

1994

11/94

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

ca

وزارة التربية الوطنية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT Génie Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التكوين  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## PROJET DE FIN D'ETUDES

### SUJET

**ETUDE DE LA FLEXION  
DES PLAQUES EN  
ELASTO - PLASTICITE  
ET MODELISATION PAR  
ELEMENTS FINIS**

Proposé par :

MR. Y. BELKACEMI  
MR. D. SAADOUN

Etudié par :

MR. L. NECIB  
MR. K. ZERFAOUI

Dirigé par :

MR. D. SAADOUN

PROMOTION

JUILLET '94

E. N. P 10, Avenue Hassen Badi - EL-HARRACH - ALGER

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT Génie Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# PROJET DE FIN D'ETUDES

## SUJET

**ETUDE DE LA FLEXION  
DES PLAQUES EN  
ELASTO - PLASTICITE  
ET MODELISATION PAR  
ELEMENTS FINIS**

Proposé par :

MR. Y. BELKACEMI  
MR. D. SAADOUN

Etudié par :

MR. L. NECIB  
MR. K. ZERFAOUI

Dirigé par :

MR. D. SAADOUN

PROMOTION

JUILLET '94

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

... و أنزلنا الحديد فيه بأس شديد و منافع للناس ...

سورة الحديد، آية 65

## REMERCIEMENTS

Nous remercions DIEU de de nous avoir permis de terminer ce modeste travail.

Nous remercions tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin afin de bien mener ce travail, Nous citons en particulier Mr D.SAADOUN qui nous a guidé tout le long de ce travail, et Mr BELKACEMI qui n'a cessé durant notre travail de nous prodiguer conseils précieux.

Nous remercions aussi Mr H.BELHANECHÉ pour sa sympathie pendant toute l'année scolaire.

Nous tenons aussi à remercier Messieurs les membres de jury qui ont accepté d'évaluer notre travail.

Enfin nos remerciements vont également à tous les enseignants du département GENIE MECANIQUE ainsi que nos amis pour leur encouragement et conseils

# Dédicaces

Je dédis ce modeste travail,

à mes parent, qui m'ont prodiguer aide et encouragement,  
à mon frère,  
à mes soeurs,  
à toute ma famille,  
à mes amis de L'E.N.I.T.A, mes camarades de l' E.N.P,  
à tous ceux qui, de près ou de loin, m'on aidé à réaliser ce travail.

K.ZARFAOUI

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

# Dédicaces

Je dédis ce modeste travail,

à ma mère, ma femme, mes deux fils,  
à toute ma famille, ainsi que ma belle famille,

à mes amis, mes camarades de l' E.N.P, ainsi que mes collègues,  
de travail qui m'ont prodigué aide et encouragement,  
plus particulièrement à Mr D. Samir,

à tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont aidé à réaliser ce travail.

L. NECIB

## ملخص

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

تهدف هذه الدراسة إلى تحديد كيفية إنتشار التشوهات المرنة، و دراسة مختلف المعاملات المؤثرة على ظاهرة المرونة اللدونة في الصفائح. يسمح برنامج الحساب، بواسطة العناصر المنتهية، الذي أنجزناه، بتحديد المناطق اللدنة، و الذي بفضلها يمكن لنا إجتباب كل تشوه سلبي مؤدياً إلى إنكسار.

## Résumé

Cette étude consiste à déterminer la distribution des déformations plastiques, et l'analyse des différents paramètres influants sur le comportement elasto - plastique des plaques. Dans le code de calcul, par éléments finis, que nous avons élaboré, permet la localisation des zones plastiques, ce qui nous conduit à éviter toute déformation défavorable qui conduise à une rupture.

## Abstract

The aim of this research is to determine the stain distribution in plastic behaviours, and to analyse different parameters influing on plate elasto-plastic behaviours. On our finite elements numerical code, witch is elaborated by our selves, we can localise plastic area and then ovoid any unfavorable deformations conducting us to the fracture.

# SOMMAIRE



## INTRODUCTION

### Chapitre I: THEORIE DES PLAQUES EN FLEXION

I.1. INTRODUCTION.....	3
I.2. THEORIE DE KIRCHHOFF-POISSON.....	4
I.2.1. Hypothèses.....	4
I.2.2. Relations Déformations - Courbures.....	5
I.2.3. Relation Contraintes - Courbures.....	8
I.2.4. Détermination de l'Energie de Déformation.....	10
I.2.5. Détermination des Moments de Flexion.....	10
I.3. THEORIE DE REISSNER - MINDLIN.....	11
I.3.1. Hypothèses.....	11
I.3.2. Relations Déformations - Déplacements.....	12
I.3.3. Relations Contraintes - Déformations.....	13
I.3.4. Détermination de l'Energie de Flexion.....	14
I.3.5. Détermination des Moments de Flexion et des Efforts de Cisaillement.....	15

### Chapitre II: FORMULATION ET LOIS DE COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUE

II.1. DEFINITION D'UN MODELE ELASTO-PLASTIQUE.....	17
II.1.1. Description du Comportement Elasto-Plastique.....	17
II.1.2. Sollicitation Multiaxiale.....	17
II.2. LOIS DE COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUE.....	18
II.2.1. Surface d'écoulement.....	18
II.2.2. Phénomène d'écrouissage.....	19
II.2.2.1. <i>Ecrouissage isotrope</i> .....	19
II.2.2.2. <i>Ecrouissage cinématique</i> .....	20
II.2.2.3. <i>Hypothèse de Ziegler</i> .....	21
II.2.2.4. <i>Hypothèse de Prager</i> .....	22
II.2.3. Critère de plasticité.....	22
II.2.3.1. <i>Critère de Tresca</i> .....	23
II.2.3.2. <i>Critère de Von-Mises</i> .....	23
II.2.4. Lois d'écoulement.....	25
II.2.4.1. <i>Principe de Hill</i> .....	25
II.3. FLEXION ELASTO-PLASTIQUE DES PLAQUES.....	26
II.3.1. Description d'un problème élasto-plastique en flexion.....	26
II.3.2. Approches du problème.....	26
II.3.2.1. <i>Approche en multicouche</i> .....	27
II.3.2.2. <i>Approche en monocouche</i> .....	27
II.3.3. Expressions des moments et efforts tranchants.....	28

**Chapitre III : INTRODUCTION DU MODELE ELASTO-PLATIQUE DANS UN CODE D'ELEMENTS FINIS**

III.1. DISCRETISATION EN ELEMENTS FINIS .....	31
III.2. HYPOTHESES FONDAMENTALES .....	32
III.3. FORMULATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS .....	33
III.3.1. Principe des travaux virtuels .....	33
III.3.2. Approximation du problème par éléments finis .....	33
III.4. MODELISATION ELASTO-PLASTIQUE.....	37
III.4.1. Modélisation en multicouche.....	37
III.4.2. Modélisation en monocouche .....	40
III.5. RESOLUTION NUMERIQUE.....	42

**Chapitre IV : METHODES NUMERIQUES DE RESOLUTION DES PROBLEMES ELASTO-PLASTIQUES**

IV.1. PRESENTATION DU CODE DE CALCUL.....	45
IV.1.1. Structure du code de calcul .....	45
IV.2. METHODES DE RESOLUTION DES SYSTEMES NON LINEAIRES .....	47
IV.2.1. Méthode de substitution .....	47
IV.2.2. Méthode de Newton-Raphson ou de la rigidité tangentielle.....	48
IV.2.3. Méthode incrémentale ou pas à pas .....	48
IV.2.4. Méthode de rigidité initiale.....	49
IV.2. CALCUL DES FORCES RESIDUELLES POUR UN PROBLEME ELASTO - PLASTIQUE .....	50
IV.2.1. Méthode de "Contraintes Initiales".....	50
IV.2.2. Test de convergence.....	52
IV.2.3. Vérification du critère de plasticité .....	53
IV.2.4. Calcul des déformations plastiques et des contraintes réelles.....	53

**Chapitre V : APPLICATION DU CODE DE CALCUL ET PRESENTATION DES RESULTATS**

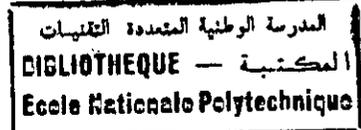
V.1. INTRODUCTION.....	57
V.2. ETUDE DE QUELQUES PARAMETRES.....	58
V.2.1. Choix de la méthode de résolution.....	58
V.2.2. Influence du critère de plasticité.....	60
V.2.3. Choix du type d'élément.....	60
V.3. PLAQUE CARREE SIMPLEMENT SUPPORTEE SOUMISE À UNE CHARGE REPARTIE .....	62
V.4. PLAQUE CARREE ENCASTREE SOUMISE À UNE CHARGE REPARTIE .....	67
V.5. PLAQUE CARREE SIMPLEMENT SUPPORTEE SOUMISE A UNE CHARGE CONCENTREE .....	71

V.6. INFLUENCE DU NOMBRE DE COUCHES .....	75
V.7. PLAQUE RECTANGULAIRE SIMPLEMENT SUPPORTEE AVEC CHARGE REPARTIE.....	76
V.8. CONCLUSION .....	78

## CONCLUSION

## BIBLIOGRAPHIE

# INTRODUCTION



Le calcul des structures par la méthode des éléments finis dans les domaines technologiques avancés nécessite de plus en plus d'analyse faisant intervenir les comportements non linéaires physiques et géométriques.

Les plaques, et assemblage de plaques de formes arbitraires constituent des structures complexes fréquemment rencontrées dans les domaines tels que la construction automobile, navale, aéronautique.

Le développement d'éléments finis simples, efficaces et fiables pour l'analyse des structures minces, constitue actuellement un des axes de recherches en mécanique des solides. La diversité des problèmes rencontrés en pratique rend ces objectifs difficiles à atteindre. Différents aspects comme simplicité et efficacité sont d'ailleurs souvent incompatibles.

La prise en compte du comportement du matériau au-delà de la limite élastique permet de fournir des résultats corrects à des niveaux de sollicitations plus élevés que ceux associés à un comportement de la structure uniquement dans le domaine élastique. Ceci s'applique particulièrement aux structures faites de matériaux à "basse" limite élastique.

L'analyse élasto-plastique, dans le domaine des petits déplacements uniquement, conduit à une approximation du comportement réel qui peut seule, dans de nombreuses situations *prolonger* le domaine de validité des résultats élastiques (sans avoir à inclure une formulation prenant en compte les grands déplacements).

L'objet de cette étude est la détermination du champ de déformation, ainsi que la localisation des zones plastiques des structures bidimensionnelles (plaques), qu'il est nécessaire de mettre en évidence, afin d'éviter toute déformation plastique dans des conditions de service bien déterminées.

Le travail est présenté en deux grandes parties:

La première partie est constituée par la présentation de la formulation détaillée d'élément plaque en flexion (élastique) en se basant sur les deux théories les plus classiques à savoir la théorie de Kirchhoff et la théorie de Mindlin.

Nous faisons ensuite un rappel de plasticité pour des matériaux standards, nous nous limitons aux critères les plus classiques soient le critère de Von-Mises et le critère de Tresca, et aux écrouissages les plus simples soient l'écrouissage cinématique et l'écrouissage isotrope.

Nous formulons aussi les lois adoptées à la flexion élasto-plastique des plaques pour une approche multicouche en signalant les hypothèses nécessaires pour un passage vers une approche monocouche.

Dans la deuxième partie, nous avons abordé la modélisation par éléments finis des plaques en flexion soit des quadrilatères à huit et à neuf noeuds (Hétérosis). Nous exposons ainsi la structure de notre code de calcul et un bref rappel sur les méthodes numériques pour la résolution des problèmes non linéaires. Nous donnons aussi un développement détaillé du calcul élasto-plastique et les résultats obtenus à partir du code de calcul, en prenant le soin de les comparer et valider par ceux de la littérature.

**CHAPITRE I****THEORIE DES PLAQUES EN FLEXION****I.1 INTRODUCTION**

On appelle plaque un solide limité par deux plans parallèles distants de "h" et par une surface fermée normale à ces plans (fig. 1.1). La surface équidistante aux deux plan est le plan moyen.

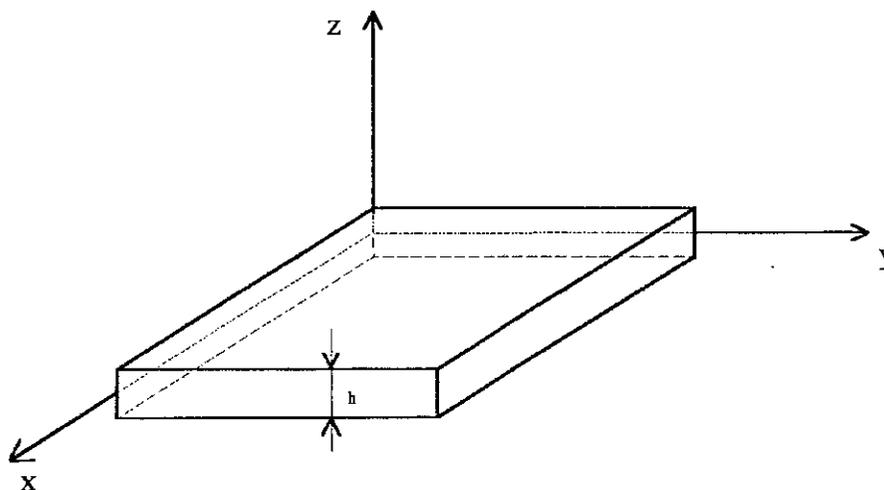


Figure 1.1 : Représentation géométrique d'une plaque.

Les propriétés de flexion d'une plaque dépendent en grande partie de la dimension de son épaisseur par rapport aux deux autres dimensions, de ce fait les plaques peuvent être classées en trois catégories: [7]

- Les plaques minces sans effet de cisaillement basées sur la théorie de Kirchhoff-Poisson,
- Les plaques épaisses avec effet de cisaillement basées sur la théorie de Reissner-Mindlin,
- Les plaques épaisses basées sur une analyse tridimensionnelle.

Dans cette étude on s'intéressera à la théorie de Mindlin mais on présentera celle de Kirchhoff comme introduction.

## I.2 THEORIE DE KIRCHHOFF-POISSON

### I.2.1 Hypothèses

La théorie de Kirchhoff est basée sur les hypothèses suivantes:

- Les forces extérieures peuvent être considérées comme appliquées sur le plan moyen et normales à celui-ci,
- La contrainte  $\sigma_z$  sur tout élément parallèle au plan moyen peut être négligée par rapport aux contraintes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ :

$$\sigma_z = 0 \quad (I.1)$$

- Le plan moyen ne subit aucune contraction ni extension lors de la flexion de la plaque. Le déplacement d'un point quelconque du plan moyen (i.e. la membrane) se réduit à sa seule composante normale " w ", et on aura donc:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 0 \end{cases} \quad (I.2)$$

- Les normales au plan moyen avant la flexion restent perpendiculaires à celui-ci après la flexion (fig. 1.2), cela revient à négliger l'effet de cisaillement, et on aura:

$$\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \quad (I.3)$$

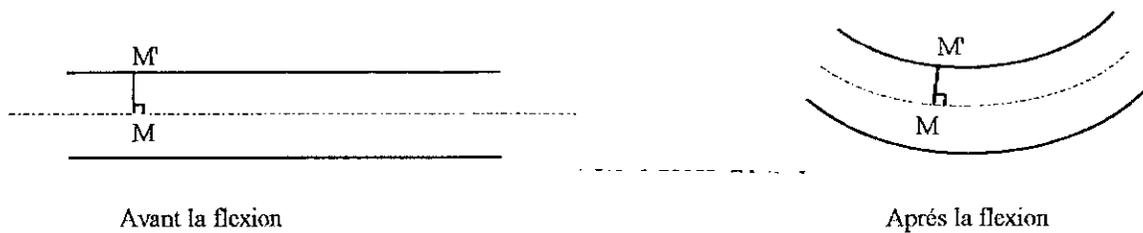


Figure 1.2 : Représentation de la normale au plan moyen après la déformation.

### I.3.2 Relations Déformations - Courbures

Suite aux hypothèses déjà citées on peut écrire les relations de déformations - déplacements:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (I.4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (I.5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (I.6)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (I.7)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (I.8)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (I.9)$$

D'après l'équation (I.6) on a un état de déformation plane:

$$w = w(x, y) \quad (I.10)$$

En intégrant les équations (I.8) et (I.9) on obtient:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y) \quad (\text{I.11})$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y) \quad (\text{I.12})$$

Or selon l'hypothèse de Kirchoff  $u_0 = v_0 = 0$ , d'où:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{I.13})$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{I.14})$$

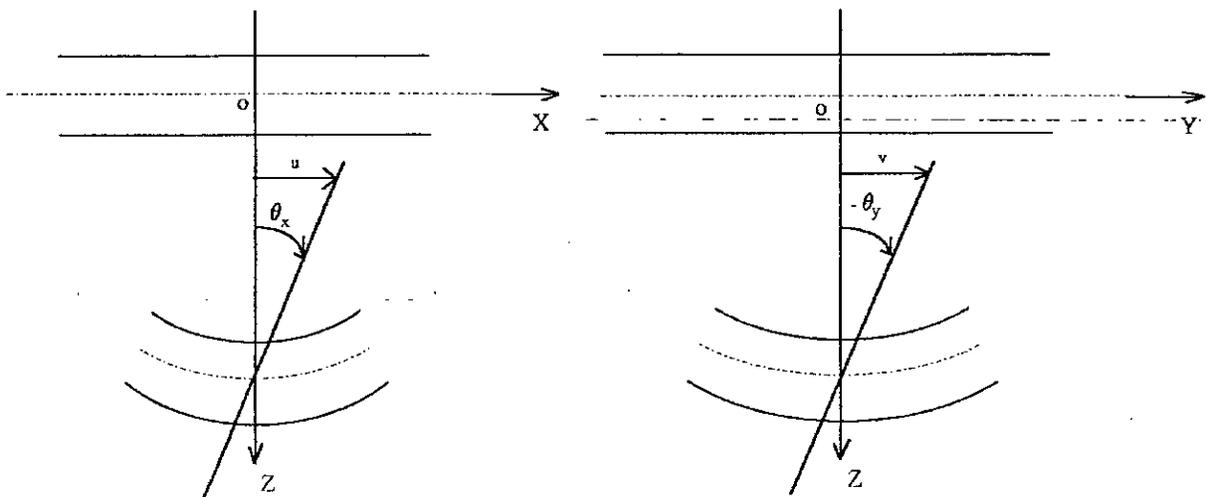


Figure 1.3 : Représentation schématique des déplacements.

En substituant les équations (I.13) et (I.14) dans les équations (I.4), (I.5) et (I.7) on obtient:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{I.15})$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{I.16})$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{I.17})$$

En notation matricielle on a:

$$\{ \varepsilon \} = -z \{ \chi \} \quad (\text{I.18})$$

où

$$\{ \varepsilon \} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.19})$$

et

$$\{ \chi \} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.20})$$

Soient:

$$\frac{1}{\rho_x} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \chi_x \quad (\text{I.21})$$

où  $\chi_x$  et  $\rho_x$  sont respectivement la courbure et le rayon de courbure du plan moyen dans le plan (x,z).

$$\frac{1}{\rho_y} = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \chi_y \quad (\text{I.22})$$

où  $\chi_y$  et  $\rho_y$  sont respectivement la courbure et le rayon de courbure du plan moyen dans le plan (y,z).

$$\frac{1}{\rho_z} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \chi_{xy} \quad (\text{I.23})$$

où  $\chi_{xy}$  et  $\rho_z$  sont respectivement la courbure et le rayon de courbure du plan moyen dans le plan (y,z).

Et le vecteur  $\{\chi\}$  est donc le vecteur de courbure.

### I.2.3 Relation Contraintes - Courbures

En utilisant les formules de la loi de HOOKE généralisée pour cet état de contrainte on obtient:

$$\varepsilon_x = \frac{(\sigma_x - \nu_x \sigma_y)}{E_x} \quad (I.24)$$

$$\varepsilon_y = \frac{(\sigma_y - \nu_y \sigma_x)}{E_y} \quad (I.25)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \quad (I.26)$$

Ce qui donne:

$$\sigma_x = \frac{E_x \varepsilon_x + \nu_x E_y \varepsilon_y}{1 - \nu_x \nu_y} \quad (I.27)$$

$$\sigma_y = \frac{E_y \varepsilon_y + \nu_y E_x \varepsilon_x}{1 - \nu_x \nu_y} \quad (I.28)$$

$$\tau_{xy} = G_{xy} \gamma_{xy} \quad (I.29)$$

En introduisant les courbures de plaque il en résulte:

$$\sigma_x = -z \frac{E_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_x E_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}{1 - \nu_x \nu_y} \quad (I.30)$$

$$\sigma_y = -z \frac{E_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_y E_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{1 - \nu_x \nu_y} \quad (\text{I.31})$$

$$\tau_{xy} = -z G_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{I.32})$$

Avec:

$E_x, E_y$  : modules de Young respectivement selon l'axe (Ox) et l'axe (Oy).

$\nu_x, \nu_y$  : coefficients de Poisson selon l'axe (Ox) et l'axe (Oy).

$G_{xy}$  : module d'élasticité transverse selon le plan (x,y).

Dans le cas d'un matériaux isotrope, i.e.:

$$E_x = E_y = E$$

$$\nu_x = \nu_y = \nu$$

$$G_{xy} = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Sous forme matricielle:

$$\{ \sigma \} = [D] \{ \varepsilon \} \quad (\text{I.33})$$

où

$$\{ \sigma \} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.34})$$

$$[D] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{I.35})$$

Donc en vertu de (I.18) et (I.33) on en conclu:

$$[\sigma] = -z [D] \{ \chi \} \quad (\text{I.36})$$

### I.2.4 Détermination de l'Energie de Déformation

L'énergie de déformation "U" est donnée par:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{ \sigma \}^t \{ \varepsilon \} dV \quad (\text{I.37})$$

En utilisant les relations (1.18) et (1.36) on aura:

$$U = \frac{1}{2} \int_V z^2 \{ \chi \}^t [D] \{ \chi \} dV \quad (\text{I.38})$$

Or on a:

$$dV = dx dy dz = dS dz \quad (\text{I.39})$$

D'où:

$$U = \frac{1}{2} \int_S \{ \chi \}^t [D] \{ \chi \} dS \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \quad (\text{I.40})$$

Après intégration selon l'épaisseur "h" et simplification on obtient finalement:

$$U = \frac{E h^3}{24(1-\nu^2)} \iint_S \left\{ (w_{,xx})^2 + (w_{,yy})^2 + 2\nu(w_{,xx})(w_{,yy}) + 2(1-\nu)(w_{,xy})^2 \right\} dx dy \quad (\text{I.41})$$

### I.2.5 Détermination des Moments de Flexion

Les moments de flexion sont donnés par [7]:

$$\{ M \} = \int_{-h/2}^{h/2} z \{ \sigma_f \} dz = [D_f] \{ \chi \} \quad (\text{I.42})$$

où:

$$\{ M \} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (I.43)$$

et:

$$[ D' ] = \frac{h^3}{12} [ D ] \quad (I.44)$$

### I.3 THEORIE DE REISSNER - MINDLIN

La théorie de Reissner-Mindlin permet d'étudier les plaques épaisses en flexion en tenant compte des déformations dues au cisaillement transverse.

