

M0019/014

ECOLE NATIONALE DES TRAVAUX PUBLICS

THESE DE MAGISTER
Spécialité : **Matériaux et Structures**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique
Présentée par

M. Ferhat FEDGHOUCHE
Ingénieur d'état en travaux publics

Aguel
ex.

**OPTIMISATION DES ELEMENTS DE STRUCTURES
EN BETON ARME AUX ETATS LIMITES**

Soutenue publiquement le 20 juin 2001 devant le jury composé de :

M. M.K. BERRAH
M. B. TILIOUINE
M. A. MEBARKI
M. H. AFRA
M. B. GUETTACHE
M. Z. DJIDJELI

Professeur ENP
Professeur ENP
Professeur Univ. Marne La Vallée
Maître de Recherche CGS
Docteur
DG du CTPP

Président
Directeur de thèse
Examinateur
Examinateur
Examinateur
Membre invité

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

A ma mère.

A mon père.

A ma femme .

A mon fils ALAA-EDDINE

A Toute ma famille en particulier mon beau-frère Yassine et mon très cher ami Zeggagh Abdelkrim.

A tous mes amis .

A tous ceux qui luttent pour une cause juste .

Remerciements

Je remercie Dieu Clément et Miséricordieux de m'avoir donné force et patience pour bien mener à terme ce modeste travail.

Je tiens à présenter mes respectueux remerciements à Monsieur B. TILIOUINE, Professeur et Responsable du Laboratoire de Modélisation Numérique des Structures (LMNS) à l'Ecole Nationale Polytechnique (ENP), pour son accueil chaleureux dans cette école et qui a bien voulu diriger cette thèse.

Je remercie, très chaleureusement, Messieurs les membres du jury de m'avoir honoré en faisant partie du jury et accepté d'examiner ce modeste travail.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur Y. BERICH, Directeur de l'Ecole Nationale des Travaux Publics (ENTP), et à Monsieur ADEM Responsable de la post-graduation de l'ENTP pour leur accueil et leur aide.

Mes remerciements les plus chaleureux sont destinés aux Enseignants et responsables de la bibliothèque de l'ENTP.

Je remercie profondément Monsieur Z. DJIDJELI, Directeur Général du CTPP, ainsi que le personnel du Département Laboratoire pour leur soutien moral.

Que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à ma formation trouvent ici ma profonde reconnaissance.

تم تخصيص هذا البحث للموضوع الهام و المتمثل في الحساب الأمثل للإنشاءات المشكلة من الخرسانة المسلحة . وقد عرضت منهجية مقارنة مسألة التحديد الأمثل لأبعاد عناصر الإنشاءات المشكلة من الخرسانة المسلحة و التي ارتكزت على تحليل تسوية الكلفة و السلامة و عدد محدد لمتغيرات التصميم.

وتمت معالجة فضاء الحلول المقبولة و معاينة الحلول المثالية بواسطة نظرية البرمجة الرياضية اللاخطية و للتوضيح أجريت عدة أمثلة تطبيقية لطريقة الحساب الأمثل و شملت التحليل الستاتيكي و الديناميكي على السواء فضلا عن هذا أجريت مقارنة لمختلف القوانين السارية المفعول و الخاصة بالخرسانة المسلحة وفق الحالات الحدية و مقاومة الزلازل و تمت أيضا صياغة نتائج ذات أهمية تطبيقية و هذا على أساس الحلول المثالية المتحصل عليها.

Résumé :

La présente investigation est consacrée au thème important de l'optimisation des structures en béton armé. Une méthodologie d'approche du problème de dimensionnement optimal des éléments de structures en béton armé , fondée sur une analyse de compromis coût - sécurité et d'un nombre réduit de variables de décision , est proposée/L'analyse est effectuée en considérant les deux philosophies de calcul : états limites ultimes et états limites de service.

L'espace de calcul des solutions admissibles ainsi que la détermination des solutions optimales sont examinés en utilisant la théorie de la programmation mathématique non-linéaire . A titre illustratif, divers exemples sont traités montrant ainsi l'applicabilité de la méthodologie d'optimisation à l'analyse statique et dynamique des structures en béton armé En outre , des études comparées de divers codes de béton armé aux états limites et de règlements parasismiques en vigueur sont effectuées et des conclusions d'importance pratique sont formulées sur la base des solutions optimales obtenues .

Abstract :

The present investigation is devoted to the important subject of reinforced concrete structural optimization. A methodology for the optimal design problem of R-C structural elements based on a cost - reliability compromise analysis and a reduced number of design variables is proposed. The analysis is carried out considering both the ultimate limit state and service limit state design philosophies .

The design space of feasible solutions and the determination of optimal solutions are examined using non-linear programming theory. For illustrative proposes, various examples are considered thus demonstrating the applicability of the methodology optimization to static and dynamic analysis of R-C structures . Furthermore, comparative studies of some recent reinforced concrete and earthquake resistant design codes are carried out and conclusions of engineering significance are formulated in light of the optimal solutions obtained .

TABLE DES MATIERES

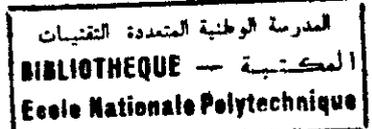
المدسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE.....	6
CHAPITRE I: BETON ARME PRINCIPES ET HYPOTHESES.....	10
I.1. - PRESENTATION DES REGLES DE CONCEPTION ET DE CALCUL DES STRUCTURES EN BETON ARME CBA 93 -ALGERIE-.....	10
I.2. - METHODES DES ETATS LIMITES.....	10
1.2.1 - Etats Limites Ultimes (E.L.U).....	11
1.2.2 - Etats Limites de Service (E.L.S).....	11
I.3. - CRITERES DE CALCUL.....	11
1.3.1 - Critère de calcul à l'E.L.U.....	11
1.3.2 - Critère de calcul à l'E.L.S.....	11
I.4. - VERIFICATIONS.....	11
1.4.1 - Vérification à l'ELU.....	11
1.4.2 - Vérification à l'ELS.....	12
I.5. - COMBINAISONS D' ACTIONS POUR LES BATIMENTS COURANTS.....	12
I.6. - FLEXION SIMPLE EN BETON ARME.....	13
I.7. - CARACTERES DES MATERIAUX.....	13
1.7.1 - Béton.....	13
1.7.2 - Acier.....	13
I.8. - PRESENTATION DES REGLRES PARASISMIQUES ALGERIENNES RPA99.....	14
CHAPITRE II: CONCEPTS ET FORMULATION GENERALE D'UN PROBLEME D'OPTIMISATION.....	15
2.1. - INTRODUCTION.....	15
2.2. - ROLE DE L'OPTIMISATION.....	15
2.3. - DEFINITIONS.....	15
2.3.1 - Eléments de l'optimisation.....	15
2.3.2 - Formulation générale du problème.....	17
2.3.3 - Variables de décision.....	17
2.3.4 - Contraintes.....	18
2.3.5 - Fonction objectif.....	18
2.4. - TYPE DES PROBLEMES D'OPTIMISATION.....	18
2.4.1 - Problèmes probabilistes.....	18
2.4.2 - Problèmes déterministes.....	18
2.5. - METHODE ET FORMULATION GENERALE D'UN PROBLEME D'OPTIMISATION DETERMINISTE.....	18
2.5.1 - Contraintes.....	18
2.5.2 - Espace de conception.....	19
2.5.3 - Fonction objectif.....	20
2.5.4 - formulation dans l'espace des variables de conception.....	21
2.6. - ALGORITHME ET METHODES UTILISES POUR LA RESOLUTION NUMERIQUE.....	21

CHAPITRE III : CALCUL OPTIMAL DES POUTRES EN BETON ARME AUX ETATS LIMITES	23
3.1. - INTRODUCTION	23
3.2. - CONDUITE DES JUSTIFICATIONS	23
3.3. - COMBINAISONS SIMPLIFIEES POUR BATIMENTS COURANTS	23
3.4. - CALCUL DES SOLLICITATIONS	23
3.5. - JUSTIFICATION DES SECTIONS SOUMISES A DES SOLLICITATIONS NORMALES - FLEXION SIMPLE	24
3.6. - JUSTIFICATION DES SECTIONS SOUMISES A DES CONTRAINTES TANGENTES τ (EFFORT TRANCHANT V)	28
3.7. - CALCUL DES FLECHES SELON CBA93	29
3.8. - FORMULATION MATHEMATIQUE DE L'OPTIMISATION DES POUTRES EN BETON ARME	30
3.8.1 - Formulation du problème de dimensionnement optimal à l'ELU	31
3.8.2 - Formulation du problème de dimensionnement optimal à l'ELS	32
3.9. - CALCUL OPTIMAL D'UNE POUTRE EN FLEXION EN B.A	32
3.9.1 - Calcul statique optimal	32
3.9.2 - Calcul dynamique optimal sous séisme vertical (méthode modalo-spectrale)	39
CHAPITRE IV : CALCUL OPTIMAL DES DALLES EN FLEXION EN BETON ARME AUX ETATS LIMITES	46
4.1. - INTRODUCTION	46
4.2. - ETUDE D'UNE DALLE EN BA EN FLEXION CONFORMEMENT AU CBA93	46
4.2.1 - Evaluation des moments forfaitaires pour planchers à charge d'exploitation modérées	46
4.2.2 - Evaluation des moments par la méthode analytique (méthode RDM)	47
4.3. - FORMULATION MATHEMATIQUE DE L'OPTIMISATION DES DALLES EN BETON ARME EN FLEXION SUR APPUI SIMPLES	48
4.4. - CALCUL STATIQUE OPTIMAL D'UNE DALLE EN BA EN FLEXION	49
4.4.1 - Calcul statique optimal d'une dalle en béton armé en flexion à l'ELU selon la méthode analytique	50
4.4.2 - Calcul statique optimal d'une dalle en béton armé en flexion à l'ELS selon la méthode analytique	52
4.4.3 - Calcul statique optimal d'une dalle en béton armé en flexion à l'ELU selon la méthode forfaitaire	53
CHAPITRE V : CALCUL OPTIMAL DES POUTRES PAR DIFFERENTS CODES ET ETUDES COMPAREES	55
5.1. - INTRODUCTION	55
5.2. - PRESENTATION DES REGLES FRANCAISES DE BETON ARME ET PARASISMIQUE	55
5.2.1 - Présentation des règles techniques françaises de conception et de calcul BAEL91	55
5.2.2 - Présentation des règles parasismiques (PS92)	56
5.2.3 - Règlement Américain de béton armé ACI - 318 - 83	57
5.2.4 - Présentation du code uniforme de la construction (Uniform Building Code UBC94, United States)	57

5.3. - ETUDES COMPAREES DE DIVERS CODES, INVESTIGATIONS NUMERIQUES ET DISCUSSION	57
5.4. - NOUVELLE METHODOLOGIE DE COMPARAISON DES REGLES TECHNIQUE DE CONCEPTION ET DE CALCUL : APPLICATION AUX PROBLEMES DE DIMENSIONNEMENT DE POUTRES EN FLEXION EN BA	59
5.4.1 - Calcul statique optimal à l'ELU	59
5.4.2 - Calcul statique optimal à l'ELS	67
5.4.3 - Calcul dynamique optimal	68
5.4.4 - Calcul optimal itératif	77
CHAPITRE VI : CALCUL OPTIMAL DES DALLES PAR DIFFERENTS CODES ET ETUDES COMPAREES	79
6.1. - EVALUATION DES MOMENTS FORFAITAIRES	79
6.1.1 - Méthode forfaitaire pour les poutres ou dalles continues dans une direction (règlement français BAEL91 et algérien CBA93)	79
6.1.2 - Méthode forfaitaire pour les poutres ou dalles continues dans une direction (règlement américain ACI83)	80
6.2. - EVALUATION DES MOMENTS ANALYTIQUES	81
6.3. - NOUVELLE METHODOLOGIE DE COMPARAISON DES REGLES TECHNIQUES DE CONCEPTION ET DE CALCUL : APPLICATION AUX PROBLEMES DE DIMENSSIONNEMENT DE DALLES EN FLEXION EN BA	81
6.3.1 - Dimensionnement statique optimal à l'ELU	81
6.3.2 - Dimensionnement statique optimal à l'ELS	90
CONCLUSIONS	92
RECOMMANDATIONS	94
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	95
ANNEXES	97

INTRODUCTION GENERALE



PROBLEMATIQUE

Chaque matériau a sa personnalité distincte et chaque forme impose un système différent de distribution des efforts intérieurs.

La solution d'un problème, lorsqu'elle est naturelle, sans artifice, lorsqu'elle donne la réponse adéquate à l'ensemble de données qui sont à son origine, lorsqu'elle satisfait en même temps aux exigences du technicien et à celles de l'artiste est un impressionnant message.

La naissance d'un ensemble structural, résultat d'un processus créateur, fusion de l'art et de la technique, de l'ingéniosité et de l'étude, de l'imagination et de la sensibilité, échappe au domaine de la logique pour franchir les frontières secrètes de l'inspiration.

Avant, et au-dessus de tout calcul, règne l'idée, qui modèle le matériau et lui donne sa forme résistante, afin qu'il puisse accomplir sa mission.

Dans la littérature technique de la construction, on trouve des centaines d'ouvrages, de caractère théorique, sur le calcul des structures, mais très peu sur les conditions générales des différents types, sur les raisons fondamentales qui les ont déterminés, sur les bases qui doivent orienter leur choix et sur les idées essentielles qui guident le projeteur au début de son travail, suivant des principes qu'il a assimilés peu à peu, mais auxquels il réfléchit rarement.

Il est rare que les théories donnent autre chose que la preuve que les formules et les proportions qui ont été choisies pour un ouvrage conviennent ou ne conviennent pas. Ces formules de proportions doivent sortir d'un fonds de connaissances intuitives des phénomènes, qui est les résultats de dépôts successifs d'études et d'expériences accumulés tout au long de la vie professionnelle.

Le calcul n'est pas autre chose qu'un outil qui permet de vérifier que les formes et dimensions d'une construction, encore à l'état de projet ou déjà réalisée, sont capables de supporter les efforts auxquels elle doit être soumise.

C'est simplement la technique opératoire qui permet de passer d'une conception abstraite aux résultats numériques et concrets des phénomènes de résistance considérés séparément ou en groupes.

Pour concevoir et dessiner correctement les structures ou même les constructions en général, il est nécessaire de méditer sur la connaissance des causes profondes, des raisons d'être de leur solidité plus ou moins grande.

Dans tous les problèmes, on se propose d'obtenir un certain résultat en satisfaisant à des conditions dont les unes sont essentielles et dont les autres sont accessoires.

La finalité d'une construction varie énormément d'un cas à un autre, mais elle existe toujours. Construire pour le plaisir de construire serait un jeu trop coûteux pour les hommes raisonnables de notre époque comme de toutes les époques. L'humanité construit pour un résultat. Elle n'obtient pas toujours ce résultat, mais c'est pour l'obtenir qu'elle construit.

