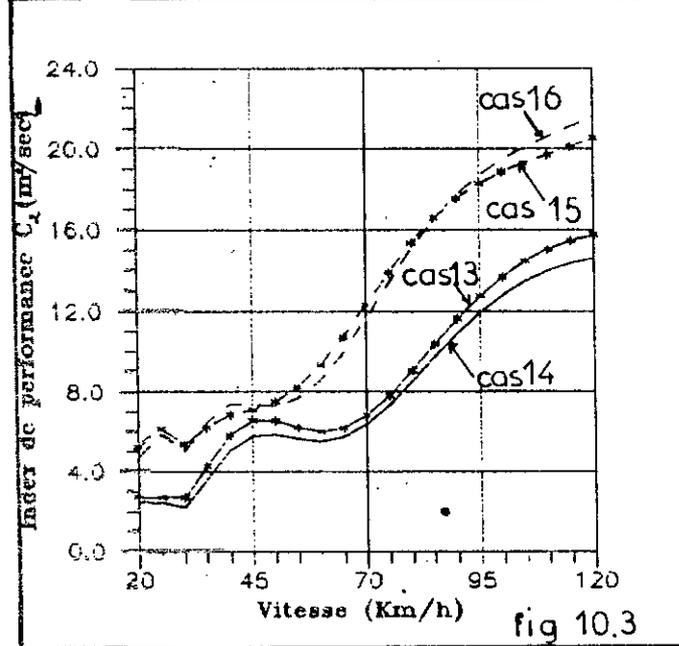
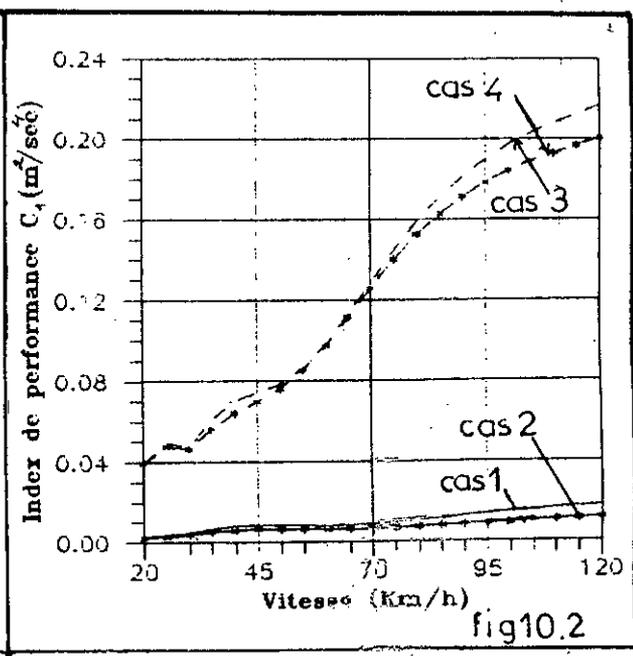
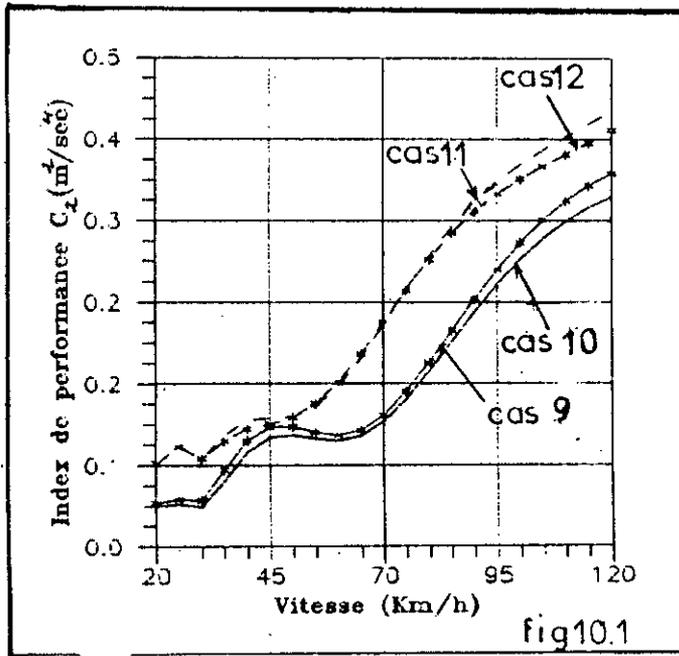


Fig 10 Fonctionnelles en fonction de la vitesse.

----- Véhicule à vide .

----- Véhicule en charge.

V.8-Calcul des fréquences propres de vibration :

Pour avoir une idée, plus complète, sur le comportement vibratoire du système tracteur routier-semi-remorque, il est nécessaire de calculer les différentes fréquences propres de vibration. Ce calcul nous renseigne sur la stabilité relative, les fréquences de résonance... etc.

Les équations de LAGRANGE décrivant la dynamique du système libre non amortie (tracteur-semi-remorque) s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1,8) \quad (V.24)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$M \cdot \ddot{q} + K \cdot q = 0 \quad (V.25)$$

où :

- q est le vecteur des coordonnées généralisées.

$$q = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8)^t \quad (V.26)$$

- M est la matrice de masse, symétrique et définie positive.

$$M = \text{Diag}(m_1, m_2, m_3, m_4, Mb+Mt, M_0, Jt+Mb\bar{b}_1^2, Jb+Mb) \quad (V.27)$$

- K est la matrice de rigidité, symétrique et définie positive.

$$K = \begin{pmatrix} k_{r_1}+k_1 & 0 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & k_1 \cdot b_1 & 0 \\ 0 & k_{r_2}+k_2 & 0 & 0 & -k_2 & 0 & -k_2 \cdot b_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_{r_3}+k/4 & k/4 & -k/2 & 0 & -k_3 \cdot b_3/2 & -k_3(b_4+b_5)/2 \\ 0 & 0 & k/4 & k_{r_3}+k/4 & -k/2 & 0 & -k_3 \cdot b_3/2 & -k_3(b_4+b_5)/2 \\ 0 & 0 & -k/2 & -k/2 & k_1+k_2+k_3+K_0 & -K_0 & k_1 b_1 + k_2 b_2 - k_3 b_3 - K_0 b_4 & k_3(b_4+b_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K_0 & K_0 & K_0 \cdot b_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1^2 b_1^2 + k_2^2 b_2^2 + k_3^2 b_3^2 + K_0^2 b_4^2 + k_3^2 b_3(b_4+b_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_3^2(b_4+b_5)^2 \end{pmatrix}$$

symétrique

Les solutions de (V.25) sont cherchées sous la forme :

$$q = Q \text{Exp}(-\lambda.t) \quad (\text{V.29})$$

qui donne :

$$\lambda^2.M.Q + K.Q = 0 \quad (\text{V.30})$$

ou :

$$(\lambda^2.M + K).Q = 0 \quad (\text{V.31})$$

Pour avoir une solution non triviale Q, il faut que :

$$\det (\lambda^2.M + K) = 0 \quad (\text{V.32})$$

L'équation (V.32) est dite équation caractéristique, ses racines définissent les fréquences propres de vibration du système non amortie

V.8.1-Organigramme de calcul :

Dans le cadre de notre travail, on a choisi la méthode de JACOBI, elle nous permet de calculer les n valeurs propres d'un système à n degrés de liberté ($n < 100$) dont les matrices M et K sont symétriques et définies positives. Cette méthode est décrite en détail dans /7/.

Cette méthode consiste à appliquer aux matrices M et K une série de transformations P_k telle que :

$$\begin{cases} K_1 = K \\ K_{n+1} = P_n^t \cdot K_n \cdot P_n \end{cases} \quad (\text{V.33})$$

et

$$\begin{cases} M_1 = M \\ M_{n+1} = P_n^t \cdot M_n \cdot P_n \end{cases} \quad (\text{V.34})$$

Chaque matrice P_n est choisie de manière à ce qu'un terme (i,j) non diagonal et non nul de K_n et M_n soit nul après la transformation (V.33) (respectivement (V.34)). La matrice P_n a la structure suivante :

$$P_n = \left\{ P_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & ; P_{ij} = a & ; P_{ji} = b \end{cases} \right\} \quad (\text{V.35})$$

Les coefficients a et b sont calculés en écrivant que $K_{ij}^{n+1} = M_{ij}^{n+1} = 0$.

On applique ces transformations successivement à tous les termes non diagonaux et non nuls de M et K et on réitère jusqu'à ce que K et M soient quasi-diagonales.

On applique les transformation P_n tant que :

$$T_n = \frac{K_{ij}^2}{K_{ii} \cdot K_{jj}} > \epsilon$$

et

$$T_n = \frac{M_{ij}^2}{M_{ii} \cdot M_{jj}} > \epsilon$$

(V.36)

où :

ϵ est la précision demandée à l'itération.

Après convergence, on en déduit :

$$W_i^2 = K_{ii}/M_{ii} \quad (\text{valeurs propres}) \quad (V.37)$$

Les fréquences propres sont alors données par :

$$F_i = W_i/2. \quad (V.38)$$

V.8.2-Présentation des résultats :

On calcul ces fréquences successivement pour le cas du véhicule en charge et celui du véhicule à vide.

Les résultats sont présentés sur le tableau suivant :

mode de vibration	véhicule en charge	véhicule à vide
q ₁	12.96 (Hz)	12.98 (Hz)
q ₂	12.88 (Hz)	12.91 (Hz)
q ₃	12.64 (Hz)	12.69 (Hz)
q ₄	12.34 (Hz)	12.45 (Hz)
q ₅	0.61 (Hz)	1.06 (Hz)
q ₆	2.91 (Hz)	2.93 (Hz)
q ₇	2.05 (Hz)	3.77 (Hz)
q ₈	1.41 (Hz)	1.43 (Hz)

V.9 Discussion des résultats :

a-) Modes propres de vibration :

Les résultats présentés dans le tableau précédent, montrent que les fréquences propres de vibration du véhicule à vide sont plus élevées que celles du véhicule en charge. Ceci est dû à la variation du moment d'inertie et de la masse du Semi-remorque.

Les fréquences naturelles calculées, sont dans leur ensemble contenues dans la plage des fréquences de résonance du corps humain / 5 /. Ceci entraîne une réduction du confort et pourrait même altérer la sécurité du chauffeur.

Il est important de noter que , pour une route donnée, c'est la vitesse du véhicule qui provoque la résonance de l'une ou de l'autre des masses vibrantes du système.

b-) Densités spectrales de puissance :

Le modèle choisi inclu huit degrés de liberté. On s'attendait à ce que les courbes des figures 7 et 9 présentent huit pics correspondants aux huit modes propres de vibration du véhicule. Cependant, le fait qu'ils y aient trois contacts entre la route et le véhicule, constituant trois excitations indépendantes, et l'effet du couplage entre les différents degrés de liberté font que ces courbes changent remarquablement, les pics peuvent être atténuer ou déplacer à des fréquences différentes.

En comparant les résultats correspondants aux routes goudronnée et pavée, nous constatons qu'en générale l'allure de la réponse du véhicule se conserve. Néanmoins, le véhicule est plus sensible aux perturbations du microprofil d'une route pavée qu'à celles d'une route goudronnée.

Les figures 7.I et 9.I illustrent la densité spectrale de l'accélération du corps du chauffeur et de son siège. Dans le cas du véhicule en charge, on distingue deux grands pics, le premier au voisinage de 0.7-2 Hz et le second à 10 Hz. En plus la courbe présente une succession de pics correspondants aux fréquences de couplage des différents modes de vibration. Dans le cas du véhicule à vide, la courbe garde une même allure et ne se distingue de celle du véhicule en charge que par le niveau d'intensité, supérieur, de ses pics.

La densité spectrale de puissance du déplacement du corps du chauffeur par rapport au point de fixation de son siège est représentée sur les figures 7.3 et 9.2. Les courbes correspondantes sont semblables à celles des figures 7.1 et 9.1.

La densité spectrale d'accélération angulaire, respectivement verticale, du Semi-remorque est donnée sur les figures 7.7, respectivement 7.8 dans le cas du véhicule roulant sur une route goudronnée et sur les figures 9.8 respectivement 9.7 dans le cas du véhicule roulant sur une route pavée. Les courbes montrent qu'à l'exception du pick autour de 1-2 Hz, les picks d'accélération du véhicule à vide sont plus grands que ceux du véhicule en charge. Aussi, nous constatons que les fréquences associées aux picks du véhicule à vide sont plus grands que ceux du véhicule en charge. Ces résultats sont une conséquence de l'accroissement des fréquences propres de vibration du système lorsque le véhicule est vide.

Les densités spectrales associées aux déplacements des essieux, par rapport au châssis (écartement des suspensions) sont approximativement semblables. A haute fréquence (à partir de 10.5 Hz) les courbes du véhicule en charge et à vide se confondent. Sur chacune de ces courbes, on n'observe qu'un nombre limité de picks, dont les plus en vue sont autour de 1-3 Hz et 10-11 Hz.

c-) Influence de la vitesse (analyse des dispersions) :

Pour évaluer l'influence de la vitesse du véhicule sur la dynamique du système, nous analysons l'effet de la variation, avec la vitesse, des différentes dispersions.

En analysant les courbes de la figure 6.1 (ou 8.1), on peut constater que la dispersion d'accélération du corps du chauffeur est plus intense dans le cas du véhicule à vide que dans le cas du véhicule en charge. Dans les deux cas, la dispersion augmente avec la vitesse, sauf dans l'intervalle 20 - 30 Km/h où nous constatons une légère diminution et ce dans le cas du véhicule en charge. A grande vitesse (100-120 Km/h) cette augmentation devient de moins en moins importante.

La dispersion du déplacement corps du chauffeur/point de fixation du siège est représentée sur les figures 8.2 et 6.3. Dans le cas du véhicule en charge, il y a tout d'abord une diminution de cette dispersion (entre 24 et 40 Km/h) ensuite une augmentation rapide (jusqu'à 80 Km/h)

et enfin une augmentation plus lente à grande vitesse. Jusqu'à 80 Km/h la variation de la dispersion, cas du véhicule à vide, est à l'opposé de celle correspondante au véhicule en charge, de 80 à 120 Km/h l'augmentation est très importante.

La dispersion de l'accélération angulaire (respectivement verticale) du centre de gravité du Semi-remorque est donnée sur la figure 6.7 (respectivement 6.8) dans le cas du véhicule roulant sur une route goudronnée et sur la figure 8.8 (respectivement 8.7) dans le cas du véhicule roulant sur une route pavée. Dans le cas du véhicule en charge, l'accélération angulaire augmente légèrement avec la vitesse alors que dans le cas du véhicule à vide l'augmentation est plus importante. Dans le cas du véhicule en charge l'accélération verticale augmente sensiblement entre 20 et 40 Km/h par la suite elle reste presque constante, alors que dans le cas du véhicule à vide cette accélération augmente rapidement entre 20 et 80 Km/h et reste approximativement constante au delà de cette vitesse.

La variation des dispersions des déplacements essieu/chassi au niveau du Semi-remorque est donnée sur les figures 6.5 et 6.6 dans le cas du véhicule roulant sur une route goudronnée et sur les figures 8.5 et 8.6 dans le cas du véhicule roulant sur une route pavée. Dans les deux cas la variation de ces dispersions est tout d'abord sinusoïdale entre 20 et 60 Km/h ensuite ces dispersions croient rapidement. Que le véhicule soit en charge ou à vide la variation de ces dispersions est la même, sauf que le niveau d'intensité est supérieur dans le second cas et ce pour toute valeur de la vitesse.

