

# THESE DE MAGISTER

M0037/93A

présentée  
à

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER

المكتبة - المكتبة  
BIBLIOTHEQUE - المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

EN GENIE MECANIQUE

PAR

Mlle. NADIA AMOR

## MODELISATION AERODYNAMIQUE DES ECOULEMENTS SUBSONIQUES ET SUPERSONIQUES AUTOUR DE COMBINAISONS AILE- FUSELAGE

Soutenu le 15 Décembre 1993 devant le Jury composé de :

Mr. A. GAHMOUSSE	Professeur	E.N.P.	Président
Mr. S. RECHAK	Professeur	E.N.P.	Examineur
Mr. M. BOUKABACHE	Maitre de conférence	E.N.P.	Examineur
Mr. S. LARBI	Maitre assistant	E.N.P.	Examineur
Mr. A. SOUABI	Maitre de conférence	U.S.T.B.	Rapporteur

DECEMBRE 1993

# THESE DE MAGISTER

présentée  
à

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة —  
BIBLIOTHEQUE —  
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER

EN GENIE MECANIQUE

PAR

Mlle. NADIA AMOR

MODELISATION  
AERODYNAMIQUE DES  
ECOULEMENTS SUBSONIQUES  
ET SUPERSONIQUES AUTOUR  
DE COMBINAISSONS AILE -  
FUSELAGE

Soutenue le 15 Décembre 1993 devant le Jury composé de :

Mr. A. GAHMOUSSE	Professeur	E.N.P.	Président
Mr. S. RECHAK	Professeur	E.N.P.	Examinateur
Mr. M. BOUKABACHE	Maitre de conférence	E.N.P.	Examinateur
Mr. S. LARBI	Maitre assistant	E.N.P.	Examinateur
Mr. A. SOUABI	Maitre de conférence	U.S.T.B.	Rapporteur

DECEMBRE 1993

## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma gratitude et mes sincères remerciements :

- à Monsieur A. SOUABI, maître de conférence à l'université de Blida, sous la direction duquel ce travail a été effectué; ses conseils judicieux et son aide m'ont permis de mener à bien cette étude.
- à Monsieur Frank A. WOODWARD, chercheur spécialiste en aérodynamique ancien vice-président de la "Commercial Airplane Division". Je lui suis très reconnaissante pour l'aide constante qu'il m'a apportée, de ses judicieuses remarques et des longues heures qu'il a bien voulu me consacrer.
- à Monsieur R. DJELLOULI pour son aide qui m'a été fructueuse.
- à Monsieur A. GAHMOUSSE, Professeur à l'E.N.P. d'avoir accepté de présider le Jury.
- à tous les membres de jury qui ont accepté d'évaluer ce travail.

## ABSTRACT

An effective and versatile method allowing the analysis of wing body combinations at subsonic and supersonic speeds is presented in this study. This method based on the singularity source/vortex distributions offers an interesting approach to the solution of the linearised potential flow problems.

The configuration surface to analyse is subdivided into a large number of elementary panels, each of which contains an aerodynamic singularity distribution. The normal components of velocity induced at specified control points of these panels are calculated and make up the aerodynamic influence coefficients which would be used for a static aeroelastic futur study.

Examples presented here indicate a good conformity between this method and experiment.

## KEY WORDS

Potential flow - Panel methods - Lifting surface theory - Subsonic aerodynamics - Supersonic aerodynamics - Source singularities - Vortex singularities - Pressure distribution - Solution of linear equations - Aerodynamic influence coefficients.

## RESUME

Une méthode efficace et d'une grande souplesse permettant d'analyser des combinaisons ailes-fuselage à des vitesses subsoniques et supersoniques est présentée dans cette étude. Cette méthode basée sur des distributions de singularités source/vortex offre une approche intéressante à la solution des problèmes de l'écoulement potentiel linéarisé.

La surface de la configuration à analyser est subdivisée en panneaux élémentaires contenant chacun une distribution de singularité aérodynamique. Les composantes normales des vitesses induites aux points de contrôle de ces panneaux par chaque distribution de singularité sont calculées et forment ainsi les coefficients d'influence aérodynamique qui pourraient être utilisés pour une future étude aéroélastique statique.

Les exemples présentés indiquent une bonne conformité entre les résultats donnés par cette méthode et ceux obtenus à partir de tests réalisés en soufflerie.

## MOTS CLES

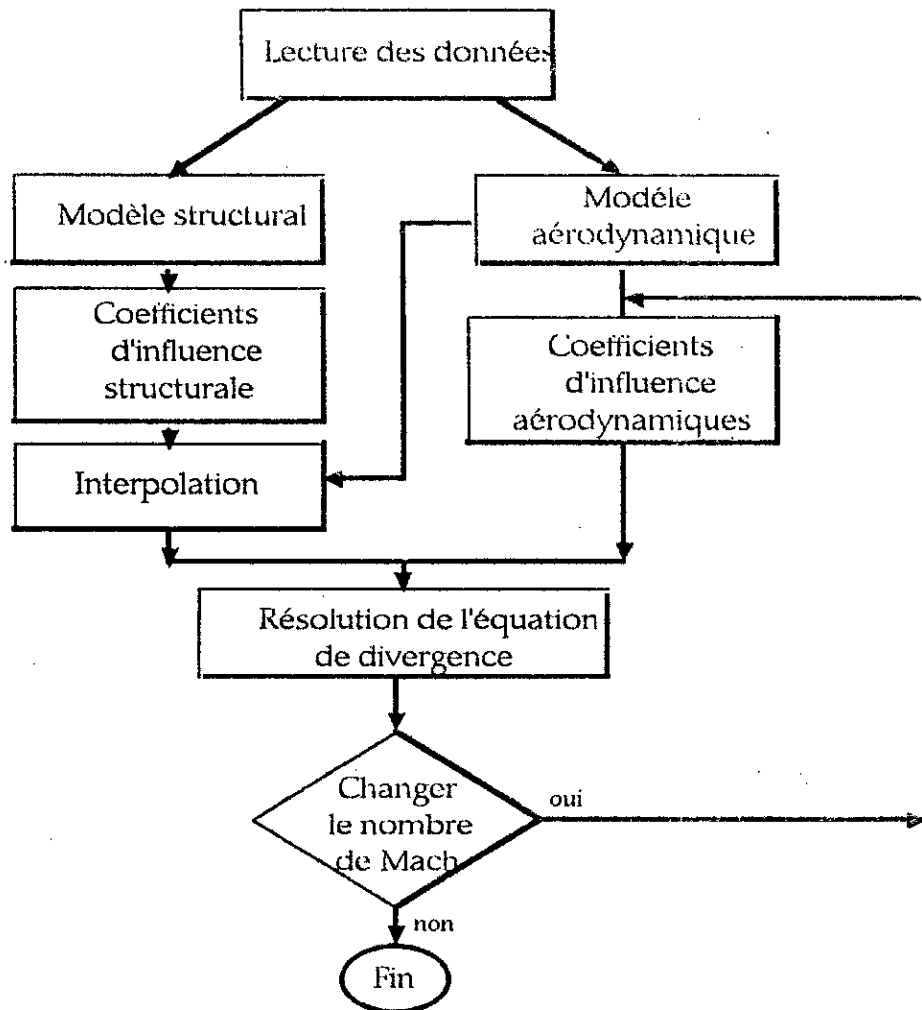
Écoulement potentiel - Méthodes des panneaux - Théorie de la surface portante - Aérodynamique subsonique - Aérodynamique supersonique - Singularités sources - Singularités vortex - Distribution de pression - Solution des équations linéaires - Coefficients d'influence aérodynamique.

## INTRODUCTION

La divergence en torsion, caractérisée par une instabilité structurale des ailes notamment celles à flèche avant, représente un problème aéroélastique statique introduisant conjointement une interaction entre les forces aérodynamiques et élastiques.

L'analyse aéroélastique d'un tel phénomène, comme indiqué sur l'organigramme ci-dessous, est une fonction interdisciplinaire qui nécessite les étapes suivantes :

- Une analyse aérodynamique permettant d'obtenir un modèle aérodynamique de l'aile et de déterminer, par suite, la matrice à coefficients d'influence aérodynamique appelée encore matrice de rigidité aérodynamique.
- Une modélisation structurale de l'aile permettant d'évaluer la matrice de souplesse ou matrice à coefficients d'influence structurale.
- Puisque les forces aérodynamiques dépendent de la déformation de la structure (et vice versa) et que les deux maillages ne peuvent pas être identiques, une interpolation est alors nécessaire pour interconnecter ces deux modèles afin qu'ils soient dans une forme compatible à résoudre.
- Une résolution de l'équation de la divergence en torsion de l'aile est nécessaire pour estimer la pression aérodynamique de divergence et évaluer, par conséquent, la vitesse critique de divergence à partir de laquelle ce phénomène commence à apparaître.



Organigramme du programme de divergence.

A cet effet, il est nécessaire de pouvoir disposer d'un logiciel permettant une étude détaillée de la modélisation aérodynamique ce qui a été l'objet principal de cette thèse. Une future étude aéroélastique statique ne nécessiterait alors que la création d'une interface avec n'importe quel programme source d'éléments finis.

Depuis quelques années, la modélisation potentielle, en vue d'être utilisée pour les études aéroélastiques, a motivé un grand nombre d'articles, livres, rapports et congrès internationaux. Parmi les méthodes proposées pour estimer numériquement l'écoulement potentiel autour de configurations tridimensionnelles, la méthode de distribution de singularités en surface est probablement la première qui a été largement utilisée dans les processus d'analyse et surtout pour résoudre les problèmes de conception de configurations géométriquement complexes (avions supersoniques par exemple). Un schéma numérique capable d'estimer les caractéristiques aérodynamiques d'une configuration complète pourrait être considéré comme un outil puissant aussi bien dans le processus de conception que dans le problème d'analyse.

Dans ce travail, nous nous proposons, à l'aide du modèle potentiel linéarisé, d'analyser les écoulements subsoniques et supersoniques autour de configurations quelconques et de déterminer, au moyen de la méthode de singularité ou des panneaux, la matrice à coefficients d'influence aérodynamique pouvant être

utilisée pour une étude aéroélastique statique, ainsi que les distributions de pression agissant sur de telles géométries. L'équation de l'écoulement potentiel linéarisé, à l'état stationnaire, est alors résolue en considérant les conditions à la surface de la configuration en question.

\*D'autre part, vu les hypothèses de départ, nous notons que les écoulements transsoniques et les écoulements supersoniques avec des ondes de choc de forte intensité sont exclus.

Afin d'illustrer l'application de cette méthode à l'analyse des écoulements subsoniques et supersoniques autour de différentes géométries, plusieurs exemples sont traités et les résultats numériques obtenus sont comparés aux résultats expérimentaux publiés par certains investigateurs. Certaines conclusions tirées indiquent une bonne conformité entre la présente méthode et l'expérience et que cette méthode pourrait être utilisée à une grande majorité d'applications d'intérêt pratique.

## LISTE DES SYMBOLES

- a Tangente de l'angle d'inclinaison  $\delta$  du panneau du fuselage ou paramètre représentant  $(\lambda_2 - \lambda_1)$  tangente d'un panneau de l'aile, ou coefficient d'influence aérodynamique (source).
- A Matrice à coefficients d'influence aérodynamique ou aire d'un panneau.
- b Coefficient d'influence aérodynamique (vortex) ou envergure du panneau de l'aile.
- B Limite du domaine de fluide.
- c Corde du panneau.
- $\bar{c}$  Corde de référence.
- C Coefficient aérodynamique ou matrice complémentaire de la matrice aérodynamique à blocs diagonaux.
- $c_p$  Chaleur spécifique de l'air.
- d Distance du point de contrôle à l'origine de singularité ou diamètre du fuselage ou élément de la matrice inverse de la matrice à coefficients d'influence aérodynamique.
- D Domaine de fluide ou matrice à blocs diagonaux.
- e Distance du point de contrôle à l'extrémité du panneau de l'aile.
- f Fonction de vitesse.
- F, G, H Fonctions de distributions de vitesse ou fonctions d'influence.
- H Enthalpie totale.
- i Nombre imaginaire.



I	Expression intégrale.
k	Nombre d'itérations ou facteur de correction supersonique.
K	Fonction de Kernel.
L	Longueur de la ligne source ou du filament vortex ou longueur du fuselage.
m	Tangente de l'angle fait par le côté latéral du panneau du fuselage et la direction de l'écoulement ( $dy/dx$ ).
M	Nombre de Mach ou moment de tangage.
n	Cosinus directeur du vecteur normal au panneau.
N	Force normale ou nombre de singularités aérodynamiques ou composante du vecteur vitesse normal au panneau.
NB	Nombre de panneaux du fuselage.
NW	Nombre de panneaux de l'aile.
P	Pression locale.
q	Vitesse au point de contrôle.
r	Distance radiale.
$Re$	Partie réelle d'une expression complexe.
s	Variable auxiliaire.
S	Aire de référence de l'aile.
t	Fonction de distribution auxiliaire de vitesse ou épaisseur de l'aile.
T	Température locale ou force tangentielle
(u, v, w)	Composantes de la vitesse induite par une distribution de singularités source/vortex.
( $\bar{u}$ , $\bar{v}$ , $\bar{w}$ )	Images des composantes (u, v, w) de la vitesse induite par des distributions de singularités source/vortex
V	Vitesse induite au point de contrôle.
(x, y, z)	Coordonnées cartésiennes du point P dans le repère (Ox, Oy, Oz).

## ALPHABET GREC

$\alpha$	Angle d'attaque ou angle entre le côté latéral du panneau du fuselage et la direction du courant (axe x).
$\beta$	Paramètre du nombre de Mach ou facteur de compressibilité.
$\gamma$	Rapport des chaleurs spécifiques de l'air, ou intensité de singularité aérodynamique.
$\Gamma$	Intensité du filament vortex.
$\delta$	Angle d'inclinaison du panneau avec l'axe x.
$\Delta$	Valeur incrémentale.
$\theta$	Angle d'inclinaison du panneau avec le plan x, y.
$\lambda$	Tangente de l'angle de flèche du panneau ( $dy/dx$ ) ou cosinus directeur des coordonnées de transformation.
$\Omega$	Angle de flèche.
$\mu, \nu$	Cosinus directeurs des coordonnées de transformation.
$\xi, \eta$	Variables d'intégration suivant les axes x et y.
$\pi$	Rapport de la circonférence au diamètre du cercle.
$\rho$	Distance radiale ou densité.
$\phi$	Potentiel de vitesse ou angle entre le vecteur vitesse et l'axe x.
$\Phi$	Potentiel de vitesse de perturbation.
$\omega$	Composante normale de la vitesse.

## INDICES

B	Fuselage (body).
c	Compressible ou cambrure de l'aile.
cr	Critique.
D	Trainée.

e	Epaisseur.
i	Incompressible, indice du point de contrôle du panneau.
j	Indice du panneau influençant.
k	Indice du sommet d'un panneau.
L	Portance.
lim	Limite.
M	Moment.
N	Normal.
n <sub>BB</sub>	Nombre de blocs diagonaux.
p	Pression.
s	Source.
t, 0t	Totale.
T	Tangentiel.
v	Vortex.
W	Aile (wing).
x, y, z	Par rapport aux axes x, y, z.
∞	Courant ou écoulement libre.

#### EXPOSANTS

j	Indice du panneau influençant.
k	Nombre d'itérations.
s	Source.

## TABLE DES MATIERES

Chapitre I	Introduction à la modélisation aérodynamique	1
I -	Modèles utilisés	
-	Modèle d'Euler	1
-	Modèle potentiel	2
II -	Formulation mathématique du problème de l'écoulement potentiel	3
III -	Méthode de solution	9
III.1 -	Méthode de champs	9
III.2 -	Méthode de singularités	10
Chapitre II	Champ potentiel de vitesse dans un écoulement incompressible	13
I -	Lignes sources élémentaires	15
I.1 -	Point source	15
I.2 -	Lignes sources élémentaires	15
II -	Filaments vortex élémentaires	21
III -	Panneaux sources	24
III.1 -	Distribution de source constante sur un panneau trapézoïdal	24
III.2 -	Distribution de source constante sur un panneau avec flèche et effilé suivant la direction de l'envergure	26

III.3 - Distribution de source linéaire sur un panneau avec flèche et effilé suivant la direction de l'envergure	26
IV - Panneaux vortex	29
IV.1 - Distribution de vortex constant sur un panneau avec flèche et effilement	29
- IV.1a - Influence des vortex limites	29
IV.1b - Influence du vortex libre	30
IV.2 - Distribution de vortex à variation linéaire sur un panneau en flèche et effilé	31
- Première étape	32
a) Influence du vortex limite	32
b) Influence du vortex libre	34
- Deuxième étape	35
a) Influence du vortex limite	35
b) Contribution du sillage	37
- Troisième étape	39
Chapitre III Champ de vitesse de perturbation dans un écoulement compressible	41
I - Règles de Göthert et correction de la compressibilité	41
I.1 - Règle originale de Göthert ou règle 1	41
I.2 - Règle de Göthert étendue ou règle 2	43
II - Distribution de sources	46
II.1 - Distribution de source constante sur un panneau trapézoïdal	46
II.2 - Distribution de source constante sur un panneau en flèche et effilé suivant l'envergure	49
II.3 - Distribution de source linéaire sur un panneau en flèche et effilé suivant l'envergure	50
III - Distribution de vortex	51

III.1 - Distribution de vortex constant sur un panneau en flèche et effilé dans la direction de l'envergure	51
III.2 - Distribution de vortex à variation linéaire sur un panneau en flèche et effilé dans la direction de l'envergure	51
Chapitre IV Formulation et résolution du système d'équations aérodynamiques	55
I - Option des conditions aux limites non-plane	57
I.1 - Représentation aérodynamique	57
I.2 - Formulation du système d'équations à coefficients d'influence aérodynamiques	58
II - Option des conditions aux limites plane	61
II.1 - Représentation aérodynamique	61
II.2 - Formulation du système d'équations à coefficients d'influence aérodynamiques	63
III - Résolution du système d'équations à coefficients d'influence aérodynamique	66
IV - Calcul des pression, forces et moments	70
IV.1 - Coefficient de pression	71
Coefficient de pression critique	73
Coefficient de pression d'arrêt	73
Coefficient de pression du vide	74
IV.2 - Calcul des forces et moments aérodynamiques	74
Chapitre V Applications et résultats	75
I - Corps ou fuselage isolés	75
I.1 - Ogive-cylindre-"boattail" dans un écoulement subsonique	75
I.2 - Corps "parabolique" de révolution dans un écoulement supersonique	77
I.3 - Cône elliptique dans un écoulement supersonique	78
II - Ailes de différentes formes	79

III - Combinaisons aile-fuselage	86
III.1 - Corps ogive-cylindre avec aile en flèche dans un écoulement supersonique	86
III.2 - Corps de section circulaire avec aile en flèche dans des écoulements subsonique et supersonique	90
III.3 - Combinaison aile en flèche - fuselage circulaire dans un écoulement subsonique	94
IV - Conclusion	96
Chapitre VI Conclusions et perspectives	97
Annexe A Influence complète du panneau	100
Annexe B Expressions des fonctions d'influence	107
Annexe C Cône de Mach et région d'influence	113
Annexe D Structure et fonctions principales du code de calcul	123
Annexe E Définition géométrique de l'aile en flèche	125
Références bibliographiques	127

## CHAPITRE I

### MODELISATION DE L'ÉCOULEMENT NON-VISQUEUX ET METHODE DE SOLUTION

Le calcul aérodynamique s'occupe de la simulation numérique des champs d'écoulements autour d'une configuration donnée (avion par exemple). Cette simulation numérique nécessite, outre le choix d'un modèle mathématique devant être capable de modéliser les caractéristiques de l'écoulement, une méthode de résolution appropriée.

Vu que la majorité des ouvrages [Réfs. 1, 2, 3] traitant les problèmes aéroélastiques (divergence, stabilité longitudinale, flottement, ...) considère que l'écoulement autour des configurations à analyser est non-visqueux, nous allons introduire brièvement les différents modèles utilisés pour la modélisation d'un tel écoulement. Nous donnerons ensuite une formulation mathématique au modèle choisi et nous présenterons à la fin de ce chapitre une méthode de résolution adéquate.

#### I - MODELES UTILISES

Les modèles rencontrés actuellement pour décrire un écoulement non-visqueux sont :

- Modèle d'Euler :

Ce modèle, obtenu en négligeant simplement les termes visqueux et le terme lié au transfert thermique du modèle de Navier-Stokes [Réf. 4], traduit la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Il fournit une représentation physiquement plus exacte d'un écoulement non-visqueux. Ce modèle s'exprime par le système d'équations différentielles suivantes :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = 0 \quad (\text{Eq. 1.1})$$



où

$$U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho e)^t \quad (\text{Eqs. I.2})$$

$$F_i = (\rho u_i, \rho u_1 u_i + P\delta_{1i}, \rho u_2 u_i + P\delta_{2i}, \rho u_3 u_i + P\delta_{3i}, (\rho e + P) u_i)^t$$

$$i = 1, 2, 3$$

$(x_1, x_2, x_3)$  représentent les coordonnées cartésiennes orthogonales,  $\rho$  la densité du fluide,  $P$  sa pression,  $e$  l'énergie interne par unité de masse,  $(u, v, w)$  ou  $(u_1, u_2, u_3)$  dénotent les composantes du vecteur vitesse de l'écoulement et  $\delta_{ij}$  est l'indice de Kroneker.

A l'état stationnaire, le terme  $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$  est nul, et l'équation ci-dessus devient :

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{Eq. I.3})$$

- Modèle potentiel ou isentropique :

Le modèle potentiel ou isentropique est obtenu en supposant que l'écoulement non-visqueux est irrotationnel. Ce modèle mathématique décrit un écoulement où la masse, l'entropie et l'énergie sont conservées. A l'état stationnaire, l'équation différentielle fondamentale gouvernant ce type d'écoulement peut s'écrire comme suit :

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{Eq. I.4})$$

où  $\Phi_c$  représente le potentiel de vitesse de perturbation, c'est à dire  $\text{grad} \Phi_c = \vec{v}_p$ ,  $M$  le nombre de Mach.

La formulation fondamentale de l'écoulement irrotationnel [Réf. 5] consiste en fait à ignorer toute vorticité et de définir la vitesse comme étant partout irrotationnelle. Comme un champ de vitesse irrotationnel peut être exprimé comme le gradient d'une fonction potentielle scalaire, le problème revient donc à déterminer un champ scalaire plutôt qu'un champ vectoriel (Eq. I.4).

La modélisation potentielle a été utilisée à une grande majorité d'applications car les équations d'Euler étaient mathématiquement plus complexes; pour une configuration d'écoulement donnée, cette complexité se traduisait par une demande "en temps de calcul" plus importante que celle des méthodes de l'écoulement potentiel. Mais, l'accroissement de puissance et de capacité mémoire des nouvelles générations d'ordinateurs a rendu maintenant possible l'utilisation des équations d'Euler à la modélisation de l'écoulement non-visqueux. Un tel modèle a été développé surtout pour résoudre le problème des écoulements transoniques autour des ailes tridimensionnelles, exigeant un temps de calcul considérable, comme cela a été exemplifié par le travail de Rizzi et Erikson [Réf. 6].

Il est évident que l'adéquation de n'importe quel modèle dépend du type de problème mais, généralement, le modèle potentiel, dans sa forme complète, a été trouvé bien adéquat pour représenter les caractéristiques de l'écoulement autour des configurations type avion. Tandis que certains investigateurs préfèrent la solution donnée par les équations d'Euler pour l'application transsonique, d'autres proposent d'utiliser l'équation potentielle pour modéliser les écoulements subsonique mais aussi les écoulements supersoniques autour des avions comme représenté par les travaux de Grossman et Siclari [Réf. 7] et Shankar et Chakravarthy [Réf. 8].

Selon d'autres opinions, par exemple Réf. 9, le modèle isentropique doit être suffisant pour représenter la zone non-visqueuse pour la majorité d'applications aéronautiques et qu'à présent, il est convenable d'étendre la portée d'applications d'un tel modèle plutôt que de développer des codes plus complexes.

Pour cette première étape de ce chapitre, nous optons pour la modélisation potentielle pour l'analyse des écoulements autour des configurations tridimensionnelles en régime subsonique et supersonique et nous supposons que l'écoulement du fluide est stationnaire. Encore faut-il noter que cette modélisation a été largement utilisée [Réf. 1] principalement pour les études aéroélastiques statiques ou dynamiques (en régime instationnaire ou dynamique le terme  $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$  doit être rajouté dans Eq. 1.4).

## II - FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME DE L'ÉCOULEMENT POTENTIEL

Le problème considéré est celui de l'écoulement d'un fluide non-visqueux et incompressible autour d'une configuration complète (Fig. I.1) supposée fixe.

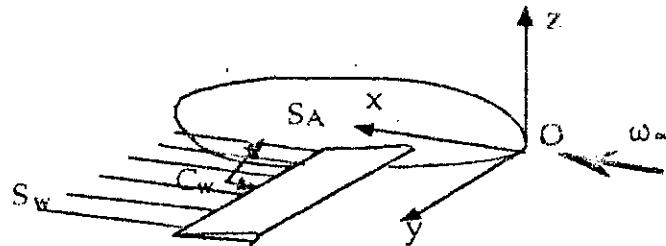


Fig. I.1

Il est convenable d'exprimer la vitesse  $V$  du fluide à n'importe quel point  $P(x_i, y_i, z_i)$  comme la somme de deux vitesses :

$$\vec{V} = \vec{\omega}_\infty + \vec{v}_p \quad (\text{Eq. 1.5})$$

La vitesse  $\omega_\infty$  est connue et représente le courant libre ( $\vec{\omega}_\infty$  est un vecteur constant) et  $v_p$  est la vitesse de perturbation due à la surface limite  $S_A$ , où  $S_A$  est la surface des ailes et du fuselage.

L'équation de continuité, pour un tel écoulement, se traduit par :

$$\text{div}(\vec{V}) = 0$$

ou (Eq. 1.6)

$$\operatorname{div}(\vec{v}_p) = 0$$

Si l'écoulement est supposé encore irrotationnel ( $\operatorname{rot} \vec{V} = 0$  ou  $\operatorname{rot} v_p = 0$ ), alors un potentiel de vitesse  $\phi_i(x_i, y_i, z_i)$  existera. Par définition,  $\vec{V}$  est le gradient du potentiel total  $\phi_i$  définie par :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \phi_i$$

et (Eq. 1.7)

$$\phi_i = \Phi_i + \vec{R} \vec{\omega}_\infty$$

où  $\vec{R}$  est un vecteur position  $(x_i, y_i, z_i)$  et  $\Phi_i$  le potentiel de vitesse de perturbation au point P. Ainsi,

$$\vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi_i + \vec{\omega}_\infty$$
(Eq. 1.8)

Sous ces hypothèses, l'équation de continuité ou l'équation d'une divergence nulle devient :

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z_i^2} = 0$$

dans la région potentielle (Eq. 1.9)

Cette équation différentielle est linéaire et est appelée équation de Laplace; elle est soumise à la condition à la limite de Neumann [Réf. 10] qui se présente dans l'analyse des configurations fixes et limitées par des surfaces de perméabilité connue.

Par exemple, comme montré dans Fig. 1.2, soit S une portion de la limite B du domaine de fluide D et  $\vec{n}$  un vecteur normal à la surface. Si S est imperméable, la composante normale de la vitesse totale  $\vec{V}$  devra être nulle sur celle-ci; c'est à dire

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} + \vec{\omega}_\infty \vec{n} = 0$$

sur la surface S

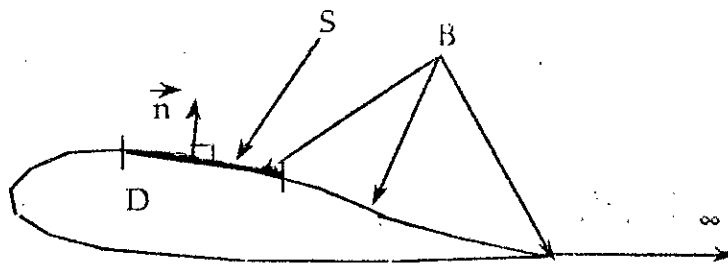
avec 
$$\frac{\partial \phi_i}{\partial n} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \phi_i \vec{n}$$
 (Eqs. 1.10)

et 
$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi_i \vec{n}$$

ici,  $\overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi_i$  est le vecteur vitesse de perturbation et  $\vec{n}$  représente un vecteur unitaire, sortant et normal à la surface considérée. La condition à la limite de Neumann exprimant l'imperméabilité (appelée encore condition de l'écoulement tangentiel) devient :

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = -\vec{\omega}_\infty \vec{n}$$

sur la surface (Eq. 1.11)



B représente la limite du domaine de fluide D et contient la surface de la configuration à analyser.

Fig. I.2

Une condition de régularité à l'infini, indiquant que les vitesses de perturbation deviennent nulles [Réf. 11], est exigée; cette condition s'écrit :

$$|\text{grad } \Phi_i| \rightarrow 0 \quad \text{à l'infini} \quad (\text{Eq. I.12})$$

Le calcul d'un écoulement stationnaire et irrotationnel d'un fluide non-visqueux et incompressible se ramène à la résolution du problème ( $\mathcal{P}_1$ ) suivant :

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z_i^2} = 0 \quad \text{dans la région potentielle}$$

$$(\mathcal{P}_1) \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = -\vec{\omega}_\infty \cdot \vec{n} \quad \text{sur la surface } S_A \quad (\text{Eqs. I.13})$$

$$|\text{grad } \Phi_i| \rightarrow 0 \quad \text{à l'infini}$$

La résolution de ce problème permettra de connaître la distribution du coefficient de pression qui s'exprime par :

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{1/2 \rho \omega_\infty^2} = 1 - \frac{(|\overline{\text{grad}} \Phi_i|)^2}{\omega_\infty^2} = 1 - \frac{(|\overline{\text{grad}} \Phi_i + \vec{\omega}_\infty|)^2}{\omega_\infty^2} \quad (\text{Eq. I.14})$$

où  $P_\infty$  est la pression de l'écoulement libre.

$\rho$  est la densité du fluide.

$(1/2 \rho \omega_\infty^2)$  est la pression dynamique.

Dans cette formulation, lorsque la combinaison aile-fuselage présente une portance, il existe une région de sillage issue de la partie arrière de cette combinaison. Nous supposons que cette région est une nappe d'épaisseur nulle notée  $S_w$  dans Fig. I.1, et notons l'intersection des courbes  $S_A$  et  $S_w$  par  $C_w$ . Cette surface

de sillage  $S_w$  est supposée être formée d'une famille de lignes de courant issues de  $C_w$ .

De la condition de Kutta, la position de  $C_w$  peut être prise suivant et en aval du bord de fuite de l'aile.

Si nous prenons maintenant le cas d'un écoulement isentropique, irrotationnel et stationnaire d'un fluide compressible et non-visqueux, l'équation différentielle gouvernant ce type d'écoulement sera établie en tenant compte de la conservation de la masse, de l'entropie et de l'énergie.

L'équation de continuité pour un écoulement tridimensionnel et permanent est donnée par :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w + \rho \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] = 0 \quad (\text{Eq. I.15})$$

Sachant que pour un écoulement, supposé non-visqueux et irrotationnel, un potentiel de vitesse  $\phi_c(x, y, z)$  existe et la vitesse totale  $V$  est définie par :

$$\vec{V} = \vec{\text{grad}} \phi_c \quad (\text{Eqs. I.16})$$

$$\text{où } \phi_c = \Phi_c + \vec{R} \cdot \vec{\omega}_\infty$$

où  $\vec{R}$  est un vecteur position  $(x, y, z)$ .

Les composantes de la vitesse de perturbation s'obtiennent par :

$$u_c = \frac{\partial \phi_c}{\partial x} ; \quad v_c = \frac{\partial \phi_c}{\partial y} ; \quad w_c = \frac{\partial \phi_c}{\partial z} \quad (\text{Eq. I.17})$$

L'équation I.15 devient :

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \phi_c}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \phi_c}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left[ \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (\text{Eq. I.18})$$

Cette équation dépend de  $\phi_c$  et  $\rho$ ; essayons d'exprimer  $\rho$  en fonction de  $\phi_c$  pour que Eq. I.18 ne dépende que de  $\phi_c$ .

L'équation de la quantité de mouvement ou d'Euler pour un écoulement permanent d'un fluide non-visqueux et compressible se traduit par :

$$dp = -\rho V \cdot dV = -1/2 \rho d(V^2) = -1/2 \rho d(u^2 + v^2 + w^2)$$

$$dp = -\frac{1}{2} \rho d \left[ \left( \frac{\partial \phi_c}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_c}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_c}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (\text{Eq. 1.19})$$

Sachant, d'autre part, que l'écoulement est isentropique, ainsi, n'importe quel changement,  $dp$ , dans l'écoulement est automatiquement accompagné d'un changement isentropique de densité  $d\rho$ , c'est à dire :

$$\frac{dp}{d\rho} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = a^2 \quad (\text{Eq. 1.20})$$

$$\text{où } a \text{ est la vitesse du son. Ainsi : } dp = a^2 d\rho \quad (\text{Eq. 1.21})$$

En substituant Eq. 1.21 dans Eq. 1.19, nous aurons :

$$dp = -\frac{\rho}{2 a^2} d \left[ \left( \frac{\partial \phi_c}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_c}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_c}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (\text{Eq. 1.22})$$

en dérivant Eq. 1.22 par rapport à  $x$ ,  $y$  et  $z$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= -\frac{\rho}{a^2} \left[ \frac{\partial \phi_c}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_c}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi_c}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial x \partial z} \right] \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} &= -\frac{\rho}{a^2} \left[ \frac{\partial \phi_c}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \phi_c}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_c}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial y \partial z} \right] \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} &= -\frac{\rho}{a^2} \left[ \frac{\partial \phi_c}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial z \partial x} + \frac{\partial \phi_c}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial z \partial y} + \frac{\partial \phi_c}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{Eqs. 1.23})$$

L'équation 1.18 devient :

$$\begin{aligned} & \left[ a^2 - \left( \frac{\partial \phi_c}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial x^2} + \left[ a^2 - \left( \frac{\partial \phi_c}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial y^2} + \left[ a^2 - \left( \frac{\partial \phi_c}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial z^2} \\ & - 2 \left[ \left( \frac{\partial \phi_c}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \phi_c}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial \phi_c}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \phi_c}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial x \partial z} + \left( \frac{\partial \phi_c}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \phi_c}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial y \partial z} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{Eq. 1.24})$$

Quoique cette équation a l'avantage d'être fonction d'une seule variable  $\phi_c$ , elle présente un inconvénient distinct d'être une équation différentielle non-linéaire qui est difficile à résoudre analytiquement. Jusqu'à maintenant, aucune solution analytique à cette équation n'a été trouvée contrairement à celle de l'écoulement incompressible qui est gouverné par l'équation de Laplace et pour laquelle plusieurs solutions analytiques sont bien connues.

Des suppositions ont été alors introduites afin de linéariser Eq. 1.24. En utilisant Eqs. 1.16 et 1.17, Eq. 1.24 devient :

$$\left[ a^2 - \left( \omega_\infty + \frac{\partial \Phi_c}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial x^2} + \left[ a^2 - \left( \frac{\partial \Phi_c}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial y^2} + \left[ a^2 - \left( \frac{\partial \Phi_c}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial z^2} - 2 \left[ \left( \omega_\infty + \frac{\partial \Phi_c}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \Phi_c}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial x \partial y} + \left( \omega_\infty + \frac{\partial \Phi_c}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \Phi_c}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial x \partial z} + \left( \frac{\partial \Phi_c}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \Phi_c}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial y \partial z} \right] = 0 \quad (\text{Eq. 1.25})$$

Eq. 1.25 représente l'équation du potentiel de vitesse de perturbation; d'autre part, en utilisant l'équation de l'énergie donnée par :

$$\frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} + \frac{\omega_\infty^2}{2} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{(\omega_\infty + u_c)^2 + v_c^2 + w_c^2}{2} \quad (\text{Eq. 1.26})$$

et la relation  $M_\infty^2 = \omega_\infty^2 / a_\infty^2$

Eq. 1.25, exprimée seulement en fonction des vitesses compressibles de perturbation  $u_c$ ,  $v_c$  et  $w_c$ , devient :

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial u_c}{\partial x} + \frac{\partial v_c}{\partial y} + \frac{\partial w_c}{\partial z} = M_\infty^2 \left[ \frac{\gamma + 1}{2} \frac{u_c^2}{\omega_\infty^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v_c^2 + w_c^2}{\omega_\infty^2} + (\gamma + 1) \frac{u_c}{\omega_\infty} \frac{\partial u_c}{\partial x} + M_\infty^2 \left[ \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u_c^2 + w_c^2}{\omega_\infty^2} + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{v_c^2}{\omega_\infty^2} + (\gamma - 1) \frac{u_c}{\omega_\infty} \frac{\partial v_c}{\partial y} + M_\infty^2 \left[ \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u_c^2 + v_c^2}{\omega_\infty^2} + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{w_c^2}{\omega_\infty^2} + (\gamma - 1) \frac{u_c}{\omega_\infty} \frac{\partial w_c}{\partial z} + 2 M_\infty^2 \left( \frac{v_c}{\omega_\infty} \frac{\partial u_c}{\partial y} + \frac{w_c}{\omega_\infty} \frac{\partial u_c}{\partial z} \right) \left( 1 + \frac{u_c}{\omega_\infty} \right) + \frac{v_c w_c}{\omega_\infty^2} \frac{\partial v_c}{\partial z} \right] \right] \quad (\text{Eq. 1.27})$$

Pour de faibles perturbations et pour des régimes d'écoulement subsoniques et supersoniques l'équation ci-dessus devient :

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial u_c}{\partial x} + \frac{\partial v_c}{\partial y} + \frac{\partial w_c}{\partial z} = 0$$

ou :

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{Eq. 1.28})$$

C'est une équation différentielle linéaire et du second ordre.

Pour un écoulement isentropique, stationnaire, irrotationnel et faiblement perturbé d'un fluide non-visqueux et compressible, le problème revient à résoudre :

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial z^2} = 0 \quad \text{dans la région potentielle}$$

$$\text{où } \beta^2 = 1 - M_\infty^2$$

(P<sub>2</sub>)

(Eq. 129)

$$\frac{\partial \Phi_c}{\partial n} = -\omega_\infty n \quad \text{sur la surface}$$

$$|\vec{\text{grad}} \Phi_c| \rightarrow 0 \quad \text{à l'infini}$$

et la distribution du coefficient de pression sera donnée par :

$$C_p = 1 - \frac{(\vec{\text{grad}} \Phi_c)^2}{\omega_\infty^2} = 1 - \frac{(\vec{\omega}_\infty + \vec{\text{grad}} \Phi_c)^2}{\omega_\infty^2} \quad \text{(Eq. 130)}$$

Nous verrons dans les chapitres subséquents que la solution du problème (P<sub>2</sub>) pourrait être obtenue à partir de celle du problème (P<sub>1</sub>).

### III - METHODE DE SOLUTION

Cette étape consiste à choisir une méthode numérique pour résoudre l'équation différentielle décrivant le modèle de l'écoulement préalablement formulé. Dans les applications aérodynamiques, deux différentes méthodes de solution sont communément utilisées : méthode de champs et de singularités (Fig. 13).

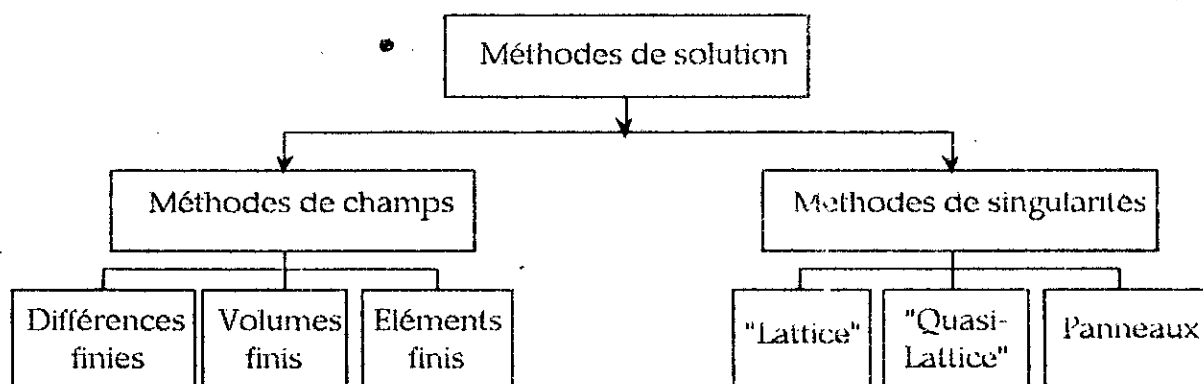


Fig. 13 Différentes méthodes de solution.

#### III.1 - Méthodes de champs

Comme indiqué sur Fig. 13, les méthodes de différences finies, de volumes finis et d'éléments finis font partie de cette classe de solution. Ces techniques sont presque exclusivement utilisées pour résoudre les équations différentielles partielles non-linéaires traduisant le modèle de l'écoulement. Elles resteront très



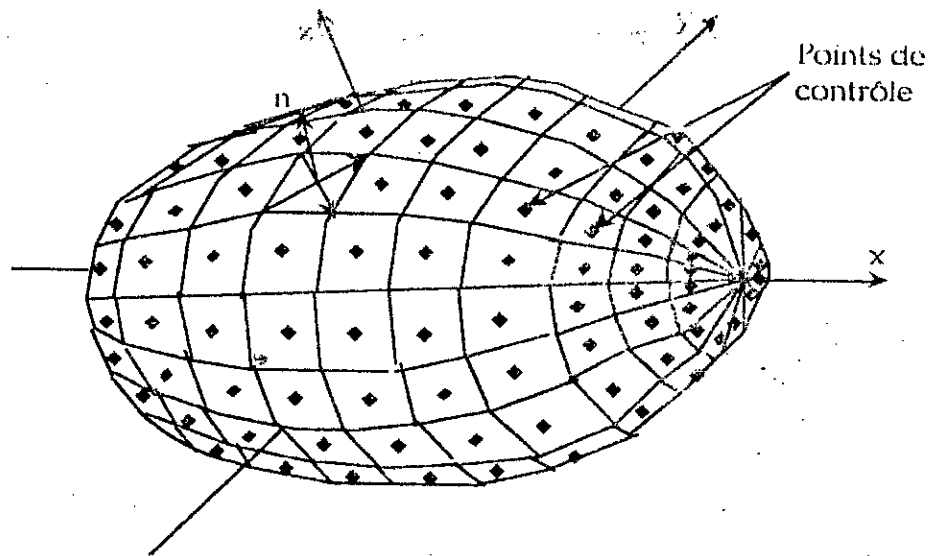
probablement les principaux outils de solutions pour les écoulements transoniques [Réf. 9].

### III.2 - Méthodes de singularités

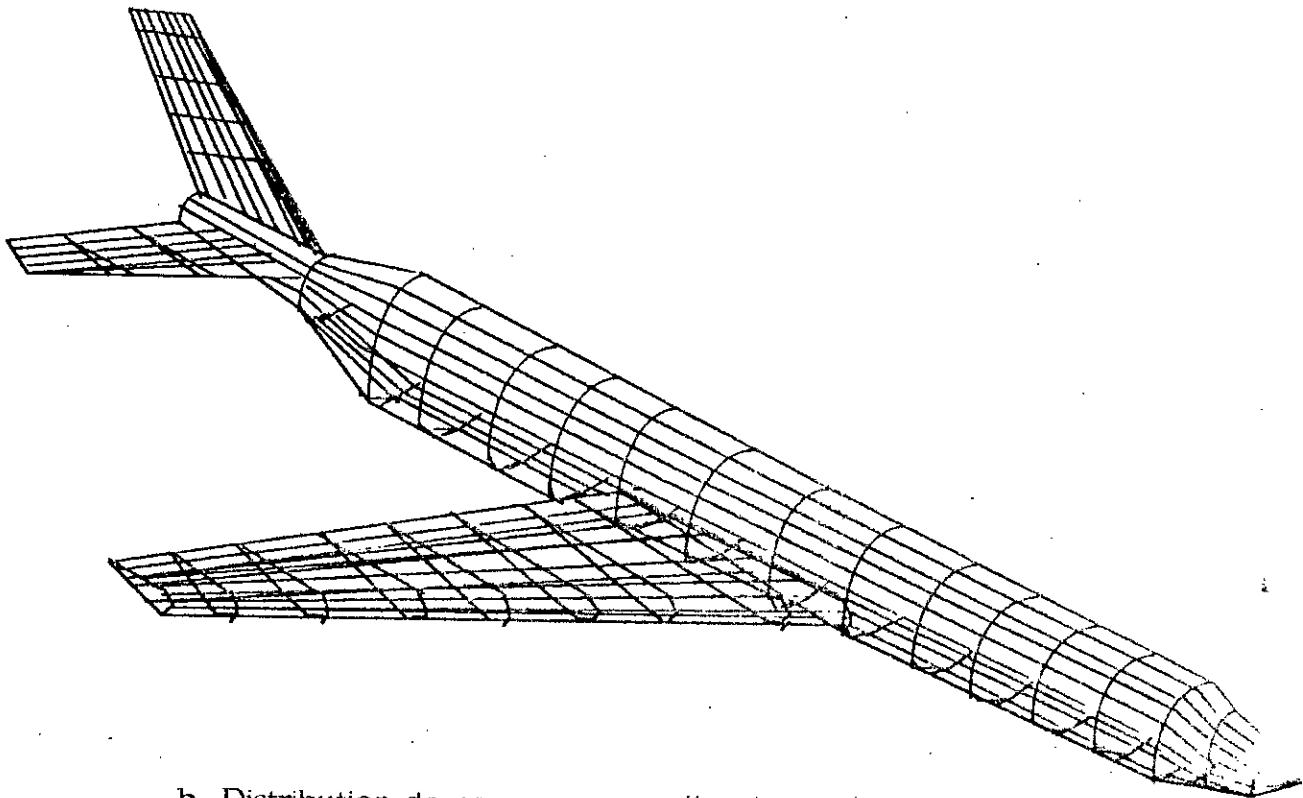
Jusqu'à maintenant, les techniques de singularité ont été appliquées pour résoudre les équations différentielles partielles linéaires; elles sont aussi applicables à une variété de problèmes où l'écoulement est totalement supersonique. Les deux premières méthodes sont, en général, utilisées pour résoudre les équations différentielles régissant le mouvement d'un écoulement instationnaire [Réf. 1] alors que la troisième méthode est exclusivement utilisée pour la résolution des équations différentielles gouvernant un écoulement stationnaire. Dans les applications aérodynamiques modernes, les écoulements incompressibles, non-visqueux et tridimensionnels sont presque toujours calculés par moyens de techniques numériques de panneaux.

Les méthodes de panneaux tridimensionnelles sont probablement les techniques de solution les plus largement utilisées aussi bien dans les problèmes d'analyse que dans les problèmes de conception d'avion. Elles permettent de traiter des configurations géométriquement plus complexes. Leur défaut est représenté par leur limitation à la solution de l'équation de Prandtl-Glauert; mais l'ingéniosité de certains investigateurs a rendu possible l'application de ces méthodes à certains problèmes d'intérêt pratique tout en restant dans le cadre de cette équation [Réf. 9]. Des exemples de telles applications sont justement mentionnés par l'analyse des écoulements vortex au bord d'attaque et la modélisation des écoulements séparés suivant les modèles proposées par Maskew et Dvorak [Réfs. 12 et 13] et Rao [Réf. 14]. Dans cet objectif, des études approfondies ont été aussi présentées par Smith [Réf. 15], Hunt [Réf. 16] et Butter et Mobb. [Ref. 17].

Le concept de base des méthodes de panneaux, comme l'illustre Fig. 1.4, consiste à couvrir ou à subdiviser la configuration en panneaux élémentaires de forme quadrilatérale, pouvant être disposés sur la surface moyenne ou sur la surface réelle de la configuration, et sur lesquels existent des distributions de singularités tels que sources ou vortex dont les intensités, inconnues au préalable, dépendent des équations de la condition à la limite imposée. Pour un corps non portant, comme illustré sur Fig. 1.4a, une distribution de panneaux source suffit pour modéliser un tel corps. Contrairement, pour un corps portant, en plus des distributions de panneaux sources, des singularités vortex sont nécessaires. La figure 1.4b illustre la subdivision en panneaux utilisée pour les calculs de l'écoulement potentiel, fait par la compagnie Boeing, sur un Boeing 747 [Ref. 18]. De telles applications sont très "impressionnantes", et sont utilisées aujourd'hui comme moyen de conception de configurations géométriquement complexes par la majorité des grands constructeurs d'avions.



-a- Modélisation d'un corps non-portant tridimensionnel par des distributions de panneaux sources.



-b- Distribution de panneaux pour l'analyse du Boeing 747.

Fig. 14 Modélisation des corps portants et non portants.

Une grande variété de méthodes de panneaux a été développée. Ces variations dépendent principalement du choix du type et de la forme de distributions de singularités, de la disposition géométrique des panneaux élémentaires et du type de la condition à la limite imposée. Ces caractéristiques principales peuvent être résumées et indiquées sur le tableau ci-dessous [Réf. 9] :

Caractéristiques	1	2	3
Disposition du panneau	Surface moyenne	Hybride	Surface réelle
Panneau	Plan	Hyperbolique	Arbitraire
Type de singularité	Source	Doublet/vorticité	Source et doublet/vorticité
Distribution de singularité	Constante	Linéaire	Ordre supérieur
Condition à la limite	Dirichlet	Neumann	Mixte
Type de problème	Conception	Analyse	Mixte

Tableau I.1 Caractéristiques principales des méthodes de panneaux.

Les premières utilisations de ces méthodes [Réf. 19, 20, 21 et 22] étaient caractérisées par des panneaux plans situés sur la surface moyenne ou une combinaison de surfaces moyennes et réelles avec des distributions de singularité à intensités constantes (c'est à dire du premier ordre) et une condition à la limite du type Neumann. Par exemple, pour le cas d'un écoulement incompressible, le programme Douglas-Neumann [Réf. 10] utilisant aussi le même type de distributions de singularités a mené à des résultats satisfaisants. Un développement majeur est nettement plus marqué par l'introduction de distributions de singularités d'ordre supérieur avec des intensités à variation linéaire par exemple. Le développement s'était avéré primordial dans un but d'améliorer l'application supersonique de ces méthodes car, selon Réf. 9, des panneaux sources à intensité constante, utilisés pour ce type d'écoulement, généraient parfois des résultats catastrophiques. Le programme PAN-AIR [Réf. 23], utilisant des distributions de singularités d'ordre supérieur, représente le code le plus avancé [Réf. 11] mais exige un temps de calcul important. La référence 24 a révélé que, pour un écoulement subsonique, l'utilisation de distributions de singularités d'ordre supérieur (PAN-AIR Program) augmente grandement le coût de calcul alors que l'introduction de singularité à intensité constante (premier ordre) mène à des résultats d'une exactitude comparable à celle produite par une distribution de singularité d'ordre supérieur mais avec un temps de calcul moindre. Quant au mode de solution ou condition à la limite, il (elle) dépend du problème posé qui peut être soit un problème direct ou d'analyse permettant de prédire les caractéristiques aérodynamiques pour une configuration donnée, soit un problème inverse ou de conception générant une géométrie optimale conformément à un système de caractéristiques spécifiées ou contraintes. Le premier type de condition est appelée condition de Neumann qui consiste à spécifier la vitesse normale sur la surface du corps à analyser. Alors que la deuxième condition, appelée encore condition de Dirichlet, consiste à spécifier le potentiel de vitesse.