#### I.3.1 Hypothèses

La théorie de Reissner-Mindlin est basée sur les hypothèses suivantes:

- La contrainte  $\sigma_z$  est négligée par rapport aux contraintes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ , ce qui nous ramène à un état de contrainte plane:

$$\sigma_z = 0 \quad (I.45)$$

- Les sections planes avant déformation restent planes après déformation sans être nécessairement normales à la déformée du plan moyen, ainsi le déplacement d'un point quelconque de la plaque peut être déterminé si nous connaissons le champ de déplacement du plan moyen de la plaque. Pour la flexion avec l'hypothèse de petits déplacements les composantes de déplacement d'un point de coordonnées  $(x, y, z)$  sont:

$$u = z \beta_x (x, y) \quad (I.46)$$

$$v = z \beta_y (x, y) \quad (I.47)$$

$$w = w (x, y) \quad (I.48)$$

où "z" est la distance du point par rapport au plan moyen, "w" son déplacement transversal et  $\beta_x$  et  $\beta_y$  sont les rotations de la normale dans les plan x-z et y-z respectivement (fig. 1.4),

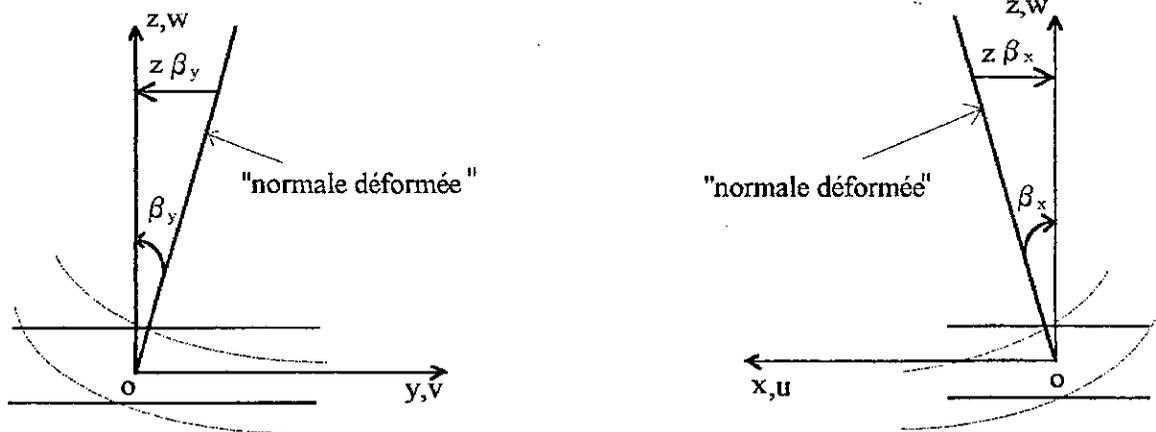


Figure 1.4 : Représentation des normales au plan moyen des déformées.

- On néglige la rotation autour de l'axe (Oz):

$$\beta_z = 0 \tag{I.49}$$

Les rotations dues au cisaillement sont données par [7]:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \tag{I.50}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \tag{I.51}$$

### I.3.2 Relations Déformations - Déplacements

Avec l'hypothèse des petites déformations, les déformations de flexion (linéaires à travers l'épaisseur) et de cisaillement (constantes à travers l'épaisseur) s'écrivent respectivement:

$$\{ \varepsilon_i \} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \{ \chi \} \tag{I.52}$$

avec:

$$\{ \chi \} = \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.53})$$

où  $\{ \chi \}$  est le vecteur courbure.

Le tenseur de déformation due au cisaillement est donné par:

$$\{ \gamma \} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + w_{,x} \\ \beta_y + w_{,y} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.54})$$

### I.3.3 Relations Contraintes - Déformations

Avec l'hypothèse des contraintes planes pour un matériau homogène et isotrope, où nous ne tenons pas compte du découplage (membrane flexion) les vecteurs contraintes s'écrivent:

- Pour la flexion:

$$\{ \sigma \}_f = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D_f] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.55})$$

ou encore:

$$\{ \sigma \}_f = [D_f] \{ \varepsilon \}_f = z [D_f] \{ \chi \} \quad (\text{I.56})$$

tel que:

$$[D_f] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{I.57})$$

- Pour le cisaillement:

$$\{ \sigma \}_c = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = [D_c] \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.58})$$

ou encore:

$$\{\sigma\}_c = [D_c] \{\gamma\} \quad (I.59)$$

tel que:

$$[D_c] = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (I.60)$$

### I.3.4 Détermination de l'Energie de Flexion

L'énergie interne de déformation due à la flexion et celle due au cisaillement transversal pour un élément s'écrivent respectivement:

$$U_f = \frac{1}{2} \int_V z^2 \{x\}' [D_f] \{x\} dv \quad (I.61)$$

$$U_c = \frac{1}{2} \int_V \{\gamma\}' [D_c] \{\gamma\} dv \quad (I.62)$$

$\{x\}$  et  $\{\gamma\}$  étant indépendants de "z", nous pouvons écrire:

$$U_f = \frac{1}{2} \int_S \{x\}' [D_f] \{x\} dS \quad (I.63)$$

$$U_c = \frac{1}{2} \int_S \{\gamma\}' [D_c] \{\gamma\} dS \quad (I.64)$$

où "S" est la surface du plan moyen de la plaque.

$$[D_f]' = \frac{h^3}{12} [D_f] \quad \text{et} \quad [D_c]' = k h [D_c] \quad (I.65)$$

h : est l'épaisseur de la plaque et "k" le coefficient de correction pour le cisaillement (généralement égal à 5/6).

les deux composantes de l'énergie interne de déformation peuvent s'écrire:

$$U_f = \frac{E h^3}{24 (1-\nu^2)} \int_{A^0} \left\{ \beta_{x,x}^2 + \beta_{y,y}^2 + 2\nu (\beta_{y,y} \beta_{x,x}) + \frac{1-\nu}{2} (\beta_{y,x} + \beta_{x,y}) \right\} dx dy \quad (I.66)$$

$$U_c = \frac{E h k}{4 (1+\nu)} \int_S \left\{ (w_{,x} + \beta_x)^2 + (w_{,y} + \beta_y)^2 \right\} dx dy \quad (I.67)$$

### I.3.5 Détermination des Moments de Flexion et des Efforts de Cisaillement

Les moments de flexion  $\{M\}$  et les efforts de cisaillement  $\{Q\}$  sont définis comme suit:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z \{ \sigma_f \} dz = [D_f] \{ \chi \} \quad (I.68)$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = k \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \{ \sigma_c \} dz = [D_c] \{ \gamma \} \quad (I.69)$$

une présentation positive de  $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x$  et  $Q_y$  est donnée à la figure.1.5.

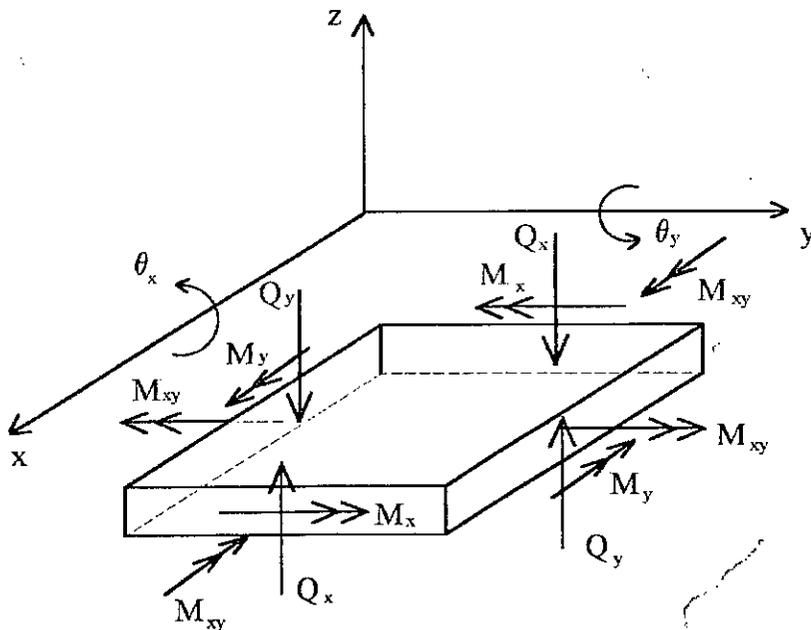


Figure 1.5 : Efforts de flexion  $M_x, M_y$  &  $M_{xy}$  et de cisaillement  $Q_x$  &  $Q_y$ .

Chapitre II

# FORMULATION ET LOIS DE COMPORTEMENT ELASTO - PLASTIQUE

L'une des raisons principales de l'emploi très général des matériaux est leurs propriétés d'être malléables c'est-à-dire déformables sans rupture sous l'effet de sollicitations mécaniques plus ou moins élevées.

L'aptitude des métaux à se déformer plastiquement dépend de beaucoup de facteurs qu'il est nécessaire de connaître en vue, d'autre part, du calcul des pièces et des constructions dans les quelles on cherche au contraire à éviter toute déformation plastique dans des conditions de services.

les propriétés plastiques des métaux sont principalement étudiés à l'aide d'essais mécaniques, au cours des quels on examine la déformation que subit le métal sous l'action d'un système de contrainte donnée (traction, compression, flexion, torsion, ...etc.).

Les propriétés mécaniques reflètent le comportement macroscopique du métal: la déformation observée est en fait le résultat de déformations produites localement à une échelle structurale beaucoup plus fine.

Cet aspect microscopique de la déformation plastique est fondamental pour la compréhension des phénomènes. C'est pourquoi les essais mécaniques sont toujours complétés par une étude local du mécanisme de déformation (rayon X, microscopie optique, microscopie électronique, ...etc.).

Dans ce chapitre nous rappelons les caractéristiques essentielles de l'élasto-plasticité avec écrouissage. Nous ne tenons pas compte des effets de température, ni ceux de viscosité. La formulation est limitée au cas des petits déplacements et petites déformations.

## II.1. DEFINITION D'UN MODELE ELASTO-PLASTIQUE

### II.1.1. Description du Comportement Elasto-Plastique

Le comportement élasto-plastique est caractérisé par une réponse initiale élastique sur laquelle s'ajoute une déformation plastique irréversible au-delà d'un certain niveau de contrainte qu'on appelle "seuil de plasticité". Les propriétés matérielles requises pour définir le comportement élasto-plastique sont obtenues par un essai de traction simple. Plusieurs types de comportements élasto-plastiques sont mentionnés sur la figure 2.1.

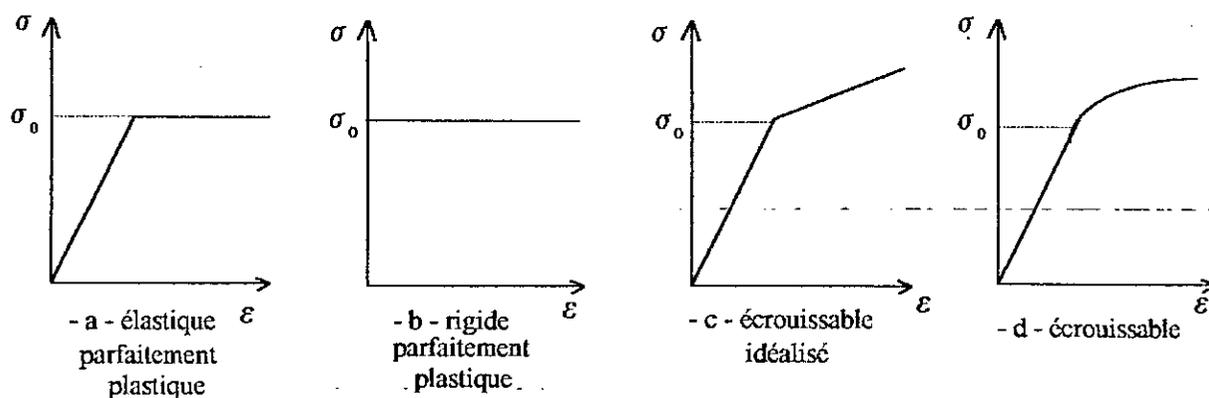


Figure.2.1 : Types de comportement des matériaux élasto-plastique

### II.1.2. Sollicitation Multiaxiale

Le taux de déformation est décomposé en un terme élastique et un terme plastique:

$$[d\varepsilon] = [d\varepsilon_e] + [d\varepsilon_p] \quad (\text{II.1})$$

le terme élastique est donné par la loi de Hooke:

$$[d\varepsilon] = \frac{1+\nu}{E} [d\sigma] - \frac{\nu}{E} (\text{trace}[d\sigma])[d] \quad (\text{II.2})$$

E étant le module de Young,  $\nu$  le coefficient de poisson,  $[\delta]$  la matrice identité.

## II.2. LOI DE COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUE

### II.2.1. Surface d'écoulement

L'expérience montre que dans le cas des chargements complexes, le domaine de limite élastique d'un matériau est un convexe de l'espace des contraintes. Dans le cas général, ce convexe est fonction des contraintes, des déformations plastiques et des paramètres d'écrouissage. Ce convexe est couramment appelé surface d'écoulement (ou seuil de plasticité). L'expression mathématique associée à cette surface constitue le critère de plasticité. L'évolution de cette surface dans l'espace est liée à la notion d'écrouissage. La forme générale donnée au critère de plasticité est:

$$F([\sigma], V_k) = 0 \quad (\text{II.3})$$

$V_k$ , étant des paramètres définissant l'écrouissage.

Le point représentatif de l'état de contrainte ne peut sortir de la surface de charge ( $F > 0$  est impossible) pendant l'écoulement continu; nous introduisons donc la condition de consistance:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial [\sigma]} d[\sigma] + \frac{\partial F}{\partial V_k} dV_k = 0 \quad (\text{II.4})$$

qui implique que le point représentatif de l'état de contrainte  $[\sigma] + [d\sigma]$  reste sur la surface de charge alors qu'une décharge est définie par  $dF < 0$ . Nous avons donc:

$F < 0$	—————→	Comportement élastique
$F = 0$ et $dF < 0$	—————→	Comportement élastique
$F = 0$ et $dF = 0$	—————→	Comportement plastique

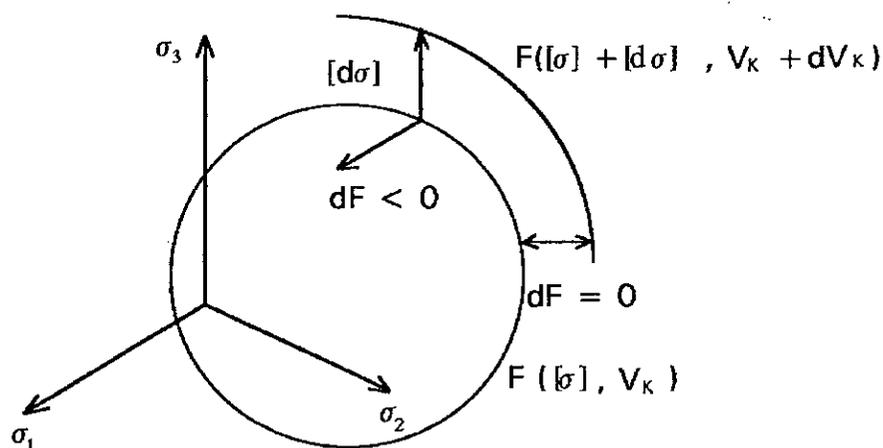


Figure 2.2 : Critère de charge décharge dans le cas d'un comportement élasto-plastique

## II.2.2. Phénomène d'écrouissage

Un matériau est dit écrouissable si sa surface d'écoulement (ou limite élastique) varie au cours de son histoire de chargement. Autrement dit il n'existe pas un seuil de plasticité mais une infinité de seuils. La valeur de la contrainte d'écoulement d'un matériau est une caractéristique de son état; nous parlerons alors de contrainte d'écoulement d'un matériau donné dans un état donné.

Les deux modèles d'écrouissage les plus utilisés et les plus simples traduisant la variation de surface d'écoulement sont:

### II.2.2.1. Ecrouissage isotrope:

Pour un matériau isotrope dans son état initial, on fait l'hypothèse que cette isotropie n'est pas perturbée par l'apparition de déformations plastiques. La surface

d'écoulement se transforme au cours du chargement par une homothétie de rapport supérieur à 1 [4] (Fig.2.3.a) ce qui permet d'écrire le critère:

$$F([\sigma], P) = 0 \quad (\text{II.5})$$

P caractérise une mesure de l'écrouissage isotrope qui est déterminée à partir d'un essai expérimental uni axial. Ce paramètre peut être assimilé: [9]

- Au travail de déformation plastique:

$$dP = dW^P \quad (\text{II.6})$$

avec:

$$dW^P = [\varepsilon^T][\sigma]$$

- A la déformation plastique cumulée:

$$dP \equiv d\varepsilon^P \quad (\text{II.7})$$

avec:

$$d\varepsilon^P = \left( \frac{2}{3} [d\varepsilon_p]^T [d\varepsilon_p] \right)^{1/2}$$

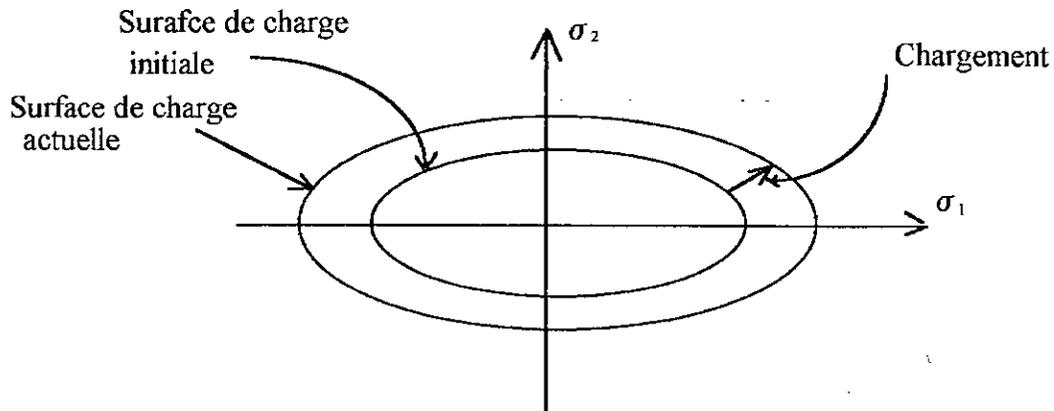


Figure 2.3.a : Ecroissage isotrope

#### II.2.2.2. Ecroissage cinématique:

Au cours d'un chargement cyclique l'écart (en valeur absolue) entre la limite élastique en compression et la limite élastique en traction s'accroît:

C'est l'effet Bauschinger. Il y a apparition d'une anisotropie non prise en compte par le modèle d'écroissage isotrope. L'écroissage cinématique prend

en compte cette anisotropie: On fait l'hypothèse que la surface d'écoulement garde sa forme et ses dimensions mais qu'elle se translate dans l'espace de contraintes (fig.2.3.b). Le critère prend la forme générale suivante[4]:

$$F([\sigma],[\alpha]) = 0 \quad (\text{II.8})$$

$[\alpha]$  est une grandeur "tensorielle" associée à la translation du centre de la surface d'écoulement. Deux hypothèses sont faites pour caractériser cette grandeur:

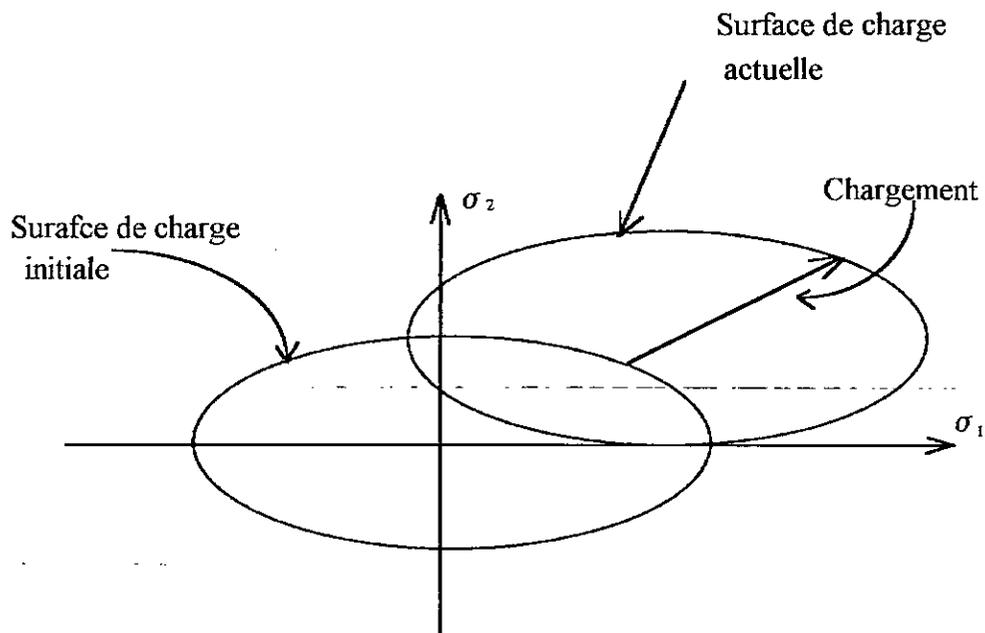


Figure 2.3.b : Ecroutissage cinématique

### II.2.2.3. Hypothèse de Ziegler:

$$[d\alpha] = ([\sigma] - [\alpha]) d\mu \quad (\text{II.9})$$

la translation s'effectue dans la direction joignant le centre de la surface d'écoulement au point représentant l'état de contrainte sur cette surface (fig. 2.4.a). Le paramètre  $d\mu$  est défini en exprimant que le nouveau champ de contraintes reste plastiquement admissible. [4]

### II.2.2.4. Hypothèse de Prager:

$$[d\alpha] = C [d\varepsilon_p] \quad (\text{II.10})$$

La translation s'effectue dans la direction des déformations plastiques (Fig. 2.4.b). La constante C est déterminée à partir d'un essai uni axial.

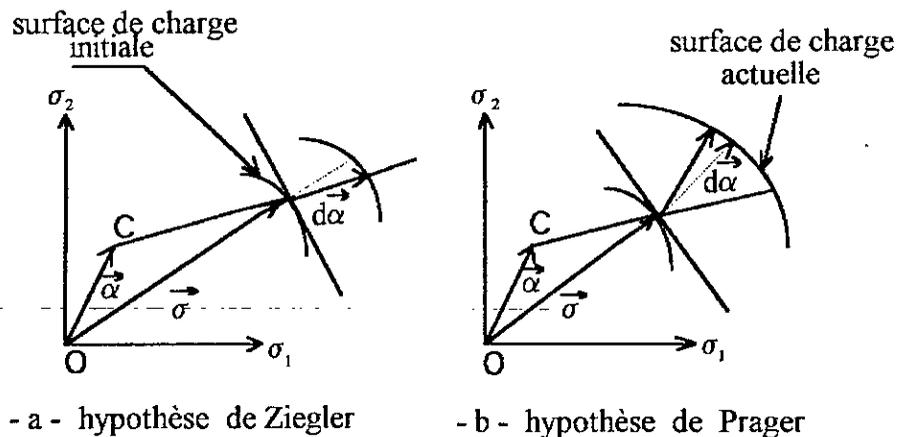


Figure 2.4 : Hypothèse de caractérisation de l'écrouissage cinématique

Dans ce qui suit, nous ne nous intéresserons qu'à l'écrouissage isotrope.