La variation des dispersions des déplacements essieu/chassi au niveau du tracteur routier est illustrée sur les figures 6.2 et 6.4 dans le cas du véhicule roulant sur une route goudronnée et sur les figures 8.3 et 8.4 dans le cas du véhicule roulant sur une route pavée. Dans le cas du premier essieu lorsque le véhicule est en charge cette dispersion diminue entre 20 et 40 Km/h et augmente par la suite (route pavée) et goudronnée); jusqu'à environs 60 Km/h la variation de cette dispersion, cas du véhicule à vide, est à l'opposé de celle associée au cas du véhicule en charge.

Dans le cas du second essieu et lorsque le véhicule est en charge, la dispersion augmente fortement entre 20 et 80 Km/h et légèrement par la suite. Dans le cas du véhicule à vide, cette dispersion atteint un maxima

à 40 Km/h puis un minima à environ 70 Km/h et augmente fortement par la suite.

Dans tous ces cas la dispersion correspondante au cas du véhicule à vide est plus grande que celle correspondante au cas du véhicule en charge et-ce pour un intervalle des vitesses assez large.

d-) Analyse des fonctionnelles :

Les fonctionnelles C_1 et C_2 ont été tracées en fonction de la vitesse et-ce pour les différents coefficients de pondération de LAGRANGE déjà choisis. La figure 10 illustre la variation de ces fonctionnelles. Ces fonctionnelles étant des fonctions des dispersions leur variation avec la vitesse est alors prévisible.

Dans le cas du véhicule en mouvement sur une route goudronnée, la fonctionnelle C_1 atteint son minimum lorsque les coefficients de LAGRANGE sont ceux correspondant au cas 2 et son maximum lorsque les coefficients de LAGRANGE sont ceux correspondant au cas 3, alors que la fonctionnelle C_2 atteint son maximum au cas II et son minimum au cas IO.

Pour une vitesse donnée, on peut alors connaître l'intervalle de variation des fonctionnelles C_1 et C_2 lorsque les coefficients de pondération de LAGRANGE varient de 870 à 13643.3 et de 0.635 à 3.75 respectivement.

V.10 Conclusion :

Les résultats présentés dans cette partie une description détaillée du comportement dynamique du véhicule TB 260 soumis à l'influence des irrégularités du microprofil de la route.

Nous avons élaboré un programme FORTRAN qui calcule les différentes dispersions d'un point quelconque du véhicule. Il suffit d'exprimer la position de ce point en fonction des coordonnées généralisées.

Malheureusement, le manque d'expérience pratique ne nous permet pas :

- a-) de juger si oui ou non le niveau de vibration du corps du chauffeur (ou des marchandises) est excessive.
- b-) d'estimer le degré d'influence des différentes dispersions sur la capacité de travail du chauffeur et sur la sécurité des marchandises.

La norme I.S.O présente les limites d'exposition des individus aux vibrations, chocs et secousses sous forme de courbes donnant, pour un temps donné, le niveau d'accélération admissible en fonction de la fréquence.

Il aurait été ingénieux de traduire ces limites en densité spectrale de puissance; dans ce cas l'estimation de la tenue à la route du véhicule ne poserait aucun problème.

Néanmoins le calcul des fréquences naturelles montre que les fréquences de résonance associées aux modes propres de rotation et de translation verticale du tracteur routier et du Semi-remorque sont voisines de la fréquence de résonance du corps humain. Ceci peut altérer la capacité de travail du chauffeur et même sa sécurité.

Cette étude a été d'un grand apport lorsqu'il s'agissait de déterminer l'importance relative entre les différentes dispersions en vue de calculer les coefficients de pondération de LAGRANGE.

Ainsi on a cerné le domaine de variation des fonctionnelles en fonction de ces coefficients .

Si nous voulons faire une vibro-isolation du véhicule (minimiser les fonctionnelles C_1 et C_2), il serait judicieux de considérer les cas limites (cas 2 et cas 3 pour C_1 et cas 10 avec cas 11 pour C_2) des fonctionnelles et ce pour un véhicule roulant sur une route goudronnée.

SYNTHÈSE DES SYSTEMES DE VIBRO-ISOLATION (S.V.I)

En tenant compte respectivement des critères d'optimisation (V.22) et (V.23) et en utilisant la théorie de filtration de WIENER-HOPF, on synthétisera analytiquement les systèmes anti-vibratoires optimaux. On adoptera les hypothèses suivantes :

- Les objets à vibro-isoler sont considérés comme linéaires et discrets
- L'influence du système dynamique (structure à vibro-isoler "S.A.V" et le système de vibro-isolation "S.V.I") sur la source d'excitation est négligée.
- Ils n'existent que les vibrations verticales.
- Les excitations peuvent être considérées comme des processus aléatoires, normaux et ergodiques.

VI.1-Fonctions de transfert :

Les équations décrivant le comportement dynamique du véhicule représenté sur la figure 1, modélisé par le système discret de la figure 4, étant linéaires, on peut écrire :

$$\bar{Z}_i = \sum_{j=1}^4 H_{ij}(p) \cdot \bar{h}_j \quad (i=1,2,3) \quad (VI.1)$$

En faisant la même hypothèse, sur les excitations h_i que celle du paragraphe (IV.2), on peut écrire la relation précédente sous la forme :

$$\bar{Z}_i = H_i(p) \cdot \bar{h}_i \quad (i=1,2,3) \quad (VI.2)$$

où :

H_i est la fonction de transfert à optimiser.

Des relations géométriques (V.1), (V.2) et (V.3) on déduit :

$$\bar{X}_s = \frac{b_2 + b_7}{b_1 + b_2} \bar{Z}_1 + \frac{b_1 - b_7}{b_1 + b_2} \bar{Z}_2 \quad (VI.3)$$

$$\bar{X}_b = \frac{b_5(b_2 - b_3)}{(b_1 + b_2)(b_4 + b_3)} \bar{Z}_1 + \frac{b_5(b_1 + b_3)}{(b_1 + b_2)(b_4 + b_3)} \bar{Z}_2 + \frac{b_4}{b_4 + b_5} \bar{Z}_3 \quad (VI.4)$$

$$\bar{Q}_0 = - \frac{b_2 - b_3}{(b_1 + b_2)(b_4 + b_3)} \bar{Z}_1 - \frac{b_1 + b_3}{(b_1 + b_2)(b_4 + b_3)} \bar{Z}_2 + \frac{1}{b_4 + b_5} \bar{Z}_3 \quad (VI.5)$$

En tenant compte de (VI.2), ces dernières relations deviennent :

$$\bar{X}_s = \frac{(b_2 + b_7) \cdot H_1 + (b_1 - b_7) H_2}{b_1 + b_2} \bar{h}_1 \quad (\text{VI.6})$$

$$\bar{X}_b = \frac{b_5 (b_4 - b_3) H_1 + b_7 (b_1 + b_3) H_2 + b_4 (b_1 + b_2) H_3}{(b_1 + b_2)(b_4 + b_5)} \bar{h}_1 \quad (\text{VI.7})$$

$$\bar{\varphi}_b = \frac{-(b_2 - b_3) H_1 - (b_1 + b_3) H_2 + (b_1 + b_2) H_3}{(b_1 + b_2)(b_4 + b_5)} \bar{h}_1 \quad (\text{VI.8})$$

De là, on exprimera en fonction de \bar{h}_1 :

a-) L'accélération verticale du corps du chauffeur et de son siège :

$$\ddot{X}_c = p^2 \cdot \bar{X}_c = p^2 \cdot H_c(p) \cdot \bar{X}_c$$

où $H_c(p)$ est la fonction de transfert du siège. Elle est donnée par :

$$H_c(p) = \frac{\alpha_c \cdot p + K_c}{M_c \cdot p^2 + \alpha_c p + K_c}$$

Il vient :

$$\ddot{X}_c = p^2 \cdot H_c(p) \cdot \frac{(b_2 + b_7) H_1 + (b_1 - b_7) H_2}{b_1 + b_2} \bar{h}_1$$

Posons :

$$B_1 = p^2 \cdot H_c(p) \begin{bmatrix} \frac{b_2 + b_7}{b_1 + b_2} & \frac{b_1 - b_7}{b_1 + b_2} & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$H = \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{Bmatrix}$$

L'accélération \ddot{X}_c sera alors donnée par :

$$\ddot{X}_c = B_1 \cdot H \cdot \bar{h}_1 \quad (\text{VI.9})$$

b-) Le déplacement du siège par rapport à sa fixation :

$$\bar{X}_c - \bar{X}_s = (H_c(p) - 1) \cdot \bar{X}_s$$

Posons :

$$B_2 = (H_c(p) - 1) \begin{bmatrix} \frac{b_2 + b_7}{b_1 + b_2} & \frac{b_1 - b_7}{b_1 + b_2} & 0 \end{bmatrix}$$

L'équation précédente devient :

$$\bar{X}_0 - \bar{X}_s = B_2 \cdot H \cdot \bar{h}_1 \quad (\text{VI.10})$$

c-) Le déplacement du tracteur par rapport à la route :

c-1) au niveau du pont avant :

$$\bar{Z}_1 - \bar{h}_1 = (H_1 - 1) \cdot \bar{h}_1$$

Posons :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G_1 = -1$$

d'où :

$$\bar{Z}_1 - \bar{h}_1 = (A_1 \cdot H + G_1) \cdot \bar{h}_1 \quad (\text{VI.11})$$

c-2) au niveau du pont arrière :

$$\bar{Z}_2 - \bar{h}_2 = (H_2 - \text{Exp}(-j \cdot \omega \cdot Z_2)) \cdot \bar{h}_1$$

Posons :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G_2 = -\text{Exp}(-j \cdot \omega \cdot Z_2)$$

d'où :

$$\bar{Z}_2 - \bar{h}_2 = (A_2 \cdot H + G_2) \cdot \bar{h}_1 \quad (\text{VI.12})$$

d-) L'accélération verticale du centre de gravité du semi-remorque :

$$\bar{X}_b = p^2 \cdot \bar{X}_b$$

ou bien :

$$\bar{X}_b = B_3 \cdot \bar{h}_1 \quad (\text{VI.13})$$

avec :

$$B_3 = p^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{b_5(b_2 - b_3)}{(b_1 + b_2)(b_4 + b_5)} & \frac{b_3(b_1 + b_3)}{(b_1 + b_2)(b_4 + b_5)} & \frac{b_4}{b_4 + b_5} \end{bmatrix}$$

e-) L'accélération angulaire du centre de gravité du semi-remorque :

$$\bar{\varphi}_6 = p^2 \cdot \bar{\varphi}_6$$

ou bien :

$$\bar{\varphi}_6 = B_4 \cdot H \cdot \bar{h}_1 \quad (\text{VI.14})$$

avec :

$$B_4 = p^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{b_2 - b_2}{(b_1 + b_2)(b_4 + b_5)} & \frac{-(b_1 + b_3)}{(b_1 + b_2)(b_4 + b_5)} & \frac{1}{b_4 + b_5} \end{bmatrix}$$

f-) Le déplacement du semi-remorque par rapport à la route :

f-1) au niveau du 1er essieu :

$$\bar{Z}_3 - \bar{h}_3 = (H_3 - \text{Exp}(-j \cdot \omega \cdot Z_3)) \cdot \bar{h}_1$$

Posons :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G_3 = -\text{Exp}(-j \cdot \omega \cdot Z_3)$$

L'équation précédente devient :

$$\bar{Z}_3 - \bar{h}_3 = (A_3 \cdot H + G_3) \cdot \bar{h}_3 \quad (\text{VI.15})$$

f-2) au niveau du 2eme essieu :

$$\bar{Z}_3 - \bar{h}_4 = (A_4 \cdot \text{Exp}(-j \cdot \omega \cdot Z_4)) \cdot \bar{h}_4$$

Posons :

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G_4 = -\text{Exp}(-j \cdot \omega \cdot Z_4)$$

L'équation précédente devient :

$$\bar{Z}_3 - \bar{h}_4 = (A_4 \cdot H + G_4) \cdot \bar{h}_4 \quad (\text{VI.16})$$

VI.2-Expression des densités spectrales :

Sachant (1.28) et en considérons les relations précédentes, nous pouvons déduire les différentes densités spectrales.

$$\begin{aligned} S_{x_2} &= (B_1 \cdot H) \cdot S_{h_1} \cdot (B_1 \cdot H)^* = B_1 \cdot H \cdot S_{h_1} \cdot H^* \cdot B_1^* \\ S_{x_2-x_3} &= (B_2 \cdot H) \cdot S_{h_2} \cdot (B_2 \cdot H)^* = B_2 \cdot H \cdot S_{h_2} \cdot H^* \cdot B_2^* \\ S_{x_3} &= (B_3 \cdot H) \cdot S_{h_3} \cdot (B_3 \cdot H)^* = B_3 \cdot H \cdot S_{h_3} \cdot H^* \cdot B_3^* \\ S_{x_4} &= (B_4 \cdot H) \cdot S_{h_4} \cdot (B_4 \cdot H)^* = B_4 \cdot H \cdot S_{h_4} \cdot H^* \cdot B_4^* \\ S_{x_1-h_1} &= (A_1 H + G_1) \cdot S_{h_1} \cdot (A_1 H + G_1)^* = (A_1 H + G_1) \cdot B_{h_1}^* \cdot (H^* A_1^* + G_1^*) \\ S_{x_2-h_2} &= (A_2 H + G_2) \cdot S_{h_2} \cdot (A_2 H + G_2)^* = (A_2 H + G_2) \cdot S_{h_2} \cdot (H^* A_2^* + G_2^*) \\ S_{x_3-h_3} &= (A_3 H + G_3) \cdot S_{h_3} \cdot (A_3 H + G_3)^* = (A_3 H + G_3) \cdot S_{h_3} \cdot (H^* A_3^* + G_3^*) \\ S_{x_4-h_4} &= (A_4 H + G_4) \cdot S_{h_4} \cdot (A_4 H + G_4)^* = (A_4 H + G_4) \cdot S_{h_4} \cdot (H^* A_4^* + G_4^*) \end{aligned}$$

NB: La notation $()^*$ signifie le conjugué de la transposée de $()$. Soit :

$$X^*(p) = X^T(-p)$$

On exprimera les dispersions de chacune des grandeurs considérées de la même manière qu'au paragraphe V.5.2 .

VI.3-Expressions des fonctionnelles :

VI.3.1-Critère de confort et de sécurité du chauffeur :

En exprimant les différentes dispersions en fonction des densités

correspondantes et en les injectant dans l'équation (V.22), l'expression de la fonctionnelle C_1 devient :

$$C_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ B_1 H_1 S_{h_1} H_1^* B_1^* + \lambda_1 B_2 H_1 S_{h_1} H_1^* B_2^* + \lambda_2 (A_1 H_1 + G_1) S_{h_1} (H_1^* A_1^* + G_1^*) + \lambda_3 (A_2 H_1 + G_2) S_{h_1} \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} (H_1^* A_2^* + G_2^*) + \lambda_4 (A_3 H_1 + G_3) S_{h_1} (H_1^* A_3^* + G_3^*) + \lambda_5 (A_4 H_1 + G_4) S_{h_1} (H_1^* A_4^* + G_4^*) \right\} dp$$

VI.3.2-Critère de sécurité des marchandises :

De la même façon nous obtenons :

$$C_2 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ B_3 H_2 S_{h_2} H_2^* B_3^* + \beta_1 B_4 H_2 S_{h_2} H_2^* B_4^* + \beta_2 (A_1 H_2 + G_2) S_{h_2} (H_2^* A_1^* + G_2^*) + \beta_3 (A_2 H_2 + G_2) \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} S_{h_2} (H_2^* A_2^* + G_2^*) + \beta_4 (A_3 H_2 + G_3) S_{h_2} (H_2^* A_3^* + G_3^*) + \beta_5 (A_4 H_2 + G_4) S_{h_2} (H_2^* A_4^* + G_4^*) \right\} dp$$

VI.4-Formulation mathématique du problème de filtration de Wiener-Hopf :

Soient les fonctions de transfert définies par :

$$\hat{H}_i(p) = H_i(p) + \varepsilon \eta_i(p) \quad (i=1,3) \quad (VI.17)$$

où : - η_i . fonction de balance.

