

وزارة التعليم العالي

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

SEA

### PROJET DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat

#### SUJET

INFLUENCE DE L'EFFET TRANSVERSE  
SUR LES MODES DE VIBRATION  
DES ELEMENTS POUTRE ET PLAQUE  
EN FLEXION

Proposé par :  
Mr. S. RECHAK

Étudié par :  
Mr. A. KERACHNI

Dirigé par :  
Mr. S. RECHAK

PROMOTION : JUIN 1989

وزارة التعليم العالي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

# PROJET DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat

### S U J E T

INFLUENCE DE L'EFFET TRANSVERSE  
SUR LES MODES DE VIBRATION  
DES ELEMENTS POUTRE ET PLAQUE  
EN FLEXION

Proposé par :  
Mr. S. RECHAK

Etudié par :  
Mr. A. KERACHNI

Dirigé par :  
Mr. S. RECHAK

PROMOTION : JUIN 1989

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout le corps enseignant pour la formation reçue tout au long de ma scolarité.

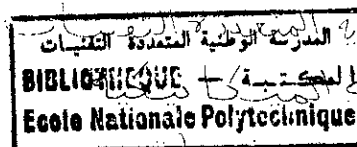
Mes remerciements vont également à tout ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à ma formation d'ingénieur et, à l'élaboration de ce travail.

## DEDICACES

A mes parents et beaux parents  
A ma soeur, beau frère et belles soeurs  
A mes grands parents  
A toute ma famille et mes amis  
A Amel et à Asma

Je dédie ce mémoire de fin d'études.

عبدالمالک



\*\*\*\*\*

\* العنوان: تأثير الفعل المعترض على اهتزازات العتبات والصفائح عند  
\* الإلحاء.

\* الملخص: يهدف عملنا هذا إلى إظهار تأثير الجهد القاطع على  
\* الاهتزازات العتبات والصفائح عن طريق العناصر المحددة.  
\* للوصول لهذا درسنا الإلحاء هذين العنصرين مستعملين  
\* أولا النظريات المأدوفة التي تهمل الفعل المعترض، ثانيا  
\* نظريات جديدة تميل إلى الأخذ بعين الاعتبار هذا الفعل.  
\* في كلتا الحالتين حرر برنامج على الكمبيوتر لإبراز الفرق  
\* بين النهريتين.

\*\*\*\*\*

\* Sujet: Influence de l'effet transverse sur les modes de  
\* vibrations des éléments poutres et plaques en flexion\*

\* Résumé:

\* Le but de cette étude est de montrer l'influence de  
\* l'effort tranchant sur les modes de vibrations des élément  
\* poutre et plaque en flexion, par la méthode des éléments  
\* finis.  
\* Pour cela nous avons étudié la flexion de ces éléments avec  
\* les théories classiques qui négligent l'effet transverse,  
\* ensuite avec des théorie modernes qui tendent à en tenir  
\* compte.  
\* Dans les deux cas des programmes en éléments finis ont été  
\* développés dans le but d'illustrer les différences.

\*\*\*\*\*

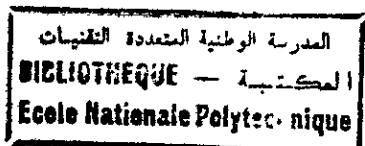
\* Subject: Influence of the transverse effect on the  
\* vibration modes of beam and plate elements in bending\*

\* Abstract

\* The object of this work is to show the influence of the  
\* transverse effect on the vibration modes of beam and plate  
\* elements in bending, using finite element method.  
\* To reach that we have studied those elements using  
\* classical theories wich neglect the shear deformations, then  
\* using modern theories which takes into account the transverse  
\* shear effect.  
\* In both cases finite element programs have been developed  
\* for illustration purpose.

\*\*\*\*\*

# SOMMAIRE



## Chap. 1 . INTRODUCTION

Page

- 1 . Fréquence d'utilisation des deux éléments..... 8
- 2 . Effet transverse habituellement négligé..... 8
- 3 . Description des étapes de l'étude..... 9

## Chap. 2 . VIBRATIONS DES STRUCTURES

- 1 . Système vibrant à 1 degré de liberté..... 11
  - 1 . Généralités..... 11
  - 2 . Vibrations libres..... 13
  - 3 . Vibrations forcées..... 14
- 2 . Système vibrant plusieurs degrés de liberté..... 15
  - 1 . Cas d'un système à deux degrés de liberté..... 15
  - 2 . Vibrations libres sans amortissement..... 16
- 3 . Vibrations des corps continus..... 19
  - \* . Vibrations transversales des poutres..... 19

## Chap. 3 . DESCRIPTION GENERALE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

- 1 . Introduction..... 24
- 2 . Historique..... 25
- 3 . Principaux types d'éléments..... 26
- 4 . Principales opérations..... 26

Chap. 4 . L'EFFET TRANSVERSE POUR L'ELEMENT

1 . Théorie classique.....	33
1 . Déplacements nodaux et forces.....	33
2 . Fonctions de déplacement.....	34
3 . Relation entre déplacements et déformations....	36
4 . Relation entre déformations et contraintes.....	38
5 . Relation entre les charges nodales et les déplacements nodaux.....	38
6 . Assemblage des matrices de rigidité des éléments.....	40
7 . Calcul dynamique.....	41
8 . Détermination de la matrice masse.....	41
2 . Analyse tenant compte de l'effet transverse.....	43
1 . Introduction.....	43
2 . Matrice de rigidité avec effet transverse.....	44
3 . Etude quantitative.....	49
1 . Organisation des programmes.....	49
2 . Exemples traités.....	55
3 . Analyse des résultats.....	73

Chap. 5 . L'EFFET TRANSVERSE POUR L'ELEMENT PLAQUE

1 . Théorie de Kirchhoff-Poisson.....	76
1 . Introduction.....	76
2 . Equations différentielles.....	77
3 . Énergie de déformation.....	79
4 . Equations des contraintes de flexion.....	80
5 . Sélection des fonctions de déplacement.....	81
6 . Test de convergence.....	83

7 . Formulation rectangle à 4 noeuds et 16 d.d.l....	83
2 . Théorie de Mindlin-Reissner.....	91
1 . Introduction.....	91
2 . Importantes hypothèses.....	91
3 . Equation fondamentale.....	94
4 . Equations liant déformation et déplacement.....	95
5 . Principales notations de la théorie.....	95
6 . Equation variationnelle.....	97
7 . Formulation matricielle.....	101
8 . Matrice de rigidité et vecteur charge.....	103
9 . Quelques critères de convergence.....	106
10 . Contrainte de cisaillement et verrouillage.....	107
11 . Conditions aux limites.....	108
12 . Intégration réduite et sélective.....	110
13 . Modes parasites.....	112
3 . Etude quantitative.....	113
1 . Organisation des programmes.....	113
2 . Exemples traités.....	118
3 . Analyse des résultats.....	151
 <u>Chap. 6 . CONCLUSION</u> .....	 153
 <u>Annexe</u> : Intégration numérique de Gauss.....	 156

CHAPITRE 1

INTRODUCTION



## 1 . INTRODUCTION

### 1 . 1 . FREQUENCE D'UTILISATION DES ELEMENTS CONSIDERES

Dans tous les domaines de la technologie moderne les éléments poutres et plaques sont utilisés pour la construction de toutes sortes de machines, véhicules et édifices.

Ainsi, on se rapporte souvent à ces éléments simples pour étudier les ensembles compliqués, que ce soit en aéronautique, en construction marine, sous-marine, automobile, ou pour les charpentes soutenant de grandes constructions.

### 1 . 2 . EFFET TRANSVERSE HABITUELLEMENT NEGLIGE

Lorsqu'un élément poutre ou plaque est soumis à une flexion pure, cela engendre inévitablement l'apparition d'une contrainte de cisaillement transverse qui participe à la déformation de l'élément.

Habituellement, dans les études statiques des structures en poutre et en plaque, on néglige cet effet et on ne considère, dans les calculs, que la déformation de flexion.

Cela pour la simple raison qu'il a été prouvé que l'effet transverse est négligeable tant que l'épaisseur de l'élément est réduite par rapport aux autres dimensions et, que les forces appliquées n'occasionnent que de faibles déplacements.

Notre présente étude porte donc sur l'influence de l'effet transverse dans l'étude dynamique des structures d'éléments poutres et plaques.

Pour les poutres, il suffit de ne pas négliger le terme du cisaillement apparaissant dans l'expression de l'énergie de déformation.

Alors que pour les plaques, il faut avoir recours à une théorie totalement différente de celle communément employée et aussi très récente.

Cette théorie se ramifie en un grand nombre de formulations d'éléments qui tentent chacun d'approcher les solutions exactes tout en couvrant la plus grande plage d'épaisseurs possible de l'élément plaque.

Il faut noter que la documentation concernant cette théorie est rare, et que les recherches de mise au point de nouvelles formulations se poursuivent actuellement à travers le monde.

### 1 . 3 . DESCRIPTION DES ETAPES DE L'ETUDE

- Puisqu'il est question d'étude des modes de vibrations des éléments poutres et plaques, il faut commencer par introduire la notion de vibrations des structures, et de montrer que les grandeurs qui les caractérisent sont les valeurs, fréquences et vecteurs propres. Et ceci est l'objet du chapitre 2.

- Ensuite une description de la méthode des éléments finis, en tant que procédé moderne d'étude des structures, est faite dans le chapitre 3, car c'est par cette méthode que se feront les études des deux éléments.

- L'étude complète de l'élément poutre est faite par la méthode classique. Elle aboutit à l'obtention de la matrice de rigidité et la matrice masse.

Cet étude est suivit du calcul de la matrice de rigidité sans négliger l'effet transversé. Tout cela est contenu dans le chapitre 4, qui regroupe également la description des programmes informatiques et les résultats des exemples traités pour le cas statique et le cas dynamique.

- Le chapitre 5 traite successivement de la théorie classique des plaque (Kirchhoff-Poisson) qui néglige l'effet transversé et, de la théorie moderne (Mindlin-Reissner) qui ne le néglige pas.

Les programmes et les exemples proposés traitent des comportements statiques et dynamiques des plaques rectangulaires de Kirchhoff.

- Les conclusions qui peuvent être tirées de tout ce travail ainsi que quelques propositions sont exposés dans le chapitre 6.

CHAPITRE 2

VIBRATIONS DES STRUCTURES

## 2 . VIBRATIONS DES STRUCTURES

La vibration est définie comme étant une oscillation rapide. En mécanique c'est le mouvement des particules d'un milieu élastique autour d'une position d'équilibre.

Si on écarte un corps élastique de sa position d'équilibre, il tend à y revenir, puis en vertu de la vitesse acquise, il dépasse la position d'équilibre et exécute des vibrations autour de cette position. La fréquence est le nombre de vibrations effectuées en une seconde.

### 2 . 1 . SYSTEME VIBRANT A UN DEGRE DE LIBERTE.

#### 2 . 1 . 1 - Généralités.

Il s'agit d'écrire l'équation du mouvement du système de la figure (2.1).

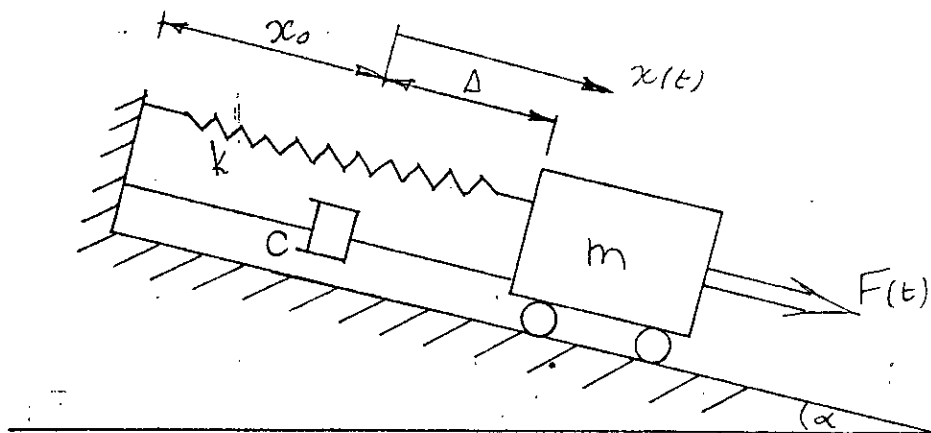


Fig.2.1 - Système vibrant à un degré de liberté

$x_0$  étant l'allongement initial du ressort. Sous l'influence de la masse  $m$ , il s'allonge de  $\Delta$ .

Après l'application de la force  $F(t)$ , le système vibrera avec une amplitude  $x$ .

On isole le système comme le montre la figure (2.2) et, on applique la loi de Newton:

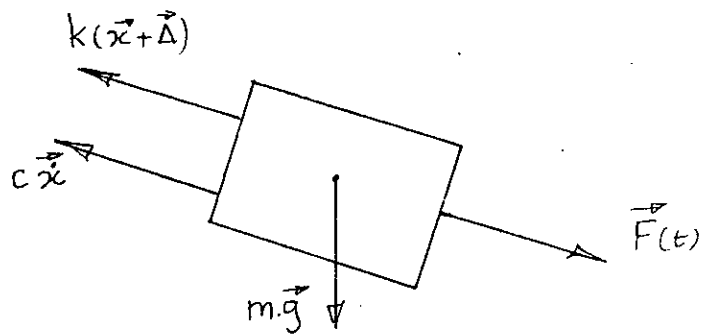


Fig.2.2 - Système isolé

$$\sum \vec{F} = m \cdot \ddot{\gamma}$$

$$- c \cdot \dot{x} - k(x + \Delta) + m \cdot g \cdot \sin \alpha + F(t) = m \cdot \ddot{x} \quad (2.1)$$

Si  $F(t) = 0$ , on a l'équilibre statique.

$$m \cdot \ddot{x} = 0$$

$$c \cdot \dot{x} = 0$$

$$x = 0$$

Donc:

$$- k \cdot \Delta + m \cdot g \cdot \sin \alpha = 0 \quad (2.2)$$

En remplaçant l'équation (2.2) dans (2.1), on obtient:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = F(t) \quad (2.3)$$

## 2 . 1 . 2 . Vibrations libres.

Les vibrations étant libres, on a:

$$F(t) = 0$$

L'équation (2.3) s'écrit alors:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0 \quad (2.4)$$

Selon le coefficient d'amortissement  $c$ , on distingue les cas suivants:

a)  $c = 0$ : Vibrations non amorties

Dans ce cas, l'équation (2.4) devient:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0$$

$$\ddot{x} + (k/m) \cdot x = 0$$

Soit:

$$\omega_m = \sqrt{k/m}$$

On peut alors écrire:

$$\ddot{x} + \omega_m^2 \cdot x = 0$$

La solution générale de cette équation est:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_m \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_m \cdot t)$$

Où  $A$  et  $B$  sont des constantes à déterminer selon les conditions aux limites.

b)  $c \neq 0$ : vibrations amorties

L'équation (2.4) devient:

$$\ddot{x} + (c/m) \cdot \dot{x} + (k/m) \cdot x = 0 \quad (2.5)$$

Le coefficient d'amortissement visqueux est:

$$\xi = c / \sqrt{2 \cdot k \cdot m}$$

L'équation (2.5) devient alors:

$$\ddot{x} + 2 \cdot \xi \cdot \omega_m \cdot \dot{x} + \omega_m^2 \cdot x = 0$$

Cette équation est l'équation générale d'un système amorti. On suppose une solution générale de la forme:

$$x(t) = A \cdot e^{\lambda t}$$

### 2 . 1 . 3 . Vibrations forcées

Dans ce cas, la force d'excitation n'est pas nulle. On a:

$$F(t) \neq 0$$

L'équation générale donne:

$$\ddot{x} + 2 \cdot \xi \cdot \omega_m \cdot \dot{x} + \omega_m^2 \cdot x = F(t)/m \quad (2.6)$$

a) Excitation harmonique

La force est alors sous la forme:

$$F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

La solution générale de cette équation est:

$$X_T(t) = X_H(t) + X_P(t)$$

Où  $X_h$  est la solution de l'équation homogène et  $X_p$  celle de l'équation particulière.

### b) Excitation périodique

La force excitatrice est périodique, on l'écrit sous la forme d'une série de Fourier:

$$F(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \cdot \exp(i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t)$$

### c) Excitation arbitraire

Dans ce cas, on écrit la solution particulière sous la forme:

$$x_p(t) = A(t) \cdot U_1(t) + B(t) \cdot U_2(t)$$

Où  $A(t)$  et  $B(t)$  sont à déterminer alors que  $U_1$  et  $U_2$  sont les solutions de l'équation homogène.

## 2 . 2 . SYSTEME VIBRANT A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTES

### 2 . 2 . 1 . Cas d'un systeme a deux degres de libertes.

On considère la figure (2.3) et on établit les équations différentielles du système.

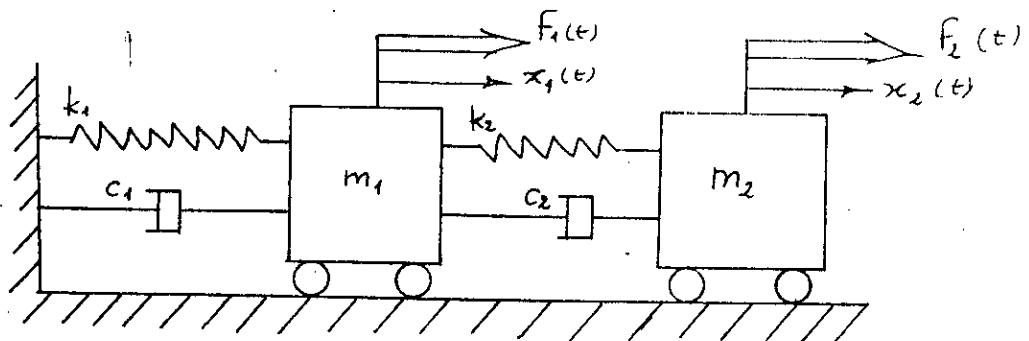


Fig.2.3 - Système à deux degrés de liberté

Pour cela, on isole les masses  $m_1$  et  $m_2$  comme le montre la figure (2.4) puis on applique l'équation de Newton:



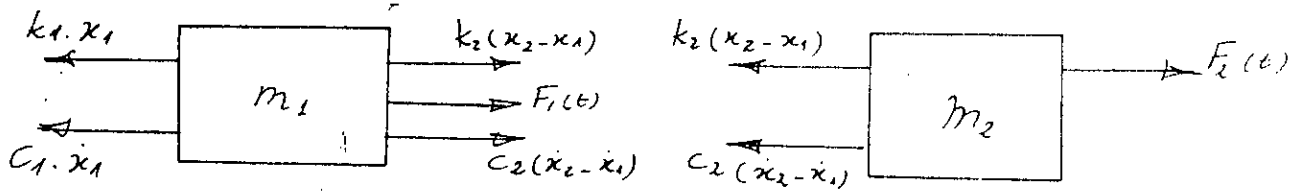


Fig.2.4 - Système isolé

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 = -k_1 \cdot x_1 - c_1 \cdot \dot{x}_1 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F_1(t)$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 = F_2(t) - k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

Après certains arrangements, on réécrit ces équations sous la forme de matrices:

$$[m] \cdot \{\ddot{x}(t)\} + [c] \cdot \{\dot{x}(t)\} + [k] \cdot \{x(t)\} = \{F(t)\}$$

Où:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \text{la matrice masse}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad \text{la matrice amortissement}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad \text{la matrice de rigidité}$$

### 2 . 2 . 2 . Vibrations libres sans amortissement

Vu ces hypothèses, on a:

$$F_1(t) = F_2(t) = 0$$

$$c_1 = c_2 = 0$$

Pour simplifier le problème, on pose que:

$$m_1 = m_2 = m$$

$$k_1 = k_2 = k$$

et  $\omega_0^2 = k/m$

Les équations deviennent alors:

$$\ddot{x}_1 + 2 \cdot \omega_0^2 \cdot x_1 - \omega_0^2 \cdot x_2 = 0$$

(2.7)

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 \cdot x_1 + \omega_0^2 \cdot x_2 = 0$$

Soit:

$$x_i = A_i \cdot e^{\lambda t} \quad (i=1,2) \quad (2.8)$$

Après avoir réarrangé le système ci-dessus, on le met sous forme matricielle comme suit:

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 + 2 \cdot \omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \lambda^2 + \omega_0^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[B] \cdot \{A\} = \{0\}$$

Ceci est le problème aux valeurs propres. On résout la matrice  $[B]$  en éliminant la solution triviale.

$$\det [B] = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + 2 \cdot \omega_0^2) \cdot (\lambda^2 + \omega_0^2) - \omega_0^4 = 0$$

Cette équation est l'équation aux valeurs propres et (avec  $i = 1, 2, 3, 4$ ) sont les valeurs propres.

On résout l'équation aux valeurs propres:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2}^2 &= (-3 \cdot \omega_0^2 \pm \sqrt{9 \cdot \omega_0^4 - 4 \cdot \omega_0^4})/2 \\ &= \omega_0^2 \cdot (-3 \pm \sqrt{5})/2 < 0\end{aligned}$$

Soient :

$$\begin{cases} \mu_1^2 = (3 - \sqrt{5})/2 = 0,618 \\ \mu_2^2 = (3 + \sqrt{5})/2 = 2,681 \end{cases}$$

Les valeurs propres sont:

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm i \cdot \mu_1 \cdot \omega_0 \\ \lambda_{3,4} = \pm i \cdot \mu_2 \cdot \omega_0 \end{cases}$$

D'autre part, on cherche les vecteurs propres. Pour cela on reprend le système (2.7) et on y introduit l'expression (2.8):

$$\begin{cases} (\lambda^2 + 2 \cdot \omega_0^2) \cdot A_1 - \omega_0^2 \cdot A_2 = 0 \\ -\omega_0^2 \cdot A_1 + (\lambda^2 + \omega_0^2) \cdot A_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (A_1/A_2)^{(1)} = \frac{\omega_0^2}{\lambda_1^2 + 2 \cdot \omega_0^2} \\ (A_1/A_2)^{(2)} = \frac{\omega_0^2}{\lambda_2^2 + 2 \cdot \omega_0^2} \end{cases}$$

On remplace les valeurs de  $\lambda_i^2$  pour obtenir:

$$\begin{cases} (A_1/A_2)^{(1)} = -1,618 \\ (A_1/A_2)^{(2)} = +0,618 \end{cases}$$

En général, on a que  $A_1^{(1)} = 1$ . Alors:

$$A_2^{(1)} = -0,618$$

Donc:

$$\{A^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{Bmatrix}$$

De la même manière, on obtient:

$$\{A^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,618 \end{Bmatrix}$$

Ainsi, on a eu les deux vecteurs propres. Les fréquences naturelles sont données par la formule suivante:

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i^2}$$

Les  $\omega_i$  doivent être réels.

## 2 . 3 . VIBRATIONS DES CORPS CONTINUS

Dans ce qui suit, on va déterminer les caractéristiques dynamiques des corps continus tels que les poutres et les plaques.

### 2 . 3 . 1 . Vibrations transversales des poutres

On utilise l'hypothèse qu'une fibre droite initialement perpendiculaire à la fibre neutre demeure droite et perpendiculaire à la fibre neutre après déformation. Cette hypothèse implique qu'on néglige l'effet transverse.

La poutre de la figure (2.5) admet les caractéristiques suivantes:

- $\rho$  : masse volumique
- $E$  : module d'élasticité
- $I$  : moment d'inertie
- $A$  : section

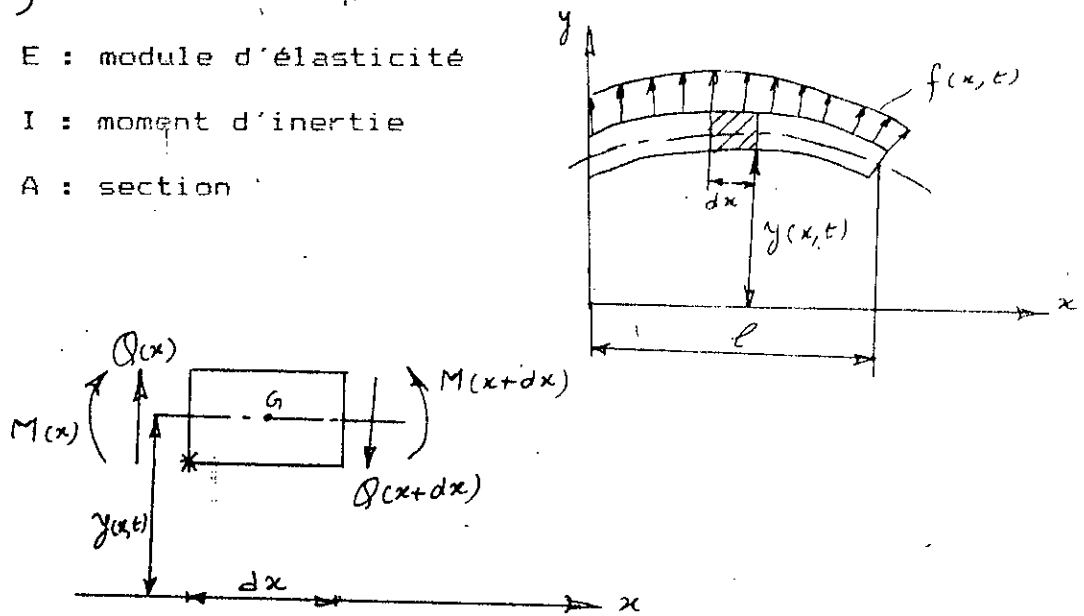


Fig.2.5 - Élément poutre en déformation

On applique sur l'élément différentiel, l'effort tranchant  $Q(x)$  et le moment fléchissant  $M(x)$ , puis on écrit l'équation de Newton comme suit:

$$\sum F = (\rho \cdot A \cdot dx) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Q(x) - Q(x+dx) + f(x,t) \cdot dx \quad (2.9)$$

La somme des moments par rapport au point (\*) donne:

$$M(x) - M(x+dx) + Q(x+dx) \cdot dx - f(x,t) \cdot dx \cdot (dx/2) = 0 \quad (2.10)$$

L'équation (2.10) est établie en supposant que le couple d'inertie ( $I \cdot \ddot{\theta}$ ) provoquée par la rotation est négligé.

Si on procède à l'expansion de  $Q(x+dx)$  et  $M(x+dx)$ , les équations (2.9) et (2.10) deviennent:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial x} = Q(x) \quad (2.12)$$

Sachant la relation qui lie le moment de flexion et le déplacement:

$$M(x) = E.I. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.13)$$

On substitue les équations (2.12) et (2.13) dans (2.11):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (E \cdot I \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}) + \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (2.14)$$

Cette équation représente l'équation différentielle régissant les vibrations transversales d'une poutre.

On remarque que cette équation est du quatrième degré; par conséquent, il est nécessaire d'avoir quatre conditions aux limites: deux conditions à chaque extrémité.

#### a) Vibrations libres

Dans ce cas,  $f(x, t) = 0$  On utilise la méthode de séparation des variables en posant:

$$y(x, t) = Y(x) \cdot F(t) \quad (2.15)$$

Où  $F(t)$  est une fonction harmonique.

On pose :

$$E.I = cte$$

et on substitue (2.15) dans (2.14):

$$F(t) \cdot (E \cdot I \cdot \frac{d^4 Y}{dx^4}) + A \cdot Y(x) \cdot \frac{d^2 F}{dt^2} = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{Y^{(4)}(x)}{(\frac{\rho A}{E I}) \cdot Y(x)} = - \frac{\ddot{F}(t)}{F(t)} = \omega^2 \quad (2.17)$$

De l'équation (2.17) il découle:

$$Y^{(4)}(x) - \omega^2 \cdot \rho \cdot A \cdot Y(x) / (E \cdot I) = 0 \quad (2.18)$$

et

$$F''(t) + \omega^2 \cdot F(t) = 0 \quad (2.19)$$

L'équation différentielle (2.18) admet pour équation caractéristique:

$$r^4 - \beta^4 = 0$$

avec:

$$\beta^4 = \omega^2 \cdot \frac{\rho \cdot A}{E \cdot I}$$

$$r_{1,2}^2 = \pm \beta^2$$

donnant:

$$r_{1,2} = \pm \beta$$

$$r_{3,4} = \pm i \cdot \beta$$

La solution est donc:

$$Y(x) = A \cdot e^{\beta x} + B \cdot e^{-\beta x} + C \cdot e^{i \beta x} + D \cdot e^{-i \beta x} \quad (2.20)$$

Les constantes A, B, C et D sont déterminées selon les conditions aux limites.

CHAPITRE 3

DESCRIPTION GENERALE

DE

LA METHODE DES ELEMENTS FINIS



### 3 . DESCRIPTION GENERALE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

#### 3 . 1 . INTRODUCTION

Habituellement dans les problèmes relevant de la mécanique des structures, on recherche la répartition des contraintes qui régnent dans la structure étudiée.

A l'occasion il peut être nécessaire de calculer les déplacements en quelques points particuliers afin de s'assurer que les spécifications de flèche sont bien respectées.

Pour un problème donné, la première étape consiste à définir des équations régissant la solution, en même temps quelles satisfont les conditions d'équilibres et quelles représentent fidèlement les conditions réelles de travail de la structure avec toute sa complexités.

A ce stade déjà, apparaissent les sources d'erreurs qui feront que la solution sera toujours approximative.

La seconde étape n'est autre que la résolution des équations. Lorsque le problème est bi ou tridimensionnel, il s'agit d'équations aux dérivées partielles dont les solutions exactes sont rarement connues.

Heureusement, l'apparition des ordinateurs a spectaculairement multiplié les possibilités de résolution des équations par *les méthodes de calcul numériques*.

La méthode des éléments finis constitue une approche du problème de l'analyse des structures dont l'idée de base est la suivante:

On peut représenter de manière analytique un milieu continu (l'ensemble à analyser) en le subdivisant en domaines (éléments finis) possédant chacun ses propres fonctions pour décrire contraintes et déplacements.

On choisit souvent la forme à supposer pour ces fonctions de manière qu'elles assurent la continuité du comportement dans l'ensemble du milieu.

### 3 . 2 . Historique [5]

La période de 1850 à 1875 constitue le point de départ logique de notre historique, c'est grâce aux travaux de Maxwell, Castigliano, Mohr et d'autres que naquirent les premières notions d'analyse des structures composées d'assemblages de barres.

Ensuite les progrès furent lents à cause de limitations d'ordre pratique portant sur la résolution des équations algébriques de plus de quelques inconnues.

Vers 1920 Maney aux Etats-Unis et Ostenfeld au Danemark dégagèrent les idées de base d'une approche nouvelle de l'analyse des poutres en treillis et des ossatures, mais les limitations de calcul liées au nombre d'inconnus prévalurent jusqu'en 1932, date à laquelle Hardy Cross introduisit la *méthode de la distribution des moments*, elle régna sur l'analyse numérique des structures pendant environ 25 ans.

Au début des années cinquante apparurent les calculateurs digitaux, et certains, tel que Argyris et Kelsey, commencèrent à transcrire les procédures connues d'analyse des structures en treillis sous une forme adaptée aux ordinateurs: la forme matricielle.

Depuis le milieu des années cinquante, les techniques de l'analyse par éléments finis n'ont cessé de se développer. Après les barres et les poutres on passa aux plaques, coques et volumes de révolution, et cela par le développement des formulations spécifiques d'éléments de contraintes planes.

Mais tout cela se faisait en analyse statique et en élasticité linéaire, on pensa donc aux phénomènes spéciaux comme la réponse dynamique, le flambage et les non-linéarités géométriques et de matériaux: pour cela il fallut adapter la formulation des éléments et l'organisation générale de l'analyse.

Puis il y a eu la mise au point de *programmes généraux* pour ordinateurs, afin que la méthode serve directement aux praticiens.

A ce jour, des programmes continuent à être mis au point pour étendre la méthode à d'autres disciplines que l'analyse mécanique des structures tel que: l'analyse des effets thermiques dans les structures, et l'interaction dynamique entre fluides et structures en hydro-élasticité.

### 3 . 3 . Les principaux types d'éléments:

Les éléments couramment utilisés dans la pratique sont:

- a) **L'élément barre simple:** Il sert à décrire des poutres en treillis ou en ossatures à deux ou à trois dimensions.
- b) **L'élément plaque mince chargée dans son plan:** aussi appelé *élément de base* de l'analyse par éléments finis en raison de son utilité dans un grand nombre de cas pratiques d'analyse et aussi pour son antériorité historique par rapport aux autres types d'éléments.

Il apparaît généralement sous deux formes: *l'élément triangle* et *l'élément quadrilatère*.

- c) **L'élément volumique:** qui est une généralisation tri-dimensionnelle des éléments de contraintes planes. Le tétraèdre et le parallélépipède en sont les formes les plus courantes.

Il est essentiel dans la modélisation des structures destinées à la production d'énergie nucléaire. L'analyse des *corps volumiques de révolution* est un domaine d'application les plus importants de la méthode des éléments finis.

- d) **L'élément plaque mince de flexion:** sert à l'étude de plaques planes, à la représentation des coques par facettes, et à la constitution des poutres à parois minces.
- e) **Les coques minces de révolution:** à mi-chemin entre les éléments plaques planes en flexion et en tension et les éléments coques minces généraux.
- f) **Les coques minces gauches:** utilisées pour constituer des coques minces de formes plus générales avec un maximum de précision et une représentation adaptée au couplage entre tension et flexion au sein de chaque élément.

### 3 . 4 . Principales opérations

L'analyse des contraintes est l'un des plus importants domaines d'application de la méthode des éléments finis.

Plus la structure à analyser par cette méthode est complexe, plus la vitesse et la capacité des ordinateurs utilisés augmentera.

Lorsque cette méthode est utilisée pour déterminer des contraintes ou des déformations dues à un système de charges connus dans une structure, celle-ci sera divisée en un nombre d'éléments finis.

La structure à étudier est remplacée par un ensemble d'éléments supposés liés les uns aux autres en un nombre fini de points appelés *points nodaux* ou *noeuds*. Ces noeuds se trouvent aux coins des éléments ou tout le long de leurs frontières.

La position des lignes nodales sur une structure, donc la forme de la subdivision en éléments, dépend de deux facteurs principaux:

<1> . Les frontières des éléments doivent coïncider avec les discontinuités de la structure.

<2> . Les points nodaux doivent coïncider avec les points d'application des charges concentrées. Les éléments doivent être arrangés de manière que les chargements brusques dans les charges réparties se produisent à la frontière de l'élément.

L'une des caractéristiques de la méthode est que l'analyste n'est pas obligé d'utiliser un seul type d'élément pour l'analyse complète d'une structure.

Une structure formée de plusieurs sous structures de types différents (uni, bi ou tridimensionnels) peut être analysée par la méthode des éléments finis. Chaque sous structure est divisée en types d'éléments appropriés.

Quand la structure considérée a été subdivisée en un nombre fini d'éléments, notre attention se concentrera sur un seul élément. (Quand plusieurs types d'éléments sont nécessaires, chaque type d'élément doit être considéré).

Notre objectif sera d'obtenir pour l'élément, une expression de la forme:

$$\{P\} = [k] \cdot \{\delta\} \quad (3.1)$$

qui relie les forces  $\{P\}$  et les déplacements aux noeuds  $\{\delta\}$  par l'intermédiaire de la matrice de rigidité  $[k]$ .

La première étape dans l'analyse est de choisir une fonction de déplacement qui définisse de façon unique l'état de déplacement de tous les points de l'élément.

La forme la plus convenable de la fonction de déplacement est un polynôme, qui sera fonction de  $x$ , de  $x$  et  $y$ , de  $x$ ,  $y$  et  $z$  dépendant de l'élément s'il est uni, bi, ou tridimensionnel.

La fonction de déplacement doit avoir les propriétés suivantes:

- a) Le polynôme doit être continu sur le domaine de l'élément.
- b) Le polynôme doit être complet jusqu'à l'ordre  $n$ , où  $n$  est l'ordre de la dérivée la plus élevée qui apparaît dans l'intégrale de l'énergie de déformation.
- c) Les dérivées d'ordre  $(n-1)$  du polynôme de déplacement doivent être continues à travers les frontières de l'élément, ce qui revient à dire que les éléments se déforment sans qu'il y ait ouverture entre eux.

Cette condition ne peut être réalisée que si les déplacements le long d'une frontière d'un élément ne dépendent que des déplacements des noeuds qui se trouvent sur cette frontière.

- d) Le nombre de termes indépendants dans le polynôme doit être égal au nombre de composantes des déplacements qui sont à calculer.

Ayant choisi le polynôme de déplacement, qui pour le cas général tridimensionnel, peut être écrit sous forme matricielle:

$$\{f(x,y,z)\} = [\phi(x,y,z)] \cdot \{\alpha\} \quad (3.2)$$

Où  $\{\alpha\}$  est un vecteur de coefficients constants et  $[\phi(x,y,z)]$  est une matrice. L'étape suivante consiste à utiliser l'équation (3.2) pour formuler un système d'équations exprimant les composantes de déplacement en chaque noeud en fonction des coordonnées nodales du noeud particulier considéré.

Chaque noeud a trois composantes de déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$  suivant les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  respectivement.

Chacune de ces composantes est exprimée en fonction des coordonnées nodales du noeud considéré pour donner un système d'équations de la forme:

$$\{\delta\} = [A] \cdot \{\alpha\} \quad (3.3)$$

Où  $A$  est une matrice carrée de coordonnée nodales.

L'équation (3.3) nous donne:

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \quad (3.4)$$

Si l'expression (3.4) est substituée dans (3.2), on obtient:

$$\{f(x,y,z)\} = [\phi(x,y,z)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \quad (3.5)$$

L'étape qui suit dans l'analyse consiste à déterminer la distribution des déformations à travers l'élément.