### II.2.3. Critère de plasticité

Un critère de plasticité doit être indépendant de l'orientation du système de coordonnées et sera donc fonction des invariants du tenseur des contraintes.

$$\begin{aligned} J_1 &= \text{tr}([\sigma]) \\ J_2 &= \frac{1}{2} \text{tr}([\sigma]^2) \\ J_3 &= \frac{1}{3} \text{Det}([\sigma]) \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

Les résultats expérimentaux indiquent que la déformation plastique ne dépend pas de la contrainte hydrostatique [3]. Par conséquent, la fonction de charge s'écrit [9]:

$$F(J'_2, J'_3, P) \quad (\text{II.12})$$

$J'_2$  et  $J'_3$  sont respectivement le second et le troisième invariant du tenseur déviateur des contraintes défini par:

$$[S] = [\sigma] - \frac{\text{tr}[\sigma]}{3} [\delta] \quad (\text{II.13})$$

Les expressions les plus courantes données à la surface d'écoulement pour les matériaux métalliques sont celles de Tresca (1864) et Von-Mises (1913). Ces deux critères sont définis comme suit:

### II.2.3.1. Critère de Tresca:

La déformation plastique apparaît lorsque la contrainte de cisaillement maximale dépasse un certain niveau:

$$F([\sigma]) = \sup |\sigma_i - \sigma_j| - \sigma_0 \quad (\text{II.14})$$

où  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  sont les contraintes principales,  $\sigma_0$  est la limite élastique en traction simple (fig. 2.1). Il est représenté dans l'espace des contraintes principales par un cylindre d'axe (1,1,1) à base hexagonale régulière (fig. 2.5).

### II.2.3.2. Critère de Von-Mises:

La déformation plastique apparaît lorsque le second invariant du tenseur déviateur des contraintes atteint une certaine valeur.

$$F([\sigma]) = (J'_2)^{\frac{1}{2}} - k \quad (\text{II.15})$$

$$J'_2 = \frac{1}{2} \text{tr}([S]^2)$$

$k$  est la limite d'élasticité en scission simple,

$k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0$ ,  $\sigma_0$  est la limite d'élasticité en traction simple.

Dans l'espace des contraintes principales il s'écrit:

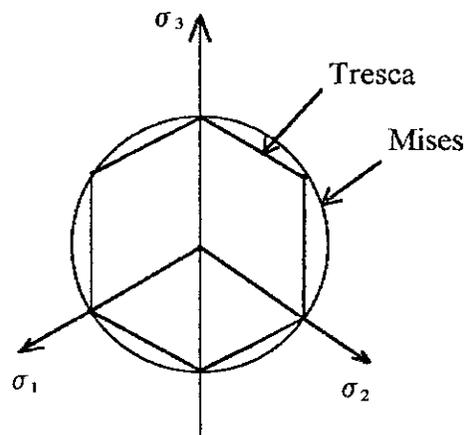
$$F([\sigma]) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_0^2$$

Ce critère est représenté dans l'espace des contraintes principales par un cylindre d'axe  $(1,1,1)$  à base circonscrit à l'hexagone de Tresca (fig. 2.5). Il a l'avantage de ne pas présenter une discontinuité de la normale comme c'est le cas du critère de Tresca. L'interprétation physique donnée à ce critère est que la plastification ne commence que lorsque l'énergie interne de déformation élastique atteint une certaine valeur.

Remarque : si on pose  $\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} \text{tr}([\mathbf{S}]^2)$ ,  $\bar{\sigma}$  dite contrainte équivalente (ou de comparaison) le critère s'écrit:

$$\bar{\sigma} - \sigma_0 = 0 \quad (\text{II.16})$$

D'autres formes de critères de plasticité sont proposées dans la littérature [9]: critères de Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, ...etc.



**Figure 2.5** : Représentation géométrique des critères de plasticité de Tresca et de Von-Mises.  
(Projection dans le plan octaédral)

## II.2.4. Loi d'écoulement

### II.2.4.1. Principe de Hill:

Le principe de Hill (1951) stipule que "Dans la déformation réelle le travail des contraintes réelles est supérieur ou au moins égal à celui de toute autre travail de contraintes admissibles".

L'interprétation physique donnée à ce principe est que, pour une déformation donnée un état de contrainte sur la surface de charge dissipe un maximum d'énergie.

Parmi les conséquences de ce principe, le vecteur déformation plastique est normal à la surface de charge et orienté vers l'extérieur [9] d'où la loi de normalité:

$$[d\varepsilon_p] = d\lambda \frac{\partial F}{\partial [\sigma]} \quad (\text{II.17})$$

$d\lambda$  est un coefficient de proportionnalité dépendant de  $[\sigma]$ ,  $P$  et  $[d\sigma]$  ( $d\lambda > 0$ ) que nous appelons aussi multiplicateur plastique.

Nous avons vu que le point représentatif de la surface de charge nécessitait d'imposer  $F = 0$  et  $dF = 0$  au cours de l'écoulement plastique. Cette dernière condition implique que:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial [\sigma]} d[\sigma] + \frac{\partial F}{\partial P} dP = 0 \quad (\text{II.18})$$

de plus il a été montré que [9] et [2]:

$$\frac{\partial F}{\partial [\sigma]} = [S] \quad (\text{II.19})$$

d'où la relation de Prandtl-Reuss:

$$d\varepsilon_{ij} = [d\varepsilon_e] + [d\varepsilon_p] = \frac{1+\nu}{E}[d\sigma] - \frac{\nu}{E} \text{tr}([\sigma])[d\delta] + d\lambda \frac{\partial f}{\partial [\sigma]} \quad (\text{II.20})$$

## II.3. FLEXION ELASTO-PLASTIQUE DES PLAQUES

### II.3.1. Description d'un problème élasto-plastique en flexion

Lorsque le moment appliqué augmente, les fibres extrêmes de la plaque sont les premiers à atteindre le seuil de plasticité, et les contraintes normales de toutes les autres fibres intérieures, qui restent, varient linéairement en fonction de leur distance par rapport à l'axe neutre comme le montre la figure 2.6.b. Toute augmentation supplémentaire du moment porte les fibres intérieures au seuil de plasticité. La plasticité progresse depuis les fibres extérieures vers les fibres intérieures comme le montre la figure (2.6.c); Et la distribution des contraintes normales, quand on atteint la plastification de toutes les fibres, est donc représentée dans la figure 2.6.d, Le moment correspondant à ce cas de figure est appelé moment totalement plastique.

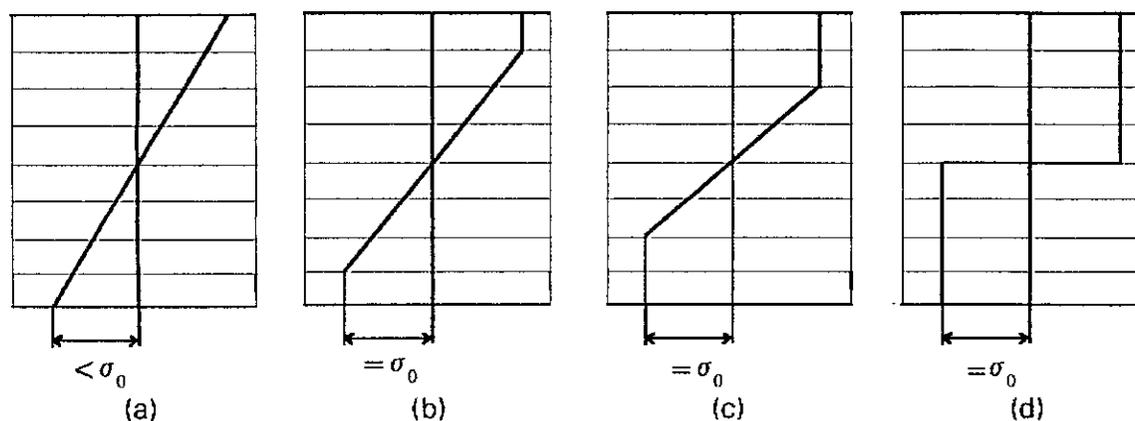


Figure 2.6 : Evolution de la plasticité parfaite en flexion

### II.3.2. Approches du problème

Deux approches différentes sont à considérer pour l'étude de la flexion des plaques en élasto-plasticité.

### II.3.2.1. Approche en multicouches:

En suivant l'évolution de la plasticité à travers l'épaisseur, la plaque est divisée en un nombre de couches de manière qu'elles se plastifient séparément.

Malgré le grand intérêt que porte cette approche vers la réalité, elle présente l'inconvénient de la lenteur numérique pour les plaques épaisses.

### II.3.2.2. Approche en monocouche:

Dans cette approche, on suppose que la section entière de la plaque se plastifie instantanément lorsque le moment de flexion atteint le moment "limite élastique". Cette approche malgré sa grande généralité présente des résultats satisfaisants pour les plaques minces.

En réalité il existe une plastification graduelle qui progresse depuis les fibres extérieures vers les fibres intérieures jusqu'à ce que la section soit entièrement plastique.

L'analyse élastique des plaques est faite en terme de variables généralisées (ou globale):  $\{\chi\}$  et  $\{M\}$ . L'extension à l'analyse élasto-plastique avec ces mêmes variables nécessite une adaptation des lois élasto-plastiques présentées ci dessus. Cette adaptation se fait conformément aux définitions qui lient  $\{\varepsilon\}$  et  $\{\sigma\}$  aux variables globales, soient:

$$\begin{cases} [\varepsilon] = z [\chi] \\ [\sigma] = \frac{12}{h^3} z [M] \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

où  $h$  est l'épaisseur de la plaque.

Les transformations nécessaires pour exprimer les critères de plasticité (en particulier pour le critère de Von-Mises) sont faites en considérant que l'hypothèse de kirchhoff reste valable dans le domaine élasto-plastique et qu'un couple  $\{M\}$  est dit plastiquement admissible s'il lui correspond au moins une distribution de contrainte  $\{\sigma\}$  plastiquement admissible.

L'expérience montre que sous ces hypothèses en flexion pure, le critère garde la même forme en moment  $\{M\}$  que celle en contraintes  $\{\sigma\}$ . Le moment "limite élastique"  $M_p$  s'exprime en fonction de la limite élastique par la relation suivante [9]:

$$M_p = h^2 \frac{\sigma_0}{4} \tag{II.22}$$

Les critères de Tesca et Von-Mises s'écrivent respectivement:

$$F([M]) = \text{Sup} |M_i - M_j| - M_p \tag{II.23}$$

$$F([M]) = M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3M_{xy}^2 - M_p^2 \tag{II.24}$$

où  $M_i$  et  $M_j$  sont les moments principaux.

Pour les matériaux écrouissables, le moment  $M_p(\chi_p)$  peut être déduit à partir d'une courbe expérimentale  $(M, \chi)$  où par le calcul à partir d'une courbe uni axiale de traction simple en gardant la même définition du travail de déformation plastique ainsi que la déformation plastique cumulée (&II.2.2).

### II.3.3. Expressions des moments et efforts tranchants

les moments de flexion  $\{M\}$  et les efforts de cisaillement  $\{Q\}$  sont définis comme suit:

$$\{M\} = [D_f] \{X\} \tag{II.25}$$

$D_f = \frac{h^3}{12} [D_f]$  est la rigidité flexionnelle dans le cas d'une approche monocouche

pour une approche multicouche, il faut il faut sommer la contribution de chaque couche, on a alors:

$$[D_f] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} (z_{i+1} + z_i) (z_{i+1}^2 - z_i^2) [D_f] \tag{II.26}$$

$n$  : étant le nombre de couche totale de la plaque

$$\{Q\} = [D_c] \{\gamma\}$$

$[D_c]$  est la rigidité de cisaillement définie par (I.27)

dans le cas d'une plaque multicouche:

$$[D_c] = k \sum_{i=1}^n (z_{i+1} - z_i) [D_c] \quad (\text{II.27})$$

k : est le coefficient de correction pour le cisaillement (généralement égal à 5/6)

$[D_f]$  et  $[D_c]$  sont données dans le chapitre I par les équations I.57 et I.60 .

Chapitre III

# INTRODUCTION DU MODELE ELASTO - PLASTIQUE DANS UN CODE D'ELEMENTS FINIS

Pour surmonter l'impossibilité de résoudre des problèmes continus réels, différentes méthodes ont été proposées dans le but d'approcher aussi précisément que possible la solution exacte du problème. En effet, le double processus de subdivisions des systèmes en composants élémentaires dont le comportement peut être facilement appréhendé, et la reconstitution du système initial à partir de ses composants est un moyen naturel d'étude utilisé par l'ingénieur et le scientifique.

Parmi les méthodes de discrétisation les plus importantes et les plus utilisées dans le calcul des structures, la méthode des éléments finis qui consiste à subdiviser le milieu continu en un nombre fini d'éléments, et la méthode des équations intégrales qui consiste à subdiviser le contour du milieu continu en un nombre fini d'éléments. Cette dernière qui est moins connue et qui est d'une exploitation beaucoup plus récente, présente certains avantages par rapport à la première dont les plus importants sont:

- Simplification du maillage.
- Réduction de la taille du système d'équations à résoudre.
- Possibilité de calculer les contraintes et les déformations en tout point du milieu.

Cette méthode présente néanmoins des inconvénients dont les plus importants sont:

- Matrice du système d'équation nettement moins bien conditionnée.
- Possibilité de calcul d'intégrales singulières.

- Formulation assez complexe surtout pour des problèmes non-linéaires. Cependant, avant de pouvoir éventuellement déterminer si, ou dans quel cas, une méthode est plus avantageuse que l'autre, il faudrait alors comparer temps de calcul, convergence et précision.

### III.1. DISCRETISATION EN ELEMENTS FINIS

Dans la méthode des éléments finis, la discrétisation est réalisée en subdivisant le milieu continu en un certain nombre d'éléments séparés par des lignes ou des surfaces imaginaires. Ces éléments sont supposés s'interconnecter en un nombre fini de points situés sur leur frontière et qu'on appelle noeuds. Les déplacements de ces noeuds seront les inconnus de base du problème.

Le choix d'un ensemble de fonctions permettra de définir de façon unique les déplacements en tout point interne à l'élément en fonction des déplacements nodaux. [13]

Nous représenterons approximativement les déplacements  $u_i$  en chaque point de l'élément par:

$$u_i = N_j d_j \quad i = 1, n \quad j = 1, m \quad (\text{III.1})$$

$m$  étant la dimension du problème,  $n$  le nombre de noeuds par élément,  $d_j$  sont les déplacements aux noeuds; c'est à dire que nous imposons que le déplacement approché coïncide avec le déplacement exacte en ces noeuds.

Les composantes  $N_j$  sont des fonctions des coordonnées du point qui doivent être choisies de telle sorte que nous obtenions les bons déplacements nodaux par substitution des coordonnées des noeuds; ces fonctions sont dénommées fonctions de forme.

L'approximation par éléments finis présente deux aspects distincts. [6]

- Il faut d'abord définir la géométrie des éléments.
- Il faut ensuite construire les fonctions d'interpolation correspondant à chaque élément.

La partition du milieu en éléments doit respecter deux règles. [6]

- Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur leur frontière commune, si elle existe. Cette condition exclut le recouvrement de deux éléments.
- L'ensemble de tous les éléments doit constituer un domaine aussi proche que possible du milieu réel à étudier. Cette condition exclut les "trous" entre éléments

Il existe plusieurs types d'éléments définis par [6].

- Leur forme,
- Leur nombre de noeuds,
- Les coordonnées de leurs noeuds,
- Le nombre de degrés de liberté par noeuds,
- La base polynomiale de l'approximation.

Dans un milieu bidimensionnel, la discrétisation peut se faire par des triangles ou des quadrilatères; les noeuds se trouvant au niveau de chaque sommet.

Nous notons que la précision peut être améliorée en ajoutant des noeuds sur la frontière et/ou à l'intérieur de l'élément [6].

## III.2. HYPOTHESES FONDAMENTALES

Dans cette étude, nous sommes amené à résoudre un problème aux limites non linéaire. Pour cela, nous avons fait certaines hypothèses simplificatrices:

- Chargement quasi-statique; cela permet de négliger les termes dynamiques.
- petits déplacements; cela permet de confondre les variables d'Euler et celle de Lagrange et de négliger le changement de configuration. [8]

## III.3. FORMULATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

### III.3.1. Principe des travaux virtuels

Soit un milieu  $\Omega$  de contour  $\Gamma$  sous l'action d'une force de volume  $b_i$  et d'une force de surface  $t_i$ . Le principe des travaux virtuels stipule qu'en imposant un déplacement virtuel arbitraire  $\delta u_i$ , l'énergie de déformation interne et le travail des forces extérieures sont égaux.

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma} \delta u_i t_i d\Gamma = 0 \quad (\text{III.2})$$

en absence des efforts de traction (III.2) se réduit à:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega = 0 \quad (\text{III.3})$$

### III.3.2. Approximation du problème par éléments finis

Comme nous l'avons mentionné auparavant, la discrétisation en éléments finis permet d'exprimer les déplacements en fonction des déplacements nodaux; la formulation isoparamétrique permet d'évaluer séparément la contribution de chaque élément. Pour cela, les déplacements sont exprimés de manière usuelle pour un élément (e) comme:

$$\begin{aligned} u_i &= N_{ij} d_j \\ \delta u_i &= N_{ij} \delta d_j \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Afin d'obtenir une bonne précision, nous avons opté pour les éléments isoparamétriques d'ordre élevé à savoir des éléments carrés, rectangulaire à huit et neuf noeuds (fig. 3.1). Ces éléments sont généralement basés sur la théorie de Reissner-Mindlin avec prise en compte du cisaillement transverse. Ils présentent une simplicité dans leur formulation basée sur trois variables indépendantes  $w$ ,  $\beta_x$  et  $\beta_y$ . La conformité de ces éléments est facilement obtenue, en effet, la condition de compatibilité inter-éléments nécessite une continuité de type  $C^0$ , contrairement à la théorie de kirchhoff où la continuité est d'ordre supérieur (type  $C^1$ ).

Dans notre étude on s'est étendu à l'élément Hétérosis récemment développé par Hughes [7]. Il est basé sur des fonctions d'interpolation de Serendip pour "w" et des fonctions d'interpolation de Lagrange pour  $\theta_x$  et  $\theta_y$ . Il possède donc un noeud central avec  $\theta_x$  et  $\theta_y$  comme degré de liberté. Ses performances sont excellentes, il permet aussi la modélisation des plaques très minces.

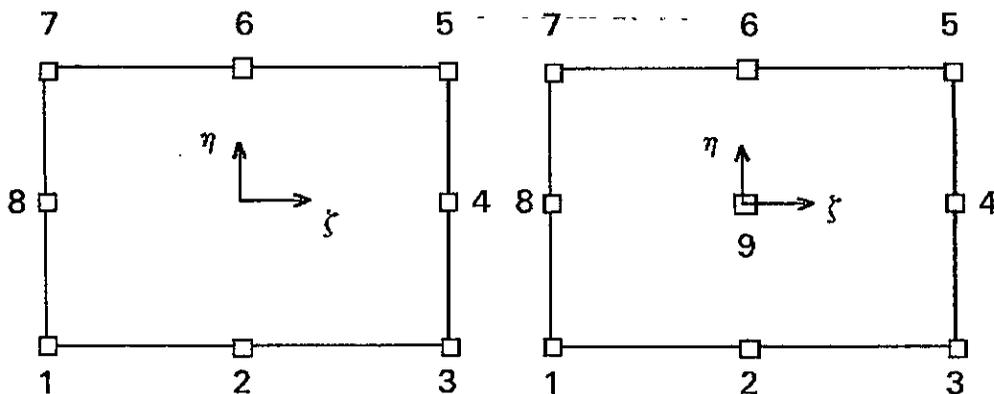


Figure 3.1 : Représentation des deux types d'éléments.

Nous notons que l'évaluation de la contribution de chaque élément nécessite l'emploi d'un repère local lié à l'élément.

Les fonction de formes correspondantes sont données par [9].

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1) \quad \text{pour les noeuds des coins soit } i = 1, 3, 5, 7$$

$$N_i = \frac{\xi_i^2}{2} (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2} (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta^2) \quad \text{pour les noeuds des milieux de côtés soit } i = 2, 4, 6, 8$$

$$N_i = (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) \quad \text{pour le noeud du centre soit } i = 9$$

$\xi$  et  $\eta$  sont les coordonnées exprimées dans le repère lié à l'élément.

Une fois le champ de déplacement connu, nous pouvons déterminer le champ de déformation en faisant l'hypothèse des petits déplacements et des petites déformations, soit:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{III.5})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_j} d_j + \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_i} d_i \right) \quad (\text{III.6})$$

pour des raisons de simplicité,  $\varepsilon_{ij}$  et  $\sigma_{ij}$  seront représentés sous forme de vecteurs  $\varepsilon_i$  et  $\sigma_i$ , nous avons donc:

$$\varepsilon_i = B_{ij} d_j \quad (\text{III.7})$$

$B_{ij}$  sont les composantes de la matrice des dérivées des fonctions de forme. qui s'expriment dans le cas des déformations dues à la flexion par:

$$(B_{ij})_f = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x_2} & -\frac{\partial N_i}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

et pour une contribution des déformations dues au cisaillement elle est donné par:

$$(B_{ij})_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Le champ de contrainte est déterminé à partir du champ de déformation par:

$$\sigma_i = H(\varepsilon_i) \quad (\text{III.10})$$

dans le cas d'un comportement élastique, (III.10) devient:

$$\sigma_i = D_{ij} \varepsilon_j \quad (\text{III.11})$$

avec:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_f \\ \sigma_c \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_f \\ \varepsilon_c \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_f & 0 \\ 0 & D_c \end{bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

En substituant (III.4) et (III.7) dans l'expression du principe des travaux virtuels (III.3) nous obtenons:

$$\delta d_i \left[ \int_{\Omega} (B_{ij})_f (\sigma_i)_f x_3 d\Omega + (B_{ij})_c (\sigma_i)_c d\Omega - \int_{\Omega} N_{ij} b_i d\Omega \right] = 0 \quad (III.13)$$

$\delta d_i$  sont les déplacements nodaux virtuels arbitraires. l'équation (III.13) se réduit donc à:

$$\int_{\Omega} (B_{ij})_f (\sigma_i)_f x_3 d\Omega + \int_{\Omega} (B_{ij})_c (\sigma_i)_c d\Omega - \int_{\Omega} N_{ij} b_i d\Omega = 0 \quad (III.14)$$

L'intégration se fera au niveau de chaque élément. L'élément de volume est donc donnée par:

$$d\Omega = h \det J d\xi d\eta \quad (III.15)$$

J est le Jacobien défini par:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (III.16)$$

L'équation (III.14) devient pour un comportement élastique:

$$\int_{\Omega} B_{il} (D_{il})_c B_{ij} d_j d\Omega + \int_{\Omega} x_3^2 B_{il} (D_{il})_f B_{ij} d_j d\Omega - \int_{\Omega} N_{ij} b_j d\Omega = 0 \quad (III.17)$$

que nous pouvons mettre sous la forme:

$$k_{ij} d_j = f_{B_i} \quad (III.18)$$

avec:

$$k_{ij} = \int_{\Omega} (B_{il})_c (D_{il})_c B_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} x_3^2 B_{il} (D_{il})_f B_{ij} d\Omega \quad (III.19)$$

$$f_{B_i} = \int_{\Omega} N_{ij} b_j d\Omega \quad (III.20)$$

$k_{ij}$  sont les composantes de la matrice de rigidité de l'élément (e),  $f_{B_i}$  sont les forces nodales équivalentes.