- ε . paramètre constant.

- $\hat{H}_i(p)$. fonction de transfert optimale pour laquelle la fonctionnelle C est minimale.

Considérons la fonctionnelle C^* obtenue en remplaçant les H_i ($i=1,3$) par $\hat{H}_i(p)$ ($i=1,3$) dans C . La différence entre C^* et C constitue l'erreur notée :

$$\Delta C = C^* - C \quad (VI.18)$$

Identifier H_i à \hat{H}_i revient à avoir l'erreur ΔC minimale pour $\varepsilon=0$. Ce qui se traduit par :

$$\left. \frac{d(\Delta C)}{d \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (VI.19)$$

ou simplement par :

$$\left. \frac{d C^*}{d \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (VI.20)$$

VI.4.1-Optimisation selon le critère de confort du chauffeur :

Dans ce cas $C = C_1$. La dérivée et l'intégration étant des opérations linéaires, la dérivée $\left. \frac{dC_1^*}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$ est égale à la somme des dérivées des termes sous intégrale.

En posant $\eta = (\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3)^t$, ces dérivées s'expriment alors :

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (B_1 \hat{H} S_{h_1} \hat{H}^* B_1^*) \right|_{\varepsilon=0} = B_1 \eta S_{h_1} H^* B_1^* + B_1 H S_{h_1} \eta^* B_1^*$$

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (B_2 \hat{H} S_{h_1} \hat{H}^* B_2^*) \right|_{\varepsilon=0} = B_2 \eta S_{h_1} H^* B_2^* + B_2 H S_{h_1} \eta^* B_2^*$$

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ (A_1 \hat{H} + G_1) S_{h_1} (\hat{H}^* A_1^* + G_1^*) \right\} \right|_{\varepsilon=0} = A_1 \eta S_{h_1} H^* A_1^* + A_1 H S_{h_1} \eta^* A_1^* + A_1 \eta S_{h_1} G_1^* + G_1 S_{h_1} \eta^* A_1^*$$

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ (A_2 \hat{H} + G_2) S_{h_2} (\hat{H}^* A_2^* + G_2^*) \right\} \right|_{\varepsilon=0} = A_2 \eta S_{h_2} H^* A_2^* + A_2 H S_{h_2} \eta^* A_2^* + A_2 \eta S_{h_2} G_2^* + G_2 S_{h_2} \eta^* A_2^*$$

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ (A_3 \hat{H} + G_3) S_{h_3} (\hat{H}^* A_3^* + G_3^*) \right\} \right|_{\varepsilon=0} = A_3 \eta S_{h_3} H^* A_3^* + A_3 H S_{h_3} \eta^* A_3^* + A_3 \eta S_{h_3} G_3^* + G_3 S_{h_3} \eta^* A_3^*$$

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ (A_4 \hat{H} + G_4) S_{h_4} (\hat{H}^* A_4^* + G_4^*) \right\} \right|_{\varepsilon=0} = A_4 \eta S_{h_4} H^* A_4^* + A_4 H S_{h_4} \eta^* A_4^* + A_4 \eta S_{h_4} G_4^* + G_4 S_{h_4} \eta^* A_4^*$$

Ainsi (VI.20) devient :

$$\begin{aligned} \text{CO} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left\{ \right. & B_1 \eta S_{h_1} H^* B_1^* + \lambda_1 B_2 \eta S_{h_2} H^* B_2^* + \lambda_2 A_1 \eta S_{h_1} H^* A_1^* + \lambda_3 A_2 \eta S_{h_2} H^* A_2^* + \lambda_4 A_3 \eta S_{h_3} H^* A_3^* \\ & + \lambda_5 A_4 \eta S_{h_4} H^* A_4^* + \lambda_2 A_1 \eta S_{h_1} G_1^* + \lambda_3 A_2 \eta S_{h_2} G_2^* + \lambda_4 A_3 \eta S_{h_3} G_3^* + \lambda_5 A_4 \eta S_{h_4} G_4^* + \\ & + B_1 H S_{h_1} \eta^* B_1^* + \lambda_1 B_2 H S_{h_2} \eta^* B_2^* + \lambda_2 A_1 H S_{h_1} \eta^* A_1^* + \lambda_3 A_2 H S_{h_2} \eta^* A_2^* + \lambda_4 A_3 H S_{h_3} \eta^* A_3^* + \lambda_5 A_4 H S_{h_4} \eta^* A_4^* \\ & \left. + \lambda_2 G_1 S_{h_1} \eta^* A_1^* + \lambda_3 G_2 S_{h_2} \eta^* A_2^* + \lambda_4 G_3 S_{h_3} \eta^* A_3^* + \lambda_5 G_4 S_{h_4} \eta^* A_4^* \right\} \end{aligned}$$

Pour que cette égalité soit vérifiée, il faut et il suffit que les coefficients de η_i ($i=1,3$) soient tous nuls, c'est à dire / 6 / :

$$(B_1 B_1 + \lambda_1 B_2 B_2 + \lambda_2 A_1 A_1 + \lambda_3 A_2 A_2 + \lambda_4 A_3 A_3 + \lambda_5 A_4 A_4) H S_{h_1} + (\lambda_1 A_1 G_1 + \lambda_3 A_2 G_2 + \lambda_4 A_3 G_3 + \lambda_5 A_4 G_4) S_{h_1} = 0$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme compacte suivante :

$$D_1(p) \cdot H(p) \cdot S_{h_1} - N_1(p) \cdot S_{h_1} = 0 \quad (\text{VI.21})$$

avec :

$$D_1(p) = B_1 B_1 + \lambda_2 A_1 A_1 + \lambda_3 A_2 A_2 + \lambda_4 A_3 A_3 + \lambda_5 A_4 A_4 + \lambda_1 B_2 B_2$$

$$-N_1(p) = \lambda_2 A_1 G_1 + \lambda_3 A_2 G_2 + \lambda_4 A_3 G_3 + \lambda_5 A_4 G_4$$

Explicitement, ces matrices sont données par:

$$D_1(p) = \begin{pmatrix} \frac{(b_1+b_2)^2 (-\alpha^2 p^2 + Kc + \lambda_1 Mc)}{(b_1+b_2)^2 (Mcp + \alpha p + Kc)(Mp - \alpha p + Kc)} p^4 + \lambda_1 & \frac{(b_1-b_2)(b_1+b_2)(-\alpha p + Kc + \lambda_1 Mc)}{(b_1+b_2)^2 (Mcp + \alpha p + Kc)(Mp - \alpha p + Kc)} p^4 & 0 \\ \frac{(b_1-b_2)(b_1+b_2)(-\alpha p + Kc + \lambda_1 Mc)}{(b_1+b_2)^2 (Mcp + \alpha p + Kc)(Mp - \alpha p + Kc)} p^4 & \frac{(b_1-b_2)^2 (-\alpha p + Kc + \lambda_1 Mc)}{(b_1+b_2)^2 (Mcp + \alpha p + Kc)(Mp - \alpha p + Kc)} p^4 + \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 + \lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$N_1(p) = \begin{pmatrix} \lambda_2 \text{Exp}(-p \cdot \frac{z_2}{12}) \\ \lambda_4 \text{Exp}(-p \cdot \frac{z_4}{13}) + \lambda_5 \text{Exp}(-p \cdot \frac{z_4}{14}) \end{pmatrix}$$

VI.4.2-Optimisation suivant le critère de sécurité des marchandises :

Dans ce cas $C = C_2$. De la même façon, on aboutira à l'équation matricielle :

$$D_2(p) \cdot H(p) \cdot S_{h_2} - N_2(p) \cdot S_{h_2} = 0 \quad (\text{VI.22})$$

avec :

$$D_2(p) = B_3^* B_3 + \beta_1 B_4^* B_4 + \beta_2 A_2^* A_2 + \beta_2 A_1^* A_1 + \beta_4 A_3^* A_3 + \beta_5 A_4^* A_4$$

$$N_2(p) = \beta_2 A_1^* G_1 + \beta_3 A_2^* G_2 + \beta_4 A_3^* G_3 + \beta_5 A_4^* G_4$$

ou encore, plus en détail :

$$D_2(p) = \left[\frac{b_3^2 (b_1 - b_3)^2 + \beta_1 (b_3 - b_2)^2}{(b_4 + b_3)^2 (b_1 + b_2)^2} p^4 + \beta_2 \frac{(b_2 + b_4)(b_1 + b_3)(b_5^2 + \beta_2)}{(b_1 + b_2)(b_4 + b_5)^2} p^4 - \frac{(b_4 b_5 - \beta_1)(b_2 - b_1)}{(b_1 + b_2)(b_4 + b_5)^2} p^4 \right.$$

$$\left. \frac{(b_2 - b_4)(b_1 + b_3)(b_5^2 + \beta_2)}{(b_1 + b_2)^2 (b_4 + b_5)^2} p^4 - \frac{(b_5^2 + \beta_1)(b_1 + b_3)}{(b_1 + b_2)^2 (b_4 + b_5)^2} p^4 + \beta_3 \frac{(b_4 b_5 - \beta_1)(b_1 + b_3)}{(b_4 + b_5)^2 (b_1 + b_2)} p^4 \right.$$

$$\left. \frac{(b_4 b_5 - \beta_1)(b_2 - b_1)}{(b_1 + b_2)(b_4 + b_5)^2} p^4 - \frac{(b_4 b_5 - \beta_1)(b_1 + b_3)}{(b_4 + b_5)^2 (b_1 + b_2)} p^4 - \frac{\beta_4 + b_4^2}{(b_4 + b_5)^2} p^4 + \beta_4 + \beta_5 \right]$$

$$N_2(p) = \left[\begin{array}{l} +\beta_2 \\ \beta_3 \text{Exp}(-p\omega_{12}) \\ \beta_4 \text{Exp}(-p\omega_{13}) + \beta_5 \text{Exp}(-p\omega_{14}) \end{array} \right]$$

VI.5-Détermination des "S.V.I" optimas :

Si on résout le système (VI.21)(ou (VI.22)), on obtiendra H_1, H_2 et H_3 optimums mais irréalisables physiquement. Pour cela on prévoit trois fonctions notées $\bar{\phi}_1(p), \bar{\phi}_2(p)$ et $\bar{\phi}_3(p)$ qui ont leurs pôles dans le demi-plan droit du plan complexe, afin que H_1, H_2 et H_3 soient stables et réalisables. Dans ce cas, chacune des fonctions H_i sera notée H_i^+ .

En posant $\Phi = \{\Phi_i\}_{i=1}^l$, les systèmes d'équations tels que (VI.21) et (VI.22) s'écrivent :

$$D(p) \cdot H^+(p) \cdot S_{h_1}(p) - N(p) \cdot S_{h_1}(p) - \Phi(p) = 0 \quad (\text{VI.23})$$

Pour résoudre (VI.23) par la technique de Wiener-Hopf, il suffit :

a-) de factoriser $D(p)$ sous la forme :

$$D(p) = K^T(-p) \cdot K(p) \quad (\text{VI.24})$$

où :

B1- $K(p)$ est une matrice rationnelle et analytique, avec son inverse, dans le demi-plan de droite $(\text{Re}(p) > -\mu)$, avec $\mu > 0$

B2- $K(p)$ est réelle, c'est à dire :

$$\overline{K(p)} = K(\bar{p})$$

b-) de factoriser $S_{h_1}(p)$ sous la forme :

$$S_{h_1}(p) = \beta_{h_1}(p) \cdot \Delta_{h_1}(-p) \quad (\text{VI.25})$$

En injectant (VI.24) et (VI.25) dans (VI.23), nous obtenons :

$$K(p) \cdot H^+(p) \cdot \beta_{h_1}(p) = \left[K^T(-p) \right]^{-1} \cdot N(p) \cdot \Delta_{h_1}(p) + \Phi_1(p) \quad (\text{VI.26})$$

avec :

$$\Phi_1(p) = \left[K^T(-p) \right]^{-1} \cdot N(p) \cdot \left[\Delta_{h_1}(p) \right]^{-1}$$

$\Phi_1(p)$ est analytique dans le demi-plan gauche ouvert .

Posons :

$$\psi(p) = \left[K^T(-p) \right]^{-1} \cdot N(p) \cdot \beta_{h_1}(p) \quad (\text{VI.27})$$

avec :

$$\psi(p) = \psi^+(p) + \psi^-(p) \quad (\text{VI.28})$$

où: $\psi^+(p)$ - une matrice analytique dans le demi-plan $\text{Re}(p) \geq 0$.

$\psi^-(p)$ - une matrice analytique dans le demi-plan $\text{Re}(p) < 0$.

L'équation (VI.26) devient alors :

$$K(p) \cdot H^+(p) \cdot \beta_{h_1}(p) - \psi^+(p) = \psi^-(p) + \Phi_1(p) \quad (\text{VI.29})$$

Il est facile de constater que le terme de droite est analytique

dans le demi-plan gauche ($\text{Re}(p) < 0$), alors que le terme de droite est analytique dans le demi-plan de droite ($\text{Re}(p) \geq 0$).

L'égalité (VI.29) n'est donc satisfaite, pour toute valeur de p , que si chacun de ses deux membres est analytique dans le plan p tout entier. On peut alors écrire :

$$K(p) \cdot H^+(p) \cdot \Delta_{h_1}(p) - \psi^+(p) = M(p) \quad (\text{VI.30})$$

où :

$-M(p)$ est une matrice analytique dans tout le plan complexe, sauf sur l'axe réel et à l'infini où elle peut avoir des pôles d'ordre fini.

Finalement, les fonctions de transfert optimales, stables et réalisables physiquement sont données par :

$$H^+(p) = [K(p)]^{-1} (M(p) + \psi^+(p)) \cdot [\Delta_{h_1}(p)]^{-1} \quad (\text{VI.31})$$

Dans ce qui suit, on prendra $M(p) = 0$. En effet, on pourra toujours choisir $\psi^+(p)$ de sorte que $M(p)$ soit une matrice identiquement nulle. On aura ainsi :

$$H^+(p) = [K(p)]^{-1} \psi^+(p) [\Delta_{h_1}(p)]^{-1} \quad (\text{VI.32})$$

VI.5.1 - Algorithme de factorisation spectrale des matrices rationnelles :

Nous allons utiliser un algorithme de factorisation des matrices rationnelles pour effectuer les décompositions telles que (VI.24).

Au préalable, en considérant la densité spectrale $S_{h_1}(w)$ donnée par (IV.3) et en remplaçant w par $p = j \cdot w$, on déduit facilement de (VI.25) :

$$\Delta_{h_1}(p) = \sigma \sqrt{\frac{\alpha v}{\pi}} \frac{1}{\alpha v + p} \quad (p = j \cdot w) \quad (\text{VI.33})$$

Plusieurs techniques permettant d'effectuer une factorisation spectrale des matrices rationnelles, telle décrite par (VI.24).

L'algorithme que nous utilisons ramène le problème de factorisation à

celui de la résolution d'un système d'équations non linéaires dit de RICCATI.

D'après /8/, étant donnée une matrice d'ordre $r \times r$ qui vérifie les Propriétés :

1- $D(p)$ est réelle, o.à.d $\overline{D(p)} = D(\bar{p})$

2- $D(p)$ est para-hermitienne, c.à.d : $D^T(-p) = D(p)$

3- $D(j.w)$ est définie semi-positive pour toute valeur finie $(j.w)$.