Dans notre cas, le fuselage sera subdivisé en panneaux élémentaires situés sur sa surface réelle et contenant des distributions de singularités sources à intensité constante. L'aile, par contre, sera modélisée par des distributions de vortex situées sur des panneaux couvrant la surface réelle de l'aile (option non-plane) et dont les intensités varient linéairement ou par des distributions d'une combinaison source/vortex si les panneaux sont disposés sur sa surface moyenne (option plane). Vu que le problème que nous considérons consiste à analyser des configurations données, la condition à la limite utilisée sera du type Neumann.

## CHAPITRE II

### CHAMP POTENTIEL DE VITESSE DANS UN ÉCOULEMENT INCOMPRESSIBLE

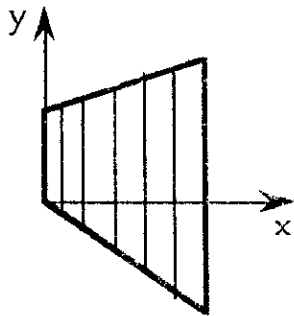
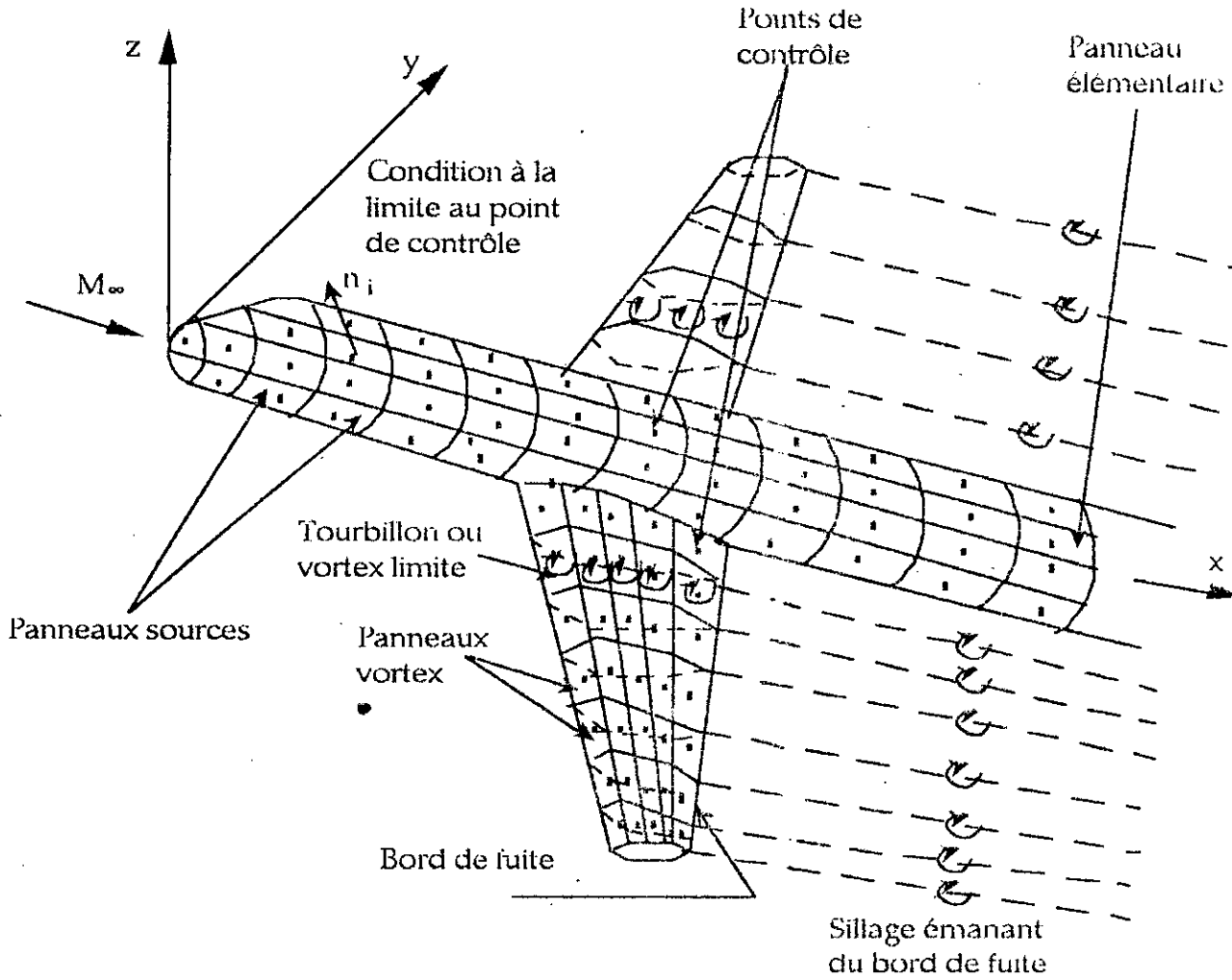
Dans ce chapitre, nous nous proposons de déterminer les expressions analytiques des composantes de la vitesse de perturbation induite par une distribution de singularités aérodynamiques dans un écoulement incompressible en se basant sur le principe de superposition des lignes sources ou des filaments vortex. Les composantes de la vitesse compressible subsonique et supersonique seront données dans le chapitre III conformément à la règle de transformation de Göthert.

A partir de Eq. I.9, deux propriétés importantes peuvent être déduites [Réf. 18] :

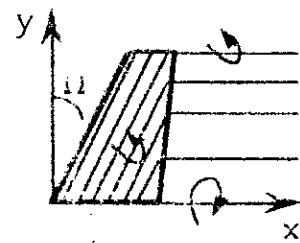
- 1- N'importe quel écoulement incompressible et irrotationnel a un potentiel de vitesse qui satisfait l'équation de Laplace.
- 2- Contrairement, n'importe quelle solution de l'équation de Laplace représente le potentiel de vitesse pour un écoulement incompressible et irrotationnel.

Nous remarquons que l'équation de Laplace est une équation différentielle partielle linéaire du second ordre. Cette propriété est particulièrement importante puisque la somme des solutions particulières d'une équation différentielle linéaire est alors une solution de l'équation. Comme notre écoulement, suppose incompressible et irrotationnel, est gouverné par l'équation de Laplace, nous concluons qu'un modèle d'écoulement peut être synthétisé en additionnant un nombre d'écoulements élémentaires qui sont alors incompressibles et irrotationnels, tels que les écoulements source et vortex : Sur ce principe est basée notre étude.

En premier lieu, nous allons développer les champs de vitesses incompressibles induites par les différents types de distributions de singularités en suivant l'approche hiérarchique indiquée sur Fig.II.1. Ainsi, en partant de l'expression de la vitesse induite, en un point P, par un point source ou un point vortex, nous sommes en mesure de déterminer les expressions des composantes de vitesse induite en ce point par une distribution de sources ou de vortex située sur le plan d'un panneau élémentaire appartenant à la surface d'une configuration quelconque donnée.



Distribution de source sur un élément du fuselage.



Distribution de vortex sur un élément de l'aile.

Fig. II.1 Représentation aérodynamique d'une configuration donnée.

## I - LIGNES SOURCES ELEMENTAIRES

### I.1 - Point source

Sachant qu'un point source d'intensité unité induit une vitesse égale à  $1/4\pi d^2$  en un point situé à une distance  $d$  de l'origine  $O$ , nous pouvons déduire la vitesse induite en un point  $P(x', y', z')$  par un point source d'intensité unité situé suivant l'axe  $Ox'$  à une distance  $\xi$  de cette origine (Eq II.1, Fig II.2).

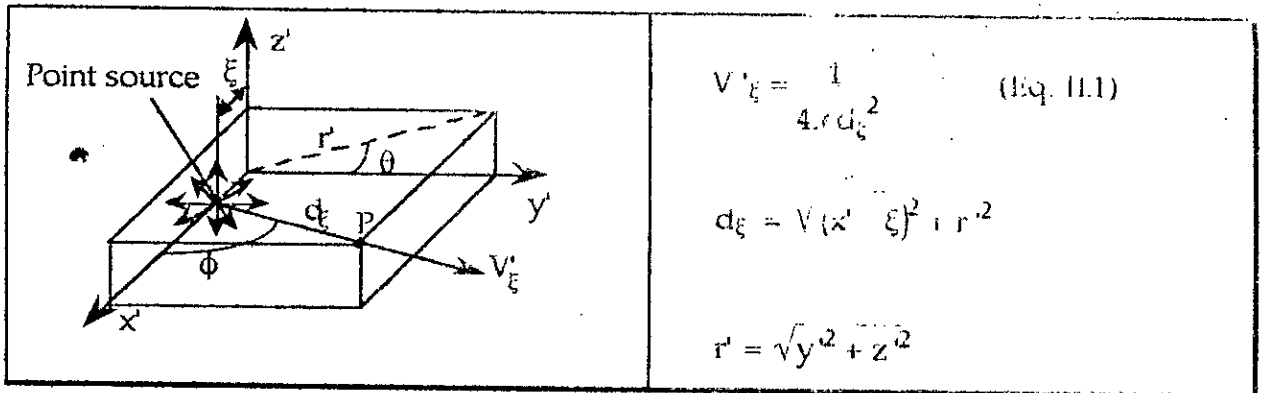


Fig. II.2 Vitesse induite par un point source.

### I.2 - Lignes sources élémentaires :

A partir de l'équation II.1, nous sommes en mesure de déterminer les champs de vitesses induites par des lignes sources élémentaires qui serviront de base pour calculer ultérieurement les vitesses induites par des panneaux sources.

Si nous supposons maintenant qu'un ensemble de points sources s'étendent suivant l'axe  $Ox'$  sur une longueur  $L_s$  formant ainsi une ligne source d'intensité unité (Fig. II.3a),

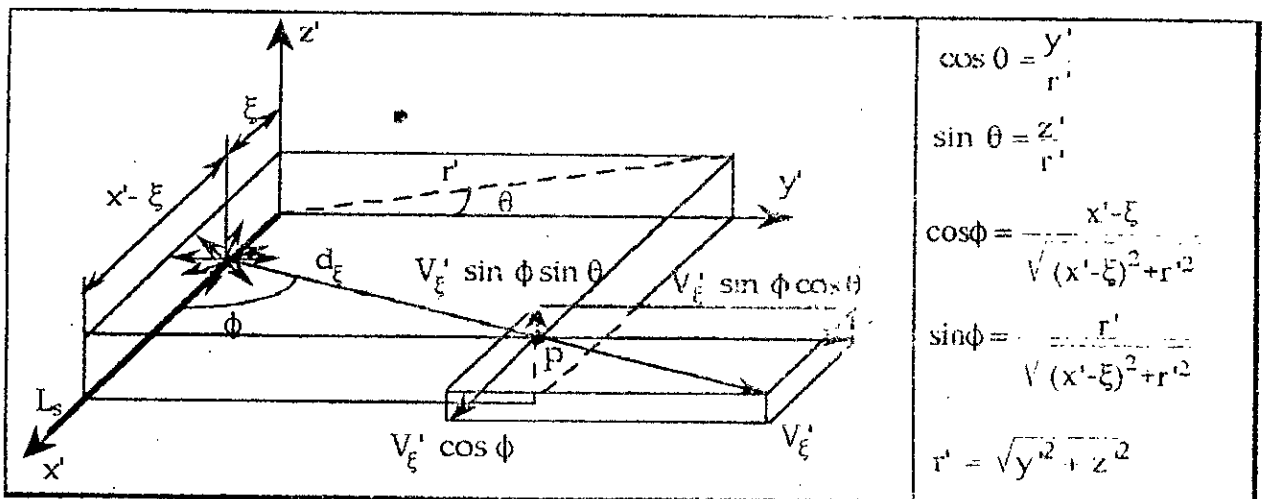


Fig. II.3a Ligne source parallèle à l'axe  $Ox'$ .

les composantes ( $u', v', w'$ ) de la vitesse induite en un point  $P(x', y', z')$  par cette ligne source d'intensité unité peuvent être obtenues en projetant Eq. II.1 respectivement suivant les axes  $Ox'$ ,  $Oy'$  et  $Oz'$  (Fig. II.3a) et en l'intégrant sur toute la longueur de cette ligne source :

$$u' = \int_0^{L_s} V'_{\xi} \cos \phi \, d\xi \quad (\text{Eq. II.2a})$$

$$v' = \int_0^{L_s} V'_{\xi} \sin \phi \cos \theta \, d\xi \quad (\text{Eq. II.2b})$$

$$w' = \int_0^{L_s} V'_{\xi} \sin \phi \sin \theta \, d\xi \quad (\text{Eq. II.2c})$$

Les expressions de  $u', v'$  et  $w'$  sont données par Eqs. II.3 (Fig. II.3b) après intégration des équations II.2. En outre, nous devons mentionner que ces trois composantes de la vitesse vérifient l'équation de Laplace donnée par Eq. I.9.

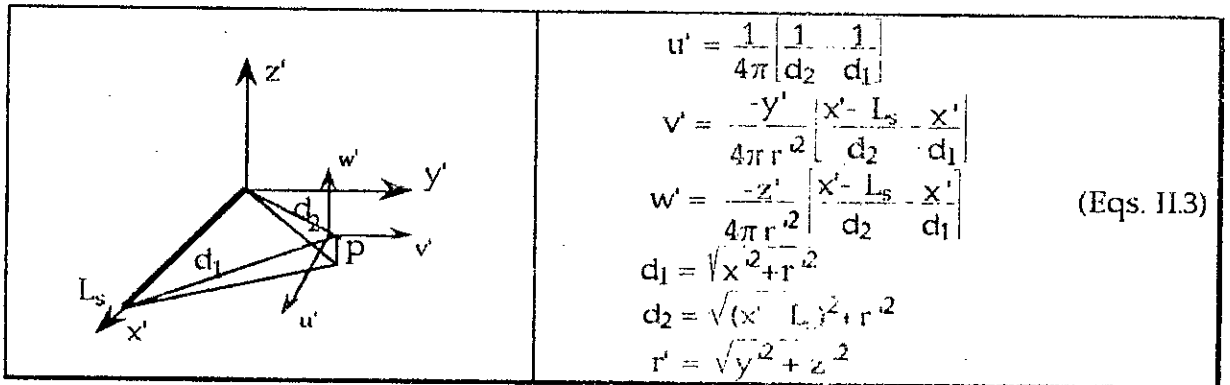


Fig. II.3b Champ de vitesse induit au point  $P$  par une ligne source de longueur  $L_s$  située sur l'axe  $Ox'$ .

Le système d'axes ( $Ox', Oy', Oz'$ ) représente en fait le repère lié à la ligne source (ou au filament vortex comme nous le verrons par la suite). En réalité et dans les applications suivantes, le système de coordonnées lié à la ligne source (ou au filament vortex) est en général orienté d'un certain angle (Fig. II.1) et/ou déplacé d'une certaine distance par rapport à l'origine du système de référence. Par conséquent, les composantes ( $u', v', w'$ ) doivent être exprimées en fonction des coordonnées ( $x, y, z$ ) et transformées ensuite dans le système de référence. Ainsi, en projetant les coordonnées ( $x', y', z'$ ) du point  $P$  par rapport à ce système, nous obtenons :

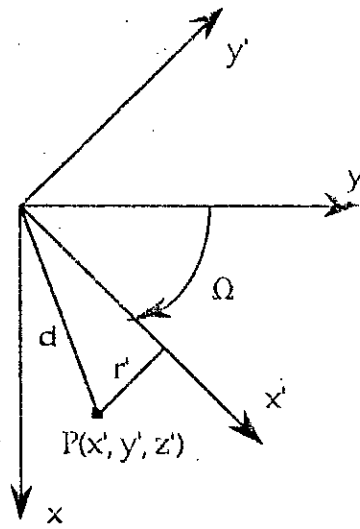


Fig. 11.4

nous obtenons :

$$x' = x \sin \Omega + y \cos \Omega$$

$$y' = -x \cos \Omega + y \sin \Omega$$

(Eqs. 11.4)

$$z' = z$$

ou encore comme l'illustre Fig. 11.5a pour le cas d'une ligne source orientée d'un angle  $(\pi/2 - \Omega)$  par rapport à l'axe Ox, les expressions des coordonnées  $(x', y', z')$  et des distances  $d_1$ ,  $d_2$  et  $r'$  sont données par Eqs. 11.5.

	$x' = \frac{\lambda x + y}{\sqrt{1 + \lambda^2}} ; \quad r' = \frac{\sqrt{(x - \lambda y)^2 + (1 + \lambda^2)z^2}}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$ $y' = \frac{\lambda y - x}{\sqrt{1 + \lambda^2}} ; \quad d_1 = OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $z' = z ; \quad d_2 = PA = \sqrt{(x - \lambda b)^2 + (y - b)^2 + z^2}$ $\lambda = \text{tg } \Omega$ <p style="text-align: right;">(Eqs. 11.5)</p>
--	--

Fig. 11.5a Ligne source originant en O et orientée d'un angle  $(\pi/2 - \Omega)$  par rapport à l'axe Ox.

Si, en plus, cette ligne source est déplacée d'une distance  $\xi$  de l'origine comme le montre Fig. 11.5b, les expressions ci-dessus deviennent :



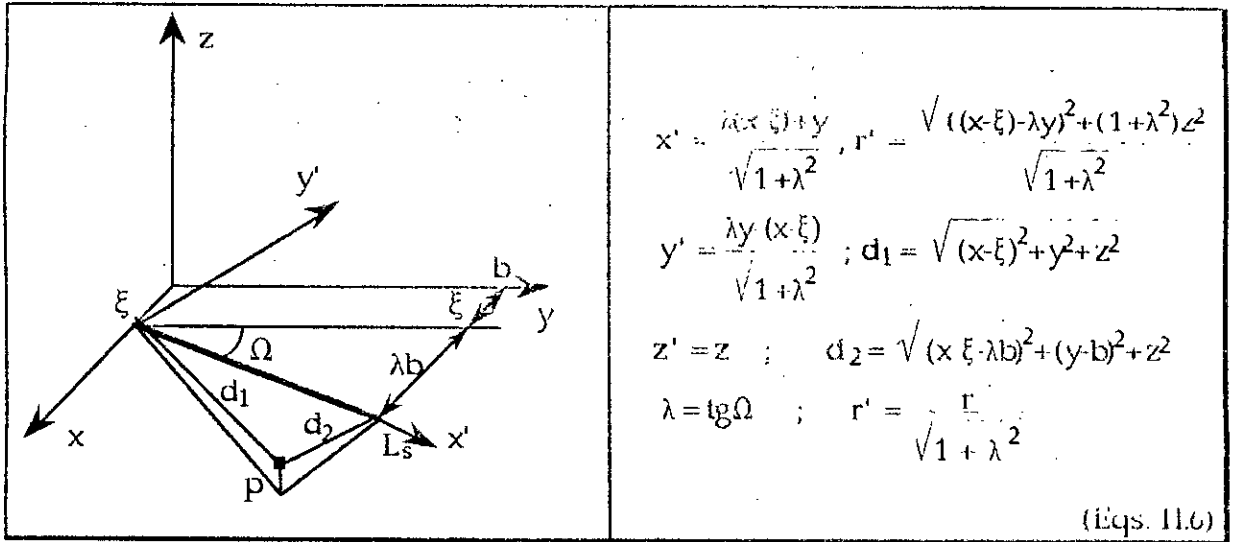


Fig. II.5b Ligne source orientée de  $(\pi/2 - \Omega)$  par rapport à l'axe Ox et déplacée d'une distance  $\xi$  suivant cet axe.

Considérons maintenant une ligne source de longueur  $L_s$  orientée de  $\pi/2$  par rapport à l'axe Ox, c'est à dire parallèle à l'axe Oy comme illustré sur fig. II.5c. De ce fait,  $\Omega$  est nul et par conséquent  $\lambda$  l'est aussi ( $\lambda = \text{tg} \Omega$ ). Les expressions des coordonnées  $(x', y', z')$  et des distances  $d_1, d_2$  et  $r'$  sont données par :

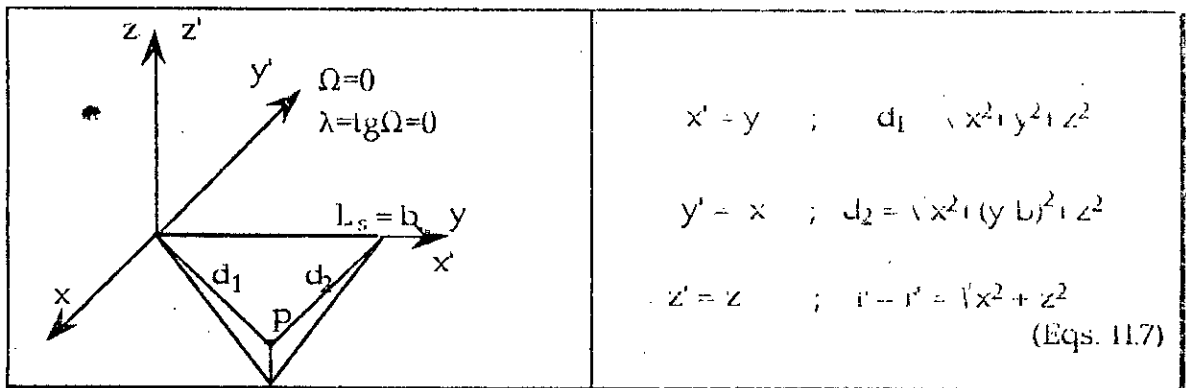


Fig. II.5c Ligne source de longueur  $L_s$  parallèle à Oy ou orientée de  $\pi/2$  par rapport à l'axe Ox.

Par ailleurs, si nous considérons une ligne source de longueur  $L$  et d'intensité unité disposée à une distance  $\xi$  de l'origine comme indiqué sur Fig. II.5d, les coordonnées  $(x', y', z')$  et les distances  $d_1, d_2$  et  $r'$  s'expriment selon Eqs. II.8.

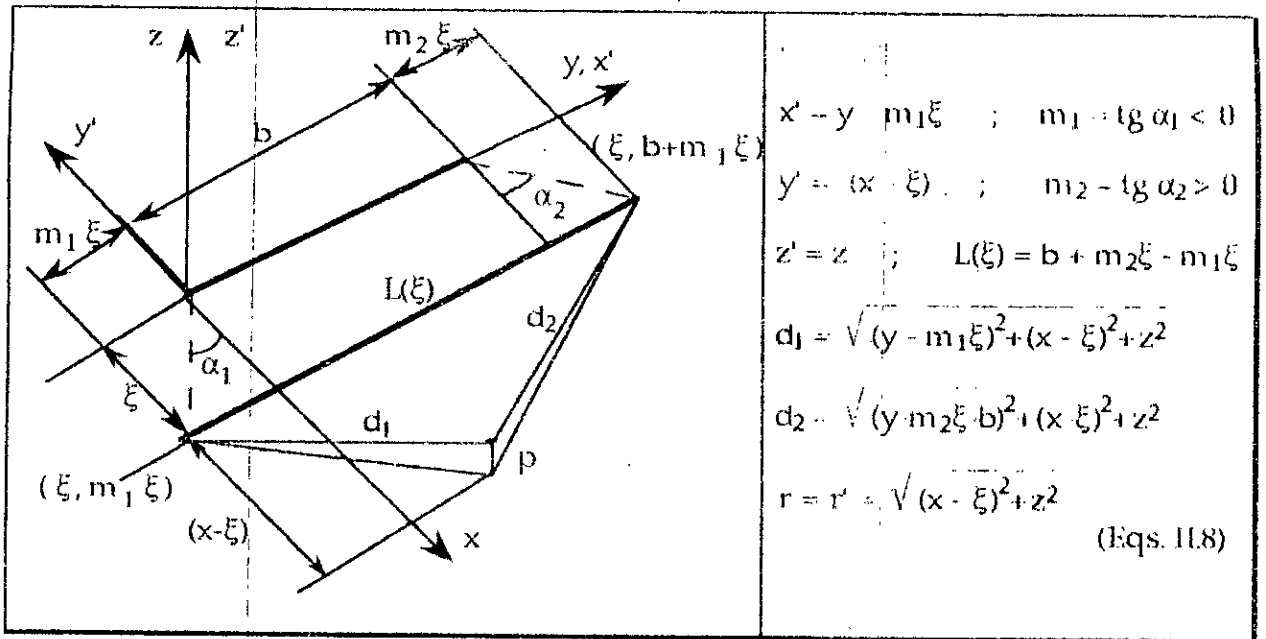


Fig. II.5d Ligne source de longueur  $L(\xi)$  parallèle à  $Oy'$  et distante de  $\xi$  de cet axe.

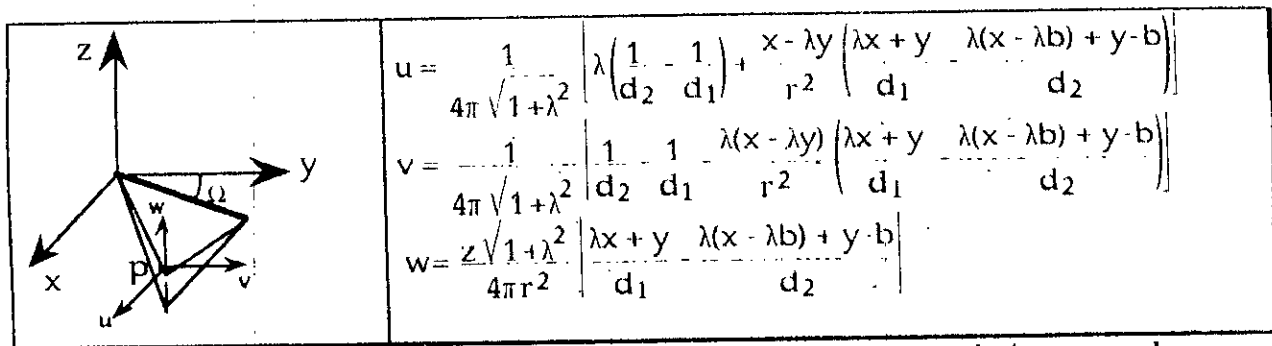
Si nous nous référons de nouveau à Fig. II.4, les composantes  $(u, v, w)$  de la vitesse calculées dans le système de référence  $(O, x, y, z)$  sont :

$$u = \frac{\lambda u' - v'}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \tag{Eq. II.9a}$$

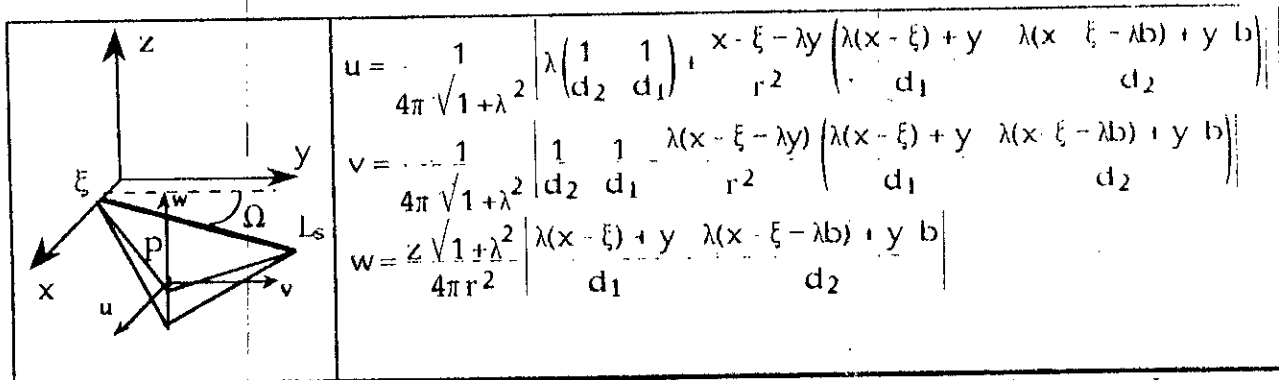
$$v = \frac{\lambda v' + u'}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \tag{Eq. II.9b}$$

$$w = w' \tag{Eq. II.9c}$$

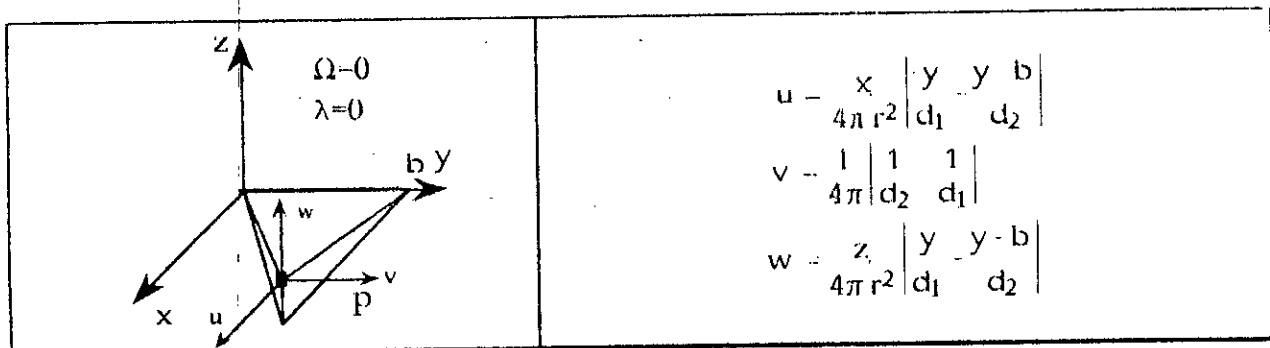
De cette façon, les composantes  $(u, v, w)$  des vitesses induites par des lignes sources disposées et orientées suivant Fig. II.5a, b, c ou d s'obtiennent à partir de Eqs. II.9 où  $(u', v', w')$  sont données par Eqs. II.3 et dans lesquelles  $x', y', z', d_1, d_2$  et  $r'$  sont obtenues moyennant les changements de variables donnés par Eqs. II.5, 6, 7 ou 8. Les expressions finales des composantes  $(u, v, w)$  calculées dans le système de référence sont récapitulées et données par le tableau II.1. (Les expressions de  $d_1, d_2$  et  $r$  sont données par Fig. II.5).



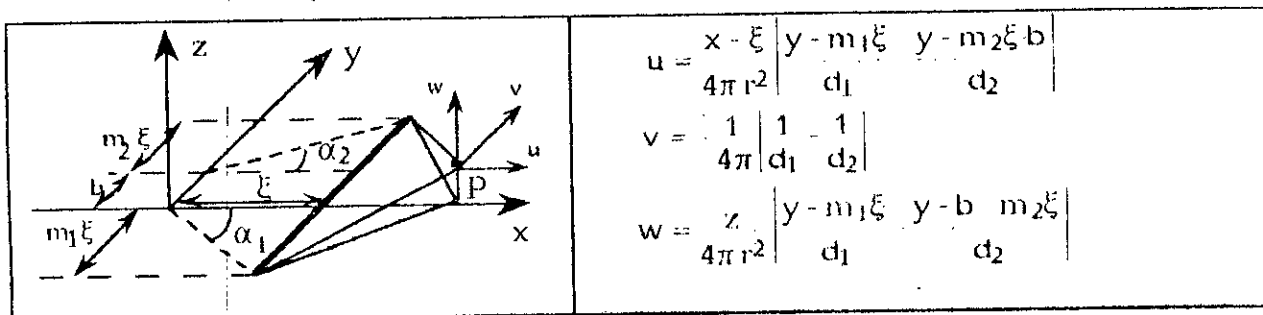
a- Champ de vitesse induit au point P par une ligne source de longueur  $L_s$  orientée de  $(\pi/2 - \Omega)$  par rapport à  $ox$ .



b- Champ de vitesse induit au point P par une ligne source de longueur  $L_s$  orientée de  $(\pi/2 - \Omega)$  par rapport à l'axe  $oy$  et déplacée suivant  $ox$  d'une distance  $\xi$ .



c- Champ de vitesse induit au point P par une ligne source orientée de  $\pi/2$  par rapport à l'axe  $ox$ .



d- Champ de vitesse induit au point P par une ligne source parallèle à l'axe  $oy$  et distante de  $\xi$  de cet axe.

Tableau II.1 Champs de vitesses induites par des lignes sources à différentes orientations et positions.

## II - FILAMENTS VORTEX ELEMENTAIRES

Imaginons une chaîne de points vortex distribués suivant l'axe Ox' formant ainsi un filament vortex. En vertu de la loi de **Biot Savart** [Ref. 18], qui est une relation fondamentale utilisée dans la théorie de l'écoulement incompressible non-visqueux, l'incrément de vitesse  $d\vec{V}'$  induite au point P(x', y', z') du champ par un élément infinitésimal  $d\vec{\xi}$  de ce filament est donnée par :

$$d\vec{V}' = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{\xi} \wedge \vec{d}}{|\vec{d}|^3}$$

où  $\Gamma$  représente l'intensité du filament vortex et  $d$  la distance de l'élément infinitésimal au point du champ. Si nous supposons que l'intensité du filament vortex est égale à l'unité, l'incrément de vitesse  $d\vec{V}'$  deviendra :

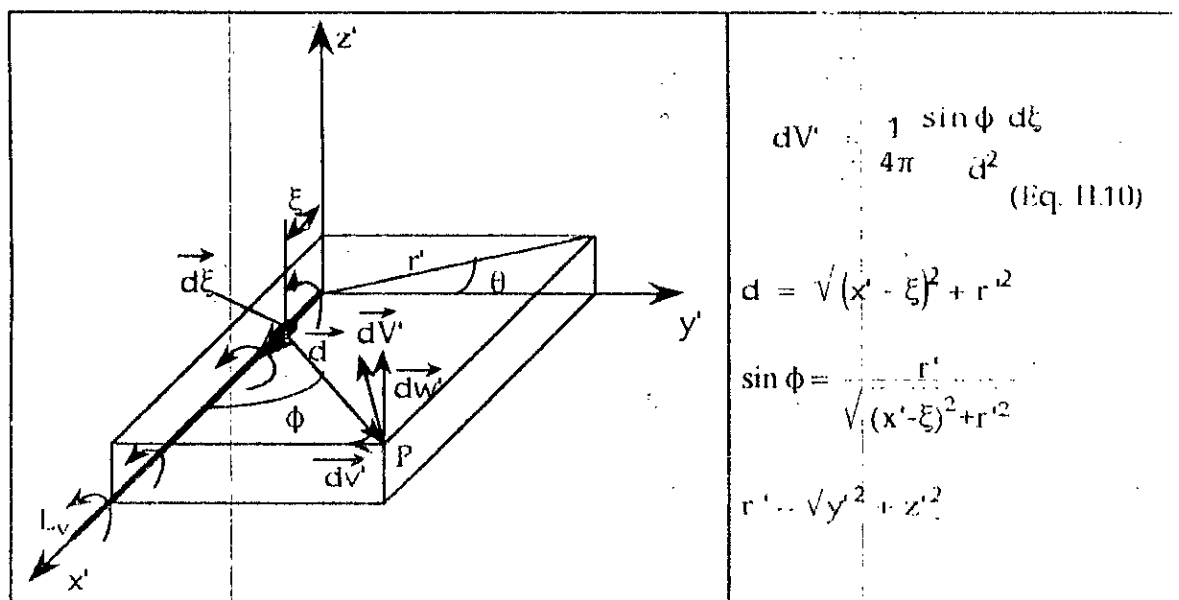


Fig. II.6 Vitesse induite par un élément vortex infinitésimal.

La vitesse en P induite par le filament entier d'intensité unité est obtenue en intégrant Eq. II.10 sur toute sa longueur :

$$V' = \frac{1}{4\pi} \int_0^{L_v} \frac{\sin \phi}{d^2} d\xi = \frac{1}{4\pi r'} \left| \frac{x' - L_v}{d_2} - \frac{x'}{d_1} \right| \quad (\text{Eq. II.11})$$

où  $d_1$  et  $d_2$  représentent les distances du point P aux deux extrémités du filament et  $r'$  la distance perpendiculaire de P à ce filament; leurs expressions sont données par Eqs. II.3.

La direction de l'incrément de vitesse induite par l'élément  $d\xi$  est perpendiculaire au plan contenant le point P et l'élément  $d\xi$  par définition du produit vectoriel. Il s'en suit que la composante  $u'$  du filament vortex est nulle. Par suite, les

composantes  $v'$  et  $w'$  s'obtiennent en projetant le vecteur vitesse  $V'$  suivant les axes  $Oy'$  et  $Oz'$ . Nous aboutissons à :

$$u' = 0 \tag{Eq. II.12a}$$

$$v' = -V' \sin \theta \tag{Eq. II.12b}$$

$$w' = V' \cos \theta \tag{Eq. II.12c}$$

qui sont exprimées par Eqs. II.13 :

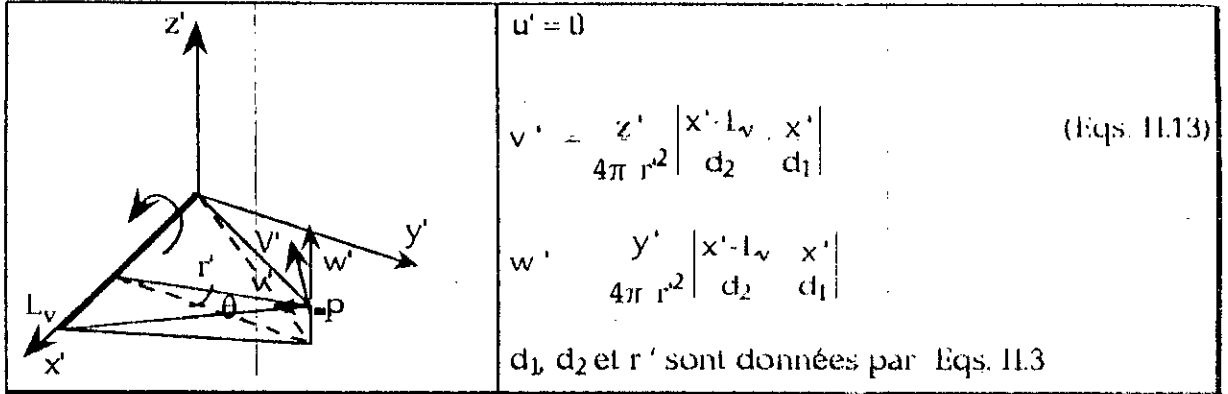


Fig. II.7 Champ de vitesse induite par un filament vortex de longueur finie  $L_v$  et parallèle à l'axe  $Ox$ .

En procédant de la même manière que pour les lignes sources, les composantes  $(u, v, w)$  de la vitesse induite par des filaments vortex sont données par le tableau. II.2a ou b selon leur disposition.

Lorsque le filament vortex représenté sur Fig. II.7 a une longueur infinie, la vitesse  $V'$  induite par ce filament tendra vers  $V_{lim}$  quand  $L_v$  tends vers l'infinie. Celle ci se traduit par :

$$V_{lim} = \lim_{L_v \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{4\pi r} \left( \frac{x - L_v}{\sqrt{(x - L_v)^2 + r^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right) \right\} \tag{Eq. II.14}$$

$$= -\frac{1}{4\pi r} \lim_{L_v \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\left( \frac{-1 + \frac{x}{L_v}}{1 + \frac{x^2}{L_v^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right)}{\frac{2x}{L_v^2}} \right\} = \frac{1}{4\pi r} \left( 1 + \frac{x}{d_1} \right)$$

où :  $r = (y^2 + z^2)^{1/2}$  et  $d_1 = (x^2 + r^2)^{1/2}$   
 et les composantes  $u, v$  et  $w$  deviennent alors :

$$u = 0 \tag{Eq. II.15a}$$

$$v = \lim_{L_v \rightarrow \infty} \left\{ \frac{z}{4\pi r^2} \left( \frac{x - L_v}{\sqrt{(x - L_v)^2 + r^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right) \right\} = \frac{z}{4\pi r^2} \left| 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right| \tag{Eq. II.15b}$$

$$w = \lim_{L_v \rightarrow \infty} \left\{ \frac{y}{4\pi r^2} \left( \frac{x - L_v}{\sqrt{(x - L_v)^2 + r^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right) \right\} = \frac{y}{4\pi r^2} \left| 1 + \frac{x}{d_1} \right| \tag{Eq. II.15c}$$

Si, d'un autre côté, le filament vortex de longueur infinie est situé suivant l'axe  $Ox$  à une distance  $\xi$  de l'origine, les composantes de la vitesse induite par ce filament sont données par le tableau II.7c

	$u = \frac{z}{4\pi r^2} \left  \frac{\lambda x + y}{d_1} - \frac{\lambda(x - \lambda b) + y - b}{d_2} \right $ $v = -\frac{\lambda z}{4\pi r^2} \left  \frac{\lambda x + y}{d_1} - \frac{\lambda(x - \lambda b) + y - b}{d_2} \right $ $w = -\frac{x - \lambda y}{4\pi r^2} \left  \frac{\lambda x + y}{d_1} - \frac{\lambda(x - \lambda b) + y - b}{d_2} \right $
--	--

a- Champ de vitesse induite par un filament vortex élémentaire de longueur finie  $L_v$  orienté d'un angle  $(\pi/2 - \Omega)$  par rapport à l'axe  $ox$ .

	$u = \frac{z}{4\pi r^2} \left  \frac{\lambda(x - \xi) + y}{d_1} - \frac{\lambda(x - \xi - \lambda b) + y - b}{d_2} \right $ $v = -\lambda u$ $w = -\frac{x - \xi - \lambda y}{4\pi r^2} \left  \frac{\lambda(x - \xi) + y}{d_1} - \frac{\lambda(x - \xi - \lambda b) + y - b}{d_2} \right $
--	---

b- Champ de vitesse induite par un filament vortex élémentaire de longueur finie  $L_v$ , orienté d'un angle  $(\pi/2 - \Omega)$  par rapport à l'axe  $ox$  et déplacé d'une distance  $\xi$  de cet axe.

	$u = 0$ $v = \frac{z}{4\pi(y^2 + z^2)} \left  1 - \frac{x - \xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y^2 + z^2)}} \right $ $w = \frac{y}{4\pi(y^2 + z^2)} \left  1 - \frac{x - \xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y^2 + z^2)}} \right $
--	---

c- Champ de vitesse induite par un filament vortex élémentaire de longueur infinie parallèle à l'axe  $Ox$  et situé à une distance  $\xi$  de l'origine.

(Les expressions de  $d_1$ ,  $d_2$  et  $r$  sont données par Fig II.5).

Tableau II.2 Champs de vitesses induites par des filaments vortex élémentaires, de longueur finie ou infinie, disposés et orientés différemment.

### III - PANNEAUX SOURCES

Considérons maintenant un ensemble de lignes sources qui s'étendent parallèlement au bord d'attaque sur une distance qui varie de 0 à c, où c représente la corde du panneau suivant la direction du courant, formant ainsi une nappe source ou un panneau source. Nous allons examiner dans ce qui suit l'influence de cette série de lignes sources sur le point P(x, y, z).

#### III.1 - Distribution de source constante sur un panneau trapézoïdal

Les composantes de la vitesse induite en un point P(x, y, z) par une ligne source élémentaire disposée à une distance  $\xi$  de l'axe Ox comme indiqué sur Fig. II.5d, étaient dérivées auparavant et données par le tableau II.1d. Considérons, à présent, un panneau sans flèche et effilé dans la direction du courant, c'est à dire un panneau de forme géométrique trapézoïdale, contenant dans son plan une distribution de source constante (Fig. II.8).

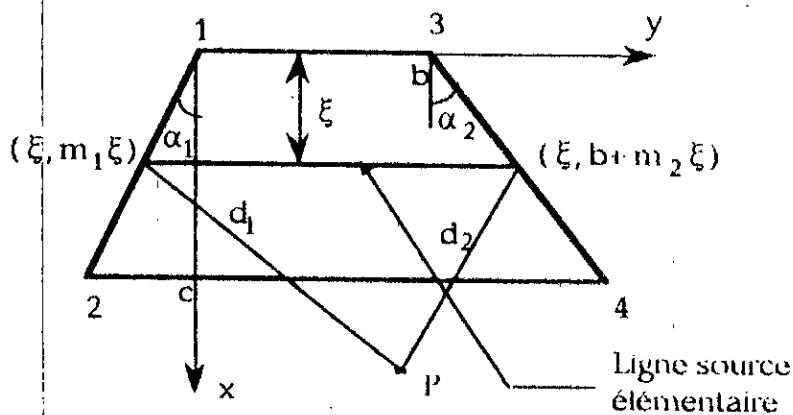


Fig. II.8 Panneau source trapézoïdal

Les composantes de la vitesse induite en P par une telle distribution seront obtenues en sommant les influences de toutes ces lignes sources qui balayent entièrement la surface plane de ce panneau. Cela revient donc à intégrer de 0 à c les expressions de u, v et w du tableau II.1d, c'est à dire :

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_0^c \frac{x - \xi}{r^2} \left[ \frac{y - m_1 \xi}{d_1} - \frac{y - b - m_2 \xi}{d_2} \right] d\xi \quad (\text{Eq. II.16a})$$

$$v = - \frac{1}{4\pi} \int_0^c \left[ \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right] d\xi \quad (\text{Eq. II.16b})$$

$$w = \frac{z}{4\pi} \int_0^c \frac{d\xi}{r^2} \left[ \frac{y - m_1 \xi}{d_1} - \frac{y - b - m_2 \xi}{d_2} \right] \quad (\text{Eq. II.16c})$$

Selon [Réf. 25], l'influence du sommet 1 est donnée par :

$$u_1 = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{m_1}{\sqrt{1+m_1^2}} \sinh^{-1} \frac{x+m_1y}{\sqrt{(y-m_1x)^2 + (1+m_1^2)z^2}} - \sinh^{-1} \frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}} \right] \quad (\text{Eq. II.17a})$$

$$v_1 = \frac{1}{4\pi\sqrt{1+m_1^2}} \sinh^{-1} \frac{x+m_1y}{\sqrt{(y-m_1x)^2 + (1+m_1^2)z^2}} \quad (\text{Eq. II.17b})$$

$$w_1 = \frac{1}{4\pi} \tan^{-1} \frac{z(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{-x(y-m_1x) + m_1z^2} \quad (\text{Eq. II.17c})$$

et les composantes des vitesses des trois autres sommets 2, 3 et 4 peuvent être déduites à partir de Eqs. II.17 (annexe A). L'influence complète du panneau pourra être obtenue en vertu du principe de superposition [Réf. 26] en sommant les influences de ses quatre sommets:

$$u = u_1 - u_2 - u_3 + u_4$$

$$v = v_1 - v_2 - v_3 + v_4$$

$$w = w_1 - w_2 - w_3 + w_4$$

(Eqs. II.18)

Nous avons supposé antérieurement que le panneau était situé dans le plan x-y. En réalité, il est incliné d'un angle  $\delta$  par rapport à l'axe Ox (Fig. II.9). Il faudra, à présent, déterminer les composantes de la vitesse induite en P relativement au repère de référence.

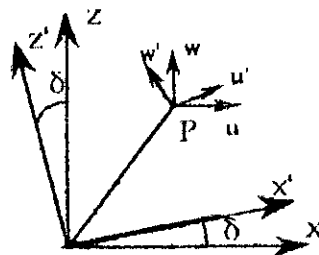


Fig. II.9

En projetant les coordonnées du point P par rapport aux axes de référence, nous aboutissons à :

$$x' = x \cos \delta + z \sin \delta = \frac{x + az}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = -x \sin \delta + z \cos \delta = \frac{z - ax}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1+a^2}} \quad ; \quad a = \text{tg } \delta$$

(Eqs. II.19)



D'une manière similaire, les composantes de la vitesse, en particulier celles du sommet 1, exprimées dans le repère de référence, sont :

$$u_1 = \frac{u'_1 - aw'_1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$v_1 = v'_1$$

$$w_1 = \frac{w'_1 + au'_1}{\sqrt{1+a^2}}$$

(Eqs. II.20)

où  $u'_1$ ,  $v'_1$  et  $w'_1$  sont données par Eqs. II.17 dans lesquelles  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $m$  sont remplacées par  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  et  $m'$  définies par Eqs. II.19; c'est à dire :

$$u'_1 = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{m'_1}{\sqrt{1+m'^2}} \sinh^{-1} \frac{x' + m'_1 y'}{\sqrt{(y' - m'_1 x')^2 + (1+m'^2)z'^2}} - \frac{\sinh^{-1} \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + z'^2}}}{\sqrt{1+m'^2}} \right] \quad (\text{Eq. II.21a})$$

$$v'_1 = \frac{1}{4\pi \sqrt{1+m'^2}} \sinh^{-1} \frac{x' + m'_1 y'}{\sqrt{(y' - m'_1 x')^2 + (1+m'^2)z'^2}} \quad (\text{Eq. II.21b})$$

$$w'_1 = \frac{1}{4\pi} \tan^{-1} \frac{z' (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}}{-x' (y' - m'_1 x') + m'_1 z'^2} \quad (\text{Eq. II.21c})$$

Les expressions finales de  $u_1$ ,  $v_1$  et  $w_1$  seront données par le tableau II.3a

### III.2 - Distribution de source constante sur un panneau avec fleche et effile suivant la direction de l'envergure

Supposons maintenant que nous ayons un panneau source en flèche et effilé dans la direction de l'envergure comme représenté sur la figure suivante :

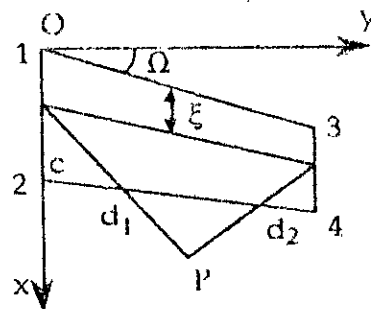


Fig. II.10

$$d_1 = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2 + z^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(x - \xi - \lambda b)^2 + (y - b)^2 + z^2}$$

$$\lambda = \text{tg } \Omega$$

Les composantes de la vitesse induite par une ligne source élémentaire d'intensité constante et située à une distance  $\xi$  du bord d'attaque ont été obtenues précédemment (Tableau II.1b). L'influence totale du panneau au point P est obtenue en intégrant de 0 à c les expressions données par le tableau II.1b, c'est à dire

$$u = \frac{1}{4\pi\sqrt{1+\lambda^2}} \int_0^c \left[ \lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ d_2 & d_1 \end{pmatrix} \frac{x-\xi}{r^2} \begin{pmatrix} \lambda(x-\xi)+y & \lambda(x-\xi-\lambda b)+y-b \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} \right] d\xi \quad (\text{Eq. II.22a})$$

$$v = \frac{1}{4\pi\sqrt{1+\lambda^2}} \int_0^c \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ d_2 & d_1 \end{pmatrix} \frac{\lambda(x-\xi-\lambda y)}{r^2} \begin{pmatrix} \lambda(x-\xi)+y & \lambda(x-\xi-\lambda b)+y-b \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} \right] d\xi \quad (\text{Eq. II.22b})$$

$$w = \frac{z\sqrt{1+\lambda^2}}{4\pi} \int_0^c \left[ \frac{\lambda(x-\xi)+y}{d_1} - \frac{\lambda(x-\xi-\lambda b)+y-b}{d_2} \right] d\xi \quad (\text{Eq. II.22c})$$

Les expressions finales de  $u$ ,  $v$ , et  $w$  sont données par le tableau II.3b et l'influence complète du panneau pourrait être obtenue à l'aide du principe de superposition (Eqs. II.18).