On ne construit pas les ouvrages seulement pour qu'ils tiennent. On les construit pour quelque autre fonction qui comporte évidemment comme condition essentielle, que la construction maintienne ses formes et ses aptitudes à remplir cette fonction pendant un certain temps. La résistance est une condition fondamentale; mais ce n'est pas la finalité unique, ni même la plus importante.

Tout d'abord, les matériaux doivent être résistants dans la mesure où la résistance représente l'aptitude à supporter les sollicitations mécaniques auxquelles ils doivent être soumis en chaque point. Pour cela, il est nécessaire de connaître ces sollicitations. Leur détermination, à partir d'un ensemble de charges ou de forces extérieures, prise comme donnée du problème, et des caractères mécaniques (élastique, plastique, etc...) du matériau, constitue la partie la plus étudiée dans les livres et dans les écoles.

Mais, il ne faut pas oublier que, autour des questions de résistance aux efforts intérieurs, il y a une multitude de cas particuliers qui exigent du matériau des propriétés différentes certains planchers par exemple doivent posséder une grande résistance à l'usure parce qu'ils doivent être soumis à certains frottements ; d'autres doivent avoir une certaine dureté, etc...

Il y a un autre aspect du problème, que tout le monde connaît : c'est celui de l'économie. Toutes choses étant égales, par ailleurs, un ouvrage doit être aussi économique que possible. Certainement, il y a des constructions somptueuses - les raisons humaines et sociales du luxe sont mal connues ; ses excès sont blâmables ; mais il existe dans le fond même de la nature humaine. Le problème, comme toujours est de lui assigner des limites raisonnables, qui varient beaucoup d'un cas à l'autre. En dehors de quelques exceptions, il y a toujours des limites de prix au-delà desquelles l'ouvrage n'est plus réalisable. En général on peut dire que, à efficacité égale, la condition du prix minimum est toujours valable et doit être prise en considération.

Cependant, la solution n'est presque jamais si claire et si précise. Le prix agit sur l'augmentation ou la diminution de la sécurité, sur la durabilité, sur l'apparence esthétique, ... etc. Et si le coût est mathématiquement calculable, les avantages ou les inconvénients que ses variations impliquent dans les domaines si divers, sont généralement impossibles à évaluer. C'est pourquoi les opinions sur un projet, qui sont nécessairement subjectives, sont souvent contradictoires et donnent lieu à des discussions.

Toutefois, comme dans beaucoup de ces problèmes, la logique et même les mathématiques peuvent apporter un secours efficace au service du bon sens et de la pondération qui doivent toujours régler les jugements de l'homme.

Le prix dépend, à son tour, d'une multitude de variantes comme par exemple : le prix des matériaux, les horaires du travail et le rendement de la main-d'œuvre, les frais généraux et les dépenses de tous genres qui grèvent l'opération, ainsi que le procédé de construction qui a été retenu, compte tenu des progrès de la technique applicable à chaque cas.

Et, si l'on reste dans le domaine économique, il faut considérer aussi les frais d'entretien qui peuvent varier d'un matériau à l'autre, ou d'un type de construction à un autre, ou même varier avec les dimensions. D'autre part, le prix doit être examiné en tenant compte des bénéfices directs ou indirects, mesurables ou non, que l'on attend de l'opération.

En définitive, le problème comporte quatre données fondamentales ; l'usage, la résistance (y compris la stabilité), les exigences esthétiques, les conditions économiques.

L'idéal que cherche à atteindre tous ceux qui sont associés à l'acte de construire est de réaliser l'ouvrage qui donnera les meilleures garanties de services dans des conditions requises de sécurité, au meilleur prix. Cette dernière condition prend une importance de plus en plus grande, car les besoins en équipement de toutes natures se développent à un rythme tel qu'ils nécessitent une étude approfondie des investissements nécessaires. Elles se traduisent par la recherche systématique de l'excellence à donner, dans un cadre de référence déterminé, le meilleur usage des ressources disponibles. On peut dire que l'émergence des méthodes d'optimisation et leur développement servent à rendre explicite la recherche, l'évaluation et le classement des options, ce qui jusque-là, avaient été accomplis de façon implicite.

Il n'existe pas, de nos jours, un modèle d'optimisation (ou une théorie générale d'optimisation) pour la totalité des opérations de conceptions et de réalisations qui s'appliquent aux systèmes de génie civil les plus importants. La théorie et les méthodes d'optimisation élaborées par des chercheurs de divers pays se sont limitées jusqu'ici à des exemples très particuliers d'éléments de construction et manquent, tout en moins dans l'étape actuelle, de la qualification nécessaire pour une application générale. Les problèmes posés par le calcul optimal peuvent être groupés dans les trois catégories suivantes :

Optimisation des éléments constitutifs,

Optimisation des structures d'un type et d'une configuration présumés,

Optimisation d'une structure dans son ensemble.

Les éléments constructifs tels que les planchers, poutre, murs rideaux,....etc, font partie du premier groupe de problème d'optimisation.

Les problèmes d'optimisation du second groupe comprennent des systèmes tels que les portiques, treillis,.....etc.

Dans le troisième groupe, on trouve les problèmes concernant l'optimisation d'une structure dans son ensemble.

Ces problèmes d'optimisation peuvent mathématiquement être approchés selon deux philosophies différentes : une conception essentiellement déterministe et une conception probabiliste.

La première approche a acquis une expérience considérable à travers le développement et l'émergence de nombreuses techniques d'optimisation qui relèvent pour l'essentiel des techniques de la programmation mathématique.

La seconde approche, fondée sur l'optimisation probabiliste devient une nécessité dans la mesure où elle permet de mieux appréhender les incertitudes des concepteurs. Il est du reste économiquement plus logique et plus réaliste de se satisfaire de matériaux imparfaits en considérant les imperfections possibles plutôt, que d'exiger des entrepreneurs une réalisation parfaite, évidemment impossible à l'échelle humaine. Tout le problème d'optimisation consistera alors à identifier d'abord les aspects fortement aléatoires du problème considéré et à rechercher dans une seconde phase le degré d'incertitude acceptable pour la marge de sécurité jugée suffisante. [1, 2, 3, 4]

Objectifs visés

L'objet de la présente investigation concerne la problématique de l'optimisation des structures en béton armé. L'étude vise entre autres à souligner les principes et formulations ainsi que les investigations numériques et résultats principaux de l'optimisation non-linéaire dans ses applications au problème du dimensionnement optimal des structures en béton armé aux états limites. En outre, le caractère conducteur et unificateur de la programmation mathématique est illustré et des études comparées de divers codes de béton armé et de règles parasismique en vigueur sont effectuées sur la base des solutions optimales obtenues.

LEXIQUE

NOTATION – SYMBOLES – UNITES

Unités

Longueur : m.
 surface : m².
 Volume : m³.
 Force : Mn.
 Moment : MNm.
 Contrainte : MPa.

Notations**A. Dimensions géométriques :**

l : Portée de la poutre.
 b : largeur de la section droite.
 h : hauteur totale de la section droite.
 d : hauteur utile.
 A_s : section droite de l'armature.

B. Grandeurs mécaniques :

f_{c28} : Résistance du béton en compression à 28 jours d'âge.
 E_{ij} : Module instantané de déformation longitudinale à j jours du béton.
 f_e : Limite d'élasticité conventionnelle de l'armature.
 E_s : Module de déformation longitudinale de l'acier.

C. Chargement

G : Charge permanente.
 Q : Charge d'exploitation.

D. Déformation

\bar{f} : Flèche admissible.
 f : Flèche calculée.

E. Contraintes

f_{bc} : Contrainte limite du béton à la compression à l'ELU.
 $\bar{\sigma}_{bc}$: Contrainte limite du béton à la compression à l'ELS.
 f_s : Contrainte limite de l'acier à l'ELU.
 $\bar{\sigma}_s$: Contrainte limite de l'acier à l'ELS.
 τ_u : Contrainte de cisaillement admissible.
 $\bar{\sigma}_s, \bar{\sigma}_{bc}, \bar{E}_s, E_{ij}, E_{vj}$: Notation en ELS.
 $f_{c28}, f_{t28}, f_{bc}, f_s, f_e$: Notation en ELU.

F. Efforts

M_E : Moment dû à l'action sismique.
 M_G : Moment dû à la charge permanente G .
 M_Q : Moment dû à la charge d'exploitation Q .
 M_u : Moment agissant ultime.
 M_{ser} : Moment agissant de service.
 M_r : Moment résistant à l'ELU.
 M_r : Moment résistant à l'ELS.
 V : Effort tranchant agissant.

CHAPITRE I : BETON ARME PRINCIPES ET HYPOTHESES

1.1. - PRESENTATION DES REGLES ALGERIENNES DE CONCEPTION ET DE CALCUL DES STRUCTURES EN BETON ARME CBA 93

Les règles de conception et de calcul des structures en béton armé, en abrégé CBA 93 ont pour objet de spécifier les principes et les méthodes les plus actuels devant présider et servir à la conception et aux calculs de vérification des structures et ouvrages en béton armé et s'applique plus précis spécialement aux bâtiments courants.[5]

C'est donc le premier règlement technique national en la matière et qui vient se substituer officiellement et définitivement à une pratique admise jusqu'à présent et consistait à utiliser de facto les règlements français existants à savoir le CCBA 68 et le BAEL 83.

Ce règlement est inspiré du BAEL et également de la dernière version de l'EUROCODE2 (EC2)

1.2. - METHODES DES ETATS LIMITES

- Une construction implique des fonctions (résister, porter, transmettre, ...).
- Les fonctions nécessitent des conditions (stabilité, durabilité, déformation minimales, ...)
- L'état limite est celui qui satisfait strictement ces conditions par l'effet des actions prévus sur la construction ou l'un de ses éléments.

PRINCIPE

Le problème qui se pose au constructeur, une fois connus les propriétés des matériaux est de concevoir un ouvrage et de dimensionner les éléments qui le composent de manière à ce que celui-ci puisse assurer convenablement les services demandés et de résister avec une sécurité suffisante aux actions qui peuvent le solliciter au cours de sa durée de référence.

la conception (choix de la structure, dimension, choix des matériaux...etc) appartient au domaine de l'expérience.

Par contre le dimensionnement et la vérification de la sécurité ne peuvent pas se faire de manière empirique mais doivent être basés sur des règles de calcul précises et connus de tous.

Insuffisance de la méthode des contraintes admissibles CCBA68 :

Les règlements antérieures utilisaient la méthode des contraintes admissibles qui consistait à vérifier que les contraintes calculées par la RDM en tout point d'une structure sous sollicitation donnée, étaient inférieures à une contrainte dite admissible, obtenue en divisant la contrainte dite de ruine du matériau par un coefficient de sécurité k :

$$\sigma \leq \sigma_{adm} \leq \sigma_r / k.$$

Cette conception de la sécurité s'est peu à peu révélée insuffisante et il a fallu développer une nouvelle méthode : la méthode des états limites. Celle-ci consiste :

- A définir les phénomènes que l'on veut éviter
- A estimer les gravités des risques liés à ces phénomènes
- A dimensionner les éléments de la construction de telles manière que la probabilité d'atteindre un de ces phénomènes soit limitée à une valeur assez faible pour être acceptable en fonction du risque et en fonction du coût. On raisonne, en effet en terme probabiliste.

La méthode d'évaluation d'une structure à partir des contraintes admissibles est basée sur le très grand nombre d'essais sur section rectangulaire en flexion simple pour des sections autres que le rectangle et des actions autre que la flexion simple (compression, ou flexion composée), les critères doivent être modifiés.

En fait, tout ce qui n'est pas rectangle et flexion simple devient cas particulier ; de plus, l'influence des déformations imposées sur la résistance ultime ne peut être évaluée correctement à partir des contraintes admissibles.

Par opposition, les critères du béton armé aux états limites ont un caractère de généralité. De ce fait, le CBA est un guide précieux pour l'ingénieur appelé à concevoir et à dimensionner un ouvrage, car il lui permet d'estimer correctement les conditions susceptibles d'entraîner la ruine de la structure ainsi que son comportement en service normal.

On distingue deux états limites

1.2.1 - Etats Limites Ultimes (E.L.U)

Ils mettent en jeu la sécurité des biens et des personnes. Ils correspondent à l'atteinte du maximum de la capacité portante de l'ouvrage ou de l'un de ses éléments. Ces états limites sont :

- Etat limite ultime d'équilibre statique (perte d'équilibre statique).
- Etat limite ultime de résistance (rupture des sections par déformation excessive).
- Etat limite ultime de stabilité de forme (flambement).

1.2.2 - Etats Limites de Service (E.L.S)

Ils sont liés aux conditions normales d'exploitation et de durabilité. Il correspondent aux phénomènes suivants :

- Etat limite de compression du béton (compression excessive du béton).
- Etat limite d'ouverture des fissures (ouverture excessive des fissures).
- Etat limite de déformation (déformation excessive du béton).

1.3. - CRITERES DE CALCUL

1.3.1 - Critère de calcul à l'E.L.U

Déformations relatives limites.

Calcul de type rupture avec lois contraintes - déformations ($\sigma - \epsilon$) des matériaux.

1.3.2 - Critère de calcul à l'E.L.S

Contraintes ou déformation limites.

Calculs de type élastique (loi de Hooke, coefficient d'équivalence n).

1.4. - VERIFICATIONS

1.4.1 - Vérification à l'ELU

La sollicitation agissante de calcul \leq La sollicitation résistante.

La sollicitation agissante de calcul : $S[\sum \gamma_i \cdot \psi_i \cdot Q_i]$; avec γ_i coefficients de pondération et ψ_i Q_i valeurs représentatives.

La sollicitation résistante est celle pour laquelle l'un des matériaux constitutifs de la structure atteint soit une déformation limite, soit une résistance limite :

$$R = [f_e/\gamma_s, f_{c28}/\gamma_b, f_{t28}/\gamma_b]$$

Où : f_e, f_{c28}, f_{t28} : Résistances caractéristiques des matériaux acier et béton en compression et en traction.

γ_s et γ_b : Coefficients de pondération > 1 , pour l'acier et le béton.

La sollicitation de calcul agissante est obtenue pour une combinaison d'action Q_i .