4- $D(p)$ est de rang normal r

Il existe une matrice $K(p)$ qui vérifie les propriétés B1 et B2.

D'autre part, toute matrice rationnelle peut être écrite sous la forme :

$$D(p) = \frac{\tilde{D}(p)}{d(p)} \quad (VI.34)$$

où : $\tilde{D}(p)$ et $d(p)$ sont respectivement matrice et scalaire polynomiales.

Posons :

$$\tilde{D}(p) = \tilde{K}^T(-p) \cdot \tilde{K}(p) \quad (VI.35)$$

et

$$d(p) = k(-p) \cdot k(p) \quad (VI.36)$$

$K(p)$ et $k(p)$ ont leurs pôles dans le demi-plan gauche.

De (VI.24), (VI.34), (VI.35) et (VI.36) nous pouvons déduire :

$$K(p) = \frac{\tilde{K}(p)}{k(p)} \quad (VI.37)$$

Dans ce qui suit on s'intéressera à l'algorithme de factorisation de la matrice polynomiale $\tilde{D}(p)$ vérifiant les conditions A1, A2, A3 et A4. $\tilde{D}(p)$ peut être présenter sous la forme :

$$\tilde{D}(p) = \left[\sum_{k=0}^m \tilde{d}_{ijk} \cdot p^k \right]_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\substack{i=r \\ j=r}} \quad (VI.38)$$

La solution du problème " $\tilde{K}(p)$ " vérifiant B1 et B2, peut être présenter sous la forme :

$$\tilde{K}(p) = \left[\sum_{k=0}^n \tilde{k}_{ijk} \cdot p^k \right]_{\substack{i=1+r \\ j=1+r}}^{\substack{i=1+r \\ j=1+r}} \quad (n=m/2) \quad (VI.39)$$

La matrice $\tilde{D}(p)$ étant semi-positive, la plus grande puissance de

p qui apparait dans le i, j ^{ème} élément de $\tilde{D}(p)$ est $(m_i + m_j)$ où m_i respectivement m_j sont les plus haut degrés de p dans les éléments diagonaux i, i respectivement j, j . Ainsi, on peut écrire :

$$\tilde{D}_{ij}(p) = \sum_{k=0}^{m_i+m_j} \tilde{d}_{ijk} \cdot p^k \quad (VI.40)$$

Remplaçant la variable p par la variable discrète Z , moyennant la transformation paire :

$$p = \frac{Z-1}{Z+1} \quad (VI.41)$$

Substituant p par Z dans (VI.40) et divisons par Z^{m_j} .

$$\tilde{D}_{ij}(p) = \frac{1}{(Z+1)^{m_i}} \left\{ \sum_{k=0}^{m_i+m_j} \tilde{d}_{ijk} (Z-1)^k (Z+1)^{m_i+m_j-k} \cdot Z^{-m_j} \right\} \frac{1}{(Z+1)^{m_j}} \quad (VI.42)$$

Posons :

$$\tilde{D}_{ij}(p) = \frac{1}{(1+Z)^{m_i}} \left\{ \sum_{k=-m_i}^{m_j} C_{ijk} Z^{-k} \right\} \frac{1}{(Z^{-1}+1)^{m_j}} \quad (VI.43)$$

La quantité entre parenthèses représente le i, j ^{ème} élément d'une matrice C qui vérifie les propriétés suivantes /8/ :

1- C ; $1-C(Z)$ est réelle.

2- $C(Z)$ est para-hermitienne, o.à.d : $C^T(Z^{-1}) = C(Z)$

3- $C(Z)$ (où $Z = \text{Exp}(j \cdot \theta)$) est définie semi-positive pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$

4- La matrice $[c_{ij\theta}]$ est définie semi-positive.

5- $C(Z)$ est de rang normale r

D'après /8/, $C(Z)$ peut à son tour avoir une factorisation :

$$C(Z) = B^T (1/Z) \cdot B(Z) \quad (VI.44)$$

où :

$$B(Z) = \sum_{k=0}^{m_j} b_{ijk} \cdot Z^{-k} \quad (VI.45)$$

$B(Z)$ dite matrice facteur est de rang r et a ses racines à l'intérieur ou sur le cercle unité. D'après (VI.43) et (VI.44), on déduit :

$$\tilde{D} \begin{pmatrix} Z-1 \\ Z+1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (1+Z)^{m_1} & & & \\ & \bigcirc & & \\ & & (1+Z)^{m_2} & \\ & & & \ddots \\ & & & & (1+Z)^{m_r} \end{bmatrix} B^T \left(\frac{1}{Z} \right) \cdot B(Z) \begin{bmatrix} (1+Z^{-1})^{m_1} & & & \\ & \bigcirc & & \\ & & (1+Z^{-1})^{m_2} & \\ & & & \ddots \\ & & & & (1+Z^{-1})^{m_r} \end{bmatrix}$$

A partir de (VI.35) et de ce qui précède, on déduit :

$$\tilde{K} \begin{pmatrix} Z-1 \\ Z+1 \end{pmatrix} = B(Z) \begin{bmatrix} (1+Z^{-1})^{m_1} & & & \\ & \bigcirc & & \\ & & (1+Z^{-1})^{m_2} & \\ & & & \ddots \\ & & & & (1+Z^{-1})^{m_r} \end{bmatrix} \quad (VI.46)$$

ou bien :

$$\tilde{K}_{ij}(p) = \frac{1}{2^{m_j}} \sum_{k=0}^{m_j} b_{ijk} (1-s)^k (1+s)^{m_j-k} \quad (VI.47)$$

Le problème de factorisation revient à celui de la détermination des éléments de la matrice facteur B(Z).

Posons :

$$M = \sum_{i=1}^r m_i \quad (VI.48)$$

$$c_{ij}^T = [c_{ijm_j} \quad c_{ijm_j-1} \quad c_{ijm_j-2} \quad \dots \quad c_{ij1}] \quad (VI.49)$$

$$p_i^T = [Z^{-m_i} \quad Z^{-(m_i-1)} \quad Z^{-(m_i-2)} \quad \dots \quad Z^{-1}] \quad (i=1, 2, \dots, r) \quad (VI.50)$$

$$P(Z) = \begin{bmatrix} p_1(Z) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2(Z) & & \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & p_r(Z) \end{bmatrix} \quad \text{d'ordre } M \times r \quad (VI.51)$$

$$Q_{22} = \begin{pmatrix} C_{21} & C_{21} & \theta_{21} & \dots & C_{r1} \\ C_{22} & C_{22} & C_{22} & \dots & C_{r2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{2r} & C_{2r} & \theta_{2r} & \dots & C_{rr} \end{pmatrix}$$

d'ordre $m \times r$ (VI.52)

$$Q_{22} = \begin{pmatrix} C_{210} & C_{210} & \dots & C_{r10} \\ C_{220} & C_{220} & \dots & C_{r20} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{2r0} & C_{2r0} & \dots & C_{rr0} \end{pmatrix}$$

d'ordre $r \times r$ (VI.53)

$$Z_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

d'ordre $m_i \times m_i$ ($i=1, r$) (VI.54)

$$e_i^r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

d'ordre $1 \times m_i$ ($i=1, r$) (VI.55)

$$A_{11} = \begin{pmatrix} Z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z & \dots & 0 \\ 0 & 0 & Z & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & Z \end{pmatrix}$$

d'ordre $M \times M$ (VI.56)

$$A_{22} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & 0 \\ 0 & e_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & e_r \end{pmatrix}$$

d'ordre $M \times r$ (VI.57)

Il a été prouvé /B/ que :

$$G(Z) = Q_{22} + Q_{21}^T \cdot P(Z) + P^T(I/Z) \cdot Q_{12} \quad (VI.58)$$

La matrice $B(z)$ définie par (VI.44) peut alors s'écrire :

$$B(Z) = W_2^T + W_1^T \cdot P(Z) \quad (VI.59)$$

où :

- W_2 est une matrice triangulaire, définie positive d'ordre $(r \times r)$

- W_1 est une matrice d'ordre $(M \times r)$.

W_1 et W_2 sont obtenues à partir des équations :

$$W_2 \cdot W_2^T = X_{22} \quad (VI.60)$$

$$W_1 \cdot W_2^T = X_{12} \quad (VI.61)$$

où X_{12} et X_{22} sont des matrices qui satisfont le système d'équations :

$$X_{12}^{(k+1)} = Q_{12} + A_{11}^T \cdot Y^{(k)} \cdot A_{12} ; \quad X_{12}^{(0)} = Q_{12} \quad (VI.62)$$

$$X_{22}^{(k+1)} = Q_{22} + A_{22}^T \cdot Y^{(k)} \cdot A_{22} ; \quad X_{22}^{(0)} = Q_{22} \quad (VI.63)$$

$$X_{11}^{(k+1)} = A_{11}^T \cdot Y^{(k)} \cdot A_{11} ; \quad X_{11}^{(0)} = 0 \quad (VI.64)$$

$$Y^{(k)} = X_{11}^{(k)} - X_{12}^{(k)} \cdot X_{22}^{-1}(k) \cdot X_{21}^T(k) \quad (VI.65)$$

La résolution de ce système nous permet de déterminer X_{12} et X_{22} par la suite, W_1 et W_2 . Ainsi, on pourra calculer les coefficients b_{ijk} de la matrice $B(Z)$ à partir de (VI.59) et enfin aboutir aux coefficients \tilde{k}_{ijk} du polynôme $\tilde{K}_{ij}(p)$.

Application à la factorisation des matrices $D_1(p)$ et $D_2(p)$:

Cette algorithm est utilisé pour effectuer la factorisation spectrale des matrices $D_1(p)$ et $D_2(p)$.

a-) Cas de la matrice $D_1(p)$:

Dans ce cas :

$$d_1(p) = (b_1 + b_2)^2 (Mc \cdot p + \alpha_c)(Mc \cdot p + \alpha_c)$$

La matrice polynomiale associée à $D_1(p)$ est alors donnée par les coefficients de ses éléments \tilde{d}_{ijk} suivants :

$$\tilde{d}_{110} = \lambda_2 K \bar{C} \cdot (b_1 + b_2)^2$$

$$\tilde{d}_{112} = \lambda_2 (2 \cdot Mc \cdot Kc - \alpha_c^2) (b_1 + b_2)^2$$

$$\tilde{d}_{114} = \lambda_2 K \bar{C} \cdot (b_1 + b_2)^2 + (K \bar{C} + \lambda_1 M \bar{C}) (b_2 + b_7)^2$$

$$\tilde{d}_{116} = -\alpha_c^2 (b_2 + b_7)^2$$

$$\tilde{d}_{124} = (b_1 - b_7) (b_2 + b_7) (K \bar{C} + \lambda_1 M \bar{C})$$

$$\tilde{d}_{126} = -(b_1 - b_7) (b_2 + b_7) \cdot \alpha_c^2$$

$$\tilde{d}_{220} = \lambda_3 K \bar{C} \cdot (b_1 + b_2)^2$$

$$\tilde{d}_{224} = \lambda_3 M \bar{C} \cdot (b_1 + b_2)^2 + (K \bar{C} + \lambda_1 M \bar{C}) (b_1 - b_7)^2$$

$$\tilde{d}_{222} = \lambda_3 (2 \cdot Mc \cdot Kc - \alpha_c^2) (b_1 + b_2)^2$$

$$\tilde{d}_{226} = -\alpha_c^2 (b_1 - b_7)^2$$

$$\tilde{d}_{330} = (\lambda_4 + \lambda_5) (b_1 + b_2)^2 K \bar{C}$$

$$\tilde{d}_{332} = (\lambda_4 + \lambda_5) (b_1 + b_2) (2 \cdot Mc \cdot Kc - \alpha_c^2)$$

$$\tilde{d}_{334} = (\lambda_4 + \lambda_5) (b_1 + b_2)^2 M \bar{C}$$

NB/La matrice $D_1(p)$ est para-hermitienne et le reste de ses éléments sont nuls.

b-) Cas de la matrice $D_2(p)$:

dans ce cas :

$$d_2(p) = 1$$

et

$$\tilde{D}_2(p) = D_2(p)$$

soit :

$$\tilde{d}_{110} = \beta_2$$

$$\tilde{d}_{114} = (b_2 - b_3) (b_2 - b_3) (\beta_1 + b_5^2) / (b_1 + b_2) (b_4 + b_5)^2$$

$$\tilde{d}_{124} = (b_2 - b_3) (b_1 + b_3) (\beta_1 + b_5^2) / (b_1 + b_2) (b_4 + b_5)^2$$

$$\tilde{d}_{134} = (b_4 b_5 - \beta_1) (b_2 - b_3) / (b_1 + b_2) (b_4 + b_5)^2$$

$$\tilde{d}_{220} = \beta_2$$

$$\tilde{d}_{224} = (\beta_1 + b_5^2) (b_1 + b_3) / (b_1 + b_2) (b_4 + b_5)$$

$$\tilde{d}_{234} = (b_1 + b_3) (b_4 b_5 - \beta_1) / (b_1 + b_2) (b_4 + b_5)$$

$$\tilde{d}_{330} = \beta_4 + \beta_5$$

$$\tilde{d}_{334} = (\beta_1 + b_5^2) / (b_4 + b_5)^2$$

De même $D_2(p)$ est para-hermitienne et le reste de ses éléments sont nuls.

Les résultats sont présentés ci-après. Le tableau regroupant ces résultats contient :

- a) Les coefficients des polynômes de la partie supérieure de $\tilde{D}(p)$. ces coefficients sont arrangés suivant la puissance croissante de p .
- b) Les coefficients des polynômes de la matrice $C(z)$, commençant par ceux de z^0 et arrangés suivant la puissance croissante de z^{-1} .
- c) Les coefficients des polynômes de la matrice $B(z)$, commençant par ceux de z^0 et arrangés suivant la puissance croissante de z^{-1} .
- d) Les coefficients des polynômes de la matrice $\tilde{K}(p)$. Ces coefficients sont arrangés suivant la puissance croissante de p .

Pour entamer les calculs, on doit se fixer le type de microprofil de la route. On traitera le cas du véhicule en mouvement sur une route goudronnée. En effet, à cette situation correspond un niveau minimal des intensités des vibrations .

On distinguera successivement le cas du véhicule en charge et celui du véhicule à vide.

