

9/94

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DES UNIVERSITES ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département : GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

المدرسة الوطنية المتعددة الفتيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Thème

ETUDE DE LA SOUFFLERIE A CHOC
ET ELABORATION DE LOGICIELS DE
DIMENSIONNEMENT ET DE
SIMULATION

Proposé par :

Mr M. BENBRAIKA

Etudié par :

Mr H. MAHIOU

Mr H. I. SOUAMI

Dirigé par :

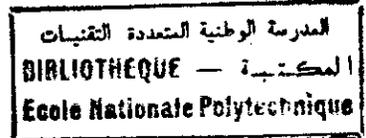
Mr M. BENBRAIKA

PROMOTION

JUILLET 1994

E.N.P. 10, Avenue Hacen BADI El - Harrach. ALGER

DEDICACES



A mes très chers parents

Pour tous les sacrifices consentis, sans lesquels ce travail n'aurait pas vu le jour.

A toute ma famille.

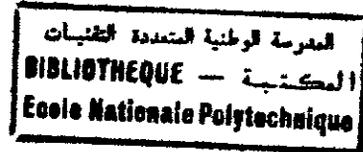
A mon meilleur ami *Hamed*, auprès duquel j'ai trouvé entente et lié amitié.

A toute la famille *SOUAMI*.

A tous mes amis.

Puissent - ils trouver un humble témoignage de ma profonde gratitude.

H. MAHIU



Remerciements

Nous voudrions exprimer notre gratitude à notre promoteur *M. BENBRAIKA* pour son aide permanente et son encouragement qu'il nous a prodigué durant tout ce travail.

Nous saisissons cette opportunité, pour exprimer nos remerciements à *Pr. A. GAHMOUSSE* pour ces précieux conseils et critiques.

Nous tenons aussi à exprimer nos remerciements les plus sincères à *Dr. C. BENMAHREZ* pour toute l'aide qu'il nous a offerte.

Que *M. H. LARAB* trouve ici l'expression de notre profonde gratitude pour toute son aide et pour le temps précieux qu'il nous a consacré à l'élaboration de ce travail.

Nos remerciements vont également à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation.

Nos remerciements s'adressent aussi à tous les membres du jury pour nous avoir honoré en acceptant de jugé ce modeste travail.

Enfin, que tous ceux, qui de près ou de loin, ont participé à l'élaboration de ce travail trouvent ici l'expression de nos meilleurs remerciements.

Sujet: *ETUDE DE LA SOUFFLERIE A CHOC ET ELABORATION DE LOGICIELS DE DIMENSIONNEMENT ET DE SIMULATION.*

Résumé:

Notre travail s'insère dans le cadre de la réalisation d'une soufflerie à choc. Dans un premier lieu, nous nous sommes intéressés au tube à choc pour en tirer les relations donnant les paramètres dynamiques et thermodynamiques initiaux pour la réalisation des conditions d'expérimentation souhaitées (calcul des paramètres pour les cas de gaz parfait). Par la suite nous avons établi une méthode numérique du tracé du diagramme d'onde permettant ainsi de donner les temps d'essais maximaux disponibles pour réaliser l'expérimentation. En second lieu, nous avons abordé le dimensionnement de tuyères supersoniques avec effets de haute température, en étudiant les deux types de tuyères nommées tuyère courbée et tuyère conique. Ces dernières assurent le nombre de Mach d'essai avec un écoulement parallèle à leur sortie. Un module de calcul des couches limites dans le tube à choc et de la tuyère est développé et les résultats satisfaisants sont présentés dans ce travail.

Subject: *STUDY OF THE SHOCK TUNNEL AND ELABORATION OF DIMENSIONING AND SIMULATION SOFTWARE'S*

Summary:

The present work is part of an overall project for the design and production of shock tunnel. In the first part of this work, the dynamical and thermodynamical parameters necessary to the realisation of the wished experimental conditions are studied. A numerical method for the plotting of wave diagram is established by the Authors. This method enables the user to establish the maximum test time available to conduct the experience. In the second part, the dimensioning of supersonic nozzles with high temperature effects is studied. Particular interest is given to both the curved and the conical nozzles which insure the necessary Mach number for the experiments with parallel output flow. A software for computing the boundary layers in the shock tube and the nozzle is presented with satisfactory results.

ملخص: دراسة نفثة الصدمات مع إنجاز برنامج تحديد

يندرج هذا البحث في إطار إنجاز نفثة فوق الصوتية. فركزنا في أول بحثنا على دراسة أنبوب الصدمات حتى نستخلص العلاقات التي تعطينا الحالة ديناميكية والترموديناميكية قصد توفير الشروط اللازمة و المطلوبة للقيام بالتجارب حسب المؤشرات في حالة الغاز التام (parfait). بعد ذلك أنجزنا منها حسابيا لتخطيط الرسم البياني لأموج الماخ المتواجدة بالأنبوب، يعطينا أطول وقت ممكن لإنجاز التجربة. ثم تناولنا قياس الناشر الفوق الصوتي عند درجات الحرارة المرتفعة و درسنا الناشر على نوعيه و هما الناشر المنحني و الناشر المخروطي المحققان لعدد الماخ التجريبي مع انسياب متوازي عند المخرج . و في الأخير أتمنا بحساب سمك طبقات اللزوجة في كل تجهيز (الأنبوب و الناشر).

SOMMAIRE:

- Introduction générale.

Chapitre 1: *Notions fondamentales.*

1-1- Propriétés des ondes de compression et de détente.	1
1-2- Tube à choc, définition et notation.	3
1-3- Tuyère, définition et notation.	

Chapitre 2: *Méthode des caractéristiques.*

2-1- Introduction.	4
2-2- Ecoulement supersonique dans un conduit incliné.	4
2-3- Conditions d'utilisation.	6
2-4- Equations de compatibilité.	7
2-5- Méthode des caractéristiques dans le tube à choc.	8
2-6- Conclusion.	11

Chapitre 3: *Equations d'écoulement dans le tube à choc.*

3-1- Introduction.	12
3-2- Paramètres derrière l'onde de choc incidente.	12
3-3- Relation entre l'onde de choc incidente et le rapport de pression de part et d'autre du diaphragme.	16
3-4- Onde de choc réfléchie.	19
3-4-1- Onde de choc totalement réfléchie.	19
3-4-2- Onde de choc partiellement réfléchie.	22
3-5- Conclusion.	25

Chapitre 4: *Diagramme (t,x) et temps d'essais.*

4-1- Introduction.	26
4-2- Interêt du diagramme (t,x).	26
4-3- Traçage du diagramme (t,x).	27
4-3-1- Traçage de l'éventail d'expansion.	27
4-3-2- Traçage complet du diagramme.	33
4-4- Calcul des temps d'essais dans le tube à choc.	33
4-5- Disposition optimale des longueurs.	37
4-6- Conclusion	38

Chapitre 5: *Couche limite dans le tube à choc.*

5-1- Introduction.	39
5-2- Couche limite de choc.	39
5-2-1- Système de coordonnées.	39
5-2-2- Equations de la couche limite.	41
5-2-3- Transformations des équations de base.	41
5-2-4- Résolution numérique.	46
5-2-5- Profil de la couche limite.	46
5-3- Effets de la couche limite.	48
5-4- Conclusion	48

NOTATIONS

Chapitre 6: *Dimensionnement du divergent supersonique.*

6-1- Introduction.	49
6-2- Méthode de Busemann.	49
6-3- Equations de base de l'écoulement dans divergent supersonique.	50
6-4- Résolution et mise en forme du problème.	50
6-4-1- Hypothèses de départ.	51
6-4-2- Mise en forme des équations de l'écoulement.	51
6-5- Conditions au col.	57
6-6- Calcul de la déviation maximale et distribution des déviations à la paroi.	59
6-6-1- Calcul de la déviation maximale de la paroi.	59
6-6-2- Déviation à la paroi.	60
6-7- Détermination des caractéristiques de l'écoulement.	63
6-8- Calcul des caractéristiques thermodynamiques.	65
6-9- Calcul de la longueur de la tuyère.	65
6-10- Méthode de Puckett.	68
6-11- Conclusion.	69



Chapitre 7: *Calcul de la couche limite dans le divergent.*

7-1- Introduction.	70
7-2- Conditions initiales sur l'écoulement.	70
7-3- Equations de base de la couche limite.	72
7-4- Modélisation et mise en forme des équations de quantité de mouvement et d'énergie.	73
7-5- Simplification des équations intégrales.	76

7-6- Résolution des équations intégrales.

7-7- Conclusion.

81

Chapitre 8 *Résultats et commentaires.*

8-1- Introduction.

82

8-2- Première famille d'expérimentation.

82

8-3- Deuxième famille d'expérimentation.

83

8-4- Commentaires.

85

8-5- Conclusion.

87

- Organigramme.

- Conclusion.

88

- Annexes.

Notations

<u>Symbole</u>	<u>Signification</u>
a	Vitesse du son.
a_i, b_i, c_i	Coefficient des polynômes de $C_p(i=1)$ et $\gamma(i=2)$
C_f	Coefficient de frottement visqueux à la paroi.
C_p	Chaleur spécifique à pression constante.
f	Fonction de similarité.
k	Coefficient de polytropie.
L	Longueur.
M	Nombre de Mach.
m	Masse molaire.
P	Pression.
Pr	Nombre de Prandtl.
q	Quantité de chaleur.
r	Rayon du divergent.
S	Section.
s	Entropie.
T	Température.
t	Temps
u,v	Vitesses selon les axes (ox) et (oy) respectivement
V	Module de Vitesse.
x,y	Coordonnées relatives au repère (o,x,y).

lettres grecs

Signification

α	Diffusivité thermique.
β	Angle de Mach.
δ	Epaisseur de couche limite.
ξ, η	Lignes caractéristiques.
γ	Rapport des chaleurs spécifiques.
ν	Viscosité dynamique.
ψ	Fonction (ligne) de courant.
ρ	Masse volumique.
τ	Contrainte de cisaillement.
θ	Angle de déviation.

Indices

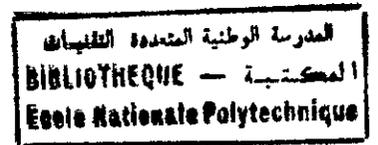
Signification

1 à 5	Relatifs aux zones dans le tube à choc.
ij	Rapport des paramètres des zones i et j.
s	Relatif à l'onde de choc incidente.
r	Relatif à l'onde de choc réfléchie..
p	Relatif à l'onde P.
q	Relatif à l'onde Q.
w	Relatif à la paroi
w,i	Relatif à la paroi adiabatique
e	Ecoulement non perturbé par l'effet de viscosité.
0	Relatif au conditions génératrices.

Abréviation

Signification

(S)	Onde de choc incidente.
(S.R)	Onde de choc réfléchi.
(C.S)	Contact surface.
(Qt)	Onde de queue.
(Qh)	Onde de tête.
(G.P)	Gaz parfait.
(G.R)	Gaz réel.



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE

Introduction:

L'homme, curieux par essence, a toujours cherché à comprendre les mystères de notre univers et les lois qui le régissent.

Avide de connaissance, il mena des investigations multiples dans tous les domaines. Il découvrit alors des richesses diverses et les potentialités énormes de notre planète. Ambitieux, il a cherché à les soumettre à son service pour s'assurer une vie meilleure.

C'est ainsi que naquirent des sciences nouvelles de plus en plus exactes, des technologies de plus en plus avancées et des applications constamment évolutives nous faisant traverser des âges à une allure fulgurante.

Une ère nouvelle est née et avec elle la communication, la rapidité, la fiabilité et la précision.

L'aérodynamique est l'une des sciences de l'ère nouvelle. Science s'intéressant aux phénomènes accompagnant tout mouvement entre un corps et le gaz dans lequel il baigne. De ce fait, elle est le fondement de tout développement dans l'aérospatiale (applications civiles et militaires).

La nécessité de simuler les vols aériens à pousser au développement de dispositif capable de réunir des conditions proches de la réalité : les souffleries. Ces conditions sont cependant parfois difficiles à atteindre dans des souffleries conventionnelles (température et nombre de Mach élevé, etc.). Pour palier à ce manque, des souffleries ont été développées.

La soufflerie à choc est un outil de simulation de modèle, qui permet d'obtenir des conditions extrêmes d'utilisation d'engins tel les avions ou les navettes, mais pour des durées de temps relativement courtes. La soufflerie est constituée essentiellement d'un tube à choc combiné ou non à une tuyère supersonique. Le premier élément de cette soufflerie permet de générer l'écoulement à haute température tandis que l'autre partie (le divergent supersonique) permet d'atteindre des nombres de Mach très élevés. Une fois ces conditions réunies le modèle est mis dans un réservoir d'essai, où le gaz sortant de la tuyère y débouche. Outre la simulation à haute température et à un nombre de Mach élevé, ces souffleries présentent d'autres avantages, parmi eux :

- L'échauffement s'effectue très rapidement et la haute température se réalise de manière homogène et sur un grand volume.
- Les observations peuvent s'effectuer soit dans un gaz au repos soit dans un gaz en mouvement rapide.
- La tuyère ayant un tracé optimal, permet d'obtenir un écoulement parallèle et uniforme à sa sortie tout en garantissant le nombre de Mach voulu.

Comme tout outil de travail la soufflerie à choc présente quelques inconvénients dont :

- une durée d'écoulement uniforme relativement petite, nécessitant l'utilisation de moyens de mesures très poussés.
- une grande influence des effets de gaz réel (viscosité, ionisation, etc.) sur les paramètres de l'écoulement (temps d'essais, pression, nombre de Mach) ce qui impose une maîtrise complète de ces phénomènes.

Pour l'étude de la soufflerie à choc, il est donc nécessaire d'introduire des notions fondamentales de gazodynamique que l'on verra dans le premier chapitre. Dans le second chapitre nous présenterons la méthode des caractéristiques et ses fondements physiques, puis nous montrerons ces applications à notre étude.

Les équations régissant l'écoulement instationnaire dans le tube à choc sont introduites au troisième chapitre. Nous discuterons, au quatrième chapitre, des possibilités d'utilisation du tube à choc pour effectuer des essais et présenterons le calcul des temps d'essais. Dans le cinquième chapitre, nous introduirons la procédure de calcul de la couche limite dans le tube à choc, sous certaines hypothèses.

Au sixième chapitre, nous présenterons les méthodes de dimensionnement d'une tuyère supersonique avec effet de haute température en utilisant la méthode des caractéristiques. Dans le septième chapitre nous introduirons les effets de viscosité sur les écoulements supersoniques dans les tuyères pour apporter, par la suite, une correction à la paroi du divergent.

Dans le huitième chapitre nous présenterons les résultats obtenus commentés en concluant sur les possibilités d'une optimisation des paramètres de la soufflerie à choc.

CHAPITRE 1

NOTIONS FONDAMENTALES

1-1 Propriétés des ondes de compression et de détente:

Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous allons rappeler dans ce chapitre les notions fondamentales de gazodynamiques nécessaires à la compréhension des prochains chapitres. Nous présentons en particuliers ici un rappel sur les propriétés des ondes de compression et de détente en considérant le mouvement d'un piston dans un cylindre de longueur infinie. Nous supposons que le piston est capable d'accélérer le gaz devant lui jusqu'à la vitesse du son par petits incréments dv . La figure (1-1) décrit les différentes étapes de détente et de compression.

La première augmentation dv à partir du repos cause une légère onde de compression qui se propage dans le gaz à la vitesse du son (a). Le gaz entre le piston et le front de l'onde de compression a été comprimé uniformément et adiabatiquement et a acquis la vitesse dv . Une seconde onde de compression est envoyée dans le gaz quand le piston acquiert une augmentation de vitesse dv . La seconde onde se propage dans le gaz préalablement chauffé par la première onde de compression. La seconde onde se déplace donc à une vitesse ($a+da$), et est à la poursuite de la première onde. Après plusieurs augmentations, le piston atteint la vitesse finale V . A ce moment, une série d'ondes de compression, à intensités croissantes, existe entre l'onde initiale et le piston. Comme ces ondes de compression traversent le gaz à la vitesse locale du son (a), elles le chauffent légèrement à chaque passage amenant la quantité (a) à s'accroître à partir du front de compression jusqu'au piston. Ce train d'ondes s'additionne pour former une onde se déplaçant à la vitesse U_s à travers laquelle existe de larges gradients de pression et de température.

On peut décrire de même les phénomènes physiques dans le tube en supposant que l'espace derrière le piston renferme un gaz. Le gaz subit une rapide expansion et par conséquent un refroidissement. A l'avant et à l'arrière du piston, deux types d'ondes sont produites. A l'avant du piston c'est une série d'ondes de compression dans le gaz qui sont générées. Le mouvement à l'arrière du piston crée lui une série d'ondes d'expansion qui se propage dans un gaz refroidi avec une diminution continue de la vitesse locale du son.

La région derrière le piston dans laquelle se propagent les pulsations d'expansion est appelée *éventail d'expansion*. Cette région est caractérisée par une chute de température et de pression bien en dessous des conditions initiales.

Ces fondements physiques sont utilisés pour décrire et étudier le tube à choc et les tuyères supersoniques dont nous présentons une description sommaire dans les sections suivantes.

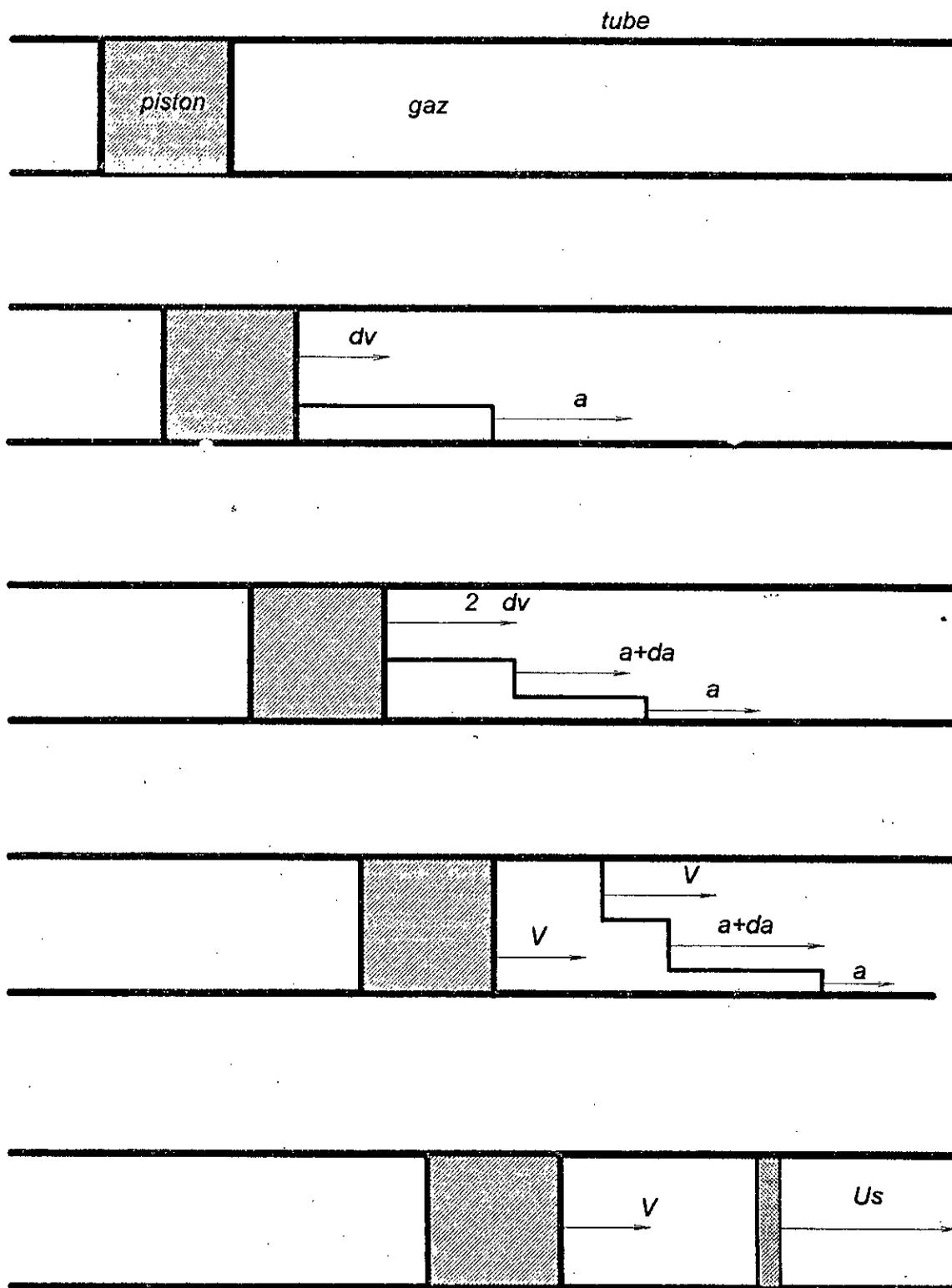


Figure 1-1 - Naissance de l'onde de choc

1-2 Tube à choc, définition et notation:

Dans la première partie de notre étude nous dimensionnons un tube à choc à section constante (forme simplifiée). C'est un dispositif dans lequel une onde de choc est produite par la rupture soudaine du diaphragme qui sépare un gaz à haute pression d'un gaz à basse pression (figure 1-2). Le côté haute pression contient le gaz moteur. Le gaz de travail occupe la partie basse pression.

Après éclatement du diaphragme, une série d'ondes de compression se forment dans le gaz de travail et se raidissent rapidement pour former une onde de choc. En même temps, une série d'ondes de détente se déplace dans le gaz moteur à la vitesse locale du son sous forme d'éventail d'expansion. Les gaz moteur et de travail sont séparés par la surface de contact qui se déplace derrière l'onde de choc.

Par soucis de clarté nous avons désigné par des indices chaque région (figures 1-2 à 1-4). La zone non perturbée du gaz de travail porte l'indice 1. La région entre l'onde de choc et la surface de contact est dénotée par l'indice 2. La région 3 se trouve entre la surface de contact et l'éventail d'expansion. Le gaz moteur dans les conditions initiales, occupe la zone 4. Si l'onde de choc subit une réflexion à l'extrémité du tube, il y a une autre augmentation de température et de pression. Cette région est dénotée par 5

1-3 Tuyère définition et notation:

La seconde partie de notre étude porte sur le dimensionnement d'une tuyère supersonique, c'est à dire le calcul des caractéristiques de l'écoulement et du profil optimal pour que cette dernière assure des conditions d'essais dans une section donnée. En effet la tuyère doit être conçue de manière à assurer un écoulement isentropique uniforme et parallèle à sa sortie tout en garantissant le nombre de Mach escompté. Nous considérons par la suite le cas des tuyères supersoniques qui sont généralement constituées de quatre parties (figure 1-6):

- a- Une zone d'écoulement subsonique, où le gaz est accéléré d'un nombre de Mach relativement faible à son entrée à un nombre de Mach de un à son *col* (section minimale de la tuyère).
- b- Le col qui est une zone où le gaz passe par une phase de transition du subsonique au supersonique.
- c- Une zone d'expansion initiale ou communément appelée *zone complexe*. Dans cette zone, le gaz est accéléré en subissant une déviation adéquate pour atteindre sur la distance la plus courte possible un nombre de Mach le plus près possible du nombre de Mach de sortie.
- d- Une zone d'expansion secondaire ou *zone simple* dans laquelle les déviations des lignes de courant seront corrigées pour devenir parallèles à l'axe de la tuyère en assurant le nombre de Mach exigé.



Fig. 1.2 Tube à choc avant éclatement de la membrane



Fig. 1.3 Tube à choc après éclatement de la membrane

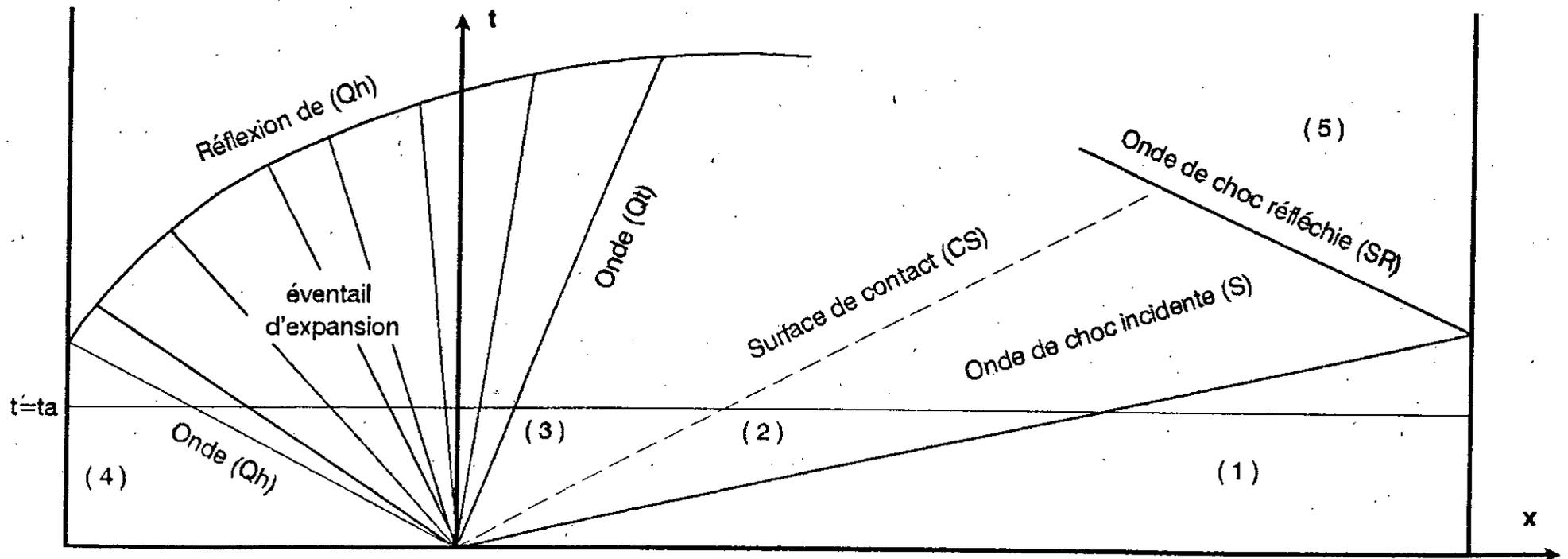


Fig. 1.4 Diagramme te mps-espace après éclatement de la membrane

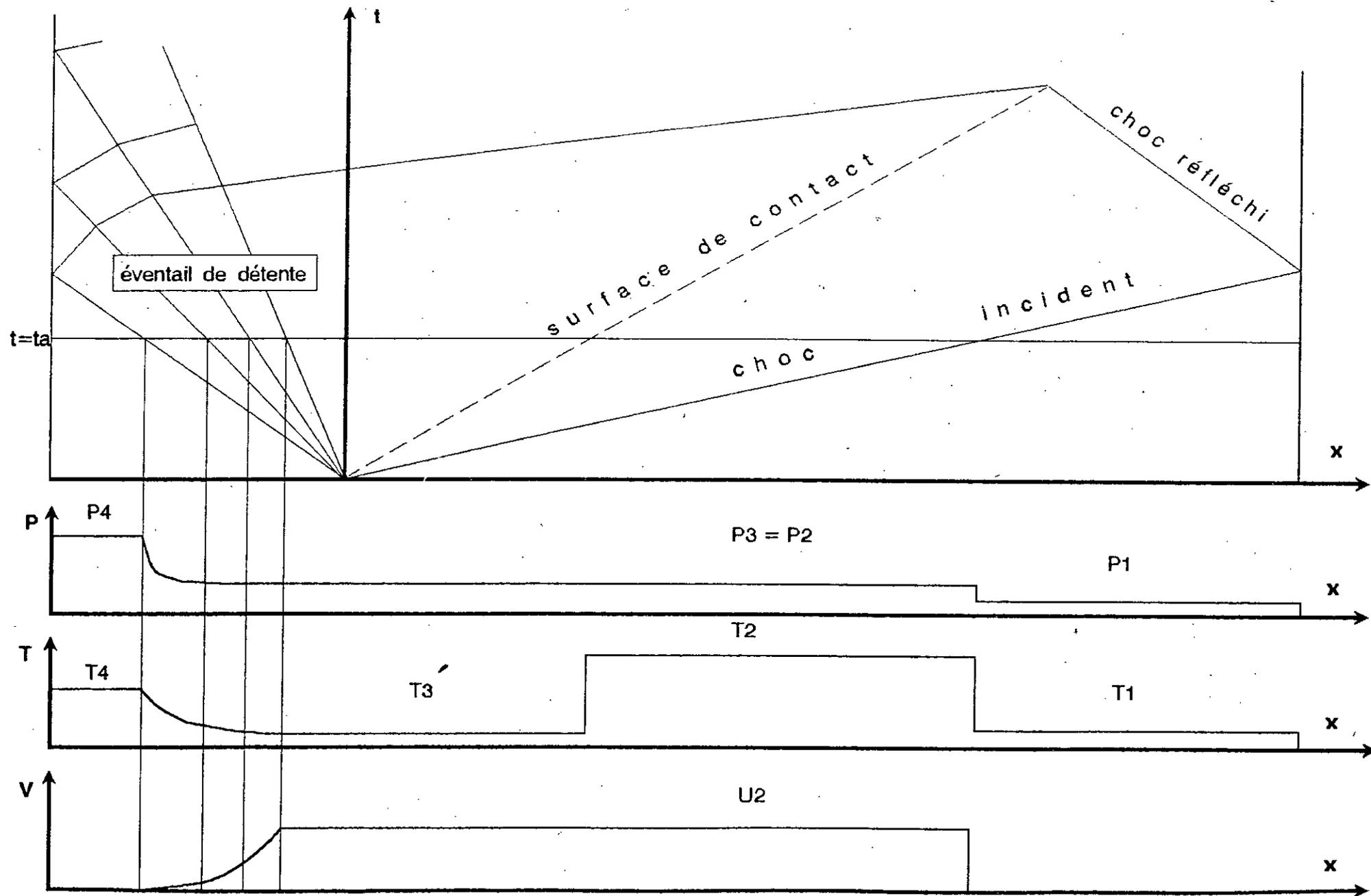


Fig. I-5 - Evolution des paramètres P , T et V dans le tube à choc

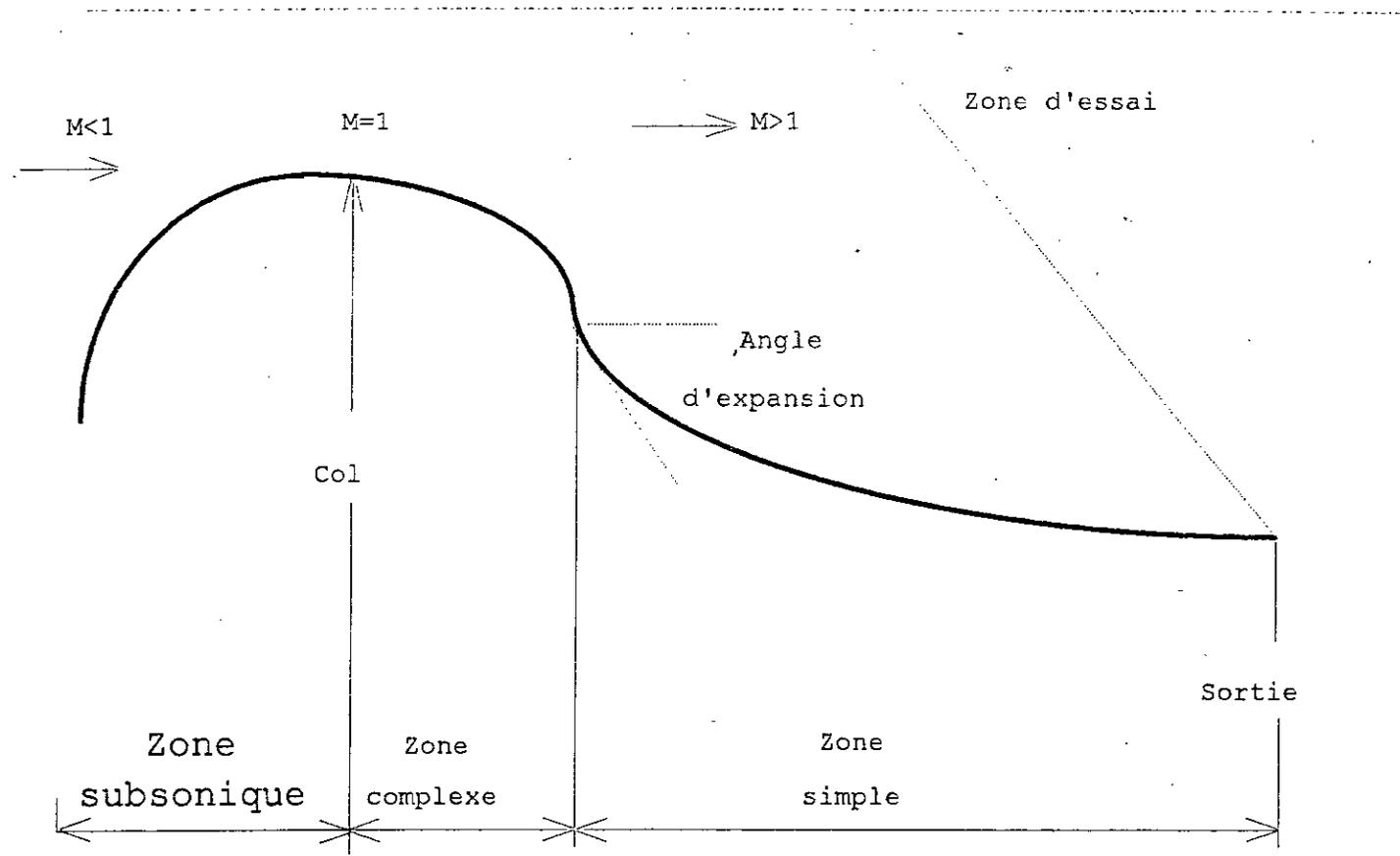


Figure1- 6 Définition des régions d'une tuyère.

CHAPITRE 2

METHODES DES CARACTERISTIQUES

2-1 Introduction :

Les équations décrivant la dynamique des gaz à l'intérieur du tube à choc et dans un divergent supersonique pour un écoulement non visqueux sont de type hyperbolique très complexes. L'absence de solution analytique nous conduit souvent à utiliser des méthodes numériques.

Nous proposons dans ce chapitre une méthode de résolution numérique d'équations différentielles du type hyperbolique. Cette méthode est appelée méthode des caractéristiques. Elle permet de transformer les équations hyperboliques en équations intégrables numériquement et ce grâce à sa formulation fondée sur la réalité physique de l'écoulement (lignes caractéristiques). L'avantage de cette méthode est la possibilité d'un dimensionnement du tube à choc et du divergent en s'imposant des conditions d'écoulement préalablement fixées. Elle permet de plus de calculer les caractéristiques dynamiques et thermodynamiques d'un écoulement de fluide non visqueux.

Nous devons distinguer deux applications totalement différentes de cette méthode l'une dans le tube à choc et l'autre dans le divergent supersonique. Dans le premier cas l'écoulement est considéré comme unidimensionnel instationnaire. Dans le second l'écoulement est par contre bidimensionnel stationnaire.

Nous nous intéresserons en premier lieu à l'application de cette méthode de résolution au second cas pour en tirer les relations nécessaires à la résolution du premier cas.

2-2 Écoulement supersonique dans un conduit incliné:

Considérant l'écoulement supersonique d'un gaz, parallèle et uniforme dans un conduit dont la paroi est inclinée (figure 2-1). Il existe un gradient de pression qui fait dévier les lignes de courant. et comme le fluide est supposé non visqueux, il glisse librement sur la paroi. Le fluide suivra ainsi la même inclinaison que celle de la paroi.

Supposons donc une inclinaison infinitésimale $d\theta$ (figure 2-1). $d\theta$ provoque un gradient de pression dP qui se propage le long d'une ligne de Mach (ξ ou η) dont l'angle de déviation est donné par la relation (2-1) [1].

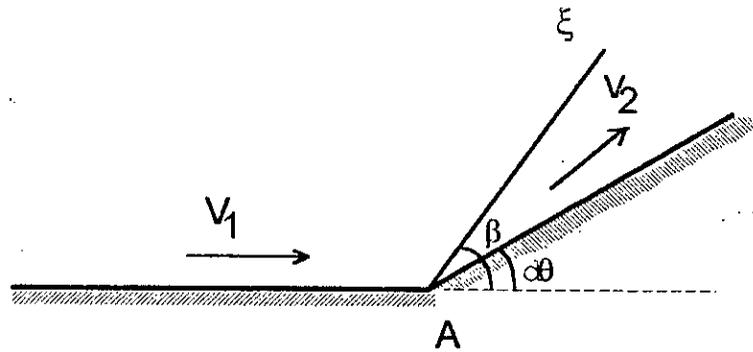


Figure 2-1 Illustration de la ligne de Mach

L'expression de l'angle de Mach β est donc

$$\beta = \text{Arcsin} \left(\frac{1}{M} \right) \quad (2-1)$$

Considérons une perturbation générée au point B (figure 2-2-a) dans un écoulement supersonique à vitesse V . La propagation de cette dernière se fera suivant un cercle dont le rayon croît proportionnellement au temps et vaut à un instant t : $(a \cdot t)$, (figure 2-2-b). Au cours de ce même temps, le centre du cercle B va se déplacer pour former une enveloppe de cercle (figure 2-2-c) délimitée par les deux lignes de Mach.

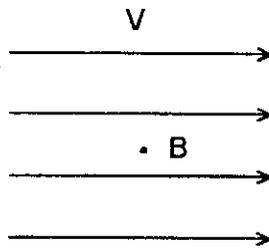


Figure 2-2 a

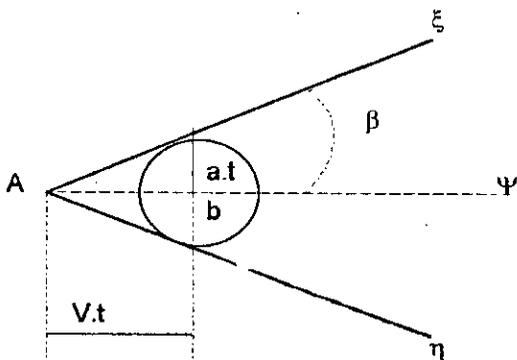


Figure 2-2 b

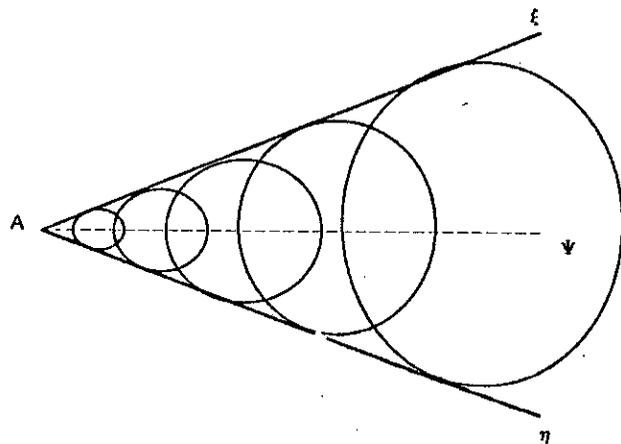


Figure 2-2 c

Figure 2-2 Génération d'une perturbation dans un écoulement supersonique

De ces conditions, nous calculons la tangente de l'angle β :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a \cdot t}{\sqrt{V^2 \cdot t^2 - a^2 \cdot t^2}} = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

l'équation (2-1) de l'angle de Mach devient :

$$\beta = \operatorname{Arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \right) \quad (2-2)$$

Si l'on considère deux lignes de Mach ξ et η générées dans un écoulement supersonique (figure 2-3), les propriétés du fluide, de part et d'autre de chaque ligne caractéristique, sont constantes et uniformes. Ainsi, dans une région telle que ABC ou AB'C', les propriétés du fluide sont constantes. La région ABC est appelée *zone d'influence* du point A de même la région AB'C' est appelée *zone de dépendance* de ce même point. Par conséquent la connaissance des propriétés du fluide le long d'une ligne de courant comme la paroi, serait suffisante pour déterminer les caractéristiques à l'intérieur de ces zones.

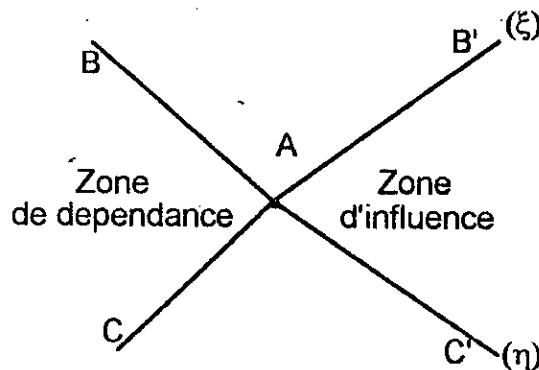


Figure 2-3 Définition des zones d'influence et de dépendance

2-3 Conditions d'utilisation de la méthode des caractéristiques :

Comme toute méthode numérique, la méthode des caractéristiques ne s'applique que sous certaines conditions qui sont au nombre de trois.

La première est que cette méthode ne s'applique qu'à des équations différentielles hyperboliques [2]. Pour que les équations décrivant le tube à choc et la tuyère soit de type hyperbolique, on doit s'imposer un nombre de Mach supérieur à l'unité. Ceci s'exprime par :

$$\frac{(U^2 + V^2)}{a^2} > 1$$

La seconde condition est que sur les lignes de Mach les vitesses soient continues.

La dernière condition concerne les paramètres de l'écoulement qui doivent vérifier les équations de compatibilité que nous présentons en section (2-4).

2-4 Equations de compatibilité:

Comme cité précédemment, nous avons vu que l'écoulement devait satisfaire à des conditions pour que la méthode des caractéristiques soit applicable, parmi elles figurent les conditions de compatibilité.

Pour établir les conditions de compatibilité, on considère une perturbation générée au point A. Nous présentons les déviations des lignes de courant en ce point A dans le repère cartésien en figure (2-4 a), et dans le plan hodographe en figure 2-4 b.

