

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire de JJEL

Institut de Technologie

Thèse

المدرسة الوطنية لتكنولوجيا
المصنعية — BIBLIOTHÈQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Présentée par : M^{elle} SAMIRA BOUMOUS

En vue de l'obtention du diplôme de :

Magister en génie électrique

Option : Modélisation des Réseaux Electriques

Thème

**APPLICATION DE LA METHODE DES VOLUMES FINIS POUR
L'ETUDE TRIDIMENSIONNELLE DU CHAMP
ELECTROMAGNETIQUE
- CAS DU CHAUFFAGE PAR INDUCTION -**

Soutenue publiquement devant la commission :

Mr. A. BOUBAKEUR	Professeur	ENP. Alger	Président
Mr. M.R. MEKIDECHE	Maître de conférences	C.U. JJEL	Rapporteur
Mr. A. MEKHALDI	Maître de conférences	ENP. Alger	Examineur
Mr. B. NEKHOUL	Maître de conférences	C.U. JJEL	Examineur
Mme. F.Z. NAIT SAID	Maître de conférences	Université de Batna	Examineur

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire de JIJEL

Institut de Technologie

Thèse



Présentée par : M^{elle} Samira Boumous

En vue de l'obtention du diplôme de :

Magister en génie électrique

Option : Modélisation des Réseaux Electriques

Thème

**APPLICATION DE LA METHODE DES VOLUMES FINIS POUR
L'ETUDE TRIDIMENSIONNELLE DU CHAMP
ELECTROMAGNETIQUE
- CAS DU CHAUFFAGE PAR INDUCTION -**

Soutenue publiquement devant la commission :

Mr. A. BOUBAKEUR	Professeur	ENP. Alger	Président
Mr. M.R. MEKIDECHE	Maître de conférences	C.U. JIJEL	Rapporteur
Mr. A. MEKHALDI	Maître de conférences	ENP. Alger.	Examineur
Mr. B. NEKHOUL	Maître de conférences	C.U. JIJEL	Examineur
Mme. F.Z. NAIT SAID	Maître de conférences	Université de Batna	Examineur

-2001-

Laboratoire d'Etudes et de Modélisation en Electrotechnique C.U. JIJEL

REMERCIEMENTS



Le grand merci à dieu qui m'a donné la volonté et la force d'acquérir le peu de connaissance dans le vaste domaine de la science.

Le grand merci à mes parents, mes frères et mes sœurs qui m'ont toujours encouragée.

Au terme de cette étude,

- *J'exprime ma sincère gratitude à mon promoteur M. M.R. Meckideche pour sa disponibilité, son aide et ses conseils précieux qui m'a porté tout au long de ce travail.*
- *Je tiens à remercier M. B. Nekhoul qui trouve ici l'expression de ma gratitude et mon sentiment de reconnaissance et de respect pour son aide et ses conseils.*
 - *J'adresse mes sincères remerciements à :*
 - *Monsieur A. BOUBAKEUR, professeur à ENP. Alger qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.*
 - *Monsieur, A. MEKHALDI, maître de conférences à ENP Alger, qui m'a fait l'honneur d'être membre de jury et examinateur de cette thèse.*
 - *Madame, F.Z. NAIT SAID, maître de conférences à l'Université de Batna, qui m'a fait l'honneur d'être membre de jury et examinatrice de cette thèse.*
- *Je remercie tous mes collègues, pour leur soutien permanent ainsi que toute personne qui a contribué à la réalisation de ce travail.*
- *Je tiens également à remercier Mr. M'hand Aloui qui n'a cessé de m'apporter de l'aide.*

CHAPITRE II METHODES DE RESOLUTION

Introduction.....	20
II.1. Méthodes analytiques...	20
II.1.1. Méthode de séparation des variables	20
II.2. Méthodes intégrales (semi-analytiques).....	21
II.2.1. Méthode des intégrales de frontières (MIF).....	22
II.2.2. Méthode des circuits couplés (MCC)	22
II 3. Méthodes numériques.....	23
II.3.1. Méthode des différences finies MDF	23
II.3.2. Méthode des éléments finis MEF	25
II.3.2.1. Principe de la méthode des éléments finis.....	25
1 -Méthode des résidus pondérés.....	25
2-Méthode variationnelle	27
II.3.2.2. Maillage éléments finis.....	27
II.3.3. La méthode des volumes finis MVF	28
Conclusion.....	29

CHAPITRE III MISE EN ŒUVRE DE LA METHODE DES VOLUMES FINIS

Introduction.....	30
III.1. Présentation de la méthode des volumes finis (MVF)	30
III.2. Formulation en volume finis du modèle A*	32
III.2.1. Formulation en coordonnées cartésiennes	32
III.2.1.1. Discrétisation du domaine d'étude	33
III.2.1.2. Discrétisation de l'équation de diffusion électromagnétique.....	35
III.2.1.3. Discrétisation des conditions aux limites	37

• <i>Condition de Dirichlet</i>	38
• <i>Condition mixte de Dirichlet – Neumann</i>	39
III.2.2. Formulation en coordonnées cylindriques	40
III.3. Résolution du système Algébrique $[A].[X]=[B]$	46
• <i>Les méthodes itératives</i>	46
• <i>Les méthodes directes</i>	46
III.4. Calcul des grandeurs électromagnétiques issues de la répartition du potentiel vecteur magnétique	46
1. La répartition de la densité de courants induits	46
2. La répartition de la densité de puissance	46
3. La répartition du puissance totale	47
4. Le rendement	47
5. La répartition du champ électrique	47
6. La répartition du champ magnétique	47
III.5. La mise en oeuvre informatique	47
III.6. Validation du modèle élaboré pour un cas cartésien	50
III.6.1. Description du problème	50
III.6.2. Maillage du domaine	51
III.6.3. Résultats de modélisation	53
Conclusion	56
CHAPITRE IV APPLICATIONS	
Introduction	57
IV.1. Etude de l'influence de l'hélicité pour une charge cylindrique	57
IV.1.1. Description du système	57
IV.1.2. Discrétisation du domaine d'étude	59
IV.2.3. Conditions aux limites	59
IV.1.4. Résultats de modélisation	60



- 1^{er} cas : Inducteur avec spires écartées.....61
 - 1. Etude du potentiel vecteur magnétique.....61
 - 2. Etude du densité de puissance induite dans la charge.....63
- 2^{eme} cas : inducteur à spires moyennement écartées..... 64
 - 1. Etude du potentiel vecteur magnétique.....64
 - 2. Etude du densité de puissance.....66
- 3^{eme} cas : inducteur à spires jointives.....67
 - 1. Etude du potentiel vecteur magnétique.....67
 - 2. Etude du densité de puissance induite dans la charge.....68

IV.2. Le chauffage par induction..... 71

- IV.2.1. Principe de chauffage par induction71
- IV.2.2. Equation de diffusion de la chaleur72
- IV.2.3. Conditions aux limites.....73
- IV.2.4. Discrétisation de l'équation thermique.....74
- IV.2.5. Couplage magnéto-thermique.....76

IV.3. Application au chauffage d'une plaque isolante.....78

- IV.3.1 .Description du problème.....78
- IV.3.2. Données physiques du problème électromagnétique.....78
- IV.3.3. Données thermiques du problème.....79
- IV.3.4. Résolution du problème couplé.....79
- IV.3.5. Conditions aux limites.....79
 - problème électromagnétique.....79
 - Problème thermique.....79
- IV.3.6. Résultats de modélisation.....80
- IV.3.7. Etude de la répartition de températures.....82
- IV.3.8. Interprétations des résultats.....83

Conclusion.....84

CONCLUSION GENERALE.....85

ANNEXE.....87

BIBLIOGRAPHIE.....90

INTRODUCTION GENERALE

L'électromagnétisme considère les phénomènes électriques et magnétiques à un niveau macroscopique. Les forces électriques et magnétiques produites sur des particules chargées sont liées à l'existence de grandeurs vectorielles appelées champs électrique et magnétique d'induction .

Les phénomènes électriques et magnétiques ont depuis toujours fasciné les humains et des aimants ont d'abord été observés dans la nature puis étudiés expérimentalement, surtout durant la première moitié du 19^{ème} siècle.

Maxwell est celui qui a réussi à mettre au point un modèle théorique unifié et qui décrit tous les phénomènes et les interactions électromagnétiques au moyen d'un ensemble de quatre équations.

La connaissance des champs électromagnétiques revêt un grand intérêt pour l'ingénieur chargé de la conception des dispositifs électriques. En effet , le dimensionnement et l'évaluation d'une machine synchrone par exemple, reposent sur la connaissance des inductions, dont découle le calcul des efforts dans les conducteurs, des Ampéretours consommés dans les circuits magnétiques, des flux utiles et des flux de fuite, ainsi que des réactances.

L'analyse de ces phénomènes électromagnétiques est basée sur la résolution des équations de Maxwell. Pour une description mathématique et une simulation numériques des phénomènes électromagnétiques dans des systèmes où les pièces peuvent comporter des variations de sections (pièces dentées) ou des systèmes qui ne possèdent pas une symétrie de révolution ou autre, une modélisation tridimensionnelle est indispensable .

L'étude du chauffage par induction demande une analyse à la fois électromagnétique et thermique. Le couplage entre ces phénomènes permet de tenir compte de l'interaction entre eux et des caractéristiques de la charge utilisée.

Le travail que nous proposons dans ce mémoire est l'application de la méthode des volumes finis à la résolution des équations de l'électromagnétisme pour des géométries tridimensionnelles.

La méthode des volumes finis est une méthode de résolution des équations différentielles dans les milieux continus par discrétisation. Elle a été introduite par S.V.Patankar [1], et utilisée essentiellement dans les domaines de la mécanique des fluides et du transfert de chaleurs [1].

9. Cette méthode Il semblerait qu'elle présente certains avantages par rapport à la méthode des différences finies dans la prise en compte des non-linéarités en raison de l'approximation de la variable entre deux points de calcul qui n'est plus linéaire.

Cette méthode a pourtant été peu ou pas du tout utilisée par les électrotechniciens au contraire des différences finies et surtout, actuellement, des éléments finis.

Dans ce travail nous allons tenter de développer une étude tridimensionnelle de cette méthode appliquée à la résolution des équations électromagnétiques. Cette étude se prolongera au domaine thermique par la modélisation d'un dispositif tridimensionnel de chauffage par induction.

Le premier chapitre est consacré, au travers d'une recherche bibliographique, à la présentation des lois de l'électromagnétisme, donc un rappel des équations de Maxwell, les équations de continuité et des conditions de passage entre différents milieux. Dans une deuxième partie nous présentons les différentes formulations électromagnétiques.

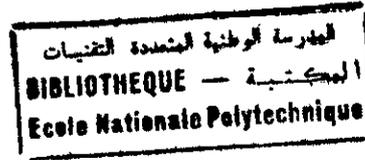
Dans le second chapitre, nous décrivons brièvement les méthodes de résolution de l'équation de diffusion électromagnétique tout en essayant, de tirer les avantages et les inconvénients des différentes méthodes.

La troisième partie du mémoire est consacrée à la discrétisation et la résolution de l'équation de diffusion électromagnétique par la méthode des volumes finis, à la validation du notre modèle en coordonnées cartésiennes pour un système déjà étudié par O. BIRO, K. PREIS dans [15].

Au cours du quatrième chapitre, nous présentons certaines applications de la méthode ainsi développée. Dans une première partie, nous étudions l'influence de l'hélicité pour une charge cylindrique avec différentes configurations du système, comme autre applications, nous réalisons un couplage magnéto-thermique dans le cas de l'étude du chauffage par induction d'un système tridimensionnel en coordonnées cylindriques.

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES EQUATIONS DE MAXWELL ET FORMULATIONS ELECTROMAGNETIQUES



INTRODUCTION

Il y a plus d'un siècle, James Clerc Maxwell (1831-1879) a développé une théorie regroupant toutes les lois qui gouvernent les phénomènes électriques et magnétiques. Grâce à l'induction des opérateurs vectoriels, le système original du Maxwell a pu être ramené à un ensemble qui ne comporte plus que quatre équations. Tout dispositif électrotechnique peut être exprimé et modélisé par ces quatre équations et pour qu'on puisse le traiter par des méthodes numériques, ces équations sont formulées à l'aide de différentes variables d'état.

Différentes formulations du problème peuvent être obtenus en utilisant, soit des potentiels scalaires ou vecteurs, magnétiques ou électriques soit des champs magnétiques ou électriques.

Dans le présent chapitre nous donnons un rappel des équations de Maxwell sous leurs formes locales ou globales.

Dans une deuxième partie nous présentons brièvement les formulations 2D et, avec plus de détails, celles en 3D.

I.1. EQUATIONS DE MAXWELL ET LOIS DE COMPORTEMENT DES MILIEUX

Tout dispositif électrotechnique peut être représenté par un ensemble constitué de :

- bobines inductrices dans lesquelles circule un courant variable dans le temps.
- Une boîte d'air englobant, des régions ferromagnétiques ou conductrices, des courants induits qui peuvent être en mouvement.

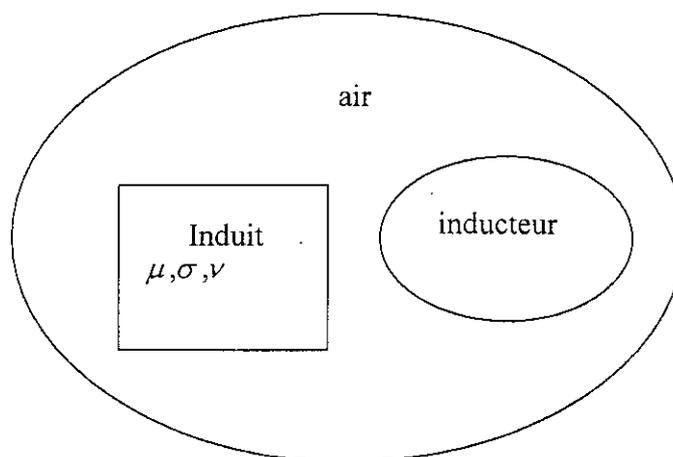


Figure I.1- Exemple général des dispositifs électrotechniques.

Tous les phénomènes électromagnétiques sont régis par les quatre équations aux dérivées partielles de Maxwell et par les relations du milieu considéré.

Dans tout ce qui va suivre, on adoptera les notations suivantes :

\vec{E} : champ électrique [V/m]

\vec{H} : champ magnétique [A/m]

\vec{D} : induction électrique [As/m²]

\vec{B} : induction magnétique [T]

\vec{J} : densité de courant [A/m²]

ρ : charge électrique [c]

ϵ : permittivité électrique [F/m]

μ : perméabilité magnétique [H/m]

Pour le cas du vide on a :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36 \pi \cdot 10^9} [F/m]$$

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} [H/m]$$

σ : conductivité électrique [mΩ]⁻¹.

\vec{n} : vecteur normal à la surface de séparation dirigé du milieu 1 vers le milieu 2.

1.1.1. Les équations de Maxwell

❖ Loi de Maxwell-Gauss

$$\text{div} \vec{D} = \rho \tag{I.1}$$

❖ Equation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{I.2}$$

❖ Equation de Maxwell-Ampere

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{I.3}$$

❖ Loi de conservation du flux magnétique

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{I.4})$$

Ces quatre équations ne sont pas complètement indépendantes l'une de l'autre ; En effet, si on prend la divergence de (I.2) on aboutit à l'équation (I.4) ; Par conséquent, on peut dire qu'il y a une certaine dualité entre les relations électriques et magnétiques. Cette dualité peut être exprimée en théorie des circuits en disant que la tension est une solution du problème électrique et que le courant est une solution du problème magnétique.

Pour déterminer les différentes variables, \vec{E} , \vec{H} , \vec{J} et \vec{D} il est indispensable d'imposer des équations liées aux lois constitutives du matériau qui sont :

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} + \vec{B}_r \quad (\text{I.5})$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} + \sigma \left(\vec{v} \wedge \vec{B} \right) + \vec{J}_{ext} \quad (\text{I.6})$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} \quad (\text{pour les systèmes amagnétiques}) \quad (\text{I.7})$$

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \quad (\text{I.8})$$

En absence de mouvement l'équation (I.6) se réduit à l'équation suivante :

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} + \vec{J}_{ext} \quad (\text{I.9})$$

Avec :

\vec{B}_r : champ rémanent.

\vec{v} : vitesse des pièces conductrices en mouvement.

\vec{J}_{ext} : courant d'excitation.

$\sigma \cdot \vec{E}$: représente la densité des courants résultant du champ électrique \vec{E} induit (composante statique).

$\sigma \left(\vec{v} \wedge \vec{B} \right)$: exprime la densité des courants résultant du mouvement (composante dynamique).

Les équations de Maxwell peuvent être exprimées sous leur *forme globale*, en termes de relations intégrales qui portent sur les champs dans des volumes, sur des surfaces et ou le long de contours.

Les deux relations rotationnelles deviennent après intégration sur la surface (S) et en utilisant le théorème de STOKES :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dA \quad (\text{I.10})$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{n} \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right) dA \quad (\text{I.11})$$

Ces deux relations expriment la relation existant entre la circulation des champs électrique et magnétique sur un contour fermé (C), et les flux d'induction et de courant qui traversent la surface.

Les deux équations (I.1), (I.4) en divergence deviennent, après intégration, sur le volume (V) et en utilisant le théorème de la divergence :

$$\oint_S \vec{n} \cdot \vec{D} dA = \int_V \rho dV \quad (\text{I.12})$$

$$\oint_S \vec{n} \cdot \vec{B} dA = 0 \quad (\text{I.13})$$

Les équations (I.12) et (I.13) expriment les valeurs du flux qui traverse une surface fermée S. Le flux du champ de déplacement \vec{D} est égal à la charge totale contenue dans le volume, tandis que le flux du champ d'induction est nul.

1.1.2. Conditions de passage

Prenons une surface de séparation entre deux milieux (1) et (2) d'épaisseur δ ; pour un δ qui tend vers zéro, les flux des champs \vec{B} et \vec{D} vont s'annuler, tandis que la densité de courant devient une la densité de courant surfacique \vec{J}_s caractérisée par une charge surfacique ρ_s .

$$\vec{n} \times [\vec{E}_1 - \vec{E}_2] = 0 \quad (\text{I.14})$$

$$\vec{n} \times [\vec{H}_1 - \vec{H}_2] = \vec{J}_s \quad (\text{I.15})$$

$$\vec{n} \cdot [\vec{D}_1 - \vec{D}_2] = \rho_s \quad (\text{I.16})$$

$$\vec{n} \cdot [\vec{B}_1 - \vec{B}_2] = 0 \quad (\text{I.17})$$

Les quatre relations précédentes montrent la continuité de la composante normale de vecteur induction magnétique \vec{B} et la composante tangentielle du vecteur champ électrique et, sous certaines conditions (absence des charges surfaciques), la continuité de la composante normale du vecteur induction électrique, elles montrent aussi la discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique.

I.1.3. Hypothèses simplificatrices

Dans le domaine de l'électrotechnique, les fréquences utilisées permettent de négliger tout aspect propagatif du champ électromagnétique. On parle d'approximation des états quasi stationnaires ou des régimes lentement variables. Pour que cette simplification soit légitime, il suffit que le dispositif électromagnétique considéré soit entièrement contenu dans une région de l'espace dont toutes les dimensions sont petites en comparaison avec la longueur d'onde ($\lambda = C / f$) où C représente la célérité de la lumière. Ainsi, pour une fréquence de l'ordre de 1 MHz la longueur d'onde est de 300 m, ce qui justifie parfaitement l'emploi de cette approximation dans l'étude des dispositifs de dimensions usuelles. Les caractéristiques électriques du matériau permettent à leur tour de négliger les effets capacitifs des conducteurs.

En se basant sur ces hypothèses on peut dans les dispositifs d'induction:

1. Négliger le courant de déplacement ($\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$) devant le courant de conduction ($\sigma \vec{E}$)

2. Négliger la charge d'espace dans les conducteurs. En effet en prenant la divergence de l'équation (I.3), on trouve, compte tenu de l'équation (I.1), la loi de conservation de la charge d'espace.

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{I.18})$$

En combinant cette relation avec la loi d'Ohm et l'équation (I.1), on obtient l'équation de conduction de la charge d'espace :

$$\rho + \frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.19})$$

Dont la solution est : $\rho(t) = \rho_0 e^{-(\frac{\sigma}{\varepsilon})t}$

Cette relation montre, que la charge d'espace s'atténue très rapidement par retour à la neutralité électrique. Il peut, toutefois, exister des charges électriques sur le pourtour du conducteur mais alors, celles-ci sont statiques et ne contribuent pas aux phénomènes d'induction.

Cas où l'effet de peau est important

Dans le cas d'une grande conductivité et une fréquence de courant de source très grande le courant alternatif parcourant la charge a tendance à se concentrer à sa surface ; la densité de courant décroît de la surface de la charge vers son centre. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet de peau. Il est caractérisé par une profondeur de pénétration δ du courant ou une épaisseur de peau électromagnétique.

Elle dépend de la fréquence, la conductivité et la perméabilité magnétique μ soit :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}} \quad (\text{I.20})$$

Considérons une charge cylindrique de longueur assez grande par rapport à celle de l'inducteur et de rayon important par rapport à l'épaisseur de peau. L'équation de diffusion électromagnétique en fonction de la densité du courant pour un tel système s'écrit :

$$\frac{\partial^2 J(r)}{\partial r^2} - j \frac{2}{\delta^2} J(r) = 0 \quad (\text{I.21})$$

A la surface où ($r = R$) et sachant que la solution ne doit pas croître indéfiniment pour r tendant vers l'infini, la solution de (I.21) est :

$$J(r) = J_s e^{-\frac{(1+j)}{\delta}(R-r)} \quad (\text{I.22})$$

où :

J_s : densité de courant.

La puissance induite décroît d'une manière exponentielle :

$$P(r) = \frac{\delta}{2} J_s^2 e^{-2\frac{(R-r)}{\delta}} \quad (\text{I.23})$$

Dans ce cas, il suffit de connaître le courant à la surface pour déduire analytiquement ses valeurs à l'intérieur du conducteur.

I.2. FORMULATIONS ELECTROMAGNETIQUES

I.2.1. Formulations bidimensionnelles

I.2.1.1. Formulation en potentiel en coordonnées cartésiennes

La quatrième équation de Maxwell ($\text{div } \vec{B} = 0$) implique que l'induction dérive d'un potentiel vecteur magnétique \vec{A} tel que :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (\text{I.24})$$

L'équation de Maxwell en champ électrique ($\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$) implique qu'il existe un potentiel scalaire V électrique tel que :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } V. \quad (\text{I.25})$$

En combinant (I.9), (I.24) et (I.25) nous obtenons l'équation de diffusion électromagnétique en potentiel vecteur magnétique \vec{A} :

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \right) + \sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad } V \right) = \vec{J}_{ext}. \quad (\text{I.26})$$

posons : $\frac{1}{\mu} = \nu$ (la réductivité magnétique).

$$\text{rot}(\nu \cdot \text{rot} \vec{A}) + \sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad} \vec{V} \right) = \vec{J}_{ext} \quad (\text{I.27})$$

En deux dimensions, le potentiel vecteur, qui n'a qu'une seule composante perpendiculaire au plan d'étude [9]. Si l'élément se fait dans le plan (xy), la composante perpendiculaire est celle suivant (oz) ; par conséquent on peut écrire :

$$\vec{A} = \vec{k} \cdot A_z(x, y) \quad (\text{I.28})$$

où : \vec{k} , le vecteur unitaire selon oz.

$$\text{rot}(\nu \cdot \text{rot} \vec{A}_z) + \sigma \left(\frac{\partial \vec{A}_z}{\partial t} + \text{grad} \vec{V} \right) = \vec{J}_{ext} \quad (\text{I.29})$$

Le courant \vec{J} ne possède qu'une seule composante suivant l'axe (oz) donc :

$$\vec{J} = J_z \cdot \vec{k} \quad (\text{I.30})$$

ce qui conduit à :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.31})$$

Il reste à écrire :

$$\text{grad} \vec{V} = \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \vec{k} \quad (\text{I.32})$$

Après, la transformation du rotationnel en coordonnées cartésiennes l'équation précédente s'écrit :

$$\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} \right) \vec{e}_x - \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right) \vec{e}_z + \sigma \mu \left(\frac{\partial A_z}{\partial t} + \text{grad} \vec{V} \right) = \mu \vec{J}_{ext}. \quad (\text{I.33})$$

C'est l'équation de diffusion électromagnétique en potentiel vecteur en 2D dans les coordonnées cartésiennes.

L'équation (I.33) admet une infinité de solution ; En effet, si (A', V') est une solution, il existe un couple (A', V') défini par :

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad} f. \end{cases} \quad (\text{I.34})$$

$$\begin{cases} V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}. \end{cases} \quad (\text{I.35})$$

Qui est une solution .

Si on peut assurer l'unicité de \vec{A} , on peut dire que le gradient de V est aussi fixé donc on a assuré l'unicité de la solution [6], [11].

Pour cela il est nécessaire d'ajouter une condition de jauge. La jauge de Coulomb ($\text{div} \vec{A} = 0$), ou la jauge de Lorentz ($V = \frac{-1}{\mu\sigma} \text{div} \vec{A}$) sont les plus connues [6].

I.2.1.2. Formulation en potentiel en coordonnées cylindriques [6]

Considérons les systèmes possédant des symétries axiales tels que les configurations montrées à la figure I.2, où une charge cylindrique est mise à l'intérieur d'un inducteur solénoïdal, ou une plaque métallique face à un inducteur spiral.

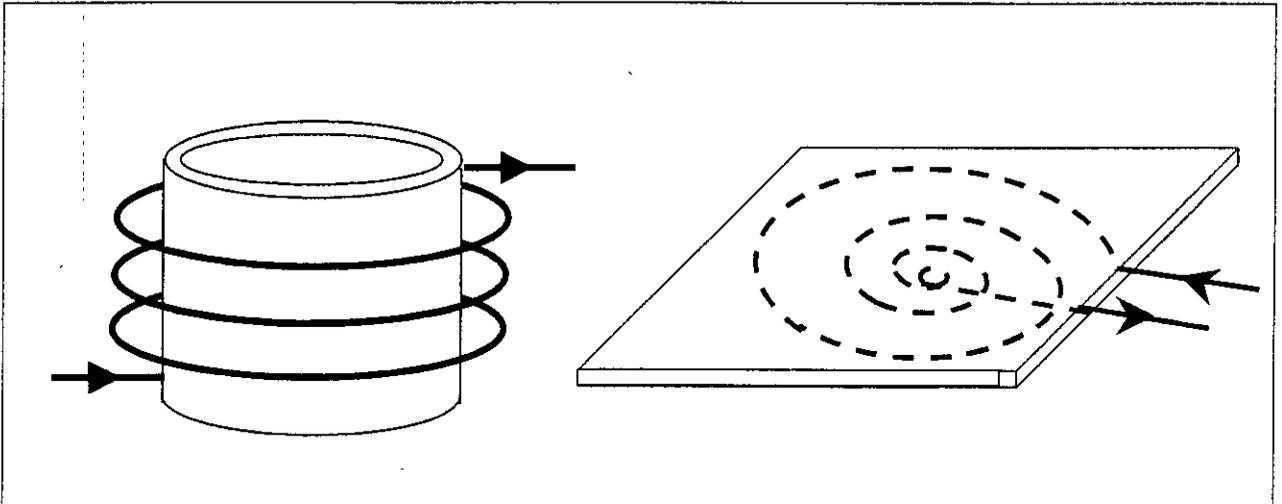


Figure I.2 – Exemple d'élément axisymétrique

En négligeant l'hélicité des spires, ces systèmes possèdent une symétrie de révolution (systèmes axisymétriques), la condition ($\text{div} \vec{J} = 0$) est vérifiée; Par conséquent, le potentiel vecteur magnétique \vec{A} ne possède qu'une seule composante azimutale suivant θ donc :

$$\vec{J} = \begin{bmatrix} 0 \\ J_\theta(r,z) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_\theta \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} B_r(r,z) \\ 0 \\ B_z(r,z) \end{bmatrix}$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} = 0, \text{ et sachant que :}$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (\text{I.36})$$

Où $\Delta \vec{A}$ est le Laplacien du vecteur.

Donc (I.27) devient :

$$v \Delta \vec{A} - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \sigma \text{grad} V + J_{\text{ext}} \quad (\text{I.37})$$

$$v \Delta (A_\theta \cdot \vec{e}_\theta) - \sigma \frac{\partial (A_\theta \cdot \vec{e}_\theta)}{\partial t} = \sigma \text{grad} V + J_{\text{ext}} \quad (\text{I.38})$$

$$\Rightarrow v \Delta (A_\theta) - \sigma \frac{\partial (A_\theta)}{\partial t} = (\sigma \text{grad} V) \cdot \vec{e}_\theta + J_{\text{ext}} \quad (\text{I.39})$$

Et comme : $\Delta (A_\theta) = \text{div}(\text{grad } A_\theta)$

a- Equation de diffusion électromagnétique dans la charge

Pour une charge de conductivité σ et relucivité v , le courant induit dans la charge est dû à la variation temporelle du potentiel magnétique, dont l'équation (I.39) devient : [voir annexe]

$$v \left(\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right) - \sigma \frac{\partial A_\theta}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.40})$$

b- Equation de diffusion électromagnétique dans l'inducteur

L'inducteur est caractérisé par une perméabilité magnétique égale à celle du vide. Pour un inducteur excité par une source de courant J_{ext} , l'équation de diffusion se réduit à l'équation de POISSON :

$$\text{div}(\text{grad } A_\theta) = -\mu_0 J_{\text{ext}} \quad (\text{I.41})$$

$$\left(\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right) = -\mu_0 J_{\text{ext}} \quad (\text{I.42})$$

c- Equation de diffusion électromagnétique dans l'air

Dans les régions possédant une conductivité nulle, l'équation (I.39) se réduit à l'équation de LAPLACE :

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \bar{A}_\theta) = 0 \quad (\text{I.43})$$

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{A}_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \bar{A}_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{A}_\theta}{\partial r} \right) = 0 \quad (\text{I.44})$$

I.2.2. Formulations tridimensionnelles

On peut classer les formulations tridimensionnelles en deux grandes catégories selon que la région considérée est conductrice ou non-conductrice .