Pour tenir compte de la contribution de tous les éléments, nous réalisons l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires et des vecteurs forces nodales par la sommation, au niveau de chaque degrés de liberté, des contributions des éléments. Nous aboutissons donc à un système d'équation global:

$$K_{ij}d_j = F_i \quad (\text{III.21})$$

que nous pouvons résoudre soit par des méthodes directes, soit par des méthodes itératives.

## III.4. MODELISATION ELASTO-PLASTIQUE

### III.4.1. Modélisation en multicouche

Comme nous l'avons mentionné au chapitre II la plaque est subdivisée en un nombre fini de couches symétrique par rapport au plan moyen (fig. 3.2).

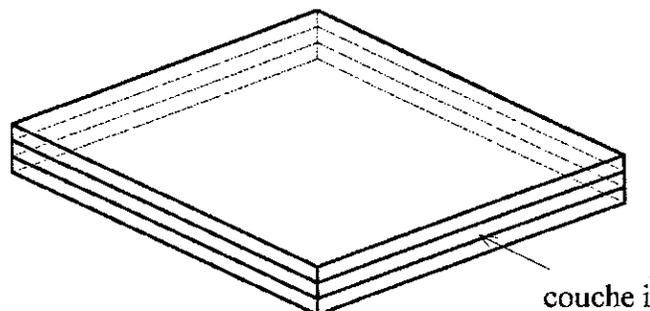


Figure 3.2 : Plaque multicouche

L'approximation du problème par éléments finis est faite en supposant que les couches extérieures de la plaque se plastifient lorsque la contrainte normale au milieu de ces dernières dépasse le seuil élastique, dans ce cas La surface d'écoulement qui ne dépend que des efforts de flexion est définie par: [9]

$$F((\sigma_i)_t, P) = 0 \quad (\text{III.22})$$

en différentiant (III.22) nous aboutissons à la relation (II.17) sous la forme suivante.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial(\sigma_i)_f} d(\sigma_i)_f + \frac{\partial F}{\partial P} dP = 0 \quad (\text{III.23})$$

ou:

$$a_i d(\sigma_i)_f - Ad\lambda = 0 \quad (\text{III.24})$$

avec:

$$a_i = \frac{\partial F}{\partial(\sigma_i)_f} = \left[ \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} \right]^T \quad (\text{III.25})$$

et

$$A = - \frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial P} dP \quad (\text{III.26})$$

$a_i$  est appelé vecteur d'écoulement plastique.

Les relations de Prandtl-Reuss s'écrivent:

$$d\varepsilon_i = \left[ (D_{ij})_f \right]^{-1} d(\sigma_j)_f + d\lambda \frac{\partial F}{\partial(\sigma)_i} \quad (\text{III.27})$$

En multipliant les deux membres de l'équation (III.27) par  $d_{D_i} = a_i D_{ij}$  et en éliminant le terme  $a_i d\sigma_i$ , nous obtenons:

$$d\lambda = \frac{1}{A + a_j \left[ (D_{ij})_f \right] a_i} a_j d_{D_i} d\varepsilon_i \quad (\text{III.28})$$

En substituant l'équation (III.28) dans les relations de Prandtl-Reuss (III.27), nous obtenons la relation incrémentale contrainte-déformation:

$$d(\sigma_i)_f = \left[ (D_{ij})_f \right]_{ep} d\varepsilon_j \quad (\text{III.29})$$

Cette loi est de même forme que celle de Hooke en élasticité si on pose:

$$\left[ (D_{ij})_f \right]_{ep} = (D_{ij})_f - \frac{d_{D_i} d_{D_j}}{A + d_{D_i} a_i} \quad (\text{III.30})$$

et

$$d_{D_i} = (D_{ij})_f a_j$$

$[(D_{ij})_f]_{ep}$  est la matrice dite " rigidité de flexion " élasto-plastique.

Il reste à déterminer le scalaire A; pour cela, l'équation (III.22) est réécrite comme suit:

$$F((\sigma_i)_f, P) = F((\sigma_i)_f) - R_e(P) = 0 \quad (\text{III.31})$$

où  $R_e$  est la limite élastique en traction simple,

et A devient donc:

$$A = -\frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial P} dP = \frac{1}{d\lambda} \frac{dR_e}{dP} dP \quad (\text{III.32})$$

Nous utilisons le travail plastique dissipé comme variable scalaire évaluant l'état d'érouissage du matériau.

$$d\bar{p} = (\sigma_i)_f (d\varepsilon_i)_p \quad (\text{III.33})$$

A partir de l'équation (III.33) et (II.17), nous obtenons:

$$dP = (\sigma_i)_f d\lambda \frac{\partial F}{(\partial \sigma_i)_f} \quad (\text{III.34})$$

soit:

$$dP = d\lambda a_i (\sigma_i)_f \quad (\text{III.35})$$

Pour le cas d'un problème uni axial,  $\sigma_i = \bar{\sigma} = R_e$  et  $(d\varepsilon_i)_p = d\bar{\varepsilon}_p$  où  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{\varepsilon}_p$  sont respectivement la contrainte et la déformation équivalentes.

$$dP = R_e d\bar{\varepsilon}_p = d\lambda a_i (\sigma_i)_f$$

Nous avons de plus:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}_p} = \frac{dR_e}{d\bar{\varepsilon}_p} = H' \quad (\text{III.36})$$

En appliquant le théorème d'Euler pour les fonctions homogènes d'ordre un, nous avons à partir de l'équation (III.31). [9]

$$\frac{\partial F}{\partial (\sigma_i)_f} (\sigma_i)_f = R_e \quad (\text{III.37})$$

où

$$a_i (\sigma_i)_f = R_o$$

En substituant les équations (III.36) et (III.37) dans les équations (III.35) et (III.32) nous obtenons:

$$\begin{aligned} d\lambda &= d\bar{\epsilon}_p \\ A &= H' \end{aligned} \quad (III.38)$$

A est donc la pente locale de la courbe contrainte - déformation plastique.

### III.4.2. Modélisation en monocouche

L'approximation du problème en monocouche par éléments finis est faite en supposant que la section entière de la plaque devient plastique lorsque le moment de flexion dépasse une certaine valeur " Moment seuil ". La fonction de charge s'écrit alors en fonction du moment de flexion sous la forme suivante:

$$F(M_i, \bar{P}) = 0 \quad (III.39)$$

$\bar{P}$  caractérise une mesure d'écrouissage pour une flexion pure.

Les Relations écrites en (III.22) jusqu'à (III.38) pour un problème multicouche s'écrivent en fonction de  $\{\chi\}$ ,  $\{M\}$  pour un problème monocouche:

l'hypothèse des petites déformations se met sous la forme:

$$\{d\chi_i\} = \{d\chi_i\}_e + \{d\chi_i\}_p \quad (III.40)$$

avec:

$$\{d\chi_i\}_e = [D_{ij}]_r^{-1} \{dM\} \quad , \quad [D_{ij}]_r \quad \text{rigidité flexionnelle}$$

$$\{d\chi_i\}_p = \lambda \left\{ \frac{\partial F}{\partial M} \right\}$$

le vecteur d'écoulement plastique ainsi que la rigidité de flexion plastique sont donnés par:

$$a_i = \frac{\partial F}{\partial M_i} = \left[ \frac{\partial F}{\partial M_1} \quad \frac{\partial F}{\partial M_2} \quad \frac{\partial F}{\partial M_3} \right]^T \quad (\text{III.41})$$

$$\left[ (D_{ij})_{ep} \right]_f = (D_{ij})_f - \frac{d_{D_i} d_{D_j}}{A + d_{D_i} a_i} \quad (\text{III.42})$$

Le reste du développement pour le calcul du scalaire A se fait conformément à celui présenté en multicouche.

Pour un problème élasto-plastique, la rigidité du matériau varie continuellement, de plus le caractère incrémental de la relation contrainte-déformation exige l'utilisation d'une méthode de résolution itérative. En choisissant une solution initiale, le principe des travaux virtuels s'écrit:

$$\delta d_i \left\{ \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left[ (B_{ij})_t (\sigma_i)_t x_3 + (B_{ij})_c (\sigma_i)_c - N_{ij} b_i \right] dz dA \right\} = 0 \quad (\text{III.43})$$

où:

$$\Psi_i = 0 \quad (\text{III.44})$$

$\Psi_i$  étant le vecteur des forces résiduelles.

l'expression (III.43) reste valable pour une approche en multicouche.

Pour une épaisseur  $h = \text{cst}$ , une intégration a travers l'épaisseur devient donc nécessaire. l'équation (III.43) se réduit donc à:

$$\int_A \left[ (B_{ij})_t (M_i) + (B_{ij})_c (Q_i) - N_{ij} q \right] dA = 0 \quad (\text{III.45})$$

où:

$$\Psi_i = 0$$

l'équation (III.45) n'est utilisé que pour une approche monocouche.

Ainsi les équations d'équilibres de la plaque qui doivent être satisfaites à chaque itération pour chaque incrément sont:

$$\Psi_i + K_{T_{ij}} \Delta d_j = 0 \quad (\text{III.47})$$

où  $K_{T_{ij}}$  représente la rigidité tangentielle qui s'exprime dans le cas d'une approche multicouche par:

$$K_{T_y} = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ [B_{ii}]_f [(D_{ii})_f]_{ep} [B_{jj}]_f + [B_{ii}]_c [(D_{ii})_c] [B_{jj}]_c \right\} dA \quad (\text{III.48})$$

pour une approche multicouche  $K_{T_y}$  est obtenus à partir d'une intégration à travers l'épaisseur de l'expression (III.48) ainsi on aura:

$$K_{T_{ij}} = \int_A \left\{ [B_f]_{ii} [(D_{ep})_f]_{ii} [B_f]_{ii} + [B_c]_{ii} [(D_c)_f]_{ii} [B_c]_{ii} \right\} dA \quad (\text{III.49})$$

Expression similaire à celle d'un comportement élastique linéaire.

### III.5. RESOLUTION NUMERIQUE

Pour faciliter les calculs numériques, il est préférable d'écrire le critère de plasticité ainsi que le vecteur d'écoulement plastique en fonction des invariants du tenseur déviateur des contraintes. Cela reste valable pour une approche multicouche, la généralisation des calculs présentés dans le cas monocouche se fait suivant les remarques faites dans (III.4.2).

Les contraintes principales déviatoriques sont les racines de l'équation:

$$t^3 - J'_2 t - J'_3 = 0 \quad (\text{III.50})$$

En posant  $t = r \sin \theta$ , nous obtenons:

$$\sin^3 \theta - \frac{J'_2}{r^2} \sin \theta - \frac{J'_3}{r^3} = 0 \quad (\text{III.51})$$

En comparant l'équation (III.51) à l'identité trigonométrique:

$$\sin^3 \theta - \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta = 0 \quad (\text{III.52})$$

nous obtenons:

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J'_2} \quad (\text{III.53})$$

$$\sin 3\theta = -\frac{4J'_3}{r^3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J'_3}{J_2^{3/2}} \quad (\text{III.54})$$

Les Moments principaux sont données par:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{2\sqrt{J'_2}}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\theta \\ \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.55})$$

Le critère de Tresca peut s'écrire donc en fonction des invariants scalaires comme:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2\sqrt{J'_2}}{\sqrt{3}} \left[ \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \right] = R_e \quad (\text{III.56})$$

soit

$$2\sqrt{J'_2} \cos\theta = R_e = \sqrt{3} k \quad (\text{III.57})$$

le critère de Von-Mises reste inchangé soit:

$$\sqrt{J'_2} = k \quad (\text{III.58})$$

ou

$$\sqrt{3J'_2} = R_e$$

le vecteur d'écoulement plastique peut s'écrire aussi comme:

$$a_i = \frac{\partial F}{\partial(\sigma_i)_f} = \frac{\partial F}{\partial\sqrt{J'_2}} \frac{\partial\sqrt{J'_2}}{\partial(\sigma_i)_f} + \frac{\partial F}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial(\sigma_i)_f} \quad (\text{III.59})$$

en différenciant l'équation (III.54), nous obtenons:

$$\frac{\partial\theta}{\partial(\sigma_i)} = -\frac{\sqrt{3}}{2\cos 3\theta} \frac{1}{J_2^{3/2}} \frac{\partial J'_3}{J_2^2} \frac{\partial\sqrt{J'_2}}{\partial(\sigma_i)} \quad (\text{III.60})$$

En substituant l'équation (III.60) dans l'équation (III.59), le vecteur d'écoulement plastique aura la forme:

$$a_i = C_1 a_{1i} + C_2 a_{2i} \quad (\text{III.61})$$

avec:

$$a_{1i} = \frac{\partial \sqrt{J'_2}}{\partial (\sigma_i)_f} \quad \text{et} \quad a_{2i} = \frac{\partial \sqrt{J'_3}}{\partial (\sigma_i)_f}$$

les constantes sont données dans le tableau pour le critère de plasticité de Tresca et de Von-Mises.

Critère de plasticité	Tresca	Von-Mises
$C_1$	$2 \cos \theta (1 + \tan \theta \tan 3\theta)$	$\sqrt{3}$
$C_2$	$\frac{\sqrt{3} \sin \theta}{J'_2 \cos 3\theta}$	0

point singulier de la surface de charge:

Eventuellement, il peut exister des points singuliers notamment pour le critère de Tresca où les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont déterminées pour  $\theta = \pm 30^\circ$  (coins de la surface de charge).

Cette indétermination peut être levée en retournant à l'expression originale du critère, soit:

$$2\sqrt{J'_2} \cos \theta = R_e$$

pour  $\theta = 30^\circ$ , nous avons:  $\sqrt{3J'_2} = R_e$

résultat confirmé par la figure 2.5 qui montre que la surface de charge de Von-Mises (cylindre) passe par les coins de l'hexagone de Tresca.

Chapitre IV

# METHODES NUMERIQUES DE RESOLUTION DES PROBLEMES ELASTO - PLASTIQUES

## IV.1. PRESENTATION DU CODE DE CALCUL

### IV.1.1. Structure du code de calcul

Le calcul numérique a été réalisé sur la base du programme élaboré par Hinton et Owen [9]. En considérant une approche monocouche ce programme permettait initialement en se basant sur une formulation isoparamétrique en déplacement et sur la théorie incrémentale d'élasto-plasticité, de déterminer l'état de déformation des structures bidimensionnelles en flexion dont le matériau obéit à une loi de comportement élasto-plastique à écrouissage linéaire idéalisé (pente locale de la courbe moments-courbures plastique constante). Le programme a été modifié et amélioré en vue de déterminer les états de déformation ainsi que les zones plastifiées dont le matériau peut présenter soit un comportement élastique soit un comportement élasto-plastique à écrouissage non linéaire (la pente locale dépend de la déformation plastique). De plus nous avons incorporé un sous programme permettant de réaliser le maillage automatique; à savoir le calcul des coordonnées des noeuds et leur numérotation. Il suffira alors de définir le contour de la structure à étudier et le degré d'affinité du maillage.

Pour des raisons numériques (faute d'espace mémoire) un second programme basé sur une approche multicouche a été élaboré, nous signalons que ces deux programmes peuvent facilement être raccordés. Ils présentent la même structure et la différence entre ces deux réside uniquement dans le calcul élasto-plastique la figure 4.1 donne la structure du programme de calcul après modification.

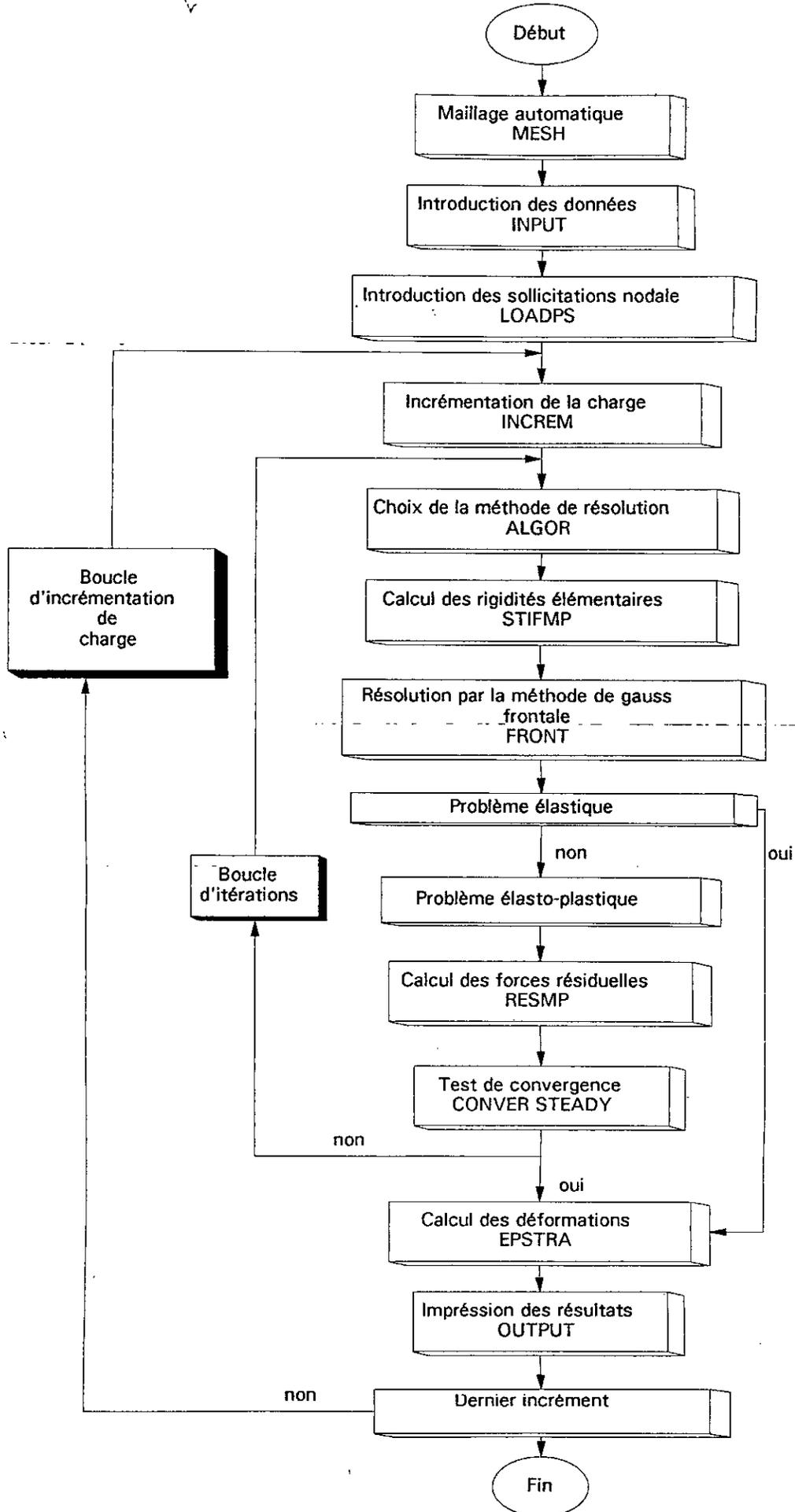


Figure 4.1 : Structure de code de calcul.

## IV.2. METHODES DE RESOLUTION DES SYSTEMES NON LINEAIRES

La majorité des algorithmes conduisent à résoudre un système d'équations linéaires à chaque itération. Pour notre cas nous avons choisi de résoudre les systèmes d'équations linéaires obtenus à chaque itération par la méthode de Gauss frontale qui combine la factorisation de Gauss à une optimisation de la taille mémoire. La méthode n'utilise, à un instant donné, qu'un sous ensemble de la matrice du système, qui n'est jamais stockée en mémoire centrale. cette particularité offre un gain sensible d'espace mémoire par rapport à un stockage par bande ou à un stockage skyline. [8]

Dans cette partie nous sommes amené à résoudre un problème non linéaire. Cette non linéarité vient du fait que la matrice élasto-plastique est fonction des déformations élasto-plastiques. La nature différentielle des lois de comportement impose de considérer une méthode incrémentale.

Les méthodes incrémentales consistent à transformer un problème non linéaire en une suite de problèmes linéaires successifs en décomposant la sollicitation totale en accroissement (ou incréments) de charge (ou pas de charge).

Quatre algorithmes sont développées dans le code de calcul que nous avons utilisé pour la résolution du système d'équations:

$$K_{ij} d_j - F_i = 0 \quad (IV.1)$$

### IV.2.1. Méthode de substitution

Cette méthode consiste à construire une suite de solutions  $d^{(0)}, d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(r)}$  tel que pour la  $r^{ième}$  itération nous avons:

$$\begin{aligned} \Psi_i(d_i^{(r)}) &= F_i - K_{ij}(d_i^{(r)})d_j^{(r)} \\ \Delta d_i^{(r+1)} &= [K_{ij}(d_i^{(r)})]^{-1} \Psi_i(d_i^{(r)}) \end{aligned} \quad (IV.2)$$

$$d_i^{(r+1)} = d_i^{(r)} + \Delta d_i^{(r+1)}$$

Si le processus converge,  $d_i^{(r)}$  tend vers la solution exacte lorsque  $r$  tend vers l'infini. Nous remarquons que dans cette méthode, la matrice  $[K_{ij}]$  doit être calculée et inversée à chaque itération, ce qui rend le calcul long et coûteux. De plus, les risques de divergence sont grands. [6]

### IV.2.2. Méthode de Newton-Raphson ou de la rigidité tangentielle

Cette méthode consiste à utiliser un développement de Taylor du premier degré à l'équation:

$$\Psi_i = K_{ij}d_j - F_i$$

A l'itération  $r$ , nous avons:

$$\Psi_i(d_k^{(r)} + \Delta d_k^{(r+1)}) = \Psi_i(d_k^{(r)}) + \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial d_j} \right) \Delta d_j^{(r+1)} \quad (IV.3)$$

soit:

$$\Delta d_i^{(r+1)} = \left[ \frac{\partial \Psi_i}{\partial d_j} \right]^{-1} \Psi_i(d_k^{(r)}) \quad (IV.4)$$

et

$$d_i^{(r+1)} = d_i^{(r)} + \Delta d_i^{(r+1)} \quad (IV.5)$$

l'équation (IV.4) peut être écrite sous la forme:

$$\Delta d_i^{(r+1)} = [K_{T_{ij}}(d_i^{(r)})]^{-1} \Psi(d_i^{(r)}) \quad (IV.6)$$

La matrice dite tangente  $[K_{T_{ij}}]$  est à calculer et inverser à chaque itération, ce qui représente souvent la partie essentielle du temps de calcul.

Cette méthode est utilisée pour des problèmes dont la solution ne dépend pas seulement du déplacement actuel, mais aussi de l'histoire de chargement.