* OPTIMISATION SELON LE CRITERE DE SECURITE *
 * DES MARCHANDISES *
 * ROUTE GOUDRONNEE-VEHICULE A VIDE *

```
#####
# Avec les coefficients de pondération de LAGRANGE :#
#
#            $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 3.75$ 
#
#  $\sigma_{x_2}^2$  contribue à 50% de  $C_2$  et  $\sum_{i=1}^n \beta_i C_i^2$  contribue à 50% de  $C_2$ 
#####
```

Matrice a factoriser $\tilde{D}_2(p)$:

1	1	0.3750E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.2300E-02
1	2	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.2070E-01
1	3	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.1886E-01
2	1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.2070E-01
2	2	0.3750E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.1863E+00
2	3	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.1697E+00
3	1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.1886E-01
3	2	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.1697E+00
3	3	0.7500E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.3929E+00

Matrice associee C(z) :

1	1	0.2251380E+02	0.1499080E+02	0.3752300E+01
1	2	0.1241800E+00	-0.8278668E-01	0.2069667E-01
1	3	0.1131344E+00	-0.7542293E-01	0.1885573E-01
2	1	0.1241800E+00	-0.8278668E-01	0.2069667E-01
2	2	0.2361762E+02	0.1425492E+02	0.3936270E+01
2	3	0.1018210E+01	-0.6788063E+00	0.1697016E+00
3	1	0.1131344E+00	-0.7542293E-01	0.1885573E-01
3	2	0.1018210E+01	-0.6788063E+00	0.1697016E+00
3	3	0.4735753E+02	0.2842831E+02	0.7892922E+01

Matrice facteur B(z) :

1	1	0.1946827E+01	0.3862794E+01	0.1926524E+01
1	2	0.0000000E+00	-0.2409448E+00	-0.1459672E+00
1	3	0.0000000E+00	-0.5192849E-01	-0.1671096E-01
2	1	0.2712101E+00	0.1035702E+00	0.5125519E-02
2	2	0.3511160E+01	0.3070421E+01	0.1114153E+01
2	3	0.0000000E+00	-0.8501250E+00	-0.2735763E+00
3	1	0.8161511E-01	0.2618768E-02	0.3675998E-02
3	2	0.7345360E+00	0.2356892E-01	0.3308399E-01
3	3	0.5129418E+01	0.4228274E+01	0.1538756E+01

*Solution du probleme de factorisation $\tilde{K}_2(p)$ *

1	1	0.1934036E+01	0.1015171E-01	0.2639337E-02
1	2	-0.9672800E-01	0.7298362E-01	0.2374438E-01
1	3	-0.1715986E-01	0.8355479E-02	0.8804383E-02
2	1	0.9497645E-01	0.1330423E+00	0.4319137E-01
2	2	0.1923933E+01	0.1198504E+01	0.3887229E+00
2	3	-0.2809253E+00	0.1367881E+00	0.1441372E+00
3	1	0.2197747E-01	0.3896956E-01	0.2066808E-01
3	2	0.1977972E+00	0.3507260E+00	0.1860128E+00
3	3	0.2724112E+01	0.1795331E+01	0.6099749E+00

* OPTIMISATION SELON LE CRITERE DE SECURITE *
 * DES MARCHANDISES *
 * ROUTE GOUDRONNEE-VEHICULE EN CHARGE *

 # Avec les coefficients de pondération de LAGRANGE :#
 #
 # $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0.635$ #
 #
 # $\sigma_{x_1}^2$ contribue à 90% de C_2 et $\sum_{i=1}^n \beta_i \sigma_{x_i}^2$ contribue à 10% de C_2 #
 #####

*Matrice a factoriser $\tilde{D}_2(p) : *$

1	1	0.6350E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.2159E-02
1	2	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.1943E-01
1	3	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.2387E-01
2	1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.1943E-01
2	2	0.6350E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.1749E+00
2	3	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.2148E+00
3	1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.2387E-01
3	2	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.2148E+00
3	3	0.1270E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.3068E+00

*Matrice associee C(z) : *

1	1	0.3822954E+01	0.2531364E+01	0.6371589E+00
1	2	0.1165815E+00	-0.7772100E-01	0.1943025E-01
1	3	0.1431923E+00	-0.9546151E-01	0.2386538E-01
2	1	0.1165815E+00	-0.7772100E-01	0.1943025E-01
2	2	0.4859234E+01	0.1840511E+01	0.8098723E+00
2	3	0.1288730E+01	-0.8591536E+00	0.2147884E+00
3	1	0.1431923E+00	-0.9546151E-01	0.2386538E-01
3	2	0.1288730E+01	-0.8591536E+00	0.2147884E+00
3	3	0.9460805E+01	0.3852797E+01	0.1576801E+01

*Matrice facteur B(z) : *

1	1	0.8014689E+00	0.1587473E+01	0.7926403E+00
1	2	0.0000000E+00	-0.1240336E+00	-0.6432219E-01
1	3	0.0000000E+00	-0.5226632E-01	-0.1189082E-01
2	1	0.1403221E+00	0.2276719E-01	0.6448890E-02
2	2	0.1648830E+01	0.9759566E+00	0.4431615E+00
2	3	0.0000000E+00	-0.9768798E+00	-0.2222444E+00
3	1	0.1068801E+00	-0.2225569E-01	0.9145373E-02
3	2	0.9619210E+00	-0.2003012E+00	0.8230836E-01
3	3	0.2609558E+01	0.1131082E+01	0.6042406E+00

*Solution du probleme de factorisation $\tilde{K}_2(p) *$

1	1	-0.7953955E+00	0.4414272E-02	0.1659092E-02
1	2	-0.4708895E-01	0.3216110E-01	0.1492785E-01
1	3	-0.1603928E-01	0.5945408E-02	0.1009388E-01
2	1	0.4238455E-01	0.6693661E-01	0.3100095E-01
2	2	0.7669871E+00	0.6028344E+00	0.2790088E+00
2	3	-0.2997819E+00	0.1111222E+00	0.1886588E+00
3	1	0.2344245E-01	0.4886737E-01	0.3457029E-01
3	2	0.2109820E+00	0.4398063E+00	0.3111326E+00
3	3	0.1086220E+01	0.1002659E+01	0.5206791E+00

* OPTIMISATION SELON LE CRITERE DE CONFORT *
 * ET DE SECURITE DU CHAUFFEUR *

* ROUTE GOUDRONNEE-VEHICULE A VIDE *

 #Avec les coefficients de pondération de LAGRANGE :#
 #
 # $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 13643.3$ #
 #
 # σ_x^2 contribue à 50% de C_1 et $\sum_{i=1}^5 \lambda_i \sigma_{x_i}^2$ contribue à 50% de C_1 #
 #####

*Matrice a factoriser $\tilde{D}_1(p) : *$

1	1	0.1257E+15	0.0000E+00	0.3968E+12	0.0000E+00	0.8525E+10
1	2	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.1153E+10
1	3	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
2	1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.1153E+10
2	2	0.1257E+15	0.0000E+00	0.3968E+12	0.0000E+00	0.1068E+10
2	3	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
3	1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
3	2	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
3	3	0.2515E+15	0.0000E+00	0.7935E+12	0.0000E+00	0.1788E+10

*Matrice associee C(z) : *

1	1	0.7536775E+15	0.5029125E+15	0.1261419E+15
1	2	0.6916749E+10	-0.4611166E+10	0.1152791E+10
1	3	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	1	0.6916749E+10	-0.4611166E+10	0.1152791E+10
2	2	0.7536328E+15	0.5029423E+15	0.1261345E+15
2	3	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	1	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	2	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	3	0.1507263E+16	0.1005886E+16	0.2522686E+15

*Matrice facteur B(z) : *

1	1	0.1258757E+08	0.2224173E+08	0.1002115E+08
1	2	0.0000000E+00	-0.2546967E+06	-0.2185828E+06
1	3	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	1	0.2571981E+06	0.2159833E+06	0.9781130E+02
2	2	0.1178587E+08	0.2236240E+08	0.1070218E+08
2	3	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	1	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	2	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	3	0.1664024E+08	0.3163124E+08	0.1516015E+08

*Solution du probleme de factorisation $\tilde{K}_1(p) *$

1	1	0.1121261E+08	0.1283213E+07	0.9174878E+05
1	2	-0.1183199E+06	0.1092914E+06	0.9028493E+00
1	3	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	1	0.1183198E+06	0.1285501E+06	0.1032814E+05
2	2	0.1121261E+08	0.5418476E+06	0.3141301E+05
2	3	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	1	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	2	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	3	0.1585791E+08	0.7400434E+06	0.4228778E+05

* OPTIMISATION SELON LE CRITERE DE CONFORT *
 * ET DE SECURITE DU CHAUFFEUR *
 * ROUTE GOUDRONNEE-VEHICULE EN CHARGE *

 # Avec les coefficients de pondération de LAGRANGE :#
 #
 # $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 870$ #
 #
 # σ_x^2 contribue à 90% de C_1 et $\sum_{i=1}^m \lambda_i \zeta_i^2$ contribue à 10% de C_1 #
 #####

Matrice a factoriser $\tilde{D}_1(p)$:

1	1	0.8018E+11	0.0000E+00	-.1265E+11	0.0000E+00	0.1962E+09
1	2	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.1874E+08
1	3	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
2	1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.1874E+08
2	2	0.8018E+11	0.0000E+00	-.1265E+11	0.0000E+00	0.7499E+08
2	3	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
3	1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
3	2	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
3	3	0.1604E+12	0.0000E+00	-.2530E+11	0.0000E+00	0.1443E+09

Matrice associee C(z) :

1	1	0.5075533E+12	0.3199321E+12	0.6772488E+11
1	2	0.1124189E+09	-0.7494591E+08	0.1873648E+08
1	3	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	1	0.1124189E+09	-0.7494591E+08	0.1873648E+08
2	2	0.5068261E+12	0.3204168E+12	0.6760370E+11
2	3	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	1	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	2	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	3	0.1013618E+13	0.6408563E+12	0.1352017E+12

Matrice facteur B(z) :

1	1	0.4405259E+06	0.5383553E+06	0.1537359E+06
1	2	0.0000000E+00	-0.4934321E+04	-0.1824207E+04
1	3	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	1	0.5159884E+04	0.1554473E+04	0.4417053E+02
2	2	0.4241851E+06	0.5490589E+06	0.1593731E+06
2	3	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	1	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	2	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	3	0.5993368E+06	0.7768686E+06	0.2255856E+06

*Solution du probleme de factorisation $\tilde{K}_1(p)$ *

1	1	0.2831543E+06	0.1433950E+06	0.1397664E+05
1	2	-0.1689632E+04	0.9121033E+03	0.7775285E+03
1	3	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	1	0.1689632E+04	0.2557857E+04	0.9123954E+03
2	2	0.2831543E+06	0.1324060E+06	0.8624814E+04
2	3	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	1	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	2	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	3	0.4004477E+06	0.1868756E+06	0.1201343E+05

VI.5.2-Résolution finale des équations de Wiener-Hopf :

Le parachèvement de la résolution de l'équation de Wiener-Hopf, nécessite l'inversion de la matrice $K(p)$ donnée par (VI.37).

Vu que les calculs projetés sont très longs, à partir de cette étape, on ne traitera en détail que le cas correspondant à l'optimisation selon le critère de sécurité des marchandises et-ce avec des coefficients de pondération de LAGRANGE tous égaux à 0.635.

L'inverse de $K(p)$ est une matrice rationnelle. Le calcul analytique nous donne $K^{-1}(p)$ que l'on écrit sous la forme :

a-) Nous donnons les coefficients du numérateur de chaque élément de $K^{-1}(p)$ arrangés suivant la puissance croissante de p .

b-) Nous donnons les coefficients du polynôme, dénominateur commun à chacun des éléments de $K^{-1}(p)$, arrangés suivant la puissance croissante de p .

L'inverse de $K(p)$, solution du problème de factorisation, correspondant au cas de l'optimisation selon le critère de sécurité des marchandises avec des coefficients de LAGRANGE égaux à 0.635, est alors donnée par :

1	1	0.8963652E+00	0.1532238E+01	0.1311452E+01	0.4760867E+00
		0.8657612E-01			
1	2	0.4776496E-01	0.6480303E-02	-0.2418919E-01	-0.2542399E-01
		-0.4632085E-02			
1	3	0.2641830E-01	-0.9764934E-02	-0.1663589E-01	-0.1746557E-04
		-0.9167929E-08			
2	1	-0.5306655E-01	-0.1272497E+00	-0.1233678E+00	-0.5287508E-01
		-0.9619557E-02			
2	2	0.8643506E+00	0.8029494E+00	0.4204013E+00	0.3263126E-02
		0.5149060E-03			
2	3	0.2377647E+00	-0.8788441E-01	-0.1497230E+00	-0.1571901E-03
		-0.8251136E-07			
3	1	-0.9037677E-02	-0.1884914E-01	-0.1334754E-01	-0.1400715E-04
		-0.7349373E-08			
3	2	-0.1689180E+00	-0.3522985E+00	-0.2494713E+00	-0.2617996E-03
		-0.1373629E-06			
3	3	0.6120539E+00	0.4846663E+00	0.2245302E+00	0.2385336E-03
		0.1235331E-06			

LE DETERMINANT EST:

0.715608	1.224841	1.051384	0.386733	7.30043E-02
1.1719E-03	1.43637E-04			

En remplaçant les $\beta_i (i=1,5)$, σ et α par leurs valeurs respectives et en appliquant (VI.27), nous déduisons l'expression de $\psi(p)$:

$$\psi(p) = \frac{(0,0021 - 0,0035p + 0,00289p^2 - 0,00107p^3 + 0,19 \cdot 10^{-4}p^4) (1 + e^{-pz_2} + e^{-pz_3} + e^{-pz_4})}{(0,715 - 1,225p + 1,051p^2 - 0,387p^3 + 7,3 \cdot 10^{-2}p^4 - 1,172 \cdot 10^{-3}p^5 + 1,43 \cdot 10^{-4}p^6) (0,25v + p)}$$

$$\psi(p) = \frac{(0,00188 - 0,00116p + 0,00097p^2 - 0,0568 \cdot 10^{-3} - 0,0104 \cdot 10^{-3}p^4) (1 + e^{-pz_2} + e^{-pz_3} + e^{-pz_4})}{(0,715 - 1,225p + 1,051p^2 - 0,387p^3 + 0,073p^4 - 1,172 \cdot 10^{-3}p^5 + 1,43 \cdot 10^{-4}p^6) (0,25v + p)}$$

$$\frac{(0,0022 - 0,00098p + 0,00015p^2) (1 + e^{-pz_2} + e^{-pz_3} + e^{-pz_4})}{(0,715 - 1,225p + 1,051p^2 - 0,387p^3 + 0,073p^4 - 1,172 \cdot 10^{-3}p^5 + 1,43 \cdot 10^{-4}p^6) (0,25v + p)}$$

Décomposons le vecteur $\psi(p)$ en deux vecteurs notés $\psi^+(p)$ et $\psi^-(p)$ selon (VI.28), de telle façon qu'étant donné un élément $\psi_i(p)$ de $\psi(p)$, les éléments $\psi_i^+(p)$ de $\psi^+(p)$ et $\psi_i^-(p)$ de $\psi^-(p)$ soient identifiés comme étant respectivement sa partie analytique dans le demi plan de droite et de gauche du plan complexe.

Pour effectuer cette décomposition, nous avons utilisé le logiciel "EUREKA" afin de déterminer les pôles des éléments de $\psi(p)$.

On écrira alors chaque élément $\psi_i(p)$ de $\psi(p)$ sous la forme :

$$\psi_i(p) = \left\{ \frac{a_{1i}}{p - \alpha_1} + \frac{a_{2i}}{p - \alpha_2} + \frac{a_{3i}}{p - \alpha_3} + \frac{a_{4i}}{p - \alpha_4} + \frac{a_{5i}}{p - \alpha_5} + \frac{a_{6i}}{p - \alpha_6} + \frac{a_{7i}}{p - \alpha_7} \right\} (1 + e^{-pz_2} + e^{-pz_3} + e^{-pz_4})$$

Avec :

$$\alpha_1 = 0.842246 + 0.84470088 \cdot j$$

$$\alpha_2 = 0.842246 - 0.84470088 \cdot j$$

$$\alpha_3 = 7.9008942 + 3.0771515 \cdot j$$

$$\alpha_4 = 7.9008942 - 3.0771515 \cdot j$$

$$\alpha_5 = 5.6061252 + 29.70668 \cdot j$$

$$\alpha_6 = 5.6061252 - 29.70668 \cdot j$$

$$\alpha_7 = -0.25 \cdot v$$

Dans ce cas, nous pouvons écrire :

$$\psi_i^+(p) = \frac{a_{7i}}{p - \alpha_7} + \left\{ \left[\frac{a_{1i}}{p - \alpha_1} + \frac{a_{2i}}{p - \alpha_2} + \frac{a_{3i}}{p - \alpha_3} + \frac{a_{4i}}{p - \alpha_4} + \frac{a_{5i}}{p - \alpha_5} + \frac{a_{6i}}{p - \alpha_6} \right] \times \left[e^{-p\tau_{12}} + e^{-p\tau_{13}} + e^{-p\tau_{14}} \right] \right\}$$

En utilisant une notation plus compacte $\psi_i^+(p)$ s'écrit :

$$\psi_i^+(p) = \frac{a_{7i}}{p - \alpha_7} + \left\{ \left[\sum_{j=1}^7 \frac{a_{ji}}{p - \alpha_j} \right] \times \left[\sum_{k=2}^4 e^{-p\tau_{1k}} \right] \right\}^+$$

Enfin d'après la référence / 6 / :

$$\left[\frac{e^{pZ}}{(p - \alpha)^n} \right]^+ = \begin{cases} \frac{e^{pZ}}{(p - \alpha)^n} & \text{pour } \operatorname{Re}(\alpha) < 0 \\ & z \leq 0 \\ \frac{e^{pZ}}{(p - \alpha)^n} - \frac{e^{\alpha Z}}{(p - \alpha)^n} \sum_{\beta=0}^{n-1} \frac{z^\beta (p - \alpha)^\beta}{\beta!} & \text{pour } \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \\ & z \leq 0 \end{cases}$$

nous obtenons donc :

$$\psi_i^+(p) = \frac{a_{7i}}{p - \alpha_7} + \sum_{j=1}^7 \frac{a_{ji}}{p - \alpha_j} \sum_{k=2}^4 e^{-p\tau_{1k}} \sum_{j=1}^6 \frac{a_{ji}}{p - \alpha_j} \sum_{k=2}^4 e^{-\alpha_j \tau_{1k}}$$

Après avoir remplacé les a_{ij} et α_j par leurs valeurs respectives, nous déduisons de (VI.32) les trois fonctions de transfert $H_1^+(p)$, caractéristiques de la meilleure transmission des suspensions, stables et physiquement réalisables.