On doit vérifier :

$$S \left[\sum_i \gamma_i \psi_i Q_i \right] \leq R [f_e / \gamma_s, f_{c28} / \gamma_b, f_{t28} / \gamma_b].$$

1.4.2 - Vérification à l'ELS

On doit montrer que la sollicitation de calcul agissante ne provoque pas le dépassement des limites de l'E.L.S considérées :

Pour les contraintes :

$$\sigma \left[S \left(\sum_i \psi_i Q_i \right) \right] \leq \sigma_{Lim} ; S = M$$

$$\tau \left[S \left(\sum_i \psi_i Q_i \right) \right] \leq \tau_{Lim} ; S = V$$

Pour la flèche :

$$f \left[S \left(\sum_i \psi_i Q_i \right) \right] \leq f_{Lim} ; S = M$$

1.5. - COMBINAISONS D' ACTIONS POUR LES BATIMENTS COURANTS

A l'E.L.U

A- Combinaisons fondamentales : Cas de bâtiments courants (Combinaison de base)

Formulation symbolique :

$$1,35 G_{max} + G_{min} + \gamma_{01} \cdot Q_1 + \sum_{i>1} 1,3 \psi_{0i} \cdot Q_i$$

(Actions d'accompagnement)

$$\gamma_{Q1} = 1,5 \text{ en général}$$

La combinaison la plus courante à considérer est :

Charges permanentes (G) majorées de 35% et charges variables Q_1 de 50%.

$$1,35 G + 1,5 Q_1.$$

B- Combinaison accidentelle :

Formulation symbolique : $G_{max} + G_{min} + F_A + \psi_{11} \cdot Q_1 + \sum \psi_{2i} Q_i$

Où :

$\psi_{11} \cdot Q_1$: Valeur fréquente d'une action variable.

$\psi_{2i} Q_i$: Valeur quasi-permanente d'une autre action variable.

F_A : Action accidentelle.

A l'E.L.S

Formulation symbolique :

$$G_{max} + G_{min} + Q_1 + \sum \psi_{0i} Q_i ; i > 1$$

La combinaison d'action à considérer est la suivante : $G + Q_1$

1.6. - FLEXION SIMPLE EN BETON ARME

L'étude de la flexion en béton armé repose sur certaines hypothèses propres à chaque état limite.

Les hypothèses communes aux deux états (E.L.U / E.L.S) sont :

1. Les sections droites planes restent planes après déformation.
2. Il n'y a pas de glissement relatif entre l'acier et le béton.
3. La résistance du béton tendu est négligée et le béton armé est considéré comme matériaux non fissuré.

Hypothèses caractéristiques de l'état limite ultime : (E.L.U)

1. Le raccourcissement unitaire du béton est limité à $\varepsilon_{bc} = 3,5 \%$.
2. L'allongement unitaire de l'acier est limité à $\varepsilon_s = 10 \%$.
3. Les matériaux acier, béton seront considérés dans leur comportement plastique.
4. Le diagramme de déformation d'une section droite satisfait à la règle de pivots.

Hypothèses caractéristiques de l'état limite de service : (E.L.S)

1. Les limites imposés pour les contraintes sont telles que les matériaux restent dans leurs domaines élastique
2. Le coefficient d'équivalence $n = E_s/E_b$ est conventionnellement fixé à $n = 15$.

1.7. - CARACTERES DES MATERIAUX

1.7.1 - Béton

Résistance caractéristique du béton à 28jours d'âge en Mpa : $f_{c28} = 25$ MPa en compression.

Résistance caractéristique du béton à 28jours d'âge en MPa : $f_{t28} = 2,10$ MPa en traction.

Contrainte limite (contrainte de calcul) du béton en compression :

$$f_{bc} = 0,85f_{c28}/1,5.$$

$$f_{bc} = 14,17\text{MPa. (ELU)}$$

Contrainte limite (contrainte de calcul) du béton en compression : $\bar{\sigma}_{bc} = 0,6f_{c28} = 15$ MPa. (ELS)

1.7.2 - Acier

Une barre à haute adhérence HA, Fe E400, Acier Type 1,3,4.

f_e = Limite d'élasticité garantie = 400 MPa.

$E_s = 200000$ MPa.

Contrainte limite de l'acier en fonction des états considérés et de type de fissuration :

Tab.1 - Contraintes limites de calcul à l'ELU et à l'ELS de l'acier.

ELU : $f_s = f_e/\gamma_s = 400/1,15 = 348$ MPa	ELU : $f_s = 348$ MPa	ELU : $f_s = 348$ MPa
ELS : Fissuration peu préjudiciable Néant	ELS : Fissuration préjudiciable $\bar{\sigma}_s = \min [2/3f_e, 110\sqrt{\eta f_{tj}}]$ $\bar{\sigma}_s = 202$ MPa ; $\eta = 1,6$ f_e : Limite élastique en MPa	ELS : Fissuration très préjudiciable $\bar{\sigma}_s = \min [1/2f_e ; 90\sqrt{\eta f_{tj}}]$ $\bar{\sigma}_s = 165$ MPa ; $\eta = 1,6$ f_s : contrainte de calcul contrainte limite en MPa à l'ELU

1.8. -PRESENTATION DES REGLRES PARASISMIQUES ALGERIENNES RPA99

Le règlement parasismique algérien version 1999 (RPA99) est approuvé en 2000. Ce règlement est applicable pour toutes les zones sismiques du territoire national ainsi que pour les différents groupes d'usages. Ce règlement se situe dans la continuité des documents précédents RPA81 version 1983 et RPA88 version 1988 dont il a gardé la philosophie originelle [6].

Les combinaisons d'actions à considérer pour la détermination des sollicitations et des déformations de calcul sont :

Les combinaisons de calcul pour les poutres :

$$G + Q \pm E$$

$$0,8G \pm E$$

Avec : *G* = Charges permanentes.
Q = Charges d'exploitation non pondérées.
E = Effets des séismes.

CHAPITRE II : CONCEPTS ET FORMULATION GENERALE D'UN PROBLEME D'OPTIMISATION

2.1. - INTRODUCTION

L'optimisation peut être regardée comme une recherche systématique de l'excellence tendant à donner, dans un cadre de référence prédéterminé le meilleur usage des ressources disponibles bien que le choix de référence (objectifs réalistes, contraintes pertinentes, modèle mathématiques corrects, paramètres des charges et de sécurité adéquats) ait un effet fondamental sur les résultats de l'optimisation, sa discussion comporte une étude spéciale et approfondie.

Le mot optimisation en mathématique désigne la recherche des conditions moyennant pour les quelles une fonction donnée atteint un optimum, qui se présente le plus souvent comme un extremum. L'optimum impose qu'une certaine fonction de mérite (fonction objectif, fonction économique) soit maximale ou minimale.

C'est la recherche de la meilleure solution, évaluée selon certains critères avec prise en compte des conditions nécessaires. On voit immédiatement à quelle point ce genre de problème peut répondre à des préoccupations de tout ordre physique, mécanique, technique, économique,...etc.

Historiquement, le problème de maximiser ou de minimiser une fonction sous des conditions d'égalité est un problème mathématique bien classique (c'est un problème d'optimisation qui remonte à Lagrange après un premier intérêt porté par MONGE en 1776 à un problème de ce genre. Le fait d'étendre le théorie de Lagrange et de ses multiplicateurs au cas où il y a aussi des contraintes d'égalité est relativement nouveau et les premiers résultats ne datent que depuis 1948 c'est à dire à la arrivée du monde informatique [7,6].

l'objectif dans l'optimisation des éléments en béton armé est de trouver les dimensions optimales et le coût minimum correspondant des matériaux mis en œuvre.

En général, le nombre de variables de conception indépendantes est relativement petit et les contraintes sont données par des expressions explicites c'est souvent possible de trouver la solution optimale par une recherche directe dans un espace d'un ou deux variables qui représentent les dimensions du béton.

2.2. - ROLE DE L'OPTIMISATION

Le rôle de l'optimisation dans la construction est capital elle permet de déterminer la meilleure solution d'un problème et d'aboutir à des coûts minimaux. Le développement des méthodes d'optimisation n'a servi qu'à rendre explicite la recherche, l'évolution et le classement des options. Les tendances faites pour développer ces méthodes ont eu pour effets bénéfiques d'affiner notre compréhension du projet et d'identifier les applications valables de la sous optimisation et de restructurer un grand nombre des processus partiels qu'intègre l'étude du projet.

2.3. - DEFINITIONS

2.3.1 - Eléments de l'optimisation

Parmi les différentes méthodes ou formes d'optimisation (par exemple les méthodes variationnelles, les méthodes des multiplicateurs de Lagrange qui ne seront pas pris en compte), nous allons présenter ici une classe de méthodes d'optimisation appelée programmation mathématique .

La programmation mathématique se propose pour objet, l'étude théorique des problèmes d'optimisation ainsi que la conception et la mise en œuvre des algorithmes de résolution.

La présence du terme « Programmation » dans le nom donné à cette discipline peut s'expliquer historiquement par le fait que les premières recherches et les premières applications se sont développées dans le contexte de l'économie de la recherche opérationnelle.

Très naturellement, la terminologie employée alors reflète l'étroite relation existant entre l'activité d'analyse mathématique d'un problème et son interprétation économique (la recherche d'un programme économique optimale).

C'est ainsi que G.B Dantzig propose en 1949 le terme de programmation linéaire pour l'étude des problèmes théoriques et algorithmes liés à la programmation des fonctions sous contraintes linéaires. Dans le même sens, Kuhm et Tucker proposent le nom de programmation non linéaire pour l'étude des problèmes d'optimisation non linéaires avec ou sans contraintes. [14]

La programmation mathématique se propose pour objet l'étude théorique des problèmes d'optimisation ainsi que la conception et la mise en œuvre des algorithmes de résolutions .

La programmation en nombres entières est suggérée par Gomory pour les problèmes d'optimisation où les variables sont astreintes à ne prendre que les valeurs entières, tandis que le terme de programmation dynamique est employé par R.Bellman pour une méthode générale d'optimisation des systèmes dynamiques (c'est à dire évoluant au cours du temps). [14]

Cependant, malgré l'apparente diversité des thèmes abordés entre les années 1945 et 1960, la prise de conscience progressive d'une affinité profonde, tant du point de vue des structures que des méthodes, entre les différentes classes de problèmes, amène rapidement à les intégrer au sein d'une nouvelle discipline, plus vaste, la programmation mathématique, et marque l'annonce d'un vaste mouvement unificateur qui semble encore loin actuellement d'avoir atteint son terme.

La programmation mathématique est aujourd'hui une branche particulièrement active des mathématiques appliquées, et il y a, à cela, de nombreuses raisons. La première est peut être le nombre, la variété, et l'importance de ses applications que ce soit dans les sciences de l'ingénieur, ou dans d'autres domaines des mathématiques appliquées. Sans prétendre être exhaustif, on peut citer :

- En recherche opérationnelle : optimisation de systèmes technico-économiques (planification, économétrie), problèmes de transport, d'ordonnancement, de gestion de stocks, etc.
- En analyse numérique : approximation, régression, résolution de systèmes linéaires et non linéaires, méthodes numériques liées à la mise en œuvre des méthodes d'éléments fins, etc.
- En automatique : identification des systèmes, commande optimale des systèmes, filtrage, ordonnancement d'atelier, commande de robots, etc.
- En ingénierie : dimensionnement et optimisation de structures, conception optimale de systèmes techniques complexes tels que systèmes informatiques, réseaux d'ordinateurs, réseaux de transport, de télécommunications, etc.
- En économie mathématique : résolution de grands modèles macro-économiques (type modèle de Leontiev et dérivés), modèles micro-économiques ou modèles d'entreprise, théorie de la décision et théorie des jeux.

Mais l'importance de la programmation mathématique vient aussi du fait qu'elle fournit un cadre conceptuel adéquat pour l'analyse et la résolution de nombreux problèmes de mathématiques appliquées. En théorie des jeux, on connaît l'importance de la notion de point-col, et beaucoup de méthodes de résolution proviennent de recherches en programmation mathématique. En analyse numérique, la formulation variationnelle de nombreux problèmes et l'extension aux espaces fonctionnels des principaux algorithmes de la dimension finie ont fourni des outils systématiques pour traiter des équations aux dérivées partielles ou des problèmes de commande optimale. En programmation combinatoire, les principaux algorithmes de base (problèmes flots et d'affectation, problèmes de couplages et de cheminement dans les graphes, matroïdes et intersection de matroïdes) sont issus de recherches en programmation mathématique et utilisent les concepts de dualité, de complémentarité, d'unimodularité. L'ensemble des résultats ainsi obtenus a donné naissance, depuis 1974, à la théorie de la complexité qui, on le sait, fait l'objet de recherches intenses du fait de ses implications théoriques et pratiques en mathématiques appliquées et en informatique.

Ceci explique sans aucun doute que la programmation mathématique ait donné lieu, depuis 30 ans, à une intense activité de recherche et à un volume de publications considérable. Mais, au lieu de ce foisonnement, l'élaboration des concepts fondamentaux et la tendance à l'unification ont été constamment au centre des préoccupations, et c'est ainsi que l'histoire de cette discipline se trouve jalonnée par un certain nombre de travaux de synthèse remarquables, qui ont souvent été à l'origine de courants de recherche nouveaux et féconds [7,8].

2.3.2 - Formulation générale du problème

D'une façon générale, un problème de programmation mathématique non-linéaire peut être énoncé comme suit :

Trouver le vecteur $\{X\}$ de variables de décision (appelées aussi variables de conception) tel que :

$$Z = F(\{X\}) \longrightarrow \text{Min}$$

$$g_j(\{X\}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m.$$

$$h_j(\{X\}) = 0 \quad j = 1, \dots, k.$$

Z est la fonction objectif du problème désignée également par (fonction critère ou fonction mérite). Les fonctions g_j et h_j sont appelées contraintes d'inégalité et contraintes d'égalité respectivement.

Les contraintes d'égalité peuvent souvent être éliminées et la recherche optimale peut être effectuée dans l'espace des solutions admissibles défini par les contraintes d'inégalité. A ce jour il n'existe pas une méthode de programmation mathématique non linéaire que l'on peut qualifier de façon systématique comme la plus efficace et de nombreux algorithmes ont été proposés dans la littérature spécialisée [9].

2.3.3 - Variables de décision

Les variables de conception ou de décision ou variables de calcul sont constituées par des sections ou par les dimensions (épaisseur, longueur, ...) de la structure ou à d'autres paramètres. Dans les structures à deux ou trois dimensions ceux qui définissent la géométrie sont particulièrement intéressants à déterminer afin de minimiser la quantité des matériaux mis en œuvre.

Le calcul consiste à définir les valeurs des composantes du vecteur $X : x_1, x_2, \dots, x_n$, qui sont les inconnues du problème (on appelle ces composantes les variables de décision).

2.3.4 - Contraintes

La structure calculée doit satisfaire aux exigences fonctionnelles concernant la résistance, l'utilisation, ... etc. Ces exigences qu'on appelle conditions sont les limitations ou les contraintes du problème. Il convient de répartir les contraintes en deux classes ; celles qui doivent être satisfaites comme des égalités strictes et celles qui sont régies par des inégalités

2.3.5 - Fonction objectif

Parmi les facteurs caractéristiques d'une structure, il y a toujours un dont l'importance prédomine. C'est ce facteur qui constitue le critère d'optimisation et qui est représenté sous la forme d'une fonction objective $Z = F(\{X\})$ on dit aussi parfois : fonction économique, fonction critère ou fonction mérite).