Dans le repère hodographe, figure (2-4-b), on peut établir les relations suivantes :

$$dV = V \cdot d\theta \quad (2-3)$$

$$dU = dV \quad (2-4)$$

On en déduit l'expression de la tangente de l'angle de Mach :

$$-\frac{dU}{dV} = \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (2-5)$$

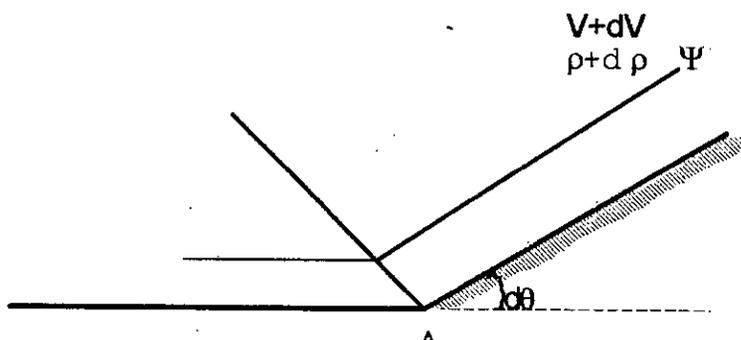


Figure 2-4 a : représentation de la déviation dans le repère cartésien.

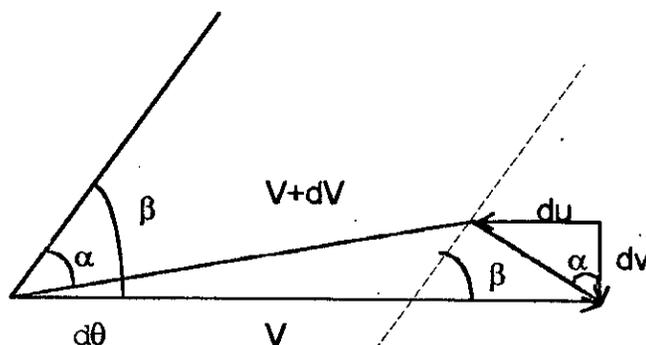


Figure 2-4 b : Hodographe de la vitesse en amont et en aval d'une perturbation

En introduisant les relations (2-3), (2-4) dans (2-5) on obtient:

$$-\frac{dV}{V} = \frac{d\theta}{\sqrt{M^2 - 1}} = \operatorname{tg} \beta \cdot d\theta \quad (2-6)$$

d'où la relation différentielle qui lie l'angle θ à la vitesse V :

$$d\theta = -\frac{dV}{V} \cdot \sqrt{M^2 - 1} \quad (2-7)$$

En introduisant la fonction adimensionnelle de Prandtl-Meyer (Ω) [2]

$$\Omega = \int \cot g \beta \cdot \frac{dV}{V} \quad (2-8)$$

nous obtenons les équations de compatibilité :

$$\Omega - \theta = Q \quad (2-9)$$

$$\Omega + \theta = P \quad (2-10)$$

Les deux constantes Q et P sont appelées *invariants de Riemann* [2].

Les relations de compatibilité sont généralement données sous forme différentielle car, comme nous allons le voir dans les chapitres suivants, le calcul intégral n'est pas aisé. Les équations de compatibilité nous sont cependant nécessaires pour la détermination des caractéristiques de l'écoulement aussi bien dans le tube à choc que dans le divergent supersonique.

2-5 Méthode des caractéristiques dans le tube à choc:

Nous venons d'exposer la méthode des caractéristiques dans le cas bidimensionnel stationnaire et sa grande utilité dans la détermination des caractéristiques d'écoulements supersoniques. Dans l'application de cette méthode pour le tube à choc, il est nécessaire de considérer l'écoulement non pas bidimensionnel stationnaire mais unidimensionnel instationnaire du fait de la variation des paramètres d'écoulement au cours du temps. Les variables à manipuler ne sont plus x, y mais temps - espace (t, x).

L'application de la méthode des caractéristiques est surtout intéressante dans l'éventail de détente se situant dans le tube moteur figure (1-4). Les équations de base régissant de tels écoulements sont:

- Equation de continuité.
- Equation de quantité de mouvement.
- Equation d'énergie.
- Equation d'état.

La manipulation de ces équations conduisent au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2}{\gamma-1} \cdot a+U \right) + (U+a) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{\gamma-1} \cdot a+U \right) = \frac{a}{r} \cdot \left(\frac{Ds}{Dt} + \frac{a}{\gamma} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2}{\gamma-1} \cdot a-U \right) + (U-a) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{\gamma-1} \cdot a-U \right) = \frac{a}{r} \cdot \left(\frac{Ds}{Dt} - \frac{a}{\gamma} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (2-11)$$

De même que dans le repère cartésien, il existe dans le diagramme (t,x), en figure (1-4), des lignes caractéristiques dans l'éventail de détente. Le long de ces lignes les propriétés du fluide sont continues [3].

Le membre de gauche du système (2-11) représente la dérivée du paramètre $\left(\frac{2}{\gamma-1} \cdot a \pm U \right)$ dans la direction des lignes caractéristiques.

Introduisons alors les dérivées qui décrivent les variations dans le temps que voit un observateur, se déplaçant à une vitesse $(U+a)$ ou $(U-a)$, du fait des variations dans le temps $\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$ en un point donné x et des variations dans l'espace $\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ à un temps t donné.

$$\begin{cases} \frac{\partial_+}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + (U+a) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial_-}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + (U-a) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

Par ailleurs les invariants de Riemann dans le cas unidimensionnel instationnaire sont défini par [4] :

$$\begin{cases} P = \frac{2}{\gamma-1} \cdot a+U \\ Q = \frac{2}{\gamma-1} \cdot a-U \end{cases} \quad (2-12)$$

En introduisant les dérivées temporelles et les invariants de Riemann, P et Q , le système d'équations (2-11) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial_+ P}{\partial t} = \frac{a}{r} \left(\frac{Ds}{Dt} + \frac{a}{\gamma} \frac{\partial s}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial_- Q}{\partial t} = \frac{a}{r} \left(\frac{Ds}{Dt} - \frac{a}{\gamma} \frac{\partial s}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (2-13)$$

Dans le cas particulier d'un *écoulement non permanent adiabatique*, le système (2-13) se simplifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial_+ P}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial_- Q}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

D'où les paramètres P et Q de Riemann deviennent constants et ont pour pente respectivement $(U+a)$ et $(U-a)$ soit:

$$\begin{aligned} P = \text{cte} & \qquad \frac{dx}{dt} = U + a \\ Q = \text{cte} & \qquad \frac{dx}{dt} = U - a \end{aligned} \quad (2-14)$$

Dans le cas où *l'écoulement est stationnaire*, les lignes caractéristiques forment une famille de droites parallèles (figure 2-5). Mais dans le cas instationnaire, ces lignes convergent ou divergent selon qu'il s'agisse, respectivement, d'ondes de compression ou d'expansion (figure 2-6 et 2-7).

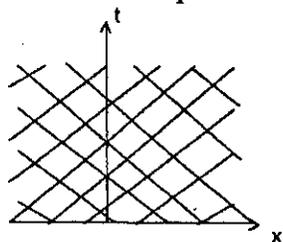


Figure 2-5

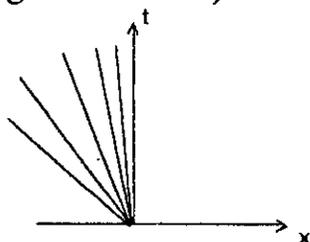


Figure 2-6

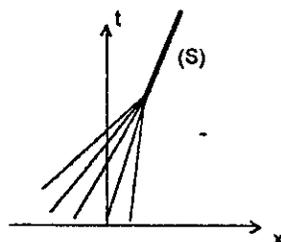


Figure 2-7

2-6 Conclusion:

Nous venons d'exposer de manière succincte la méthode des caractéristiques et ses applications à des écoulements bidimensionnels stationnaires et unidimensionnels instationnaires.

L'introduction du principe de lignes de Mach nous permet de mettre au point des techniques de résolution. En effet, le principe de propagation de la perturbation suivant une ligne caractéristique et la création de zone d'influence, nous permettent de déterminer les caractéristiques de l'écoulement dans la soufflerie à choc.

Nous avons présenté les équations de compatibilité et mis en évidence leur utilité pour le calcul des paramètres d'écoulement dans des régions délimitées par les lignes caractéristiques et ce pour les deux cas d'écoulement que nous traitons. Nous présentons le calcul des paramètres d'écoulement dans le cas du tube à choc au chapitre suivant.

CHAPITRE 3

*EQUATIONS D'ECOULEMENT
DANS LE TUBE A CHOC*

3-1 Introduction:

Nous présentons dans ce chapitre les développements et équations qui permettent de définir analytiquement les paramètres dynamiques et thermodynamiques d'un gaz quelconque à l'intérieur du tube à choc, derrière l'onde de choc incidente et réfléchi.

3-2 Paramètres derrière l'onde de choc incidente:

Considérons le tube à choc (figure 3-1), où U_s est la vitesse de l'onde de choc incidente par rapport à un référentiel lié au tube, et U_2 est la vitesse du gaz induit derrière l'onde de choc.

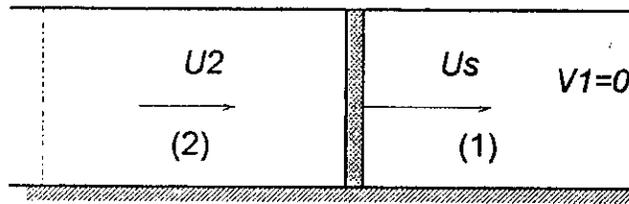


figure 3-1 - Coordonnées fixées au tube

Pour se ramener au cas d'une onde de choc stationnaire, il est préférable de considérer le mouvement du gaz par rapport à l'onde de choc (figure 3-2). Le gaz traverse en sens inverse l'onde de choc à une vitesse relative U_1 et la quitte à la vitesse relative U_2' .

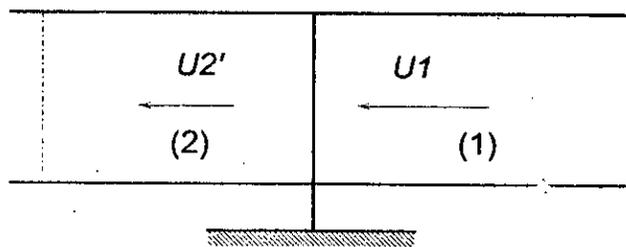


Figure 3-2 - Coordonnées fixées à l'onde de choc

Nous pouvons exprimer alors les relations entre vitesses :

$$U_1 = U_s \quad (3-1)$$

$$U_2' = U_s - U_2 \quad (3-2)$$

Les équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie pour le gaz traversant l'onde de choc sont alors :

$$\rho_1 \cdot U_1 = \rho_2 \cdot U_2 \quad (3-3)$$

$$P_1 + \rho_1 \cdot U_1^2 = P_2 + \rho_2 \cdot U_2^2 \quad (3-4)$$

$$h_1 + U_1^2 / 2 = h_2 + U_2^2 / 2 \quad (3-5)$$

En considérant de plus l'hypothèse de gaz parfait :

$$P = \rho \cdot r \cdot T \quad (3-6)$$

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{cste} \quad (3-7)$$

$$h = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} \quad (3-8)$$

et en combinant les équations (3-5) et (3-8) on aboutit à l'expression suivante :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} \cdot U_1^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} \cdot U_2^2 \quad (3-9)$$

En introduisant de plus les équations (3-3), (3-4) et (3-5), l'expression (3-9) devient :

$$\frac{\rho_1 \cdot P_2 - \rho_2 \cdot P_1}{\rho_2 \cdot P_2 - \rho_1 \cdot P_1} = \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1} = \alpha_1 \quad (3-10)$$

où les vitesses U_1 et U_2 n'apparaissent plus. Nous en déduisons donc les rapports des pressions P_1 et P_2 , et des masses volumiques des régions (1) et (2):

$$P_{21} = \frac{1 - \alpha_1 \cdot \rho_{21}}{\rho_{12} - \alpha_1} \quad (3-11)$$

$$\rho_{21} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{\alpha_1 + P_{21}}{\alpha_1 \cdot P_{21} + 1} \quad (3-12)$$

Et en considérant les équations (3-3) et (3-4), elle devient :

$$P_{21} = 1 + \frac{\rho_1}{P_1} \cdot (1 - \rho_{12}) \cdot U_1^2 \quad (3-13)$$

En utilisant la définition du nombre de Mach;

$$M_s = \frac{U_s}{a_1} \quad (3-14)$$

l'équation (3-13) s'exprime

$$P_{21} = 1 + \gamma_1 \cdot M_s^2 \cdot (1 - \rho_{12}) \quad (3-15)$$

En tenant compte de l'expression (3-12), nous obtenons le rapport des pressions :

$$P_{21} = \frac{2 \cdot \gamma_1 \cdot M_s^2 - (\gamma_1 - 1)}{(\gamma_1 + 1)} \quad (3-16)$$

A partir de l'équation (3-16), nous obtenons l'expression du rapport des masses volumiques :

$$\rho_{21} = \frac{(\gamma_1 + 1) \cdot M_s^2}{(\gamma_1 - 1) \cdot M_s^2 + 2} \quad (3-17)$$

L'équation (3-8) conduit:

$$h_{21} = T_{21} = P_{21} \cdot \rho_{12} \quad (3-18)$$

En injectant (3-16) et (3-17) dans (3-18), il découle:

$$T_{21} = \frac{(2 \cdot \gamma_1 \cdot M_s^2 - (\gamma_1 - 1)) \cdot ((\gamma_1 - 1) \cdot M_s^2 + 2)}{(\gamma_1 + 1)^2 \cdot M_s^2} \quad (3-19)$$

Les paramètres dynamiques sont déterminés en tenant compte des équations (3-3) et (3-4):

$$\rho_1 \cdot U_s = \rho_2 \cdot (U_s - U_2) \quad (3-20)$$

$$P_1 + \rho_1 \cdot U_s^2 = P_2 + \rho_2 \cdot (U_s - U_2)^2 \quad (3-21)$$

ou encore :

$$U_s = \sqrt{\frac{\rho_{21} \cdot (P_2 - P_1)}{(\rho_2 - \rho_1)}} \quad (3-22)$$

$$U_2 = \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1) \cdot (P_2 - P_1)}{(\rho_2 \cdot \rho_1)}} \quad (3-23)$$

$$\frac{U_s}{U_2} = \frac{M_s}{U_{21}} = \frac{\rho_{21}}{\rho_{21} - 1} \quad (3-24)$$

Avec $U_{21} = \frac{U_2}{a_1}$

De l'équation (3-24), nous exprimons:

$$\rho_{21} = \frac{U_s}{U_s - U_2} = \frac{M_s}{M_s - U_{21}} \quad (3-25)$$

$$P_{21} = 1 + \gamma_1 \cdot M_s \cdot U_{21} \quad (3-26)$$

D'où nous déduisons :

$$U_{21} = \frac{2}{(\gamma_1 + 1)} \cdot \left(\frac{M_s^2 - 1}{M_s} \right) \quad (3-27)$$

Le nombre de Mach de la zone (2) est par conséquent :

$$M_2 = U_2 / a_2 = U_{21} \cdot a_1 / a_2 \quad (3-28)$$

avec:

$$a_1 / a_2 = \sqrt{\left(\frac{T_1}{T_2} \right)} \quad (3-29)$$

Ainsi le nombre de Mach M_2 se met plutôt sous la forme suivante:

$$M_2 = \frac{M_s^2 - 1}{\left((\gamma_1 \cdot M_s^2 - \frac{(\gamma_1 - 1)}{2}) \cdot \left(\frac{(\gamma_1 - 1)}{2} \cdot M_s^2 - 1 \right) \right)^{1/2}} \quad (3-30)$$

Si les conditions initiales et le nombre de Mach de choc sont connus, les relations précédentes détermineront les paramètres thermodynamiques et dynamiques derrière l'onde de choc. Les paramètres P_{21} , ρ_{21} , T_{21} , U_{21} , a_{21} , M_2 nous seront très utiles car ils définissent les paramètres de la zone d'expérimentation.

Ces relations ne sont cependant exactes que pour les gaz parfaits ($\gamma = \text{cte}$). Elles ne sont qu'une approximation dans le cas où la température derrière l'onde de choc incidente devient supérieure à une température limite caractéristique du gaz. En effet, au-delà de cette température les effets d'ionisation et d'excitation électronique modifient ces paramètres. Ainsi, pour l'air, l'hydrogène et l'oxygène ces relations peuvent être utilisées jusqu'à une températures de (1000K). Par contre, pour l'argon la température limite est de (6000K) [5].

Pour remédier à cela, et comme première approximation, nous pouvons considérer que le rapport des chaleurs spécifiques (γ) est constant par tranche de température.

3-3 Relation entre l'onde de choc incidente et le rapport de pression de part et d'autre du diaphragme:

Les paramètres importants qui régissent l'intensité de l'onde de choc incidente sont les propriétés physiques des deux gaz, moteur et de travail, qui sont:

- la masse molaire.
- la température initiale.
- le rapport de pression de part et d'autre du diaphragme (P_{41}).

Nous allons dans ce qui suit mettre en évidence la relation liant M_s à P_{41} en tenant compte des différentes zones et caractéristiques du tube à choc.

D'abord, la détente à travers l'onde de raréfaction étant isentropique, la quantité $(\frac{2 \cdot a}{\gamma - 1} + U)$ est conservée entre les zones (3) et (4). Ainsi:

$$\frac{2 \cdot a_4}{\gamma_4 - 1} + U_4 = \frac{2 \cdot a_3}{\gamma_3 - 1} + U_3 \quad (3-31)$$

Par ailleurs, de part et d'autre de la surface de contact, les vitesses et les pressions doivent être égales puisqu'aucun écoulement n'a pris place : $U_3 = U_2$ et $P_3 = P_2$. De plus, U_4 est nulle car le gaz moteur est initialement au repos. Du fait que l'on soit en présence du même gaz dans la région (3) et (4) nous avons ($\gamma_3 = \gamma_4$). Ces considérations simplifient l'équation (3-31) qui devient:

$$\frac{2 \cdot a_4}{\gamma_4 - 1} = \frac{2 \cdot a_3}{\gamma_4 - 1} + U_3 \quad (3-32)$$

De l'hypothèse d'expansion isentropique, nous exprimons :

$$\frac{P_4}{P_3} = \left(\frac{T_4}{T_3} \right)^{\frac{\gamma_4}{\gamma_4 - 1}} \quad (3-33)$$

De plus :

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{a_4}{a_3} \right)^2 \quad (3-34)$$

Donc

$$P_{43} = (a_{43})^{\left(\frac{2 \cdot \gamma_4}{\gamma_4 - 1} \right)} = P_{42} \quad (3-35)$$

En combinant l'équation (3-27) et (3-31) nous obtenons:

$$\frac{2 \cdot a_4 / a_1}{\gamma_4 - 1} = \frac{2 \cdot a_3 / a_1}{\gamma_4 - 1} + \frac{2 \cdot (M_s^2 - 1)}{(\gamma_1 + 1) \cdot M_s} \quad (3-36)$$

ou encore en factorisant $\left(\frac{a_1}{a_4}\right)$:

$$\frac{a_3}{a_4} + \frac{a_1}{a_4} \cdot \left(\frac{\gamma_4 - 1}{\gamma_1 + 1}\right) \cdot \left(M_s - \frac{1}{M_s}\right) = 1 \quad (3-37)$$

Nous déduisons alors l'expression du rapport $\left(\frac{a_3}{a_4}\right)$ de l'équation (3-37):

$$\frac{a_3}{a_4} = 1 - \left(\frac{\gamma_4 - 1}{\gamma_1 + 1}\right) \cdot \frac{a_1}{a_4} \cdot \left(M_s - \frac{1}{M_s}\right) \quad (3-38)$$

En Injectant (3-38) dans (3-35) :

$$P_{43} = P_{42} = \left[1 - \left(\frac{\gamma_4 - 1}{\gamma_1 + 1}\right) \cdot \frac{a_1}{a_4} \cdot \left(M_s - \frac{1}{M_s}\right) \right]^{\left(\frac{2 \cdot \gamma_4}{1 - \gamma_4}\right)} \quad (3-39)$$

et en combinant (3-39) avec (3-16) nous aurons :

$$\frac{P_4}{P_1} = P_{43} \cdot P_{21} = \frac{\left(\frac{2 \cdot \gamma_1 \cdot M_s^2 + \gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1}\right)}{\left[1 - \left(\frac{\gamma_4 - 1}{\gamma_1 + 1}\right) \cdot \frac{a_1}{a_4} \cdot \left(M_s - \frac{1}{M_s}\right) \right]^{\left(\frac{2 \cdot \gamma_4}{\gamma_4 - 1}\right)}} \quad (3-40)$$

avec

$$\frac{a_1}{a_4} = \sqrt{\frac{\gamma_1 \cdot m_4 \cdot T_1}{\gamma_4 \cdot m_1 \cdot T_4}} \quad (3-41)$$

Nous remarquons, de l'expression (3-40), que le nombre de Mach de choc (M_s) croit avec l'augmentation du rapport de pression de part et d'autre du diaphragme (P_{41}) jusqu'à une valeur limite atteinte lorsque P_{41} tend vers l'infini [4]:

$$\lim_{P_{41} \rightarrow +\infty} M_s = \left(\frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_4 - 1} \right) \cdot \frac{a_4}{2 \cdot a_1} + \left[\left(\frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_4 - 1} \right) \cdot \frac{a_4}{2 \cdot a_1} + 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Lorsque le rapport $a_{41} = a_4/a_1$ est supérieur à l'unité ($a_{41} > 1$), cette expression au limite s'approxime par :

$$\lim_{P_{41} \rightarrow +\infty} M_s = \left(\frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_4 - 1} \right) \cdot \frac{a_4}{a_1}$$

Les hypothèses pour établir l'équation (3-40) qui sont:

- 1- Gaz parfait et $\gamma = \text{cste}$.
- 2- Ouverture instantanée du diaphragme.
- 3- Ecoulement unidimensionnel.

ne sont pas toujours vérifiées. Ainsi, pour les chocs faibles et moyens, les seconde et troisième hypothèses ne sont généralement pas respectées. Pour les chocs intenses c'est l'hypothèse de gaz parfait qui ne se vérifie plus.

De l'expression limite, lorsque a_{41} est supérieur à l'unité ($a_{41} > 1$), nous concluons que pour travailler avec des nombres de Mach de choc élevés, avec P_{41} fixe et en minimisant les coûts d'expérimentation, il faut :

- soit utiliser un gaz moteur léger et/ou un gaz de travail lourd ($m_4 > m_1$).
- soit chauffer le gaz moteur.

Une autre manière de produire des chocs intenses, est d'utiliser un tube à choc à section variable. Cette variation est monotone entre le tube moteur et le tube de travail [4] (figure 3-2a)

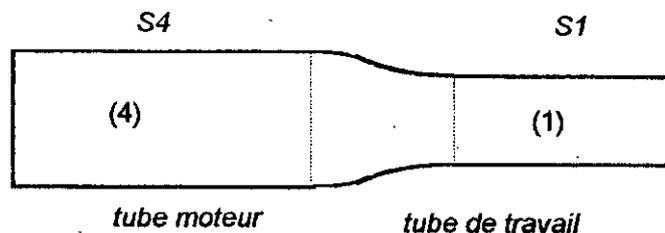


Figure 3-2a - Tube à choc à section variable

3-4 Onde de choc réfléchie:

Quand l'onde de choc incidente bute contre l'extrémité du tube à choc, elle est réfléchie dans le gaz qui a déjà été chauffé par le passage de celle-ci. Deux cas peuvent se présenter :

- soit l'onde de choc est totalement réfléchie.
- soit l'onde de choc est partiellement réfléchie.

Dans le premier cas, l'extrémité du tube est fermée et la vitesse des particules de gaz de la zone (5) devient, après réflexion, nulle. Cette zone sera utilisée, du fait des hautes pression et température derrière l'onde de choc réfléchie, pour la génération de conditions statiques à l'entrée d'un convergent-divergent.

Dans le second cas, le tube est percé d'un trou de section adéquate déterminée à partir des conditions d'expérimentation. Ceci permet d'obtenir une onde de choc partiellement réfléchie. En effet, l'onde laisserait derrière elle une importante zone d'expérimentation à température élevée et à nombre de Mach réduit.

Les relations qui déterminent les paramètres dynamiques et thermodynamiques derrière les deux cas d'onde de choc réfléchie, sont développées et présentées dans les sections suivantes.

3-4-1 Onde de choc totalement réfléchie:

Des équations de l'onde de choc réfléchie, on ne peut déterminer directement les paramètres derrière l'onde de choc en fonction des conditions initiales dans le tube. Nous allons donc d'abord déterminer les pression, température et masse volumique à partir des conditions derrière l'onde de choc incidente. Nous relierons par la suite ces éléments aux conditions initiales dans le tube.

Intéressons nous d'abord à l'onde de choc réfléchie qui se déplace vers la droite à vitesse constante (U_r) (figure 3-3). Pour déterminer les différents paramètres nous considérons que cette onde est stationnaire, que le gaz traverse cette onde à la vitesse U_2' et la quitte à la vitesse $U_3 = U_r - V_3$. Après la réflexion normale de l'onde de choc, la vitesse des particules de gaz, par rapport à un référentiel lié au tube, est nulle ($V_3=0$). Par conséquent :

$$U_3 = U_r \quad (3-42)$$

$$U_2' = U_2 + U_r \quad (3-43)$$

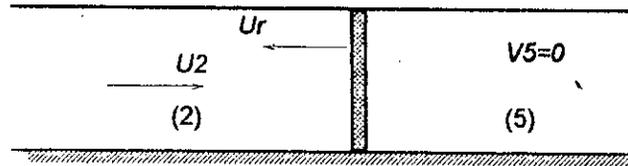


Figure 3-3 - Coordonnées fixées au tube

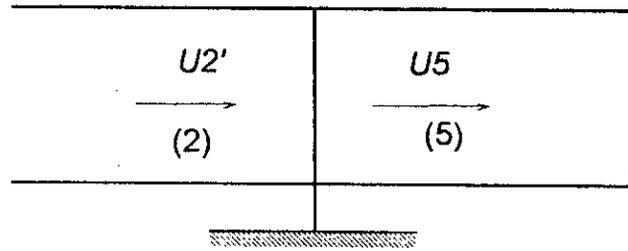


Figure 3-4 - Coordonnées fixées à l'onde de choc réfléchi

Le nombre de Mach réfléchi est défini par:

$$M_r = \frac{U_2'}{a_2} = \frac{U_r + U_2}{a_2} \quad (3-44)$$

Comme l'étude présentée en section (3-2), nous allons maintenant considéré les régions (2) et (5), en aval et en amont de l'onde de choc, réfléchi. Nous obtenons, de manière similaire, les équations qui lient les paramètres de la région (2) à ceux de la région (5).

$$P_{32} = \frac{2 \cdot \gamma_1 \cdot M_r^2 - (\gamma_1 - 1)}{(\gamma_1 + 1)} \quad (3-45)$$

$$T_{32} = \frac{(2 \cdot \gamma_1 \cdot M_r^2 - (\gamma_1 - 1)) \cdot ((\gamma_1 - 1) \cdot M_r^2 + 2)}{(\gamma_1 + 1)^2 \cdot M_r^2} \quad (3-46)$$

$$\rho_{32} = \frac{(\gamma_1 + 1) \cdot M_r^2}{(\gamma_1 - 1) \cdot M_r^2 + 2} \quad (3-47)$$

Connaissant les conditions dans la zone (2) (derrière l'onde de choc incidente), les équations (3-45), (3-46), et (3-47) permettent de déterminer les paramètres thermodynamiques derrière l'onde de choc réfléchi. Il nous reste donc à déterminer les paramètres dynamiques.

En utilisant les équations (3-26) (3-45) et (3-46) nous pouvons écrire le rapport de la vitesse de l'onde réfléchi à celle de l'onde de choc incidente comme suit:

$$\frac{U_r}{U_s} = \frac{2 + \left(\frac{2}{\gamma_1 - 1} \right) \cdot P_{12}}{\alpha_1 + P_{12}} \quad (3-48)$$

L'équation (3-44) se mettant sous la forme

$$M_r = M_2 + \frac{U_r}{U_s} \cdot M_s \cdot \frac{a_1}{a_2} \quad (3-49)$$

et en introduisant l'expression de (U_r/U_s) , tout en sachant que $a_{12} = \sqrt{T_{12}}$, nous obtenons finalement l'expression du nombre de Mach réfléchi (M_r) en fonction du nombre de Mach incident (M_s) dans le cas d'une réflexion totale:

$$M_r^2 = \left[\frac{(3 \cdot \gamma_1 - 1) \cdot M_s^2 - 2 \cdot (\gamma_1 - 1)}{(\gamma_1 - 1) \cdot M_s^2 + 2} \cdot (\gamma_1 + 1) + (\gamma_1 - 1) \right] \cdot \frac{1}{2 \cdot \gamma_1} \quad (3-50)$$

Nous connaissons donc maintenant les paramètres derrière l'onde de choc réfléchi en fonction de ceux induits derrière l'onde de choc incidente. Nous pouvons donc déterminer ces paramètres en fonction des conditions initiales dans le tube et ceci en utilisant les équations (3-16) et (3-19). Nous obtenons alors :

$$P_{51} = \left(\frac{2 \cdot \gamma_1 \cdot M_s^2 - (\gamma_1 - 1)}{(\gamma_1 + 1)} \right) \cdot \left(\frac{(3 \cdot \gamma_1 - 1) \cdot M_s^2 - 2 \cdot (\gamma_1 - 1)}{(\gamma_1 - 1) \cdot M_s^2 + 2} \right) \quad (3-51)$$

$$T_{51} = \frac{(2 \cdot (\gamma_1 - 1) \cdot M_s^2 - (3 - \gamma_1)) \cdot ((3 \cdot \gamma_1 - 1) \cdot M_s^2 + 2 \cdot (\gamma_1 - 1))}{(\gamma_1 + 1)^2 \cdot M_s^2} \quad (3-52)$$

Les équations (3-48), (3-51) et (3-52) donnent respectivement l'intensité du choc réfléchi, la pression et la température de la région (5) en fonction des paramètres initiaux (zone 1).

3-4-2 Onde de choc partiellement réfléchi:

En ouvrant l'extrémité du tube de travail, les particules de la région (5) subissent une réflexion partielle, ce qui rend la vitesse de ces dernières non nulle. Par conséquent, le nombre de Mach M_5 est non nul mais relativement faible. Nous pouvons donc réunir des conditions favorables aux essais de simulation des turbines à gaz, ou des turboréacteurs, qui nécessite des nombres de Mach réduits et des températures élevées. Dans ce cas les essais se font dans le tube à choc lui-même. Pour des nombres de Mach élevés, il est possible d'étendre l'utilisation de cette région en prolongeant le tube de travail d'une tuyère convergente-divergente suivie d'un réservoir (figure 3-5), en ayant dans le tube à choc un nombre de Mach M_5 inférieur à l'unité.

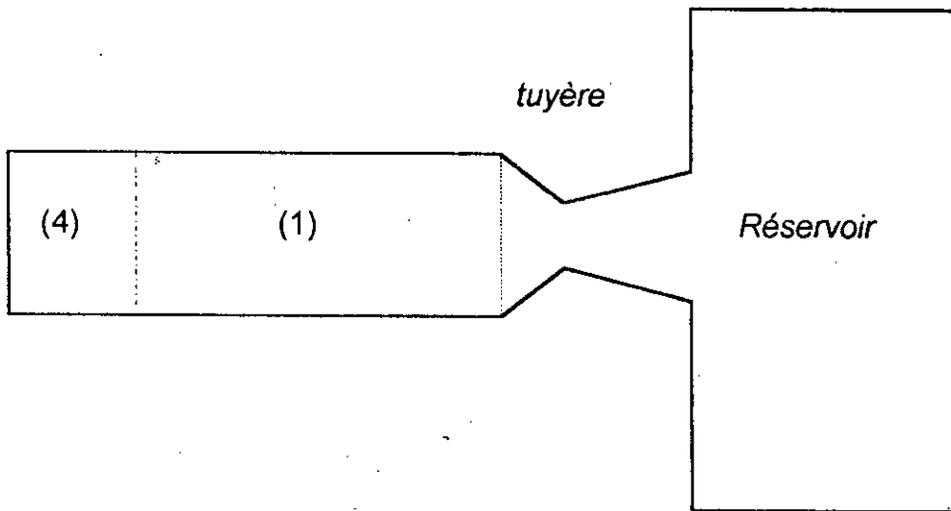


Figure 3-5 - Soufflerie à choc

Pour déterminer les paramètres dans le cas d'une soufflerie à choc, nous considérons toujours que l'onde de choc réfléchi est stationnaire et que le gaz traverse cette onde à la vitesse U_2' et la quitte à la vitesse U_5 (figure 3-6 et 3-7).

Les équations (3-45), (3-46) et (3-47) restent toujours valables. Par contre les paramètres dynamiques derrière l'onde de choc réfléchi changent et par suite l'équation (3-50) n'est plus valable. Ainsi les équations (3-51) et (3-52) ne seront plus fonction uniquement de M_5 mais aussi fonction du nombre de Mach réfléchi M_r :

$$U_2' = U_r + U_2 \quad (3-53)$$

$$U_5 = U_r - V_5 \quad (3-54)$$

De plus

$$U_2 = V_5 + U_{15} \quad (3-55)$$

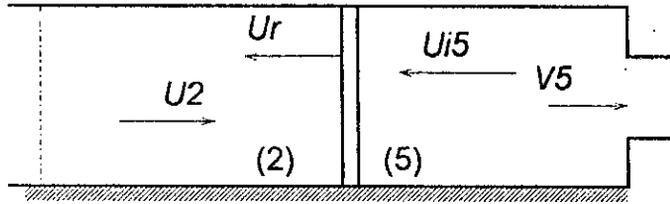


Figure 3-6 Coordonnées liées au tube

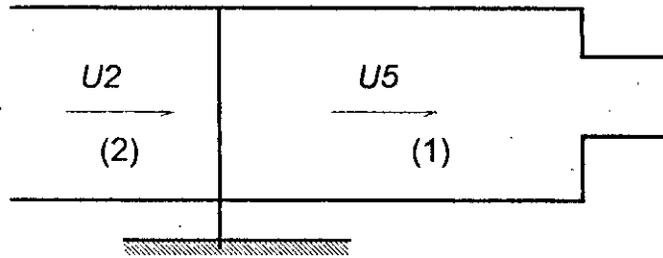


Figure 3-7 Coordonnées liées à l'onde de choc

Le nombre de Mach après l'onde de choc réfléchie est défini par:

$$M_5 = \frac{V_5}{a_5} = \frac{U_2 - U_{i5}}{a_5} \quad (3-56)$$

Par le même développement que celui présenté pour établir l'équation (3-27), nous aboutissons à:

$$U_{i5} = \frac{2}{(\gamma_1 + 1)} \cdot a_2 \cdot \left(M_r - \frac{1}{M_r} \right) \quad (3-57)$$

De l'équation (3-46) nous pouvons déterminer le rapport a_{52} :

$$a_{52} = \sqrt{T_{52}} \quad (3-58)$$

En utilisant les équations (3-56), (3-57) et (3-58), nous exprimons le nombre de Mach M_5 en fonction de M_2 et M_r :

$$M_5 = \frac{\left(M_2 - \frac{2}{(\gamma_1 + 1)} \cdot (M_r^2 - 1) \right) \cdot (\gamma_1 + 1)}{[(2 \cdot \gamma_1 \cdot M_r^2 - (\gamma_1 - 1)) \cdot ((\gamma_1 - 1) \cdot M_r^2 + 2)]^{1/2}} \quad (3-59)$$

Pour la résolution numérique de cette équation nous proposons la méthode suivante :

- 1- Fixer la valeur de M_5 d'essai.
- 2- Donner une valeur à M_5 .
- 3- Calculer M_2 à partir de l'équation (3-30).
- 4- Résoudre numériquement l'équation (3-59) par l'algorithme de

Newton.

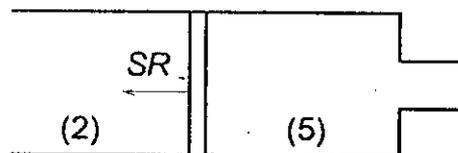


Figure 3-8 - Tube de travail ouvert à son extrémité

Il faut effectuer à l'extrémité du tube une ouverture de section adéquate de façon qu'avec un M_5 déterminé par les conditions initiales, nous obtenons la valeur de M_5 désirée (figure 3-8).

Pour calculer la section adéquate, considérons l'équation de continuité entre les zones (2) et (5) :

$$\rho_2 \cdot U_2 \cdot S = \rho_5 \cdot U_5 \cdot S_5 \quad (3-60)$$

qui peut se mettre aussi sous la forme

$$\frac{M_2}{M_5} = \rho_{s2} \cdot \frac{S_5}{S} \quad (3-61)$$

Nous voyons bien que si nous nous fixons une section S_5 de sortie inférieure à la section du tube (S) nous pouvons fixer la valeur de M_5 . La résolution de l'équation (3-59) est donc complétée par l'algorithme suivant :

- Fixer la section du tube (S).
- Fixer la valeur de M_5 d'essai.
- Donner une valeur à M_5 .
- Calculer M_2 à partir de l'équation (3-30).
- Résoudre numériquement l'équation (3-59)
- Calculer ρ_{52} à l'aide de l'équation (3-47).
- Calculer la section S_5 par l'équation (3-61) pour obtenir M_5 .
- Vérifier que (S_5) est inférieur à (S) sinon modifier la valeur de M_5 .

Maintenant que nous avons déterminé le nombre de Mach de l'onde partiellement réfléchi, nous pouvons lier les paramètres de la zone (5) à ceux de la zone (1) grâce aux équations (3-45) à (3-47) et (3-16) à (3-19). Nous obtenons alors :

$$P_{51} = \frac{(2 \cdot \gamma_1 \cdot M_s^2 - (\gamma_1 - 1)) \cdot (2 \cdot \gamma_1 \cdot M_r^2 - (\gamma_1 - 1))}{(\gamma_1 + 1)^2} \quad (3-62)$$

$$T_{51} = \frac{(2 \cdot \gamma_1 \cdot M_s^2 - (\gamma_1 - 1)) \cdot ((\gamma_1 - 1) \cdot M_s^2 + 2) \cdot (2 \cdot \gamma_1 \cdot M_r^2 - (\gamma_1 - 1)) \cdot ((\gamma_1 - 1) \cdot M_r^2 + 2)}{(\gamma_1 + 1)^4 \cdot M_s^2 \cdot M_r^2} \quad (3-63)$$

$$\rho_{51} = \frac{(\gamma_1 + 1)^2 \cdot M_s^2 \cdot M_r^2}{((\gamma_1 - 1) \cdot M_s^2 + 2) \cdot ((\gamma_1 - 1) \cdot M_r^2 + 2)} \quad (3-64)$$

3-5 Conclusion:

Connaissant les paramètres initiaux dans le tube à choc, il nous est possible de calculer les paramètres dynamiques et thermodynamiques de l'écoulement induit derrière les différentes ondes de chocs.

Nous avons par ailleurs établi l'équation donnant l'intensité du choc en fonction du rapport de pression de part et d'autre du diaphragme. Nous avons aussi montré les différentes solutions à employer pour obtenir des chocs intenses.

Une fois les paramètres d'écoulements dans les tubes à choc établis, nous pouvons maintenant calculer les temps d'essais des différentes zones du tube à choc.

CHAPITRE 4

DIAGRAMME (t, x) ET TEMPS
D'ESSAIS

4-1 Introduction:

L'intérêt de la simulation est non seulement de permettre le réglage des instruments de mesures mais aussi de voir dans quelles mesures l'essai du modèle est possible en une section précise. Cette simulation devra se faire à l'intérieur ainsi qu'à l'extérieur du tube à choc. C'est dans ce contexte que le diagramme (t,x) est nécessaire.

4-2 Intérêt du tracé du diagramme (t,x):

Le tracé du diagramme (t,x) permet de montrer l'interaction des différentes ondes dans le tube. Le plus important est le tracé de la réflexion de l'onde de tête (Qh) de l'éventail d'expansion. L'onde de tête (Qh) a un rôle prépondérant dans l'exploitation du tube à choc. C'est ainsi que lorsque l'onde de tête rattrape la surface de contact (CS) au point (xdr) avant réflexion de l'onde de choc (figure 4-1), elle limite le temps d'essai de la région (2) (tes1 au lieu de tes2). Elle rend aussi inutilisable la partie au-delà de xdr (les caractéristiques des régions 2 et 5 varient), nous orientons de ce fait sur l'emplacement optimal du modèle dans le tube. Si par contre cette onde ne rattrape la surface de contact qu'après que celle-ci ait interagit avec l'onde réfléchie, elle n'aura aucun effet sur le déroulement de l'expérience. Nous pouvons par conséquent utiliser les régions (2) et (5) avec les temps d'essai respectifs (tes1) et (tesr) (figure 4-2).