### III.3 Distribution de source linéaire sur un panneau à bec fleché et effilé suivant la direction de l'envergure

Les composantes de la vitesse induite au point P(x, y, z) par une distribution de source linéaire (intensité linéaire) s'obtiennent en multipliant Eqs. II.22 par  $\xi$

$$u = \frac{1}{4\pi\sqrt{1+\lambda^2}} \int_0^c \left[ \lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ d_2 & d_1 \end{pmatrix} \frac{x-\xi}{r^2} \begin{pmatrix} \lambda(x-\xi)+y & \lambda(x-\xi-\lambda b)+y-b \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} \right] \xi d\xi \quad (\text{Eq. II.23a})$$

$$v = \frac{1}{4\pi\sqrt{1+\lambda^2}} \int_0^c \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ d_2 & d_1 \end{pmatrix} \frac{\lambda(x-\xi-\lambda y)}{r^2} \begin{pmatrix} \lambda(x-\xi)+y & \lambda(x-\xi-\lambda b)+y-b \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} \right] \xi d\xi \quad (\text{Eq. II.23b})$$

$$w = \frac{z\sqrt{1+\lambda^2}}{4\pi} \int_0^c \left[ \frac{\lambda(x-\xi)+y}{d_1} - \frac{\lambda(x-\xi-\lambda b)+y-b}{d_2} \right] \xi d\xi \quad (\text{Eq. II.23c})$$

et l'influence du sommet 1 est donnée par le tableau II.3c.

Encore devons nous noter que, pour ces deux dernières distributions, les composantes des vitesses qui correspondent aux influences des trois autres sommets seront évaluées à partir de ( $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$ ) en prenant  $\lambda = \lambda_1$  pour les sommets 1 et 3 et  $\lambda = \lambda_2$  pour les sommets 2 et 4. Nous rappelons toujours que l'influence complète du panneau est obtenue en sommant les influences de ses quatre sommets (Eqs. II.18).

	$u_1 = \frac{1}{4\pi\sqrt{1+a^2}} [mG - H - aF]$ $v_1 = \frac{G\sqrt{1+a^2}}{4\pi}$ $w_1 = \frac{1}{4\pi\sqrt{1+a^2}} [F + a(mG - H)]$ $F = \tan^{-1} \frac{(z - ax) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x(y - mx) - z(ay - mz)}$ $H = \sinh^{-1} \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}}$ $G = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+m^2}} \sinh^{-1} \frac{x + my + az}{\sqrt{(y - mx)^2 + (ay - mz)^2 + (z - ax)^2}}$
--	--

-a- Distribution de source constante sur un panneau sans fleche.

	$u_1 = -\frac{1}{4\pi} G_1$ $v_1 = \frac{1}{4\pi} [G_1 - G_2]$ $w_1 = \frac{1}{4\pi} [F_1 - F_2]$ $F_1 = \tan^{-1} \frac{z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{-xy + \lambda(y^2 + z^2)}$ $F_2 = \tan^{-1} \frac{z}{y}$ $G_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \sinh^{-1} \frac{\lambda x + y}{\sqrt{(x - \lambda y)^2 + (1 + \lambda^2)z^2}}$ $G_2 = \sinh^{-1} \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$
--	--

-b- Distribution de source constante sur un panneau avec fleche

$u_1 = -\frac{1}{4\pi} [(x - \lambda y)G_1 + yG_2 - z(F_1 - F_2)]$ $v_1 = \frac{1}{4\pi} [(x - \lambda y)(\lambda G_1 - G_2) + x + d - \lambda z(F_1 - F_2)]$ $w_1 = \frac{1}{4\pi} \left\{ (x - \lambda y)(F_1 - F_2) + z \left[ (1 + \lambda^2)^{1/2} G_1 - \lambda(G_2 - \log \sqrt{y^2 + z^2}) \right] \right\}$ <p>où <math>F_1, F_2, G_1</math> et <math>G_2</math> sont définies dans le cas b.</p>
--

c- Distribution de source linéaire sur un panneau avec fleche

Tableau II.3 Expressions des composantes de la vitesse induite par le coin (1) pour différents types de distribution de source.

IV - PANNEAUX VORTEX

IV - PANNEAUX VORTEX

IV.1. Distribution de vortex constant sur un panneau avec flèche et effilement

Le modèle d'une telle distribution, comme le représente Fig. II.11, est constitué d'une famille de vortex en "fer à cheval" qui s'étendent du bord d'attaque jusqu'à l'infini en vertu du théorème de Helmholtz [Réf. 5].

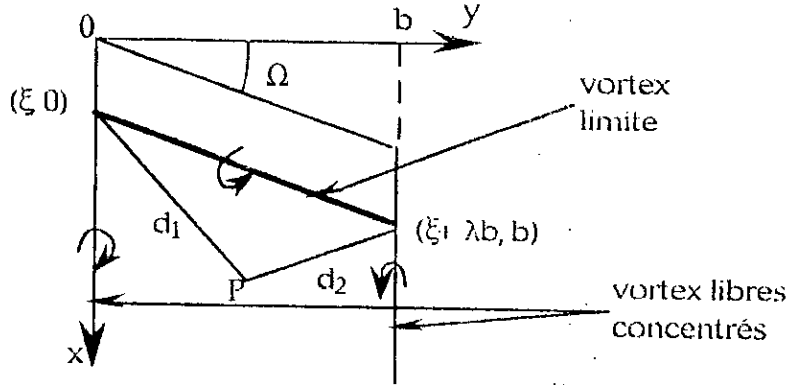
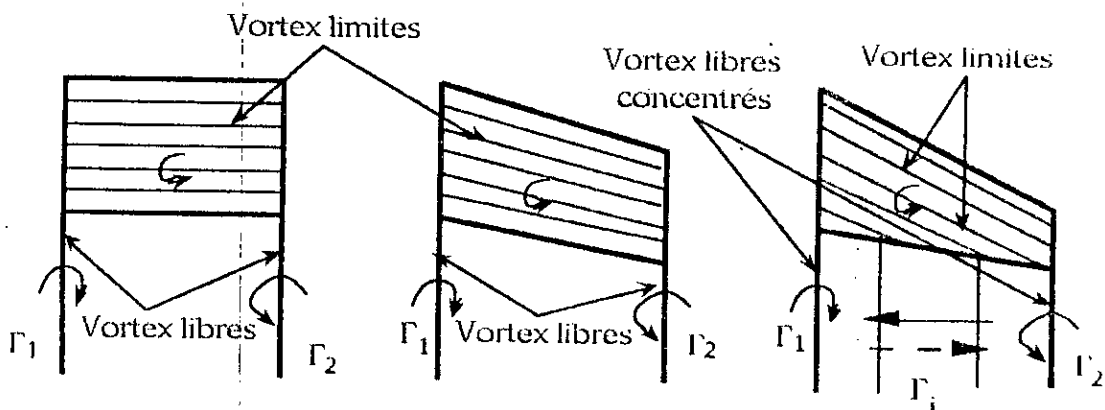


Fig. II.11

Les composantes de la vitesse induite en un point  $P(x, y, z)$  par cette distribution de vortex située sur le plan d'un panneau en flèche et effilé sont obtenues en deux étapes. Dans une première étape, nous considérons l'influence des filaments vortex limites élémentaires disposés parallèlement au bord d'attaque (Tab. II.2b) et deuxièmement, nous examinerons l'influence des vortex libres concentrés qui s'étendent du bord d'attaque jusqu'à l'infini (Tab. II.2c) suivant les deux côtés latéraux du panneau.

IV.1a - influence des vortex limites

L'influence des vortex limites sur le panneau est obtenue en intégrant les expressions données par Tab. II.2b. L'intégration est faite de zéro à l'infini afin d'inclure automatiquement l'influence du sillage formé par les tourbillons ou vortex libres situés juste derrière ce panneau effilé [Réf. 11].



Nappe de vortex d'intensité  $\Gamma_i$  forme un sillage juste derrière le bord de fuite.

-a-  $\Gamma_1 = \Gamma_2$

-b-  $\Gamma_1 = \Gamma_2$

-c-  $|\Gamma_1| > |\Gamma_2|$

Fig. II.12 Distribution de vortex sur des panneaux de différentes formes.

En effet, pour ce type de singularité (vortex constant), si le panneau était fini, le champ d'écoulement combiné aurait été caractérisé par deux tourbillons libres situés latéralement sur les deux côtés du panneau et s'étendent du bord d'attaque jusqu'à l'infini, ainsi que des tourbillons limites balayant toute la surface de celui-ci comme illustré sur fig.11.12a et b. Par conséquent, les vortex libres latéraux auraient des circulations égales et les composantes de la vitesse due à l'influence des vortex limites seraient alors obtenues en intégrant les équations ci-dessus de zéro à c. Par contre, si le panneau est effilé, les vortex libres latéraux auront des circulations inégales [Réf. 27] et, de ce fait, la différence sera complétée par une nappe de vortex libres situés entre les deux filaments vortex latéraux (Fig 11.12c) Sur ce panneau, la circulation sera alors distribuée uniformément sur la surface

$$u = \frac{\gamma}{4\pi} \int_0^{\infty} K d\xi \tag{Eq 11.24a}$$

$$v = \lambda u \tag{Eq 11.24b}$$

$$w = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} (x - \xi - \lambda y) K d\xi \tag{Eq 11.24c}$$

où :

$$K = \frac{1}{r^2} \left| \frac{\lambda(x - \xi) + y}{d_1} - \frac{\lambda(x - \xi - \lambda y) + y}{d_2} \right| \tag{Eqs 11.25}$$

$$r^2 = (x - \xi - \lambda y)^2 + (1 + \lambda^2) z^2$$

Seules les intégrales correspondant au côté latéral gauche (intérieur) du panneau seront calculées puisque celles du côté latéral droit (extérieur) pourront être déduites à partir de celles-ci par une simple translation de coordonnées. Ces composantes sont données par :

$$u_1 = \frac{1}{4\pi} \left| \tan^{-1} \frac{z(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{-xy + \lambda(y^2 + z^2)} - \tan^{-1} \frac{z}{y} \right| \tag{Eq 11.26a}$$

$$v_1 = \lambda u_1 \tag{Eq 11.26b}$$

$$w_1 = \frac{1}{4\pi} \left[ (1 + \lambda^2)^{1/2} \sinh^{-1} \frac{\lambda x + y}{\sqrt{(x - \lambda y)^2 + (1 + \lambda^2) z^2}} - \lambda \sinh^{-1} \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}} - \lambda \log \frac{y^2 + z^2}{\dots} \right] \tag{Eq 11.26c}$$

**IV.1b- influence du vortex libre**

Le tourbillon ou vortex libre latéral contribue seulement aux composantes v et w de la vitesse (§. II). Conformément à ce qui précède, ces composantes seront

obtenues en intégrant les équations données par le tableau II.2c pour un filament vortex de longueur infinie :

$$\Delta u_1 = 0 \tag{Eq II.27a}$$

$$\Delta v_1 = \frac{z}{4\pi(y^2 + z^2)} \int_0^\infty \left[ 1 + \frac{x \xi}{|(x - \xi)^2 + y^2 + z^2|^{1/2}} \right] d\xi$$

$$= \frac{z}{4\pi} \left[ \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{y^2 + z^2} \right] \tag{Eq II.27b}$$

$$\Delta w_1 = \frac{y}{4\pi} \left[ \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{y^2 + z^2} \right] \tag{Eq II.27c}$$

Ainsi, les composantes de la vitesse induite par le sommet 1 du panneau sont données par l'équation II.26a, la somme des équations II.26b et II.27b, et la somme des équations II.26c et II.27c. Les composantes des vitesses induites par les trois autres sommets du panneau seront obtenues à partir de celles-ci en remplaçant les coordonnées et  $\lambda$  par leurs valeurs appropriées. En vertu du principe de superposition, l'influence complète du panneau au point  $P(x, y, z)$  est obtenue en sommant les influences de ses quatre sommets.

#### IV.2 - Distribution de vortex à variation linéaire sur un panneau en flèche et effilé

Ce type de distribution est une singularité de vortex spéciale développée par Woodward [Réf. 11] pour fournir une méthode permettant de simuler une distribution de vortex linéaire suivant l'écoulement et constante suivant l'envergure. Cette distribution était considérée comme une amélioration substantielle des méthodes classiques utilisant des distributions de vortex constants suivant la corde et l'envergure. Cependant, et comme nous le verrons par la suite, pour évaluer la composante  $w$  de la vitesse (Eq. II.44c), par exemple, cette nouvelle distribution de vortex nécessite une intégration numérique exigeant un temps de calcul (exécution) long.

Selon Woodward, ce vortex se trouve à l'intérieur d'une région triangulaire limitée par les bords d'attaque et de fuite qui s'étendent jusqu'à leur intersection ainsi que le côté latéral gauche du panneau (Fig. II.13).

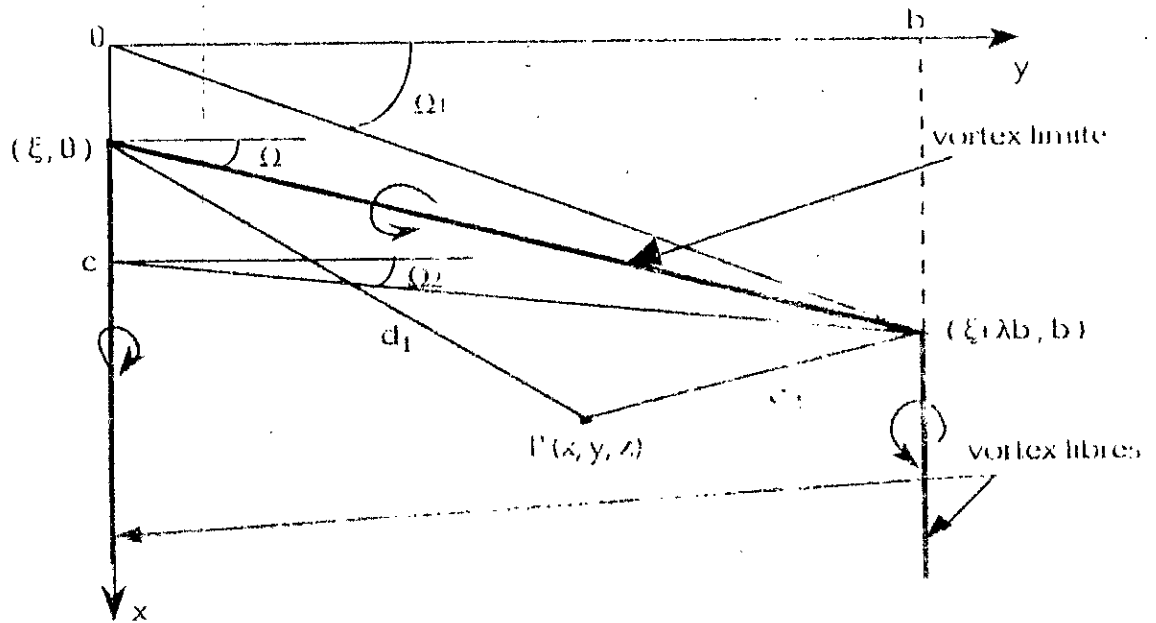


Fig. II.13 Distribution de vortex sur une région triangulaire.

Les composantes de la vitesse induite par une distribution de vortex qui varie linéairement suivant la corde tout en restant constant suivant l'envergure sur un panneau en flèche et effilé s'obtiennent en trois étapes. Les deux premières étapes permettent d'évaluer les composantes  $(u, v, w)$  de la vitesse induite par une telle distribution mais sur un panneau triangulaire. Pour obtenir l'influence d'un panneau en flèche, effilé et d'envergure finie, deux panneaux triangulaires doivent être conjointement combinés comme sera expliqué dans la troisième étape de cette procédure.

### Première étape :

#### a) - influence du vortex limite :

Comme illustré sur Fig. II.13, le vortex limite est situé à une distance  $\xi$  de l'origine du système lié au panneau. Le point P est situé à une distance  $d_1$  du côté latéral gauche du panneau et à une distance  $d_2$  de l'extrémité droite.

La tangente de l'angle de flèche  $\lambda$  varie de  $\lambda_1 = \text{tg } \Omega_1$  pour  $\xi = 0$  à  $\lambda_2 = \text{tg } \Omega_2$  pour  $\xi = c$ . Son expression est donnée par :

$$\text{tg } \Omega = \lambda = \lambda_1 + (a/c) \xi \quad (\text{Eq II.20})$$

où :

$$a = \lambda_2 - \lambda_1 \quad \text{et} \quad b = c/a$$

et les composantes de la vitesse induite par ce vortex limite sont similaires à celles obtenues dans le cas précédent excepté que l'intensité du vortex est  $\xi \, d\xi$ .

$$u' = \frac{z}{4\pi c} \int_0^c \frac{K \xi}{r^2} d\xi \tag{Eq. 11.29a}$$

$$v' = -\lambda u' \tag{Eq. 11.29b}$$

$$w' = \frac{1}{4\pi c} \int_0^c \frac{(x - \xi - \lambda y) K \xi}{r^2} d\xi \tag{Eq. 11.29c}$$

où :

$$\lambda = \lambda_1 + \frac{a}{c} \xi$$

$$K = \frac{\lambda(x - \xi) + y}{d_1} - \frac{\lambda(x - \xi - \lambda b) + y - b}{d_2}$$

$$r^2 = (x - \xi - \lambda y)^2 + (1 + \lambda^2) z^2 \tag{Eqs. 11.30}$$

$$d_1 = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2 + z^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(x - \xi - \lambda b)^2 + (y - b)^2 + z^2}$$

Après une longue procédure d'intégration [Ref. 15], les composantes de la vitesse induite par le côté latéral gauche du panneau sont données par :

$$u' = \frac{c}{4\pi \rho^2} \left\{ z \left| \frac{ad}{c} + \left( \lambda - \frac{2as}{r^2} \right) G_2 \right| + \frac{z}{\rho^2} \left| (c\lambda - ax) as - (c - ay) e^2 \right| G_1 \right\}_0^c \tag{Eq. 11.31a}$$

$$+ \frac{c}{4\pi \rho^2} \left\{ -\frac{1}{\rho^2} \left| (c\lambda - ax) a z^2 + (c - ay) s \right| F_1 \right\}_0^c$$

$$v' = -(c\lambda - ax)(c - ay) \frac{u'}{\rho^2} - a z t \tag{Eq. 11.31b}$$

$$w' = -(c - ay) t + (c\lambda - ax) a z \frac{u'}{\rho^2} \tag{Eq. 11.31c}$$

où :

$$t = -\frac{1}{4\pi \rho^2} \left\{ c \left| \frac{a(x + \xi)}{2c} - \frac{(c\lambda - ax)(c - ay)}{\rho^2} \right| + \left| \frac{c}{\rho^4} \left| (c - ay)(c\lambda - ax) s + a e^2 z^2 \right| y + \frac{a r^2}{2c} \right| G_2 \right\}_0^c$$

$$- \frac{1}{4\pi \rho^2} \left\{ -c \frac{e^2}{\rho^4} \left| (c - ay) s + (c\lambda - ax) a z^2 \right| G_1 + \frac{z c}{\rho^4} \left| (c - ay) e^2 - (c\lambda - ax) a s \right| F_1 \right\}_0^c \tag{Eq. 11.32}$$



$$d = \sqrt{(x - \xi)^2 + r^2}$$

$$r^2 = y^2 + z^2$$

$$\rho^2 = (c - ay)^2 + a^2 z^2$$

(Eqs. 11.33)

$$e^2 = (c\lambda - ax)^2 + \rho^2$$

$$s = (c - ay)(x - \lambda y) + a\lambda z^2$$

$$F_1 = \tan^{-1} \frac{z}{\left(\lambda - \frac{a}{c}\xi\right) \sqrt{r^2 + y(x - \xi)}}$$

$$G_1 = \frac{1}{e} \sinh^{-1} \frac{(c\lambda - ax)(x - \xi) + y(c - ay) - az^2}{c \sqrt{\left|x - \lambda y - (c - ay)\frac{\xi}{c}\right|^2 + z^2} \sqrt{1 + \left(\lambda - \frac{a}{c}\xi\right)^2}}$$

(Eqs. 11.34)

$$G_2 = \sinh^{-1} \frac{x - \xi}{r}$$

Le paramètre  $\lambda$  qui figure dans les équations ci-dessus représente la tangente de l'angle de flèche du bord d'attaque.

Si nous examinons le comportement de la vitesse axiale  $u'$  dans le plan  $xOy$ , nous pouvons voir comment varie cette distribution de tourbillonnement (vorticité). En effet, pour  $z = 0$ ,  $u'$  sera donnée par :

$$u' = \frac{c(x - \lambda y)}{4(c - ay)^2} \tag{Eq. 11.35}$$

Nous remarquons que le long du bord d'attaque ou  $x = \lambda y$ , la vitesse axiale  $u'$  est égale à zéro et le long du bord de fuite, elle est donnée par :

$$u' = -\frac{c}{4(c - ay)} \tag{Eq. 11.36}$$

Par conséquent, il est clair que la distribution de vorticité varie linéairement suivant la corde et inversement suivant l'envergure.

**b) - influence du vortex libre :**

Comme précédemment, le vortex libre latéral gauche contribue seulement aux composantes  $v$  et  $w$  qui seront déterminées en multipliant par  $\xi$  les équations figurant dans le tableau 11.2c obtenues pour le cas d'un filament vortex de longueur infinie.

$$\Delta u' = 0 \tag{Eq. 11.37a}$$

$$\begin{aligned} \Delta v' &= \frac{z}{4\pi c} \int_0^c \frac{\xi d\xi}{y^2 + z^2} \left[ 1 + \frac{x - \xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 + y^2 + z^2}} \right] \\ &= -\frac{z}{8\pi c} \left\{ \frac{x - \xi}{r^2} \left[ x - \xi + \sqrt{(x - \xi)^2 + r^2} \right] + C_2 \right\}_0^c - \frac{z}{4\pi r^2} (x - c + \sqrt{(x - c)^2 + r^2}) \end{aligned} \tag{Eq. 11.37b}$$

$$\Delta w' = \frac{y}{8\pi c} \left\{ \frac{x - \xi}{r^2} \left[ x - \xi + \sqrt{(x - \xi)^2 + r^2} \right] + C_2 \right\}_0^c + \frac{y}{4\pi r^2} \left[ x - c + \sqrt{(x - c)^2 + r^2} \right] \tag{Eq. 11.37c}$$

**Deuxième étape :**

Cette seconde étape consiste à évaluer les composantes de la vitesse induite par une distribution de vortex qui varie linéairement suivant la corde et l'envergure. Le vortex limite, comme l'illustre la figure ci-dessous, est situé suivant la ligne radiale résultant de l'intersection des bords d'attaque et de fuite. Le vortex limite à variation linéaire est complété par superposition d'une série de vortex en 'fer à cheval' d'intensité  $\xi d\xi d\eta$  avec le bord latéral gauche situé à une distance  $\eta$  de l'envergure alors que l'extrémité droite est à une distance  $b$  (Fig. 11.14).

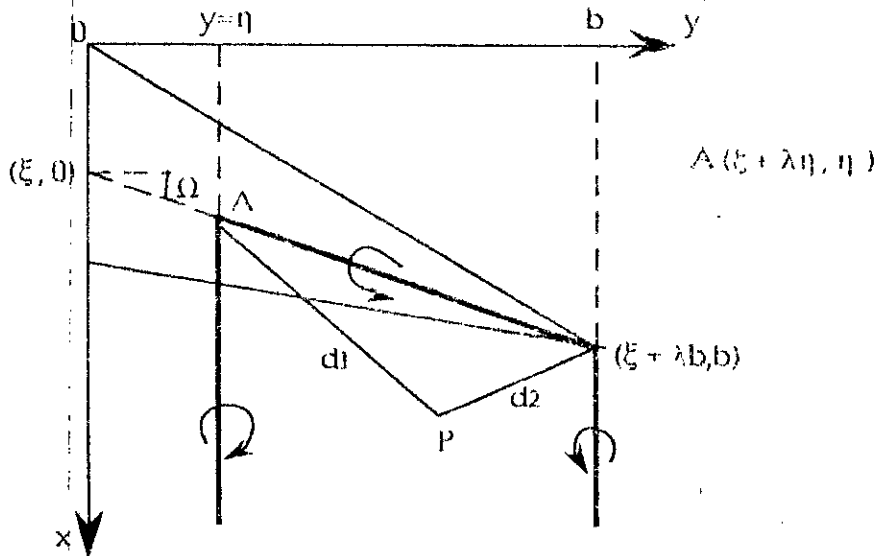


Fig. 11.14

**a) - influence du vortex limite :**

L'influence du segment limite du vortex élémentaire en forme de 'fer à cheval' est obtenue à partir des formules de la ligne vortex où l'origine est prise au point  $(\xi + \lambda\eta, \eta)$  selon Fig. 11.14. Les composantes de la vitesse sont données par :

$$u'' = \frac{z}{4\pi c} \int_0^c \frac{\xi d\xi}{r^2} \int_0^b K d\eta \tag{Eq. 11.38a}$$

$$v'' = -\lambda u'' \tag{Eq. 11.38b}$$

$$w'' = -\frac{1}{4\pi c} \int_0^c \xi(x - \xi - \lambda y) \frac{d\xi}{r^2} \int_0^b K d\eta \quad (\text{Eq. 11.38c})$$

$$\lambda = \lambda_1 + \frac{a}{c} \xi$$

$$a = \lambda_2 - \lambda_1$$

$$K = \frac{\lambda(x - \xi - \lambda y) + y - \eta}{d_1} - \frac{\lambda(x - \xi - \lambda b) + y - b}{d_2}$$

(Eqs. 11.39)

$$r^2 = (x - \xi - \lambda y)^2 + (1 + \lambda^2) z^2$$

$$d_1 = \sqrt{(x - \xi - \lambda \eta)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(x - \xi - \lambda b)^2 + (y - b)^2 + z^2}$$

L'intégration de Eqs. 11.38 [Réf. 25] donne :

$$u'' = -\frac{c}{4\pi \rho^2} \left\{ z \left[ x - \frac{2(c\lambda - ax)(y(c-ay) - az^2)}{\rho^2} \right] G_2 - z \frac{z}{\rho^2} [(c\lambda - ax)cs] C_1 \right\}_0^c$$

$$-\frac{c}{4\pi \rho^2} \left\{ z \left[ \frac{e^2(y(c-ay) - az^2)}{\rho^2} C_1 + \frac{1}{\rho^2} [(c\lambda - ax)cz^2 + s(y(c-ay) - az^2)] F_1 \right] \right\}_0^c$$

(Eq. 11.40a)

$$v'' = -(c\lambda - ax)(c - ay) \frac{u''}{\rho^2} - a z t \quad (\text{Eq. 11.40b})$$

$$w'' = -(c - ay) t + (c\lambda - ax) a z \frac{u''}{\rho^2} \quad (\text{Eq. 11.40c})$$

où :

$$t = \frac{c}{4\pi \rho^2} \left\{ \frac{d}{c} \left[ \frac{(c\lambda - ax)(y(c-ay) - az^2)}{\rho^2} - \frac{x + \xi}{2} \right] \right\}_0^c$$

$$+ \frac{c}{4\pi \rho^2} \left\{ \left[ -\frac{1}{\rho^4} [(c\lambda - ax)(y(c-ay) - az^2)s + ce^{2z^2}] + \frac{r^2}{2c} G_2 \right] \right\}_0^c$$

$$+ \frac{c}{4\pi \rho^2} \left\{ \frac{e^2}{\rho^4} [(y(c-ay) - az^2)s + c(c\lambda - ax)z^2] C_1 \right\}_0^c$$

$$+ \frac{c}{4\pi \rho^2} \left\{ z \left[ (c\lambda - ax)cs - e^2(y(c-ay) - az^2) \right] F_1 \right\}_0^c$$

(Eq. 11.41)

et les fonctions  $F_1$ ,  $G_1$  et  $G_2$  ont été obtenues dans l'étape précédente.

**cas particulier :**

Examinons de nouveau la distribution de la vorticité (tourbillonnement) dont la composante axiale  $u''$ , pour  $z = 0$ , est donnée par :

$$u'' = - \frac{cy(x - \lambda y)}{4(c - ay)^2}$$

Cette composante axiale est nulle tout au long du bord d'attaque pour lequel  $x = \lambda y$  et suivant la bord de fuite défini par  $x = c + \lambda_2 y$ , elle est égale à l'expression suivante :

$$u'' = - \frac{cy}{4(c - ay)} \tag{Eq. 11.42}$$

Nous voyons clairement que la distribution de la vorticité varie linéairement suivant la corde et l'envergure; or notre objectif consistait à avoir une vorticité qui varie linéairement suivant la corde tout en restant constante suivant l'envergure. Cependant, si nous soustrayons la nouvelle vitesse  $u''$  après l'avoir multipliée par  $a/c$ , de la vitesse axiale  $u'$  donnée par Eq. 11.35, nous obtiendrons :

$$u = u' - \frac{a}{c} u'' = - \frac{c}{4(c - ay)} + \frac{ay}{4(c - ay)} = - \frac{1}{4} \tag{Eq. 11.43}$$

qui montre que  $u$  reste constante tout au long du bord de fuite. Ainsi, en combinant les expressions de vitesses obtenues, nous pouvons avoir la distribution de vortex voulue, qui est nul tout au long du bord d'attaque, constant suivant le bord de fuite et par suite linéaire dans la direction de la corde.

**b) - contribution du sillage :**

L'analyse du système des tourbillons en 'fer à cheval' sera complétée en rajoutant la contribution du sillage. Comme mentionné dans Fig. 11.14, les filaments vortex élémentaires en forme de 'fer à cheval' génèrent une nappe de vortex libre d'intensité constante qui contribue seulement aux composantes  $v$  et  $w$  de la vitesse. Ces composantes s'obtiennent à partir des équations du tableau 11.2c :

$$\Delta u'' = 0 \tag{Eq. 11.44a}$$

$$\begin{aligned} \Delta v'' &= \frac{z}{4\pi c} \int_0^c \xi \, d\xi \int_0^b \frac{d\eta}{(y - \eta)^2 + z^2} \left[ 1 + \frac{x - \xi - \lambda\eta}{d_1} \right] \\ &= \frac{c}{8\pi} \left\{ \tan^{-1} \frac{z \sqrt{(x - \xi)^2 + r^2}}{-y(x - \xi) + \lambda r^2} - \tan^{-1} \frac{z}{y} \right\} \left( \frac{\xi}{c} \right)^2 \Big|_0^c \\ &\quad + \frac{c}{2} \left[ -zt + \frac{(x - \lambda y)(c - ay) + a\lambda z^2}{(c - ay)^2 + a^2 z^2} u \right] \end{aligned} \tag{Eq. 11.44b}$$

où  $\lambda = \lambda_1$  et les expressions de  $u$  et  $t$  sont données respectivement par Eq. 11.46a et Eq. 11.47 et qui seront définies ultérieurement.

$$\Delta w'' = -\frac{1}{4\pi c} \int_0^c \xi \, d\xi \int_0^b \frac{(y-\eta) \, d\eta}{(y-\eta)^2 + z^2} \left[ 1 + \frac{x-\xi-\lambda\eta}{d_1} \right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi c} \int_0^c \left[ \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \sinh^{-1} \frac{y+\lambda(x-\xi)}{[(x-\xi-\lambda y)^2 + (1+\lambda^2)z^2]^{1/2}} - \sinh^{-1} \frac{x-\xi}{r} + \log r \right] \xi \, d\xi$$

(Eq. II.44c)

$$\Delta w'' = -\frac{1}{4\pi c} [I_1 - I_2 + I_3]$$

où :

$$I_1 = \int_0^c \frac{\lambda \xi}{\sqrt{1+\lambda^2}} \sinh^{-1} \frac{y+\lambda(x-\xi)}{\sqrt{(x-\xi-\lambda y)^2 + (1+\lambda^2)z^2}} \, d\xi$$

(Eq. II.45a)

$$I_2 = \frac{1}{4} \left\{ (3x+\xi) [d - (x-\xi) G_2] + d^2 G_2 \right\}_0^c$$

(Eq. II.45b)

$$I_3 = \frac{c^2}{2} \log r$$

(Eq. II.45c)

et :  $\lambda = \lambda_1 + (a/c) \xi$

Les composantes de la vitesse induite par une distribution de vortex, nul sur le bord d'attaque, varie linéairement suivant la corde jusqu'à atteindre une valeur constante au bord de fuite, sont exprimées comme suit :

$$u = u' - \frac{a}{c} u'' = -\frac{1}{4\pi \rho^2} \left\{ s F_1 + z [c^2 G_1 - (c\lambda - ax) G_2] \right\}_0^c$$

(Eq. II.46a)

$$v = v' - \frac{a}{c} v'' = - (c\lambda - ax)(c - ay) \frac{u}{\rho^2} - a z t$$

(Eq. II.46b)

$$w = w' - \frac{a}{c} w'' = (c - ay) t + (c\lambda - ax) a z \frac{u}{\rho^2}$$

(Eq. II.46c)

où

$$t = \frac{1}{4\pi \rho^2} \left\{ \frac{s}{\rho^2} [c^2 G_1 - (c\lambda - ax) G_2] - z \frac{e^2}{\rho^2} F_1 + \left( y - \frac{ar^2}{c} \right) G_2 + \frac{c\lambda - ax}{c} d \right\}_0^c$$

(Eq. II.47)

et la contribution des vortex libres (sillage) est donnée par :

$$\Delta u = 0$$

(Eq. II.48a)

$$\Delta v = \Delta v' - (a/c) \Delta v''$$

(Eq. II.48b)

$$\Delta w = \Delta w' - (a/c) \Delta w''$$

(Eq. II.48c)

$$U = u + \Delta u \tag{Eq. II.49a}$$

$$V = v + \Delta v \tag{Eq. II.49b}$$

$$W = w + \Delta w \tag{Eq. II.49c}$$

troisième étape :

En fait, les composantes de la vitesse données par Eq. II.49a, b et c ont été calculées pour une région triangulaire limitée par les bords d'attaque et de fuite du panneau et le côté latéral gauche (Fig. II.13 ou 14). Pour obtenir une distribution de vortex linéaire suivant la corde et constant suivant l'envergure sur un panneau en flèche effilé et d'envergure finie  $b$ , il suffit donc de superposer deux panneaux triangulaires comme indiqué sur Fig. II.15.

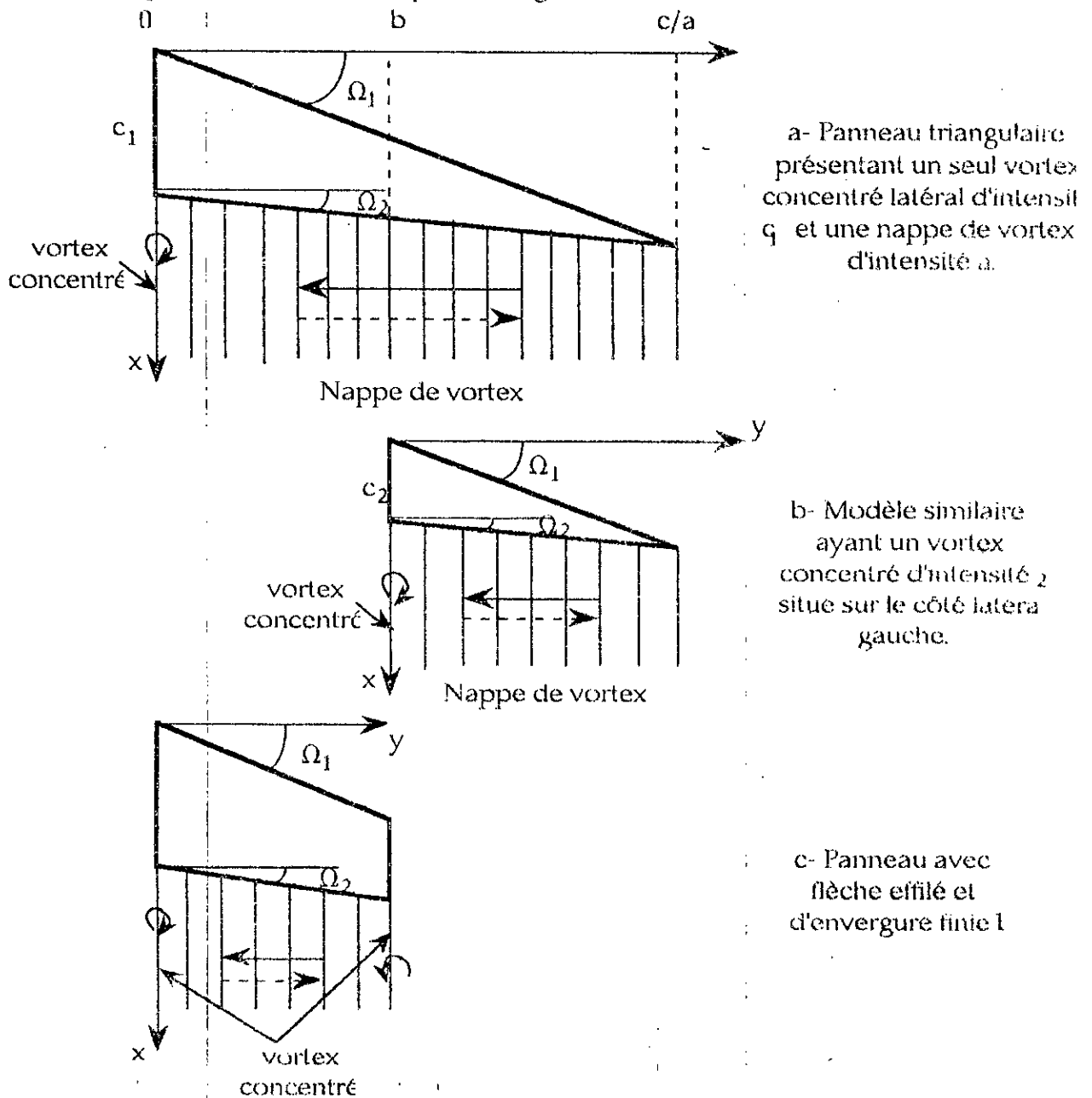


Fig. II.15

Le premier panneau triangulaire présente un vortex concentré d'intensité  $c_1$  trainant depuis le côté latéral gauche et une nappe de filaments vortex d'intensité  $a$  situés juste après le bord de fuite. Ce panneau ne présente pas un vortex libre concentré émanant de l'extrémité droite, puisque la circulation autour de la nappe de vortex est égale et opposée à celle du vortex concentré du côté latéral gauche. Un modèle de vortex similaire est représenté par le second panneau triangulaire excepté que le vortex concentré a une intensité  $c_2$ .

Les influences cumulées de ces deux panneaux triangulaires représentés par Fig. II.16a et b mènent à celle d'un panneau avec flèche, effilé et d'envergure finie b (Fig. II.16c) présentant une nappe de vortex situés juste derrière le bord de fuite et limitée par deux vortex latéraux concentrés.

## CHAPITRE III

### CHAMP DE VITESSE DE PERTURBATION DANS UN ECOULEMENT COMPRESSIBLE

Les composantes de la vitesse, induite par des distributions de singularités source et vortex d'intensité constante ou à variation linéaire situées sur les plans des panneaux modélisant une configuration donnée (corps et/ou surfaces portantes), ont été déterminées dans le chapitre précédent. Les composantes calculées initialement pour un écoulement incompressible seront étendues à l'écoulement compressible subsonique et supersonique en appliquant la règle de Göthert.

En réalité, et comme nous le verrons par la suite, la règle de Göthert se présente sous deux formes différentes [Réf. 28]. La première représente l'approximation originale de Göthert [Réf. 29] et s'applique seulement à l'écoulement subsonique continu, c'est à dire sans onde de choc; elle permet de ramener le problème de l'écoulement du fluide compressible à un écoulement de fluide incompressible et permet ainsi de voir les effets de la compressibilité. Quant à la deuxième règle, qui représente en fait une correction et une extension de la règle originale, s'applique aussi bien aux écoulements subsoniques que supersoniques et permet, par conséquent, d'élargir le domaine d'application. Cette dernière règle est la plus communément utilisée.

#### I - REGLES DE GÖTHERT ET CORRECTION DE LA COMPRESSIBILITE

##### I.1 - règle originale de Göthert ou règle 1

A une première approximation, Prandtl [Réf. 29] assumait que l'équation de continuité pour un écoulement compressible irrotationnel, dans lequel les vitesses sont faiblement perturbées, s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_c}{\beta^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_c}{\beta^2 \partial z^2} = 0 \quad (\text{Eq. III.1})$$

où  $\beta^2 = 1 - M^2$



Göthert montra que cette équation différentielle représentant l'écoulement compressible peut être transformée formellement à l'équation originale, équation de Laplace, caractérisant l'écoulement potentiel incompressible et qui est donnée par :

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z_i^2} = 0 \quad (\text{Eq. III.2})$$

Une simple procédure consiste alors à définir une fonction potentielle  $\Phi_i$  représentant l'écoulement incompressible liée à  $\Phi_c$  par la relation suivante [Réf. 30] :

$$\Phi_c(x, y, z) = \frac{1}{\beta^2} \Phi_i(x_i, y_i, z_i) \quad (\text{Eq. III.3})$$

et à introduire les transformations de coordonnées ci-dessous :

$$x = x_i$$

$$\beta y = y_i \quad (\text{Eqs. III.4})$$

$$\beta z = z_i$$

Comme les composantes ( $u_i, v_i, w_i$ ) de la vitesse incompressible dérivent de la fonction potentielle  $\Phi_i$ , c'est à dire :

$$u_i(x_i, y_i, z_i) = \frac{\partial \Phi_i(x_i, y_i, z_i)}{\partial x_i}$$

$$v_i(x_i, y_i, z_i) = \frac{\partial \Phi_i(x_i, y_i, z_i)}{\partial y_i} \quad (\text{Eqs. III.5})$$

$$w_i(x_i, y_i, z_i) = \frac{\partial \Phi_i(x_i, y_i, z_i)}{\partial z_i}$$

et les composantes ( $u_c, v_c, w_c$ ) de la vitesse compressible dérivent de la fonction  $\Phi_c$ , autrement dit :

$$u_c(x, y, z) = \frac{\partial \Phi_c(x, y, z)}{\partial x}$$

$$v_c(x, y, z) = \frac{\partial \Phi_c(x, y, z)}{\partial y} \quad (\text{Eqs. III.6})$$

$$w_c(x, y, z) = \frac{\partial \Phi_c(x, y, z)}{\partial z}$$

en tenant compte de Eq. III.3 et Eqs. III.4, nous obtenons :

$$u_c(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\Phi_i(x_i, y_i, z_i)}{\beta^2} \right] = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \Phi_i(x_i, y_i, z_i)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \Phi_i(x_i, y_i, z_i)}{\partial x_i}$$

$$v_c(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\Phi_i(x_i, y_i, z_i)}{\beta^2} \right] = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \Phi_i(x_i, y_i, z_i)}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial y} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \Phi_i(x_i, y_i, z_i)}{\partial y_i}$$

$$w_c(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\Phi_i(x_i, y_i, z_i)}{\beta^2} \right] = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \Phi_i(x_i, y_i, z_i)}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial z} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \Phi_i(x_i, y_i, z_i)}{\partial z_i}$$

finalement, les composantes  $u_c$ ,  $v_c$  et  $w_c$  deviennent :

$$u_c(x, y, z) = \frac{u_i(x_i, y_i, z_i)}{\beta^2} = \frac{u_i(x, \beta y, \beta z)}{\beta^2}$$

$$v_c(x, y, z) = \frac{v_i(x_i, y_i, z_i)}{\beta} = \frac{v_i(x, \beta y, \beta z)}{\beta}$$

(Eqs. III.7)

$$w_c(x, y, z) = \frac{w_i(x_i, y_i, z_i)}{\beta} = \frac{w_i(x, \beta y, \beta z)}{\beta}$$

Ainsi, dans la formulation originale de cette règle, les composantes ( $u_i$ ,  $v_i$ ,  $w_i$ ) de la vitesse de perturbation sont premièrement calculées sur un corps analogue dans un écoulement incompressible. Ce corps analogue est obtenu par extension des coordonnées  $y$  et  $z$  en les multipliant par le facteur de Prandtl-Glauert ou facteur de compressibilité  $\beta$ . Göthert montra alors que les composantes compressibles de la vitesse de perturbation sur un corps réel sont obtenues en divisant la vitesse de perturbation axiale  $u_i$  par  $\beta^2$  et les composantes transversales de la vitesse de perturbation  $v_i$  et  $w_i$  par  $\beta$ .

### 1.2 - règle de Göthert étendue ou règle 2

Dans la deuxième forme de la règle de Göthert ou règle 2, les composantes ( $u_c$ ,  $v_c$ ,  $w_c$ ) de la vitesse en un point  $P(x, y, z)$  dans un écoulement subsonique compressible sont égales à ( $u_i$ ,  $\beta v_i$ ,  $\beta w_i$ ) où  $u_i$ ,  $v_i$  et  $w_i$  sont les composantes de la vitesse incompressible évaluées au point  $P(x, \beta y, \beta z)$ , c'est à dire :

$$u_c(x, y, z) = u_i(x_i, y_i, z_i) = u_i(x, \beta y, \beta z)$$

$$v_c(x, y, z) = \beta v_i(x_i, y_i, z_i) = \beta v_i(x, \beta y, \beta z)$$

(Eqs. III.8)

$$w_c(x, y, z) = \beta w_i(x_i, y_i, z_i) = \beta w_i(x, \beta y, \beta z)$$

Cette règle ne s'applique en fait qu'aux distributions de singularités vortex [Réf. 11]. Pour des singularités sources, une autre règle doit être utilisée et dans laquelle les composantes de la vitesse dans l'écoulement compressible sont données par ( $u_i/\beta$ ,  $v_i$ ,  $w_i$ ) c'est à dire :

$$u_c(x, y, z) = \frac{u_i(x_i, y_i, z_i)}{\beta} = \frac{u_i(x, \beta y, \beta z)}{\beta}$$

$$v_c(x, y, z) = v_i(x_i, y_i, z_i) = v_i(x, \beta y, \beta z) \quad (\text{Eqs. III.9})$$

$$w_c(x, y, z) = w_i(x_i, y_i, z_i) = w_i(x, \beta y, \beta z)$$

Toutefois, et comme nous le verrons par la suite, puisque les solutions de Eq.III.1 sont exprimées en fonction de  $\beta = \sqrt{1 - M^2}$ , qui devient imaginaire pour  $M > 1$ . Les composantes (u, v, w) de la vitesse deviennent des fonctions complexes en écoulement supersonique. Apparemment, ces solutions ne sont valables que pour un écoulement subsonique, mais selon les références 25 et 27, elles pourraient être étendues analytiquement à l'écoulement supersonique. Ainsi, pour les applications supersoniques, Eq. III.1 peut être écrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi_c}{\beta'^2 \partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi_c}{\beta'^2 \partial z^2} = 0 \quad (\text{Eq. III.10})$$

où  $\beta'$  est lié à  $\beta$  par la relation ci-dessous :

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{1 - M^2} = i\beta' \\ \text{et} \quad \beta' &= \sqrt{M^2 - 1} \end{aligned} \quad (\text{Eqs. III.11})$$

Le passage de Eq. III.1 et Eq. III.10 représente physiquement des changements très importants entre les champs d'écoulements subsonique compressible et supersonique (annexe C).

Finalement, il ne faut pas perdre de vue que les composantes (u, v, w) de la vitesse en un point P(x, y, z) dans un écoulement supersonique s'obtiennent en extrayant les parties réelles de  $(u_i, \beta v_i, \beta w_i)$  pour les singularités vortex, autrement dit :

$$u(x, y, z) = \text{Re} [u_i(x, \beta y, \beta z)]$$

$$v(x, y, z) = \text{Re} [\beta v_i(x, \beta y, \beta z)] \quad (\text{Eqs. III.12})$$

$$w(x, y, z) = \text{Re} [\beta w_i(x, \beta y, \beta z)]$$

et les parties réelles de  $(u_i/\beta, v_i, w_i)$  pour les singularités sources :

$$u(x, y, z) = \text{Re} \left[ \frac{u_i(x, \beta y, \beta z)}{\beta} \right]$$

$$w(x, y, z) = \text{Re} [w_i(x, \beta y, \beta z)]$$

Comme les paramètres  $m_i$ ,  $a_i$  et  $\lambda_i$  dépendent des coordonnées  $x_i$ ,  $y_i$  et  $z_i$ , nous remarquons alors à partir de Eqs. III.4 que ces paramètres doivent être aussi exprimés en fonction du facteur de compressibilité  $\beta$  et deviennent alors :

$$m_i = \frac{y_i}{x_i} = \frac{\beta y}{x} = \beta m$$

$$a_i = \frac{z_i}{x_i} = \frac{\beta z}{x} = \beta a \tag{Eqs. III.14}$$

$$\lambda_i = \frac{x_i}{y_i} = \frac{x}{\beta y} = \frac{\lambda}{\beta}$$

Des comparaisons entre les règles 1 et 2 données dans Réf. 31 ont montré que dans un écoulement subsonique d'une part, la règle 1 rencontre des difficultés en calculant exactement les distributions de pression sur les corps ayant des surfaces à fortes pentes ("steep surface gradient"); et, en particulier, à proximité des bords d'attaque et aux nez brusques ("blunt noses"). Afin de corriger la règle 1 dans ces régions, des corrections semi-empiriques ont été développées par NLR [Réf. 32]. Par contre, il a été montré que la règle 2 calcule, en général, correctement la pression d'arrêt aux nez brusques ("blunt noses").

Dans un écoulement supersonique d'autre part, les différences entre ces deux règles sont bien apparentes (Fig. III.1). Les résultats obtenus en appliquant chaque règle de compressibilité sont comparés avec une distribution exacte du coefficient de pression donnée par la référence 33 et celle donnée par Réf. 28 qui utilise une correction de la compressibilité basée sur le nombre de Mach local.