Cette distribution peut être obtenue à partir des équations (3.2) et (3.5), vu que les composantes de déformations sont les dérivées des composantes de déplacements. D'où:

$$\{\epsilon(x,y,z)\} = [B(x,y,z)] \cdot \{\alpha\} \quad (3.6)$$

Où:

$$\{\epsilon(x,y,z)\} = [B(x,y,z)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \quad (3.7)$$

Les composantes des contraintes dans l'élément sont reliées à celles de déformation par l'expression:

$$\{\sigma(x,y,z)\} = [D] \cdot \{\epsilon(x,y,z)\} \quad (3.8)$$

Où  $\{\sigma(x,y,z)\}$  est un vecteur des composantes des contraintes et  $[D]$  une matrice des coefficients constants qui dépend du matériau considéré. Si l'expression (3.7) est substituée dans (3.8), la relation suivante est obtenue:

$$\{\sigma(x,y,z)\} = [D] \cdot [B(x,y,z)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \quad (3.9)$$

Ainsi, la matrice de rigidité  $[k]$  de l'élément peut être obtenue en égalisant le travail externe ( $Q_e$ ) des forces  $\{P\}$  appliquées au noeud, au travail interne ( $Q_i$ ) dû à un déplacement virtuel. Soit:

$$Q_e = \{d\delta\}^T \cdot \{P\} \quad (3.10)$$

Le travail interne n'est autre que le travail des composantes des contraintes dû à un changement de déformation  $d(x,y,z)$  qui est le résultat d'un changement virtuel:

$$Q_i = \int_V \{d\epsilon(x,y,z)\}^T \cdot \{\sigma(x,y,z)\} \cdot dv \quad (3.11)$$

Si les expressions pour  $\{\sigma\}$  et  $d\epsilon$  des équations (3.7) et (3.9) sont substituées dans (3.11), on obtient l'équation suivante:

$$Q_i = \int_V \{d\delta\}^T \cdot \{[B] \cdot [A]^{-1}\}^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \cdot dv$$

Or:

$$Q_i = Q_e$$

D'où:

$$\{d\delta\}^T \cdot \{P\} = \{d\delta\}^T \cdot [A]^{-1} \cdot \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \cdot dv$$

Alors:

$$\{F\} = [A]^{-1} \cdot \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dv \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \quad (3.12)$$

En comparant les équations (3.12) et (3.1) il est évident que la matrice de rigidité  $[k]$  est:

$$[k] = [A]^{-1T} \cdot \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dv \cdot [A]^{-1} \quad (3.13)$$

Quand la matrice de rigidité  $[k]$  est déterminée pour un élément typique dans la structure, les équations pour tous les éléments doivent être assemblées pour obtenir un système d'équations de la forme:

$$\{F\} = [K] \cdot \{\delta_s\} \quad (3.14)$$

qui relie les déplacements et les charges de la structure complète par l'intermédiaire de la matrice de rigidité globale  $[K]$ .

Dans l'équation (3.14),  $\{F\}$  est un vecteur de forces extérieures appliqués aux points nodaux de la structure. Chaque force extérieure est la somme des forces appliquées aux noeuds adjacents.

Le vecteur  $\{\delta_s\}$  dans (3.14) représente les déplacements aux noeuds. Chaque déplacement dans le vecteur  $\{\delta_s\}$  a la même valeur que les déplacements des noeuds adjacents.

Les termes dans la matrice  $[K]$  sont la somme des termes appropriés dans la matrice de rigidité des éléments qui ont un déplacement commun.



CHAPITRE 4

L'EFFET TRANSVERSE

POUR L'ELEMENT POUTRE

## 4 . L'EFFET TRANSVERSE POUR L'ELEMENT POUTRE

### 4 . 1 . THEORIE CLASSIQUE

Nous avons développé dans le chapitre précédent une description générale de la méthode des éléments finis. Dans ce chapitre, nous allons appliquer la méthode aux problèmes de la flexion des poutres.

La figure (4.1) montre une poutre soumise à une charge transversale  $q(x)$ . Soient  $W$  le déplacement transversal,  $E$  le module d'élasticité,  $I$  le moment d'inertie et  $z$  la coordonnée verticale.

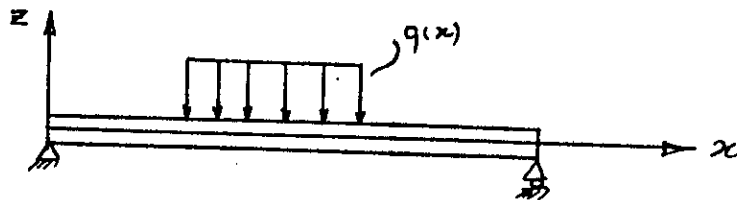


Fig.4.1 - Poutre doublement appuyée

Une poutre (structure unidimensionnelle) peut être représentée par une ligne comme le montre la figure (4.2).

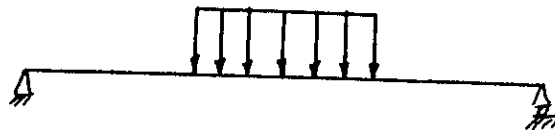


Fig.4.2 - Schéma représentatif

Discrétisons la poutre en éléments unidimensionnels (Fig.4.3); Un élément typique est montré par la figure (4.4).

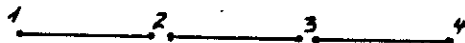


Fig.4.3 - Poutre discrétisée

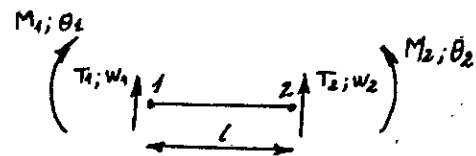


Fig.4.4 - Élément isolé

#### 4 . 1 . 1 . Déplacement nodal et forces

Le problème que nous nous sommes proposé d'étudier est la flexion d'une poutre. Chaque noeud possède deux degrés de liberté; Un déplacement  $W$  normal à la poutre et une rotation  $\theta$  autour de l'axe  $y$ .

Le nombre total de degrés de liberté d'un élément est égal au produit du nombre de noeuds par le nombre de degré de liberté de chaque noeud. Ainsi, pour notre cas, le nombre total de degré de liberté de chaque élément est égal à quatre.

Le nombre de degré de l'élément étant connu, on peut déterminer le vecteur de déplacement nodal  $\{\delta\}$  et le vecteur de charge nodal  $\{P\}$ . La matrice de rigidité  $[k]$  pour cet élément est donné par l'équation:

$$\{P\} = [k] \cdot \{\delta\}$$

avec:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ W_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Chaque vecteur étant composé de quatre termes, la matrice  $[k]$  est une matrice carré d'ordre quatre.

#### 4 . 1 . 2 . Fonction de déplacement

Pour un élément de poutre, la fonction de déplacement satisfaisant les conditions discutées au chapitre précédent;

$$W = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 + \alpha_4 \cdot x^3 \quad (4.1)$$

$$\theta = dW / dx = \alpha_2 + 2 \cdot \alpha_3 \cdot x + 3 \cdot \alpha_4 \cdot x^2$$

Ecrivons ces deux équations sous forme matricielle:

$$\{f(x)\} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Où:} \quad \{f(x)\} = [\phi(x)] \cdot \{\alpha\} \quad (4.2)$$

Si on exprime les coefficients de déplacements en fonction des déplacements nodaux et si on les rapporte dans l'équation (4.2), on relie les déplacements des points de l'élément aux déplacements nodaux.

Ainsi, pour l'élément poutre de la figure (4.4) où les coordonnées des noeuds sont 0 et 1, on aura:

$$\text{noeud 1 : } x = 0$$

$$w_1 = \alpha_1$$

$$\theta_1 = \alpha_2$$

$$\text{noeud 2 : } x = 1$$

$$w_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1^2 + \alpha_4 \cdot 1^3$$

$$\theta_2 = \alpha_2 + 2 \cdot \alpha_3 \cdot 1 + 3 \cdot \alpha_4 \cdot 1^2$$

En l'exprimant sous forme matricielle, on aura:

$$\{\delta\} = [A] \cdot \{\alpha\} \quad (4.3)$$

Où:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1^2 & 1^3 \\ 0 & 1 & 2 \cdot 1 & 3 \cdot 1^2 \end{bmatrix}$$

La matrice [A] étant connue, le vecteur des coefficients peut être obtenu en inversant l'expression de l'équation (4.3). D'où:

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \quad (4.4)$$

Où:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/1^2 & -2/1 & 3/1^2 & -1/1 \\ 2/1^3 & 1/1^2 & -2/1^3 & 1/1^2 \end{bmatrix}$$

En substituant l'expression obtenue de dans la relation (4.2), on obtient:

$$\{f(x)\} = [\phi(x)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \quad (4.5)$$

#### 4 . 1 . 3 . Relation entre déplacements et déformations

Les déformations  $\mathcal{E}(x)$  aux différents points de l'élément peuvent être obtenues à partir de la fonction de déplacement  $f(x)$  par une dérivation. Soit:

$$\{\mathcal{E}(x)\} = \{\text{dérivée de } f(x)\}$$

D'après la relation (4.5) et les expressions de  $[A]^{-1}$  et  $\{\delta\}$ :

$$\{\mathcal{E}(x)\} = \{\text{dérivée de } [\phi(x)]\} \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\}$$

Soit  $[B(x)]$  la matrice dérivée de  $[\phi(x)]$ :

$$\{\mathcal{E}(x)\} = [B(x)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \quad (4.6)$$

D'après la théorie de la flexion des poutres :

$$M(x) = -E \cdot I \cdot \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$\sigma(x) = M(x) \cdot z / I$$

$$\mathcal{E}(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = -z \cdot \frac{d^2 w}{dx^2}$$

D'autre part:

$$-\frac{d^2 w}{dx^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6 \cdot x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

d'où:

$$\{E(x)\} = z \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6 \cdot x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

D'après l'équation (4.4), l'expression obtenue deviendra:

$$\{E(x)\} = z \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 2/l & 1/l^2 & -2/l & 1/l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

$$= z \cdot \begin{bmatrix} (6/l^2 - 12x/l^3) & (4/l - 6x/l^2) & (-6/l^2 + 12x/l^3) & (2/l - 6x/l^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Des relations (4.6) et (4.7) on remarque que:

$$[B(x)] \cdot [A]^{-1} = z \cdot \begin{bmatrix} (6/l^2 - 12x/l^3) & (4/l - 6x/l^2) & (-6/l^2 + 12x/l^3) & (2/l - 6x/l^2) \end{bmatrix}$$

#### 4 . 1 . 4 . Relation entre déformations et contraintes

Les propriétés élastiques de l'élément nous permettent de visualiser la dépendance entre les contraintes  $\{\sigma(x)\}$  et les déformations  $\{\epsilon(x)\}$  par la relation suivante:

$$\{\sigma(x)\} = [D] \cdot \{\epsilon(x)\}$$

Où  $[D]$  est la matrice des propriétés élastiques de l'élément.

Pour notre cas,  $[D]$  est égale au module d'élasticité  $E$ .

En remplaçant dans la relation ci-dessus  $\{\epsilon(x)\}$  par l'expression (4.6):

$$\{\sigma(x)\} = z \cdot [D] \cdot [B(x)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \quad (4.8)$$

#### 4 . 1 . 5 . Relation entre les charges nodales et les déplacements nodaux

Le travail externe produit par les charges nodales doit être égal au travail interne des contraintes. Le travail externe  $Q_e$  des forces nodales dû à un déplacement virtuel est:

$$\begin{aligned} Q_e &= \{d\delta_1\} \cdot \{P_1\} + \{d\delta_2\} \cdot \{P_2\} + \dots + \{d\delta_n\} \cdot \{P_n\} \\ &= \{d\delta\}^T \cdot \{P\} \end{aligned}$$

Le travail interne par unité de volume est donné par:

$$\begin{aligned} dQ_i &= \{d\epsilon(x)\}^T \cdot \{\sigma(x)\} \\ Q_i &= \iiint_V \{d\epsilon(x)\}^T \cdot \{\sigma(x)\} \cdot dv \end{aligned}$$

En utilisant les équations (4.6) et (4.8), on obtient:

$$Q_i = \iiint_V z^2 \cdot \{ [B(x)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{d\delta\} \}^T \cdot [D] \cdot [B(x)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \cdot dv$$

$$= \iiint_A z^2 \cdot \{ [B(x)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{d\delta\} \}^T \cdot [D] \cdot [B(x)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \cdot dA \cdot dx$$

Cependant:

$$\iint_A z^2 \cdot dA = I \quad (\text{moment d'inertie})$$

D'où:

$$Q_i = \int_0^l I \cdot \{ [B(x)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{d\delta\} \}^T \cdot [D] \cdot [B(x)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \cdot dx$$

En égalisant les deux travaux:

$$\{d\delta\}^T \cdot \{P\} = \int_0^l I \cdot \{ [B(x)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{d\delta\} \}^T \cdot [D] \cdot [B(x)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \cdot dx$$

Or:

$$\{P\} = [k] \cdot \{\delta\}$$

d'où:

$$[k] = \int_0^l I \cdot \{ [B(x)] \cdot [A]^{-1} \}^T \cdot [D] \cdot [B(x)] \cdot [A]^{-1} \cdot dx \quad (4.9)$$

En substituant  $[B(x)] \cdot [A]^{-1}$  et  $\{ [B(x)] \cdot [A]^{-1} \}^T$  dans (4.9), on obtient:



$$[k] = \int_0^L \begin{bmatrix} (6/l^2 - 12.x./l^3) \\ (4/l - 6.x./l^2) \\ (-6/l^2 + 12.x./l^3) \\ (2/l - 6.x./l^2) \end{bmatrix} \cdot E \cdot I \cdot dx$$

$$= \left[ \begin{matrix} (6/l^2 - 12x/l^3) & (4/l - 6x/l^2) & (-6/l^2 + 12x/l^3) & (2/l - 6x/l^2) \end{matrix} \right] \cdot dx \quad (4.10a)$$

En effectuant le produit et en intégrant la matrice résultante tout en considérant que E et I sont constants, on obtient la matrice de rigidité [k] d'un élément de poutre.

$$[k] = E \cdot I / l^3 \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.10b)$$

#### 4 . 1 . 6 . Assemblage des matrices de rigidité des éléments

Après avoir établi les matrices de rigidité élémentaires [k] de tout les éléments, il est nécessaire de les assembler afin d'obtenir la matrice de rigidité globale [K] de toute la poutre.

Le principe est basé sur le fait que pour un noeud obtenu par assemblage de deux noeuds appartenants à deux éléments adjacents, la force est égale à la somme des forces des deux noeuds et ses déplacements sont identiques à ceux de chaque noeud composant l'ensemble.

#### 4 . 1 . 7 . Calcul dynamique

Le calcul dynamique des structures traitées par la méthode des éléments finis en vibrations libres, revient à déterminer les fréquences propres et les déformées modales par la résolution du système d'équations algébriques donné par l'équation fondamentale du mouvement:

$$[m] \cdot \{\ddot{q}\} + [K] \cdot \{q\} = 0 \quad (4.11)$$

où,  $[m]$  et  $[K]$  sont respectivement la matrice masse et la matrice rigidité du système.  $\{q\}$  et  $\{\ddot{q}\}$  sont les déplacements généralisés et l'accélération.

La résolution de cette équation revient à déterminer les valeurs propres du système à la condition:

$$\det[ [K] - \omega_c^2 \cdot [m] ] = 0 \quad (4.12)$$

#### 4 . 1 . 8 . Détermination de la matrice masses

Tout comme la détermination de la matrice de rigidité du système discrétisé il est préférable de calculer la matrice masse  $[m^e]$  pour chaque élément dans les axes locaux, puis de constituer la matrice masse  $[M]$  de la structure complète.

La matrice masse est donnée à partir de l'énergie cinétique:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \int_V \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dv$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \{\dot{u}_x\}^T \cdot [m^e] \cdot \{\dot{u}_x\}$$

La masse élémentaire:

$$[m^e] = \int_V \rho \cdot [N]^T \cdot [N] \cdot dv$$

où:  $\rho$  est la masse volumique, et  $[N]$  est un terme de proportionnalité entre les déplacements  $\{u\}$  et les déplacements généralisés (ou nodaux)  $\{q\}$  tel que:

$$\{u\} = [N] \cdot \{q\}$$

La difficulté réside dans la détermination de la matrice  $[N]$  dont l'exactitude peut être instable du mode de discrétisation.

Dans le cas de la flexion simple on considère seulement les déplacements transversaux et les rotations dans le plan xoy.

En posant

$$\xi = x/L \quad \text{et} \quad \eta = y/L \quad \text{on a:}$$

En forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \cdot \xi \cdot \eta \cdot (1-\xi) & (1-\xi) \cdot (3 \cdot \xi - 1) \cdot \eta \cdot 1 & -6 \cdot \xi \cdot \eta \cdot (1-\xi) \\ \# & \# & \# \\ (\xi-1)^2 \cdot (2 \cdot \xi + 1) & \xi \cdot (1-\xi)^2 \cdot 1 & \xi^2 \cdot (3-2 \cdot \xi) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \xi \cdot \eta \cdot (2-3 \cdot \xi) \\ -\xi^2 \cdot (1-\xi) \cdot 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Calcul fait, la matrice masse s'écrit:

$$[m] = \frac{\rho \cdot A \cdot L}{420} \cdot \begin{bmatrix} 156 & 22.1 & 54 & -13.1 \\ 22.1 & 4.1^2 & 13.1 & -3.1^2 \\ 54 & 4.1 & 13.1 & -3.1 \\ -13.1 & -3.1^2 & -22.1 & 4.1^2 \end{bmatrix}$$

## 4 . 2 . ANALYSE TENANT COMPTE DE L'EFFET TRANSVERSE

### 4 . 2 . 1 . Introduction

L'énergie de déformation U est donnée par:

$$U = U_N + U_M + U_T + U_C$$

Avec:

$$U_N = (1/2) \cdot \int_l N^2 / (A \cdot E) \cdot dl$$

L'énergie de déformation due à la force N normale à la section.

$$U_M = (1/2) \cdot \int_l M^2 / (E \cdot I) \cdot dl$$

L'énergie de déformation due au moment de flexion M.

$$U_T = (1/2) \cdot \int_l T^2 / (G \cdot A_r) \cdot dl$$

L'énergie de déformation due à la force transversale T.

$$U_C = (1/2) \cdot \int_l C^2 / (G \cdot I) \cdot dl$$

L'énergie de déformation due au couple de torsion C.

Où, G est le module de cisaillement.  $A_r$  est la section réduite.

$$A_r = I_z^2 / \int_s (st^2/b^2) \cdot dS$$

Avec:

I : Le moment d'inertie de la section.

St : Le moment statique de la section.

b : La largeur de la poutre.

dS : L'élément différentiel de surface.

Pour une section rectangulaire:  $A_r = (5/6) \cdot A$

Dans le calcul de l'énergie de déformation et des éléments des matrices de souplesse (flexibilité) et de rigidité, on avait négligé l'effet de l'effort tranchant. Les méthodes classiques de calcul des structures le négligent aussi.

#### 4 . 2 . 2 . Matrice de rigidité avec effet transversé

Méthode de souplesse (flexibilité):

$$\{q\} = [S] \cdot \{F\} \quad \text{donc:} \quad \{F\} = [S]^{-1} \cdot \{q\}$$

Méthode de rigidité:

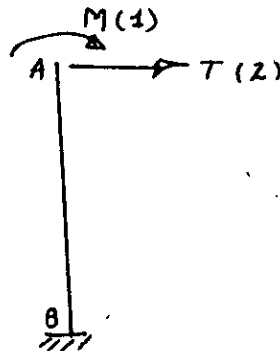
$$\{F\} = [k] \cdot \{q\}$$

La matrice de rigidité est l'inverse de la matrice de souplesse (flexibilité) ayant les mêmes coordonnées. Donc:

$$[k] = [S]^{-1}$$

Quand une matrice de rigidité est difficile à déterminer, on détermine la matrice de souplesse puis on l'inverse.

Exemple:



h: hauteur de l'élément BA. (E.I): rigidité de l'élément BA.

La matrice de souplesse est:

$$[S] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$$

AVEC:

$$s_{12} = s_{21}$$

$s_{1j}$  est le déplacement sous efforts unitaires.

D'après le deuxième théorème de Castigliano, on a:

$$s_j = \frac{\partial U}{\partial F_j}$$

Ce deuxième théorème est applicable pour déterminer  $s_{11}$  et  $s_{22}$  mais ne l'est pas pour  $s_{12}$  ou  $s_{21}$ .

Pour calculer  $s_{11}$  on pose:  $M = 1$ , appliqué seul suivant la coordonnée généralisée 1.

$$s_{11} = \frac{\partial U}{\partial M}$$

$$U = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^h M^2 \cdot dx = M^2 \cdot h / (2 \cdot E \cdot I)$$

M étant constant sur tout l'élément.

$$s_{11} = \frac{\partial U}{\partial M} = M \cdot h / (E \cdot I) = h / (E \cdot I)$$

car:

$$M = 1$$

Pour calculer  $s_{22}$  on pose:  $T = 1$ , appliqué seul suivant la coordonnée généralisée 2.

$$U = U_M + U_T$$

$$U = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^h T^2 \cdot x^2 \cdot dx + \frac{1}{2 \cdot G \cdot A_r} \cdot \int_0^h T^2 \cdot dx$$

$$s_{22} = \frac{\partial U}{\partial T}$$

$$U = T^2 \cdot h^3 / (6 \cdot E \cdot I) + T^2 \cdot h / (2 \cdot G \cdot A_r)$$

$$s_{22} = h^3 / (3 \cdot E \cdot I) + h / (G \cdot A_r)$$

car:

$$T = 1$$

Le terme:

$$h / (G \cdot A_r)$$

est la flèche de l'effort tranchant en A due à un effort unitaire.

Pour le calcul de  $s_{12}$  et  $s_{21}$  on utilise la méthode de Veuntchaguine (ou principe des travaux virtuels)

$$s_{12} = s_{21} = M_1 \cdot M_2 \cdot L / (2 \cdot E \cdot I)$$

$$s_{12} = s_{21} = h^3 / (2 \cdot E \cdot I)$$

La matrice de souplesse est donc :

$$[S] = \begin{bmatrix} h/(E.I) & h^2/(2.E.I) \\ h^2/(2.E.I) & h^3/(3.E.I)+h/(G.Ar) \end{bmatrix}$$

Négliger l'effet de T implique annuler le terme  $h/(G.Ar)$ .

$$[k] = [S]^{-1} = 1/(1+\alpha) \cdot \begin{bmatrix} (4+\alpha)E.I/h & -6.E.I/h^2 \\ -6.E.I/h^2 & 12.E.I/h^3 \end{bmatrix}$$

Avec:  $\alpha = 12.E.I/(h^2.G.Ar)$  (sans unité)

A partir de cette matrice de rigidité on peut déterminer la matrice de rigidité de l'élément suivant avec 4 coordonnées (par extension et en tenant compte de l'équilibre)

$$[k] = \frac{1}{(1+\alpha)} \cdot \begin{bmatrix} 12E.I/h^3 & & & \\ & 6E.I/h^2 & (4+\alpha)E.I/h & \\ & -12E.I/h^3 & -6E.I/h^2 & 12E.I/h^3 \\ & 6E.I/h^2 & (2-\alpha)E.I/h & -6E.I/h^2 & (4+\alpha)E.I/h \end{bmatrix} \text{ Sym.}$$

Pour négliger l'effet de T, il suffit de prendre  $\alpha = 0$  (et on retrouve un résultat classique).

Les éléments de cette matrice de rigidité sont déterminés à partir des éléments précédents par les analogies suivantes:



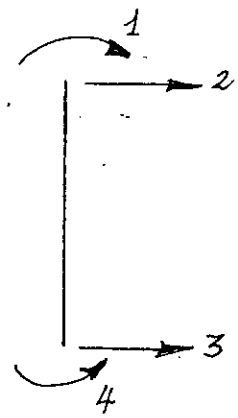
coordonnée 1' ---> 4

coordonnée 2' ---> 3

$$S_{44} = S_{22} = S'_{11}$$

$$S_{33} = S_{11} = S'_{22}$$

$$S_{43} = S_{34} = S'_{21} = S'_{12}$$



Les autres éléments sont obtenus en considérant l'équilibre pour chaque colonne ou ligne:

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum \vec{M} = 0 \implies \sum \vec{M}_M = - \sum \vec{M}_F$$

### 4 . 3 . Etude quantitative

#### 4 . 3 . 1 . Organisation des programmes

Afin d'évaluer concrètement l'influence de l'effort tranchant dans la flexion des poutres, nous avons établi deux programmes informatiques, l'un pour l'étude statique et l'autre pour l'étude dynamique, en langage fortran 77 sur mini Vax.

On considère une poutre homogène qu'on discrétise en éléments de longueurs égales. Pour le cas statique, on calcul les déplacements nodaux et les contraintes [13] supportées par les éléments, alors que pour le cas dynamique, on calcul des valeurs propres, fréquences propres et vecteurs propres.

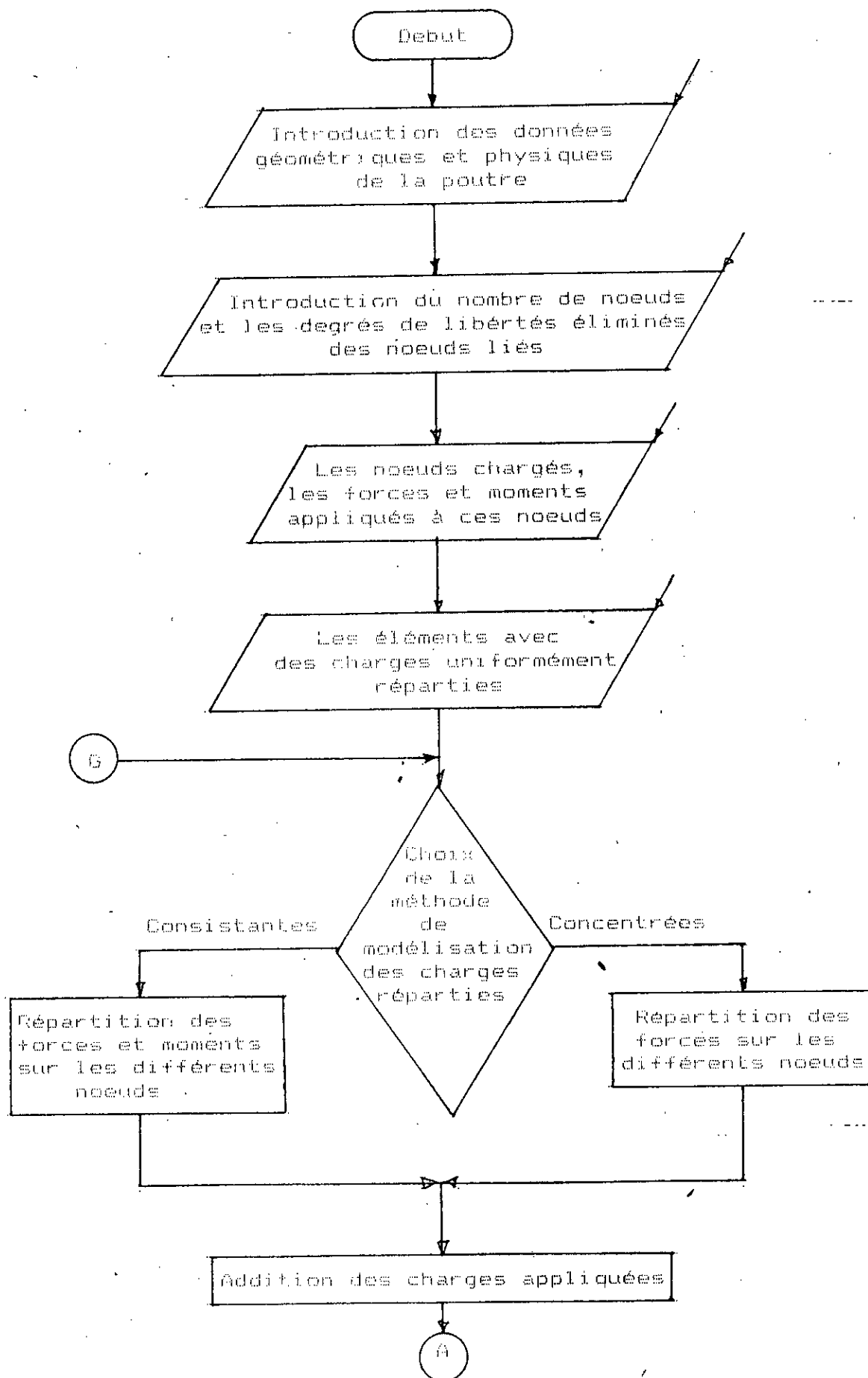
Les organigrammes des deux programmes sont très semblables, les différences résident dans les quelques points suivants:

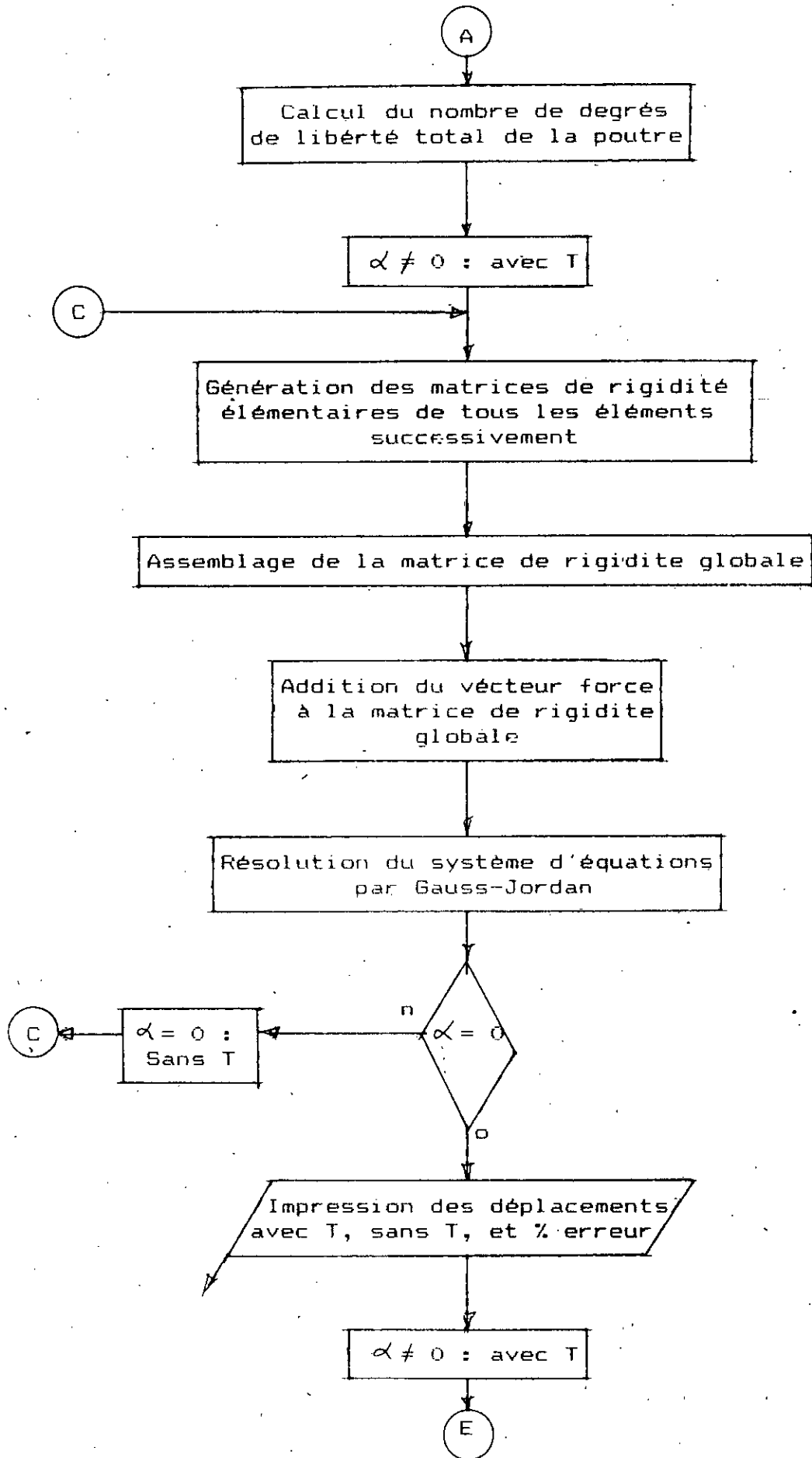
- a) Le cas statique exige l'introduction des différentes forces appliquées à la poutre, alors que pour le cas dynamique on n'a besoin que des caractéristiques géométriques et physiques de la poutre.
- b) Seule la matrice de rigidité est calculée pour le cas statique, alors que pour le dynamique il faut générer aussi la matrice masse.
- c) L'obtention des déplacements des noeuds dans le cas statique se fait par la résolution d'un système d'équations linéaire par la méthode de Gauss-Jordan. [13].

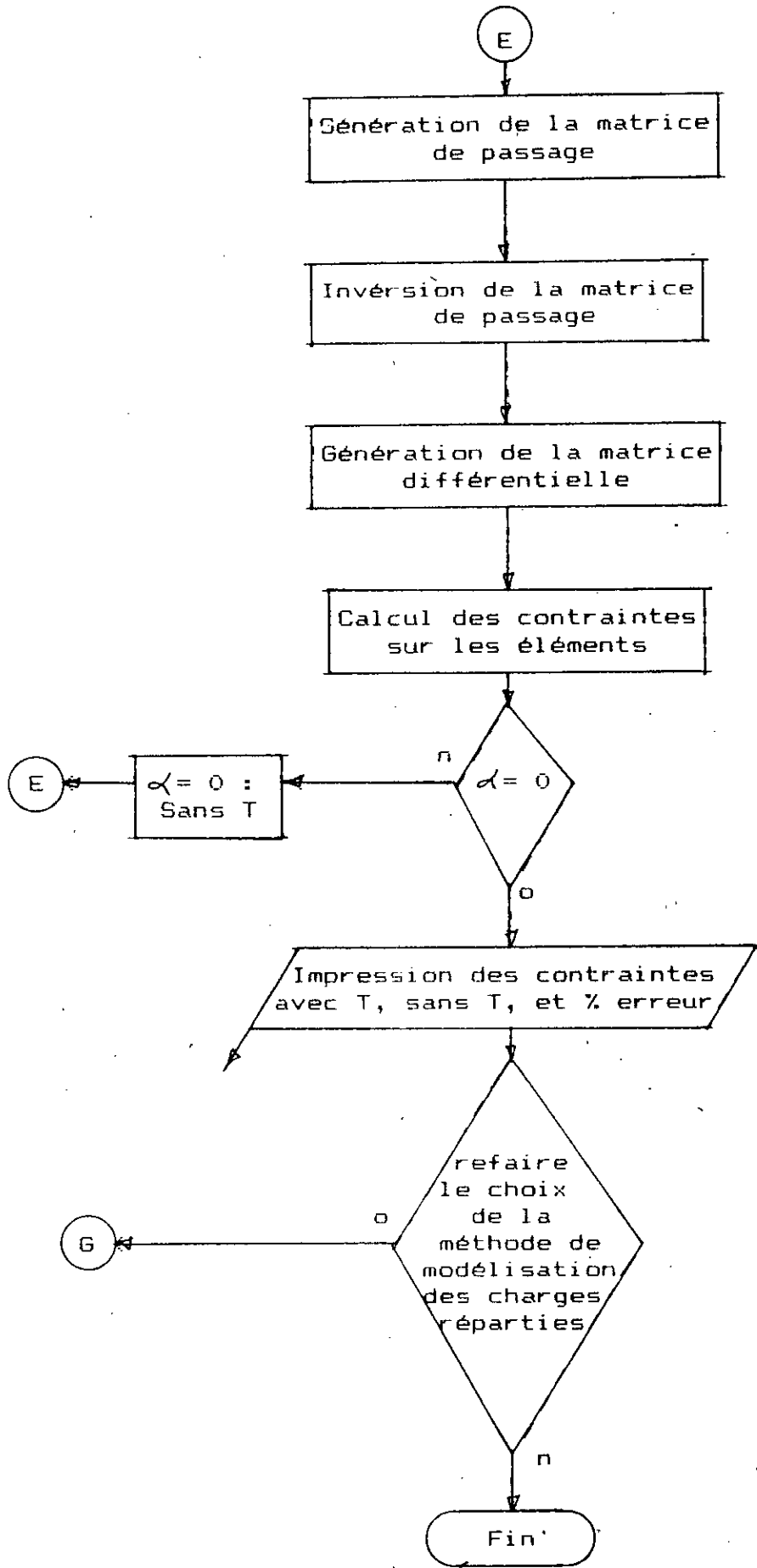
Pour le cas dynamique les valeurs et vecteurs propres des différents modes de vibrations sont obtenues par la méthode Jacobi. [1] et [12]

Il est à noter aussi que les forces uniformément réparties appliquées à la poutre dans le cas statique peuvent être modélisées suivant deux méthodes: la méthode des charges concentrées et celle des charges consistantes, [13], la seconde étant plus précise que la première.

Nous présentons ci-après l'organigramme du cas statique en premier:







Les structures du programme du cas statique se présentent comme suit:

- Un programme (POUTRSTAT.FOR) principal regroupant la majeure partie des opérations effectuées allant de la lecture des données à l'impression des résultats en passant par toutes les étapes décrites dans l'organigramme.

- Un sous-programme (PRGM) de résolution des système d'équations linéaires par la méthode de Gauss-Jordan. 13

- Un fichier d'introduction des données dans lequel l'utilisateur devra mettre les valeurs numériques concernant l'application voulue, et cela dans l'ordre suivant:

- 1) Longueur de la poutre.
- 2) Sa section normale.
- 3) Sa section réduite.
- 4) Le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe z.
- 5) L'ordonnée maximale sur le périmètre de la section.
- 6) La masse volumique du matériau.
- 7) Son module d'élasticité longitudinal (module de Young).
- 8) Son coefficient de Poisson.
- 9) Le nombre de noeuds voulu.
- 10) Le nombre de noeuds liés au référentiel.
- 11) Pour chacun de ces derniers:
  - a) Son numéro.
  - b) Le type de liaison: <1> pour l'appui mobile.  
<2> pour l'appui fixe.  
<3> pour l'encastrement.
- 12) Le nombre de charges appliquées aux noeuds.
- 13) Pour chaque noeud chargé:
  - a) Son numéro.
  - b) Le type de charge: <1> pour une charge concentrée.  
<2> pour un moment.
  - c) La valeur algébrique de la charge.
- 14) Le nombre de sections de charges réparties.
- 15) Pour chaque section:
  - a) Le numéro du premier noeud.