En outre, le critère de mérite n'exige pas d'être déterministe et peut s'exprimer en terme de probabilité.

En optimisation des structures , on utilise souvent un volume minimal comme critère plutôt qu'un coût minimal pour la raison que les coefficients de coût sont trop difficiles à déterminer .

2.4. - TYPE DES PROBLEMES D'OPTIMISATION

- Problèmes probabilistes.
- Problèmes déterministes.

2.4.1 - Problèmes probabilistes

En général le problème de Dimensionnement probabiliste optimal peut être énoncé comme suit :

- Pour une structure à configuration, charges probables et variations des résistances connues.
- Trouver les résistances moyennes des éléments
- Telles que des niveaux de confiance spécifiés et des conditions d'économie déterminées soient satisfaits.

La confiance à ruine est définie comme la probabilité requise pour qu'une structure n'atteigne pas sa ruine plastique ; la confiance à plasticité est la probabilité nécessaire pour qu'une section de la structure ne soit pas la première à développer une rotule plastique.

2.4.2 - Problèmes déterministes

Soit une structure dont les charges, géométrie et dimensions des sections en béton sont fixées. Le problème de Dimensionnement optimal consiste à déterminer les variables x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) qui optimisent une certaine fonction de mérite et satisfaisant également aux contraintes.

Par conséquent, le Dimensionnement optimal est équivalent à un problème d'optimisation d'une fonction non-linéaire sous des contraintes non ou linéaires. Ceci constitue un problème typique de programmation non linéaire pouvant être résolu par les techniques de programmation mathématique.

2.5. - METHODE ET FORMULATION GENERALE D'UN PROBLEME D'OPTIMISATION DETERMINISTE

2.5.1 - Contraintes

Chaque groupe de valeur pour les variables de décision (ou de conception) représente une conception de la structure . Clairement , quelques conceptions sont des solutions utiles pour l'optimisation du problème, mais d'autres peuvent être inadéquates en terme de fonctions, comportement ou autre considération. Si une conception satisfait toutes les exigence ou condition imposées , elle sera dite " solution admissible " (ou solution faisable).

Les conditions (ou restrictions) qui doivent être satisfaites afin d'obtenir une conception sont dites les contraintes. Du point de vue physique on peut identifier deux sorte de contraintes :

1. Les contraintes imposées sur les variables de conception et qui limite leur champs pour des raisons que des considérations sont appelées contraintes de conception où contrainte de bon côté.
Les contraintes qui sont explicitées en forme peuvent provenir de différentes considérations telle que la fonctionnalité, la fabrication ou l'esthétique . De cette façon une contrainte de conception est une limitation spécifique ou imposée sur une variable conception .
2. Les contraintes qui dérivent des exigences sur le comportement sont appelées les contraintes de comportement. Les limitations sur les contraintes maximales, déplacement flambement sont des exemples typiques de contraintes de comportement.

Des contraintes de comportement explicites ou implicites sont toutes deux rencontrées dans la conception pratique .

Les contraintes de comportement explicites sont souvent données par des formules présentées dans des cadres de conception ou des spécifications. Cependant, les contraintes de comportement sont généralement implicites.

D'un point de vue mathématique, les contraintes de conception et de comportement peuvent être usuellement exprimées comme un groupe d'inégalités.

$$g_j(\{x\}) \leq 0 ; \quad j = 1, \dots, m.$$

où m est le nombre de contraintes d'inégalité et X le vecteur des variables qui peut comprendre les variables de décision et de comportement .

Souvent dans un problème de conception des structures, on a aussi à considérer les contraintes d'égalité de la forme générale :

$$h_j(\{X\}) = 0 ; \quad j = 1, \dots, k.$$

où k est le nombre d'égalité.

Dans la plupart des cas, les contraintes d'égalité peuvent être utilisées pour éliminer des variables des processus d'optimisation en réduisant leur nombre .

En général, les équations d'analyse d'un problème sous condition peuvent être exprimées en terme de variable de la forme de l'équation . Cependant, si nous choisissons les variables comme indépendantes alors ces équations peuvent calculés les variables de comportement pour chacun de conception donnés.

Cette procédure est avantageuse dans plusieurs cas , puisque nous avons à trouver les valeurs optimales d'un nombre moindre de variable, et le problème est dit avoir une dimension plus basse.

L'égalité peut présenter aussi différentes considérations de conception telle qu'un rapport désiré entre la longueur de section transversale et son épaisseur .

De telles simples et explicites contrainte peuvent facilement être utilisées pour réduire le nombre de variables indépendantes .

Cependant, dans certains cas la procédure de d'élimination peut être complexe et consomme de temps et quelques contraintes d'égalité doivent être considérées.

2.5.2 - Espace de conception

Nous pouvons voir chaque variable de décision comme une dimension dans un espace de conception, et chaque groupe particulier de ces variables comme un point de cette espace. Dans le cas de deux variables , l'espace de conception se ramène à un plan .

Dans le cas général de n variable nous avons un hyperplan de dimension n .

Une conception qui satisfait toutes ces contraintes $g_j(\{X\}) \leq 0$ est une conception faisable. Le groupe des valeurs variables de conception qui satisfait l'équation $g_j(\{X\}) = 0$ forme une surface dans l'espace de conception. C'est une surface dans le sens qu'elle coupe l'espace en deux régions, une région où $g_j > 0$ et l'autre $g_j < 0$.

Le groupe de toutes les conceptions faisables forme la région faisable. Les parties des surfaces de contraintes respectives qui limitent la région faisable forment la surface de contraintes composées.

Les points à l'intérieur de la région faisable (c'est à dire où $g_j < 0$; $i = 1, \dots, m$) sont appelés points libres, ou conception sans contrainte.

Les points sur la surface (les conceptions faisables pour lesquels $g_j = 0$) sont appelées points limites.

Il est possible que la région faisable soit composée de deux ou plus de sous régions disjointes, mais ceci est rare dans les problèmes de conception où les éléments ne peuvent pas être éliminés.

Le sous espace où deux ou plusieurs contraintes $g_j(\{X\})$ est appelé une intersection. Dans l'espace à deux dimensions, l'intersection de deux contraintes est un point.

La $j^{\text{ème}}$ contrainte est dite être active en un point de conception si $g_j(\{X\}) = 0$ et elle est dite passive si $g_j(\{X\}) < 0$. Si $g_j(\{X\}) > 0$, la contrainte est violée et la conception correspondante est infaisable.

Les contraintes d'égalité :

$$h_j(\{X\}) = 0 \quad j = 1, \dots, k.$$

Introduisent un couplage entre les variables ils peuvent être vues comme des surfaces dans l'espace de conception à n dimensions.

Les points de conception faisable doivent être localisés à l'intersection de ses surfaces.

Le nombre de contrainte d'égalité, k doit satisfaire $k \leq T$, où T est le nombre total des variables.

Dans le cas où $k = T$, les variables peuvent en principe être déterminées comme solutions des équations : $h_j(\{X\}) = 0$ et il n'y a pas de problème d'optimisations au sens propre.

2.5.3 - Fonction objectif

Il existe habituellement un nombre infini de conception faisable. Pour obtenir la meilleure, il est nécessaire de former une fonction de variable à utiliser pour la comparaison des conceptions faisables.

La fonction objectif appelé aussi coût, critère, ou fonction de mérite est la fonction à partir de laquelle la petite valeur est recherchée dans un problème d'optimisation. C'est une fonction de variable X et elle peut représenter le poids, le coût de la structure ou n'importe quelle autre critère à partir duquel une conception possible est préférée aux autres.

Nous supposons toujours que la fonction objectif $Z = F(\{X\})$ doit être minimisée ceci n'implique aucune diminution de la généralisation puisque le minimum de $-F(\{X\})$ est obtenu lorsque $F(\{X\})$ est maximum, c'est-à-dire $\text{Max}(F\{X\}) = -\text{Min}(-F\{X\})$.

Le choix d'une fonction objectif peut être une des plus importantes décisions dans la procédure d'une conception optimale.

La formulation mathématique de la fonction objectif peut être une tâche très difficile, par exemple lorsque des valeurs esthétiques importantes sont influencées par les variables de décision. En général, la fonction objectif représente la propriété simple la plus importante d'une conception mais elle peut représenter aussi la résultante d'un certain nombre de propriétés. Des précautions doivent être prises pour optimiser par rapport à la fonction objectif qui reflète au mieux, le véritable but des problèmes d'optimisation.

Le poids est la fonction objectif la plus habituellement utilisées dû au fait qu'il est facilement quantifiable bien que la plupart des méthodes d'optimisation ne se limitent pas à la minimisation du poids. Le poids de la structure est souvent d'une importance critique, mais la minimisation du poids n'est pas toujours la plus facile.

Le coût est d'une importance pratique plus grande que celle du poids, mais il est souvent difficile d'obtenir suffisamment de données pour la construction d'une fonction réelle du coût. Une fonction du coût général doit inclure le coût des matériaux, de la fabrication, du transport, ...etc. En plus du coût engendré par construction et la conception d'autres facteurs tels que mise en service, maintenance, réparation, assurance ...etc, doivent être considérés. Cependant, il n'est pas toujours désirable de considérer une fonction aussi large que possible.

D'un point de vue pratique, il est demandé d'introduire une fonction objectif qui est à la fois sensible aux variations des variables de décision et à la composante la plus importante du coût. En général, la fonction objective est une fonction non linéaire des variables de décision.

2.5.4 - formulation dans l'espace des variables de conception

Le problème général de conception de la structure optimale peut être formulé comme étant le choix d'une conception et des variables de comportement correspondantes soumises aux contraintes relatives à la conception et au comportement de la structure, de telle sorte que la fonction objectif soit minimale.

Si le comportement de la structure peut être facilement calculé pour n'importe quelle valeur donnée des variables de conception, les équations d'analyse peuvent être extraites de la formulation mathématique. Dans de tels cas, nous utilisons les équations d'analyse pour évaluer les contraintes qui sont données de façon implicite. Une formulation explicites de ces contraintes est possibles seulement pour des structures déterminées ou simples.

Supposons que toutes les contraintes d'égalité peuvent être éliminées, le problème de conception optimale peut être formulé mathématiquement comme étant une façon de choisir le vecteur des variables de décision $\{X\}$ de telle sorte :

$$g_j(x) \leq 0, 1, \dots, m.$$

$$Z = F(\{X\}) \longrightarrow \text{Min.}$$

L'équation signifie que $F(\{X\})$ donne un minimum.

Ce problème est dit formulé dans l'espace de conception puisque les variables de décision sont les seules indépendantes. Les deux équations ci-dessus représentent une forme de problème appelé programmation mathématique [10,11].

2.6. - ALGORITHME UTILISE POUR LA RESOLUTION NUMERIQUE

La plupart des méthodes existantes en programmation mathématique non linéaire peuvent se rattacher à deux grandes familles :

- Méthodes directes ou primales.
- Méthodes utilisant la notion de dualité.

Les méthodes primales engendrent une séquence de solutions c-à-d de points satisfaisant les contraintes, en assurant une décroissance monotone de la fonction à minimiser.

Dans la première famille on trouve :

1. Méthode des changements des variables.
2. Méthode des directions réalisables.
3. Méthode du gradient projeté.
4. Méthode du gradient réduit.
5. Méthode du gradient réduit généralisée.
6. Méthode de linéarisation séquentielle.

Dans la deuxième famille on trouve :

1. Méthodes de pénalité
2. Méthodes lagrangiennes classiques

Dans la présente étude la méthode de linéarisation séquentielle a été utilisée.

Formulation générale du problèmes de programmation non linéaire sous contraintes :

$$\begin{cases} Z = F(\{X\}) \longrightarrow \text{Min.} \\ \text{sous les contraintes :} \\ g_j(\{X\}) \leq 0 ; j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Z : étant la fonction objectif non linéaire

g_j : contrainte d'inégalités.

Le principe général consiste à remplacer la résolution d'un programme non linéaire par la résolution des d'une suite de programmes linéaires approximant le problème donné.

Les fonctions précédentes sont remplacées approximativement par :

$$F(\{X\}) \approx F^* + \{\nabla F^*\}^T(\{X\} - \{X^*\})$$

$$g_j(\{X\}) \approx g_j^* + \{\nabla g_j^*\}^T(\{X\} - \{X^*\})$$

$$\{\nabla F^*\} = \begin{Bmatrix} \partial F^* / \partial X_1 \\ \partial F^* / \partial X_2 \\ \vdots \\ \partial F^* / \partial X_n \end{Bmatrix} : \text{Gradient de } F^*.$$

F^* , ∇F^* , g_j^* et ∇g_j^* sont respectivement les valeurs de F , ∇F , g_j et ∇g_j au point $\{X^*\}$.

Le procédé consiste à substituer le programme non linéaire par une série de programmes linéaires tout en choisissant le point $\{X^*\}$ et on cherche $\{X\}$ par la résolution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} Z = F(\{X\}) \approx F^* + \{\nabla F^*\}^T(\{X\} - \{X^*\}) \longrightarrow \text{Min.} \\ \text{sous les contraintes :} \\ g_j^* + \{\nabla g_j^*\}^T(\{X\} - \{X^*\}) \leq 0 ; j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Parmi les méthodes de linéarisation tangentielle il y a la méthode des plans sécants de Kelly qui s'applique aux problèmes convexes avec fonction objectif et contraintes non linéaires [12,13,14,15,16]. voir détails en annexe IV

CHAPITRE III : CALCUL OPTIMAL DES POUTRES EN FLEXION EN BETON ARME AUX ETATS LIMITES

3.1. - INTRODUCTION

Les poutres à calculer sont généralement de sections rectangulaires ou en T.

Les poutres se raccordent continûment aux poteaux, ou à d'autres poutres ou à des murs de refend ; le calcul doit tenir compte de ces continuités, si bien que les poutres seront calculées comme des poutres continues sur appuis multiples.

En fonction des charges et surcharge appliquées, le règlement définit les combinaisons d'action à considérer dans chaque travée.

Le dimensionnement des sections passe par la recherche des courbes enveloppes des moments qui permettent de déterminer :

- * Les moments maximaux sur appuis et en travées;
- * La longueur des chapeaux sur appuis et les arrêts de barres.

Ces courbes enveloppes sont déterminées en envisageant, les différents cas de charge pour diverses combinaisons d'actions définies par le règlement.