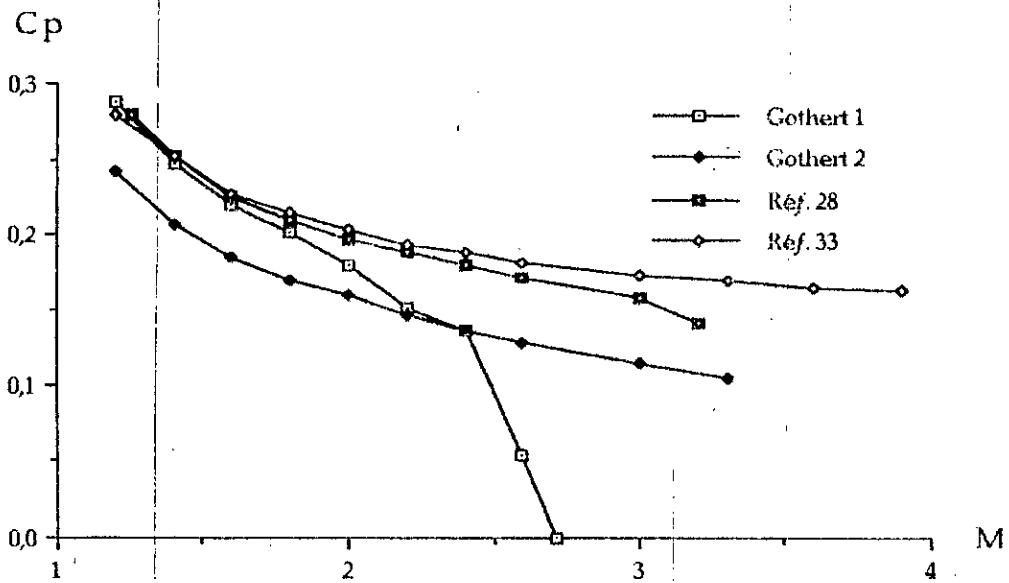


Fig. III.1 Distribution de pression en fonction du nombre de Mach sur un cône ayant un demi-angle de 15° [Réf. 28]

De cet exemple, nous voyons clairement que la distribution de  $C_p$  qui correspond à la règle 1 est conforme à la solution exacte jusqu'à  $M = 1.6$  et tend brusquement vers zéro au delà. Alors que la distribution de  $C_p$  donnée par la règle 2 semble suivre l'allure exacte, mais est à 20 + 40 % plus bas [Réf. 28].

Ainsi dans le cadre de notre étude, nous utiliserons la règle 2 de Göthert pour déterminer les champs de vitesses de perturbation compressibles. Encore devons-nous noter qu'une correction plus améliorée des effets de compressibilité basée sur le nombre de Mach local est présentée dans Réf. 28. L'utilisation de cette méthode approximative qui représente d'ailleurs une correction valable et est indépendante de "body bluntness", permet d'obtenir de meilleures distributions de pression (Fig. III.1). Comme un futur développement, nous suggérons d'intégrer cette nouvelle correction au code de calcul.

## II. DISTRIBUTION DE SOURCES

Les composantes de la vitesse subsonique compressible induite par des distributions de sources s'obtiennent à partir des composantes incompressibles dérivées dans le chapitre précédent (Tableau II.3) en appliquant les transformations données par Eqs. III.4, Eqs. III.14 et Eqs. III.9. D'autre part, les expressions obtenues pourraient aussi être étendues analytiquement à l'écoulement supersonique à l'aide de Eqs. III.13.

### III.1 - Distribution de source constante sur un panneau trapézoïdal

En appliquant les transformations qui viennent d'être citées, aux composantes de la vitesse incompressible du tableau II.3a, nous obtenons :

$$u(x, y, z) = - \frac{k}{4\pi\sqrt{1 + \beta^2 a^2}} \left| a F - \frac{(\beta^2 m G - H)}{\beta^2} \right| \quad (\text{Eq. III.15a})$$

$$v(x, y, z) = - \frac{k}{4\pi} \sqrt{1 + \beta^2 a^2} G \quad (\text{Eq. III.15b})$$

$$w(x, y, z) = - \frac{k}{4\pi\sqrt{1 + \beta^2 a^2}} \left| F + a (\beta^2 m G - H) \right| \quad (\text{Eq. III.15c})$$

où la constante  $k$  (annexe C) est donnée par :

$$k = \begin{matrix} 1 & M < 1 \\ 2 & M > 1 \end{matrix} \quad (\text{Eq. III.16})$$

et les différentes expressions des fonctions d'influence  $F$ ,  $G$  et  $H$  (annexe B) sont données par le tableau III.1.

$e^2$	Fonctions	F	G	H
$e^2 > 0$	$M < 1$	$\tan^{-1} \frac{(z-ax)d}{-x(y-mx) - \beta^2 z(ay-mz)}$	$\frac{1}{e} \sinh^{-1} \frac{x'}{\beta r'}$	$\beta \sinh^{-1} \frac{\beta y}{\sqrt{x^2 + \beta^2 z^2}}$
	$M > 1$ et $d > 0$	$\tan^{-1} \frac{(z-ax)d}{-x(y-mx) - \beta^2 z(ay-mz)}$	$\frac{1}{e} \log \frac{x' + d'}{\beta r'}$	$\beta \tan^{-1} \frac{d}{\beta y}$
	et $d = 0$ ( $x \leq \beta r$ )	0	0	0
$e^2 = 0$	$d > 0$ ( $x > \beta r$ )	$\tan^{-1} \frac{(z-ax)d}{-x(y-mx) - \beta^2 z(ay-mz)}$	$\frac{d}{x'}$	$\beta \tan^{-1} \frac{d}{\beta y}$
	$d = 0$	0	0	0
$e^2 < 0$	$d > 0$ ( $x \leq \beta r$ )	$\tan^{-1} \frac{(z-ax)d}{-x(y-mx) - \beta^2 z(ay-mz)}$	$\frac{1}{e} \cos^{-1} \frac{x'}{\beta r'}$ si $\left  \frac{x'}{\beta r'} \right  < 1$	$\beta \tan^{-1} \frac{d}{\beta y}$
	$d = 0$ ( $x \leq \beta r$ )	$\pm \pi$ à l'intérieur de l'enveloppe de Mach 0 sinon	$\frac{\pi}{e}$ si $\frac{x'}{\beta r'} \leq -1$ et $x > x_1$ 0 sinon	0

Tableau III.1 Expressions des fonctions d'influence selon le régime d'écoulement.

où :

$$d = (x^2 + \beta^2 r^2)^{1/2} \quad r^2 = y^2 + z^2 \quad \beta^2 = 1 - M^2 \quad e = \sqrt{1 + \beta^2(a^2 + m^2)}$$

$$r' = \sqrt{(y - mx)^2 + (z - ax)^2 + \beta^2(ay - mz)^2} \quad d' = e' d$$

(Eqs. III.17)

$$e' = \sqrt{1 - \beta^2(a^2 + m^2)} \quad \beta' = (M^2 - 1)^{1/2}$$

$$x' = x + \beta^2(my + az) \quad x_1 = \frac{(my + az + |ay - mz| e')}{a^2 + m^2}$$

A partir du tableau III.1, nous remarquons que, pour un régime d'écoulement supersonique, les expressions de F, G et H dépendent de  $e^2$  qui peut être positif, nul ou négatif. Ce paramètre définit en fait la nature d'un des côtes latéraux du panneau considéré selon qu'il est subsonique, sonique ou supersonique (annexe C, § III).

En effet, lorsque le côté latéral du panneau est subsonique ( $e^2 > 0$ ), il peut être facilement vérifié que toutes les fonctions deviennent nulles pour  $x \leq \beta r$  qui inclut tous les points situés sur ou à l'extérieur du cône de Mach issu de l'apex (annexe C, § II). Si ce côté coïncide ou s'étend à l'extérieur du cône de Mach issu de l'origine (côté sonique pour  $e^2 = 0$  ou supersonique pour  $e^2 < 0$ ), les fonctions F et H restent inchangées pour les points situés à l'intérieur de ce cône de Mach alors que G devient :

$$G = \begin{cases} \frac{d'}{x'} & \text{pour } e^2 = 0 \\ \frac{1}{e'} \cos^{-1} \frac{x'}{\beta' r'} & \text{pour } e^2 < 0 \end{cases} \quad (\text{Eqs. III.18})$$

En revanche, ces fonctions deviennent nulles pour tous les points situés sur ou en dehors du cône de Mach issu de l'origine ( $x \leq \beta r$  et  $e^2 < 0$ ), excepté à l'intérieur d'une région spéciale appelée région "bidimensionnelle" ou "enveloppe des cônes de Mach" limitée par le cône de Mach issu de l'origine et les ondes de Mach émanant du côté latéral du panneau (annexe C, § IV) lorsque celui-ci est du type supersonique ( $e^2 < 0$ ). Les limites géométriques de cette région bidimensionnelle sont illustrées sur la figure suivante (annexe C, § V) :

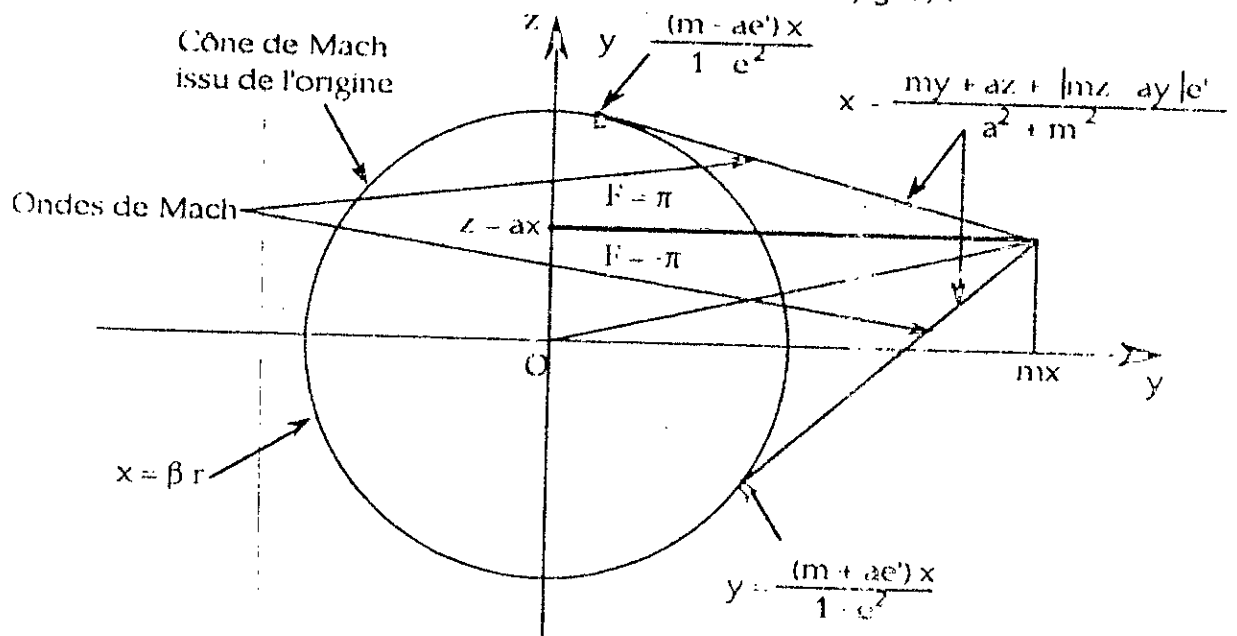


Fig. III.2 Enveloppe des cônes de Mach issus du côté latéral du panneau considéré

A l'intérieur de cette enveloppe des cônes de Mach, pour un côté supersonique ( $e^2 < 0$ ), les fonctions F et G s'expriment par :

$$F = \begin{cases} \pi & \text{pour } z \geq ax \\ -\pi & \text{pour } z < ax \end{cases} \quad (\text{Eqs. III.19})$$

$$G = \pi / e'$$

Cependant il a été montré, par expérimentation numérique [Réf. 11], que les équations III.15 doivent être encore divisées par le terme  $\sqrt{1 + \beta^2 a^2}$ .

### II.2 - Distribution de source constante sur un panneau en flèche et effilé suivant l'envergure

En appliquant les mêmes transformations ci dessus aux composantes (u, v, w) de la vitesse induite par cette distribution de source données par le tableau II. 2b), nous aboutissons à :

$$u = \frac{k}{4\pi} C_1 \tag{Eq III.20a}$$

$$v = \frac{k}{4\pi} [\lambda C_1 - C_2] \tag{Eq III.20b}$$

$$w = \frac{k}{4\pi} [F_1 - F_2] \tag{Eq III.20c}$$

où k est donné par Eq. III.16 et les fonctions  $F_1$ ,  $G_1$  et  $G_2$  sont données par le tableau III.2 pour les régimes d'écoulement subsonique et supersonique après avoir extrait leurs parties réelles.

$e^2$	Fonctions	$F_1$	$G_1$	$G_2$
$e^2 > 0$	$M < 1$	$\tan^{-1} \frac{zd}{-xy + \lambda r^2}$	$\frac{1}{e} \frac{\sinh^{-1} \frac{x'}{\beta r'}}{\beta r'}$	$\frac{\sinh^{-1} \frac{x}{\beta r}}{\beta r}$
	$M > 1$ et $d > 0$	$\tan^{-1} \frac{zd}{-xy + \lambda r^2}$	$\frac{1}{e} \frac{\log \frac{x'+d}{\beta r'}}{\beta r'}$	$\frac{\log \frac{x+d}{\beta r}}{\beta r}$
	et $d = 0$	0	0	0
$e^2 = 0$	$d > 0$	$\tan^{-1} \frac{zd}{-xy + \lambda r^2}$	$\frac{d}{x'}$	$\frac{\log \frac{x+d}{\beta r}}{\beta r}$
	$d = 0$	0	0	0
$e^2 < 0$	$d > 0$	$\tan^{-1} \frac{zd}{xy + \lambda r^2}$	$\frac{1}{e'} \frac{\cos^{-1} \frac{x'}{\beta r'}}{\beta r'}$ si $\left  \frac{x'}{\beta r'} \right  < 1$ 0 sinon	$\frac{\log \frac{x+d}{\beta r}}{\beta r}$
	$d = 0$ ( $x \leq \beta x$ )	$\pm \pi$ à l'intérieur de l'enveloppe des cônes de Mach 0 sinon	$\frac{\pi}{e'}$ si $\frac{x'}{\beta r'} \leq 1$ et $x > x_2$ 0 sinon	0

Tableau III.2 Expressions des fonctions de vitesse  $F_1$ ,  $G_1$  et  $G_2$



et :

$$F_2 = \tan^{-1} \frac{z}{y} \quad \text{pour } M < 1 \text{ seulement}$$

$$d = (x^2 + \beta^2 r^2)^{1/2} \quad r^2 = y^2 + z^2 \quad \beta^2 = 1 - M^2$$

$$d' = e d \quad e = (\lambda^2 + \beta^2)^{1/2} \quad x' = \lambda x + \beta y \quad (\text{Eqs. III 21})$$

$$e' = (\lambda^2 - \beta^2)^{1/2} \quad \beta' = (M^2 - 1)^{1/2}$$

$$r' = \sqrt{(x - \lambda y)^2 + e^2 z^2} \quad x_2 = \lambda y + e' |z|$$

Nous notons que les fonctions  $F_1$ ,  $G_1$  et  $G_2$  dépendent seulement de la flèche du bord d'attaque (ou du paramètre  $e^2$ ). Comme nous venons de le voir, ces fonctions sont nulles sur ou à l'extérieur du cône de Mach issu de l'origine pour un bord d'attaque sonique ou subsonique ( $e^2 = 0$  ou  $e^2 > 0$ ); alors que pour le cas d'un bord d'attaque supersonique, ces fonctions prennent des valeurs constantes à l'intérieur de l'enveloppe des cônes de Mach (Fig. III.3 et annexe C, § V) et s'expriment selon Eqs. III.19 pour un panneau non incliné par rapport au plan  $x$   $y$  c'est à dire pour lequel  $a$  est nulle.

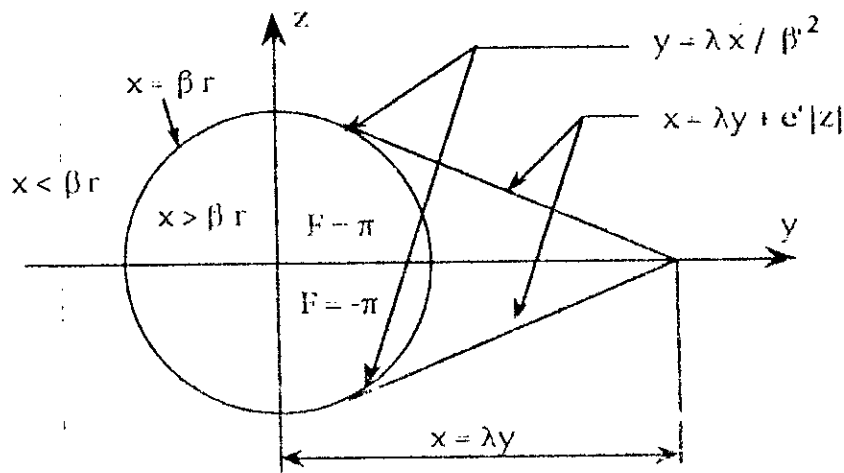


Fig. III.3 Enveloppe des cônes de Mach issus du bord d'attaque d'un panneau en flèche.

### III.3 - Distribution de source linéaire sur un panneau en flèche et effilé suivant l'envergure

En procédant de la même manière, les composantes de la vitesse compressible induite par ce type de distribution de singularité, déduites à partir de celles données par le tableau II.3c, s'expriment comme suit :

$$u = -\frac{k}{4\pi} [(x - \lambda y) G_1 + y G_2 - z(F_1 - F_2)] \quad (\text{Eq. III 22a})$$

$$v = \frac{k}{4\pi} [(x - \lambda y)(\lambda G_1 - G_2) + (x + d) - \lambda z(F_1 - F_2)] \quad (\text{Eq. III 22b})$$

$$w = \frac{k}{4\pi} \left[ \frac{z}{e} (F_1 + F_2) + \dots \right] \quad (\text{Eq. III 22c})$$

$$w = \frac{k}{4\pi} [(x - \lambda y)(F_1 - F_2) + z(e^2 C_1 - \lambda C_2)] \quad (\text{Eq. III.22c})$$

où les fonctions  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $G_1$  et  $G_2$  sont données par le tableau III.2 et les expressions  $d$ ,  $e$ ,  $x'$ ,  $r'$  et  $e'$  sont exprimées par Eqs. III.21. La valeur de  $k$  est donnée par Eq. III.16.

### III - DISTRIBUTION DE VORTEX

Les composantes de la vitesse compressible induite par des distributions de vortex s'obtiennent à partir des expressions du tableau II.3 en appliquant la deuxième règle de Gôthert traduite par Eqs. III.8 et en tenant compte de Eqs. III.4 et Eqs. III.14.

De plus, l'utilisation de Eqs. III.12 permet d'étendre les expressions des composantes compressibles obtenues à l'écoulement supersonique

#### III.1 - Distribution de vortex constant sur un panneau en flèche et effilé suivant l'envergure

L'application de cette règle aux composantes de la vitesse incompressible induite par une distribution de vortex limites d'intensité constante données par le Eq. II.26, mène à :

$$u = \frac{k}{4\pi} [F_1 - F_2] \quad (\text{Eq. III.23a})$$

$$v = -\lambda u \quad (\text{Eq. III.23b})$$

$$w = \frac{k}{4\pi} [e^2 C_1 - \lambda(G_2 + G_3)] \quad (\text{Eq. III.23c})$$

où  $G_3 = \log \beta \sqrt{y^2 + z^2}$  pour  $M < 1$ ; les expressions des fonctions  $F_1$ ,  $G_1$  et  $G_2$  figurent dans le tableau III.2 et celles de  $F_2$ ,  $e$ ,  $d$  et  $r$  sont définies par Eqs. III.21.

La contribution des tourbillons latéraux (Eqs. II.27) en écoulement supersonique devient :

$$\Delta u = 0 \quad (\text{Eq. III.24a})$$

$$\Delta v = \frac{k z}{4\pi} \frac{x + d}{r^2} \quad (\text{Eq. III.24b})$$

$$\Delta w = -\frac{k y}{4\pi} \frac{x + d}{r^2} \quad (\text{Eq. III.24c})$$

et le facteur  $k$  est évalué selon Eq. III.16.

#### III.2 - Distribution de vortex à variation linéaire sur un panneau en flèche et effilé dans la direction de l'envergure

Les composantes de la vitesse incompressible induite par une distribution de tourbillons liés (Eqs. 1146) sont transformées à l'aide de la règle de Görtner pour donner celles de la vitesse compressible et sont données par :

$$u = \frac{k}{4\pi\rho^2} \left\{ s F_1 + z \left[ e^2 G_1 - (c\lambda - ax) G_2 \right] \right\}_0^c \quad (\text{Eq. 11.25a})$$

$$v = (c\lambda - ax)(c - ay) \frac{u}{\rho^2} a z t \quad (\text{Eq. 11.25b})$$

$$w = (c - ay) t + (c\lambda - ax) a z \frac{u}{\rho^2} \quad (\text{Eq. 11.25c})$$

où :

$$t = \frac{k}{4\pi\rho^2} \left\{ \frac{s}{\rho^2} \left[ e^2 G_1 - (c\lambda - ax) G_2 \right] - z \frac{e^2}{\rho^2} F_1 + \beta^2 \left( y - \frac{ar^2}{c} \right) G_2 + (c\lambda - ax) \frac{d}{c} \right\}_0^c \quad (\text{Eq. 11.26})$$

et :

$$a = \lambda - \lambda_2$$

$$d = \sqrt{(x - \xi)^2 + \beta^2 \rho^2 r^2}$$

$$e^2 = \frac{1}{\beta^2} \left[ (c\lambda - ax)^2 + \beta^2 \rho^2 \right]$$

$$r^2 = y^2 + z^2$$

(Eqs. 11.27)

$$\rho^2 = (c - ay)^2 + a^2 z^2$$

$$s = (c - ay)(x - \lambda y) + a \lambda z^2$$

et les fonctions  $F_1$ ,  $G_1$  et  $G_2$  sont exprimées par :

$$F_1 = \tan^{-1} \frac{z d}{-y(x - \xi) + \left( \lambda - a \frac{\xi}{c} \right) r^2} \quad (\text{Eq. 11.28a})$$

$$G_1 = \frac{1}{e} \sinh^{-1} \frac{(c\lambda - ax)(x - \xi) + \beta^2 |y(c - ay) - az^2|}{\beta c \left[ \left( x - \lambda y - (c - ay) \frac{\xi}{c} \right)^2 + z^2 \left[ \beta^2 + \left( \lambda - a \frac{\xi}{c} \right)^2 \right] \right]^{1/2}} \quad (\text{Eq. 11.28b})$$

$$G_2 = \sinh^{-1} \frac{x - \xi}{\beta r} \quad (\text{Eq. 11.28c})$$

Les expressions des fonctions  $F_1$ ,  $G_1$  et  $G_2$ , pour un écoulement supersonique, sont similaires à celles données par le tableau 11.2, où :

$$x' = (c\lambda - ax)(x - \xi) + \beta^2 |y(c - ay) - az^2|$$

$$r' = c \left\| x - \lambda y + (c - ay) \frac{\xi}{c} \right|^2 + z^2 \left\| \beta^2 + \left( \lambda - a \frac{\xi}{c} \right)^2 \right\|^{1/2}$$

$$d' = e d$$

$$e' = \sqrt{-(c\lambda - ax)^2 - \beta^2 \rho^2} \tag{Eqs. III.29}$$

La contribution de la nappe de tourbillons dans le sillage, pour un écoulement compressible, est donnée par [Réf. 11] :

$$\Delta u = 0 \tag{Eq. III.30a}$$

$$\Delta v = \frac{c}{8\pi} \left\{ k (F_1 - F_2) \left( \frac{\xi}{c} \right) \right\}_0^c - \frac{c}{2} \left( zt - \frac{su}{\rho^2} \right) \tag{Eq. III.30b}$$

$$\Delta w = \frac{-k}{4\pi c} [I_1 - I_2 + I_3] \tag{Eq. III.30c}$$

où :

$$s = (x - \lambda y)(c - ay) + a\lambda z^2$$

$$I_1 = \int_0^c \frac{\lambda \xi}{\sqrt{\lambda^2 + \beta^2}} \sinh^{-1} \frac{\lambda(x - \xi) + \beta^2 y}{\beta \sqrt{(x - \xi - \lambda y)^2 + (\beta^2 + \lambda^2) z^2}} d\xi$$

$$I_2 = \frac{1}{4} \left\{ (3x + \xi) |d - (x - \xi) G_2| + d^2 G_2 \right\}_0^c \tag{Eqs. III.31}$$

$$I_3 = \frac{c^2}{2} \log \beta r$$

et le paramètre  $k$  est toujours évalué d'après Eq. III.16.

Les expressions des composantes des vitesses induites par ces différents types de distributions de singularités sont regroupées et résumées dans le tableau récapitulatif suivant (Tab. III.3):

	$u = -\frac{k}{4\pi} G_1$ $v = \frac{k}{4\pi}  \lambda G_1 - G_2 $ $w = \frac{k}{4\pi}  F_1 - F_2 $ <p>a source constante</p>	$u = -\frac{k}{4\pi} [(x - \lambda y) G_1 + y G_2 - z(F_1 - F_2)]$ $v = \frac{k}{4\pi} [(x - \lambda y)(\lambda G_1 - G_2) + (x + d) \lambda z(F_1 - F_2)]$ $w = \frac{k}{4\pi} [(x - \lambda y)(F_1 - F_2) + z(e^2 G_1 - \lambda G_2)]$ <p>b source à variation linéaire</p>
--	---	---

a Distribution de source sur un panneau avec fleche et effilement.

	$u = -\frac{k}{4\pi(1 + \beta^2 a^2)} \left[ aF - \frac{\beta^2 m a G - H}{\beta^2} \right]$ $v = -\frac{k}{4\pi} G$ $w = \frac{k}{4\pi(1 + \beta^2 a^2)} [F + a(\beta^2 m G - H)]$
--	---

b- Distribution de source constante sur un panneau trapézoïdal.

	$u = \frac{k}{4\pi}  F_1 - F_2 $ $v = -\lambda u + \frac{k y x + d}{4\pi r^2}$ $w = \frac{k}{4\pi} (e^2 G_1 - \lambda(G_2 + G_3)) + \frac{k y x + d}{4\pi r^2}$
--	---

c Distribution de vortex constant sur un panneau avec fleche.

	$u = -\frac{k}{4\pi\rho^2} \left\{ sF_1 + z[e^2 G_1 - (c\lambda - ax)G_2] \right\}_0^c$ $v = -\frac{(c\lambda - ax)(c - ay)}{\rho^2} u - azt - \frac{kz}{8\pi c} \left\{ \frac{x - \xi}{\beta r^2} \left( x - \xi + \sqrt{(x - \xi)^2 + \beta^2 r^2} \right) + G_2 \right\}_0^c$ $- \frac{kz}{4\pi\beta r^2} \left( x - c + \sqrt{(x - c)^2 + \beta^2 r^2} \right) - \frac{a}{8\pi} \left\{ k(F_1 - F_2) \left( \frac{\xi}{c} \right)^2 \right\}_0^c - \frac{a}{2} \left( zt + \frac{s}{\rho^2} u \right)$ $w = -\frac{(c - ay)t + (c\lambda - ax)az}{\rho^2} u + \frac{ka}{4\pi c^2}  I_1 - I_2 + I_3  + \frac{ky}{4\pi\beta r^2} \left( x - c + \sqrt{(x - c)^2 + \beta^2 r^2} \right)$ $+ \frac{ky}{4\pi c} \left\{ \frac{x - \xi}{\beta r^2} \left( x - \xi + \sqrt{(x - \xi)^2 + \beta^2 r^2} \right) + G_2 \right\}_0^c$
--	--

d- Distribution de vortex lineaire suivant la corde et constant suivant l'envergure.

(Les fonctions d'influence sont données par Tab. III.1 et Tab. III.2)

Tableau III.3 : Expressions des composantes des vitesses compressibles induites par différents types de distributions de singularités situées sur le plan d'un panneau.

## CHAPITRE IV

### FORMULATION ET RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS AERODYNAMIQUES

La représentation aérodynamique d'une configuration aile fuselage empennages, comme nous l'avons présenté au chapitre II, est caractérisée par l'utilisation de distributions de singularités aérodynamiques situées sur le plan des panneaux : Le fuselage (ou corps) est représenté par des distributions de panneaux source d'intensité constante disposés entièrement sur la surface du corps, alors que l'aile et les empennages sont représentés soit par des distributions de panneaux vortex à variation linéaire situés entièrement sur leurs surfaces réelles (option des conditions aux limites non plane), soit par des distributions de panneaux source et vortex constants et linéaires disposés sur leurs surfaces moyennes (option des conditions aux limites plane). Ainsi deux méthodes optionnelles sont disponibles pour modéliser les surfaces de l'aile et des empennages. Il est évident que la première méthode est plus précise que la seconde mais nécessite des temps de calcul plus élevés.

L'objectif principal de la technique de panneaux consiste à déterminer les intensités de ces distributions de singularités de telle sorte que la surface de la configuration devienne une surface de courant, c'est à dire que le vecteur vitesse résultant est partout tangentiel à la surface. Cette condition à la limite est imposée numériquement en définissant, en premier lieu, un point situé généralement au centre de gravité de chaque panneau [Réf. 5], appelé point de contrôle, et en évaluant, en second lieu, ces intensités telle que la composante normale de l'écoulement résultant, calculée à chaque point de contrôle, soit nulle. Cette vitesse représente, en fait, la superposition des composantes normales de la vitesse de l'écoulement libre notée  $\omega_i$  et de la vitesse induite par toutes les distributions de singularités dénotée  $\Delta\omega_j$ . Cette condition se traduit par :

$$N_i = \omega_i + \Delta\omega_j = 0$$

(Eq IV 1)

ou encore :

$$\Delta\omega_i = -\omega_i \quad (\text{Eq. IV.2})$$

En réalité, le point de contrôle n'est pas toujours pris au centre de gravité et sa position dépend du régime d'écoulement. A cet effet, une comparaison, faite entre des distributions de pression, calculées pour des ailes plates sur une plage de nombres de Mach supersoniques [Réf. 21] et les résultats de la théorie linéaire publiés dans Réfs. 34, 35, 36, et 37, a montré que la position du point de contrôle a un effet dominant sur la forme des distributions de pression obtenues. En effet, lorsque le point de contrôle est situé au centre de gravité du panneau, une forte tendance oscillatoire a été observée dans la distribution de pression suivant la corde et il a été donc remarqué que cette distribution ne concordait pas avec la solution exacte de la théorie linéaire sauf du côté du bord d'attaque de l'aile. Au contraire, quand il est situé à 95 % de la corde qui passe par le centre de gravité, il a été constaté que les distributions de pression obtenues suivaient exactement la solution donnée par la théorie linéaire excepté au voisinage immédiat du bord d'attaque. Nous concluons par là, que ces distributions se rapprochent de la solution exacte lorsque le point de contrôle se déplace du côté du bord de fuite du panneau. Or, selon cette même référence [Réf. 21], ceci n'est vrai que pour les panneaux dont les bords de fuite sont soniques ou supersoniques. Cependant, il a été aussi observé que pour des panneaux ayant des bords de fuite subsoniques, la vitesse normale au bord de fuite était infinie et la pression devenait alors indéterminée sur ceux-ci.

Pour éviter cette difficulté et afin de maintenir une bonne approximation à la solution exacte, les points de contrôle ont été arbitrairement situés à 95 % de la corde passant par le centre de gravité [Réf. 27]; ce choix a donné, en fait, une représentation adéquate de la distribution de pression pour des ailes portantes avec ou sans cambrure.

Par ailleurs, nous tenons à mentionner que cette position du point de contrôle a été déterminée empiriquement par une corrélation extensive des distributions de pression calculées suivant la corde pour une variété d'ailes et qu'aucun argument théorique n'a été développé pour corroborer ce choix [Réf. 11].

Pour les surfaces portantes (ailes et empennages) en revanche, en plus de la condition de l'écoulement tangentiel traduite par Eq. IV.1 ou Eq. IV.2, nous devons encore satisfaire la condition "physique" de Kutta forçant l'écoulement de quitter la surface avec une vitesse finie au bord de fuite. Cette condition de Kutta d'une vitesse finie et la condition qui exige que la nappe de vortex soit une surface de courant, impliquent que cette nappe est tangente à l'une des deux surfaces de l'aile [Réf. 38].

Nous verrons par la suite que Eq. IV.1 ou Eq. IV.2 est une équation algébrique linéaire et représente la condition à la limite de l'écoulement tangentiel évaluée au point de contrôle du *j*ème panneau. Si nous appliquons cette équation aux points de contrôle de tous les panneaux, nous aboutirons à un système d'équations algébriques linéaires. Le problème aérodynamique est alors formulé par un système d'équations linéaires qui relient les composantes normales des vitesses, induites aux points de contrôle, aux intensités des distributions de singularités

qui sont, à présent, inconnues. Les coefficients de ce système d'équations sont évalués en fonction des composantes de la vitesse déterminées dans le chapitre précédent pour l'écoulement subsonique compressible et supersonique. Ces coefficients sont appelés coefficients d'influence aérodynamique et forment la matrice aérodynamique. Les intensités de ces singularités seront déterminées en résolvant ce système d'équations algébriques pour des nombres de Mach et de l'angle d'attaque donnés, et seront utilisées ultérieurement pour calculer les vitesses, pression, forces et moments agissant sur la configuration considérée (aile isolée, corps isolé ou combinaison aile - fuselage).

La formulation et la solution du système d'équations formées à partir des conditions aux limites pour les deux options plane et non plane, citées ci-dessus, seront présentées dans ce chapitre.

## I - OPTION DES CONDITIONS AUX LIMITES NON-PLANE

### I.1 - Représentation aérodynamique

Dans cette option, les panneaux se situent entièrement sur les deux surfaces de l'aile (Fig. IV.1).

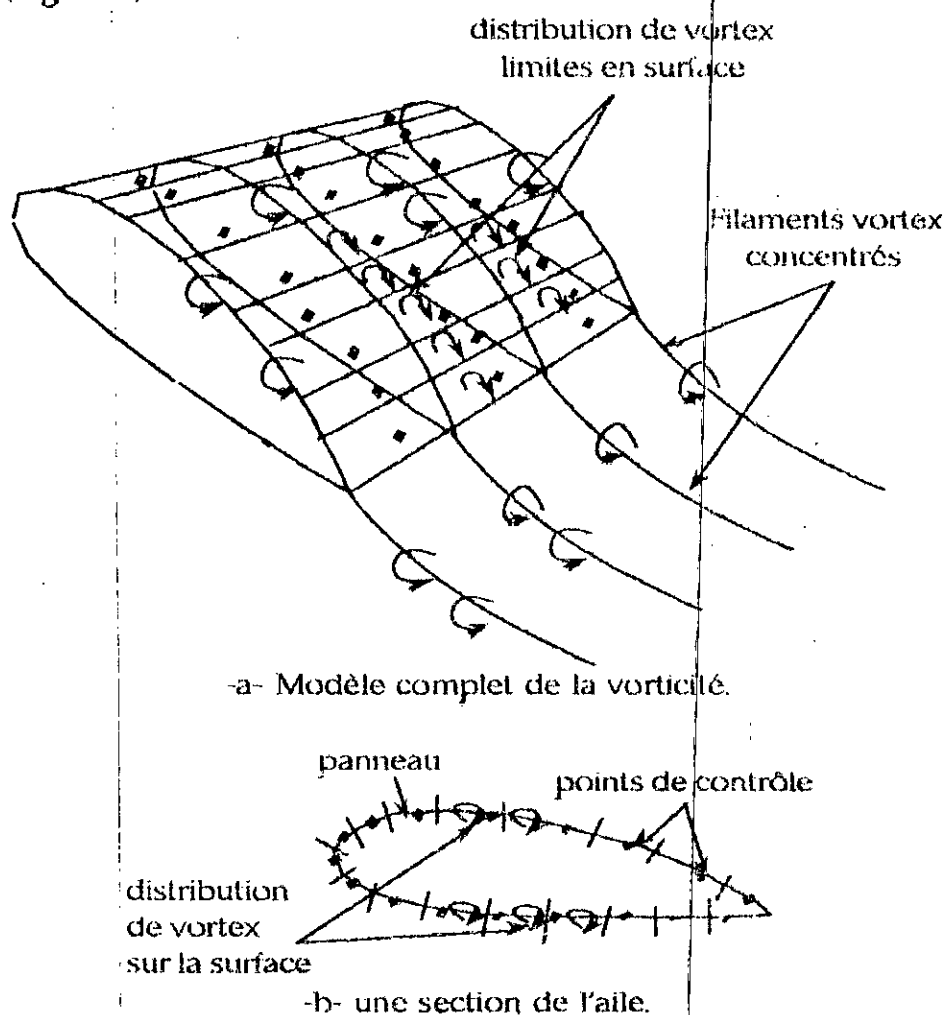


Fig. IV.1 Représentation de la vorticité par une distribution de vortex situés sur la surface de l'aile.



Les effets de l'épaisseur de l'aile et de la portance sont simulés par des distributions de vortex à variation linéaire [Réf. 27]. Les deux nappes de vortex se rejoignent au bord d'attaque en égalisant les intensités aux bords d'attaque des panneaux. Ce modèle est présenté dans Réf. 25.

## I2-Formulation du système d'équations à coefficients d'influence aérodynamique

La composante normale de la vitesse au point de contrôle  $i$ , due à l'écoulement libre est donnée par :

$$\omega_i = n_{xi} \omega_{\infty x} + n_{yi} \omega_{\infty y} + n_{zi} \omega_{\infty z} \quad (\text{Eq. IV.3})$$

où  $n_{xi}$ ,  $n_{yi}$  et  $n_{zi}$  sont les cosinus directeurs de la normale au panneau  $i$  et sont définis par :

$$\begin{aligned} n_{xi} &= -\sin \delta_i \\ n_{yi} &= -\cos \delta_i \sin \theta_i \\ n_{zi} &= \cos \delta_i \cos \theta_i \end{aligned} \quad (\text{Eqs. IV.4})$$

où  $\delta_i$  et  $\theta_i$  représentent les angles d'inclinaison du panneau  $i$  respectivement par rapport aux axes  $x$  et  $y$ .

Si  $\alpha$  représentant l'angle d'attaque est donné, les composantes de la vitesse de l'écoulement libre  $\omega_{\infty x}$ ,  $\omega_{\infty y}$ ,  $\omega_{\infty z}$  se traduisent par :

$$\begin{aligned} \omega_{\infty x} &= \cos \alpha \\ \omega_{\infty y} &= 0 \\ \omega_{\infty z} &= \sin \alpha \end{aligned} \quad (\text{Eqs. IV.5})$$

en injectant Eqs. IV.5 et Eqs. IV.4 dans l'eq. IV.3,  $\omega_i$  devient :

$$\omega_i = \sin \alpha \cos \delta_i \cos \theta_i - \cos \alpha \sin \delta_i \quad (\text{Eq. IV.6})$$

La vitesse normale induite par toutes les singularités, est définie par :

$$\Delta \omega_i = n_{xi} \Delta u_i + n_{yi} \Delta v_i + n_{zi} \Delta w_i \quad (\text{Eq. IV.7})$$

où  $\Delta u_i$ ,  $\Delta v_i$  et  $\Delta w_i$  représentent les composantes de la vitesse induite au point de contrôle  $i$  suivant les trois axes du repère et sont données par [Réf.s. 25 et 26] :

$$\Delta u_i = \sum_{j=1}^N \left[ \left( \lambda_1^j \bar{u}_{ij} + \mu_1^j \bar{v}_{ij} + \nu_1^j \bar{w}_{ij} \right) + \left( \lambda_1^j \bar{u}'_{ij} + \mu_1^j \bar{v}'_{ij} + \nu_1^j \bar{w}'_{ij} \right) \right] \gamma_j \quad (\text{Eq. IV.8a})$$

$$\Delta v_i = \sum_{j=1}^N \left[ (\lambda_2^i u'_{ij} + \mu_2^i v'_{ij} + \nu_2^i w'_{ij}) - (\lambda_2^i u'_{ij} + \mu_2^i v'_{ij} + \nu_2^i w'_{ij}) \right] \gamma_j \quad (\text{Eq. IV.8b})$$

$$\Delta w_i = \sum_{j=1}^N \left[ (\lambda_3^i u'_{ij} + \mu_3^i v'_{ij} + \nu_3^i w'_{ij}) + (\lambda_3^i u'_{ij} + \mu_3^i v'_{ij} + \nu_3^i w'_{ij}) \right] \gamma_j \quad (\text{Eq. IV.8c})$$

où  $N$  est le nombre total de singularités (source et/ou vortex),  $\gamma_j$  représente l'intensité de la  $j^{\text{ème}}$  singularité,  $(u'_{ij}, v'_{ij}, w'_{ij})$  sont les composantes de la vitesse induite au point de contrôle  $i$  par le panneau  $j$ , données dans le système de coordonnées lié au panneau  $j$  et qui ont été déterminées dans le chapitre précédent.  $(\bar{u}'_{ij}, \bar{v}'_{ij}, \bar{w}'_{ij})$  représentent les images respectives de  $(u'_{ij}, v'_{ij}, w'_{ij})$  (La configuration aile-fuselage-empennage étant symétrique par rapport au plan  $x-z$ , nous ne considérons alors que la partie se trouvant suivant les  $y$  positifs).

D'autre part, les coefficients de transformation  $(\lambda, \mu, \nu)$  sont définis par :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_z^2}} & \lambda_2 &= 0 & \lambda_3 &= \frac{-n_x}{\sqrt{n_x^2 + n_z^2}} \\ \nu_1 &= n_x & \nu_2 &= n_y & \nu_3 &= n_z \\ \mu_1 &= \frac{-n_x n_y}{\sqrt{n_x^2 + n_z^2}} & \mu_2 &= \sqrt{n_x^2 + n_z^2} & \mu_3 &= \frac{-n_y n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_z^2}} \end{aligned} \quad (\text{Eqs. IV.9})$$

et dans lesquels les cosinus directeurs exprimés selon Eqs. IV.4 sont évalués relativement au panneau  $j$ .

L'équation (IV.7) devient :

$$\Delta \omega_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} \gamma_j$$

où

$$\begin{aligned} A_{ij} &= n_{xi} \left[ (\lambda_1^i (u'_{ij} + \bar{u}'_{ij}) + \mu_1^i (v'_{ij} + \bar{v}'_{ij}) + \nu_1^i (w'_{ij} + \bar{w}'_{ij})) \right] \\ &+ n_{yi} \left[ (\lambda_2^i (u'_{ij} - \bar{u}'_{ij}) + \mu_2^i (v'_{ij} - \bar{v}'_{ij}) + \nu_2^i (w'_{ij} - \bar{w}'_{ij})) \right] \\ &+ n_{zi} \left[ (\lambda_3^i (u'_{ij} + \bar{u}'_{ij}) + \mu_3^i (v'_{ij} + \bar{v}'_{ij}) + \nu_3^i (w'_{ij} + \bar{w}'_{ij})) \right] \end{aligned} \quad (\text{Eqs. IV.10})$$

Pour une combinaison aile-fuselage,  $N$  représente la somme des nombres des panneaux du fuselage NB et ceux de l'aile NW;  $\Delta \omega_i$  peut encore être exprimée par

$$\Delta \omega_i = \sum_{j=1}^{NB} a_{ij} \gamma_{Bj} + \sum_{j=1}^{NW} b_{ij} \gamma_{Wj} \quad (\text{Eq. IV.11})$$

## II - OPTION DES CONDITIONS AUX LIMITES PLANE

### II.1 - Représentation aérodynamique

La condition aux limites plane est appliquée seulement aux surfaces portantes. Dans cette option, les panneaux se situent sur le plan moyen des surfaces de l'aile et des empennages. Des distributions de source à variation linéaire sont utilisées pour simuler l'épaisseur du profil et des distributions de vortex à variation linéaire simulent les effets de la portance ou de la cambrure [Réf. 25]. Les conditions à la limite sur l'aile sont alors divisées en deux parties, la première concerne les effets de la portance ou de la cambrure et la seconde traite les effets de l'épaisseur [Réf. 21]. Il est cependant convenable de décrire la solution comme la somme de deux termes, un donnant l'écoulement dû à l'épaisseur et l'autre dû à la portance ou de la cambrure [Réf. 39], comme indiqué ci-dessous.

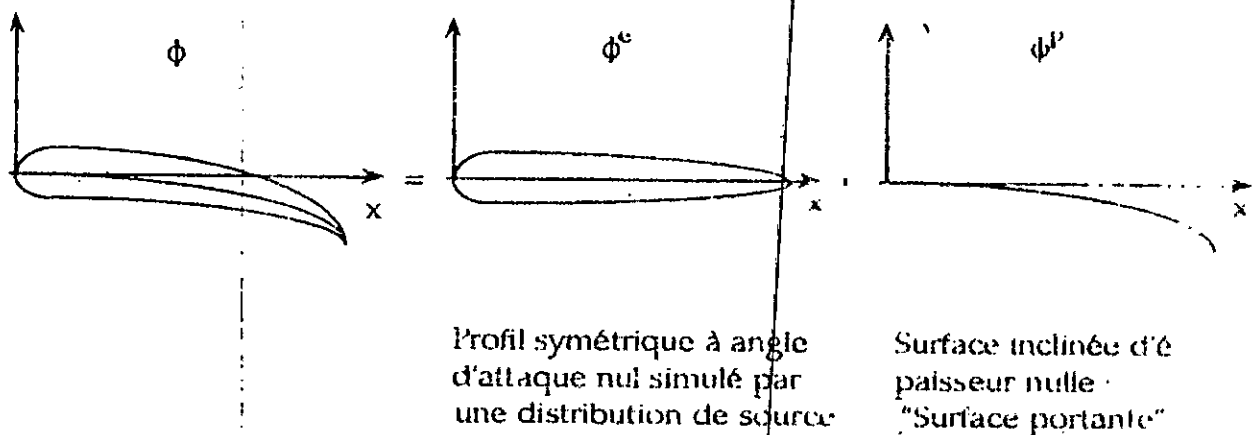


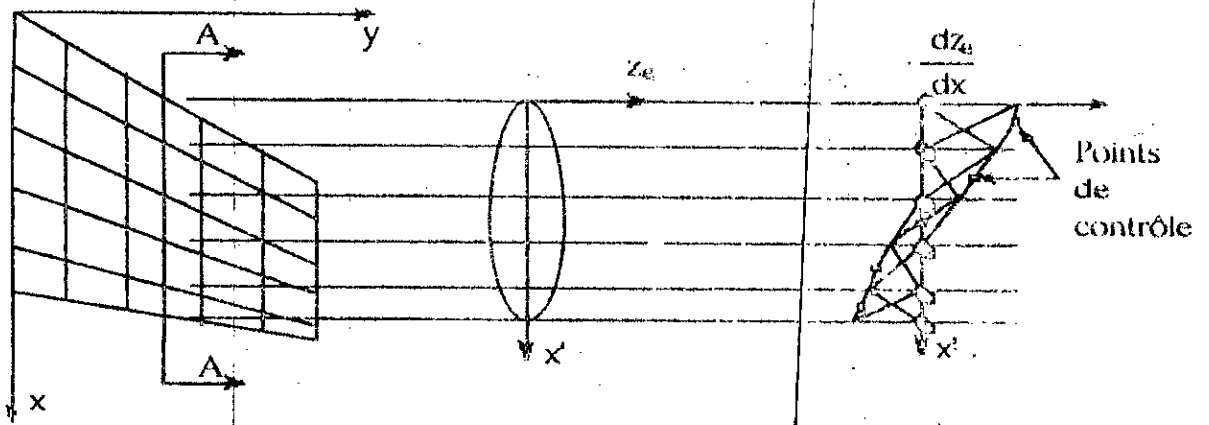
Fig. IV.2. Séparation des problèmes de la portance ou de la cambrure et de l'épaisseur

La tangente de la surface de l'aile peut être exprimée [Réf. 21] comme suit :

$$\left( \frac{dz}{dx} \right)_i = \left( \frac{dz_c}{dx} \pm \frac{dz_e}{dx} \right)_i \quad (\text{Eq. IV.17})$$

où  $\frac{dz_c}{dx}$  représente la tangente de la distribution de la cambrure,  $\frac{dz_e}{dx}$  est la tangente de la distribution de l'épaisseur et l'indice  $i$  représente le  $i^{\text{ème}}$  nœud.

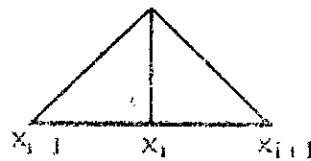
En réalité, l'effet de l'épaisseur de l'aile est représenté par une combinaison de distributions de source constante et linéaire sur les panneaux, comme indiqué [Réf. 21] sur la figure suivante :



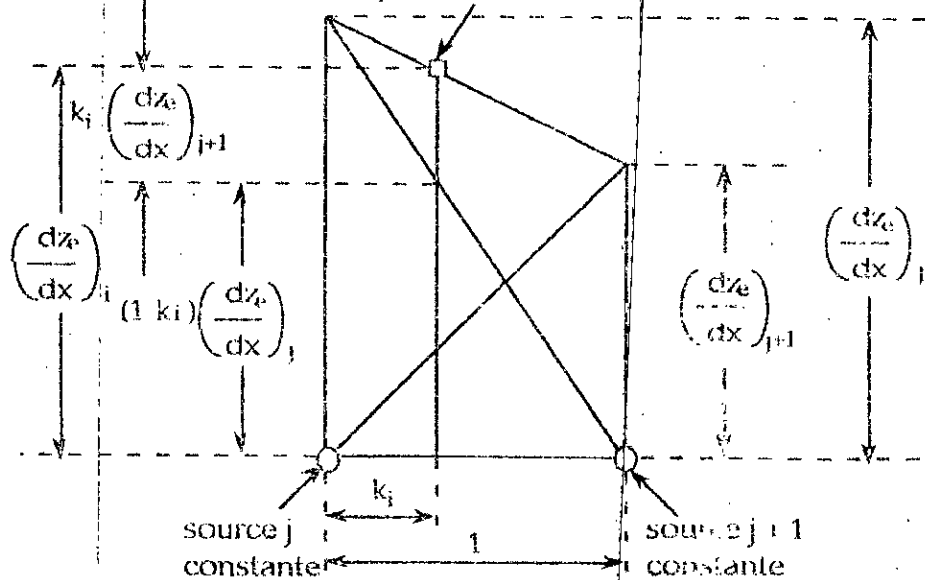
-a-forme de l'aile en plan -b-une section de l'aile -c- distribution de la tangente de l'épaisseur suivant la corde

Fig. IV.3

Pour chaque corde, la section de l'aile est approximée par une série d'arcs paraboliques ayant des tangentes continues au bords des panneaux. Ceci est achevé en superposant des distributions de sources à variation linéaire suivant la corde de chaque panneau. Cette distribution linéaire est construite en fait en superposant une série de distributions de source triangulaires [Réf. 25] qui s'étendent sur deux panneaux adjacents (Fig. IV.4a). L'intensité de cette distribution de source triangulaire est déterminée par la tangente de la distribution de l'épaisseur évaluée au côté (bord) commun de deux panneaux adjacents [Réf. 25] (Fig. IV.4b).