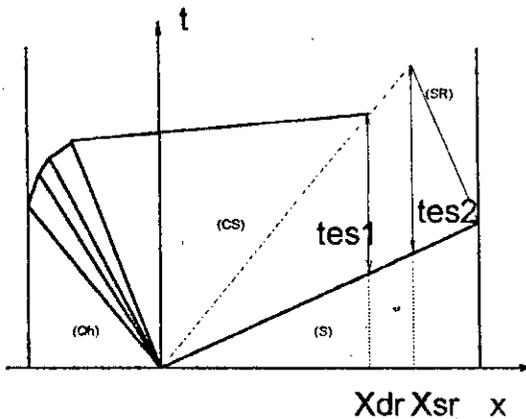


Figure 4-1 - Intersection de CS et de la réflexion de Qh

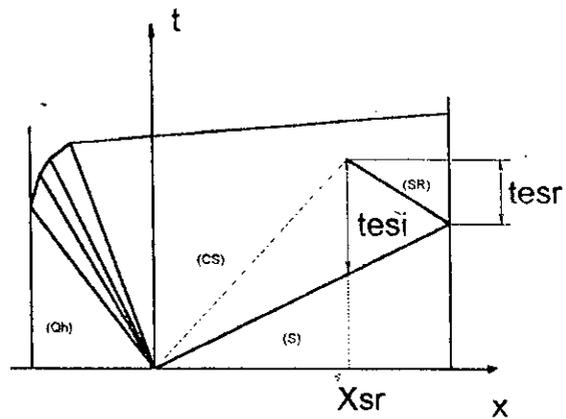


Figure 4-2 - Xsr point d'intersection de l'onde de choc réfléchie avec la surface de contact (CS)

Le diagramme (t,x) met en évidence les évolutions des ondes de choc incidente et réfléchie, de la surface de contact, de l'éventail d'expansion, et de la réflexion de Qh. De plus, il permet de faire ressortir le caractère prépondérant de la réflexion de Qh sur les temps d'essais.

4-3 Traçage du diagramme (t,x):

4-3-1 Traçage de l'éventail d'expansion:

Pour le traçage de l'éventail d'expansion deux cas peuvent se présenter:

- a- L'onde de queue de l'éventail d'expansion (Qt) se trouve dans la première partie du diagramme $\left(\frac{1}{U_3 - a_3} > 0\right)$ (figure 4-3).
- b- L'onde de queue de l'éventail d'expansion se trouve dans la seconde moitié du diagramme $\left(\frac{1}{U_3 - a_3} < 0\right)$ (figure 4-4).

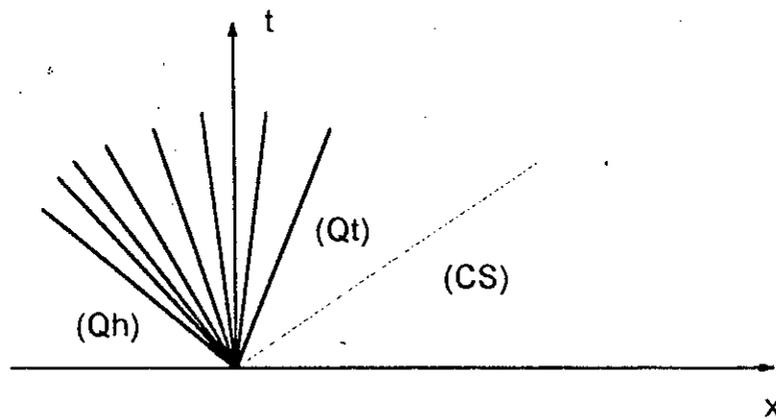


Figure 4-3 - Pente de Qt positive

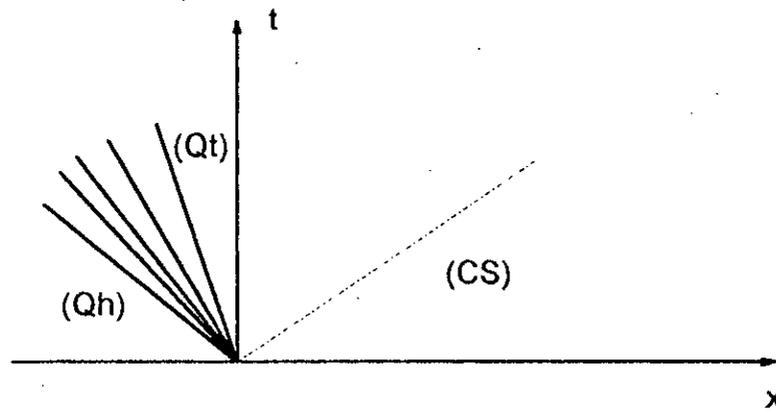


Figure 4-4 - Pente de Qt négative

Nous traitons le second cas, le premier ne diffère que par la distance à mailler. Le traçage du diagramme (t,x) nécessite la détermination des coordonnées temps (t) et espace (x) pour chaque point d'intersection des ondes P et Q définies au chapitre 2-5 (figure 4-5).

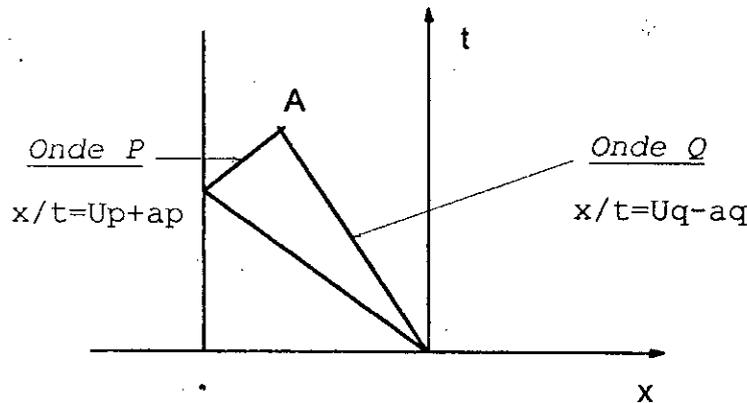


Figure 4-5 - Interaction des ondes P et Q

Pour l'onde P et Q nous pouvons écrire respectivement (Eq. 2-14) :

$$\frac{x}{t} = U_q - a_q \quad (4-1)$$

$$\frac{x}{t} = U_p + a_p \quad (4-2)$$

où:

- U_q, a_q sont les vitesses de la particule et du son en un point appartenant à l'onde Q.

- U_p, a_p sont les vitesses de la particule et du son en un point appartenant à l'onde P.

Le système à deux équations, (4-1) et (4-2), contient quatre inconnues. Nous pouvons lui associer l'égalité des invariants de Riemann au point d'intersection (A) des ondes P et Q :

$$\frac{2 \cdot a_p}{\gamma_4 - 1} + U_p = \frac{2 \cdot a_q}{\gamma_4 - 1} - U_q \quad (4-3)$$

mais le nombre d'inconnues reste supérieur au nombre d'équations. La solution pour résoudre ce système est alors de diviser l'éventail d'expansion en pas égale (h) suivant l'axe des (x) figure (4-6):

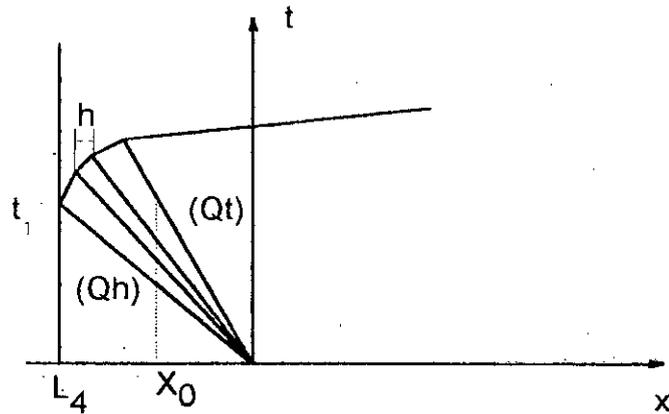


Figure 4-6 - Division de l'éventail d'expansion

Nous prenons le temps t_1 nécessaire à l'onde (Qh) pour atteindre l'extrémité du tube moteur, puis traçons une horizontale à partir de (L_4, t_1) . Le point d'intersection de cette droite avec Qt sera repéré par l'abscisse x_0 ($x_0 < 0$). Par la suite, en se donnant un pas h nous subdivisons la distance $(x_0 - L_4)$ en parties égales. Nous pouvons ainsi connaître le nombre d'ondes d'expansion :

$$N = \frac{x_0 - L_4}{h}$$

et par suite l'abscisse x des points d'intersection des ondes P et Q.

Considérons la figure (4-7). L'indice (1) indique la réflexion principale de l'éventail d'expansion.

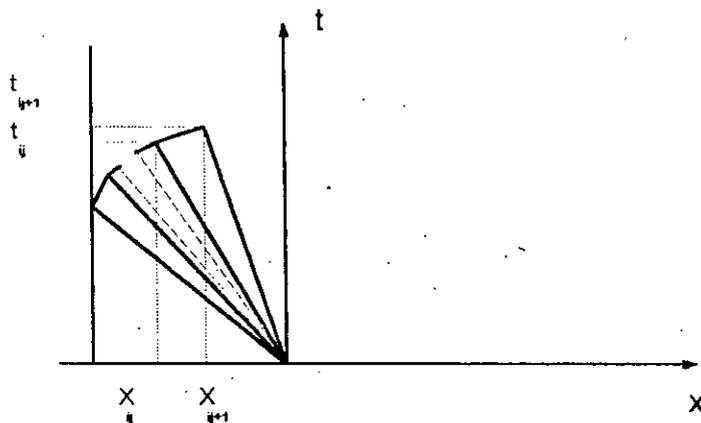


Figure 4-7 - Maillage de l'éventail d'expansion

Nous pouvons exprimer la pente par rapport à l'axe (x) des deux ondes d'expansions (j) et (j+1) par :

$$\frac{t_{1j}}{x_{1j}} = \frac{1}{U_{1j} - a_{1j}} \quad (4-4)$$

$$\frac{t_{1j+1}}{x_{1j+1}} = \frac{1}{U_{1j+1} - a_{1j+1}} \quad (4-5)$$

Avec ce nouveau maillage, l'équation (4-3) devient :

$$\frac{2 \cdot a_{1j}}{\gamma_4 - 1} + U_{1j} = \frac{2 \cdot a_{1j+1}}{\gamma_4 - 1} - U_{1j+1} \quad (4-6)$$

La tangente de l'angle entre une onde P (j+1) et l'horizontale est :

$$\frac{t_{1j+1} - t_{1j}}{x_{1j+1} - x_{1j}} = \frac{1}{U_{1j+1} + a_{1j+1}} \quad (4-7)$$

Nous venons donc de construire à l'aide des équations (4-5), (4-6) et (4-7) un système itératif où les inconnues sont U_{1j+1} , a_{1j+1} , t_{1j+1} , et les paramètres connus sont t_{1j} , u_{1j} , x_{1j} , x_{1j+1} , la valeur de x_{1j+1} étant maintenant entièrement définie par :

$$x_{1j+1} = x_{1j} + h$$

L'expression de t_{1j+1} est déduite de l'équation (4-7) :

$$t_{1j+1} = \frac{x_{1j+1} - x_{1j}}{U_{1j+1} + a_{1j+1}} + t_{1j} \quad (4-8)$$

et de l'équation (4-5) :

$$t_{1j+1} = \frac{x_{1j+1}}{U_{1j+1} - a_{1j+1}} \quad (4-9)$$

De l'égalisation des expressions (4-8) et (4-9) nous obtenons :

$$a_{1j+1}^2 \cdot t_{1j} + a_{1j+1} \cdot (2 \cdot x_{1j+1} - x_{1j}) + x_{1j} \cdot u_{1j+1} - u_{1j+1}^2 \cdot t_{1j} = 0 \quad (4-10)$$

De l'équation (4-6) on exprime U_{Ij+1} en fonction de a_{Ij+1} , a_{Ij} , u_{Ij} :

$$U_{Ij+1} = \frac{2 \cdot a_{Ij+1}}{\gamma_4 - 1} - \frac{2 \cdot a_{Ij}}{\gamma_4 - 1} - U_{Ij} \quad (4-11)$$

En combinant les équations (4-10) et (4-11), nous obtenons une équation de second degré avec pour inconnue a_{Ij+1} :

$$A \cdot a_{Ij+1}^2 + B \cdot a_{Ij+1} + C = 0$$

Où A, B et C sont des constantes définies par:

$$A = \frac{(\gamma_4 - 3) \cdot (\gamma_4 + 1)}{(\gamma_4 - 1)^2} \cdot t_{Ij}$$

$$B = \frac{8 \cdot a_{Ij} \cdot t_{Ij}}{(\gamma_4 - 1)^2} + \frac{4 \cdot u_{Ij} \cdot t_{Ij}}{(\gamma_4 - 1)} + \frac{2 \cdot x_{Ij}}{(\gamma_4 - 1)} + 2 \cdot x_{Ij+1} - x_{Ij}$$

$$C = \frac{-2 \cdot x_{Ij} \cdot a_{Ij}}{(\gamma_4 - 1)} - u_{Ij} \cdot \left(u_{Ij} \cdot t_{Ij} + x_{Ij} + \frac{4 \cdot a_{Ij} \cdot t_{Ij}}{(\gamma_4 - 1)} \right) - \frac{4 \cdot a_{Ij}^2 \cdot t_{Ij}}{(\gamma_4 - 1)^2}$$

L'inconnue a_{Ij+1} est déterminé par la résolution de ce système au second ordre.

Nous nous intéressons alors à l'inconnue u_{Ij+1} qui est déterminé par l'équation (4-11). Ayant u_{Ij+1} et a_{Ij+1} , nous déduisons t_{Ij+1} à partir de l'équation (4-9). Ce processus est itératif et le nombre d'itérations est égal au nombre d'ondes d'expansion N. Les conditions initiales du processus itératif sont connues:

$$a_{11} = a_4$$

$$U_{11} = 0 \quad (\text{region (4) au repos})$$

Dans le cas où la pente de l'onde de queue (Qt) est positive, le maillage est identique, sauf pour x_0 (figure 4-8) qui est positif et la distance à subdiviser devient alors $|x_0 - L_4|$.

Nous venons d'exposer la méthode pour tracer de la réflexion de Qh, nous pouvons étendre ce procédé pour tracer les ondes d'ordre supérieur, c'est à dire pour $i > 1$ (figure 4-8). Les équations précédentes deviennent pour $i > 1$:

$$\frac{t_{ij} - t_{i-1j}}{x_{ij} - x_{i-1j}} = \frac{1}{U_{ij} - a_{ij}} \quad (4-13)$$

$$\frac{t_{ij} - t_{ij-1}}{x_{ij} - x_{ij-1}} = \frac{1}{U_{ij} + a_{ij}} \quad (4-14)$$

$$\frac{2 \cdot a_{ij}}{\gamma_4 - 1} - U_{ij} = \frac{2 \cdot a_{ij-1}}{\gamma_4 - 1} + U_{ij-1} \quad (4-15)$$

$$\frac{2 \cdot a_{ij}}{\gamma_4 - 1} - U_{ij} = \frac{2 \cdot a_{i-1j}}{\gamma_4 - 1} + U_{i-1j} \quad (4-16)$$

La résolution est identique et les conditions initiales inchangées soit;

$$a_{11} = a_4$$

$$U_{11} = 0$$

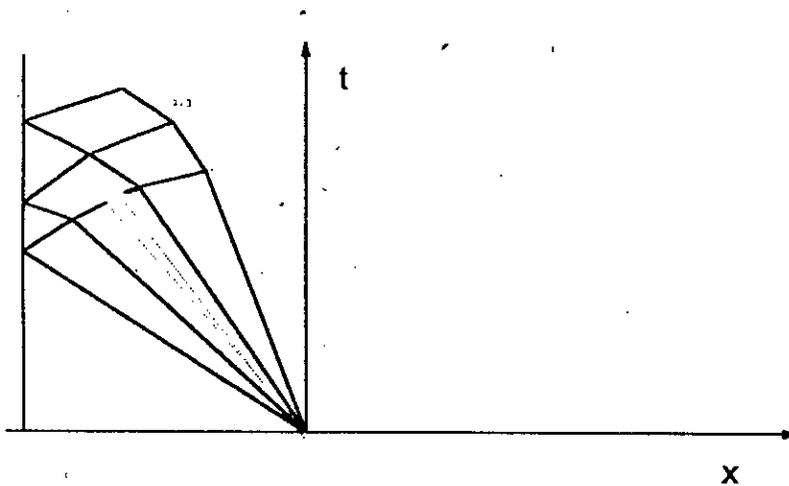


Figure 4-8 - Maillage complet de l'éventail d'expansion

4-3-2 Traçage complet du diagramme:

Les évolutions des ondes de choc incidente et réfléchie, et de la surface de contact viennent compléter le traçage du diagramme.

L'onde de choc incidente a pour trajectoire une droite d'équation $t = x/U_s$. La surface de contact décrit elle aussi une droite d'équation $t = x/U_2$. L'onde de choc réfléchie décrit une droite d'équation $t = (x - L_1)/U_r + t_s$, de pente $1/U_r$, et où t_s est le temps mis par l'onde de choc incidente pour atteindre l'extrémité du tube de travail.

L'interaction entre la surface de contact et l'onde de choc réfléchie donne naissance à un système d'ondes complexes qui n'a pas d'influence sur l'utilisation du tube à choc. Nous omettrons donc de la représenter [4].

4-4 Calcul de temps d'essai dans le tube à choc:

Nous allons présenter dans cette section la détermination des relations donnant les temps d'essai maximum disponibles dans le tube pour des conditions initiales de départ fixées. Pour calculer les temps d'essai, il est nécessaire de connaître l'évolution complète des ondes dans le tube à choc dans le temps et l'espace. Il faut pour cela écrire les équations qui régissent l'évolution des ondes de choc incidente et réfléchie, de la surface de contact et surtout de la réflexion de l'onde de tête (Qh).

Le temps mis par l'onde de choc incidente pour atteindre l'extrémité du tube de travail est t_s :

$$t_s = \frac{L_1}{U_s} \quad (4-17)$$

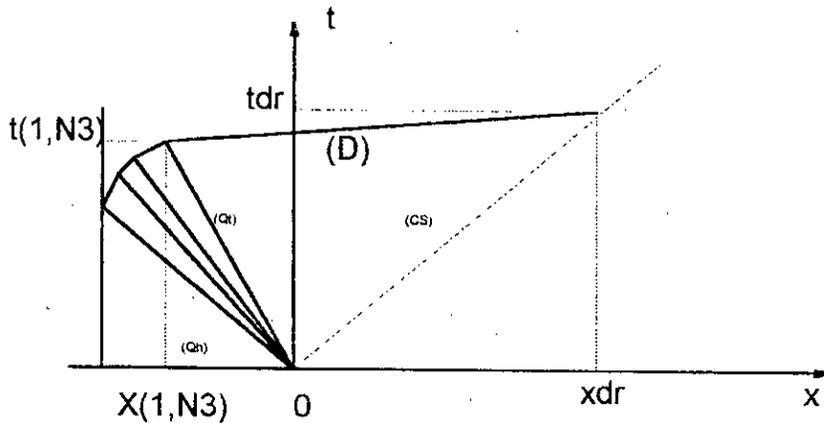


Figure 4-9 - Définition de Xdr et tdr

Pour déterminer l'expression du point d'intersection (x_{dr}) entre la réflexion de Q_h et la surface de contact, considérons la figure (4-9) où nous avons N_3 ondes d'expansion. La pente de la droite est connue et égale à $a = U_3 + a_3$. Connaissant un point par lequel passe la droite (à $t = t(1, N_3)$ on a $x = x(1, N_3)$), nous obtenons l'équation de la droite (D) pour $t > t(1, N_3)$ et $x > x(1, N_3)$:

$$t = \frac{1}{U_3 + a_3} \cdot x + \left[t(1, N_3) - \frac{1}{U_3 + a_3} \cdot x(1, N_3) \right] \quad (4-19)$$

La surface de contact ayant pour équation :

$$t = \frac{x}{U_2} \quad (4-20)$$

au point $x = x_{dr}$ nous obtenons :

$$x_{dr} = \frac{[(U_3 + a_3) \cdot t(1, N_3) - x(1, N_3)] \cdot U_2}{(U_3 + a_3) - U_2} \quad (4-21)$$

Remplaçons dans (4-20) l'expression de x_{dr} , nous obtenons t_{dr}

$$t_{dr} = \frac{x_{dr}}{U_2} \quad (4-22)$$

Nous sommes aussi amenés à déterminer le point d'intersection entre la réflexion de l'onde de choc réfléchi et la surface de contact (figure 4-10).

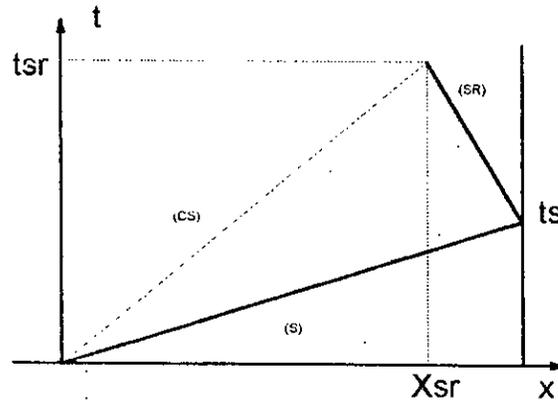


Figure 4-10 - Définition de x_{sr} et t_{sr}

L'équation de l'onde de choc réfléchi s'écrit :

$$t = \frac{(L_1 - x)}{U_r} + t_s \quad (4-23)$$

En égalisant (4-20) avec (4-23) nous obtenons:

$$x_{sr} = \frac{(L_1 + t_s \cdot U_r) \cdot U_2}{U_2 + U_r} \quad (4-24)$$

En remplaçant (4-24) dans (4-20), nous obtenons le temps t_{sr} mis par la surface de contact pour atteindre le point x_{sr}

$$t_{sr} = \frac{x_{sr}}{U_2} \quad (4-25)$$

le temps mis par l'onde de choc incidente pour atteindre le point x_{dr} est :

$$t_{s_{xdr}} = \frac{x_{dr}}{U_s} \quad (4-26)$$

Deux cas se présentent maintenant:

- **Premier cas** : la réflexion de Qh atteint la surface de contact avant que celle-ci n'ait interagit avec l'onde de choc réfléchi ($x_{dr} < x_{sr}$) figure (4-11). Dans ce cas, le temps d'essai maximum de la région (2) est

$$t_{as} = t_{dr} - t_{s_{x_{dr}}} \quad (4-30)$$

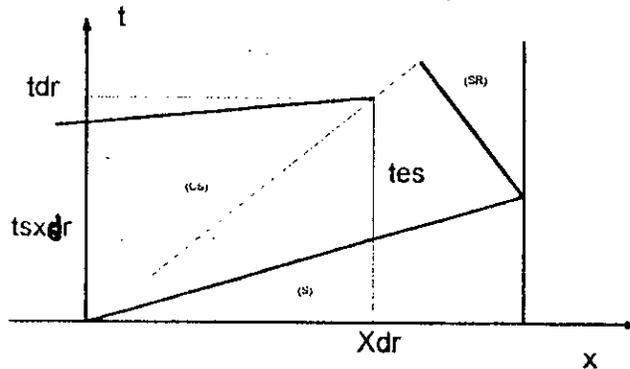


Figure 4-11 - $x_{dr} < x_{sr}$

- **Deuxième cas** : $x_{dr} > x_{sr}$, dans ce cas la réflexion de Qh n'influe pas sur les temps d'essai (figure 4-12). Dans ce cas nous devons calculer le temps mis par l'onde de choc incidente pour atteindre le point d'abscisse x_{sr} .

$$t_{s_{x_{sr}}} = \frac{x_{sr}}{U_s} \quad (4-27)$$

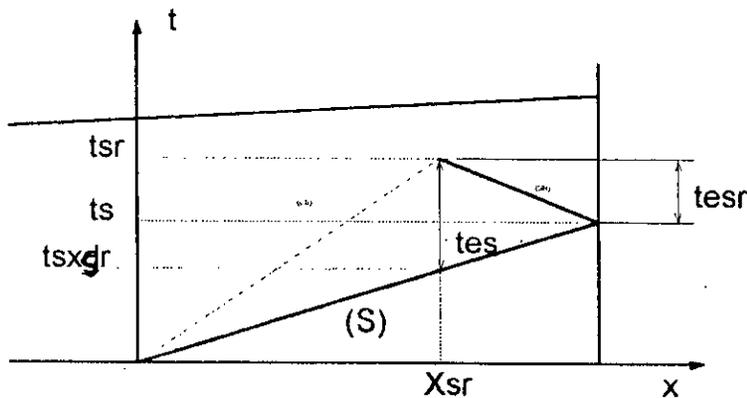


Figure 4-12 - $x_{dr} > x_{sr}$

Ainsi le temps d'essai maximum de la région (2) devient

$$t_{es} = t_{sr} - t_{sdr} \quad (4-28)$$

et le temps d'essai de la région (5)

$$t_{e_{sr}} = t_{sr} - t_s \quad (4-29)$$

Dans ce cas de figure la position optimale du modèle est en x_{sr} (figure 4-12).

En définitive nous pouvons dresser le tableau suivant résumant les temps d'essai maximum disponibles dans le tube à choc.

	$x_{dr} < x_{sr}$	$x_{dr} > x_{sr}$
région (2)	équation (4-30)	équation (4-28)
région (5)	inutilisable	équation (4-29)
position optimale	x_{dr}	x_{sr}

4-5 Disposition optimale des longueurs:

Nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'il existait, selon le cas considéré, une position optimale du modèle où le temps d'essai des régions (2) et (5) est maximum. Pour optimiser les temps d'essais, il est préférable que l'onde de choc réfléchie (SR) et la réflexion de Qh se rencontrent au même point qui appartient à la surface de contact (figure 4-13). Ce cas particulier s'appelle interface adaptée (*Tailored surface*). Cette disposition permet d'avoir les plus grands temps d'observations possible de la région (2) et (5) [1].

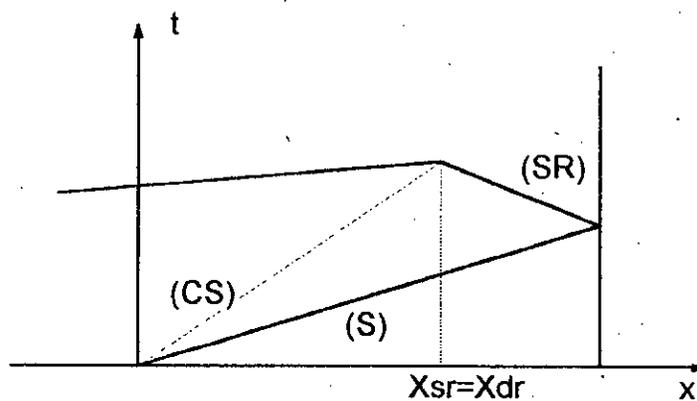


Figure 4-13 - Tube à choc avec interface adaptée

Pour obtenir ce cas particulier (interface adaptée), il faudrait que $x_{SR} = x_{dr}$. Mais pour cela il est nécessaire de choisir les longueurs du tube moteur (L_d) et du tube de travail (L_l) de manière à ce que la disposition des longueurs soit optimale. Cette condition se vérifie quand le rapport des longueurs vérifie la relation suivante [4] :

$$\frac{L_l}{L_d} = \frac{2 \cdot M_s}{A_{41}} \cdot \left(1 - \frac{\gamma_4 - 1}{2 \cdot A_{41}} \cdot U_{21} \right)^{\frac{-(\gamma_4 + 1)}{2(\gamma_4 - 1)}} \cdot \left(\frac{U_{21} + M_r}{M_s + M_r} \right) \quad (4-31)$$

Même si nous sommes limités par la longueur maximale ($L_l + L_d$) réalisable en laboratoire, l'équation (4-31) permet d'avoir une disposition optimale des longueurs assurant ainsi des durées d'observations maximales à moindres coûts.

4-6 Conclusion:

Nous avons montré dans ce chapitre l'intérêt du diagramme d'onde pour l'exploitation de la soufflerie à choc et son impact sur la visualisation rapide de l'évolution des ondes. Nous avons pour cela établi une méthode numérique de traçage du diagramme (t,x). Nous pouvons, par ailleurs, déduire directement de ce diagramme les situations où l'expérimentation est irréalisable.

A partir de ces diagrammes, nous avons développés une méthode de calcul des temps d'essais maximums dans les différentes régions du tube à choc.

Si les temps d'essais maximum ne correspondent pas à ceux désirés, nous avons proposé une relation exprimant le rapport optimal des longueurs du tube moteur et de travail. Ce rapport nous assure les temps d'essais les plus importants possibles pour les conditions d'expérimentation. On réalisera alors le tube à choc selon ces longueurs optimales.

CHAPITRE 5

COUCHE LIMITE DANS LE TUBE
A CHOC

5-1 Introduction:

Nous avons considéré pour l'instant que le gaz était non visqueux. En réalité, le gaz possède une viscosité qui le pousse à adhérer à la paroi. Cet effet de viscosité est à l'origine de la *couche limite* sur la paroi interne du tube. Par conséquent, les considérations précédentes sur le diagramme (t,x) ne sont valables que pour les cas où l'épaisseur de la couche limite est négligeable par rapport au diamètre du tube.

La couche limite qui se développe à l'intérieur du tube à choc peut être décomposée en trois parties (figure 5-1). La première partie se développe entre l'onde de choc et la surface de contact. C'est la *couche limite de choc* que nous étudions dans ce chapitre. La deuxième, appelée *couche limite de l'onde de détente*, se situe entre le front de détente et l'emplacement du diaphragme. La troisième est un mélange des gaz moteur et de travail se situant entre l'emplacement de la membrane et la surface de contact.

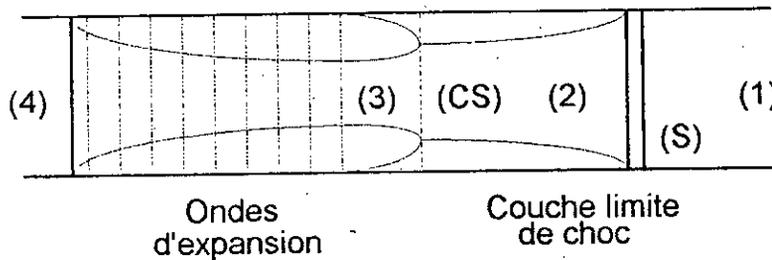


Figure 5-1 - Définition des couches limites dans le tube à choc

5-2 Couche limite de choc:

Nous allons maintenant considérer la couche limite de choc générée par l'onde de choc incidente avançant dans le gaz de travail (zone 1) initialement au repos.

5-2-1 Système de coordonnées:

L'onde de choc incidente, d'intensité supposée constante, se déplace parallèlement à la paroi dans un fluide stationnaire. Nous introduisons ici quelques notations :

- (\bar{x}, \bar{y}) : est le système de coordonnées liées à la paroi.
- (\bar{U}, \bar{V}) : les vitesses respectivement parallèles à \bar{x}, \bar{y} (figure 5-2).
- (x, y) : système de coordonnées se déplaçant avec l'onde de choc (figure 5-3).
- U et V : les vitesses parallèles respectivement à x et y.

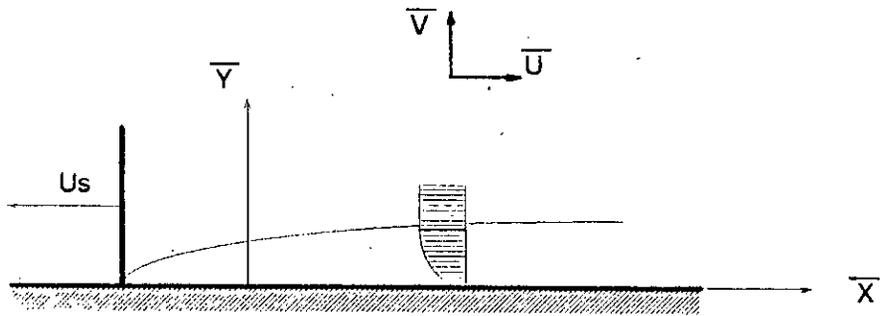


Figure 5-2 - Système de coordonnées liées au tube

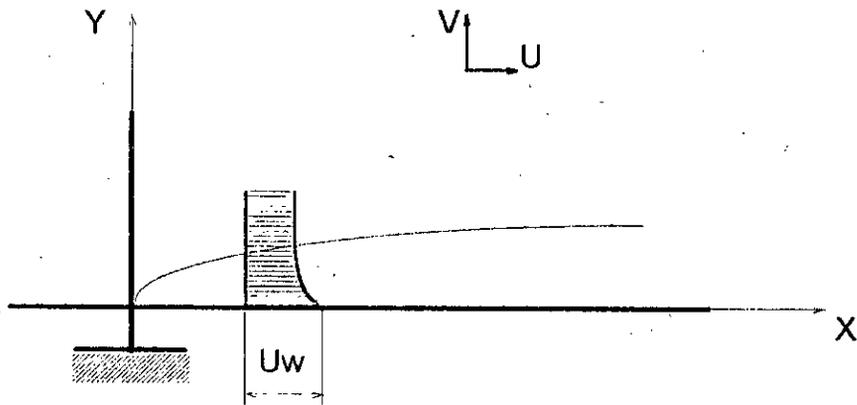


Figure 5-3 - Coordonnées liées au choc

Supposons qu'à l'instant $t=0$, les deux repères coïncident. Nous pouvons alors écrire:

$$x = \bar{x} - U_s \cdot t \quad (5-1)$$

$$U = U - \bar{U}_s \quad (5-2)$$

Notons que la paroi se déplace dans un repère fixe à la vitesse:

$$U_w = -U_s \quad (5-3)$$

5-2-2 Equations de la couche limite:

Les équations de Prandtl sont applicables en supposant que l'écoulement est laminaire [9] et le gradient de pression selon (x) nul $\left(\frac{dP}{dx} = 0\right)$. Les équations de bases s'écrivent donc:

$$\text{continuité:} \quad \frac{\partial(\rho \cdot U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot V)}{\partial y} = 0 \quad (5-4)$$

$$\text{quantité de mouvement:} \quad U \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (5-5)$$

$$\text{equation d'énergie:} \quad \rho \cdot cp \cdot \left(U \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \quad (5-6)$$

avec k: coefficient d'échange de chaleur.

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\left. \begin{array}{l} U(x,0) = -\bar{U}_s \\ V(x,0) = 0 \\ T(x,0) = T_w \end{array} \right\} \begin{array}{l} U(x,\infty) = U_e \\ T(x,\infty) = T_e \end{array} \quad (5-7)$$

Ce sont les conditions aux limites usuelles sauf que le fluide à la paroi se déplace à une vitesse $U(x,0) = U_w = -U_s$.

5-2-3 Transformation des équations de base:

Les équations (5-4) à (5-7) sont transformées en un système d'équations différentielles en utilisant le changement de variable de Howarth [6].

L'équation (5-4) permet de définir la fonction de courant par:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\rho \cdot U}{\rho_w} \quad (5-8)$$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\rho \cdot V}{\rho_w} \quad (5-9)$$

En introduisant le paramètre de similarité η :

$$\eta = \sqrt{\frac{U_e}{2 \cdot \nu_w \cdot x}} \cdot \int_0^y \frac{T_w}{T} \cdot dy \quad (5-10)$$

la fonction de courant est définie par [7] :

$$\Psi = \sqrt{2 \cdot U_e \cdot \nu_w} \cdot f(\eta) \quad (5-11)$$

Déterminons d'abord l'équation de la couche limite dynamique. L'équation (5-4) est directement vérifiée en introduisant (5-8) et (5-9)

En calculant les différents paramètres de l'équation (5-5) en fonction de η et f (annexe A), nous obtenons l'équation de la couche limite dynamique en fonction de f :

$$f''' + f \cdot f'' = 0 \quad (5-12)$$

avec les conditions aux limites;

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(0) = U_w / U_e \\ f'(\infty) = 1 \end{array} \right\} \quad (5-13)$$

L'équation (5-12) est l'équation de Blasius sauf que la condition aux limites à la paroi est différente : $f'(0) = U_w / U_e$.

Nous calculons le rapport $T_a = T/T_e$ au lieu de calculer la température T . En calculant comme précédemment les différents paramètres de l'équation (5-6) en fonction de η et f nous obtenons l'équation différentielle de la couche limite thermique (annexe B) :

$$T_a'' + Pr \cdot f \cdot T_a' = -Pr \cdot (\gamma_1 - 1) \cdot M_e^2 \cdot (f'')^2 \quad (5-14)$$

Avec les conditions aux limites

$$\left. \begin{aligned} T_a(0) &= T_w / T_e \\ T_a(\infty) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (5-15)$$

L'équation (5-14) étant linéaire, nous pouvons exprimer T_a comme étant la superposition des solutions sans transfert de chaleur (paroi adiabatique) et avec transfert de chaleur. Ainsi T_a peut s'exprimer sous la forme:

$$T_a = \frac{T}{T_e} = 1 + \left(\frac{\gamma_1 - 1}{2} \right) \cdot \left[\left(\frac{U_w}{U_e} - 1 \right) \cdot M_e \right]^2 \cdot r(\eta) + \left\{ \left(\frac{T_w}{T_e} - 1 \right) - \left(\frac{\gamma_1 - 1}{2} \right) \cdot \left[\left(\frac{U_w}{U_e} - 1 \right) \cdot M_e \right]^2 \cdot r(0) \right\} \cdot s(\eta) \quad (5-16)$$

Où $r(\eta)$ est la fonction correspondant à une paroi adiabatique et $s(\eta)$ à une paroi avec échange de chaleur. En introduisant la première expression de T_a en fonction de $r(\eta)$, qui est une solution particulière de l'équation (5-14) soit;

$$\frac{T}{T_e} = 1 + \left(\frac{\gamma_1 - 1}{2} \right) \cdot \left[\left(\frac{U_w}{U_e} - 1 \right) \right]^2 \cdot r(\eta)$$

dans (5-14) nous obtenons :

$$r'' + P_r \cdot f \cdot r' = \frac{-2 \cdot P_r}{\left(\frac{U_w}{U_e} - 1 \right)^2} \quad (5-17)$$

Les conditions aux limites en température:

$$\begin{aligned} T(\infty) &= T_e \\ q|_{\eta=0} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \eta} = 0 \end{aligned}$$

deviennent avec le changement de variable :

$$\left. \begin{aligned} r(\infty) &= 0 \\ r'(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-18)$$

En remplaçant l'expression globale de Ta (5-16) dans (5-14), avec $r(\eta)$ vérifiant l'équation (5-17) nous obtenons :

$$s'' + Pr \cdot f \cdot s' = 0 \quad (5-19)$$

et les conditions aux limites correspondantes sont :

$$\left. \begin{array}{l} s(0) = 1 \\ s(\infty) = 0 \end{array} \right\} \quad (5-20)$$

Dans le cas d'une paroi adiabatique le coefficient de $s(\eta)$ est nul (5-16). La température de la paroi adiabatique est alors:

$$\frac{T_{w,t}}{T_e} = 1 + \left(\frac{\gamma_1 - 1}{2} \right) \cdot \left[\left(\frac{U_w}{U_e} - 1 \right) \cdot M_e \right]^2 \cdot r(0) \quad (5-21)$$

Les équations (5-17) et (5-19) peuvent s'exprimer sous forme quadratique

$$s'' + Pr \cdot f \cdot s' = 0 \Rightarrow \frac{s''}{s'} = -Pr \cdot f$$

La fonction f vérifiant l'équation (5-12), nous déduisons:

$$\frac{s''}{s'} = -Pr \cdot \frac{f''}{f'}$$

D'où :

$$s' = C \cdot (f')^{Pr}$$

Nous intégrons alors l'expression (5-22) entre η et l'infini

$$\int_{\xi=\eta}^{\infty} s'(\xi) \cdot d\xi = C \cdot \int_{\xi=\eta}^{\infty} [f''(\xi)]^{Pr} \cdot d\xi$$

$$s(\infty) - s(\eta) = C \cdot \int_{\xi=\eta}^{\infty} [f''(\xi)]^{Pr} \cdot d\xi$$

Avec les conditions aux limites (5-20) soit $s(\infty) = 0$; l'équation précédente devient:

$$s(\eta) = -C \cdot \int_{\xi=\eta}^{\infty} [f''(\xi)]^{Pr} \cdot d\xi$$

De plus $s(0)=1$, nous aurons donc :

$$s(\eta) = \frac{\int_{\xi=\eta}^{\infty} [f''(\xi)]^{Pr} \cdot d\xi}{\int_{\xi=0}^{\infty} [f''(\xi)]^{Pr} \cdot d\xi} \quad (5-23)$$

De la même manière nous pouvons écrire $r(\eta)$ sous la forme suivante:

$$r(\eta) = \frac{2 \cdot Pr}{\left(\frac{U_w}{U_e} - 1\right)} \cdot \int_{\eta}^{\infty} [f''(\xi)]^{Pr} \cdot d\xi \int_0^{\xi} [f''(\theta)]^{2-Pr} \cdot d\theta \quad (5-24)$$

Dans le cas particulier où $(Pr=1)$, les équations (5-23) et (5-24) sont intégrables:

$$r(\eta) = 1 - \frac{\left(\frac{U_w}{U_e} - f'(\eta)\right)^2}{\left(\frac{U_w}{U_e} - 1\right)^2} \quad (5-25)$$

$$s(\eta) = \frac{f'(\eta) - 1}{\left(\frac{U_w}{U_e} - 1\right)} \quad (5-26)$$

Mais dans un cas général les équations (5-12) et (5-14) doivent être intégrées numériquement.

En différenciant l'équation (5-10) et en intégrant entre 0 et η nous obtenons la relation liant y à η :

$$y \cdot \sqrt{\frac{U_e}{2 \cdot v_w \cdot x}} = \int_0^{\eta} \frac{T}{T_w} d\eta \quad (5-27)$$

En injectant (5-27) et (5-21) dans (5-16) nous obtenons:

$$y \cdot \sqrt{\frac{U_e}{2 \cdot v_w \cdot x}} = \frac{T_e}{T_w} \left\{ \eta + \left(\frac{\gamma_1 - 1}{2} \right) \cdot \left[\left(\frac{U_w}{U_e} - 1 \right) \right]^2 \cdot \int_0^\eta r(\eta) \cdot d\eta + \frac{T_w - T_{w,i}}{T_e} \cdot \int_0^\eta s \cdot d\eta \right\} \quad (5-28)$$

5-2-4 Résolution numérique:

Comme nous l'avons déjà signalé, une résolution numérique est nécessaire. Nous proposons dans le cas d'une paroi adiabatique, la structure de résolution suivante :

- Résoudre l'équation (5-12) avec les conditions aux limites (5-13).
- En même temps résoudre l'équation (5-17) avec les conditions aux limites (5-18).

Les valeurs de f, f', f'' sont obtenues pour U_w/U_e égal à 1,5,2,3,4 ainsi que les valeurs de r, r' pour un nombre de Prandtl égal à 0,72 .