3.2. - CONDUITE DES JUSTIFICATIONS

La démarche est la suivante :

- 1- Faire l'inventaire des actions et distinguer les actions permanentes et les actions variables.
- 2- Calculer leurs intensités :
 - Pour les actions permanentes : valeurs - caractéristiques calculées d'après le métré et les poids volumiques.
 - Pour les actions variables , voir les textes réglementaires ou normatifs.
- 3- Calculer les efforts engendrés par les actions selon les méthodes classiques de la RDM, ou selon des méthodes forfaitaires dans certains cas.
- 4- Combiner ces efforts pour calculer les sollicitations de calcul , on note :
 - M_u, V_u : moment fléchissant, effort tranchant en ELU,
 - M_{ser} : moment fléchissant en ELS.
- 5- Justifier chacun des états limites .

3.3. - COMBINAISON SIMPLIFIEES POUR BATIMENTS COURANTS

Pour déterminer la sollicitation de calcul dans les bâtiments courants, on utilise des combinaisons simplifiées :

A l'ELU

a- Combinaison fondamentale : $1,35 G + 1,5 Q_1$

b- combinaison accidentelle : $G + \psi_{11}.Q_1 + F_A$

A l'ELS

$G + Q_1$

3.4. - CALCUL DES SOLLICITATIONS

La simplification admise : Pour calculer les inconnues hyperstatiques d'une poutre continue sur appuis invariables, on évalue les rigidité des sections en supposant le béton non fissuré et en faisant abstraction des armatures.

3.5. - JUSTIFICATION DES SECTIONS SOUMISES A DES SOLLICITATIONS NORMALES - FLEXION SIMPLE

Une section de poutre est sollicitée en flexion simple lorsque le torseur gauche des éléments de réduction dans cette section se réduit, outre l'effort tranchant V , à un couple de moment M .

Le dimensionnement des sections, vis à vis du moment de flexion, s'effectuera en considérant l'état limite ultime de résistance ; ensuite il faudra vérifier que le dimensionnement ainsi "obtenu" satisfait aux conditions d'état limite de service vis - à vis de la durabilité et des déformations.

Enfin, un pourcentage minimal d'armatures devra être respecté afin de s'assurer de la condition de non - fragilité d'un élément en béton armé.

Dimensionnement d'une section de béton

Il s'agit d'indications sommaires pour déterminer les sections de coffrage des poutres dans le cas des bâtiments courants.

Le pré dimensionnement de ces sections tient compte des états limites ultimes et de services.

Lorsque les dimensions de la section de béton ne sont pas connues, on peut commencer par se fixer soit l'une des deux dimensions, soit un rapport entre elles (par exemple, b/h) ou la valeur du bras de levier $d = 0,9 h$.

Portée l à prendre en compte

Pour les poutres qui ne reposent pas sur des appareils d'appuis ni sur des massifs ou des murs en maçonnerie, la portée prise dans le calcul est entre nus des appuis.

Détermination de la hauteur h

Lorsque la hauteur h ne résulte pas d'impératifs de gabarit, de passage de gaines et de faux plafonds, elle est généralement fixée telles que le rapport $h/l =$ hauteur/portée, soit compris entre deux bornes extrêmes .

selon :

- L'importance des charges d'exploitation Q_1 .
- L'importance des déformations.

Détermination de la largeur b

Forfaitairement la largeur b de la poutre est choisie en fonction de h . Des règles de bonne construction consistent à limiter la valeur de b .

Calcul de la section d'acier

Détermination de la section d'armatures en ELU / ELS

1^{ère} méthode : Dimensionnement à l'ELU.

$A_{su} = M_u / (z_u \cdot \sigma_s)$; σ_s est donné par le diagramme de calcul des aciers :

$$z_u = d - 0,4 y_u = d(1 - 0,5\omega)$$

y_u : hauteur du béton comprimé

Lorsque, après avoir dimensionné la section à l'ELU, la vérification à l'ELS n'est pas assurée, il faut redimensionner la section à l'ELS.

2^{ème} méthode : Dimensionnement à l'ELS.

$$A_{ser} = M_{ser} / (z_{ser} \cdot \sigma_s)$$
 ; $z = d(1 - 0,333\omega)$; $\omega = y_{ser}/d$.

y_{ser} : hauteur du béton comprimé

En principe, il faudrait retenir : $A_s = \text{Max.} (A_{su} ; A_{ser})$.

Puis on effectue la vérification avec cette section d'armatures.

1. Cas de fissuration peu préjudiciable

La détermination des armatures étant effectuée à l'ELU et la section d'acier obtenue est A_{su} . Il suffit de faire le contrôle à l'ELS.

Contrôle

- Etat limite de compression du béton ($\sigma_{bc} \leq 0,6f_{c28}$)
- Condition de non fragilité ($A_s/bd \geq 0,23 (f_{c28} / f_e)$)

L'E.L.U. étant l'état déterminant.

2. Cas de fissuration préjudiciable

Etat déterminant : ELU ou ELS ?

Méthode :

- Détermination de la section théorique à l'ELU.
- Vérification des contraintes à l'ELS.

$$\sigma_{bc} \leq 0,6f_{c28}$$

$$\sigma_s \leq \bar{\sigma}_s$$

oui

La section réelle convient : ELU étant l'état déterminant .

Non

Détermination de la section à l'ELS

Contrôle :

$$\sigma_s \geq \bar{\sigma}_s \text{ ne convient pas.}$$

$$\sigma_{bc} \leq 0,6f_{c28} \text{ convient.}$$

L'ELS étant l'état déterminant.

3. Cas de la fissuration très préjudiciable

Calcul de la section théorique aux ELS.

Contrôle possible vis-à-vis de l'ELU ; comparer A_{ser} (ELS) et A_{su} (ELU).

$$A_{ser} > A_{su}$$

L'ELS étant l'état déterminant.

En conclusion :

Si après avoir dimensionné la section à l'ELU la vérification à l'ELS n'est pas assurée, il faut redimensionner la section à l'ELS.

Vérification des contraintes à l'ELS :

Les contraintes de services ne doivent pas dépasser les limites suivantes :

Béton

Contrainte limite (contrainte de calcul) du béton en compression : $\bar{\sigma}_{bc} = 0,6f_{c28} = 15 \text{ MPa}$

Acier

Une barre à haute adhérence Fe E400 (ELS).

◆ Fissuration peu préjudiciable : Néant

◆ Fissuration préjudiciable :

$$\bar{\sigma} = \text{Min.} [2/3f_e, 110 (\eta \cdot f_{t28})^{1/2}] \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_s = 202 \text{ MPa} ; \eta = 1,6 \text{ HA}$$

f_e : Limite élastique en MPa

◆ Fissuration très préjudiciable

$$\bar{\sigma}_s = \text{Min.} [1/2f_e, 90 (\eta \cdot f_{t28})^{1/2}] \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_s = 165 \text{ MPa} ; \eta = 1,6 \text{ HA}$$

Les calculs justificatifs concernant à la fois ELU et ELS.

Calcul aux ELU : (M_u ; A_{su})

Vérification aux ELS.

Parfois le cheminement est inverse :

Calcul à l'ELS : (M_{ser} ; A_{ser})

Contrôle à l'ELU.

En principe, il faudrait retenir : $A_s = \text{Max.} [A_{su}, A_{ser}]$.

Choix de la section d'acier avec $M_u > M_{ser}$: - si $A_{su} > A_{ser}$ on retient A_{su} .

- sinon on retient A_{ser} .

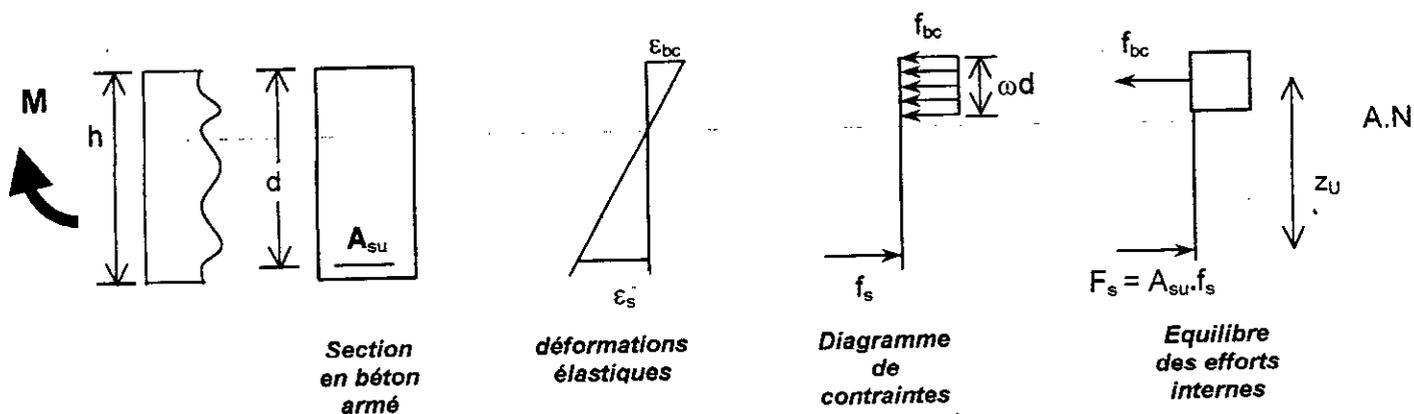


Fig.2 - Equilibre d'une section soumise à un moment de flexion ultime M_u : cas d'une section rectangulaire.

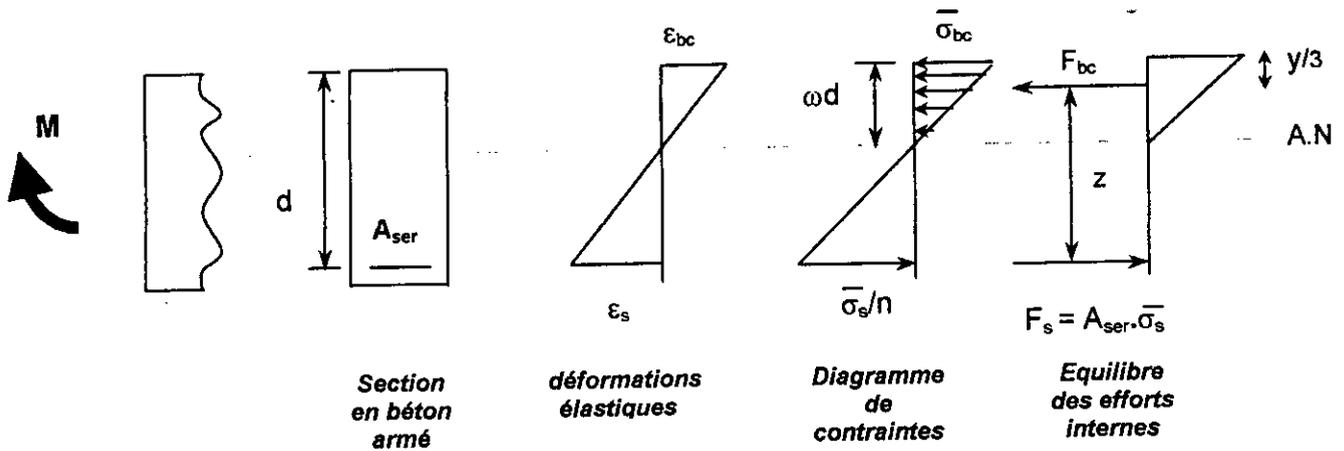


Fig.3 - Equilibre d'une section soumise à un moment de flexion de service M_{ser} : cas d'une section rectangulaire.

Relations dans une section fléchie (ELU).

Equilibre des efforts normaux

$$F_{bc} = F_s.$$

$$0,8y_u \cdot b \cdot f_{bc} = A_{su} \cdot f_s.$$

Bras de levier

$$z_u = d - 0,4y_u.$$

Equilibre des moments

$$M_u = F_{bc} \cdot z_u$$

$$M_u = 0,8y_u \cdot b \cdot f_{bc} (d - 0,4y_u) \text{ moment par rapport au c.d.g des aciers tendus.}$$

Position relative de la fibre neutre

$$\alpha_u = y_u/d \Leftrightarrow y_u = \alpha_u \cdot d$$

$$\text{on pose : } \omega = 0,8 \alpha_u = A_{su} \cdot f_s / b \cdot d \cdot f_{bc}$$

- Pourcentage mécanique : $\omega = A_{su} \cdot f_s / b \cdot d \cdot f_{bc} = (A_{su}/b \cdot d) (f_s/f_{bc}) = p(f_s/f_{bc})$
- Pourcentage géométrique : $p = (A_{su}/b \cdot d)$

$$M_r = 0,8y_u \cdot b \cdot f_{bc} (d - 0,4y_u).$$

$$M_r = 0,8\alpha_u \cdot d \cdot b \cdot f_{bc} (d - 0,4\alpha_u \cdot d).$$

$$M_r = 0,8\alpha_u \cdot b \cdot d^2 f_{bc} (1 - 0,4\alpha_u).$$

$$M_r = \omega \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{bc} (1 - 0,5\omega).$$

Dimensions de la section de béton :

Poutre à section rectangulaire

$$30 \leq h$$

$$20 \leq b \leq 50$$

$$h/b \leq 4$$

Le pourcentage géométrique minimal et maximal fixé par le RPA99

$$p_{\min} \leq p \leq p_{\max}$$

$$0,5 \% \leq p \leq 4 \%$$

Le pourcentage mécanique est donc compris entre les valeurs limites suivantes

$$\omega = p (f_s/f_{bc})$$

$$0,5 \% \leq p \leq 4 \%$$

$$0,5 \% (f_s/f_{bc}) \leq \omega \leq 4 \% (f_s/f_{bc})$$

Condition de non fragilité pour une section rectangulaire

Les armatures longitudinales doivent avoir une section minimale. Cette section doit être suffisante pour équilibrer l'effort qui provoquerait la fissuration du béton seul ; la contrainte normale dans l'acier restant inférieure à sa limite d'élasticité garantie .

$$(A_s/b.d) \geq 0,23(f_{t28}/f_e)$$

$$p \geq 0,23(f_{t28}/f_e)$$

$$\omega \geq 0,23(f_{t28}/f_e)(f_s/f_{bu}) = 0,23(f_{t28}/f_{bc})(f_s/f_e)$$

$$\omega \geq 0,23(f_{t28}/f_{bc})(1/\gamma_s)$$

$$\omega \geq 0,23(f_{t28}/f_{bc})(1/1,15)$$

MOMENT SOLLICITANT \leq MOMENT RESISTANT

$$M_u \leq N_{bu} \cdot z_u$$

$$M_u \leq 0,8y_u \cdot b \cdot f_{bu}(d - 0,4 y_u)$$

$$M_u \leq 0,8\alpha_u \cdot b \cdot d^2 f_{bc}(d - 0,4\alpha_u)$$

$$M_u \leq b \cdot d^2 \cdot f_{bc} \cdot \omega(1 - 0,5\omega)$$

3.6. - JUSTIFICATION DES SECTIONS SOUMISES A DES CONTRAINTES TANGENTES τ (EFFORT TRANCHANT V)

L'étude du moment de flexion permet de déterminer les dimensions transversales et les armatures longitudinales dans une section donnée.