-a- Distribution de source triangulaire sur deux panneaux adjacents point de contrôle i



$k_i$  représente la position du point de contrôle en % de la corde locale du panneau.

-b- Superposition de distributions de sources linéaires

Fig. IV.4

Un autre type de distribution de source constante est utilisé suivant les bords d'attaque et de fuite de l'aile pour simuler la discontinuité de la tangente en ces points [Réf. 21]. Cette méthode est limitée aux sections d'aile dont la tangente est finie et qui n'excède pas la tangente de l'angle de Mach au bord d'attaque.

Ainsi, il peut être montré que [Réf. 21]  $(dz_e/dx)_i$  la tangente de la distribution de l'épaisseur donnée au point de contrôle  $i$ , représente en fait l'intensité de la distribution de source sur la surface du  $i^{\text{ème}}$  panneau de l'aile. L'approximation de la distribution du vortex sur l'aile utilisant la même technique est présentée dans Réf. 25.

L'intensité de la distribution de source, qui est égale à la tangente de la distribution de l'épaisseur de l'aile suivant la direction de la corde, est par conséquent connue alors que l'intensité de la distribution de vortex, inconnue pour le moment, sera déterminée en vérifiant la condition de nullité de la vitesse normale résultante au point de contrôle du  $i^{\text{ème}}$  panneau.

## II.2 - Formulation du système d'équations aérodynamiques

Comme auparavant, la composante normale résultante de la vitesse induite au point de contrôle  $i$  donnée par Eq. IV.1 est :

$$N_i = \omega_i + \Delta\omega_i$$

où la vitesse normale de l'écoulement uniforme se traduit par :

$$\omega_i = -\cos \delta_i (\cos \alpha \cos \delta_i - \sin \alpha \cos \theta_i) \quad (\text{Eq. IV.18})$$

et la vitesse normale du  $i^{\text{ème}}$  panneau induite par toutes les distributions de singularités est :

$$\Delta\omega_i = n_{xi} \Delta u_i + n_{yi} \Delta v_i + n_{zi} \Delta w_i + \omega_{si} \quad (\text{Eq. IV.19})$$

et dans laquelle  $n_{xi}$ ,  $n_{yi}$  et  $n_{zi}$  sont exprimés selon Eqs. IV.4 et  $\Delta u_i$ ,  $\Delta v_i$  et  $\Delta w_i$  sont données par Eqs. IV.8.

Le terme  $\omega_{si}$ , dû aux panneaux sources simulant l'épaisseur de l'aile, est supposé connu et est donné par [Réf. 28] :

$$\omega_{si} = \cos \alpha \sum_{j=1}^{NW} a_{ij} \left( \frac{dz_e}{dx} \right)_j \quad (\text{Eq. IV.20})$$

$$\text{où} \quad a_{ij} = n_{xi} u_{ij} + n_{yi} v_{ij} + n_{zi} w_{ij}$$

et  $(u_{ij}, v_{ij}, w_{ij})$  sont les composantes de la vitesse induite au point de contrôle  $i$  par une distribution de source sur le panneau  $j$  de l'aile.

Pour les panneaux de l'aile utilisant cette option de conditions aux limites plane, l'axe  $x'$  du panneau est parallèle à l'axe de référence  $x$  [Ref. 25]; et de ce fait,  $\delta_j = 0$ . Par suite, les coefficients de transformation donnés par Eqs. IV.9  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\nu$  deviennent :

$$\begin{aligned} \lambda_1^j &= 0 & \lambda_2^j &= 0 & \lambda_3^j &= 0 \\ \nu_1^j &= 0 & \nu_2^j &= -\sin \theta_j & \nu_3^j &= \cos \theta_j \\ \mu_1^j &= 0 & \mu_2^j &= \cos \theta_j & \mu_3^j &= \sin \theta_j \end{aligned} \quad (\text{Eqs. IV.21})$$

et les composantes de la vitesse induite au point de contrôle s'expriment par :

$$\Delta u_i = \sum_{j=1}^N [u'_{ij} + \bar{u}'_{ij}] \gamma_j \quad (\text{Eq. IV.22a})$$

$$\Delta v_i = \sum_{j=1}^N [\cos \theta_j (v'_{ij} - \bar{v}'_{ij}) - \sin \theta_j (w'_{ij} - \bar{w}'_{ij})] \gamma_j \quad (\text{Eq. IV.22b})$$

$$\Delta w_i = \sum_{j=1}^N [\sin \theta_j (v'_{ij} + \bar{v}'_{ij}) + \cos \theta_j (w'_{ij} + \bar{w}'_{ij})] \gamma_j \quad (\text{Eq. IV.22c})$$

Sous ces conditions,  $\Delta \omega_i$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta \omega_i &= \cos \delta_i \cos \theta_i \sum_{j=1}^N [\sin \theta_j (v'_{ij} + \bar{v}'_{ij}) + \cos \theta_j (w'_{ij} + \bar{w}'_{ij})] \gamma_j \\ &\quad - \cos \delta_i \sin \theta_i \sum_{j=1}^N [\cos \theta_j (v'_{ij} - \bar{v}'_{ij}) - \sin \theta_j (w'_{ij} - \bar{w}'_{ij})] \gamma_j \\ &\quad - \sin \delta_i \sum_{j=1}^N [u'_{ij} + \bar{u}'_{ij}] \gamma_j + \omega_{si} \end{aligned} \quad (\text{Eq. IV.23})$$

Après transformation, nous aurons :

$$\Delta \omega_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} \gamma_j + \omega_{si} \quad (\text{Eq. IV.24})$$

comme précédemment,  $\Delta \omega_i$  pourra aussi être exprimée par :

$$\Delta \omega_i = \sum_{j=1}^{NB} a_{ij} \gamma_{Bj} + \sum_{j=1}^{NW} b_{ij} \gamma_{Wj} + \omega_{si} \quad (\text{Eq. IV.25})$$

En remplaçant  $\omega_{3i}$  donnée par Eq IV 20 dans Eq IV 25 nous obtenons :

$$\Delta \omega_i = \sum_{j=1}^{NB} a_{ij} Y_{Bj} + \sum_{j=1}^{NW} b_{ij} W_{Wj} + \cos \alpha \sum_{j=1}^{NW} a_{ij} \left( \frac{dz_c}{dx} \right)_j \quad (\text{Eq IV 26})$$

Pour une combinaison aile fuselage, la condition à la limite de l'écoulement tangentiel au point de contrôle  $i$  est satisfaite si la vitesse résultante normale en ce point est nulle. Par conséquent, au point de contrôle  $i$

sur le fuselage :

$$\sum_{j=1}^{NB} a_{BBij} Y_{Bj} + \sum_{j=1}^{NW} b_{BWij} W_{Wj} + \cos \alpha \sum_{j=1}^{NW} a_{BWij} \left( \frac{dz_c}{dx} \right)_j = \omega'_{Bi} \quad (\text{Eq IV 27})$$

$$\text{où : } \omega = \cos \alpha \sin \delta_i + \sin \alpha \cos \delta_i \cos \delta_i$$

sachant que  $(dz_c/dx)_j$ , représentant l'intensité du panneau source  $j$ , est connue, le terme  $\omega_i$  pourra alors être transposé dans le second membre de l'équation ci-dessus. Celle-ci devient :

$$\sum_{j=1}^{NB} a_{BBij} Y_{Bj} + \sum_{j=1}^{NW} b_{BWij} W_{Wj} = \omega'_{Bi} \quad (\text{Eq IV 28a})$$

où :

$$\omega'_{Bi} = \cos \alpha \left[ \sin \delta_i + \sum_{j=1}^{NW} a_{BWij} \left( \frac{dz_c}{dx} \right)_j \right] \sin \alpha \cos \delta_i \cos \delta_i \quad (\text{Eq IV 28b})$$

sur l'aile :

$$\sum_{j=1}^{NB} a_{WBij} Y_{Bj} + \sum_{j=1}^{NW} b_{WWij} W_{Wj} + \cos \alpha \sum_{j=1}^{NW} a_{WWij} \left( \frac{dz_c}{dx} \right)_j = \omega_i \quad (\text{Eq IV 29a})$$

$$\text{ou : } \omega_{\lambda i} = \cos \delta_i (\cos \alpha \tan \delta_i + \sin \alpha \cos \delta_i) \quad (\text{Eq IV 29b})$$

avec :

$$\tan \delta_i = \left( \frac{dz_c}{dx} + \frac{dz_c}{dx} \right)_i$$

Ainsi les tangentes locales de la caudière et de l'épaisseur de l'aile sont approximées par des perturbations de l'écoulement (Ref. 28)

En remplaçant  $\tan \delta_i$  par son expression et en transposant l'expression de  $\omega_i$ , qui est connue, dans le second membre de Eq IV 29a, nous obtenons de nouveau

$$\sum_{j=1}^{NB} a_{WBij} \gamma_{Bj} + \sum_{j=1}^{NW} b_{WWij} \gamma_{Wj} = \omega'_{w_i} \quad (\text{Eq. IV.30a})$$

où :

$$\omega'_{w_i} = \cos \alpha \left[ \cos \delta_i \left( \frac{dz_c}{dx} \pm \frac{dz_e}{dx} \right)_i - \sum_{j=1}^{NW} a_{WWij} \left( \frac{dz_e}{dx} \right)_j \right] - \sin \alpha \cos \theta_i \cos \delta_i \quad (\text{Eq. IV.30b})$$

En appliquant Eqs. IV.28 à tous les points de contrôle du fuselage d'une part et Eqs. IV.30 à ceux de l'aile d'autre part, nous obtenons un système d'équations algébriques linéaires appelées équations de la condition à la limite de l'écoulement tangentiel pour l'option des conditions aux limites plane. Ces équations s'écrivent comme suit :

$$\sum_{j=1}^{NB} a_{BBij} \gamma_{Bj} + \sum_{j=1}^{NW} b_{BWij} \gamma_{Wj} = \omega'_{B_i} \quad i = 1, NB \quad (\text{Eqs. IV.31})$$

$$\sum_{j=1}^{NB} a_{WBij} \gamma_{Bj} + \sum_{j=1}^{NW} b_{WWij} \gamma_{Wj} = \omega'_{W_i} \quad i = 1, NW$$

Sous forme matricielle, ce système devient :

$$\begin{bmatrix} a_{BB} & b_{BW} \\ a_{WB} & b_{WW} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_B \\ \gamma_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega'_B \\ \omega'_W \end{bmatrix} \quad (\text{Eqs. IV.32})$$

Cette matrice est appelée matrice à coefficients d'influence aérodynamique ou matrice aérodynamique, et le système correspondant s'appelle système d'équations aérodynamiques.

Ce système d'équations linéaires pourra être résolu par une des méthodes numériques conventionnelles.

### III. RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS A COEFFICIENTS D'INFLUENCE AERODYNAMIQUE

Le système d'équations linéaires, formées à partir de la condition à la limite de l'écoulement tangentiel, représente en fait un système de grande taille. Une inversion directe de la matrice aérodynamique est généralement impraticable. Cependant il a été montré [Réf. 40] que les techniques itératives représentent des méthodes de première nécessité pour la résolution de tels systèmes. Une variété de telles techniques [Réf. 41-45] est disponible, mais la majorité d'entre elles nécessitent la connaissance de certaines propriétés spéciales de la matrice. La matrice à coefficients d'influence aérodynamique,  $A$ , n'est pas symétrique et présente en général des éléments non-nuls, et les coefficients d'influence aérodynamique,  $A_{ij}$ , sont généralement plus grands près de la diagonale.



Le système d'équations, écrit sous forme matricielle, est subdivisé en quatre partitions :

$$\begin{bmatrix} A_{BB} & A_{BW} \\ A_{WB} & A_{WW} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_B \\ Y_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_B \\ \omega_W \end{bmatrix}$$

où la première partition,  $A_{BB}$ , donne l'influence des panneaux sources du fuselage sur ses points de contrôle; la seconde,  $A_{BW}$ , donne l'influence des panneaux vortex et sources de l'aile sur les points de contrôle du fuselage, la troisième,  $A_{WB}$ , donne l'influence des panneaux sources du fuselage sur les points de contrôle de l'aile; et la quatrième,  $A_{WW}$ , donne l'influence des panneaux vortex et sources de l'aile sur les points de contrôle de celle-ci.

Les méthodes itératives les plus communément employées pour la résolution de tels systèmes, et avec lesquelles une convergence rapide vers la solution est atteinte, sont présentées dans Réf. 40 et sont citées ci-dessous :

- Méthode de Jacobi avec partitionnement (ou par blocs).
- Méthode de Gauss Seidel.
- Méthode de sur-relaxation.
- Méthode de sur-relaxation contrôlée avec partitionnement.

Dans le schéma itératif de Jacobi par blocs que nous utilisons dans le code pilote, les partitions  $A_{BB}$  et  $A_{WW}$  sont en plus subdivisées en blocs ou sous matrices. Ce partitionnement a en réalité un sens physique; les éléments de chaque bloc représentent une caractéristique bien définie de la configuration originale. Par exemple, un bloc du fuselage représente l'influence d'une couronne (anneau) de panneaux autour du fuselage alors qu'un bloc de l'aile représente l'influence d'une colonne de panneaux de l'aile pris suivant la corde [Réf. 46]. Pour l'option des conditions aux limites non-plane, la taille du bloc correspond au nombre total des panneaux de l'aile situés au-dessus et au-dessous de ses surfaces.

En général, le processus itératif de Jacobi consiste à définir une suite  $\{\gamma^{(k)}\}$  qui converge vers la solution  $\{\gamma\}$ . Ce schéma itératif est construit de la manière suivante :

$$\text{En posant : } \begin{bmatrix} A_{BB} & A_{BW} \\ A_{WB} & A_{WW} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{BB} & 0 \\ 0 & A_{WW} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A_{BW} \\ A_{WB} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. IV.33a})$$

le système ci-dessus devient :

$$\begin{bmatrix} A_{BB} & 0 \\ 0 & A_{WW} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_B \\ Y_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_B \\ \omega_W \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & A_{BW} \\ A_{WB} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_B \\ Y_W \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. IV.33b})$$

$$\begin{aligned} & [A_{BB}] \{\gamma_B\} = \{\omega_B\} - [A_{BW}] \{\gamma_W\} \\ \text{ou encore :} & [A_{WW}] \{\gamma_W\} = \{\omega_W\} - [A_{WB}] \{\gamma_B\} \end{aligned} \quad (\text{Eqs. IV.33c})$$

Dans une première étape, seuls les blocs diagonaux sont présents dans la matrice aérodynamique; c'est à dire :

$$\begin{bmatrix} A_{BB} & 0 \\ 0 & A_{WW} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_B^{(1)} \\ \gamma_W^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_B \\ \omega_W \end{Bmatrix} \quad (\text{Eqs. IV.34a})$$

L'itération initiale consiste donc à calculer les intensités des singularités sources et vortex respectivement  $\gamma_B^{(1)}$  et  $\gamma_W^{(1)}$  qui correspondent à chaque bloc dans l'isolation; ainsi nous obtenons :

$$\{\gamma_B^{(1)}\} = [A_{BB}]^{-1} \{\omega_B\} \quad (\text{Eqs. IV.34b})$$

$$\{\gamma_W^{(1)}\} = [A_{WW}]^{-1} \{\omega_W\}$$

Une fois que l'approximation initiale de ces intensités ait été déterminée, l'effet d'interférence de chaque bloc sur tous les autres peut être alors calculé :

$$\{\Delta\omega_B^{(1)}\} = [A_{BW}] \{\gamma_W^{(1)}\} \quad (\text{Eqs. IV.35a})$$

$$\{\Delta\omega_W^{(1)}\} = [A_{WB}] \{\gamma_B^{(1)}\}$$

Les vitesses normales incrémentales obtenues sont soustraites des vitesses normales  $\omega_B$  et  $\omega_W$  spécifiées par les conditions aux limites :

$$\{R_B^{(1)}\} = \{\omega_B\} - [A_{BW}] \{\gamma_W^{(1)}\} \quad (\text{Eqs. IV.35b})$$

$$\{R_W^{(1)}\} = \{\omega_W\} - [A_{WB}] \{\gamma_B^{(1)}\}$$

et les intensités de  $\{\gamma_W\}$  et  $\{\gamma_B\}$  à l'itération suivante s'obtiennent par :

$$\{\gamma_B^{(2)}\} = [A_{BB}]^{-1} (\{\omega_B\} - \{\Delta\omega_B^{(1)}\}) \quad (\text{Eqs. IV.35c})$$

$$\{\gamma_W^{(2)}\} = [A_{WW}]^{-1} (\{\omega_W\} - \{\Delta\omega_W^{(1)}\})$$

Le processus itératif est répété jusqu'à la  $k^{\text{ième}}$  itération où une convergence vers la solution exacte est atteinte :

$$\{Y_B^{(k)}\} = [A_{BB}]^{-1} (\{\omega_B\} - \{\Delta\omega_B^{(k-1)}\})$$

$$\text{où } \{\Delta\omega_B^{(k-1)}\} = [A_{BW}] \{Y_W^{(k-1)}\}$$

(Eqs. IV.36a)

$$\{Y_W^{(k)}\} = [A_{WW}]^{-1} (\{\omega_W\} - \{\Delta\omega_W^{(k-1)}\})$$

$$\text{où } \{\Delta\omega_W^{(k-1)}\} = [A_{WB}] \{Y_B^{(k-1)}\}$$

c'est à dire qu'à chaque point de contrôle  $i$ , nous avons :

$$Y_{Bi}^{(k)} = \sum_{j=1}^{NB} d_{BBij} \left( \omega_{Bj} - \sum_{j=1}^{NW} a_{BWij} Y_{Wj}^{(k-1)} \right) \quad i = 1, NB$$

(Eqs. IV.36b)

$$Y_{Wi}^{(k)} = \sum_{j=1}^{NB} d_{WWij} \left( \omega_{Wj} - \sum_{j=1}^{NW} a_{WBij} Y_{Bj}^{(k-1)} \right) \quad i = 1, NW$$

où  $d_{BB}$  et  $d_{WW}$  sont les éléments des matrices inverses respectivement de  $A_{BB}$  et  $A_{WW}$ .

D'autre part, si les partitions  $[A_{BB}]$  et  $[A_{WW}]$  sont d'une grande taille, elles peuvent elles aussi être partitionnées comme suit :

$$[A_{BB}] = \begin{bmatrix} [A_{BB}]_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [A_{BB}]_{n_{BB}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0]_{11} & & \\ & \ddots & \\ [C_{BB}]_{n1} & & [0]_{n_{BB}} \end{bmatrix}$$

$$= [D_{BB}] + [C_{BB}] \quad (\text{Eq. IV.37a})$$

où  $n_{BB}$  représente le nombre de blocs diagonaux. La matrice  $A_{WW}$  peut être écrite de la même manière :

$$[A_{WW}] = [D_{WW}] + [C_{WW}] \quad (\text{Eq. IV.37b})$$

où  $D_{WW}$  et  $C_{WW}$  représentent respectivement la matrice à  $n_{WW}$  blocs diagonaux et la matrice complémentaire dont les  $n_{WW}$  blocs diagonaux contiennent des éléments nuls.

Le système donné par Eqs. IV.33c devient :

$$[D_{BB}] \{Y_B\} = \{\omega_B\} - [A_{BW}] \{Y_W\} - [C_{BB}] \{Y_B\}$$

(Eqs. IV.38a)

$$[D_{WW}] \{Y_W\} = \{\omega_W\} - [A_{WB}] \{Y_B\} - [C_{WW}] \{Y_W\}$$

et  $\{Y_B\}$  et  $\{Y_W\}$  correspondant à chaque bloc s'obtiennent par :

$$\{Y_B^{(k)}\} = [D_{BB}]^{-1} (\{C_B\} + [A_{BW}] \{Y_W^{(k-1)}\} - [C_{BB}] \{Y_B^{(k-1)}\}) \quad (\text{Eqs IV.38b})$$

$$\{Y_W^{(k)}\} = [D_{WW}]^{-1} (\{C_W\} + [A_{WB}] \{Y_B^{(k-1)}\} - [C_{WW}] \{Y_W^{(k-1)}\})$$

Nous remarquons que dans ce cas, à chaque itération, il faudra résoudre autant de systèmes linéaires qu'il y a de blocs diagonaux. Pour que cette méthode soit intéressante, il faudra alors que les blocs diagonaux soient "faciles à inverser".

Ce processus itératif est répété jusqu'à ce que les vitesses d'interférence résiduelles soient assez faibles pour qu'une convergence vers la solution exacte soit atteinte [Réfs. 25 et 32]. Il a été montré dans la Réf. 40 que le nombre maximum d'itérations correspondant à la méthode itérative de Jacobi varie entre 15 et 20 pour qu'il y ait convergence vers la solution exacte. Connaissant les intensités des distributions de singularités sources et vortex, nous pouvons, par conséquent, évaluer les distributions de pression, des forces et des moments aérodynamiques qui agissent sur la configuration donnée ou utiliser directement la matrice d'influence aérodynamique pour une analyse aéroélastique statique de l'aile.

#### IV- CALCUL DES PRESSION, FORCES ET MOMENTS

L'évaluation des intensités de singularités sources et vortex ( $\gamma_j$ ), obtenues à partir de la résolution du système des coefficients d'influence aérodynamique formulé précédemment, mène au calcul des composantes de la vitesse  $\Delta u_i$ ,  $\Delta v_i$  et  $\Delta w_i$  données par Eqs. IV.8 et les trois composantes finales de la vitesse induite au point de contrôle  $i$  peuvent maintenant être déterminées comme suit :

$$u_i = \Delta u_i + \omega_{\infty x} = \Delta u_i + \cos \alpha \quad (\text{Eq. IV.39a})$$

$$v_i = \Delta v_i + \omega_{\infty x} = \Delta v_i \quad (\text{Eq. IV.39b})$$

$$w_i = \Delta w_i + \omega_{\infty x} = \Delta w_i + \sin \alpha \quad (\text{Eq. IV.39c})$$

Nous tenons à rappeler que Eqs. IV.8 et Eqs. IV.39 sont valables uniquement pour l'option des conditions aux limites non-plane. Toutefois, pour l'option de conditions aux limites plane, des termes additionnels représentant les composantes de la vitesse incrémentale induite par la distribution de l'épaisseur de l'aile doivent être calculés et rajoutés à Eqs. IV.39. Dans ce cas, les composantes de la vitesse ( $u_i$ ,  $v_i$ ,  $w_i$ ) deviennent :

$$u_i = \Delta u_i + \cos \alpha + u_{e,i} \quad (\text{Eq. IV.40a})$$

$$v_i = \Delta v_i + v_{e,i} \quad (\text{Eq. IV.40b})$$

$$w_i = \Delta w_i + \sin \alpha + w_{e,i} \quad (\text{Eq. IV.40c})$$

où ( $u_{e,i}$ ,  $v_{e,i}$ ,  $w_{e,i}$ ) s'écrivent :

$$u_{e,i} = \sum_{j=1}^{NW} u_{ij} \left( \frac{dz_e}{dx} \right)_i \quad (\text{Eq. IV.41a})$$

$$v_{e,i} = \sum_{j=1}^{NW} v_{ij} \left( \frac{dz_e}{dx} \right)_i \quad (\text{Eq. IV.41b})$$

$$w_{e,i} = \sum_{j=1}^{NW} w_{ij} \left( \frac{dz_e}{dx} \right)_i \quad (\text{Eq. IV.41c})$$

$u_{ij}$ ,  $v_{ij}$  et  $w_{ij}$  représentent les composantes de la vitesse induite au point de contrôle  $i$  par une distribution de source sur le panneau  $j$  de l'aile (effet de l'épaisseur de l'aile simulé par une distribution de source pour l'option plane seulement).

et  $(\Delta u_i, \Delta v_i, \Delta w_i)$  sont données par Eqs. IV.22, c'est à dire par :

$$\Delta u_i = \sum_{j=1}^N [u'_{ij} + \bar{u}'_{ij}] \gamma_j$$

$$\Delta v_i = \sum_{j=1}^N [\cos \theta_j (v'_{ij} - \bar{v}'_{ij}) - \sin \theta_j (w'_{ij} - \bar{w}'_{ij})] \gamma_j$$

$$\Delta w_i = \sum_{j=1}^N [\sin \theta_j (v'_{ij} + \bar{v}'_{ij}) + \cos \theta_j (w'_{ij} + \bar{w}'_{ij})] \gamma_j$$

Une fois les composantes de la vitesse ( $u_i, v_i, w_i$ ) connues, les coefficients de pression, des forces et des moments aérodynamiques agissant sur la configuration donnée peuvent être alors évalués.

#### IV-1 Coefficient de pression

Le coefficient de pression au point de contrôle  $i$  est défini par :

$$C_{pi} = \frac{P_i - P_\infty}{1/2 \rho_\infty \omega_\infty^2} \quad (\text{Eq. IV.42})$$

où le terme  $(1/2 \rho_\infty \omega_\infty^2)$  indique la pression dynamique dans l'écoulement uniforme.

Sachant que  $\omega_\infty^2 = \gamma P_\infty M_\infty^2 / \rho_\infty$ ,  $C_{pi}$  devient :

$$C_{pi} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left( \frac{P_i}{P_\infty} - 1 \right) \quad (\text{Eq. IV.43})$$

D'autre part, à partir de l'équation de l'énergie, pour un écoulement adiabatique d'un fluide non-visqueux, donnée par :

$$H_t = c_p T_\infty + 1/2 \omega_\infty^2 = c_p T_i + 1/2 q_i^2 = \text{Cte} \quad (\text{Eq. IV.44})$$

où  $H_t$  est l'enthalpie totale qui est constante suivant une ligne de courant,  $c_p T$  représente l'enthalpie statique et  $c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$ . Et en tenant compte de l'expression de  $\omega_\infty^2$ , nous aurons :

$$\frac{T_i}{T_\infty} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 (1 - q_i^2) \quad (\text{Eq. IV.45})$$

Si un processus adiabatique est réversible alors il est isentropique (l'entropie est constante suivant une ligne de courant). Il suit qu'à l'extérieur des couches limites, sillages et en absence d'onde de choc, l'écoulement est toujours isentropique. Ainsi, des conditions isentropiques, nous pouvons écrire :

$$\frac{P_i}{P_\infty} = \left( \frac{T_i}{T_\infty} \right)^{\gamma / \gamma - 1} \quad (\text{Eq. IV.46})$$

De là, le coefficient de pression pour un écoulement isentropique sera donné par :

$$C_{pi} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 (1 - q_i^2) \right]^{\gamma / \gamma - 1} - 1 \right\} \quad (\text{Eq. IV.47})$$

où  $\gamma$  est le rapport des chaleurs spécifiques et est égal à 1,4 pour l'air;  $C_{pi}$  devient :

$$C_{pi} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 (1 - q_i^2) \right]^{3,5} - 1 \right\} \quad (\text{Eq. IV.48})$$

$$\text{où } q_i^2 = u_i^2 + v_i^2 + w_i^2 \quad (\text{Eq. IV.49})$$

et  $(u_i, v_i, w_i)$  ont été définies ci-dessus.

Eq. IV.48 traduit une représentation exacte de la définition du coefficient de pression; c'est une formule isentropique 'exacte'.

Deux autres formules peuvent être dérivées à partir de Eq. IV.47 pour calculer les coefficients de pression : Pour un écoulement sur des corps symétriques axialement ou allongés, la formule "non-linéaire" suivante est parfois recommandée [Réf. 21] :

$$C_{pi} = -2u_i + \beta^2 (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2)$$

Par contre, pour des écoulements plans et bidimensionnels [Réfs. 11, 18 et 21] une formule "linéaire" est appliquée :

$$C_{pi} = -2u_i$$

Cette équation dépend seulement de la vitesse de perturbation axiale; elle représente une forme linéarisée du coefficient de pression et est valable pour les faibles perturbations.

Lorsque le nombre de Mach est nul, le coefficient de pression  $C_{pi}$  devient :

$$C_{pi} = 1 - q_i^2 \quad (\text{Eq. IV.50})$$

Nous pouvons, par ailleurs, estimer les coefficients de pression critique, d'arrêt et du vide toujours pour un écoulement adiabatique réversible.

#### - Coefficient de pression critique

L'application de l'équation de l'énergie entre les conditions totales et critiques conduit à :

$$\frac{T_{0t}}{T_{cr}} = \frac{\gamma + 1}{2} \quad (\text{Eq. IV.51})$$

Par contre, entre les conditions totales et celles de l'écoulement libre, elle mène à :

$$\frac{T_{0t}}{T_{cr}} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \quad (\text{Eq. IV.52})$$

ainsi, le rapport  $T_{cr}/T_\infty$  est exprimé par :

$$\frac{T_{cr}}{T_\infty} = \frac{T_{cr}/T_{0t}}{T_\infty/T_{0t}} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2}{\frac{\gamma + 1}{2}} = \frac{2}{\gamma + 1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} M_\infty^2$$

et le rapport  $P_{cr}/P_\infty$  devient :

$$\frac{P_{cr}}{P_\infty} = \left( \frac{2}{\gamma + 1} + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right)^{\gamma/\gamma + 1} \quad (\text{Eq. IV.53})$$

Le coefficient de pression critique se traduit alors par :

$$C_{p\ cr} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left( \frac{2}{\gamma + 1} + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right)^{\gamma/\gamma + 1} - 1 \right\} \quad (\text{Eq. IV.54})$$

Ce coefficient de pression dénoté  $C_{p\ cr}$  est la valeur de  $C_p$  lorsque le nombre de Mach local est égal à l'unité. Eq. IV.54 permet de calculer le coefficient de pression aux points où le nombre de Mach est égal à l'unité, c'est à dire les points situés sur la ligne sonique [Réf. 18].

#### - Coefficient de pression d'arrêt

Le coefficient de pression d'arrêt ou de stagnation correspond à  $q_i = 0$  et par conséquent, Eq. IV.48 s'écrit :

$$C_{p \text{ arrêt}} = \frac{2}{\gamma M_{\infty}^2} \left\{ \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{\infty}^2 \right]^{3.5} - 1 \right\} \quad (\text{Eq. IV.55})$$

#### - Coefficient de pression du vide

Dans le vide la pression locale  $P_i = P_{\text{vide}}$  est nulle, et le coefficient de pression du vide dénoté  $C_{p \text{ vide}}$ , déduit de Eq. IV.43, s'exprime par :

$$C_{p \text{ vide}} = -\frac{2}{\gamma M_{\infty}^2} \quad (\text{Eq. IV.56})$$

### IV-2 Calcul des forces et moments aérodynamiques

Les forces et moments aérodynamiques agissant sur la configuration peuvent être alors calculés par intégration numérique. La force normale, force tangentielle et moment de tangage autour de l'origine des coordonnées du panneau  $i$  sont donnés par :

$$N_i = -A_i C_{pi} \cos \theta_i \cos \delta_i \quad (\text{Eq. IV.57a})$$

$$T_i = A_i C_{pi} \sin \delta_i \quad (\text{Eq. IV.57b})$$

$$M_i = N_i x_i + T_i z_i \quad (\text{Eq. IV.57c})$$

où  $A_i$  est l'aire du panneau  $i$ ,  $\theta_i$  et  $\delta_i$  sont les angles d'inclinaison du panneau  $i$  et sont définis par Eqs. IV.4.  $x_i$  et  $z_i$  représentent les coordonnées du point de contrôle du panneau.

Les coefficients des forces totales et du moment total agissant sur la configuration sont obtenus en sommant les forces et moments du panneau sur les deux côtés du plan de symétrie.

$$C_N = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N 2 N_i \quad (\text{Eq. IV.58a})$$

$$C_T = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N 2 T_i \quad (\text{Eq. IV.58b})$$

$$C_M = \frac{1}{SC} \sum_{i=1}^N 2 M_i \quad (\text{Eq. IV.58c})$$

et les coefficients de traînée et de portance s'obtiennent par :

$$C_D = C_N \sin \alpha + C_T \cos \alpha \quad (\text{Eq. IV.59a})$$

$$C_L = C_N \cos \alpha - C_T \sin \alpha \quad (\text{Eq. IV.59b})$$



## CHAPITRE V

### APPLICATIONS ET RESULTATS

Une manière courante utilisée actuellement pour assurer la qualité des simulations numériques et des procédures de solution consiste à calculer les caractéristiques aérodynamiques telles que forces, distributions de pression, etc... à partir des solutions numériques et de les comparer avec les résultats expérimentaux.

Dans cette intention, plusieurs exemples sont présentés dans ce chapitre et ont été principalement choisis pour illustrer l'application de la méthode de singularités étudiée à l'analyse des écoulements subsoniques et supersoniques autour d'une variété de configurations de différentes formes comprenant des corps isolés, ailes isolées et combinaisons aile-fuselage. Un premier système de calcul traite des corps de forme conique ou ogivale pouvant être utilisés pour des fuselages à pointe par exemple. Une seconde série de résultats obtenus sur des ailes de différentes formes (aile droite, avec flèche) sera présentée, et une troisième séquence de tests présente des résultats illustrant la capacité du programme à la modélisation de combinaisons aile-fuselage. Les solutions obtenues sont générées par un code pilote écrit en langage FORTRAN (annexe D) et sont ensuite comparées aux résultats expérimentaux publiés par certains investigateurs ou avec ceux donnés par d'autres méthodes disponibles afin de montrer les limites et les difficultés rencontrées par cette méthode.

#### I - CORPS OU FUSELAGES ISOLÉS

##### I.1 - Ogive - cylindre - "boattail" dans un écoulement subsonique

Le premier exemple testé est représenté par un corps de section circulaire formé d'une ogive, d'un cylindre et d'un "boattail" (Fig. V.1). Cette géométrie se rencontre dans un certain nombre d'applications. La tête ou l'ogive présente un allongement ( $L_1 / 2R$ ) égal à 2.

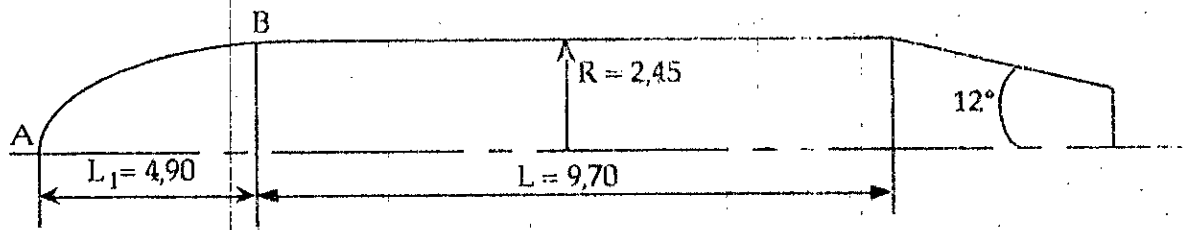


Fig. V.1 Ogive - cylindre avec "boat tail".

La distribution de la pression axiale calculée sur ce corps dans un écoulement subsonique caractérisé par un nombre de Mach amont de 0,4 et un angle d'attaque nul, est présentée sur Fig. V.2. Les résultats expérimentaux ont été obtenus de Réf. 47.

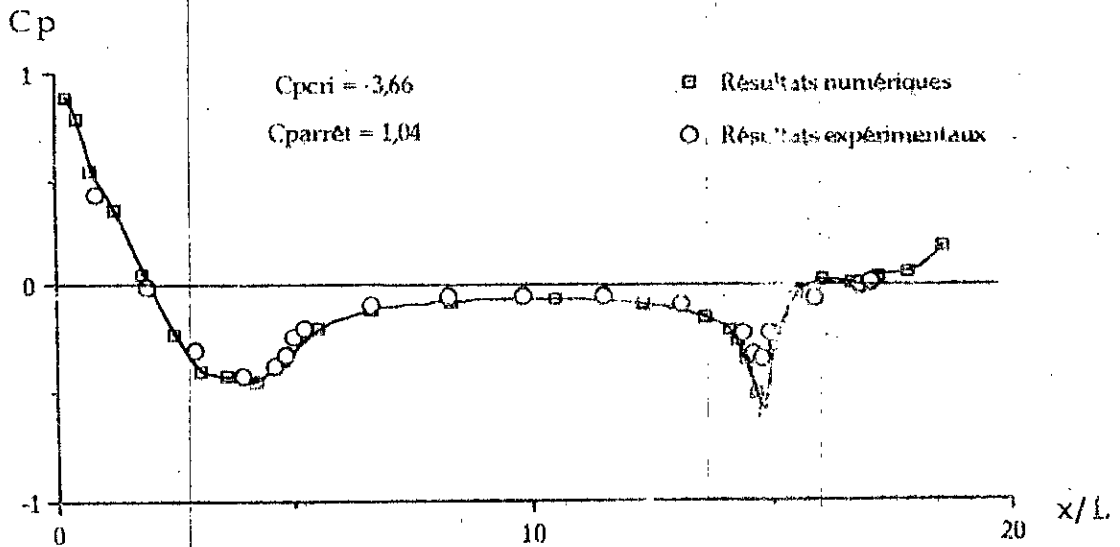


Fig. V.2 Distribution de la pression subsonique sur un corps axisymétrique.  
 $M = 0,4$  ;  $\alpha = 0^\circ$ .

En un premier lieu, en comparant les résultats obtenus avec les résultats expérimentaux, nous notons que sur la totalité de ce corps, une très bonne concordance entre la présente méthode et l'expérience est obtenue.

D'autre part, en analysant l'écoulement autour de ce corps, nous remarquons qu'une surdétente apparaît clairement sur cette figure, la pression croît lentement en aval du raccordement ogive-cylindre (point B sur Fig. V.1) et tend asymptotiquement vers  $P_\infty$  au delà (sur le cylindre). Ce résultat a déjà été justement signalé dans Réf. 48 notant que sur les ogives de faible allongement ( $L_1 / 2R = 1 \text{ à } 2$ ), la pression locale sur le cylindre tend plus vite vers  $P_\infty$  que sur les ogives de grand allongement ( $L_1 / 2R > 2$ ), à égalité de distance à la pointe. Concernant le nombre de Mach local, sachant qu'une surdétente se traduit par une augmentation de la vitesse locale (ou du nombre de Mach local), il est intéressant de signaler, dans ce cas, l'existence d'une survitesse qui se produit légèrement en amont du raccordement ogive-cylindre. Cette survitesse s'atténue graduellement sur la partie cylindrique qui suit l'ogive.

Par ailleurs, les coefficients de pression d'arrêt et critique prédits numériquement sont respectivement 1,04 et 3,66. Sur Fig. V.2, nous remarquons que la première valeur est atteinte au point A qui représente en fait un point de stagnation. Encore devons-nous mentionner que la vitesse locale est partout inférieure à la vitesse du son et par suite l'écoulement est totalement subsonique.

En outre, une comparaison faite entre la solution obtenue par la théorie linéarisée [Réf. 26] sur ce même corps et des résultats expérimentaux de Réf. 49 pour un nombre de Mach de 2,3 et un angle d'attaque nul, a montré que cette théorie tend à sous-estimer la pression au nez du corps et concorde parfaitement avec l'expérience excepté sur le "boattail" où les effets de viscosité dominent. La sous-estimation de la pression au nez est un résultat de l'application des équations de l'écoulement potentiel linéarisé et des conditions tangentielles aux limites. Il a été alors montré qu'une meilleure approximation de la pression sur le nez pourrait être obtenue en appliquant une correction basée sur le nombre de Mach local de la solution linéarisée [Réf. 28].

## 1.2 - Corps "parabolique" de révolution dans un écoulement supersonique

Les distributions de pression obtenues par des tests réalisés en soufflerie sur un corps de révolution, présentant un profil parabolique et un rapport de finesse (ou élancement) de 11, sont publiées dans Réf. 50. Les solutions obtenues sur ce même corps à deux nombres de Mach, 0 et 1,93 et à deux différents angles d'attaque sont comparées d'une part avec ces distributions de pression et d'autre part avec les résultats donnés par Réf. 21.

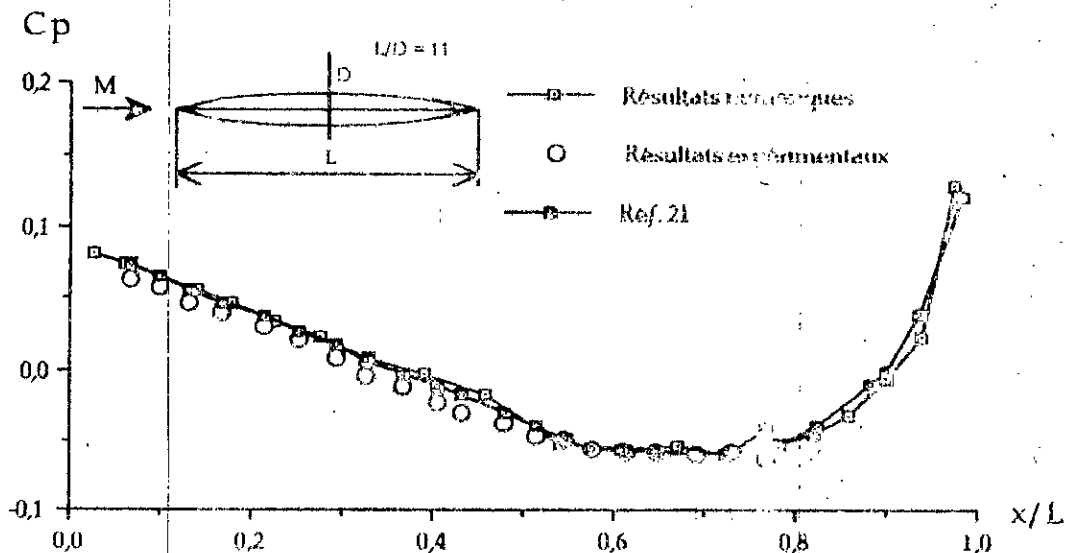


Fig. V.3 Distribution de la pression axiale sur un corps de révolution  
 $M = 1,93 \quad \alpha = 0^\circ$ .

La figure V.3 qui illustre l'évolution axiale des coefficients de pression pour un angle d'attaque nul, montre que les solutions obtenues par la présente méthode concordent exactement avec les résultats expérimentaux et ceux de Réf. 21.

D'un autre côté, les distributions de pression circonférentielles obtenues pour un angle d'attaque  $\alpha = 5^\circ$  sont illustrées sur Fig. V.4a et b pour deux différentes stations. Ces distributions sont conformes aux résultats expérimentaux quoiqu'un certain écart ait été observé au voisinage de  $\theta = 0$  pour une station correspondant à  $x/L = 0.69$ ; ceci est probablement dû au développement et à la séparation de la couche limite dans cette région comme cela a été mentionné dans [Réf. 21].

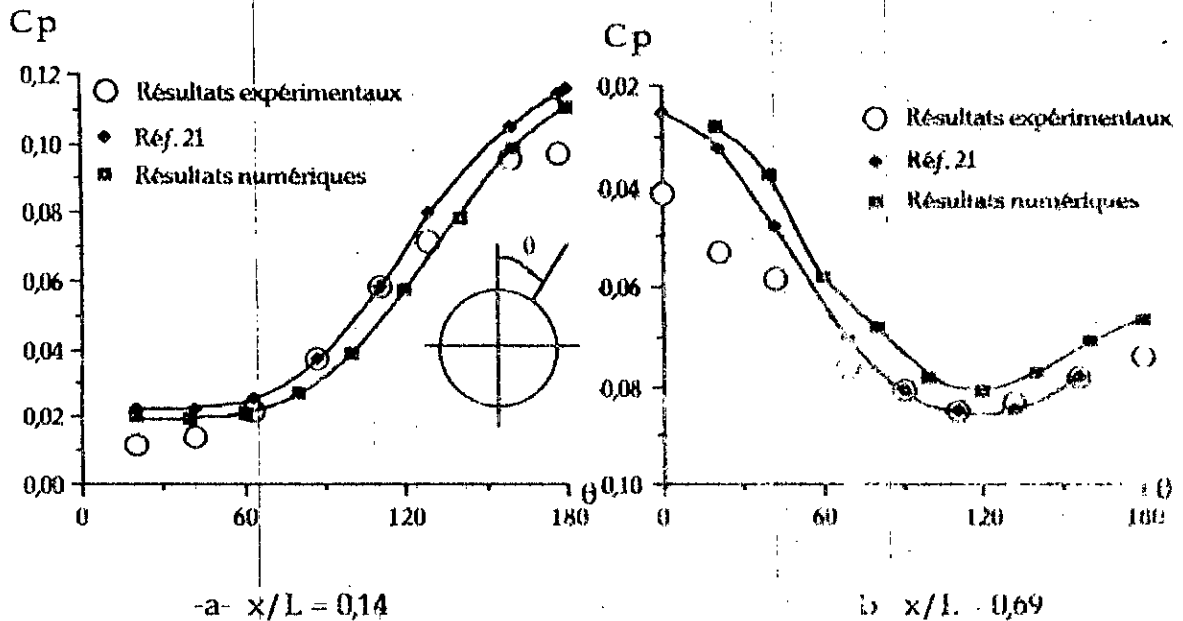


Fig. V.4 Distribution de la pression circulaire sur un corps de révolution;  $M = 1,93$   $\alpha = 5^\circ$ .

### I.3 - Cône elliptique dans un écoulement supersonique

La distribution de pression circonférentielle obtenue par la présente méthode sur un cône elliptique est illustrée sur Fig. V.5 pour un nombre de Mach de 1,89 et deux angles d'attaque; 0 et 6 degrés. Une comparaison avec les résultats expérimentaux de Réf. 51 montre de nouveau que la théorie concorde bien avec l'expérience pour un angle d'attaque nul et qu'une légère sur-estimation de la pression est observée sur la surface inférieure pour un angle d'attaque de 6 degrés.

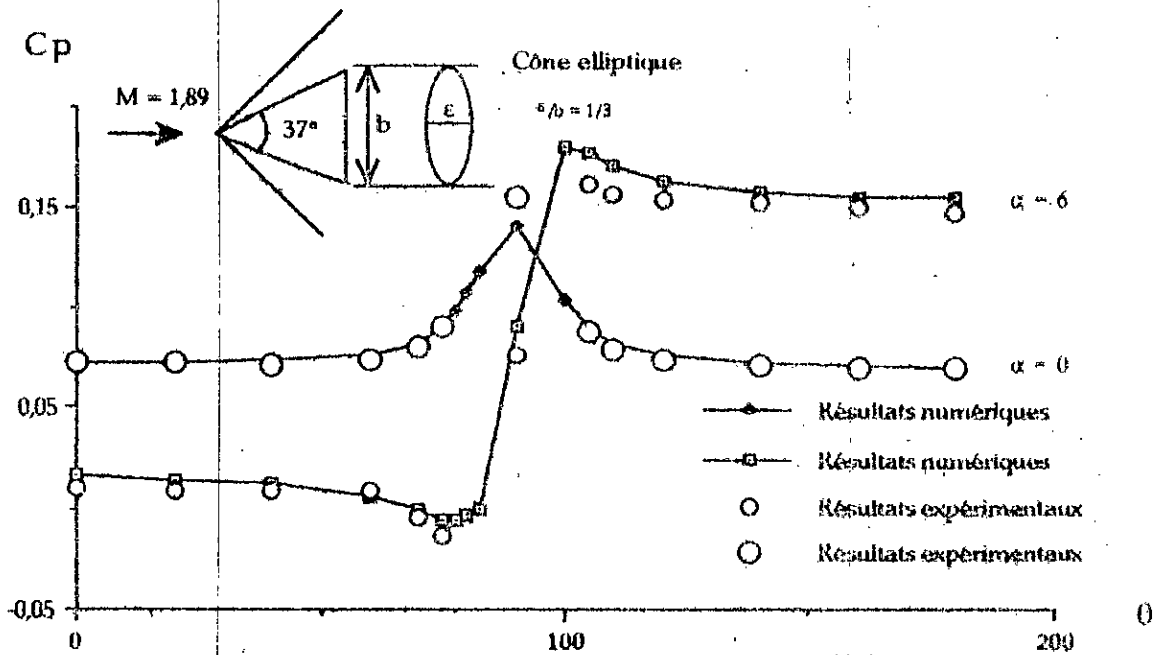


Fig. V.5 Distribution de pression supersonique sur un cône elliptique.

## II - AILES DE DIFFERENTES FORMES

Une variété d'ailes de différentes géométries a été testée et les résultats ont été validés.

Le premier exemple testé correspond à une aile droite (angle de flèche  $\phi = 0^\circ$ ) ayant un profil NACA 0012 en régime d'écoulement subsonique caractérisé par deux nombres de Mach; 0,63 et 0,75 et un angle d'attaque de  $2^\circ$ . Les résultats expérimentaux sont obtenus de Réf. 52.

Sur Figs. V.7 et V.8 sont représentées les distributions de pression obtenues pour deux stations suivant l'envergure et sont comparées avec celles données par Réf. 52.

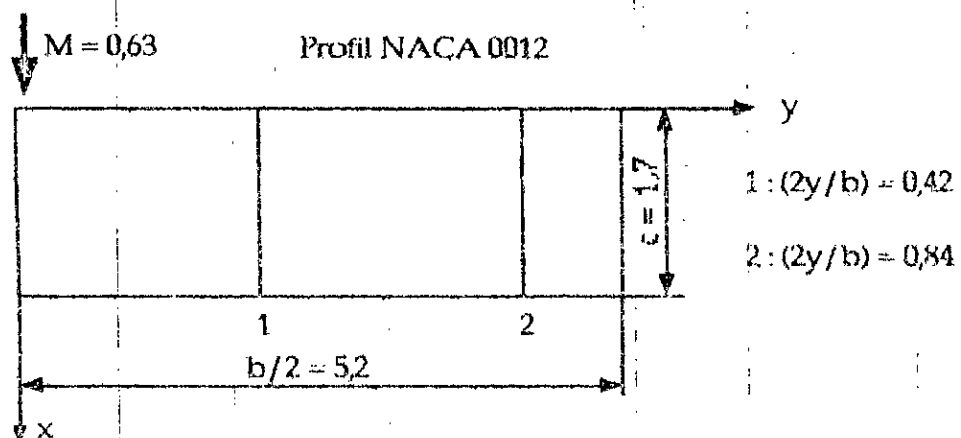


Fig. V.6 Schéma de l'aile droite.