I.2.2.1. Formulations dans les régions conductrices

I.2.2.1.1. Formulation en A-V

Cette formulation utilise le potentiel vecteur \vec{A} et le potentiel scalaire électrique V, l'équation (I.4) implique que l'induction dérive d'un potentiel vecteur magnétique \vec{A} tel que :

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

l'équation (I.2) implique qu'il existe un potentiel scalaire électrique V tel que :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V$$

En combinant ces équations avec (I.9) on trouve :

$$\operatorname{rot}(\nu \operatorname{rot} \vec{A}) + \sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \sigma \operatorname{grad} V = \vec{J}_{ext}$$

Avec :

$$\nu = \frac{1}{\mu} . \text{ La réductivité magnétique .}$$

Il vient :

$$\vec{J} = \sigma \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \vec{V} \right) + \vec{J}_{ext} \quad (\text{I.45})$$

la divergence de l'équation (I.45) implique que:

$$\text{div} \left[-\sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad} \vec{V} \right) + \vec{J}_{ext} \right] = 0 \quad (\text{I.46})$$

Cette dernière équation exprime la condition de conservation de la densité de courant
 $\text{div} J = 0$

Aux interfaces entre deux milieux différents de perméabilité magnétique μ_1 et μ_2 , il faut assurer :

$$\nu_1 (\text{rot} \vec{A}_1) \wedge \vec{n} = \nu_2 (\text{rot} \vec{A}_2) \wedge \vec{n} \quad (\text{I.47})$$

Avec : \vec{n} le vecteur normal à la surface de séparation des deux milieux.

Pour les interfaces où la conductivité subit une discontinuité et en tenant en compte de la condition de conservation de la composante normale de la densité de courant J , on a :

$$\sigma_1 \left(\frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} + \text{grad} \vec{V}_1 \right) \cdot \vec{n} - \sigma_2 \left(\frac{\partial \vec{A}_2}{\partial t} + \text{grad} \vec{V}_2 \right) \cdot \vec{n} \quad (\text{I.48})$$

Lorsque la deuxième région n'est pas conductrice $\sigma_2 = 0$, on a :

$$\sigma_1 \left(\frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} + \text{grad} \vec{V}_1 \right) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{I.49})$$

La formulation en A - V est très lourde et coûteuse en temps de calcul et en place mémoire car, elle utilise quatre inconnues (une inconnue vectorielle avec trois composantes et une inconnue scalaire). Cependant elle est générale et accepte les sauts de conductivité. [3],[4].

1.2.2.1. 2 Formulation en A^*

Afin de réduire le nombre d'inconnues dans le système à résoudre, on peut inclure le potentiel scalaire électrique dans le potentiel vecteur magnétique. Le nouveau potentiel est le potentiel vecteur modifié \vec{A}^* , il a été introduit comme suit [3],[4] :

$$\frac{\partial \vec{A}^*}{\partial t} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad} V \quad (\text{I.50})$$

$$\vec{E} = \frac{\partial \vec{A}^*}{\partial t} \quad (\text{I.51})$$

donc l'équation de diffusion électromagnétique s'écrit :

$$\text{rot}(\nu \text{rot} \vec{A}^*) + \sigma \frac{\partial \vec{A}^*}{\partial t} = \vec{J}_{ext} \quad (\text{I.52})$$

$$\text{rot}(\nu \text{rot} \vec{E}) + \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}_{ext} \quad (\text{I.53})$$

Cette formulation est intéressante car elle ne garde que trois inconnues pour un nœud de maillage mais il faut imposer la jauge $\text{div} \vec{E} = 0$, pour assurer la continuité de la variable d'état [3], donc elle présente un inconvénient dans le cas d'une discontinuité de la conductivité (à l'interface de deux milieux de conductivités différentes).

1.2.2.1.3 Formulation en T - Ω

On déduit de la divergence nulle de la densité de courant que \vec{J} dérive d'un potentiel vecteur électrique \vec{T} tel que [3],[4] :

$$\vec{J} = \text{rot} \vec{T} \quad (\text{I.54})$$

remplaçons (I.53) dans (I.3) on obtient :

$$\text{rot} \vec{H} = \text{rot} \vec{T} \quad (\text{I.55})$$

Le champ magnétique \vec{H} peut être exprimé en fonction du potentiel vecteur électrique \vec{T} et d'un potentiel scalaire magnétique Ω comme suit :

$$\vec{H} = \vec{T} - \text{grad} \Omega \quad (\text{I.56})$$

En combinant (I.54) et (I.56) et l'équation (I.9), on trouve :

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\sigma} (\text{rot} \vec{T}) \right) + \mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{T} - \text{grad} \Omega) = \vec{J}_{ext} \quad (\text{I.57})$$

posant $\frac{1}{\sigma} = \rho$ (la résistivité) on aura :

$$\text{rot} (\rho \text{rot} \vec{T}) + \mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{T} - \text{grad} \Omega) = \vec{J}_{ext} \quad (\text{I.58})$$

à partir de ($\text{div } \vec{B} = 0$), on obtient :

$$\text{div } \mu (\vec{T} - \text{grad } \Omega) = 0 \quad (\text{I.59})$$

Pour assurer la continuité des variables \vec{T} et Ω , il faut associer aux équations (I.58) et (I.59) les équations d'interface suivantes :

$$\mu_1 (\vec{T}_1 - \text{grad } \Omega_1) \cdot \vec{n} = \mu_2 (\vec{T}_2 - \text{grad } \Omega_2) \cdot \vec{n} \quad (\text{I.60})$$

$$\rho_1 (\text{rot } \vec{T}_1) \wedge \vec{n} = \rho_2 (\text{rot } \vec{T}_2) \wedge \vec{n}. \quad (\text{I.61})$$

A l'interface entre une région conductrice et une autre non-conductrice :

$$\vec{T} \wedge \vec{n} = \text{constante}$$

La formulation T- Ω possède une infinité de solutions, donc il faut imposer des conditions de jauge type jauge de Coulomb :

$$\text{div } \vec{T} = 0 \quad (\text{I.62})$$

Elle est intéressante puis qu'elle permet d'avoir directement l'induction mais, elle n'est pas générale car, elle présente des problèmes de régions multiples connexes [4].

1.2.2.1.4. Formulation en \vec{H}

En prenant en compte les équations (I.2), (I.7) et (I.8) et (I.3) il vient :

$$\text{rot} (\rho \text{ rot } \vec{H}) + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{J}_{\text{ext}} \quad (\text{I.63})$$

Cette formulation est beaucoup utilisée dans la méthode des éléments finis utilisant les éléments d'arêtes, ces derniers ne conservent que la composante tangentielle de l'inconnue ce qui est le cas pour le champ magnétique \vec{H} [3].

1.2.2.2. Formulations dans les régions non-conductrices

Elles sont caractérisées par une conductivité nulle ce qui rend les équations de Maxwell plus simple là où le champ électrique n'intervient plus :

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_s \quad (\text{I.64})$$

\vec{J}_s Etant la densité de courant de source dans l'inducteur .

1.2.2.2.1. Formulation en A

L'équation (I.4) implique que \vec{B} dérive d'un potentiel magnétique \vec{A} tel que :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$

En combinant l'équation précédente avec la loi constitutive du matériau (I.7) et (I.64), on trouve :

$$\text{rot } (\mu \text{ rot } \vec{A}) = \vec{J}_s. \quad (\text{I.65})$$

Il faut assurer la continuité des composantes tangentielles du champ magnétique à l'interface entre deux milieux différents :

$$\mu_1 (\text{rot } \vec{A}_1) \wedge \vec{n} = \mu_2 (\text{rot } \vec{A}_2) \wedge \vec{n}. \quad (\text{I.66})$$

A fin d'assurer l'unicité de la solution , il est nécessaire d'imposer une condition de jauge qui est la condition de Coulomb , alors il vient :

$$\text{rot } (\mu \text{ rot } \vec{A}) + \mu \text{ grad } (\text{div } \vec{A}) = \vec{J}_s. \quad (\text{I.67})$$

Comme cette formulation possède une inconnue vectorielle donc trois inconnues par nœud, la résolution de l'équation (I.67) occupe une grande place mémoire et un temps de calcul important.

1.2.2.2.2. Formulation en potentiel scalaire total

Dans une région où on n'a pas de courant de source $\text{rot } \vec{H} = 0$, cela implique que \vec{H} dérive d'un potentiel scalaire ϕ_t appelé potentiel scalaire total [3],[4].

$$\vec{H} = -\text{grad } \phi_t. \quad (\text{I.68})$$

de (I.4) et (I.68) on obtient :

$$\text{div } (\mu \text{ grad } \phi_t) = 0. \quad (\text{I.69})$$

Lorsque ϕt est continu, la continuité de la composante tangentielle de \vec{H} est vérifiée, donc il reste à vérifier la continuité de la composante normale de \vec{B} . il faut s'assurer de :

$$(\mu_1 \text{grad} \phi t_1) \cdot \vec{n} = (\mu_2 \text{grad} \phi t_2) \cdot \vec{n} \quad (\text{I. 70})$$

Cette formulation est intéressante dans les régions où on n'a pas de courant de sources, et elle est économique (une inconnue scalaire par nœud).

I.2.2.2.3. Formulation en potentiel scalaire réduit [3], [4]

Dans le but de prendre en considération les courants de sources, on décompose le champ magnétique \vec{H} en deux champs :

$$\vec{H} = \vec{H}_j + \vec{H}_r \quad (\text{I. 71})$$

où :

- \vec{H}_j est le champ source, c'est le champ qui serait créé par l'inducteur dans le vide.
- \vec{H}_r est le champ créé par la réaction des parties magnétiques ou conductrices lorsqu'elles sont soumises au champ.

Au point M de calcul de champ on peut calculer \vec{H}_j par la loi de Biot et Savart :

$$\vec{H}_j(M) = \frac{1}{4\pi} \left[\iiint (J_s(p) \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}) \cdot dp \right] \quad (\text{I.72})$$

Où :

« P » est un point situé dans la région de l'inducteur, « \vec{r} » étant le vecteur $M\vec{P}$.

Le champ \vec{H}_j vérifie la loi d'Ampère :

$$\text{rot} \vec{H}_j = \vec{J}_s \quad (\text{I.73})$$

\vec{H}_r dérive d'un potentiel scalaire réduit Φ_r alors :

$$\vec{H}_r = -\text{grad} \Phi_r \quad (\text{I.74})$$

En remplaçant (I.73) et (I.74) dans (I.71) on obtient :

$$\vec{H} = \vec{H}_j - \text{grad} \Phi_r \quad (\text{I.75})$$

En combinant (I.75) et (I.4) on trouve l'équation à résoudre suivante :

$$\text{div} \left[\mu (\vec{H}_j - \text{grad} \Phi_r) \right] = 0 \quad (\text{I.76})$$

Comme pour le potentiel scalaire total, la continuité de la composante tangentielle de \vec{H} est vérifiée dès que Φ est continu et il reste à vérifier la continuité de la composante normale de l'induction magnétique \vec{B} :

$$\mu_1 (\vec{H}_1 - \text{grad} \bar{\phi}_1) \cdot \vec{n} = \mu_2 (\vec{H}_2 - \text{grad} \bar{\phi}_2) \cdot \vec{n}. \quad (I.78)$$

Cette formulation présente des problèmes numériques lorsque les perméabilités des matériaux non-conducteurs sont importantes et des problèmes de type topologique dans les régions non-conductrices [3].

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au développement mathématique des équations de Maxwell qui décrivent tout dispositif électrotechnique. En synthétisant ces équations nous pouvons résoudre tout système grâce à une seule équation générale qui est l'équation de diffusion électromagnétique.

Il existe un grand nombre de formulations possibles, surtout en tridimensionnel, ces formulations ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients.

Il convient de bien les choisir selon la nature du problème à résoudre et selon les propriétés du milieu où est résolue l'équation de diffusion électromagnétique.

CHAPITRE II

METHODES DE RESOLUTION DES PHENOMENES ELECTROMAGNETIQUES

INTRODUCTION

Pour résoudre les équations aux dérivées partielles (EDP) ; différentes méthodes ont été développées. Elles sont analytiques, numériques ou mixtes (semi-analytiques). Ces méthodes permettent de modéliser les géométries les plus complexes et de prendre en compte les phénomènes physiques comme la saturation des matériaux ferromagnétiques, les anisotropies des milieux et la présence de courants des Foucault induits dans les conducteurs soumis à un flux variable.

II.1. METHODES ANALYTIQUES

Les premiers travaux sont les méthodes analytiques basées sur les modèles mono-dimensionnels dans lesquelles on suppose que la longueur suivant (oz) est grande ; Pour le cas d'une géométrie cylindrique avec axisymétrie , les grandeurs physiques sont exprimées uniquement en fonction de « r ». [2]

Pour se rapprocher réellement des systèmes électromagnétiques , plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés; la solution analytique dans ces modèles est généralement difficile. Cependant , pour des géométrie simples on peut trouver des solutions analytiques à partir de la méthode de séparation de variable se basant sur le principe de superposition .

II.1.1. Méthode de séparation des variables [5]

- ❖ En coordonnées cartésiennes lorsque les conditions aux limites sont spécifiées sur des plans parallèle ou orthogonaux , donc l'équation de Laplace prend la forme :

$$\nabla^2 V(x,y,z) = \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{II.1})$$

Supposons que le potentiel est le produit de trois fonctions :

$$V(x,y,z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \quad (\text{II.2})$$

En remplaçant (II.2) dans (II.1) et divisons par $V(x,y,z)$ on obtient :

$$\frac{\nabla^2 V(x,y,z)}{V(x,y,z)} = \frac{1}{X(x)} \cdot \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \cdot \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \cdot \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0 \quad (\text{II.3})$$

Nous remarquons que la dernière équation est une somme de trois termes dépendant chacun d'une seule coordonnées du système. Pour satisfaire cette équation , il faut avoir ces trois simultanément :

$$\frac{1}{X(x)} \cdot \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = K_x^2 \quad (\text{II.4})$$

$$\frac{1}{Y(y)} \cdot \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = K_y^2 \quad (\text{II.5})$$

$$\frac{1}{Z(z)} \cdot \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = K_z^2 \quad (\text{II.6})$$

Alors :

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 0 \quad (\text{II.7})$$

les coefficients K_x, K_y, K_z sont des constantes de séparation .

Les équations (II.4) , (II.5) et (II.6) sont des équations différentielles linéaires à coefficients constants possédant trois solutions possibles dépendantes de la constante K .

$$\text{si : } K_x^2 > 0 \quad X(x) = A_1 \cdot e^{k_x \cdot x} + A_2 \cdot e^{-k_x \cdot x} \quad (\text{II.8})$$

$$\text{si : } K_x^2 = 0 \quad X(x) = A_1 \cdot x + A_2 \quad (\text{II.9})$$

$$\text{si : } K_x^2 < 0 \quad X(x) = A_1 \cdot e^{k_x \cdot x} + A_2 \cdot e^{-k_x \cdot x} \quad (\text{II.10})$$

Par analogie ,on peut déduire les solutions pour $Y(y)$, $Z(z)$. Après avoir trouvé les solutions selon x , y , z ; on peut dire qu'on a pu remplacer un problème tridimensionnel par des problèmes mono dimensionnels plus faciles à résoudre.

Ce raisonnement peut être étendu aux cas suivants :

- ❖ En coordonnées cylindriques lorsque les conditions aux limites sont spécifiées sur des cylindres ou sur des plans faisant un angle entre eux.
- ❖ En coordonnées sphériques lorsque les conditions aux limites sont spécifiées sur des surfaces sphériques ou des cônes.

II.2. METHODES INTEGRALES (SEMI-ANALYTIQUES)

II.2.1. Méthode des intégrales de frontières (MIF) [6]

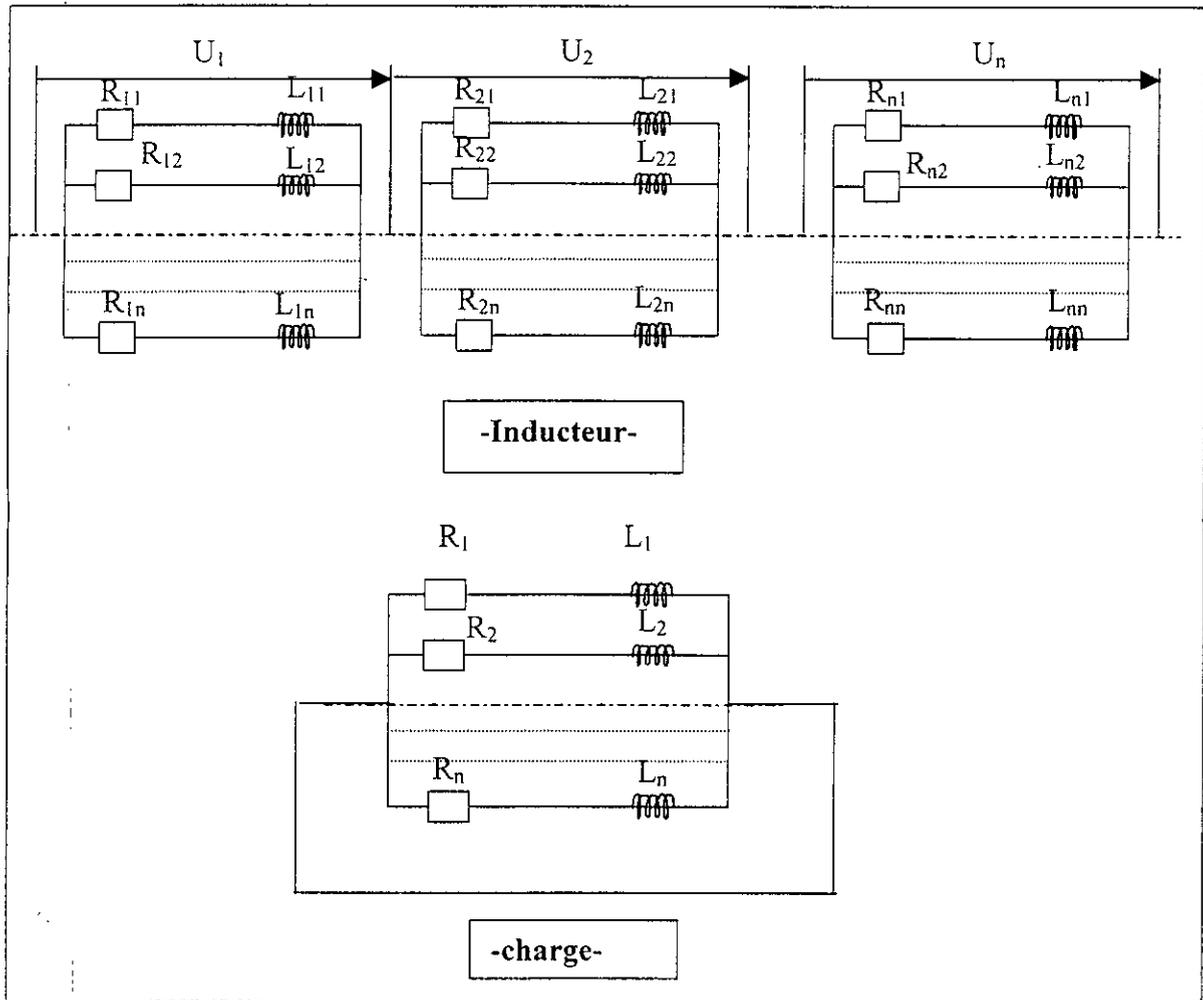
Elle consiste à discrétiser la frontière du domaine en utilisant le théorème de Green , elle est limitée à la résolution des systèmes linéaires.

La limitation de la discrétisation aux frontières du domaine nous donne l'avantage de réduction de la place mémoire surtout pour les systèmes tridimensionnels où l'air occupe une grande partie du domaine.

Cependant, elle a l'inconvénient de conduire à des systèmes qui possèdent des matrices pleines.

II.2.2. Méthode des circuits couplés (MCC) [2]

Elle consiste à associer à la forme intégrale de la solution ,une subdivision du domaine de conductivité connue en spires élémentaires et à formuler les équations de Maxwell et la loi d'Ohm pour chaque spire a fin d'obtenir une équation faisant intervenir les chutes de tension résistives et inductives correspondantes.



-Figure (II.1) – Schéma électrique équivalent

II. 3. METHODES NUMERIQUES

Ce sont des méthodes qui résolvent directement l'équation de diffusion électromagnétique en prenant en compte les non linéarités dans les systèmes électromagnétiques. Avec le développement des ordinateurs ces méthodes trouvent un large champ d'utilisation.

II.3.1. Méthode des différences finies MDF [5] , [12]

C'est une méthode basée sur le théorème de Taylor où on remplace l'opérateur différentiel par un opérateur aux différences.

Le domaine d'étude est découpé au moyen d'une grille carrée dans le cas bidimensionnel et une grille cubique en tridimensionnel , l'équation de diffusion est écrite pour chaque point ou nœud

de maillage ,pour cela on aura un système d'équation possédant un nombre d'équations égal au nombre de nœuds.

La figure II.2 représente un exemple de maillage pour le cas bidimensionnel où le point « p » représente le point milieu de la grille , « E » est le point adjacent du côté Est « W » le point adjacent du côté Ouest , « N » le point adjacent du côté Nord et « S » du côté Sud. .

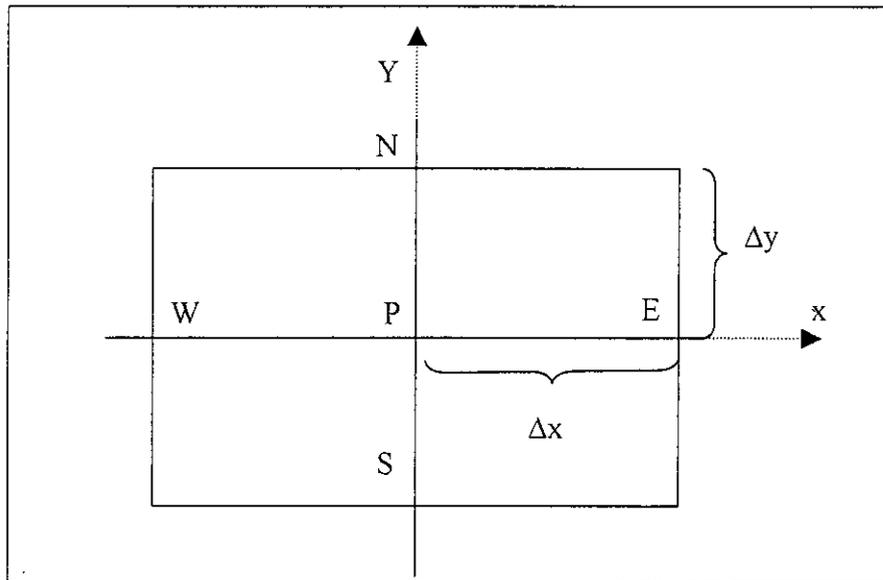


Figure. II.2- Exemple de maillage en 2D

Développons la variable d'état A en série de Taylor jusqu'au troisième terme ,nous obtenons :

$$A(E) = A(p) + (\Delta x) \left(\frac{dA}{dx} \right)_p + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left(\frac{d^2 A}{dx^2} \right)_p + \dots$$

$$A(W) = A(p) - (\Delta x) \left(\frac{dA}{dx} \right)_p + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left(\frac{d^2 A}{dx^2} \right)_p + \dots$$

On peut déduire de ces équations que :

$$\left(\frac{d^2 A}{dx^2} \right)_p = \frac{A(E) - 2 \cdot A(p) + A(W)}{(\Delta x)^2}$$

$$\left(\frac{dA}{dx} \right)_p = \frac{A(E) - A(P)}{2 \cdot \Delta x} \quad W$$

Par analogie on peut écrire les dérivées premières et secondes pour « y » au point P.

Après avoir transformé les opérateurs différentiels en rapport des dérivées partielles en les substituant dans l'équation de diffusion correspondante au point p, on obtient l'équation aux différences finies au nœud « p », qui est une équation linéaire dépendante des paramètres physiques du système (perméabilité, conductivité, courant d'excitation), et de la variable aux points voisins de nœud de calcul et des pas de maillage selon les axes.

A la fin nous obtenons un système matriciel $[A] \cdot [X] = [B]$.

Où :

$[A]$: une matrice carrée de dimension $(m \cdot n) \cdot (m \cdot n)$ si on a $(m \cdot n)$ nœuds interne du domaine de résolution .

$[X]$: une matrice colonne de dimension $(m \cdot n)$ représentant l'inconnue .

$[B]$: une matrice colonne de dimension $(m \cdot n)$ représentant le second membre des équations

Ce système d'équations peut être résolu par inversement de matrice ou par d'autres techniques.

La méthode des différence finies est très simple à mettre en œuvre mais elle peut ne pas être précise puis qu'elle prend le développement en série de Taylor du potentiel jusqu'au troisième terme et elle n'embrasse pas vraiment les limites du domaine d'étude en cas d'escaliers.

II.3.2. Méthode des éléments finis MEF [13]

II.3.2.1. Principe de la méthode des éléments finis

C'est une méthode qui a été utilisée en premier lieu en génie civil et en mécanique et n'a trouvé sa place en électricité que vers les années soixante [5].

Elle est plus générale car elle est adaptée aux géométries complexes et elle aux non linéarité du matériaux. Dans cette méthode, on cherche à exprimer une formulation intégrale qui se base soit sur la méthode des résidus pondérés soit sur la méthode variationnelle.

1. Méthode des résidus pondérés

C'est une méthode projective où on cherche à projeter l'équation locale sur des fonctions de base d'un espace de fonctions de pondération et on essaye de minimiser le résidu induit par l'approximation de la fonction de l'inconnue [11].

Posons une équation différentielle de type :

$$L(\phi)=0. \quad (\text{II.11})$$

L'équation possède une solution de la forme :

$$\bar{\phi} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m. \quad (\text{II.12})$$

La substitution de $\bar{\phi}$ dans l'équation (II.11) nous donne un résidu défini par :

$$R = L(\bar{\phi}). \quad (\text{II.13})$$

donc R est une fonction dépendante des coefficients a_j et x .

La méthode des résidus pondérés consiste à déterminer les a_j de telle sorte que :

$$(R, W_k) = \int R(a_j, x) \cdot W_k(x) dx = 0. \quad (\text{II.14})$$

$$k = 1 \text{ à } n.$$

W_k sont les fonctions de pondération.

L'équation est un système de « n » équations qu'on cherche à le résoudre pour trouver les a_j . Le bon choix de W_k implique une bonne précision de l'approximation, donc une détermination correcte des inconnues a_j . Il y a différentes méthodes pour le choix des fonctions de pondération

- Méthode des sous-domaines :

Le domaine D est partagé en « n » sous domaines D_k tel que :

$$\begin{cases} w_k(x) = 1 & \text{dans } D_k \\ w_k(x) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Méthode de collocation :

Elle consiste à choisir W_k telle que :

$$W_k(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_k)$$

\vec{r}_k est un ensemble de n points donnés.

$\delta(\vec{r} - \vec{r}_k)$ est la fonction de Dirac.

- Méthode des moindres carrés :

Dans cette méthode, on exprime $W_k(\vec{r})$ par:

$$W_k(\vec{r}) = \frac{\partial R(a_j, \vec{r})}{\partial a_k}$$

- Méthode de Galerkin :

$$W_k(\vec{r}) = \phi_k(\vec{r}), \quad k=1..n$$

Les conditions requises pour appliquer correctement la méthode de Galerkin sont les suivantes :

- Les fonctions d'essais $\phi_k(\vec{r})$ doivent être linéairement indépendante , constituer les « n » premières fonctions d'un ensemble complet de fonctions, et satisfaire exactement les conditions aux limites .
- Les fonctions de pondérations $W_k(\vec{r})$ sont choisies dans la même famille que les fonctions

d'essai $\phi_k(\vec{r})$.

2. Méthode variationnelle

Elle consiste à minimiser une fonctionnelle qui représente généralement l'énergie du système à résoudre .

II.3.2.2. Maillage éléments finis

La MEF consiste à subdiviser le domaine d'étude en domaines élémentaires ,elle nous donne une certaine liberté en découpant le domaine d'étude mais en évitant une subdivision où les frontières réelles du domaine ne coïncident pas avec celle des frontières des sous domaines (figure. II.3).

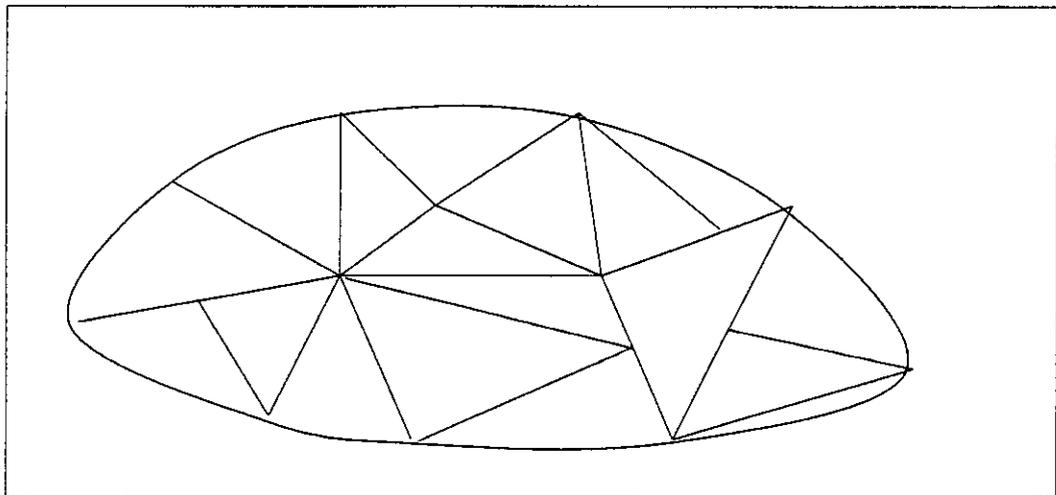


Figure.II.3- Exemple de maillage éléments finis en 2D

Pour des structures bidimensionnelles, les éléments de maillage sont souvent des triangles, tandis que, dans les problèmes tridimensionnels les éléments sont de forme tétraédrique ou prismatique (figure II.4).