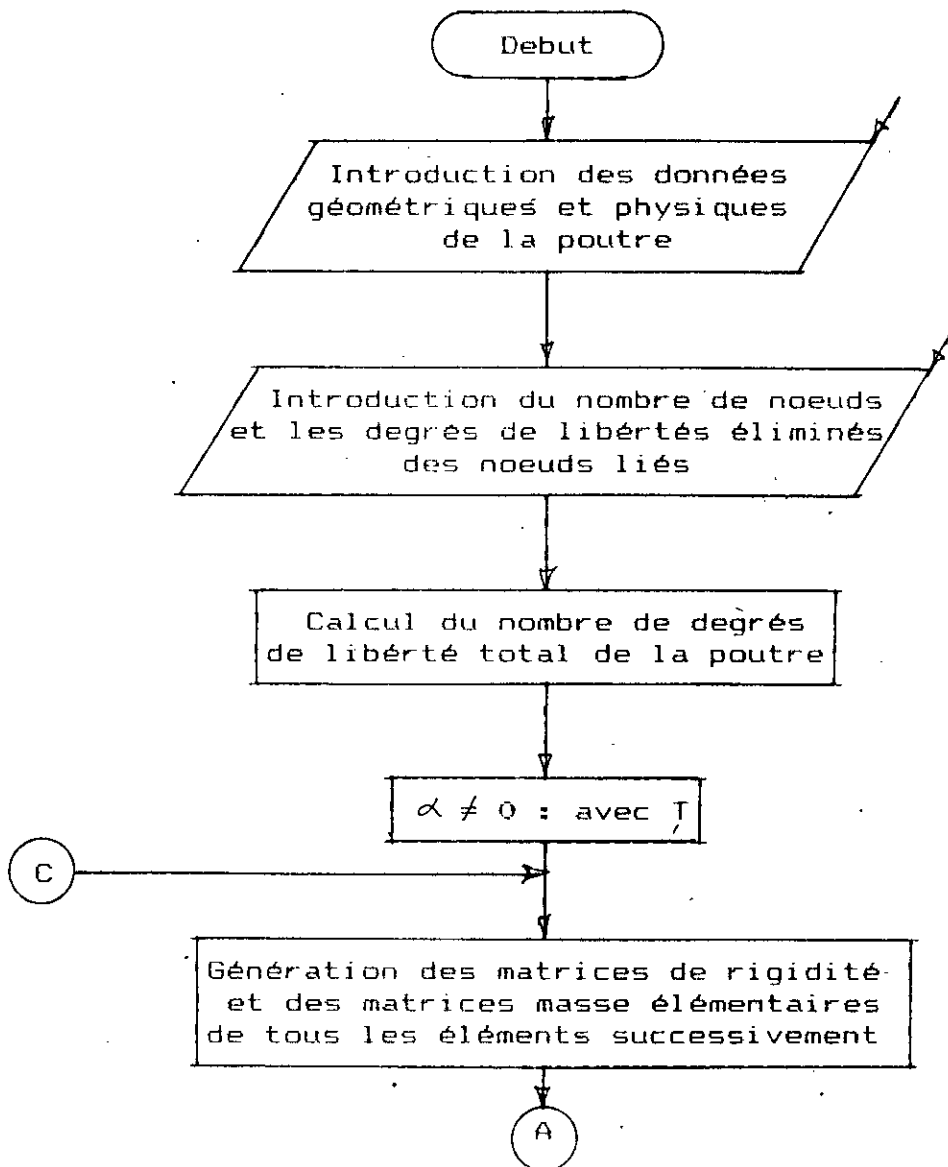
- b) Le numéro du dernier noeud.
- c) La valeur algébrique de la charge répartie.

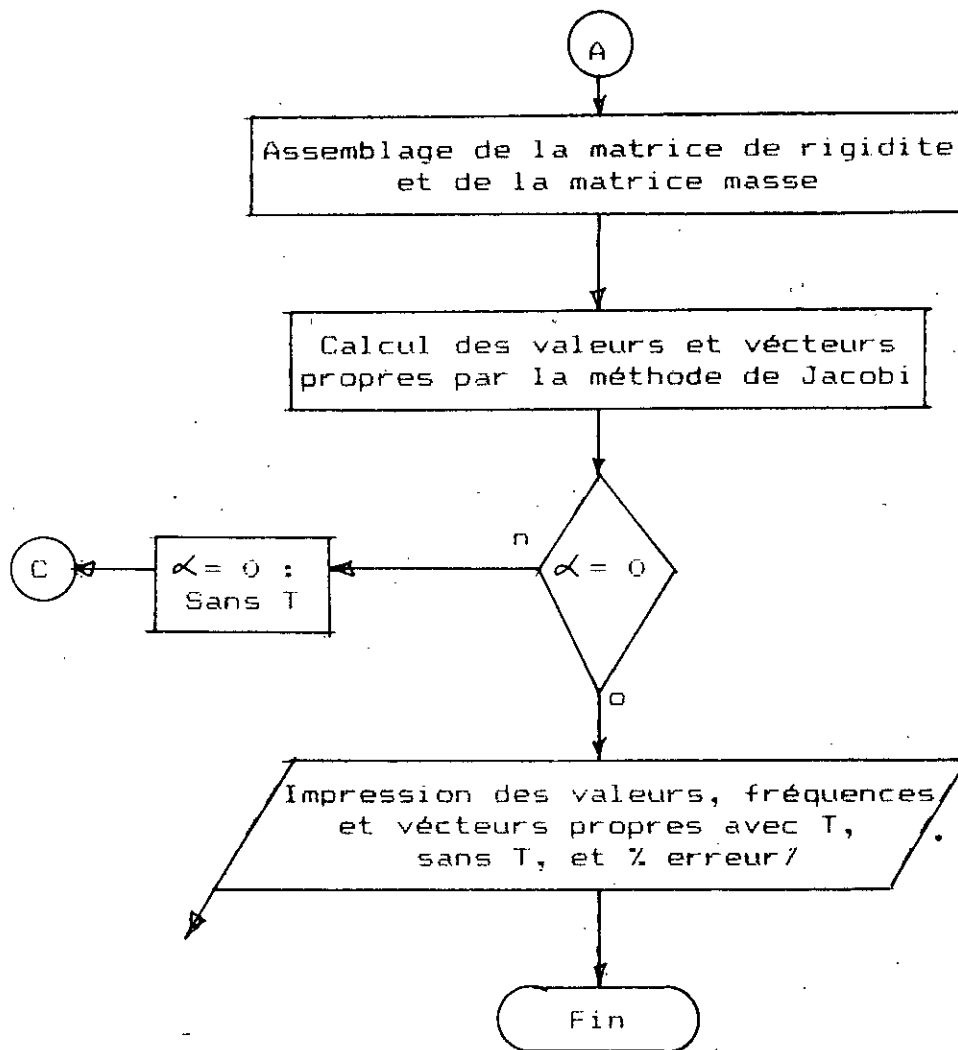
A noter que le choix des méthodes de modélisation des charges réparties se fait au clavier pendant l'exécution du programme.

- Un fichier de sortie, où sont détaillés tout les résultats des calculs, et se présentant comme montré dans les exemples.

Il faut préciser que les fichiers d'entrée et de sortie son nommés par l'utilisateur au début de l'exécution.

Nous présentons ci-après l'organigramme du cas dynamique:





Les structures du programme du cas dynamique sont très proches de celles du cas statique, sauf que le programme principal s'appelle (POUTRDYN.FOR) et que le sous-programme de calcul des éléments propres est (JACOBI).

L'introduction des données se fait de la même manière, par l'intermédiaire d'un fichier d'entrée dans lequel on mettra toute les caractéristiques géométriques et physiques de la poutre, sauf les points 5 et de 12 à 15 cités pour le cas statique.

#### 4 . 3 . 2 . Exemples

##### Exemple 1

Soit une poutre cantilever (encastrée à un mur vertical) soumise à une charge uniformément répartie agissant du milieu de la poutre à son extrémité libre.



Considérons deux cas de discrétisation: 4 éléments (Fig.4.3.1.a) puis 8 éléments (Fig.4.3.1.b).

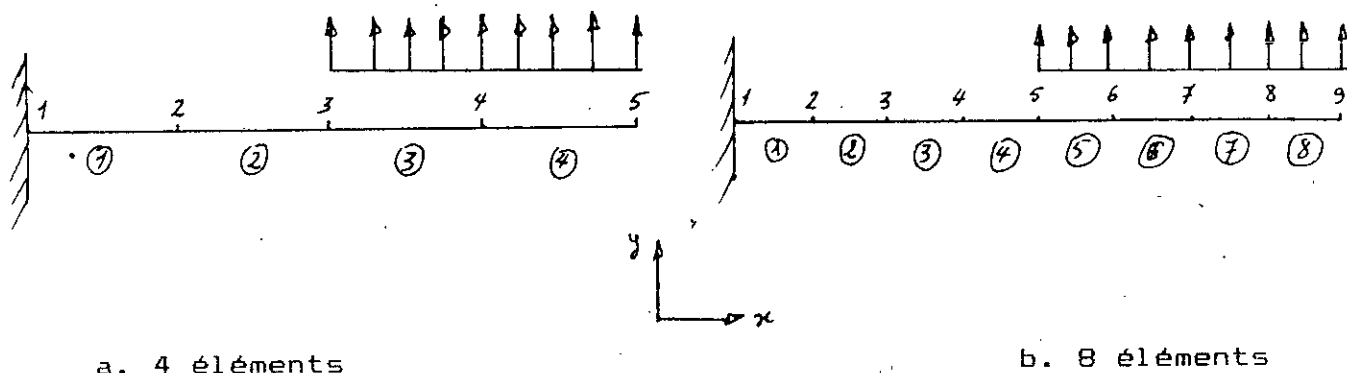


Fig.4.3.1 - Poutre encastée

Exemple 2

Soit une poutre simplement appuyée à une extrémité et doublement appuyée à l'autre, soumise à une charge concentrée, verticale dirigée vers le bas, en son milieu.

Considérons les deux cas de discrétisation de l'exemple 1: 4 éléments (Fig.4.3.2.a) puis 8 éléments (Fig.4.3.2.b).

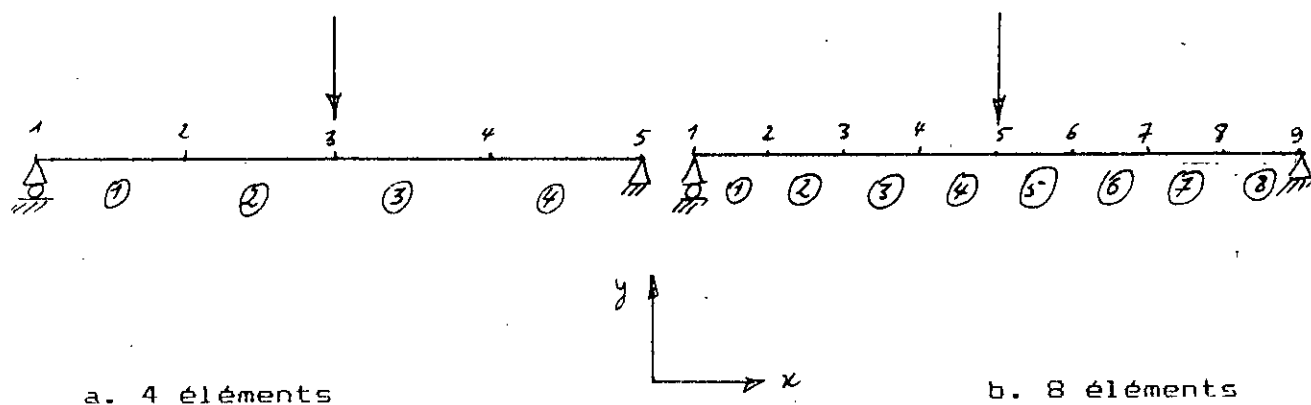


Fig.4.3.2 - Poutre doublement appuyée

Remarques:

Les données des deux exemples sont en unités SI.

Les deux exemples de l'étude statiques sont suivis des exemples de l'étude dynamique, en considérant les mêmes poutres (sans les charges).

```

-----
PROGRAMME DE CALCUL DES
CONTRAINTES, ET DEPLACEMENTS
D'UNE POUTRE DANS LE CAS STATIQUE
PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS
SANS NEGLIGER L'EFFET TRANSVERSE
-----

```

**\* Exemple 1-a: \*\*\* INTRODUCTION DES DONNEES \*\*\***

```

LONGUEUR DE LA POUTRE..... 3.000
SA SECTION..... 0.7800E-04
SA SECTION REDUITE..... 0.6500E-04
LE MOMENT D'INERTIE DE LA SECTION/Z..... 0.5000E-09
L'ORDONNEE MAXIMALE DE LA SECTION..... 0.5000E-02
LA MASSE VOLUMIQUE DU MATERIAUX..... 7800.
SON MODULE DE YOUNG..... 0.2200E+12
SON COEFFICIENT DE POISSON..... 0.2500

```

```

LE NOMBRE DE NOEUDS..... 5
LE NOMBRE DE NOEUDS LIES AU REFERENCIEL..... 1

```

\*\*\* POUR CHAQUE NOEUD PARTICULIER DONNER:  
 LE NUMERO DU NOEUD ET:  
 (1) SI C'EST UN APPUI MOBILE.  
 (2) SI C'EST UN APPUI FIXE.  
 (3) SI C'EST UN ENCASTREMENT.

```

LE NUMERO DU NOEUD..... 1
LE TYPE DE LIAISON..... 3

```

```

NOMBRE DE NOEUDS CHARGES ..... 0

```

```

LE NOMBRE DE SECTIONS DE CHARGES REPARTIES.... 1

```

\*\*\* POUR CHAQUE SECTION DE CHARGE REPARTIE DONNER:  
 LE NOEUD INFERIEUR (DEBUT),  
 LE NOEUD SUPERIEUR (FIN),  
 PUIS LA VALEUR ALGEBRIQUE EN (N/m).

```

LE NOEUD INFERIEUR (DEBUT)..... 3
LE NOEUD SUPERIEUR (FIN)..... 5

```

```

LA VALEUR DE LA CHARGE REPARTIE..... 0.3000E+02

```

**\*\* EXPLICATIONS:**

- \* AVEC(T): CONTRAINTRE AVEC EFFORT TRANCHANT.
- \* SANS(T): EFFORT TRANCHANT NEGLIGE.
- \* % ERREUR OU %ERR : POURCENTAGE D'ERREUR COMMIS.
- \* DEPY(A): DEPLACEMENT SUIVANT Y SANS NEGLIGER.
- \* ROTZ(S): ROTATION AUTOUR DE Z. EN NEGLIGEANT.

## RESULTATS:

METHODE DES CHARGES CONSISTANTES

NOEUD	FY	MZ
1	-0.2238E+01	-0.3730E+00
2	-0.4476E+01	-0.7461E+00
3	0.6774E+01	0.1129E+01
4	0.1802E+02	0.3004E+01
5	0.9012E+01	0.1502E+01

\*\*\*\* ----= DEPLACEMENTS AUX NOEUDS ---- \*\*\*\*

NOEUDS	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	0.0000000	0.0000000	.00E+00
2	0.1839612	0.1839574	.21E-02	0.4655533	0.4655533	.27E-13
3	0.6598850	0.6598767	.13E-02	0.7747503	0.7747503	.36E-14
4	1.3043158	1.3043040	.91E-03	0.9206808	0.9206808	.15E-13
5	2.0101887	2.0101757	.65E-03	0.9539632	0.9539632	.20E-13

\*\*\*\* ----= CONTRAINTES DANS LES ELEMENTS ---- \*\*\*\*

ELEMENT	CONTRAINTES:	AVEC(T)	SANS(T)	%ERREUR
1		0.5728E+09	0.5728E+09	.79E-02
2		0.3267E+09	0.3267E+09	.16E-01
3		0.3267E+09	0.3267E+09	.16E-01
4		0.1126E+09	0.1126E+09	.37E-01

\*\*\*\*\*

METHODE DES CHARGES CONCENTREES

NOEUD	FY	MZ
1	-0.2238E+01	0.0000E+00
2	-0.4476E+01	0.0000E+00
3	0.6774E+01	0.0000E+00
4	0.1802E+02	0.0000E+00
5	0.9012E+01	0.0000E+00

\*\*\*\* ----= DEPLACEMENTS AUX NOEUDS ---- \*\*\*\*

NOEUDS	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	0.0000000	0.0000000	.00E+00
2	0.1714614	0.1714575	.22E-02	0.4322204	0.4322204	.29E-13
3	0.6079782	0.6079699	.14E-02	0.7029978	0.7029978	.39E-14
4	1.1870738	1.1870619	.10E-02	0.8182061	0.8182061	.14E-13
5	1.8122503	1.8122373	.72E-03	0.8412477	0.8412477	.18E-13

\*\*\*\* ---= CONTRAINTES DANS LES ELEMENTS --- \*\*\*\*

LEMENT	CONTRAINTES:	AVEC(T)	SANS(T)	%ERREUR
1		0.5239E+09	0.5239E+09	.86E-02
2		0.2703E+09	0.2704E+09	.19E-01
3		0.2703E+09	0.2704E+09	.19E-01
4		0.6755E+08	0.6759E+08	.62E-01

\*\*\*\*\*

\* Exemple 1.b.

\*\*\* INTRODUCTION DES DONNEES \*\*\*

LONGUEUR DE LA POUTRE..... 3.000  
 SA SECTION..... 0.7800E-04  
 SA SECTION REDUITE..... 0.6500E-04  
 LE MOMENT D'INERTIE DE LA SECTION/Z..... 0.5000E-09  
 L'ORDONNEE MAXIMALE DE LA SECTION..... 0.5000E-02  
 LA MASSE VOLUMIQUE DU MATERIAUX..... 7800.  
 SON MODULE DE YOUNG..... 0.2200E+12  
 SON COEFFICIENT DE POISSON..... 0.2500

LE NOMBRE DE NOEUDS..... 9  
 LE NOMBRE DE NOEUDS LIES AU REFERENCIEL..... 1

\*\*\* POUR CHAQUE NOEUD PARTICULIER DONNER:  
 LE NUMERO DU NOEUD ET:  
 (1) SI C'EST UN APPUI MOBILE.  
 (2) SI C'EST UN APPUI FIXE.  
 (3) SI C'EST UN ENCASTREMENT.

LE NUMERO DU NOEUD..... 1  
 LE TYPE DE LIAISON..... 3

NOMBRE DE NOEUDS CHARGES ..... 0

LE NOMBRE DE SECTIONS DE CHARGES REPARTIES... 1

\*\*\* POUR CHAQUE SECTION DE CHARGE REPARTIE DONNER:  
 LE NOEUD INFERIEUR (DEBUT).  
 LE NOEUD SUPERIEUR (FIN).  
 PUIS LA VALEUR ALGEBRIQUE EN (N/m).

LE NOEUD INFERIEUR (DEBUT)..... 5  
 LE NOEUD SUPERIEUR (FIN)..... 9

LA VALEUR DE LA CHARGE REPARTIE..... 0.3000E+02

\*\* RESULTATS:

METHODE DES CHARGES CONSISTANTES

NOEUD	FY	MZ
1	-0.1119E+01	-0.1865E+00
2	-0.2238E+01	-0.3730E+00
3	-0.2238E+01	-0.3730E+00
4	-0.2238E+01	-0.3730E+00
5	0.3387E+01	0.5645E+00
6	0.9012E+01	0.1502E+01
7	0.9012E+01	0.1502E+01
8	0.9012E+01	0.1502E+01
9	0.4506E+01	0.7510E+00

\*\*\* ---- DEPLACEMENTS AUX NOEUDS ---- \*\*\*

NOEUDS	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	0.0000000	0.0000000	.00E+00
2	0.0483051	0.0483033	.39E-02	0.2516059	0.2516059	.21E-11
3	0.1842593	0.1842554	.21E-02	0.4669840	0.4669840	.20E-11
4	0.3937406	0.3937346	.15E-02	0.6432729	0.6432729	.19E-11
5	0.6615541	0.6615459	.13E-02	0.7776115	0.7776115	.19E-11
6	0.9712818	0.9712714	.11E-02	0.8675380	0.8675380	.18E-11
7	1.3069307	1.3069189	.90E-03	0.9177816	0.9177816	.17E-11
8	1.6557801	1.6557674	.77E-03	0.9398632	0.9398632	.17E-11
9	2.0094292	2.0094162	.65E-03	0.9453036	0.9453036	.17E-11

\*\*\* ---- CONTRAINTES DANS LES ELEMENTS ---- \*\*\*

LEMENT	CONTRAINTES:	AVEC(T)	SANS(T)	%ERREUR
1		0.6851E+09	0.6851E+09	.13E-01
2		0.5746E+09	0.5747E+09	.16E-01
3		0.4557E+09	0.4558E+09	.22E-01
4		0.3285E+09	0.3286E+09	.33E-01
5		0.3285E+09	0.3286E+09	.33E-01
6		0.2045E+09	0.2046E+09	.47E-01
7		0.1051E+09	0.1051E+09	.66E-01
8		0.3939E+08	0.3943E+08	.11

\*\*\*\*\*

METHODE DES CHARGES CONCENTREES

NOEUD	FY	MZ
1	-0.1119E+01	0.0000E+00
2	-0.2238E+01	0.0000E+00
3	-0.2238E+01	0.0000E+00
4	-0.2238E+01	0.0000E+00
5	0.3387E+01	0.0000E+00
6	0.9012E+01	0.0000E+00
7	0.9012E+01	0.0000E+00
8	0.9012E+01	0.0000E+00
9	0.4506E+01	0.0000E+00

\*\*\* ---- DEPLACEMENTS AUX NOEUDS ---- \*\*\*

NOEUDS	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	0.0000000	0.0000000	.00E+00
2	0.0452994	0.0452975	.41E-02	0.2355753	0.2355753	.21E-11
3	0.1719979	0.1719940	.22E-02	0.4336511	0.4336511	.20E-11
4	0.3654967	0.3654907	.16E-02	0.5913661	0.5913661	.19E-11
5	0.6101241	0.6101158	.14E-02	0.7058591	0.7058591	.19E-11
6	0.8895844	0.8895740	.12E-02	0.7778642	0.7778642	.18E-11
7	1.1892055	1.1891937	.99E-03	0.8153069	0.8153069	.18E-11
8	1.4981867	1.4981740	.85E-03	0.8297080	0.8297080	.17E-11
9	1.8100476	1.8100346	.72E-03	0.8325882	0.8325882	.17E-11

\*\*\* --= CONTRAINTES DANS LES ELEMENTS =-- \*\*\*

ELEMENT	CONTRAINTES:	AVEC(T)	SANS(T)	%ERREUR
1		0.6380E+09	0.6381E+09	.14E-01
2		0.5238E+09	0.5239E+09	.18E-01
3		0.4012E+09	0.4013E+09	.25E-01
4		0.2702E+09	0.2704E+09	.40E-01
5		0.2702E+09	0.2704E+09	.40E-01
6		0.1520E+09	0.1521E+09	.64E-01
7		0.6752E+08	0.6759E+08	.10
8		0.1686E+08	0.1690E+08	.25

\*\*\*\*\*

\* Exemple 2.a :

\*\*\* INTRODUCTION DES DONNEES \*\*\*

LONGUEUR DE LA POUTRE..... 3.000  
 SA SECTION..... 0.7800E-04  
 SA SECTION REDUITE..... 0.6500E-04  
 LE MOMENT D'INERTIE DE LA SECTION/Z..... 0.5000E-09  
 L'ORDONNEE MAXIMALE DE LA SECTION..... 0.5000E-02  
 LA MASSE VOLUMIQUE DU MATERIAUX..... 7800.  
 SON MODULE DE YOUNG..... 0.2200E+12  
 SON COEFFICIENT DE POISSON..... 0.2500

LE NOMBRE DE NOEUDS..... 5  
 LE NOMBRE DE NOEUDS LIES AU REFERENCIEL..... 2

\*\*\* POUR CHAQUE NOEUD PARTICULIER DONNER:  
 LE NUMERO DU NOEUD ET:  
 (1) SI C'EST UN APPUI MOBILE.  
 (2) SI C'EST UN APPUI FIXE.  
 (3) SI C'EST UN ENCASTREMENT.

LE NUMERO DU NOEUD..... 1  
 LE TYPE DE LIAISON..... 2

LE NUMERO DU NOEUD..... 5  
 LE TYPE DE LIAISON..... 1

NOMBRE DE NOEUDS CHARGES ..... 1

\*\*\* POUR CHAQUE NOEUD CHARGE DONNER:  
 LE NUMERO DU NOEUD ET:  
 (1) SI C'EST UNE FORCE CONCENTREE SUIVANT Y.  
 (2) SI C'EST UN MOMENT APPLIQUE AUTOUR DE Z.  
 PUIS LA VALEUR ALGEBRIQUE DE LA CHARGE EN (N) OU (N.m).

LE NUMERO DU NOEUD CHARGE..... 3  
 LE TYPE DE CHARGE..... 1

LA VALEUR DE LA CHARGE..... -0.1000E+03

LE NOMBRE DE SECTIONS DE CHARGES REPARTIES.... 0

\*\*\* POUR CHAQUE NOEUD CHARGE DONNER:  
LE NUMERO DU NOEUD ET:

- (1) SI C'EST UNE FORCE CONCENTREE SUIVANT Y.
  - (2) SI C'EST UN MOMENT APPLIQUE AUTOUR DE Z.
- PUIS LA VALEUR ALGEBRIQUE DE LA CHARGE EN (N) OU (N.m).

LE NUMERO DU NOEUD CHARGE..... 5  
LE TYPE DE CHARGE..... 1  
LA VALEUR DE LA CHARGE..... -0.1000E+03  
LE NOMBRE DE SECTIONS DE CHARGES REPARTIES.... 0

## RESULTATS:

METHODE DES CHARGES CONSISTANTES

NOEUD	FY	MZ
1	-0.1119E+01	-0.1865E+00
2	-0.2238E+01	-0.3730E+00
3	-0.2238E+01	-0.3730E+00
4	-0.2238E+01	-0.3730E+00
5	-0.1022E+03	-0.3730E+00
6	-0.2238E+01	-0.3730E+00
7	-0.2238E+01	-0.3730E+00
8	-0.2238E+01	-0.3730E+00
9	-0.1119E+01	-0.1865E+00

\*\*\* --- DEPLACEMENTS AUX NOEUDS --- \*\*\*

NOEUDS	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	-0.5715563	-0.5715563	.30E-04
2	-0.2096767	-0.2096730	.18E-02	-0.5345891	-0.5345889	.33E-04
3	-0.3918066	-0.3917992	.19E-02	-0.4251173	-0.4251172	.41E-04
4	-0.5197369	-0.5197260	.21E-02	-0.2460026	-0.2460024	.71E-04
5	-0.5678881	-0.5678738	.25E-02	-0.0001061	-0.0001060	.16
6	-0.5197369	-0.5197260	.21E-02	0.2457903	0.2457905	.71E-04
7	-0.3918066	-0.3917992	.19E-02	0.4249050	0.4249052	.41E-04
8	-0.2096767	-0.2096730	.18E-02	0.5343768	0.5343769	.33E-04
9	0.0000000	0.0000000	.00E+00	0.5713442	0.5713444	.30E-04

\*\*\* --- CONTRAINTES DANS LES ELEMENTS --- \*\*\*

ELEMENT	CONTRAINTES:	AVEC(T)	SANS(T)	%ERREUR
1		0.2152E+09	0.2150E+09	.81E-01
2		0.4237E+09	0.4235E+09	.40E-01
3		0.6237E+09	0.6236E+09	.26E-01
4		0.8154E+09	0.8153E+09	.19E-01
5		0.8154E+09	0.8153E+09	.19E-01
6		0.6234E+09	0.6236E+09	.26E-01
7		0.4233E+09	0.4235E+09	.40E-01
8		0.2148E+09	0.2150E+09	.81E-01

\*\*\*\*\*

## RESULTATS:

METHODE DES CHARGES CONSISTANTES

NOEUD	FY	MZ
1	-0.2238E+01	-0.3730E+00
2	-0.4476E+01	-0.7461E+00
3	-0.1045E+03	-0.7461E+00
4	-0.4476E+01	-0.7461E+00
5	-0.2238E+01	-0.3730E+00

\*\*\* --- DEPLACEMENTS AUX NOEUDS --- \*\*\*

NOEUDS	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	-0.5690132	-0.5690130	.31E-04
2	-0.3901971	-0.3901897	.19E-02	-0.4240046	-0.4240044	.41E-04
3	-0.5657421	-0.5657278	.25E-02	-0.0004241	-0.0004239	.41E-01
4	-0.3901971	-0.3901897	.19E-02	0.4231565	0.4231567	.41E-04
5	0.0000000	0.0000000	.00E+00	0.5681650	0.5681652	.31E-04

\*\*\* --- CONTRAINTES DANS LES ELEMENTS --- \*\*\*

LEMENT	CONTRAINTES:	AVEC(T)	SANS(T)	%ERREUR
1		0.4217E+09	0.4216E+09	.20E-01
2		0.8135E+09	0.8134E+09	.97E-02
3		0.8135E+09	0.8134E+09	.97E-02
4		0.4215E+09	0.4216E+09	.19E-01

\*\*\*\*\*

\* Exemple 2.b : \*\*\* INTRODUCTION DES DONNEES \*\*\*

LONGUEUR DE LA POUTRE..... 3.000  
 SA SECTION..... 0.7800E-04  
 SA SECTION REDUITE..... 0.6500E-04  
 LE MOMENT D'INERTIE DE LA SECTION/Z..... 0.5000E-09  
 L'ORDONNEE MAXIMALE DE LA SECTION..... 0.5000E-02  
 LA MASSE VOLUMIQUE DU MATERIAUX..... 7800.  
 SON MODULE DE YOUNG..... 0.2200E+12  
 SON COEFFICIENT DE POISSON..... 0.2500

LE NOMBRE DE NOEUDS..... 9  
 LE NOMBRE DE NOEUDS LIES AU REFERENCIEL..... 2

\*\*\* POUR CHAQUE NOEUD PARTICULIER DONNER:  
 LE NUMERO DU NOEUD ET:

- (1) SI C'EST UN APPUI MOBILE.
- (2) SI C'EST UN APPUI FIXE.
- (3) SI C'EST UN ENCASTREMENT.

LE NUMERO DU NOEUD..... 1  
 LE TYPE DE LIAISON..... 2

LE NUMERO DU NOEUD..... 9  
 LE TYPE DE LIAISON..... 1

NOMBRE DE NOEUDS CHARGES..... 1



METHODE DES CHARGES CONCENTREES

NOEUD	FY	MZ
1	-0.1119E+01	0.0000E+00
2	-0.2238E+01	0.0000E+00
3	-0.2238E+01	0.0000E+00
4	-0.2238E+01	0.0000E+00
5	-0.1022E+03	0.0000E+00
6	-0.2238E+01	0.0000E+00
7	-0.2238E+01	0.0000E+00
8	-0.2238E+01	0.0000E+00
9	-0.1119E+01	0.0000E+00

\*\*\* --- DEPLACEMENTS AUX NOEUDS --- \*\*\*

NOEUDS	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	-0.5714504	-0.5714504	.51E-12
2	-0.2096767	-0.2096730	.18E-02	-0.5344829	-0.5344829	.51E-12
3	-0.3918066	-0.3917992	.19E-02	-0.4250112	-0.4250112	.48E-12
4	-0.5197369	-0.5197260	.21E-02	-0.2458965	-0.2458965	.46E-12
5	-0.5678881	-0.5678738	.25E-02	0.0000000	0.0000000	.00E+00
6	-0.5197369	-0.5197260	.21E-02	0.2458965	0.2458965	.43E-12
7	-0.3918066	-0.3917992	.19E-02	0.4250112	0.4250112	.48E-12
8	-0.2096767	-0.2096730	.18E-02	0.5344829	0.5344829	.52E-12
9	0.0000000	0.0000000	.00E+00	0.5714504	0.5714504	.53E-12

\*\*\* --- CONTRAINTES DANS LES ELEMENTS --- \*\*\*

LEMENT	CONTRAINTES:	AVEC(T)	SANS(T)	%ERREUR
1		0.2171E+09	0.2169E+09	.82E-01
2		0.4255E+09	0.4254E+09	.40E-01
3		0.6256E+09	0.6254E+09	.26E-01
4		0.8173E+09	0.8171E+09	.19E-01
5		0.8173E+09	0.8171E+09	.19E-01
6		0.6253E+09	0.6254E+09	.25E-01
7		0.4252E+09	0.4254E+09	.39E-01
8		0.2167E+09	0.2169E+09	.79E-01

\*\*\*\*\*

```

=====
PROGRAMME DE CALCUL DES
VALEURS, FREQUENCES ET VECTEURS
PROPRES
D'UNE POUTRE DANS LE CAS DYNAMIQUE
PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS
SANS NEGLIGER L'EFFET TRANSVERSE
=====

```

*\* Exemple 1.2:*

\*\*\* INTRODUCTION DES DONNEES \*\*\*

```

LONGUEUR DE LA POUTRE..... 3.000
SA SECTION..... 0.7800E-04
SA SECTION REDUITE..... 0.6500E-04
LE MOMENT D'INERTIE DE LA SECTION/Z..... 0.5000E-09
LA MASSE VOLUMIQUE DU MATERIAUX..... 7800.
SON MODULE DE YOUNG..... 0.2200E+12
SON COEFFICIENT DE POISSON..... 0.2500

LE NOMBRE DE NOEUDS..... 5
LE NOMBRE DE NOEUDS LIES AU REFERENCIE ... 1

```

\*\*\* POUR CHAQUE NOEUD PARTICULIER : IER :  
 LE NUMERO DU NOEUD ET :

- (1) SI C'EST UN APPUI MOBILE.
- (2) SI C'EST UN APPUI FIXE.
- (3) SI C'EST UN ENCASTREMENT.

```

LE NUMERO DU NOEUD..... 1
LE TYPE DE LIAISON..... 3

LE NOMBRE TOTAL DE DEGRES DE LIBERTE..... 8

```

\*\*\*\* VALEURS, FREQUENCES ET VECTEURS PROPRES \*\*\*\*

\*\* EXPLICATIONS :

- \* AVEC T : SANS NEGLIGER L'EFFET TRANSVERSE.
- \* SANS T : EN NEGLIGEANT L'EFFET TRANSVERSE.
- \* % ERREUR OU %ERR : POURCENTAGE D'ERREUR COMMIS.
- \* DEPY(A) : DEPLACEMENT SUIVANT Y SANS NEGLIGER.
- \* ROTZ(S) : ROTATION AUTOUR DE Z EN NEGLIGEANT.

\*\* RESULTATS :

\*\* MODE..... 1

	AVEC T	SANS T	ERREUR %
VALEUR PROPRE.....	0.2759587E+02	0.2759614E+02	.99E-03
FREQUENCE PROPRE...	0.5253203E+01	0.5253177E+01	.49E-03

NOEUD	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	0.0000000	0.0000000	.00E+00
2	0.1440323	0.1440299	.17E-02	0.3593062	0.3593097	.96E-03
3	0.5026603	0.5026578	.49E-03	0.5739548	0.5739605	.99E-03
4	0.9737835	0.9737831	.50E-04	0.6647694	0.6647761	.10E-02
5	1.4804789	1.4804824	.24E-03	0.6792908	0.6792976	.10E-02

\*\* MODE..... 2

	AVEC T	SANS T	ERREUR %
VALEUR PROPRE.....	0.1086193E+04	0.1086266E+04	.67E-02
FREQUENCE PROPRE...	0.3295854E+02	0.3295744E+02	.33E-02

NOEUD	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	0.0000000	0.0000000	.00E+00
2	-0.6191547	-0.6191278	.43E-02	-1.1307830	-1.1308947	.98E-02
3	-1.0590224	-1.0590233	.80E-04	0.2239967	0.2239470	.22E-01
4	-0.2004591	-0.2004738	.74E-02	1.9247458	1.9248097	.33E-02
5	1.4837154	1.4837359	.14E-02	2.3647709	2.3648684	.41E-02

\*\* MODE..... 3

	AVEC T	SANS T	ERREUR %
VALEUR PROPRE.....	0.8627454E+04	0.8628763E+04	.15E-01
FREQUENCE PROPRE...	0.9289114E+02	0.9288409E+02	.76E-02

NOEUD	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	0.0000000	0.0000000	.00E+00
2	-1.0901154	-1.0900583	.52E-02	-0.7956743	-0.7960601	.48E-01
3	-0.0328792	-0.0329383	.18	2.7775442	2.7779306	.14E-01
4	0.8763301	0.8763385	.96E-03	-1.3235283	-1.3235379	.73E-03
5	-1.5003343	-1.5003683	.23E-02	-3.9381102	-3.9385042	.10E-01

\*\* MODE..... 4

	AVEC T	SANS T	ERREUR %
VALEUR PROPRE.....	0.3357158E+05	0.3358209E+05	.31E-01
FREQUENCE PROPRE...	0.1832542E+03	0.1832255E+03	.16E-01

NOEUD	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	0.0000000	0.0000000	.00E+00
2	1.0564864	1.0565041	.17E-02	-1.6188614	-1.6187673	.58E-02
3	-1.0902718	-1.0902198	.48E-02	-0.0938164	-0.0942152	.43
4	0.9399927	0.9399434	.52E-02	1.3837368	1.3845079	.56E-01
5	-1.4723043	-1.4724599	.11E-01	-5.4880865	-5.4894783	.25E-01

\*\* MODE..... 5

	AVEC T	SANS T	ERREUR %
VALEUR PROPRE.....	0.1161620E+06	0.1161747E+06	.11E-01
FREQUENCE PROPRE...	0.3408440E+03	0.3408255E+03	.54E-02

NOEUD	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	0.0000000	0.0000000	.00E+00
2	-0.5159114	-0.5160252	.22E-01	5.9832688	5.9828520	.70E-02
3	0.0706264	0.0707476	.17	-6.8175831	-6.8172152	.54E-02
4	0.3357368	0.3356532	.25E-01	6.2112589	6.2115363	.45E-02
5	-1.5622449	-1.5623766	.84E-02	-8.3617323	-8.3631804	.17E-01

\* Exemple 1.6: \*\*\* INTRODUCTION DES DONNEES \*\*\*

LONGUEUR DE LA POUTRE..... 3.000  
 SA SECTION..... 0.7800E-04  
 SA SECTION REDUITE..... 0.6500E-04  
 LE MOMENT D'INERTIE DE LA SECTION/Z..... 0.5000E-09  
 LA MASSE VOLUMIQUE DU MATERIAUX..... 7800.  
 SON MODULE DE YOUNG..... 0.2200E+12  
 SON COEFFICIENT DE POISSON..... 0.2500

LE NOMBRE DE NOEUDS..... 9  
 LE NOMBRE DE NOEUDS LIES AU REFERENCIEL..... 1

\*\*\* POUR CHAQUE NOEUD PARTICULIER DONNER  
 LE NUMERO DU NOEUD ET:

- (1) SI C'EST UN APPUI MOBILE.
- (2) SI C'EST UN APPUI FIXE.
- (3) SI C'EST UN ENCASTREMENT.