L'étude de l'effort tranchant permet de vérifier l'épaisseur de l'âme et de déterminer les armatures transversales et l'épure d'arrêt des armatures longitudinales.

Dimensionnement

Les données sont :

- Les actions permanentes et variables (ces dernières sont en général uniformes).
- La résistance f_{c28} du béton et la limite f_e des armatures.
- Les dimensions b , d et h de la poutre le type de fissuration et l'hypothèse concernant l'inclinaison des cadres.

On détermine les efforts tranchants :

- Sur appui : $X = 0$; $V_u(0)$.
- Au voisinage de l'appui $X = h/2$; $V_u(h/2)$.

Vérification du béton de l'ame

On calcule $\tau(0) = \hat{V}_u(0)/b.d$ et on détermine $\tau_{u\max}$.

Si $\tau_u(0) \leq \tau_{u\max}$, on peut continuer.

Si $\tau_u(0) > \tau_{u\max}$, on change α , ce qui donne un nouveau $\tau_{u\max}$.

On change d et/ou b.

IL est nécessaire d'effectuer les vérifications aux états limites ultimes et de services; les phénomènes de fissuration et de déformation dues à l'effort tranchant étant nettement moindres à l'ELS qu'à l'ELU. Le règlement prévoit que seul l'ELU est vérifié, la justification à l'ELS se traduisant uniquement par des dispositions constructives.

Contrainte tangente conventionnelle $\bar{\tau}_u$ à l'ELU

$$\bar{\tau}_u = V_u/b.d.$$

Contrainte tangente limite ultime $\bar{\tau}_u$

$$\bar{\tau}_u = \text{Min.}[0,20/\gamma_b \cdot f_{c28}; 5 \text{ MPa}] \text{ fissuration peu préjudiciable.}$$

$$= \text{Min.}[3,33; 5 \text{ MPa}].$$

$$\bar{\tau}_u = 3,33 \text{ MPa.}$$

$$\tau_u \leq \bar{\tau}_u.$$

$$\tau_u \leq \bar{\tau}_u \Leftrightarrow V_u/b.d \leq \bar{\tau}_u.$$

$$b.d \geq V_u/\bar{\tau}_u.$$

3.7. - CALCUL DES FLECHES SELON CBA93

Flèches admissibles

Il est admis dans les règles CBA, que la part de flèche qui est susceptible de mettre en cause le bon comportement des cloisons, des revêtements de sols ou des plafonds, ne doit pas dépasser :

A. Pour les éléments supports reposant sur deux appuis

$l/500$ pour les portées inférieures à 5 m.

$[l/1000] + 0,005$ pour les portées supérieures à 5 m.

B. Pour les éléments supports en console

$L/250$ pour les portées inférieures à 2 m.

A défaut de recommandations dans les règles CBA on pourra prendre $l/400$ pour des planchers ne supportant pas d'éléments fragiles et $l/200$ pour des couvertures de bâtiment du type industriel. Il s'agit des flèches moins sévères pour plancher non liés à des éléments fragiles.

Lorsqu'il est nécessaire de calculer les flèches, parce qu'on ne trouve dans un cas non envisagé précédemment on utilise les méthodes usuelles de la RDM, mais pour tenir compte des fissures éventuelles dans les zones tendues, au lieu du moment d'inertie réel de la section homogène, on considère un moment d'inertie fictif I_f . Le moment d'inertie n'est pas constant parce que d'une part, la section de l'acier varie le long de la travée, pour des raisons d'économie, on arrête les lits d'acier inutile sans les zones de moment faible et, d'autre part, la fissuration du béton tendu interdit de prendre en compte dans le calcul d'inertie, cette partie

tendue il faut noter qu'il est très difficile, sinon impossible de prévoir les zones où le béton sera fissuré, car la résistance à la traction du béton peut être atteinte pour des raisons due au retrait, à des variations thermiques.

Le calcul des déformations est effectué pour évaluer les flèches dans l'intention de fixer les contre - flèches à la construction ou de limiter les déformations de service.

Le calcul des déformations globales doit tenir compte des phases successives de la construction et des différentes sollicitations exercées.

Les déformations dues à la flexion sont obtenues par une double intégration des courbures, les difficultés du calcul réside dans la prise en compte de la fissuration puisqu'elle modifie la rigidité des sections.

En outre, suivant le but recherché, il faut tenir compte des déformations différées.

Dans les cas courantes, on utilise les relations classiques de la résistance des matériaux (RDM) en introduisant une inertie fictive et le module d'élasticité instantané ou différé du béton. Dans le cas des poutres simplement appuyées ou continuées et des bandes de dalle, continues ou non, dirigées dans le sens de la petite portée. On peut admettre les relations :

1. Pour les flèches dues aux charges instantanées

$$f_i = M.l^2/10E_i.l_f i.$$

Avec : $E_i = 11000(f_{c28})^{1/3}$ et $l_f i = (1,1l_0)/(1 + \lambda_i.\mu)$

$$\lambda_i = (0,05f_{c28})/[\rho(2 + 3b_0/b)]$$

$$\mu = 1 - 1,75 f_{c28}/(4\rho.\sigma_s + f_{c28}).$$

2. Pour les flèches dues aux charges de longue durée

$$f_v = M.l^2/10E_v.l_N ; E_v = E_i/3 ; l_N = l_0/(1 + 0,4\mu.\lambda_i)$$

Où l_0 est le moment d'inertie de la section totale rendue homogène.

3.8. - FORMULATION MATHÉMATIQUE DE L'OPTIMISATION DES POUTRES EN BETON ARME

Soit Z la fonction objectif représentant la fonction coût des matériaux acier et béton mis en œuvre. Cette fonction peut être définie comme suit :

$$Z = L(b.d.C_b + A_s.C_s) \quad \text{valeur absolue de coût}$$

Où :

L : Longueur de l'élément de poutre.

b : Largeur de la section de béton.

d : Hauteur utile de la section de béton armé ($d = 0,9h$).

h : Hauteur totale de la section de béton.

A_s : Section d'acier supposée constante le long de la poutre .

C_b : Coût unitaire de béton.

C_s : Coût unitaire de l'acier.

L'objet est de trouver les valeurs optimales des variables b, d et A_s de telle manière que la fonction Z représentant les coûts des matériaux mis en œuvre soit minimale. D'autres composantes de coût peuvent être incluses si nécessaire. IL demeure entendu que le coût unitaire du béton C_b couvre les frais de confection, coulage vibration, manutention, fourniture et toutes sujétions de mise en œuvre d'une part et les frais de coffrages (étais, pointes, huile de décoffrage et toutes sujétions de décoffrages), d'autre part. De manière analogue, le coût unitaire de l'acier C_s comprend tous frais de fourniture, façonnage, coupes, fils de ligature, manutention et toutes sujétions d'exécution. La valeur du rapport C_s / C_b peut dépendre de la zone de construction considérée (par exemple zone nord ou zone sud dans le cas de l'Algérie), [17], voir annexe1.

IL est également important de noter que dans un programme d'optimisation de coût, seules les valeurs relatives de coût sont importantes et non pas les valeurs absolues. Les valeurs absolues de coût affectent la valeur finale de la fonction objectif et non pas les valeurs optimales des variables de décision de sorte que la fonction objectif à optimiser pourra s'écrire comme suit (Z : valeur relative de coût).

$$Z = b.d + (C_s/C_b)A_s \longrightarrow \text{Min.}$$

En général, les contraintes de comportements sont basées sur les prescriptions réglementaires prévues par des divers codes utilisés et dépendent ainsi de la philosophie de calcul adoptée (ELU/ELS par exemple).

On montre dans ce cas que le problème revient à déterminer les variables b , d , A_s et ω devant satisfaire la fonction objectif Z soumise à des contraintes d'inégalité et d'égalité. Ces contraintes peuvent se présenter sous des expressions analytiques diverses selon la philosophie de calcul considérée. Mathématiquement, on peut distinguer les deux formulations suivantes :

3.8.1 - Formulation du problème de dimensionnement optimal à l'ELU

Trouver les variables de décision b , d , A_s et ω telles que :

$$Z = b.d + C_s/C_b.A_s \longrightarrow \text{Min.}$$

sous les contraintes suivantes :

$$M \leq f_{bc}.b.d^2.\omega(1 - 0,5\omega).$$

$$\omega = (f_s/f_{bc})(A_s/b.d)$$

$$(A_s/b.d)_{inf}.(f_s/f_{bc}) \leq \omega \leq (A_s/b.d)_{sup}.(f_s/f_{bc})$$

$$V \leq \bar{\tau}_u \leq b.d.$$

$$d_{inf} \leq d \leq d_{sup}.$$

$$b_{inf} \leq b \leq b_{sup}.$$

Contraintes de comportement en flexion.

Contrainte de cisaillement.

Contraintes géométriques de coffrage.

où :

M : Moment de flexion ultime maximal.

V : Effort tranchant ultime maximal.

ω : Pourcentage mécanique.

P : Pourcentage géométrique ($P = A_s/b.d$).

f_{bc} : Contrainte limite de béton en compression à l'ELU.

f_s : Contrainte limite de l'acier à l'ELU.

$\bar{\tau}_u$: Contrainte limite de cisaillement.

h : Hauteur totale de la poutre ($d = 0,9h$).

Il demeure entendu que selon le mode de fissuration envisagé, il conviendra autant que de besoin de s'assurer que la solution optimale obtenue vérifie les critères de calcul à l'ELS. Dans le cas contraire, il est recommandé de reprendre la même formulation de l'ELU de manière itérative, en modifiant appropriée les valeurs des paramètres de coffrage et les sollicitations correspondantes.

3.8.2 - Formulation du problème de dimensionnement optimal à l'ELS

Trouver les variables de décision b , d , A_s et ω telles que :

$$Z = b \cdot d + C_s / C_b \cdot A_s \longrightarrow \text{Min.}$$

sous les contraintes suivantes :

$$\sigma_b \leq \bar{\sigma}_b$$

$$\sigma_s \leq \bar{\sigma}_s$$

$$\omega = 2(\bar{\sigma}_s / \bar{\sigma}_b)(A_s / b \cdot d)$$

$$(A_s / b \cdot d)_{\text{inf}} \cdot (\bar{\sigma}_s / \bar{\sigma}_b) \leq \omega \leq (A_s / b \cdot d)_{\text{sup}} \cdot (\bar{\sigma}_s / \bar{\sigma}_b)$$

$$f \leq \bar{f}$$

$$d_{\text{inf}} \leq d \leq d_{\text{sup}}$$

$$b_{\text{inf}} \leq b \leq b_{\text{sup}}$$

où :

σ_b : Contrainte de compression dans le béton à l'ELS.

σ_s : Contrainte de traction dans l'acier à l'ELS.

$\bar{\sigma}_s$: Contrainte limite de béton en compression à l'ELS.

$\bar{\sigma}_b$: Contrainte limite de l'acier à l'ELS.

f : Flèche calculée.

\bar{f} : Flèche admissible.

Contraintes de comportement en flexion.

Contrainte de flèche.

Contraintes géométriques de coffrage.

Il demeure entendu que selon le mode de fissuration envisagé, il conviendra autant que de besoin de s'assurer que la solution optimale obtenue vérifie les critères de calcul à l'ELU. Dans le cas contraire, il est recommandé de reprendre la même formulation de l'ELS de manière itérative, en modifiant appropriée les valeurs des paramètres de coffrage et les sollicitations correspondantes.

3.9. - CALCUL OPTIMAL D'UNE POUTRE EN FLEXION EN BA SUR APPUIS SIMPLES

3.9.1 - Calcul statique optimal

A. Calcul statique optimal à l'ELU

Hypothèses générales

La poutre étudiée, représentée sur la figure Fig.4, est sollicitée en flexion simple sous l'effet des charges permanentes G , des charges variables Q uniformément réparties et des charges sismiques E . L'étude de la poutre se ramène à celle de sa section centrale.

Les caractéristiques mécaniques des matériaux (f_{c28} ; f_e), géométriques (b ; h) et de chargement (G ; Q) sont supposées constantes le long de la fibre moyenne. On a admis également que les hypothèses classiques de la RDM et du béton armé restent valables.

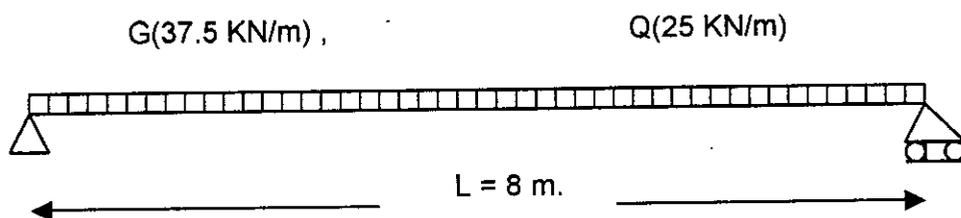


Fig.4 - Poutre en flexion en BA sur appuis simples chargée uniformément.

Données géométriques et de chargement :

Portée de calcul : $L = 8 \text{ m}$

Charges permanentes : $G = 37,5 \text{ KN/m}$.

Charges d'exploitations : $Q = 25 \text{ KN/m}$.

Sollicitations dues aux charges permanentes G :

$M_G = 0,30 \text{ MNm}$.

$V_G = 0,15 \text{ MN}$.

Sollicitations dues aux charges d'exploitation Q :

$M_Q = 0,20 \text{ MNm}$.

$V_Q = 0,10 \text{ MN}$.

Combinaisons de sollicitations à l'ELU (CBA93)

$M = 1,35M_G + 1,5M_Q = 0,705 \text{ MNm}$.

$V = 1,35V_G + 1,5V_Q = 0,352 \text{ MN}$.

Combinaisons de sollicitations à l'ELS (CBA93)

$M = M_G + M_Q = 0,500 \text{ MNm}$.

$C_s/C_b = 52$ (voir détails en annexe I)

Tab.2 - Récapitulatif des données de base.