Soit :

$$H^+(p) = [K(p)]^{-1} \cdot \psi^+(p) \cdot [A_{h_1}(p)]^{-1}$$

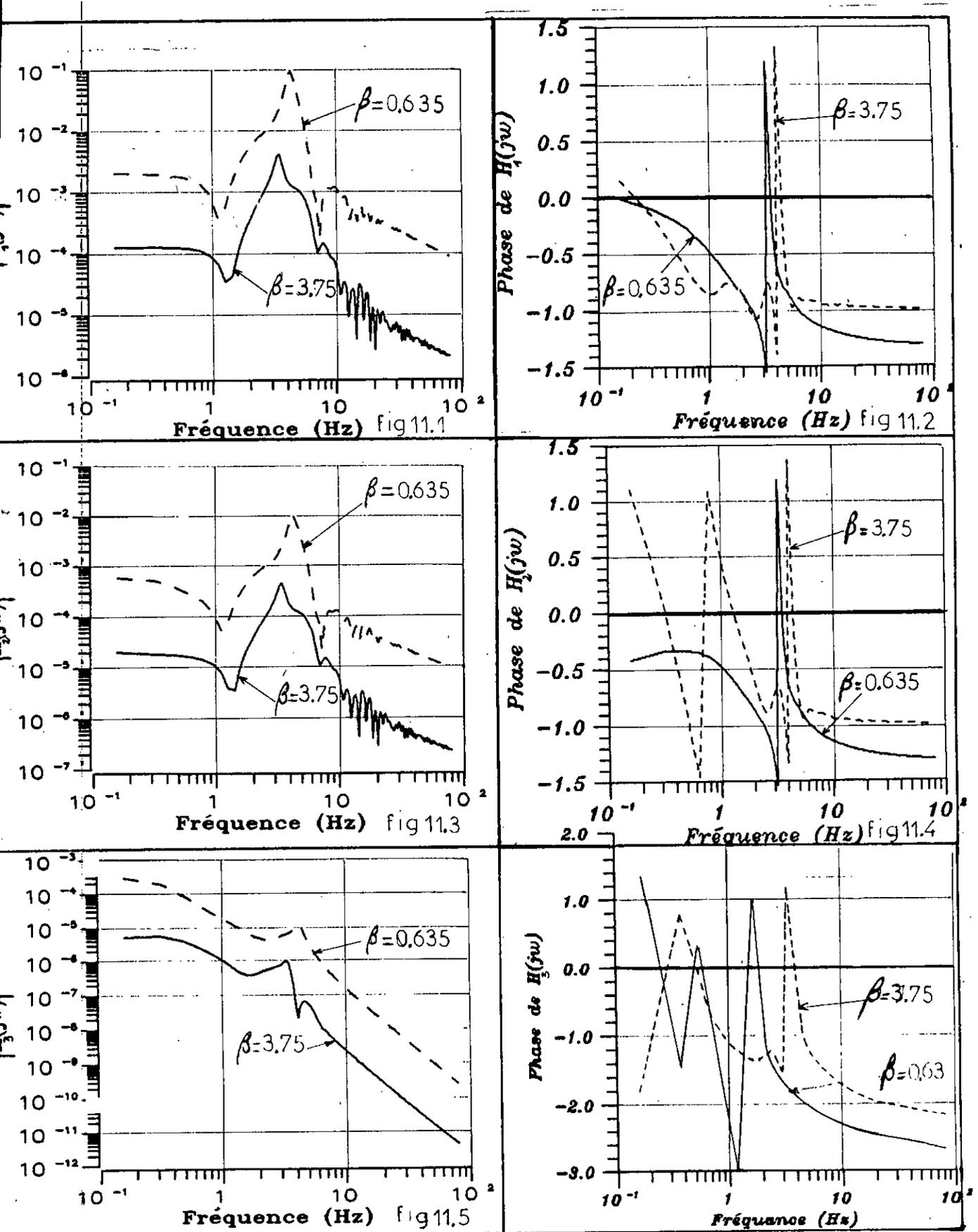


Figure II. Modules et phases des fonctions de transfert des "S.V.I" du véhicule optimisées selon le critère de sécurité des marchandises.

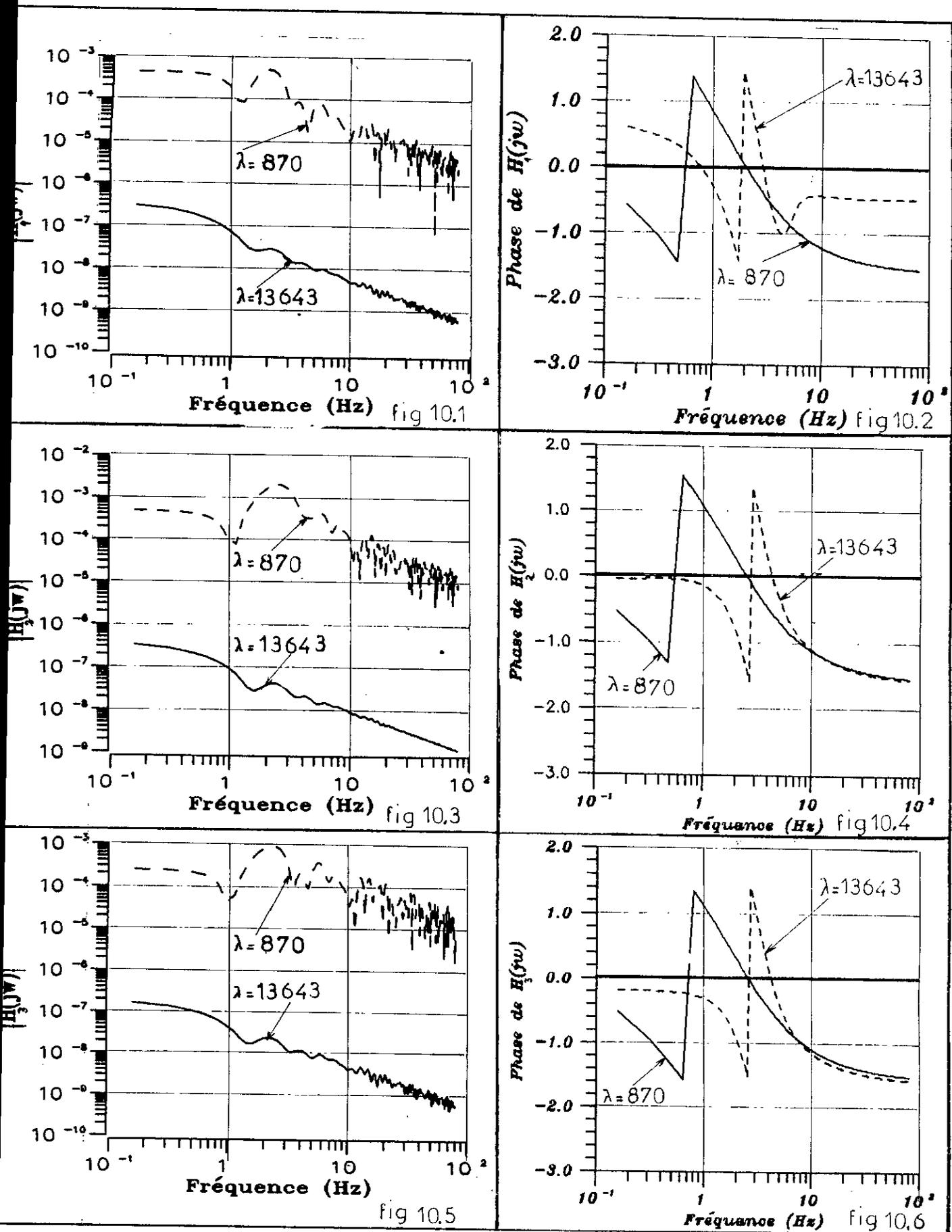


Figure 10. Modules et phases des fonctions de transfert des "S.V.I" du véhicule optimisées selon le critère de confort et de sécurité du chauffeur.

La théorie de Wiener-Hopf nous a permis de trouver trois systèmes de vibro-isolation optimale pour le modèle plan du véhicule, soumis à des excitations stochastiques dont le spectre des fréquences est connu.

Dans cette étude on n'a tenu compte que des vibrations verticales dues aux excitations externes d'origine de la route. En réalité, il y a des mouvements et oscillations dans les trois directions de l'espace, provoqués par les irrégularités de la chaussée, l'excentricité des roues ... etc.

Les systèmes de vibro-isolation trouvés dépendent, en plus des index de performance, de la structure de l'objet à vibro-isolé (véhicule) et de l'excitation à laquelle est soumis ce dernier qui, dans ce cas, dépend de la vitesse et du type de route.

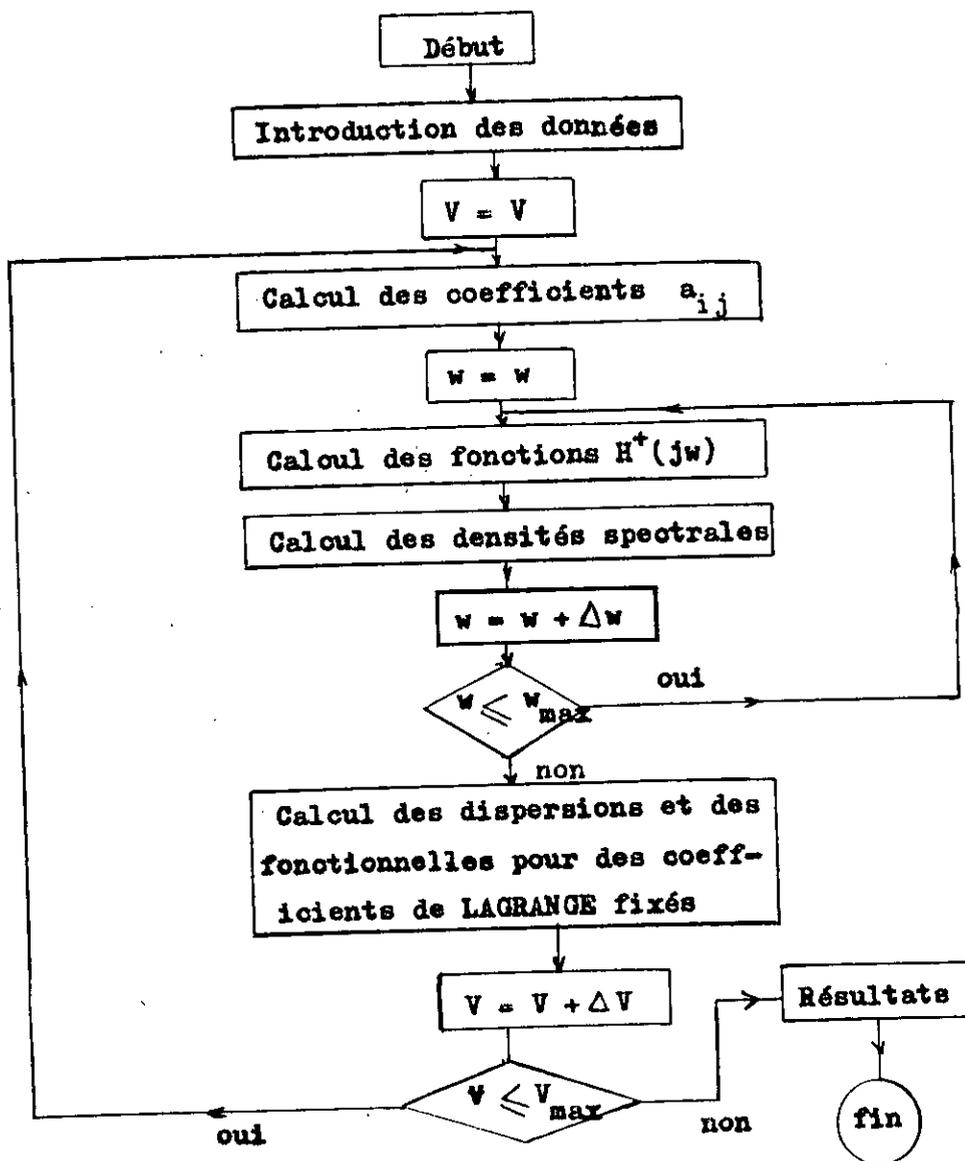
Sur les figures IO et II nous avons représenté le module et la phase des fonctions de transfert définissant nos trois systèmes de vibro-isolation du véhicule roulant sur une route goudronnée à 80 Km/h.

La réalisation des suspensions optimales peut être obtenue par combinaison des systèmes actifs et des systèmes passifs. Le plus souvent les systèmes actifs sont des organes de commande et les systèmes passifs sont des organes d'exécution.

MISE EN EVIDENCE DE L'EFFICACITE DES SYSTEMES
DE VIBRO-ISOLATION

Pour démontrer la validité et l'efficacité des systèmes de vibro-isolation, il suffit de recalculer les différentes dispersions d'accéléérations et de déplacements et par la suite les fonctionnelles C et C .