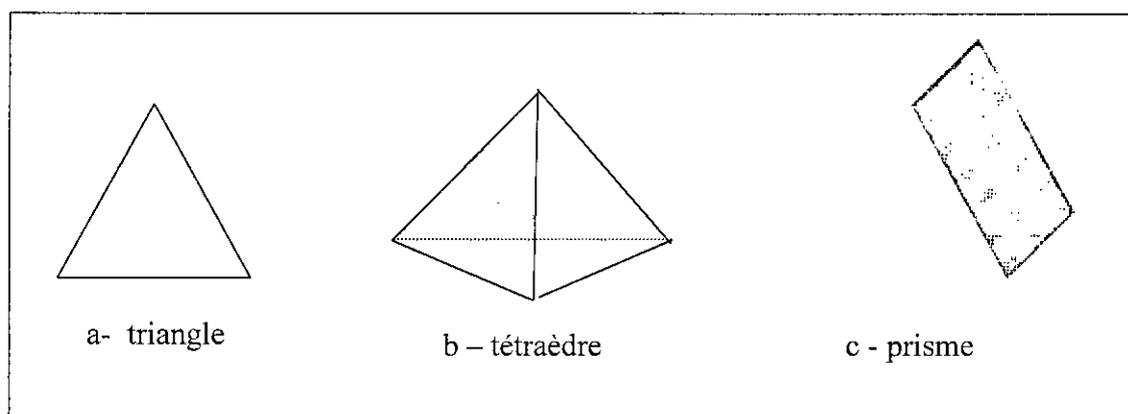


Figure II.4 –Eléments de découpage

On cherche à approcher la fonction inconnue par l'intermédiaire de l'une de méthodes citées précédemment, en utilisant l'expression approchée de l'inconnue et en satisfaisant l'équation aux dérivées partielles ; on aura un système d'équations linéaires ou non linéaires à résoudre.

La méthode des éléments finis avec l'avantage de l'adaptation des géométries complexes et la prise en considération des non linéarités dans le problème à résoudre est très utilisée en électromagnétisme bien qu'elle soit difficile à mettre en œuvre. Elle requiert une grande capacité de mémoire et un temps de calcul important.

II.3.3. Méthode des volumes finis *MVF*

Cette méthode sera exposée dans le prochain chapitre consacré à son développement pour différents cas de géométries.

CONCLUSION

Le présent chapitre a été consacré à la présentation des différentes méthodes pour la résolution des problèmes électromagnétiques, chacune de ces méthodes possède des avantages et des inconvénients.

La méthode des éléments finis possède un certain avantage lorsque le problème n'est pas à géométrie simple ou qu'il présente de fortes non-linéarités.

CHAPITRE III

*MISE EN OEUVRE DE LA METHODE DES VOLUMES
FINIS*

INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous développons de manière détaillée la méthode de discrétisation tridimensionnelle, puis la mise en œuvre informatique de la méthode des volumes finis objet de notre travail.

La formulation retenue est la formulation en A^* à cause de sa très large diffusion et aussi à cause du fait qu'elle fait intervenir une seule inconnue vectorielle par nœud.

III.1. PRESENTATION DE LA METHODE DES VOLUMES FINIS (MVF) [1]

La MVF est une variante de la méthode des résidus pondérés (collocation par sous domaines). Elle consiste à subdiviser le domaine d'étude en un nombre fini d'éléments de volume à l'intérieur desquels sont placés les nœuds (voir figure III.1, figure III.2), où l'on cherche à approximer l'inconnue. L'équation différentielle est donc intégrée sur chaque élément de volume Ω_e et l'équation (II.4) s'écrit en faisant $W_K = 1$:

$$\int_{\Omega_e} R d\Omega = 0$$

(II.4)

On choisit un profil pour exprimer la variation de la variable d'état entre les nœuds et évaluer les intégrales. Souvent on choisit un profil linéaire pour simplifier les expressions (d'autant qu'il est correct si l'on considère un intervalle entre les nœuds suffisamment petit).

L'équation discrétisée obtenue est constituée uniquement par les valeurs nodales de l'inconnue, alors que dans la méthode des éléments finis la variation supposée de l'inconnue constituée des valeurs nodales et des fonctions d'interpolation est considérée comme solution approchée.

Cela permet une grande possibilité de choisir un profil pour l'intégration de l'équation différentielle, car ces profils n'apparaissent pas dans l'équation discrétisée.

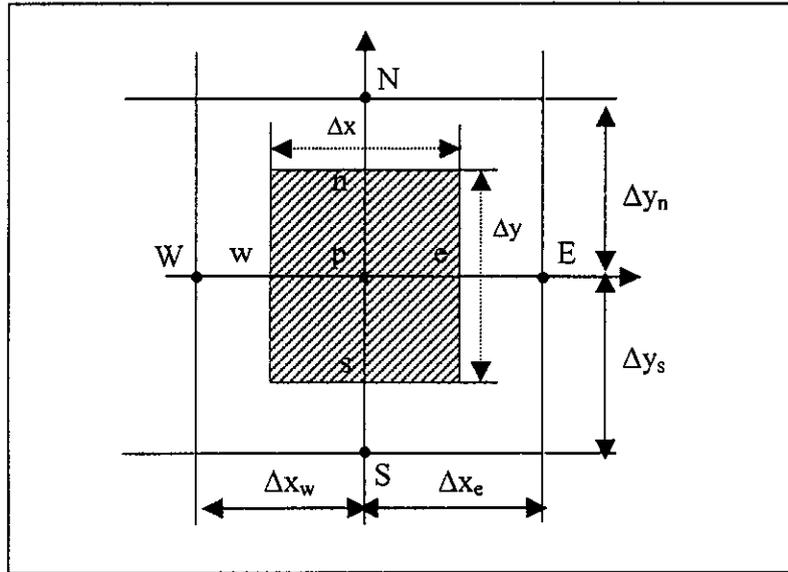


Figure III.1-. Élément de volume bidimensionnel en coordonnées cartésiennes

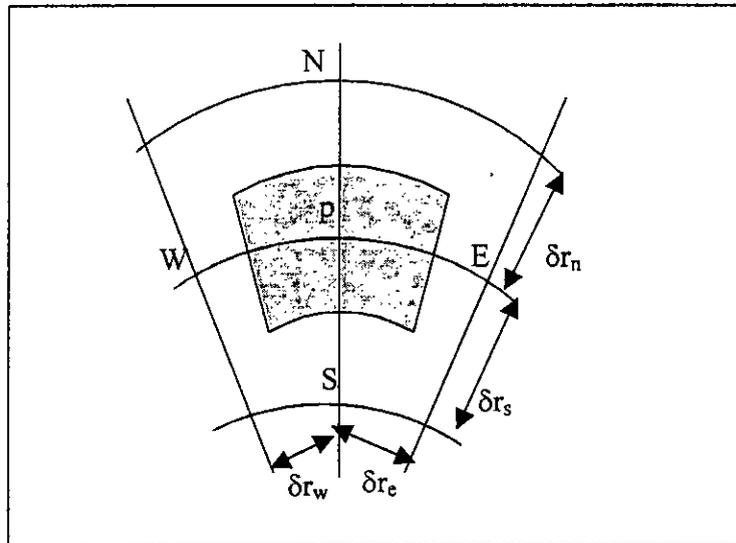


Figure III.2. - Élément de volume bidimensionnel en coordonnées cylindriques.

Dans le cas monodimensionnel, on suppose une épaisseur unité suivant (oy), (oz), le volume de l'élément Ω_e est $\Delta V = \Delta x$. Dans le cas tridimensionnel $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ est repéré par les interfaces e, w, n, s, t et b.

Après l'intégration de l'équation de diffusion électromagnétique sur le volume élémentaire autour du point P on obtient une équation discrétisée de la forme générale suivante :

$$a_p \cdot A_p = a_e \cdot A_E + a_w \cdot A_W + a_n \cdot A_N + a_s \cdot A_S + a_t \cdot A_T + a_b \cdot A_B \quad (\text{III.1})$$

Avec :

$a_e, a_w, a_n, a_s, a_t, a_b$: coefficients dépendants des pas de maillage et des propriétés physiques du système.

$$a_p = a_e + a_w + a_n + a_s + a_t + a_b + j\omega\sigma\mu\Delta v \quad (\text{III.2})$$

$A_E, A_W, A_N, A_S, A_T, A_B$ sont les valeurs nodales de l'inconnue aux points voisins du point « P ». On fait de même pour les autres nœuds du domaine pour obtenir un système d'équations où les inconnues sont les valeurs nodales de A.

III.2 FORMULATION EN VOLUME FINIS DU MODELE A*

Rappelons l'équation de diffusion électromagnétique à résoudre en A*

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{A}^*) + j\omega\mu\sigma \vec{A}^* = \mu \vec{J}_{ext} \quad (\text{III.3})$$

Dans un système tridimensionnel cartésien ou cylindrique la variable d'état A* possède trois composantes; On va donc résoudre un système de trois équations pour chaque nœuds de maillage.

III.2.1. Formulation en coordonnées cartésiennes

Développons l'équation (III.3) en coordonnées cartésiennes pour un système tridimensionnel, on obtient les équations suivantes :

$$\frac{\partial^2 A^*_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A^*_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A^*_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A^*_x}{\partial z^2} + j\omega\mu\sigma A^*_x = \mu J_{ext(x)} \tag{III.4}$$

$$\frac{\partial^2 A^*_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A^*_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A^*_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A^*_y}{\partial z^2} + j\omega\mu\sigma A^*_y = \mu J_{ext(y)} \tag{III.5}$$

$$\frac{\partial^2 A^*_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A^*_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A^*_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A^*_z}{\partial y^2} + j\omega\mu\sigma A^*_z = \mu J_{ext(z)} \tag{III.6}$$

Avec :

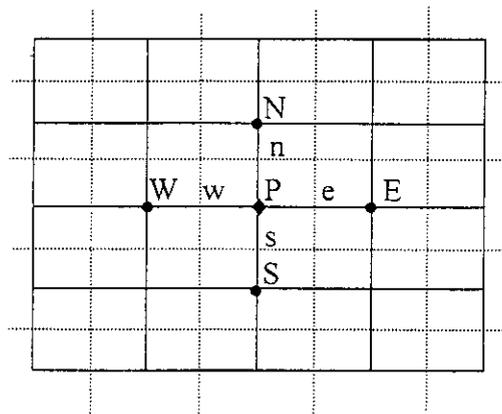
$$\vec{A}^* = A^*_x \vec{i} + A^*_y \vec{j} + A^*_z \vec{k} \tag{III.7}$$

$$\vec{J}_{ext} = J_{ext(x)} \vec{i} + J_{ext(y)} \vec{j} + J_{ext(z)} \vec{k} \tag{III.8}$$

III.2.1.1. Discrétisation du domaine d'étude

Le domaine d'étude est subdivisé en éléments de volume, C'est un réseau de mailles de forme parallélépipédique de côté (e, w, n, s, t, b).

Le maillage peut être uniforme, les interfaces des mailles se situent au centre de deux nœuds consécutifs figure III.3.



*h et b ?
 dans l'espace*

Figure III.3 -Maillage régulier

Il est toujours préférable de choisir un maillage irrégulier pour réduire le nombre des mailles dans les régions possédant une faible variation du gradient de la variable d'état .

La figure III.4 présente un maillage irrégulier selon les deux axes.

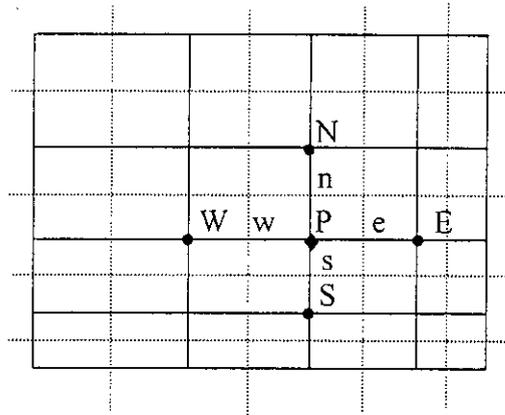


Figure III.4 – Maillage irrégulier.

Pour générer un tel maillage nous utilisons le principe du maillage géométrique :[16]

Décrivons un exemple de maillage sur une direction. Par analogie, on va tirer les relations dans les deux autres directions.

Soit « n » le nombre des mailles selon (ox) et « L » la longueur du domaine selon (ox), posons $dx(i)$ le pas de maillage selon (ox) où i varie de 1 à n .

On choisit un coefficient $k_x \neq 1$, de telle sorte que :

$$dx(2) = k_x \cdot dx(1)$$

$$dx(3) = k_x \cdot dx(2)$$

$$dx(n) = k_x \cdot dx(n-1)$$

$$\Rightarrow dx(n) = k_x^{n-1} \cdot dx(1)$$

On peut déduire :

$$dx(i) = k_x^{i-1} \cdot dx(1) \tag{III.9}$$

Les $dx(i)$ vérifient :

$$\frac{dx(1)}{2} + k_x [dx(1) + k_x dx(1) + \dots + k_x^{n-3} dx(1)] + k_x^{n-1} \cdot \frac{dx(i)}{2} = L \tag{III.10}$$

de (III.10) on peut tirer :

$$dx(1) = \frac{2 \cdot L (1 - k_x)}{(1 + k_x) (1 - k_x^{n-1})} \tag{III.11}$$

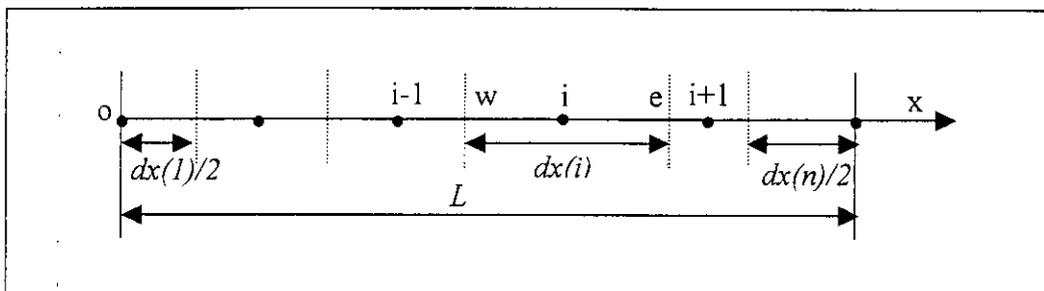


Figure III.5 – Maillage géométrique

Pour les coordonnées des nœuds :

$$x(i) = \frac{dx(1)}{2} + [k_x \cdot dx(1) + \dots + k_x^{i-2} \cdot dx(1)] + k_x^{i-1} \cdot \frac{dx(1)}{2} \tag{III.12}$$

$$x(i) = \frac{dx(1) \cdot (1 + k_x) \cdot (1 - k_x^{i-1})}{2 \cdot (1 - k_x)} \tag{III.13}$$

Les coordonnées des faces d'un élément de volume s'obtiennent par :

$$x_e(i) = x(i) + \frac{dx(i)}{2} \tag{III.14}$$

$$x_w(i) = x_e(i-1) \tag{III.15}$$

on a :

$$x_e(i) + x_w(i) = 2 \cdot x(i) \tag{III.16}$$

III.2.1.2. Discrétisation de l'équation de diffusion électromagnétique

Les équations (III.4), (III.5) et (III.6) peuvent être écrites comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial A_y^*}{\partial x} - \frac{\partial A_x^*}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial A_z^*}{\partial x} - \frac{\partial A_x^*}{\partial z} \right] + j\omega\mu\sigma A_x^* = \mu J_{ex(x)} \tag{III.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial A_x^*}{\partial y} - \frac{\partial A_y^*}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial A_z^*}{\partial y} - \frac{\partial A_y^*}{\partial z} \right] + j\omega\mu\sigma A_y^* = \mu J_{ext(y)} \quad (\text{III.18})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial A_x^*}{\partial z} - \frac{\partial A_z^*}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial A_y^*}{\partial z} - \frac{\partial A_z^*}{\partial y} \right] + j\omega\mu\sigma A_z^* = \mu J_{ext(z)} \quad (\text{III.19})$$

On va intégrer les trois équations précédentes sur un volume élémentaire $\Delta v = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ délimité par les surfaces e, w, n, s, t, b.

Prenons, à titre d'exemple, l'équation (III.17) et intégrons chaque membre de cette équation sur le volume $\Delta v_{(i,j,k)}$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta v_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y^*}{\partial x} - \frac{\partial A_x^*}{\partial y} \right) \cdot dv &= \int_w \int_s \int_b \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y^*}{\partial x} - \frac{\partial A_x^*}{\partial y} \right) dx \cdot dy \cdot dz = - \left. \frac{\Delta A_x^*}{\Delta y} \right|_s^n \cdot \Delta x \cdot \Delta z \\ &= \frac{A_x^*(p) - A_x^*(s)}{\Delta y_s} \cdot \Delta x \cdot \Delta z - \frac{A_x^*(N) - A_x^*(p)}{\Delta y_n} \cdot \Delta x \cdot \Delta z \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta v_p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_z^*}{\partial x} - \frac{\partial A_x^*}{\partial z} \right) \cdot dv &= \int_w \int_s \int_b \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_z^*}{\partial x} - \frac{\partial A_x^*}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz = - \left. \frac{\Delta A_x^*}{\Delta z} \right|_b^t \cdot \Delta x \cdot \Delta y \\ &= \frac{A_x^*(p) - A_x^*(B)}{\Delta z_b} \cdot \Delta x \cdot \Delta y - \frac{A_x^*(T) - A_x^*(p)}{\Delta z_t} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

$$\int_{\Delta v_p} j \cdot \omega \mu \sigma A_x^* \cdot dv = \int_w \int_s \int_b j \cdot \omega \mu \sigma A_x^* dx dy dz = j \cdot \omega \mu \sigma A_x^*(p) \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (\text{III.22})$$

$$\int_{\Delta v_p} \mu J_{ext(x)} \cdot dv = \int_w \int_s \int_b \mu J_{ext(x)} dx dy dz = \mu J_{ext(x)} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (\text{III.23})$$

En sommant les équations (III.21) (III.22) et (III.23), on a une équation de la forme :

$$a_p A_x^*(p) = a_n A_x^*(N) + a_s A_x^*(S) + a_t A_x^*(T) + a_b A_x^*(B) + b_x \quad (\text{III.24})$$

En procédant de la même manière pour (III.18) et (III.19), on obtient le système d'équation suivant:

$$\left\{ \begin{aligned} a_{xp} A_x^*(p) &= a_n A_x^*(N) + a_s A_x^*(S) + a_t A_x^*(T) + a_b A_x^*(B) + b_x & (\text{III.25}) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_{yp} A_y^*(p) &= a_e A_y^*(E) + a_w A_y^*(W) + a_t A_y^*(T) + a_b A_y^*(B) + b_y & (\text{III.26}) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_{zp} A_z^*(p) &= a_e A_z^*(E) + a_w A_z^*(W) + a_n A_z^*(N) + a_s A_z^*(S) + b_z & (\text{III.27}) \end{aligned} \right.$$

Avec:

$$a_e = \frac{\Delta y \cdot \Delta z}{\Delta x_e}$$

$$a_w = \frac{\Delta y \cdot \Delta z}{\Delta x_w}$$

$$a_n = \frac{\Delta x \cdot \Delta z}{\Delta y_n}$$

$$a_s = \frac{\Delta x \cdot \Delta z}{\Delta y_s}$$

$$a_t = \frac{\Delta y \cdot \Delta x}{\Delta z_t}$$

$$a_b = \frac{\Delta y \cdot \Delta x}{\Delta z_b}$$

$$a_{xp} = a_n + a_s + a_t + a_b + j\omega\sigma\mu\Delta v$$

$$a_{yp} = a_e + a_w + a_t + a_b + j\omega\sigma\mu\Delta v$$

$$a_{zp} = a_e + a_w + a_n + a_s + j\omega\sigma\mu\Delta v$$

$$b_x = \mu J_{ext(x)}\Delta v$$

$$b_y = \mu J_{ext(y)}\Delta v$$

$$b_z = \mu J_{ext(z)}\Delta v$$

$$A_x^*(p) = A_x^*(i, j, k)$$

III.2.1.3. Discrétisation des conditions aux limites

Il y a deux types des conditions aux limites montrées dans la figure III.6 .

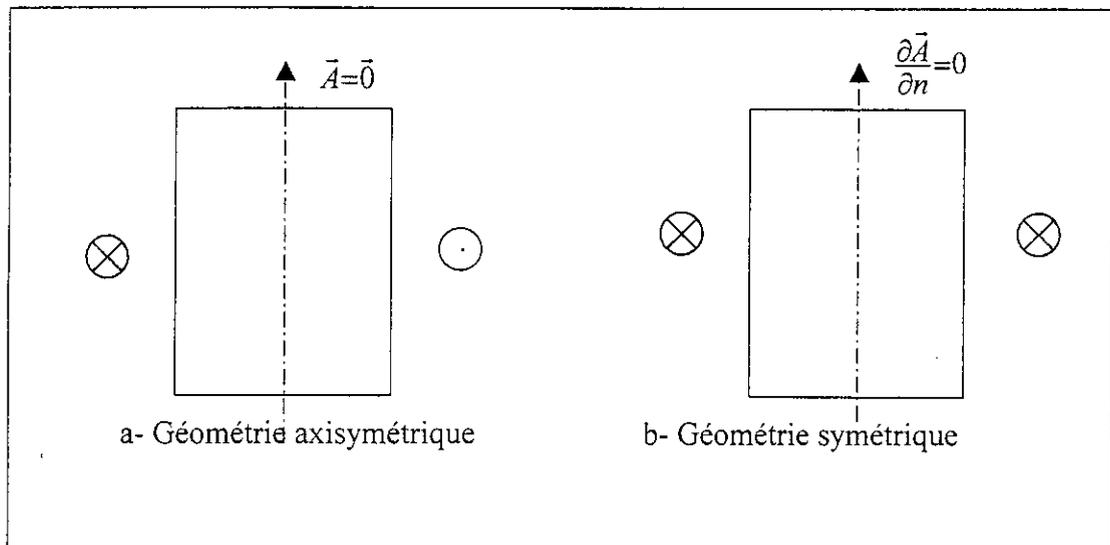


Figure III.6- Types de géométrie

- **Condition de Dirichlet** : elle impose la valeur de A^* aux bords du domaine, nulle par considération de l'infini alors on va chercher les valeurs des inconnues $A_x^*(i,j,k)$,

$A_y^*(i,j,k)$, $A_z^*(i,j,k)$, dans les « N » nœuds intérieurs.

Avec :

$$N=(n-1).(m-1).(p-1)$$

Où : \bar{A}^*

« n » : le nombre de nœud selon (ox)

« m » : le nombre de nœud selon (oy)

« p » : le nombre de nœud selon (oz)

Les conditions aux limites de type Dirichlet peuvent être introduites dans le système algébrique de différentes manières [13] :

1. La méthode du terme diagonal dominant : elle consiste à introduire les conditions aux limites après avoir assemblé la matrice $[A]$, en remplaçant A_{ii} par $A_{ii}+\alpha$ où α un nombre très grand par rapport à tous les termes A_{ii} , et B_i par αX_i . Elle est facile à mettre en œuvre, souvent on choisit $\alpha = 10^7$.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1i} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{j1} & \dots & A_{ji} + \alpha & \dots & A_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{ni} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ \alpha B_i \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}$$

2. La méthode du terme unité sur la diagonale : elle consiste à remplacer pour chaque relation X_i par \bar{X}_i , le vecteur $[B]$ puis la matrice $[A]$.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & 0 & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & 0 & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ \bar{X}_i \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 - A_{1i} \cdot \bar{X}_i \\ \vdots \\ \bar{X}_i \\ \vdots \\ B_n - A_{ni} \cdot \bar{X}_i \end{bmatrix}$$

Elle ne pose pas des problème numérique mais elle est complexe à programmer.

3. La méthode de suppression des équations : elle consiste à restructurer la matrice $[A]$ de manière à supprimer les équations correspondant aux degrés de liberté imposés X_i . Elle est intéressante parce qu'elle réduit le nombre d'inconnues du système.

• **Condition mixte de Dirichlet –Neumann :**

Elle impose la valeur de A^* aux bords du domaine et celle de $\frac{\partial A^*}{\partial n}$ aux niveaux des plans de symétrie pour les systèmes possédant des plans de symétrie .

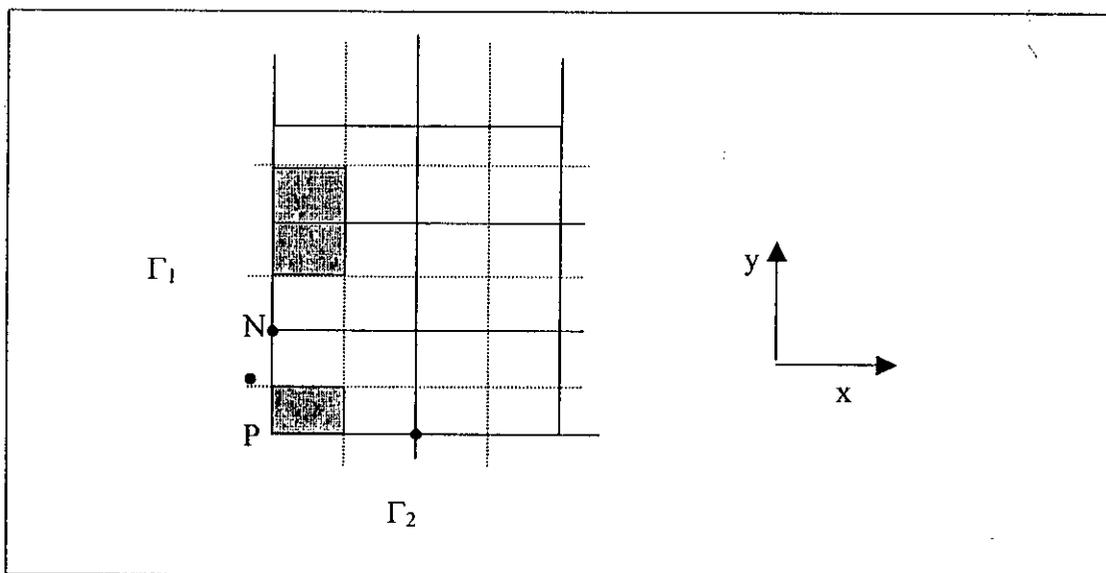


Figure III.7 – Élément de volume de frontière

Pour les nœuds situés sur la frontière Γ_1 , on a par symétrie $\frac{\partial A^*_x}{\partial x}=0$; et pour les nœuds

situés sur la frontière Γ_2 , on a par symétrie aussi $\frac{\partial A^*_y}{\partial y}=0$.

L'intégrale de l'équation (III.17) sur le volume entourant le point P donne:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta v_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A^*_y}{\partial x} - \frac{\partial A^*_x}{\partial y} \right) \cdot dv &= \int_w^e \int_s^n \int_b \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A^*_y}{\partial x} - \frac{\partial A^*_x}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = - \left. \frac{\Delta A^*_x}{\Delta y} \right]_s^n \\ &= - \left. \frac{\Delta A^*_x}{\Delta y} \right]_n \cdot \Delta x \cdot \Delta z + \left. \frac{\Delta A^*_x}{\Delta y} \right]_s \cdot \Delta x \cdot \Delta z = \frac{A^*_x(p) - A^*_x(N)}{\Delta y_n} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta v_p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A^*_z}{\partial x} - \frac{\partial A^*_x}{\partial z} \right) \cdot dv &= \int_w^e \int_s^n \int_b \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A^*_z}{\partial x} - \frac{\partial A^*_x}{\partial z} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = - \left. \frac{\Delta A^*_x}{\Delta z} \right]_b^t \cdot \Delta x \cdot \Delta y \\ &= - \left. \frac{\Delta A^*_x}{\Delta z} \right]_t \cdot \Delta x \cdot \Delta y - \left. \frac{\Delta A^*_x}{\Delta z} \right]_b \cdot \Delta x \cdot \Delta y = - \frac{A^*_x(T) - A^*_x(p)}{\Delta z_t} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

III.2.2. Formulation en coordonnées cylindriques

Pour un inducteur solénoïdal entourant une charge cylindrique (figure III.8), l'étude en coordonnées cylindriques est plus économique.