Données	CBA93-RPA99 / Algérie
Résistance caractéristique du béton à 28 jours : f_{c28}	25 MPa (sur cylindre 16x32 cm)
Limite élastique de l'acier : f_e	400 MPa
Contrainte limite du béton à l'ELU : f_{bc}	14,17 MPa
Contrainte limite du béton à l'ELS : $\bar{\sigma}_b$	15 MPa
Contrainte limite de l'acier à l'ELU : f_s	348 MPa
Contrainte limite de l'acier à l'ELS : $\bar{\sigma}_s$ (Fissuration peu préjudiciable)	Néant
Contrainte limite de l'acier à l'ELS : $\bar{\sigma}_s$ (Fissuration très préjudiciable)	165 MPa
Contrainte de cisaillement admissible du béton : $\bar{\tau}_u$	3,33 MPa
Module de déformation E_s longitudinale de l'acier	200000 MPa
Module de déformation E_{ij} longitudinale du béton	32164 MPa
Coefficient d'équivalence n	15
Pourcentage géométrique minimal pour la poutre	0,12 %
Pourcentage géométrique maximal pour la poutre	4 %
Pourcentage géométrique minimal pour la dalle	0,08 %
Pourcentage géométrique maximal pour la dalle	4 %
Flèche admissible : \bar{f}	$l/1000 + 0,005$; si $l > 5$ m $l/500$; si $l \leq 5$ m
Coffrage pour poutre	$h \geq 30$ cm ; $b \geq 20$ cm et $h/b \leq 4$
Combinaison fondamentale de charges à l'ELU	1,35G + 1,5Q
Combinaison fondamentale de charges à l'ELS	G + Q
Combinaison défavorable (séisme) pour l'élément de poutre	G + Q + E

Calcul statique optimal à l'ELU

$$Z = b.d + 52A_s \longrightarrow \text{Min}$$

sous les contraintes :

$$0,0498 \leq b.d^2.\omega(1 - 0,5\omega).$$

$$\omega = 24,559A_s/b.d.$$

$$0,03 \leq \omega \leq 0,98.$$

$$0,106 \leq b.d.$$

$$0,20 \leq b \leq 0,50.$$

$$0,27 \leq d.$$

$$d/b \leq 3,6.$$

Tab.3 - Solution optimale d'une poutre en flexion en BA à l'ELU.

Résultats	Règles : CBA93 / ELU
b_{opt} [m]	0,22
d_{opt} [m]	0,81
A_{sopt} [m ²]	$32,15 \cdot 10^{-4}$
ω_{opt}	0,437
Z_{opt} [m ²]	0,348

Equations analytiques

$$d = (1,685/b)^{1/2} ; \omega = 0,03.$$

$$d = (0,100/b)^{1/2} ; \omega = 0,98.$$

$$d = 0,106/b.$$

$$d = [3,117Z - (4,481Z^2 - 2,338b)^{1/2}]/5,235b.$$

$$d = [3,117Z + (4,481Z^2 - 2,338b)^{1/2}]/5,235b.$$

$$0,20 \leq b \leq 0,50.$$

$$0,27 \leq d.$$

$$d/b \leq 3,6.$$

$$Z = 0,348.$$

$$d = [1,085 + (0,543 - 2,338b)^{1/2}]/5,235b.$$

$$d = [1,085 - (0,543 - 2,338b)^{1/2}]/5,235b.$$

$$Z = 0,400.$$

$$d = [1,247 + (0,717 - 2,338b)^{1/2}]/5,235b.$$

$$d = [1,247 - (0,403 - 2,338b)^{1/2}]/5,235b.$$

$$Z = 0,500.$$

$$d = [1,559 + (1,120 - 2,338b)^{1/2}]/5,235b.$$

$$d = [1,559 - (1,120 - 2,338b)^{1/2}]/5,235b.$$

$$Z = 0,600.$$

$$d = [1,870 + (1,613 - 2,338b)^{1/2}]/5,235b.$$

$$d = [1,870 - (1,613 - 2,338b)^{1/2}]/5,235b.$$

La solution classique selon les normes en vigueur (CBA93) s'écrit :

$$b_{\text{clas}} = 0,50 \text{ m} ; d_{\text{clas}} = 0,73 \text{ m} ; A_{\text{sclas}} = 30,98.10^{-4} \text{ m}^2 ; \omega_{\text{clas}} = 0,208 ; Z_{\text{clas}} = 0,526 \text{ m}^2.$$

La solution optimale obtenue sur la base des contraintes définies à partir des normes (CBA93) est :

$$b_{\text{opt}} = 0,22 \text{ m} ; d_{\text{opt}} = 0,81 \text{ m} ; A_{\text{sopt}} = 32,15.10^{-4} \text{ m}^2 ; \omega_{\text{opt}} = 0,437 ; Z_{\text{opt}} = 0,348 \text{ m}^2.$$

D'après les résultats ci-dessus, on voit clairement que l'économie en volume de béton est considérable (de l'ordre de 50%). On observe également que le fonctionnement mécanique à la compression de la section de béton est nettement mieux exploité (profondeur de l'axe neutre pratiquement double). Ces conclusions sont corroborées par le rapport des coûts (tel qu'exprimé par la fonction objectif) $Z_{\text{clas}}/Z_{\text{opt}} = 1,51$ ou en d'autres termes par un gain global de 51% par rapport un calcul classique. (voir détails en annexe II)

Il est à noter que la recherche de la solution du problème de dimensionnement statique optimal a été effectuée en considérant deux formulations possibles. Dans la première formulation mathématique, aucune condition de coffrage sur la poutre n'est incluse (cas du CBA93). Dans la seconde formulation mathématique, les bornes inférieures et supérieures sont introduites à partir de l'RPA99.

Les résultats montrent clairement que la solution mathématique optimale obtenue dans le cas de la première formulation (conditions de coffrage de poutre exclues) n'a aucun sens physique.

$$b_{\text{opt}} = 0,07 \text{ m} ; d_{\text{opt}} = 15,90 \text{ m} ; A_{\text{sopt}} = 1,29.10^{-4} \text{ m}^2 ; \omega_{\text{opt}} = 0,03 ; Z_{\text{opt}} = 0,113 \text{ m}^2.$$

En revanche, dans le cas de la deuxième formulation pour laquelle les conditions de coffrage de poutre ont été introduites conformément aux prescriptions RPA99 corrigées, la solution optimale obtenue est rationnelle sur le double plan de la sécurité.

$$b_{\text{opt}} = 0,22 \text{ m} ; d_{\text{opt}} = 0,81 \text{ m} ; A_{\text{sopt}} = 32,15.10^{-4} \text{ m}^2 ; \omega_{\text{opt}} = 0,437 ; Z_{\text{opt}} = 0,348 \text{ m}^2.$$

Il est également utile de noter que la valeur optimale de la variable de décision b_{opt} du vecteur solution du problème d'optimisation considéré est proche de la limite inférieure des conditions de coffrage de poutre indépendamment de l'approche de calcul considérée : ELU ou ELS.

L'espace des solutions admissibles, la solution optimale ainsi que les contraintes du problème sont illustrées graphiquement sur la figure Fig.5.

Dans les exemples d'illustration la largeur maximale de l'élément de poutre est prise égale à la valeur : $b_{\text{max}} = 0.50\text{m}$

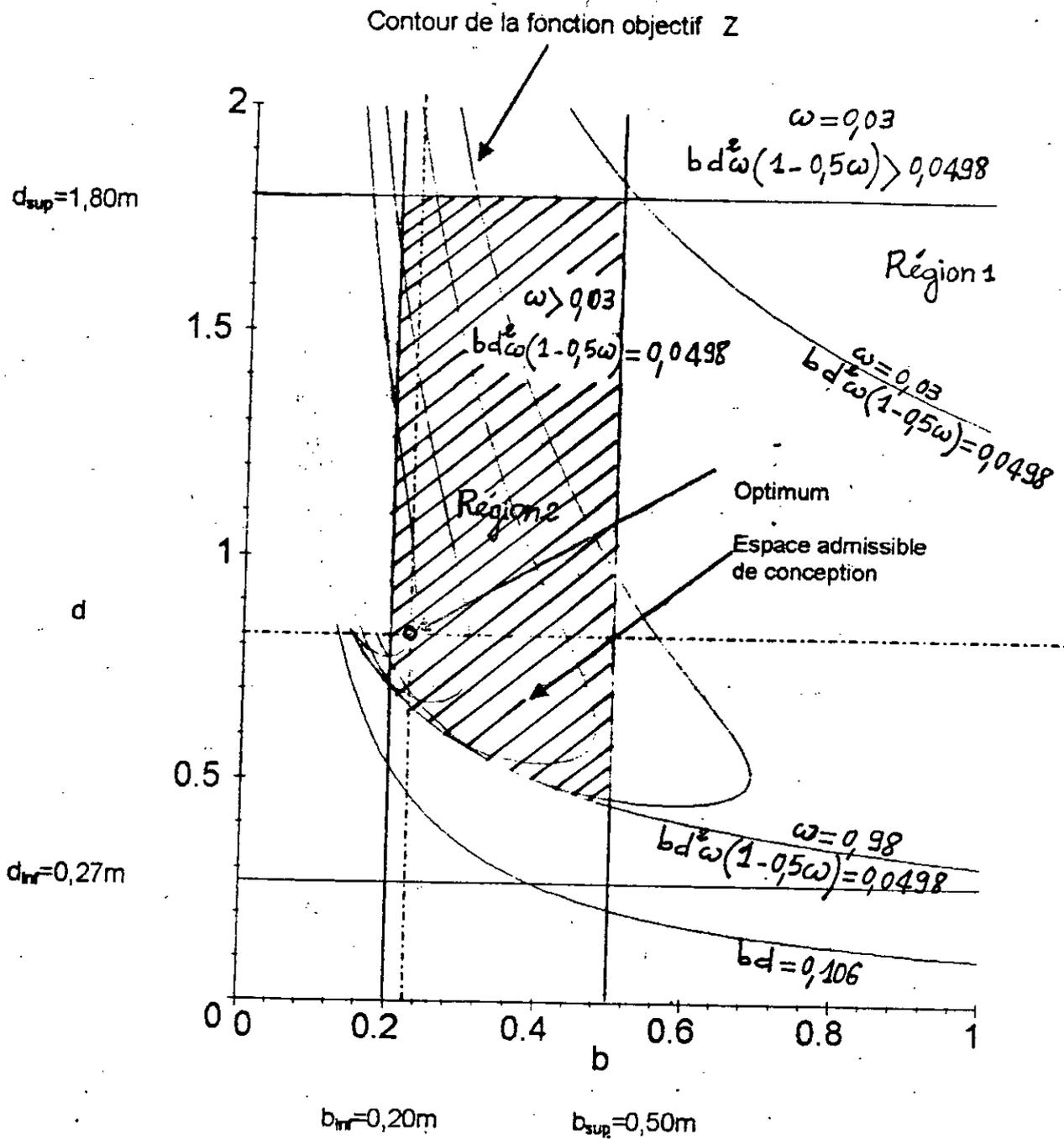


Fig.5: Calcul statique optimal d'une poutre en BA à l'ELU (CBA93)

Espace de conception et solution optimale : $b_{opt} = 0,22m$ $d_{opt} = 0,81m$ $Z_{opt} = 0,348m^2$.

Calcul statique optimal à l'ELS dans le cas de fissuration très préjudiciable

$$Z = b.d + 52A_s \longrightarrow \text{Min.}$$

sous les contraintes :

$$1 \leq 30b.d^2 [\omega^2/3 + 0,682.(1 - \omega)^2].$$

$$1 \leq 330b.d^2.\omega[\omega^2/3 + 0,682.(1 - \omega)^2] + \omega.$$

$$\omega = 22 A_s / b.d.$$

$$0,02 \leq \omega \leq 0,88.$$

$$0,0697 \leq b.d^3.$$

$$0,20 \leq b \leq 0,50.$$

$$0,27 \leq d.$$

$$d/b \leq 3,6.$$

Tab.4 - Solution optimale d'une poutre en flexion en BA à l'ELS.

Résultats	Règles : CBA93 / ELS
b_{opt} [m]	0,20
d_{opt} [m]	0,70
A_{sopt} [m ²]	$3,01.10^{-4}$
ω_{opt}	0,047
Z_{opt} [m ²]	0,156

3.9.2 - Calcul dynamique optimal sous séisme vertical (méthode modalo-spectrale)

L'évaluation des efforts est effectuée en utilisant la méthode modalo-spectrale soumise aux diverses combinaisons de chargement prévues par les règles RPA99. Une étude préalable a montré que pour le cas d'espèce étudié la combinaison (G + Q + E) est déterminante. Il en résulte que la suite de calculs sera effectuée sous cette combinaison [6,18,19].

La poutre est soumise aux effets d'un séisme dont la composante verticale est déduite par le spectre d'accélération horizontale défini par le RPA99 pondéré par un coefficient égal à 2/3.

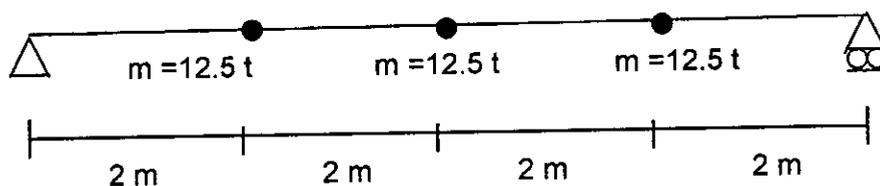


Fig.6 - Poutre en BA en flexion sous actions sismiques verticales

Les données sismiques suivantes sont considérées à titre illustratif :

Coefficient d'accélération de zone : $A = 0,35$ (niveau comparable au niveau prévu par le RPA99 pour les constructions de groupe d'usage 1A implantées en Zone III).

Coefficient de comportement de la structure : $R = 1$.

Facteur d'amortissement : $\xi = 5\%$.

Facteur de qualité : $Q = 1$.

Périodes caractéristiques associées aux sites rocheux S_1 : $T_1 = 0,15$ s et $T_2 = 0,30$ s.

En outre, les données du problème d'optimisation sont identiques au cas précédent à l'exception des caractéristiques de calcul suivantes :

Données relatives au matériau béton :

Contrainte limite de calcul : $f_{bc} = 18,48 \text{ MPa}$.

Contrainte limite de cisaillement : $\bar{\tau}_u = 4,35 \text{ MPa}$.

Données relatives au matériau acier :

Contrainte limite de calcul : $f_s = 400 \text{ MPa}$.