LE NUMERO DU NOEUD..... 1  
 LE TYPE DE LIAISON..... 3  
 LE NOMBRE TOTAL DE DEGRES DE LIBERTE..... 16

\*\*\* VALEURS, FREQUENCES ET VECTEURS PROPRES \*\*\*

## RESULTATS:

\*\* MODE..... 1

VALEUR PROPRE.....	AVEC T	SANS T	ERREUR %
FREQUENCE PROPRE...	0.2759418E+02	0.2759445E+02	.99E-03
	0.5253042E+01	0.5253016E+01	.50E-03

NOEUD	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	0.0000000	0.0000000	.00E+00
2	0.0303343	0.0303327	.40E-02	0.1982234	0.1982253	.96E-03
3	0.1440235	0.1440211	.17E-02	0.3592842	0.3592877	.97E-03
4	0.3032430	0.3032403	.89E-03	0.4839161	0.4839209	.98E-03
5	0.5026296	0.5026271	.48E-03	0.5739195	0.5739252	.99E-03
6	0.7297555	0.7297538	.23E-03	0.6325371	0.6325435	.10E-02
7	0.9737239	0.9737235	.42E-04	0.6647283	0.6647350	.10E-02
8	1.2258490	1.2258503	.11E-03	0.6773482	0.6773551	.10E-02
9	1.4803878	1.4803915	.25E-03	0.6792479	0.6792548	.10E-02

\*\* MODE..... 2

VALEUR PROPRE.....	AVEC T	SANS T	ERREUR %
FREQUENCE PROPRE...	0.1083838E+04	0.1083912E+04	.69E-02
	0.3292282E+02	0.3292169E+02	.34E-02

NOEUD	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	0.0000000	0.0000000	.00E+00
2	-0.2042109	-0.2041859	.12E-01	-0.9543171	-0.9543972	.84E-02
3	-0.6178288	-0.6178035	.41E-02	-1.1283432	-1.1284556	.10E-01
4	-0.9687038	-0.9686915	.13E-02	-0.6520560	-0.6521544	.15E-01
5	-1.0566660	-1.0566697	.35E-03	0.2236912	0.2236418	.22E-01
6	-0.7911535	-0.7911682	.19E-02	1.1786576	1.1786712	.12E-02
7	-0.1998472	-0.1998628	.78E-02	1.9206762	1.9207436	.35E-02
8	0.6022463	0.6022426	.61E-03	2.2930551	2.2931515	.42E-02
9	1.4805969	1.4806210	.16E-02	2.3594149	2.3595167	.43E-02

\*\* MODE..... 3

		AVEC T		SANS T		ERREUR %
VALEUR PROPRE.....		0.8505668E+04		0.8507025E+04		.16E-01
FREQUENCE PROPRE...		0.9223354E+02		0.9222618E+02		.80E-02

NOEUD	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	0.0000000	0.0000000	.00E+00
2	-0.4824617	-0.4823760	.18E-01	-1.9654117	-1.9658652	.23E-01
3	-1.0738875	-1.0738496	.35E-02	-0.7830155	-0.7833995	.49E-01
4	-0.9155601	-0.9155976	.41E-02	1.6112691	1.6112994	.23E-02
5	-0.0291724	-0.0292356	.22	2.7426174	2.7430099	.14E-01
6	0.8267337	0.8267069	.32E-02	1.4358191	1.4361812	.25E-01
7	0.8618249	0.8618507	.30E-02	-1.3168658	-1.3168660	.16E-04
8	-0.0741618	-0.0741267	.47E-01	-3.4147208	-3.4150642	.10E-01
9	-1.4821039	-1.4821540	.34E-02	-3.8774856	-3.8779126	.11E-01

\*\* MODE..... 4

		AVEC T		SANS T		ERREUR %
VALEUR PROPRE.....		0.3276457E+05		0.3277392E+05		.29E-01
FREQUENCE PROPRE...		0.1810357E+03		0.1810099E+03		.14E-01

NOEUD	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	0.0000000	0.0000000	.00E+00
2	-0.7724096	-0.7722409	.22E-01	-2.5134829	-2.5147923	.52E-01
3	-1.0189866	-1.0190244	.37E-02	1.6494902	1.6492487	.15E-01
4	0.1937382	0.1935906	.76E-01	3.8257651	3.8268410	.28E-01
5	1.0515897	1.0515714	.17E-02	0.0232354	0.0237090	2.0
6	0.2167716	0.2168773	.49E-01	-3.7314102	-3.7323457	.25E-01
7	-0.9239415	-0.9238970	.48E-02	-1.3006062	-1.3013830	.60E-01
8	-0.3965613	-0.3966213	.15E-01	3.8920579	3.8926483	.15E-01
9	1.4865938	1.4866681	.50E-02	5.4506190	5.4516839	.20E-01

\*\* MODE..... 5

		AVEC T		SANS T		ERREUR %
VALEUR PROPRE.....		0.9015475E+05		0.9019435E+05		.44E-01
FREQUENCE PROPRE...		0.3003237E+03		0.3002578E+03		.22E-01

NOEUD	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	0.0000000	0.0000000	.00E+00
2	1.0000698	1.0006246	.24E-01	2.1670163	2.1695785	.12
3	0.4278997	0.4201213	.52E-01	-4.7079262	-4.7092594	.28E-01
4	-1.0349306	-1.0348229	.10E-01	-0.9944752	-0.9960069	.15
5	-0.0001600	-0.0003779	.14E+03	4.9852934	4.9873633	.42E-01
6	1.0432182	1.0431872	.30E-02	-0.9467462	-0.9463141	.46E-01
7	-0.3813211	-0.3811678	.40E-01	-4.5067401	-4.5090039	.50E-01
8	-0.7541480	-0.7541803	.43E-02	3.3624334	3.3629134	.14E-01
9	1.4957404	1.4958291	.59E-02	7.0613668	7.0634509	.30E-01

\* Exemple 2.0 \*\*\* INTRODUCTION DES DONNEES \*\*\*

LONGUEUR DE LA POUTRE..... 3.000  
 SA SECTION..... 0.7000E-04  
 SA SECTION REDUITE..... 0.6500E-04  
 LE MOMENT D'INERTIE DE LA SECTION/Z..... 0.5000E-09  
 LA MASSE VOLUMIQUE DU MATERIAUX..... 7800.  
 SON MODULE DE YOUNG..... 0.2200E+12  
 SON COEFFICIENT DE POISSON..... 0.2500

LE NOMBRE DE NOEUDS..... 5  
 LE NOMBRE DE NOEUDS LIES AU REFERENCIEL..... 2

\*\*\* POUR CHAQUE NOEUD PARTICULIER DONNER:  
 LE NUMERO DU NOEUD ET:

- (1) SI C'EST UN APPUI MOBILE.
- (2) SI C'EST UN APPUI FIXE.
- (3) SI C'EST UN ENCASTREMENT.

LE NUMERO DU NOEUD..... 1  
 LE TYPE DE LIAISON..... 2  
 LE NUMERO DU NOEUD..... 5  
 LE TYPE DE LIAISON..... 1  
 LE NOMBRE TOTAL DE DEGRES DE LIBERTE..... 8

\*\*\*\* VALEURS, FREQUENCES ET VECTEURS PROPRES \*\*\*\*

## RESULTATS:

\*\* MODE..... 1

	AVEC T	SANS T	ERREUR %
VALEUR PROPRE.....	0.2175377E+03	0.2175422E+03	.20E-02
FREQUENCE PROPRE...	0.1474931E+02	0.1474916E+02	.10E-02

NOEUD	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	1.0967423	1.0967647	.20E-02
2	0.7405777	0.7405771	.85E-04	0.7755141	0.7755299	.20E-02
3	1.0473352	1.0473343	.85E-04	0.0000000	0.0000000	.00E+00
4	0.7405779	0.7405773	.85E-04	-0.7755141	-0.7755299	.20E-02
5	0.0000000	0.0000000	.00E+00	-1.0967427	-1.0967652	.20E-02

\*\* MODE..... 2

	AVEC T	SANS T	ERREUR %
VALEUR PROPRE.....	0.3506120E+04	0.3506384E+04	.75E-02
FREQUENCE PROPRE...	0.5921472E+02	0.5921250E+02	.38E-02

NOEUD	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	-2.2091629	-2.2093305	.76E-02
2	-1.0551370	-1.0551232	.13E-02	0.0000000	0.0000000	.00E+00
3	0.0000000	0.0000000	.00E+00	2.2091634	2.2093309	.76E-02
4	1.0551368	1.0551231	.13E-02	0.0000000	0.0000000	.00E+00
5	0.0000000	0.0000000	.00E+00	-2.2091626	-2.2093301	.76E-02

\*\* MODE..... 3

	AVEC T	SANS T	ERREUR %
VALEUR PROPRE.....	0.1825849E+05	0.1826127E+05	.15E-01
FREQUENCE PROPRE...	0.1351343E+03	0.1351240E+03	.76E-02

NOEUD	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	-3.3850790	-3.3856555	.17E-01
2	-0.7702862	-0.7702347	.67E-02	2.3936253	2.3940329	.17E-01
3	1.0893469	1.0892740	.67E-02	-0.0000159	-0.0000159	.63E-01
4	-0.7702829	-0.7702314	.67E-02	-2.3936346	-2.3940423	.17E-01
5	0.0000000	0.0000000	.00E+00	3.3851294	3.3857059	.17E-01

\*\* MODE..... 4

	AVEC T	SANS T	ERREUR %
VALEUR PROPRE.....	0.6087087E+05	0.6057087E+05	.21E-11
FREQUENCE PROPRE...	0.2618604E+03	0.2618604E+03	.11E-11

NOEUD	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	-5.4055989	-5.4055989	.31E-06
2	0.0000000	0.0000000	.00E+00	5.4056135	5.4056135	.28E-06
3	0.0000000	0.0000000	.00E+00	-5.4055950	-5.4055950	.29E-06
4	0.0000000	0.0000000	.00E+00	5.4056079	5.4056079	.30E-06
5	0.0000000	0.0000000	.00E+00	-5.4055910	-5.4055910	.27E-06

\*\* MODE..... 5

	AVEC T	SANS T	ERREUR %
VALEUR PROPRE.....	0.1731994E+06	0.1732441E+06	.26E-01
FREQUENCE PROPRE...	0.4162260E+03	0.4161723E+03	.13E-01

NOEUD	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	8.0150159	8.0147724	.30E-02
2	-0.7161285	-0.7161839	.77E-02	-5.6674746	-5.6673024	.30E-02
3	1.0127590	1.0128373	.77E-02	0.0000000	0.0000000	.00E+00
4	-0.7161290	-0.7161844	.77E-02	5.6674747	5.6673021	.30E-02
5	0.0000000	0.0000000	.00E+00	-8.0150224	-8.0147789	.30E-02

\* Exemple 2.b :

\*\*\* INTRODUCTION DES DONNEES \*\*\*

LONGUEUR DE LA POUTRE..... 3.000  
 SA SECTION..... 0.7800E-04  
 SA SECTION REDUITE..... 0.6500E-04  
 LE MOMENT D'INERTIE DE LA SECTION/Z..... 0.5000E-09  
 LA MASSE VOLUMIQUE DU MATERIAUX..... 7800.  
 SON MODULE DE YOUNG..... 0.2200E+12  
 SON COEFFICIENT DE POISSON..... 0.2500

LE NOMBRE DE NOEUDS..... 9  
 LE NOMBRE DE NOEUDS LIES AU REFERENCIEL..... 2

\*\*\* POUR CHAQUE NOEUD PARTICULIER DONNER:  
 LE NUMERO DU NOEUD ET:

- (1) SI C'EST UN APPUI MOBILE.
- (2) SI C'EST UN APPUI FIXE.
- (3) SI C'EST UN ENCASTREMENT.

LE NUMERO DU NOEUD..... 1  
 LE TYPE DE LIAISON..... 2

LE NUMERO DU NOEUD..... 9  
 LE TYPE DE LIAISON..... 1

\*\*\* VALEURS, FREQUENCES ET VECTEURS PROPRES \*\*\*

\*\* RESULTATS:

\*\* MODE..... 1

	AVEC T	SANS T	ERREUR %
VALEUR PROPRE.....	0.2174318E+03	0.2174364E+03	.21E-02
FREQUENCE PROPRE...	0.1474572E+02	0.1474557E+02	.10E-02

NOEUD	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	1.0962079	1.0962307	.21E-02
2	0.4006024	0.4006024	.63E-04	1.0127645	1.0127854	.21E-02
3	0.7402161	0.7402159	.26E-04	0.7751364	0.7751528	.21E-02
4	0.9671392	0.9671390	.13E-04	0.4195018	0.4195110	.22E-02
5	1.0468252	1.0468249	.23E-04	0.0000000	0.0000000	.00E+00
6	0.9671414	0.9671411	.29E-04	-0.4194988	-0.4195078	.22E-02
7	0.7402181	0.7402180	.13E-04	-0.7751395	-0.7751550	.20E-02
8	0.4006030	0.4006030	.11E-04	-1.0127675	-1.0127886	.21E-02
9	0.0000000	0.0000000	.00E+00	-1.0962091	-1.0962329	.22E-02

\*\* MODE..... 2

	AVEC T	SANS T	ERREUR %
VALEUR PROPRE.....	0.3480390E+04	0.3480675E+04	.82E-02
FREQUENCE PROPRE...	0.5899724E+02	0.5899483E+02	.41E-02

NOEUD	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	-2.1933500	-2.1935296	.82E-02
2	-0.7405797	-0.7405772	.34E-03	-1.5509354	-1.5510624	.82E-02
3	-1.0473389	-1.0473353	.34E-03	0.0000000	0.0000000	.00E+00
4	-0.7405908	-0.7405703	.33E-03	1.5509343	1.5510612	.82E-02
5	0.0000000	0.0000000	.00E+00	2.1933503	2.1935298	.82E-02
6	0.7405786	0.7405760	.35E-03	1.5509310	1.5510580	.82E-02
7	1.0473368	1.0473332	.34E-03	0.0000000	0.0000000	.00E+00
8	0.7405797	0.7405771	.34E-03	-1.5509317	-1.5510586	.82E-02
9	0.0000000	0.0000000	.00E+00	-2.1933525	-2.1935320	.82E-02

\*\* MODE..... 3

	AVEC T	SANS T	ERREUR %
VALEUR PROPRE.....	0.1765398E+05	0.1765712E+05	.18E-01
FREQUENCE PROPRE...	0.1328801E+03	0.1328683E+03	.89E-02

NOEUD	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	3.2964114	3.2969983	.18E-01
2	0.9696177	0.9696013	.17E-02	1.2614881	1.2617112	.18E-01
3	0.7421142	0.7421016	.17E-02	-2.3309181	-2.3313325	.18E-01
4	-0.4016298	-0.4016230	.17E-02	-3.0454872	-3.0460296	.18E-01
5	-1.0495061	-1.0494884	.17E-02	0.0000000	0.0000000	.00E+00
6	-0.4016296	-0.4016228	.17E-02	3.0454942	3.0460355	.18E-01
7	0.7421140	0.7421015	.17E-02	2.3309149	2.3313296	.18E-01
8	0.9696176	0.9696013	.17E-02	-1.2614808	-1.2617049	.18E-01
9	0.0000000	0.0000000	.00E+00	-3.2964234	-3.2970085	.18E-01



\*\* MODE..... 1

	AVEC T	SANS T	ERREUR %
VALEUR PROPRE.....	0.5608526E+05	0.5610214E+05	.30E-01
FREQUENCE PROPRE...	0.2368589E+03	0.2368233E+03	.15E-01

NOEUD	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	-4.4173223	-4.4186624	.30E-01
2	-1.0551765	-1.0551216	.52E-02	0.0000159	0.0000161	1.2
3	0.0000000	0.0000000	.00E+00	4.4172832	4.4186224	.30E-01
4	1.0551797	1.0551247	.52E-02	0.0000360	0.0000365	1.5
5	0.0000000	0.0000000	.00E+00	-4.4173492	-4.4186895	.30E-01
6	-1.0551800	-1.0551252	.52E-02	0.0000309	0.0000314	1.8
7	0.0000000	0.0000000	.00E+00	4.4172877	4.4186271	.30E-01
8	1.0551776	1.0551227	.52E-02	0.0000178	0.0000182	2.5
9	0.0000000	0.0000000	.00E+00	-4.4173290	-4.4186689	.30E-01

\*\* MODE..... 5

	AVEC T	SANS T	ERREUR %
VALEUR PROPRE.....	0.1383631E+06	0.1384247E+06	.45E-01
FREQUENCE PROPRE...	0.3720546E+03	0.3719719E+03	.22E-01

NOEUD	DEPY(A)	DEPY(S)	%ERR	ROTZ(A)	ROTZ(S)	%ERR
1	0.0000000	0.0000000	.00E+00	5.5733455	5.5759076	.46E-01
2	0.9857244	0.9856010	.13E-01	-2.1328163	-2.1337974	.46E-01
3	-0.7544405	-0.7543460	.13E-01	-3.9409967	-3.9427968	.46E-01
4	-0.4082989	-0.4082479	.12E-01	5.1491036	5.1514691	.46E-01
5	1.0669381	1.0668046	.13E-01	0.0000000	0.0000000	.00E+00
6	-0.4082983	-0.4082473	.13E-01	-5.1491166	-5.1514821	.46E-01
7	-0.7544415	-0.7543469	.13E-01	3.9409704	3.9427804	.46E-01
8	0.9857226	0.9855991	.13E-01	2.1328060	2.1337870	.46E-01
9	0.0000000	0.0000000	.00E+00	-5.5733506	-5.5759126	.46E-01

### 4 . 3 . 3 . Analyse des résultats

A la lumière des résultats obtenus pour les différents exemples proposés, on peut faire les constatations suivantes:

#### a) Pour le cas statique:

- Erreur commise en négligeant l'effet transverse est beaucoup plus importante pour les déplacements transverses ( $w$  ou DEPY) que pour les rotations autour de l'axe  $z$  (ROTZ).

Ainsi, pour le déplacement, le pourcentage d'erreur varie de 0,00065%, pour le dernier noeud de la poutre encastree, par la méthode des charges consistantes, dans les deux cas de discrétisation, à 0,0041%, pour le deuxième noeuds de la poutre encastree, par la méthode des charges concentrées, dans le cas de la discrétisation à 8 éléments.

Alors que pour la rotation le pourcentage d'erreur varie de  $36.10^{-14}\%$ , pour noeuds du milieu de la poutre encastree, par la méthode des charges consistantes, dans le cas de discrétisation à 4 éléments, à 0,16%, pour le noeud du milieu de la poutre doublement appuyée.

Mais cette erreur n'est pas significative car elle se rapporte à une pente nulle puisque c'est le point de flèche maximum de la poutre. On considère donc que l'erreur significative maximale enregistrée est de 0,000071%, pour les noeuds proches au milieu de la poutre doublement appuyée, par la méthode des charges consistantes, dans le cas de discrétisation à 8 éléments.

- Si considère le calcul des contraintes, on constate que l'erreur varie de 0,0079%, pour le premier élément de la poutre encastree, par la méthode des charges consistantes, dans le cas de discrétisation à 4 éléments, à 0,1 pour l'avant dernier élément de la poutre encastree, par la méthode des charges concentrées, dans le cas de discrétisation à 8 éléments.

Voir que ce sont des pourcentages d'erreurs relativement importants comparés à ceux des déplacements et rotations.

## b) Pour le cas dynamique:

- Nous voyons, pour les fréquences propres, que le pourcentage d'erreur varie de 0,00049%, pour le premier mode de vibrations de la poutre encastree, avec la discrétisation à 4 éléments, à 0,022% pour le mode 5, des deux poutres, avec pour les deux la discrétisation à 8 éléments.

- Pour les vecteurs propres, en termes de déplacement transversal, on constate que l'erreur varie de 0,000042%, pour le premier mode de vibrations de la poutre encastree, avec la discrétisation à 8 éléments, à 0,062%, pour le mode 5 de la poutre encastree, avec la discrétisation à 8 éléments.

En termes de rotation autour de l'axe z, on constate que le pourcentage d'erreur varie de 0,00096% pour le premier mode de vibrations de la poutre encastree, avec la discrétisation à 4 éléments, à 2,5%.

Mais ce n'est pas très significatif puisque cette valeur se rapporte à une pente nulle du mode 4 de la poutre doublement appuyée, avec la discrétisation à 8 éléments.

On prendra donc comme erreur maximale de la rotation, 0,06% pour le mode 4 de vibrations de la poutre encastree, avec la discrétisation à 8 éléments.

- D'une façon globale on peut constater que l'augmentation du nombre d'éléments, lors de l'étude d'une poutre, que ce soit statiquement ou dynamiquement, engendre une légère augmentation du pourcentage d'erreur.

CHAPITRE 5

L'EFFET TRANSVERSE POUR

L'ELEMENT PLAQUE

## 5 . L'EFFET TRANSVERSE POUR L'ELEMENT PLAQUE

### 5 . 1 . THEORIE DE KIRCHHOFF-POISSON

#### 5 . 1 . 1 . Introduction

De nombreux efforts ont été consacrés à la formulation d'éléments plaques de flexion; comme il est difficile de remplir toutes les exigences voulues à la fois, un nombre extrêmement élevé de formulations différentes a vu le jour.

Afin d'apporter quelques simplifications, on établit les hypothèses suivantes dites *Hypothèses de Kirchhoff*, valables pour les plaques minces à faibles déplacements:

<1> . Le plan moyen de la plaque demeure indéformé durant la flexion.

<2> . Une droite initialement normale au plan moyen de la plaque reste droite et normale au plan moyen durant la flexion. Cette hypothèse équivaut à négliger l'effet de la déformation transverse de cisaillement.

<3> . Les contraintes normales au plan moyen sont négligeables.

Dans le cas de plaques minces mais avec des déplacements  $w$  assez importants, comparés à la rigidité de la plaque, mais toujours faibles par rapport aux autres dimensions, on remplace la première hypothèse par les deux suivantes:

<1> . Les conditions aux limites doivent inclure en plus du déplacement transverse  $w$ , les autres déplacements du plan;  $u$  et  $v$ .

<2> . Les déformations dans le plan moyen sont fonction des dérivées premières de  $u$  et  $v$  par rapport à  $x$  et  $y$ .

Dans le cas de plaques épaisses ou supportant des charges trop concentrées, cette théorie n'est pas valable. Il faut établir d'autres hypothèses et utiliser des éléments tridimensionnels

### 5.1.2. Equations différentielles

L'élément différentiel de plaque en flexion (Fig.5.1.1) subit les actions des moments de flexion  $M_x$  et  $M_y$ , des moments de torsion  $M_{xy}$  et  $M_{yx}$ , et des forces de cisaillement  $Q_x$  et  $Q_y$ .

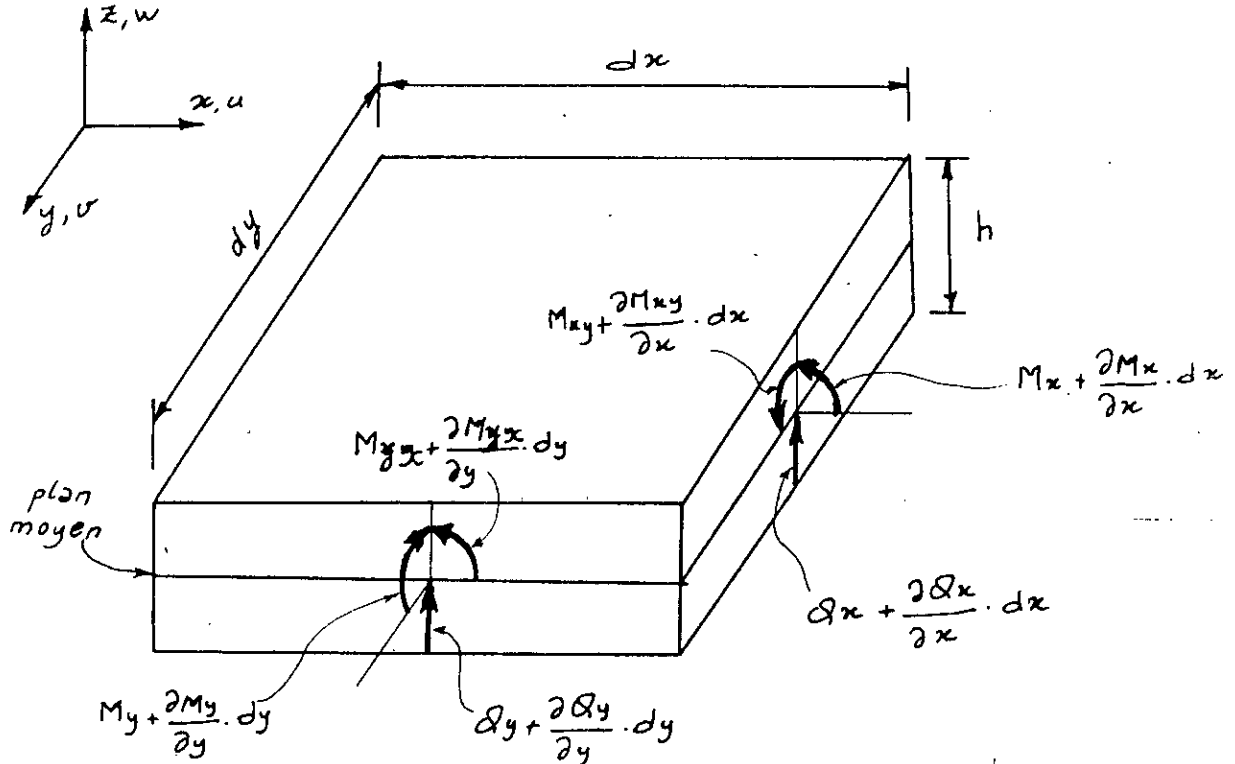


Fig.5.1.1 - Element différentiel d'une plaque en flexion

Physiquement, une plaque mince peut être considérée comme composée de nombreuses couches de membranes à contrainte plane avec les contraintes qui varient linéairement suivant l'épaisseur.

Les moments de flexion et de torsion par unité de longueur peuvent être obtenus par l'intégration de ces contraintes planes suivant l'épaisseur.

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot z \cdot dz = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\epsilon_x + \nu \cdot \epsilon_y) \cdot z \cdot dz$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot z \cdot dz = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\epsilon_y + \nu \cdot \epsilon_x) \cdot z \cdot dz$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz = \frac{-E}{2(1+\nu)} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma_{xy} \cdot z \cdot dz \quad (5.1.1)$$

Les courbures de flexion et de torsion de la plaque sont les gradients des déformations, qui eux varient linéairement suivant l'épaisseur:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= -2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (5.1.2)$$

A partir des équations (5.1.1) et (5.1.2) on a:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -M_{yx} = D \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (5.1.3)$$

Où:

$$D = (E \cdot h^3) / 12 \cdot (1 - \nu^2)$$

est la rigidité à la flexion. E le module d'élasticité longitudinal et  $\nu$  le coefficient de Poisson.

Nous supposons maintenant que l'élément différentiel est soumis à une charge uniformément répartie sur la surface ( $p \cdot dx \cdot dy$ ).

En considérant l'équilibre de toutes les forces de cisaillement, des moments de flexion et de torsion agissant sur l'élément différentiel, on a:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (5.1.4.a)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \quad (5.1.4.b)$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0. \quad (5.1.4.c)$$

Eliminons les forces de cisaillement  $Q_x$  et  $Q_y$  de l'équation (5.1.4.a) en les remplaçant par les dérivées des moments déduits des équations (5.1.4.b) et (5.1.4.c):

$$+ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p \quad (5.1.5)$$

En substituant les équations (5.1.3) dans (5.1.5) on obtient la fameuse équation différentielle du quatrième ordre des plaques:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \quad (5.1.6)$$

Historiquement cette équation se déduit des travaux d'Euler, Bernoulli, Chladni, Germain, Lagrange, Poisson, Navier et Kirchhoff. [7]

### 5 . 1 . 3 . Energie de déformation

L'expression de l'énergie de déformation pour l'élément différentiel de la plaque soumise aux moments de flexion  $M_x$  et  $M_y$ , et aux moments de torsion  $M_{xy}$  et  $M_{yx}$  est:

$$\begin{aligned} dU = & - \frac{1}{2} \cdot (M_x \cdot dy) \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot dx \right) \\ & - \frac{1}{2} \cdot (M_y \cdot dx) \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot dy \right) \\ & - \frac{1}{2} \cdot (M_{xy} \cdot dy) \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot dx \right) \\ & - \frac{1}{2} \cdot (M_{yx} \cdot dx) \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \cdot dy \right) \end{aligned} \quad (5.1.7)$$



Cette équation peut être déduite à partir d'une analyse physique de l'élément différentiel.

Le terme

$$-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

représente la courbure de la plaque dans le plan  $xz$ . L'angle correspondant au moment de flexion

$$(M_x \cdot dy) \quad \text{est:} \quad -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \cdot dx$$

et le travail dû à ce moment est:

$$-\frac{1}{2} \cdot (M_x \cdot dy) \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \cdot dx$$

Pour ce qui est du moment de torsion ( $M_{xy} \cdot dy$ ), l'angle est égal à la variation de la pente ( $\partial w / \partial y$ ), lorsque  $x$  varie, multipliée par  $dx$ . Le travail effectué:

$$\frac{1}{2} \cdot (M_{xy} \cdot dy) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \cdot dx$$

En substituant les équations (5.1.3) dans (5.1.7) et en intégrant l'énergie différentielle  $dU$  sur le volume de toute la plaque, on obtient l'expression de l'énergie de déformation:

$$\begin{aligned}
 U = \iint_{\text{Aire}} (D/2) \cdot & \left[ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \right. \\
 & + 2 \cdot \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \\
 & \left. + 2 \cdot (1 - \nu) \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}\right)^2 \right] \cdot dx \cdot dy
 \end{aligned}
 \tag{5.1.8}$$

#### 5 . 1 . 4 . Equations des contraintes de flexion

Les équations des contraintes en flexion à une distance  $z$  du plan moyen sont de la forme:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M_x \cdot z}{I_y} = \frac{12 \cdot M_x \cdot z}{h^3} \\ \sigma_y &= \frac{M_y \cdot z}{I_x} = \frac{12 \cdot M_y \cdot z}{h^3} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \frac{12 \cdot M_{xy} \cdot z}{h^3} \end{aligned} \right\} \quad (5.1.9)$$

### 5 . 1 . 5 . Sélection des fonctions de déplacement

L'hypothèse du nombre de degrés de liberté par noeud et la sélection des fonctions de déplacement sont la clé du développement d'un modèle performant d'élément fini par la méthode des déplacements.

Les fonctions déplacement doivent être choisit de façon qu'à chaque fois que le maillage de l'élément est augementé les résultats obtenus convergent vers la solution exacte.

Pour s'assurer de la convergence des résultats avec l'augmentation du maillage, les approximations des déplacements doivent satisfaire certains critères, connus comme *les critères de convergence*.

Ces critères s'expriment comme suit:

<1> . Les fonctions déplacement doivent être continues sur tout l'élément.

Ce critère est facilement satisfait par les fonctions déplacement polynômiales.

<2> . Les fonctions déplacement doivent être choisit de façon qu'aucune déformation de l'élément n'est possible lorsque tous les noeuds sont sujets à un déplacement de corps rigide.

Ce critère signifie que lors de la substitution des déplacements nodaux du corps rigide dans les équations déplacement-déformation ou force-déplacement d'un élément, il n'existe ni les déformations ni les forces.

Ce critère peut aussi être vérifié par la résolution d'une pseudo-équation aux valeurs propres de l'élément:

$$[[K] - \omega^2 \cdot [I]] \cdot \{q\} = \{0\} \quad (5.1.10)$$

Où  $[I]$  est la matrice identité qui simule la matrice masse de l'élément.

Les valeurs propres et les vecteurs propres obtenus doivent inclure tout les modes de corps rigide, ce sont les fréquences naturelles de l'élément et les déplacements de corps rigide correspondants  $\{q\}$ .

Pour les éléments plaque en flexion, il y a trois modes de corps rigide:

- Un déplacement transverse.
- Deux rotations autour des axes  $x$  et  $y$  respectivement.

<3> . Les fonctions déplacement doivent être choisit de façon qu'un état de déformation constante soit obtenu lorsque les déplacements nodaux correspondent à une condition de déformation constante.

<4> . Les fonctions déplacement doivent être choisit de façon qu'aux frontières des éléments, les déplacements et leurs dérivées jusqu'à l'ordre inférieur à celui des dérivées contenues dans l'expression de l'énergie, soient continus.

En d'autres termes, les dérivées du déplacement avec le même ordre que dans l'expression d'énergie doivent être finis.

Les éléments qui satisfont le critère <4> sont appelés *éléments conformes*.

Les éléments qui satisfont la compatibilité aux frontières des dérivées d'ordre zéro, premier et second sont connus comme les éléments à *continuité*  $C_0$ ,  $C_1$  et  $C_2$  respectivement.

Le critère <4> rend certainement la sélection de la fonction déplacement  $w$  pour les plaques en flexion plus compliquée que pour les plaques en contrainte plane ou les éléments solides, puisque l'expression de l'énergie de déformation de la plaque en flexion (5.1.8) contient les produits de dérivés du second ordre de  $w$ .

Il y a des éléments plaques en flexion qui sont non-conformes. Pour de tel éléments, seulement la continuité de  $w$  est assurée le long des frontières, alors que la continuité des dérivées premières n'est assurée qu'aux points adjacents.

Si ces éléments non-conformes satisfont le critère <3> et passent le test de convergence (Voir paragraphe suivant), alors ils sont convergents et sont habituellement utilisés. Toutefois, on ne peut pas garantir une convergence monotone. 7

#### 5 . 1 . 6 . Test de convergence

Le test de convergence, ou *patch test*, est un test numérique simple permettant d'évaluer les possibilités d'un élément fini.

Ce test est basé sur un assemblage qui doit avoir au moins un noeud complètement entouré par des éléments.

Les noeuds des limites extérieurs sont sujets aux mêmes déplacements ou travaux de charges équivalentes que pour une analyse exacte des résultats d'un état de contrainte à déformation constante.

Si l'analyse d'élément fini de cet assemblage, lorsque celui-ci tend à être infinitésimalement petit, montre que la solution des déplacements nodaux tend vers l'état de déformation constante avec des valeurs exactes, selon la précision de l'ordinateur utilisé, en n'importe quel point de n'importe quel élément de l'assemblage d'essai, alors le test de convergence est passé.

#### 5 . 1 . 7 . Formulation rectangle à 4 noeuds et 16 ddl

Cet élément a 4 noeuds, chacun d'eux a 4 degrés de libertés (Fig.5.1.2): un déplacement transverse  $w$  suivant l'axe  $z$ , deux rotations ( $\partial w / \partial y$ ) et ( $\partial w / \partial x$ ) autour des axes  $x$  et  $y$  respectivement, et un gauchissement (ou twist) ( $\partial^2 w / \partial x \cdot \partial y$ )

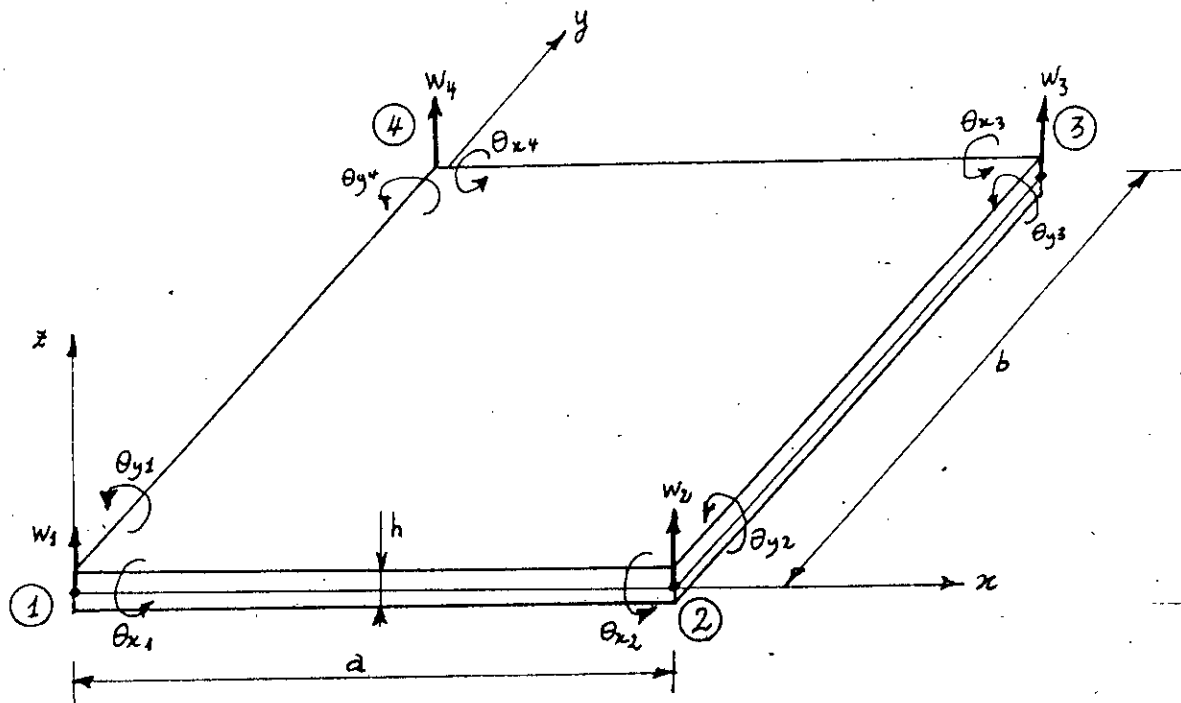


Fig.5.1.2 - Element plaque rectangulaire

Le quatrième degré de liberté a été ajouté pour permettre la constitution d'une formulation d'élément conforme. Alors que la formulation d'élément 12 degrés de libertés ne l'est pas.