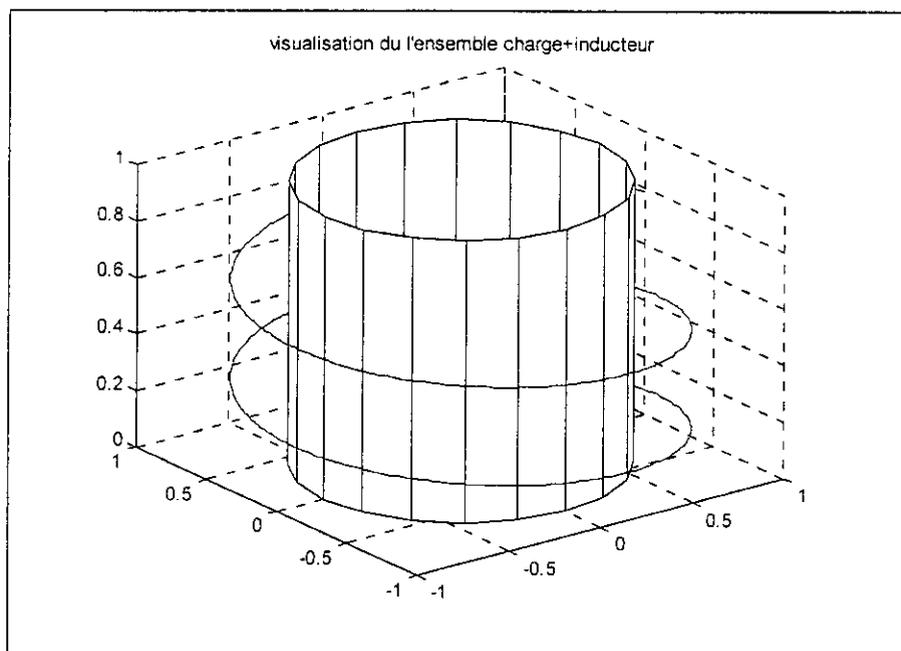


Figure III.8 – Visualisation du domaine d'étude en coordonnées cylindriques.

En coordonnées cylindriques (r, θ, z) , l'équation (III .3) s'écrit pour un système tridimensionnel:[voir annexe]

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (r \cdot A^*_{\theta})}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A^*_{r}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 A^*_{r}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A^*_{z}}{\partial r \partial z} + j\omega\sigma\mu A^*_{r} = \mu j_{\text{ext}}(r) \quad (\text{III.30})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (A^*_{z})}{\partial z \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A^*_{\theta})}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r A^*_{\theta})}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r A^*_{\theta})}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial A^*_{r}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A^*_{r}}{\partial r \partial \theta} + j\omega\sigma\mu A^*_{\theta} = \mu j_{\text{ext}}(\theta) \quad (\text{III.31})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (A^*_{r})}{\partial z} + \frac{\partial^2 A^*_{r}}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial A^*_{z}}{\partial r} - \frac{\partial^2 A^*_{z}}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A^*_{z}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A^*_{\theta}}{\partial \theta \partial z} + j\omega\sigma\mu A^*_{z} = \mu j_{\text{ext}}(z) \quad (\text{III.32})$$

Où:

$A^*_{r}, A^*_{\theta}, A^*_{z}$: composantes cylindriques du vecteur potentiel .

$J_{\text{extr}}, J_{\text{ext}\theta}, J_{\text{ext}z}$: composantes cylindriques du vecteur courant d'excitation

Prenons l'intégrale de l'équation (III. 30), sur un élément de volume $\Delta v = r_p \cdot \Delta r \cdot \Delta \theta \cdot \Delta z$.

avec:

$$r_p = (r_n + r_s) / 2 ;$$

$$\int_{\Delta v} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial r \cdot A^*_{\theta}}{\partial r} - \frac{\partial A^*_{r}}{\partial \theta} \right) dv - \int_{\Delta v} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A^*_{r}}{\partial z} + \frac{\partial A^*_{z}}{\partial r} \right) \cdot dv + \int_{\Delta v} j\omega\sigma\mu A^*_{r} \cdot dv = \int_{\Delta v} \mu j_{\text{ext}}(r) \cdot dv \quad (\text{I.33})$$

$$\int_{\Delta v} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial r \cdot A^*_{\theta}}{\partial r} - \frac{\partial A^*_{r}}{\partial \theta} \right) dv = \iiint_{w \ s \ b}^{e \ n \ i} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial r \cdot A^*_{\theta}}{\partial r} - \frac{\partial A^*_{r}}{\partial \theta} \right) \cdot r_p dr \cdot d\theta \cdot dz$$

$$= \iiint_{w \ s \ b}^{e \ n \ i} \frac{1}{r^2} \left(- \frac{\partial A^*_{r}}{\partial \theta} \right) r dr d\theta dz = \left[\frac{\partial A^*_{r}}{\partial \theta} \right]_{r_p}^e \Delta r \Delta z$$

$$= \left[\frac{A^*_{r}(p) - A^*_{r}(W)}{\delta \theta_w} - \frac{A^*_{r}(E) - A^*_{r}(p)}{\delta \theta_e} \right] \cdot \frac{\Delta r \Delta z}{r_p} \quad (\text{III.34})$$

$$\int_{\Delta v_p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A^*_r}{\partial z} + \frac{\partial A^*_z}{\partial r} \right) \cdot dv = - \int_s^e \int_b^i \int_w^j \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A^*_r}{\partial z} + \frac{\partial A^*_z}{\partial r} \right) \cdot r_p dr \cdot d\theta \cdot dz = - \left. \frac{\partial A^*_r}{\partial z} \right|_b^i \cdot r_p \cdot \Delta r \cdot \Delta \theta =$$

$$\left[\frac{A^*_r(p) - A^*_r(B)}{\delta z_b} - \frac{A^*_r(T) - A^*_r(p)}{\delta z_i} \right] \cdot r_p \cdot \Delta r \cdot \Delta \theta \quad (III.35)$$

$$\int_{\Delta v_p} j\omega\sigma\mu A^*_r = j\omega\sigma\mu A^*_r(p)\Delta v \quad (III.36)$$

$$\int_{\Delta v_p} \mu J_{ext_r} = \mu J_{ext_r}(p)\Delta v \quad (III.37)$$

En rassemblant les équations (III.33), (III.34), (III.35), (III.36) et (III.37), on obtient une équation de la forme :

$$a_p A^*(p) = a_e A^*_r(E) + a_w A^*_r(W) + a_t A^*_r(T) + a_b A^*_r(B) + b_r \quad (III.38)$$

Faisons la même démarche pour l'équation (III.31) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial(A^*_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial(rA^*_{\theta})}{\partial z} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial(rA^*_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial(A^*_r)}{\partial \theta} \right] - \frac{1}{r^2} \frac{\partial(rA^*_{\theta})}{\partial r} + j\omega\sigma\mu A^*_{\theta} = \mu J_{ext(\theta)} \quad (III.39)$$

$$\int_{\Delta v_p} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial(A^*_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial(rA^*_{\theta})}{\partial z} \right] \cdot dv + \int_{\Delta v_p} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial(rA^*_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial(A^*_r)}{\partial \theta} \right] \cdot dv - \int_{\Delta v_p} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(rA^*_{\theta})}{\partial r} \cdot dv$$

$$+ \int_{\Delta v_p} j\omega\mu\sigma A^*_{\theta} \cdot dv = \int_{\Delta v_p} \mu J_{ext(\theta)} \cdot dv \quad (III.40)$$

$$\int_{\Delta v_p} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial(A^*_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial(rA^*_{\theta})}{\partial z} \right] \cdot dv = \int_s^e \int_b^i \int_w^j \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial(A^*_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial(rA^*_{\theta})}{\partial z} \right] \cdot r_p dr \cdot d\theta \cdot dz = \int_b^i \frac{1}{r_p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial(rA^*_{\theta})}{\partial z} \right) \cdot r_p \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz$$

$$= \left(- \frac{(rA^*_{\theta})}{\delta z} \right) \Big|_b^i \cdot \Delta r \cdot \Delta \theta = \left[\frac{nA^*_{\theta}(p) - nA^*_{\theta}(B)}{\delta z_b} - \frac{nA^*_{\theta}(T) - nA^*_{\theta}(p)}{\delta z_i} \right] \cdot \Delta r \cdot \Delta \theta \quad (III.41)$$

$$\int_{\Delta v_p} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial(rA^*_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial(A^*_r)}{\partial \theta} \right] \cdot dv = \int_s^e \int_b^i \int_w^j \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial(rA^*_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial(A^*_r)}{\partial \theta} \right] \cdot r_p dr \cdot d\theta \cdot dz = \int_s^e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial(A^*_r)}{\partial \theta} \right] \cdot r_p \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz$$

$$= \left(- \frac{(rA^*_{\theta})}{\delta r} \right) \Big|_s^e \cdot \Delta z \cdot \Delta \theta = \left[\frac{r_s A^*_{\theta}(p) - r_s A^*_{\theta}(S)}{\delta r_s} - \frac{r_n A^*_{\theta}(N) - r_n A^*_{\theta}(p)}{\delta r_n} \right] \cdot \Delta z \cdot \Delta \theta \quad (III.42)$$

$$\int_{\Delta v_p} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r A^*_{\theta})}{\partial r} dv = \iiint_{s w b}^{n e t} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r A^*_{\theta})}{\partial r} r_p dr d\theta dz = \frac{1}{r_p} (r A^*_{\theta}) \Big|_s^n \Delta\theta \Delta z$$

$$= \frac{1}{r_p} [r_n A^*_{\theta}(N) - r_s A^*_{\theta}(S)] \Delta\theta \cdot \Delta z \quad (\text{III.43})$$

$$\int_{\Delta v_p} j\omega \mu \sigma A^*_{\theta} dv = j\omega \mu \sigma A^*_{\theta}(p) \Delta v. \quad (\text{III.44})$$

$$\int_{\Delta v_p} \mu J_{ext(\theta)} dv = \mu J_{ext(\theta)}(p) \Delta v. \quad (\text{III.45})$$

L'équation (III.31) discrétisée est de la forme :

$$a_{\theta p} A^*_{\theta}(p) = a_n A^*_{\theta}(N) + a_s A^*_{\theta}(S) + a_t A^*_{\theta}(T) + a_b A^*_{\theta}(B) + b_{\theta}. \quad (\text{III.46})$$

Finalement pour l'équation (III.32) :

$$\int_{\Delta v_p} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial A^*_{r}}{\partial z} - \frac{\partial A^*_{z}}{\partial r} \right) dv - \int_{\Delta v_p} \frac{1}{r} \frac{\partial A^*_{z}}{\partial r} dv - \int_{\Delta v_p} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A^*_{z}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial A^*_{\theta}}{\partial z} \right) dv + \int_{\Delta v_p} \frac{1}{r} \frac{\partial A^*_{r}}{\partial z} dv$$

$$+ \int_{\Delta v_p} j\omega \sigma \mu A^*_{z} dv = \int_{\Delta v_p} \mu j_{ext(z)} dv. \quad (\text{III.47})$$

$$\int_{\Delta v_p} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial A^*_{r}}{\partial z} - \frac{\partial A^*_{z}}{\partial r} \right) dv = \iiint_{s w b}^{n e t} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial A^*_{r}}{\partial z} - \frac{\partial A^*_{z}}{\partial r} \right) r_p dr d\theta dz = -\frac{\partial A^*_{z}}{\partial r} \Big|_s^n r_p \Delta\theta \Delta z$$

$$= \left[\frac{A^*_{z}(p) - A^*_{z}(S)}{\delta r_s} - \frac{A^*_{z}(N) - A^*_{z}(p)}{\delta r_n} \right] \Delta\theta \Delta z. \quad (\text{III.48})$$

$$- \int_{\Delta v_p} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A^*_{z}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial A^*_{\theta}}{\partial z} \right) dv = - \iiint_{s w b}^{n e t} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A^*_{z}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial A^*_{\theta}}{\partial z} \right) r_p dr d\theta dz = -\frac{1}{r} \frac{\partial A^*_{z}}{\partial \theta} \Big|_w^e \Delta r \Delta z$$

$$= \left[\frac{A^*_{z}(p) - A^*_{z}(W)}{r_w \delta \theta_w} - \frac{A^*_{z}(E) - A^*_{z}(p)}{r_e \delta \theta_e} \right] \Delta r \Delta z. \quad (\text{III.49})$$

$$\int_{\Delta v_p} \frac{1}{r} \frac{\partial A^*_{z}}{\partial r} dv = A^*_{z} \Big|_s^n d\theta dz = [A^*_{z}(N) - A^*_{z}(S)] \Delta\theta \Delta z. \quad (\text{III.50})$$

$$\int_{\Delta v_p} \frac{1}{r} \frac{\partial A^*_{r}}{\partial z} dv = A^*_{r} \Big|_b^t dr d\theta = [A^*_{r}(T) - A^*_{r}(B)] \Delta r \Delta\theta \quad (\text{III.51})$$

$$\int_{\Delta v_p} j\omega \mu \sigma A^*_{z} dv = j\omega \mu \sigma A^*_{z}(p) \Delta v. \quad (\text{III.52})$$

$$\int_{\Delta v_p} \mu J_{ext}(z) dV = \mu J_{ext}(z)(p) \Delta v. \quad (\text{III.53})$$

En rassemblant les équations (III.48) , (III.49) , (III.50) , (III.51) , (III.52) et (III.53) on aboutit à une équation de la forme :

$$a_{zp} A_z^*(p) = a_{ez} A_z^*(E) + a_{wz} A_z^*(W) + a_{nz} A_z^*(N) + a_{sz} A_z^*(S) + a_{tz} A_z^*(T) + a_{bz} A_z^*(B) + b_z \quad (\text{III.54})$$

Le système d'équations s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{rp} A_r^*(p) = a_{er} A_r^*(E) + a_{wr} A_r^*(W) + a_{tr} A_r^*(T) + a_{br} A_r^*(B) + b_r. \quad (\text{III.55}) \\ a_{\theta p} A_\theta^*(p) = a_{n\theta} A_\theta^*(N) + a_{s\theta} A_\theta^*(S) + a_{t\theta} A_\theta^*(T) + a_{b\theta} A_\theta^*(B) + b_\theta. \quad (\text{III.56}) \\ a_{zp} A_z^*(p) = a_{ez} A_z^*(E) + a_{wz} A_z^*(W) + a_{nz} A_z^*(N) + a_{sz} A_z^*(S) + a_{tz} A_z^*(T) + a_{bz} A_z^*(B) + b \quad (\text{III.57}) \end{array} \right.$$

Avec:

$$a_{er} = \frac{1}{r_p} \frac{\Delta r \cdot \Delta z}{\delta \theta_e}$$

$$a_{wr} = \frac{1}{r_p} \frac{\Delta r \cdot \Delta z}{\delta \theta_w}$$

$$a_{n\theta} = \frac{r_n \Delta \theta \cdot \Delta z}{\delta r_n} + \frac{r_n \Delta \theta \cdot \Delta z}{r_p}$$

$$a_{s\theta} = \frac{r_s \Delta \theta \cdot \Delta z}{\delta r_s} + \frac{r_s \Delta \theta \cdot \Delta z}{r_p}$$

$$a_{tr} = \frac{r_p \Delta \theta \cdot \Delta r}{\delta z_t}$$

$$a_{br} = \frac{r_p \Delta \theta \cdot \Delta r}{\delta z_b}$$

$$a_{t\theta} = \frac{r_n \Delta \theta \cdot \Delta r}{\delta z_t}$$

$$a_{b\theta} = \frac{r_b \Delta \theta \cdot \Delta r}{\delta z_b}$$

$$a_{ez} = \frac{\Delta r \cdot \Delta z}{r_e \delta \theta_e}$$

$$a_{wz} = \frac{\Delta r \cdot \Delta z}{r_w \delta \theta_e}$$

$$a_{nz} = \frac{r_p \Delta \theta \cdot \Delta z}{\Delta r_n} + \Delta \theta \cdot \Delta z$$

$$a_{sz} = \frac{r_p \Delta \theta \cdot \Delta z}{\Delta r_s} - \Delta \theta \cdot \Delta z$$

$$a_{tz} = \Delta r \cdot \Delta \theta$$

$$a_{bz} = -\Delta r \cdot \Delta \theta$$

$$a_{rp} = a_e + a_w + a_t + a_b + j\omega\mu\sigma\Delta v$$

$$a_{\theta p} = a_n + a_s + a_t + a_b + j\omega\sigma\mu\Delta v$$

$$a_{zp} = a_e + a_w + a_n + a_s + j\omega\sigma\mu\Delta v$$

$$b_r = \mu J_{ex(r)} \Delta v$$

$$b_\theta = \mu J_{ex(\theta)} \Delta v$$

$$b_z = \mu J_{ex(z)} \Delta v$$

• Dans les deux cas de maillage cartésien ou cylindrique, on aboutit à la résolution d'un système d'équations linéaires de la forme : $[A].[X]=[B]$, dont la matrice $[A]$ est une matrice carrée, symétrique et complexe. Ses éléments ne dépendent que des paramètres physiques du système, et des pas de maillage.

La structure d'une telle matrice est la suivante :

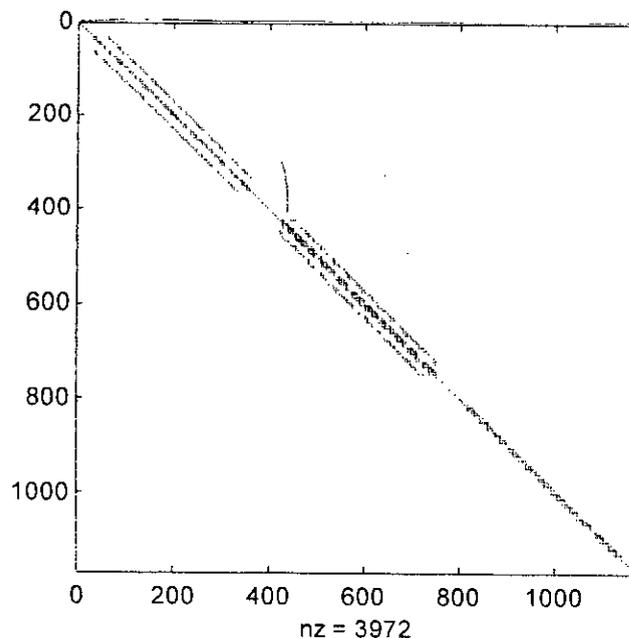


Figure III.9 -Structure de la matrice $[A]$

III.3. RESOLUTION DU SYSTEME ALGEBRIQUE $[A].[X]=[B]$

La résolution des systèmes d'équation algébriques linéaires de la forme $[A].[X]=[B]$, est faite soit par les méthodes directes ,soit par les méthodes itératives.

1. Les méthodes itératives :

Elles conduisent à la solution par une succession d'améliorations d'une solution approchée, elles ne demandent pas le stockage de la matrice $[A]$, les plus fréquemment utilisées sont :[11]

1. La méthode itérative de Jacobi.
2. La méthode itérative de Gauss- Seidel.

2. Les méthodes directes :

Ces méthodes conduisent à la solution plus rapidement que les méthodes itératives, elles exigent le stockage de la matrice $[A]$, la triangularisation de Gauss est la plus utilisée.

III.4. CALCUL DES GRANDEURS ELECTROMAGNETIQUES ISSUES DE LA REPARTITION DU POTENTIEL VECTEUR MAGNETIQUE

La résolution du système d'équation $[A][X]=[B]$, nous permet d'affecter la valeur du potentiel vecteur magnétique à chaque nœud du maillage ,ce qui nous permet d'avoir :

1. *La répartition de la densité de courant induit J*

En chaque nœud on peut écrire :

$$J_{(i,j,k)} = -j \cdot \sigma_{(i,j,k)} \omega A^*_{(i,j,k)} \quad (\text{III.58})$$

2. *La répartition de la densité de puissance induite P*

A chaque élément de volume , on écrit la densité de puissance induite correspondante comme suit :

$$P_{(i,j,k)} = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \omega^2 \cdot A^{*2}(i,j,k) \quad (\text{III.59})$$

ou en fonction de la densité de courant induit J

$$R_{(i,j,k)} = \frac{1}{2 \cdot \sigma} \cdot J^2_{(i,j,k)} \quad (\text{III.60})$$

3. La répartition de la puissance totale

$$P_{J2} = \iiint_v P \cdot dv = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p R_{(i,j,k)} \cdot V_{(i,j,k)}. \quad (\text{III.61})$$

4. Le rendement électrique η

$$\eta(\%) = \frac{P_{J2}}{P_{J2} + P_{er}}. \quad (\text{III.62})$$

où :

P_{J2} représente la puissance utile recueillie dans la charge , P_{er} sont les pertes par effet Joule.

5. La répartition du champ électrique \vec{E}

$$\vec{E}_{(i,j,k)} = -j \cdot \omega A^*_{(i,j,k)} \quad (\text{III.63})$$

6. La répartition du champ magnétique \vec{H}

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A}^* \quad (\text{III.64})$$

III.5. LA MISE EN OEUVRE INFORMATIQUE

Afin de résoudre notre système d'équation linéaire on a établi notre programme sous environnement Matlab qui donne entre autre avantage l'interfaçage graphique (les menus les graphes en 3D,...) [17]. Pour cela on a réalisé un code de calcul qui nous permet de :

- Calculer les éléments de la matrice[A] en utilisant la technique des matrices creuses existante dans la logiciel Matlab pour la réduction de la place mémoire et le temps de calcul de machine.
- Visualiser le potentiel vecteur magnétique en chaque nœud.
- Calculer et visualiser la répartition de la densité puissance dans la charge.
- Calculer la densité des courants induits .
- Visualiser la distribution des courants induits sur un plan .

L'organigramme présenté dans la figure III.10 illustre les différentes étapes du programme

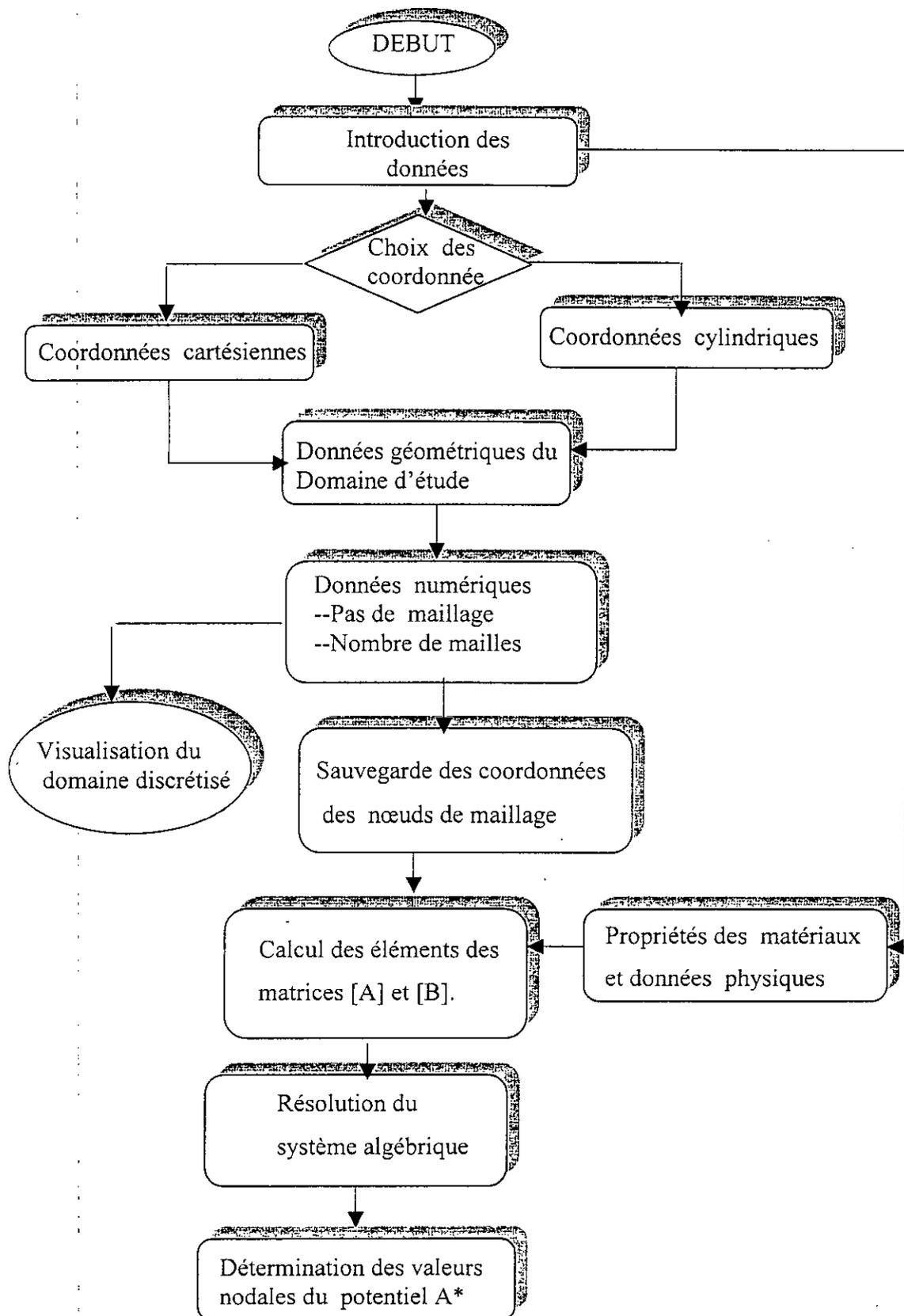


Figure III. 10- Organigramme du programme « calcul du potentiel »

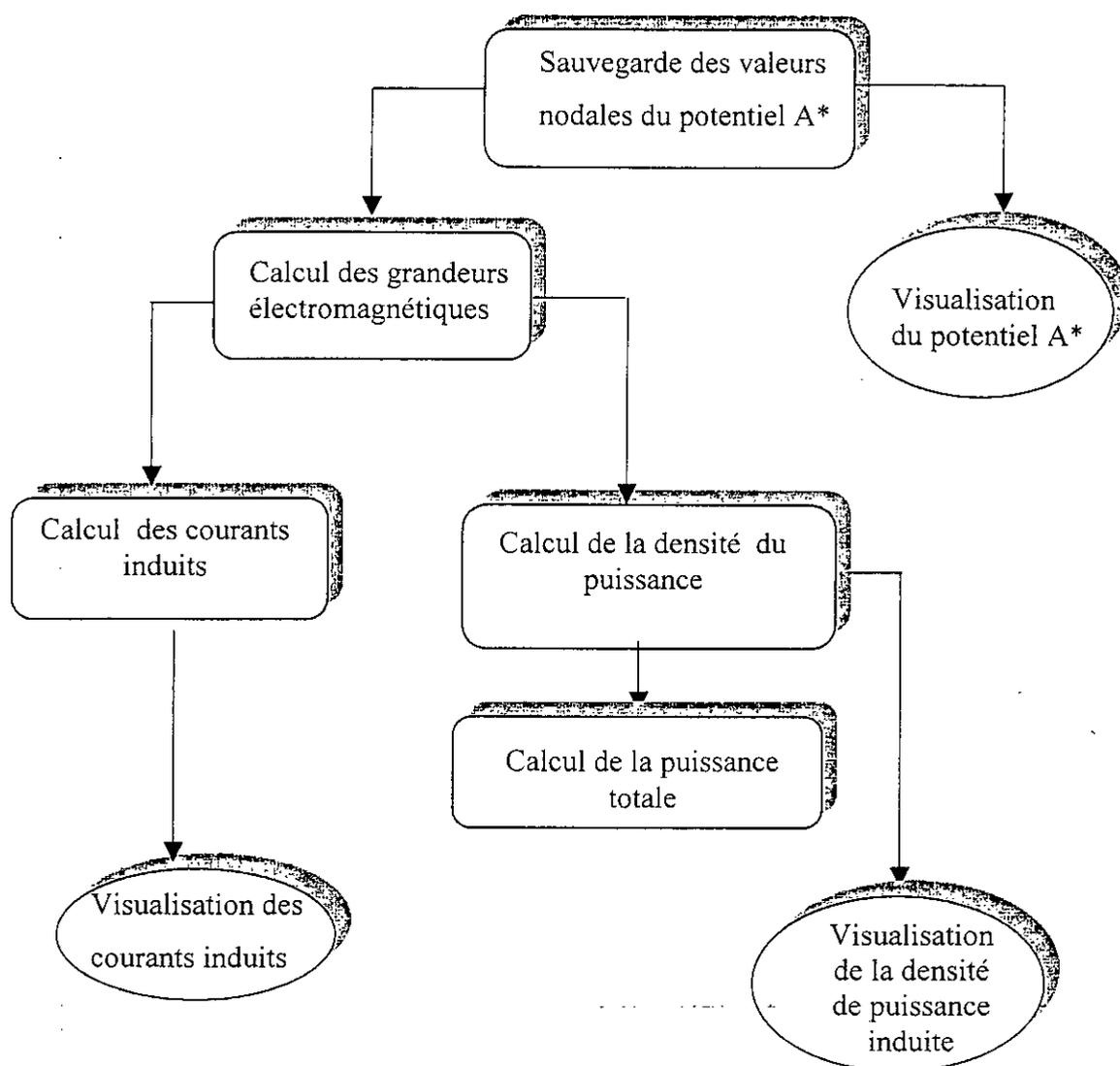


Figure III.11 -Organigramme du sous programme
« Calcul et visualisation des grandeurs électromagnétiques »

III.6.VALIDATION DU MODELE ELABORE POUR UN CAS CARTESIEN

On se propose de valider le modèle du maillage établis en coordonnées cartésiennes et le confronter aux résultats obtenus par d'autres méthodes.

On choisit un exemple traité par O .BIRO et K.PREIS dans[15] par la méthode des éléments finis. On veut calculer les courants induits dans une charge cubique , placée dans un champ uniforme .

III.6.1.Description du problème

En tenant compte des symétries , la figure III.12 montre la géométrie et les dimensions de système à étudier .