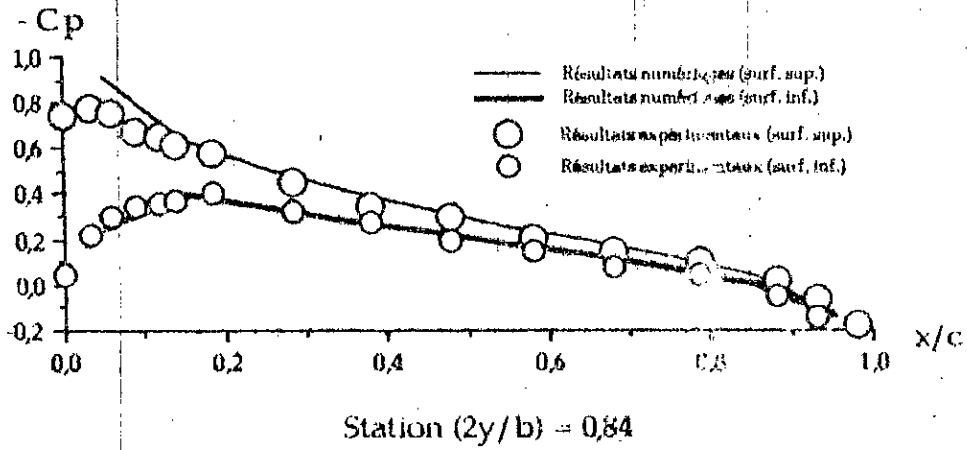
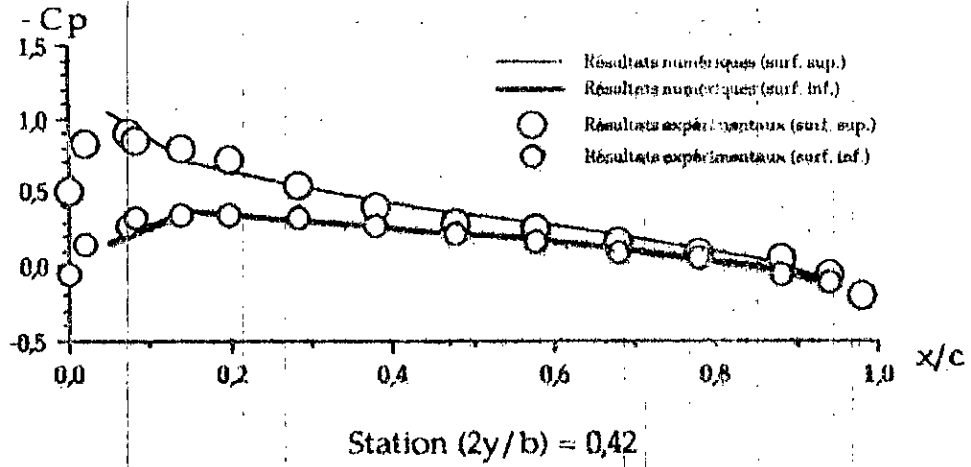
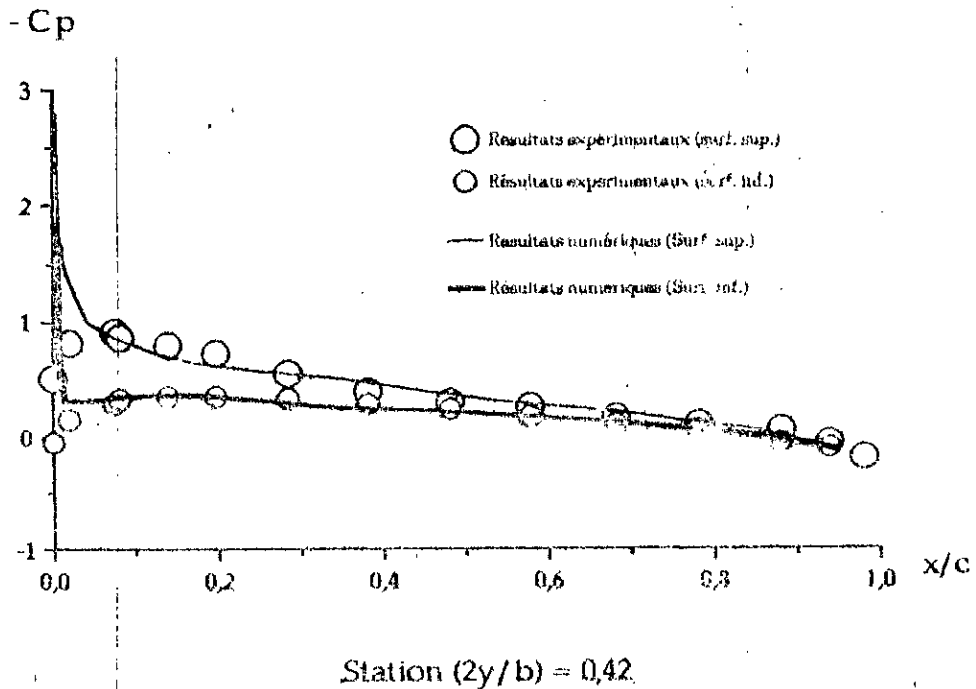


Fig. V.7a Distribution de pression sur l'aile droite obtenue (aile subdivisée en 80 panneaux),  $M = 0,63$ ,  $\alpha = 2^\circ$ .



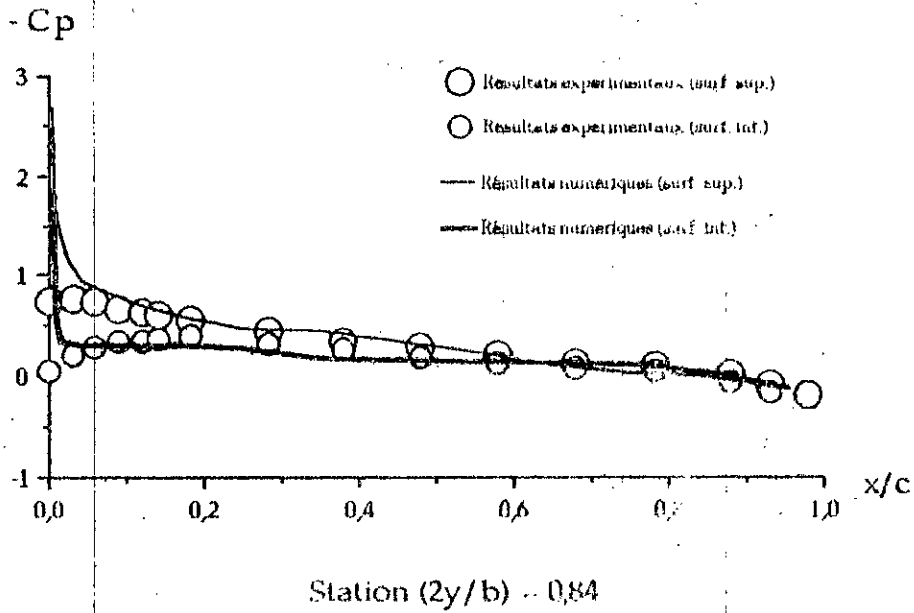


Fig. V.7b Distribution de pression obtenue en subdivisant l'aile en 128 panneaux ( $M = 0,63$ ,  $\alpha = 2^\circ$ )

Les distributions de pression représentées par Fig. V.7, pour ces mêmes stations, sont obtenues en augmentant le nombre de panneaux au voisinage du bord d'attaque afin de mieux voir la prédiction du coefficient de pression dans cette zone; l'aile est alors subdivisée en 128 panneaux sur la totalité de la surface de cette aile droite et pour un écoulement subsonique ( $M = 0,63$ ), un accord satisfaisant entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques est observé sauf au voisinage du bord d'attaque.

Pour  $M = 0,75$ , les distributions de pression sont données par :

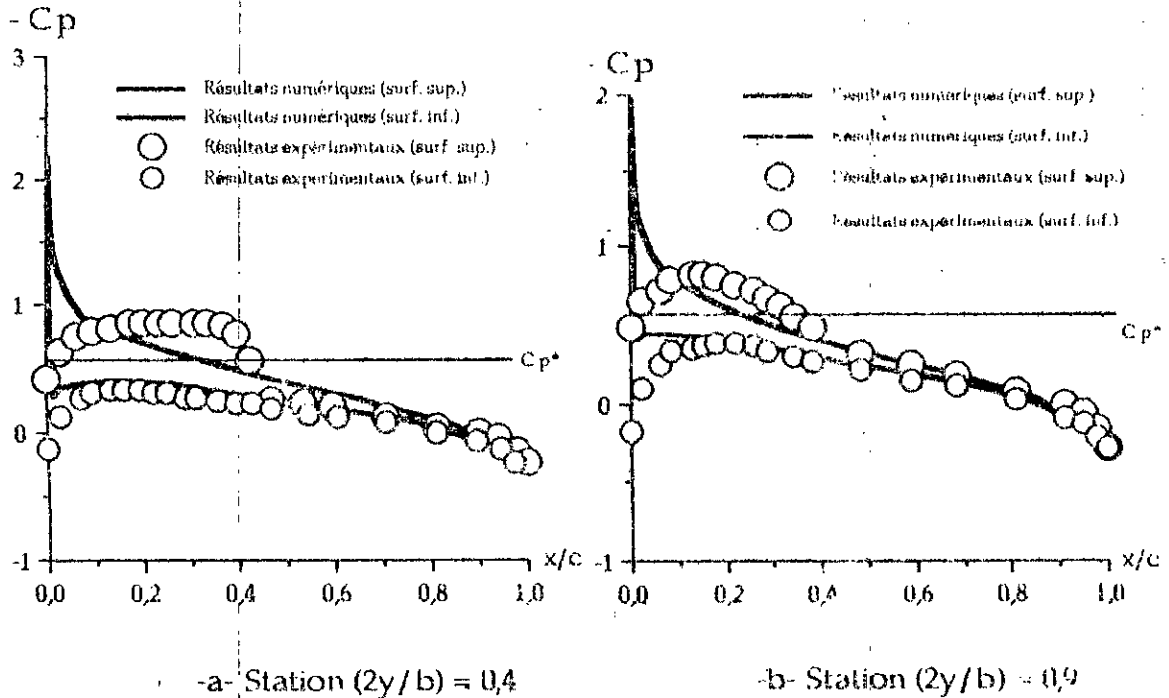


Fig. V.8 Distribution de pression obtenue pour  $M = 0,75$

L'écoulement en amont de l'aile est subsonique, mais des régions locales d'écoulement supersonique se développent sur la surface supérieure. Le coefficient de pression critique ( $C_p^*$ ) correspondant à un nombre de Mach unité est indiqué sur Fig. V.8.

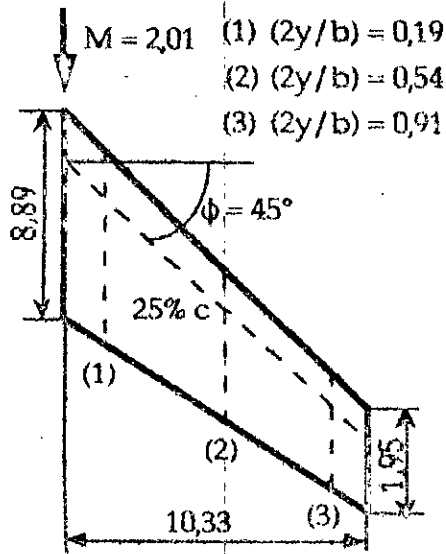
La présente méthode montre encore un accord acceptable avec les résultats expérimentaux sur la surface inférieure, où le coefficient de pression est subcritique mais au voisinage du bord d'attaque et sur la surface supérieure, le coefficient de pression n'est pas prédit correctement.

Nous avons, par ailleurs, dressé le tableau ci-dessous afin de comparer le temps de calcul (temps C.P.U.) avec la variation du nombre de panneaux (NP).

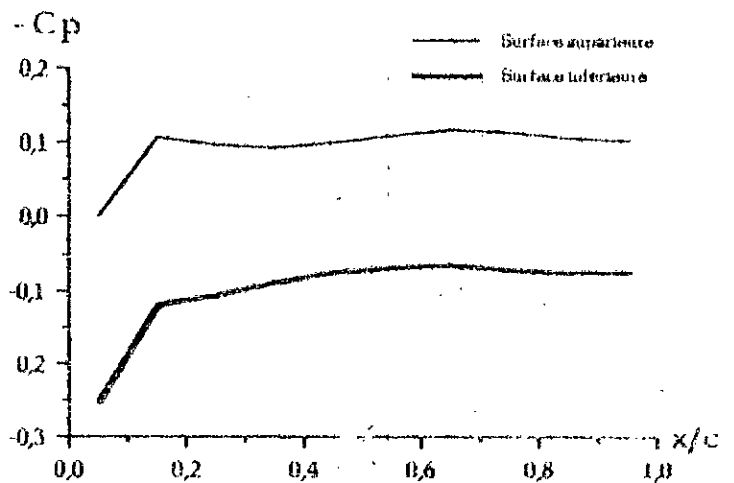
NP	80	90	90	128	162	192
Temps C.P.U.	0:21:25.23	0:29:21.70	0:41:39.52	0:39:12.80	0:45:35.31	0:59:29.75
Option	plane	plane	non-plane	plane	plane	plane

Tableau V.1 Temps de calcul.

Le second exemple traité concerne le cas d'une aile en flèche (fig. V.9a) présentant un profil NACA 65A004 pour un nombre de Mach de 2,01 et un angle d'attaque de  $5^\circ$ .

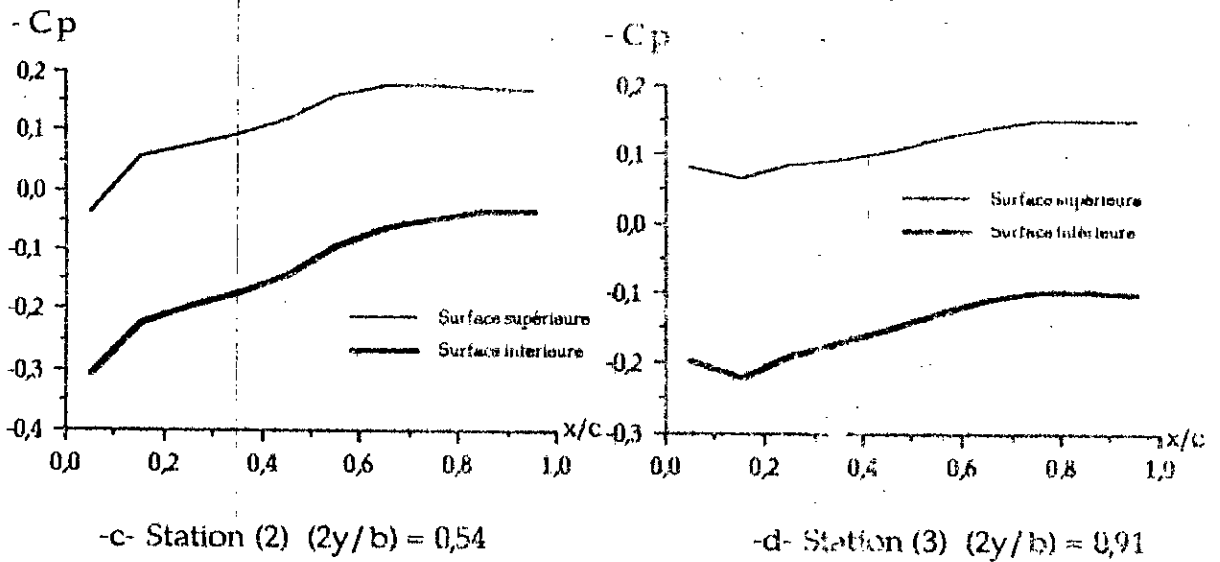


-a- Forme en plan de l'aile.



-b Station (1) ( $2y/b = 0,19$ ).





Figs. V.9

Les résultats obtenus pour ce type d'aile sont comparés avec ceux de Réf. 11 ; une comparaison indique un accord satisfaisant et acceptable pour toutes les stations sauf proche de l'emplanture. Sur la Figs. V.9b, c et d, nous représentons une distribution de pression pour trois stations suivant l'envergure repérées par (1), (2) et (3) sur Fig. V.9a.

Le troisième exemple traite le cas d'une aile en flèche ( $\phi = 70^\circ$ ) avec et sans cambrure ("cambered and uncambered Arrow wing") dans un écoulement supersonique. Cette aile présente un profil biconvexe dont l'épaisseur relative est égale à 3% ( $t/c = 3\%$ ). La forme en plan de l'aile à analyser est représentée sur fig. V.10. Une définition géométrique détaillée ainsi que les distributions de l'épaisseur et de la cambrure de cette aile, pour différentes stations, sont données dans l'annexe E.

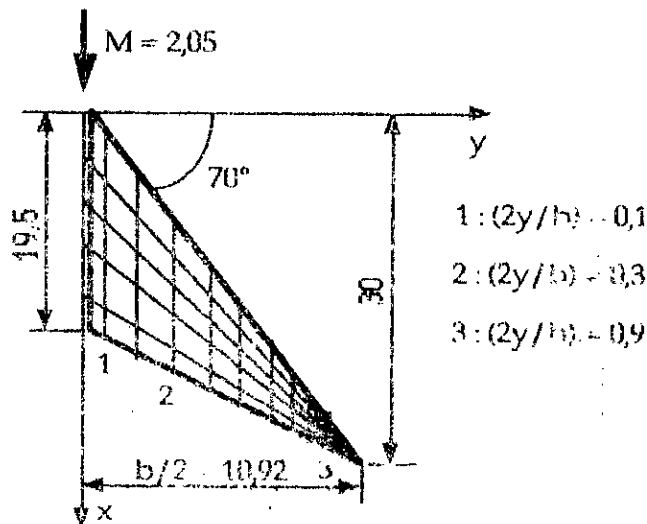
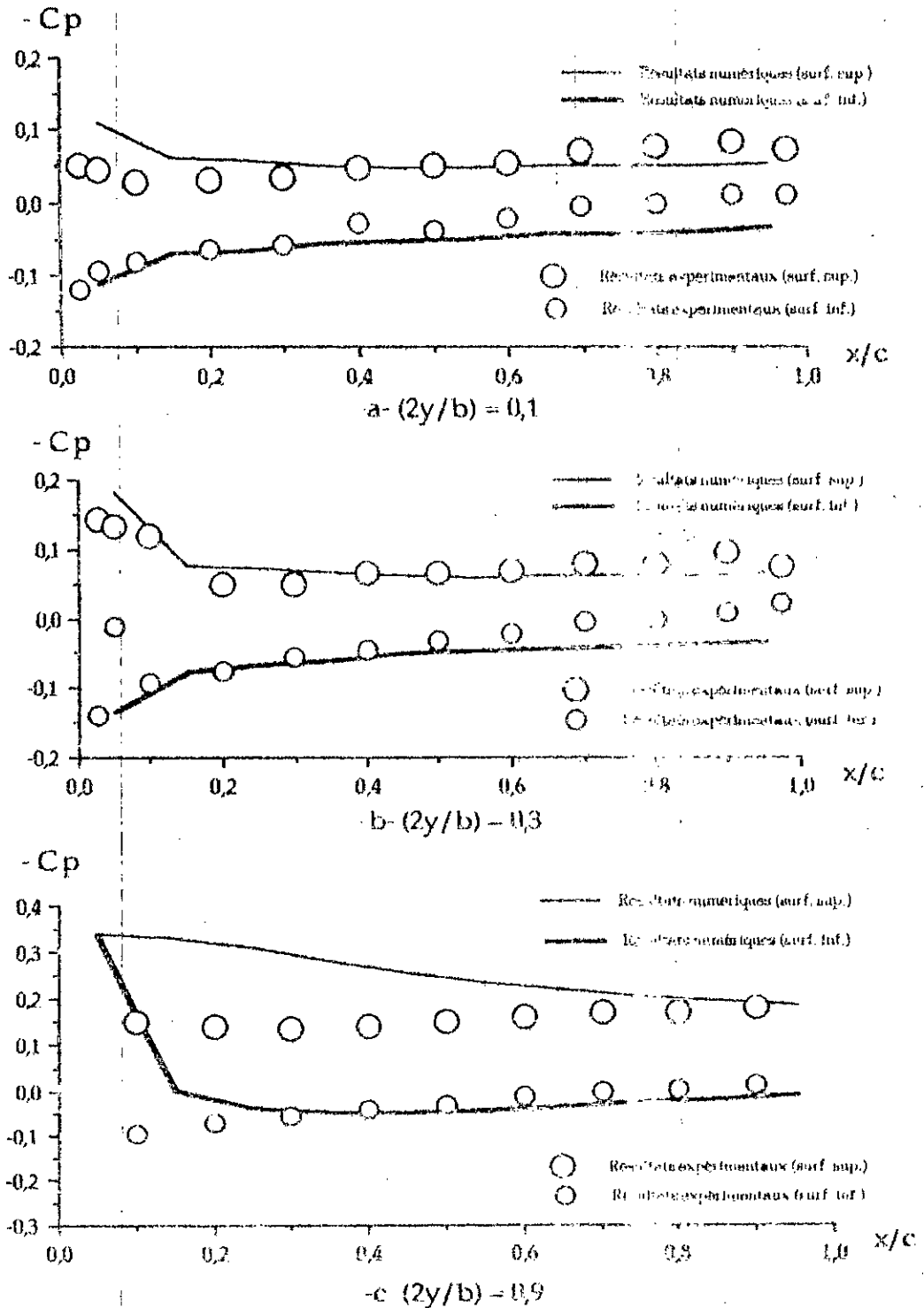


Fig. V.10 Forme en plan de l'aile.

Les distributions de pression calculées sur cette aile sont comparées avec les résultats expérimentaux de Réf. 53 pour un nombre de Mach de 2,05 et un angle d'attaque de  $4^\circ$  degrés. Elles sont représentées pour trois stations situées à

par 1, 2 et 3 sur Fig. V.10. Nous mentionnons que pour cet exemple, l'option des conditions aux limite plane a été utilisée. Nous considérons dans une première étape une aile sans cambrure dont les distributions de pression obtenues sont représentées sur Fig. V.11.



Figsq V.11 Distributions de pression sur une aile en flèche et sans cambrure ;  $M = 2,05$  ;  $\alpha = 4^\circ$ .

Le coefficient de portance totale obtenu est de 0,18 et le coefficient de traînée est de 0,016, alors que le coefficient de portance totale déterminé par  $R_0$ ,  $R_3$  est de 0,14 pour un angle d'attaque de  $4^\circ$ .

Dans une seconde étape, nous traitons le cas d'une aile avec cambrure dont les distributions de pression sont représentées, pour ces mêmes stations, sur Fig V.12.

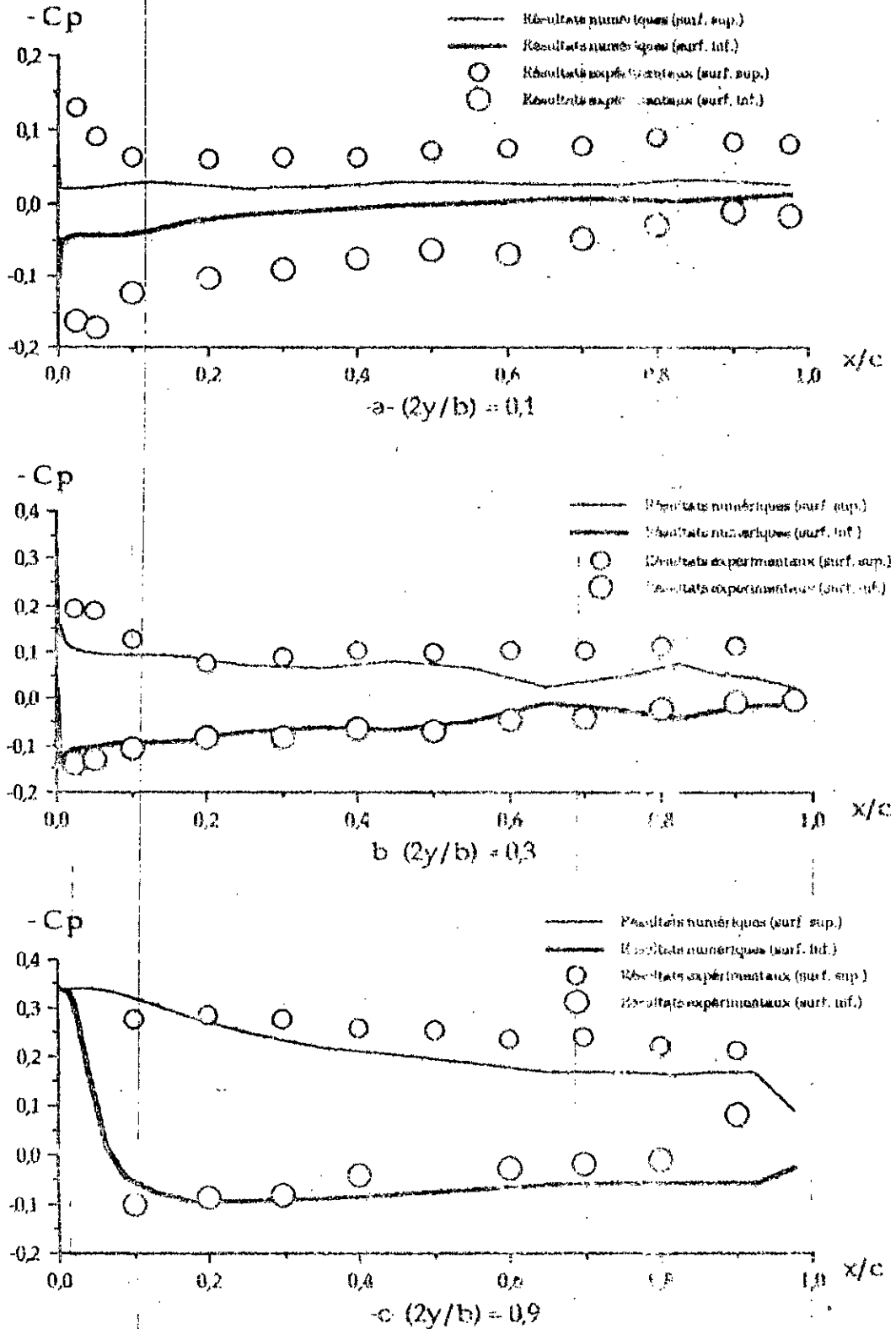


Fig V.12 Distribution de pression sur une aile en flèche et avec cambrure ;  $M = 2,05$  ;  $\alpha = 6^\circ$ .

Cette figure montre que les deux résultats sont en accord sur la moitié avant de l'aile, c'est à dire proche de l'emplanture sauf à proximité du bord d'attaque. D'autre part, un certain écart est observé entre ces deux résultats sur la surface supérieure de l'aile au voisinage de son extrémité. Ce désaccord, selon Carlson (Réf. 54), peut être dû en partie aux déflexions aéroélastiques et à la présence d'un écoulement vortex prenant naissance à l'apex de l'aile. Cet effet du vortex, dans cette région, a été observé expérimentalement (Réf. 55) et il a été aussi montré qu'il devient encore plus marqué lorsque  $\alpha = 8^\circ$  particulièrement à une station qui correspond à  $(2y/b) = 0,3$ . Par ailleurs, nous avons en plus dressé le tableau ci dessous indiquant les temps de calcul utilisés pour les différents cas.

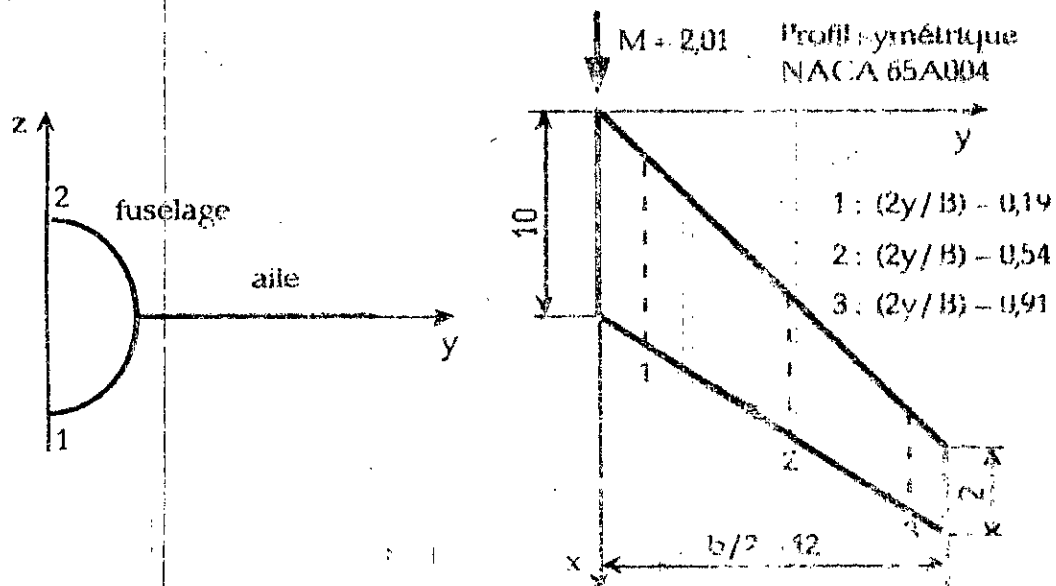
NP	aile sans cambrure		aile avec cambrure	
	90	294	90	294
temps C.P.U.	0:31:23.53	1:54:25.24	0:31:25.41	1:54:31.94
$C_L$ total	0,13		0,21	

Tableau V.2 Temps C.P.U. et coefficient de portance total prédit numériquement.

### III - COMBINAISONS AILE-FUSELAGE

#### III.1 - Corps "ogive-cylindre" avec aile en flèche dans un écoulement supersonique

Afin d'illustrer l'application de la méthode à la combinaison aile-fuselage, une comparaison des distributions de pression calculées et mesurées pour une telle combinaison est donnée dans Figs. V.14 et 15. La forme en plan de cette combinaison aile-fuselage est représentée sur Fig. V.13. L'aile présente une section de profil symétrique type NACA 65A004 parallèle à l'écoulement, un angle de flèche de  $45^\circ$  par rapport au quart de la corde et est fixée centralement au fuselage, alors que ce dernier, formé d'un ensemble ogive-cylindre, présente une section circulaire. Du fait de la symétrie du problème, seule la moitié de la configuration sera traitée.



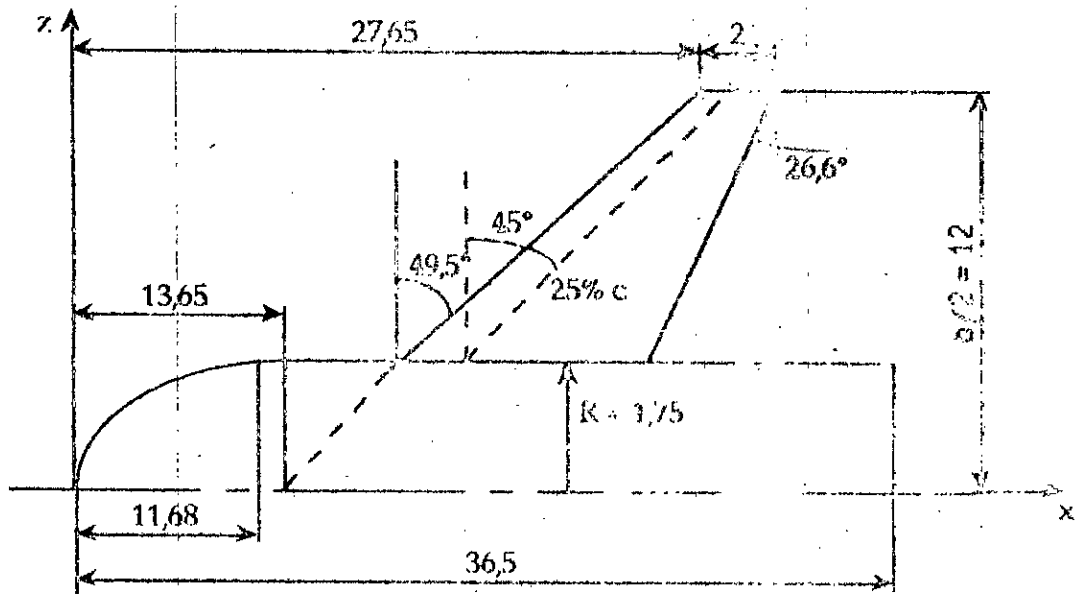
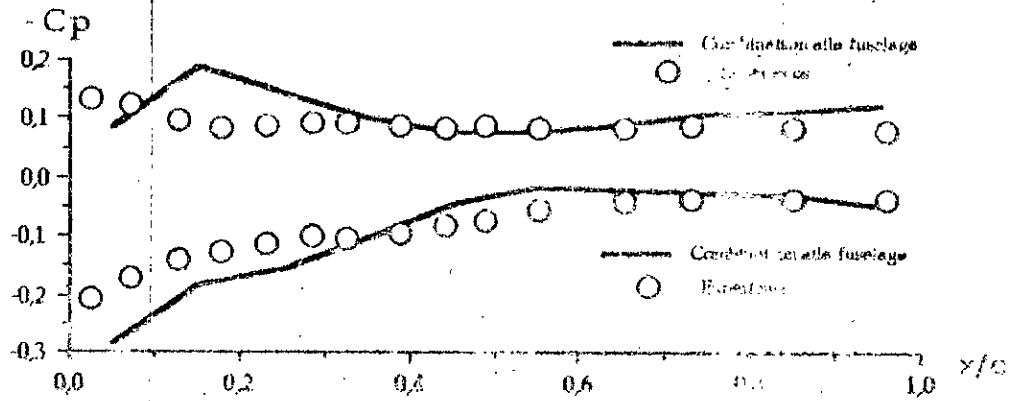
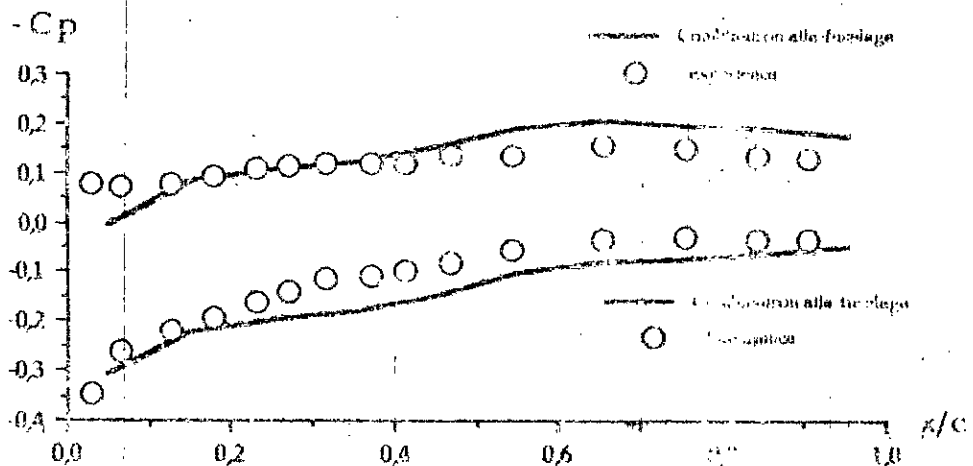


Fig. V.13 Schéma de la configuration utilisée.

Nous notons que les distributions de pression appaissant sur l'aile sont obtenues en utilisant l'option des conditions aux limites paroi et des comparaisons sont faites avec les résultats expérimentaux de Réf. 56 pour  $M = 2,01$  et  $\alpha = 5^\circ$ . Ci dessous sont représentées les distributions de pression sur l'aile.



a  $(2y/b) = 0,19$



b  $(2y/b) = 0,54$

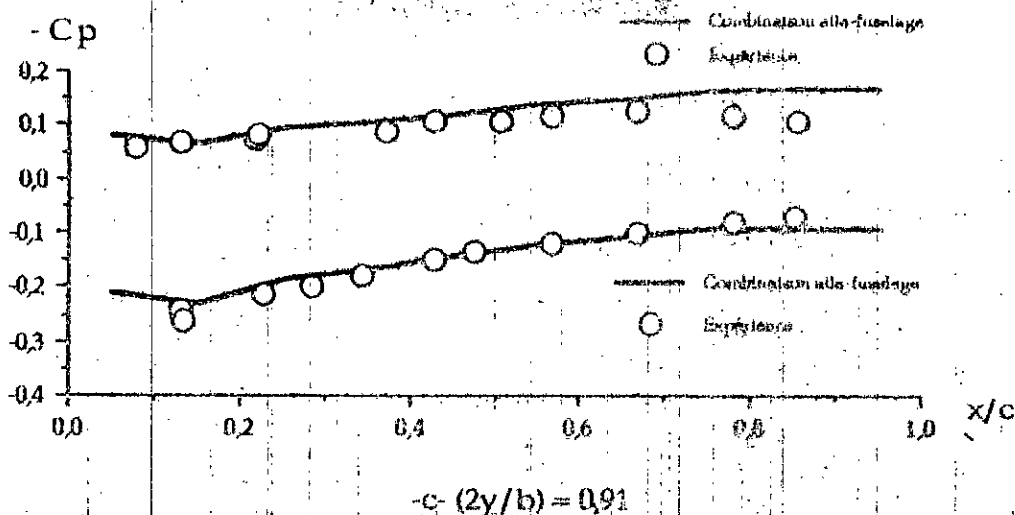
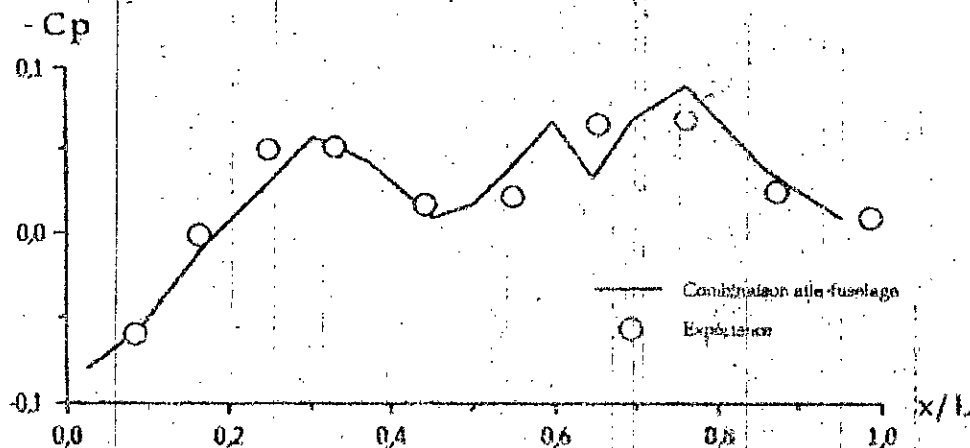


Fig. V.14 : Distribution de pression sur l'aile pour trois stations  
( $M = 2,01$  ;  $\alpha = 5^\circ$ ).

En général, un accord qualitatif entre la présente méthode et l'expérience est observé. Cependant, nous remarquons un certain écart entre les deux résultats à proximité du bord d'attaque et qui diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'implanture. Comme a été mentionné dans Réf. 23, cet écart est probablement dû au détachement de l'onde de choc en avant du bord d'attaque (ce bord d'attaque est arrondi et supersonique) permettant ainsi le développement d'une faible circulation autour de celui-ci; car en réalité, les calculs théoriques supposent une onde de Mach attachée le long des bords d'attaque supersoniques empêchant, par suite, le développement de n'importe quel écoulement circulaire. Un autre désaccord entre ces résultats est observé au voisinage du bord de fuite au niveau de la surface supérieure (extrados). Ceci est dû aux effets de viscosité, absents dans la formulation potentielle.



-a- ligne méridienne supérieure.

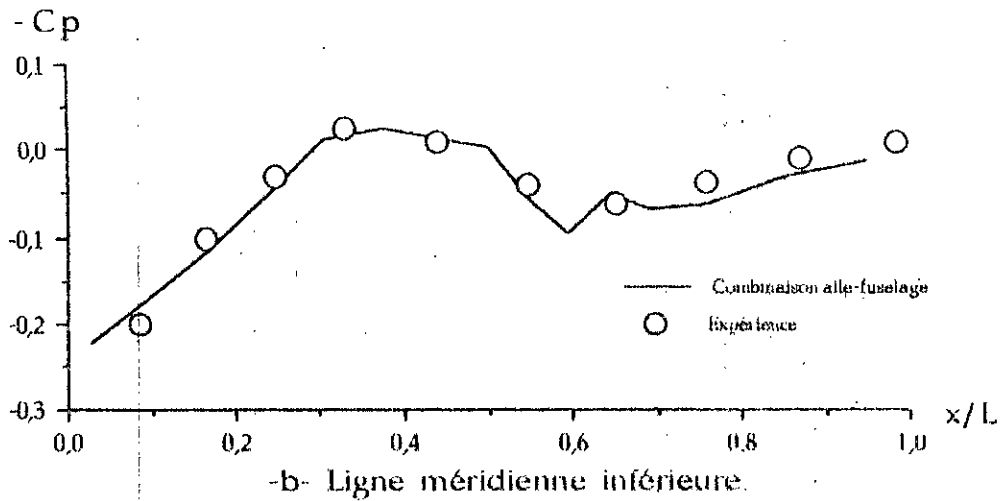


Fig. V.15 Distributions de pression sur le fuselage suivant deux lignes méridiennes

La figure V.15 montre les distributions de pression sur la surface du fuselage suivant deux lignes méridiennes et les compare avec les résultats expérimentaux. Dans cet exemple, une bonne conformité est en général observée entre la présente méthode et l'expérience.

Nous avons, par ailleurs, étudié le comportement de la solution (figs. IV.52 ou 16) sur le processus itératif; celui-ci est donné, selon Réf. 40, par le signe de la fonction suivante :

$$S_i(k) = (\gamma_i(k) - \gamma_i(k-1)) (\gamma_i(k-1) - \gamma_i(k-2))$$

où  $S_i(k) > 0$  implique un comportement monotonique.

$S_i(k) < 0$  implique un comportement oscillatoire.

Afin de voir le caractère de la solution, pour cet exemple, nous avons alors représenté  $\gamma_i(k) = f(k)$  sur Fig. V.16 qui démontre bien le mode oscillatoire de convergence.

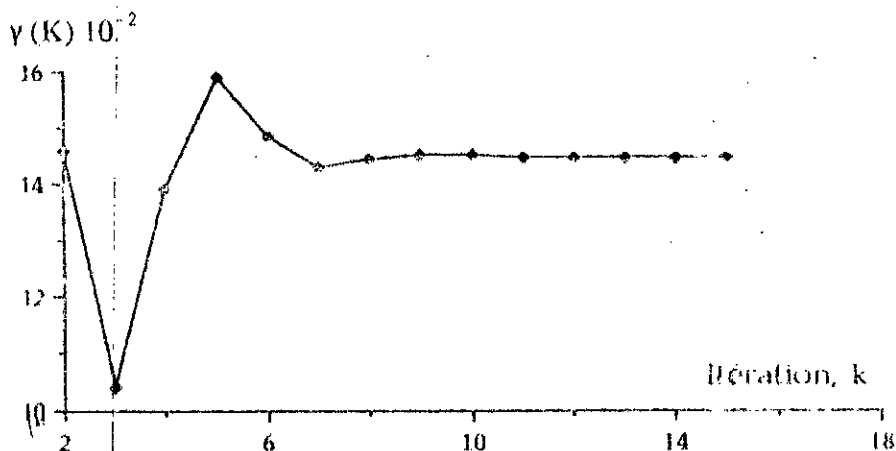


Fig. V.16 Comportement oscillatoire de la solution avec la séquence itérative  $(\gamma_i^{(1)} = 18,23)$ .

Le comportement total de la séquence itérative peut encore être analysé à partir

$$\text{de : } \Delta y^{(k)} = \sum_{i=1}^N |y_i^{(k)} - y_i^{(k-1)}|$$

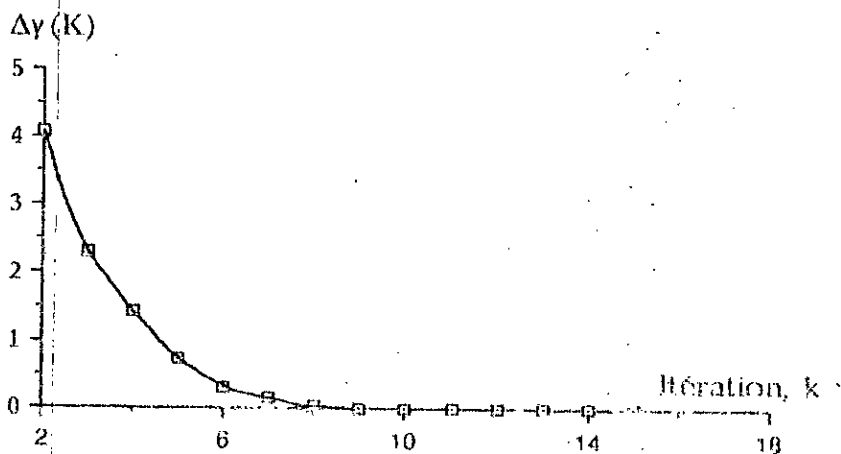


Fig. V.17 Comportement total de la solution avec la procédure itérative.

Cette figure montre de nouveau ce comportement; nous voyons clairement que pour la méthode itérative de Jacobi utilisée, la convergence est atteinte à partir de la 12<sup>ème</sup> itération.

### III.2 - Corps de section circulaire avec aile en flèche dans des écoulements subsonique et supersonique

La forme en plan de cette combinaison aile fuselage est représentée sur la figure V.18. L'aile a un allongement de 4, un effilement de 0,6 et un angle de flèche de  $45^\circ$  par rapport au quart de la corde. Cette aile ne représente pas de gauchissement, présente un profil NACA 65A004 parallèle à la direction de l'écoulement et est fixée centralement au fuselage. Ce fuselage présente un rapport de finesse de 12. Ce modèle a été testé dans une soufflerie (Langley 8 ft tunnel) entre  $M = 0,6$  et 1,2 pour une grande plage d'angles d'attaque et de nombre de Reynolds. Nous tenons à mentionner que le profil utilisé expérimentalement est un NACA 65A006. La distribution de pression expérimentale pour cette configuration est donnée dans Réf. 57.

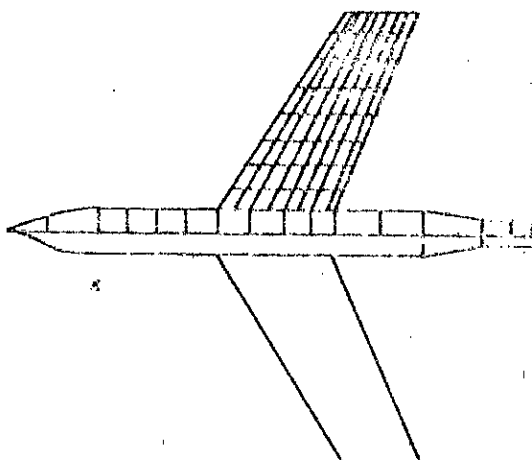


Fig V.18 Combinaison aile fuselage; aile en flèche, sans cambrure et fixée centralement au fuselage.



Les distributions de pression agissant sur la surface de l'aile, calculées en utilisant l'option des conditions aux limites plane, sont représentées en fonction de la corde ( $x/c$ ) pour trois différentes stations suivant l'envergure. Les résultats expérimentaux sont présentés pour trois nombres de Mach et comparés ensuite avec les résultats obtenus.

Pour  $M = 0,6$  l'écoulement est purement subsonique et l'accord entre la théorie et l'expérience est excellent sauf au voisinage du bord d'attaque (Fig. V.19).

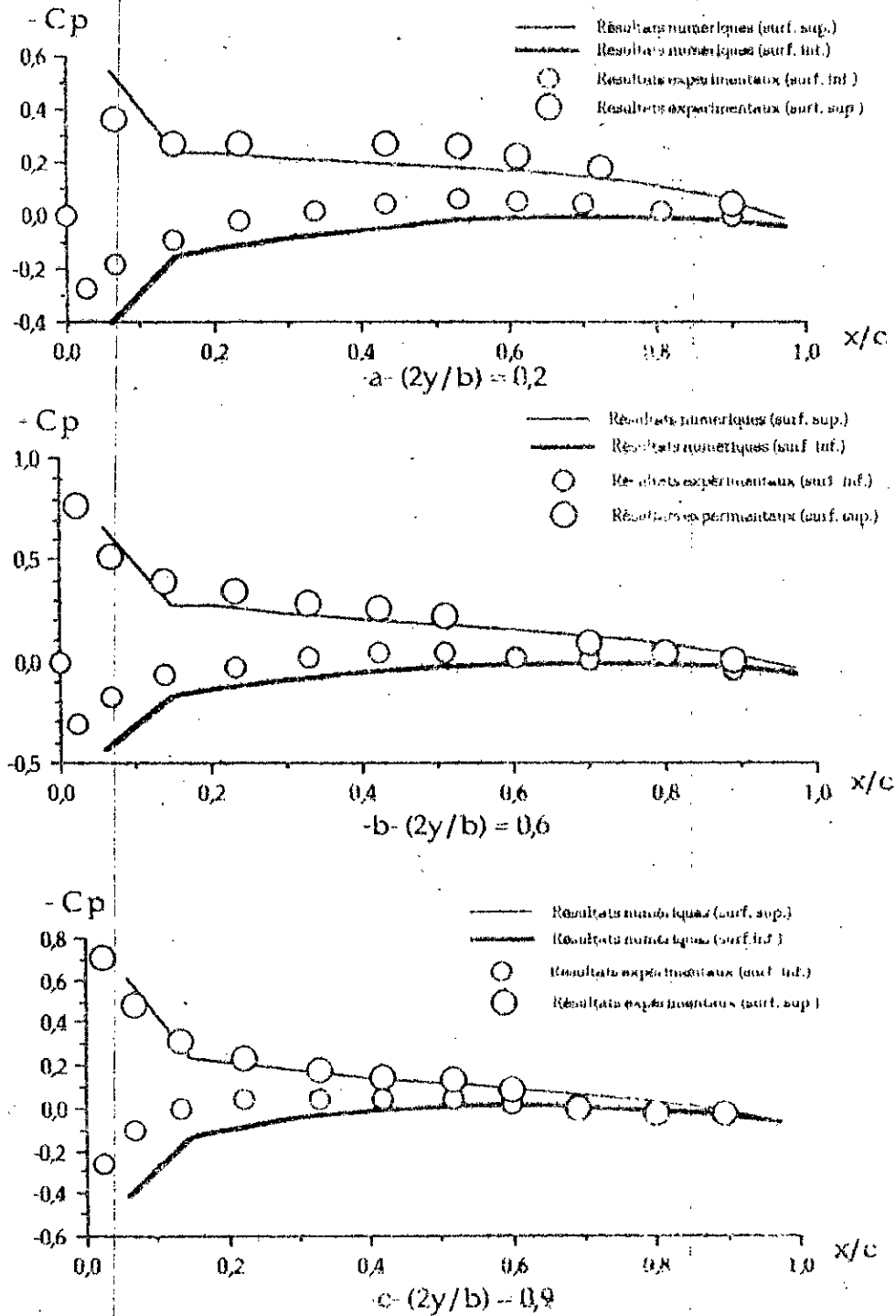


Fig. V.19 Distributions de pression sur l'aile pour  $M = 0,6$

Pour un écoulement transonique caractérisé par  $M = 0,9$ , l'écoulement approchant la configuration est subsonique, mais des régions locales d'écoulement supersonique se développent sur la surface supérieure. Le coefficient de pression critique  $C_p^*$ , correspondant à un nombre de Mach local unité, est indiqué par une ligne droite horizontale sur Fig. V.20. La présente théorie montre encore une concordance acceptable avec l'expérience sur la surface inférieure, où le coefficient de pression est subcritique, mais ne prédit pas exactement le coefficient de pression de la surface supérieure dans des régions d'écoulement supercritique.