\*Fonction de déplacement:

La fonction déplacement à 16 termes peut être obtenue en effectuant le produit de deux fonctions de déplacements de poutres croisées, chacune d'elles de forme cubique:

$$w(x,y) = (a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^3) \cdot$$

$$(b_1 + b_2 \cdot y + b_3 \cdot y^2 + b_4 \cdot y^3) =$$



Développons l'expression de la fonction déplacement:

$$w(x, y) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{a^3 \cdot b^3} \left[ (a^3 + 2 \cdot x^3 - 3 \cdot a \cdot x^2) \cdot (b^3 + 2 \cdot y^3 - 3 \cdot b \cdot y^2) \cdot w_1 \right. \\
 &\quad + (3 \cdot a \cdot x^2 - 2 \cdot x^3) \cdot (b^3 + 2 \cdot y^3 - 3 \cdot b \cdot y^2) \cdot w_2 \\
 &\quad + (3 \cdot a \cdot x^2 - 2 \cdot x^3) \cdot (3 \cdot b \cdot y^2 - 2 \cdot y^3) \cdot w_3 \\
 &\quad + (a^3 + 2 \cdot x^3 - 3 \cdot a \cdot x^2) \cdot (3 \cdot b \cdot y^2 - 2 \cdot y^3) \cdot w_4 \\
 &\quad + a \cdot x \cdot (x-a)^2 \cdot (b^3 + 2 \cdot y^3 - 3 \cdot b \cdot y^2) \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_1 \\
 &\quad + a \cdot (x^3 - a \cdot x^2) \cdot (b^3 + 2 \cdot y^3 - 3 \cdot b \cdot y^2) \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_2 \\
 &\quad + a \cdot (x^3 - a \cdot x^2) \cdot (3 \cdot b \cdot y^2 - 2 \cdot y^3) \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_3 \\
 &\quad + a \cdot x \cdot (x-a)^2 \cdot (3 \cdot b \cdot y^2 - 2 \cdot y^3) \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_4 \\
 &\quad + b \cdot (a^3 + 2 \cdot x^3 - 3 \cdot a \cdot x^2) \cdot y \cdot (y-b)^2 \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_1 \\
 &\quad + b \cdot (3 \cdot a \cdot x^2 - 2 \cdot x^3) \cdot y \cdot (y-b)^2 \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_2 \\
 &\quad + b \cdot (3 \cdot a \cdot x^2 - 2 \cdot x^3) \cdot (y^3 - b \cdot y^2) \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_3 \\
 &\quad + b \cdot (a^3 + 2 \cdot x^3 - 3 \cdot a \cdot x^2) \cdot (y^3 - b \cdot y^2) \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_4 \\
 &\quad + a \cdot b \cdot x \cdot y \cdot (x-a)^2 \cdot (y-b)^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \right)_1 \\
 &\quad + a \cdot b \cdot x \cdot y \cdot (x^2 - a \cdot x) \cdot (y-b)^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \right)_2 \\
 &\quad + a \cdot b \cdot x \cdot y \cdot (x^2 - a \cdot x) \cdot (y^2 - b \cdot y) \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \right)_3 \\
 &\quad \left. + a \cdot b \cdot x \cdot y \cdot (x-a)^2 \cdot (y^2 - b \cdot y) \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \right)_4 \right]
 \end{aligned}$$

(5.1.13)

\*Modes des corps rigides, déformations constantes et compatibilité aux frontières

L'élément plaque a trois mouvements de corps rigide possibles: un déplacement transverse  $w$ , et deux rotations  $(\partial w / \partial x)$  et  $(\partial w / \partial y)$ .

Dans l'expression de la fonction déplacement (5.1.11), les trois termes  $c_1$ ,  $c_2 \cdot x$ , et  $c_3 \cdot y$  fournissent les constantes  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  nécessaires aux trois modes de corps rigide respectifs.

L'élément plaque a trois termes de déplacement:  $(\partial^2 w / \partial x^2)$ ,  $(\partial^2 w / \partial y^2)$ , et  $(\partial^2 w / \partial x \cdot \partial y)$ . Les termes  $c_4 \cdot x^2$ ,  $c_5 \cdot y^2$ , et  $c_6 \cdot x \cdot y$  fournissent les constantes  $c_4$ ,  $c_5$ , et  $c_6$  nécessaire aux trois déformations constantes respectives.

Pour vérifier le compatibilité aux frontières des éléments, considérons la fonction déplacement le long du coté 2-3 de l'élément représenté (Fig.5.1.2).

Pour  $x = a$ , on a:

$$w(a, y) = a_1 + a_2 \cdot y + a_3 \cdot y^2 + a_4 \cdot y^3 \quad (5.1.14.a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(a, y) = a_2 + 2 \cdot a_3 \cdot y + 3 \cdot a_4 \cdot y^2 \quad (5.1.14.b)$$

Les quatres constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , et  $a_4$  sont uniquement définies par les valeurs des quatres degrés de liberté des noeuds 2 et 3:

$$w(a, 0) = a_1 = w_2$$

$$w(a, b) = a_1 + a_2 \cdot b + a_3 \cdot b^2 + a_4 \cdot b^3 = w_3$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(a, 0) = a_2 = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_2$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(a, b) = a_2 + 2 \cdot a_3 \cdot b + 3 \cdot a_4 \cdot b^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_3$$



Puisque les mêmes valeurs des quatre degrés de liberté sont valables pour les deux éléments voisins qui ont le côté 2-3 en commun, les deux éléments auront la même fonction de déplacement (5.1.14.a) le long de ce côté.

La compatibilité de déplacement le long de la frontière 2-3 (dans la direction de y) signifie que la pente ( $\partial w / \partial y$ ) est aussi complètement compatible.

Voyons maintenant la compatibilité de la pente normale ( $\partial w / \partial x$ ) le long de la frontière 2-3:

$$\frac{\partial w}{\partial x}(a, y) = c \cdot (b_1 + b_2 \cdot y + b_3 \cdot y^2 + b_4 \cdot y^3) \quad (5.1.15)$$

Où les quatre constantes peuvent être obtenues à partir des quatre conditions:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}\right)_2 \quad \text{pour} \quad y = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}\right)_3 \quad \text{pour} \quad y = b \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

Ainsi les pentes normales ( $\partial w / \partial x$ ) entre les deux éléments adjacents sont compatibles le long du côté 2-3.

La compatibilité aux autres frontières peut être montrée de la même manière.

Cette fonction déplacement satisfait tous les critères de convergence monotone

#### \*Matrice de rigidité

La matrice de rigidité peut être formulée en utilisant la formule:

$$[k] = \int_0^a \int_0^b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [A]^T \cdot [C] \cdot [A] \cdot dz \cdot dy \cdot dx \quad (5.1.16)$$

Avec la matrice  $[A]$  reliant les déformations aux déplacements nodaux, et  $[C]$  reliant les contraintes aux déformations, on a:

$$[C] = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

#### \*La matrice masse

Pour formuler la matrice masse de la méthode des charges concentrées il suffit de diviser la masse de l'élément par 4, et multiplier se qu'on obtient par la matrice identité.

L'énergie cinétique des vibrations d'une plaque en flexion avec de faibles déplacements transverses est:

$$T = \frac{\rho \cdot h}{2} \cdot \int_0^a \int_0^b (\dot{w})^2 \cdot dx \cdot dy \quad (5.1.17)$$

Avec:

$\rho$  : la masse volumique du matériau.

$h$  : l'épaisseur de la plaque.

Pour une matrice masse de la méthode des charges consistantes, nous utilisons la fonction de déplacement (5.1.12) ou (5.1.13) et l'équation de Lagrange suivante:

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (5.1.18)$$

Le premier terme à droite,  $(\partial U / \partial q_i)$  produit la matrice de rigidité. Le second terme produit la matrice masse.

En Substituant la fonction de déplacement dans l'expression de l'équation de l'énergie cinétique (5.1.17), et en

dérivant les termes de l'équation de Lagrange (5.1.18), la matrice masse est obtenue.

Les équations du mouvement peuvent être écrites comme:

$$\begin{matrix} \{F\} & = & [k] & \cdot & \{q\} & + & [m] & \cdot & \{\ddot{q}\} & & (5.1.19) \\ (16 \times 1) & & (16 \times 16) & & & & (16 \times 16) & & & & \end{matrix}$$

En supposant le mouvement sinusoïdal avec une fréquence naturelle  $\omega$ , impliquant l'équation aux valeurs propres pour les vibrations libres:

$$\{0\} = \left[ [k] - \omega^2 \cdot [m] \right] \cdot \{q\} \quad (5.1.20)$$

Avec  $\omega$  les valeurs propres ou fréquences naturelles et  $\{q\}$  les vecteurs propres ou modes de forme. Les méthodes de résolutions numérique des équations aux valeurs propres sont nombreuses, nous retiendrons celle de Jacobi[1].

Le deux matrices (matrice de rigidité et matrice masse), sont données explicitement dans la référence [7].

## 5 . 2 . THEORIE DE REISSNER-MINDLIN

### 5 . 2 . 1 . Introduction

La théorie classique des plaques (Poisson-Kirchhoff) exige une continuité  $C_1$ , c'est-à-dire, que la fonction de base choisie doit être continue ainsi que sa dérivée première, de même pour la théorie classique des poutres (Bernoulli-Euler).

Les interpolations de continuité  $C_0$  (c'est-à-dire que la continuité de la fonction est exigée seule) sont faciles à construire, on ne peut pas en dire autant pour les interpolations  $C_1$  multi-dimensionnelles.

Il a fallu beaucoup d'ingéniosité pour développer des schémas d'interpolation  $C_1$  compatibles aux éléments plaques basés sur la théorie classique, et ces schémas ont toujours été très compliqués d'une manière ou d'une autre.

De plus en plus, il y a un détournement des éléments de type Poisson-Kirchhoff vers des éléments basés sur une autre théorie qui tient compte des déformations dues à l'effort transverse (théorie de Reissner et Mindlin) et qui n'exigent qu'une continuité  $C_0$ .

Cette approche ouvre la voie à une grande variété de schémas mais elle n'est pas sans poser ses propres problèmes. Récemment [9] [8], des éléments de type *déplacement* ont été formulés sur la base de la théorie de Reissner-Mindlin, et ils semblent être supérieurs aux éléments de la théorie classique.

Ce chapitre expose les techniques de base et les considérations principales qui résument les récents développements de ce champ de recherche.

Une approche similaire est présentée pour ce qui concerne les poutres pour lesquelles on ne néglige pas les déformations dues à l'effort transverse.

### 5 . 2 . 2 . Importantes hypothèses

Toutes les quantités linéaires seront rapportées à un système cartésien de coordonnées rectangulaire. On suppose le système  $(x, y, z)$  confondu aux axes principaux  $(1, 2, 3)$ .

<1> . Le domaine de travail est défini par:

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right], \quad (x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2 \right\}$$

Où  $t$  est l'épaisseur de la plaque,  $A$  son aire. La frontière de la plaque est notée  $s$ .

Cette hypothèse n'exclue pas que  $t$  soit une fonction de  $x$  et de  $y$ .

<2> . Hypothèse des contraintes planes. Elle s'exprime par:

$$\sigma_{zz} = 0$$

Elle sert à simplifier le système d'équations en éliminant une; celle de  $\varepsilon_{zz} = 0$ .

<3> . Définie par:

$$u_x(x, y, z) = -z \cdot \theta_x(x, y, z)$$

Elle implique que les sections planes le restent.  $\theta_x$  est interprété comme la rotation d'une fibre initialement normale à la section.

<4> . Définie par:

$$u_z(x, y, z) = w(x, y)$$

Elle exprime l'uniformité du déplacement  $w$  à travers l'épaisseur de la plaque. Cette hypothèse est en contradiction avec la deuxième car:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2} \left( -\theta_x^2 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (\text{Voir l'équation 5.2.9})$$

et si:

$$w = w(x, y) \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{zz} = -\frac{1}{2} \cdot \theta_x \neq 0$$

mais cela ne cause pas de gros problèmes car on néglige  $\theta_x$ .

L'existence de cette théorie est justifiée par ses nombreuses applications pratiques en analyse des structures. Aucune théorie des plaques n'est complètement compatible avec la théorie des éléments tridimensionnels en même temps qu'elle est simple et facile à utiliser.

L'habituelle règle de la main droite, concernant la convention de signes, ne s'adapte pas très à bien aux calculs algébriques de cette théorie, en conséquence, nous utiliserons une autre convention de signes tel que:

$$\theta_x = -\hat{\theta}_y \quad ; \quad \theta_y = \hat{\theta}_x$$

Avec:  $\hat{\theta}_x$  et  $\hat{\theta}_y$ : les sens de rotation positifs habituelles de la règle de la main droite.

$\theta_x$  et  $\theta_y$ : les sens de rotations positifs de la nouvelle convention.

Les principaux déplacements utilisés pour l'étude de la déformation transverse sont  $w$  et  $\theta_x$ . (Fig.5.2.1)

Plaque déformée:

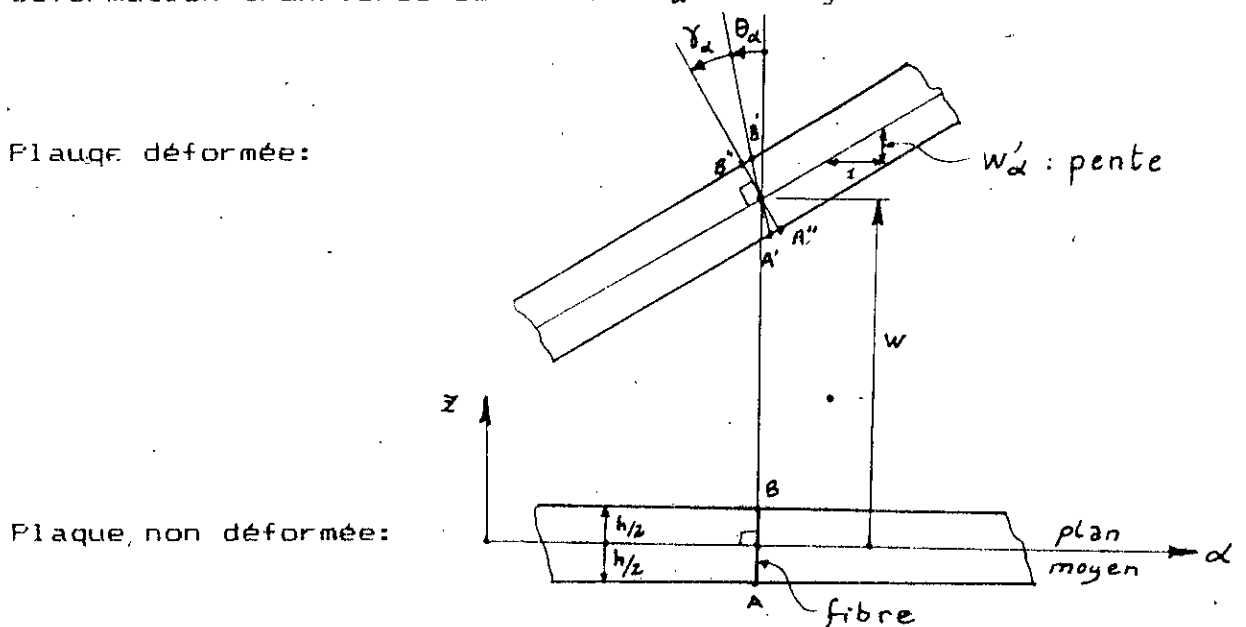


Fig.5.2.1 - Cinématique de la plaque

Avec:  $\gamma_\alpha = w'_\alpha - \theta_\alpha$

$\gamma_\alpha$  - Déformation de cisaillement.

$\theta_\alpha$  - Rotation de la fibre.

$w$  - Déplacement transverse.

$w'_\alpha$  - Pente:  $w'_\alpha = \frac{\partial w}{\partial \alpha}$

### 5 . 2 . 3 . Equation fondamentale:

La forme réduite de l'équation fondamentale de cette théorie est déduite des équations reliant contraintes et déformations pour le cas tridimensionnel. Puis on applique la deuxième hypothèse qui élimine  $\varepsilon_{zz}$ .

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \varepsilon_{kk} + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{ij} \quad (5.2.1)$$

Où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé, et  $\delta_{ij}$  est le delta de Kronecker. La deuxième hypothèse implique que:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \varepsilon_{\alpha\alpha} \quad (5.2.2)$$

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta} = \bar{\lambda} \cdot \delta_{\alpha\beta} \cdot \varepsilon_{\gamma\gamma} + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (5.2.3)$$

$$\bar{\sigma}_{\alpha z} = 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{\alpha z} \quad (5.2.4)$$

Où:

$$\bar{\lambda} = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu}{\lambda + 2 \cdot \mu} \quad (5.2.5)$$

Toute fois on peut utiliser le module d'élasticité longitudinal  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  au lieu de  $\bar{\lambda}$  et  $\mu$ , tel que:

$$\bar{\lambda} = \frac{\nu \cdot E}{1 - \nu^2} \quad (5.2.6)$$

$$\mu = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (5.2.7)$$

#### 5.2.4. Equations liant déformation et déplacement

Les deux hypothèses 3 et 4 mènent aux équations suivantes:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} = -z \cdot \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \quad (5.2.8)$$

$$\epsilon_{\alpha z} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-\theta_\alpha + w'_\alpha}{z} \quad (5.2.9)$$

Il faut remarquer que la rotation de la fibre initialement normale  $\theta_\alpha$  et la pente  $w'_\alpha$  ne sont pas nécessairement égaux, c'est la déformation du cisaillement transverse qui fait la différence. C'est à ce niveau que ce trouve le contraste avec la théorie classique de Poisson-Kirchhoff concernant les plaques minces. Dans le cas de ces dernières on suppose  $\theta_\alpha = w'_\alpha$  par conséquent,  $\epsilon_{\alpha z} = 0$ .

#### 5.2.5. Principales notations de la théorie

. Déplacement transverse:  $w$

. Vecteur rotation:  $\theta_\alpha$

. Matrice de courbure:  $K_{\alpha\beta} = \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta}$



. Matrice des moments:  $m_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} \cdot z \cdot dz$

. Vecteur de déformation de cisaillement:  $\gamma_{\alpha} = -\theta_{\alpha} + \frac{\partial w}{\partial \alpha}$

. Déplacement imposé à la frontière:  $w$

. Rotation imposée à la frontière:  $\theta_{\alpha}$

. Force transversale par unité de surface:

$$F = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_x \cdot dz + \langle h_x \rangle$$

. Moment appliqué par unité de surface:

$$C_{\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_{\alpha} \cdot z \cdot dz + \langle h_{\alpha} \cdot z \rangle$$

. Moment imposé à la frontière:

$$M_{\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} h_{\alpha} \cdot z \cdot dz$$

. Force de cisaillement imposée à la frontière:

$$Q = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} h_x \cdot dz$$

A noter que:  $\langle f(x, y, z) \rangle = f(x, y, -h/2) + f(x, y, h/2)$

### 5 . 2 . 6 . Equation variationnelle

L'équation variationnelle de la théorie des plaques est déduite de la théorie des corps tridimensionnels en utilisant les relations précédentes. Les principales étapes de travail sont:

i . Les intégrales de volume apparaissant dans les équations variationnelles des tridimensionnels sont transformées en des intégrales doubles: la première de surface s'étendant sur l'aire de la plaques, la secondes unidimensionnelle sur l'axe z allant de  $(-h/2)$  à  $(h/2)$ .

Ensuite les relations cinématiques sont utilisée pour donner:

$$0 = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} \cdot \bar{\sigma}_{\alpha\beta} + z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \bar{\sigma}_{\alpha z} \right) \cdot dz \cdot dA$$

$$- \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (u_\alpha \cdot f_\alpha + u_z \cdot f_z) \cdot dz \cdot dA$$

$$- \int_A ( \langle u_\alpha \cdot h_\alpha \rangle + \langle u_z \cdot h_z \rangle ) \cdot dA$$

$$- \int_S \int_{-h/2}^{h/2} (u_\alpha \cdot h_\alpha + u_z \cdot h_z) \cdot dz \cdot ds$$

$$= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} ( - K_{\alpha\beta} \cdot \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \cdot z + \gamma_\alpha \cdot \bar{\sigma}_{\alpha z} ) \cdot dz \cdot dA$$

$$- \int_A \int_{-h/2}^{h/2} ( - \theta_\alpha \cdot f_\alpha \cdot z + w \cdot f_z ) \cdot dz \cdot dA$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_A (- \theta_\alpha \cdot \langle h_\alpha \cdot z \rangle + w \cdot \langle h_z \rangle) \cdot dA \\
 & - \int_S \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (- \theta_\alpha \cdot h_\alpha \cdot z + w \cdot h_z) \cdot dz \cdot ds
 \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Où:

$$K_{\alpha\beta} = \frac{\partial \theta_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \tag{5.2.11}$$

$$\gamma_\alpha = - \theta_\alpha + \frac{\partial w}{\partial \alpha} \tag{5.2.12}$$

ii . Les définitions des forces résultantes donnent:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_A (- K_{\alpha\beta} \cdot m_{\alpha\beta} + \gamma_\alpha \cdot q_\alpha) \cdot dA \\
 & - \int_A (- \theta_\alpha \cdot C_\alpha + w \cdot F) \cdot dA \\
 & - \int_S (- \theta_\alpha \cdot M_\alpha + w \cdot Q) \cdot ds
 \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

iii . L'intégration par parties, en tenant compte des hypothèses, donne les équations différentielles:

$$\begin{aligned}
 0 = & \int_A \theta_\alpha \cdot \underbrace{\left( \frac{\partial m_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - q_\alpha + Q_\alpha \right)}_{\text{Equilibre des moments}} \cdot dA \\
 & - \int_A w \cdot \underbrace{\left( \frac{\partial q_\alpha}{\partial \alpha} + F \right)}_{\text{Equilibre des forces transverses}} \cdot dA \\
 + & \int_S \left\{ \underbrace{\theta_\alpha \cdot (-m_{\alpha n} + M_\alpha)}_{\text{Conditions Limite des moments}} + \underbrace{w \cdot (q_n - Q)}_{\text{c.l. du cisaillement}} \right\} \cdot ds
 \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

Où:

$$m_{\alpha n} = m_{\alpha\beta} \cdot n_\beta \tag{5.2.15}$$

$$q_n = q_\alpha \cdot n_\alpha \tag{5.2.16}$$

iv . La forme explicite des équations fondamentales en termes de variables de la théorie des plaques, sont calculées comme suit:

$$\begin{aligned}
 m_{\alpha\beta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \cdot z \cdot dz, \\
 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \bar{\lambda} \cdot \delta_{\alpha\beta} \cdot E_{\gamma\gamma} + 2 \cdot \mu \cdot E_{\alpha\beta} \right) \cdot z \cdot dz \\
 &= - \frac{h^3}{12} \left( \bar{\lambda} \cdot \delta_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial \theta_\gamma}{\partial \gamma} + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \right) \\
 &= - c_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \chi_{\gamma\delta}
 \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

Où:

$$c_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{h^3}{12} \cdot \left[ \mu \cdot (\delta_{\alpha\gamma} \cdot \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \cdot \delta_{\beta\gamma}) + \bar{\lambda} \cdot \delta_{\alpha\beta} \cdot \delta_{\gamma\delta} \right] \quad (5.2.18)$$

$$\begin{aligned} q_\alpha &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha z} \cdot dz \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \cdot \mu \cdot \varepsilon_{\alpha z} \cdot dz \\ &= h \cdot \mu \cdot \left( -\theta_\alpha + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ &= c_{\alpha\beta} \cdot \gamma_\beta \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

$$c_{\alpha\beta} = h \cdot \mu \cdot \delta_{\alpha\beta} \quad (5.2.20)$$

Remarques

(1). La symétrie de la matrice de rigidité se déduit des symétries suivantes:

$$c_{\alpha\beta\gamma\delta} = c_{\gamma\delta\alpha\beta} \quad (5.2.21)$$

$$c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha} \quad (5.2.22)$$

Les symétries additionnelles

$$c_{\alpha\beta\gamma\delta} = c_{\beta\alpha\gamma\delta} = c_{\alpha\beta\delta\gamma} \quad (5.2.23)$$

sont aussi prises.

(2). Pour que les résultats finiaux soient conformes avec la théorie classique de flexion des plaques, il est nécessaire d'introduire un coefficient correcteur de cisaillement,  $\hat{k}$ , dans l'équation liant la force de cisaillement à la déformation transverse. Cela est possible en remplaçant  $c_{\alpha\beta}$  par  $(\hat{k} \cdot c_{\alpha\beta})$ . On admet ce coefficient égal à 5/6.

(3). Pour les matériaux orthotropes, on doit considérer la redéfinition des coefficients d'élasticité  $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$  et  $c_{\alpha\beta}$ .

### 5.2.7. Formulation matricielle

La formulation matricielle de l'équation variationnelle est donnée par:

$$\begin{aligned}
 0 = & \int_A ( \{k\}^T \cdot [D]^b \cdot \{k\} + \{\gamma\}^T \cdot [D]^s \cdot \{\gamma\} ) \cdot dA \\
 & + \int_A ( \{\theta\}^T \cdot \{C\} - w \cdot F ) \cdot dA \\
 & + \int_s ( \{\theta\}^T \cdot \{M\} - w \cdot Q ) \cdot ds
 \end{aligned} \tag{5.2.24}$$

Où:

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \tag{5.2.25}$$

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} \tag{5.2.26}$$

$$\{K\} = \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{yy} \\ 2 \cdot K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.2.27)$$

$$[D]^b = \begin{bmatrix} D_{11}^b & D_{1z}^b & D_{1s}^b \\ \cdot & D_{zz}^b & D_{zs}^b \\ \text{Sym.} & & D_{ss}^b \end{bmatrix} \quad (5.2.28)$$

$$D_{ij}^b = c_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (5.2.29)$$

i/j	$\alpha/\gamma$	$\beta/\delta$
1	1	1
2	2	2
3	1	2

$$[D]^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{1z}^s \\ \text{Sym.} & D_{zz}^s \end{bmatrix} \quad (5.2.30)$$

$$D_{\alpha\beta}^s = c_{\alpha\beta} \quad (2.31)$$

### 5.2.8. Matrice de rigidité et vecteur charge

La matrice de rigidité et le vecteur charge de l'élément fini peuvent directement être obtenus à partir de la formulation matricielle de l'équation variationnelle. Les approximations en élément fini de  $w$  et  $\theta_x$  sont notés par  $w^h$  et  $\theta_x^h$  respectivement. Soit un élément type à  $n_{en}$  noeuds:

$$w^h = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a \cdot w_a^h \quad (5.2.32)$$

$$\theta_x^h = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a \cdot \theta_{xa}^h \quad (5.2.33)$$

Où  $N_a$  est la fonction de forme associée au noeud  $a$ , et,  $w_a^h$  et  $\theta_{xa}^h$  sont les valeurs rapportées à ce noeud.

#### Remarque

Il n'est pas nécessaire de supposer que  $w^h$  et  $\theta_x^h$  sont définis dans les termes de la même fonction de forme. Mais dans les applications il est plus simple de garder ce cas.

#### Definitions

$$\{d^e\} = \{d_p^e\} \quad (5.2.34)$$

$$d_p^e = \begin{cases} w_a^h & p = 3 \cdot a - 2 \\ \theta_{xa}^h & p = 3 \cdot a - 1 \\ \theta_{ya}^h & p = 3 \cdot a \end{cases} \quad (5.2.35)$$

$$\{K\} = [B^e] \cdot \{d^e\} \quad (5.2.36)$$

$$\{\gamma\} = [B^e] \cdot \{d^e\} \quad (5.2.37)$$



$$[B^b] = \left[ [B_1^b], [B_2^b], \dots, [B_{nen}^b] \right] \quad (5.2.38)$$

$$[B^s] = \left[ [B_1^s], [B_2^s], \dots, [B_{nen}^s] \right] \quad (5.2.39)$$

$$[B_2^b] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial Na}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial Na}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial Na}{\partial y} & \frac{\partial Na}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.2.40)$$

$$[B_2^s] = \begin{bmatrix} \frac{\partial Na}{\partial x} & -Na & 0 \\ \frac{\partial Na}{\partial y} & 0 & -Na \end{bmatrix} \quad (5.2.41)$$

Grâce à ces définitions on peut obtenir la matrice de rigidité et le vecteur force d'un élément, en utilisant les expressions suivantes:

$$[k^e] = [k_b^e] + [k_s^e] \quad (5.2.42)$$

La rigidité de flexion:

$$[k_b^e] = \int_{A^e} [B^b]^T \cdot [D^b] \cdot [B^b] \cdot dA \quad (5.2.43)$$

Rigidité de cisaillement:

$$[k_s^e] = \int_{A^e} [B^s]^T \cdot [D^s] \cdot [B^s] \cdot dA \quad (5.2.44)$$

$$\{f^e\} = \{f_p^e\} \quad (5.2.45)$$

$$f_p^e = \begin{cases} \int_{A^e} N_a \cdot F \cdot dA + \int_{S^e/\Omega} N_a \cdot Q \cdot ds & ; p = 3 \cdot a - 2 \\ - \int_{A^e} N_a \cdot C_x \cdot dA - \int_{S^e/\Omega} N_a \cdot M_x \cdot ds & ; p = 3 \cdot a - 1 \\ - \int_{A^e} N_a \cdot C_y \cdot dA - \int_{S^e/\Omega} N_a \cdot M_y \cdot ds & ; p = 3 \cdot a \end{cases} \quad (5.2.46)$$

$$f_p^e \leftarrow f_p^e = \sum_{q=1}^{nec} k_{pq} \cdot q_a \quad (5.2.47)$$

$$nec = 3 \cdot nen$$

Où:

$$q_a = \begin{cases} W(x_a, y_a) & ; p = 3 \cdot a - 2 \\ \Theta_x(x_a, y_a) & ; p = 3 \cdot a - 1 \\ \Theta_y(x_a, y_a) & ; p = 3 \cdot a \end{cases} \quad (5.2.48)$$

Les contraintes d'un élément peuvent être obtenues à partir des relations suivantes:

- Moments de flexion:

$$\begin{Bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = - [D^e] \cdot [B^e] \cdot \{d^e\} \quad (5.2.49)$$

- Forces de cisaillement:

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = [D^S] \cdot [B^S] \cdot \{d^e\} \quad (5.2.50)$$

### 5.2.9. Quelques critères de convergence

Il est important de réaliser que les critères de convergence pour un élément dérivant de la présente théorie sont très différents de ceux concernant les plaques minces. Les conditions nécessaires dans le cas présent sont:

<1>. Les trois modes de corps rigide doivent être exactement représentables.

<2>. Les cinq constantes d'état de contraintes suivantes doivent être exactement représentables:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ (1/2) \cdot \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{array} \right\} \text{ courbure}$$

$$\left. \begin{array}{l} -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} \text{ contrainte de cisaillement transverse}$$

Ces conditions sont satisfaites pour les éléments que nous utiliserons.

5 . 2 . 10 . Contrainte de cisaillement et verrouillage

Une considération importante dans le développement des éléments plaque en flexion, suivant cette théorie, est le nombre de contraintes de cisaillement engendrées dans les plaques minces (l'épaisseur  $t$  tend vers 0).

Considérons l'élément rectangulaire initialement objet de notre étude, On suppose les cotés parallèles aux axes de coordonnées. Les fonctions déplacement seront:

$$w^n = \beta_0 + \beta_1 \cdot x + \beta_2 \cdot y + \beta_3 \cdot xy \quad (5.2.51)$$

$$\theta_a^n = \gamma_{\alpha 0} + \gamma_{\alpha 1} \cdot x + \gamma_{\alpha 2} \cdot y + \gamma_{\alpha 3} \cdot xy \quad (5.2.52)$$

Où  $\beta_i$  et  $\gamma_{\alpha i}$ , ( $0 < i < 3$ ), sont les constantes dont dépendent les paramètres nodaux  $w_a^n$  et  $\theta_a^n$ , ( $1 < a < 4$ ) respectivement. Les conditions

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_x \\ &= -\theta_x^n + \frac{\partial w^n}{\partial x} \\ &= (-\gamma_{x0} + \beta_1) - \gamma_{x1} \cdot x + (-\gamma_{x2} + \beta_3) \cdot y - \gamma_{x3} \cdot x \cdot y \end{aligned} \quad (5.2.53)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_y \\ &= -\theta_y^n + \frac{\partial w^n}{\partial y} \\ &= (-\gamma_{y0} + \beta_2) - \gamma_{y2} \cdot y + (-\gamma_{y1} + \beta_3) \cdot x - \gamma_{y3} \cdot x \cdot y \end{aligned} \quad (5.2.54)$$

impose huit liaisons par élément ce qui est apparemment trop lorsque l'épaisseur  $t$  tend vers 0 si une intégration exacte de la matrice de rigidité de cisaillement est opérée. (L'intégration de Gauss 2x2 est exacte dans ce cas).

Pour les rectangles à grands maillages, il y a approximativement trois degrés de liberté par élément, et ainsi l'élément tend à être en liaison surabondante. En pratique, des résultats numériques sans valeur sont obtenus.

Pour éviter l'effet du verrouillage numérique, on peut considérer l'utilisation d'une intégration à un seul point de Gauss pour la matrice de rigidité de cisaillement. En clair, cela amène à seulement deux liaisons par élément, et maintenant il y a plus de degrés de liberté qu'il n'y a de liaisons.

Cet élément, avec une intégration à un point de Gauss pour le cisaillement et 2x2 points d'intégrations pour la flexion, fut proposé et montré par Hughes [8].

### 5 . 2 . 11 . Conditions aux limites

Il est important de savoir que les conditions aux limites pour la présente théorie ne sont pas toujours identiques à celles pour la théorie classique des plaques minces.

Les différences résident spécialement dans le cas "simplement supporté". Nous avons deux façons de considérer ce cas, cela dépend des liaisons physiques. Au lieu d'être une complication supplémentaire, cette liberté d'action est bénéfique.

Considérons une portion de plaque à la frontière de courbure quelconque, et un système local de coordonnées  $(s, n)$  tel que:  $s$  est dirigé suivant la tangente à la frontière, et  $n$  lui est normal (Fig.5.2.2). Les conditions aux limites les plus communes dans la pratique sont données comme suit:

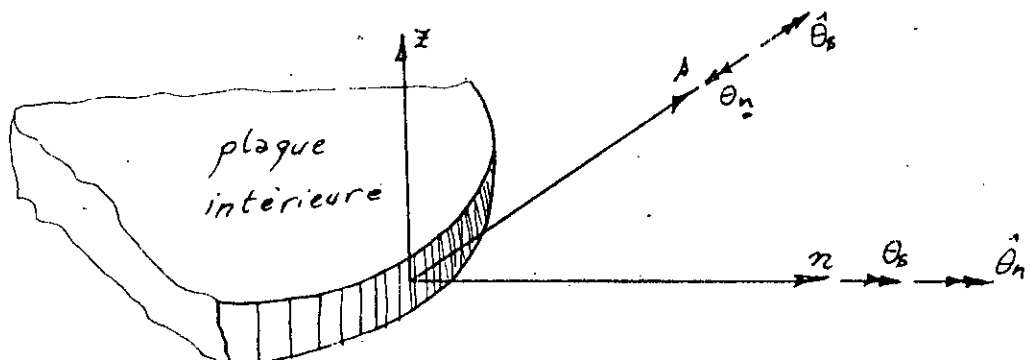


Fig.5.2.2 - Système de coordonnées local

Encastrement:

$$\begin{cases} w = 0 \\ \theta_s = 0 \\ \theta_n = 0 \end{cases}$$

Libre:

$$\begin{cases} Q = 0 \\ M_s = 0 \\ M_n = 0 \end{cases}$$

Simplement supporté:

SS<sub>1</sub>:

$$\begin{cases} w = 0 \\ M_s = 0 \\ M_n = 0 \end{cases}$$

SS<sub>2</sub>:

$$\begin{cases} w = 0 \\ \theta_s = 0 \\ M_n = 0 \end{cases}$$

Symétrie:

$$\begin{cases} Q = 0 \\ M_s = 0 \\ \theta_n = 0 \end{cases}$$

Dans la théorie des plaques minces, SS<sub>2</sub> est la condition limite appropriée dans le cas simplement appuyé puisque le long de la frontière nécessite que:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = 0$$

et l'absence de contrainte de cisaillement exige que:

$$\theta_s = \frac{\partial w}{\partial s}$$

### 5.2.12. Intégration réduite et sélective

Pour éviter le verrouillage de cisaillement des plaques minces, certaines forme d'intégration réduite sont suggérées. possibilités les plus évidentes sont l'intégration réduite uniforme et l'intégration réduite sélective.

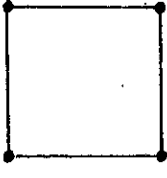
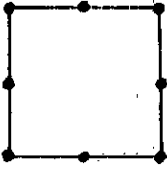
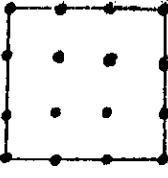
Dans l'intégration réduite uniforme, les termes de flexion et de cisaillement sont tous deux intégrés suivant la même règle, qui est d'ordre inférieur à la normale.

Apparemment, le premier exemple d'intégration réduite uniforme pour un élément plaque fut l'élément à huit noeuds de Zienkiewics et al., pour lequel une quadrature de Gauss 2x2 fut utilisée.