### IV.2.3. Méthode incrémentale ou pas à pas

Afin d'éviter la résolution complète d'un système linéaire à chaque itération, nous faisons l'approximation suivante pour chaque incrément de charge:

$$K_{T_{ij}}(d_i^{(r)}) = K_{T_{ij}}(d_i^{(0)}) \quad (IV.7)$$

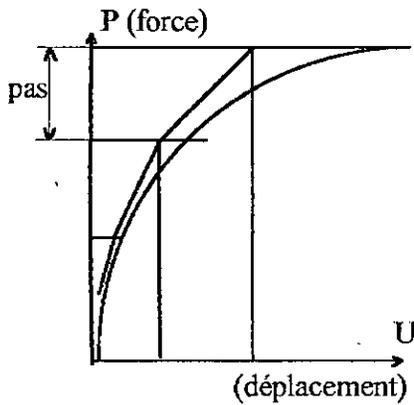
Cette méthode nécessite un nombre d'itération plus élevé que la méthode de Newton-Raphson, mais le coût de calcul est en général moins élevé, car la matrice  $[K_{Tij}]$  n'est calculée et inversée qu'à la première itération de chaque incrément.

### IV.2.4. Méthode de rigidité initiale

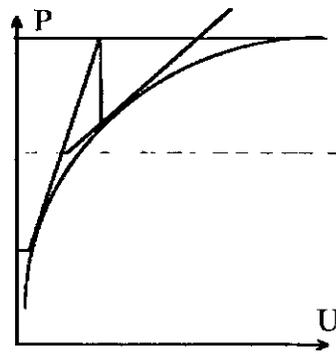
La matrice  $[K_{Tij}]$  est calculée et inversée uniquement à la première itération du premier incrément, et nous avons:

$$\Delta d_i^{(r)} = -[K_{Tij}(d_i^0)]^{-1} d_i^{(r)} \tag{IV.8}$$

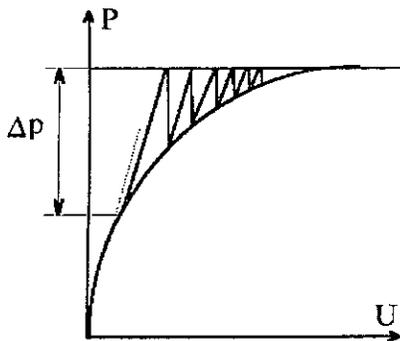
Cette méthode est utilisée pour des problèmes dont la linéarité est faible.



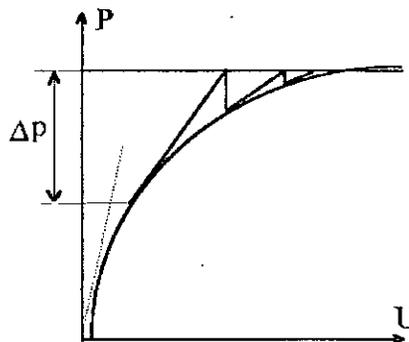
Methode de substitution



Newton-raphson standard



Methode de rigidité initiale



Méthode incrémentale ou pas à pas

Figure 4.1 : Méthodes de résolution numériques

## IV.2. CALCUL DES FORCES RESIDUELLES POUR UN PROBLEME ELASTO - PLASTIQUE

Les forces appliquées à la  $r^{\text{ième}}$  itération sont les forces résiduelles de la  $(r-1)^{\text{ième}}$  itération. Ces forces incrémentent les déplacements de  $\Delta d_i^{(r)}$  qu'on peut obtenir par la résolution du système d'équations linéaires.

Trois variantes de la méthode de Newton-Raphson combinées à la méthodes de " contraintes initiales " ont été mises en oeuvre pour l'analyse non linéaire élasto-plastique.

### IV.2.1. Méthode de "Contraintes Initiales"

Les méthodes de contraintes initiales présentée en [14] consiste à calculer le résidu pour chaque itération à partir de l'état de contraintes résiduelles obtenu en faisant au début de chaque itération la différence entre les contraintes issues d'un calcul élastique (vérifiant les équations d'équilibre mais non nécessairement plastiquement admissibles) et les contraintes élasto-plastique vérifiant le critère de plasticité. Cette méthode efficace est la plus répandue dans les codes de calcul élasto-plastique sous différentes versions. Nous allons dans la suite présenter les étapes de calcul en tenant compte des deux approches présentées dans le chapitre III.

Pour un incrément  $\{\Delta F\}$  de charge les étapes de calcul se présente comme suit: (supposons établis  $K_{T_0}^{(r-1)}$  et  $\Psi_i^{(r-1)}$ ):

- Les étapes de calcul pour une approche multicouche se présentent comme suit:

- 1) Résoudre le système:  $(\Delta d_i^{(r)}) = [K_{T_0}^{(r-1)}]^{-1} \Psi_i^{(r-1)}$

- 2) Etablir les relations déplacements-déformations et en déduire les relations contraintes-déformations:

$$\begin{matrix} z[B_i]_r & & [D_i]_r \\ (\Delta d_i^{(r)}) \rightarrow (\Delta \varepsilon_i^{(r)})_r = z[B_i]_r (\Delta d_i^{(r)}) \rightarrow (\Delta \sigma_i^{(r)})_r = [D_i]_r (\Delta \varepsilon_i^{(r)})_r \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} [B_i]_c \\ (\Delta d_i^{(r)}) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} [B_i]_c \\ (\Delta \sigma_i^{(r)}) \end{matrix} = [B_i]_c (\Delta d_i^{(r)}) \rightarrow \begin{matrix} [D_i]_c \\ (\Delta \sigma_i^{(r)}) \end{matrix} = [D_i]_c (\Delta \varepsilon_i^{(r)})$$

3) Calcul élasto-plastique:

On détermine la contrainte totale ainsi que la déformation correspondante à partir de l'incrément de contrainte de l'état élastique calculé ci dessus:

$$\begin{aligned} (\sigma_i)_f^{(r)} &= (\sigma_i)_f^{(r-1)} + (\Delta \sigma_i)_f^{(r)} & (\varepsilon_i)_f^{(r)} &= (\varepsilon_i)_f^{(r-1)} + (\Delta \varepsilon_i)_f^{(r)} \\ (\sigma_i)_c^{(r)} &= (\sigma_i)_c^{(r-1)} + (\Delta \sigma_i)_c^{(r)} & (\varepsilon_i)_c^{(r)} &= (\varepsilon_i)_c^{(r-1)} + (\Delta \varepsilon_i)_c^{(r)} \end{aligned}$$

4) On évalue le moment ainsi que les efforts de cisaillement déduit à partir de la relation (II.25) & (II.27), d'où le vecteur forces résiduelles est:

$$\Psi_i^{(r)} = \int_{A^*} ([B_{ij}]_f^T M_i^{(r)} + [B_{ij}]_c^T Q_i^{(r)}) dx dy - F_i$$

5)  $r = r + 1$

Au début du pas  $r = r + 1$ , nous avons  $F_i^{(r+1)} = F_i^{(r)} + \Delta F_i^{(r+1)}$ ,  $\Psi_i^{(r)} = \Delta F_i^{(r+1)}$

On refait les calculs jusqu'à convergence.

- Dans le cas d'une approche monocouche, les étapes de calcul se présentent en variables globales ou généralisées, soient  $\{\chi\}$  et  $\{M\}$ .

1) Résoudre le système:  $(\Delta d_i^{(r)}) = [K_{ij}^{(r-1)}]^{-1} \Psi_i^{(r-1)}$

2) Etablir les relations déplacements-courbures et en déduire les relations moments-courbures:

$$\begin{matrix} [B_i]_f \\ (\Delta d_i^{(r)}) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} [B_i]_f \\ (\Delta \chi_i^{(r)}) \end{matrix} = [B_i]_f (\Delta d_i^{(r)}) \rightarrow \begin{matrix} [D_i]_f \\ (\Delta M_i^{(r)}) \end{matrix} = [D_i]_f (\Delta \chi_i^{(r)})$$

$$\left( \Delta \mathbf{d}_i^{(r)} \right) \xrightarrow{[\mathbf{B}_i]_c} \left( \Delta \mathbf{M}_i^{(r)} \right)_c = [\mathbf{B}_i]_c \left( \Delta \mathbf{d}_i^{(r)} \right) \xrightarrow{[\mathbf{D}_i]_c} \left( \Delta \mathbf{M}_i^{(r)} \right)_c = [\mathbf{D}_i]_c \left( \Delta \mathbf{X}_i^{(r)} \right)_c$$

3) Calcul élasto-plastique  $\left( \Delta \mathbf{M}_i^{(r)} \right) \rightarrow \left( \Delta \mathbf{M}_i^{(r)} \right), \left( \Delta \mathbf{X}_p \right)_i^{(r)}$

$$\left( \mathbf{M}_i^{(r)} \right) = \left( \mathbf{M}_i^{(r-1)} \right) + \left( \Delta \mathbf{M}_i^{(r)} \right) \quad \left( \mathbf{X} \right)_i^{(r)} = \left( \mathbf{X} \right)_i^{(r-1)} + \left( \Delta \mathbf{X} \right)_i^{(r)}$$

$$\left( \mathbf{Q}_i^{(r)} \right) = \left( \mathbf{Q}_i^{(r-1)} \right) + \left( \Delta \mathbf{Q}_i^{(r)} \right) \quad \left( \mathbf{Y} \right)_i^{(r)} = \left( \mathbf{Y} \right)_i^{(r-1)} + \left( \Delta \mathbf{Y} \right)_i^{(r)}$$

$$4) \quad \Psi_i^{(r)} = \int_{A^o} \left( [\mathbf{B}_i]_f^T \mathbf{M}_i^{(r)} + [\mathbf{B}_i]_c^T \mathbf{Q}_i^{(r)} \right) dx dy - F_i$$

$$\left[ \mathbf{D}_{fep} \right]^{(r)} \rightarrow \left[ \mathbf{K}_{ij} \right]^{(r)} = \int_{A^o} \left( [\mathbf{B}_i]_f^T [\mathbf{D}_{ij}]_{ep} [\mathbf{B}_j]_f + [\mathbf{B}_i]_c^T [\mathbf{D}_{ij}]_c [\mathbf{B}_j]_c \right) dx dy$$

5)  $r = r + 1$

Au début du pas  $r = r + 1$ , nous avons  $F_i^{(r+1)} = F_i^{(r)} + \Delta F_i^{(r+1)}$ ,  $\Psi_i^{(r)} = \Delta F_i^{(r+1)}$   
On refait les calculs jusqu'à convergence.

La matrice  $[\mathbf{K}]$  dépend de la méthode de calcul non linéaire choisie. Le schéma ci-dessus est établi pour la méthode de Newton-Raphson standard. Elle peut être conservée constante et égale à la matrice élastique pour l'ensemble des pas et des itérations: c'est la méthode de Newton-Raphson modifiée. Elle peut conserver sa valeur au début d'un pas pour l'ensemble des itérations de ce pas.

## IV.2.2. Test de convergence

Le processus itératif s'arrête lorsqu'on satisfait un critère de convergence qui peut être:

▲ basé sur le rapport de la norme des forces résiduelles et la norme des forces appliquées qui doit être inférieur à une certaine valeur qu'on se fixe selon la précision voulue. [9]

$$\frac{\sqrt{\Psi_i^{(r)} \Psi_i^{(r)}}}{\sqrt{F_i^{(r)} F_i^{(r)}}} 100 \leq T_0 \quad (\text{IV.9})$$

^ ou celui de la norme des accroissement de déplacement donné par [9].

$$\frac{\left[ \sum_i (\omega_i^{(r)})^2 \right]^{1/2}}{\left[ \sum_i (\omega_i^{(r+1)})^2 \right]^{1/2}} 100 \leq T_0 \quad (\text{IV.10})$$

où  $\omega_i$  représente les variables au noeud, soient  $w_i, \beta_{xi}, \beta_{yi}$

$i = 1, n$  "n" étant le nombre de noeuds total de la structure,  $r$  le numéro de l'itération.

Cela signifie qu'on admet une erreur de  $T_0$  %. Dans des situations pratiques une erreur de 1% est acceptable pour la majorité des cas. [9]

### IV.2.3. Vérification du critère de plasticité

Les corrections faites pour le calcul des résidus doivent tenir compte de l'admissibilité plastique du champ de contraintes obtenu. C'est le problème dit de rabattement sur la surface d'écoulement.

Dans le cas où les contraintes élastiques associées au calcul du résidu violent le critère de plasticité en un point de calcul, on recherche la partie qui garde le critère, vérifié et on redistribue le reste de manière à faire apparaître des déformations plastiques et satisfaire les équations d'équilibre.

### IV.2.4. Calcul des déformations plastiques et des contraintes réelles

Dans le paragraphe (IV.2.1) à l'étape 2 du calcul de  $(\Delta \chi_p)_i^{(r)}$  et  $(\Delta M_i)_i^{(r)}$  plastiquement admissible est l'étape liée au calcul élasto-plastique proprement dite.

Au début de chaque itération nous faisons un premier calcul élastique de  $(\chi_i)^{(r)}$  et  $(\Delta M_i)^{(r)}$   $(\chi_i)^{(r)}$ . Les équations d'équilibre sont satisfaites, mais le calcul du critère pour  $(M_i)^{(r)} = (M_i)^{(r+1)} + (\Delta M_i)^{(r)}$  peut donner l'un des cas suivant:

- $F(\{M\}) < 0$ : on reste dans le domaine élastique, le calcul effectué est correct (fig. 4.1).

- $F(\{M\}) > 0$ : une plastification s'est produite au cours de cette itération le calcul supposé élastique conduit à un état plastiquement non admissible: ce calcul doit être corrigé. Nous cherchons le paramètre de correction R tel que:

$$F\left(\left(M_i\right)^{(r-1)}\right) + R\left(\Delta M_i\right)^{(r)} = 0$$

Pour vérifier les équations d'équilibre,  $(1-R) (\Delta M_i)^{(r)}$  doit être "ramené" sur la surface d'écoulement en permettant l'apparition d'une déformation plastique: c'est le rabattement (fig. 4.2).

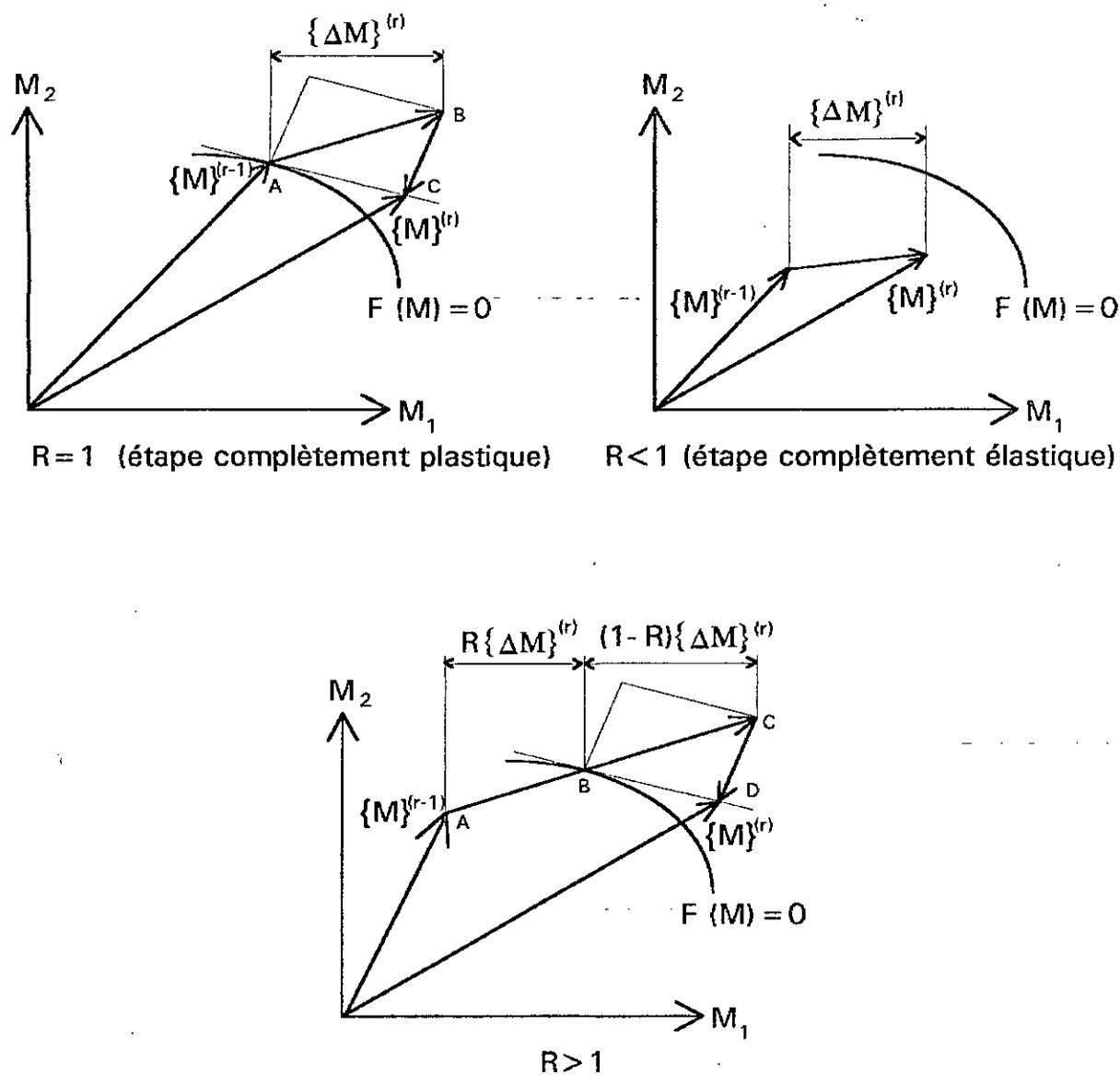


Figure 4.2 : Détermination du facteur de correction R

Le calcul du facteur de correction R se fait suivant les étapes présentées dans la figure 4.3.

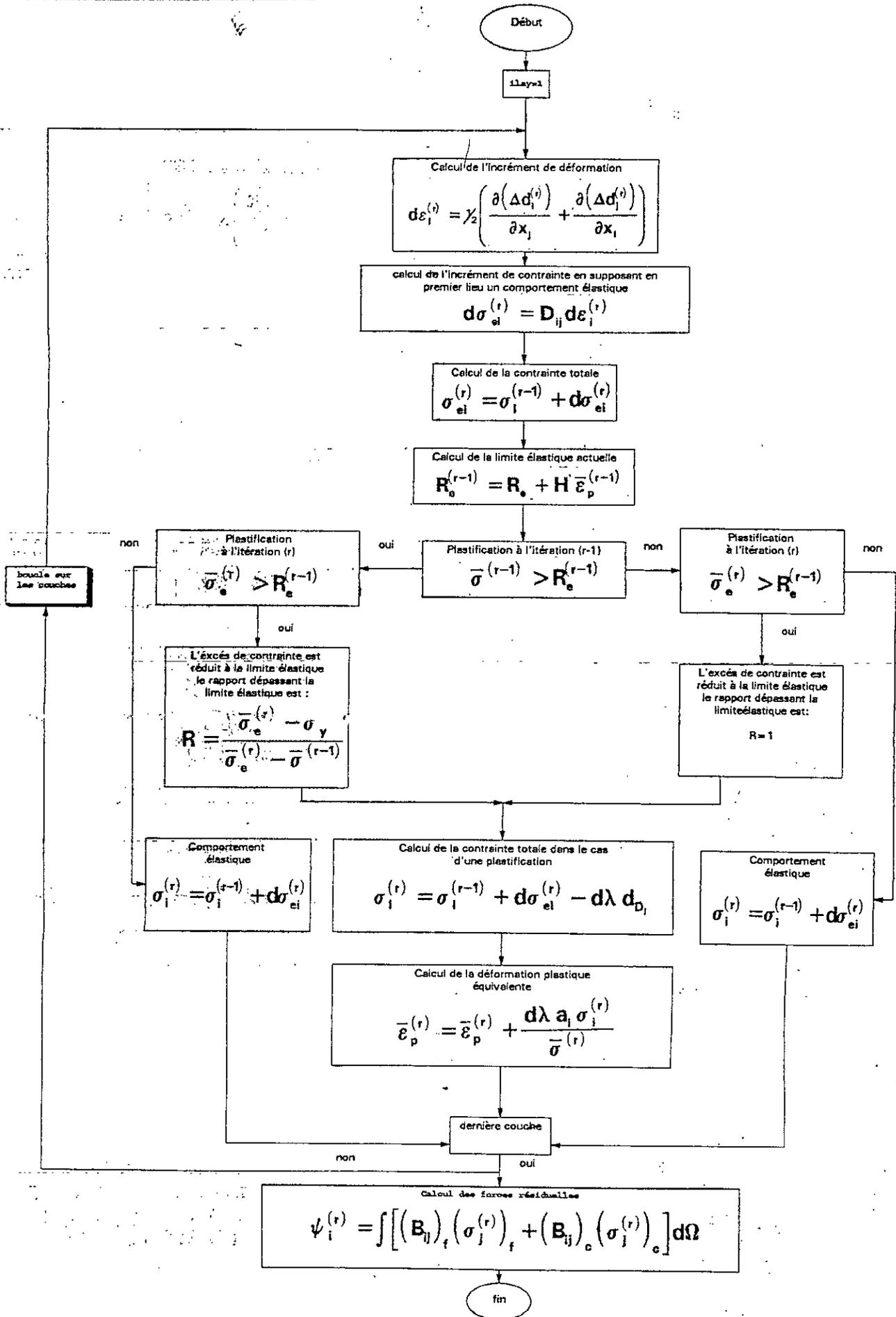


Figure 4.3 : Détermination de R pour un problème élasto-plastique.

Chapitre V

# APPLICATION DU CODE DE CALCUL ET PRESENTATION DES RESULTATS

## V.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous exposons les résultats d'une série de tests numériques pour le calcul elasto-plastique des plaques en flexion en se basant sur l'approche monocouche qui est très fréquente dans la littérature.

Les principaux aspects considérés sont:

- Influence du choix de la méthode de calcul non linéaire (variation de la méthode de Newton-Raphson).
- Influence du critère.
- Influence de la géométrie.
- Comparaison aux résultats illustrés dans la littérature.

Dans notre étude, on s'est étendu vers l'approche multicouche pour approcher au mieux le phénomène de plastification, pour cela nous avons effectué une série de tests analogue à celle réalisée pour l'approche monocouche.

Vu le manque de documentation pour l'approche multicouche et par souci de valider nos résultats, nous avons porté ces derniers sur les mêmes figures que l'approche monocouche, en prenant le soin de considérer les mêmes données numériques.