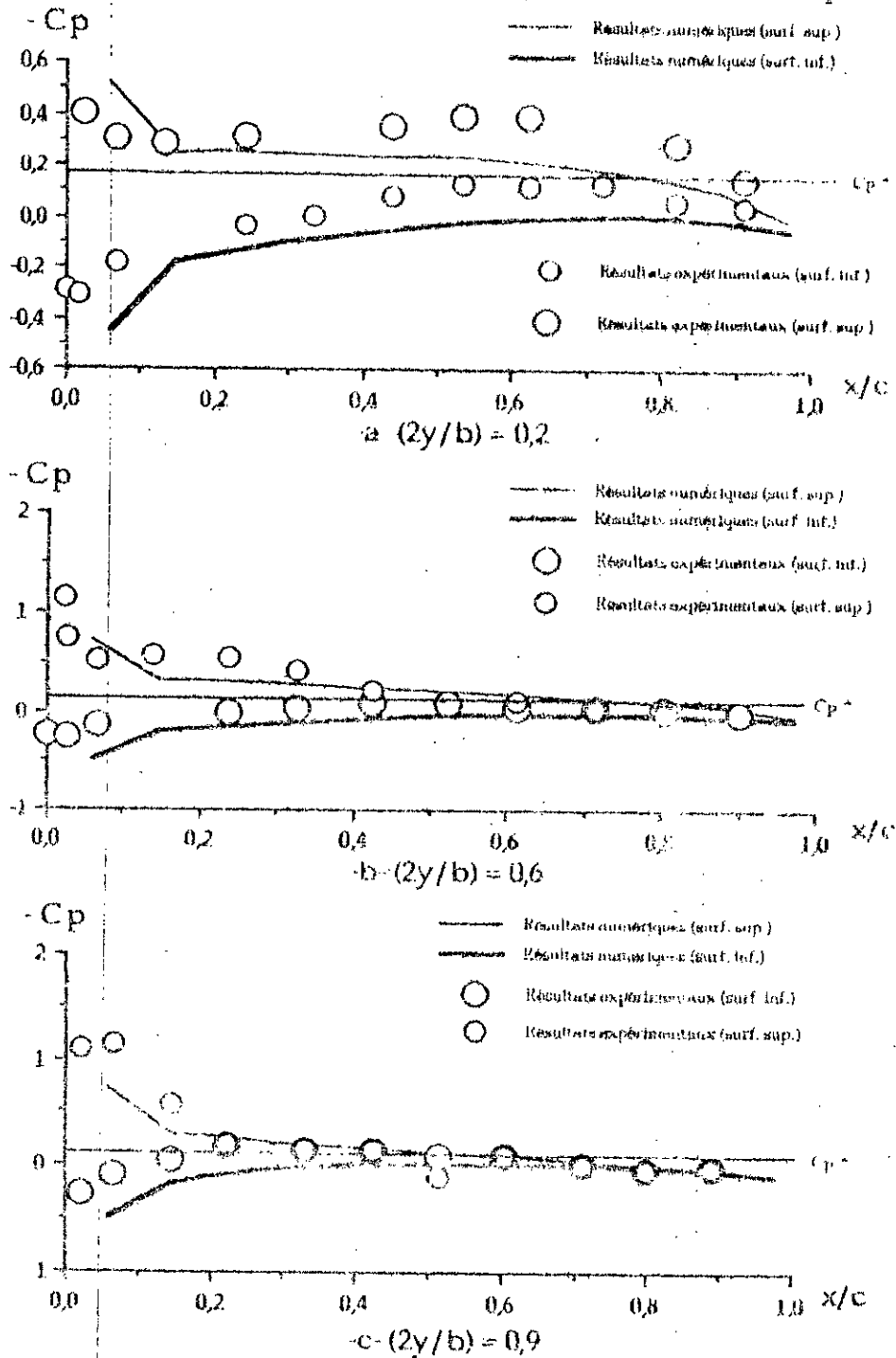


Fig. V.20 Distributions de pression sur l'aile pour  $M = 0,9$   
( $C_p^* = 0,18$ )

Nous obtenons des résultats acceptables quoique la formulation potentielle linéarisée ne considère pas un écoulement en régime transonique.

Pour  $M = 1,2$  l'écoulement est totalement supersonique et de nouveau, un accord acceptable entre la théorie et l'expérience est observé excepté au voisinage du bord d'attaque (Fig. V.21).

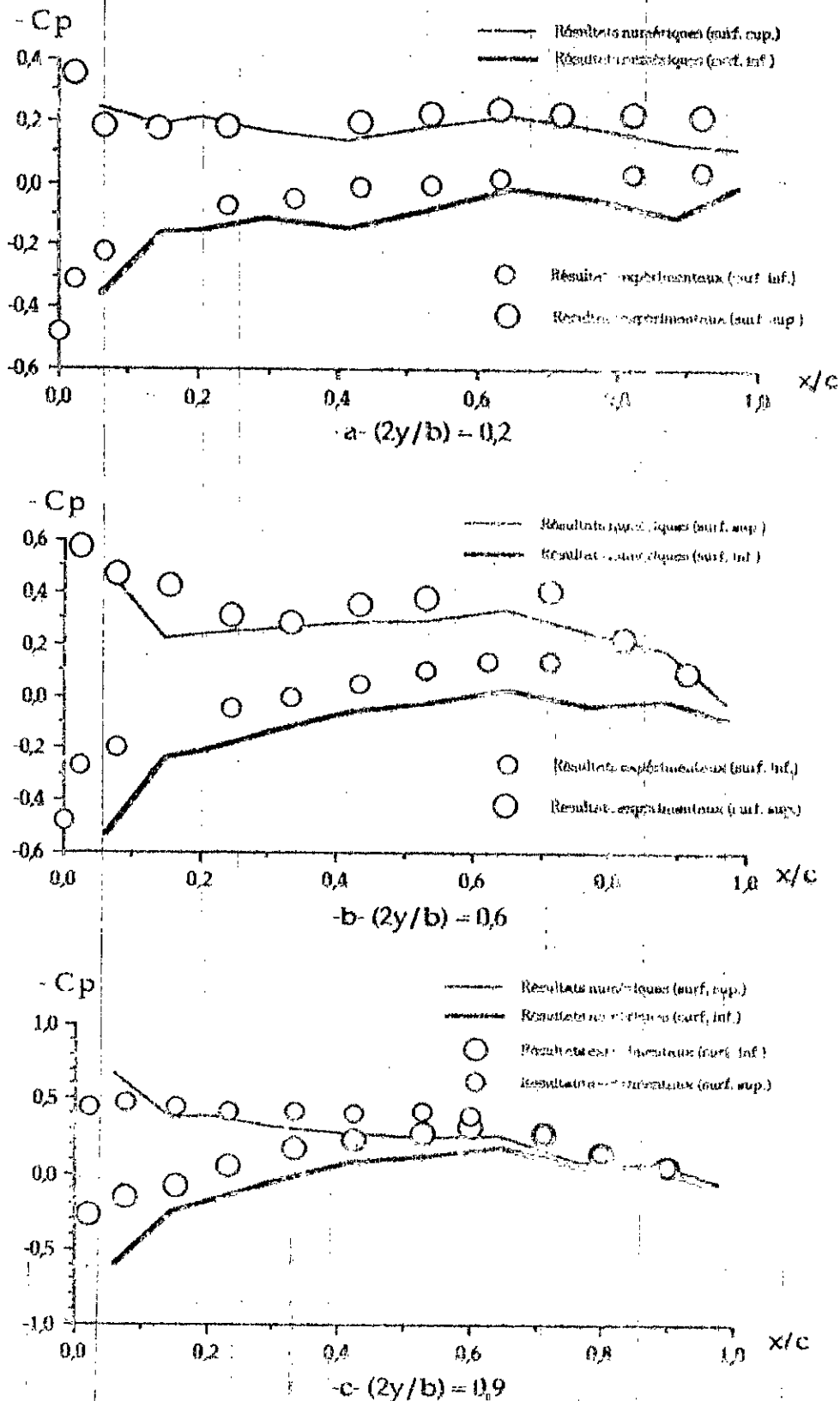


Fig. V.21. Répartition des coefficients de pression sur l'aile pour  $M = 1,2$

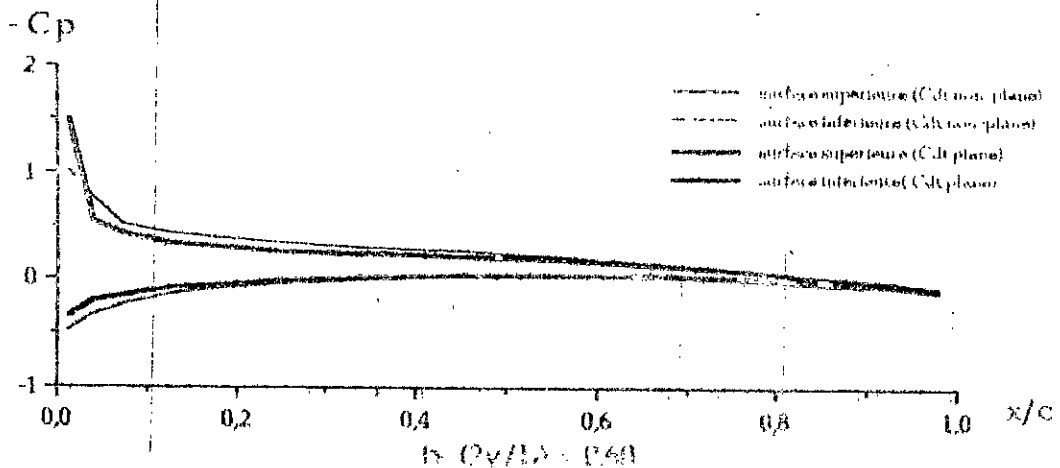
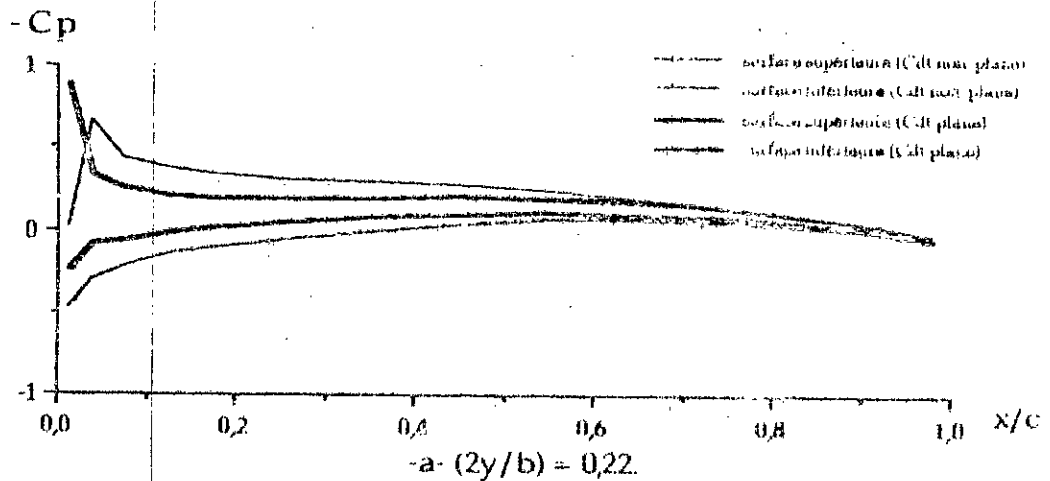
Les résultats obtenus sont en général vraisemblables malgré la différence d'épaisseur qui existe entre le profil utilisé expérimentalement (NACA 65A006) et le profil que nous avons utilisé (NACA 65A004).

Cet exemple montre que la théorie linéarisée est incapable de prédire exactement le coefficient de pression au bord d'attaque. Par conséquent, une correction obligatoire doit être rajoutée à cette théorie afin de donner de meilleures distributions de pression pour les ailes en flèche dans les écoulements subsoniques compressibles et pour les ailes ayant des bords d'attaque subsoniques dans les écoulements supersoniques [Réf. 22].

### III.3 - Combinaison aile en flèche - fuselage circulaire dans un écoulement subsonique

Le troisième exemple testé est une combinaison aile-fuselage dont la définition géométrique et la subdivision de cette configuration en panneaux sont présentées dans Réf.28. Le régime d'écoulement est caractérisé par un nombre de Mach de 0,6 et un angle d'attaque de 4°. Cet exemple a été étudié dans le but de comparer les distributions de pression agissant sur l'aile et le fuselage pour les deux options de conditions aux limites plane et non plane ainsi que le temps C.P.U qui correspond à chacune d'elles.

Figs.V.22 montrent la distribution de pression sur l'aile pour trois stations suivant l'envergure repérées par  $(2y/b) = 0,22 - 0,60$  et  $0,95$ .



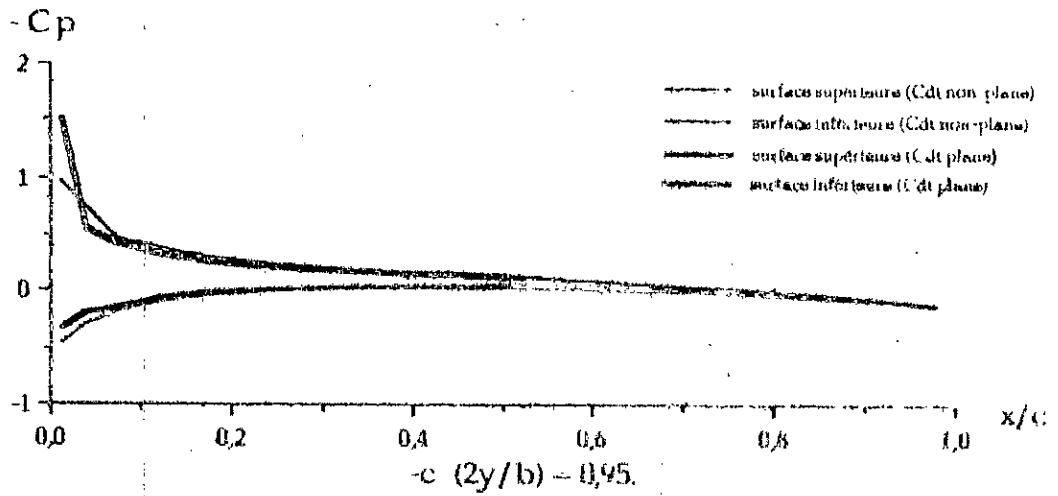
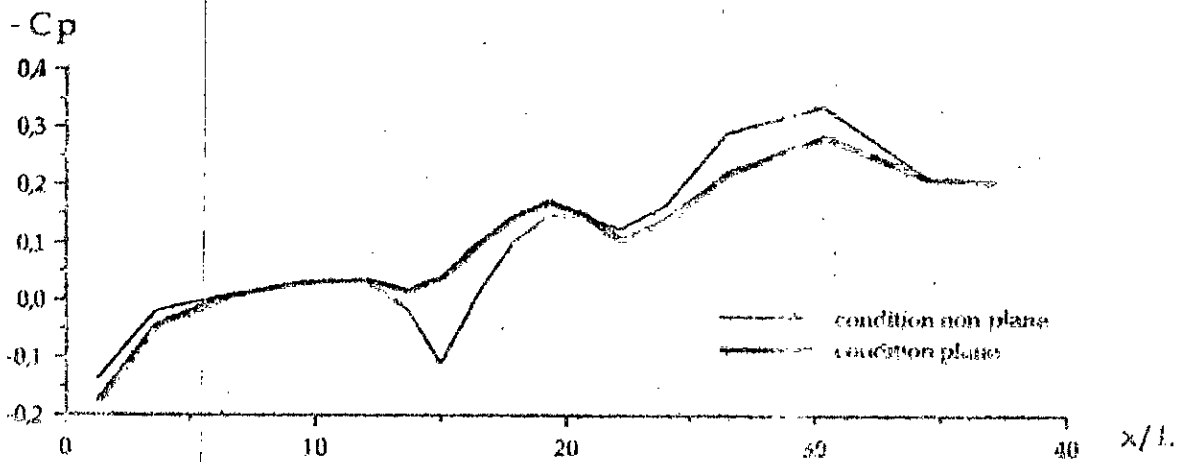
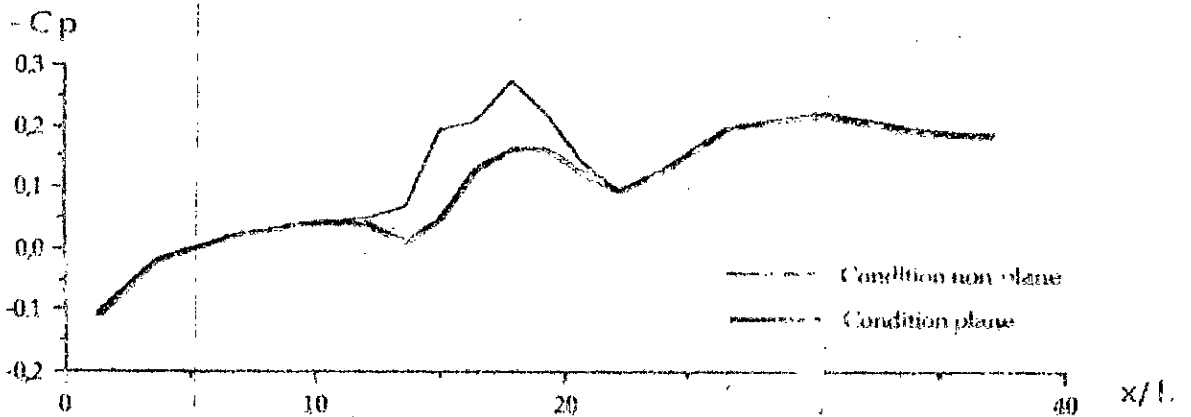


Fig.V.22 Distribution de pression sur l'aile.

Figs.V.23 illustrent  $-C_p=f(x/L)$  sur le fuselage pour deux lignes méridiennes situées juste au dessous et au dessus de l'aile et repérées par  $\theta = 75^\circ$  et  $105^\circ$ .



a.  $\theta = 75^\circ$ .



b.  $\theta = 105^\circ$ .

Fig.V.23 Distribution de pression sur le fuselage

Quant au temps de calcul (temps C.P.U) correspondant à une même discrétisation, il est donné par le tableau suivant :

Subdivision de la configuration en panneaux	fuselage : 102 aile : 70 NP = 172	fuselage : 102 aile : 140 NP = 242
Option	plane	non plane
Temps C.P.U	1:14:10.87	1:35:58.02

Tableau V.3 Temps C.P.U

#### IV - CONCLUSION

A travers les différents exemples traités, nous pouvons dire que les méthodes de panneaux développées pour l'analyse des écoulements subsoniques et supersoniques autour des ailes, corps et combinaisons aile-fuselage peuvent fournir des solutions adéquates à condition que les suppositions implicites faites dans la formulation du modèle de l'écoulement potentiel linéarisé soient respectées et que la prédiction des caractéristiques aérodynamiques pour des configurations géométriquement plus complexes peut être acceptable, bien que des distributions de pression exactes et détaillées ne soient pas toujours prédites d'une manière satisfaisante. Comme nous l'avons mentionné auparavant, cette méthode est incapable de prédire correctement les distributions de pression au voisinage des bords d'attaque en écoulement supersonique s'ils sont arrondis, cette remarque a été justement notée par D.S. Woodward [Réf. 58] qui a montré que de sérieux problèmes, dus au modèle de l'écoulement linéarisé, sont rencontrés dans le calcul ou l'analyse des écoulements autour des ailes présentant des bords d'attaque supersoniques et arrondis. Pour de telles ailes, il a été montré, en effet, que la courbe représentant les distributions de pression prédites présente un pic (suction peak) au voisinage du bord d'attaque et une chute subite de la pression sur la moitié arrière de la corde, et que ces deux résultats n'ont été observés ni dans les résultats expérimentaux ni dans les distributions de pression calculées par le code Et 42 (modèle d'Euler) [Réf. 59]. Il a été conclu alors que de telles méthodes sont incapables de représenter ce type d'écoulement et qu'une bonne corrélation a été obtenue entre les résultats expérimentaux et ceux donnés par le code d'Euler [Réf. 60]. Un autre cas signalant les difficultés de ces méthodes est représenté par un corps formé d'un ensemble "cône-cylindre-cône" en régime d'écoulement supersonique et a été étudié par D.S. Woodward et Réfs 58 et 61. Au contraire, il a été noté que l'analyse des écoulements supersoniques autour des ailes minces ayant des bords d'attaque aigus a mené à des résultats satisfaisants. Cependant, l'utilisation des solveurs avancés tel que le code d'Euler (code Et 42 de Réf. 59) pour l'étude des configurations géométriquement plus complexes tels que les avions militaires s'est avérée très difficile et il a été montré que seules les méthodes de panneaux sont capables d'analyser les écoulements autour de pareilles géométries.

D'autre part, bien que certains effets qui sont ignorés soient très importants juste au contact immédiat de la surface d'un corps considéré, où les résultats sont d'un intérêt majeur, cette méthode donne des résultats satisfaisants et en général acceptables.

## CHAPITRE VI

### CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Une méthode consistante et d'une grande souplesse basée sur des distributions de singularités sources/vortex a été présentée. Cette méthode offre une approche intéressante à la solution des problèmes de l'écoulement potentiel incompressible; elle consiste en :

- des formulations analytiques seules permettant d'avoir la matrice à coefficients d'influence aérodynamique pouvant être utilisée pour une étude aéroélastique statique.
- ou des formulations analytiques et une résolution de Jacobi par blocs (matrices assemblées et stockées) pour déterminer les caractéristiques aérodynamiques de la configuration à analyser.

Une diversité d'exemples étudiés a en effet démontré un accord qualitatif et acceptable entre la théorie et l'expérience sur une plage de nombres de Mach subsoniques et supersoniques, quoiqu'un certain écart entre les deux résultats ait été observé à proximité des bords d'attaque arrondis dans l'analyse des ailes tridimensionnelles en régime supersonique.

Les résultats obtenus indiquent que cette méthode possède des caractéristiques nécessaires pour être largement répandue et utilisée à une majorité de problèmes d'intérêt pratique. Ces caractéristiques sont les suivantes :

1. Généralité : Cette caractéristique fournit une capacité extrêmement puissante pour une variété extensive d'applications. La méthode est capable de résoudre une diversité de problèmes aérodynamiques de configurations tridimensionnelles géométriquement complexes comprenant des ailes, corps de section circulaire ou non circulaire et des combinaisons aile-fuselage.
2. Flexibilité : Deux méthodes optionnelles sont disponibles pour déterminer les distributions de pression sur les surfaces portantes. Dans la première option, les singularités aérodynamiques sont situées sur le plan moyen de la surface et

des conditions aux limites planes "approximatives" s'appliquent pour évaluer les intensités des distributions de singularités. Pour des résultats plus exactes, des conditions aux limites non planes peuvent être appliquées sur les surfaces réelles de la configuration. Une option efficace "source seule" peut être employée sur les portions non portantes de la configuration alors que les composantes portantes sont modélisées soit par des distributions de "vortex seuls" ou des combinaisons source/vortex.

- 3- Stabilité et exactitude : Pour des problèmes aux limites bien posés, il a été démontré que la présente méthode est numériquement stable et une convergence à des résultats d'une exactitude acceptable est atteinte.

Cette présente étude pourrait être étendue en perspectives, et pourrait être appliquée à la résolution des problèmes aéroélastiques statiques tel que le phénomène de la divergence en torsion des ailes à des vitesses subsoniques et supersoniques. Dans cette optique, une relation linéaire est établie [Réfs. 62 et 63] entre les forces aérodynamiques agissant sur les panneaux de l'aile et les déformations structurales correspondantes, et est traduite par :

$$([I] - q [C] [A]) (\Psi) = 0$$

- où  $[C] = [K]^{-1}$  représente la matrice de souplesse,  
 $[I]$  est une matrice identité.  
 $[A]$  est la matrice aérodynamique.  
 $(\Psi)$  vecteur représentant les angles de torsion,  
 $q$  est la pression dynamique.

La résolution de ce système permet d'évaluer la pression dynamique de divergence,  $q_D$ , qui sera utilisé pour connaître la vitesse de divergence en torsion  $v_D = (2 q_D / \rho)^{1/2}$ .

A un autre point de vue, en plus de la détermination des distributions de pression agissant sur des combinaisons arbitraires aile fuselage, la méthode pourrait être étendue et appliquée à la résolution des problèmes de conception des ailes. Elle pourrait être utilisée pour déterminer les distributions de l'épaisseur et la cambrure de l'aile pour une distribution de pression ( $q$  ou de la charge) spécifiée à la présence du fuselage, d'une part, ou pour minimiser la traînée et les effets d'interférence [Réf. 21] d'autre part.

Une autre aire d'investigation future consiste à étudier l'accélération de la convergence du schéma itératif. Les solutions tridimensionnelles étant, par leur nature, très coûteuses en temps de calcul, il est cependant intéressant de réduire le nombre d'itérations. Un programme itératif [Réf. 40] comprenant quatre schémas d'itération par blocs :

- Méthode de Jacobi.
- Méthode de Gauss-Seidel.
- Méthode de sur-relaxation.



- Méthode de sur-relaxation contrôlée.

a été suggéré pour résoudre ce type de problème et il a été montré [Réf. 40] que la dernière méthode mène plus rapidement à la convergence.

De plus, l'addition d'une correction de la compressibilité basée sur le nombre de Mach local, développée et présentée dans la référence 28, pourrait mener à des distributions de pression plus améliorées. Dans cette méthode approximative [Réf. 25], le nombre de Mach local est calculé en utilisant la distribution de pression obtenue d'une solution préliminaire des équations de l'écoulement potentiel.

## ANNEXE A

### INFLUENCE COMPLETE DU PANNEAU

#### A1- INFLUENCE DU PANNEAU COMPLET

Soit à calculer, par exemple, la composante  $v$  de la vitesse donnée par Eq. II.16b.

$$v = \frac{1}{4\pi} \left[ \int_0^c \frac{d\xi}{d_2} - \int_0^c \frac{d\xi}{d_1} \right] = \frac{1}{4\pi} [b_3 - b_2] \quad (\text{Eq. A1})$$

où :

$$d_1 = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - m_1 \xi)^2 + z^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - b - m_2 \xi)^2 + z^2}$$

$$m_1 = \text{tg } \alpha_1$$

$$m_2 = \text{tg } \alpha_2$$

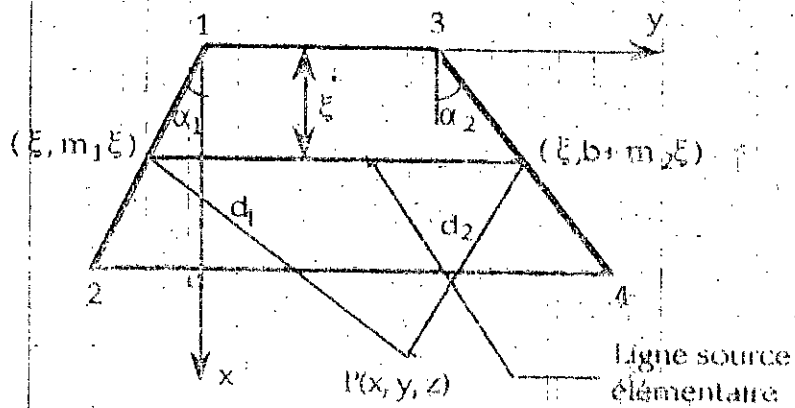


Fig. A.1

En comparant  $d_1$  et  $d_2$  des équations A.1, nous remarquons que  $I_{34}$  pourra être déduite à partir de  $I_{12}$  par une simple translation de coordonnées en remplaçant  $(x, y, z)$  par  $(x, y - b, z)$  et  $m_1$  par  $m_2$  conformément à Fig. A.1, ceci ne représente en fait que le passage du sommet 1 au sommet 3 en prenant :

$$\begin{aligned} x_3 &= x \\ y_3 &= y - b \\ z_3 &= z \end{aligned} \quad (\text{Éqs. A.2})$$

où  $(x, y, z)$  sont les coordonnées du point P lorsque le repère a son origine en O et  $(x_3, y_3, z_3)$  sont les coordonnées du même point lorsque le repère admettra pour origine le sommet 3.

En mettant  $(1 + m_1^2)^{1/2}$  en facteur et après développement,  $d_1$  prendra la forme suivante :

$$d_1 = \sqrt{1 + m_1^2} \left[ \left( \xi - \frac{ym_1 + x}{1 + m_1^2} \right)^2 + \frac{(y - m_1x)^2 + (1 + m_1^2)z^2}{(1 + m_1^2)^2} \right]^{1/2}$$

et l'intégrale  $I_{12}$  devient :

$$I_{12} = \frac{1}{(1 + m_1^2)^{1/2}} \int_0^c \frac{d\xi}{\sqrt{\left( \xi - \frac{ym_1 + x}{1 + m_1^2} \right)^2 + \frac{(y - m_1x)^2 + (1 + m_1^2)z^2}{(1 + m_1^2)^2}}}$$

Sachant que :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A^2}} = \sinh^{-1} \frac{x}{|A|} + Ct$$

nous obtenons

$$\frac{1}{4\pi} I_{12} = \frac{1}{4\pi\sqrt{1 + m_1^2}} \left[ \sinh^{-1} \frac{(1 + m_1^2)\xi - (ym_1 + x)}{\sqrt{(y - m_1x)^2 + (1 + m_1^2)z^2}} \right]_0^c = f_1(\xi = c) - f_1(\xi = 0)$$

$$\frac{1}{4\pi} I_{34} = \frac{1}{4\pi\sqrt{1 + m_2^2}} \left[ \sinh^{-1} \frac{(1 + m_2^2)\xi - ((y - b)m_2 + x)}{\sqrt{(y - b - m_2x)^2 + (1 + m_2^2)z^2}} \right]_0^c = f_2(\xi = c) - f_2(\xi = 0) \quad (\text{Éqs. A.3})$$

D'un autre côté, nous avons :

$$\frac{1}{4\pi} I_{12} = f_1(\xi=c) - f_1(\xi=0) = v_2 - v_1$$

$$\frac{1}{4\pi} I_{34} = f_2(\xi=c) - f_2(\xi=0) = v_4 - v_3$$

Ainsi,  $v$  sera donnée par :

$$v = \frac{1}{4\pi} [I_{34} - I_{12}] = v_1 - v_2 - v_3 + v_4 \quad (\text{Eq. A4})$$

Nous pouvons dire, à partir de l'équation A4, que la composante  $v$  de la vitesse induite en  $P(x, y, z)$  par un panneau source fini peut être obtenue par superposition des influences des quatre coins du panneau considéré.

Où :

$$v_1 = - \frac{1}{4\pi\sqrt{1+m_1^2}} \sinh^{-1} \frac{ym_1+x}{\sqrt{(y-m_1x)^2 + (1+m_1^2)z^2}}$$

$$v_3 = - \frac{1}{4\pi\sqrt{1+m_2^2}} \sinh^{-1} \frac{ym_2+x}{\sqrt{(y-b-m_2x)^2 + (1+m_2^2)z^2}} \quad (\text{Eqs. A5})$$

## A2 COMPOSANTES DES VITESSES AUX SOMMETS 2, 3 ET 4

Comme nous l'avons constaté auparavant, nous remarquons de nouveau, d'après les équations A5, que  $v_3$  pourra être déduite de  $v_1$  en remplaçant  $y$  par  $(y-b)$  et  $m_1$  par  $m_2$ ; autrement dit :

$$v_3(x, y, z) = v_1(x_3, y_3, z_3)$$

Essayons maintenant de vérifier si les composantes  $v_2$  et  $v_4$  peuvent aussi être déduites de  $v_1$  par une simple translation. Pour cela, nous allons montrer si :

$$v_2(x, y, z) = v_1(x_2, y_2, z_2)$$

et

$$v_4(x, y, z) = v_1(x_4, y_4, z_4)$$

Les composantes  $v_2$  et  $v_4$  sont données par :

$$v_2 = - \frac{1}{4\pi\sqrt{1+m_1^2}} \sinh^{-1} \frac{(1+m_1^2)c - (ym_1+x)}{\sqrt{(y-m_1x)^2 + (1+m_1^2)z^2}}$$

$$v_4 = - \frac{1}{4\pi\sqrt{1+m_2^2}} \sinh^{-1} \frac{(1+m_2^2)c - |(y-b)m_2+x|}{\sqrt{(y-b-m_2x)^2 + (1+m_2^2)z^2}}$$

D'un autre côté :

$$(1 + m_1^2)c - (y m_1 - x) = c - m_1^2 c - y m_1 - x = -(x - c) - (y - m_1 c) m_1$$

$$= -(x_2 + m_1 y_2)$$

et

$$(y - m_1 x) = y - m_1 c - m_1 x = (y - m_1 c) - (x - c) m_1 = y_2 - m_1 x_2$$

Nous pouvons dire maintenant que :

$$v_2(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{1 + m_1^2}} \sinh^{-1} \frac{x_2 + m_1 y_2}{\sqrt{(y_2 - m_1 x_2)^2 + (1 + m_1^2) z_2^2}} = v_1(x_2, y_2, z_2)$$

Le passage du sommet 1 au sommet 2 se fait suivant une translation de coordonnées, c'est à dire :

$$x_2 = x - c$$

$$y_2 = y - m_1 c \quad (\text{Eqs. A.6})$$

$$z_2 = z$$

De cette manière, nous pouvons affirmer que :  $v_2(x, y, z) = v_1(x_2, y_2, z_2)$

D'un autre côté, les coordonnées du sommet 4 peuvent être obtenues à partir de celles du sommet 1 et sont données par :

$$x_4 = x - c$$

$$y_4 = y - b - m_2 c \quad (\text{Eqs. A.7})$$

$$z_4 = z$$

Similairement à ce qui précède, il en résulte :

$$v_4(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{1 + m_2^2}} \sinh^{-1} \frac{x_4 + m_2 y_4}{\sqrt{(y_4 - m_2 x_4)^2 + (1 + m_2^2) z_4^2}} = v_1(x_4, y_4, z_4)$$

A présent, nous sommes en mesure de confirmer que :

$$v_2(x, y, z) = v_1(x_2, y_2, z_2)$$

$$v_3(x, y, z) = v_1(x_3, y_3, z_3) \quad (\text{Eqs. A.8})$$

$$v_4(x, y, z) = v_1(x_4, y_4, z_4)$$

Comme nous venons de le voir, il fallait juste évaluer  $v_1 = \eta(f_1 - f_2)$  et en déduire  $v_2$ ,  $v_3$  et  $v_4$  en déplaçant l'origine du repère à chaque sommet correspondant, c'est à dire rapporter les coordonnées du point P à l'origine déplacée.

Une autre manière de prouver ce résultat (Eq. A.4), voir Réf. 27, consiste à déterminer les fonctions potentielles des distributions singulières, solutions de l'équation de Prandtl-Glauert, c'est à dire :

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{Eq. A.9})$$

et à évaluer ensuite les composantes des vitesses correspondantes.

Selon cette même référence, les solutions de l'équation A.9, pour les singularités planes, s'écrivent :

$$\Phi = \frac{k}{\pi} \iint \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + \beta^2[(y - \eta)^2 + z^2]}} + \frac{1 - k}{\pi} \iint \frac{z^2 - 1}{(y - \eta)^2 + z^2} \quad (\text{Eq. A.10})$$

où  $\beta^2 = 1 - M^2$

$$k = \begin{cases} 1 & M > 1 \\ 1/2 & M < 1 \end{cases} \quad (\text{Eq. A.11})$$

- 1 pour des distributions de sources constante

$f(\xi, \eta) = \lambda\eta - \xi$  pour des distributions de sources à variation linéaire.

$\frac{z(x - \xi)}{(y - \eta)^2 + z^2}$  pour des distributions de vortex constant.

Le second terme de l'équation A.10 n'existe que pour des distributions de singularité vortex [Réf. 27].

Ainsi, les fonctions potentielles correspondant à des distributions de singularité peuvent être obtenues en évaluant ces intégrales sur des limites de distribution appropriées et les composantes de la vitesse de perturbation seront données par les dérivées partielles de la fonction potentielle.

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (\text{Eqs. A.12})$$

Pour une distribution de source constante,  $\Phi$  sera :

$$\Phi = -\frac{K}{\pi} \iint \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2[(y-\eta)^2 + z^2]}} \quad (\text{Eq. A.13})$$

Les limites d'intégration sont définies par les frontières du panneau comme illustré sur Fig. A.2 :

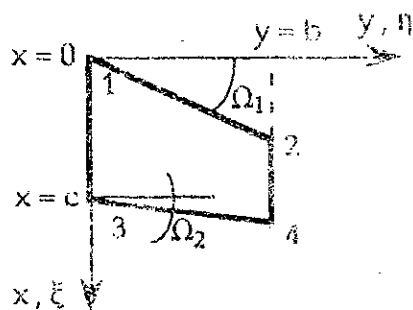


Fig. A.2 Géométrie d'un panneau source constant

Si l'équation du bord d'attaque est  $\xi = \lambda_1 \eta$  où  $\lambda_1 = b/\Omega_1$  et l'équation du bord de fuite est  $\xi = c + \lambda_2 \eta$ , il a été montré [Réf. 20] que l'intégration peut être considérée comme la somme de quatre intégrales évaluées sur des régions triangulaires semi-infinies ayant leurs origines à chacun des quatre sommets du panneau. Ceci dit, le potentiel au point  $P(x, y, z)$  est donné par :

$$\Phi(p) = \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 + \Phi_4$$

où

$$\Phi_k = \Phi(x_p - x_k, y_p - y_k, z_p) \quad k = 1, \dots, 4 \quad (\text{Eqs. A.14})$$

$$\text{et} \quad \begin{array}{cccc} x_1 = 0 & x_2 = \lambda_1 b & x_3 = c & x_4 = c + \lambda_2 b \\ y_1 = 0 & y_2 = b & y_3 = 0 & y_4 = c \end{array}$$

les limites de l'intégrale élémentaire  $\Phi_k$  peuvent maintenant être définies par :

$$\Phi_k = \frac{k}{\pi} \int_0^{\eta_1} d\eta \int_{\lambda_0}^{\xi_1} \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2[(y-\eta)^2 + z^2]}} \quad (\text{Eq. A.15})$$

$$\text{où} \quad x = x_p - x_k \quad ; \quad y = y_p - y_k \quad ; \quad z = z_p$$

et  $\xi$   $\eta$  sont évaluées au sommet  $k$

- Pour un écoulement subsonique,  $\xi_1 = -\infty$  et  $\eta_1 = -\infty$ , c'est à dire :

$$\Phi_k = \frac{k}{\pi} \int_0^{\infty} d\eta \int_{\lambda\eta}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2[(y-\eta)^2 + z^2]}} \quad (\text{Eq. A.16})$$

- Pour un écoulement supersonique :

$$\xi_1 = x - \beta \sqrt{(y-\eta)^2 + z^2} \quad (\text{Eqs. A.17})$$

$$\eta_1 = \frac{\lambda x + \beta y - \beta \sqrt{(x-\lambda y)^2 + (\lambda^2 + \beta^2)z^2}}{\lambda^2 + \beta^2}$$

L'évaluation de l'intégrale a donné le résultat suivant qui est valable pour tous les nombres de Mach :

$$\Phi_k = \frac{k}{\pi} [y C_2 + (x - \lambda y) C_1 + z F_1] \quad (\text{Eq. A.18})$$

$$\text{où : } G_1 = \text{Re} \left[ \frac{1}{e} \text{Log} \frac{x' + d'}{|\beta| r'} \right]$$

$$G_2 = \text{Re} \left[ \text{Log} \frac{x + d}{|\beta| r} \right] \quad (\text{Eqs. 19})$$

$$F_1 = \text{Re} \left[ \tan^{-1} \frac{z d}{\lambda r - xy} \right]$$

$$\text{et } r = \sqrt{y^2 + z^2} \quad ; \quad d = \sqrt{x^2 + \beta^2 r^2}$$

$$x' = \lambda x + \beta^2 y \quad ; \quad r' = \sqrt{(x - \lambda y)^2 + e^2 z^2} \quad ; \quad d' = \sqrt{x'^2 + \beta^2 r'^2}$$

Il est à noter aussi que :

$$\Phi_k = x u_k + y v_k + z w_k \quad (\text{Eq. A.20})$$

et ainsi, les composantes de la vitesse induite en  $P$  par un panneau fini peuvent aussi être obtenues par superposition :

$$u(P) = u_1 - u_2 - u_3 + u_4$$

$$v(P) = v_1 - v_2 - v_3 + v_4 \quad (\text{Eqs. A.21})$$

$$w(P) = w_1 - w_2 - w_3 + w_4$$

où les fonctions de coordonnées sont définies suivant les équations A.20.



## ANNEXE B

### EXPRESSIONS DES FONCTIONS D'INFLUENCE

Les fonctions d'influence ou fonctions de vitesse  $\Gamma$ ,  $G$  et  $H$  introduites dans Chap. III, § II.1 ne sont réelles qu'en écoulement subsonique. Pour un tel régime, elles sont définies par :

$$F = \tan^{-1} \frac{(z-ax)d}{-x(y-mx) - \beta^2 z(ay-mz)} \quad (\text{Eq. B.1})$$

$$H = \beta \sinh^{-1} \frac{\beta y}{\sqrt{x^2 + \beta^2 z^2}} \quad (\text{Eq. B.2})$$

$$G = \frac{1}{e} \sinh^{-1} \frac{x'}{\beta r'} \quad (\text{Eq. B.3})$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad e^2 &= 1 + \beta^2(a^2 + m^2) \\ x' &= x + \beta^2(my + az) \\ r' &= \sqrt{(y-mx)^2 + (z-ax)^2 + \beta^2(ay-mz)^2} \\ \beta^2 &= 1 - M^2 > 0 \end{aligned} \quad (\text{Eqs. B.4})$$

En utilisant la formule suivante :  $\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

la fonction  $G$  pourra être transformée en une fonction logarithmique :

$$G = \frac{1}{e} \log \left( \frac{x' + d'}{\beta r'} \right) \quad (\text{Eq. B.5})$$

$$\text{où :} \quad d' = e d$$

$$d^2 = x^2 + \beta^2 (y^2 + z^2)$$

Contrairement, pour un régime d'écoulement supersonique, ces fonctions deviennent complexes, ce qui est physiquement impossible. Par ailleurs, puisqu'à l'intérieur de la région d'influence, les solutions sont réelles, nous devons donc

extraire leurs parties réelles. Ces fonctions d'influence, en particulier la fonction  $G$ , présentent différentes expressions selon que le bord d'attaque est subsonique, sonique ou supersonique (Annexe C). En plus, les paramètres  $\beta$  et  $e$  deviennent :

$$\beta^2 = 1 - M^2 < 0$$

$$\beta^2 = 1 - M^2 = -(M^2 - 1) = -\beta'^2 \quad \text{où } \beta'^2 > 0$$

$$\beta = i \beta'$$

$$e^2 = 1 + \beta^2 (a^2 + m^2) = 1 - \beta'^2 (a^2 + m^2)$$

### EXPRESSIONS DE $G$ EN FONCTION DE $e^2$

a- Bord subsonique : ( $e^2 > 0$ )

$$G = \frac{1}{e} \sinh^{-1} \frac{x'}{i\beta' r'} = \frac{1}{e} \log \frac{(x' + d')}{i\beta' r'}$$

sachant que :  $\log z = \log |z| + i \operatorname{Arg}(z) = \log |z| + i(2k\pi + \phi)$

nous obtenons :

$$G = \frac{1}{e} \log \frac{x' + d'}{\beta' r'} \quad ; \quad e^2 > 0 \quad \text{(Eq. B.6)}$$

b- Bord sonique : ( $e^2 = 0$ )

Lorsque  $e^2$  s'approche de zéro, la fonction  $G$  présentera une singularité.

Nous allons réécrire l'expression de  $G$ , en effectuant les changements de variables suivants :

$$e = [1 + \beta^2 (a^2 + m^2)]^{1/2}$$

$$x' = x + (my + az) \beta^2$$

$$\beta^2 r'^2 = \beta^2 [(y - mx)^2 + (z - ax)^2 + \beta^2 (ay - mz)^2]$$

En développant l'expression ci-dessus et en faisant apparaître le terme  $e$  nous obtenons :

$$\beta^2 r'^2 = \beta^2 [e^2 (y^2 + z^2) - \beta^2 (my - az)^2 + (a^2 + m^2) x^2 - 2x (my + az)]$$

En faisant apparaître les termes  $e$ ,  $x'$  ainsi que le terme  $d'$  nous obtenons :

$$\beta^2 r'^2 = e^2 [x^2 + \beta^2 (y^2 + z^2)] - x'^2$$

$$\text{soit } \beta^2 r'^2 = e^2 d^2 - x'^2 = d'^2 - x'^2$$

$$\text{d'où : } \beta r' = \sqrt{e^2 d^2 - x'^2}$$

Moyennant le changement de variables précédent, nous sommes en mesure d'affirmer que :

$$G = \frac{1}{e} \operatorname{Argsh} \frac{x'}{\sqrt{e^2 d^2 - x'^2}}$$

$$\text{En supposant que : } f(e) = \frac{x'}{\sqrt{e^2 d^2 - x'^2}}$$

$$\text{Si nous posons } \alpha = (d/x')^2, \text{ nous obtenons : } f(e) = \frac{1}{\sqrt{\alpha e^2 - 1}}$$

$$\text{nous avons alors : } G = \frac{\operatorname{Argsh} f(e)}{e}$$

où  $e$  tend vers zéro. Cela revient à calculer la dérivée de  $G$  au voisinage de zéro lorsque  $e$  s'approche de cette valeur, sachant que :  $G = \operatorname{Argsh} f(e)$

Par définition de la dérivée :

$$G = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Argsh} f(e) - \operatorname{Argsh} f(0)}{e} = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Argsh} f(e)}{e}$$

$$\text{avec } \operatorname{Argsh} f(e_0 = 0) = 0$$

$$G = (\operatorname{Argsh} f(e))'_{/0} = \frac{1}{\sqrt{1+[f(e)]^2}} f'(e)_{/e=0}$$

$$1 + [f(e)]^2 = 1 + \frac{1}{\alpha e^2 - 1} = \frac{\alpha e^2}{\alpha e^2 - 1} = \alpha e^2 [f(e)]^2$$

$$\sqrt{1+[f(e)]^2} = \sqrt{\alpha} e f(e)$$

$$\text{Par conséquent : } \frac{1}{\sqrt{1+[f(e)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha} e f(e)}$$

Par ailleurs :

$$f(e) = \frac{1}{\sqrt{\alpha e^2 - 1}}$$

$$f'(e) = \frac{(\sqrt{\alpha e^2 - 1})'}{\alpha e^2 - 1} = -\alpha e f^3(e)$$

D'où :

$$\frac{1}{\sqrt{1+[f(e)]^2}} f'(e) = \frac{1}{\sqrt{\alpha} e f(e)} (-\alpha e f^3(e)) = -\sqrt{\alpha} [f(e)]^2 = -\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha e^2 - 1}$$

Lorsque  $e$  tend vers zéro,  $G = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{\alpha}}{\alpha e^2 - 1} = \sqrt{\alpha} = \frac{d}{x'}$

$$G = \frac{d}{x'} \quad ; \quad e^2 = 0 \quad (\text{Eq. B.7})$$

c- Bord supersonique : ( $e^2 < 0$ )

$$\beta = i \beta'$$

$$e^2 = 1 + \beta^2 (a^2 + m^2) = -[-1 - \beta^2 (a^2 + m^2)] = -e'^2 < 0 \quad , \quad a'^2 > 0$$

$$G = \frac{1}{e} \sinh^{-1} \frac{\lambda x + \beta^2 y}{\beta \sqrt{(x - \lambda y)^2 + z^2 (\lambda^2 + \beta^2)}} = \frac{1}{e} \sinh^{-1} \frac{x'}{\beta r'}$$

$$Ge = \sinh^{-1} \frac{x'}{\beta r'}$$

$$\sinh(Ge) = \frac{x'}{\beta r'} = \frac{x'}{i \beta' r'} \quad (\text{Eqs. B.8})$$

sachant que :

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{et} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(Ge) = \frac{e^{Ge} - e^{-Ge}}{2} = \frac{e^{ie'G} - e^{-ie'G}}{2} \quad (\text{Eqs. B.9})$$

$$\sinh(Ge) = i \sin(Ge')$$

En égalisant Eq. B.8 et Eq. B.9, nous aurons :

$$i \sin(Ge') = \frac{x'}{i \beta' r'}$$

$$\sin(Ge') = -\frac{x'}{\beta' r'}$$

En passant à la transformation inverse, nous obtenons :  $G = \frac{1}{e} \sin^{-1} \left( \frac{x'}{\beta r'} \right)$

Comme la fonction  $\sin^{-1} x$  est impaire,  $G$  devient :  $G = -\frac{1}{e} \sin^{-1} \frac{x'}{\beta r'}$

Encore faut-il utiliser la relation suivante :  $\sin^{-1} x = -\cos^{-1} x$

Finalement,  $G$  prendra l'expression ci-dessous :

$$G = \frac{1}{e} \cos^{-1} \frac{x'}{\beta r'} \quad \text{où} \quad -1 < \frac{x'}{\beta r'} < 1 \quad (\text{Eq. B.10})$$

Dans le cas où  $(x'/\beta r') \leq -1$ , quelle serait l'expression de  $G$  ?