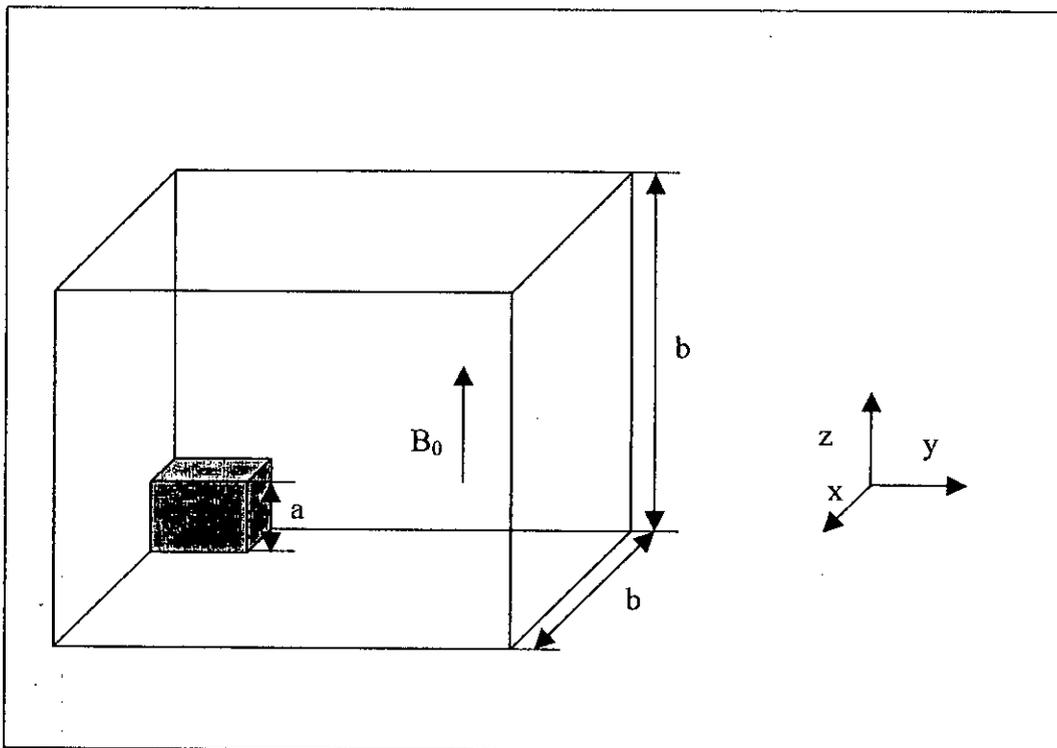


Figure III.12 -Structure et dimensions du système étudié.

Les données numériques du problème sont :

$a = 1$ cm, représente le $1/8$ de la longueur du cube.

$B_0 = 1$ T, densité du champ source .

$$\sigma = 5.7 \times 10^7 \text{ s/m.}$$

Les conditions aux limites sont résumées dans le tableau III.1 .

plan	Conditions aux limites pour A^*
$X = 0$	$A^*_y = 0, \quad A^*_z = 0.$
$Y = 0$	$A^*_x = 0, \quad A^*_z = 0.$
$Z = 0$	$A^*_z = 0.$
$X = b$	$A^*_y = B_0 \ b / 2.$
$Y = b$	$A^*_x = -B_0 \ b / 2.$
$Z = b$	$A^*_z = 0$

Tableau III.1 – Conditions aux limites associées au système à étudier.

La condition qui n'apparaît pas dans un plan correspond à une condition de Neumann.

III.6.2. Maillage du domaine

On a appliqué le modèle élaboré pour un maillage irrégulier où le nombre de nœuds total N égal à 512 nœuds ($n = 7, m = 7, p = 7$). Les figures III.13, III.14 et III.15 montrent respectivement le domaine discrétisé, sa projection sur le plan ($x y$) et la projection des points de calcul sur le même plan .

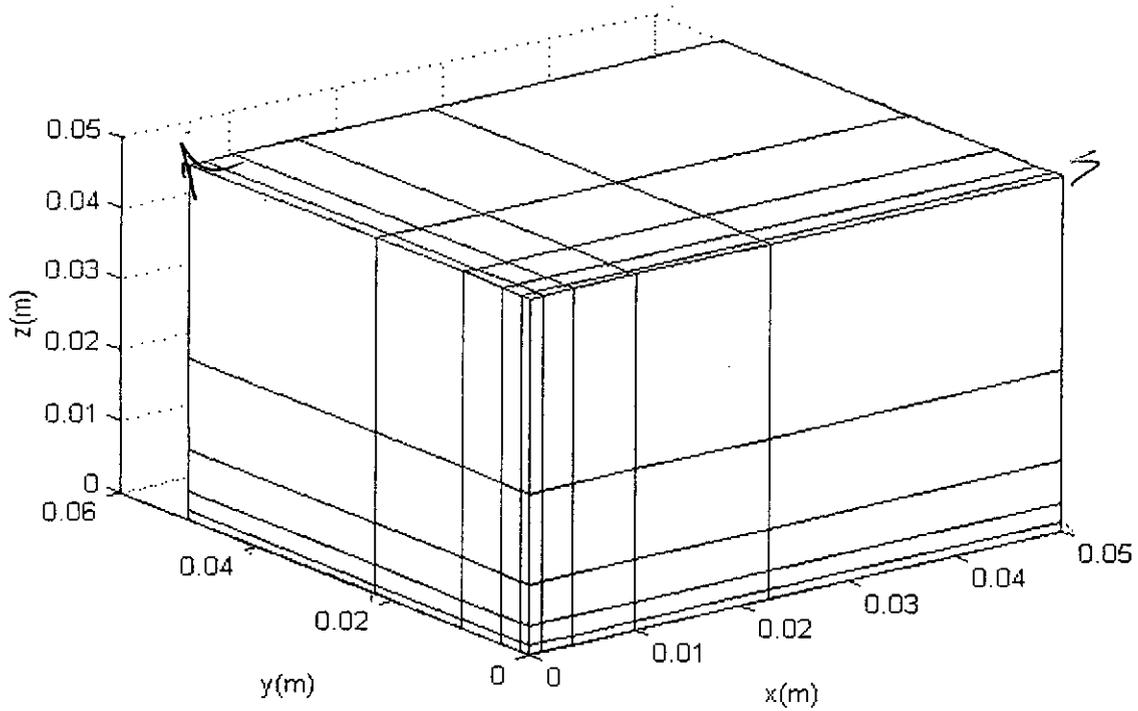


Figure III.13-Visualisation du domaine étudié discrétisé.

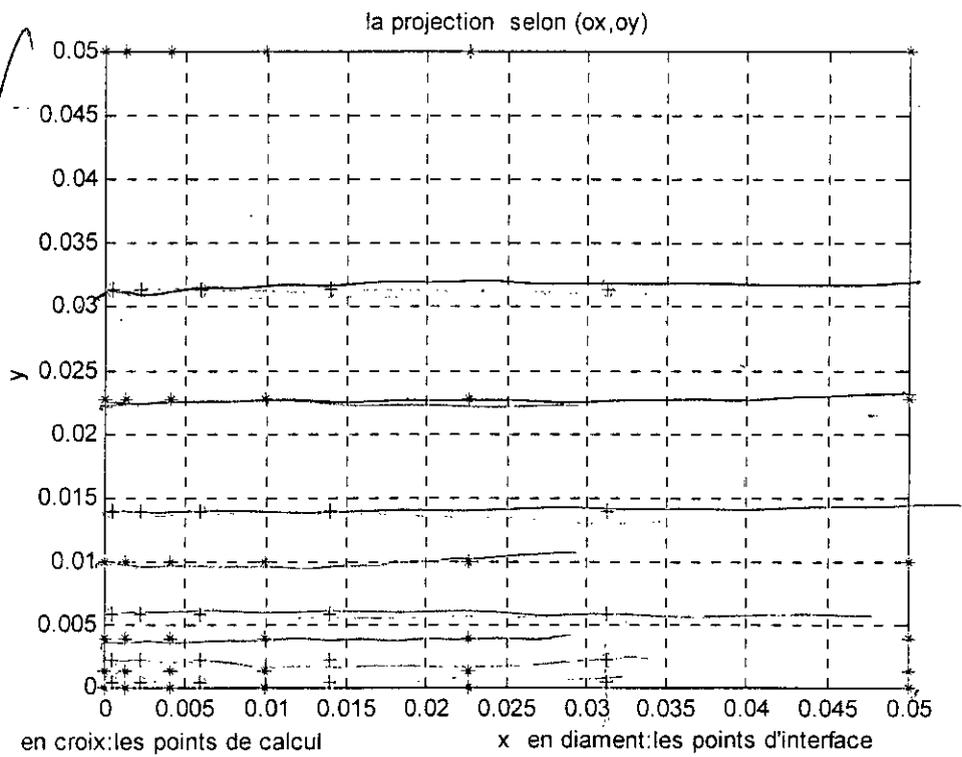


Figure III.14- La projection du domaine discrétisé sur le plan (xy).

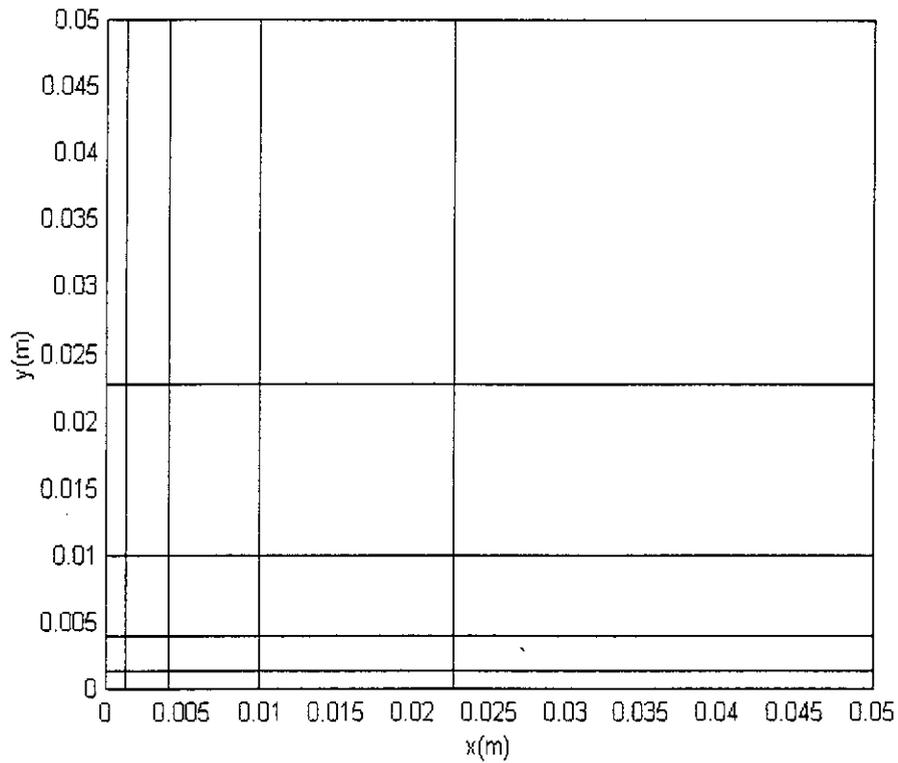


Figure III.15- Visualisation des points de calcul sur le plan (xy)

III.6.3. Résultats de modélisation

On a relevé les variations des composantes réelles et imaginaires du potentiel A^* selon y ($\text{re } A^*_y$, $\text{ima } A^*_y$) et des courants induits ($\text{re}(J_{\text{ind}})$, $\text{ima}(J_{\text{ind}})$).

Les résultats obtenus par [15] sont représentés sur les figures III.16 et III.18 et ceux obtenus par MVF sont dans les figures III.17 et III.19.

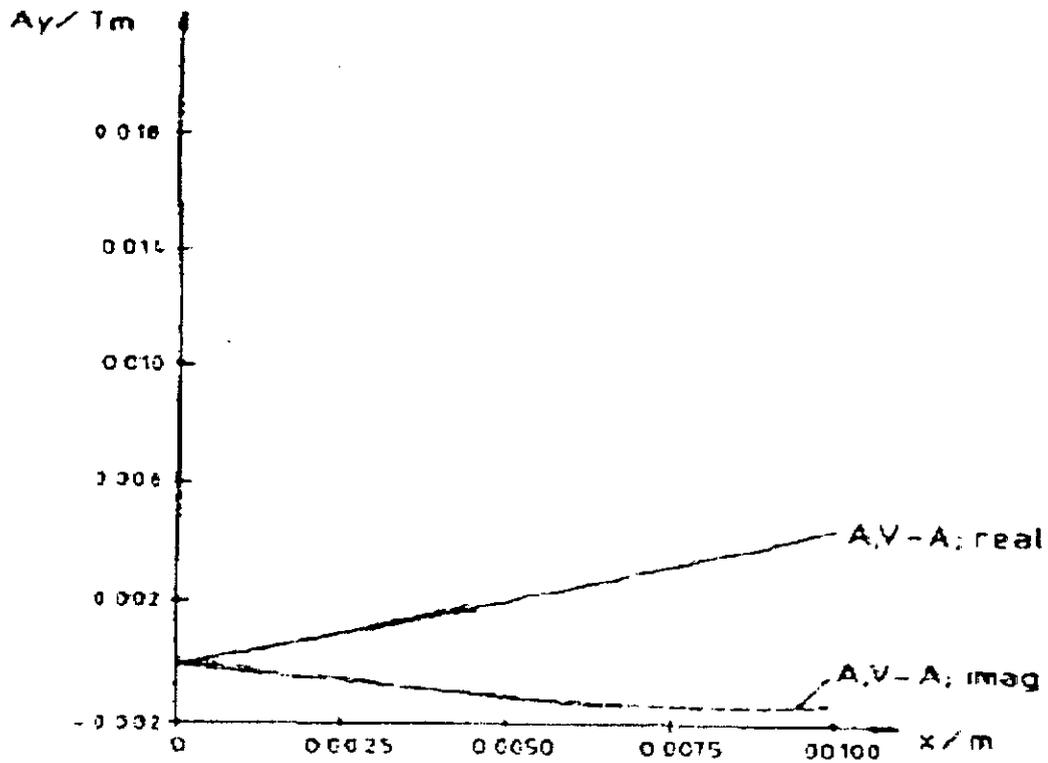


Figure III.16 –Les composantes réelles et imaginaires du potentiel A^*_y selon [15]

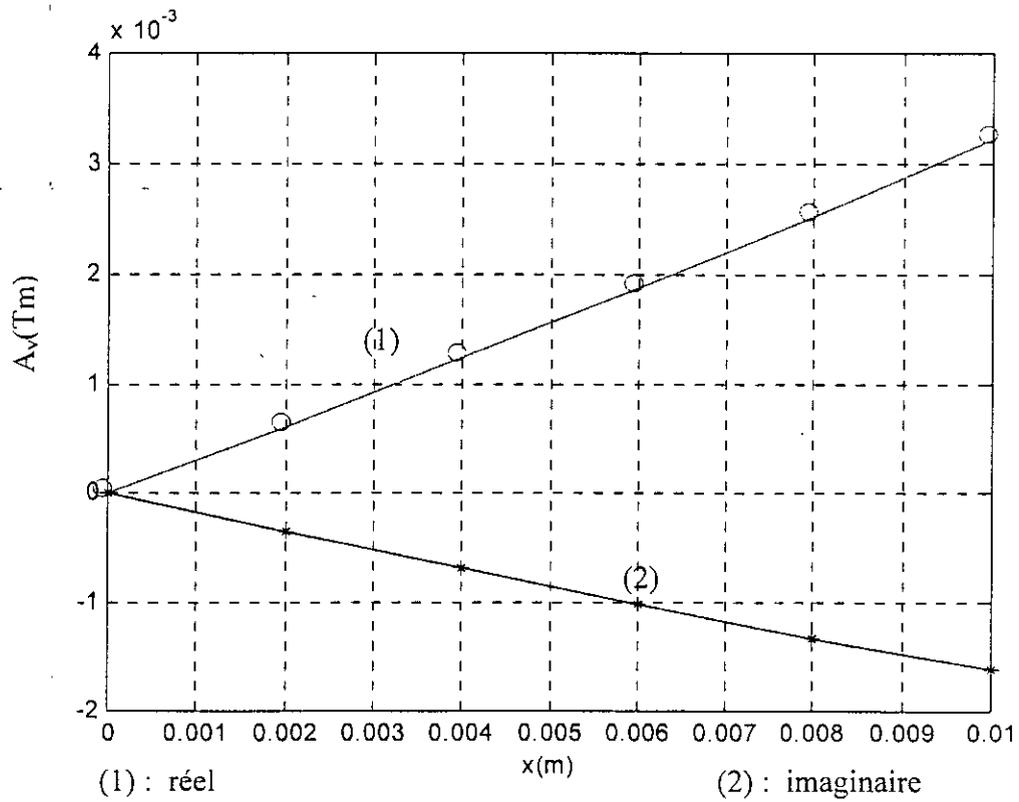


Figure III.17 –Les composantes réelles et imaginaires du potentiel A^*_y obtenues par la MVF.

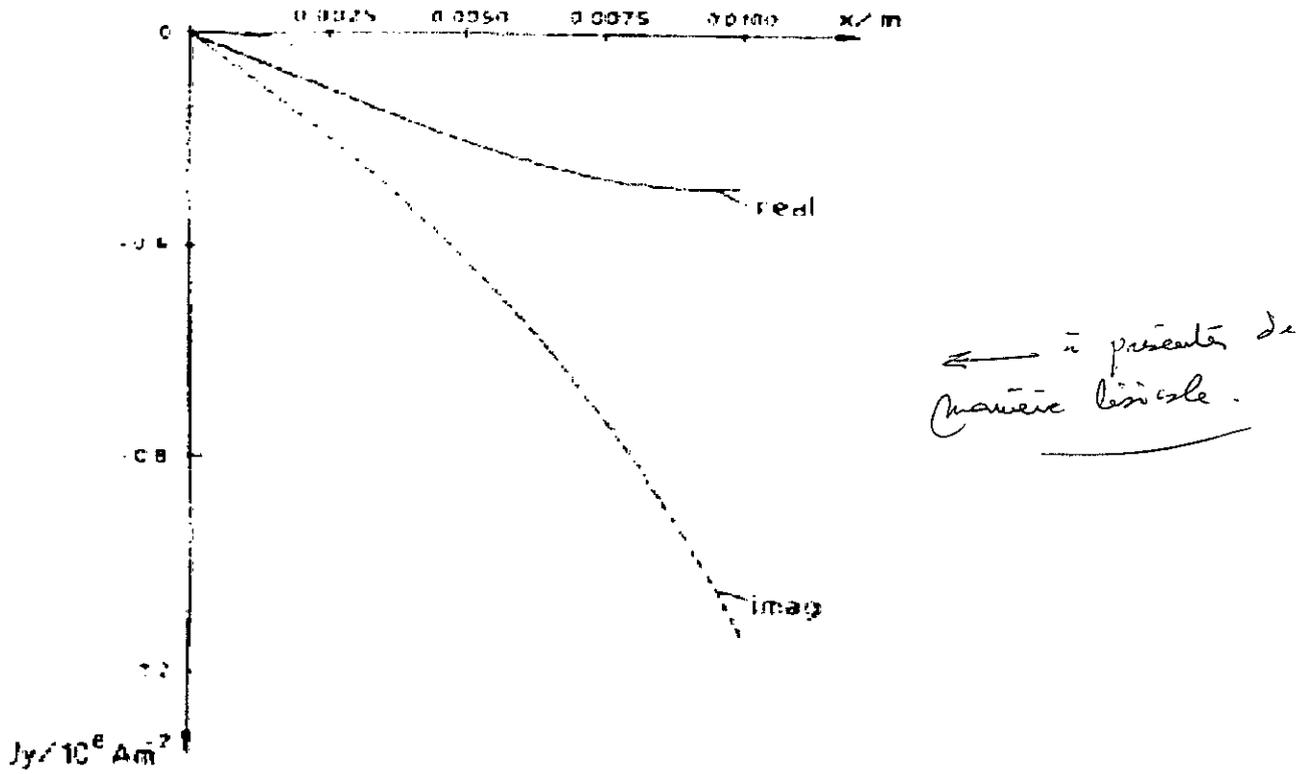


Figure III.18- Les parties réelles et imaginaires du courants induits dans la charge selon [15].

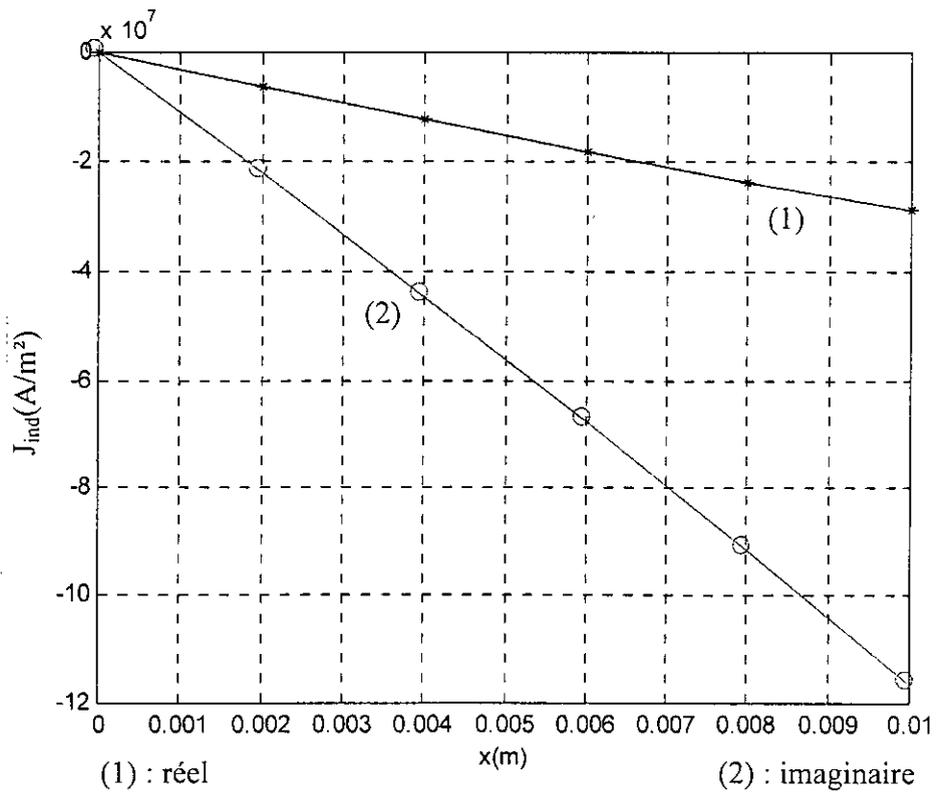


Figure III.19- Les composantes réelles et imaginaires du courant induit dans la charge obtenues par la MVF.

On remarque que nos résultats concordent bien avec ceux obtenus par [15].

CONCLUSION :

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté la méthode des volumes finis pour la résolution des problèmes électromagnétiques tridimensionnels .

La MVF est basée sur l'intégration de l'équation de diffusion électromagnétique sur un volume élémentaire .On a adapté la formulation du notre problème en potentiel modifié A^* vu qu'elle possède un nombre réduit d'inconnue.

Pour simplifier la résolution , on a supposé que la variation de la variable d'état est linéaire entre deux points voisins. On a utilisé le théorème de Taylor pour exprimer cette variation. Il eut été possible de supposer d'autres types de variations mais la discrétisation aurait été plus complexe.

Après avoir intégré l'équation de diffusion électromagnétique en tous points du domaine d'étude pour les deux systèmes de coordonnées cartésien et cylindrique, on a aboutit à un système algébrique $[A]^*[X]=[B]$, qu'on a résolu par une méthode directe.

A titre de validation, on a comparé les résultats obtenus par notre modèle à ceux obtenu par O.BIRO dans le système décrit en [15] ; nous constatons que la concordance est excellente..

CHAPITRE VI
APPLICATIONS

INTRODUCTION

A travers le troisième chapitre nous avons établi une validation primaire de notre modèle à travers l'étude du cas d'école que constitue « le cube de O.BIRO ».

Dans ce chapitre, nous nous tournons vers des applications plus concrètes relatives au chauffage par induction .Ce sont :

- L'étude de l'influence de l'hélicité sur le calcul du champ et des courants induits dans une charge cylindrique.
- Un modèle magnéto-thermique pour l'étude du chauffage par induction d'une plaque isolante.

IV.1. ETUDE DE L'INFLUENCE DE L'HELICITE POUR UNE CHARGE CYLINDRIQUE

IV.1.1. Description du système

Le système à étudier est une charge cylindrique en Aluminium, de diamètre de 23 mm, et de longueur de 54 mm, chauffée par un inducteur de rayon intérieur de 36 mm, et de rayon extérieur de 44 mm .L'inducteur est alimenté par une densité de courant de 10^6 A/m³ à la fréquence 2500Hz.

Pour atteindre le but de cette application, nous proposons d'étudier ces trois cas de géométries :

1. Inducteur à trois spires où la distance entre deux spires successives est de 18 mm (figure IV. 1).
2. Inducteur à trois spires où la distance entre deux spires successives est de 12 mm (figure IV.2).
3. Inducteur à trois spires où la distance entre deux spires successives est de 9 mm (figure IV.3).

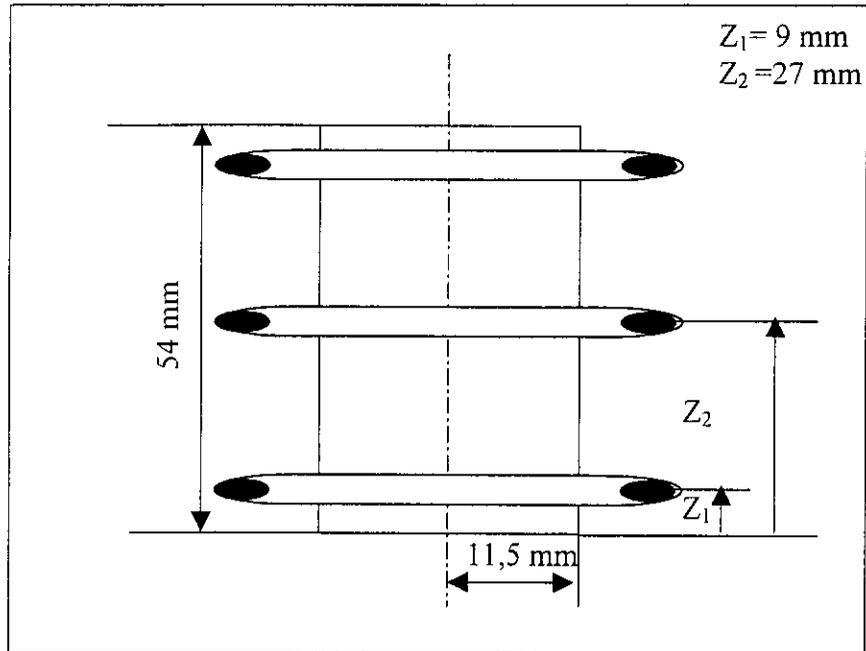


Figure IV.1- Structure et dimensions du système à étudier (cas n°1).

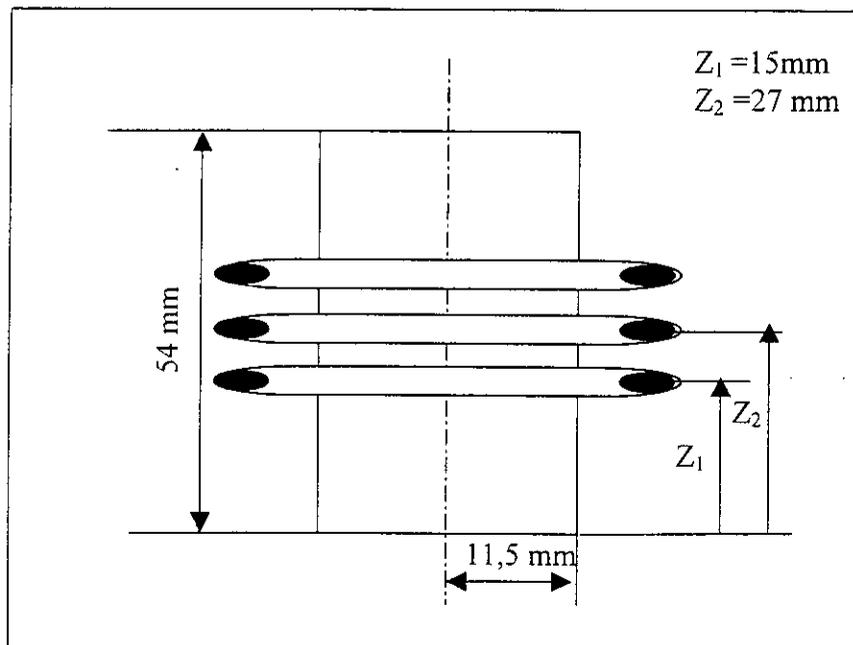


Figure IV.2- Structure et dimensions du système à étudier (cas n°2).

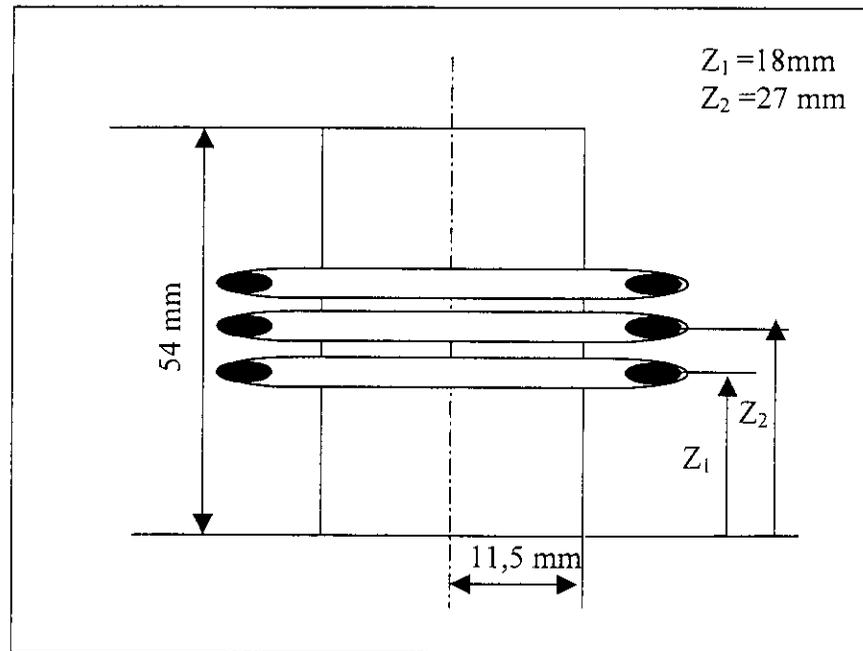


Figure IV.3- Structure et dimensions du système à étudier (cas n°3).