5-2-5 Profil de la couche limite:

Dans un système de coordonnées fixes, la relation entre η et y est donnée par l'équation (5-10). Introduisons l'équation (5-1) dans (5-10) et intéressons-nous à la couche limite en $\bar{x}=0$. Nous obtenons l'expression suivante :

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{v_w \cdot t}} \cdot \sqrt{\frac{U_e}{2 \cdot U_w}} \cdot \int_0^y \frac{T_w}{T} dy \quad (5-29)$$

qui nous conduit à :

$$\frac{y}{\sqrt{v_w \cdot t}} \cdot \sqrt{\frac{U_e}{2 \cdot U_w}} = \int_0^\eta \frac{T}{T_w} d\xi \quad (5-30)$$

Le paramètre $\frac{\left[\left(\frac{U_w}{U_e} \right) - f' \right]}{\left[\left(\frac{U_w}{U_e} \right) - 1 \right]}$ varie de 0 à la paroi à 1 à l'interface écoulement libre -

couche limite. L'épaisseur de la couche limite δ est définie comme étant la valeur de y

correspondant à $\frac{\left[\left(\frac{U_w}{U_e} \right) - f' \right]}{\left[\left(\frac{U_w}{U_e} \right) - 1 \right]} = 0,99$ [7]. Nous noterons par (ξ) la valeur de (η)

correspondante.

Par conséquent :

$$\frac{\delta}{\sqrt{v_w \cdot t}} = \sqrt{\frac{2 \cdot U_w}{U_e}} \cdot \int_0^{\xi} \frac{T_w}{T} d\eta \quad (5-31)$$

En injectant l'expression de T/T_e dans le cas d'une paroi adiabatique, nous obtenons:

$$\frac{\delta}{\sqrt{v_w \cdot t}} = \sqrt{\frac{2 \cdot U_w}{U_e}} \cdot \left(\frac{T_e}{T_w} \right) \cdot \left\{ \xi + \left(\frac{\gamma_1 - 1}{2} \right) \cdot \left[\left(\frac{U_w}{U_e} - 1 \right) \cdot M_e \right]^2 \cdot \int_0^{\xi} r d\eta \right\}$$

En introduisant le fait que la viscosité varie linéairement avec la température, nous pouvons écrire :

$$\frac{\delta}{\sqrt{v_w \cdot t}} = \sqrt{\frac{2 \cdot U_w}{U_e}} \cdot \left\{ \xi + \left(\frac{\gamma_1 - 1}{2} \right) \cdot \left[\left(\frac{U_w}{U_e} - 1 \right) \cdot M_e \right]^2 \cdot \int_0^{\xi} r d\eta \right\} \quad (5-32)$$

-Calcul du coefficient de frottement:

La contrainte de cisaillement à la paroi s'écrit :

$$\tau_w = \mu_w \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_w = \mu_w \cdot \frac{U_e^{3/2}}{\sqrt{2 \cdot v_w \cdot x}} \cdot f''(0)$$

Si nous prenons comme vitesse de référence $(U_w - U_e)$, le coefficient local de frottement à la paroi devient :

$$Cf = - \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \cdot \rho_w \cdot (U_w - U_e)^2}$$

La vitesse qui caractérise la couche limite est $(U_w - U_e)$, et la longueur caractéristique est $(U_w - U_e) \cdot t$. Le nombre de Reynolds s'écrit donc :

$$Re = \frac{(U_w - U_e)^2 \cdot t}{v_w}$$

En combinant cette expression avec celle de Cf nous obtenons :

$$Cf \cdot \sqrt{Re} = - \frac{\sqrt{2} \cdot f''(0)}{\sqrt{\frac{U_w}{U_e}} \cdot \left(\frac{U_w}{U_e} - 1 \right)} \quad (5-33)$$

5-3 Effets de la couche limite de choc:

Dans un tube à choc idéal, l'onde de choc et la surface de contact se meuvent à vitesse constante, et l'écoulement entre eux est uniforme. Il en résulte que la longueur et la durée de l'écoulement uniforme augmentent linéairement avec la distance.

En réalité, sous l'action de la couche limite qui se développe à l'aval du choc, l'écoulement adopte un régime instationnaire qui se caractérise principalement par une atténuation de l'onde de choc, une accélération de la surface de contact et donc une variation au cours du temps des différentes grandeurs caractéristiques du gaz de travail: pression, densité et nombre de Mach [8].

L'un des paramètres qui influe énormément sur l'exploitation du tube à choc est le temps d'essai. Il s'avère qu'à partir d'une certaine distance entre le diaphragme et la position considérée dans le tube, distance variable selon les conditions initiales, l'écoulement atteint un régime limite stationnaire [8]. Une fois cette distance atteinte, la surface de contact et l'onde de choc se déplacent à vitesses égales et constantes. D'autre part la distribution des paramètres de l'écoulement, variable entre la surface de contact et l'onde de choc, demeure inchangée au cours du temps. Ainsi, le temps d'essai maximum ne sera disponible qu'une fois cette distance dépassée. Des courbes représentant le rapport de temps d'essais calculés dans un cas idéal à ceux déterminés expérimentalement ont été présenté par A. G. GAYDON [9]. Nous présentons en figure (5-4) une de ces courbes pour un couple de gaz [CO₂ / A].

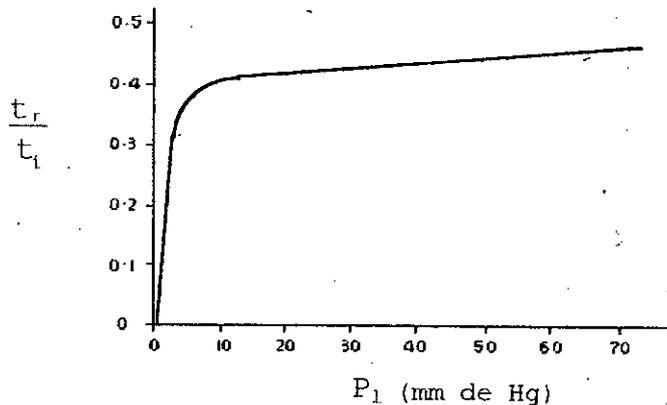


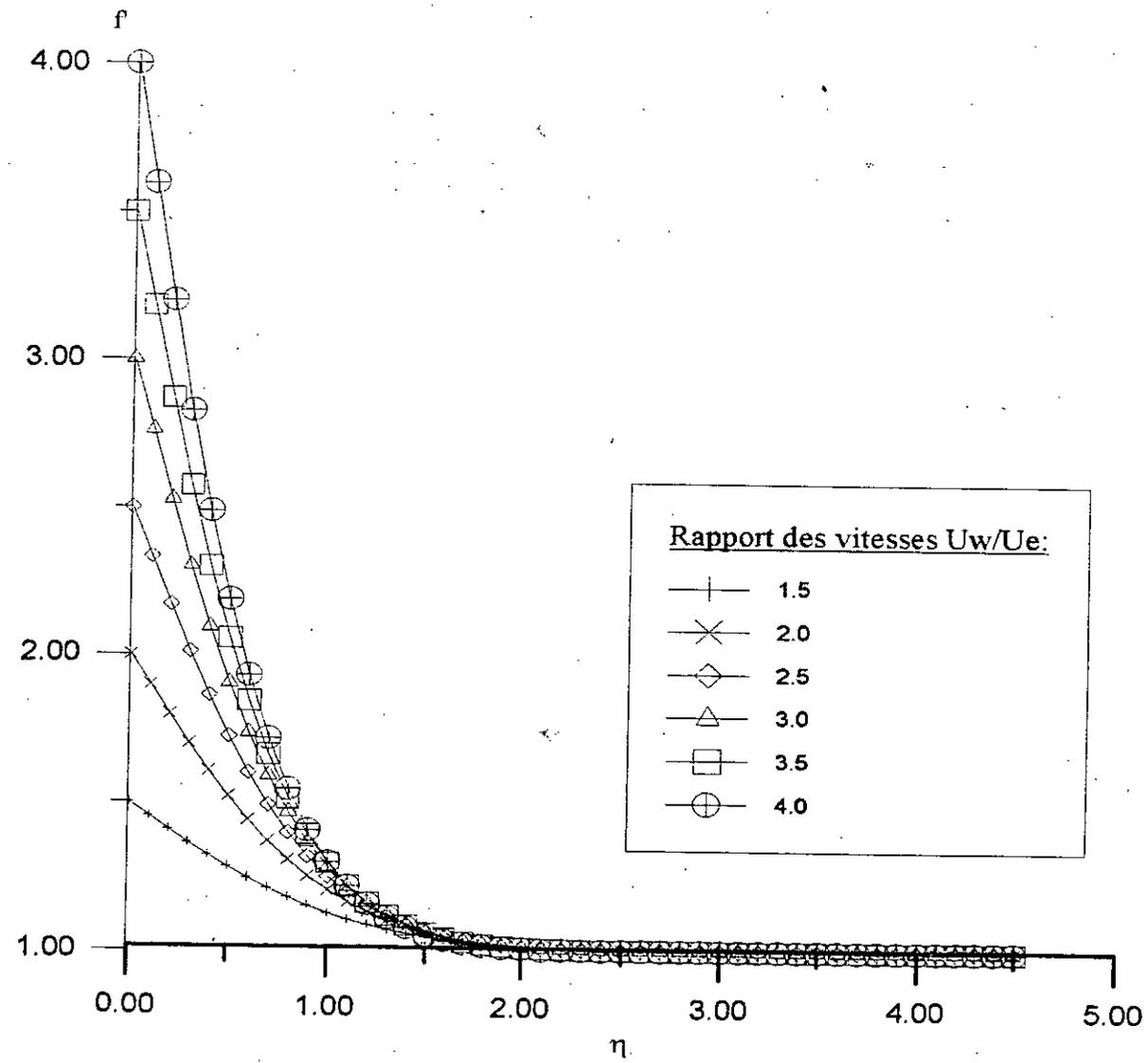
Figure 5-4 Rapport des temps d'essais idéaux (t_i) aux temps d'essais réels (t_r) pour un couple de gaz CO₂ / A avec $2.4 < M_s < 4.8$ (le diamètre du tube est de 40 mm)

5-4 Conclusion

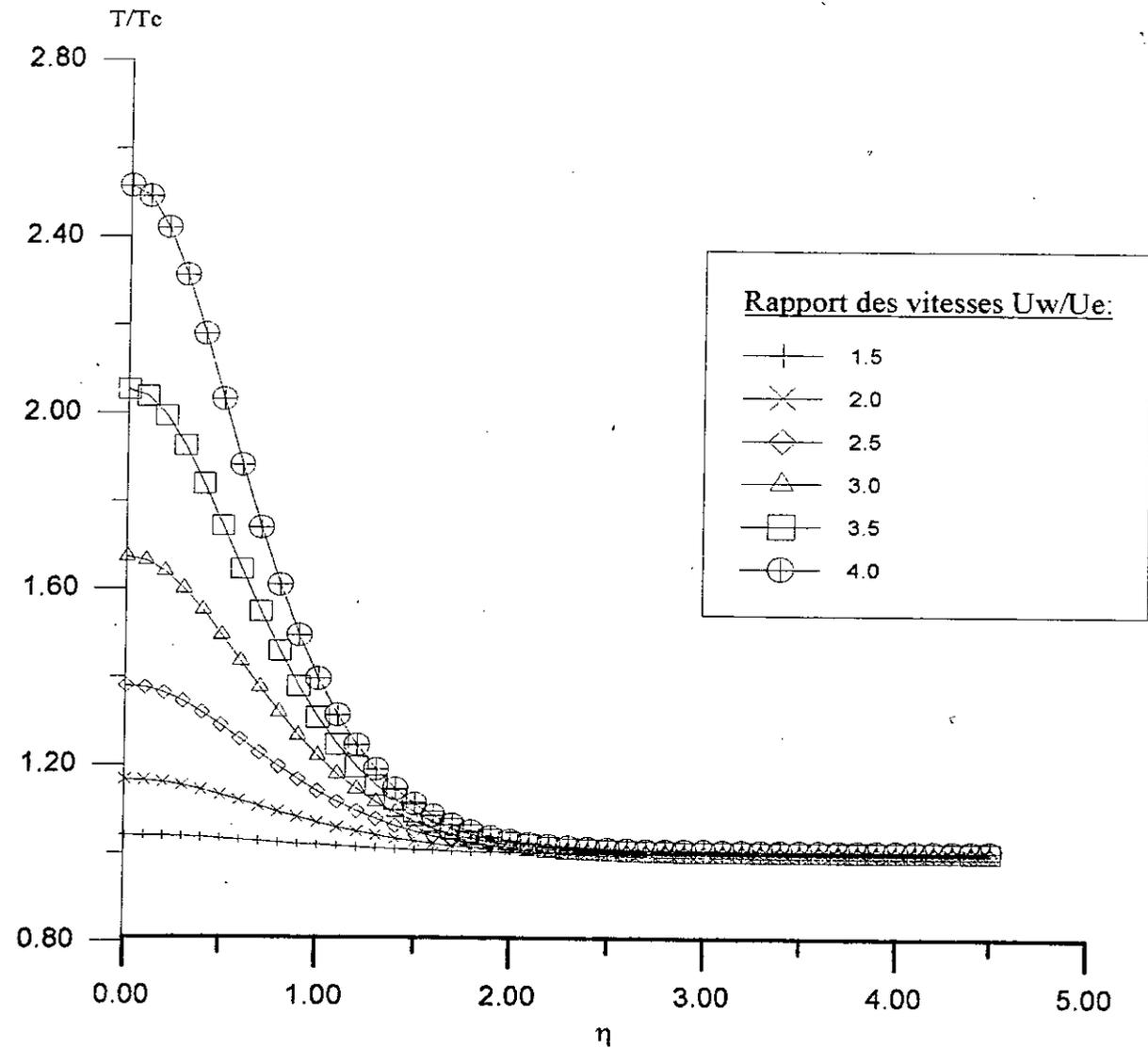
Nous avons résolu numériquement, moyennant des changements de variables de similarité, les équations de la couche limite dynamique et thermique dans le tube à choc. Les résultats obtenus permettent de donner l'évolution de la couche limite en fonction du temps mais aussi la température de la paroi adiabatique et le coefficient de frottement.

L'hypothèse intensité de choc constante est nécessaire à la résolution numérique. Elle correspond à un cas d'expérimentation, et ne couvre pas tous les cas réels d'écoulement.

Profil de la vitesses dans la couche limite du tube à choc.



Profil de la températures dans la couche limite du tube à choc.



Valeurs des coefficients de frottement et d'épaisseur de couche limite:

<i>Pr=0.72</i>		
U_w/U_e	$C_f \cdot \sqrt{Re}$	$\frac{\delta}{\sqrt{v_e \cdot t}}$
1.5	0.450	4.643
2.0	1.010	4.040
2.5	1.660	3.638
3.0	2.380	3.435
3.5	3.175	3.233
4.0	4.035	3.032

CHAPITRE 6

*DIMENSIONNEMENT DU
DIVERGENT SUPERSONIQUE*

6-1 Introduction :

L'étude thermodynamique autour d'un obstacle nécessite le dimensionnement d'une soufflerie à choc pour obtenir des caractéristiques bien définies dans une section précise de la soufflerie. Pour cela, nous sommes amenés à étudier l'écoulement du gaz de travail dans la tuyère afin d'assurer, lors des essais, les conditions optimales dans la section de sortie, ou dans le réservoir. Pour cela il est nécessaire de tenir compte des conditions dans lesquelles le gaz atteint la tuyère. On peut citer parmi eux les effets dus aux hautes températures (1000 K à 6000 K).

Comme nous l'avons indiqué dans la section (1-3), la tuyère est composée de quatre parties principales. Les deux premières étant le convergent et la section au col, zone où l'écoulement passe du subsonique au supersonique. Les méthodes de dimensionnement de ces dernières sont simples et presque toutes donnent de bons résultats [10]. Reste alors à dimensionner les deux zones où l'écoulement est supersonique. Pour ce faire deux méthodes principales sont proposées [11] :

- Méthode de Busemann.
- Méthode de Puckett.

6-2 Méthode de Busemann:

Considérons un écoulement supersonique dans le divergent d'une tuyère. Comme décrit au second chapitre, un gradient de pression, dû à la courbure du divergent, se propage suivant des lignes de Mach. Ces dernières font dévier les lignes de courant d'un angle θ . Alors si nous pouvons approximer la courbure de la paroi par une succession de déviations d'angle $d\theta$, reliées par des portions de droite ou de courbe, nous aurons alors autant de ligne de Mach qu'il y a de déviation.

Ce principe, couplé au fait que l'écoulement doit être parallèle à la sortie du divergent, sont à la base de la méthode de dimensionnement du divergent proposée par Busemann [11]. Il donne, en premier lieu, une forme à la zone complexe de manière à accélérer l'écoulement pour obtenir un nombre de Mach le plus proche du nombre de Mach de sortie. Par la suite, il détermine la forme de la zone simple de manière à assurer un écoulement parallèle à la sortie de la tuyère.

Pour assurer un nombre de Mach de sortie donné, nous devons calculer l'angle d'expansion θ_{\max} correspondant, puis distribuer linéairement θ_{\max} le long de la paroi que l'on a choisi. Une fois cette étape effectuée, nous pouvons calculer les caractéristiques de l'écoulement en partant du col vers la section de sortie. Ces divers calculs et développements sont présentés dans les sections suivantes.

De plus il est important de noter que pour chaque forme de la zone complexe choisie, il n'existe qu'un seul profil de la zone simple vérifiant la condition de parallélisme à la sortie [11].

6-3 Equations de base de l'écoulement dans un divergent supersonique:

Intéressons-nous alors à l'écoulement dans le divergent provenant du convergent. C'est un écoulement bidimensionnel, compressible et supersonique. On supposera de plus que l'écoulement est isentropique, donc irrotationnel (théorème de Crocco) [2]. Les équations régissant l'écoulement s'écrivent alors :

- Equation de continuité en bidimensionnel:

$$\frac{\partial (\rho \cdot U)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho \cdot V)}{\partial y} = 0 \quad (6-1)$$

- Equation de quantité de mouvement :

$$U \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \quad (6-2)$$

- Equation d'énergie :

$$U \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad (6-3)$$

Grâce aux hypothèses précédentes, le système d'équations (6-1) à (6-3), devient [2] :

$$(a^2 - U^2) \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - U \cdot V \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) + (a^2 - V^2) \cdot \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (6-4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (6-5)$$

6-4 Résolution et mise en forme du problème :

Comme on l'a vu précédemment, nous sommes amenés à étudier l'écoulement du gaz provenant du tube à choc dans le divergent. Ce gaz sera caractérisé par des conditions d'entrée: température, pression, masse volumique et nombre de Mach.

L'écoulement est sonique au col. Il est considéré, dans notre cas, supersonique juste après le col. Avec cette dernière hypothèse, l'équation (6-4) est de type hyperbolique et ne pourra pas être intégré directement. Pour résoudre le système d'équations (6-4) et (6-5), nous sommes amenés à utiliser des méthodes d'approximations numériques. La méthode choisie est celle des caractéristiques présentée au second chapitre. On remarque que l'écoulement vérifie bien les conditions d'application de la méthode. De plus cette dernière a la faculté de pouvoir être utilisée comme méthode inverse.

6-4-1 Hypothèses de départ:

1- Nous supposons que le gaz provenant du tube à choc passe à travers le convergent pour sortir du col à un nombre de Mach sonique et uniforme. Dans la réalité, le gaz entre dans le divergent avec une distribution de Mach circulaire non uniforme [10].

Mais pour des considérations numériques nous supposons que l'écoulement sera uniforme de Mach supérieur à l'unité.

2- Nous étudions l'écoulement d'un gaz à haute température dépassant parfois les 1000 K, seuil au-delà duquel les propriétés calorifiques, telles le C_p et γ du gaz, varient notablement [5]. Pour faire ressortir ces variations importantes les propriétés C_p et γ sont distribuées sur des plages de température et approximées par les équations suivantes [12] :

$$c_p(T) = a_1 + b_1 \cdot T + c_1 \cdot T^2 \quad (6-6)$$

$$\gamma(T) = a_2 + b_2 \cdot T + c_2 \cdot T^2 \quad (6-7)$$

3- Le gaz est supposé thermiquement parfait et suit l'équation des gaz parfaits:

$$P = \rho \cdot r \cdot T \quad (6-8)$$

Tout en tenant compte du fait que (r) a pour expression :

$$r(T) = c_p(T) \cdot \left[\frac{\lambda(T) - 1}{\lambda(T)} \right] = \frac{(a_1 + b_1 \cdot T + c_1 \cdot T^2) \cdot (a_2 + b_2 \cdot T + c_2 \cdot T^2 - 1)}{a_2 + b_2 \cdot T + c_2 \cdot T^2} \quad (6-9)$$

4- L'écoulement est supposé stationnaire, bidimensionnel et polytropique.

5- On considère que la distribution de la température n'est fonction que de l'abscisse. En effet, du fait de la turbulence de l'écoulement dans le volume du divergent, il y a une homogénéisation de la température pour une abscisse donnée.

6-4-2 Mise en forme des équations de l'écoulement :

En tenant compte des hypothèses émises ci-dessus et du choix de la méthode des caractéristiques pour le calcul de l'écoulement, nous pouvons écrire en nous référant à la section (2-4), que l'écoulement est caractérisé par des lignes de Mach qui vérifient les conditions de compatibilité définies par l'équation (2-7):

Ligne de Mach $\xi = \text{cte}$:

$$d\theta = \frac{dV}{V} \cdot \sqrt{M^2 - 1}$$

Ligne de Mach $\eta = \text{cte}$:

$$d\theta = -\frac{dV}{V} \cdot \sqrt{M^2 - 1}$$

Mais du fait de l'introduction des effets haute température (de gaz calorifiquement imparfait), nous sommes amenés à introduire la température dans ces dernières équations. Nous tenons compte pour ce faire des relations liant à la température d'une part le nombre de Mach M et d'autre part la vitesse V .

$$V = M \cdot a$$

Par différentiation de l'équation précédente, nous obtenons:

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} + \frac{da}{a}$$

Par ailleurs :

$$a^2 = \gamma \cdot r \cdot T = \gamma \cdot \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot c_p \cdot T = (\gamma - 1) \cdot c_p \cdot T$$

Donc :

$$2 \cdot \frac{da}{a} = \frac{d(\gamma - 1)}{\gamma - 1} + \frac{dc_p}{c_p} + \frac{dT}{T} \quad (6-10)$$

Calculons alors l'expression :

$$\frac{d(\lambda - 1)}{\lambda - 1} = \frac{d(\lambda - 1)}{dT} \cdot \frac{dT}{\lambda - 1} = \frac{d(a_2 + b_2 \cdot T + c_2 \cdot T^2 - 1)}{dT} \cdot \frac{dT}{(a_2 + b_2 \cdot T + c_2 \cdot T^2 - 1)}$$

ou encore :

$$\frac{d(\lambda - 1)}{\lambda - 1} = \left[\frac{b_2 + 2 \cdot c_2 \cdot T}{a_2 + b_2 \cdot T + c_2 \cdot T^2 - 1} \right] \cdot dT \quad (6-11)$$

De même:

$$\frac{d(c_p)}{c_p} = \left[\frac{b_1 + 2 \cdot c_1 \cdot T}{a_1 + b_1 \cdot T + c_1 \cdot T^2 - 1} \right] \cdot dT \quad (6-12)$$

En introduisant les relations (6-11) et (6-12) dans la relation (6-10) nous trouvons :

$$\frac{da}{a} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{b_1 + 2 \cdot c_1 \cdot T}{a_1 + b_1 \cdot T + c_1 \cdot T^2 - 1} + \frac{b_2 + 2 \cdot c_2 \cdot T}{a_2 + b_2 \cdot T + c_2 \cdot T^2 - 1} + \frac{1}{T} \right\} \cdot dT \quad (6-13)$$

L'expression de dM/M , en tenant compte de l'équation (6-3), devient alors :

$$V dV + c_p dT = 0$$

D'où :

$$V dV = - c_p dT \quad (6-14)$$

Intégrons alors cette équation de T_0 à T :

$$V^2 = -2 \cdot \int_{T_0}^T (a_1 + b_1 \cdot T + c_1 \cdot T^2) \cdot dT = 2 \cdot \left\{ \alpha_1 - \left(a_1 \cdot T + \frac{b_1}{2} \cdot T^2 + \frac{c_1}{3} \cdot T^3 \right) \right\}$$

ou encore :

$$V^2 = 2 \cdot \alpha_1 - 2 \cdot a_1 \cdot T - b_1 \cdot T^2 + \frac{2 \cdot c_1}{3} \cdot T^3 \quad (6-15)$$

$$\text{avec: } \alpha_1 = a_1 \cdot T_0 + \frac{b_1}{2} \cdot T_0^2 + \frac{c_1}{3} \cdot T_0^3 \quad (6-16)$$

D'où, de la relation du nombre de Mach, nous obtenons :

$$M^2 = \frac{V^2}{a^2} = \frac{2 \cdot \alpha_1 - 2 \cdot a_1 \cdot T - b_1 \cdot T^2 + \frac{2 \cdot c_1}{3} \cdot T^3}{(a_1 + b_1 \cdot T + c_1 \cdot T^2) \cdot (a_2 + b_2 \cdot T + c_2 \cdot T^2)} \cdot \frac{1}{T} \quad (6-17)$$

En différenciant l'expression (6-17), nous obtenons:

$$\frac{dM}{M} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2 \cdot (a_1 + b_1 \cdot T + c_1 \cdot T^2)}{2 \cdot \alpha_1 - 2 \cdot a_1 \cdot T - b_1 \cdot T^2 + \frac{2 \cdot c_1}{3} \cdot T^3} + \frac{a_1 + 2 \cdot b_1 \cdot T + 3 \cdot c_1 \cdot T^2}{a_1 \cdot T + b_1 \cdot T^2 + c_1 \cdot T^3} + \frac{b_2 + 2 \cdot c_2 \cdot T^2}{a_2 + b_2 \cdot T + c_2 \cdot T^2 - 1} \right\} \quad (6-18)$$

Nous pouvons alors, en injectant les relations (6-19) et (6-13) dans la relation (2-7), obtenir la fonction F(T) tel que :

$$d\theta = F(T) \cdot dT$$

avec :

$$F(T) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dM}{M} - \frac{d\alpha}{a} \right) \cdot \sqrt{M^2 - 1} \quad (6-19)$$

Donc:

$$F(T) = \frac{1}{2} \cdot \{ Am1 + Am2 - Am3 - 1 \} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot a_1 - 2 \cdot a_1 \cdot T - b_1 \cdot T^2 - \frac{2 \cdot c_1}{3} \cdot T^3}{(a_1 + b_1 \cdot T + c_1 \cdot T^2) \cdot (a_2 + b_2 \cdot T + c_2 \cdot T^2)}} \cdot \frac{1}{T} - 1 \quad (6-20)$$

où :

$$Am1 = \frac{2 \cdot (a_1 + b_1 \cdot T + c_1 \cdot T^2)}{2 \cdot a_1 - 2 \cdot a_1 \cdot T - b_1 \cdot T^2 - \frac{2 \cdot c_1}{3} \cdot T^3}$$

$$Am2 = \frac{(a_1 + 2 \cdot b_1 \cdot T + 3 \cdot c_1 \cdot T^2)}{a_1 \cdot T + b_1 \cdot T^2 + c_1 \cdot T^3}$$

$$Am3 = \frac{(b_1 + 2 \cdot c_1 \cdot T)}{(a_1 + b_1 \cdot T + c_1 \cdot T^2)}$$

Nous avons donc exprimé une relation liant l'angle de déviation de la ligne à la température de l'écoulement de la forme:

pour une ligne de Mach ξ :

$$d\theta = F(T) \cdot dT \quad (6-22)$$

pour une ligne de Mach η :

$$d\theta = -F(T) \cdot dT \quad (6-23)$$

La résolution de ces dernières relations, appelées *équations de Prandtl-Meyer*, nous permettent de déterminer toutes les caractéristiques de l'écoulement en connaissant les déviations à la paroi.

Nous pouvons donc établir un algorithme à partir de ces dernières équations. Cet algorithme nous permet, en combinant un maillage de l'écoulement suivant les lignes de Mach et en considérant une ligne de départ (le col) où toutes les caractéristiques sont connues, de résoudre le système d'équation et de déterminer les caractéristiques dans le divergent. Les lignes de Mach suivent des trajectoires courbées qu'il faut déterminer. Ne disposant pour toute indication que de leur pente ($\tan\beta$), nous avons approximé ces courbes par des droites. En effet, si l'on effectue un maillage fin, la portion de courbe qui sépare deux points sera très petite et l'on pourra l'approximer par une droite de pente $\tan(\beta)$ (figure 6- 1).

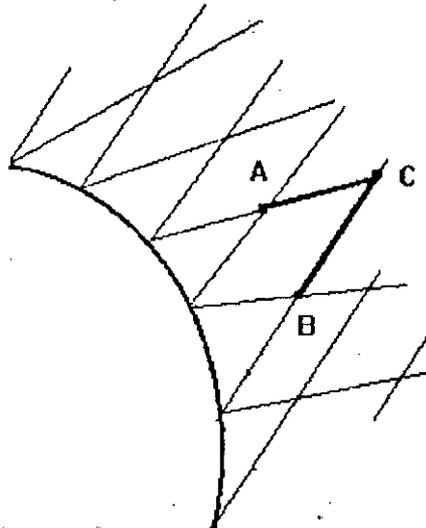


Figure 6-1 : génération du maillage suivant les lignes de Mach.

A partir de ce principe, considérons deux points A et B représentant l'intersection de quatre lignes de Mach connues et déterminons les caractéristiques du point P comme le montre la figure (6-2).

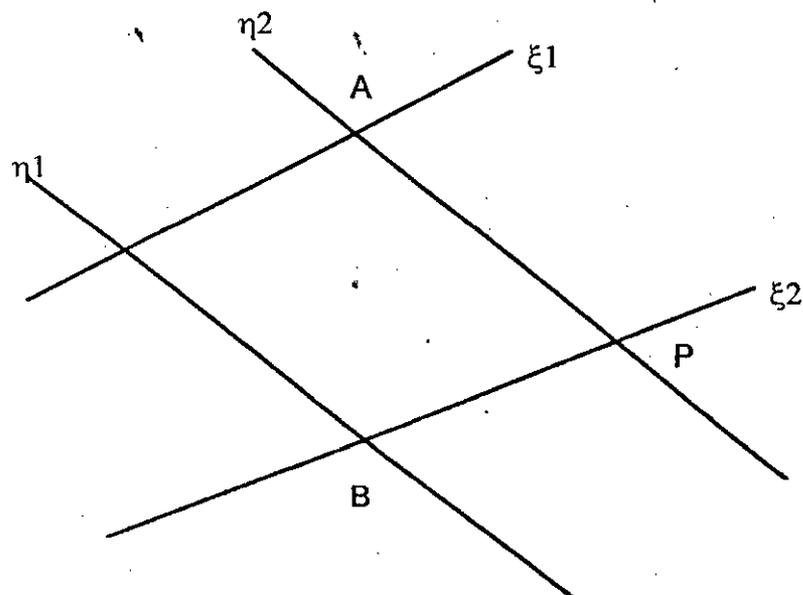


Figure 6-2 : méthode de résolution.

Intéressons-nous alors à la ligne de Mach η_2 . L'intégration de (6-23) donne:

$$\int_{\theta_A}^{\theta_P} d\theta = - \int_{T_A}^{T_P} F(T) \cdot dT$$

$$\theta_P - \theta_A = - \int_{T_A}^{T_P} F(T) \cdot dT \quad (6-24)$$

De même pour la ligne de Mach ξ_2 . L'intégration de (6-22) donne:

$$\int_{\theta_B}^{\theta_P} d\theta = \int_{T_B}^{T_P} F(T) \cdot dT$$

$$\theta_P - \theta_B = \int_{T_B}^{T_P} F(T) \cdot dT \quad (6-25)$$

Les équations (6-24) et (6-25) forment donc un système à deux équations et à deux inconnues. En résolvons ce système nous déterminons la température et l'angle θ au point P. A partir de ces valeurs de température et d'angle, toutes les caractéristiques thermiques du point P seront calculées. Mais comme le second membre des équations est une intégrale difficile à résoudre analytiquement; nous sommes amenés à la résoudre par une méthode numérique. Nous utilisons pour cela la méthode de Simpson pour laquelle le système précédent s'écrit :

$$\theta_P - \theta_A = \frac{h_1}{3} \cdot \left[F(T_A) + F(T_P) + 4 \cdot \sum_{i=1}^n F(T_A + (2 \cdot i - 1) \cdot h_1) + 2 \cdot \sum_{i=1}^n F(T_A + 2 \cdot i \cdot h_1) \right] \quad (6-26)$$

$$\theta_P - \theta_B = -\frac{h_2}{3} \cdot \left[F(T_B) + F(T_P) + 4 \cdot \sum_{i=1}^n F(T_B + (2 \cdot i - 1) \cdot h_2) + 2 \cdot \sum_{i=1}^n F(T_B + 2 \cdot i \cdot h_2) \right] \quad (6-27)$$

Où : (n) est le nombre de point d'intégration

(h_1) le pas d'intégration suivant η_2 :

$$h_1 = \frac{T_P - T_A}{n} \quad (6-28)$$

(h_2) le pas d'intégration suivant ξ_2 :

$$h_2 = \frac{T_p - T_B}{n} \quad (6-29)$$

De ces deux dernières équations, nous obtenons :

$$h_1 = \frac{T_B - T_A}{n} + h_2 \quad (6-30)$$

En faisant la différence entre les équations (6-26) et (6-27), nous aboutissons finalement à :

$$\theta_B - \theta_A = \frac{h_1}{3} \left[F(T_A) + F(T_p) + 4 \cdot \sum_{i=1}^n F(T_A + (2 \cdot i - 1) \cdot h_1) + 2 \cdot \sum_{i=1}^n F(T_A + 2 \cdot i \cdot h_1) \right] + \frac{h_2}{3} \left[F(T_B) + F(T_p) + 4 \cdot \sum_{i=1}^n F(T_B + (2 \cdot i - 1) \cdot h_2) + 2 \cdot \sum_{i=1}^n F(T_B + 2 \cdot i \cdot h_2) \right] \quad (6-31)$$

Grâce aux équations (6-30) et (6-31), il est possible de résoudre le système itératif en faisant varier le pas d'intégration h_2 et en comparant la valeur ($\theta_B - \theta_A$) obtenue par la relation (6-31), à la valeur réelle jusqu'à l'obtention du bon pas. Une fois ce pas déterminé, il sera facile de déterminer T_p et θ_p par simples combinaisons des équations (6-29) et (6-27).

Il nous reste alors à déterminer les valeurs de départ qui correspondent à la déviation initiale, point par point, au col et à la paroi

6-5 Conditions au col:

Se basant sur le fait que l'écoulement dans le divergent doit être strictement supersonique nous avons émis l'hypothèse que le nombre de Mach juste après le col était supérieur à l'unité. De même nous avons supposé que l'écoulement à l'entrée du col était uniforme, mais avec, juste au niveau de la paroi, une déviation $\Delta\theta$ que l'on choisira en fonction du nombre de Mach de sortie et des conditions d'entrée du gaz. Les valeurs initiales de $\Delta\theta$ ne sont ni fixées ni tabulées. Elles sont choisies seulement en tenant compte des problèmes numériques qu'elles posent lors des calculs des caractéristiques.

$\Delta\theta$ fait donc dévier le gaz comme le montre la figure (6-3-a). On remarque alors que toute la partie qui se trouve sous cette première déviation n'est ni définie ni étudiée. C'est pourquoi nous proposons de distribuer la déviation $\Delta\theta$ au col. Cela nous permet de considérer que des lignes de Mach fictives existent au col. Nous pouvons alors déterminer toutes les caractéristiques dans le divergent.

Soit N le nombre de points au col et $\Delta\theta$ la déviation initiale à la paroi. Nous distribuons cette déviation linéairement (figure 6-3-b), et de manière à remplir les conditions aux limites :

$$\begin{cases} r = r_e & , \theta = \Delta\theta & , i = 0 \\ r = -r_e & , \theta = -\Delta\theta & , i = N \end{cases}$$

avec: $\theta_i = a \cdot i + b$

Alors:

$$\theta_i = \left(1 - \frac{2 \cdot i}{N}\right) \cdot \Delta\theta$$

Remarque : Le point se trouvant sur l'axe du divergent ne subit pas de déviation.

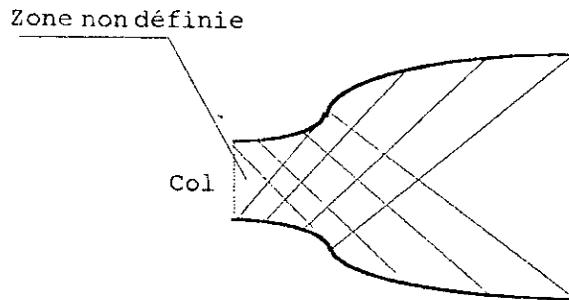
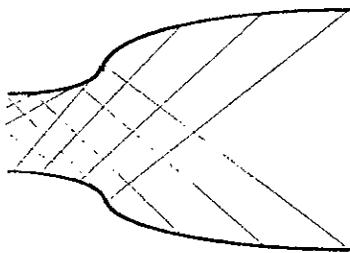
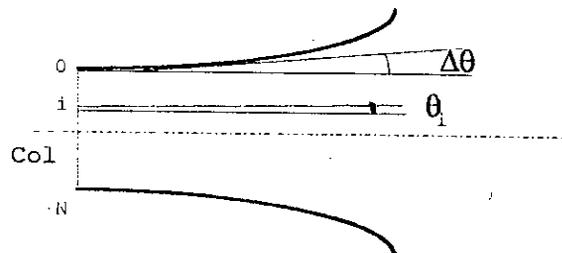


figure 6-3-a : définition de la zone non maillée



Raffinement du maillage.



Distribution de la déviation.

Figure 6-3-b

6-6 Calcul de la déviation maximale et distribution des déviations à la paroi :

6-6-1 Calcul de la déviation maximale de la paroi :

Deux méthodes sont généralement utilisées dans le calcul de l'angle de déviation maximum de la paroi du divergent. Toutes deux permettent d'obtenir un nombre de Mach de sortie fixé.

La première méthode est *analytique*. Elle est fondée sur le fait qu'à l'entrée et à la sortie du divergent l'écoulement est supposé parallèle et uniforme, et que le nombre de Mach est connu. Cela permet de mener le raisonnement suivant. La paroi a un angle de déviation qui varie de zéro à un maximum pour redescendre à zéro. Considérons alors les deux lignes de Mach η_1 à l'entrée et ξ_2 à la sortie. L'angle de déviation maximum correspond alors à l'intersection de ces 2 lignes de Mach (figure 6-4).

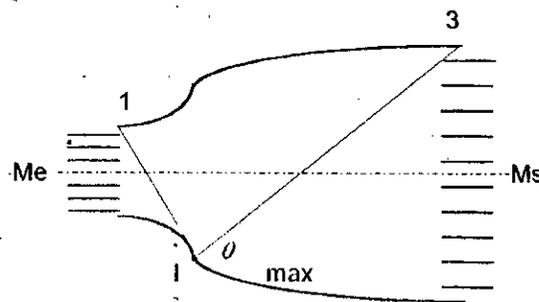


Figure 6-4 : point de déviation maximum

L'équation de Prandtl -Meyer pour les deux lignes de Mach est alors :

$$\theta_1 - \theta_1 = - \int_{r_1}^{r_1} F(T) \cdot dT \quad (6-32)$$

$$\theta_1 - \theta_3 = \int_{r_3}^{r_1} F(T) \cdot dT \quad (6-33)$$

et les conditions aux limites à l'entrée et à la sortie du divergent sont :

au col : $\theta_1 = 0$ et $T_1 = T_e$

à la section de sortie : $\theta_3 = 0$ et $T_3 = T_s$

En faisant la différence entre (6-32) et (6-33), et en injectant les valeurs des conditions aux limites nous trouvons :

$$\theta_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \int_{T_1}^{T_2} F(T) \cdot dT \quad (6-34)$$

La seconde méthode est *géométrique*. On représente les deux lignes de Mach dans le repère hodographe. Le point d'intersection de ces deux lignes représente le point de déviation maximum. En calculant la pente que forme la droite passant par ce point avec l'axe (o,x) nous obtenons l'angle de déviation maximum (figure 6-5).

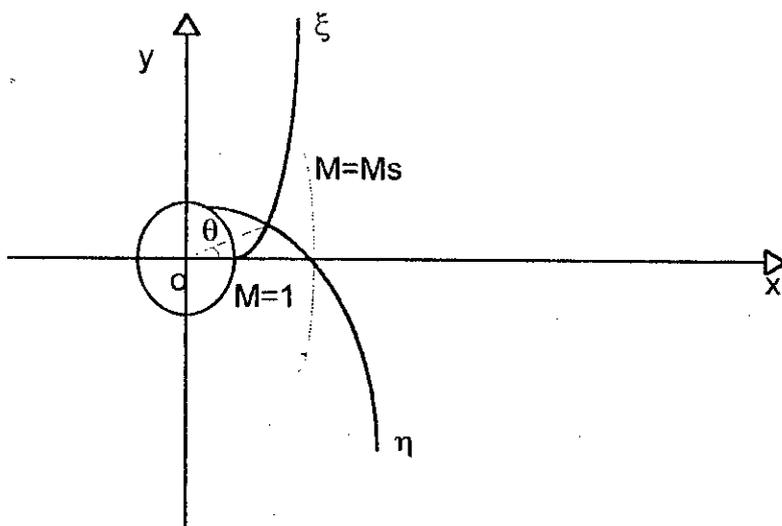


Figure 6-5 : Représentation de la déviation maximum dans le repère hodographe

6-6-2 Déviation à la paroi :

Après avoir déterminé la déviation maximale à la paroi, il est nécessaire de définir les déviations en tout point de celle-ci pour pouvoir résoudre le système d'équations (6-26), (6-27), et (6-30) par la méthode présentée dans la section (6-3-2). Pour ce faire il, faut étudier l'écoulement en deux parties. En effet, lorsque le gaz traverse le col et pénètre dans le divergent il reçoit une série de déviations. Du fait de ces déviations, il y a interaction des différentes lignes de Mach avant leurs réflexions à la paroi. Cette zone est dite *zone complexe*. Arrivé à la section de déviation maximum, il devient alors nécessaire d'éliminer toutes les déviations du gaz pour obtenir un écoulement uniforme à la section de sortie du divergent. Cela s'opère par une correction du profil de la paroi. Cette zone de correction est dite *zone simple*. L'étude de l'écoulement va donc s'opérer séparément sur chaque zone.