Malgré que cet élément ait trouvé de larges applications, il montre maintenant un mauvais comportement pour les plaques très minces. Néanmoins, l'intégration réduite représente une considérable amélioration par rapport à l'intégration normale.

Dans l'intégration réduite sélective, le terme de flexion est intégré suivant la règle normale, alors que le terme de cisaillement est intégré avec la règle d'ordre inférieur.

Les règles d'intégration pour l'élément plaque de Lagrange en flexion sont indiquées dans le tableau (Tab.5.2.1). Ces éléments ont été établie par Hughes, Pugh, al. et d'autres.

			
Forme des fonctions $w, \dots$	Bilinéaire	Biquadratique	Bicubique
Intégration réduite uniforme	1 x 1 $U_1$	2 x 2 $U_2$	3 x 3 $U_3$
Intégration réduite sélective	1 x 1 cisail. 2 x 2 flex. $S_1$	2 x 2 cisail. 3 x 3 flex. $S_2$	3 x 3 cisail 4 x 4 flex. $S_3$

Tab.5.2.1 - Eléments plaques de Lagrange à 3 degrés de liberté par noeuds

L'exemple de la plaque carrée présenté, montre la précision atteinte par l'intégration réduite de l'élément de Lagrange. Les moments de flexion sont rapportés aux points optimaux. (c'est-à-dire les points de Gauss de la règle d'intégration du cisaillement). Un coefficient de Poisson de 0.3 et un module de Young de  $10.92 \times 10^5$  ont été utilisés pour cet exemple.

Généralement, les maillages sont construits de façon qu'il y ait quatre éléments  $U_1$ , ou  $S_1$ , pour chaque élément  $U_2$ , ou  $S_2$  dans le même nombre d'équations.

La plaque analysée peut être considérée comme mince, de façon à pouvoir faire une comparaison avec la théorie

Les études de convergence furent menées pour plaques minces encastées et simplement supportées soumises à des charges concentrées et uniformément réparties. Les types de maillages sont représentés (Fig.5.2.3) et les résultats (Fig.5.2.4). Les dimensions employées sont:  $L = 10$  et  $h = 0,1$ .

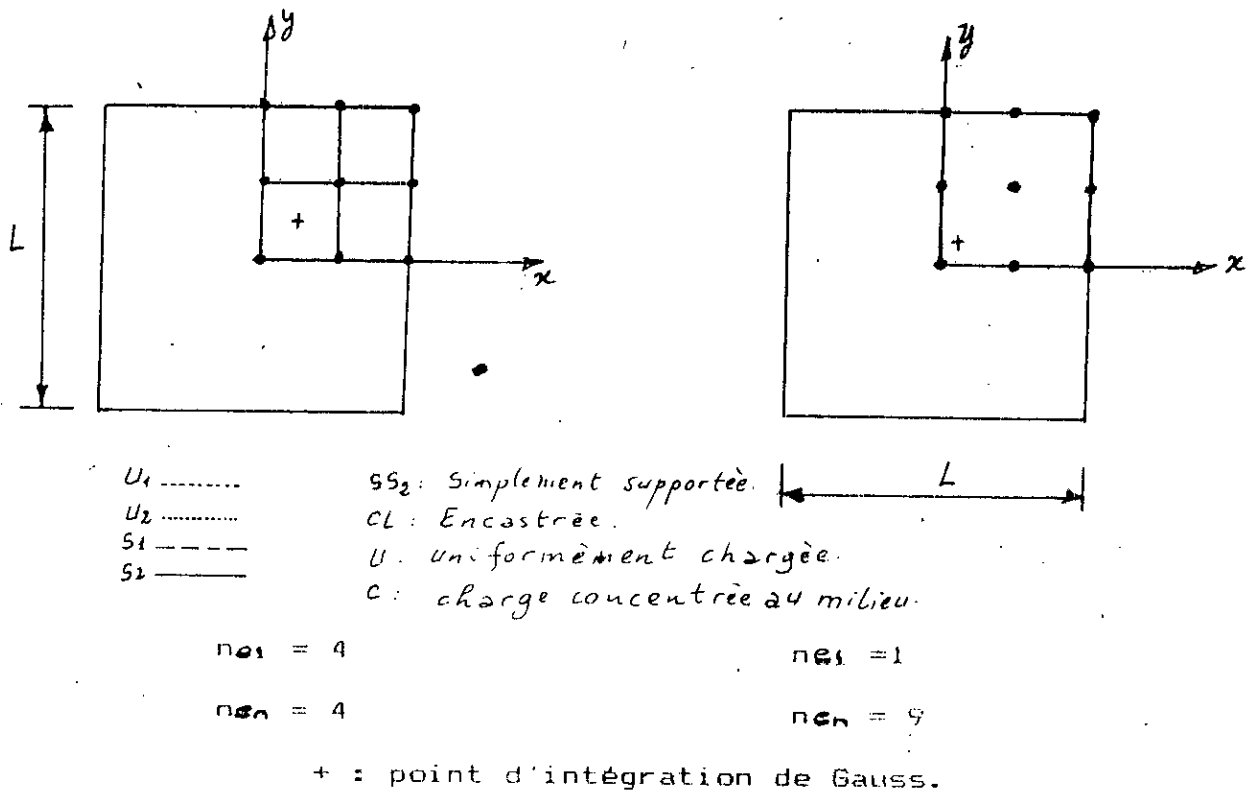


Fig.5.2.3 - Plaque carrée (on ne considère que le quart)

Dans ce problème, les conditions aux limites  $SS_2$  pour le cas simplement supporté produisent une bonne convergence vers la solution en quelques équations.



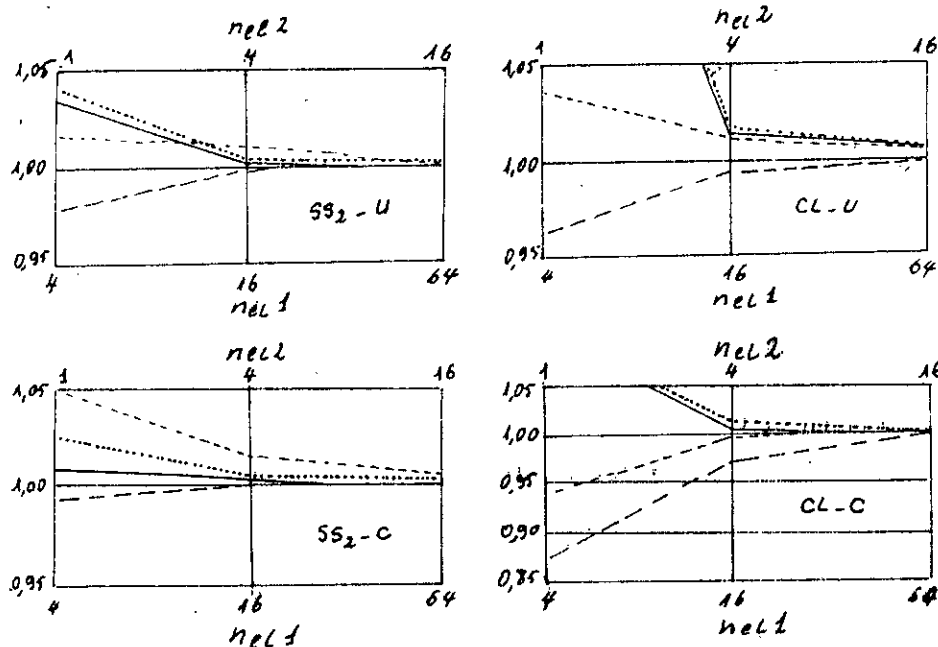


Fig.5.2.4 - Convergence des différentes formulations  
 (Comparaison du déplacement du centre de la plaque par rapport à la théorie de Kirchhoff)  
 5.2.13. Les modes parasites

Bien que l'intégration réduite des éléments de Lagrange évite le problème du verrouillage de cisaillement, elle a un côté nuisible: le défaut de rang (c'est-à-dire qu'il y a des modes d'énergie nulle en plus des trois modes de corps rigide) (Tab.5.2.2).

Elément	U1	U2	U3	S1	S2	S3
Nombre de modes d'énergie nulle	4	4	4	2	1	1

Tab.5.2.2 - Les modes d'énergie nulle en excès pour l'intégration réduite des éléments plaques de Lagrange

Cela peut résulter, dans certains cas, d'erreurs oscillatoires et, occasionnellement, d'une matrice de rigidité globale singulière.

Il est clair que le nombre de modes en excès est inférieur pour l'intégration sélective à celui de l'intégration uniforme, c'est un avantage de la première.

En général les conditions limites rendent la matrice de rigidité assemblée définitivement positive, ainsi les modes d'énergie nulle ne sont pas globalement présents.

Une méthode employée avec succès pour les éléments à intégration sélective est: Si les conditions limites empêchent le mode de corps rigide de se former pour un élément, il est aussi empêché pour tout le maillage.

### 5 . 3 . Etude quantitative

#### 5 . 3 . 1 . Organisation des programmes

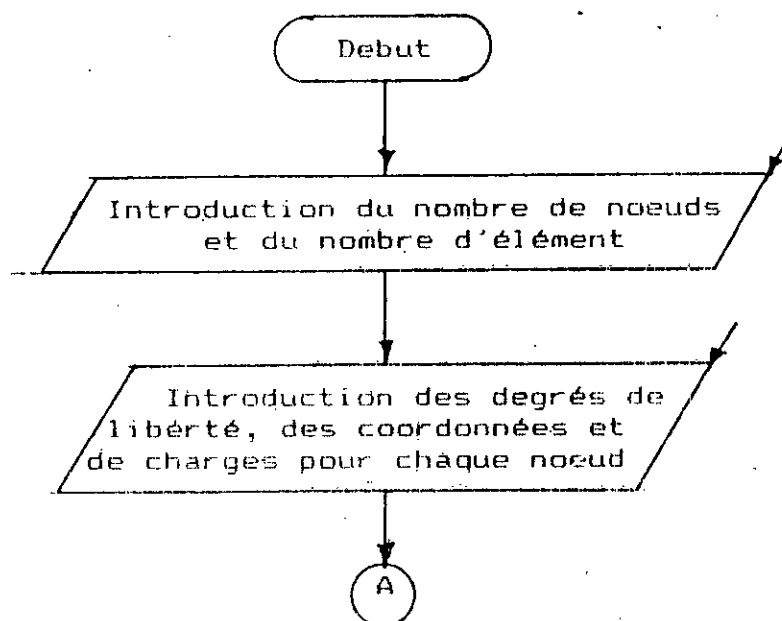
Lorsqu'on dispose de la matrice de rigidité et de matrice masse d'un élément, il est possible d'établir des programmes informatiques pour les calculs statique et dynamique, exactement comme nous avons procédé pour l'élément poutre.

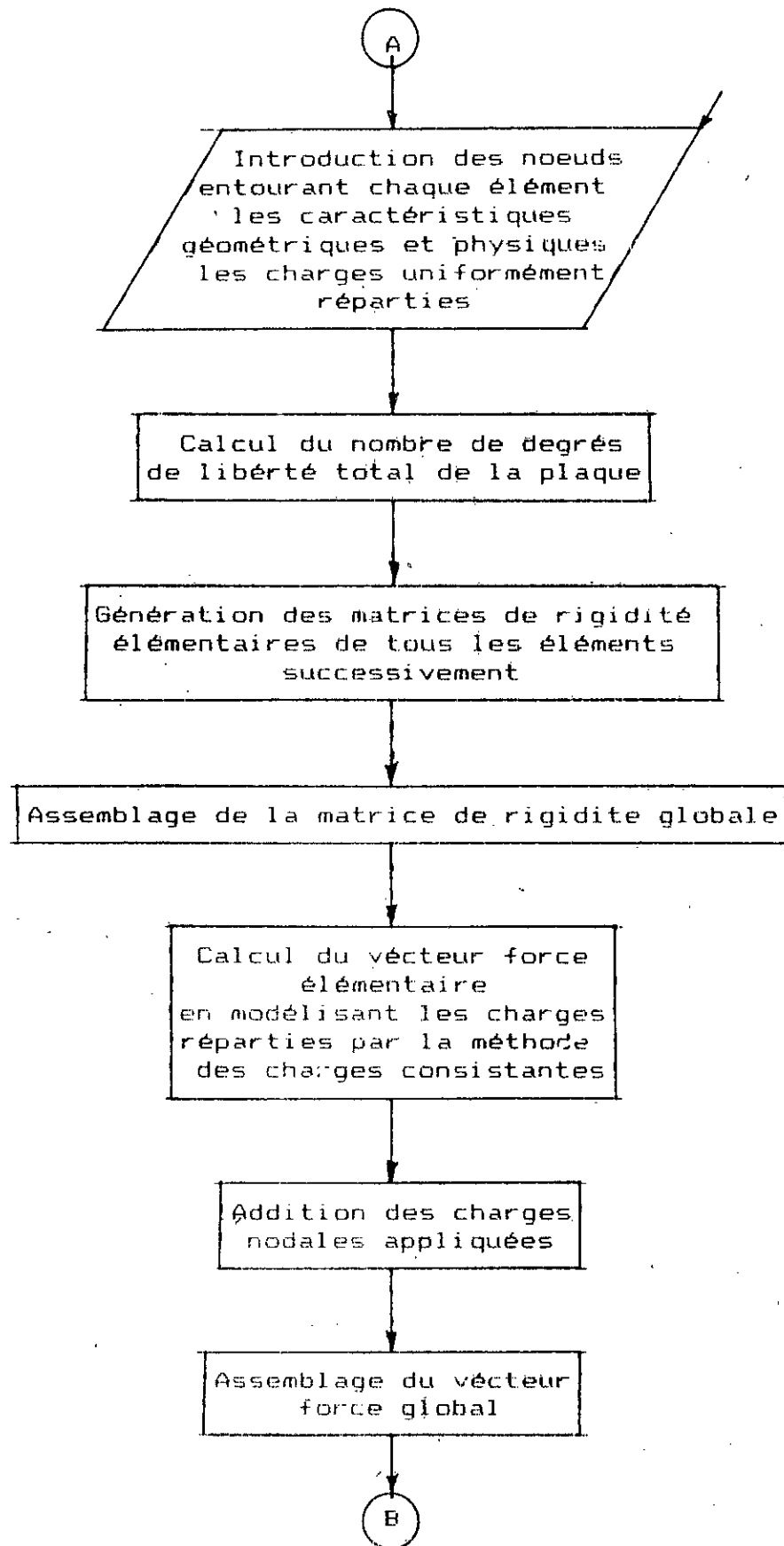
Les programmes que nous avons établit pour l'élément plaque concernent la théorie de Kirchhoff, les deux matrices élémentaires étant disponibles explicitement. [7]

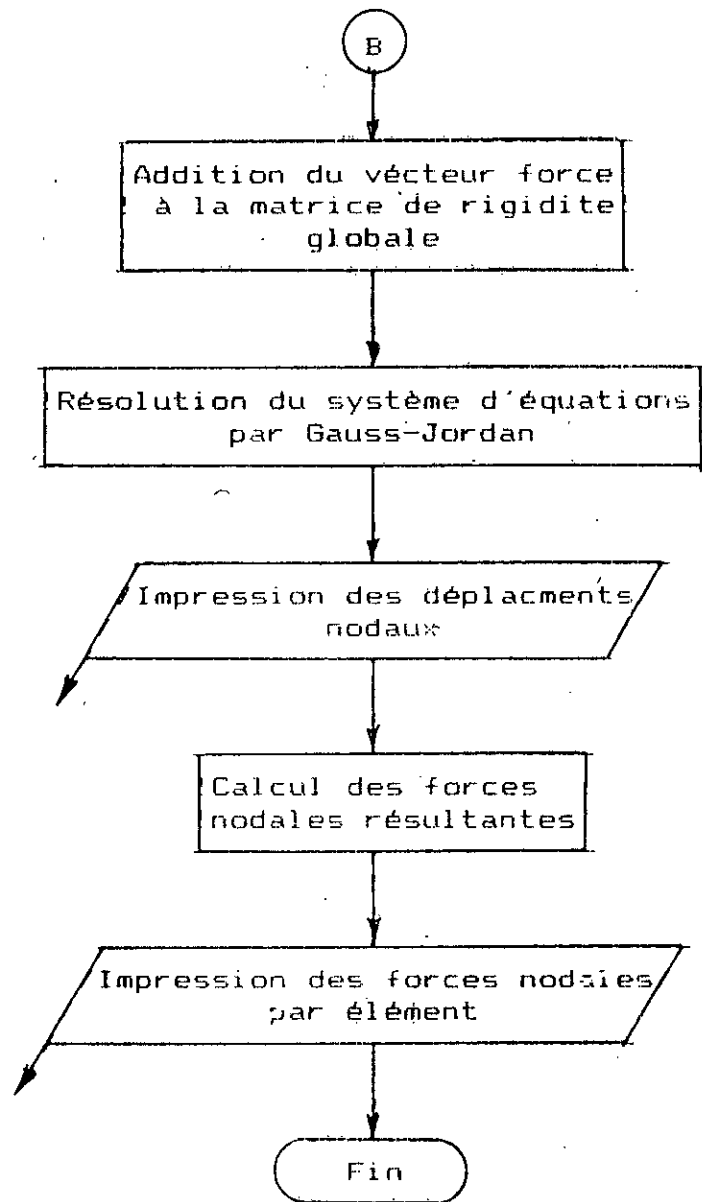
Alors que, pour l'élément plaque formulé suivant la théorie de Mindlin, il est nécessaire d'établir un sous-programme qui génère la matrice de rigidité par l'intégration de la formule montrée (5.2.8), en utilisant un intégration réduite sélective de Gauss, comme recommandé en (5.2.12).

La matrice masse pour ce cas est calculable manuellement, en suivant normalement la méthode générale de calcul des matrices masses.

Nous présentons ci-après l'organigramme du cas statique en premier:







Les structures du programme (PLAQSTAT) du cas statique sont identiques à ceux du programme des poutres sauf que la génération de la matrice de rigidité élémentaire se trouve sous la forme d'un sous-programme (RIGIDITE) qui peut être remplacé par importe quel autre sous-programme qui génère la matrice de rigidité élémentaire d'une plaque à 16 degrés de liberté par élément au maximum. Par exemple, l'élément de Hughes à 12 d.d.l.

D'autre part, il faut noter que l'utilisateur de ce programme doit disposer les données numériques, dans le fichier d'entrée, dans l'ordre suivant:

- 1) Le nombre totale de noeuds de la plaque.
- 2) Le nombre d'éléments.

- 3) Pour chaque noeud:
  - a) Son numéro.
  - b) Les quatres degrés de liberté (déplacement transverse, rotation autour de x, autour de y et gauchissement): <1> = libre; <0> = lié.
  - c) les deux coordonnées x et y.
  - d) Les quatres forces (concentrée verticale, moment autour de x, autour de y, gauchissement).
  
- 4) Pour chaque élément:
  - a) Son numéro.
  - b) Les quatres noeuds qui le délimitent.
  - c) Son épaisseur.
  - d) Son module d'élasticité.
  - e) Son coefficient de Poisson.
  - f) La charge uniformément répartie sur la surface qui lui est appliquée.

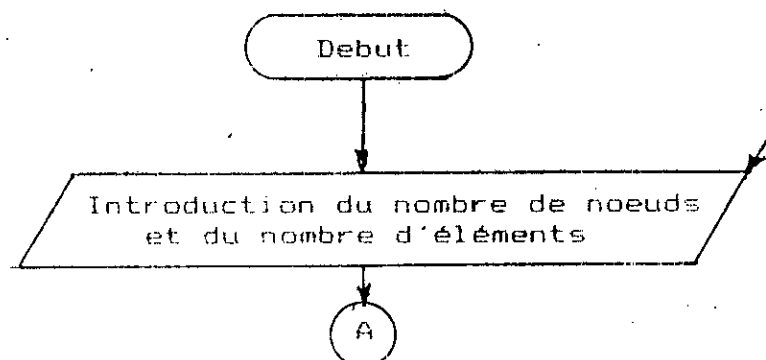
On remarque que le fait de pouvoir introduire les caractéristiques géométriques et physiques pour chaque élément séparément, permet d'étudier des plaques non homogènes, du point de vu de l'épaisseur, et du point de vu des matériaux la constituant.

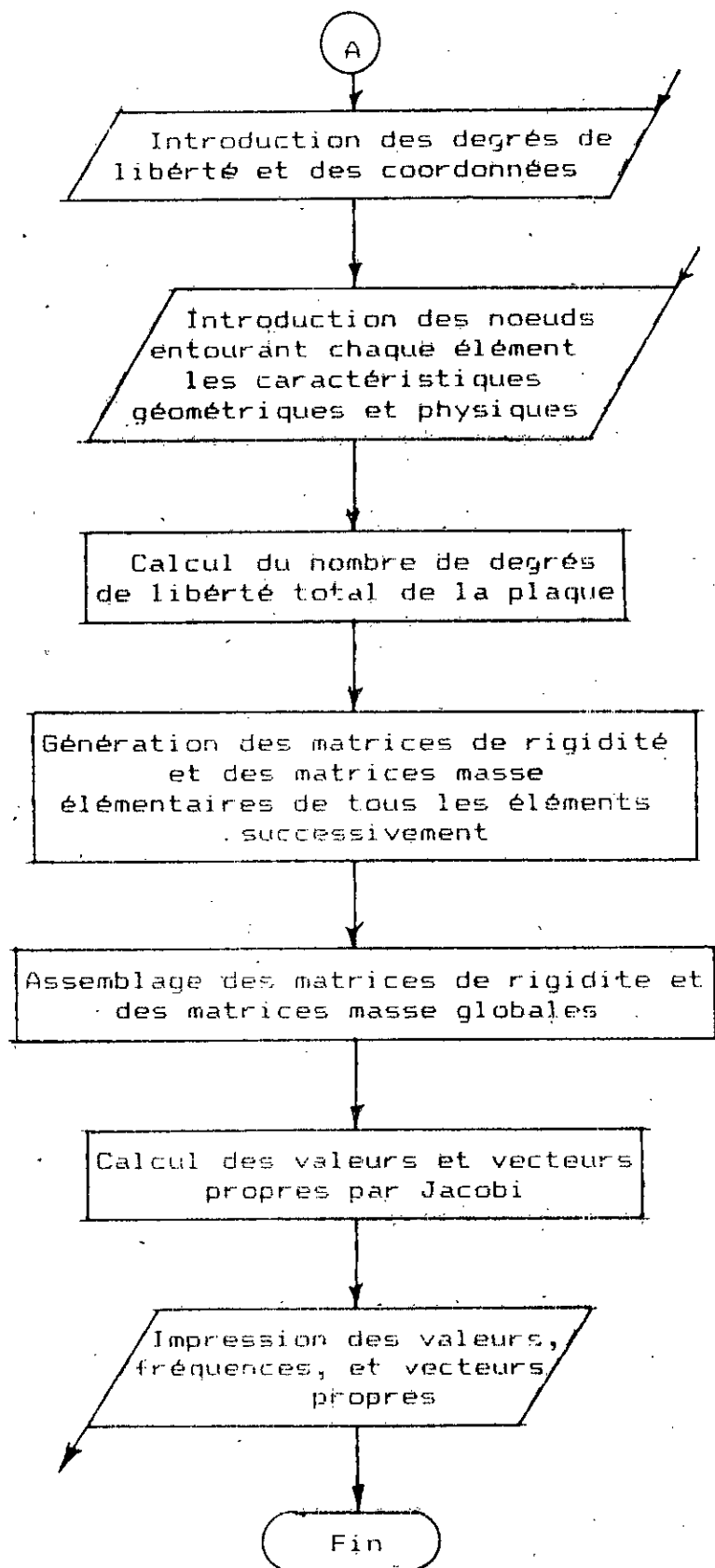
Cette possibilité peut être introduite au programmes des poutres moyen quelques simples modifications.

Les forces nodales de chaque élément, que calcul le présent programme, sont les contributions de chaque élément à la charge supportée par les noeuds.

Ainsi si on veut savoir la charge totale supportée par un noeud il faudrait additionner les contributions de tout éléments (un, deux ou quatres éléments) entourant ce noeud.

Nous présentons ci-après l'organigramme du cas dynamique:





Les structures du programme du cas dynamique sont très proches de celles du cas statique, sauf que le programme principal s'appelle (FLAODYN.FOR).

L'introduction des données se fait de la même manière, par l'intermédiaire d'un fichier d'entrée dans lequel on mettra toute les caractéristiques géométriques et physiques de la plaque, sauf que le point (3.d) sera éliminé et que le point (4.f) sera remplacé par la masse volumique du matériau de la plaque.

### 5 . 3 . 2 . Exemples

Pour chacun des exemples suivants on présentera les résultats du cas statique suivit de ceux du cas dynamique.

Par économie de place, on ne présente pas à chaque exemple les caractéristiques physiques de la plaque, puisque c'est toujours les mêmes, ainsi que le tableau des charges, puisque celles-ci sont considérées nulles dans ce cas.

#### Exemple 1

On considère une plaque carré, homogène, encadrée des quatre cotés, soumise à une charge uniformément répartie sur la surface. (fig.5.3.1)

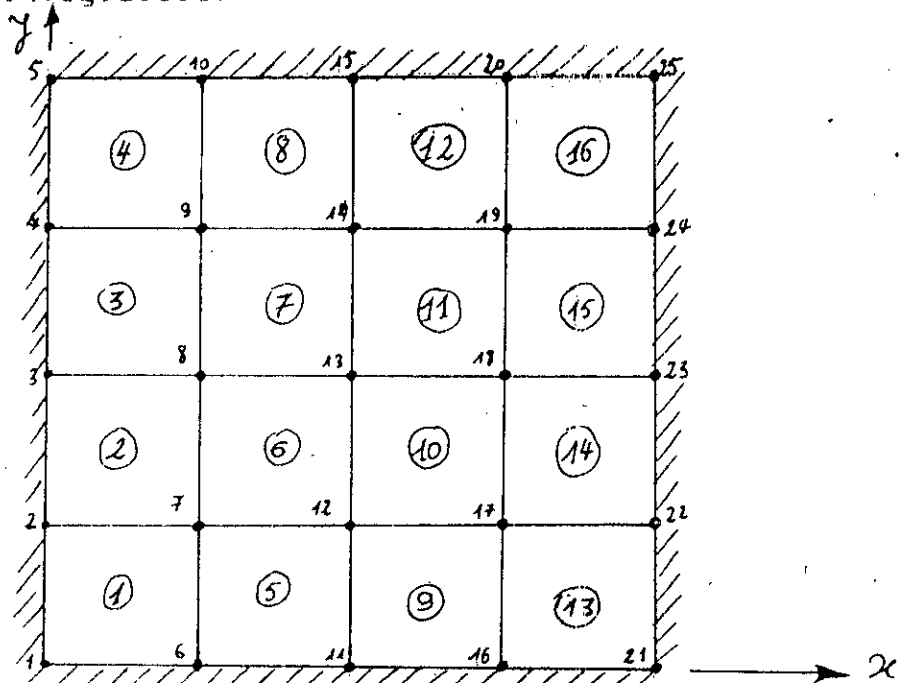


Fig.5.3.1 - Plaque carré encadrée des quatre cotés

\*\*\*\*\*  
 \* PROGRAMME D'ETUDE DE LA FLEXION D'UNE PLAQUE \*  
 \* A ELEMENTS RECTANGULAIRES: 4 NOEUDS, 16 DEGRES DE LIBERTE \*  
 \* DANS LE CAS STATIQUE \*  
 \*\*\*\*\*

\*\*\* DONNEES DE LA PLAQUE \*\*\*

NOMBRE TOTAL DE NOEUDS= 25

NOMBRE D'ELEMENTS= 16

NOEUD	CONDITIONS LIMITEES				COORDONNEES	
	1	2	3	4	X	Y
1	0	0	0	0	0.0000E+00	0.0000E+00
2	0	0	0	0	0.0000E+00	0.5000E+00
3	0	0	0	0	0.0000E+00	0.1000E+01
4	0	0	0	0	0.0000E+00	0.1500E+01
5	0	0	0	0	0.0000E+00	0.2000E+01
6	0	0	0	0	0.5000E+00	0.0000E+00
7	1	1	1	1	0.5000E+00	0.5000E+00
8	1	1	1	1	0.5000E+00	0.1000E+01
9	1	1	1	1	0.5000E+00	0.1500E+01
10	0	0	0	0	0.5000E+00	0.2000E+01
11	0	0	0	0	0.1000E+01	0.0000E+00
12	1	1	1	1	0.1000E+01	0.5000E+00
13	1	1	1	1	0.1000E+01	0.1000E+01
14	1	1	1	1	0.1000E+01	0.1500E+01
15	0	0	0	0	0.1000E+01	0.2000E+01
16	0	0	0	0	0.1000E+01	0.0000E+00
17	1	1	1	1	0.1500E+01	0.0000E+00
18	1	1	1	1	0.1500E+01	0.5000E+00
19	1	1	1	1	0.1500E+01	0.1000E+01
20	0	0	0	0	0.1500E+01	0.1500E+01
21	0	0	0	0	0.1500E+01	0.2000E+01
22	0	0	0	0	0.2000E+01	0.0000E+00
23	0	0	0	0	0.2000E+01	0.5000E+00
24	0	0	0	0	0.2000E+01	0.1000E+01
25	0	0	0	0	0.2000E+01	0.1500E+01
					0.2000E+01	0.2000E+01

ELEMENT No.	NOEUDS				EPAISSEUR	MODULE DE YOUNG	COEFFICIENT DE POISSON	CHARGE REPARTIE
	1	2	3	4				
1	1	6	7	2	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	-0.4000E+02
2	2	7	8	3	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	-0.4000E+02
3	3	8	9	4	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	-0.4000E+02
4	4	9	10	5	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	-0.4000E+02
5	6	11	12	7	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	-0.4000E+02
6	7	12	13	8	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	-0.4000E+02
7	8	13	14	9	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	-0.4000E+02
8	9	14	15	10	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	-0.4000E+02
9	11	16	17	12	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	-0.4000E+02
10	12	17	18	13	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	-0.4000E+02
11	13	18	19	14	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	-0.4000E+02
12	14	19	20	15	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	-0.4000E+02
13	16	21	22	17	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	-0.4000E+02
14	17	22	23	18	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	-0.4000E+02
15	18	23	24	19	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	-0.4000E+02
16	19	24	25	20	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	-0.4000E+02

NOMBRE TOTAL DE DEGRES DE LIBERTE = 36



\*\*\*\*\*

\*\*\* RESULTATS DES CALCULS \*\*\*

DEPLACEMENTS NODAUX:

	VERT	X-ROT	Y-ROT	TWIST
1	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
3	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
4	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
5	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
6	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
7	-0.151197E-04	-0.361818E-04	-0.361818E-04	-0.131267E-03
8	-0.248160E-04	-0.599821E-04	-0.900936E-06	-0.516626E-04
9	-0.150441E-04	-0.349959E-04	0.349959E-04	0.432194E-04
10	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
11	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
12	-0.248160E-04	-0.900936E-06	-0.599821E-04	-0.516626E-04
13	-0.413357E-04	-0.806965E-22	0.522327E-21	-0.633152E-04
14	-0.248160E-04	0.900936E-06	0.599821E-04	-0.516626E-04
15	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
16	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
17	-0.150441E-04	0.349959E-04	-0.349959E-04	0.432194E-04
18	-0.248160E-04	0.599821E-04	0.900936E-06	-0.516626E-04
19	-0.151197E-04	0.361818E-04	0.361818E-04	-0.131267E-03
20	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
21	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
22	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
23	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
24	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
25	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00

FORCES RESULTANTES APPLIQUEES AUX NOEUDS

##### ELEMENT..... 1

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
1	-0.140982E+01	0.129128E+00	0.129128E+00	0.419333E-01
6	0.376823E+01	-0.117258E+00	0.769023E+00	-0.370574E-01
7	-0.612541E+01	0.398873E+00	0.398873E+00	-0.471165E-01
2	0.376823E+01	0.769023E+00	-0.117258E+00	-0.370574E-01

##### ELEMENT..... 2

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
2	0.260553E+01	0.132461E+01	0.619676E+00	0.143216E+00
7	-0.173980E+01	0.446747E+00	-0.432249E+00	0.322036E-01
8	-0.669713E+01	0.728478E+00	0.850947E+00	-0.788727E-01
3	0.582944E+01	0.171909E+01	-0.604359E+00	-0.139415E+00

##### ELEMENT..... 3

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
3	0.611058E+01	0.177278E+01	0.733596E+00	0.158832E+00
8	-0.533947E+01	0.473372E+00	-0.563775E+00	0.373717E-01
9	-0.307565E+01	0.693926E+00	0.707929E+00	-0.691430E-01
4	0.230252E+01	0.126791E+01	-0.492221E+00	-0.124697E+00

##### ELEMENT..... 4

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
4	0.355082E+01	-0.739856E+00	0.152689E+00	0.448068E-01
9	-0.516814E+01	0.174132E+00	-0.174132E+00	0.555924E-02
10	0.355082E+01	-0.152689E+00	-0.739856E+00	0.448068E-01
5	-0.193235E+01	0.484431E-01	-0.484431E-01	-0.326586E-01

##### ELEMENT..... 5

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
6	0.260553E+01	0.619676E+00	0.132461E+01	0.143216E+00
11	0.582944E+01	-0.604359E+00	0.171909E+01	-0.139415E+00
12	-0.669713E+01	0.850947E+00	0.728478E+00	-0.788727E-01
7	-0.173980E+01	-0.432249E+00	0.446747E+00	0.322036E-01

##### ELEMENT..... 6

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
7	-0.400723E+00	-0.413929E+00	-0.413929E+00	-0.867416E-01
12	0.189172E+01	0.452409E+00	-0.469971E+00	0.944495E-01
13	-0.340201E+01	0.118249E+01	0.118249E+01	-0.166895E+00
8	0.189172E+01	-0.469971E+00	0.452409E+00	0.944495E-01

##### ELEMENT..... 7

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
8	0.135922E+00	-0.732875E+00	-0.739554E+00	-0.122390E+00
13	-0.160493E+01	0.884354E+00	-0.884354E+00	0.132175E+00
14	0.135922E+00	0.739554E+00	0.732875E+00	-0.122390E+00
9	0.131375E+01	-0.160717E+00	0.160717E+00	0.632924E-01

##### ELEMENT..... 8

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
9	-0.307565E+01	-0.707929E+00	-0.693926E+00	-0.691430E-01
14	-0.533947E+01	0.563775E+00	-0.473372E+00	0.373717E-01
15	0.611058E+01	-0.733596E+00	-0.177278E+01	0.158832E+00
10	0.230252E+01	0.492221E+00	-0.126791E+01	-0.124697E+00

##### ELEMENT..... 9

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
11	0.611058E+01	0.733596E+00	0.177278E+01	0.158832E+00
16	0.230252E+01	-0.492221E+00	0.126791E+01	-0.124697E+00
17	-0.307565E+01	0.707929E+00	0.693926E+00	-0.691430E-01
12	-0.533947E+01	-0.563775E+00	0.473372E+00	0.373717E-01

##### ELEMENT..... 10

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
12	0.135922E+00	-0.739554E+00	+0.732875E+00	-0.122390E+00
17	0.131375E+01	0.160717E+00	-0.160717E+00	0.632924E-01
18	0.135922E+00	0.732875E+00	0.739554E+00	-0.122390E+00
13	-0.160493E+01	-0.884354E+00	0.884354E+00	0.132175E+00

##### ELEMENT..... 11

NOEUD	FORCES			TWIST
	VERT	X-MOM	Y-MOM	
13	-0.340201E+01	-0.118249E+01	-0.118249E+01	-0.166895E+00
18	0.189172E+01	0.469971E+00	-0.452409E+00	0.944495E-01
19	-0.400723E+00	0.413929E+00	0.413929E+00	-0.867416E-01
14	0.189172E+01	-0.452409E+00	0.469971E+00	0.944495E-01

##### ELEMENT..... 12

NOEUD	FORCES			TWIST
	VERT	X-MOM	Y-MOM	
14	-0.669713E+01	-0.850947E+00	-0.728470E+00	-0.788727E-01
19	-0.173980E+01	0.432249E+00	-0.446747E+00	0.322036E-01
20	0.260553E+01	-0.619676E+00	-0.132461E+01	0.143216E+00
15	0.582944E+01	0.604359E+00	-0.171909E+01	-0.139415E+00

##### ELEMENT..... 13

NOEUD	FORCES			TWIST
	VERT	X-MOM	Y-MOM	
16	0.355082E+01	0.152689E+00	0.739856E+00	0.448068E-01
21	-0.193235E+01	-0.484431E-01	0.484431E-01	-0.326586E-01
22	0.355082E+01	-0.739856E+00	-0.152689E+00	0.448068E-01
17	-0.516814E+01	-0.174132E+00	0.174132E+00	0.555924E-02

##### ELEMENT..... 14

NOEUD	FORCES			TWIST
	VERT	X-MOM	Y-MOM	
17	-0.307565E+01	-0.693926E+00	-0.707929E+00	-0.691480E-01
22	0.230252E+01	-0.126791E+01	0.492221E+00	-0.124697E+00
23	0.611058E+01	-0.177278E+01	-0.733596E+00	0.158832E+00
18	-0.533947E+01	-0.473372E+00	0.563775E+00	0.373717E-01

##### ELEMENT..... 15

NOEUD	FORCES			TWIST
	VERT	X-MOM	Y-MOM	
18	-0.669713E+01	-0.728478E+00	-0.850947E+00	-0.788727E-01
23	0.582944E+01	-0.171909E+01	0.604359E+00	-0.139415E+00
24	0.260553E+01	-0.132461E+01	-0.619676E+00	0.143216E+00
19	-0.173980E+01	-0.446747E+00	0.432249E+00	0.322036E-01

##### ELEMENT..... 16

NOEUD	FORCES			TWIST
	VERT	X-MOM	Y-MOM	
19	-0.612541E+01	-0.398873E+00	-0.398873E+00	-0.471165E-01
24	0.376823E+01	-0.769023E+00	0.117258E+00	-0.370574E-01
25	-0.140982E+01	-0.129128E+00	-0.129128E+00	0.419333E-01
20	0.376823E+01	0.117258E+00	-0.769023E+00	-0.370574E-01