IV.1.2. Discrétisation du domaine d'étude

La prise en compte de l'hélicité de l'inducteur demande un pas de maillage selon z très fin (plus petit que le rayon de l'inducteur). Pour cela ; on a maillé le domaine d'étude jusqu'à 828 nœuds comme suit :

- Un maillage irrégulier selon r avec $n = 6$.
- Un maillage régulier selon $t\theta$ avec $m = 6$.
- Un maillage irrégulier selon z avec $p=22$.

La figure IV.4 montre le maillage géométrique du domaine à étudier sur le plan $(r\theta)$, les points de calcul sont repérés en croix.

IV.2.3. Conditions aux limites

On a posé une condition de type Dirichlet, la valeur du potentiel est nulle sur les frontières du domaine .

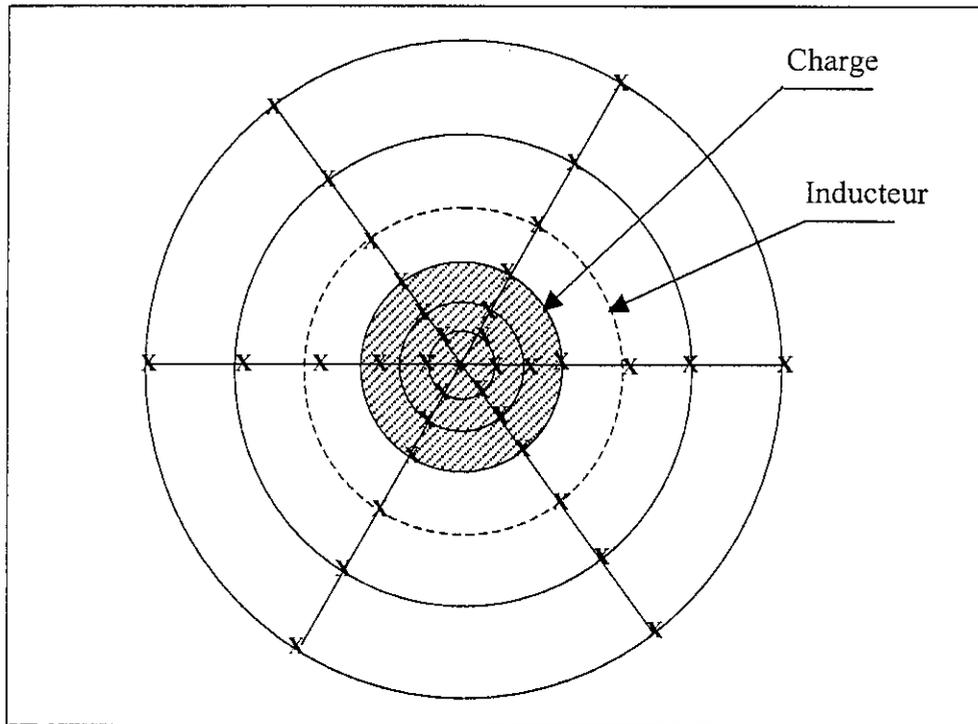


Figure IV.4 – Visualisation du maillage de l'ensemble (charge + inducteur + air environnant) sur le plan (r, θ) .

IV.1.4. Résultats de modélisation

On a relevé les répartitions du potentiel vecteur A^* , et des densités de puissance induite dans la charge sur le chemin radial (face à la spire médiane) AB et le chemin axial (au milieu de la charge et parallèle à l'axe (oz)) CD indiqués sur la figure IV.5 pour les trois cas de systèmes à étudier.

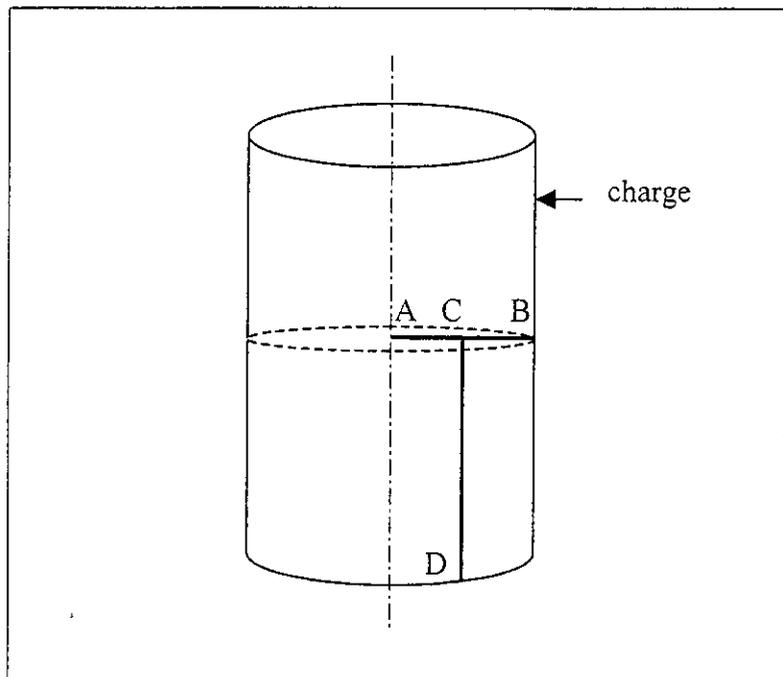


Figure IV.5 – Chemins pour la visualisation des répartitions des grandeurs électromagnétiques.

On a relevé les variations du potentiel vecteur magnétique sur les chemins AB et CD, la densité de la puissance induite sur le chemin AB et CD, où on a superposé les résultats obtenus par la méthode des volumes finis en tenant en compte l'hélicité de l'inducteur (1) à ceux obtenus en la négligeant (2).

1^{er} cas : Inducteur avec spires écartées

1. Etude du potentiel vecteur magnétique

Comme on a pris une variation linéaire de premier ordre entre deux points de calcul du potentiel vecteur, et à cause de l'effet de peau important, la différence entre les deux courbes (1) et (2) n'apparaît que sur la périphérie de la charge. Nous pouvons quand même dire qu'il existe une différence notable entre les courbes selon que l'on néglige ou pas l'hélicité, l'influence de l'hélicité apparaît aussi clairement lorsque la courbe de A* est relevée sur le chemin CD.

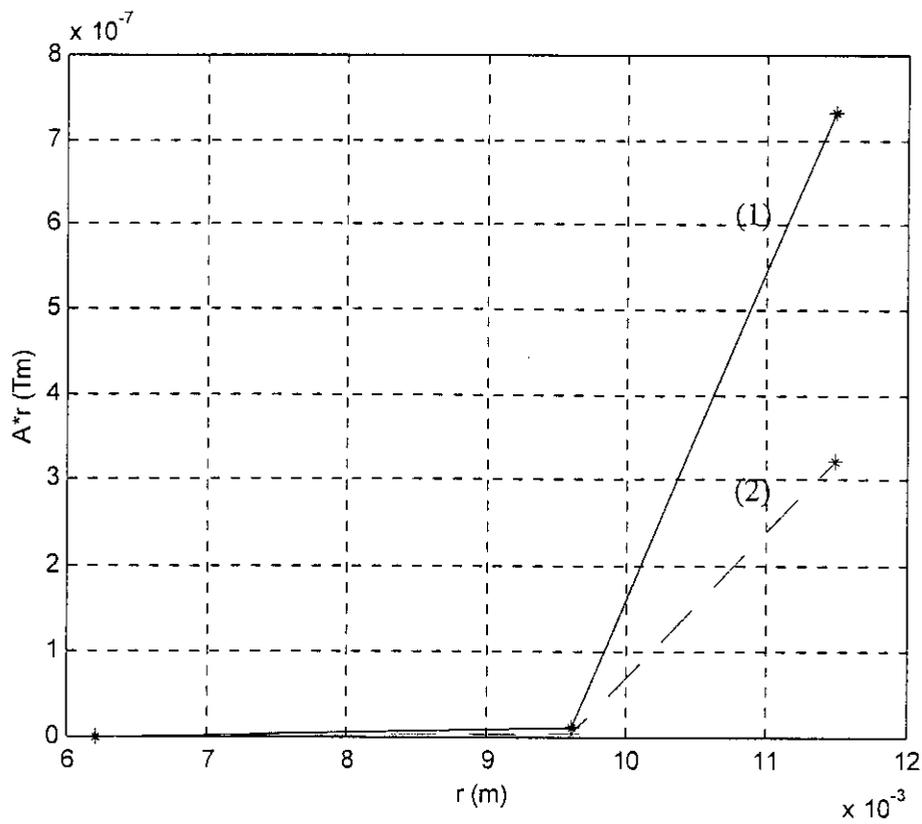


Figure IV.6- Répartition du potentiel sur le chemin AB (cas n°1)

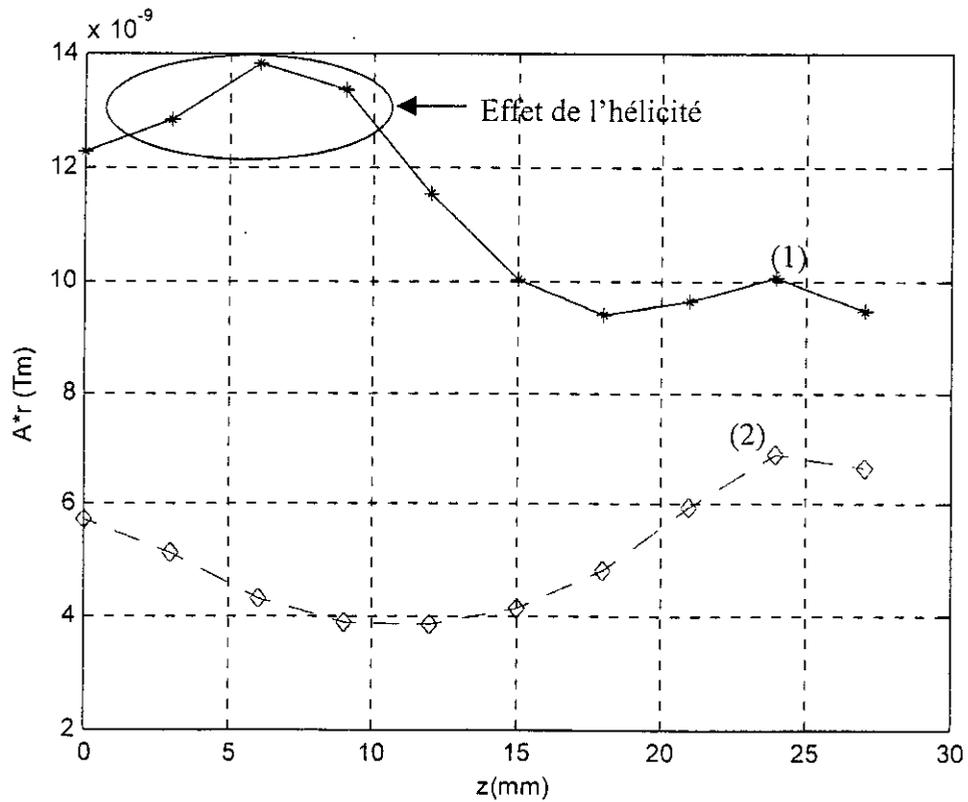


Figure IV.7- Répartition du potentiel sur le chemin CD (cas n°1)

2. Etude de la densité de puissance induite dans la charge

Vu que la densité de puissance induite dans la charge est proportionnelle au carré du module du potentiel vecteur, la différence entre les deux courbes (1) et (2), figure bien sur les points de la périphérie de la charge. Les mêmes remarques que précédemment peuvent être faites au sujet des courbes de la densité de puissance.

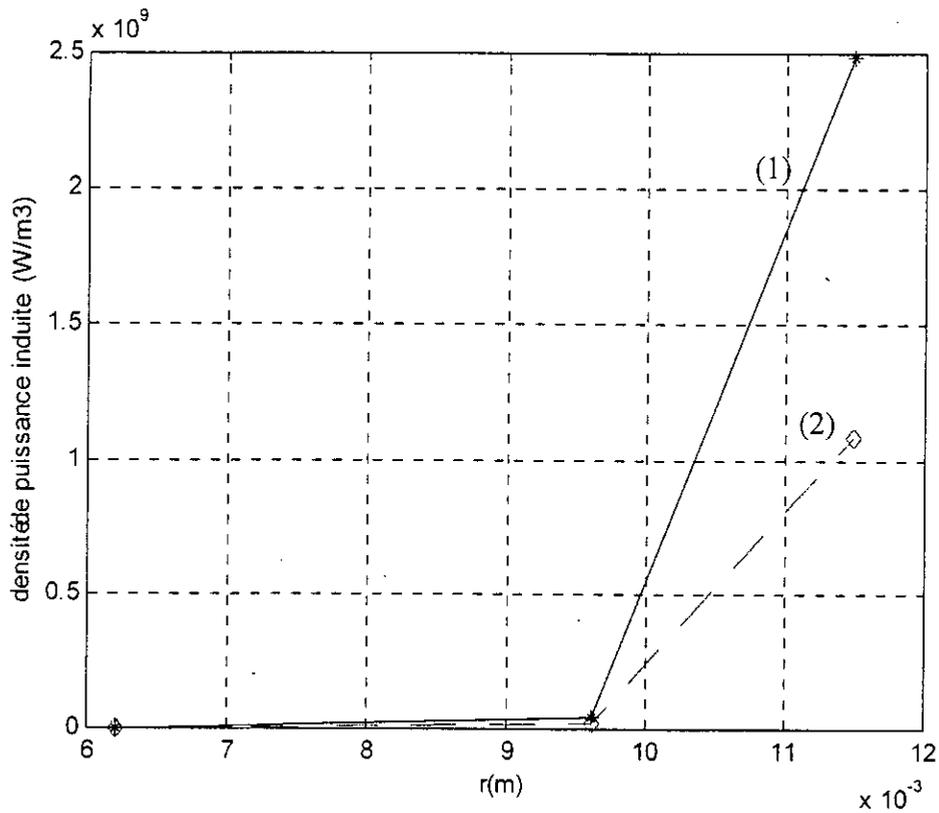


Figure IV.8- Répartition de la densité de puissance dans la charge sur le chemin AB (cas n°1)

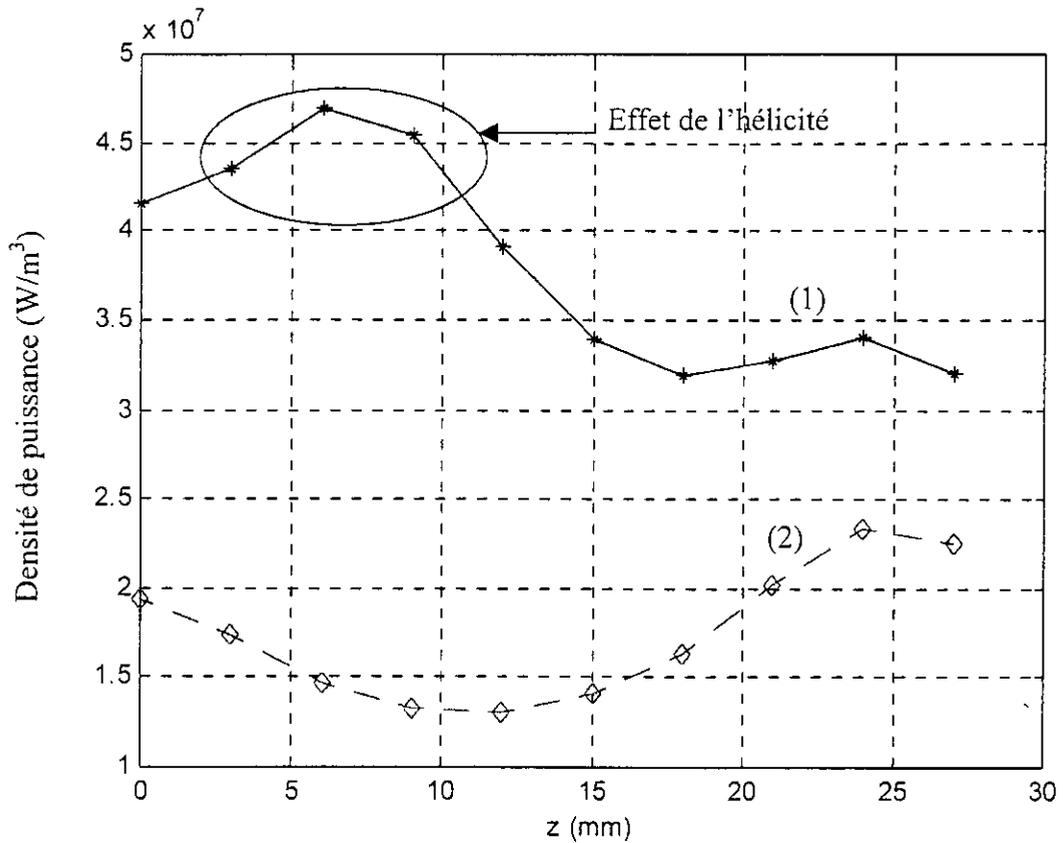


Figure IV.9- Répartition de la puissance induite dans la charge sur le chemin CD (cas n°1)

Au vu des différentes courbes précédentes, on peut dire que la différence entre les courbes relevées en tenant en compte de l'hélicité et ceux obtenues en la négligeant est très importante.

On conclut que dans le cas d'un inducteur à spires écartées, on n'a pas le droit de négliger l'hélicité.

2^{ème} cas : inducteur à spires moyennement écartées

1. Etude du potentiel vecteur magnétique

Bien qu'on ait diminué la distance entre spires, la différence entre les montées du potentiel vecteur dans (1) et (2) ne peut pas être négligeable.

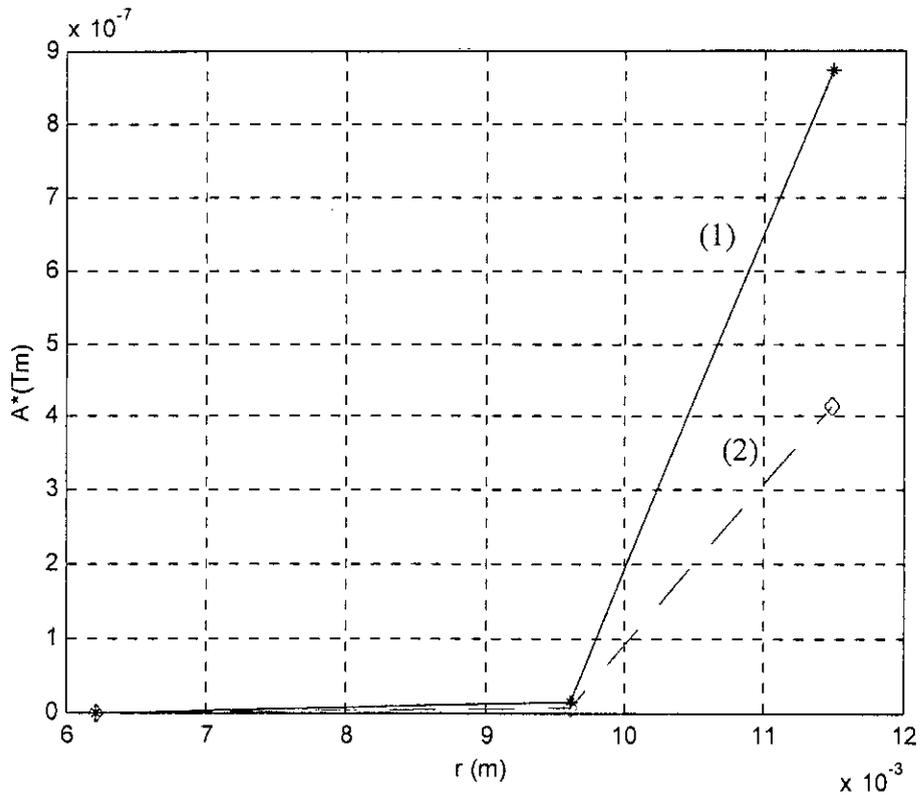


Figure IV.10 – Répartition du potentiel sur le chemin AB (cas n°2)

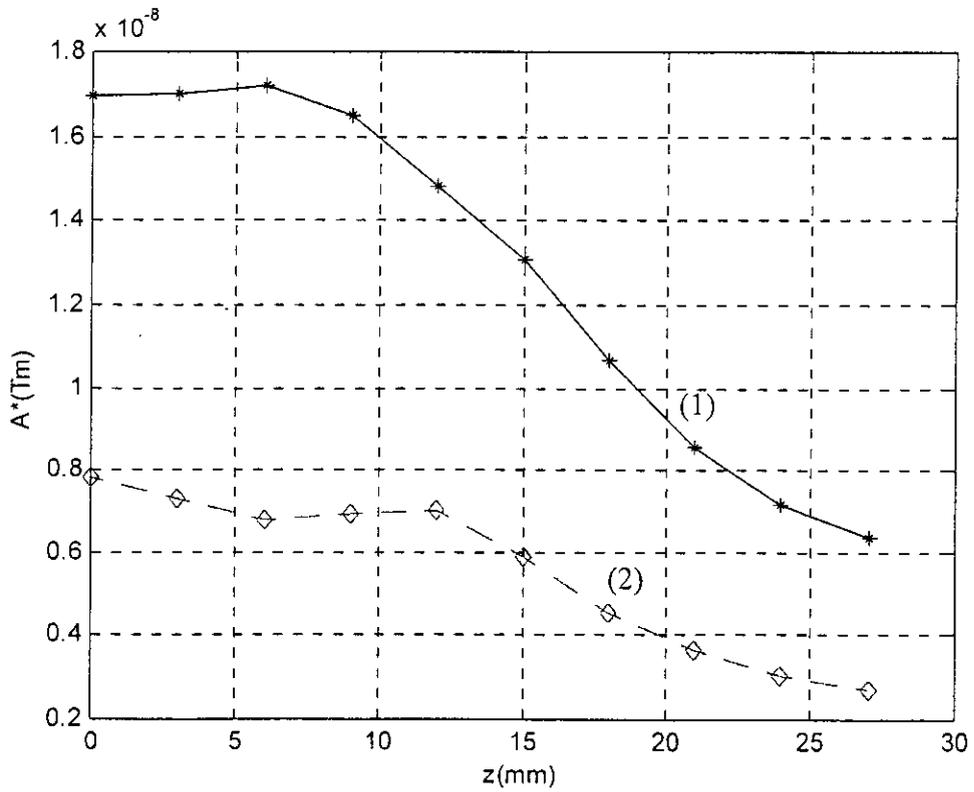


Figure IV.11 – Répartition du potentiel sur le chemin CD (cas n°2)

2. Etude du densité de puissance induite dans la charge

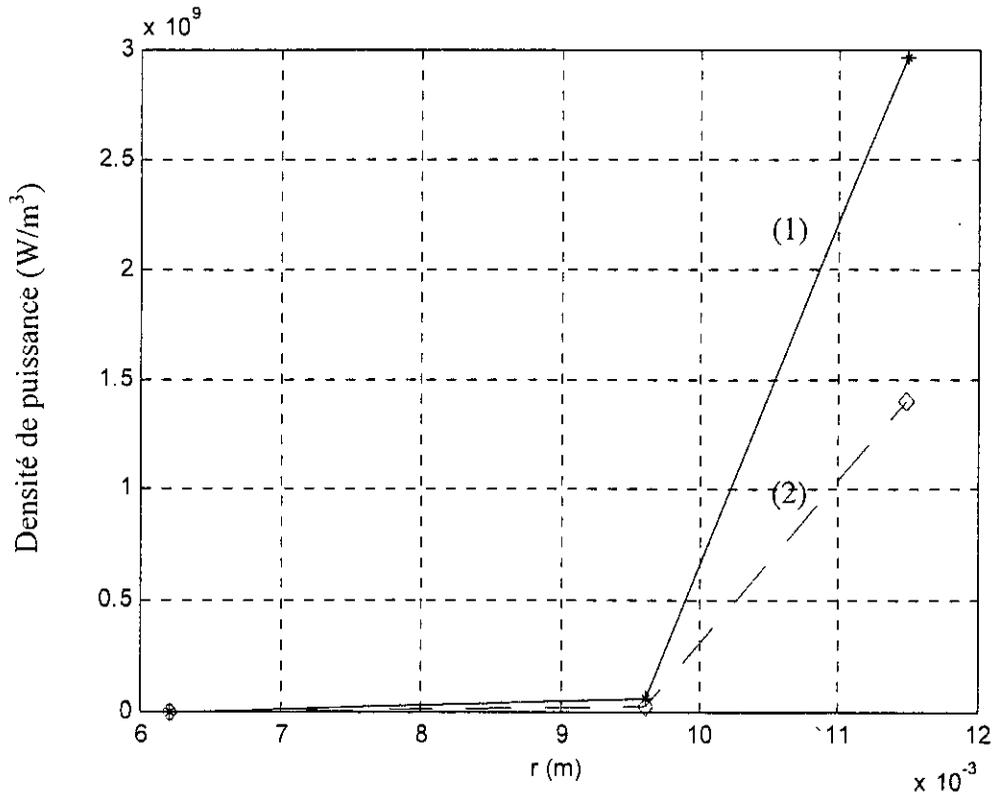


Figure IV.12 – Répartition de la densité de puissance induite dans la charge sur le chemin AB (cas n°2)

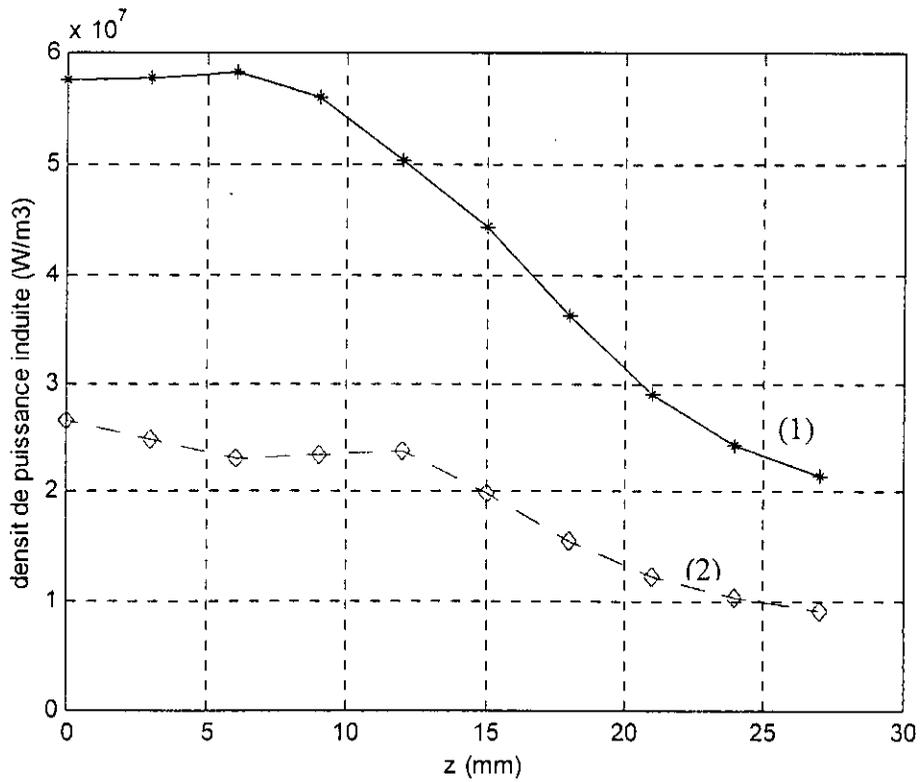


Figure IV.13 – Répartition de la densité de puissance induite dans la charge sur le chemin CD (cas n°2)

Dans ce cas aussi, on n'a pas le droit de négliger l'hélicité de l'inducteur.

3^{ème} cas : inducteur à spires jointives

1. Etude du potentiel vecteur magnétique

Les figures IV.14, IV.15 montrent respectivement les variations de potentiel vecteur magnétique sur les chemins AB et CD, où on a superposé les résultats obtenus par la méthode des volumes finis en tenant en compte l'hélicité de l'inducteur (1) à ceux obtenus en la négligeant (2).