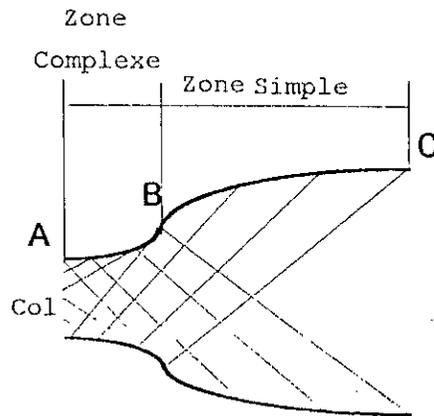


Figure 6-6 : Représentation des différentes zones.

Distribution des déviations de la paroi dans la zone complexe:

Soit I_1 le nombre de point à la paroi de la zone complexe nous avons :

- au col : $\theta = \Delta\theta$,
- et à la fin de la zone complexe $\theta = \theta_{\max}$.

En faisant varier θ proportionnellement au nombre de point à la paroi nous aurons :

$$\theta_i = a \cdot i + b$$

Et en utilisant les conditions aux limites précédemment cités nous obtenons :

$$\theta_i = \left(\frac{i}{I_1} \cdot \left(\frac{\theta_{\max}}{\Delta\theta} - 1 \right) + 1 \right) \cdot \Delta\theta \quad (6-35)$$

Distribution des déviations dans la zone simple :

La condition principale qui se pose à nous dans cette étude est d'éliminer toutes les réflexions des ondes pour assurer un écoulement uniforme et parallèle à la sortie du divergent. Considérons une ligne caractéristique incidente traversée par le gaz. En passant à travers cette ligne, le gaz reçoit une déviation $\Delta\theta$.

Pour corriger la déviation qu'a reçu le gaz il faut le faire passer par une ligne de Mach qui lui impose une déviation égale et de signe inverse à la première. Cela est réalisé en inclinant la paroi d'un angle inverse à celui qui a généré l'onde incidente (figure 6-7).

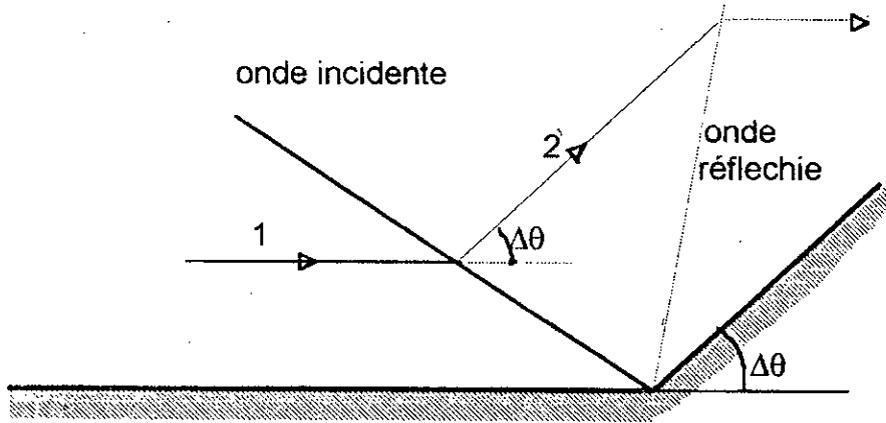


Figure 6-7 a : correction de la déviation

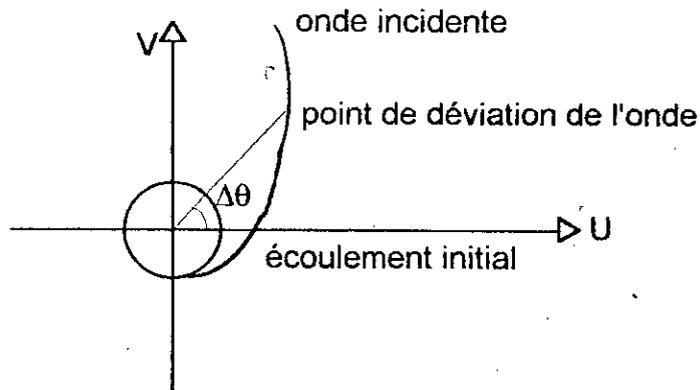


Figure 6-7 b : Déviation du gaz à travers l'onde incidente

De ce fait il faut distribuer les déviations de la paroi de manière à éliminer toutes les déviations que l'on impose au gaz lors de son passage dans la zone complexe. En effet, le gaz sortant de cette dernière a reçu une déviation correspondant à θ_{max} . Il faut distribuer cette déviation sur les ondes réfléchies pour obtenir une déviation nulle à la sortie. Soit I_2 le nombre de point total à la paroi et N le nombre d'onde considère au col. En effectuant de la même manière que pour la zone complexe, on distribue les déviations en fonction des conditions aux limites le long de la paroi comme suit :

$$\theta_i = \frac{\theta_{max}}{I_2 - I_1} \cdot [I_2 - I_1] \quad (6-36)$$

6-7 Détermination des caractéristiques de l'écoulement :

Après avoir défini la méthode de calcul des caractéristiques et les conditions aux limites et maillé le système, nous pouvons maintenant calculer toutes les caractéristiques de l'écoulement des deux principales parties du divergent.

Calcul des caractéristiques dans la zone complexe :

Soit P un point quelconque de l'écoulement n'appartenant pas à la paroi. D'après le maillage que l'on a construit, ce point sera défini par les coordonnées i, j et positionné dans le maillage comme le montre la figure (6-8):

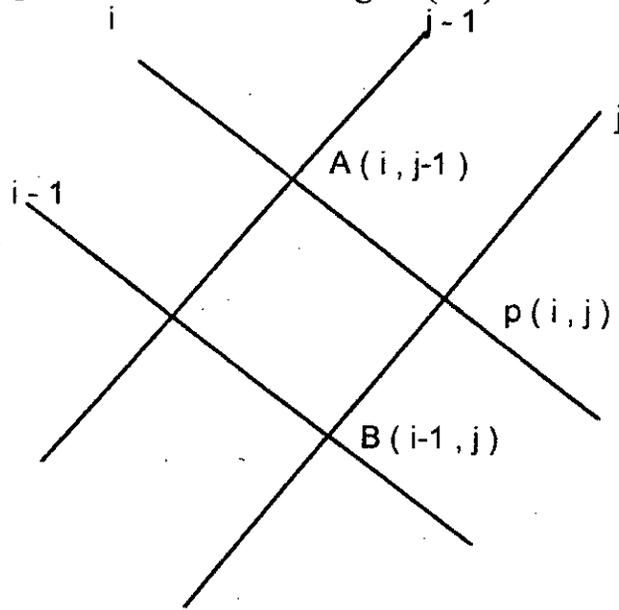


Figure 6-8 : Point quelconque de la zone complexe

Les relations (6-26) et (6-27) nous donnent:

$$\left\{ \theta(i, j) - \theta(i-1, j) = \frac{h_1}{3} \left[F(T(i-1, j)) + F(T(i, j)) + 4 \cdot \sum_{k=1}^n F(T(i-1, j) + (2 \cdot k - 1) \cdot h_1) + 2 \cdot \sum_{k=1}^n F(T(i-1, j) + 2 \cdot k \cdot h_1) \right] \right. \quad (6-37)$$

$$\left. \theta(i, j) - \theta(i, j-1) = -\frac{h_2}{3} \left[F(T(i, j-1)) + F(T(i, j)) + 4 \cdot \sum_{k=1}^n F(T(i, j-1) + (2 \cdot k - 1) \cdot h_2) + 2 \cdot \sum_{k=1}^n F(T(i, j-1) + 2 \cdot k \cdot h_2) \right] \right. \quad (6-38)$$

De plus l'équation (6-31) donne:

$$\theta(i, j-1) - \theta(i-1, j) = \frac{h_1}{3} \left[F(T(i-1, j)) + F(T(i, j)) + 4 \cdot \sum_{k=1}^n F(T(i-1, j) + (2 \cdot k - 1) \cdot h_1) + 2 \cdot \sum_{k=1}^n F(T(i-1, j) + 2 \cdot k \cdot h_1) \right] - \frac{h_2}{3} \left[F(T(i, j-1)) + F(T(i, j)) + 4 \cdot \sum_{k=1}^n F(T(i, j-1) + (2 \cdot k - 1) \cdot h_2) + 2 \cdot \sum_{k=1}^n F(T(i, j-1) + 2 \cdot k \cdot h_2) \right] \quad (6-39)$$

Ces trois dernières équations et l'équation (6-30) nous permettent, grâce à la méthode du *prédicateur de Newton*, de déterminer la valeur de h_2 et donc de calculer toutes les caractéristiques au point P.

Soit maintenant un point P de l'écoulement appartenant à la paroi. D'après le maillage que l'on a construit, le point P sera défini par les coordonnées i,j et positionné dans le maillage comme suit, figure (6-9):

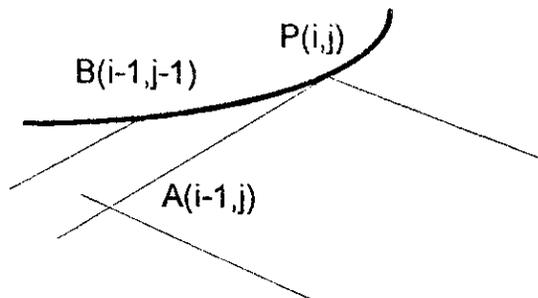


Figure (6-9): Point appartenant à la paroi

Dans ce cas, il est plus simple de déterminer les caractéristiques de l'écoulement car l'inconnue n'est que la température à la paroi, la déviation étant déjà connue. Pour ce faire, on utilise le point A de coordonnée (i-1,j) pour obtenir l'équation (6-40) avec laquelle on détermine la température et les caractéristiques soit;

$$\theta(i,j) - \theta(i-1,j) = \frac{h_1}{3} \left[F(T(i-1,j)) + F(T(i,j)) + 4 \cdot \sum_{k=1}^n F(T(i-1,j) + (2 \cdot k - 1) \cdot h_1) + 2 \cdot \sum_{k=1}^n F(T(i-1,j) + 2 \cdot k \cdot h_1) \right] \quad (6-40)$$

Calcul des caractéristiques dans la zone simple:

Cette partie est caractérisée par le fait qu'il n'y a pas d'interaction entre les ondes provenant de la zone complexe. Cependant, une partie interne à la zone simple subit une interaction d'ondes. Cette région est appelée zone conique du fait de sa forme. En effet, après la dernière réflexion dans la zone complexe, les lignes de Mach se propagent vers la zone simple pour se croiser dans une petite zone et atteindre la paroi pour subir la correction d'angle figure (6-10).

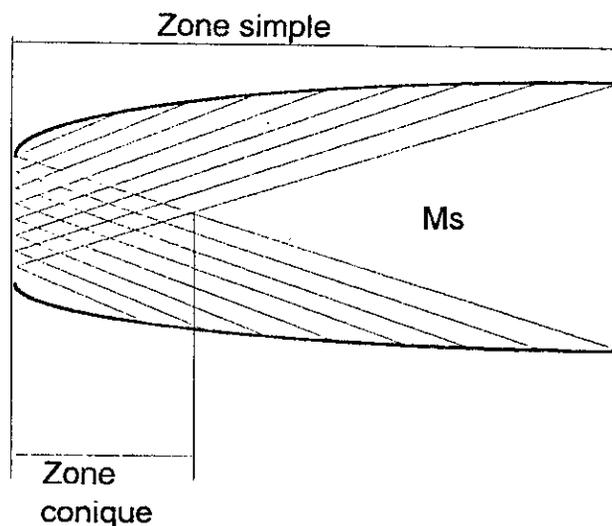


Figure 6-10: Définition de la zone simple et conique

En utilisant la même méthode que pour la zone complexe, nous déterminons les caractéristiques de l'écoulement dans la zone conique grâce aux relations (6-37), (6-38) et (6-39) et à la paroi à l'aide de la relation (6-40).

6-8 Calcul des caractéristiques thermodynamiques :

Nous avons choisi de déterminer les caractéristiques de l'écoulement dans la tuyère en supposant que le gaz est thermiquement parfait et calorifiquement imparfait. Nous avons en effet supposé une distribution de γ sur des plages de température (Eq. 6-6). Nous avons grâce à cela émis l'hypothèse de l'écoulement polytropique par partie. C'est à dire que pour deux points successifs nous avons deux températures différentes mais un γ unique qui est la moyenne des deux chaleurs spécifiques correspondantes aux températures de ces points. De ce fait on peut déduire les relations de récurrences sur la pression et la masse volumique suivantes [12] :

$$\frac{P_m}{P_0} = \prod_{i=1}^m \left(\frac{T_{i-1}}{T_i} \right)^{\frac{k_{(i-1)}}{k_{(i)}-1}} \quad (6-41)$$

$$\frac{\rho_m}{\rho_0} = \prod_{i=1}^m \left(\frac{T_{i-1}}{T_i} \right)^{\frac{1}{k_{(i)}-1}} \quad (6-42)$$

$$\text{avec: } k_{(i-1)} = \frac{k_{(i)} + k_{(i-1)}}{2} \quad (6-43)$$

6-9 Calcul de la longueur de la tuyère :

Pour déterminer la longueur de divergent commençons, comme pour la détermination des caractéristiques du divergent, par le calcul des coordonnées des points de départ qui sont les points formants la section du col.

Soit le repère (0,x,y) se trouvant au col et sur l'axe de la tuyère, et soit (De) le diamètre au col. Les points appartenant au col seront alors définis comme suit :

$$\begin{aligned} X &= 0 \\ \text{et} \\ Y(i) &= \left(1 - 2 \cdot \frac{i}{N} \right) \cdot \frac{D_c}{2} \end{aligned} \quad (6-44)$$

Soit maintenant un point P du divergent. Déterminons ces coordonnées par rapport au col. Trois cas se présentent à nous .

1- si le point appartient à la paroi supérieure (figure 6-11-a) :

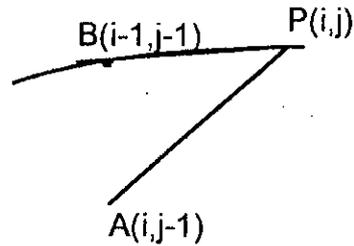


Figure 6-11-a: Coordonnées d'un point à la paroi supérieure

Ecrivons les équations des droites [AP] et [BP], puis calculons leur intersection. Elle nous donnera l'abscisse X_p . Injectons cette dernière dans la relation de l'une des droites pour obtenir :

$$Y_p = Y_B + (X_p - X_B) \cdot \operatorname{tg}(\theta_B)$$

$$Y_p = Y_A + (X_p - X_A) \cdot \operatorname{tg}(\theta_A + \beta_A)$$

d'où:

$$X_p = \frac{Y_B - Y_A + X_A \cdot \operatorname{tg}(\theta_A + \beta_A) - X_B \cdot \operatorname{tg}(\theta_B)}{\operatorname{tg}(\theta_A + \beta_A) - \operatorname{tg}(\theta_B)}$$

(6-45)

$$Y_p = Y_B + (X_p - X_B) \cdot \operatorname{tg}(\theta_B)$$

2- Si le point n'appartient pas à la paroi:

En effectuant le même raisonnement que précédemment, écrivons les équations des droites entre AP et BP figure (6-11-b). Nous obtenons :

$$Y_p = Y_B + (X_p - X_B) \cdot \text{tg}(\theta_B - \beta_B)$$

$$Y_p = Y_A + (X_p - X_A) \cdot \text{tg}(\theta_A + \beta_A)$$

d'où:

$$X_p = \frac{Y_B - Y_A + X_A \cdot \text{tg}(\theta_A + \beta_A) - X_B \cdot \text{tg}(\theta_B - \beta_B)}{\text{tg}(\theta_A + \beta_A) - \text{tg}(\theta_B - \beta_B)}$$

(6-46)

$$Y_p = Y_B + (X_p - X_B) \cdot \text{tg}(\theta_B - \beta_B)$$

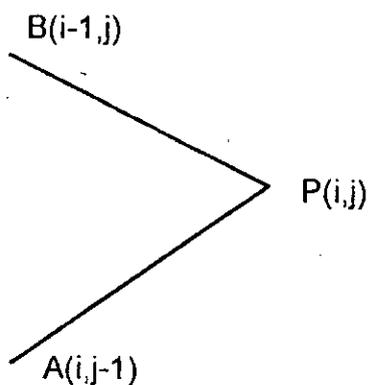


Figure 6-11-b : coordonnées d'un point quelconque.

3- Si le point appartient à la paroi inférieure : (figure 6-11-c)

Dans ce cas l'onde incidente est définie par un angle $(\theta - \beta)$. Le système (6-45) devient alors :

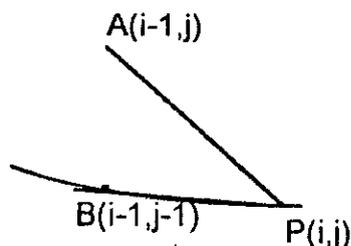


Figure 6-11-c : coordonnées d'un point à la paroi inférieure.

$$Y_p = Y_B + (X_p - X_B) \cdot \operatorname{tg}(\theta_B)$$

$$Y_p = Y_A + (X_p - X_A) \cdot \operatorname{tg}(\theta_A - \beta_A)$$

d'où:

$$X_p = \frac{Y_B - Y_A + X_A \cdot \operatorname{tg}(\theta_A - \beta_A) - X_B \cdot \operatorname{tg}(\theta_B)}{\operatorname{tg}(\theta_A - \beta_A) - \operatorname{tg}(\theta_B)}$$

(6-47)

$$Y_p = Y_B - (X_p - X_B) \cdot \operatorname{tg}(\theta_B)$$

6-10 Méthode de Puckett:

Cette méthode est une variante de la méthode de Busemann [11]. Elle diffère dans le fait que l'on s'impose un nombre de Mach et une déviation à l'interface des zones complexe et simple. Nous résolvons alors les deux écoulements séparément pour obtenir le profil des zones complexe et simple.

En effet l'expérience a montré que dans des plages d'erreur assez raisonnables, on peut considérer que l'écoulement à l'interface est de Mach uniforme, et que la déviation des lignes de Mach varie linéairement de l'axe de la tuyère vers la paroi [10].

Partant de ces hypothèses, nous pouvons amorcer le calcul des caractéristiques et du profil de la zone simple. Ce calcul s'effectue de la même manière que dans la méthode de Busemann.

Reste alors le calcul du profil de la zone complexe qui donne les caractéristiques de l'écoulement. Choisissons un angle de déviation θ_1 inférieur à l'angle de déviation maximum de la paroi θ_{\max} , calculé précédemment et qui assure l'isentropie de l'écoulement. Dans ce cas il existe, pour un même profil de la zone simple une infinité de profils de la zone complexe qui vérifient les conditions à l'interface des deux zones.

Il est donc nécessaire d'effectuer un choix quant au profil à adopter et de vérifier si ce dernier remplit la tâche auquel il est voué. Dans notre cas la tuyère a pour rôle d'accélérer le gaz pour atteindre des Mach élevés, dans les limites d'une expérimentation en laboratoire d'essai.

Il est nécessaire de prendre en compte aussi les difficultés de réalisation de ce type de matériel. Pour ces raisons, et vu les avantages que peut offrir un profil conique, nous avons opté pour ce dernier comme forme de la zone complexe. Il offre la possibilité d'une étude simple de l'écoulement (unidimensionnel). Il permettra aussi dans le futur l'introduction des effets de dissociation qui pourront être traités dans la zone complexe (profil conique) jusqu'à l'interface des deux zones [13].

6-11 Conclusion:

Nous avons présenté dans ce chapitre deux méthodes de dimensionnement de tuyère supersonique. La première, celle de Busemann, a l'avantage d'être précise et d'offrir la possibilité d'obtenir des tuyères à profil complexe. Cette méthode nécessite cependant un temps de calcul important. La seconde méthode, celle de Puckett, n'est qu'une variante de la méthode de Busemann. Ces deux méthodes ont été développées et résolues numériquement pour obtenir des profils de tuyères assurant les conditions requises à l'expérimentation (parallélisme et nombre de Mach à la sortie).

Nous venons de faire le calcul du profil de la paroi du divergent dans le cas d'un fluide non visqueux. Dans le chapitre suivant nous calculons la couche limite pour apporter une correction au profil de la paroi tenant compte de la viscosité du fluide.

CHAPITRE 7

COUCHE LIMITE DANS LE
DIVERGENT

7-1 Introduction :

Nous avons déterminé, au chapitre 6, les caractéristiques thermodynamiques et géométriques de l'écoulement à la paroi du divergent, avec l'hypothèse de gaz calorifiquement imparfait (effet de la haute température) et sans tenir compte de l'effet de viscosité. Nous avons donc supposé que le fluide glisse sur la paroi sans y adhérer.

En réalité, tous les gaz possèdent un coefficient de viscosité non nul. Le fluide adhère donc à la paroi du divergent où sa vitesse devient nulle. La vitesse augmente quand le fluide s'éloigne de la paroi, jusqu'à atteindre la vitesse de l'écoulement vers l'axe de la tuyère. Nous avons donc, près de la paroi, un ralentissement du gaz de travail dû à l'effet de viscosité, et donc création d'une couche limite. Pour déterminer toutes les caractéristiques de la couche limite, et la température de la paroi; nous sommes amenés à étudier ce phénomène de ralentissement à la paroi. Nous allons, pour ce faire, utiliser les résultats obtenus dans le chapitre 6, tout en tenant compte de l'effet de haute température et de l'axisymétrie.

7-2 Conditions initiales sur l'écoulement :

Nous étudions l'écoulement de fluide visqueux en émettant quelques hypothèses. Nous présentons ces hypothèses, et quelques notions nécessaires pour effectuer notre étude ci-après.

a- Nous considérons toujours que l'écoulement est uniforme et parallèle au col. De plus, on suppose la couche limite laminaire [14]. En effet, le gradient de pression (défavorable) qui sévit dans le volume du divergent provoque un phénomène de transition qui renverse le régime turbulent en un régime laminaire près de la paroi.

b- Nous calculons la couche limite à partir du col. Nous devons donc étudier l'écoulement à l'intérieur du convergent. Dans ce dernier, on note l'existence d'un gradient de pression négatif favorable qui colle la couche limite à la paroi. Par ailleurs, l'écoulement tend à se stabiliser et à s'uniformiser près du col pour atteindre le nombre de Mach unité. Ces deux constatations permettent de supposer que la couche limite aura une épaisseur très faible (presque nulle) au col et que l'on supposera donc nulle au départ [15] (figure 7-1).

Par conséquent, pour $x = 0$, nous avons : $\delta = 0$ et $\delta_2 = 0$.

Où δ , δ_2 sont respectivement l'épaisseur de la couche limite totale et l'épaisseur de la quantité de mouvement.

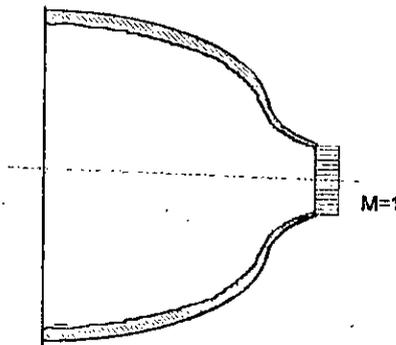


Figure 7-1 épaisseur de la couche limite au col.

c- L'écoulement est axisymétrique.

d- La paroi est adiabatique : $\left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]_{r=0} = 0$.

e- Nous adoptons une distribution polynomiale par tranche de température du nombre de Prandtl, de la forme:

$$Pr = a_3 + b_3 \cdot T + c_3 \cdot T^2 \quad (7-1)$$

L'expression de la viscosité est elle donnée par la relation de Sutherland [16] :

$$\mu = \frac{1.49 \cdot T^{3/2}}{T + 120} \cdot 10^{-6}$$

avec (T) en Kelvin et (μ) en (m²/s)

7-3 Equations de base de la couche limite :

Pour un écoulement bidimensionnel, les équations fondamentales de la couche limite sont :

1- Equation de continuité :

$$\frac{\partial[\rho \cdot U]}{\partial x} + \frac{\partial[\rho \cdot V]}{\partial y} = 0$$

2- Equation de quantité de mouvement :

$$\rho \cdot \left[U \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \right] = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \right]$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

3- Equation de l'énergie:

$$\rho \cdot \left[U \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right] = U \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \cdot \left[\frac{\partial U}{\partial y} \right]^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\kappa}{c_p} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right]$$

avec

$$h = c_p \cdot T \quad (7-2)$$

où h est l'enthalpie statique.

Et grâce aux hypothèses que l'on a émises précédemment et aux simplifications de Prandtl, ces équations deviennent.

1- Equation de continuité :

$$\frac{\partial[\rho \cdot U]}{\partial x} + \frac{\partial[\rho \cdot V]}{\partial y} = 0 \quad (7-3)$$

2- Equation de quantité de mouvement :

$$\left[U \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \right] = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (7-4)$$

3- Equation de l'énergie:

$$\left[U \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] = \alpha \cdot \left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] + \frac{\nu}{c_p} \cdot \left[\frac{\partial h}{\partial y} \right]^2 \quad (7-5)$$

On remarque aisément que ce système d'équations différentielles est quasiment irresolvable sous cette forme. Nous allons pour cela essayer de le simplifier par des transformations. C'est ce que nous développons dans la section qui suit.

7-4 Modélisation et mise en forme des équations de quantité de mouvement et d'énergie:

La plupart des méthodes de détermination de couches limites en compressible ramène ce problème en incompressible. Ceci est réalisé au moyen de changement de variable et en introduisant les différentes épaisseurs de couches limites; les équations deviennent intégrables numériquement ou admettent des solutions approchées.

Les épaisseurs de couche limite considérées sont:

Epaisseur de déplacement :

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho \cdot U}{\rho_e \cdot U_e} \right) \cdot dy \quad (7-6)$$

Epaisseur de quantité de mouvement :

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{\rho \cdot U}{\rho_e \cdot U_e} \cdot \left(1 - \frac{U}{U_e} \right) \cdot dy \quad (7-7)$$

Epaisseur d'énergie :

$$\delta_3 = \int_0^{\delta} \frac{\rho \cdot U}{\rho_e \cdot U_e} \cdot \left(1 - \frac{U^2}{U_e^2} \right) \cdot dy \quad (7-8)$$

Epaisseur d'enthalpie :

$$\delta_H = \int_0^{\delta} \frac{\rho \cdot U}{\rho_e \cdot U_e} \cdot \left(\frac{h}{h_e} - 1 \right) \cdot dy \quad (7-9)$$

Epaisseur de vitesse:

$$\delta_U = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{U}{U_e} \right) \cdot dy \quad (7-10)$$

Où U est la vitesse dans la couche limite, U_e Vitesse en dehors de la couche limite, h enthalpie statique, ρ densité et δ épaisseur de la couche limite.

Le changement de repère consiste pour nous à choisir, comme origine le point se trouvant sur la paroi du col (figure 7-2).

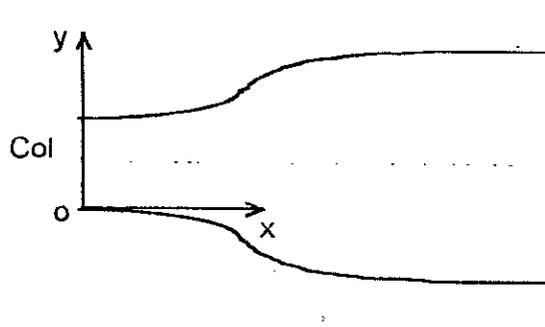


Figure 7-2: Repérage de la couche limite.

En intégrant les relations (7-3) et (7-4), et en introduisant les relations (7-6) et (7-7), nous obtenons la relation appelée équation de *Von-Karman* pour les gaz compressibles [17].

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{\delta_2}{U_e} \cdot \frac{dU_e}{dx} \cdot \left[2 + \frac{\delta_1}{\delta_2} - M^2 \right] = \frac{\mu_w}{\rho_e \cdot U_e^2} \cdot \left[\frac{\partial U}{\partial y} \right]_w \quad (7-11)$$

De même, en combinant les équations (7-3), (7-4) et (7-5) et après intégration suivant la direction y on trouve:

$$\frac{1}{2} \cdot U^2 \cdot \delta_3 = h_e \cdot \delta_h + \frac{1}{\rho_e U} \cdot \int_0^x \left(\frac{v}{c_p} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right)_w \cdot dx \quad (7-12)$$

De plus la relation (7-2) nous permet d'écrire que:

$$h_e = c_p \cdot T_e = \frac{M_e^2}{\gamma - 1} \quad (7-13)$$

ce qui donne :

$$\delta_h = \frac{1}{2} \cdot (\gamma - 1) \cdot M^2 \cdot \delta_3 \quad (7-14)$$

de plus :

$$M = \frac{U}{a} \quad (7-15)$$

et

$$\delta_h = \delta_1 - \delta_v \quad (7-16)$$

On obtient, après avoir injecté les relations (7-14), (7-15) et (7-16) dans la relation (7-12) et après dérivation par rapport à x , l'équation intégrale de l'énergie :

$$\frac{d\delta_3}{dx} + \frac{\delta_3}{U} \cdot \frac{dU_e}{dx} \cdot [3 - (2 - \gamma) \cdot M^2] = \frac{2}{\rho_e \cdot U_e^3} \cdot \int_0^{\delta} \mu_w \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \cdot dy \quad (7-17)$$

Grunshwitz, en se fondant sur les équations de quantité de mouvement et de l'énergie (7-11) et (7-17), a émit des approximations en tenant compte du fait que la paroi est supposée adiabatique [17]. Sa méthode offre, dans notre cas, des avantages intéressants: une valeur du Prandtl arbitraire et une simplicité d'utilisation tout en offrant de très bons résultats.

Soit alors :

$$\eta = \frac{1}{\delta'(x)} \cdot \int_0^{\delta(x)} \frac{\rho}{\rho_e} \cdot dy \quad (7-18)$$

tel que :

$$\delta'(x) = \int_0^{\delta} \frac{\rho}{\rho_e} \cdot dy \quad (7-19)$$

et $\delta(x)$ épaisseur de la couche limite en x . Grâce à cette nouvelle variable η adimensionnelle, écrivons une distribution polynomiale du quatrième ordre de la vitesse par rapport à la vitesse extérieure du gaz [14]:

$$\frac{U}{U_e} = c_1 \cdot \eta + c_2 \cdot \eta^2 + c_3 \cdot \eta^3 + c_4 \cdot \eta^4 \quad (7-20)$$

Les constantes C_1, C_2, C_3, C_4 , seront alors calculées à partir des conditions limites sur la vitesse où :

$$\begin{cases} y=0 & , & U=0 & , & v \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dP}{dx} = -U_e \cdot \frac{dU_e}{dx} \\ y=\delta & , & U=U_e & & \\ y=\delta & , & \frac{\partial U}{\partial Y} = 0 & , & \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne, après résolution du système.

$$c_1 = 2 + \frac{\lambda}{6} \quad , \quad c_2 = \frac{-\lambda}{2} \quad , \quad c_3 = \frac{\lambda}{2} - 2 \quad , \quad c_4 = 1 - \frac{\lambda}{6}$$

avec:

$$\lambda = \frac{\rho_e}{\rho_w} \cdot \frac{\delta_2}{v_e} \cdot \frac{dU_e}{dx} \quad (7-21)$$

où λ est un facteur caractérisant la forme du profil des vitesses. Il est déterminé à partir de l'équation de quantité de mouvement.

D'autre part, on peut approximer l'enthalpie par un polynôme de degrés cinq. Nous utilisons à la place de l'enthalpie la quantité $\left(1 - \frac{U}{U_e}\right) \cdot \frac{\rho_e}{\rho}$ qui suit le même type de distribution [15]:

$$\left(1 - \frac{U}{U_e}\right) \cdot \frac{\rho_e}{\rho} = b + b_1 \cdot \eta + b_2 \cdot \eta^2 + b_3 \cdot \eta^3 + b_4 \cdot \eta^4 + b_5 \cdot \eta^5 \quad (7-22)$$

Les constantes $b, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$, devront alors satisfaire cinq conditions aux limites. Or, dans notre problème, nous n'avons que quatre conditions déterminées. La cinquième est le rapport des densités entre la paroi et l'intérieur de l'écoulement qui est impossible à déterminer sans mesure physique. Cependant, grâce à cette inconnue nous pouvons déduire la température de la paroi car :

$$\text{pour : } \eta = 0 \quad , \quad b = \frac{\rho_e}{\rho_w} = \frac{T_w}{T_e}$$

Cette constante sera alors déterminée par la suite lors de la résolution de l'équation intégrale.

7-5 Simplification des équations intégrales :

Introduisons le facteur de forme noté k , caractérisant lui aussi le profil des vitesses dans la couche limite :

$$k = \lambda \cdot \left(\frac{\delta_2}{\delta'}\right) = b \cdot \frac{\delta_2}{v_e} \cdot \frac{dU_e}{dx} \quad (7-23)$$

Après introduction de la forme de U/U_e (relation 7-20) dans la relation (7-6) et (7-8) et intégration nous obtenons [17] :

$$\frac{\delta_1}{\delta'} = \frac{3}{10} - \frac{1}{120} \cdot \lambda \quad (7-24)$$

$$\frac{\delta_2}{\delta'} = \frac{37}{315} - \frac{1}{945} \cdot \lambda - \frac{1}{9072} \cdot \lambda^2 \quad (7-25)$$

$$\frac{\delta_3}{\delta'} = \frac{1}{4324320} \cdot (798048 - 4656 \cdot \lambda - 758 \cdot \lambda^2 - 7 \cdot \lambda^3) \quad (7-26)$$

En remplaçant ces relations dans l'équation intégrale (7-11), et après simplification et introduction des fonctions universelles [17] :

$$F_1(k) = 2 \cdot \frac{\delta_2}{\delta'} \cdot \left[1 - \frac{1}{15} \cdot \lambda + \frac{1}{240} \cdot \lambda^2 \right] \quad (7-27)$$

$$F_2(k) = 1 - \frac{\gamma-1}{2} \cdot \frac{\delta'}{\delta_2} \cdot \left[\frac{\delta_2}{\delta'} - P_r \cdot \frac{(12+\lambda)^2}{2160} \right] \quad (7-28)$$

$$F_3(k) = \frac{\gamma-1}{2} \cdot \left\{ 2 - \frac{\delta'}{\delta_2} \cdot \left[\frac{\delta_3}{\delta'} - P_r \cdot \frac{(12+\lambda)^2}{2160} \right] \right\} \quad (7-29)$$

$$F_4(k) = \frac{\gamma-1}{2} \cdot \left\{ 2 - \frac{\delta'}{\delta_2} \cdot \left[\frac{\delta_3}{\delta'} - \frac{(12+\lambda)^2}{2160} \right] \right\} \quad (7-30)$$

on obtient :

$$\frac{\delta_2}{v_e} \cdot U_e \cdot \frac{d\delta_2}{dx} = F_1(k) - \frac{k}{b_0} \cdot [2 - M^2 \cdot F_2(k)] \quad (7-31)$$

De même, en injectant ces fonctions dans l'équation (7-17), nous obtenons:

$$b = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M^2 \right] \cdot \frac{[1 + M^2 \cdot F_3(k)]}{[1 + M^2 \cdot F_4(k)]} \quad (7-32)$$

Ces deux équations (7-31) et (7-32) sont les équations de quantité de mouvement et d'énergie, modifiées et réduites, que nous pouvons utiliser maintenant pour calculer la couche limite. Nous introduisons aussi dans la résolution l'équation de cisaillement à la paroi pour borner λ .

$$\frac{\tau_w}{\rho_e \cdot U_e^2} = \frac{v_e}{U_e \cdot \delta'} \cdot \left(2 + \frac{1}{6} \cdot \lambda \right) \quad (7-33)$$

Donc, pour qu'il y ait décollement de la couche limite, il faudrait que τ_w soit nul; d'où:

$$2 + \frac{1}{6} \cdot \lambda = 0 \quad \text{donc :} \quad \lambda = -12 \quad \text{est la valeur limite de } \lambda.$$

7-6 Résolution du système d'équations intégrales :

Au chapitre précédent nous avons déterminé un système à deux équations qui nous permettra de calculer la couche limite. Pour réaliser ce calcul, nous introduisons la variable :

$$Z = \delta_2^2 \quad (7-34)$$

L'équation intégrale de la quantité de mouvement (7-31) devient pour tous points (i) de la paroi, après injection de cette variable:

$$\left(\frac{dZ}{dx} \right)_i = 2 \cdot \frac{v_e}{U_{ei}} \left\{ F_1(k_i) - \frac{k_i}{b_i} \cdot (2 - M_i^2 \cdot F_2(k_i)) \right\} \quad (7-35)$$

Introduisons alors à cette équation l'hypothèse de l'axisymétrie de l'écoulement grâce aux transformations de Mangler [14]. Ces dernières permettent de retrouver les caractéristiques de la couche limite dans le cas axisymétrique à partir du cas bidimensionnel. Ces transformations consistent en des changements de coordonnées et de vitesses donnés par les relations suivantes :

$$x = \frac{1}{L^2} \cdot \int_0^{\bar{x}} r(x) \cdot dx \quad (7-36)$$

$$y = \frac{r(\bar{x})}{L} \cdot \bar{y} \quad (7-37)$$

$$U = \bar{U} \quad (7-38)$$

$$V = \frac{L}{r} \cdot \left(\bar{V} + \frac{\bar{r}}{r} \cdot y \cdot \bar{U} \right) \quad (7-39)$$

avec: $\bar{x}, \bar{y}, \bar{U}, \bar{V}, \bar{U}_e$, les paramètres de l'écoulement axisymétrique,
 $r(\bar{x})$ le rayon de tuyère à \bar{x} ,
 (L) la longueur sur laquelle est calculée le nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{U_\infty \cdot L}{\nu}$$

où U_∞ est la vitesse à la sortie de la tuyère et L représente la longueur de la paroi du divergent.

De la relation (7-37) nous tirons:

$$dx = \frac{r^2(x)}{L} \cdot d\bar{x} \quad (7-40)$$

$$dy = \frac{r(x)}{L} \cdot d\bar{y} \quad (7-41)$$

En injectant ces relations dans la relation (7-35), il vient :

$$\left(\frac{dZ}{d\bar{x}} \right)_i = 2 \cdot \frac{r^2(\bar{x})}{L^2} \cdot \frac{v_e}{\bar{U}_e} \left\{ F_1(k_i) - \frac{k_i}{b_i} \cdot (2 - M_i^2 \cdot F_2(k_i)) \right\} \quad (7-42)$$

Pour des points assez rapprochés nous écrivons:

$$\left(\frac{dZ}{d\bar{x}} \right)_i = \frac{Z_{i+1} - Z_i}{\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i} \quad (7-43)$$

L'équation (7-42) devient alors :

$$Z_{i+1} = 2 \cdot \frac{r^2(\bar{x})}{L^2} \cdot \frac{v_e}{\bar{U}_e} \left\{ F_1(k_i) - \frac{k_i}{b_i} \cdot (2 - M_i^2 \cdot F_2(k_i)) \right\} \cdot (\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i) + Z_i \quad (7-44)$$

De même nous pouvons discrétiser le terme :

$$\left(\frac{dU_e}{d\bar{x}} \right)_i = \frac{L^2}{r^2(\bar{x})} \cdot \left(\frac{dU_e}{d\bar{x}} \right)_i = \left[\frac{U_{e\ i+1} - U_{e\ i}}{\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i} \right] \cdot \frac{L^2}{r^2(\bar{x})} \quad (7-45)$$

remplaçons cette valeur dans la relation (7-23) qui donne la fonction de forme k_{i+1} pour obtenir :

$$k_{i+1} = b_{i+1} \cdot \left[\frac{Z_{i+1}}{v_{e\ i+1}} \right] \cdot \left[\frac{\bar{U}_{e\ i+1} - \bar{U}_{e\ i}}{\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i} \right] \cdot \frac{L^2}{r^2(\bar{x})} \quad (7-46)$$

L'équation intégrale de l'énergie (7-32) devient alors pour le point (i+1) :

$$b_{i+1} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_{i+1}^2 \right] \cdot \frac{[1 + M_{i+1}^2 \cdot F_3(k_{i+1})]}{[1 + M_{i+1}^2 \cdot F_4(k_{i+1})]} = \frac{T_{w_{i+1}}}{T_{e_{i+1}}} \quad (7-47)$$

Nous obtenons finalement un système à trois équations :

$$Z_{i+1} = 2 \cdot \frac{r^2(x)}{L^2} \cdot \frac{v_e}{U_{ei}} \left\{ F_1(k_i) - \frac{k_i}{b_i} \cdot [2 - M_i^2 \cdot F_2(k_i)] \right\} \cdot \left(\bar{x}_{i+1} + \bar{x}_i \right) + Z_i \quad (7-48)$$

$$k_{i+1} = b_{i+1} \cdot \left[\frac{Z_{i+1}}{v_{e_{i+1}}} \right] \cdot \left[\frac{\bar{U}_{e_{i+1}} - \bar{U}_{e_i}}{\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i} \right] \cdot \frac{L^2}{r^2(\bar{x})} \quad (7-49)$$

$$b_{i+1} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_{i+1}^2 \right] \cdot \frac{[1 + M_{i+1}^2 \cdot F_3(k_{i+1})]}{[1 + M_{i+1}^2 \cdot F_4(k_{i+1})]} = \frac{T_{w_{i+1}}}{T_{e_{i+1}}} \quad (7-50)$$

Nous déterminons la valeur de λ_i en résolvant ce système par itérations. Notre test de convergence est un test d'égalité : la valeur de k_{i+j} , calculé par l'équation (7-49), doit être égal à la valeur théorique de la relation (7-23).