\*\*\*\*\*  
 \* PROGRAMME D'ETUDE DE LA FLEXION DE L'ELEMENT \*  
 \* PLAQUE RECTANGULAIRE A 4 NOEUDS ET 16 DEGRES DE LIBERTE \*  
 \* DANS LE CAS DYNAMIQUE \*  
 \*\*\*\*\*

\*\*\* DONNEES DE LA PLAQUE \*\*\*

NOMBRE TOTAL DE NOEUDS= 25

NOMBRE D'ELEMENTS= 16

NOEUD	CONDITIONS LIMITEES				COORDONNEES	
	1	2	3	4	X	Y
1	0	0	0	0	0.0000E+00	0.0000E+00
2	0	0	0	0	0.0000E+00	0.5000E+00
3	0	0	0	0	0.0000E+00	0.1000E+01
4	0	0	0	0	0.0000E+00	0.1500E+01
5	0	0	0	0	0.0000E+00	0.2000E+01
6	0	0	0	0	0.5000E+00	0.0000E+00
7	1	1	1	1	0.5000E+00	0.5000E+00
8	1	1	1	1	0.5000E+00	0.1000E+01
9	1	1	1	1	0.5000E+00	0.1500E+01
10	0	0	0	0	0.5000E+00	0.2000E+01
11	0	0	0	0	0.1000E+01	0.0000E+00
12	1	1	1	1	0.1000E+01	0.5000E+00
13	1	1	1	1	0.1000E+01	0.1000E+01
14	1	1	1	1	0.1000E+01	0.1500E+01
15	0	0	0	0	0.1000E+01	0.2000E+01
16	0	0	0	0	0.1500E+01	0.0000E+00
17	1	1	1	1	0.1500E+01	0.5000E+00
18	1	1	1	1	0.1500E+01	0.1000E+01
19	1	1	1	1	0.1500E+01	0.1500E+01
20	0	0	0	0	0.1500E+01	0.2000E+01
21	0	0	0	0	0.2000E+01	0.0000E+00
22	0	0	0	0	0.2000E+01	0.5000E+00
23	0	0	0	0	0.2000E+01	0.1000E+01
24	0	0	0	0	0.2000E+01	0.1500E+01
25	0	0	0	0	0.2000E+01	0.2000E+01

ELEMENT N°	NOEUDS				EPAISSEUR	MODULE DE YOUNG	COEFFICIENT DE POISSON	MASSE VOLUMIQUE
	1	2	3	4				
1	1	6	7	2	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	0.7800E+04
2	2	7	8	3	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	0.7800E+04
3	3	8	9	4	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	0.7800E+04
4	4	9	10	5	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	0.7800E+04
5	6	11	12	7	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	0.7800E+04
6	7	12	13	8	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	0.7800E+04
7	8	13	14	9	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	0.7800E+04

8	9	14	15	10	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	0.7800E+
9	11	16	17	12	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	0.7800E+
10	12	17	18	13	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	0.7800E+
11	13	18	19	14	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	0.7800E+
12	14	19	20	15	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	0.7800E+
13	16	21	22	17	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	0.7800E+
14	17	22	23	18	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	0.7800E+
15	18	23	24	19	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	0.7800E+
16	19	24	25	20	0.1000E-01	0.2200E+12	0.2500E+00	0.7800E+

NUMBRE TOTAL DE DEGRES DE LIBERTE = 36

\*\*\*\*\*

\*\*\* RESULTATS DES CALCULS \*\*\*

\*\*\*\*\* MODE..... 1 \*\*\*\*\*

VALEUR PROPRE..... 0.2037235E+05  
 FREQUENCE PROPRE... 0.1427317E+03

NOEUD	N	ROT X	ROT Y	TWIST
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
7	0.0439112	0.1194945	0.1194938	0.3040382
8	0.0790136	0.2090271	0.0000000	0.0000000
9	0.0439119	0.1194945	-0.1194961	-0.3040388
10	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0790139	0.0000000	0.2090271	0.0000000
13	0.1401385	0.0000000	0.0000000	0.0000000
14	0.0790134	0.0000000	-0.2090256	0.0000000
15	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
16	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
17	0.0439114	-0.1194968	0.1194944	-0.3040299
18	0.0790134	-0.2090257	0.0000000	0.0000000
19	0.0439115	-0.1194945	-0.1194954	0.3040247
20	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
24	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
25	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

VALEUR PROPRE..... 0.8588239E+05  
 FREQUENCE PROPRE... 0.2930570E+03

NOEUD	W	ROTX	ROTY	TWIST
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
7	-0.0752496	-0.1844258	-0.0765134	0.0000000
8	0.0020888	0.0020966	0.2989707	-0.1670476
9	0.0777308	0.1870070	-0.0825341	0.7161479
10	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.1725243
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	-0.1288776	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	-0.0048458	-0.1292985	-0.0116196
14	0.1288790	-0.0081135	0.5005249	0.0000000
15	0.0000000	-0.0048485	-0.1292969	0.0116267
16	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
17	-0.0777292	0.0000000	0.0000000	0.0000000
18	-0.0020897	0.1870011	-0.0825324	0.0000000
19	0.0752503	0.0020965	0.2989674	0.1725277
20	0.0000000	-0.1844269	-0.0765102	-0.7161404
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1670420
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
24	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
25	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

##### MODE..... 3 #####

VALEUR PROPRE..... 0.8588239E+05  
 FREQUENCE PROPRE... 0.2930570E+03

NOEUD	W	ROTX	ROTY	TWIST
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
7	-0.0777315	0.0000000	0.0000000	0.0000000
8	-0.1288782	-0.0825300	-0.1870056	0.0000000
9	-0.0752486	-0.1292990	0.0048560	-0.1725247
10	0.0000000	-0.0765135	0.1844209	0.0115855
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1670367
12	-0.0020893	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.2989737	-0.0020951	0.0000000
14	0.0020896	0.5005277	0.0081153	0.7161331
15	0.0000000	0.2989644	-0.0020981	0.0000000
16	0.0000000	0.0000000	-0.0020981	-0.7161624
17	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
18	0.0752518	0.0000000	0.0000000	0.0000000
19	0.1288780	-0.0765137	0.1844266	-0.1670272
20	0.0777288	-0.1292988	0.0048377	-0.0116126
21	0.0000000	-0.0825269	-0.1869998	0.1725458
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
24	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
25	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

##### MODE..... 4 #####

VALEUR PROPRE..... 0.1878368E+06  
 FREQUENCE PROPRE... 0.4334015E+03

NOEUD	W	ROTX	ROTY	TWIST
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
7	0.1245517	0.1080068	0.1079872	0.0616153
8	0.0000000	0.0000000	-0.4709168	-0.4002584
9	-0.1245532	-0.1079962	0.1080047	0.0615892
10	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	-0.4709200	0.0000000	-0.4002465
13	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.7700638
14	0.0000000	0.4709281	0.0000000	-0.4002715
15	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
16	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
17	-0.1245520	0.1079939	-0.1080016	0.0615840
18	0.0000000	0.0000000	0.4709204	-0.4002672
19	0.1245536	-0.1080107	-0.1079953	0.0616290
20	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
24	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
25	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

##### MODE..... 5 #####

VALEUR PROPRE..... 0.2836619E+06  
 FREQUENCE PROPRE... 0.5325991E+03

NOEUD	W	ROTX	ROTY	TWIST
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
7	0.0000000	0.2488842	-0.2488806	0.0000000
8	-0.1427086	0.0907881	0.0000000	0.0000000
9	0.0000000	0.2488877	0.2488779	0.0000000
10	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.1427097	0.0000000	-0.0907976	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
14	0.1427067	0.0000000	0.0907905	0.0000000
15	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
16	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
17	0.0000000	-0.2488915	-0.2488828	0.0000000
18	-0.1427092	-0.0907895	0.0000000	0.0000000
19	0.0000000	-0.2488909	0.2488906	0.0000000
20	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
24	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
25	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

### Exemple 2

On considère la même plaque, mais cette fois encastrée de deux cotés adjacents et libre aux deux autres, soumise à la même charge uniformément répartie sur la surface. (fig.5.3.2)

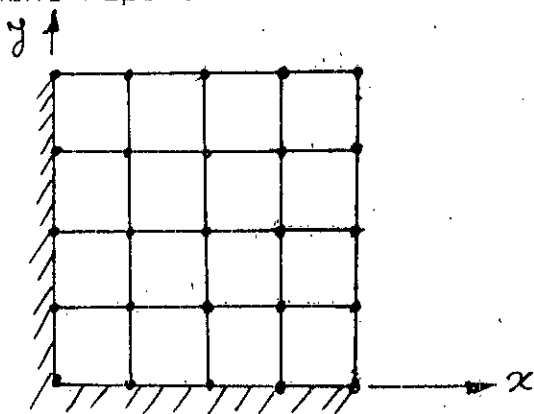


Fig.5.3.2 - Plaque carré encastrée de deux cotés adjacents



NOMBRE TOTAL DE NOEUDS= 25

NOMBRE D'ELEMENTS= 16

NOEUD	CONDITIONS LIMITEES				COORDONNEES	
	1	2	3	4	X	Y
1	0	0	0	0	0.0000E+00	0.0000E+00
2	0	0	0	0	0.0000E+00	0.5000E+00
3	0	0	0	0	0.0000E+00	0.1000E+01
4	0	0	0	0	0.0000E+00	0.1500E+01
5	0	0	0	0	0.0000E+00	0.2000E+01
6	0	0	0	0	0.5000E+00	0.0000E+00
7	1	1	1	1	0.5000E+00	0.5000E+00
8	1	1	1	1	0.5000E+00	0.1000E+01
9	1	1	1	1	0.5000E+00	0.1500E+01
10	1	1	1	1	0.5000E+00	0.2000E+01
11	0	0	0	0	0.1000E+01	0.0000E+00
12	1	1	1	1	0.1000E+01	0.5000E+00
13	1	1	1	1	0.1000E+01	0.1000E+01
14	1	1	1	1	0.1000E+01	0.1500E+01
15	1	1	1	1	0.1000E+01	0.2000E+01
16	0	0	0	0	0.1500E+01	0.0000E+00
17	1	1	1	1	0.1500E+01	0.5000E+00
18	1	1	1	1	0.1500E+01	0.1000E+01
19	1	1	1	1	0.1500E+01	0.1500E+01
20	1	1	1	1	0.1500E+01	0.2000E+01
21	0	0	0	0	0.2000E+01	0.0000E+00
22	1	1	1	1	0.2000E+01	0.5000E+00
23	1	1	1	1	0.2000E+01	0.1000E+01
24	1	1	1	1	0.2000E+01	0.1500E+01
25	1	1	1	1	0.2000E+01	0.2000E+01

NOMBRE TOTAL DE DEGRES DE LIBERTE = 64

\*\*\*\*\*

\*\*\* RESULTATS DES CALCULS \*\*\*

DEPLACEMENTS NODAUX:

	VERT	X-ROT	Y-ROT	TWIST
1	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
3	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
4	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
5	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
6	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
7	-0.331221E-04	-0.112274E-03	-0.112274E-03	-0.414147E-03
8	-0.961127E-04	-0.323246E-03	-0.132418E-03	-0.499072E-03
9	-0.160545E-03	-0.540705E-03	-0.126837E-03	-0.483014E-03
10	-0.219031E-03	-0.755065E-03	-0.919659E-04	-0.635788E-03
11	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
12	-0.961127E-04	-0.132418E-03	-0.323246E-03	-0.499072E-03

13	-0.279891E-03	-0.385108E-03	-0.385108E-03	-0.599447E-03
14	-0.466569E-03	-0.638476E-03	-0.357412E-03	-0.549826E-03
15	-0.639240E-03	-0.877818E-03	-0.340286E-03	-0.624677E-03
16	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
17	-0.160545E-03	-0.126837E-03	-0.540705E-03	-0.483014E-03
18	-0.466569E-03	-0.357412E-03	-0.638476E-03	-0.549826E-03
19	-0.772603E-03	-0.576696E-03	-0.576696E-03	-0.465504E-03
20	-0.104844E-02	-0.756890E-03	-0.544987E-03	-0.448379E-03
21	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
22	-0.219031E-03	-0.919659E-04	-0.755065E-03	-0.635788E-03
23	-0.639240E-03	-0.340286E-03	-0.877818E-03	-0.624677E-03
24	-0.104844E-02	-0.544987E-03	-0.756890E-03	-0.448379E-03
25	-0.138953E-02	-0.641397E-03	-0.641397E-03	-0.141447E-03

FORCES RESULTANTES APPLIQUEES AUX NOEUDS

##### ELEMENT..... 1

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
1	-0.454982E+01	-0.789737E-01	-0.789737E-01	0.362007E-01
6	0.546426E+01	-0.146953E+00	0.125798E+01	-0.675565E-01
7	-0.637337E+01	-0.573839E+00	-0.573839E+00	0.385077E-01
2	0.546426E+01	0.125798E+01	-0.146953E+00	-0.675565E-01

##### ELEMENT..... 2

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
2	-0.497314E+01	0.199507E+01	0.741128E+00	0.282393E+00
7	0.447000E+01	-0.407628E+00	0.307601E+00	-0.120775E+00
8	-0.138628E+02	-0.145983E+01	-0.143393E-01	0.114943E+00
3	0.143700E+02	0.457444E+01	-0.128242E+01	-0.359101E+00

##### ELEMENT..... 3

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
3	-0.260224E+00	0.530688E+01	0.181441E+01	0.608960E+00
8	-0.897185E+00	-0.122173E+01	-0.331495E-01	-0.223960E+00
9	-0.182951E+02	-0.241994E+01	0.341724E-01	0.233496E+00
4	0.194586E+02	0.794116E+01	-0.239094E+01	-0.691250E+00

##### ELEMENT..... 4

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
4	0.672542E+01	0.882368E+01	0.312637E+01	0.954605E+00
9	-0.436403E+01	-0.217867E+01	0.129217E+00	-0.332011E+00
10	-0.250671E+02	-0.287702E+01	0.113697E+01	0.224126E+00
5	0.227144E+02	0.109626E+02	-0.320949E+01	-0.965789E+00

##### ELEMENT..... 5

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
6	-0.497314E+01	0.741128E+00	0.199507E+01	0.282393E+00
11	0.143700E+02	-0.128242E+01	0.457444E+01	-0.359101E+00
12	-0.138628E+02	-0.143393E-01	-0.145983E+01	0.114943E+00
7	0.447000E+01	0.307601E+00	-0.407628E+00	-0.120775E+00

##### ELEMENT..... 6

NOEUD	VERT	X-MOM	FORCES Y-MOM	TWIST
7	-0.125845E+02	0.671397E+00	0.671397E+00	0.133155E+00
12	0.163205E+02	-0.372178E+00	0.124980E+01	-0.107155E+00
13	-0.201056E+02	0.340413E+00	0.340413E+00	-0.226857E-01
8	0.163205E+02	0.124980E+01	-0.372178E+00	-0.107155E+00

##### ELEMENT..... 7

NOEUD	VERT	X-MOM	FORCES Y-MOM	TWIST
8	-0.116079E+02	0.142354E+01	0.416267E+00	0.146054E+00
13	0.117444E+02	0.196837E+00	-0.285261E+00	0.609700E-02
14	-0.206321E+02	0.526869E+00	0.806362E+00	-0.543205E-01
9	0.203902E+02	0.228729E+01	-0.833458E+00	-0.191742E+00

##### ELEMENT..... 8

NOEUD	VERT	X-MOM	FORCES Y-MOM	TWIST
9	-0.780988E+01	0.229757E+01	0.666949E+00	0.220126E+00
14	0.797365E+01	0.428028E+00	-0.521793E+00	0.288039E-01
15	-0.203444E+02	0.579359E+00	0.688249E+00	-0.600394E-01
10	0.200240E+02	0.286716E+01	-0.703925E+00	-0.258484E+00

##### ELEMENT..... 9

NOEUD	VERT	X-MOM	FORCES Y-MOM	TWIST
11	-0.260224E+00	0.181441E+01	0.530688E+01	0.608960E+00
16	0.194586E+02	-0.239094E+01	0.794116E+01	-0.691250E+00
17	-0.182951E+02	0.341724E-01	-0.241994E+01	0.233496E+00
12	-0.897185E+00	-0.331495E-01	-0.122173E+01	-0.223960E+00

##### ELEMENT..... 10

NOEUD	VERT	X-MOM	FORCES Y-MOM	TWIST
12	-0.116079E+02	0.416267E+00	0.142354E+01	0.146054E+00
17	0.203902E+02	-0.833458E+00	0.228729E+01	-0.191742E+00
18	-0.206321E+02	0.806362E+00	0.526869E+00	-0.543205E-01
13	0.117444E+02	-0.285261E+00	0.196837E+00	0.609700E-02

##### ELEMENT..... 11

NOEUD	VERT	X-MOM	FORCES Y-MOM	TWIST
13	-0.135065E+02	-0.263561E+00	-0.263561E+00	-0.599419E-01
18	0.152690E+02	0.327529E+00	-0.357058E+00	0.655110E-01
19	-0.172571E+02	0.124784E+01	0.124784E+01	-0.152734E+00
14	0.152690E+02	-0.357058E+00	0.327529E+00	0.655110E-01

##### ELEMENT..... 12

NOEUD	VERT	X-MOM	FORCES Y-MOM	TWIST
14	-0.128147E+02	-0.616973E+00	-0.623689E+00	-0.110444E+00
19	0.998187E+01	0.104145E+01	-0.924553E+00	0.149960E+00
20	-0.127402E+02	0.149007E+01	0.456026E+00	-0.130239E+00
15	0.152418E+02	-0.592916E+00	-0.226093E+00	0.259346E-01

##### ELEMENT..... 13

NOEUD	VERT		FORCES		TWIST
	VERT	X-MOM	Y-MOM	Y-MOM	
16	0.672542E+01	0.312637E+01	0.882368E+01	0.954605E+00	
21	0.227144E+02	-0.320949E+01	0.109626E+02	-0.965789E+00	
22	-0.250671E+02	0.113697E+01	-0.287702E+01	0.224126E+00	
17	-0.436403E+01	0.129217E+00	-0.217867E+01	-0.332011E+00	

##### ELEMENT..... 14

NOEUD	VERT		FORCES		TWIST
	VERT	X-MOM	Y-MOM	Y-MOM	
17	-0.780988E+01	0.666949E+00	0.229757E+01	0.220126E+00	
22	0.200240E+02	-0.703925E+00	0.286716E+01	-0.258484E+00	
23	-0.203444E+02	0.688249E+00	0.579359E+00	-0.600394E-01	
18	0.797365E+01	-0.521793E+00	0.428028E+00	0.288039E-01	

##### ELEMENT..... 15

NOEUD	VERT		FORCES		TWIST
	VERT	X-MOM	Y-MOM	Y-MOM	
18	-0.128147E+02	-0.623689E+00	-0.616973E+00	-0.110444E+00	
23	0.152418E+02	-0.226093E+00	-0.592916E+00	0.259346E-01	
24	-0.127402E+02	0.456026E+00	0.149007E+01	-0.130239E+00	
19	0.998187E+01	-0.924553E+00	0.104145E+01	0.149960E+00	

##### ELEMENT..... 16

NOEUD	VERT		FORCES		TWIST
	VERT	X-MOM	Y-MOM	Y-MOM	
19	-0.130427E+02	-0.138368E+01	-0.138368E+01	-0.217518E+00	
24	0.757177E+01	0.353244E-01	-0.150273E+01	0.961661E-01	
25	-0.258107E+01	0.256777E+00	0.256777E+00	-0.165302E-01	
20	0.757177E+01	-0.150273E+01	0.353244E-01	0.961661E-01	

NOMBRE TOTAL DE NOEUDS= 25

NOMBRE D'ELEMENTS= 16

NOEUD	CONDITIONS LIMITEES				COORDONNEES	
	1	2	3	4	X	Y
1	0	0	0	0	0.0000E+00	0.0000E+00
2	0	0	0	0	0.0000E+00	0.5000E+00
3	0	0	0	0	0.0000E+00	0.1000E+01
4	0	0	0	0	0.0000E+00	0.1500E+01
5	0	0	0	0	0.0000E+00	0.2000E+01
6	0	0	0	0	0.5000E+00	0.0000E+00
7	1	1	1	1	0.5000E+00	0.5000E+00
8	1	1	1	1	0.5000E+00	0.1000E+01
9	1	1	1	1	0.5000E+00	0.1500E+01
10	1	1	1	1	0.5000E+00	0.2000E+01
11	0	0	0	0	0.1000E+01	0.0000E+00
12	1	1	1	1	0.1000E+01	0.5000E+00
13	1	1	1	1	0.1000E+01	0.1000E+01
14	1	1	1	1	0.1000E+01	0.1500E+01
15	1	1	1	1	0.1000E+01	0.2000E+01
16	0	0	0	0	0.1500E+01	0.0000E+00
17	1	1	1	1	0.1500E+01	0.5000E+00
18	1	1	1	1	0.1500E+01	0.1000E+01
19	1	1	1	1	0.1500E+01	0.1500E+01
20	1	1	1	1	0.1500E+01	0.2000E+01
21	0	0	0	0	0.2000E+01	0.0000E+00
22	1	1	1	1	0.2000E+01	0.5000E+00
23	1	1	1	1	0.2000E+01	0.1000E+01
24	1	1	1	1	0.2000E+01	0.1500E+01
25	1	1	1	1	0.2000E+01	0.2000E+01

NOMBRE TOTAL DE DEGRES DE LIBERTE = 64

\*\*\*\*\*

\*\*\* RESULTATS DES CALCULS \*\*\*

##### MODE..... 1 #####

VALEUR PROPRE..... 0.7751688E+03  
 FREQUENCE PROPRE... 0.2784185E+02

NOEUD	W	ROTX	ROTY	TWIST
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
7	0.0025056	0.0103104	0.0103105	0.0377734
8	0.0094571	0.0348086	0.0164909	0.0569800
9	0.0182458	0.0645945	0.0181727	0.0612637
10	0.0268223	0.0943754	0.0133725	0.0719487
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

12	0.0094571	0.0164903	0.0348091	0.0569810
13	0.0314777	0.0502369	0.0502362	0.0735059
14	0.0573712	0.0865254	0.0518229	0.0702482
15	0.0826049	0.1209393	0.0491690	0.0730452
16	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
17	0.0182458	0.0181728	0.0645944	0.0612628
18	0.0573712	0.0518224	0.0865250	0.0702512
19	0.1007572	0.0846165	0.0846167	0.0591812
20	0.1415999	0.1111729	0.0807301	0.0505959
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0268223	0.0133726	0.0943758	0.0719515
23	0.0826049	0.0491694	0.1209401	0.0730486
24	0.1415999	0.0807299	0.1111725	0.0505960
25	0.1925715	0.0955132	0.0955133	0.0062902

##### MODE..... 2 #####

VALEUR PROPRE..... 0.9324665E+04

FREQUENCE PROPRE... 0.9656431E+02

NOEUD	W	ROTX	ROTY	TWIST
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
7	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
8	0.0100811	-0.0041119	0.0041132	0.0000000
9	0.0414268	0.0208259	0.0407501	0.1146076
10	0.0882975	0.1120735	0.0818386	0.2428971
11	0.0000000	0.2457832	0.1004882	0.3340132
12	-0.0100804	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	-0.0407515	-0.0208228	-0.1146177
14	0.0668119	-0.0750765	0.0750778	0.0000000
15	0.1713448	-0.0368287	0.1827630	0.1410673
16	0.0000000	0.0466921	0.2333926	0.1849215
17	-0.0414267	0.0000000	0.0000000	0.0000000
18	-0.0668107	-0.0818368	-0.1120732	-0.2429027
19	0.0000000	-0.1827633	0.0368304	-0.1410750
20	0.1267961	-0.2153918	0.2153875	0.0000000
21	0.0000000	-0.2041866	0.2770620	0.0120739
22	-0.0882966	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	-0.1713439	-0.1004837	-0.2457813	-0.3340050
24	-0.1267979	-0.2333914	-0.0466940	-0.1849428
25	0.0000000	-0.2770659	0.2041809	-0.0120826
		-0.2729246	0.2729211	0.0000000

##### MODE..... 3 #####

VALEUR PROPRE..... 0.1116512E+05

FREQUENCE PROPRE... 0.1056651E+03

NOEUD	W	ROTX	ROTY	TWIST
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

7	-0.0234450	-0.0697094	-0.0697094	-0.1918634
8	-0.0505734	-0.1416759	-0.0279426	-0.0651533
9	-0.0490822	-0.1290889	0.0288708	0.0976126
10	-0.0302470	-0.0758770	0.0376146	0.0530131
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	-0.0505739	-0.0279454	-0.1416763	-0.0651517
13	-0.0997973	-0.0321712	-0.0321695	0.0644922
14	-0.0793959	0.0348144	0.0997678	0.1850845
15	-0.0226731	0.1332255	0.1030656	0.1955661
16	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
17	-0.0490835	0.0288698	-0.1290908	0.0976095
18	-0.0793969	0.0997666	0.0348160	0.1850818
19	-0.0135073	0.2066404	0.2066440	0.2249889
20	0.0986013	0.3184870	0.2222412	0.2406989
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0302485	0.0376138	-0.0758791	0.0530033
23	-0.0226747	0.1030647	0.1332250	0.1955721
24	0.0985985	0.2222350	0.3184872	0.2406838
25	0.2573394	0.3005293	0.3005383	0.0395072

##### MODE..... 4 #####

VALEUR PROPRE..... 0.3682550E+05  
 FREQUENCE PROPRE... 0.1918997E+03

NOEUD	W	ROTX	ROTY	TWIST
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
7	0.0521255	0.1236107	0.1236126	0.2719648
8	0.0704936	0.1627519	-0.0703108	-0.1639369
9	-0.0091152	-0.0202448	-0.2182554	-0.5048686
10	-0.1207469	-0.2617362	-0.2260685	-0.5053580
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0704928	-0.0703125	0.1627484	-0.1639661
13	0.0954257	-0.0888593	-0.0888575	0.1141938
14	-0.0073149	0.0269490	-0.2830496	0.3000424
15	-0.1495631	0.1753139	-0.2880561	0.2969419
16	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
17	-0.0091145	-0.2182563	-0.0202469	-0.5048800
18	-0.0073153	-0.2830442	0.0269498	0.3000210
19	0.0090132	0.0269508	0.0269507	0.7988697
20	0.0158554	0.4030051	0.0070107	0.7190393
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.1207473	-0.2260686	-0.2617338	-0.5053213
23	-0.1495625	-0.2880571	0.1753208	0.2969603
24	0.0158540	0.0070015	0.4029978	0.7190161
25	0.1792790	0.2456653	0.2456650	0.1074966

VALEUR PROPRE..... 0.6375864E+05  
 FREQUENCE PROPRE... 0.2525047E+03

NOEUD	W	ROTX	ROTY	TWIST
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
7	0.0000000	-0.0374733	0.0374888	0.0000000
8	0.0517329	0.0546163	0.1407117	0.2947101
9	0.0950742	0.1327407	0.0037712	-0.0559034
10	0.0716430	0.0372099	-0.0424999	-0.1400271
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	-0.0517234	-0.1407195	-0.0546059	-0.2947320
13	0.0000000	-0.2009651	0.2009312	0.0000000
14	0.0443773	-0.2488564	-0.0926565	-0.2672371
15	-0.0680460	-0.4723520	-0.2813029	-0.6397806
16	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
17	-0.0950653	-0.0037592	-0.1327360	0.0559241
18	-0.0443847	0.0926713	0.2488034	0.2672402
19	0.0000000	0.1761086	-0.1760873	0.0000000
20	-0.1933928	0.1118911	-0.5133614	-0.1559126
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0716230	0.0425308	-0.0371827	0.1400992
23	0.0680567	0.2813473	0.4723080	0.6397938
24	0.1933976	0.5134122	-0.1118512	0.1559588
25	0.0000000	0.5080385	-0.5079647	0.0000000

On considère la même plaque, mais cette fois simplement supportée sur les quatres cotés, soumise à la même charge uniformément répartie sur la surface. (fig.5.3.3)

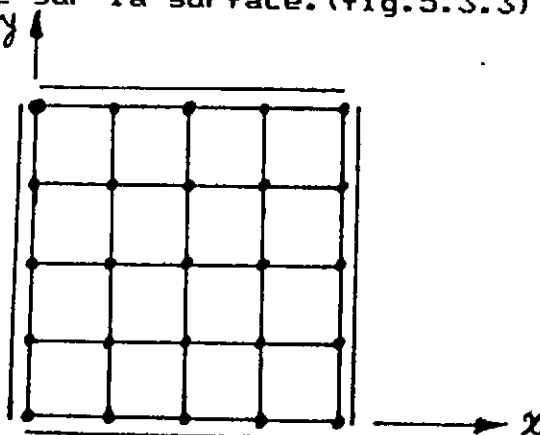


Fig.5.3.3 - Plaque carré simplement supportée sur les quatres cotés



NOMBRE TOTAL DE NOEUDS= 25

NOMBRE D'ELEMENTS= 16

NOEUD	CONDITIONS LIMITEES				COORDONNEES	
	1	2	3	4	X	Y
1	0	0	0	0	0.0000E+00	0.0000E+00
2	0	0	1	0	0.0000E+00	0.5000E+00
3	0	0	1	0	0.0000E+00	0.1000E+01
4	0	0	1	0	0.0000E+00	0.1500E+01
5	0	0	0	0	0.0000E+00	0.2000E+01
6	0	1	0	0	0.5000E+00	0.0000E+00
7	1	1	1	1	0.5000E+00	0.5000E+00
8	1	1	1	1	0.5000E+00	0.1000E+01
9	1	1	1	1	0.5000E+00	0.1500E+01
10	0	1	0	0	0.5000E+00	0.2000E+01
11	0	1	0	0	0.1000E+01	0.0000E+00
12	1	1	1	1	0.1000E+01	0.5000E+00
13	1	1	1	1	0.1000E+01	0.1000E+01
14	1	1	1	1	0.1000E+01	0.1500E+01
15	0	1	0	0	0.1000E+01	0.2000E+01
16	0	1	0	0	0.1500E+01	0.0000E+00
17	1	1	1	1	0.1500E+01	0.5000E+00
18	1	1	1	1	0.1500E+01	0.1000E+01
19	1	1	1	1	0.1500E+01	0.1500E+01
20	0	1	0	0	0.1500E+01	0.2000E+01
21	0	0	0	0	0.2000E+01	0.0000E+00
22	0	0	1	0	0.2000E+01	0.5000E+00
23	0	0	1	0	0.2000E+01	0.1000E+01
24	0	0	1	0	0.2000E+01	0.1500E+01
25	0	0	0	0	0.2000E+01	0.2000E+01

NOMBRE TOTAL DE DEGRES DE LIBERTE = 48

\*\*\*\*\*

\*\*\* RESULTATS DES CALCULS \*\*\*

DEPLACEMENTS NODAUX:

	VERT	X-ROT	Y-ROT	TWIST
1	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2	0.000000E+00	0.000000E+00	-0.741073E-05	0.000000E+00
3	0.000000E+00	0.000000E+00	-0.154182E-05	0.000000E+00
4	0.000000E+00	0.000000E+00	0.538360E-05	0.000000E+00
5	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
6	0.000000E+00	-0.741073E-05	0.000000E+00	0.000000E+00
7	-0.152480E-04	-0.364556E-04	-0.364556E-04	-0.139721E-03
8	-0.251197E-04	-0.598209E-04	-0.841237E-06	-0.539582E-04
9	-0.152171E-04	-0.352842E-04	0.352842E-04	0.462735E-04
10	0.000000E+00	-0.538360E-05	0.000000E+00	0.000000E+00
11	0.000000E+00	-0.154182E-05	0.000000E+00	0.000000E+00
12	-0.251197E-04	-0.841237E-06	-0.598209E-04	-0.539582E-04

13	-0.417324E-04	-0.168793E-21	0.440428E-21	-0.643128E-04
14	-0.251197E-04	0.841237E-06	0.598209E-04	-0.539582E-04
15	0.000000E+00	0.154192E-05	0.000000E+00	0.000000E+00
16	0.000000E+00	0.538360E-05	0.000000E+00	0.000000E+00
17	-0.152171E-04	0.352842E-04	-0.352842E-04	0.462735E-04
18	-0.251197E-04	0.598209E-04	0.841237E-06	-0.539582E-04
19	-0.152480E-04	0.364556E-04	0.364556E-04	-0.139721E-03
20	0.000000E+00	0.741073E-05	0.000000E+00	0.000000E+00
21	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
22	0.000000E+00	0.000000E+00	-0.538360E-05	0.000000E+00
23	0.000000E+00	0.000000E+00	0.154192E-05	0.000000E+00
24	0.000000E+00	0.000000E+00	0.741073E-05	0.000000E+00
25	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00

FORCES RESULTANTES APPLIQUEES AUX NOEUDS

##### ELEMENT..... 1

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
1	-0.258465E+01	0.299114E-01	0.299114E-01	0.365104E-01
6	0.455160E+01	-0.342790E+00	0.855597E+00	-0.523056E-01
7	-0.651672E+01	0.441139E+00	0.441139E+00	-0.459430E-01
2	0.455160E+01	0.855597E+00	-0.342790E+00	-0.523056E-01

##### ELEMENT..... 2

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
2	0.153392E+01	0.120137E+01	0.342766E+00	0.122427E+00
7	-0.152924E+01	0.413273E+00	-0.424657E+00	0.331285E-01
8	-0.675266E+01	0.730985E+00	0.831374E+00	-0.748713E-01
3	0.674573E+01	0.179577E+01	-0.745893E+00	-0.148406E+00

##### ELEMENT..... 3

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
3	0.647118E+01	0.179031E+01	0.745920E+00	0.158507E+00
8	-0.530056E+01	0.463810E+00	-0.540384E+00	0.342184E-01
9	-0.292805E+01	0.667661E+00	0.698585E+00	-0.691159E-01
4	0.175508E+01	0.119293E+01	-0.318763E+00	-0.110728E+00

##### ELEMENT..... 4

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
4	0.413686E+01	0.806564E+00	0.318812E+00	0.564267E-01
9	-0.546008E+01	0.200561E+00	-0.200561E+00	0.353851E-02
10	0.413686E+01	-0.318812E+00	-0.806584E+00	0.564267E-01
5	-0.281206E+01	-0.255363E-01	0.255363E-01	-0.286746E-01

##### ELEMENT..... 5

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
6	0.153392E+01	0.342766E+00	0.120137E+01	0.122427E+00
11	0.674573E+01	-0.745893E+00	0.179577E+01	-0.148406E+00
12	-0.675266E+01	0.831374E+00	0.730985E+00	-0.748713E-01
7	-0.152924E+01	-0.424657E+00	0.413273E+00	0.331285E-01

##### ELEMENT..... 6

NOEUD	VERT	X-MOM	FORCES Y-MOM	TWIST
7	-0.430599E+00	-0.430311E+00	-0.430311E+00	-0.897633E-01
12	0.191145E+01	0.454131E+00	-0.463184E+00	0.945930E-01
13	-0.341172E+01	0.118532E+01	0.118532E+01	-0.167192E+00
8	0.191145E+01	-0.463184E+00	0.454131E+00	0.945930E-01

##### ELEMENT..... 7

NOEUD	VERT	X-MOM	FORCES Y-MOM	TWIST
8	0.132709E+00	-0.732602E+00	-0.745090E+00	-0.123381E+00
13	-0.159530E+01	0.884814E+00	-0.884814E+00	0.132472E+00
14	0.132709E+00	0.745090E+00	0.732602E+00	-0.123381E+00
9	0.131041E+01	-0.170224E+00	0.170224E+00	0.652605E-01

##### ELEMENT..... 8

NOEUD	VERT	X-MOM	FORCES Y-MOM	TWIST
9	-0.292805E+01	-0.698585E+00	-0.667661E+00	-0.691159E-01
14	-0.530056E+01	0.540384E+00	-0.463810E+00	0.342184E-01
15	0.647118E+01	-0.745920E+00	-0.179031E+01	0.158507E+00
10	0.175508E+01	0.318763E+00	-0.119293E+01	-0.110728E+00

##### ELEMENT..... 9

NOEUD	VERT	X-MOM	FORCES Y-MOM	TWIST
11	0.647118E+01	0.745920E+00	0.179031E+01	0.158507E+00
16	0.175508E+01	-0.318763E+00	0.119293E+01	-0.110728E+00
17	-0.292805E+01	0.698585E+00	0.667661E+00	-0.691159E-01
12	-0.530056E+01	-0.540384E+00	0.463810E+00	0.342184E-01

##### ELEMENT..... 10

NOEUD	VERT	X-MOM	FORCES Y-MOM	TWIST
12	0.132709E+00	-0.745090E+00	-0.732602E+00	-0.123381E+00
17	0.131041E+01	0.170224E+00	-0.170224E+00	0.652605E-01
18	0.132709E+00	0.732602E+00	0.745090E+00	-0.123381E+00
13	-0.159530E+01	-0.884814E+00	0.884814E+00	0.132472E+00

##### ELEMENT..... 11

NOEUD	VERT	X-MOM	FORCES Y-MOM	TWIST
13	-0.341172E+01	-0.118532E+01	-0.118532E+01	-0.167192E+00
18	0.191145E+01	0.463184E+00	-0.454131E+00	0.945930E-01
19	-0.430599E+00	0.430311E+00	0.430311E+00	-0.897633E-01
14	0.191145E+01	-0.454131E+00	0.463184E+00	0.945930E-01

##### ELEMENT..... 12

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
14	-0.675266E+01	-0.831374E+00	-0.730985E+00	-0.748713E-01
19	-0.152924E+01	0.424657E+00	-0.413273E+00	0.331285E-01
20	0.153392E+01	-0.842766E+00	-0.120137E+01	0.122427E+00
15	0.674573E+01	0.745893E+00	-0.179577E+01	-0.148406E+00

##### ELEMENT..... 13

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
16	0.413686E+01	0.318812E+00	0.806564E+00	0.564267E-01
21	-0.281206E+01	0.255363E-01	-0.255363E-01	-0.286746E-01
22	0.413686E+01	-0.806564E+00	-0.318812E+00	0.564267E-01
17	-0.546008E+01	-0.200561E+00	0.200561E+00	0.353851E-02