## V.2. ETUDE DE QUELQUES PARAMETRES

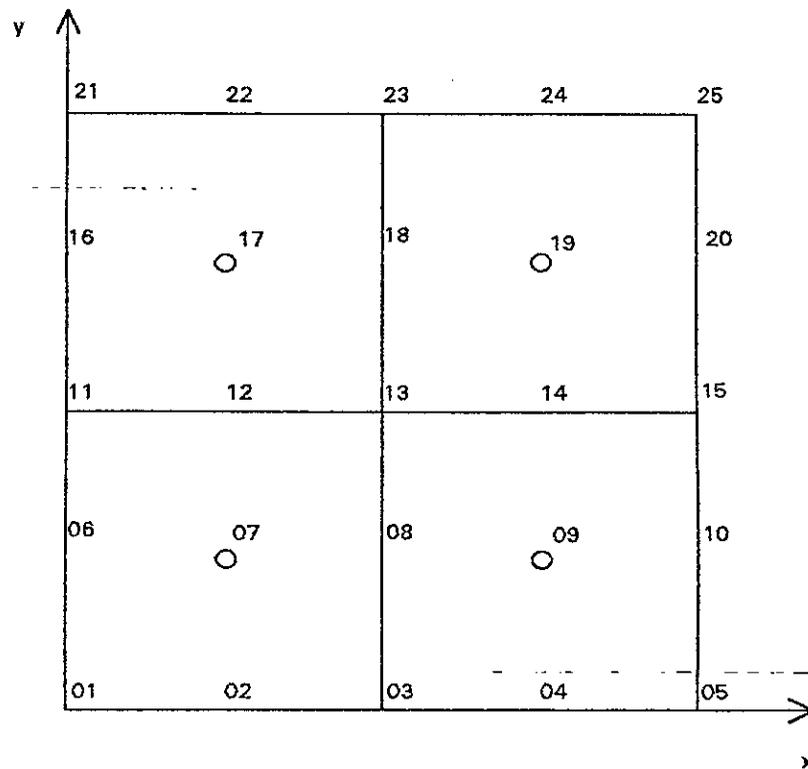


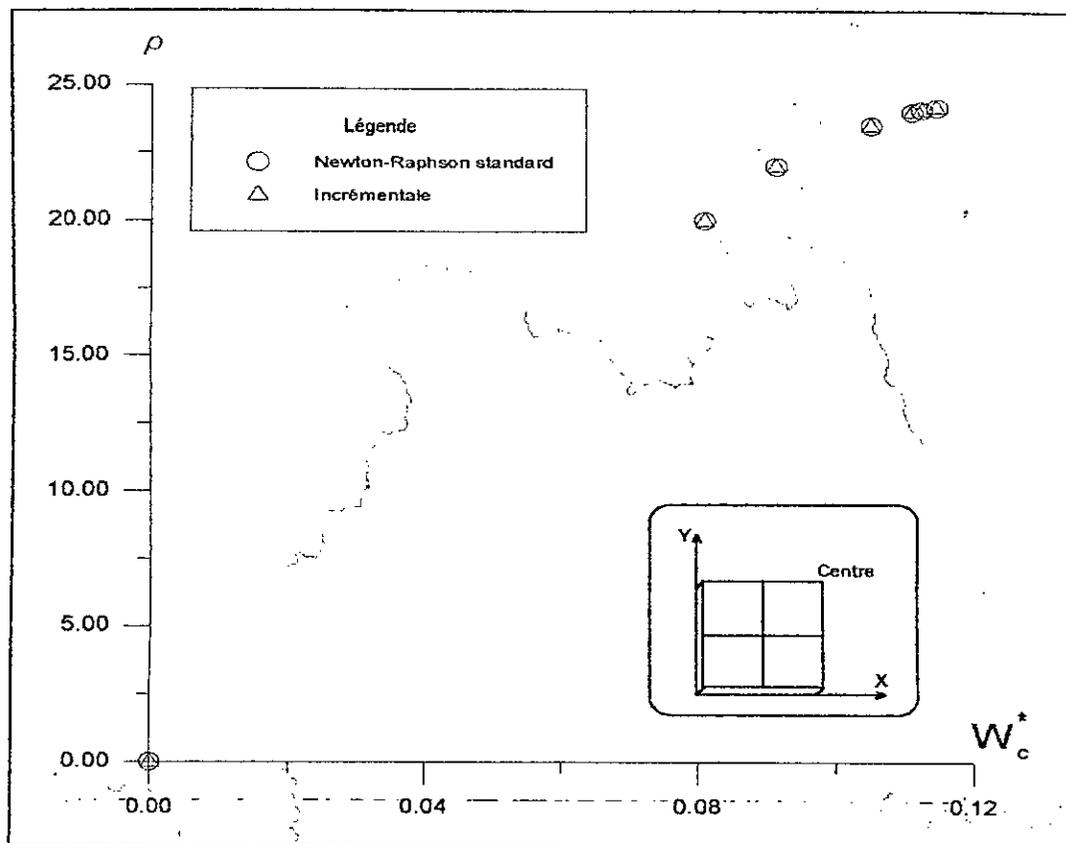
Figure 5.1 : Représentation nodale du *quart* de la plaque.

### V.2.1. Choix de la méthode de résolution

Les non linéarités qui apparaissent du fait de la plasticité nous conduisent à utiliser des méthodes itératives pour résoudre le système d'équations (cela revient à résoudre un système d'équations linéaires à chaque itération)(IV.1). Pour des problèmes d'analyse plastique des structures, nous utiliserons soit la méthode de rigidité tangentielle, soit la méthode incrémentale (ou pas à pas)[2]. Dans la première, nous calculons les rigidités élémentaires à chaque itération, alors que dans la seconde nous ne les calculons qu'à la première itération de chaque incrément.

Données numériques: (en supposant un système d'unités cohérentes)

$$\begin{array}{ll}
 E = 10,92 & \nu = 0,3 \\
 L = 10 & h = 0,1 \\
 M_p = 2,5 & q = 1,0 \\
 H = 0 &
 \end{array}$$



**Figure 5.2 :** Plaque carrée simplement supportée avec charge répartie.  
Influence de la méthode de résolution sur la précision des résultats.

La figure 5.2 illustre l'influence de la méthode de résolution, nous avons tracé la flèche au centre de la plaque sous forme adimensionnelle:  $W_c^* = \frac{D}{M_p \cdot L^2} \cdot W_c$  en fonction de la densité de charge sous forme adimensionnelle  $\rho = \frac{L^2}{M_p} \cdot q$ . par raison de symétrie seulement le quart de la plaque est analysé et discrétisé avec un maillage  $2 \times 2$  (fig. 5.1).

Les résultats obtenus pour cet exemple avec les deux méthodes sont sensiblement les mêmes (fig. 5.2), seulement la méthode incrémentale permet de réduire le temps de calcul par itération au dépend de la vitesse de convergence. Cependant, si on est en présence d'une forte non linéarité, il serait préférable d'utiliser la méthode de Newton-Raphson standard.

## V.2.2. Influence du critère de plasticité

La figure 5.3 illustre l'influence du critère de plasticité, nous avons tracé la flèche au centre de la plaque sous forme adimensionnelle:  $(W_c^*, \rho)$  pour les deux critères. Les résultats sont conformes à la théorie (figure 2.5) qui montre que la surface de charge de Von-Mises (cylindre) passe par les sommets de l'hexagone de Tresca. Ce qui conduit, en général, à utiliser le critère de Von-Mises.

Les données numériques sont les mêmes que pour V.2.1.

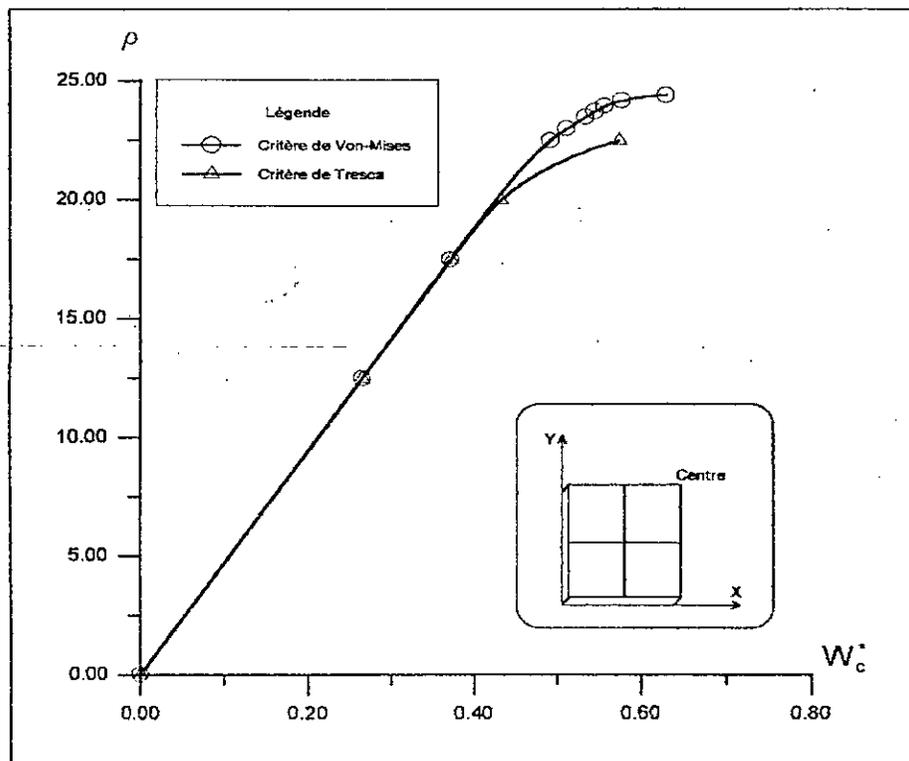


Figure 5.3 : Plaque carrée simplement supportée avec charge répartie.  
Influence du critère de plasticité.

## V.2.3. Choix du type d'élément

Sur la figure 5.4, nous avons tracé les courbes  $(W_c^*, \rho)$  pour mettre en évidence la différence sensible entre l'élément à huit noeuds et celui à neuf noeuds (il est à noter que les résultats sont identiques dans le domaine élastique). Pour la suite de la résolution, on a préféré travailler avec l'élément à neuf noeuds qui présente une meilleure convergence. Les résultats de l'élément

plaque à neuf noeuds sont conformes à ceux de Owen [9] (Résultats numériques parfaitement identiques). La position relative de la courbe de l'élément à huit noeuds par rapport à celle de l'éléments à neuf noeuds est aussi validée par Owen [9].

Les données numériques sont les mêmes que pour V.2.1.

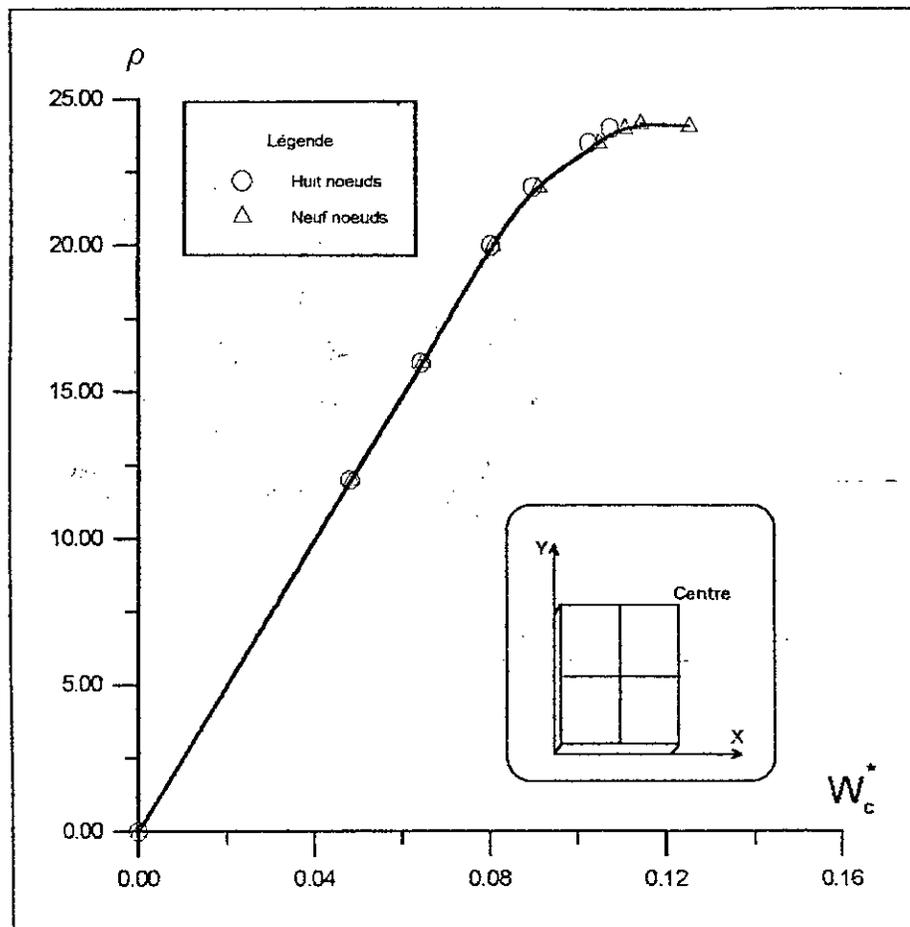


Figure 5.4 : Plaque carrée simplement supportée avec charge répartie.  
Comparaison entre les éléments à huit et neuf noeuds.

### V.3. PLAQUE CARREE SIMPLEMENT SUPPORTEE SOUMISE A UNE CHARGE REPARTIE

Nous considérons une plaque carrée simplement supportée soumise à une charge uniformément répartie, par raison de symétrie seulement le quart de la plaque est analysé et discrétisé avec un maillage 2\*2 (fig. 5.1).

Sur la figure 5.5, nous avons tracé les flèches ( $W_c^*, \rho$ ) au centre de la plaque en considérant le critère de Von-Mises et la méthode de Raphson standard pour cette résolution.

Données numériques: (en supposant un système d'unités cohérentes)

$$\begin{aligned} E &= 10,92 & \nu &= 0,3 \\ L &= 10 & h &= 0,1 \\ M_p &= 2,5 & q &= 10 \\ H &= 0 \end{aligned}$$

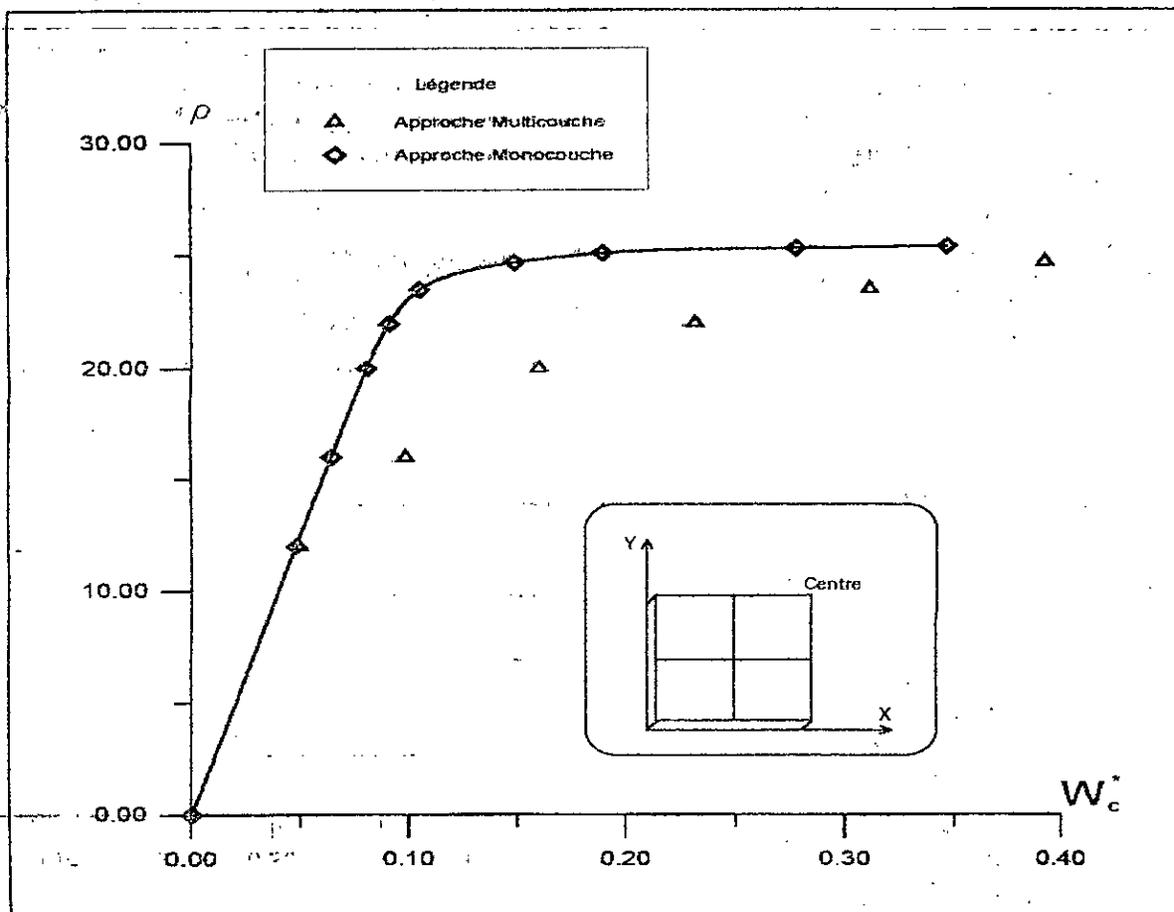


Figure 5.5.: Plaque carrée simplement supportée avec charge répartie. Flèche au centre de la plaque.

Nous constatons pour le deuxième incrément qu'un état élastique donné par l'approche monocouche correspond à un début de plastification pour l'approche multicouche (fig. 5.5), cela reflète bien la plastification graduelle des fibres extérieures négligée par la première approche, On remarque que ces deux approches restent valables et pratiquement identiques pour une plastification totale de la plaque (les deux courbes se rejoignent vers la fin).

Dans la figure 5.6 nous avons tracé l'allure de la médiane de la plaque (soit à  $x = \frac{1}{2} \cdot L$  ou  $y = \frac{1}{2} \cdot L$ ), et on constate que la flèche augmente avec l'incrément de charge.

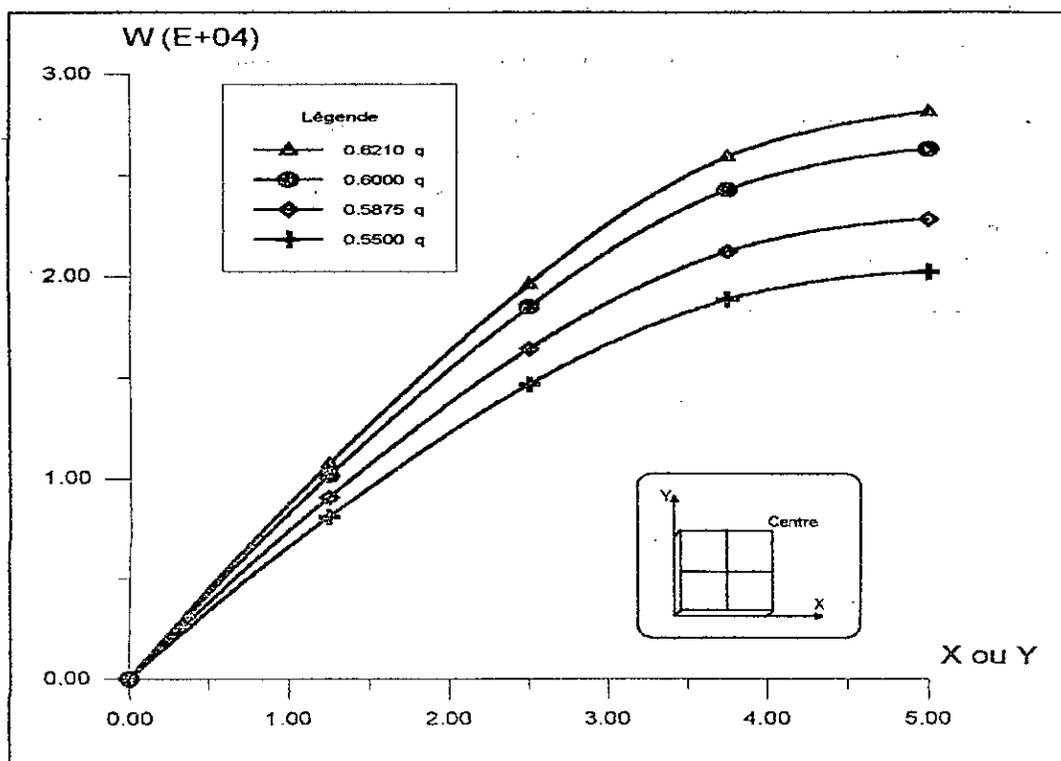
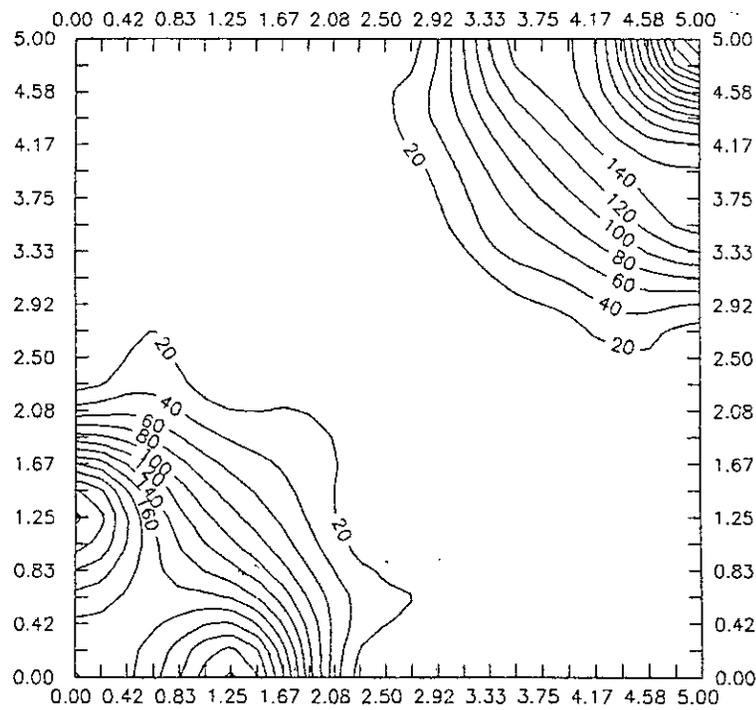


Figure 5.6 : Plaque carrée simplement supportée avec charge répartie.  
Déplacement pour Y ou  $X = \frac{1}{2} \cdot L$ .