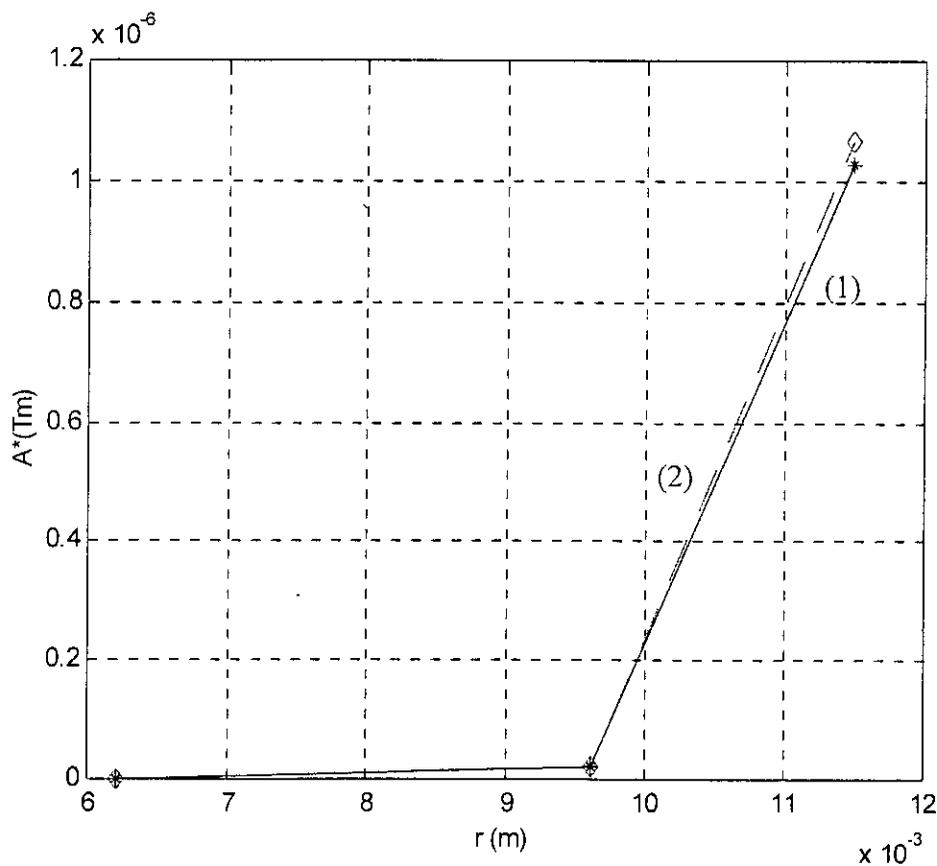


Figure IV.14 – Répartition du potentiel sur le chemin AB (cas n°3)

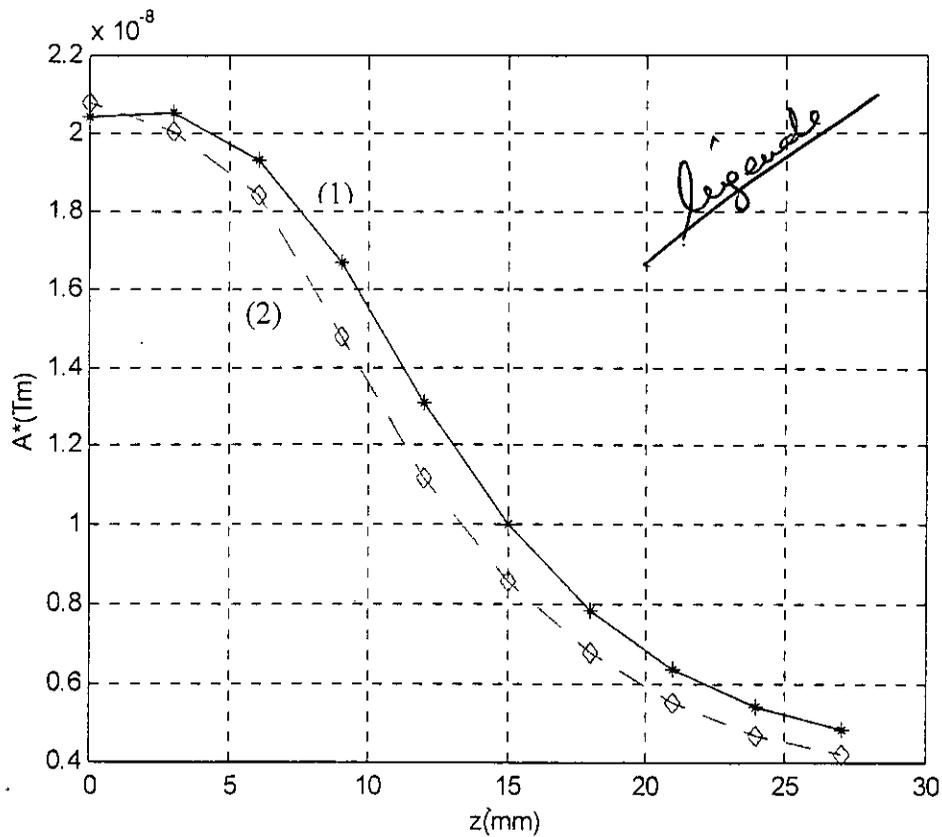


Figure IV.15– Répartition du potentiel sur le chemin CD (cas n°3)

2. Etude du densité de puissance induite dans la charge

Sur les figures IV.16, IV.17, on a relevé respectivement les répartitions de la densité de puissance induite dans la charge sur les chemins AB et CD, où on a superposé les résultats obtenus par la méthode des volumes finis en tenant en compte l'hélicité de l'inducteur (1) à ceux obtenus en la négligeant (2).

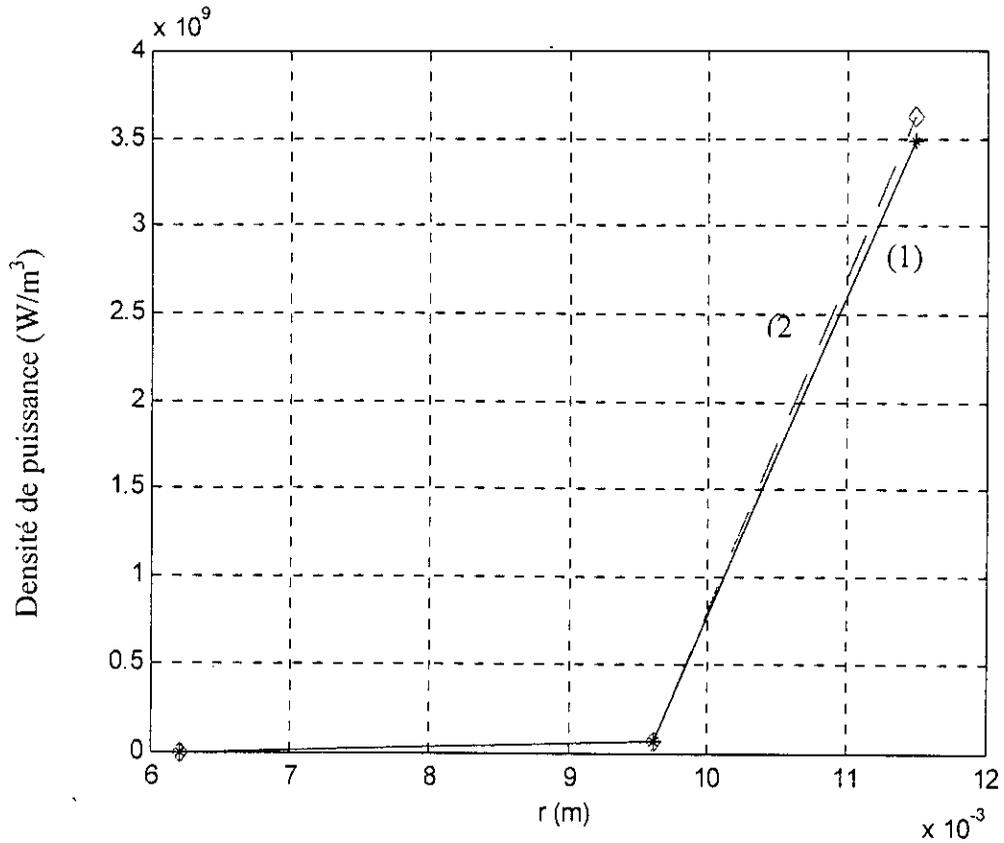


Figure IV.16 – Répartition de la densité de puissance induite dans la charge sur le chemin AB (cas n°3)

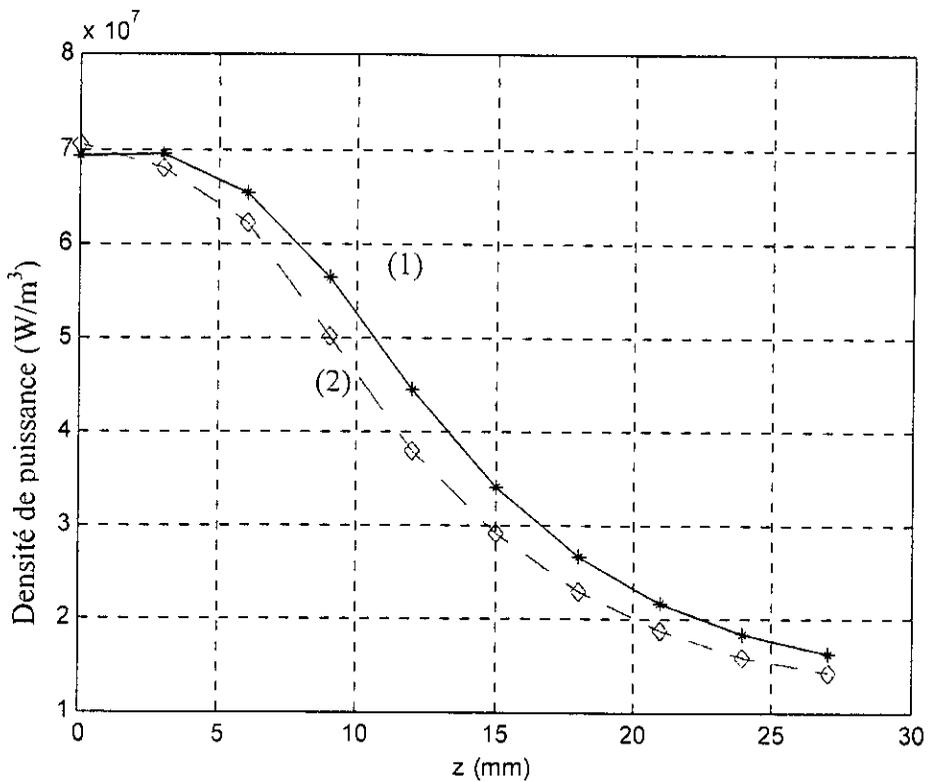


Figure IV.17- Répartition de la densité de puissance induite dans la charge sur le chemin CD (cas n°3).

On peut conclure que dans le cas d'un inducteur à spires jointives l'hélicité peut être négligée sans risque.

De manière plus générale, on peut conclure que l'hélicité d'un inducteur solénoïdal peut être négligée seulement dans le cas de spires jointives ou, dans le cas où la charge cylindrique possède une longueur axiale beaucoup plus importante que celle de l'inducteur.

L'influence de l'hélicité apparaît aussi de manière très claire dans le tableau IV.1 où on a reporté la puissance totale dans la charge selon les trois cas d'inducteur (spires écartées, spires moyennement écartées et spires jointives). Après avoir relevé les distributions du potentiel vecteur et des densités de puissance, on peut déduire que l'ignorance de l'hélicité est justifiée seulement si les spires sont jointives, ou si la longueur de la charge est assez grande par rapport à celle de l'inducteur.

	Avec hélicité	Sans hélicité
Puissance totale (W) pour le cas n°1	$7,414.10^4$	$2,0623.10^4$
Puissance totale (W) pour le cas n°2	$2,5658.10^4$	$1,933.10^4$
Puissance totale (W) pour le cas n°3	$2,188.10^4$	$1,9297.10^4$

Tableau IV.1- Calcul de la puissance totale dans la charge

On voit qu'en négligeant l'hélicité la puissance totale induite ne varie presque pas quelle que soit la configuration de l'inducteur alors qu'elle varie de presque quatre fois lorsque l'hélicité est prise en compte.

IV.2. LE CHAUFFAGE PAR INDUCTION

IV.2.1. Principe de chauffage par induction [18],[19],[20]

Tout conducteur massif soumis à un champ magnétique variable est le siège de courants induits. En électrotechnique, ces courants appelés courants de Foucault engendrent des pertes indésirables, mais en électrothermie, ces pertes provoquent l'échauffement désiré par effet Joule de la substance où ils ont pris naissance. La pièce sera chauffée directement dans sa masse, et l'induction sera le seul procédé qui permet de transmettre l'énergie à l'intérieur du produit sans aucun contact matériel entre la source et la charge (figure IV.18).

Le chauffage par induction met en jeu trois phénomènes successifs : le transfert d'énergie de l'enroulement à la pièce à chauffer par voie électromagnétique, la transformation en chaleur dans la pièce de l'énergie par effet joule et la transmission de la chaleur par conduction thermique dans la pièce à chauffer.

On distingue trois modes de transfert de la chaleur : conduction, convection et rayonnement.

- La conduction est caractérisée par la transmission de la chaleur provoquée par la différence de température entre deux régions d'un milieu ou entre deux milieux en contact physique.
- La convection est le mode de transfert de chaleur par échange de chaleur entre un milieu solide et un fluide. La convection est naturelle si le mouvement du fluide résulte uniquement des différences de masse volumique causées par les différences de température, elle est forcée si le mouvement du fluide est provoquée par des moyens mécaniques.
- Le rayonnement correspond à une absorption ou une émission de radiation électromagnétique.

Le rayonnement et la convection interviennent généralement comme conditions aux limites dans l'équation de conduction thermique.

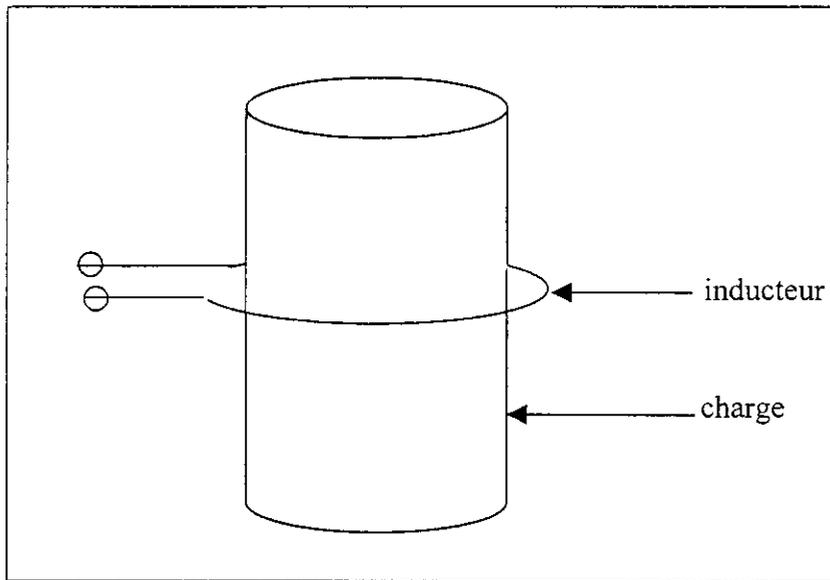


Figure IV.18- Système de chauffage par induction d'une charge cylindrique

IV.2.2. Equation de diffusion de la chaleur

Cette équation exprime la loi de Fourier qui traduit la relation existant, en chaque point d'un corps, entre le flux thermique et le gradient de température. Cette loi traduit le fait que le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température. La direction de l'écoulement de chaleur coïncide avec celle du gradient de température.

L'équation thermique générale s'écrit :

$$\rho c_p (\bar{v} \text{grad} T + \frac{\partial T}{\partial t}) = \text{div}(k \text{grad} T) + P_s - Q_r \quad (\text{IV.1})$$

k : conductivité thermique [$\text{W}/\text{m}^\circ\text{k}$].

T : température [$^\circ\text{k}$].

P_s : densité volumique de puissance échangée sur les surfaces de séparation, de deux zones thermiquement différentes [W/m^3].

Q_r : puissance rayonnée (terme d'échange thermique par rayonnement).

\bar{v} : vitesse d'écoulement [m/s].

ρ : masse volumique [kg/m^3].

c_p : chaleur spécifique [$\text{J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{K})$].

t : temps [s].

IV.2.3. Conditions aux limites

Pour définir complètement le problème thermique, on associe à l'équation de diffusion de la chaleur les conditions aux limites sur la surface du domaine de résolution : [2]

1. Condition de type Dirichlet qui correspond à une ligne d'isotherme où la température est imposée :

$$T_s = T_0$$

2. Condition de Newman où la densité de flux est imposée et égale à φ_0 :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_s = \frac{-\varphi_0}{k}$$

Sur une surface adiabatique, pour un corps thermique isolé on a :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_s = 0$$

Le flux thermique imposé est fonction du milieu extérieur vers lequel se fait le transfert de chaleur, le transfert se fait vers le milieu ambiant de température T_a , la condition à imposer dans ce cas est due au :

- Transfert par convection : $k \frac{\partial T}{\partial n} = -hc(T_s - T_a)$
 hc : coefficient d'échange par convection [$W/m^2 \cdot ^\circ K$].
- Transfert par rayonnement : $k \frac{\partial T}{\partial n} = -\varepsilon \sigma_B (T_s^4 - T_a^4)$
- Transfert par jumelage des deux modes de transfert précédents :

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = -hc(T_s - T_a)$$

$$he = hc + \varepsilon \sigma_B (T_s - T_a)(T_s^2 + T_a^2)$$

Si on prend l'approximation $T_s = T_a$, on peut utiliser un coefficient d'échange convectif équivalent à une température ambiante T_a tel que :

$$he = hc + 4 \cdot \varepsilon \sigma_B T_a^3$$

Avec :

ε : coefficient d'émissivité.

σ_B : constante de Stefan- Boltzmann [$W/m^2 \cdot ^\circ K^4$].

IV.2.4. Discrétisation de l'équation thermique

En absence de mouvement l'équation (IV.1) devient:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \text{div} (k \text{grad} T) + P_s \quad (\text{IV.2})$$

En coordonnées cylindriques (r, θ, z) , l'équation (IV.2) s'écrit comme suit

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + P_s. \quad (\text{IV.3})$$

Le terme source P_s est supposé constant dans un élément de volume et égale à sa moyenne.

L'intégration de l'équation (IV.3) dans un régime permanent $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \right)$ sur un élément de volume $\Delta v = r_p dr dz d\theta$ entourant le point P, nous donne :

$$\int_{\Delta v_p} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right) dv + \int_{\Delta v_p} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) dv + \int_{\Delta v_p} \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dv + P_s \Delta v = 0. \quad (\text{IV.4})$$

Les intégrales dans l'équation (IV.4) peuvent être calculées numériquement en utilisant des profils de température en escalier ou en morceaux.

Dans le schéma en escalier, les températures à l'intérieur de chaque élément sont supposées uniformes et l'intégrale est égale à la surface hachurée de la figure IV.19.

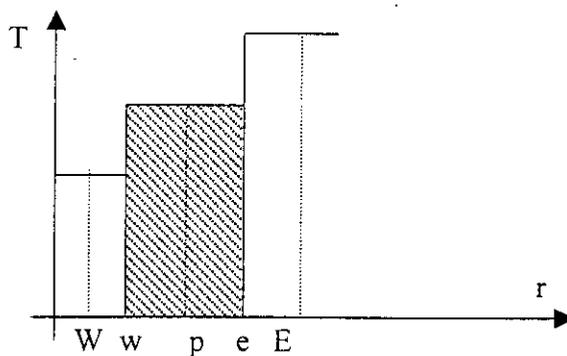


Figure IV.19- Schéma en escalier

Le schéma en morceaux tient compte de la variation de la température à l'intérieur de chaque volume élémentaire. Pour une variation linéaire de la température entre deux points adjacents, l'intégrale dans l'équation (IV.4) peut être approchée par la surface hachurée montrée sur la figure IV.20.

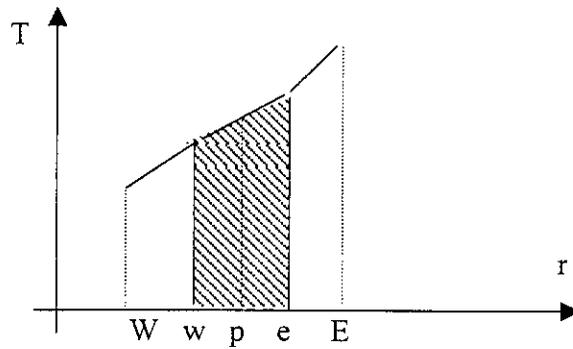


Figure IV.20-Schéma en morceaux.

Pour une approche plus réaliste, nous utilisons le schéma en morceaux, dont l'intégration de l'équation (IV.4) nous donne une équation de la forme :

$$a_p T(P) = a_e T(E) + a_w T(W) + a_n T(N) + a_s T(S) + a_t T(T) + a_b T(B) \quad (\text{IV.5})$$

Avec :

$$a_e = \frac{k_e \Delta r \cdot \Delta z}{r_e \delta \theta_e}$$

$$a_w = \frac{k_w \Delta r \cdot \Delta z}{r_w \delta \theta_w}$$

$$a_n = \frac{k_n r_n \Delta \theta \cdot \Delta z}{\delta r_n}$$

$$a_s = \frac{k_s r_s \Delta \theta \cdot \Delta z}{\delta r_s}$$

$$a_t = \frac{k_t r_p \Delta \theta \cdot \Delta r}{\delta z_t}$$

$$a_b = \frac{k_b r_p \Delta \theta \cdot \Delta r}{\delta z_b}$$

$$a_p = a_e + a_w + a_n + a_s + a_t + a_b - P_s \cdot \Delta v.$$

Dans notre cas, la conductivité thermique est constante dans tout les points du domaine d'étude, donc, nous pouvons écrire :

$$k_e = k_w = k_n = k_s = k_t = k_b = k.$$

IV.2.5. Couplage magnéto-thermique

Pour réaliser un tel couplage, nous avons besoin de la connaissance précise de la répartition spatiale du champ magnétique et de la température ; Pour cela, nous passons par la résolution des équations aux dérivées partielles décrivant le problème électromagnétique, donnant ainsi, la répartition spatiale des puissances électromagnétiques qui seront à leurs tours injectées dans le problème thermique pour la répartition de la température.

Le couplage des deux équations peut se faire de deux façons :

1. *Un schéma de couplage faible* : dans ce type de couplage on résout le problème électromagnétique puis, on injecte la solution au problème thermique.
2. *Un schéma de couplage fort* : dans ce type de couplage, la résolution des deux problèmes est faite simultanément.

Dans notre cas, nous avons choisi un couplage magnéto-thermique faible pour éviter les difficultés numériques que nous pouvons rencontrer à cause des contraintes de limites en espace mémoire des moyens de calcul dans le cas de couplage fort.

L'organigramme suivant illustre les différentes étapes de résolution des deux modèles électromagnétique et thermique.

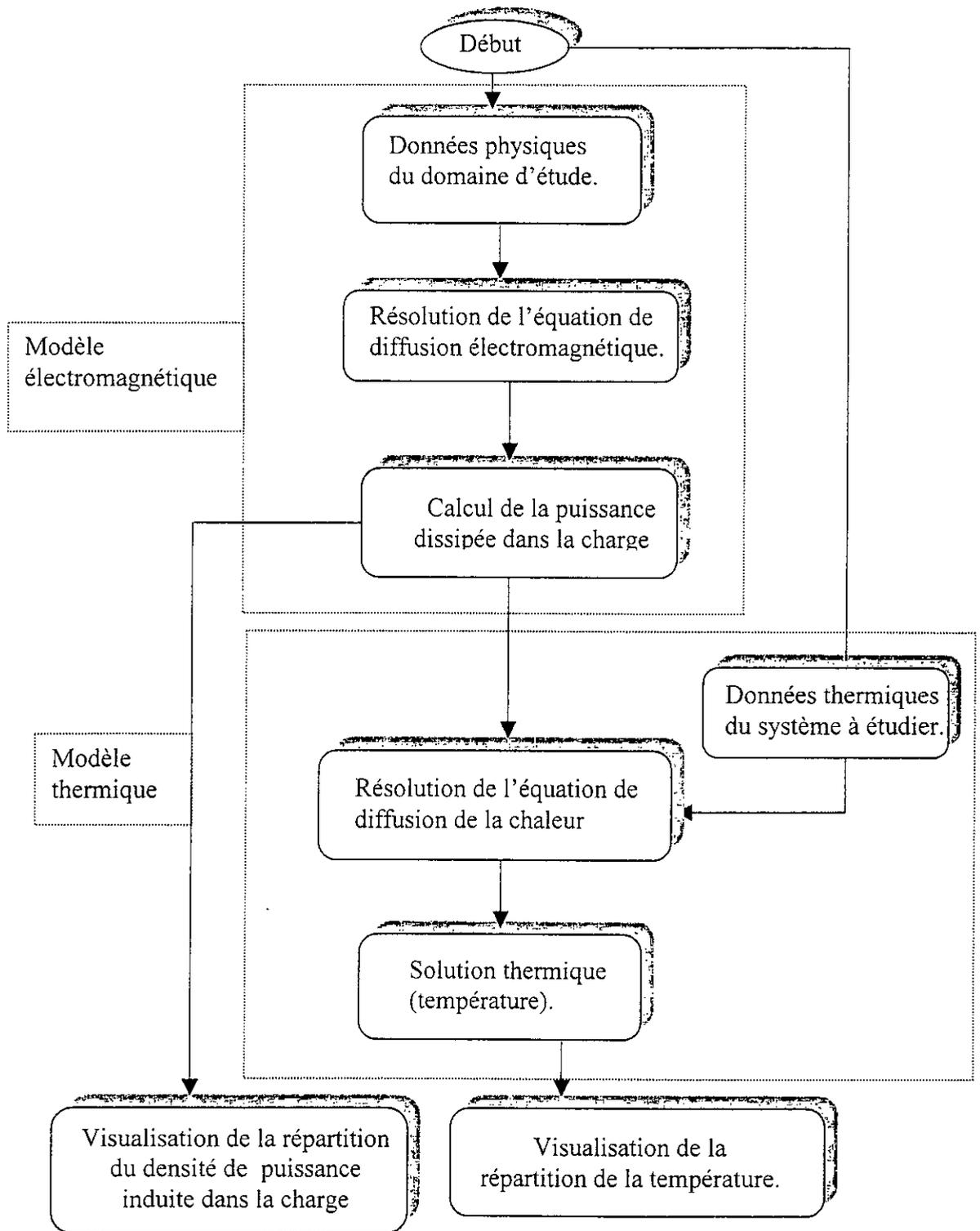


Figure IV.21 –Organigramme de couplage des problèmes électromagnétique et thermique.

IV.3. APPLICATION AU CHAUFFAGE D'UNE PLAQUE ISOLANTE

IV.3.1 .Description du problème

On se propose d'étudier un problème, qui est le chauffage par conduction d'une plaque isolante de façon uniforme à sa surface. Pour cela, un disque métallique où un inducteur induit une densité de puissance sera collé sur la surface de la plaque[21].

La distribution de la densité de puissance sera condensée vers la périphérie, donc, la plaque est chauffée près des bords de façon plus élevée qu'au centre.

L'objectif de ce travail est de trouver la forme de disque qui permet un chauffage de la plaque plus uniforme.

IV.3.2. Données physiques du problème électromagnétique

Ce problème à été traité par D.TRICHET dans [21] , il a été résolu par la méthode mixte circuits couplés-différences finies. L'inducteur est constitué de cinq spires où circule un courant de densité $J=10^6 \text{ A/m}^2$ à la fréquence 2500Hz. La charge est caractérisée par une conductivité $\sigma = 1,666 \cdot 10^6 \text{ .s/m}$, un diamètre $d=140\text{mm}$ et d'une épaisseur $e=0,45 \text{ mm}$, la distance entre la charge et l'inducteur est 10 mm (figure IV.22).

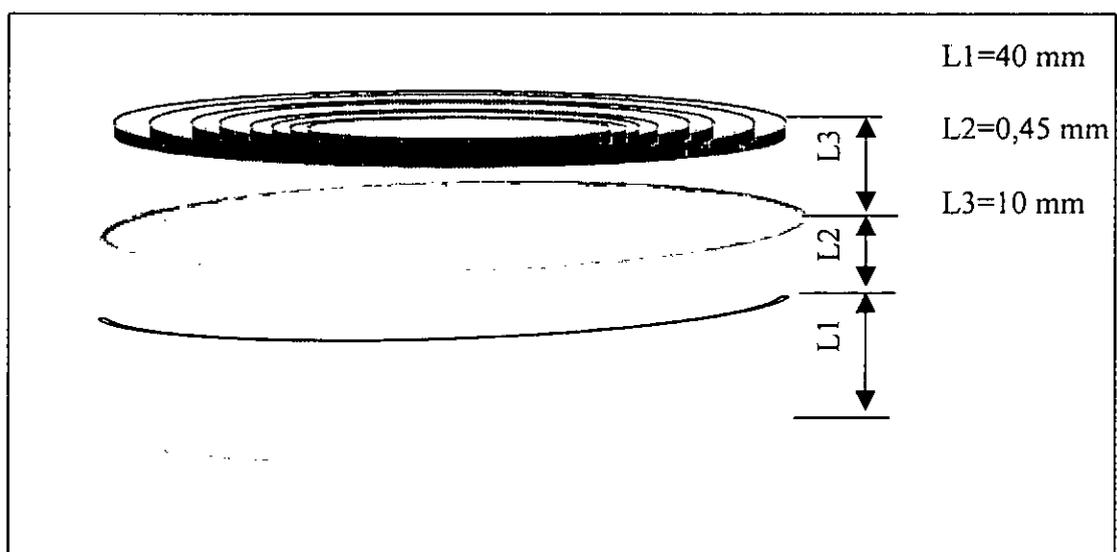


Figure IV.22 – Données géométriques du système à étudier.

IV.3.3. Données thermiques du problème

La plaque isolante est en quartz de conductivité thermique $k = 1,4$ (W/m²°k) et d'épaisseur 40 mm, de diamètre 140 mm.

IV.3.4. Résolution du problème couplé

Afin de résoudre les équations III.55, III.56, III.57 pour ce système, on a maillé le domaine d'étude y compris la région d'air environnant jusqu'à 336 nœuds comme suit :

- Un maillage irrégulier selon r avec $n=7$.
- Un maillage régulier selon θ avec $m=6$.
- Un maillage irrégulier selon z avec $p=7$.

IV.3.5. Conditions aux limites

- **problème électromagnétique**

On a limité la région de l'air environnant par un cylindre de dimension égale à cinq fois les dimensions de la charge, où on a posé à ses frontières la valeur du potentiel vecteur nulle ($A^*=0$).

- **Problème thermique**

On a associé à l'équation discrétisée (IV.5) les conditions aux limites suivantes (figure IV.23) :

Sur les frontières $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, nous posons des conditions de type Dirichlet où, nous supposons que la valeur de la température est constante est égale à 300°k (température imposée par exemple par la circulation d'un fluide).