##### ELEMENT..... 14

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
17	-0.292805E+01	-0.667661E+00	-0.698585E+00	-0.691159E-01
22	0.175508E+01	-0.119293E+01	0.318763E+00	-0.110728E+00
23	0.647118E+01	-0.179031E+01	-0.745920E+00	0.158507E+00
18	-0.530056E+01	-0.463810E+00	0.540384E+00	0.342184E-01

##### ELEMENT..... 15

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
18	-0.675266E+01	-0.730985E+00	-0.831374E+00	-0.748713E-01
23	0.674573E+01	-0.179577E+01	0.745893E+00	-0.148406E+00
24	0.153392E+01	-0.120137E+01	-0.342766E+00	0.122427E+00
19	-0.152924E+01	-0.413273E+00	0.424657E+00	0.331285E-01

##### ELEMENT..... 16

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
19	-0.651672E+01	-0.441139E+00	-0.441139E+00	-0.459430E-01
24	0.455160E+01	-0.855597E+00	0.342790E+00	-0.523056E-01
25	-0.258465E+01	-0.299114E-01	-0.299114E-01	0.365104E-01
20	0.455160E+01	0.342790E+00	-0.855597E+00	-0.523056E-01

NOMBRE TOTAL DE NOEUDS= 25

NOMBRE D'ELEMENTS= 16

NOEUD	CONDITIONS LIMITEES				COORDONNEES	
	1	2	3	4	X	Y
1	0	0	0	0	0.0000E+00	0.0000E+00
2	0	0	1	0	0.0000E+00	0.5000E+00
3	0	0	1	0	0.0000E+00	0.1000E+01
4	0	0	1	0	0.0000E+00	0.1500E+01
5	0	0	0	0	0.0000E+00	0.2000E+01
6	0	1	0	0	0.5000E+00	0.0000E+00
7	1	1	1	1	0.5000E+00	0.5000E+00
8	1	1	1	1	0.5000E+00	0.1000E+01
9	1	1	1	1	0.5000E+00	0.1500E+01
10	0	1	0	0	0.5000E+00	0.2000E+01
11	0	1	0	0	0.1000E+01	0.0000E+00
12	1	1	1	1	0.1000E+01	0.5000E+00
13	1	1	1	1	0.1000E+01	0.1000E+01
14	1	1	1	1	0.1000E+01	0.1500E+01
15	0	1	0	0	0.1000E+01	0.2000E+01
16	0	1	0	0	0.1500E+01	0.0000E+00
17	1	1	1	1	0.1500E+01	0.5000E+00
18	1	1	1	1	0.1500E+01	0.1000E+01
19	1	1	1	1	0.1500E+01	0.1500E+01
20	0	1	0	0	0.1500E+01	0.2000E+01
21	0	0	0	0	0.2000E+01	0.0000E+00
22	0	0	1	0	0.2000E+01	0.5000E+00
23	0	0	1	0	0.2000E+01	0.1000E+01
24	0	0	1	0	0.2000E+01	0.1500E+01
25	0	0	0	0	0.2000E+01	0.2000E+01

NOMBRE TOTAL DE DEGRES DE LIBERTE = 48

\*\*\*\*\*

\*\*\* RESULTATS DES CALCULS \*\*\*

##### MODE..... 1 #####

VALEUR PROPRE..... 0.2017258E+05  
 FREQUENCE PROPRE... 0.1420302E+03

NOEUD	W	ROTX	ROTY	TWIST
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	0.0195016	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	-0.0195044	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0195008	0.0000000	0.0000000
7	0.0439478	0.1192056	0.1192045	0.3179797
8	0.0791709	0.2063770	0.0000000	0.0000000
9	0.0439482	0.1192068	-0.1192047	-0.3179892
10	0.0000000	0.0195026	0.0000000	0.0000000
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

12	0.0791716	0.0000000	0.2063781	0.0000000
13	0.1397480	0.0000000	0.0000000	0.0000000
14	0.0791717	0.0000000	-0.2063794	0.0000000
15	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
16	0.0000000	-0.0195042	0.0000000	0.0000000
17	0.0439482	-0.1192080	0.1192059	-0.3179989
18	0.0791715	-0.2063797	0.0000000	0.0000000
19	0.0439482	-0.1192082	-0.1192047	0.3179769
20	0.0000000	-0.0195043	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0195037	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
24	0.0000000	0.0000000	-0.0195049	0.0000000
25	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

##### MODE..... 2 #####

VALEUR PROPRE..... 0.8414684E+05  
 FREQUENCE PROPRE... 0.2900808E+03

NOEUD	W	ROTX	ROTY	TWIST
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	-0.0193412	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	0.0677590	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	-0.0602831	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	-0.0374556	0.0000000	0.0000000
7	-0.0438204	-0.1373798	-0.0129651	-0.0931194
8	0.0462729	0.0441085	0.2823352	0.6390468
9	0.0991861	0.1976312	-0.1426659	-0.2107923
10	0.0000000	0.0682802	0.0000000	0.0000000
11	0.0000000	-0.0262356	0.0000000	0.0000000
12	-0.1195195	-0.1093093	-0.1139263	-0.2473886
13	0.0000000	-0.1785808	0.4612664	0.0000000
14	0.1195193	-0.1093097	-0.1139253	0.2474106
15	0.0000000	-0.0262231	0.0000000	0.0000000
16	0.0000000	0.0682863	0.0000000	0.0000000
17	-0.0991861	0.1976333	-0.1426634	0.2107672
18	-0.0462728	0.0441084	0.2823351	-0.6390520
19	0.0438204	-0.1373805	-0.0129661	0.0931352
20	0.0000000	-0.0374645	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	-0.0602752	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0677456	0.0000000
24	0.0000000	0.0000000	-0.0193338	0.0000000
25	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

##### MODE..... 3 #####

VALEUR PROPRE..... 0.8414684E+05  
 FREQUENCE PROPRE... 0.2900808E+03

NOEUD	W	ROTX	ROTY	TWIST
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	-0.0682795	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	0.0262299	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	0.0374577	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	-0.0602704	0.0000000	0.0000000

7	-0.0991864	-0.1426704	-0.1976323	-0.2108102
8	-0.1195190	-0.1139277	0.1093103	0.2474060
9	-0.0438206	-0.0129614	0.1373835	0.0931357
10	0.0000000	-0.0193348	0.0000000	0.0000000
11	0.0000000	0.0677579	0.0000000	0.0000000
12	-0.0462713	0.2823387	-0.0441077	0.6390249
13	0.0000000	0.4612667	0.1785785	0.0000000
14	0.0462718	0.2823403	-0.0441012	-0.6390450
15	0.0000000	0.0677481	0.0000000	0.0000000
16	0.0000000	-0.0193423	0.0000000	0.0000000
17	0.0438208	-0.0129694	0.1373823	-0.0931066
18	0.1195194	-0.1139190	0.1093113	-0.2474091
19	0.0991865	-0.1426650	-0.1976368	0.2107927
20	0.0000000	-0.0602810	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0374639	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0262389	0.0000000
24	0.0000000	0.0000000	-0.0682881	0.0000000
25	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

##### MODE..... 4 #####

VALEUR PROPRE..... 0.1765752E+06  
 FREQUENCE PROPRE... 0.4202085E+03

NOEUD	W	ROTX	ROTY	TWIST
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	0.1019979	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	-0.1926604	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	0.1019949	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.1019981	0.0000000	0.0000000
7	0.1219418	0.1054972	0.1054939	-0.1044689
8	0.0000000	0.0000000	-0.4646983	-0.3449489
9	-0.1219425	-0.1054920	0.1054983	-0.1044713
10	0.0000000	-0.1019904	0.0000000	0.0000000
11	0.0000000	-0.1926653	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	-0.4646940	0.0000000	-0.3449275
13	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.6635683
14	0.0000000	0.4647012	0.0000000	-0.3449135
15	0.0000000	0.1926571	0.0000000	0.0000000
16	0.0000000	0.1019903	0.0000000	0.0000000
17	-0.1219419	0.1054941	-0.1054980	-0.1044593
18	0.0000000	0.0000000	0.4646983	-0.3449305
19	0.1219419	-0.1054909	-0.1054925	-0.1044520
20	0.0000000	-0.1019923	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	-0.1019936	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.1926642	0.0000000
24	0.0000000	0.0000000	-0.1019963	0.0000000
25	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

##### MODE..... 5 #####

VALEUR PROPRE..... 0.2777058E+06  
 FREQUENCE PROPRE... 0.5269780E+03

NOEUD	W	ROTX	ROTY	TWIST
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	0.1002403	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	-0.1002446	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	-0.1002384	0.0000000	0.0000000
7	0.0000000	-0.2446700	0.2446730	0.0000000
8	0.1414984	-0.1001886	0.0000000	0.0000000
9	0.0000000	-0.2446722	-0.2446725	0.0000000
10	0.0000000	-0.1002274	0.0000000	0.0000000
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	-0.1415059	0.0000000	0.1002962	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
14	-0.1415121	0.0000000	-0.1002828	0.0000000
15	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
16	0.0000000	0.1002552	0.0000000	0.0000000
17	0.0000000	0.2446718	0.2446805	0.0000000
18	0.1415033	0.1001898	0.0000000	0.0000000
19	0.0000000	0.2446832	-0.2446909	0.0000000
20	0.0000000	0.1002368	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
24	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
25	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

**Exemple 4**

On considère la même plaque, mais cette fois simplement appuyée sur deux cotés opposés, et libre des deux autres cotés, soumise à la même charge uniformément répartie sur la surface. (fig. 5.3.4)

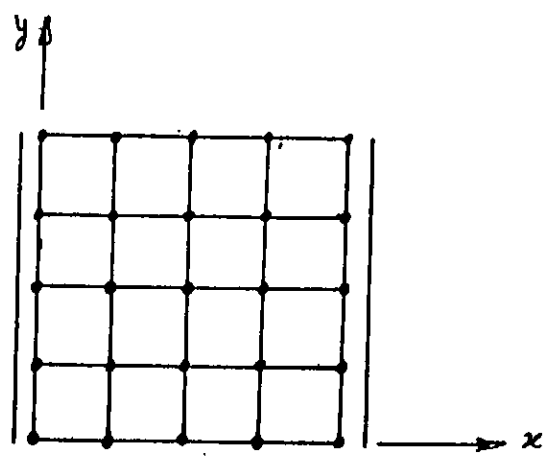


Fig.5.3.4 - Plaque carré simplement appuyée sur deux cotés opposés



NOMBRE TOTAL DE NOEUDS= 25

NOMBRE D'ELEMENTS= 16

NOEUD	CONDITIONS LIMITEES				COORDONNEES	
	1	2	3	4	X	Y
1	0	0	1	0	0.0000E+00	0.0000E+00
2	0	0	1	0	0.0000E+00	0.5000E+00
3	0	0	1	0	0.0000E+00	0.1000E+01
4	0	0	1	0	0.0000E+00	0.1500E+01
5	0	0	1	0	0.0000E+00	0.2000E+01
6	1	1	1	1	0.5000E+00	0.0000E+00
7	1	1	1	1	0.5000E+00	0.5000E+00
8	1	1	1	1	0.5000E+00	0.1000E+01
9	1	1	1	1	0.5000E+00	0.1500E+01
10	1	1	1	1	0.5000E+00	0.2000E+01
11	1	1	1	1	0.1000E+01	0.0000E+00
12	1	1	1	1	0.1000E+01	0.5000E+00
13	1	1	1	1	0.1000E+01	0.1000E+01
14	1	1	1	1	0.1000E+01	0.1500E+01
15	1	1	1	1	0.1000E+01	0.2000E+01
16	1	1	1	1	0.1500E+01	0.0000E+00
17	1	1	1	1	0.1500E+01	0.5000E+00
18	1	1	1	1	0.1500E+01	0.1000E+01
19	1	1	1	1	0.1500E+01	0.1500E+01
20	1	1	1	1	0.1500E+01	0.2000E+01
21	0	0	1	0	0.2000E+01	0.0000E+00
22	0	0	1	0	0.2000E+01	0.5000E+00
23	0	0	1	0	0.2000E+01	0.1000E+01
24	0	0	1	0	0.2000E+01	0.1500E+01
25	0	0	1	0	0.2000E+01	0.2000E+01

\*\*\*\*\*

\*\*\* RESULTATS DES CALCULS \*\*\*

DEPLACEMENTS NODAUX:

	VERT	X-ROT	Y-ROT	TWIST
1	0.000000E+00	0.000000E+00	-0.457068E-04	0.000000E+00
2	0.000000E+00	0.000000E+00	0.579081E-05	0.000000E+00
3	0.000000E+00	0.000000E+00	-0.167161E-05	0.000000E+00
4	0.000000E+00	0.000000E+00	-0.841391E-05	0.000000E+00
5	0.000000E+00	0.000000E+00	0.395444E-04	0.000000E+00
6	-0.547928E-04	-0.133281E-03	0.140137E-04	-0.705417E-04
7	-0.493407E-04	-0.128282E-03	0.773902E-05	-0.638314E-04
8	-0.474197E-04	-0.127692E-03	-0.879997E-06	-0.571072E-04
9	-0.492321E-04	-0.128534E-03	-0.897120E-05	-0.545419E-04
10	-0.543552E-04	-0.147508E-03	-0.161374E-04	-0.146454E-03
11	-0.960477E-04	0.826129E-05	0.340461E-04	-0.130026E-03
12	-0.868059E-04	0.308713E-06	0.933317E-05	-0.711504E-04

13	-0.846640E-04	-0.709721E-21	-0.957244E-20	-0.689380E-01
14	-0.868059E-04	-0.308713E-06	-0.933317E-05	-0.711504E-01
15	-0.960477E-04	-0.826129E-05	-0.340461E-04	-0.130026E-01
16	-0.543552E-04	0.147508E-03	0.161374E-04	-0.146454E-01
17	-0.492321E-04	0.128534E-03	0.897120E-05	-0.545419E-01
18	-0.474197E-04	0.127692E-03	0.879997E-06	-0.571072E-01
19	-0.493407E-04	0.128282E-03	-0.773902E-05	-0.638314E-01
20	-0.547928E-04	0.133281E-03	-0.140137E-04	-0.705417E-01
21	0.000000E+00	0.000000E+00	-0.395444E-04	0.000000E+00
22	0.000000E+00	0.000000E+00	0.841391E-05	0.000000E+00
23	0.000000E+00	0.000000E+00	0.167161E-05	0.000000E+00
24	0.000000E+00	0.000000E+00	-0.579081E-05	0.000000E+00
25	0.000000E+00	0.000000E+00	0.457068E-04	0.000000E+00

FORCES RESULTANTES APPLIQUEES AUX NOEUDS

##### ELEMENT..... 1

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
1	0.482007E+01	0.288546E+01	-0.208590E+00	0.209243E+00
6	-0.787812E+01	0.628889E+00	-0.353500E+00	0.356020E-01
7	-0.729627E+01	0.714674E+00	0.452152E+00	-0.382795E-01
2	0.103515E+02	0.336131E+01	-0.141845E+01	-0.309224E+00

##### ELEMENT..... 2

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
2	0.875075E+01	0.331953E+01	0.141837E+01	0.328215E+00
7	-0.709240E+01	0.513287E+00	-0.215811E+00	-0.110853E-02
8	-0.815512E+01	0.753200E+00	0.633128E+00	-0.541200E-01
3	0.649701E+01	0.304098E+01	-0.100657E+01	-0.282855E+00

##### ELEMENT..... 3

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
3	0.623656E+01	0.303829E+01	0.100661E+01	0.293449E+00
8	-0.662201E+01	0.479497E+00	-0.330725E+00	0.130041E-01
9	-0.857791E+01	0.779908E+00	0.529279E+00	-0.415764E-01
4	0.896357E+01	0.330549E+01	-0.139777E+01	-0.314675E+00

##### ELEMENT..... 4

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
4	0.995178E+01	0.331872E+01	0.139795E+01	0.314830E+00
9	-0.574317E+01	0.445619E+00	-0.164924E+00	-0.568702E-03
10	-0.862250E+01	0.643909E+00	0.663587E+00	-0.797253E-01
5	0.441191E+01	0.277800E+01	0.208609E+00	-0.188491E+00

##### ELEMENT..... 5

NOEUD	FORCES			
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST
6	0.286799E+01	-0.629870E+00	-0.672746E-01	-0.703601E-01
11	-0.211475E+01	0.190641E+01	-0.495805E-01	0.140918E+00
12	-0.355295E+01	0.202484E+01	0.631921E+00	-0.191953E+00
7	0.275858E+01	-0.475039E+00	-0.128546E+00	0.526170E-01

##### ELEMENT..... 6

NOEUD	FORCES		TWIST	
	VERT	X-MOM		Y-MOM
7	0.160915E+01	-0.754990E+00	-0.107467E+00	-0.826335E-01
12	-0.148455E+01	0.169963E+01	-0.317608E+00	0.156621E+00
13	-0.346915E+01	0.200706E+01	0.666285E+00	-0.193878E+00
8	0.330551E+01	-0.482048E+00	-0.169277E+00	0.549229E-01

##### ELEMENT..... 7

NOEUD	FORCES		TWIST	
	VERT	X-MOM		Y-MOM
8	0.145143E+01	-0.752692E+00	-0.133078E+00	-0.832490E-01
13	-0.154723E+01	0.170227E+01	-0.351490E+00	0.159157E+00
14	-0.341674E+01	0.200498E+01	0.637456E+00	-0.192462E+00
9	0.347351E+01	-0.479753E+00	-0.190870E+00	0.536764E-01

##### ELEMENT..... 8

NOEUD	FORCES		TWIST	
	VERT	X-MOM		Y-MOM
9	0.826652E+00	-0.747778E+00	-0.173659E+00	-0.810171E-01
14	-0.157962E+01	0.171954E+01	-0.323602E+00	0.158344E+00
15	-0.290053E+01	0.190622E+01	0.374259E+00	-0.175638E+00
10	0.361256E+01	-0.645148E+00	-0.242803E+00	0.450426E-01

##### ELEMENT..... 9

NOEUD	FORCES		TWIST	
	VERT	X-MOM		Y-MOM
11	-0.290053E+01	-0.190622E+01	-0.374259E+00	-0.175638E+00
16	0.361256E+01	0.645148E+00	0.242803E+00	0.450426E-01
17	0.826652E+00	0.747778E+00	0.173659E+00	-0.810171E-01
12	-0.157962E+01	-0.171954E+01	0.323602E+00	0.158344E+00

##### ELEMENT..... 10

NOEUD	FORCES		TWIST	
	VERT	X-MOM		Y-MOM
12	-0.341674E+01	-0.200498E+01	-0.637456E+00	-0.192462E+00
17	0.347351E+01	0.479753E+00	0.190870E+00	0.536764E-01
18	0.145143E+01	0.752692E+00	0.133078E+00	-0.832490E-01
13	-0.154723E+01	-0.170227E+01	0.351490E+00	0.159157E+00

##### ELEMENT..... 11

NOEUD	FORCES		TWIST	
	VERT	X-MOM		Y-MOM
13	-0.346915E+01	-0.200706E+01	-0.666285E+00	-0.193878E+00
18	0.330551E+01	0.482048E+00	0.169277E+00	0.549229E-01
19	0.160915E+01	0.754990E+00	0.107467E+00	-0.826335E-01
14	-0.148455E+01	-0.169963E+01	0.317608E+00	0.156621E+00

##### ELEMENT..... 12

NOEUD	VERT		FORCES		
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST	
14	-0.355295E+01	-0.202484E+01	-0.631921E+00	-0.191953E+00	
19	0.275858E+01	0.475039E+00	0.128546E+00	0.526170E-01	
20	0.286799E+01	0.629870E+00	0.672746E-01	-0.703601E-01	
15	-0.211475E+01	-0.190641E+01	0.495805E-01	0.140918E+00	

##### ELEMENT..... 13

NOEUD	VERT		FORCES		
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST	
16	-0.862250E+01	-0.643909E+00	-0.663587E+00	-0.797253E-01	
21	0.441191E+01	-0.277800E+01	-0.208609E+00	-0.188491E+00	
22	0.995178E+01	-0.331872E+01	-0.139795E+01	0.314830E+00	
17	-0.574317E+01	-0.445619E+00	0.164924E+00	-0.568702E-03	

##### ELEMENT..... 14

NOEUD	VERT		FORCES		
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST	
17	-0.857791E+01	-0.779908E+00	-0.529279E+00	-0.415764E-01	
22	0.896357E+01	-0.330549E+01	0.139777E+01	-0.314675E+00	
23	0.623656E+01	-0.303829E+01	-0.100661E+01	0.293449E+00	
18	-0.662201E+01	-0.479497E+00	0.330725E+00	0.130041E-01	

##### ELEMENT..... 15

NOEUD	VERT		FORCES		
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST	
18	-0.815512E+01	-0.753200E+00	-0.633128E+00	-0.541200E-01	
23	0.649701E+01	-0.304098E+01	0.100657E+01	-0.282855E+00	
24	0.875075E+01	-0.331953E+01	-0.141837E+01	0.328215E+00	
19	-0.709240E+01	-0.513287E+00	0.215811E+00	-0.110853E-02	

##### ELEMENT..... 16

NOEUD	VERT		FORCES		
	VERT	X-MOM	Y-MOM	TWIST	
19	-0.729627E+01	-0.714674E+00	-0.452152E+00	-0.382795E-01	
24	0.103515E+02	-0.336131E+01	0.141845E+01	-0.309224E+00	
25	0.482007E+01	-0.288546E+01	0.208590E+00	0.209243E+00	
20	-0.787812E+01	-0.628889E+00	0.353500E+00	0.356020E-01	

NOMBRE TOTAL DE NOEUDS= 25

NOMBRE D'ELEMENTS= 16

NOEUD	CONDITIONS LIMITES				COORDONNEES	
	1	2	3	4	X	Y
1	0	0	1	0	0.0000E+00	0.0000E+00
2	0	0	1	0	0.0000E+00	0.5000E+00
3	0	0	1	0	0.0000E+00	0.1000E+01
4	0	0	1	0	0.0000E+00	0.1500E+01
5	0	0	1	0	0.0000E+00	0.2000E+01
6	1	1	1	1	0.0000E+00	0.0000E+00
7	1	1	1	1	0.5000E+00	0.5000E+00
8	1	1	1	1	0.5000E+00	0.1000E+01
9	1	1	1	1	0.5000E+00	0.1500E+01
10	1	1	1	1	0.5000E+00	0.2000E+01
11	1	1	1	1	0.1000E+01	0.0000E+00
12	1	1	1	1	0.1000E+01	0.5000E+00
13	1	1	1	1	0.1000E+01	0.1000E+01
14	1	1	1	1	0.1000E+01	0.1500E+01
15	1	1	1	1	0.1000E+01	0.2000E+01
16	1	1	1	1	0.1500E+01	0.0000E+00
17	1	1	1	1	0.1500E+01	0.5000E+00
18	1	1	1	1	0.1500E+01	0.1000E+01
19	1	1	1	1	0.1500E+01	0.1500E+01
20	1	1	1	1	0.1500E+01	0.2000E+01
21	0	0	1	0	0.2000E+01	0.0000E+00
22	0	0	1	0	0.2000E+01	0.5000E+00
23	0	0	1	0	0.2000E+01	0.1000E+01
24	0	0	1	0	0.2000E+01	0.1500E+01
25	0	0	1	0	0.2000E+01	0.2000E+01

NOMBRE TOTAL DE DEGRES DE LIBERTE = 70

\*\*\*\*\*

\*\*\* RESULTATS DES CALCULS \*\*\*

##### MODE..... 1 #####

VALEUR PROPRE..... 0.7624804E+04  
 FREQUENCE PROPRE... 0.8732012E+02

NOEUD	W	ROTX	ROTY	TWIST
1	0.0000000	0.0000000	0.0353713	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	-0.0064513	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	0.0064524	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	-0.0353720	0.0000000
6	0.0548286	0.1494720	-0.0162949	-0.0573939
7	0.0485106	0.1332804	-0.0099959	-0.0045940
8	0.0461447	0.1306892	0.0000000	0.0000000
9	0.0485104	0.1332799	0.0099964	0.0045852
10	0.0548285	0.1494704	0.0162929	0.0573769
11	0.1000355	0.0000000	-0.0396915	0.0000000

13	0.0853605	0.0000000	-0.0129805	0.0000000
14	0.0885099	0.0000000	0.0000000	0.0000000
15	0.1000351	0.0000000	0.0129797	0.0000000
16	0.0548282	0.0000000	0.0396920	0.0000000
17	0.0485107	-0.1494697	-0.0162937	0.0000000
18	0.0461449	-0.1332800	-0.0099948	0.0573
19	0.0485106	-0.1306903	0.0000000	0.0045
20	0.0548280	-0.1332799	0.0099957	0.0000000
21	0.0000000	-0.1494701	0.0162925	-0.0045
22	0.0000000	0.0000000	0.0353706	-0.0573
23	0.0000000	0.0000000	-0.0064497	0.0000000
24	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
25	0.0000000	0.0000000	0.0064513	0.0000000
			-0.0353705	0.0000000

##### MODE..... 2 #####

VALEUR PROPRE..... 0.1079041E+05  
 FREQUENCE PROPRE... 0.1038769E+03

NOEUD	W	ROTX	ROTY	TWIST
1	0.0000000	0.0000000	-0.0573382	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	0.0154660	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	0.0018366	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	0.0154658	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	-0.0573399	0.0000000
6	-0.0857925	-0.2181908	0.0836000	0.198030
7	-0.0445555	-0.1173244	0.0874088	0.205421
8	0.0000000	0.0000000	0.0887865	0.263141
9	0.0445565	0.1173243	0.0874104	0.205399
10	0.0857932	0.2181951	0.0835984	0.198056
11	-0.1504896	0.0000000	0.1519959	0.0000000
12	-0.0792392	0.0000000	0.1490507	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.1635486	0.0000000
14	0.0792393	0.0000000	0.1490506	0.0000000
15	0.1504898	0.0000000	0.1519964	0.0000000
16	-0.0857927	0.2181940	0.0835984	-0.1980480
17	-0.0445561	0.1173227	0.0874088	-0.2054200
18	0.0000000	0.0000000	0.0887850	-0.2631674
19	0.0445554	-0.1173240	0.0874081	-0.2054100
20	0.0857920	-0.2181934	0.0835986	-0.1980573
21	0.0000000	0.0000000	-0.0573397	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0154660	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0018381	0.0000000
24	0.0000000	0.0000000	0.0154668	0.0000000
25	0.0000000	0.0000000	-0.0573359	0.0000000

##### MODE..... 3 #####

VALEUR PROPRE..... 0.2993607E+05  
 FREQUENCE PROPRE... 0.1730204E+03

NOEUD	W	ROTX	ROTY	TWIST
1	0.0000000	0.0000000	0.0664987	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	-0.0347402	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	0.0347408	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	-0.0664976	0.0000000
6	0.0996569	0.2220226	-0.2266707	-0.4702708

7	-0.0106025	-0.0293450	-0.2006303	-0.4758175
8	-0.0672492	-0.1632796	0.0000000	0.0000000
9	-0.0106024	-0.0293450	0.2006316	0.4758279
10	0.0996577	0.2220234	0.2266731	0.4702522
11	0.1631716	0.0000000	-0.3730482	0.0000000
12	-0.0189940	0.0000000	-0.3343867	0.0000000
13	-0.1139852	0.0000000	0.0000000	0.0000000
14	-0.0189937	0.0000000	0.3343871	0.0000000
15	0.1631704	0.0000000	0.3730417	0.0000000
16	0.0996561	-0.2220177	-0.2266728	0.0000000
17	-0.0106036	0.0293478	-0.2006282	0.4702336
18	-0.0672501	0.1632812	0.0000000	0.4758093
19	-0.0106039	0.0293452	0.2006324	0.0000000
20	0.0996559	-0.2220183	0.2266717	-0.4758187
21	0.0000000	0.0000000	0.0664992	-0.4702326
22	0.0000000	0.0000000	-0.0347414	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
24	0.0000000	0.0000000	0.0347399	0.0000000
25	0.0000000	0.0000000	-0.0664958	0.0000000

##### MODE..... 4 #####

VALEUR PROPRE..... 0.5806719E+05  
 FREQUENCE PROPRE... 0.2409713E+03

NOEUD	W	ROTX.	ROTY	TWIST
1	0.0000000	0.0000000	-0.1311977	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	0.0247265	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	-0.0247311	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	0.1311951	0.0000000
6	-0.1014179	-0.0869926	0.0769979	-0.0176616
7	-0.0810593	-0.0800492	0.0295052	-0.0405444
8	-0.0739692	-0.0833106	0.0000000	0.0000000
9	-0.0810592	-0.0800456	-0.0295002	0.0405581
10	-0.1014148	-0.0869873	-0.0769901	0.0176496
11	0.0000000	0.3898786	0.0000000	-0.3307788
12	0.0000000	0.3156692	0.0000000	-0.0901841
13	0.0000000	0.2944511	0.0000000	0.0000000
14	0.0000000	0.3156643	0.0000000	0.0901864
15	0.0000000	0.3898806	0.0000000	0.3307950
16	0.1014177	-0.0869881	-0.0769991	-0.0176643
17	0.0810595	-0.0800471	-0.0295062	-0.0405497
18	0.0739682	-0.0833075	0.0000000	0.0000000
19	0.0810587	-0.0800457	0.0295077	0.0405427
20	0.1014184	-0.0869975	0.0770021	0.0176446
21	0.0000000	0.0000000	0.1311919	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	-0.0247252	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
24	0.0000000	0.0000000	0.0247327	0.0000000
25	0.0000000	0.0000000	-0.1312044	0.0000000

##### MODE..... 5 #####

VALEUR PROPRE..... 0.6839540E+05  
 FREQUENCE PROPRE... 0.2615251E+03

NOEUD	W	ROTX	ROTY	TWIST
1	0.0000000	0.0000000	0.1866558	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	-0.0553856	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	-0.0121806	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	-0.0553859	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	0.1866611	0.0000000
6	0.1402464	0.1087065	-0.1554804	-0.0061958
7	0.0754524	0.0667584	-0.1457794	-0.0698098
8	0.0000000	0.0000000	-0.1481357	-0.2202654
9	-0.0754530	-0.0667608	-0.1457784	-0.0697828
10	-0.1402471	-0.1087110	-0.1554813	-0.0062263
11	0.0000000	-0.5309064	0.0000000	0.6337221
12	0.0000000	-0.2887711	0.0000000	0.5286531
13	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.5957328
14	0.0000000	0.2887747	0.0000000	0.5286482
15	0.0000000	0.5309009	0.0000000	0.6337060
16	-0.1402475	0.1087142	0.1554837	-0.0062317
17	-0.0754522	0.0667622	0.1457796	-0.0697923
18	0.0000000	0.0000000	0.1481326	-0.2202721
19	0.0754526	-0.0667561	0.1457805	-0.0698177
20	0.1402483	-0.1087115	0.1554840	-0.0062077
21	0.0000000	0.0000000	-0.1866553	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0553849	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0121790	0.0000000
24	0.0000000	0.0000000	0.0553857	0.0000000
25	0.0000000	0.0000000	-0.1866603	0.0000000

### 5 . 3 . 3 . Analyse des résultats

Pour pouvoir faire une analyse concernant l'effet de l'effort tranchant sur les déplacements statiques et les modes de vibrations des plaques à 4 noeuds, faut terminer d'élaborer le sous-programme de génération de la matrice de rigidité, déduite de la théorie de Mindlin-Reissner.

Avec un telle sous-programme, injecté au même programme principal présenté, les calcul seraient refait de la même manière que décrit précédemment, et la comparaison entre les résultats possible.



CHAPITRE 6

CONCLUSION

## CONCLUSION

Le but de ce projet était l'étude de l'influence de l'effet transverse sur les modes de vibrations des éléments poutres et plaques en flexion; Cette objectif a été complètement atteint pour ce qui concerne l'élément poutre.

En effet, on a pu établir des programmes (statique et dynamique) pouvant être utilisé pour n'importe quelle poutre et, même étendus aux structures en poutres (ou treillis).

Ces programmes, basés sur deux théories (énergie de déformation sans effort tranchant et avec effort tranchant), permettent de connaître le pourcentage d'erreur auquel on s'expose lorsqu'on ne tient pas compte de la force de cisaillement.

Les quelques exemples traités du cas statique montrent qu'il est tout à fait possible de travailler en négligeant l'effet transverse pour les constructions n'exigeant pas une exceptionnelle précision.

Pour les modes de vibrations il existe quelques modes pour les quelles l'erreur est relativement importante, comparé aux erreurs du cas statique.

mais il faudrait un problème pratique et concret pour évaluer le danger encourus par le fait de négliger l'effet transverse.

Pour ce qui est de l'élément plaque il a fallut avoir recours à deux théories totalement différentes: Kirchhoff-Poisson et Mindlin-Reissner.

Les programmes développés permettent de calculer des déplacements et des forces nodales (cas statique) d'une part, et les valeurs, fréquences et vecteurs propres (cas dynamique) d'autre part.

Malheureusement, la comparaison des deux théories n'a pas pu être établit, à cause du sous-programme de génération de la matrice de rigidité de l'élément de Hughes, qui n'est pas encore au point.

. Nous espérons voir ce travail poursuivi pour deux raisons principales:

- La comparaison des différentes formulations d'éléments plaques avec la théorie classique.

- Faire connaître, chez nous, toute la gamme d'éléments variés qui sont régulièrement formulés de par le monde, et qui diffèrent entre eux par le nombre de noeuds qui forment l'élément, par leurs dispositions et par les fonctions utilisées pour modéliser l'élément (formulation par les déplacements, par les contraintes ou formulation mixte déplacements-contraintes).

ANNEXE

## INTEGRATION NUMERIQUE DE GAUSS [1]

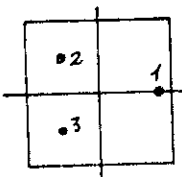
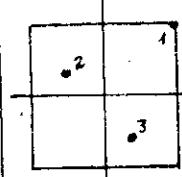
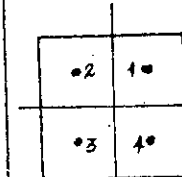
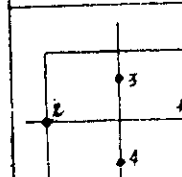
Nous ne considérons que le cas qui nous intéresse, c'est à dire, l'intégration à deux dimensions rapportée à un élément de référence carré.

La formule générale de cette méthode d'intégration est:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 y(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \approx \sum_{i=1}^r w_i \cdot y(\xi_i, \eta_i)$$

Cette formule sert à intégrer exactement les polynômes d'ordre  $m$ .

Les différentes variables  $\xi_i, \eta_i, w_i$  et  $m$  sont données par le tableau suivant:

	Ordre $m$	Nombre de points $r$	Coordonnées $\xi_i$ $\eta_i$	Poids $w_i$
	2	3	$\frac{\sqrt{2}}{3}$ 0 $-\frac{1}{\sqrt{6}}$ $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{3}$ $\frac{4}{3}$
	2	3	1    1 $-\frac{5}{9}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{1}{3}$ $-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$ $\frac{27}{14}$ $\frac{3}{2}$
	3	4 (Méthode produit à 2 x 2 points)	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
	3	4	$\pm 1$ 0 0 $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{4}{3}$

	3	4	$\pm \sqrt{2/3}$ 0 0 $\pm \sqrt{2/3}$	1
	5	7	0    0 0 $\pm \sqrt{4/15}$ $\pm \sqrt{3/5}$ $\pm \sqrt{3/5}$	8/7 20/63 20/36
	5	7	0    0 -r    -r +r    +r +s    -t -s    +t +t    -s -t    +s $r = \sqrt{7/15} \approx 0,683$ $s = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{24}}{15}} \approx 0,89$ $t = \sqrt{\frac{7 - \sqrt{24}}{15}} \approx 0,374$	8/7 } 100/168 } 20/48

## BIBLIOGRAPHIE

### LIVRES:

- [1]. G. Dhatt & G. Touzot  
"Une présentation de la méthode des éléments finis"  
Ed. Maloine. Paris. 2<sup>ème</sup> édition. 1984
- [2]. O. Rahmani & S. Kebdani  
"Introduction à la méthode des éléments finis pour les ingénieurs"  
O.P.U. Alger. 1988
- [3]. T.J.R. Hughes  
"The finite element method (linear, static and dynamic finite element analysis)"  
Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New-Jersey
- [4]. O.C. Zienkiewicz  
"La méthode des éléments finis"  
McGraw-Hill. Paris. 1979
- [5]. R.H. Gallagher  
"Introduction aux éléments finis"  
Ed. Pluralis. Paris. 1976
- [6]. I.H. Shames  
"Energy and finite element methods in structural mechanics"  
McGraw-Hill. Auckland. 1985
- [7]. T. Yang  
"Finite element in structural analysis"  
Ed. Prentice-Hill. 1986

### ARTICLES

- [8]. E.D.L. Pugh, E. Hinton & O.C. Zienkiewicz  
"A study of quadrilateral plate bending element with reduced integration"  
International Journal for Numerical Methods in Engineering.  
Vol. 12. pp.1059-1079. 1978
- [9]. T.J.R. Hughes, R.L. Taylor & W. Kanoknukulchai  
"A simple and efficient finite element for plate bending"  
International Journal for Numerical Methods in Engineering.  
Vol. 11. pp.1529-1543. 1977

COURS

[10]. A. Charif  
"Calcul automatique des structures"  
Ecole Nationale Polytechnique. Département de Génie Civil  
5<sup>ème</sup> année

[11]. S. Réchak  
"Vibrations des structures"  
Ecole Nationale Polytechnique. Département de Génie Mécanique  
5<sup>ème</sup> année

Projets de fin d'étude

[12]. A. Bentebbiche  
"Etude comparative des méthodes de calcul des éléments  
propres des structures"  
Ecole Nationale Polytechnique. Janvier. 1987

[13]. M.Z. Bendjaballah  
"Etude statique du châssis du camion K120 par la méthode des  
éléments finis"  
Ecole Nationale Polytechnique. Juin. 1988