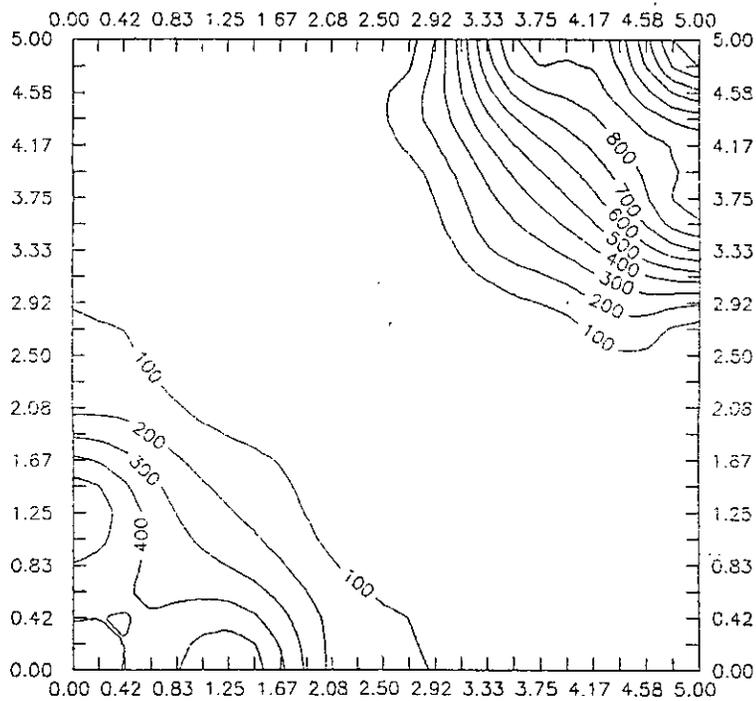
Les figures 5.7.1 à 5.7.4 représentent la propagation des zones plastiques pour différents niveaux de chargement (incrément). Nous avons tracé les courbes isovaleurs des déformations plastiques cumulées déterminées à partir de l'équation II.7. Le traçage s'est effectué avec un logiciel approprié *surfer*. [10]

Nous remarquons sur la figure 5.7.1 que le point n°1 (coin de la plaque) présente une plastification assez précoce par rapport aux autres points, chose qui paraît justifiable compte tenu des conditions aux limites en ce point ainsi que le chargement appliqué. Toute augmentation de charge porte le milieu de la plaque (point n°25) à une plastification qui est plus importante que celle du sommet (qui demeure presque constante) (fig. 5.7.2), et se propage jusqu'à plastification totale de la plaque (fig. 5.7.4).

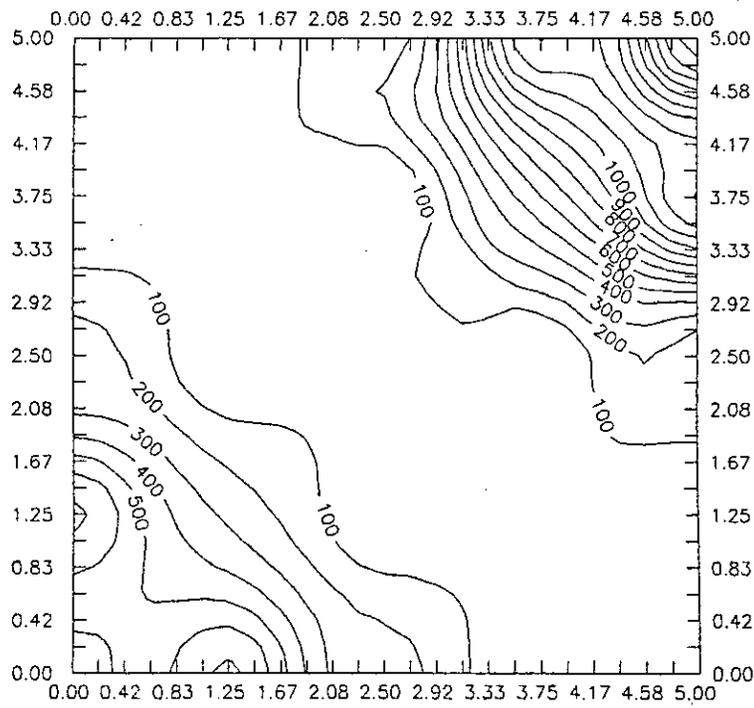
Nous avons comparé nos résultats à ceux de Taylor [12] et Ben Tahar [3] et les avons de cette manière validé.



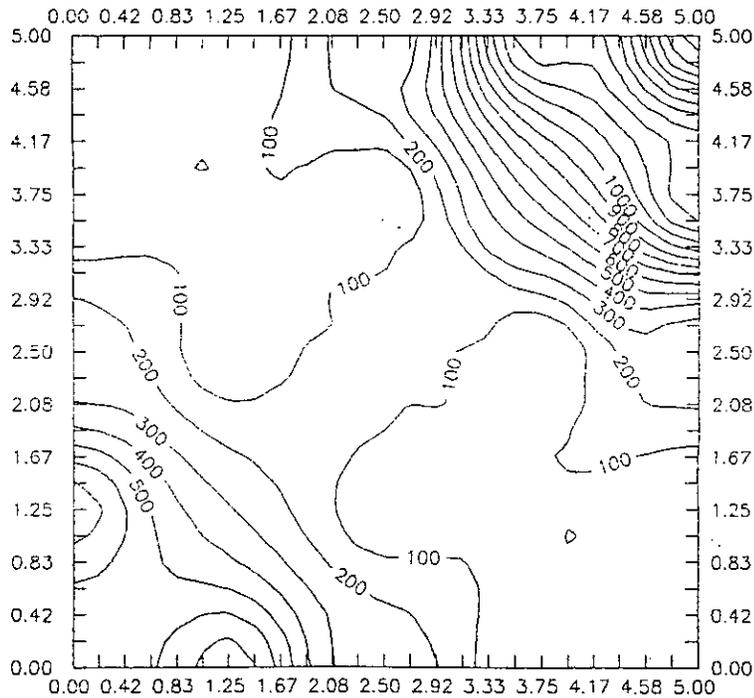
**Figure 5.7.1 :** Plaque carrée simplement supportée.  
avec charge répartie.  
Evolution des zones plastiques.  $q = 0.55$



**Figure 5.7.2 :** Plaque carrée simplement supportée.  
avec charge répartie.  
Evolution des zones plastiques.  $q = 0.587$



**Figure 5.7.3 :** Plaque carrée simplement supportée.  
avec charge répartie.  
Evolution des zones plastiques.  $q = 0.6$



**Figure 5.7.4 :** Plaque carrée simplement supportée.  
avec charge répartie.  
Evolution des zones plastiques.  $q = 0.6021$

## V.4. PLAQUE CARREE ENCASTREE SOUMISE A UNE CHARGE REPARTIE

Considérons une plaque carrée encastree soumise à une charge répartie sur la figure 5.8 nous avons tracé la flèche au centre ( $W_c^*, \rho$ ) en considérant seulement le critère de Von-Mises et la méthode de Raphson standard. Nous avons remarqué que cette figure présente une parfaite correspondance à celle présentée par Taylor [12].

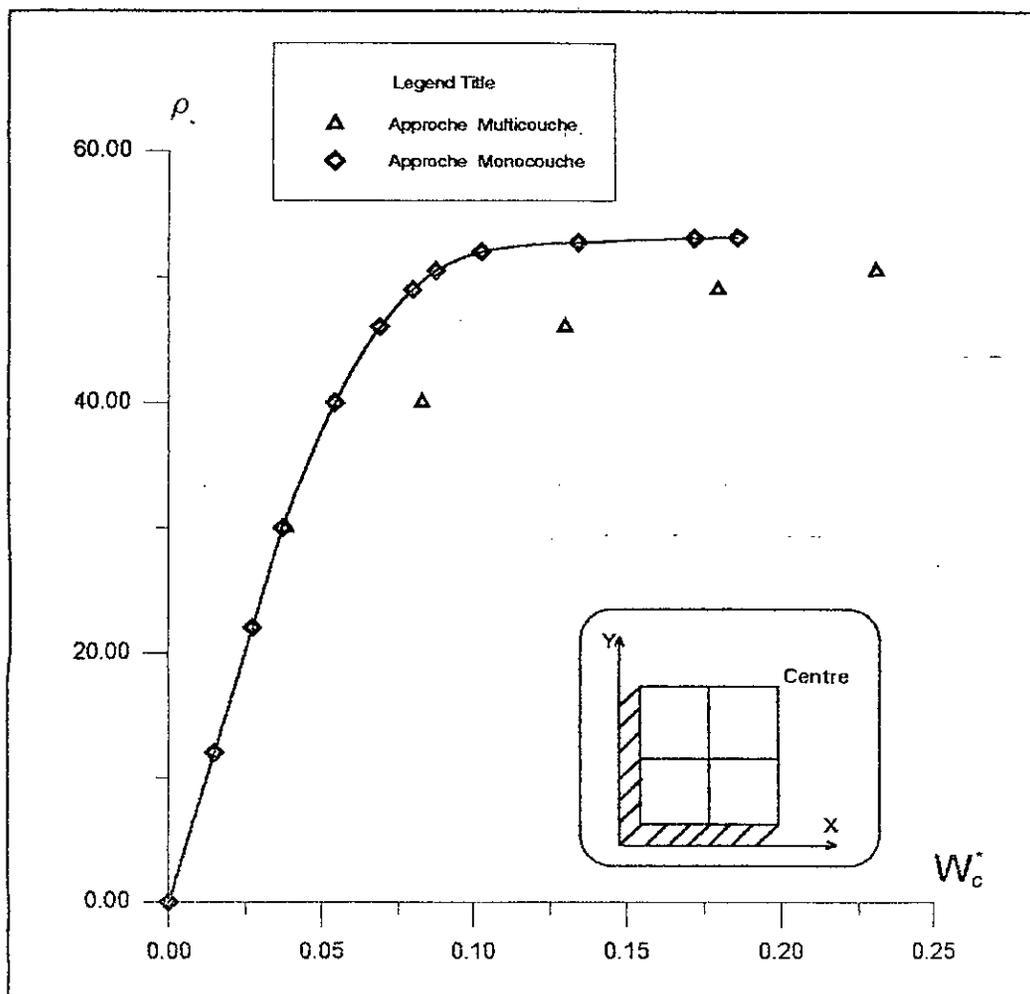


Figure 5.8 : Plaque carrée encastree avec charge répartie.  
Flèche au centre de la plaque.

Dans la figure 5.9 nous avons tracé l'allure de la médiane de la plaque (soit à  $x = \frac{1}{2} \cdot L$  ou  $y = \frac{1}{2} \cdot L$ ). On constate que la flèche croît avec l'incrément de charge.

Nous remarquons, contrairement à l'appui simple, l'influence de l'encastrement sur l'allure de la médiane qui se présente sous forme de S (rotation nulle sur les appuis). Et à un incrément de charge identique (la charge  $q$  incrémentée étant la même), on remarque que les déplacements dans le cas de la plaque encadrée sont nettement inférieures à ceux de la plaque simplement supportée. Ceci explique bien que l'encastrement augmente la rigidité flexionnelle de la plaque.

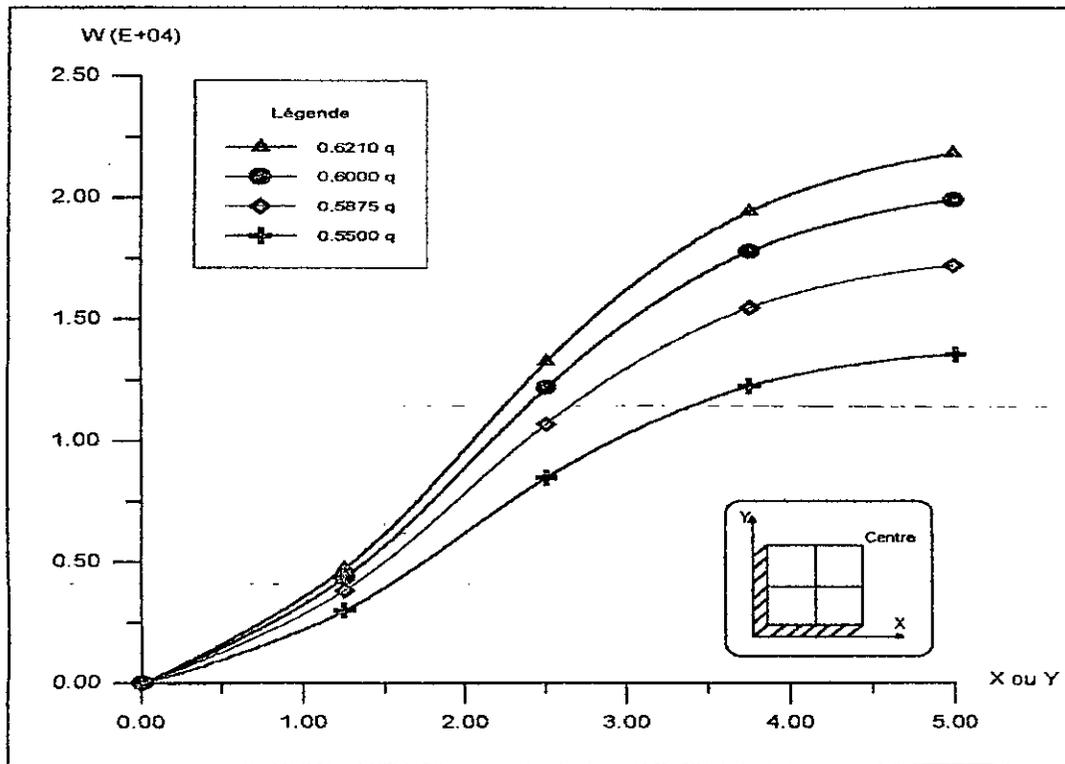


Figure 5.9 : Plaque encadrée avec charge répartie.  
Déplacement Y ou X =  $\frac{1}{2} \cdot L$

Les figures 5.10.1 à 5.10.4 représentent la propagation des zones plastiques pour les différents niveaux de chargement. Nous avons tracé les courbes isovaleurs des déformations plastiques cumulées. Et avons remarqué que la plastification commence au milieu des côtés (fig. 5.10.1), par la suite il y a une légère plastification qui apparaît au centre (fig. 5.10.2), Cependant la plastification des milieux des cotés prend de l'ampleur et se propage progressivement vers l'intérieur de la plaque (fig. 5.10.3) jusqu'à plastification totale (fig. 5.10.4). Ces résultats sont validés par Taylor [12] et Ben Tahar [3].

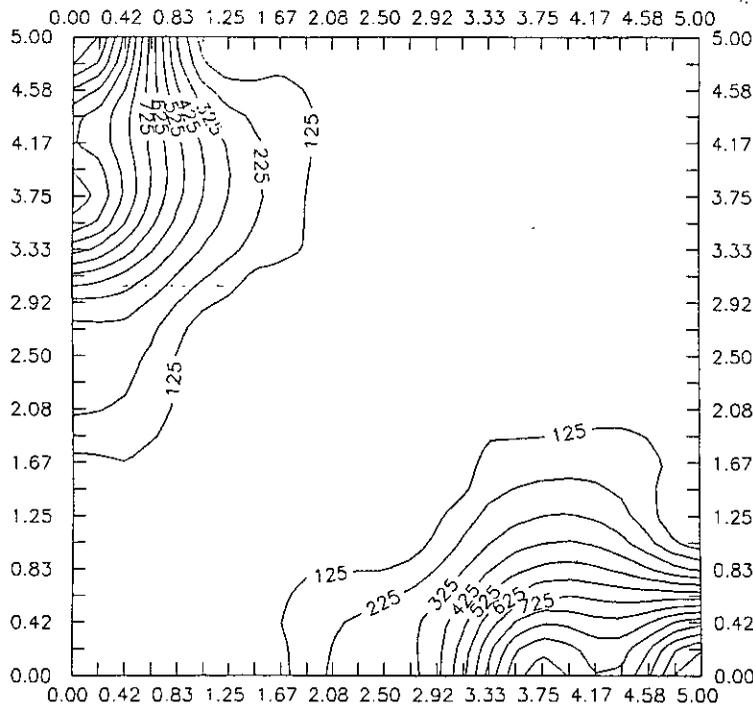


Figure 5.10.1 : Plaque carrée encastée.  
avec charge répartie.  
Evolution des zones plastiques.  $q = 1.0$

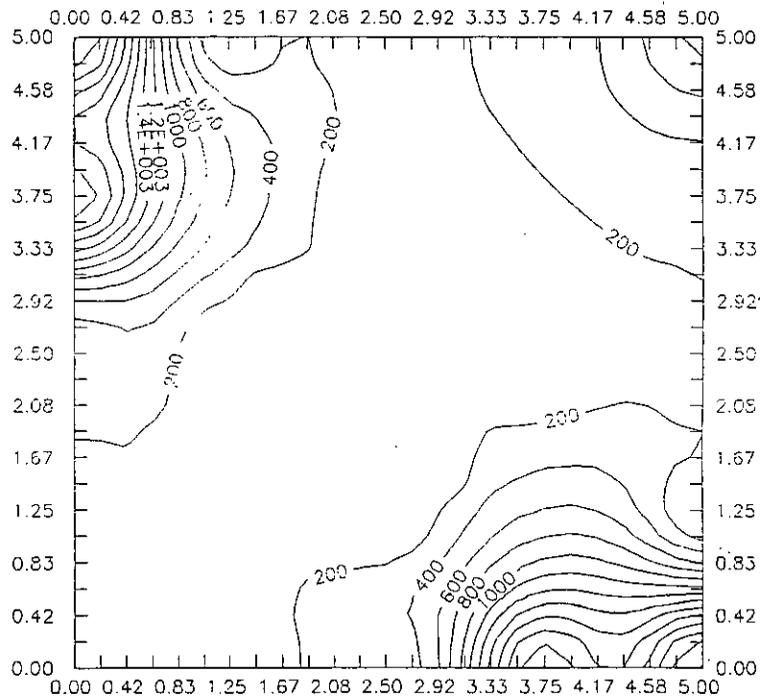
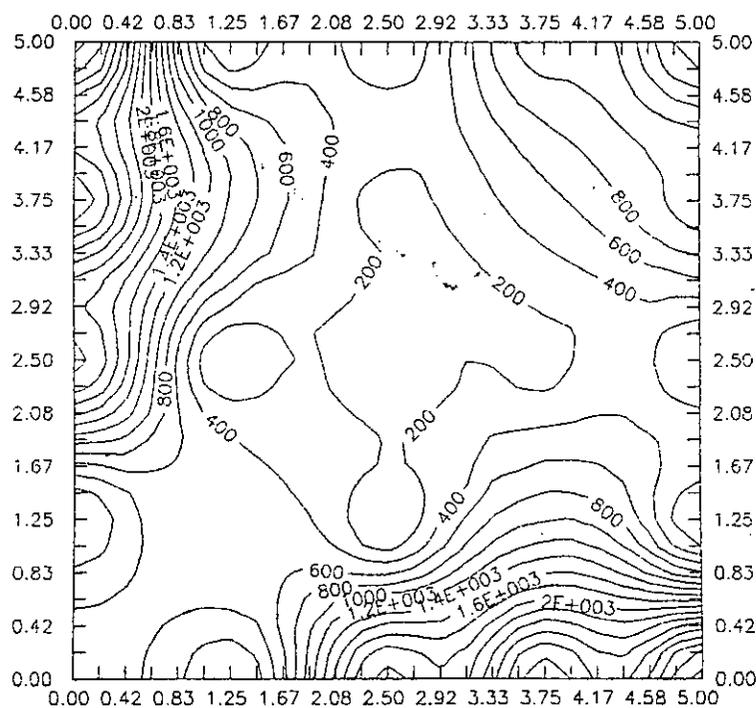
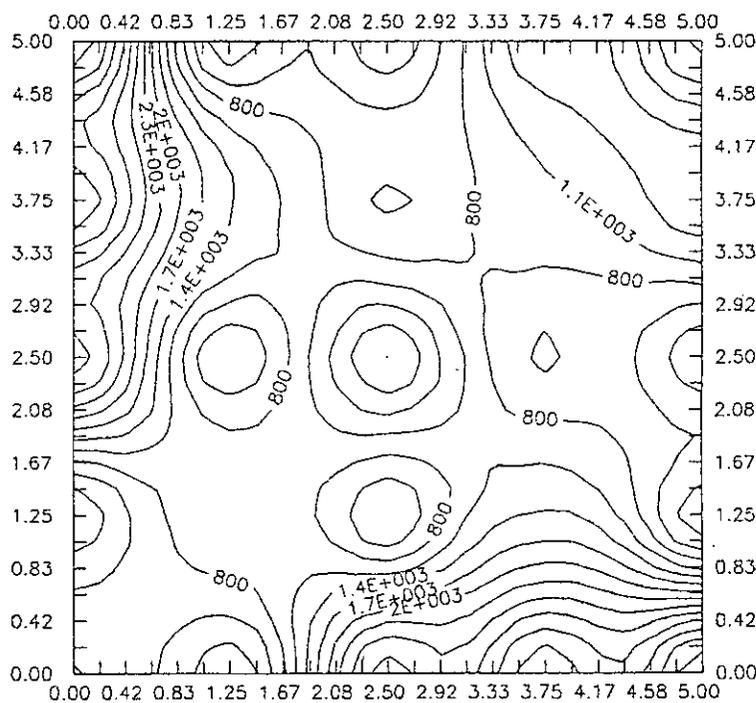


Figure 5.10.2 : Plaque carrée encastée.  
avec charge répartie.  
Evolution des zones plastiques.  $q = 1.150$



**Figure 5.10.3 : Plaque carrée encastée.**  
avec charge répartie.  
Evolution des zones plastiques.  $q = 1.225$



**Figure 5.10.4 : Plaque carrée encastée.**  
avec charge répartie.  
Evolution des zones plastiques.  $q = 1.2625$

## V.5. PLAQUE CARREE SIMPLEMENT SUPPORTEE SOUMISE A UNE CHARGE CONCENTREE

Considérons une plaque simplement supportée soumise à une charge concentrée au centre (point n°25) sur la figure 5.11 nous avons tracé la flèche au centre de la plaque sous forme adimensionnelle:  $W_c^* = \frac{D}{M_p \cdot L^2} \cdot W_c$  en fonction de la densité de charge sous forme adimensionnelle  $\rho = \frac{L}{M_p} \cdot P$ , en considérant seulement le critère de Von-Mises et la méthode de Raphson standard. Nous remarquons que cette figure est conforme à celle de Taylor [12].

$E = 10,92$        $\nu = 0,3$        $L = 10$        $h = 0,1$   
 $M_p = 2,5$        $p = 10$        $H = 0$

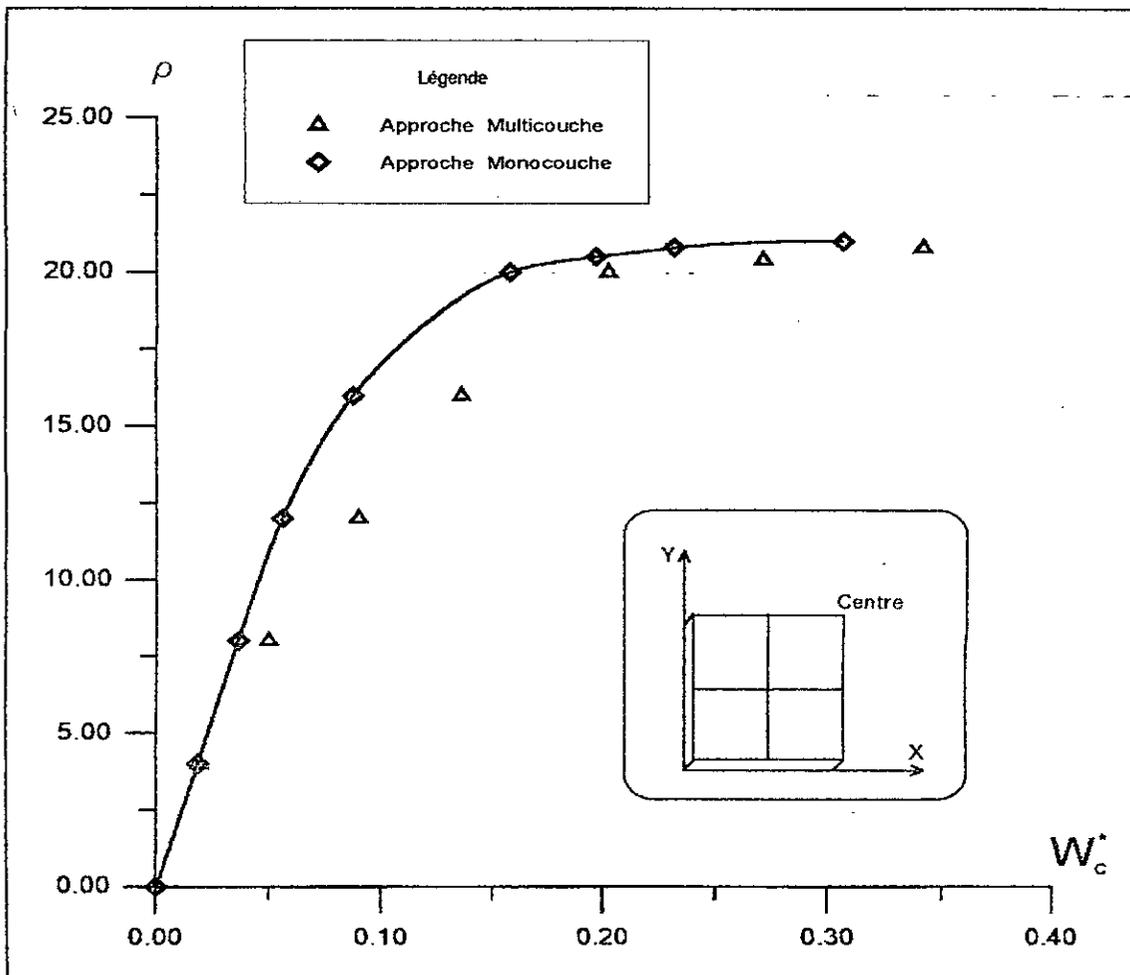


Figure 5.11 : Plaque carrée simplement supportée avec charge concentrée. Déplacement au centre de la plaque.