Sachant que :

$$\cos^{-1} x = \begin{cases} \pi - i \cosh^{-1} x & x \leq -1 \\ \cos^{-1} x & -1 \leq x \leq 1 \\ i \cosh^{-1} x & x \geq 1 \end{cases}$$

Lorsque  $(x'/\beta'r') < -1$ , la fonction  $G$  prendra la forme suivante :

$$G = \frac{\pi}{e'} \quad ; \quad x' < -\beta'r' \quad (\text{Eq. B.11})$$

### EXPRESSION DE H EN SUPERSONIQUE

Lorsque l'écoulement est supersonique, la fonction  $H$  exprimée comme :

$$H = \beta \sinh^{-1} \frac{\beta y}{\sqrt{x^2 + \beta^2 z^2}}$$

avec  $\beta = i\beta'$ , elle devient :

$$\frac{H}{\beta} = \sinh^{-1} \frac{\beta y}{\gamma} \quad \text{où} \quad \gamma = \sqrt{x^2 + \beta^2 z^2} = \sqrt{x^2 - \beta'^2 z^2}$$

$$\sinh \frac{H}{\beta} = \frac{e^{H/\beta} - e^{-H/\beta}}{2} = \frac{e^{H/i\beta'} - e^{-H/i\beta'}}{2} = \frac{e^{iH/\beta'} - e^{-iH/\beta'}}{2}$$

$$\sinh \frac{H}{\beta} = -i \sin \frac{H}{\beta'} = i\beta' \frac{y}{\gamma}$$

$$\text{ainsi :} \quad \sin \frac{H}{\beta'} = -\beta' \frac{y}{\gamma}$$

En plus, si nous utilisons la formule suivante :

$$\sin^2 \frac{H}{\beta'} = \frac{\text{tg}^2 \frac{H}{\beta'}}{1 + \text{tg}^2 \frac{H}{\beta'}} \quad \text{ou} \quad \sin^2 \frac{H}{\beta'} \left[ 1 + \text{tg}^2 \frac{H}{\beta'} \right] = \text{tg}^2 \frac{H}{\beta'}$$

$$\text{ou encore :} \quad \frac{\beta'^2 y^2}{\gamma^2} \left[ 1 + \text{tg}^2 \frac{H}{\beta'} \right] = \text{tg}^2 \frac{H}{\beta'}$$

Après transformation, nous obtenons :

$$\text{tg}^2 \frac{H}{\beta'} = \frac{\beta'^2 y^2}{\gamma^2 - \beta'^2 y^2} = \frac{\beta'^2 y^2}{d^2}$$

où  $d^2 = x^2 + \beta^2(y^2 + z^2) = x^2 - \beta'^2(y^2 + z^2)$

La fonction H devient alors :

$$H = \beta' \operatorname{tg}^{-1} \frac{\beta' y}{d} \quad (\text{Eq. B.12})$$

ou

$$H = \beta' \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{d}{\beta' y} \right) = \beta' \frac{\pi}{2} - \beta' \operatorname{tg}^{-1} \frac{d}{\beta' y} \quad (\text{Eq. B.13})$$

### EXPRESSIONS DE F EN SUPERSONIQUE

La fonction F reste inchangée sauf pour le cas d'un bord supersonique et à l'intérieur de la région d'influence où elle vaut :

$$F = \begin{cases} \pi & z \geq ax \\ -\pi & z < ax \end{cases}$$

## ANNEXE C

### CONE DE MACH ET REGION D'INFLUENCE

Dans cette annexe, nous nous proposons de définir une région spéciale appelée zone ou région d'influence. Pour cela, considérons l'exemple le plus simple d'une source tridimensionnelle pour expliquer encore les différences qui existent entre les champs d'écoulements subsonique et supersonique.

Le potentiel de vitesse d'une source tridimensionnelle (Fig. C.1) est défini [Réf. 64] par :

$$\Phi_I^s = \frac{k}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \beta^2 r^2}} \quad \text{pour } M < 1 \quad (\text{Eq. C.1})$$

$$\Phi_{II}^s = \frac{k}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 - \beta'^2 r^2}} \quad \text{si } |x| > \beta' r \quad \text{pour } M > 1 \quad (\text{Eq. C.2})$$

où :

$$r^2 = y^2 + z^2$$

$$\beta' = (M^2 - 1)^{1/2}$$

$$\beta = (1 - M^2)^{1/2}$$

$$k = \begin{cases} 1 & M < 1 \\ 2 & M > 1 \end{cases}$$

Nous voyons clairement que le potentiel de vitesse est partout défini pour le régime d'écoulement subsonique. En revanche, lorsque le régime de l'écoulement devient supersonique, le potentiel n'existe que si  $|x| > \beta' r$ .

Nous verrons, par la suite, que l'ensemble des points satisfaisant cette inégalité ne représentent en fait que la région interne au cône de Mach aval.

## C1 - CONES DE MACH

Dans la théorie linéaire, les perturbations qui prennent naissance dans un écoulement supersonique se font sentir dans des cônes de Mach ayant pour sommet l'origine de la perturbation et pour axe la direction de la vitesse de l'écoulement libre (Fig. C.1).

La région interne à ces cônes est appelée région d'influence.

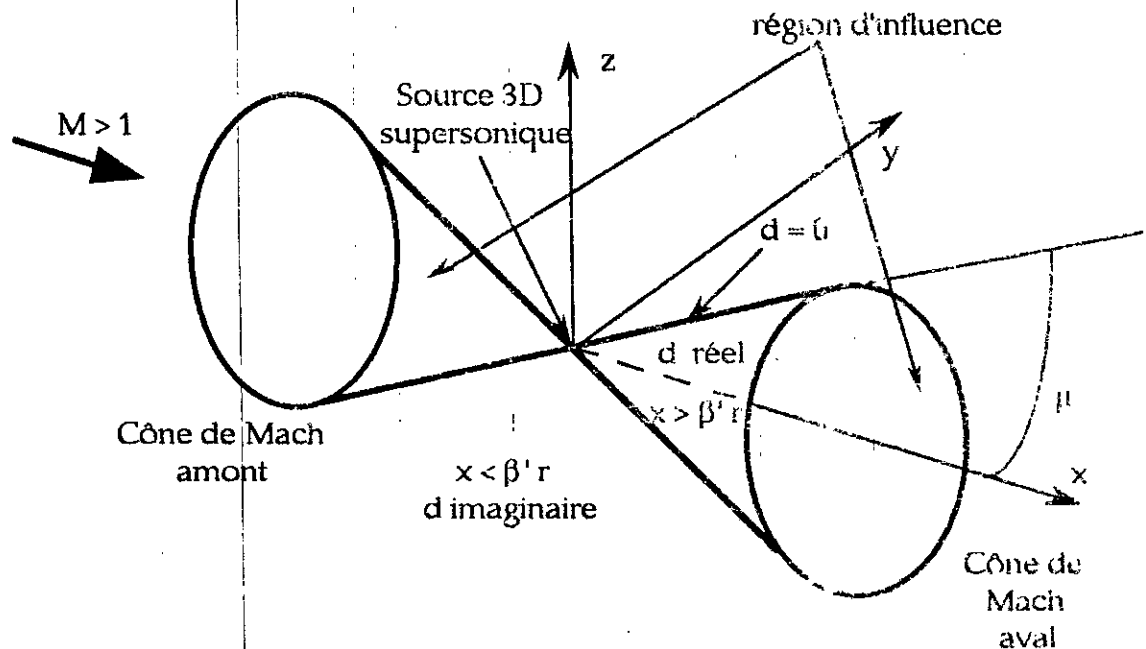


Fig. C.1 Cônes de Mach amont et aval issus d'un point singulier ou discret placé dans un champ d'écoulement supersonique.

L'enveloppe des perturbations est décrite quantitativement par l'angle de Mach ou demi-angle au sommet  $\mu$  donné par :

$$\mu = \sin^{-1} \frac{1}{M} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{\beta'} \quad (\text{Eq. C.3})$$

## C2 - REGION D'INFLUENCE

En général, les solutions supersoniques élémentaires (source, vortex ou doublets) sont particulièrement caractérisées par une grandeur  $d$  appelée rayon hyperbolique défini par :

$$d = \sqrt{x^2 - \beta'^2 r^2} \quad (\text{Eq. C.4})$$

qui est nul sur la surface des cônes, réel à l'intérieur et imaginaire à l'extérieur des cônes (Fig. C.1). Par conséquent, les solutions ne peuvent être alors réelles qu'à l'intérieur de ces deux cônes de Mach pour lesquels :  $|x| > \beta' r$  (Eq. C.2). D'autre part, l'influence d'une singularité supersonique ne peut physiquement



s'étendre en amont dans un écoulement supersonique. Pour ces raisons, les perturbations, vitesse ou potentiel de vitesse de perturbation, sont nulles partout à l'extérieur du cône de Mach aval, et les composantes de la vitesse de perturbations ne sont définies qu'à l'intérieur de ce cône seulement. Elles sont données par  $\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z$  ou respectivement par  $u, v$  et  $w$ . Puisque la solution à l'intérieur du cône de Mach amont a été éliminée, les solutions à l'intérieur du cône de Mach aval sont multipliées par 2 (Eq. C.2).

### C3 - COTE SUBSONIQUE, SONIQUE OU SUPERSONIQUE (ou bord d'attaque)

Considérons un panneau incliné d'un angle  $\delta$  par rapport au plan  $x$ - $y$  (Fig. C.2) dont le côté latéral peut être subsonique ou à l'intérieur du cône de Mach ( $OA'$ ), sonique ou sur le cône de Mach ( $OK$ ) ou bien supersonique ou à l'extérieur du cône de Mach ( $OA''$ ) :

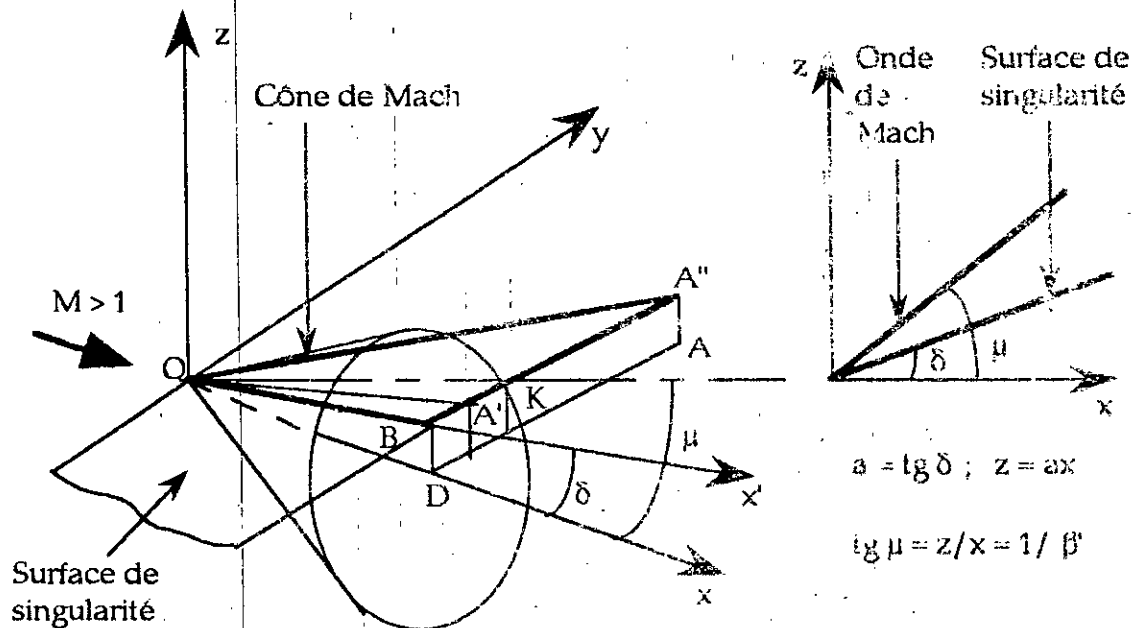


Fig. C.2

$$OD = x$$

$$m = \frac{AD}{OD} = \frac{y}{x} \quad ; \quad y = mx$$

$$a = \operatorname{tg} \delta = \frac{BD}{OD} = \frac{z}{x} \quad ; \quad z = ax$$

$$\frac{1}{\beta'} = \operatorname{tg} \mu = \frac{z}{x} \quad ; \quad x = \beta' z$$

$$DA'^2 = r^2 = y^2 + z^2 = (m^2 + a^2) x^2$$

$$DA''^2 = r^2 = y^2 + z^2 = (m^2 + a^2) x^2$$

$$DK = OD \operatorname{tg} \mu = \frac{OD}{\beta'} \quad ; \quad DK^2 = \frac{x^2}{\beta'^2}$$

(Eqs. C.5)

Lorsque le côté  $OA'$  est à l'intérieur du cône de Mach, il est dit subsonique et nous avons la relation suivante :

$$DA'^2 < DK^2 \quad \text{ou} \quad x^2(a^2 + m^2) < x^2 / \beta^2$$

$$\text{ou encore : } 1 - \beta^2(a^2 + m^2) > 0 \quad (\text{Eq. C.6})$$

D'autre part, s'il coïncide avec le cône de Mach, nous aurons:

$$DA'^2 = DK^2$$

$$\text{autrement dit : } x^2(a^2 + m^2) = x^2 / \beta^2$$

$$\text{ou } 1 - \beta^2(a^2 + m^2) = 0 \quad (\text{Eq. C.7})$$

Par ailleurs, si ce côté est en avant du cône de Mach, il est supersonique et la relation ci-dessus se traduit par :

$$DA'^2 > DK^2 \quad \text{ou} \quad x^2(a^2 + m^2) > x^2 / \beta^2$$

$$\text{nous obtenons : } 1 - \beta^2(a^2 + m^2) < 0 \quad (\text{Eq. C.8})$$

En posant  $\beta'^2 = -\beta^2 > 0$  où  $\beta^2 = 1 - M^2$ , nous obtenons ainsi l'expression de  $e^2$  donnée par :  $e^2 = 1 + \beta'^2(a^2 + m^2)$  qui peut être positive, nulle ou négative selon que le côté est respectivement subsonique, sonique, ou supersonique.

### Cas particulier

Évaluons, maintenant  $e^2$  dans le cas d'un panneau parallèle au plan  $x-y$  pour lequel  $a = 0$  ( $\text{tg}\delta = 0$  ou  $\delta = 0$ )

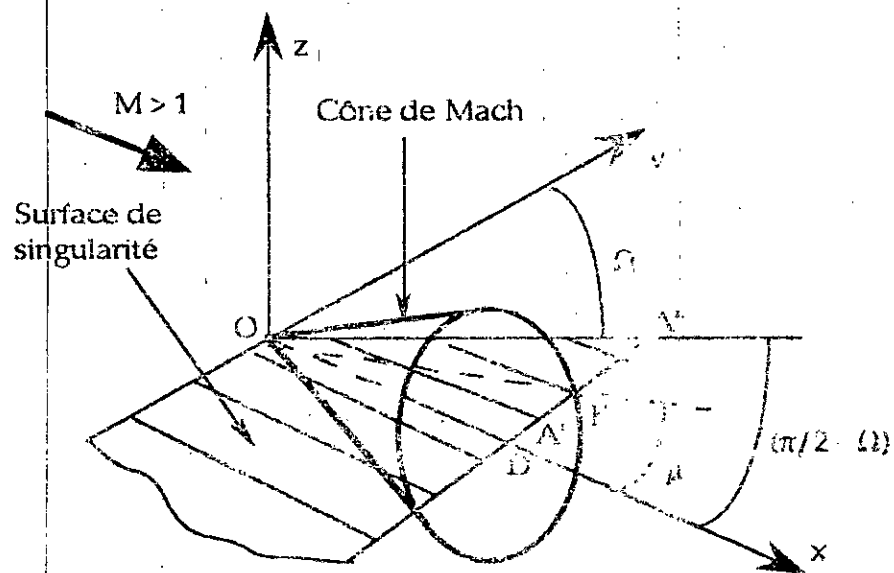


Fig. C.3

$$\lambda = \operatorname{tg} \Omega$$

$$DA'' = \frac{x}{\lambda}$$

$$DK = x \operatorname{tg} \mu = \frac{x}{\sqrt{M^2 - 1}} = \frac{x}{\beta'}$$

$$DK^2 = -\frac{x^2}{\beta'^2}$$

- un côté subsonique est défini par :

$$DA'^2 < DK^2 \quad \text{ou}$$

$$\text{autrement dit :} \quad e^2 = \lambda^2 + \beta'^2 > 0 \quad (\text{Eq. C.9})$$

- un côté sonique est traduit par :

$$DA'^2 = DK^2 \quad \text{ou} \quad e^2 = \lambda^2 + \beta'^2 = 0 \quad (\text{Eq. C.10})$$

- un côté supersonique est traduit par :

$$DA'^2 > DK^2 \quad \text{ou} \quad e^2 = \lambda^2 + \beta'^2 < 0 \quad (\text{Eq. C.11})$$

#### C.4 - REGION BIDIMENSIONNELLE

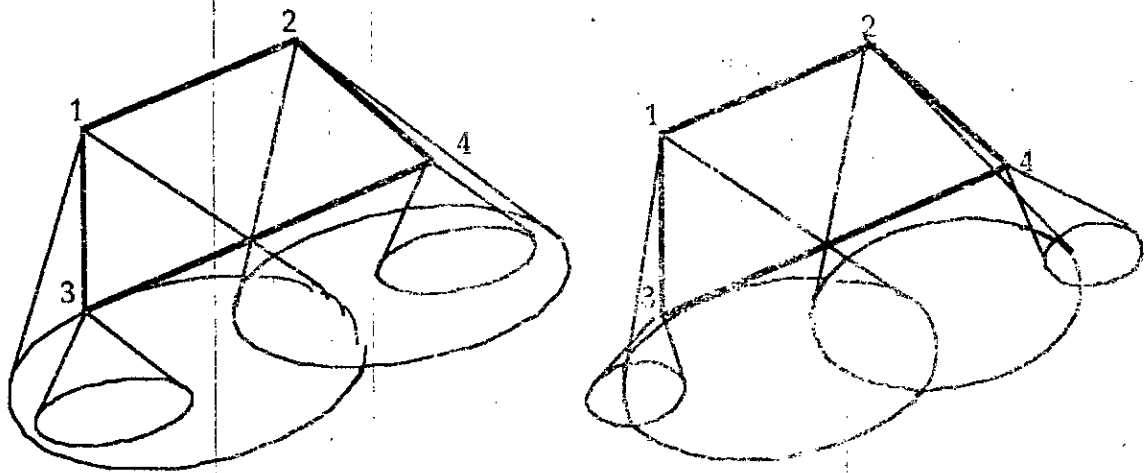
Considérons un panneau sans flèche, effilé dans la direction du courant (panneau de forme trapézoïdale) et contenant une distribution de singularités.

Dans un régime d'écoulement supersonique, des cônes de Mach prennent naissance à chaque sommet de ce panneau limitant ainsi les régions d'influence. A l'extérieur de ces cônes (zones de silence), aucune influence ou perturbation n'est ressentie excepté, pour les panneaux qui présentent des côtés supersoniques où des régions spéciales dites "bidimensionnelles" existent.

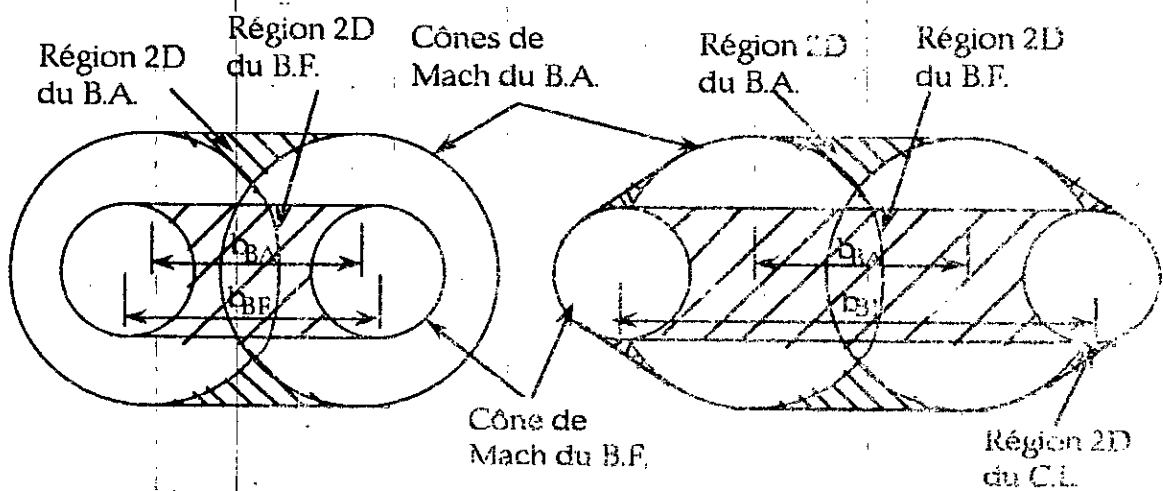
Pour les panneaux du fuseiage (panneaux trapézoïdaux, Fig. II.1 et Fig. II.8), les bords d'attaque et de fuite présentent une flèche nulle. Et par conséquent, ils sont toujours supersoniques. En plus, des régions "bidimensionnelles" existent entre les cônes de Mach originant de chaque extrémité des bords d'attaque et de fuite, où la région du bord de fuite est contenue à l'intérieur de la région du bord d'attaque (Fig. C.4a).

Par ailleurs, si en plus les côtés latéraux du panneau sont supersoniques (cas très rare pour les panneaux du fuselage), des régions "bidimensionnelles" additionnelles pourraient exister entre les cônes de Mach prenant naissance aux extrémités amont et aval des côtés latéraux du panneau (Fig. C.4c).

Les schémas suivants illustrent ces différentes régions premièrement pour un panneau ayant des côtés latéraux subsoniques et deuxièmement pour un panneau dont les côtés latéraux sont supersoniques. Les schémas b et c représentent une section perpendiculaire à l'écoulement située en aval du bord de fuite.



-a- Représentation tridimensionnelle des cônes de Mach



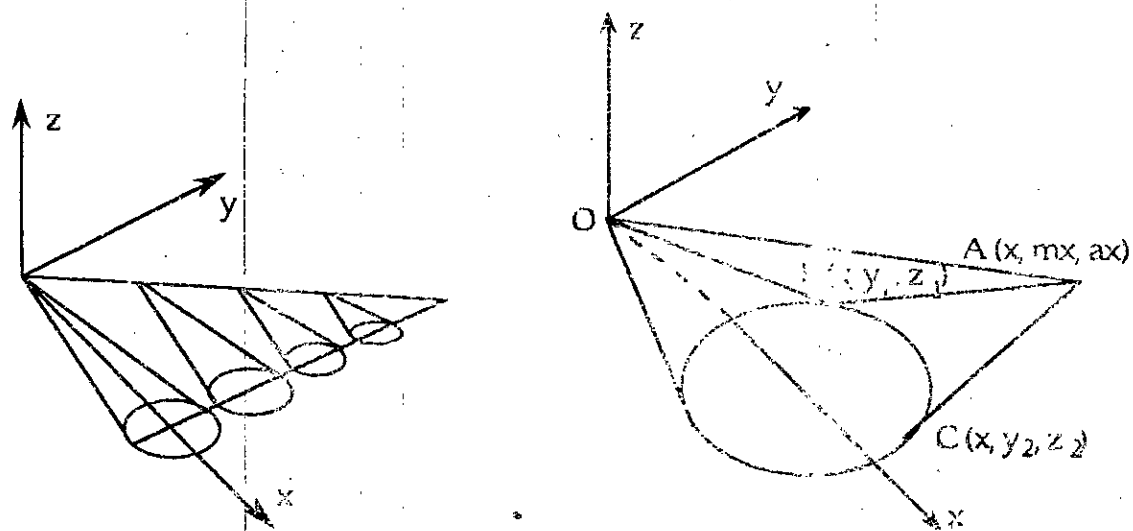
-b- Côtés latéraux subsoniques

-c- Côtés latéraux supersoniques

Fig. C.4

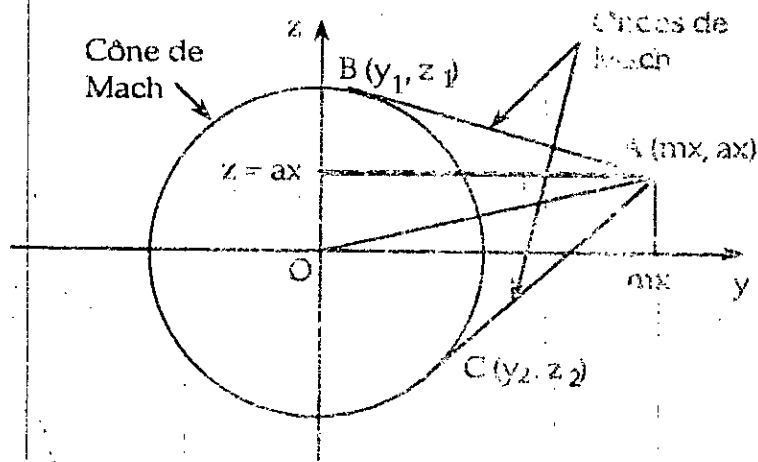
### C.5 - LIMITES GEOMETRIQUES DE L'ENVELOPPE DES CONES DE MACH

En réalité, lorsqu'un bord d'attaque d'un panneau a une flèche ou le côté latéral d'un panneau trapézoïdal est supersonique, chaque point de ce bord ou de ce côté donne naissance à un cône de Mach (Fig. C.6a) et l'ensemble forme l'enveloppe des cônes de Mach issus de ce bord d'attaque (Fig. C.6b). En fait, pour de tels panneaux, cette région est limitée par le cône de Mach issu de l'apex et les ondes de Mach situées au-dessus et au-dessous du bord d'attaque (Fig. C.6b). Pour un panneau incliné d'un angle  $\delta$  par rapport au plan  $x-y$ , les limites géométriques de cette région sont illustrées sur Fig. C.6.



-a- Cônes de Mach issus du bord d'attaque.

-b- Enveloppe des cônes de Mach.



-c- Géométrie de l'enveloppe à une section  $x = Cte.$

Fig. C.5

Définir cette région revient donc à déterminer les équations des plans OCA et OBA ainsi que l'équation du cône issu de l'origine.

L'équation du cône est donnée par :  $y^2 + z^2 = -x^2 \beta^2$  (Eq. C.12)

Avant de déterminer les équations des plans OCA et OBA, il nous faut d'abord connaître les coordonnées des points A, B et C. Il est évident que les coordonnées de A sont  $(x, mx, ax)$ . Supposons maintenant que les points B et C aient pour coordonnées  $(y_1, z_1)$  et  $(y_2, z_2)$  respectivement. Sachant que :

$$\overline{OA}^2 = (m^2 + a^2) x^2$$

$$\overline{OB}^2 = r^2 - \frac{x^2}{\beta^2}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OB}^2 = (m^2 + a^2 + \frac{1}{\beta^2}) x^2 \quad (\text{Eq. C.13})$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OC}^2 = (m^2 + a^2 + \frac{1}{\beta^2}) x^2$$

Par ailleurs,  $\overline{AB}^2$  et  $\overline{AC}^2$  peuvent être exprimées autrement :

$$\overline{AB}^2 = (mx - y_1)^2 + (ax - z_1)^2 \quad (\text{Eqs. C.14})$$

$$\overline{AC}^2 = (mx - y_2)^2 + (ax - z_2)^2$$

En égalisant Eq. C.13 et Eqs. C.14 et en tenant compte du fait que n'importe quel point de coordonnées  $(y_i, z_i)$  appartenant au cône vérifie Eq. C.12, nous aboutissons à :

$$(m^2 + a^2) y_i^2 + 2m \frac{x}{\beta^2} y_i + \frac{x^2}{\beta^2} (a^2 + \frac{1}{\beta^2}) = 0 \quad (\text{Eq. C.15})$$

qui est une équation du second degré en  $y_i$ . Le discriminant de cette équation défini comme :  $\Delta = 4 x^2 a^2 e^2 / \beta^4$  étant positif, Eq. C.15 admet donc deux racines réelles données par :

$$y_{1,2} = \frac{-2m \frac{x}{\beta^2} \pm \sqrt{4a^2 x^2 e^2 / \beta^4}}{2(a^2 + m^2)}$$

$$\text{où : } e^2 = -1 - \beta^2(a^2 + m^2) = -[1 + \beta^2(a^2 + m^2)] = -e^2$$

$$\text{D'autre part : } 1 - e^2 = \beta^2(a^2 + m^2)$$

$$y_1 = \frac{m - ae'}{1 - e^2} x$$

$$y_1 \text{ et } y_2 \text{ deviennent :} \quad (\text{Eqs. C.16})$$

$$y_2 = \frac{m + ae'}{1 - e^2} x$$

Connaissant  $y_1$  et  $y_2$ , nous pouvons évaluer  $z_1$  et  $z_2$  à partir de Eq. C.12; ainsi nous obtenons :

$$z_1 = \frac{a + me'}{1 - e^2} x \quad (\text{Eqs. C.17})$$

$$z_2 = \frac{a - me'}{1 - e^2} x$$

Essayons, maintenant de déterminer l'équation du plan OCA dont la forme est :

$$X + B_1 Y + C_1 Z + D_1 = 0$$

Il est évident que la constante  $D_1$  est nulle car le plan passe par le point O. elle devient alors :

$$X + B_1 Y + C_1 Z = 0 \quad (\text{Eq. C.18})$$

Sachant encore que ce plan passe par les points C et A dont les coordonnées sont données par Eq. C.16 et Eqs. C.17, l'évaluation des constantes  $B_1$  et  $C_1$  mène à :

$$B_1 = -\frac{ae' + m}{a^2 + m^2}$$

$$C_1 = -\frac{a - me'}{a^2 + m^2}$$

et l'équation du plan OCA est donnée par :

$$(a^2 + m^2)x - (ae' + m)y + (me' - a)z = 0 \quad (\text{Eq. C.19})$$

et celle du plan OBA s'obtiendra en procédant de la même manière; elle sera définie par :

$$(a^2 + m^2)x + (ae' - m)y - (me' + a)z = 0 \quad (\text{Eq. C.20})$$

Les limites géométriques de la région d'influence correspondent donc à :

$$x = \frac{my + az + |mz - ay| e'}{a^2 + m^2}$$

$$y = \frac{(m - ae')x}{1 - e^2}$$

$$y = \frac{(m + ae')x}{1 - e^2}$$

$$y = mx$$

$$x = \beta r \quad \text{où} \quad r = \sqrt{y^2 + z^2}$$

et la région interne à l'enveloppe des cônes de Mach est représentée par le domaine suivant défini par :

$$x > \frac{my + az + |mz - ay| e'}{a^2 + m^2}$$

$$y > \frac{(m - ae')x}{1 - e^2}$$

$$y > \frac{(m + ae')x}{1 - e^2}$$

$$y < mx$$

$$x < \beta \sqrt{y^2 + z^2}$$

(Eqs. C.21)

(Eqs. C.22)

En procédant de la même manière pour un panneau non incliné par rapport au plan x-y c'est à dire pour lequel  $\alpha = \text{tg } \delta = 0$ , les limites géométriques de cette région sont :

$$y > \lambda x / \beta^2$$

$$x > \lambda y + e' |z|$$

(Eqs. C23)

$$x = \beta r$$

$$x = \lambda y$$

et la région interne à l'enveloppe des cônes de Mach correspondante est définie comme :

$$y > \lambda x / \beta^2$$

$$x > \lambda y + e' |z|$$

(Eqs. C24)

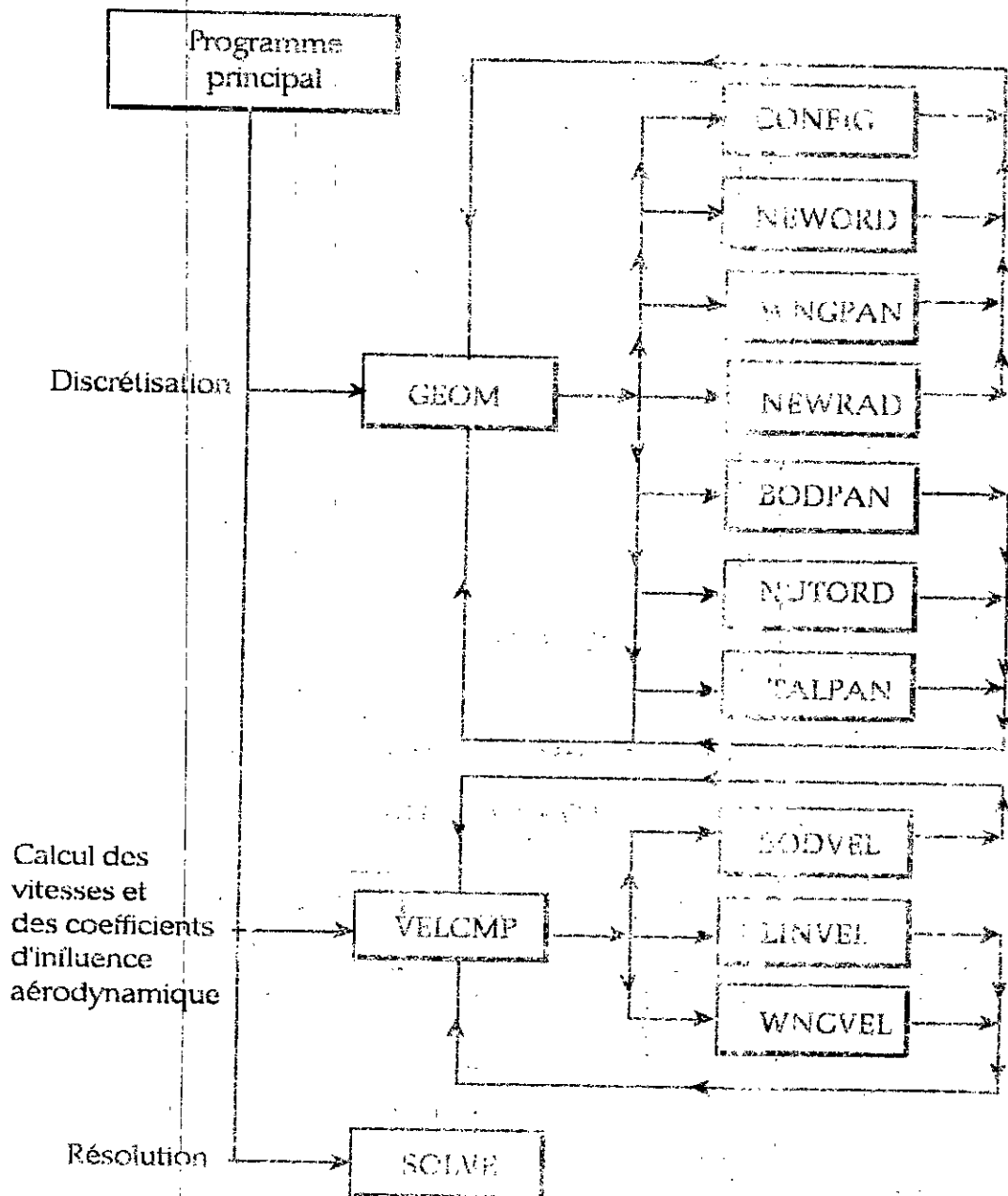
$$x < \beta r$$

$$0 < x < \lambda y$$



# ANNEXE D

## STRUCTURE ET FONCTIONS PRINCIPALES DU CODE DE CALCUL



<b>PROGRAMME PRINCIPAL:</b>	Contrôle de la séquence des calculs pour déterminer les caractéristiques aérodynamiques de la configuration et évaluation des coefficients d'efficacité aérodynamique.
<b>D1 - GEOM:</b>	Lecture des données et subdivision de la configuration en panneaux.
<b>CONFIG:</b>	Description numérique de la géométrie de la configuration.
<b>NEWORD:</b>	
<b>WNGPAN:</b>	Subdivision de l'aile en panneaux.
<b>NEWRAD:</b>	
<b>BODPAN:</b>	Subdivision du fuselage en panneaux.
<b>NUTORD:</b>	
<b>TALPAN:</b>	Subdivision des empennages et des stabilisateurs.
<b>D2 - VELCMP:</b>	Calcul des composantes des vitesses induites et des coefficients d'influence aérodynamique.
<b>BODVEL:</b>	Calcul des composantes des vitesses induites aux points de contrôle des panneaux du fuselage.
<b>LINVEL:</b>	Calcul des composantes des vitesses induites aux points de contrôle spécifiés par des distributions de source et vortex sur les panneaux situés sur le plan des surfaces de l'aile et des empennages.
<b>WNGVEL:</b>	Calcul des composantes des vitesses induites aux points de contrôle des panneaux par des distributions de source et vortex sur les surfaces de l'aile et des empennages.
<b>D3 - SOLVE:</b>	Evaluation des intensités des vortices du fuselage et vortex de l'aile qui satisfont la condition de la limite de l'écoulement irrotationnel aux points de contrôle. Détermination des distributions de pression, charge, forces et moments agissant sur la configuration.

## ANNEXE E

### DEFINITION GEOMETRIQUE DE L'AILLE EN FLECHE

Nous présentons dans cette annexe une définition géométrique détaillée ainsi que les distributions de l'épaisseur et de la cambrure d'une aile en flèche ( $\Psi = 70^\circ$ , arrow wing) qui est utilisée dans le chapitre V.

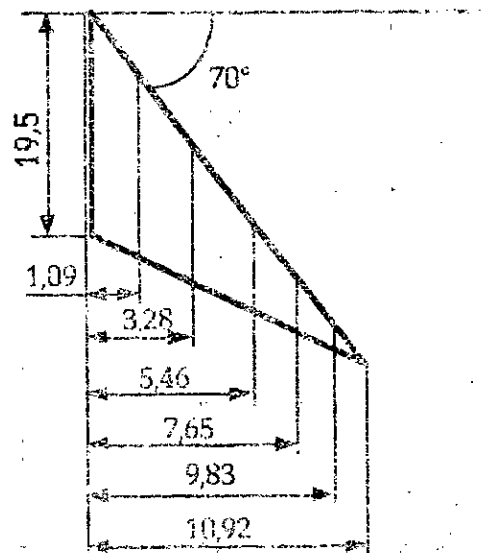


Fig. E.1 Forme en plan de l'aile et positions des différentes stations.

Distribution de l'épaisseur "t" de l'aile pour les stations indiquées sur Fig. E.1 (le profil utilisé est un profil biconvexe dont l'épaisseur relative est égale à 3%).

y b/2	x/c												
	0	0,025	0,050	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	1,000
0,1	4,70	4,78	4,78	4,60	3,70	2,62	1,29	-0,12	-1,63	-3,00	-4,30	-5,63	-6,89
0,3	0,51	0,67	0,77	0,87	0,69	0,33	-0,12	-0,66	-1,60	1,95	-2,65	-3,40	-4,05
0,5	0,84	0,96	1,65	1,20	1,37	1,35	1,20	1,00	0,75	0,45	0,12	-0,24	-0,64
0,7	1,14	1,26	1,34	1,50	1,70	1,80	1,86	1,83	1,63	1,71	1,62	1,50	1,26
0,9	1,44	1,49	1,52	1,60	1,72	1,83	1,94	2,01	2,07	2,13	2,18	2,21	2,24

Distribution de la cambrure de l'aile :

y b/2	x/c												
	0	0,025	0,050	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	1,000
0,1	0	0,053	0,095	0,190	0,338	0,440	0,517	0,528	0,537	0,440	0,336	0,190	0
0,3	0	0,041	0,077	0,147	0,262	0,342	0,393	0,410	0,393	0,342	0,262	0,147	0
0,5	0	0,029	0,055	0,105	0,187	0,244	0,284	0,292	0,263	0,244	0,187	0,105	0
0,7	0	0,017	0,033	0,063	0,112	0,146	0,168	0,175	0,166	0,146	0,112	0,063	0
0,9	0	0,006	0,011	0,021	0,037	0,049	0,056	0,058	0,056	0,049	0,037	0,021	0

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Schweiger J., Schneider G., Sensburg O., Lobert J. "Design of a Forward Swept Wing Fighter Aircraft" Proceedings International Conference, Forward Swept Wing Aircraft. University of Bristol, Bristol, U.K., pp. I.41 - I.43, 24 - 26 March 1982.
- [2] Cheng H.K., "Transonic aerodynamics of forward swept wings analysed as a lifting - line problem". Bristol International Conference, Forward Swept Wing Aircraft. pp. I.44 - I.45, 24 - 26 March 1982.
- [3] Weisshaar, Terrence A., and Ashley H., Jour. Aircraft, Vol. 10, N° 10, 1973, pp. 586 - 594.
- [4] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. "Fluid Mechanics", The Finite Element Method, Vol.2, pp. 506 - 517, Mc Graw Hill Book Company, U.K., 1991.
- [5] Hess J.L., "The problem of three-dimensional lifting potential flow and the solution by means of surface singularity distribution", Computer methods in applied mechanics and engineering, pp. 283-319, June 1975.
- [6] Rizzi A. and Erikson L.E. "Trans finite mesh generation and damped Euler equation algorithm for transonic flow around wing-body configuration", AIAA paper 81 - 0999, 1981.
- [7] Grossman B. and Sidari M. "The non-linear supersonic potential flow over delta wings", AIAA paper 80 - 0269, Jan. 1980.
- [8] Shankar V. Chakravarthy S. "An implicit marching procedure for the treatment of supersonic flow fields using the conservative form potential equation", AIAA paper 81 - 1004, 1981.
- [9] Miranda L.R., "Application of computational aerodynamics to airplane design", Journal of Aircraft, Vol. 21, N° 6, pp. 355-370, June 1984.
- [10] Forrester T. Johnson, "A general panel method for the analysis and design of arbitrary configurations in incompressible flows", NASA - CR 3079, (Boeing Commercial Airplane Co., Seattle) 1980.

- [11] Woodward F.A. , "Correspondence privée" , 1993.
- [12] Maskew B. , Rao B.M and Dvorak F.A. "Prediction of aerodynamic characteristics for wings with extensive separations" , Paper 79-103 in Computational of viscous-inviscid Interactions, AGARD CP-291 , Sept. 1979 , pp 31-1, 31-15
- [13] Maskew B. and Dvorak F.A. "The prediction of  $C_{D,MAX}$  using a separated flow model" , Journal of american helicopter society , Vol. 23 , April 1978 , pp. 2-6.
- [14] Rao B.M. , Maskew B. and Dvorak F.A. "Prediction of aerodynamic characteristics of fighter wings at high lift" , ONR Rept. CR-211: 258-1 , July 1979.
- [15] Smith J.H. B. , "Vortical flows and their computation" , Computational fluid dynamics , V.K.I. - L.S. 1980 Vol.1 , 1980.
- [16] Hunt B. "Recent and anticipated advances in panel methods - The key to generalized field calculations ?" , Computational fluid dynamics V.K.I. - L.S. 1980 Vol.1 , 1980.
- [17] Butter D.J. and Mobbs D. , "Viscous flow modeling in panel methods" , Computational fluid dynamics V.K.I. - L.S. - 1980 Vol.1 - 1980.
- [18] Anderson John D. Jr. , "Fundamentals of aerodynamics" , Mc Graw-Hill Book Company , New-York, 1988.
- [19] Smith A.M.O and Hess J.L. , "Calculation of the linearized potential flow about arbitrary three-dimensional bodies" , Douglas Report D-4227 , 1962.
- [20] Rubbert P.E. and Saaris G.R. "A general three dimensional flow method applied to V/STOL aerodynamics" , SAE paper 680304 , 1968.
- [21] Woodward F.A. , Tinoco E.N. and Larsen J.W. , "Analysis and design of supersonic wing-body combinations including properties of the near field" , NASA CR 73106 , 1967.
- [22] Woodward F.A. , "A unified approach to the analysis and design of wing body combinations at subsonic and supersonic speeds" , AIAA paper 68-55 , 1968.
- [23] Carmichael R.L. and Erikson L.L. "PAN AIR - A high order panel method for predicting subsonic and supersonic linear potential flow about arbitrary configurations" , AIAA paper 81-1255 , 1981.
- [24] Maskew B. "Prediction of subsonic characteristics - a guide for low-order panel methods" , AIAA Paper 81-0252 , 1981
- [25] Woodward F.A. , "An improved method for the aerodynamic analysis of wing-body-tail configurations in subsonic and supersonic flows" , NASA CR 2208 , Part, I Theory and application , May 1973.

- [26] Woodward F.A. , "The supersonic triplet : A new aerodynamic panel singularity with directional properties" , AIAA Journal , Vol. 18 , N° 2 , pp. 138-142 , February 1980.
- [27] Woodward F.A. , "Analysis and design of wing-body combinations at subsonic and supersonic flows" , Journal of aircraft , Vol. 5 , N° 6 , pp. 528-534 , December 1968.
- [28] Woodward F.A. , "USSAERO computer program : Development versions B and C" , NASA CR 3227, April 1980.
- [29] Gothert B. , "Plane and three dimensional flow at high subsonic speeds" , NACA TM 1105 , October 1946.
- [30] Clancy, L. J. , "Aerodynamics", Pitman Publishing Limited, 1975.
- [31] Kraus W. , "The MBB - UFE subsonic panel method", Part 2 : 'The lift connected displacement problem in compressible flow' , NASA-TTF 14 , 127 , March 1972.
- [32] Labrujere Th.E. , Loeve W. and Slooff J.W. , "An approximate method for the calculation of the pressure distribution on wing-body combinations at subsonic speeds" , AGARD - CP 71 - 71 , pp. 1-7 , 1971.
- [33] Ames Research Staff , "Equations, tables and charts for compressible flow" , NACA report 1135 , 1935.
- [34] Middleton W.D. and Carlson H.W. , "Numerical method of determining and optimizing the supersonic aerodynamic characteristics of arbitrary planform wings" AIAA Journal of aircraft , Vol. 2 , N° 4 , July - August 1965.
- [35] Carlson H.W. and Middleton W.D. , "A numerical method for the design of camber surfaces of supersonic wings with arbitrary planforms , NASA TN-D 2341 June 1964.
- [36] Tucker W.A. "Method for the design of sweptback wings warped to produce specified flight characteristics at supersonic speeds" , NACA TR : 1226 , 1965.
- [37] Cohen D. , Friedman M.D. , "Theoretical investigation of the supersonic lift and drag of thin sweptback wings with increased sweep at the root" , NACA TN 2959 , 1953.
- [38] Mangler K.W. , Smith J.H.B. , "Behaviour of the boundary layer at the trailing edge of a lifting wing" , RAE TR 69049 , March 1969.
- [39] Holt , Ashley ; Marten Landahl , "Aerodynamics of wings and bodies" , 1965
- [40] Bratkovich A. , Marshall F.J. , "Iterative techniques for the solution of large linear systems in computational aerodynamics" , Journal of aircraft , vol 12 , N° 2 pp. 116-118 February 1975.

- [41] Young D.M. , "Iterative solution of large linear systems" , Academic press , New - York , 1971.
- [42] Varga R.S. , "Matrix iterative analysis " , Prentice Hall , Englewood, Cliffs, N.J. , 1962.
- [43] Carre B.A. "The determination of the optimum accelerating factor for successive over-relaxation " , The computer journal , Vol. 4 , pp 73-78 April 1961.
- [44] Hageman L.A. , Kellog K.B. , "Estimating optimum over-relaxation parameters" Mathematics of computation , Vol. 22 , pp. 60-68 , January 1968.
- [45] Rigler A.K. "Estimation of the successive over relaxation factor", Mathematics of computation , Vol. 19 , pp. 302-307 , April 1965.
- [46] Woodward F.A. , "An improved method for the aerodynamic analysis of wing-body-tail configurations in subsonic and supersonic flow" , NASA CR 2228 , Part II , 'Computer program description' , May 1973.
- [47] Fox C.H. "Experimental surface pressure distributions for a family of axi symmetric bodies at subsonic speeds" , NASA TMX - 2779 , December 1971.
- [48] Rebuffet P. , "Aérodynamique expérimentale" , Tome 6 , Dunod Paris 1966.
- [49] Landrun E.J. "Wind tunnel pressure data at Mach numbers from 1.6 to 4.63 for a series of bodies of revolution at angles of attack from  $-4^{\circ}$  to  $60^{\circ}$ " , NASA TMX - 3558 , Oct. 1977.
- [50] Donoyan A.F and Lawrence H.R. "Aerodynamic components of aircraft at high speeds" , Vol. VII , High speed aerodynamics and jet propulsion , Princeton University Press , Princeton , New Jersey , 1954.
- [51] Mashlen S.H. "Pressure distribution on a thin conical body of elliptic cross section at Mach number 1.89" , NACA TN - 2235 , 1950.
- [52] Sherif A. and Hafez M. , "Computation of three dimensional transonic flows using two stream functions" , International Journal for Numerical Methods in Fluids , Vol. 8 , N° 1 , pp. 17-30 , January 1988.
- [53] Carlson H.W. "Pressure distributions at Mach number 2.05 on a series of highly swept arrow wings employing various degrees of twist and camber" , NASA TN D - 1264 , May 1962.
- [54] Carlson H.W. "Aerodynamic characteristics at Mach number 2.05 of a series of highly swept arrow wings employing various degrees of twist and camber" , NASA TMX - 332 , 1960.
- [55] Carlson H.W. "Pressure distributions at Mach number 2.05 on a series of highly swept arrow wings employing various degrees of twist and camber" , NASA TND - 1264 , May 1962.



- [56] Gajcynski J.P. and Landrum E.J. "Tabulated data from a pressure distribution investigation at Mach number 2.00 of a 45-degree sweptback wing airplane model at combined angles of attack and sideslip", NASA MEMO 10-15-58, November 1958.
- [57] Loving D.L. and Estabrooks B.B. "Transonic wing investigation in the Langley 8-foot high speed tunnel at high subsonic Mach numbers and at a Mach number of 1.2 - Analysis of pressure distribution of wing fuselage configuration having a wing of 45° sweepback, aspect ratio 4, Taper ratio 0.6 and NACA 65A006 airfoil section", R ML 51F07, Sept. 1951 NACA.
- [58] Smith J.S. and Woodward D.S. "An assessment of the use of low order panel methods for the calculation of supersonic flows", AGARD Conference Proceedings N° 412, Applications of Computational Fluid Dynamics in Aeronautics 7-10 April 1986, pp. 5.1 - 5.7.
- [59] Jameson A. and Schmidt W. "Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time stepping schemes", AIAA paper 81-1259, 1981.
- [60] Smith J.S. "A comparative evaluation of three panel programs for the analysis of supersonic flows", Unpublished MOD (PE) Report (1985).
- [61] Hoeijmakers H.W.M. "A panel method for the determination of the aerodynamic characteristics of complex configurations in linearized subsonic or supersonic flow", NLR TR 80 124 Paris I and II, 1980.
- [62] Chen, R., and Butler, J., "Divergence of forward swept wings", Proceedings International Conference, Forward swept wing aircraft, pp. II.6.1 II.6.9, 24 - 26 March 1982.
- [63] Bisplinghoff, Raymond L., and Holt Ashley, "Principles of aeroelasticity", Dover, Publication, INC, New York, 1969.
- [64] Chuen Yen Chow, Arnold M. Kuethe "Foundation of aerodynamics: Bases of aerodynamic design", Third edition T, John Wiley U.S.A., 1976.
- [65] Hashimoto M., Suzuki S. and Nakamura K., "Application of the finite element technique to aerodynamic problems of aircraft", Computers and structures, Vol. 19, N° 1-2, pp. 57-69, Pergamon Press, 1984.
- [66] Schlichting H., Truckenbrodt E., "Aerodynamik des Flugzeuges", Springer, Berlin / Heidelberg / New York 1969.
- [67] Hirschel E.H., Rizzi A., "The mechanism of vortex creation in Euler solutions for lifting wings" Int. Vortex-Flow Symp., Stockholm: 1986.
- [68] Warnie K.M., Hirschel E.H. and Schmatz M.A., "Analysis of numerical solutions for three-dimensional lifting wing flows", Z. Flugwiss. Weltraumforsch. Vol. 15, pp. 107-118, Springer-Verlag April 1991.

[69] Hess J.L. and Smith A.M.O. , "Calculation of potential flow about arbitrary bodies" , Progress in aeronautical sciences 8 , pp 1-117 (Pergamon Press , New York 1966).

[70] Hess J.L. , "Numerical solution of the integral equation with application to aircraft and ships" , Douglas Aircraft Company , Engineering paper N° 5987 Oct. 1971.

[71] Rebuffet P. , "Aérodynamique expérimentale" , Tome 1 , Dunod , Paris 1960.

[72] Hess J.L. , Smith A.M.O. , "Calculation of non-lifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies" , Report E.S. 40622 , 1962 , Douglas Aircraft Co.