Cependant, avant de résoudre ce système, il faut déterminer les valeurs de départ des itérations. Elles sont définies par les conditions aux limites

valeurs de départ :

Les conditions aux limites au col sont données par :

$$\bar{x} = 0 \quad , \quad \delta = \delta_2 = 0$$

et

$$M = M_e = 1$$

d'où:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = \frac{\gamma-1}{2} \cdot \left[\frac{1 + F_3(K_0)}{1 + F_4(K_0)} \right] \\ \text{et} \\ F_1(k_0) - \frac{k_0}{b_0} \cdot [2 - M^2 \cdot F_2(k_0)] = 0 \end{array} \right.$$

La solution de ce système nous fournit la valeur de départ k_0 et de λ_0 . λ_0 pourra varier de $\lambda = -12$ à $\lambda = 12$ pour vérifier la condition de cisaillement non nul à la paroi (pas de décollement de la couche limite).

Après résolution de ce système d'équation nous avons obtenu des résultats nous permettant de faire les commentaires suivant:

-1 On remarque que plus la température génératrice augmente plus l'épaisseur des couches limites augmentent.

2- de même pour le nombre de Mach. Plus le nombre de Mach augmente plus l'épaisseur de la couche limite augmente.

-3 Lors de la résolution numérique du système d'équation, la valeur de λ a varier de -0.2 à 0.2. Ceci montre bien qu'il n'y a pas décollement de la couche limite.

Par ailleurs, le développement de la couche limite réduisant la section de passage du gaz dans le divergent change du coup le profil optimal du divergent. Pour palier à cet inconvénient, nous proposons d'introduire une correction à chaque point traité de la paroi. La relation donnant cette correction [13] est :

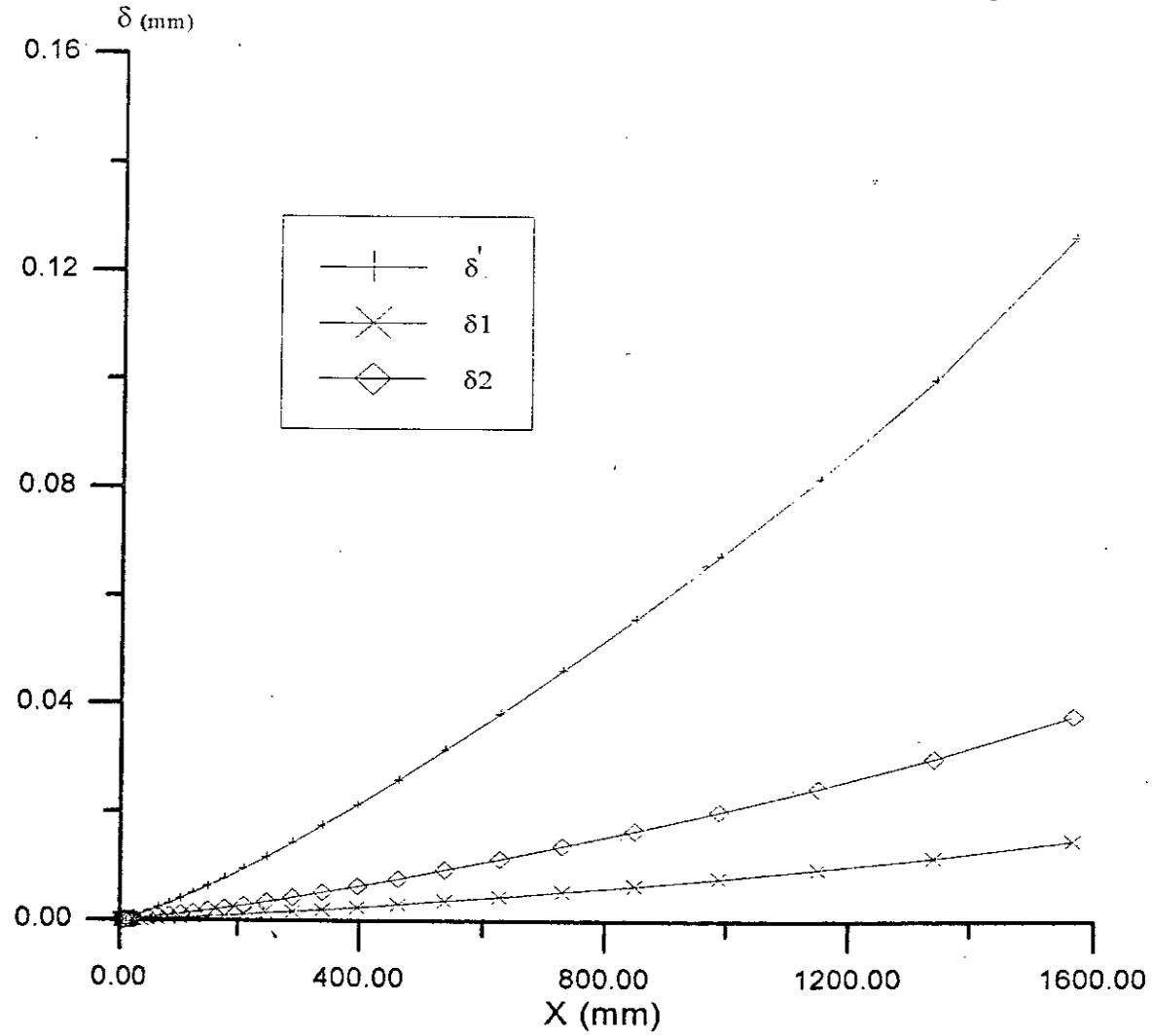
$$y_{total} = y_{inv} + \delta$$

y_{inv} : ordonnée d'un point P à la paroi calculée dans le cas non visqueux.

7-7 Conclusion:

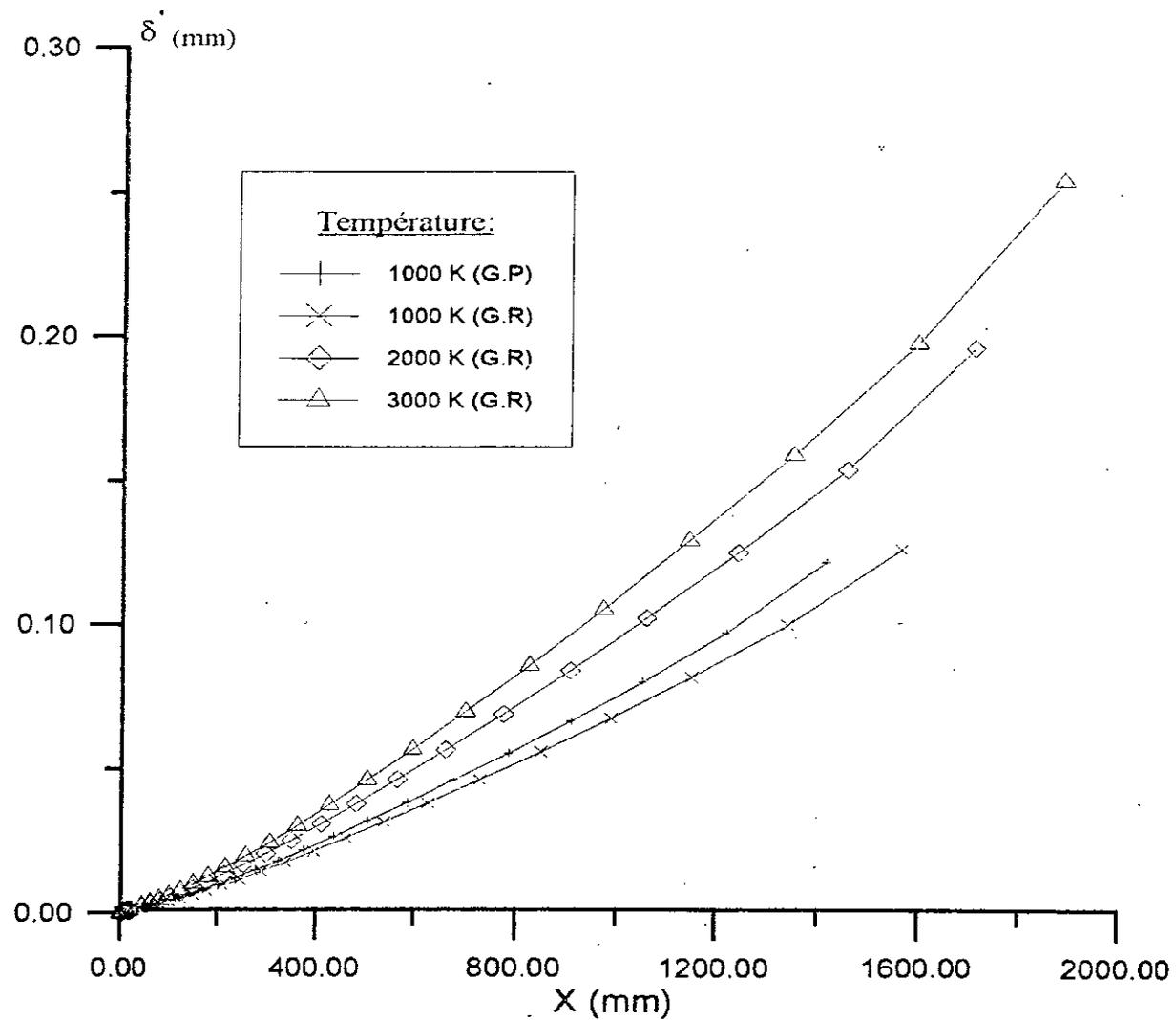
Nous avons introduit dans ce chapitre, les effets de la viscosité sur l'écoulement dans le divergent. Ceci nous a amené à établir les équations régissant l'épaisseur de la couche limite laminaire bidimensionnelle. Ces équations ont été simplifiées par l'introduction des différentes épaisseurs de couche limite et par des approximations faite sur la forme de la vitesse et de l'enthalpie. Nous obtenons finalement un système d'équations numériquement résolvable. L'écoulement étant axisymétrique, nous avons introduit aussi les transformées de Mangler dans notre système. Par notre résolution de ce système, nous avons obtenus des résultats très satisfaisants, proche des résultats pratiques [13] comme illustré par les figures et tableaux qui suivent.

Profil des épaisseurs de la couche limite dans le divergent.

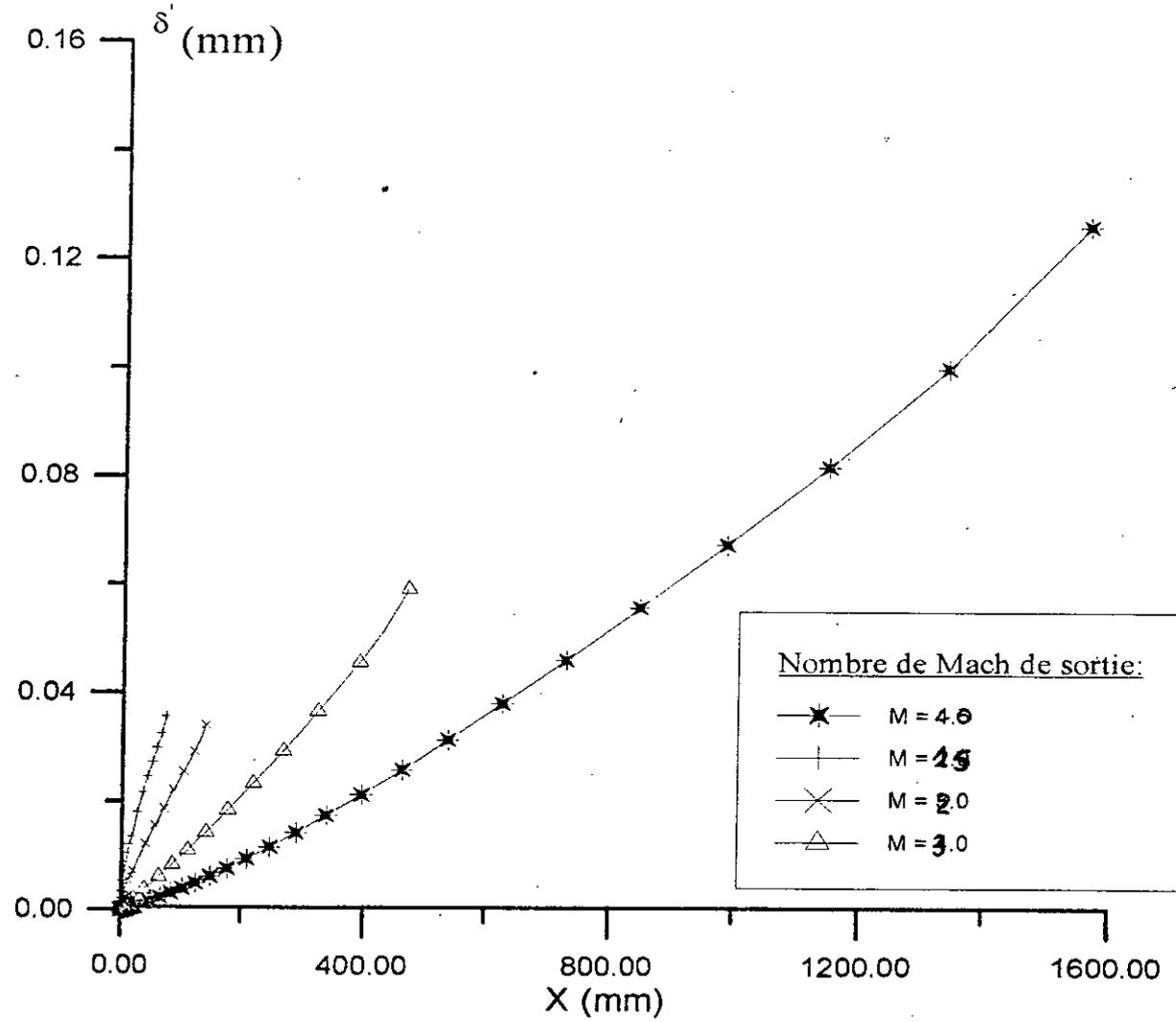


Nombre de Mach à la sortie $M = 4.0$ et $T = 1000$ K (gaz réel)

Profil de la couche limite pour différentes températures (M=4.0)



Profil de la couche limite pour different nombre de Mach (T=1000 K)



CHAPITRE 8

RESULTATS ET COMMENTAIRES

8-1 Introduction:

Nous présentons dans ce chapitre les résultats numériques et graphiques des méthodes de résolution que nous avons présentées dans les chapitres précédents. Lors de nos expérimentations, nous avons essayé de balayer une large plage de travail. Les résultats de ces diverses expérimentations nous permettent de présenter, en fin de ce chapitre, quelques conclusions et remarques utiles quant à l'exploitation de la soufflerie à choc.

Les expérimentations que nous avons menées se partagent en deux :

1- Résultats du tube à choc et de la soufflerie à choc.

2- Résultats du tracé de tuyère.

8-2 Première famille d'expérimentation :

Nous avons mené 4 expériences différentes qui utilisent chacune 4 couples de gaz qui sont :

Expérience 1: gaz moteur : AIR.
gaz de travail : AIR.

Expérience 2: gaz moteur : HELIUM.
gaz de travail : AIR.

Expérience 3: gaz moteur : ARGON.
gaz de travail : AIR.

Expérience 4: gaz moteur : AIR.
gaz de travail : ARGON.

Les conditions d'expérimentations sont identiques :

$$M_2 = 1.2 \quad P_2 = 20 \text{ MPa} \quad T_2 = 1500 \text{ K} \quad T_4 = 300 \text{ K}$$

$$L_4 = 3 \text{ m} \quad L_1 = 24 \text{ m} \quad \phi = 200 \text{ mm}$$

sauf pour l'expérience (4), qui diffère des précédentes par un nombre de Mach inférieur à un : $M_2=0.8$. Elle diffère aussi par le fait que le gaz de travail sera détendu à travers une tuyère supersonique afin d'atteindre un nombre de Mach d'expérimentation ($M=4.0$). Ces résultats seront comparés avec ceux de l'AIR dans les mêmes conditions d'expérimentation.

Par ailleurs, nous utilisons le couple de gaz de l'expérience (1) pour faire varier M_s de façon à obtenir les trois types d'interaction d'ondes possibles dans le tube à choc (Cf. chapitre 4). L'interaction entre la réflexion de (Qh) et le contact surface est obtenu par l'expérience (5-1). Le cas où il n'y a pas d'interaction entre la réflexion de (Qh) et le contact surface est réalisé grâce à l'expérience (5-2). L'interface adaptée sera obtenue dans l'expérience (5-3).

8-3 Deuxième famille d'expérimentation :

Nous avons orienté notre expérimentation sur l'effet des paramètres de départ sur chaque type de divergent, conique et courbé. Nous montrons par la suite les différences de profil qui existe entre ces deux types de divergent.

Nous avons structuré cette expérimentation en trois groupes au sein desquels diverses expériences ont été menées. Nous avons choisi de numéroté nos expériences par ordre croissant, quel que soit le groupe considéré, pour faciliter la lecture du commentaire de résultats.

Groupe I: L'Air est choisi comme gaz de travail.

Divergent à profil courbé et à profil conique.

Expérience 6: tracé du profil des parois.

La température génératrice est de 1000 K, et le nombre de points à la paroi est $N = 44$. Le diamètre d'entrée au col $De = 50\text{mm}$.

Les conditions considérées pour le divergent avec profil conique sont :

M	Angle de la zone complexe	% du Mach à l'interface
2	6°	75
3	20°	65
4	30°	65

Les conditions considérées pour le divergent avec profil courbé sont

M	Nombre de points à la paroi	Angle de départ
2	44	1.417 E-3
3	44	1.417 E-3
4	44	1.417 E-3

Les résultats obtenus sont présentés, pour les deux types de divergent, dans les courbes et tableaux indiqués *expérience 6*.

groupe 2 : L'Air est le gaz de travail.
Divergent à profil courbé.

Expérience 7: Effet des hautes températures sur le profil de la paroi.

Elle consiste dans le tracé du profil de la paroi pour un angle de départ égal à $1.417 \cdot 10^{-3}$, un nombre de points à la paroi de 44, un diamètre au col de 50 mm et un nombre de Mach de sortie du divergent variant de 1.5 à 4. Les températures considérées sont 1000 K, 2000 K, et 3000 K. Le calcul est effectué en considérant le gaz de travail (l'air) comme un gaz parfait.

Expérience 8: Influence de l'angle de départ sur le profil de la paroi.

C'est le tracé du profil de la paroi pour un nombre de points à la paroi de 44, un diamètre au col de 50 mm et un nombre de Mach de sortie du divergent de 4. Les angles de départs sont égaux à $4.008 \cdot 10^{-5}$, $1.4177 \cdot 10^{-3}$, $4.47199 \cdot 10^{-2}$, et $0.4874 \cdot 10^{-1}$.

Expérience 9: Influence du nombre de point à la paroi.

On calcule le tracé du profil de la paroi pour un angle de départ égal à $4.008 \cdot 10^{-5}$, un diamètre au col de 50 mm et un nombre de Mach de sortie du divergent de 4. Le nombre de points à la paroi est pris égal à 10, 20, 40, et 60.

Expérience 10: Influence du nombre de point et de l'angle de départ.

Déduite des expériences 7 et 8, elle permet de tracer le profil des longueurs des divergents en fonction du nombre de points à la paroi, et ce pour des différents angles de départs donnés.

Expérience 11: Evolution des paramètres thermodynamiques dans le divergent.

Elle consiste en différents tracés : le tracé des évolutions de la pression à la paroi, le tracé du nombre de Mach et de la température. Les conditions d'expérimentations lors de ces tracés sont : un nombre de Mach à la sortie de 4, une température génératrice de 1000 et une pression de 20 MPa.

groupe 3: L'Air est le gaz de travail.
Divergent à profil conique

Expérience 12: Effet du pourcentage de correction du nombre de Mach à l'interface sur le profil de la tuyère conique.

On réalise le tracé du profil de la paroi pour un nombre de Mach de sortie de 4, une température génératrice de 1000 K, un diamètre au col de 50 mm, un angle maximum de la zone complexe de 20° et des Mach à l'interface de 60%, 65%, 72%, 75% du nombre de Mach de sortie.

Expérience 13: Effet de l'angle du cône sur le profil de la tuyère conique.

C'est le tracé du profil de la paroi pour un nombre de Mach de sortie de 4, une température génératrice de 1000 K, un diamètre au col de 50 mm et un nombre de Mach à l'interface égal à 65% du nombre de Mach de sortie et des angles maximum de la zone complexe de 15° , 20° , 25° , 27° , et 30° .

8-4 Commentaires:

La **première famille d'expérience** était orientée sur l'étude du tube et de la soufflerie à choc. Des résultats obtenus nous pouvons tirer quelques remarques :

- 1- Pour les expériences 1, 2, 3 et 4, où les conditions d'expérimentations sont identiques, nous remarquons que lorsque le rapport m_4/m_1 augmente, le rapport de pression augmente aussi.
- 2- Les temps d'essais des régions (2) et (5) diminuent lorsque M_5 augmente.
- 3- Le temps d'essai de la région (2) diminue dans l'expérience (5-1) du fait de l'interaction de la réflexion de (Qh) avec (CS).
- 4- Nous obtenons dans l'expérience (5-3) le cas particulier d'une interface adaptée. Ce cas de figure nous permet d'avoir des durées d'observations des régions (2) et (5) plus longues que celles de l'expérience (5-2), pour un nombre de Mach de choc voisin.
- 5- Des expériences (5-1) à (5-3) nous notons qu'en ne faisant varier faiblement que le paramètre M_5 , nous pouvons générer successivement les trois cas d'interaction d'ondes. Chaque cas d'ondes entraîne une modification de l'emplacement du modèle pour obtenir des temps d'expérimentations maximum.

La seconde famille d'expérience nous amène à émettre quelques remarques.

1- *Premier groupe* : Nous comparons les deux types de divergents

Nous avons ainsi mis en évidence l'intérêt d'utilisation d'un divergent du type conique (expérience 6). En effet, nous remarquons que :

- plus le nombre de Mach de sortie augmente plus le rapport des longueurs entre les 2 types de divergent devient grand et peut atteindre un rapport de deux : $L_{\text{courbé}} / L_{\text{conique}} = 2$. Il en est de même pour les rayons de divergent. Ces résultats concordent bien avec ceux obtenus par M. Emanuel [18].
- le temps de calcul d'un divergent courbé est 2 à 3 fois plus long que le temps de calcul d'un divergent conique.

2- *Deuxième groupe* :

- Nous avons voulu mettre en évidence dans cette série d'expériences les effets des hautes températures sur le profil de la paroi du divergent (expérience 7).

Plus la température génératrice est élevée, plus le divergent est long (expérience 7). Cet effet ne se ressent que pour des nombres de Mach supérieur à deux ($M > 2$).

- Nous avons étudié les effets de la variation des paramètres de départs sur le profil du divergent.

* Nous remarquons que plus l'angle de départ est petit, plus le divergent résultant est long. Ceci correspond au cas le plus proche de la réalité.

* Nous avons mis en évidence les défauts de la méthode de **Busemann** [11] lorsque le nombre de point à la paroi est mal défini (expérience 9, cas où $N=10$ et $N=20$). Il en résulte une déformation du profil, des longueurs fausses, et un nombre de Mach à la sortie calculé supérieur à celui exigé.

* De l'expérience 10 nous déduisons que si le nombre de points à la paroi augmente, les longueurs des divergents, calculées pour des angles de départ différents, convergent vers la même longueur. Ces résultats ont été comparé aux résultats obtenus par M. Issa [19].

3- Troisième groupe :

Nous avons étudié ici l'influence des paramètres à l'interface sur le divergent à profil conique.

- Les expériences 11 et 12 montrent qu'un tel profil nécessite un tâtonnement numérique pour déterminer l'un des paramètres de l'interface zone complexe - zone simple. En effet, l'un des paramètres étant fixé, le second est alors calculé par itération successives. En général, c'est l'angle du cône qui est fixé, et le nombre de Mach qui est calculé itérativement. Cette valeur du nombre de Mach se situe généralement entre 65% et 75% du nombre de Mach de sortie.
- Nous avons enfin mis en évidence l'influence du type de gaz à détendre sur le profil du divergent. Pour cela nous comparons les expériences 5 et 6. Il vient alors que plus la chaleur spécifique C_p est élevée, plus les dimensions du divergent sont grandes (expérience 4).

8-5 Conclusion :

Les résultats que nous avons présenté dans ce chapitre sont issus d'un logiciel de simulation que nous avons mis au point. Ce logiciel nous permet de calculer les caractéristiques thermodynamiques et le profil optimal des tuyères, ainsi que de calculer les temps maximum d'essais dans le tube à choc.

Les résultats présenté et commenté dans ce chapitre mettent en évidence l'intérêt de la tuyère conique pour les laboratoires d'essais, ainsi que l'influence du nombre de Mach de choc M_s sur l'exploitation du tube à choc.

Nous avons calculé avec ce logiciel d'autres paramètres, en particulier les épaisseurs de couche limite présenté aux chapitres 5 et 7. Par ailleurs, nous déterminons les paramètres dynamiques et thermodynamiques pour les différentes zones du tube à choc. Les valeurs de ces paramètres sont présentées dans les chapitres 5 et 7.

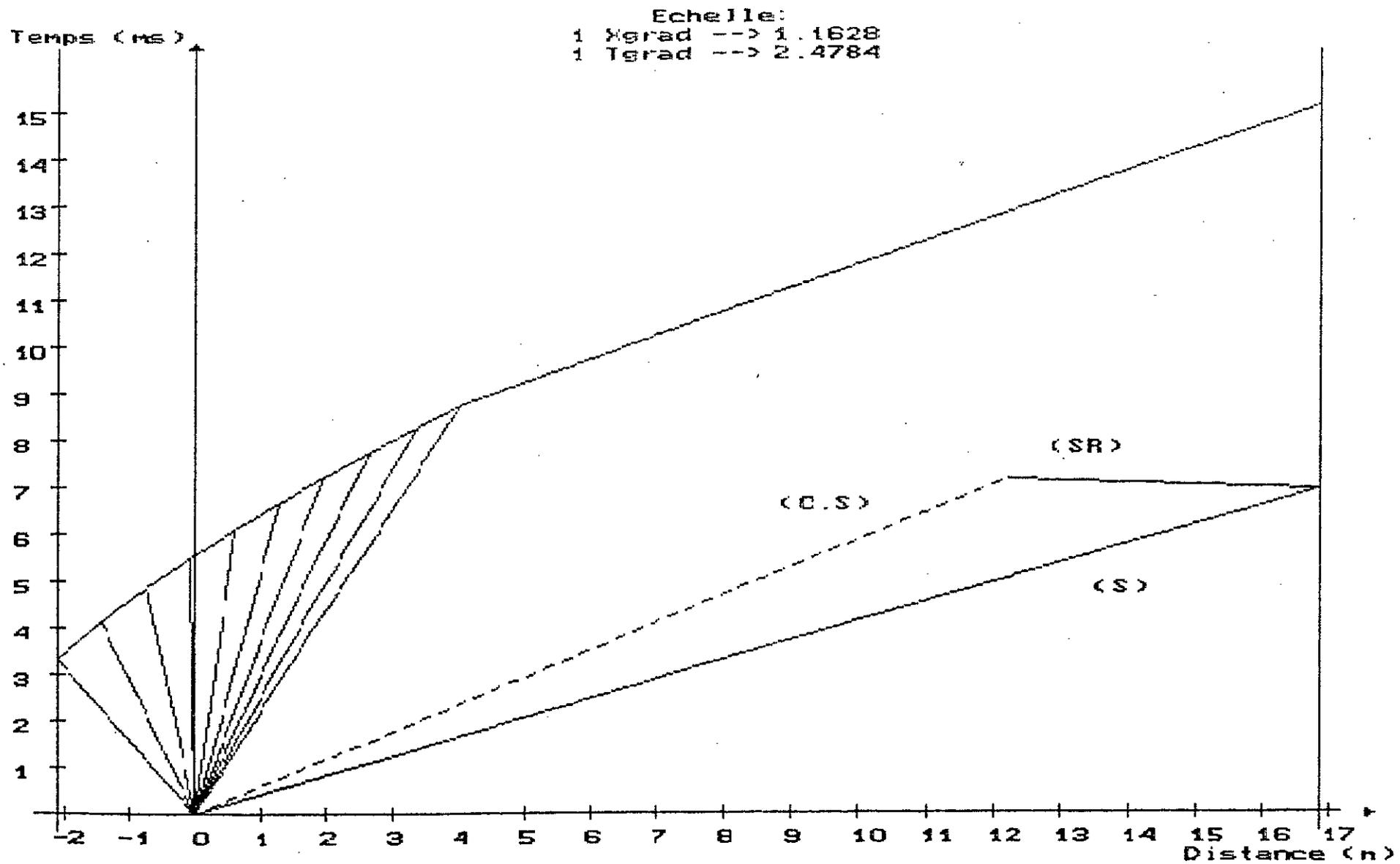
Structure du logiciel :

Nous avons élaboré un logiciel de simulation et de dimensionnement d'une soufflerie à choc. Ce logiciel se subdivise en six groupes structurés autour d'un *programme de gestion* interactif développé en langage *CLIPPER 5.0* (Version 1992). La base de données a été établie sous *Dbase IV+* (Version 1993).

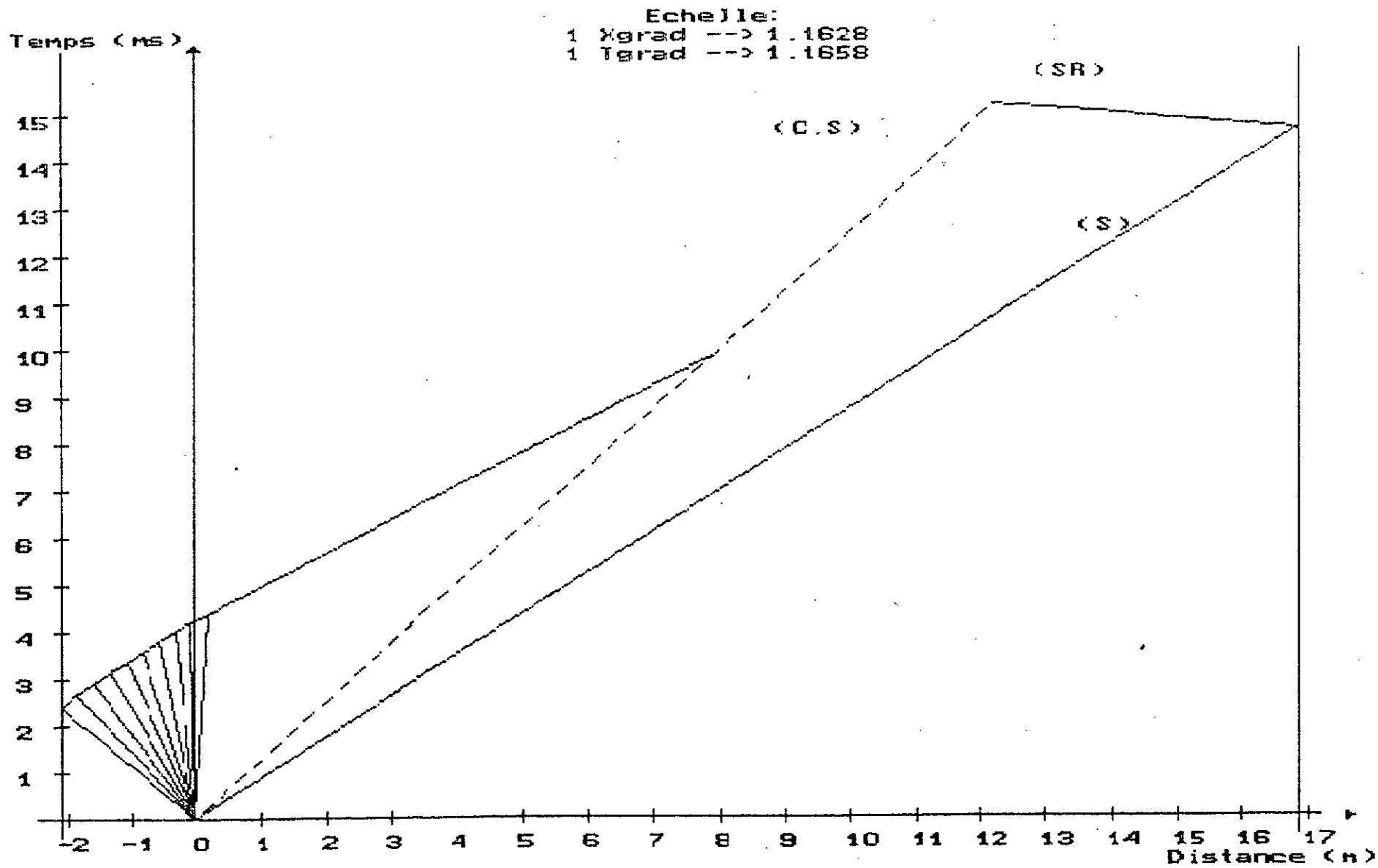
Ces six groupes cités précédemment sont :

- Un module de calcul des paramètres dynamiques est thermodynamiques du tube à choc que nous avons développé sous compilateur *FORTRAN 5.1*. Ce module nous permet en plus un calcul détaillé des temps d'essais selon les conditions d'expérimentations choisies.
- Un logiciel de graphisme en *TURBO PASCAL 6.0* est attaché au module de calcul précédent. Il permet de faire le tracé du diagramme (t,x) tout en donnant une visualisation rapide des évolutions d'ondes dans le tube à choc.
- Un bloc de calcul de la couche limite générée derrière l'onde de choc incidente.
- Le calcul du profil optimal du divergent est réalisé directement grâce à deux modules de calcul. Ces derniers permettent de réaliser le calcul aussi bien pour une tuyère courbée que pour une tuyère conique.
- Le tracé du profil est obtenu directement grâce au cinquième programme développé en *TURBO PASCAL 6.0*.
- Le dernier module permet de calculer les épaisseurs de couche limite ainsi que l'évolution de la température de la paroi adiabatique.

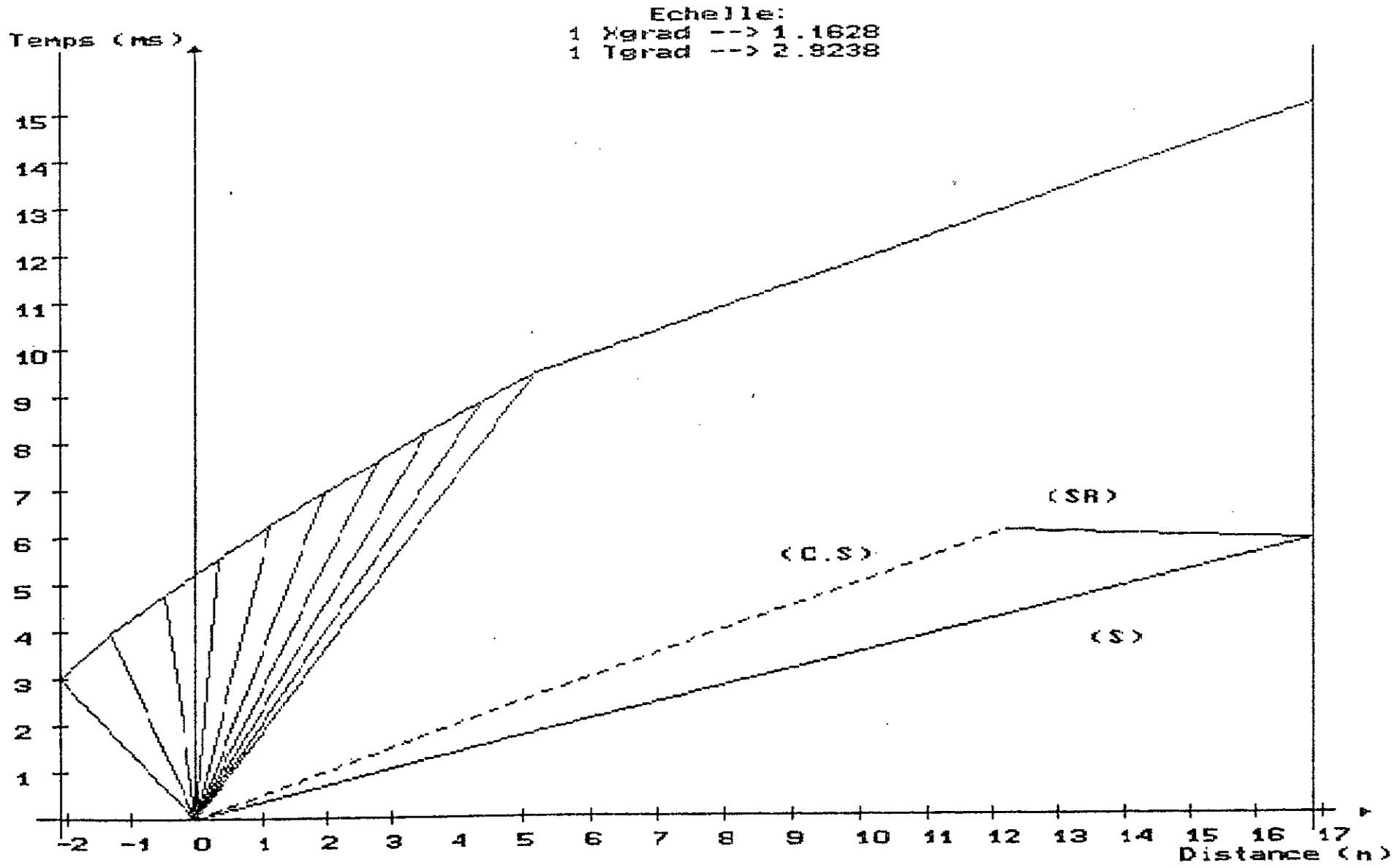
RESULTATS



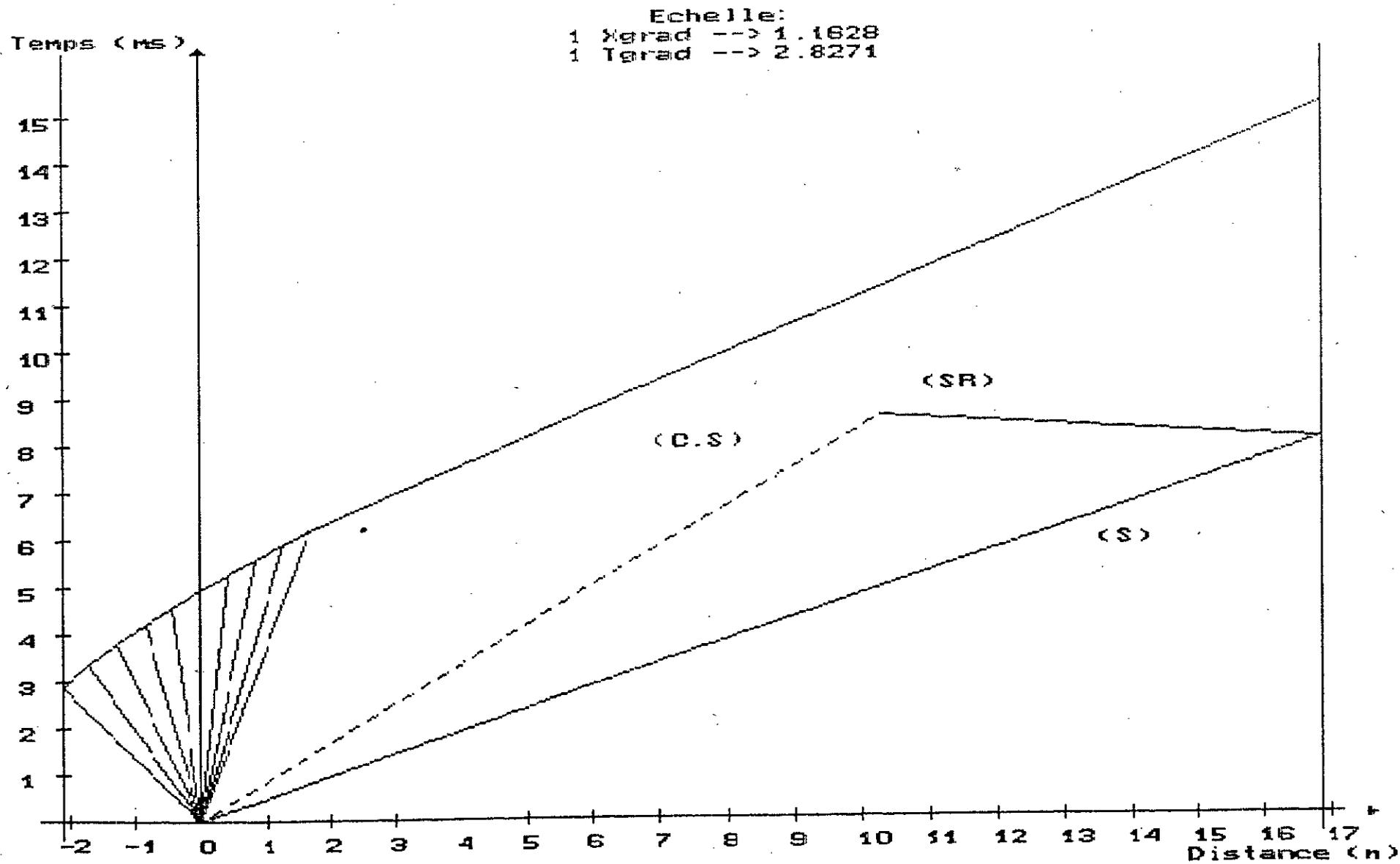
Experience 1:



Experience 2:

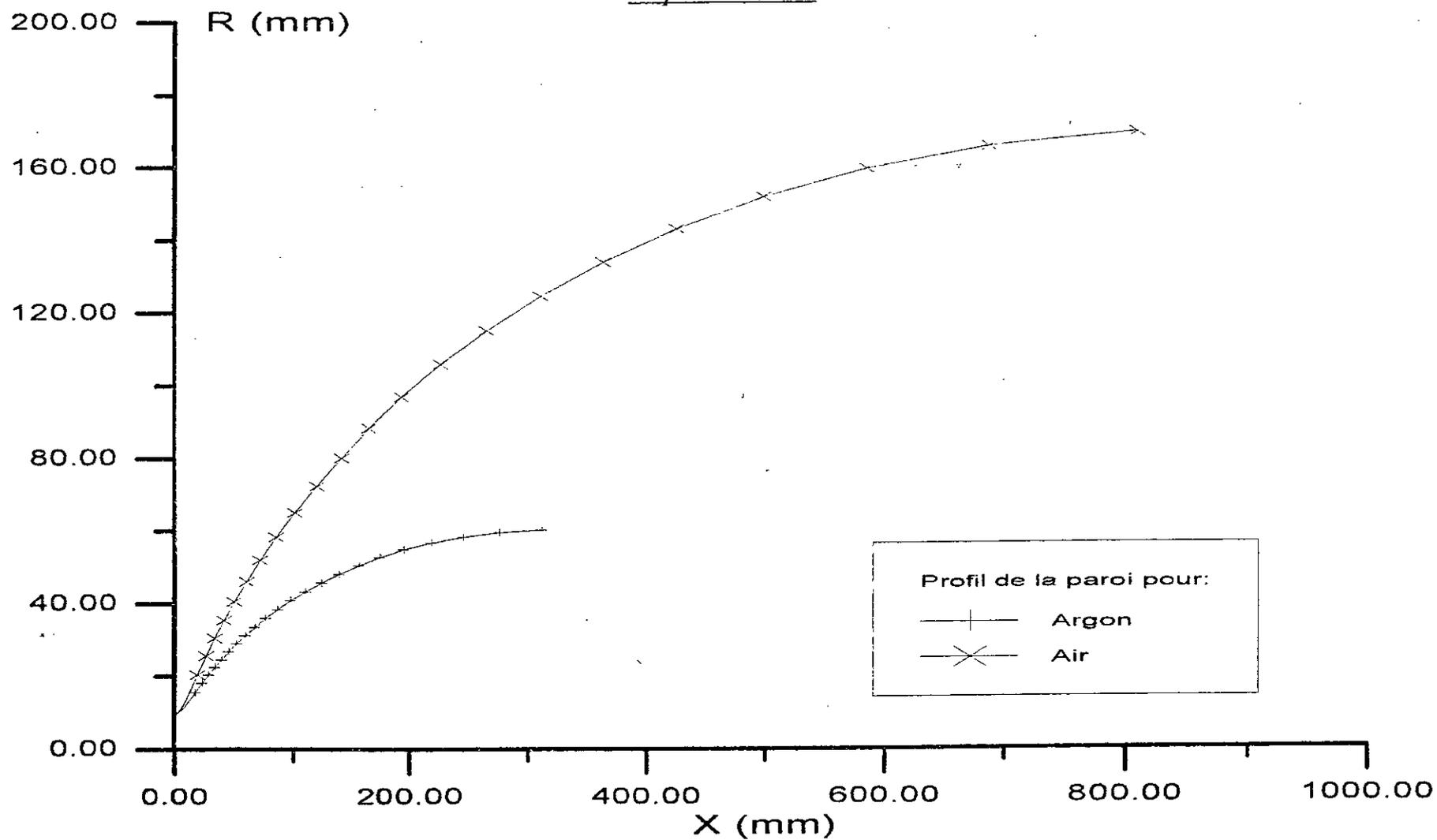


Experience 3:

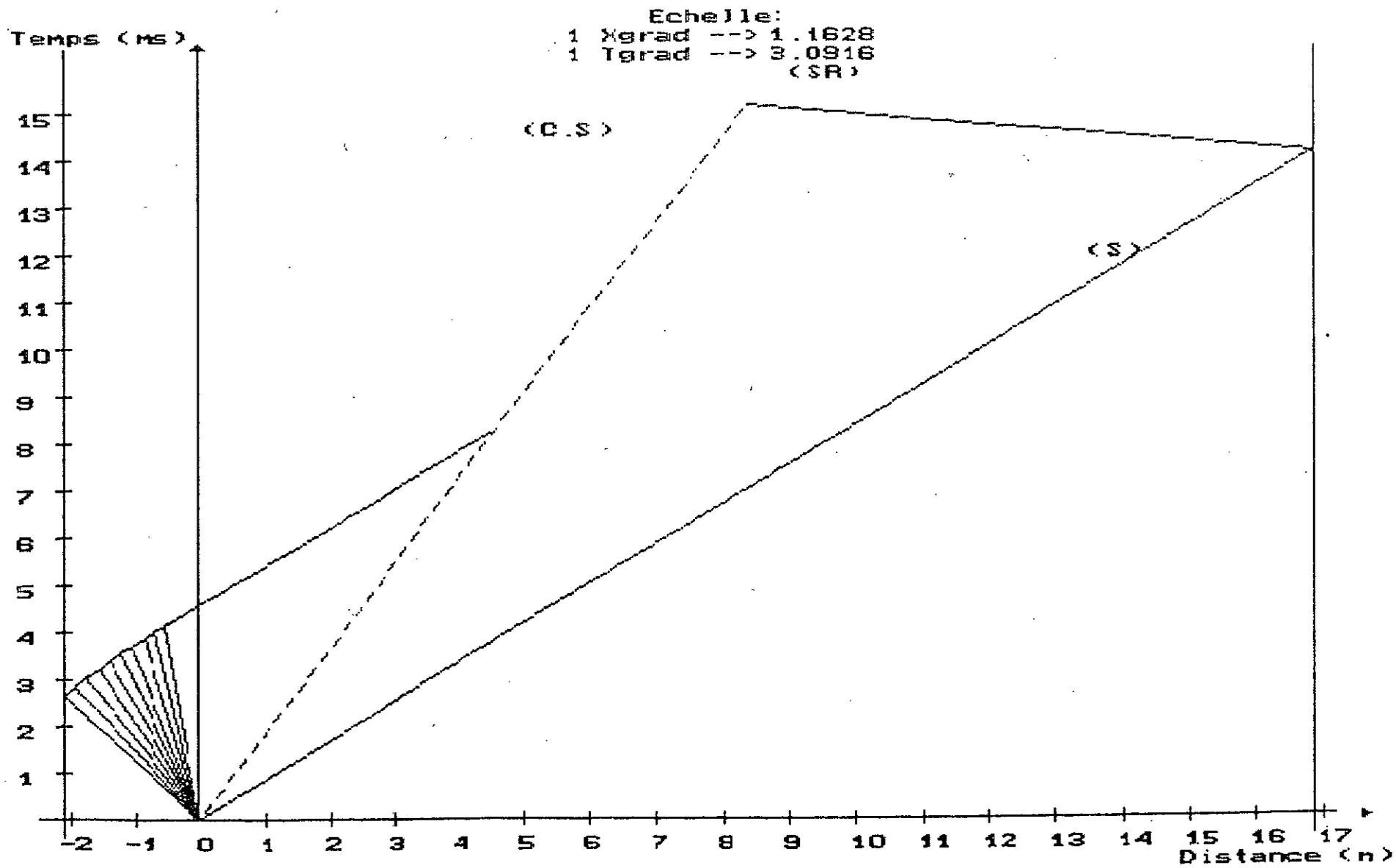


Experience 4:

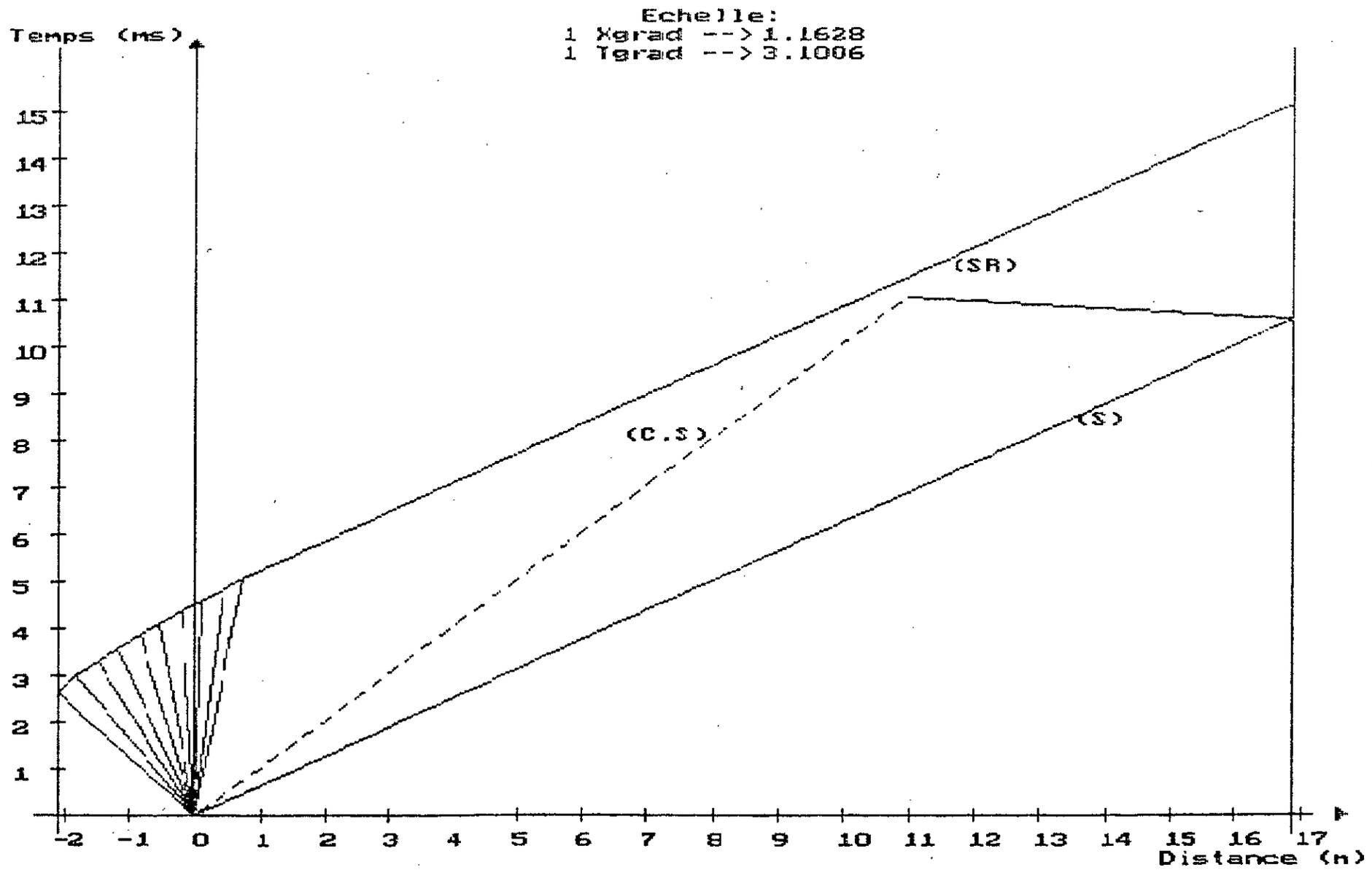
Expérience 4



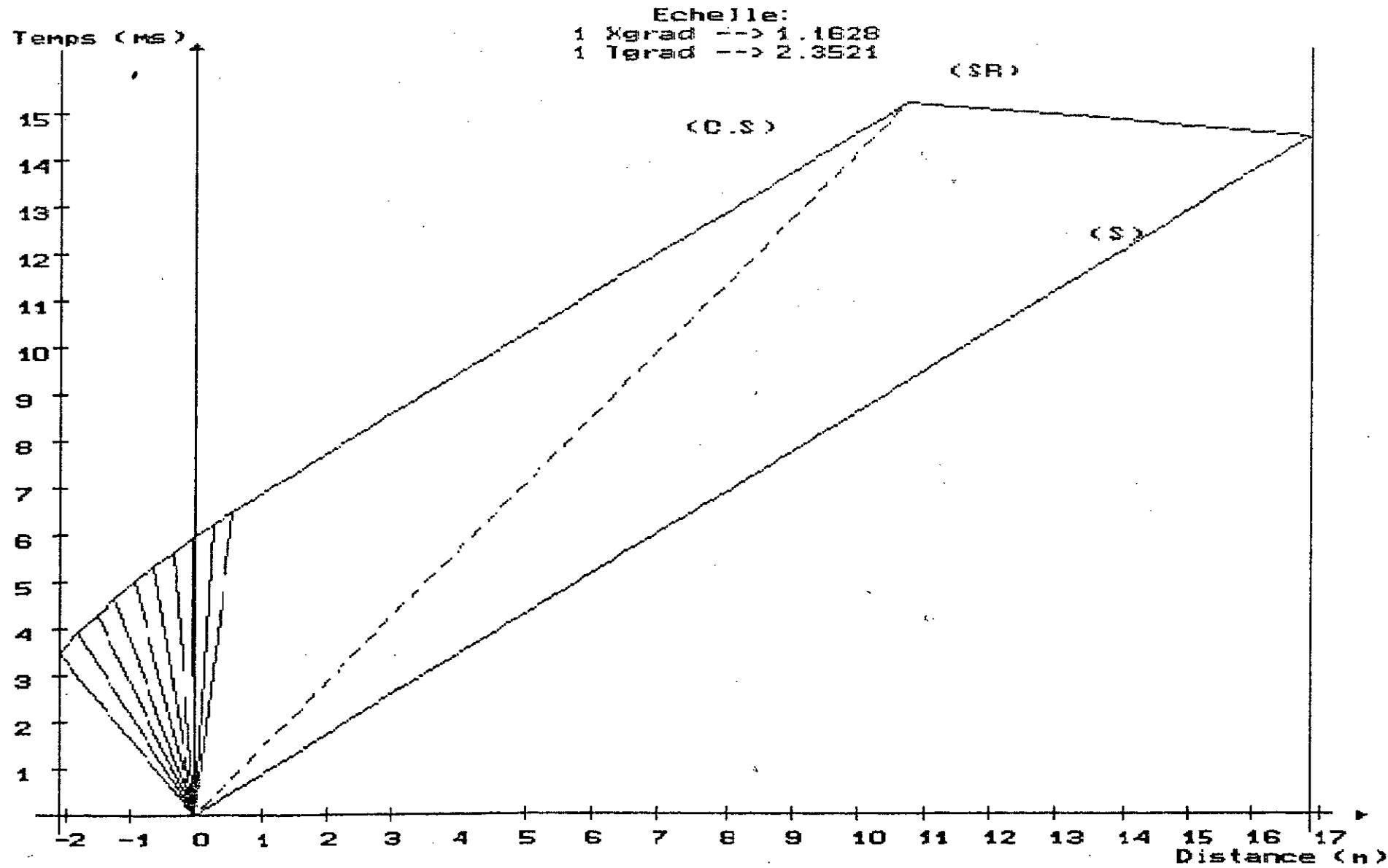
Nombre de Mach à la sortie M=4.00



Experience 5-1:

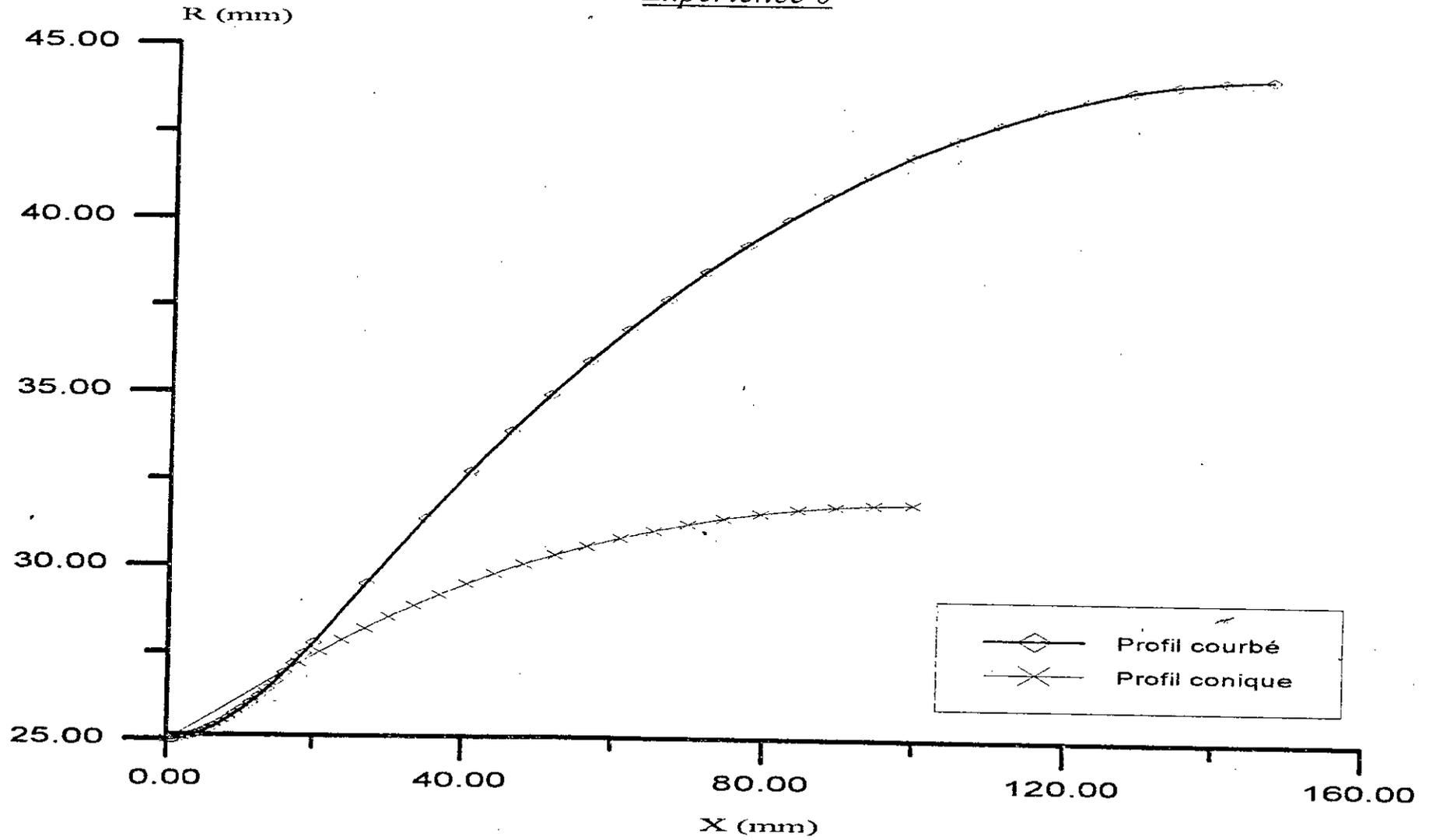


Experience 5-2:



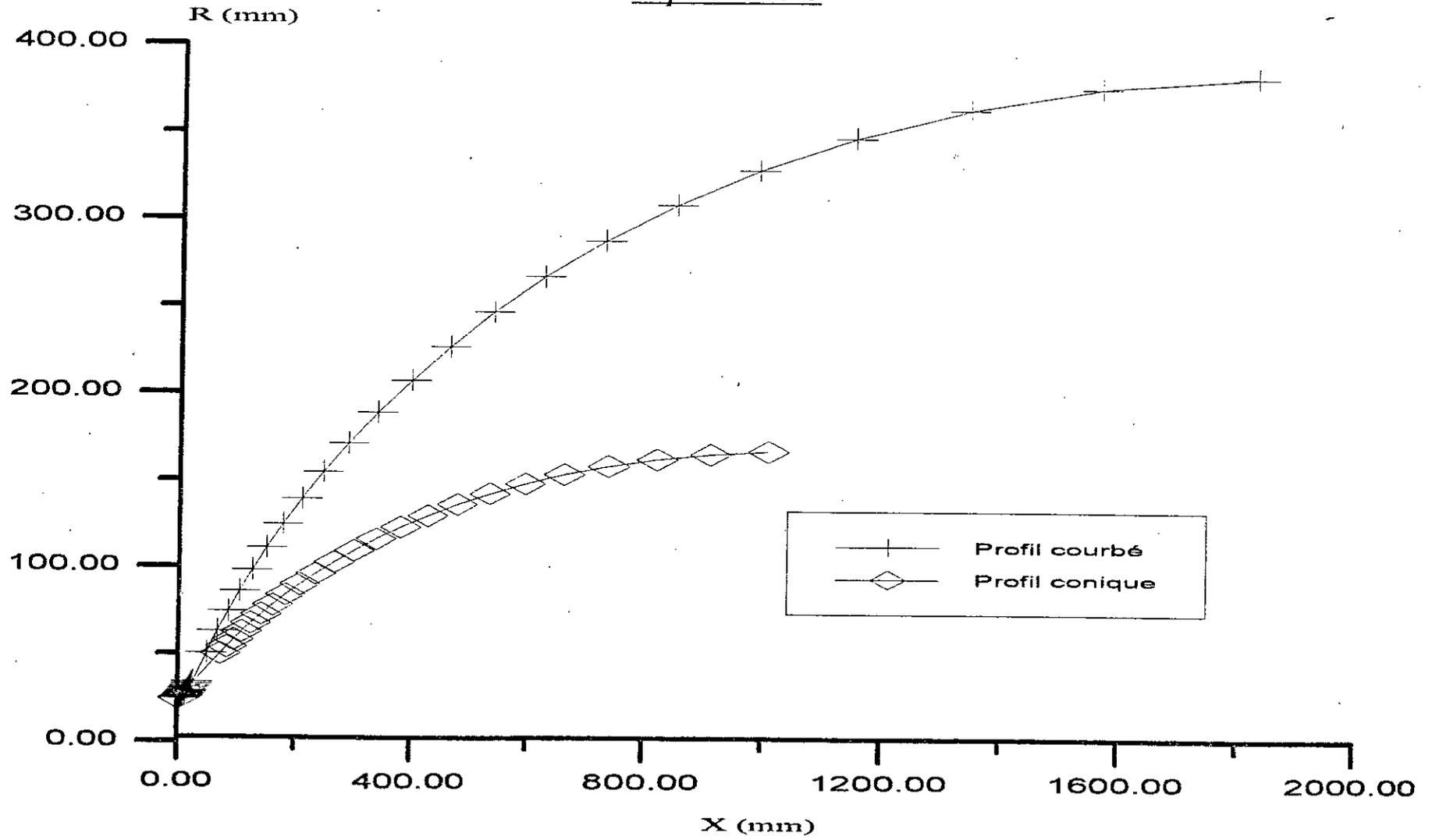
Experience 5-3:

Expérience 6



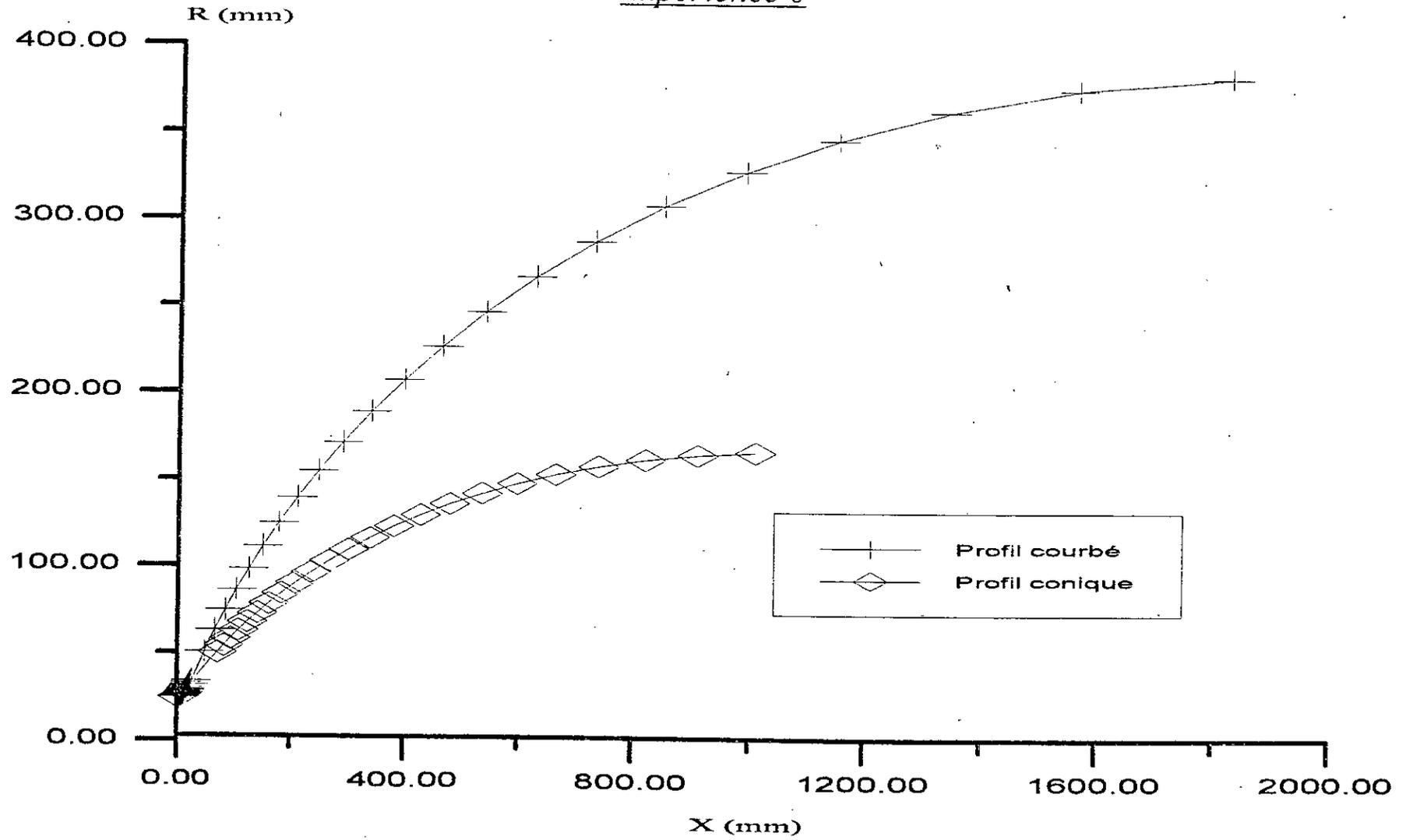
Nombre de Mach à la sortie $M=2.00$

Expérience 6



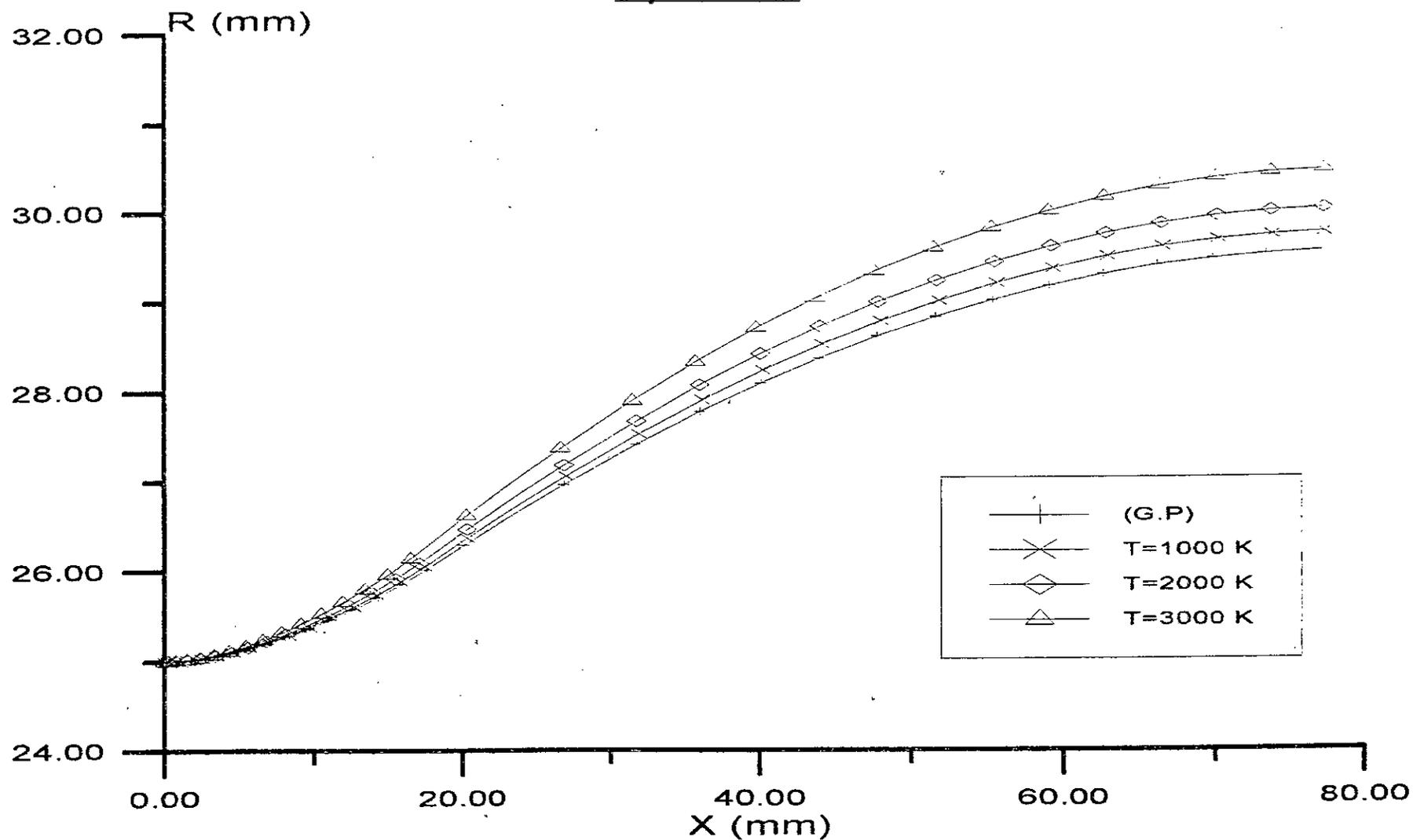
Nombre de Mach à la sortie $M=3.00$

Expérience 6



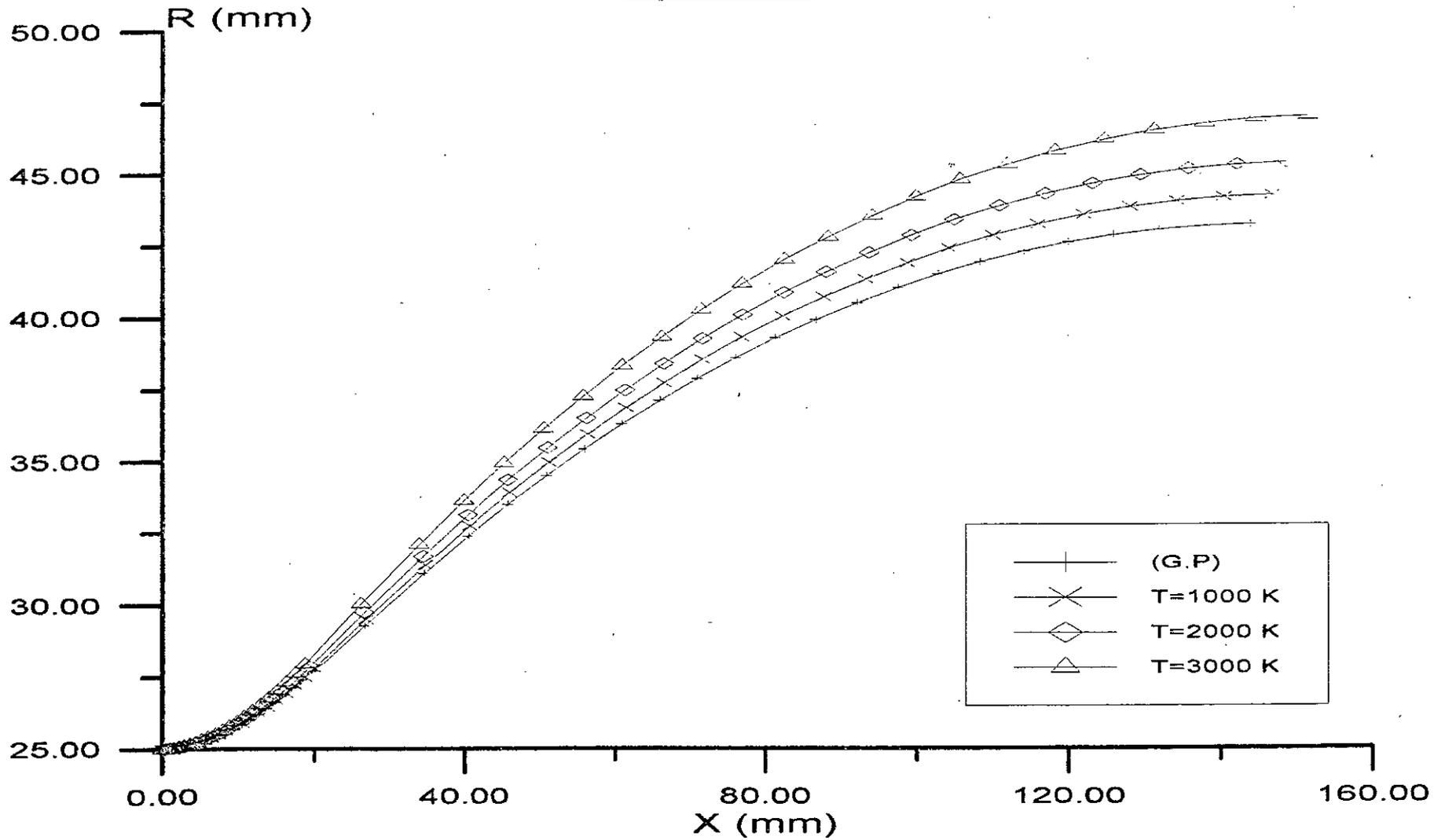
Nombre de Mach à la sortie $M=4.00$

Expérience 7



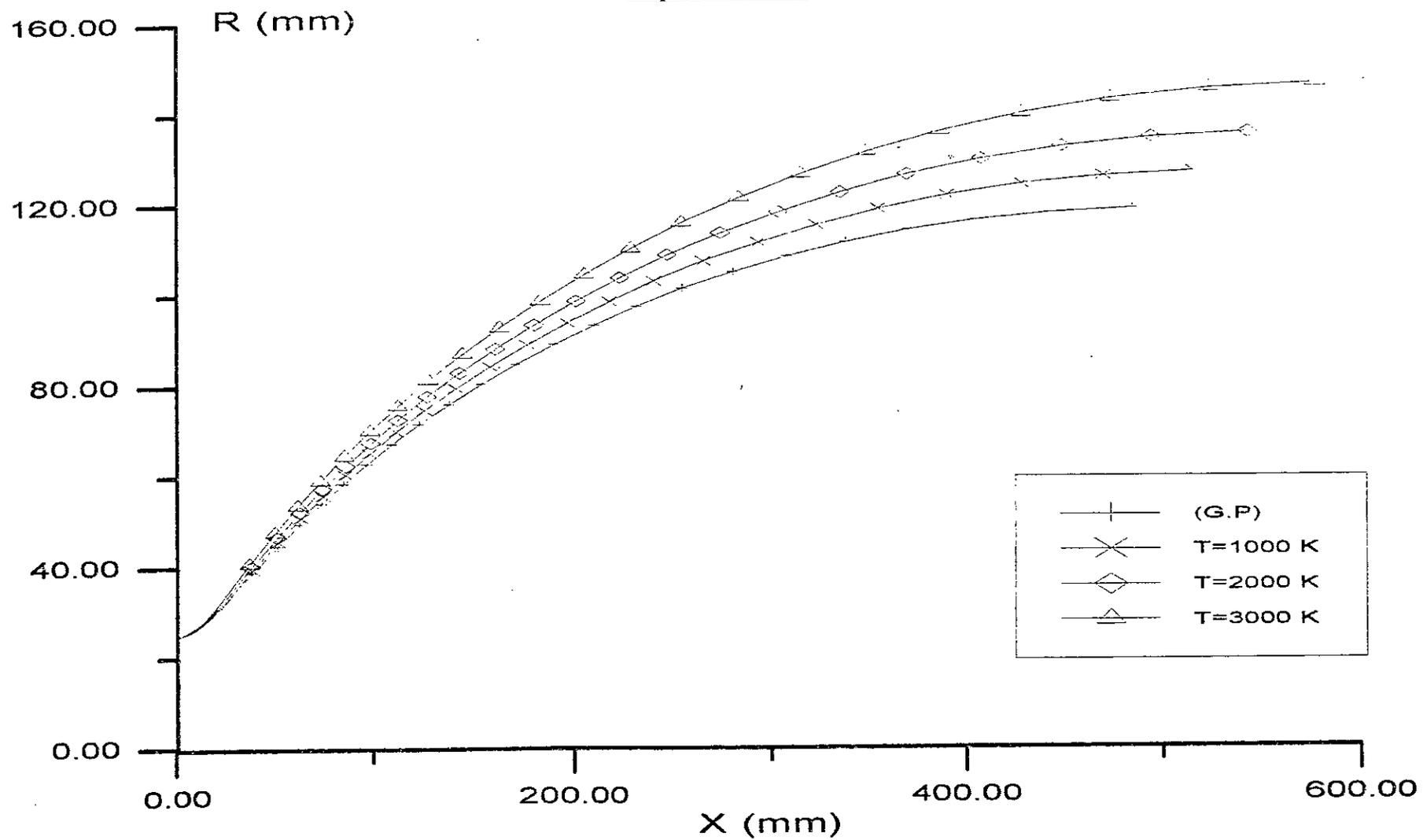
Nombre de Mach à la sortie $M=1.50$

Expérience 7



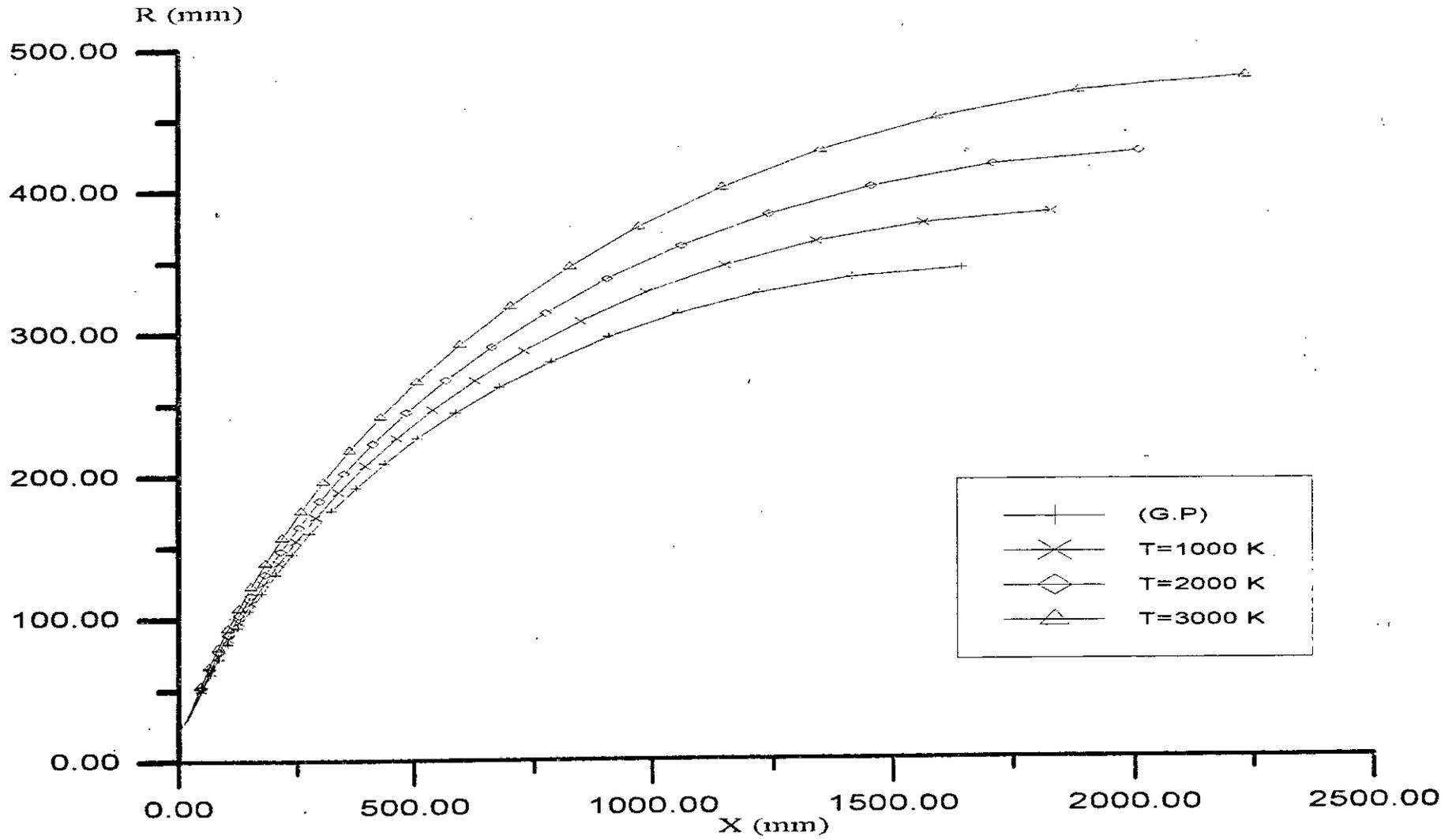
Nombre de Mach à la sortie $M=2.00$

Expérience 7



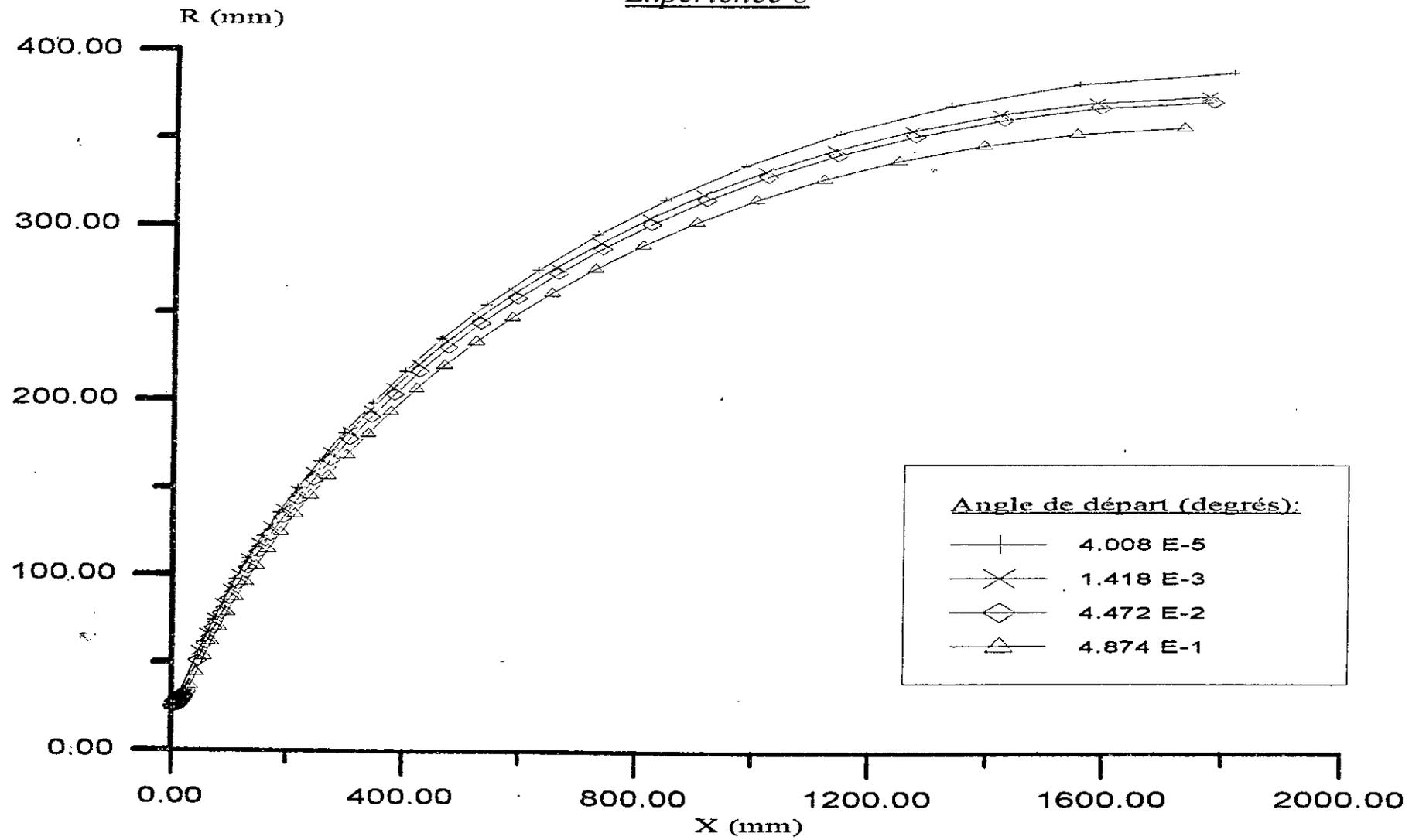
Nombre de Mach à la sortie M=3.00

Expérience 7



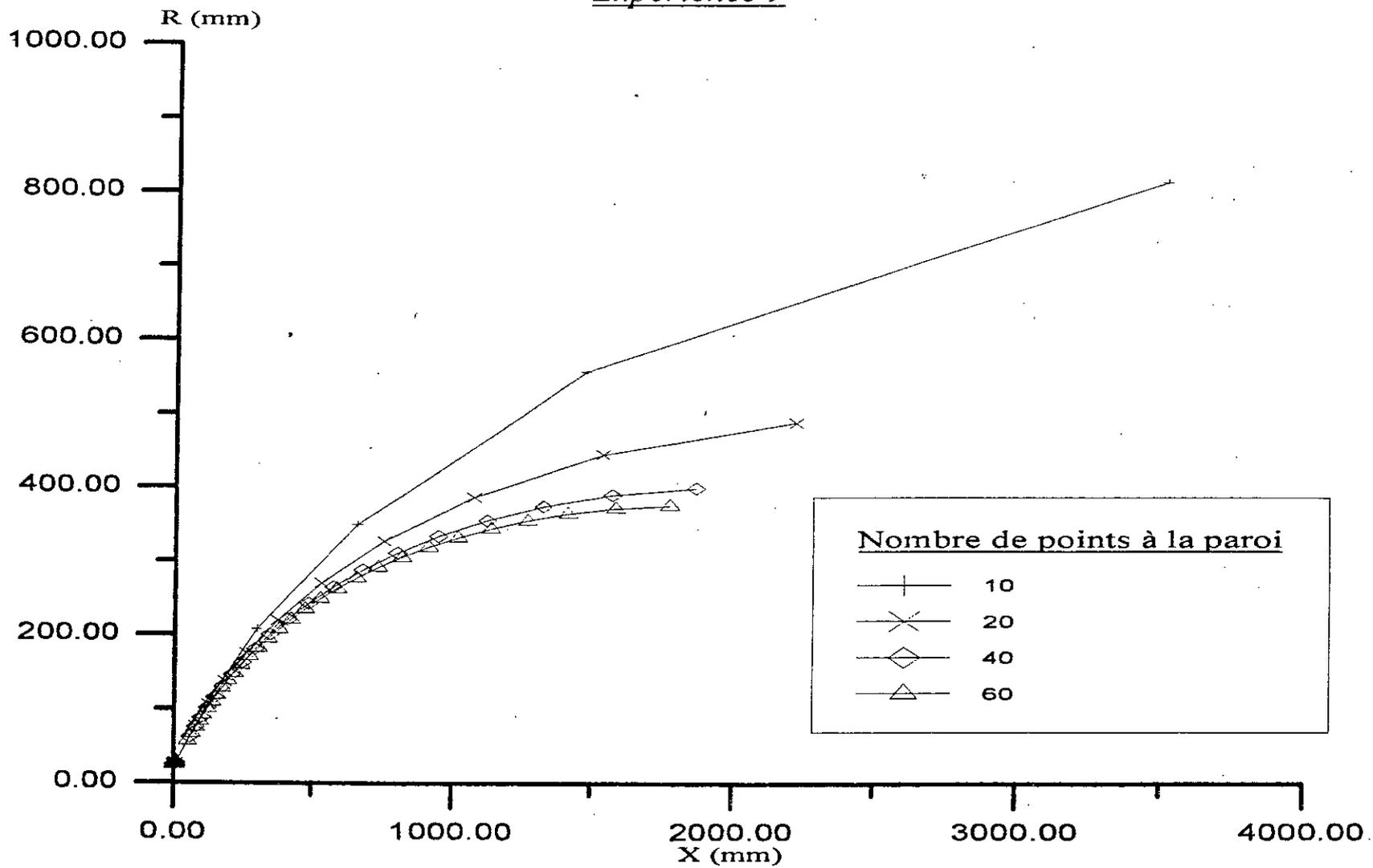
Nombre de Mach à la sortie M=4.00

Expérience 8



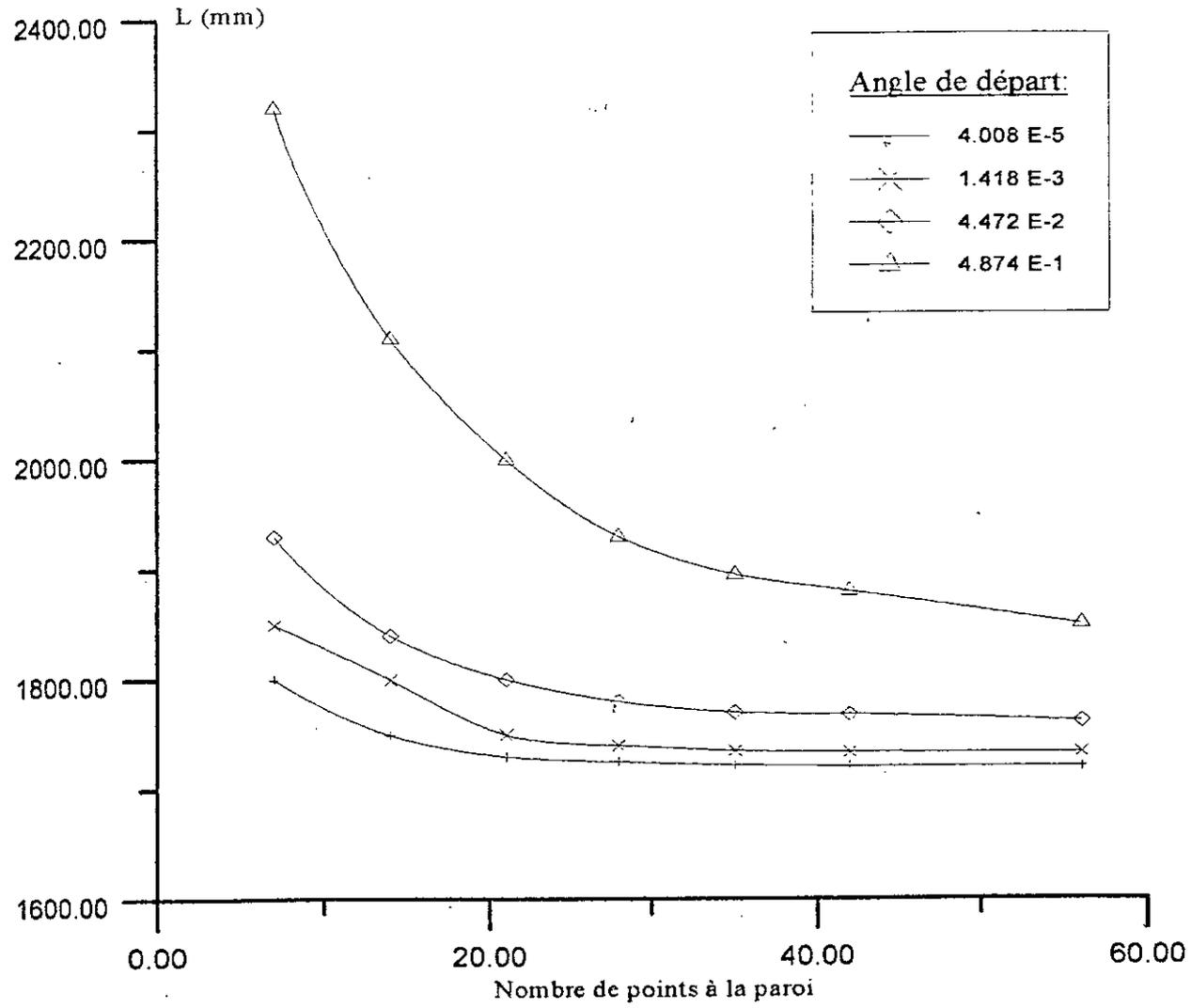
Nombre de Mach à la sortie $M=4.00$

Expérience 9

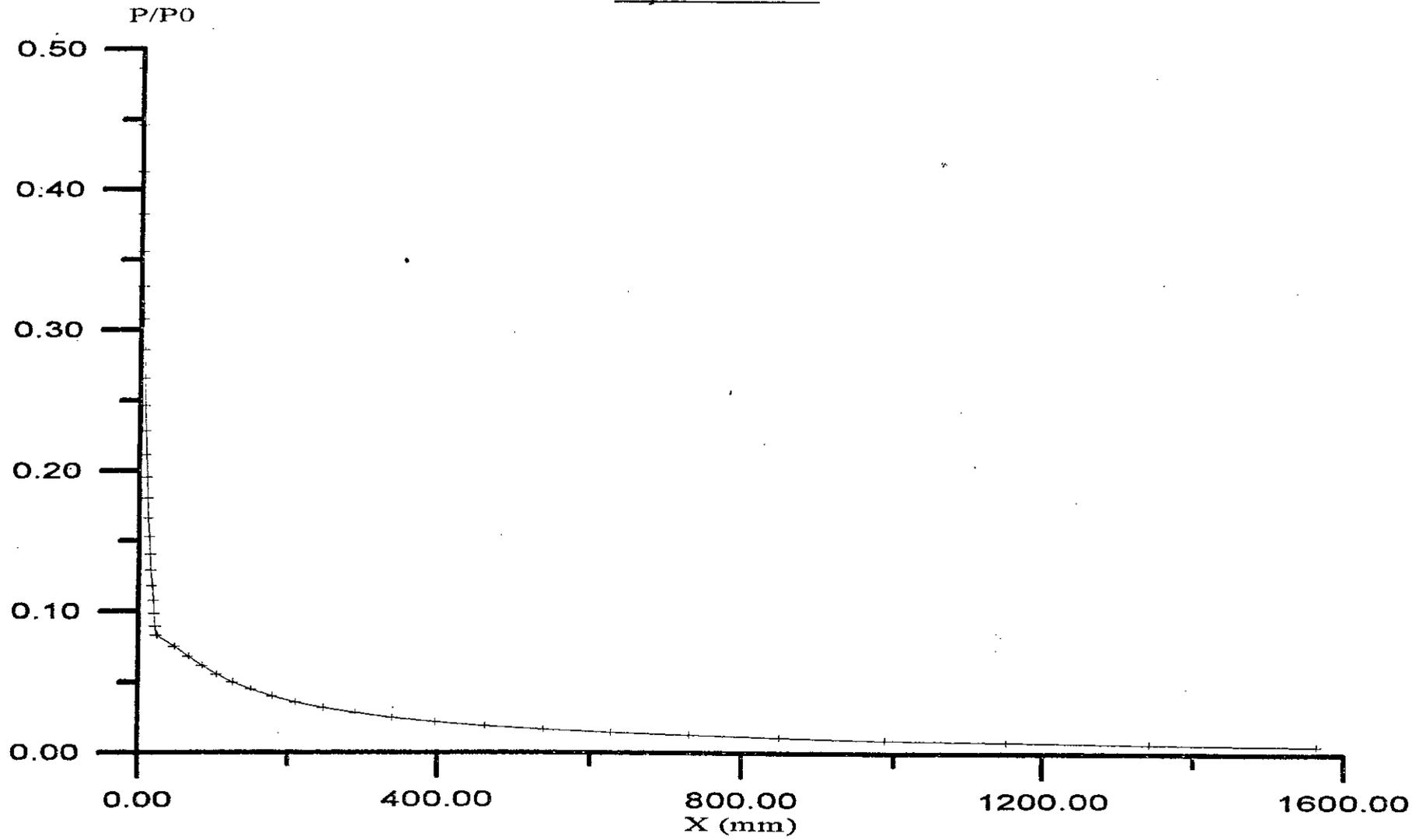


Nombre de Mach à la sortie $M=4.00$

Expérience 10

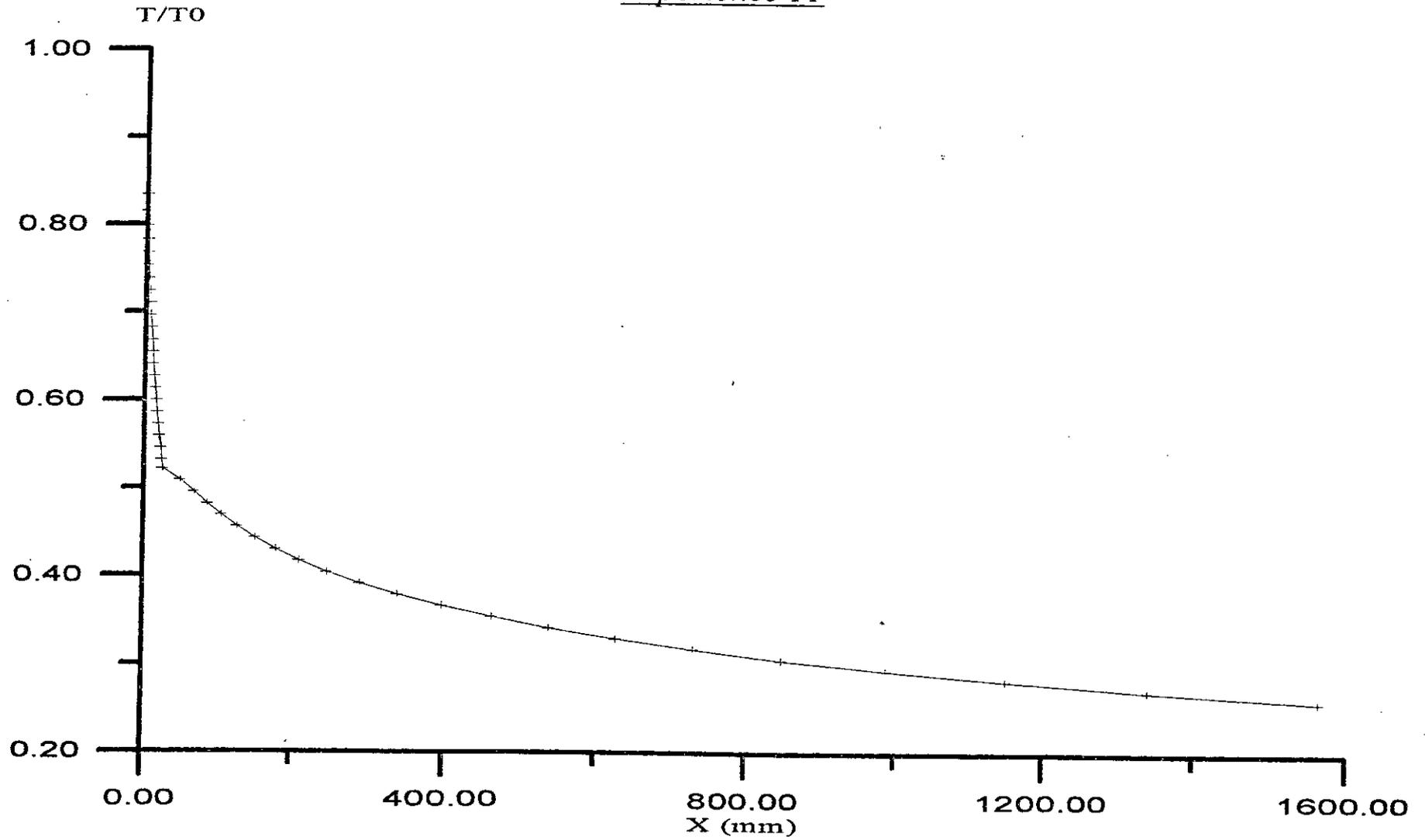


Expérience 11



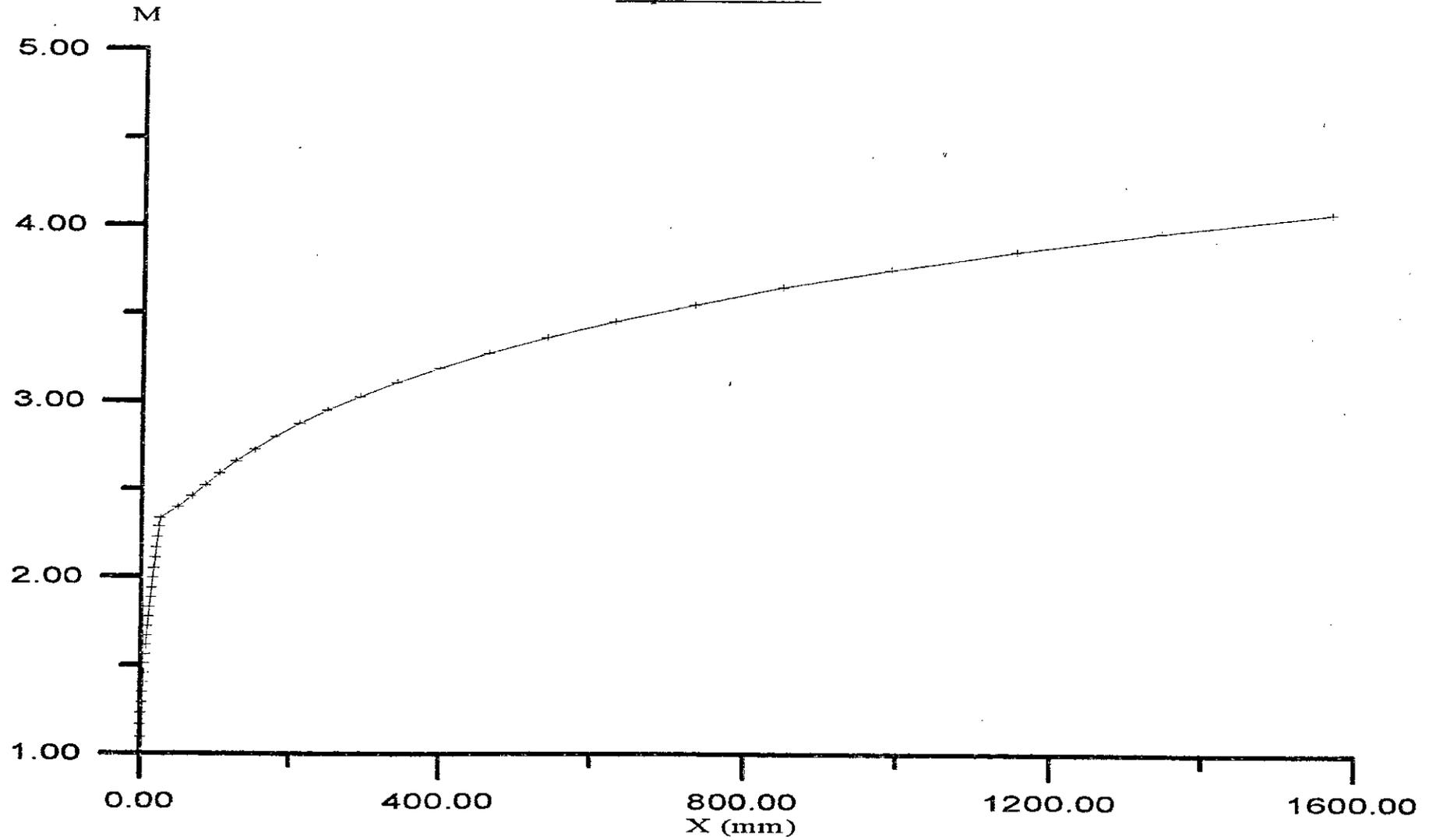
Nombre de Mach à la sortie $M=4.00$

Expérience 11



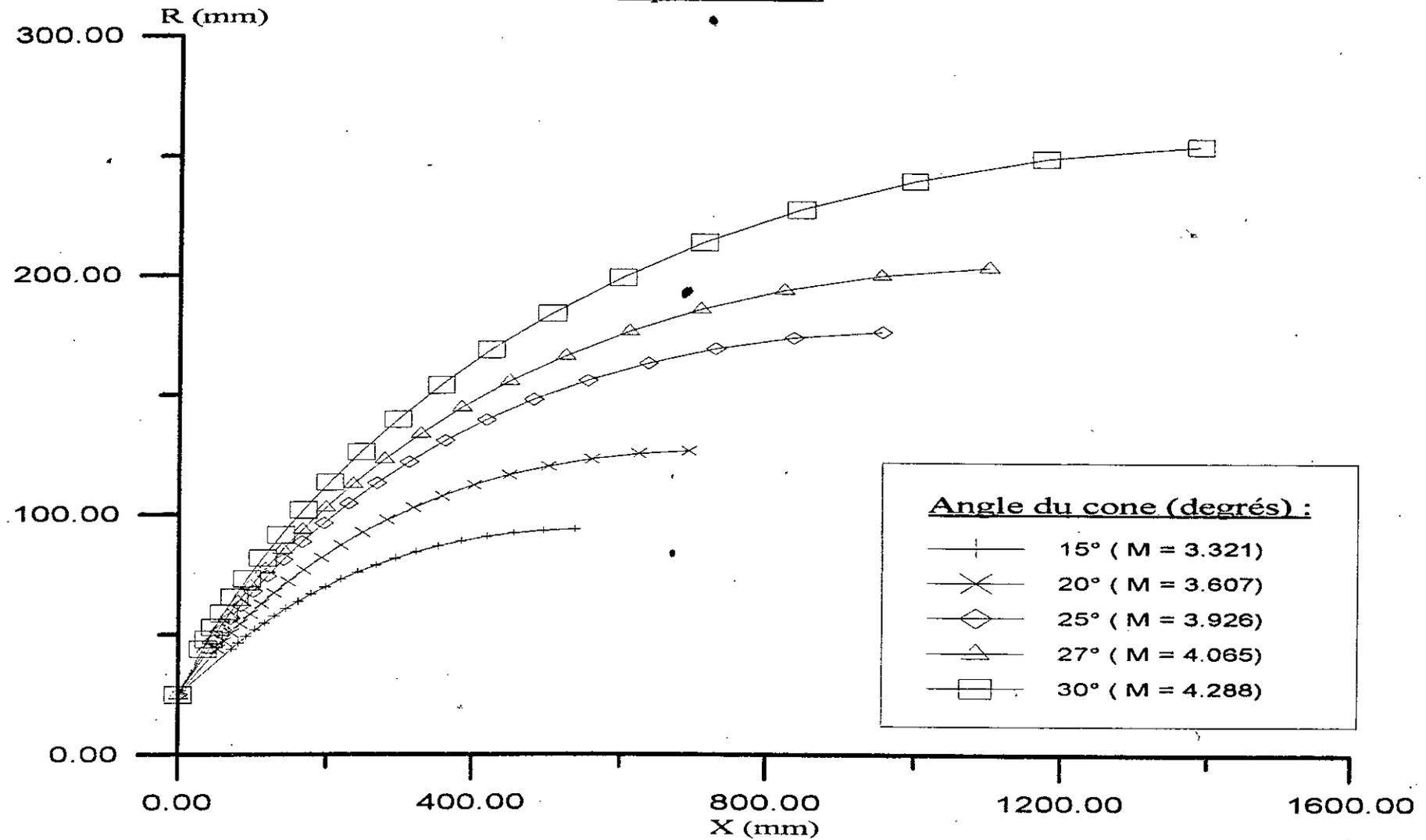
Nombre de Mach à la sortie M=4.00

Expérience 11



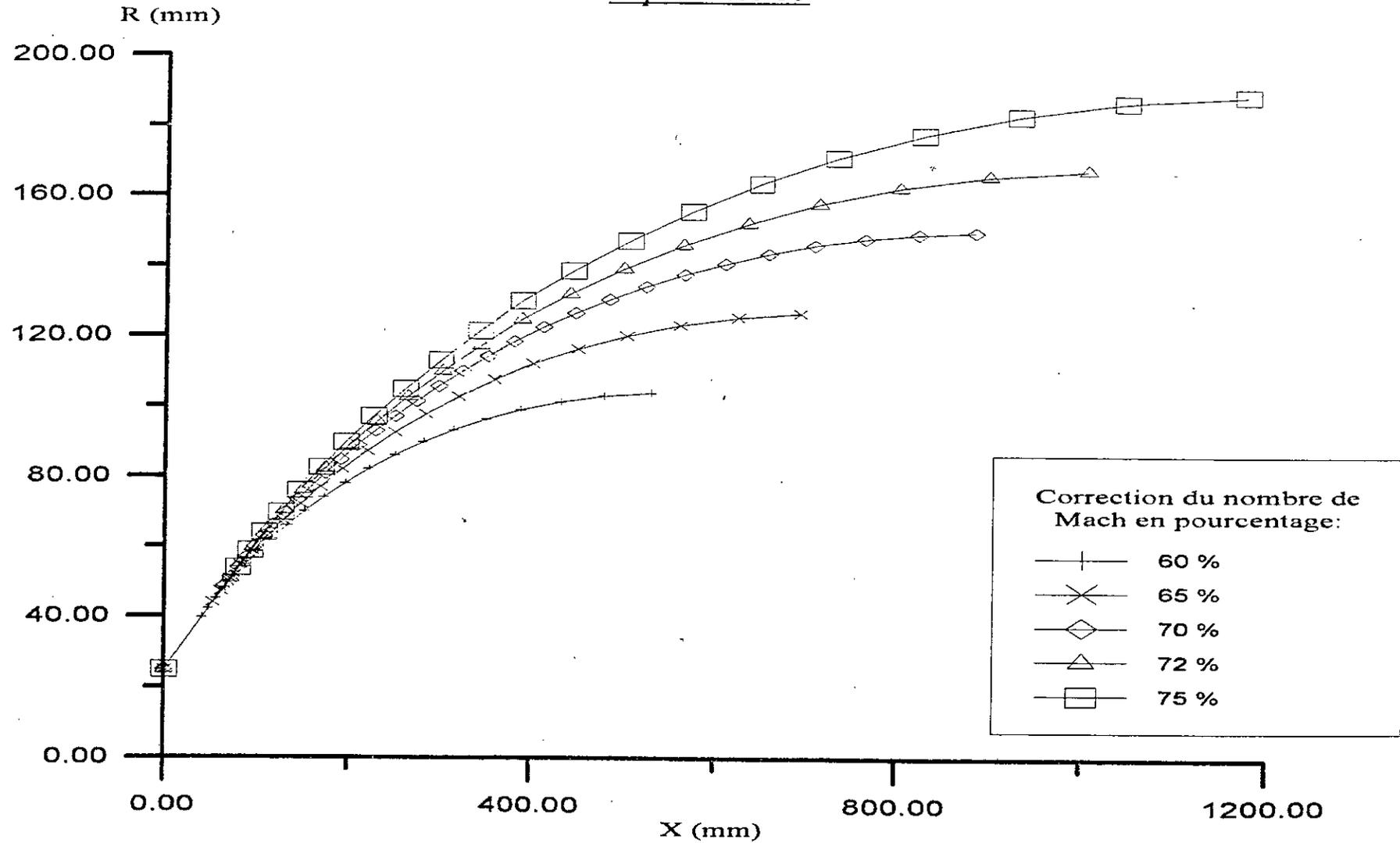
Nombre de Mach à la sortie $M=4.00$

Expérience 12



Nombre de mach a l'interface de 65% du nombre de Mach à la sortie M=4.00

Expérience 13



Nombre de Mach à la sortie $M=4.00$ avec un angle de 20°

CONCLUSION

Conclusion :

La nécessité de simuler les vols aériens a poussé au développement des souffleries à choc qui génèrent des conditions extrêmes d'expérimentation telles les fortes températures et des nombres de Mach élevés. La soufflerie à choc est pour cela constituée d'un tube à choc combiné ou non à une tuyère supersonique. Le tube à choc permet de générer l'écoulement à haute température et la tuyère supersonique permet d'atteindre des nombres de Mach très élevés.

Pour réaliser ces souffleries, on doit en premier lieu les dimensionner. Cela nécessite une étude préalable des phénomènes physiques observés dans les souffleries et la modélisation de ceux désirés par la simulation. La science permettant cette étude est l'aérodynamique qui est le fondement de tout développement dans l'aérospatiale.

Nous nous sommes donc intéressés dans notre travail de simulation des souffleries d'abord à introduire quelques notions fondamentales de gazodynamique. Nous nous sommes intéressé par la suite aux méthodes de résolution du problème de dimensionnement, en particulier à la méthode des caractéristiques et à ses fondements physiques. Nous avons alors étudié son application possible à notre étude. Cela nous a menée à considérer l'application de cette méthode à des écoulements bidimensionnels stationnaires et unidimensionnels instationnaires. Le fondement physique de la méthode des caractéristiques étant les lignes de Mach, nous avons alors mis au point une technique de résolution du problème de dimensionnement de la soufflerie.

Nous avons déterminé alors les caractéristiques de l'écoulement dans la soufflerie à choc en utilisant le principe de propagation de la perturbation suivant une ligne caractéristique et la création de zone d'influence. Nous avons étudié les équations de compatibilité et montré leur utilité pour le calcul des paramètres d'écoulement, dans des régions délimitées par les lignes caractéristiques pour les cas du tube à choc et du divergent. Nous avons proposé pour ce faire une méthode de calcul des paramètres dynamiques et thermodynamiques de l'écoulement induit derrière les différentes ondes de choc.

Dans le tube à choc, nous avons tenu compte du fait que les ondes de choc se subdivisent en deux familles:

- L'onde de choc incidente (S).
- L'onde de choc réfléchie (SR).

Nous avons aussi distingué les deux cas d'onde réfléchie (SR) :

- Onde de choc totalement réfléchie; cas d'un tube fermé.
- Onde de choc partiellement réfléchie; cas où l'extrémité du tube est munie d'une ouverture de section adéquate.

Nous avons par la suite établi l'équation donnant l'intensité du choc en fonction du rapport de pression de part et d'autre du diaphragme et nous avons aussi montré les différentes solutions à employer pour obtenir des chocs intenses.

Les équations régissant l'écoulement instationnaire étant ainsi introduites, et les paramètres d'écoulements établis, nous nous sommes intéressés à établir les possibilités d'utilisation du tube à choc pour effectuer des essais.

Nous avons utilisé pour l'exploitation de la soufflerie à choc le diagramme d'onde. Nous avons établi pour ce faire une méthode numérique de traçage du diagramme (t,x) . Du diagramme, nous avons déduit directement les situations où l'expérimentation est irréalisable. Nous nous sommes alors attachés à établir les paramètres optimaux pour que les temps d'essais dans les différentes régions du tube à choc soient les plus importants possibles, pour une situation donnée.

Ayant déterminé le cas où l'expérimentation dans le tube à choc est réalisable, nous avons calculé, sous certaines hypothèses, la couche limite. Des résultats obtenus, nous avons décrit l'évolution de la couche limite en fonction du temps, de la température de la paroi adiabatique et du coefficient de frottement.

Les différents paramètres du tube à choc étant maintenant définis, nous nous sommes intéressés au dimensionnement, par la méthode des caractéristiques, d'une tuyère supersonique avec effet de haute température. Deux méthodes, celle de Busemann et celle de Puckett, ont été utilisées pour obtenir des profils de tuyères vérifiant les conditions de l'expérimentation.

Cette étude ne tient pas compte des effets de viscosité du gaz sur les écoulements supersoniques dans les tuyères. Pour introduire cet effet, nous avons établi et simplifié les équations régissant l'épaisseur de la couche limite laminaire bidimensionnelle. Cependant, le développement de la couche limite change le profil optimal du divergent. Nous remédions à cela en introduisant une correction à chaque point calculé de la paroi.

De cette étude théorique, nous avons développé un logiciel nous permettant de simuler les divers points cités précédemment. Des résultats obtenus, nous avons abouti à des conclusions quant aux conditions de dimensionnement et d'exploitation optimales d'une soufflerie à choc. Ces résultats mettent particulièrement en évidence l'intérêt de la tuyère conique pour les laboratoires d'essais, ainsi que l'influence du nombre de Mach de choc sur l'exploitation du tube à choc.

Dans notre étude, nous n'avons tenu compte entre autres, que de la ligne sonique droite. Une étude sur la ligne sonique permettrait un meilleur dimensionnement du divergent supersonique. Par ailleurs, le calcul de la couche limite de choc à l'intérieur du tube en considérant une intensité de choc variable améliorerait la précision de calcul des temps d'essais.

Le logiciel que nous avons développé, a été conçu sous forme modulaire flexible, permettant ainsi une mise à jour des développements effectués dans le domaine des souffleries à choc. A cet effet, nous proposons l'enrichissement de ce logiciel en introduisant le sujet de recherche développé au sein du laboratoire de gazodynamique de notre département qui traite des entrées supersoniques dans les convergents. On peut aussi introduire des modifications au modèle physique considéré, en tenant compte par exemple, des phénomènes d'ionisation et de dissociation qui interviennent lors des écoulements à haute température. De plus, il serait intéressant d'étendre l'étude du tube à choc aux phénomènes résultant de l'utilisation du tube à choc à section variable et des ouvertures non instantanées du diaphragme.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie:

- 1- Jaumotte, A., L. : Chocs et ondes de chocs -
Tome 2 - Masson & Cie - Paris, 1971.
- 2- Liepmann, H., W., Roshko, A. : Elements of gasdynamics -
Galcit Aeronautical Series - New York, 1957.
- 3- Rudinger, G. : Wave diagrams for unsteady flow in ducts -
D. Van Norstand Company Inc - Buffazlo , New York 1954.
- 4- Glass, I., I., Gordon Hall, J. : Handbook of supersonic aerodynamics -
Section 18 - Washington, December 1959.
- 5- Hill, P., G., Peterson, C., R. : Mechanics and thermodynamics of propulsion-
Addition- Wesley publishing company inc., 1965.
- 6- Howarth, L. : Concerning the effect of compressibility on laminar
boundary layers and their separation -
Proceeds Royal Society - London, 1948.
- 7- Mirels, H. : Laminar boundary layer behind shock advancing
into stationnary fluid -
NACA TN 3401, March 1955.
- 8- Brun, R., Sides, J. : Méthode numérique de détermination des grandeurs
de l'écoulement compte tenu de la couche limite pariétale-
Journal de mécanique - Volume 14 N° 3, 1975.
- 9- Gaydon, A., G., Hurlle, I., R. : The shock tube in high temperature chemical
physics-
Reinhold publishing corporation - New York, 1963.
- 10- Naval Weapons : Handbook of supersonic aerodynamics-
Section 17 [Ducts, Nozzles and Diffusers] , January 1964.

- 11- Conrad, J., C. : Supersonic nozzle design-
NACA, TN 1651, March 1948
- 12- Labassi, A. : Conception technique d'une soufflerie à choc et étude de l'écoulement visqueux à haute température dans les tuyères supersoniques-
Thèse de Magister, ENP, 1992.
- 13- Jacobs, P., A., Stalker, R., J. :Mach 4 and Mach 8 axisymmetric nozzles
for a shock tunnel-
ICASE Report 91-24, February 1991.
- 14- Pai, S., I. : Viscous flow theory-Tome 1, -Laminar flow-
D. Van Norstand Company Inc 1958.
- 15- Howarth, L.:Modern developments in fluid dynamics at high speed flow -volume 2
Oxford at darendon press, 1953.
- 16- Ouziaux, R., Perrier, J. : Mécanique des fluides appliquée-
3^{ème} édition , Dunod 1978.
- 17- Schlichting, H. : Boudary layer theory-
Mc Graw Hill, 6^{ème} édition , 1968.
- 18- Argrow, B., M, Emanuel , G. : Comparison of minimum length nozzles-
Journal of fluids engineering- Volume 110/283 - September 1988.
- 19- Issa, M., Ramadan, K. : Design and performance of supersonic nozzle.
International journal applied engineering, 1989.

ANNEXES

ANNEXE A

Equation de la couche limite dynamique compressible:

les équations de base sont :

$$\begin{cases} U \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial(\rho \cdot U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot V)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

La fonction de courant est définie par :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\rho \cdot U}{\rho_w} \quad ; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\rho \cdot V}{\rho_w}$$

et l'équation de continuité est ainsi directement vérifiée.

Les paramètres d'affinité sont définis par:

$$\begin{aligned} \eta &= \sqrt{\frac{U_e}{2 \cdot x \cdot \nu_w}} \cdot \int_0^y \frac{T_w'}{T} \cdot dy \\ \Psi &= \sqrt{2 \cdot U_e \cdot x \cdot \nu_w} \cdot f(\eta) \end{aligned}$$

Calculons les différents paramètres en fonction de η et f :

$$U = \frac{\rho_w}{\rho} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\rho_w}{\rho} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\rho_w}{\rho} \cdot \sqrt{2 \cdot U_e \cdot x \cdot \nu_w} \cdot \frac{df}{d\eta} \cdot \sqrt{\frac{U_e}{2 \cdot x \cdot \nu_w}} \cdot \frac{T_w}{T}$$

qui peut se mettre sous forme simplifiée

$$U = \left(\frac{\rho_w}{\rho} \cdot \frac{T_w}{T} \right) \cdot U_e \cdot f'(\eta)$$

Le gradient de pression étant nul le long de x et y , donc la pression est donc constante. La relation des gaz parfait entre la paroi et un point appartenant à la couche limite s'exprime par :

$$\begin{cases} P = \rho \cdot r \cdot T \\ P_w = \rho_w \cdot r \cdot T_w \end{cases} \Rightarrow \frac{\rho_w \cdot T_w}{\rho \cdot T} = 1$$

Ainsi

$$U = U_e \cdot f'(\eta)$$

Nous obtenons après calcul :

$$V = -\frac{\rho_w}{\rho} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\rho_w}{\rho} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

et donc :

$$V = \frac{\rho_w}{\rho} \cdot \left\{ f' / 2 \cdot U_e \cdot x^{-1} \cdot \int_0^y \frac{T_w}{T} \cdot dy - f' / 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot U_e \cdot \nu_w}{x}} \right\}$$

Par calcul, nous deduisons :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_e \cdot \frac{\partial f'}{\partial x} = U_e \cdot \frac{df'}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

D'où :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{U_e^{3/2}}{\sqrt{2 \cdot \nu_w}} \cdot x^{-3/2} \cdot f'' \cdot \int_0^y \frac{T_w}{T} \cdot dy$$

$$U \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{U_e^{3/2}}{\sqrt{2 \cdot \nu_w}} \cdot x^{-3/2} \cdot \int_0^y \frac{T_w}{T} \cdot dy \right] \cdot f' \cdot f''$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = U_e \cdot \frac{\partial f'}{\partial y} = U_e \cdot \frac{df'}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Ainsi

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U_e^{3/2}}{\sqrt{2 \cdot \nu_w \cdot x}} \cdot \frac{T_w}{T} \cdot f''$$

$$V \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{U_e^{3/2}}{\sqrt{2 \cdot \nu_w}} \cdot x^{-3/2} \cdot \int_0^y \frac{T_w}{T} \cdot dy \right] \cdot f' \cdot f'' - \frac{f' \cdot f''}{2} \cdot \frac{U_e^2}{x}$$

Maintenant que nous avons calculé les paramètres de l'équation de quantité de mouvement en fonction des variables η et f nous remplaçons ces derniers pour obtenir l'équation différentielle de la couche limite dynamique;

$$f''' + f \cdot f'' = 0$$