Les figures 5.12.1 à 5.12.4 représentent la propagation des zones plastiques pour les différents niveaux de chargement. Nous avons tracé les courbes isovaleurs des déformations plastiques cumulées. Et avons remarqué que la plastification commence au centre de la plaque (fig. 5.12.1) et progresse vers l'extérieur (fig. 5.12.2). Ces résultats sont validés par ceux de Taylor [12].

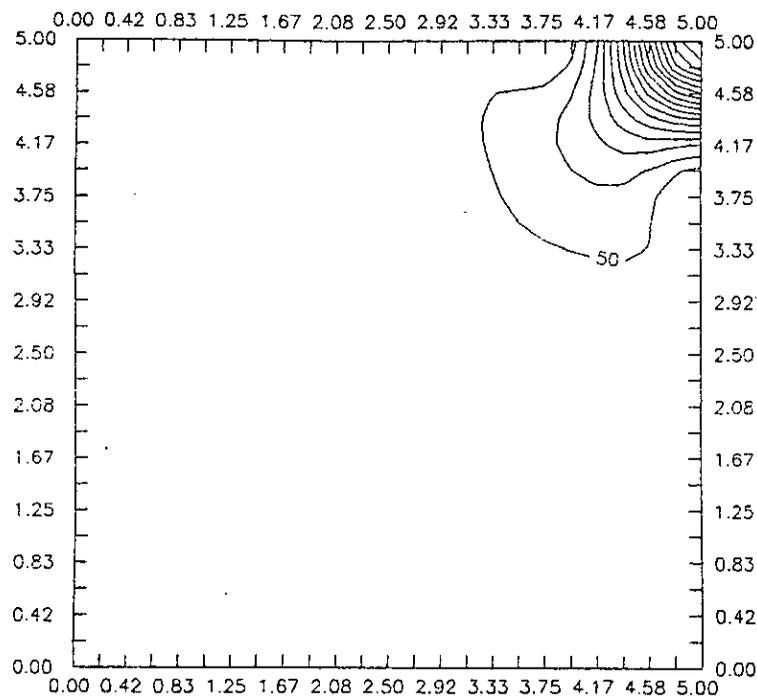


Figure 5.12.1 : Plaque carrée simplement supportée.  
avec charge concentrée.  
Evolution des zones plastiques.  $q = 3.0$

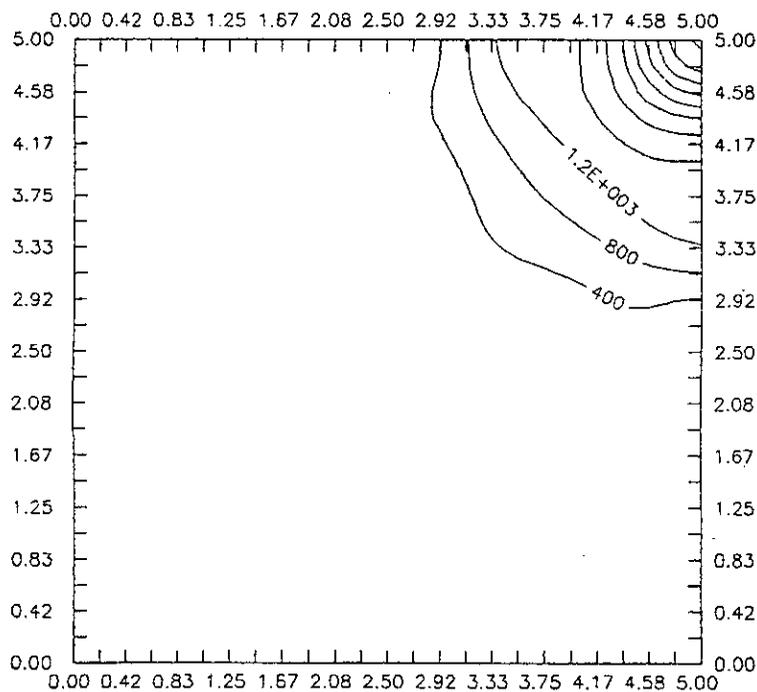


Figure 5.12.2 : Plaque carrée simplement supportée.  
avec charge concentrée.  
Evolution des zones plastiques.  $q = 4.0$

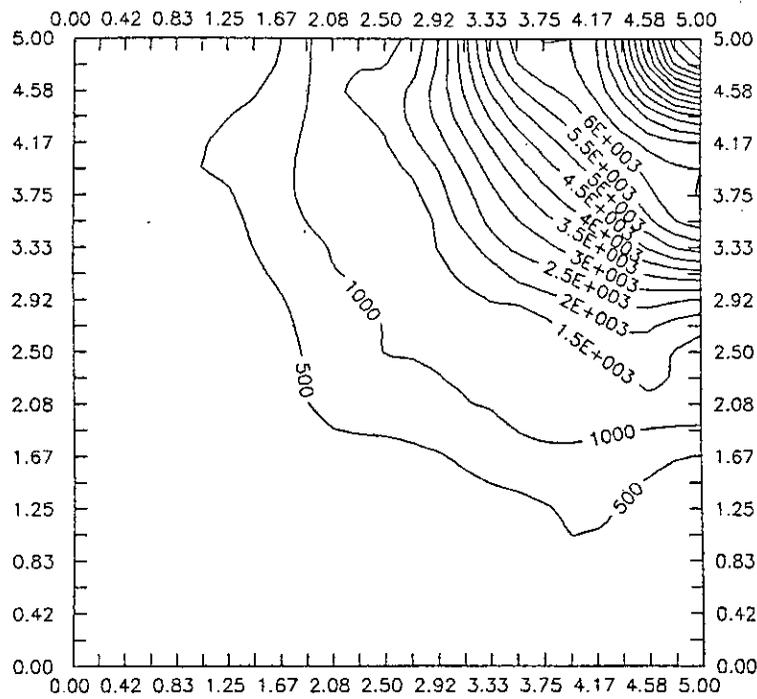


Figure 5.12.3 : Plaque carrée simplement supportée.  
avec charge concentrée.  
Evolution des zones plastiques.  $q = 5.0$

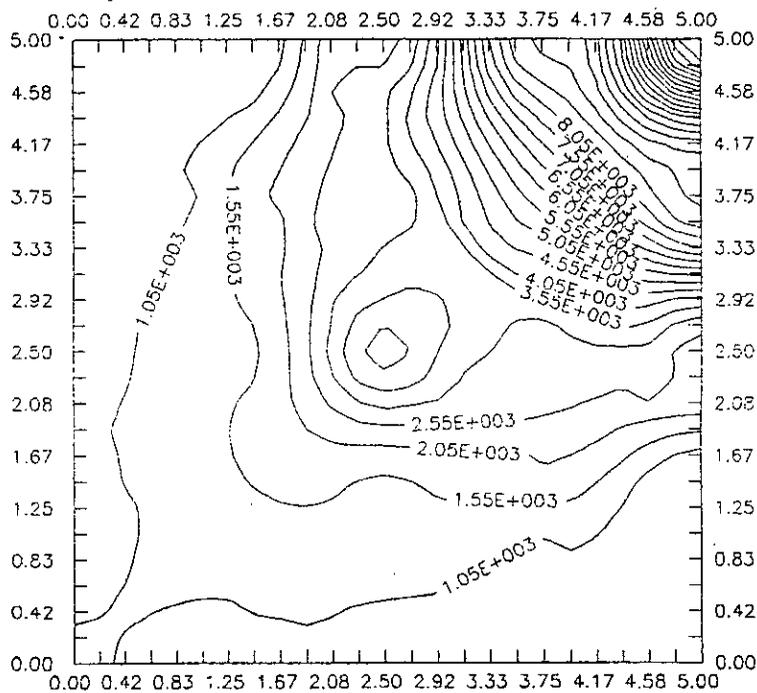


Figure 5.12.4 : Plaque carrée simplement supportée.  
avec charge concentrée.  
Evolution des zones plastiques.  $q = 5.1$

## V.6. INFLUENCE DU NOMBRE DE COUCHES

Sur la figure 5.13 nous avons porté les flèches ( $W_c^*, \rho$ ) du centre de la plaque en variant le nombre de couches. Nous remarquons que, quand on diminue le nombre de couches, le phénomène de plastification partielle pris en compte par cette approche est trop exagéré, on conclut que cette approche n'est valable que pour un nombre de couches minimum bien déterminé.

Les données numériques sont les mêmes que pour V.2.1.

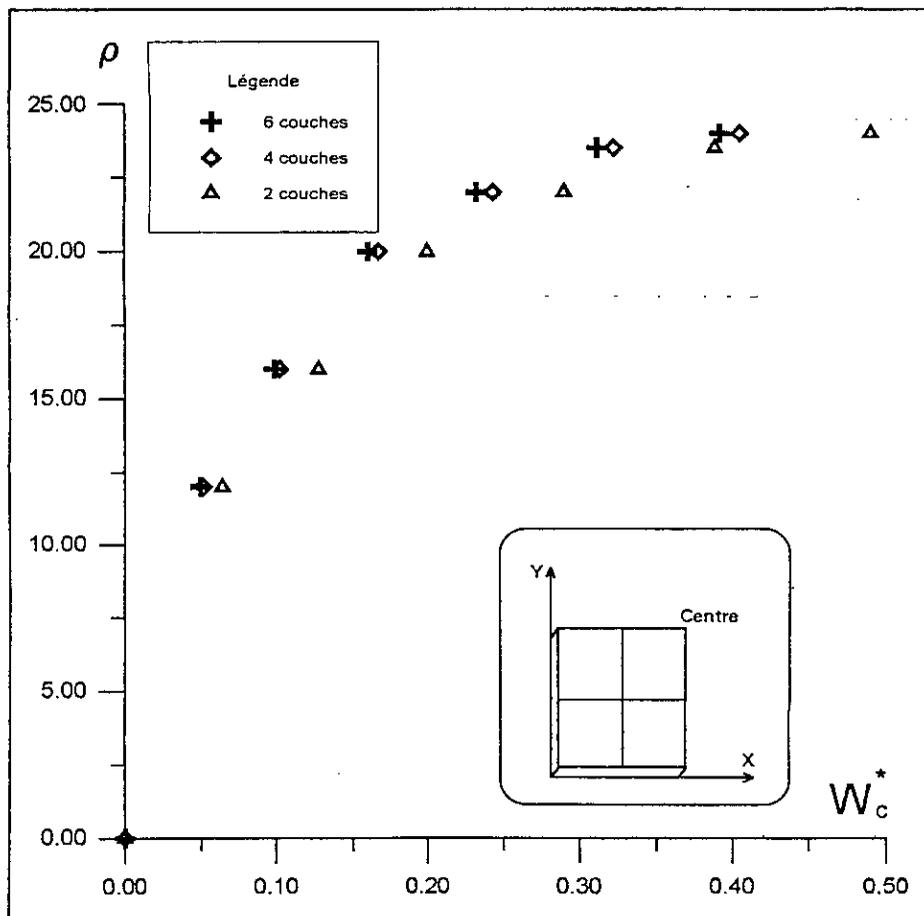


Figure 5.13 : Plaque carrée simplement supportée avec charge répartie.  
Influence du nombre de couches.

## V.6. PLAQUE RECTANGULAIRE SIMPLEMENT SUPPORTEE AVEC CHARGE REPARTIE

Sur la figure 5.14 nous présentons la flèche ( $W_c^*, \rho$ ) obtenue avec l'élément quadrilatère à neuf noeuds (hétéroosis) pour des plaques carrée ( $b/a = 1$ ) et rectangulaires ( $b/a = 1,5$  et  $b/a = 2$ ) pour un matériau avec écrouissage linéaire en tenant compte du critère de Von-Mises, la matrice tangentielle ou rigidité tangentielle est calculée à chaque itération. Les résultats obtenus pour un maillage  $2 \times 2$  (fig. 5.1) sont comparés à ceux de Ben Tahar [3] pour la validation; Ainsi nous remarquons une bonne correspondance.

On note que pour un même incrément de charge (qui est matérialisé sur la figure 5.14 par  $\rho = C^{1e}$ ), les déplacements au centre de la plaque croient avec l'accroissement du rapport  $b/a$ . Ceci s'explique par le fait que, plus une plaque est allongée, et plus elle devient souple du point de vue flexion.

Données numériques:

$$E = 65,3 \text{ kN/m}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$a = 254 \text{ m}$$

$$h = 2,54 \text{ m}$$

$$M_p = 580,644 \text{ Nm}$$

$$H_{\text{PENDE DE LA COURBE}}(M, \chi_p) = 126,028$$

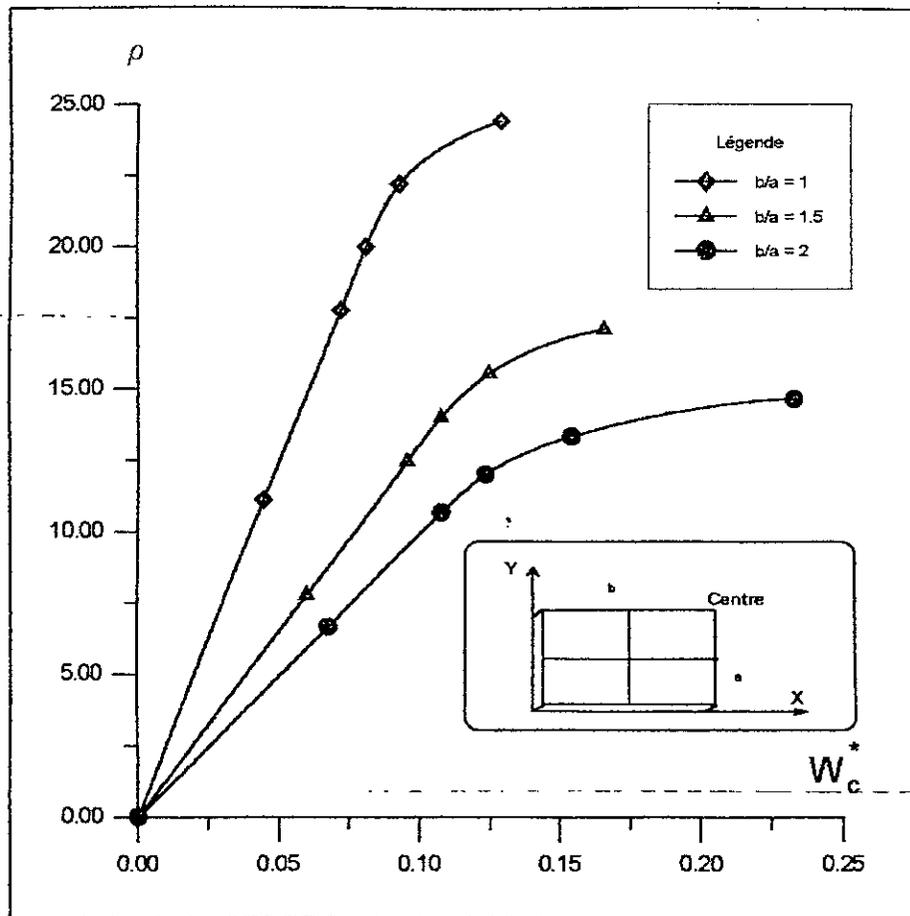


Figure 5.14 : Plaque simplement supportée avec charge répartie. Influence de la géométrie.

### Remarques

Nous avons fixé le nombre maximum d'itération, par défaut, égal à 60, et pour satisfaire le test de convergence, avons fixé la précision à  $10^{-3}$  pour les charges uniformes, et à  $10^{-4}$  pour les charges concentrées, quelque soit la norme du test de convergence utilisée.

Nous constatons que le premier pas de chargement doit être élastique pour assurer une convergence correcte. Il faut aussi diminuer le pas au fur à mesure que la plasticité progresse dans la structure.

## V.7. CONCLUSION

Comme il a été cité précédemment pour la figure 5.6, il est de même pour les figures 5.9 et 5.12, c'est à dire que pour un état élastique pour l'approche monocouche peut correspondre un état plastique pour l'approche multicouche. Phénomène qui explique bien la plastification partielle considérée par l'approche multicouche et négligée par l'approche monocouche.

Nous concluons que l'approche multicouche, malgré sa lenteur numérique du point de vue convergence, présente des résultats très satisfaisants comparés à ceux de l'approche monocouche validés par la littérature.

Nous remarquons aussi que dans le cas de l'encastrement il est nécessaire d'avoir un chargement presque double de celui de l'appui simple (à même données numériques avec charge répartie) pour arriver dans le domaine plastique. Figures 5.6 et 5.9. Cela explique que l'encastrement augmente la rigidité flexionnelle. Cette conclusion est aussi confirmée par les figures 5.7 et 5.10 qui montre que l'influence de l'encastrement sur l'allure de la médiane qui se présente sous forme de **S** (rotation nulle sur les appuis). Et à un incrément de charge identique (la charge  $q$  incrémentée étant la même), on remarque que les déplacements dans le cas de la plaque encastree sont nettement inférieurs à ceux de la plaque simplement supportée.

Sur les figures tracées par *Surfer* [11] (fig. 5.7.1 à 4, 5.10.1 à 4 et 5.12.1 à 4) nous remarquons que la propagation de la plasticité diffère d'un exemple à l'autre, dépendant des conditions aux limites et du type de chargement. Ainsi, nous pouvons déterminer des zones dangereuses, et par conséquent, dimensionner des structures réalisées par un assemblage de plaques.

## CONCLUSION

Parmi les caractéristiques les plus importantes qui définissent un matériau est sa limite élastique, cette dernière est souvent déterminée expérimentalement à partir d'un essai uni axial (traction - compression). Mais il est aussi important de déterminer l'aptitude de ce matériau à résister à la flexion ou à la torsion sans présenter des déformations après décharge.

Le travail qui nous a été proposé est de déterminer le champ des déformations plastiques pour la flexion des plaques par la méthode des éléments finis, avec des éléments quadrilatères à huit et à neuf noeuds (hétérosis).

Nous avons donc mis au point deux codes de calcul par éléments finis qui permet de déterminer le champ de déformations élasto-plastiques des structures bidimensionnelles.

L'évolution des zones plastiques (qui diffère d'un exemple à l'autre, dépendant des conditions aux limites et du type de chargement), nous a permis de localiser des zones dangereuses, et par conséquent, nous pouvons renforcer une structure faite d'assemblage de plaques pour éviter des déformations permanentes conduisant à long terme à une rupture.

La méthode des éléments finis nous permet donc de traduire l'évolution des déformations plastiques aux points les plus sollicités à l'aide de lois assez simples. Seulement, elle est caractérisée par des temps de calculs relativement importants, surtout pour l'approche multicouche.

Il serait intéressant d'envisager la comparaison de cette méthode avec celle des équations intégrales et de voir les avantages qu'elle pourra présenter quant à la rapidité de convergence, la qualité de la précision des résultats, et l'importance du temps de calcul.

Nous envisageons en perspective de confronter ces résultats avec ceux des essais expérimentaux réalisés sur éprouvette, pour confirmer la théorie développée.

Nous souhaitons que ce présent modeste travail permette l'initiation aux hypothèses des grandes déformations, pour la simulation du pliage ainsi que de l'emboutissage. Ou bien aussi, évoluer vers les éléments coques.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [ 1 ] J. L. BATOZ & G. DHATT  
"Modélisation des structures par éléments finis."  
Vol. 2. 'Plaques et Coques', 1990.
- [ 2 ] T. Z. BLAZINSKY  
"Applied elasto-plasticity of solids."  
London: Macmillan, 1983.
- [ 3 ] Mabrouk BEN TAHAR  
"Analyse élasto-plastique des plaques et coques minces  
par élément finis."  
Thèse Doctorat troisième cycle. U. T. COMPIÈNE., 1981.
- [ 4 ] W. F. CHEN & D. J. HAN  
"Plasticity for Structural Engineers."  
Springer-Verlag New York Inc, 1988.
- [ 5 ] R. D. COOK & D. S. MALKUS & M.E. PLESHA  
"Concepts and applications of finite element analysis."  
John WILEY and Sons, 1989.
- [ 6 ] G. DHATT & G. TOUZOT  
"Une présentation de la méthode des éléments finis."  
MALOINE S. A., 1984.
- [ 7 ] J. F. IMBERT  
"Analyse des structures par éléments finis."  
2<sup>ème</sup> édition, 1979.
- [ 8 ] P. JOLY  
"MODULEF: Méthode frontale."  
I.N.R.I.A. ROCQUENCOURT, 1985.
- [ 9 ] D. R. J. OWEN & E. HINTON  
"Finite elements in plasticity: Theory and practice."  
Pineridge Press Limited. SWANSEA. U. K., 1980.

- [ 10 ] D. SAADOUN  
"Etude des champs de déformation élasto-plastique  
et élasto-viscoplastique en fond d'entaille."  
Thèse de MAGISTER. E.N.P., 1993.
- [ 11 ] SURFER Ver 4.07  
Copyright (C) Golden Software, 1989.
- [ 12 ] P. PAPADOPOULOS & R. L. TAYLOR  
"Elasto-plastic analysis of Reissner-Mindlin plates."  
Appl Mech Rev, Vol. 43, Part 2, May 1990.
- [ 13 ] O. C. ZIENKIEWICZ & R. L. TAYLOR  
"The finite element methode."  
Mc Graw HILL Book Company, 1989.
- [ 14 ] O. C. ZIENKIEWICZ & S. VALLIAPPANT & I. P. KING  
"Elasto-plastic solution of engineering problems 'initial stress',  
finite element approach."  
I. Journal for Numerical Method in Engineering, Vol. 1, 1969.