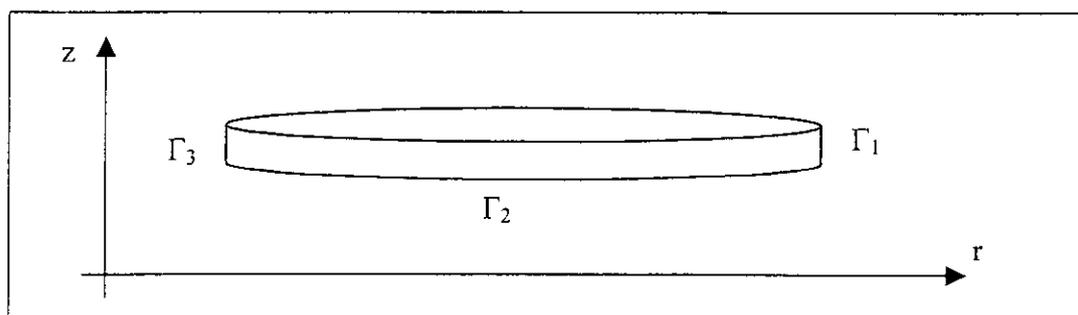


Figure IV.23 - Frontières du domaine d'étude de l'équation thermique

IV.3.6. Résultats de modélisation

L'organigramme (figure IV.21) a été appliqué pour résoudre le problème couplé, on a relevé la répartition du densité de puissance sur le chemin radial AB indiqué sur la figure IV.24.

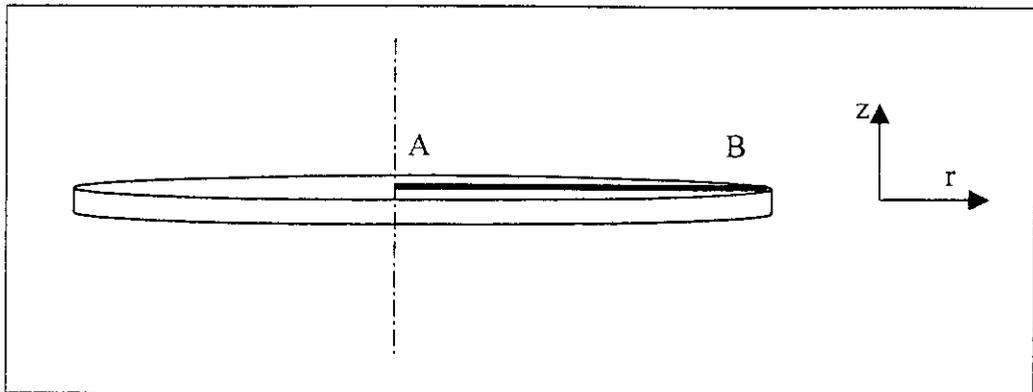


Figure IV.24 - Chemin AB pour la visualisation

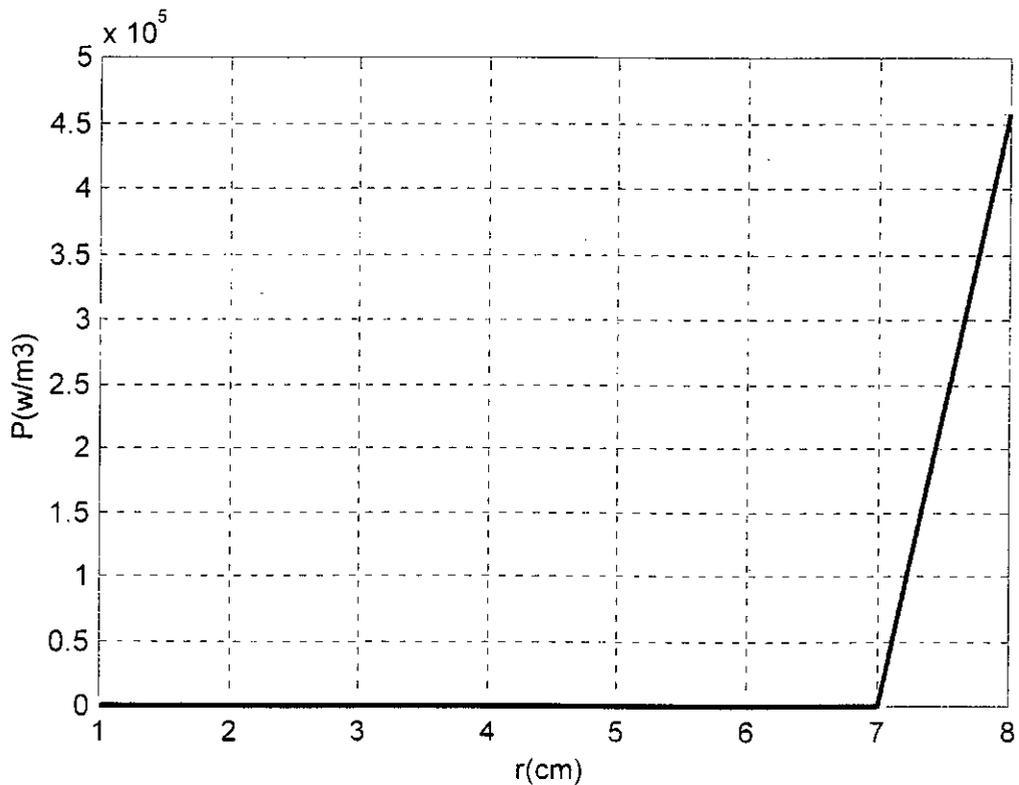


Figure IV.25 – Répartition de la puissance induite dans la charge sur le chemin « AB » pour le cas n°1.

On remarque que la distribution de la densité de puissance est plus intense à la périphérie de la charge, pour qu'elle soit plus uniforme sur toute la surface de la charge, on a usiné sur sa surface trois fentes dont la configuration est celle de la figure IV.26.

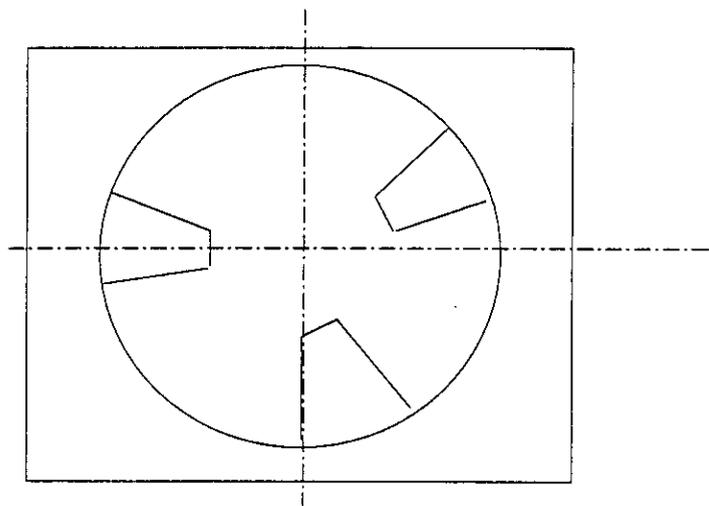


Figure IV.26 – Projection sur le plan (r, θ) de la géométrie de la charge (cas n°2).

Pour cette deuxième configuration, nous avons relevé sur la figure IV.27 la répartition du densité de puissance induite dans la charge sur le même chemin AB.

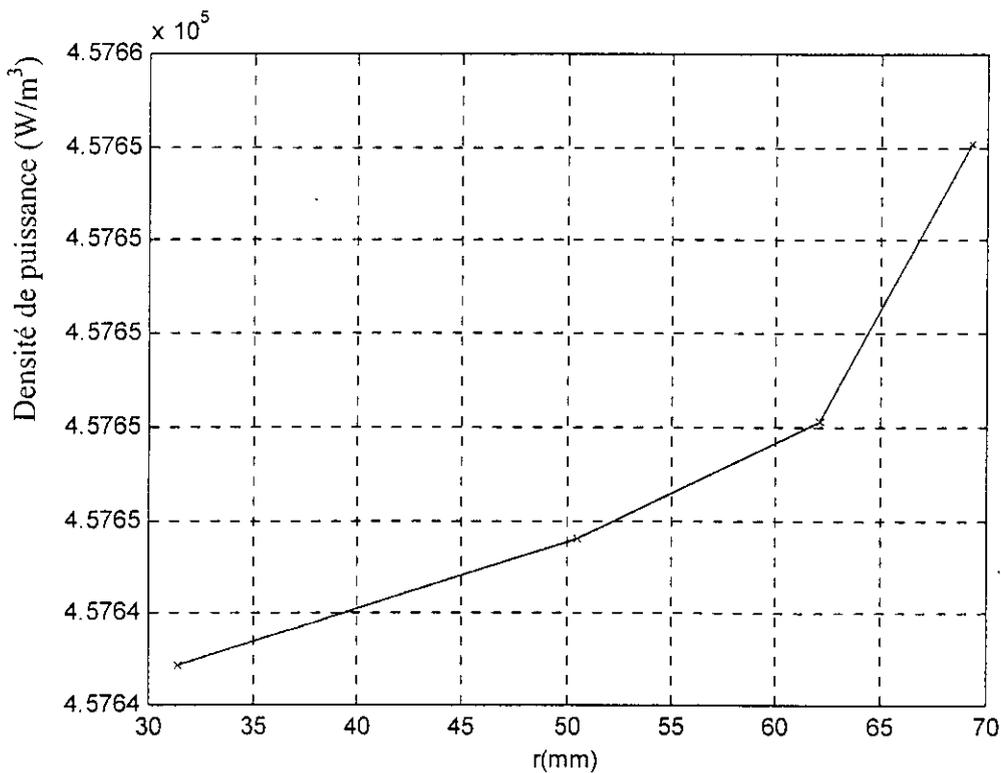


Figure IV.27 - Répartition de la puissance sur le chemin AB pour le cas n°2

IV.3.7. Etude de la répartition de températures

Nous avons relevé la répartition de la température sur la surface de la plaque isolante pour le premier cas défini sur la figure IV.28 , et pour le deuxième cas sur la figure IV.29.

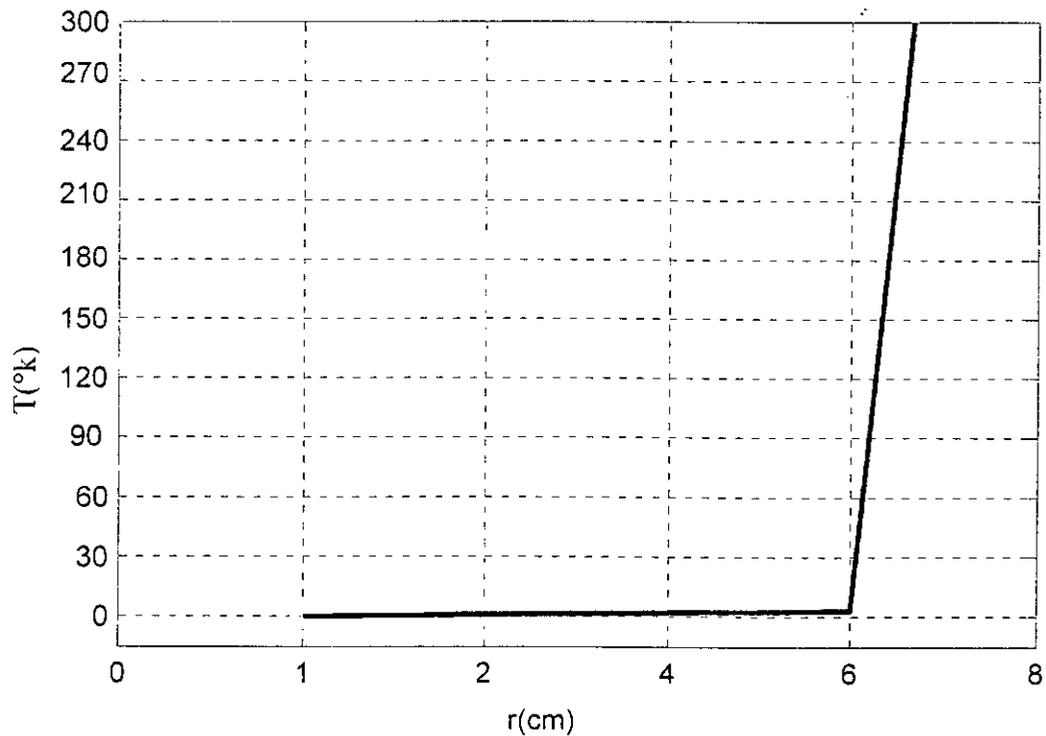


Figure IV.28- Répartition de la température sur le chemin « AB » pour le cas n°1

Nous remarquons que la variation de la température à la surface de la plaque présente une augmentation faible jusqu'au voisinage immédiat de la paroi où elle monte brusquement jusqu'à la valeur maximale aux frontières .

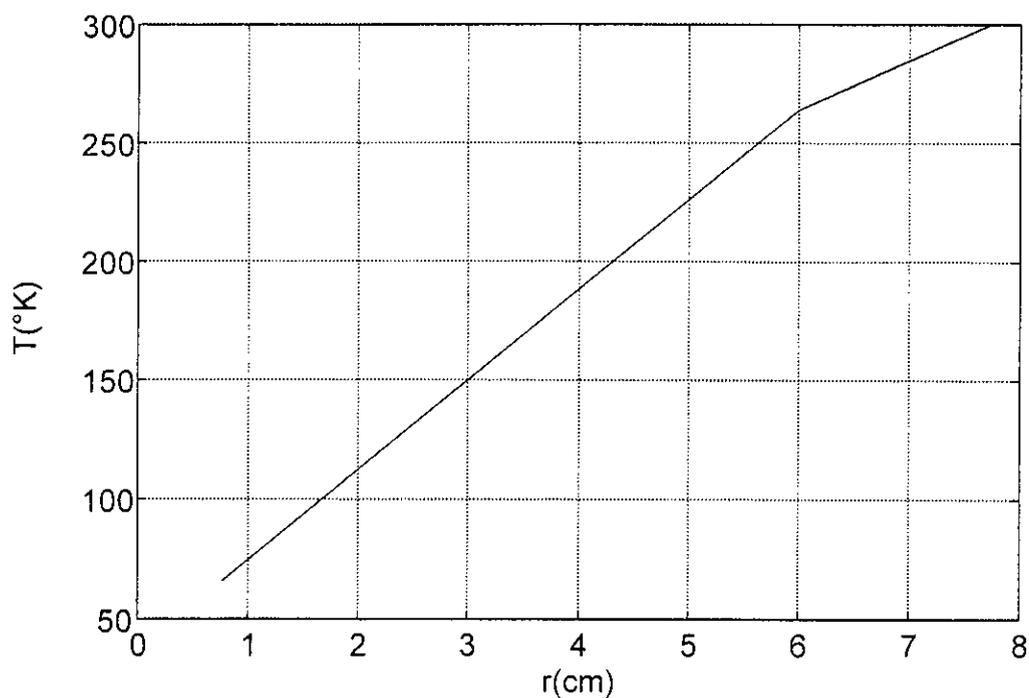


Figure IV.29- Répartition de la température sur le chemin « AB » pour le cas n°2

IV.3.8. Interprétations des résultats

Les différentes observations permettent de conclure que l'usinage de trois fentes dans la charge a forcé la densité de puissance à se répartir de manière plus uniforme sur la surface du disque métallique, par conséquent, l'échauffement de la plaque est plus uniforme sur la surface de cette dernière.

CONCLUSION

Au cours de ce chapitre, nous avons appliqué notre modèle numérique développé en volume finis à l'étude de l'influence de l'hélicité de l'inducteur sur le calcul du potentiel vecteur magnétique et la densité de puissance induite dans une charge cylindrique. Pour ce faire, nous avons étudié différents cas de disposition des spires le long de la charge.

Après avoir relevé les variations du potentiel et des densités de puissance sur deux chemins différents, on peut conclure que la distance entre spires est le facteur essentiel qui permet de négliger ou non l'hélicité. L'influence de l'hélicité est proportionnelle à la distance entre spires, elle croît en augmentant la distance entre deux spires successives.

On a vu que sur un chemin radial face à la spire médiane, cette influence ne figure bien que dans les points situés à la périphérie de la charge, il eut été souhaitable d'augmenter le nombre des mailles dans cette région de la charge, malheureusement, nous étions limités par l'espace mémoire de nos moyens de calcul et du temps de machine qui a été important surtout dans l'étape de remplissage de la matrice $[A]$.

Dans la deuxième application, nous avons étudié dans un régime permanent la montée en température d'une plaque isolante soumise à une source thermique résultats de l'effet Joule des courants induits. On a montré, qu'il est possible de réaliser une meilleure répartition de l'échauffement de la plaque isolante.

CONCLUSION GENERALE

Nous avons, au cours de cette étude, développé un code de calcul, basé sur la méthode des volumes finis, et destiné à la modélisation tridimensionnelle des phénomènes électromagnétiques régissant les dispositifs électrotechniques. Ce code a été étendu à l'aspect thermique et permet donc de réaliser des études couplées magnéto-thermiques.

Les modèles élaborés en coordonnées cartésiennes et cylindriques codés sous environnement « Matlab » calculent les grandeurs électromagnétiques induite pour différentes configurations des systèmes tridimensionnels, ainsi qu'éventuellement, toutes les grandeurs thermiques.

Pour tester et valider nos modèles numériques, nous avons appliqué la méthode des volumes finis à l'étude tridimensionnelle du champ électromagnétique en coordonnées cartésiennes, pour un système déjà étudié par d'autres méthodes et logiciels [O.BIRO en éléments finis] et la concordance des résultats a été excellente.

En coordonnées cylindriques, nous avons appliqué le modèle élaboré à des dispositifs de chauffage par induction. Dans une première partie, nous avons montré que le fait de négliger l'hélicité de l'inducteur (pratique courante en 2 D) ne peut être valable que dans le cas où les spires de ce dernier sont jointives où alors que la longueur de l'inducteur est réduite devant celle de la charge.

Dans la deuxième partie, on a réalisé un couplage magnéto-thermique pour la résolution d'un problème étudié par d'autres méthodes numériques en injectant la puissance moyenne induite dans l'équation thermique comme source de chaleur et cela pour le chauffage par conduction d'une plaque isolante en quartz par la méthode des volumes finis.

Il aurait peut être été souhaitable de comparer la méthode des volumes finis à d'autres méthodes du point de vue temps de calcul mais, malheureusement, la diversité du matériel utilisé dans les différents travaux, nous a obligés à s'arrêter aux aspects allure et valeurs.

Il serait intéressant pour la suite de ce travail de :

- Etendre le modèle à des dispositifs non-linéaires. Dans ce cas, on choisira, pour la variation de la variable d'état entre deux points de calcul, un profil du second ordre. La discrétisation sera alors un peu plus complexe.
- Généraliser le modèle de couplage magnéto-thermique en régime transitoire et en tenant en compte de différents modes de transferts de chaleur et de la non linéarité magnétique des propriétés physiques des métaux.

A.1. L'OPERATEUR DIFFERENTIEL « DEL » OU « NABLA » EN COORDONNEES CARTESIENNES

On peut exprimer l'opérateur différentiel ∇ en termes de dérivées partielles par rapport aux trois coordonnées x, y, z .

$$\nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{A.1})$$

On peut expliciter les trois opérations :

$$\nabla \bullet f = \text{grad } f = e_x \frac{\partial f}{\partial x} + e_y \frac{\partial f}{\partial y} + e_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \bullet A = \text{div } A = \left(e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \bullet (e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times A = \text{rot } A &= \left(e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z) = e_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + e_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &+ e_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A.2. DIVERGENCE DU ROTATIONNEL

$$\nabla \bullet \nabla \times A = \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (\text{A.5})$$

pour les grandeurs électromagnétiques, les composantes du vecteurs A sont doublement différentiables. Par conséquent les trois termes entre parenthèses sont nuls. Donc la divergence d'un rotationnel est nulle [14].

Par conséquent, lorsque la divergence d'une fonction vectorielle est nulle, on peut poser que cette fonction est le rotationnel d'une fonction vectorielle appelée potentiel vecteur.

A.3. ROTATIONNEL D'UN GRADIENT

$$\nabla \times \nabla f = e_x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) + e_y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) + e_z \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (\text{A.6})$$

Il en résulte que le rotationnel d'un gradient est nul. Par conséquent, le rotationnel d'une fonction vectorielle est nul, on peut poser que la fonction est le gradient d'une grandeur scalaire que l'on appelle potentiel scalaire [14].

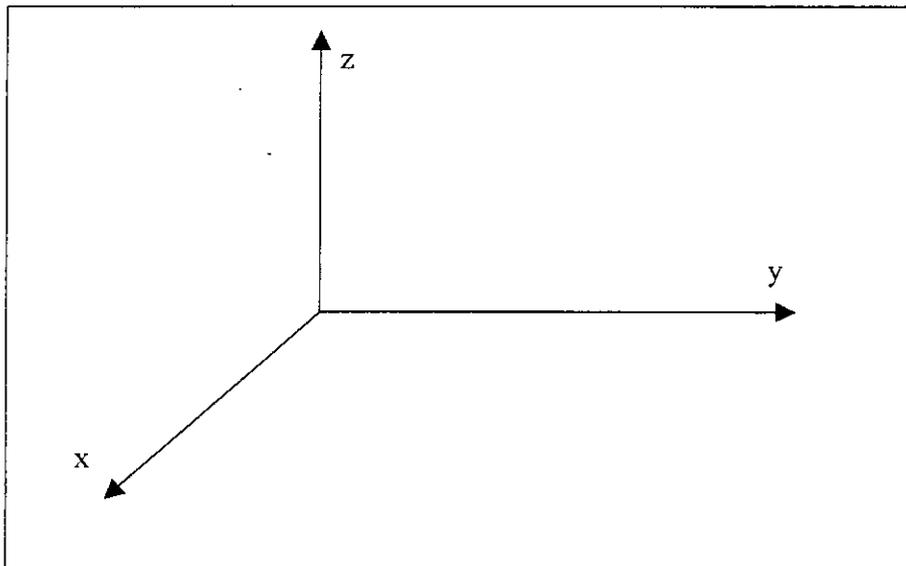
A.4. ROTATIONNEL D'UN ROTATIONNEL

$$\nabla \times \nabla \times A = \nabla(\nabla \cdot A) - (\nabla \cdot \nabla)A \quad (\text{A.7})$$

$$(\nabla \cdot \nabla)A = \nabla^2 A = \Delta A \quad (\text{A.8})$$

A.5. LAPLACIENS EN COORDONNEES CARTESIENNES

$$\Delta A = \left[\left(e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] A = e_x \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) + e_y \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) + e_z \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right). \quad (\text{A.9})$$



-Figure A.1- système de coordonnées cartésiennes

A.6. OPERATIONS DIFFERENTIELLES EN CORDONNEES CYLINDRIQUES

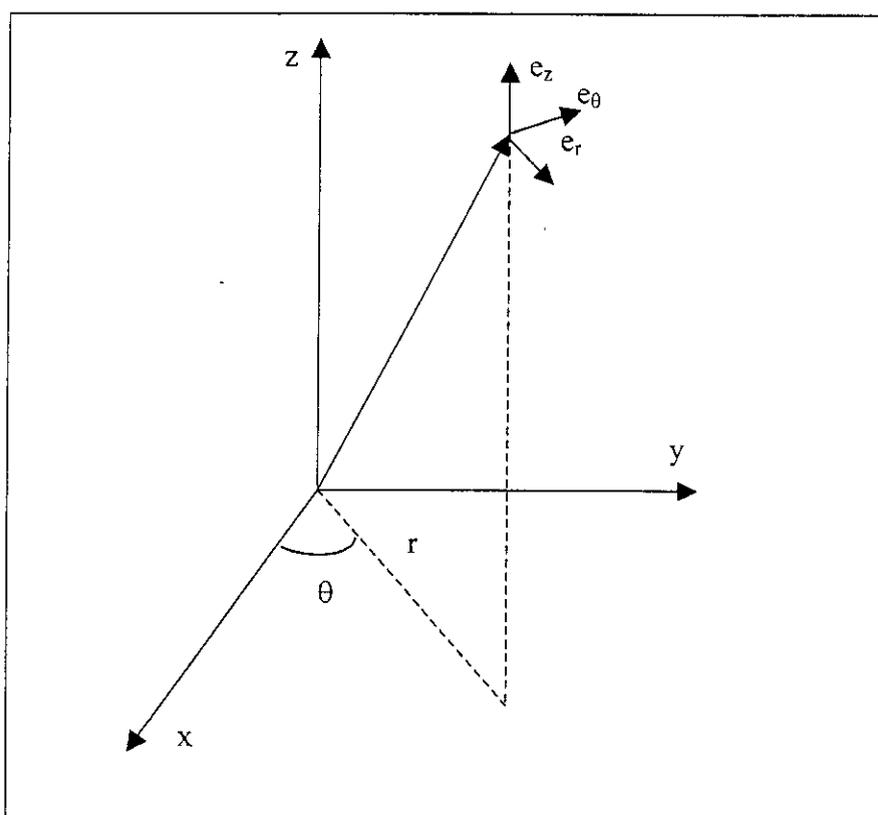
$$\nabla f = \text{grad } f = e_r \frac{\partial f}{\partial r} + e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + e_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla \bullet A = \text{div } A = \frac{1}{r} \frac{\partial (rA)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla \times A = e_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) + e_\theta \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + e_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla^2 f = \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 A = & e_r \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_r}{\partial r} \right) - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} \right] + \\ & + e_\theta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right) - \frac{A_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} \right] + e_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$



-Figure A.2 -Système de coordonnées cylindriques

BIBLIOGRAPHIE

[1] : SUHAS .V.PATANKAR.

« Numerical heat transfer and fluid flow ». Series in computational methods in mechanics and thermal sciences,1989.

[2] : B.MAUCHE.

« Etude et développement semi-analytique de l'équation de diffusion avec terme de déplacement dans le cas des dispositifs axisymétriques excités en courant et en tension ». Thèse de Magister en génie électrique , Université de Bejaia 1996.

[3]: GUY CARRON DE LA MORINAIS.

« Contribution à la modélisation des phénomènes magnétodynamiques en trois dimensions ».Thèse de doctorat de l'institut national polytechnique de Grenoble ,1988.

[4] : C.GUERIN.

« Détermination des pertes par courants de Foucault dans les cuves de transformateurs ». Thèse de doctorat en génie électrique de l'institut national polytechnique de Grenoble,1994.

[5] : FRED .GARDIOL.

« Traité d'électricité –électromagnétisme- volume III ».Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.

[6] : C.BIROUCHE.

« Etude numérique du problème de magnétoformage avec un conformateur de champ ». Thèse de Magister en génie électrique ,centre universitaire de BEJAIA,1998.

[7]: OSZKAR BIRO et KURT PREIS.

« Finite element analysis of 3-D eddy currents ». IEEE , vol25. No.4. pp.3145-3159. July 1989.

[8] : J.C.SABONNADIAIRE ,J.L.COULOMB.

« Calcul des champs électromagnétiques ».Technique de l'ingénieur .D3020.1988 .

[9] : B.BENDJIMA.

« Contribution à la modelisation par élément finis des phénomènes électromagnétiques relatifs au magnetoformage. ».Thèse de doctorat , option génie électrique, de l'université de NANTES,1997.

[10] :H.T.LUONG,Y.MARECHAL,G.MEUNIER.

« Computation of 3-D current driven eddy current problems using cutting surfaces ». IEEE.TRANSACTIONS ON MAGNETICS, vol.33.No.2.March 1997.

[11]: J.P.NOUGIER.

« Méthode de calcul numérique ».Edition MASSON,1991.

[12] : S.SOUALHI

« Modélisation des phénomènes électromagnétiques par la méthode des différences finies : application au chauffage par induction ».Thèse de Magister en génie électrique , université de Batna 1999.

[13]: G.DHATT et G.TOUZOT.

« Une présentation de la méthode des éléments finis ». Collection université de Compiègne. deuxième édition ,1984 .

[14] : N.PISKONOV.

« Calcul différentiel et integral »tome1.Edition Mir ,MOSCOU,1980.

[15]: OSZKAR BIRO et KURT PREIS.

« On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three dimensional eddy currents ». IEEE. TRANSACTIONS ON MAGNETICS .vol 25.No.4.july 1989-page 3155-

[16] : B. FELLA.

« Etude, modelisation et commande optimale d'un système de chauffage par induction de pièces métalliques ».Thèse de Magister en génie électrique , Université de Bejaia 1996.

[17] : MOHAND MOKHTARI et ABDELHALIM MESBAH.

« Apprendre et maîtriser MATLAB » Edition springer 1997.

[18] : AMMAR TIBOUCHE.

« Contribution à la modélisation analytico - numérique de systèmes magnétothermiques axisymétriques. ». Thèse de magister ,génie électrique .Centre universitaire de Bejaia.

[19] : A. TOURAINÉ.

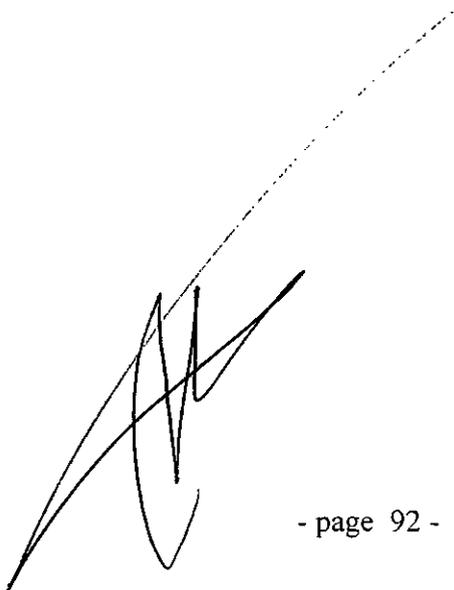
« Chauffage par induction électromagnétique ». Technique de l'ingénieur .D5020.1988

[20] : R.LELEU

« Transferts de chaleur ». Technique de l'ingénieur .J 1080.1988

[21] : D.TRICHET

« Contribution à la modelisation 3D d'un système de chauffage par induction par la méthode mixte circuits couplés-differences finies », Rapport de DEA d'électronique, Université de Nantes, 1995

A large, stylized handwritten signature in black ink, consisting of several overlapping loops and a long horizontal stroke extending to the right.