Chaque dispersion est calculée par intégration de la densité spectrale correspondante. Les expressions des différentes densités spectrales sont données dans le paragraphe (VI.2) du chapitre VI. Tous les calculs sont effectués selon l'organigramme suivant :



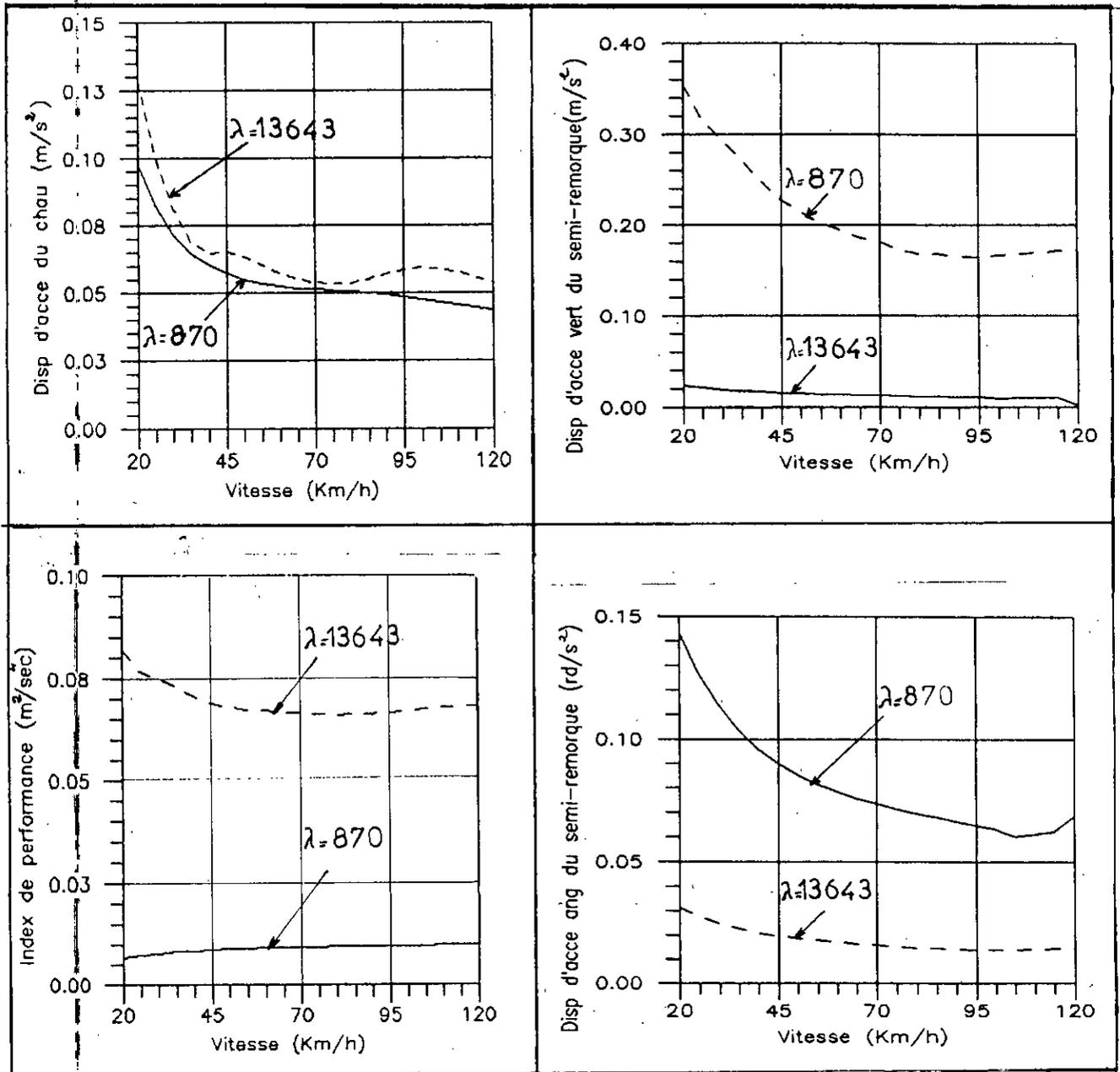


Fig I2. Performances du véhicule ayant des suspensions optimisées selon le critère de confort et de sécurité du chauffeur.

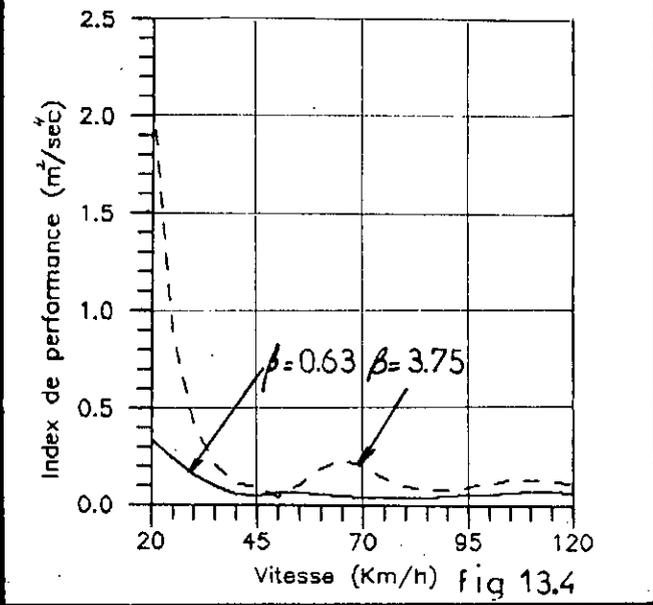
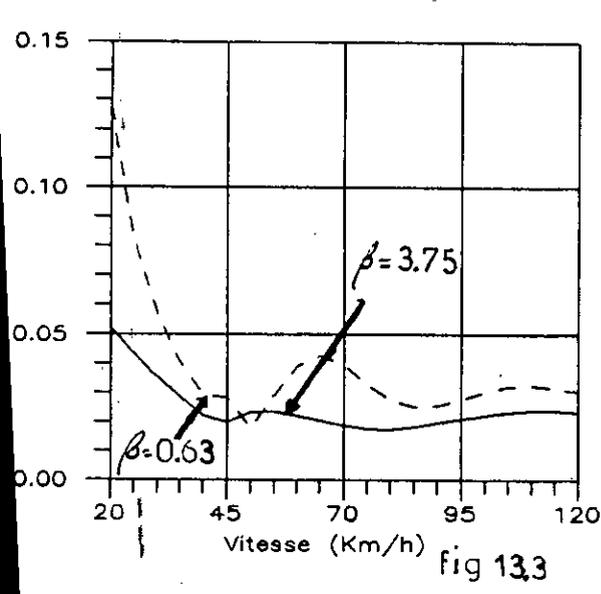
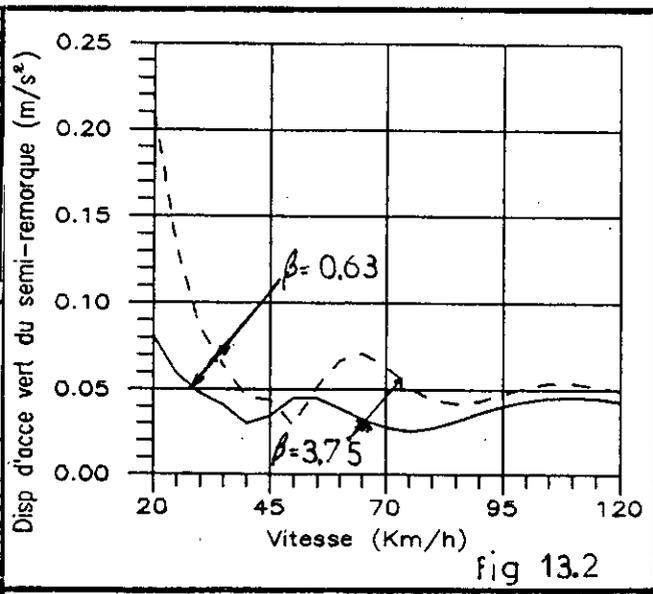
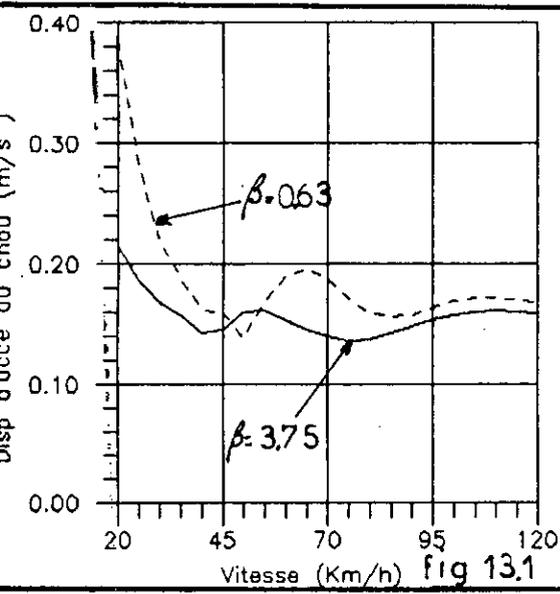


Fig 13. Performances du véhicule muni des suspensions optimisées selon le critère de sécurité des marchandises.

Les dispersions principales déterminants la qualité de la tenue à la route du véhicule, ayant les suspensions optimales trouvées, sont représentées sur les figures I2 et I3. Toutes ces dispersions décroissent avec l'augmentation de la vitesse du véhicule.

Dans le cas du critère de sécurité des marchandises, on enregistre un maximum de réduction des dispersions d'accélération angulaire et verticale du centre de gravité du semi-remorque. La dispersion d'accélération angulaire (respectivement verticale) est plus faible dans le cas où λ est égale à 3.75 (respectivement 0.635).

L'index de performance lié à ce critère atteint ses valeurs minimales pour λ égale à 0.635.

Dans le cas du critère de confort et de sécurité du chauffeur, nous constatons une nette diminution de la dispersion d'accélération verticale du corps du chauffeur par rapport à celle correspondante au véhicule existant. Cette diminution est plus importante pour λ égale à 8/0.

Finalement, la méthode d'optimisation développée dans ce travail a permis de réduire les dispersions d'accélération du véhicule et d'atteindre -selon le critère choisi- des niveaux optimaux du point de vue confort et sécurité routière.

- CONCLUSION -

Malgré l'insuffisance de la documentation technique et du temps machine alloué par le centre de calcul, nous avons pu analyser les réponses du véhicule aux excitations externes d'origine de la route puis, élaborer une méthode numérique de synthèse des systèmes de vibro-isolation optimale du véhicule dans le plan longitudinal.

Cette étude devrait être complétée par la conception de modèle mathématique pour chacun des systèmes de vibro-isolation et pourrait être améliorée en considérant le modèle tridimensionnel du véhicule.

Enfin, cette étude m'a permis d'acquies de nouvelles connaissances sur un domaine dont j'ignorais l'importance et véritable utilité. J'espère que ce modeste travail sera d'un apport appréciable pour toute personne intéressée par la commande optimale des systèmes linéaires en vue d'améliorer le confort et la sécurité routière.

DETERMINATION DES FONCTIONS DE TRANSFERT DES ELEMENTS
ASSURANT LA VIBRO-ISOLATION OPTIMALE

A. I - MISE EN EQUATION DU PROBLEME , :

Les fonctions de transfert optimales $H_1^+(i=1,3)$ déterminées précédemment ont une signification abstraite et ne caractérisent pas le comportement d'un élément ou d'un ensemble d'éléments, faisant partie du système de vibro-isolation du véhicule.

Pour améliorer le niveau de confort lié au véhicule existant, on propose de placer, en parallèle avec chacun des trois ensembles suspensions un système physique caractérisé par une fonction de transfert $W_i(p)$ ($i=1,3$) (voir figure 3).

Afin de déterminer ces fonctions, on réécrit les équations de Lagrange dans l'espace de LAPLACE, en tenant compte des relations géométriques (V.1), (V.2), (VI.3), (VI.4) et (VI.5) et du fait que $W_i(p)$ ($i=1,3$) est en parallèle avec la $i^{\text{ème}}$ suspension ($i=1,3$) caractérisée par sa fonction de transfert $(\alpha_i \cdot p + k)$ ($i=1,3$).

Ainsi nous obtenons le système d'équations non linéaires suivant :

$$\begin{aligned} & (m_1 \cdot p^2 + (\alpha_1 + \alpha_{r1}) \cdot p + k_{r1}) \bar{q}_1 + W_1(p) \cdot \bar{q}_1 - W_1(p) \cdot H_1^+(p) \cdot \bar{h}_1 = (\alpha_{r1} \cdot p + k_{r1}) \bar{h}_1 + (\alpha_1 \cdot p + k_1) \cdot H_1^+(p) \cdot \bar{h}_1 \\ & (m_2 \cdot p^2 + (\alpha_2 + \alpha_{r2}) \cdot p + k_{r2} + k_{r1}) \bar{q}_2 + W_2(p) \cdot \bar{q}_2 - W_2(p) \cdot H_2^+(p) \cdot \bar{h}_2 = (\alpha_{r2} \cdot p + k_{r2}) \bar{h}_2 + (\alpha_2 \cdot p + k_2) \cdot H_2^+(p) \cdot \bar{h}_2 \\ & (m_3 \cdot p^2 + (\alpha_3 + \frac{\alpha_3}{4}) \cdot p + (k_{r3} + \frac{k_3}{4})) \bar{q}_3 + W_3(p) \cdot \bar{q}_3 - W_3(p) \cdot H_3^+(p) \cdot \bar{h}_3 = (\alpha_3 \cdot p + k_3) \cdot \bar{q}_3 / 4 + W_3(p) \cdot \bar{q}_3 / 4 - W_3(p) \cdot H_3^+(p) \cdot \bar{h}_3 / 4 \\ & \quad = (\alpha_3 \cdot p + k_{r3}) \bar{h}_3 + (\alpha_3 \cdot p + k_3) \cdot H_3^+(p) \cdot \bar{h}_3 / 2 \\ & (m_4 \cdot p^2 + (\alpha_4 + \frac{\alpha_3}{4}) \cdot p + k_{r4} + \frac{k_3}{4}) \bar{q}_4 + W_4(p) \cdot \bar{q}_4 - W_4(p) \cdot H_4^+(p) \cdot \bar{h}_4 = (\alpha_4 \cdot p + k_4) \bar{q}_4 / 4 + W_4(p) \cdot \bar{q}_4 / 4 - W_4(p) \cdot H_4^+(p) \cdot \bar{h}_4 / 4 \\ & \quad = (\alpha_3 \cdot p + k_{r3}) \bar{h}_3 + (\alpha_3 \cdot p + k_3) \cdot H_3^+(p) \cdot \bar{h}_3 / 2 \\ & (\alpha_1 \cdot p + k) \bar{q}_1 + W_1(p) \cdot \bar{q}_1 + (\alpha_2 \cdot p + k_2) \bar{q}_2 + W_2(p) \cdot \bar{q}_2 - W_2(p) \cdot H_2^+(p) \cdot \bar{h}_2 + (\alpha_3 \cdot p + k_3) \cdot \bar{q}_3 / 2 + (\alpha_3 \cdot p + k_3) \cdot \bar{q}_3 / 2 \\ & - W_3(p) \cdot H_3^+(p) \cdot \bar{h}_3 + W_3(p) \cdot \bar{q}_3 / 2 + W_3(p) \cdot \bar{q}_3 / 2 - W_3(p) \cdot H_3^+(p) \cdot \bar{h}_3 = Mt \cdot p^2 \cdot \frac{b_2 H_1^+ + b_1 H_2^+}{h_1} (\alpha_1 \cdot p + k_1) x \\ & x H_1^+(p) \cdot \bar{h}_1 + (\alpha_2 \cdot p + k_2) \cdot H_2^+(p) \cdot \bar{h}_2 + (\alpha_3 \cdot p + k_3) \cdot H_3^+(p) \cdot \bar{h}_3 - \frac{Mc \cdot p^2 \cdot (\alpha_c \cdot p + k_c)}{(b_2 + b_3)} \cdot \bar{h}_1 + (b_1 - b_2) \cdot H_1^+(p) \\ & + Mb \cdot p^2 \cdot \frac{b_5 (b_2 - b_3) \cdot H_1^+(p) + b_5 (b_1 + b_3) \cdot H_2^+(p) + b_5 (b_1 + b_2) \cdot H_3^+(p)}{(b_1 + b_2) \cdot (b_4 + b_3)} \cdot \bar{h}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha_1 \cdot p + k_1) \cdot b_1 \cdot \bar{q}_1 + W_1(p) \cdot \bar{q}_1 \cdot b_1 - b_1 \cdot W_1(p) \cdot H_1(p) \cdot \bar{h}_1 - (\alpha_2 \cdot p + k_2) b_2 \cdot \bar{q}_2 + W_2(p) \cdot b_2 \cdot H_2 \cdot \bar{h}_1 - b_2 \cdot W_2(p) \cdot \bar{q}_2 \\
& + b_3 \cdot W_3(p) \cdot H_3 \cdot \bar{h}_1 - \frac{1}{2} (\alpha_3 \cdot p + k_3) b_3 \cdot \bar{q}_3 - \frac{b_3}{2} (\alpha_3 \cdot p + k_3) \bar{q}_4 - \frac{b_3}{2} W_3(p) \cdot \bar{q}_3 - \frac{b_3}{2} W_3(p) \cdot \bar{q}_4 = \\
\text{Jt. p.} & \frac{H_1 - H_2}{b_1 + b_2} \bar{h}_1 + b_1 (\alpha_1 \cdot p + k_1) \cdot H_1 \cdot \bar{h}_1 - b_2 (\alpha_2 \cdot p + k_2) \cdot H_2 \cdot \bar{h}_1 - b_3 (\alpha_3 \cdot p + k_3) \cdot H_3 \cdot \bar{h}_1 + \frac{M c \cdot p^2}{M c \cdot p + \alpha_c \cdot p + K \bar{c}} \\
& \times b_4 \times \frac{(b_2 + b_3) \cdot H_1 + (b_1 - b_2) \cdot H_2 \cdot \bar{h}_1 - M b \cdot b_3 \cdot p - b_5 (b_2 - b_3) \cdot H_1 + b_5 (b_1 + b_3) H_2 + b_4 (b_1 + b_2) H_3}{(b_1 + b_2)(b_4 + b_5)} \bar{h}_1 \\
& - \frac{(b_4 + b_5)}{2} (\alpha_3 \cdot p + k_3) \bar{q}_3 + \frac{b_4 + b_5}{2} (\alpha_3 \cdot p + k_3) \bar{q}_4 - W_3(p) (b_4 + b_5) \cdot H_3 \cdot \bar{h}_1 - \frac{b_4 + b_5}{2} W_3(p) \cdot \bar{q}_3 \\
& + \frac{b_4 + b_5}{2} W_3(p) \cdot \bar{q}_4 = \text{Jb. p.} \frac{(b_1 + b_2) H_2 - (b_2 - b_3) H_2 (b_1 + b_3) H_2 \bar{h}_1 + (\alpha_3 \cdot p + k_3) (b_4 + b_5) H_3 \bar{h}_1}{(b_1 + b_2)(b_4 + b_5)} \\
& + M b \cdot p \cdot b_4 \cdot \frac{b_5 (b_2 - b_3) H_1 + b_5 (b_1 + b_3) H_2 + b_4 (b_1 + b_2) H_3}{(b_1 + b_2)(b_4 + b_5)} \bar{h}_1
\end{aligned}$$

Pour résoudre ce système, divisons toutes ces équations par \bar{h}_1 , en tenant compte de la relation qui existe entre les excitations h_i ($i=1, 2, 3, 4$), on résoudra ainsi le système d'équations d'inconnues $W_1(p), W_2(p), W_3(p), (\bar{q}_1/\bar{h}_1), (\bar{q}_2/\bar{h}_1), (\bar{q}_3/\bar{h}_1)$ et (\bar{q}_4/\bar{h}_1) .

Acette effet utilisons la méthode de NEWTON dont le principe est le suivant :

Étant donné un système d'équations non linéaires de la forme :

$$\begin{cases}
f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\
f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\
\vdots \\
f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0
\end{cases}$$

ou encors :

$$F(X) = 0$$

avec :

$$X^n = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_n]$$

Pour une équation à une inconnue, la formule de NEWTON est :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

ou bien:

$$f'(x_i) \cdot \Delta x = -f(x_i)$$

avec :

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i$$

Pour un système non linéaire, la forme itérative est très proche :

$$J(x_i) \cdot \Delta X = -F(x_i)$$

où $J(x_i)$ est le "Jacobien": matrice d'ordre n (n -correspond au nombre de composants de X), telle que :

$$J(x_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

et

$$\Delta X = X_{i+1} - X_i$$

La méthode de NEWTON linéarise ainsi le système et il faut alors, à chaque itération, résoudre un système linéaire (dont l'inconnue est ΔX) défini par la formule itérative, jusqu'à ce que le vecteur $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ soit suffisamment proche de la solution.

Les résultats numériques concernant les fonctions $W_i(p)$ ($i=1, 2, 3$) sont représentés sur les figures ci-dessous.

En notant:

$$\begin{aligned} x_1 &= (\bar{q}_1 / \bar{h}_1) & x_2 &= (\bar{q}_2 / \bar{h}_1) \\ x_3 &= (\bar{q}_3 / \bar{h}_1) & x_4 &= (\bar{q}_4 / \bar{h}_1) \\ x_5 &= W_1(p) & x_6 &= W_2(p) \\ x_7 &= W_3(p) \end{aligned}$$

les différentes dérivées partielles sont alors données par :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = m_1 \cdot p + (\alpha_1 + \alpha_1) \cdot p + k_1 + k_{r1} + W_1(p)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_5} = (\bar{q}_1 / \bar{h}_1) - H_1(p)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = m_2 \cdot p + (\alpha_2 + \alpha_2) \cdot p + k_2 + k_{r2} + W_2(p)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_6} = (\bar{q}_2 / \bar{h}_2) - H_2(p)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = m_3 \cdot p + (\alpha_3 + \frac{\alpha_3}{4}) \cdot p + k_{r3} + \frac{k_3}{4} + \frac{1}{4} W_3(p)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_4} = \frac{1}{4} (\alpha_3 \cdot p + k_3) + \frac{1}{4} W_3(p)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_7} = \frac{1}{4} (\bar{q}_3 / \bar{h}_3) - H_3(p) / 2 + \frac{1}{4} (\bar{q}_4 / \bar{h}_4)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_8} = (\alpha_3 \cdot p + k) / 4 + W_3(p) / 4$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_9} = m_4 \cdot p + (\alpha_4 + \frac{\alpha_3}{4}) \cdot p + k + k_3 / 4 + W_3(p) / 4$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_{10}} = (\bar{q}_4 / \bar{h}_1) / 4 + (\bar{q}_3 / \bar{h}_1) / 4 - H_3(p) / 2$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_1} = (\alpha_1 \cdot p + k_1) + W_1(p)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_2} = (\alpha_2 \cdot p + k) + W_2(p)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_3} = (\alpha_3 \cdot p + k_3) / 2 + W_3(p) / 2$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_4} = (\alpha_3 \cdot p + k_3) / 2 + W(p) / 2$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_5} = (\bar{q}_1 / \bar{h}_1) - H_1(p)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_6} = (\bar{q}_2 / \bar{h}_2) - H_2(p)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_7} = (\bar{q}_3 / \bar{h}_1) / 2 - H_3(p) + (\bar{q}_4 / \bar{h}_4) / 2$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_1} = b_1 (\alpha_1 \cdot p + k_1) + W_1(p) \cdot b_1$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_2} = -b_2 (\alpha_2 \cdot p + k_2) - b_2 \cdot W_2(p)$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_3} = -b_3 (\alpha_3 \cdot p + k_3) / 2 - b_3 \cdot W_3(p) / 2$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_4} = -b_3 (\alpha_3 \cdot p + k_3) / 2 - b_3 \cdot W_3(p) / 2$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_5} = (\bar{q}_1 / \bar{h}_1) \cdot b_4 - b_4 \cdot H_1(p)$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_6} = b_2 \cdot H_2(p) - b_2 \cdot (\bar{q}_2 / \bar{h}_2)$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_7} = b_3 \cdot H_3(p) - b_3 \cdot (\bar{q}_3 / \bar{h}_1) / 2 - b_3 \cdot (\bar{q}_4 / \bar{h}_4) / 2$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial x_3} = (b_4 + b_5) \cdot (\alpha_3 \cdot p + k_3) / 2 + (b_4 + b_5) \cdot W_3(p) / 2$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial x_4} = (b_4 + b_5) \cdot (\alpha_3 \cdot p + k) / 2 + (b_4 + b_5) \cdot W_3(p) / 2$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial x_7} = (b_4 + b_5) \cdot (\bar{q}_3 / \bar{h}_1) / 2 - (b_4 + b_5) \cdot H_3(p) + (b_4 + b_5) \cdot (\bar{q}_4 / \bar{h}_4) / 2$$

A.2-Calcul des dispersions :

On calculera les mêmes dispersions et indices de performance (ou fonctionnelles) que ceux calculés dans le chapitre V par intégration des densités spectrales correspondantes. Ces dernières sont exprimées dans le paragraphe (VI.2), c'est le cas de \bar{X}_c , X_0-X_s , $\bar{\varphi}_b$ et \bar{X}_b . En plus les déplacements relatifs au niveau des trois ensembles suspension s'écrivent :

$$\bar{Z}_1 - \bar{q}_1 = (H_1(p) - (\bar{q}_1/\bar{h}_1)) \cdot \bar{h}_1$$

$$\bar{Z}_2 - \bar{q}_2 = (H_2(p) - (\bar{q}_2/\bar{h}_1)) \cdot \bar{h}_1$$

$$\bar{Z}_3 - \bar{q}_3 = (H_3(p) - (\bar{q}_3/\bar{h}_1)) \cdot \bar{h}_1$$

$$\bar{Z}_3 - \bar{q}_4 = (H_3(p) - (\bar{q}_4/\bar{h}_1)) \cdot \bar{h}_1$$

Les densités spectrales correspondantes sont alors :

$$S_{z_1 - q_1} = \left| H_1(p) - (\bar{q}_1/\bar{h}_1) \right|^2 \cdot S_{h_1}$$

$$S_{z_2 - q_2} = \left| H_2(p) - (\bar{q}_2/\bar{h}_1) \right|^2 \cdot S_{h_1}$$

$$S_{z_3 - q_3} = \left| H_3(p) - (\bar{q}_3/\bar{h}_1) \right|^2 \cdot S_{h_1}$$

$$S_{z_3 - q_4} = \left| H_3(p) - (\bar{q}_4/\bar{h}_1) \right|^2 \cdot S_{h_1}$$

Les dispersions sont données par :

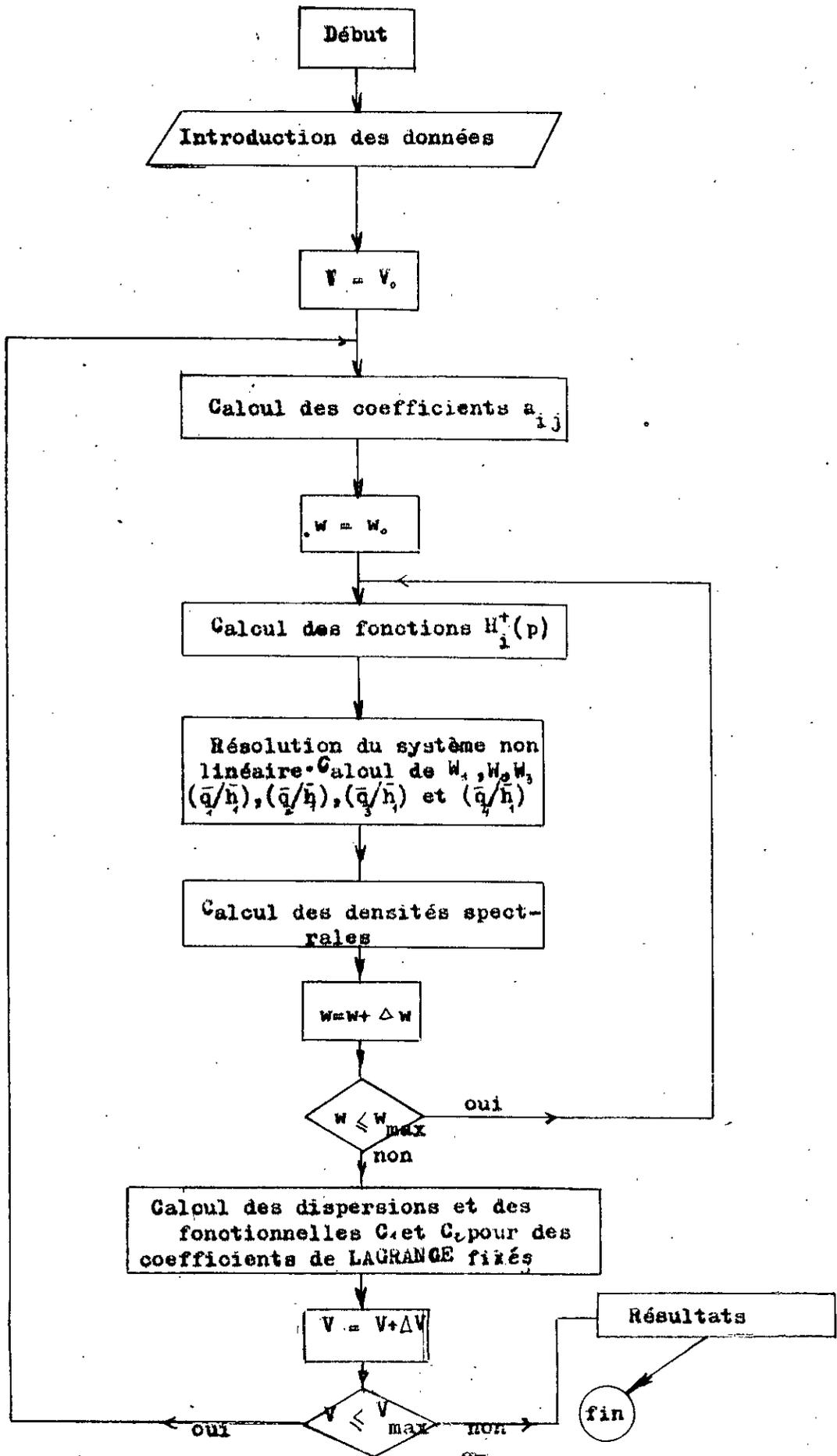
$$\sigma_{z_1 - q_1}^2 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{z_1 - q_1} \cdot dw$$

$$\sigma_{z_2 - q_2}^2 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{z_2 - q_2} \cdot dw$$

$$\sigma_{z_3 - q_3}^2 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{z_3 - q_3} \cdot dw$$

$$\sigma_{z_3 - q_4}^2 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{z_3 - q_4} \cdot dw$$

Tous ces calculs se feront selon l'organigramme suivant :



Références

- / 1 / SVETLICKIJ
"Vibration aléatoire des systèmes mécaniques".
Technique et documentation, Paris 1980.
- / 2 / G.M.HARRIS & CH.E.CREDE
"Shock and vibration handbook".
McGraw-Hill Book Company, 3rd edition 1976.
- / 3 / A.HAC
"Suspension optimisation of 2-dof vehicle model using stochastic optimal control technic".
Journal of sound and vibration. Vol 100, N°3, June 1985.
- / 4 / M.A.DOKAINISH & M.M.EL MADANY
"Random response of tractor-semitrailer system".
Journal of sound and vibration. December 1978.
pp.87-108
- / 5 / I.S.O 2631
"Guide pour l'évaluation de l'exposition des individus à des vibrations globales du corps".
- / 6 / A.A.KHATSCATOUROV et COLL
"Dinamika sistiemy doroga, shina, avtomobil, voditel".
Moskva, Mashinostroenie, 1976.
- / 7 / G.DHATT & G.TOUZOT
"Une présentation de la méthode des éléments finis".
Collection université de Compiègne, 2^{ème} édition 1984.
- / 8 / W.G.TUEL, Jr
"Computer algorithm for spectral factorisation of rational matrices"
I.B.M Journal. May 1968.
- / 9 / BELLMAN
"Matrix analysis of vibrations".
Bishop.