La résolution du problème aux vibrations propres fournit les périodes propres T_i , les formes propres associées ϕ_i ainsi que les pourcentages de participation modaux suivants :

Périodes :

$$T_1 = 0,12 \text{ s.}$$

$$T_2 = 0,03 \text{ s.}$$

$$T_3 = 0,02 \text{ s.}$$

Les vecteurs propres :

$$\phi_1 \begin{vmatrix} 0.141421 \\ 0.200000 \\ 0.141421 \end{vmatrix}$$

$$\phi_2 \begin{vmatrix} 0.20000 \\ 0.00000 \\ -0.20000 \end{vmatrix}$$

$$\phi_3 \begin{vmatrix} 0.141421 \\ -0.20000 \\ 0.141421 \end{vmatrix}$$

Les pourcentages de participation modale :

$$\text{Mode 1 : } 97,86\%.$$

$$\text{Mode 2 : } 0,00.$$

$$\text{Mode 3 : } 2,14 \%.$$

(voir détails en annexe III)

Sollicitations dues aux charges permanentes G :

$$M_G = 0,30 \text{ MNm.}$$

$$V_G = 0,15 \text{ MN.}$$

Sollicitations dues aux charges d'exploitation Q :

$$M_Q = 0,20 \text{ MNm.}$$

$$V_Q = 0,10 \text{ MN.}$$

Sollicitations sismiques E :

$$M_E = 0,0550386 \text{ MNm.}$$

$$V_E = 0,02052795 \text{ MN.}$$

Combinaison défavorable de sollicitations : (RPA99)

$$M = M_G + M_Q + M_E = 0,555 \text{ MNm.}$$

$$V = V_G + V_Q + V_E = 0,270 \text{ MN.}$$

Calcul dynamique optimal selon RPA99

$$Z = b.d + 52A_s \longrightarrow \text{Min.}$$

sous les contraintes :

$$0,030 \leq b.d^2 \omega(1 - 0,5\omega)$$

$$\omega = 21,645A_s/b.d.$$

$$0,11 \leq \omega \leq 0,87.$$

$$0,062 \leq b.d.$$

$$0,20 \leq b \leq 0,50.$$

$$0,27 \leq d.$$

$$d/b \leq 3,6.$$

Tab.5 - Solution optimale d'une poutre en flexion en BA obtenue par un calcul dynamique optimal.

Résultats	Règles : RPA99 Zone Nord
b_{opt} [m]	0,20
d_{opt} [m]	0,72
A_{sopt} [m ²]	$23,35 \cdot 10^{-4}$
ω_{opt}	0,351
Z_{opt} [m ²]	0,265

Equations analytiques

$$d = (0,289/b)^{1/2} ; \omega = 0,11.$$

$$d = (0,061/b)^{1/2} ; \omega = 0,87.$$

$$d = 0,062/b.$$

$$d = [3,402Z - (5,771Z^2 - 2,010b)^{1/2}]/5,805b.$$

$$d = [3,402Z + (5,771Z^2 - 2,010b)^{1/2}]/5,805b.$$

$$Z = b \cdot d [3,402 - 2,402(1 - 0,0544/b \cdot d^2)^{1/2}].$$

$$0,20 \leq b \leq 0,50.$$

$$0,27 \leq d.$$

$$d/b \leq 3,6.$$

$$Z = 0,265.$$

$$d = [0,902 + (0,405 - 2,010b)^{1/2}]/5,805b.$$

$$d = [0,902 - (0,405 - 2,010b)^{1/2}]/5,805b.$$

$$Z = 0,400.$$

$$d = [1,361 + (0,923 - 2,010b)^{1/2}]/5,805b.$$

$$d = [1,361 - (0,923 - 2,010b)^{1/2}]/5,805b.$$

$$Z = 0,500.$$

$$d = [1,701 + (1,443 - 2,010b)^{1/2}]/5,805b.$$

$$d = [1,701 - (1,443 - 2,010b)^{1/2}]/5,805b.$$

$$Z = 0,600.$$

$$d = [2,041 + (2,078 - 2,010b)^{1/2}]/5,805b.$$

$$d = [2,041 - (2,078 - 2,010b)^{1/2}]/5,805b.$$

On constate que la solution optimale obtenue en utilisant la combinaison fondamentale de chargement statique à l'ELU est déterminante.

L'espace des solutions admissibles, la solution optimale ainsi que les contraintes du problème sont illustrées graphiquement sur la figure Fig.7.

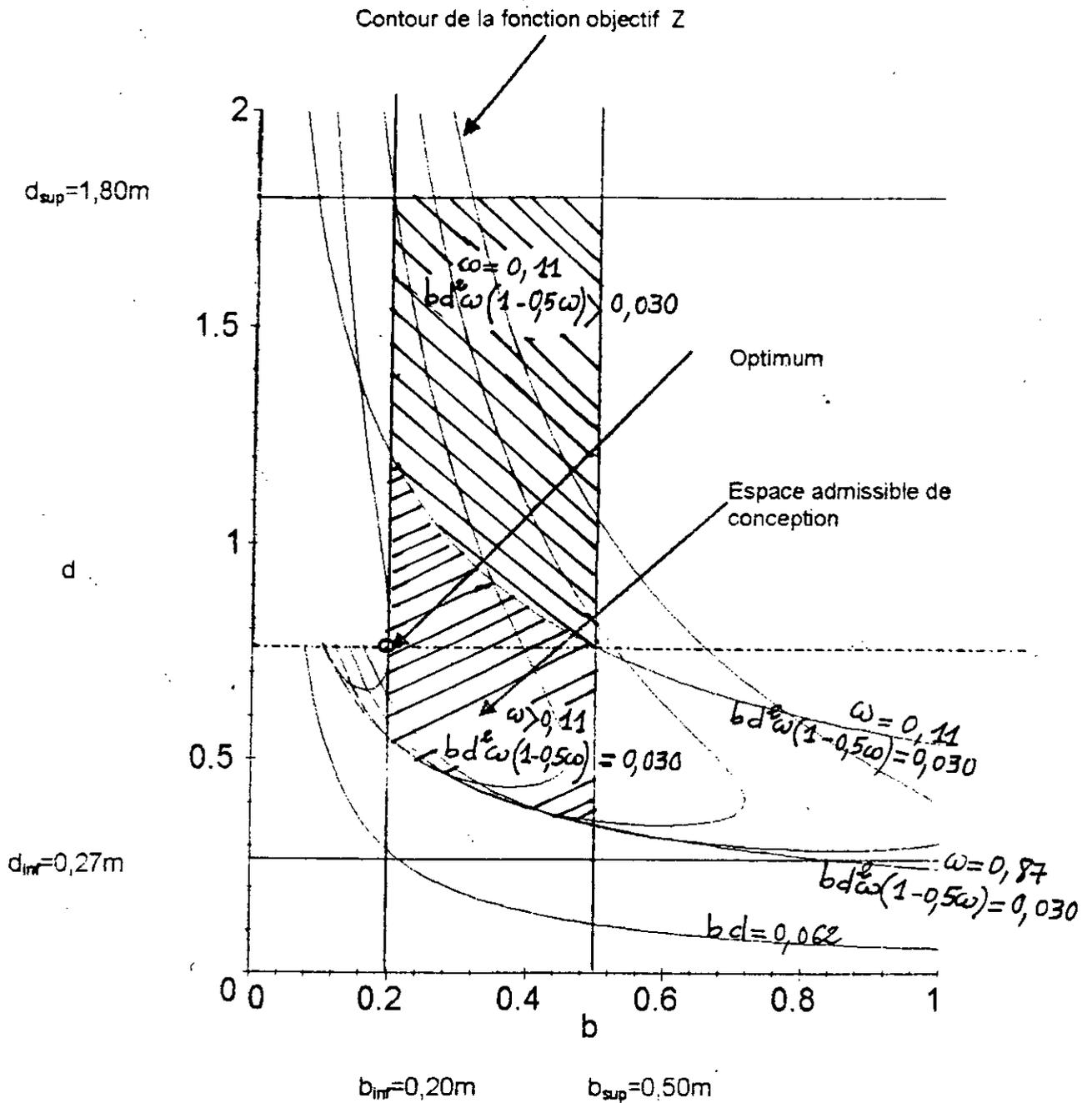


Fig 7 Calcul dynamique optimal d'une poutre en BA (RPA99)
 Espace de conception et solution optimale: $b_{opt} = 0,20m$ $d_{opt} = 0,72m$ $Z_{opt} = 0,265m^2$.

Dans cette formulation, la section d'acier A_s dépend seulement de la contrainte de flexion. Toutes les autres contraintes sont fonction de b et d seul.

Donc pour toutes dimensions données de b et d la section d'acier optimale est imposée par la contrainte de flexion. En outre, A_s peut être exprimée en fonction de ω , b et d et est éliminée par voie de conséquence. Comme A_s est fonction de ω pour un couple (b , d) donné, la valeur optimale de ω est la valeur minimale satisfaisant les contraintes de flexion. Celui-ci autorise la formulation du problème d'optimisation dans l'espace de conception b et d . Pour tout point dans l'espace de conception, la valeur optimale de ω est calculée des inégalités $[0,0498 \leq b \cdot d^2 \cdot \omega(1 - 0,5\omega)$; $0,03 \leq \omega \leq 0,98]$ et A_s correspondante est obtenue par l'égalité $(\omega \cdot b \cdot d = 24,559A_s)$ l'espace faisable dans la figure fig.5 peut être divisé en deux régions.

Région 1

$\omega = 0,03$ et $0,0498 < b \cdot d^2 \cdot \omega(1 - 0,5\omega)$, e.g. la contrainte $0,0498 \leq b \cdot d^2 \cdot \omega(1 - 0,5\omega)$ est inactive et ω est déterminé par la contrainte $0,03 \leq \omega \leq 0,98$.

Région 2

$0,0498 = b \cdot d^2 \cdot \omega(1 - 0,5\omega)$ et $\omega > 0,03$, e.g. la contrainte $0,0498 = b \cdot d^2 \cdot \omega(1 - 0,5\omega)$ est active et la contrainte $\omega > 0,03$ est inactive.

Sur la limite entre les deux régions 1 et 2, les deux contraintes $0,0498 \leq b \cdot d^2 \cdot \omega(1 - 0,5\omega)$ et $\omega \geq 0,03$ sont actives si $\omega = 0,03$ et $b \cdot d^2 \cdot \omega(1 - 0,5\omega) = 0,0498$. Pour la région 2, nous pouvons exprimer la fonction objectif Z en fonction seulement de b et ω tout en éliminant A_s et d par l'intermédiaire des égalités $0,0498 = b \cdot d^2 \cdot \omega(1 - 0,5\omega)$ et $\omega \cdot b \cdot d = 24,559A_s$.

Si nous considérons la contrainte de flexion seule, nous pouvons trouver la condition pour que ω soit optimal, par dérivation de Z par rapport à ω pour un b supposé connu :

$$dZ/d\omega = 0 \Leftrightarrow \omega = 1/[1 + (C_s/C_b)(f_{bc}/f_s)].$$

Démonstration

$$Z = b \cdot d + (C_s/C_b)A_s.$$

$$Z = b \cdot d[1 + (C_s/C_b)(f_{bc}/f_s)\omega].$$

$$b \cdot d = [0,0498/\omega(1 - 0,5\omega)]^{1/2}.$$

$$dZ/d\omega = (1 + C_s/C_b)(f_{bc}/f_s)\omega - 1)(0,0498b)^{1/2}/4\omega(1 - 0,5\omega)^{3/2}.$$

$$dZ/d\omega = 0 \Leftrightarrow 1 + (C_s/C_b)(f_{bc}/f_s)\omega - 1 = 0.$$

$$\omega_{opt} = 1/[1 + C_s/C_b)(f_{bc}/f_s)].$$

$$C_s/C_b = 52.$$

$$f_{bc}/f_s = 1/24,559.$$

$$\text{on fixe } b = b_{inf} = 0,20 \text{ m.}$$

$$\omega_{opt} = 0,321.$$

$$d_{opt} = 0,96 \text{ m.}$$

$$A_{s,opt} = 25,12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

$$Z_{opt} = 0,323 \text{ m}^2.$$

Dans le cas où d'autres contraintes sont actives, ce qui est le cas général, la solution optimale du problème est obtenue différemment.

Nous notons que l'optimum $b = b_{inf}$ est un cas commun aux poutres en béton armé gouvernées par la seule contrainte de flexion.

Il peut être vu que le coût est une fonction de bd ($Z = b.d + 52A_s$), de même le module de résistance de la section est une fonction de $b.d^2$. Donc, il serait plus efficace d'obtenir des conceptions avec plus grandes proportions de d/b . Pour un coût donné du béton $C_b = b.d$, le module de résistance est plus grand pour $\text{Max.}(b.d^2)$.

$$\text{Max.}(b.d^2) = \text{Max.}(C_b^2/b) = C_b^2/b_{\text{inf.}}$$

Si nous supposons $b = b_{\text{inf}}$, le problème est réduit à une recherche unidimensionnelle dans l'espace de d . La contrainte de l'effort tranchant, les contraintes de coffrage deviennent toutes des contraintes simples qui limitent aussi bien la valeur de d que la région faisable.

L'optimum peut être facilement déterminé par une recherche directe dans l'espace (d, Z).

Cas particulier : toutes les contraintes sont actives avec la largeur b égale à 0,25 m.

1. Calcul statique optimal à l'ELU ($b = 0,25 \text{ m}$)

$$Z = 0,25d + 52A_s \longrightarrow \text{Min.}$$

sous les contraintes :

$$0,0498 \leq 0,25d^2 \omega(1 - 0,5\omega).$$

$$\omega = 24.559A_s / 0.25d.$$

$$0,03 \leq \omega \leq 0,98.$$

$$0,106 \leq 0,25d.$$

$$0,20 \leq b \leq 0,50.$$

$$0,27 \leq d$$

$$d/b \leq 3,6.$$

$$b = 0,25 \text{ m.}$$

Tab.6 - Solution optimale d'une poutre en flexion en BA à l'ELU pour une largeur fixée ($b = 0,25 \text{ m}$).

Résultats	Règlements CBA93/ZN/ZS
b [m]	0,25
d_{opt} [m]	0,93
$A_{s\text{opt}}$ [m ²]	$25,17 \cdot 10^{-4}$
ω_{opt}	0,266
Z_{opt} [m ²]	0,363

Equations analytiques

$$Z = d[0,779 - 0,529(1 - 0,398/d^2)^{1/2}].$$

L'espace des solutions admissibles, la solution optimale ainsi que les contraintes du problème sont illustrées graphiquement sur la figure Fig.8.

2. Calcul dynamique optimal ($b = 0,25 \text{ m}$)

$$Z = 0,25d + 52A_s \longrightarrow \text{Min.}$$

sous les contraintes :

$$0,030 \leq 0,25d^2 \cdot \omega(1 - 0,5\omega).$$

$$\omega = 21,645A_s / 0,25d.$$

$$0,11 \leq \omega \leq 0,87.$$

$$0,062 \leq 0,25d.$$

$$0,20 \leq b \leq 0,50.$$

$$0,27 \leq d.$$

$$b = 0,25 \text{ m.}$$

$$d/b \leq 3.6.$$

Tab.7 - Solution optimale (cas dynamique) d'une poutre en flexion en BA à l'ELU pour une largeur fixée ($b = 0,25 \text{ m}$).

Résultats	Règlements RPA88 Zone Nord / Zone Sud
$b \text{ [m]}$	0,25
$d_{\text{opt}} \text{ [m]}$	0,69
$A_{\text{sopt}} \text{ [m}^2\text{]}$	$23,49 \cdot 10^{-4}$
ω_{opt}	0,294
$Z_{\text{opt}} \text{ [m}^2\text{]}$	0,295

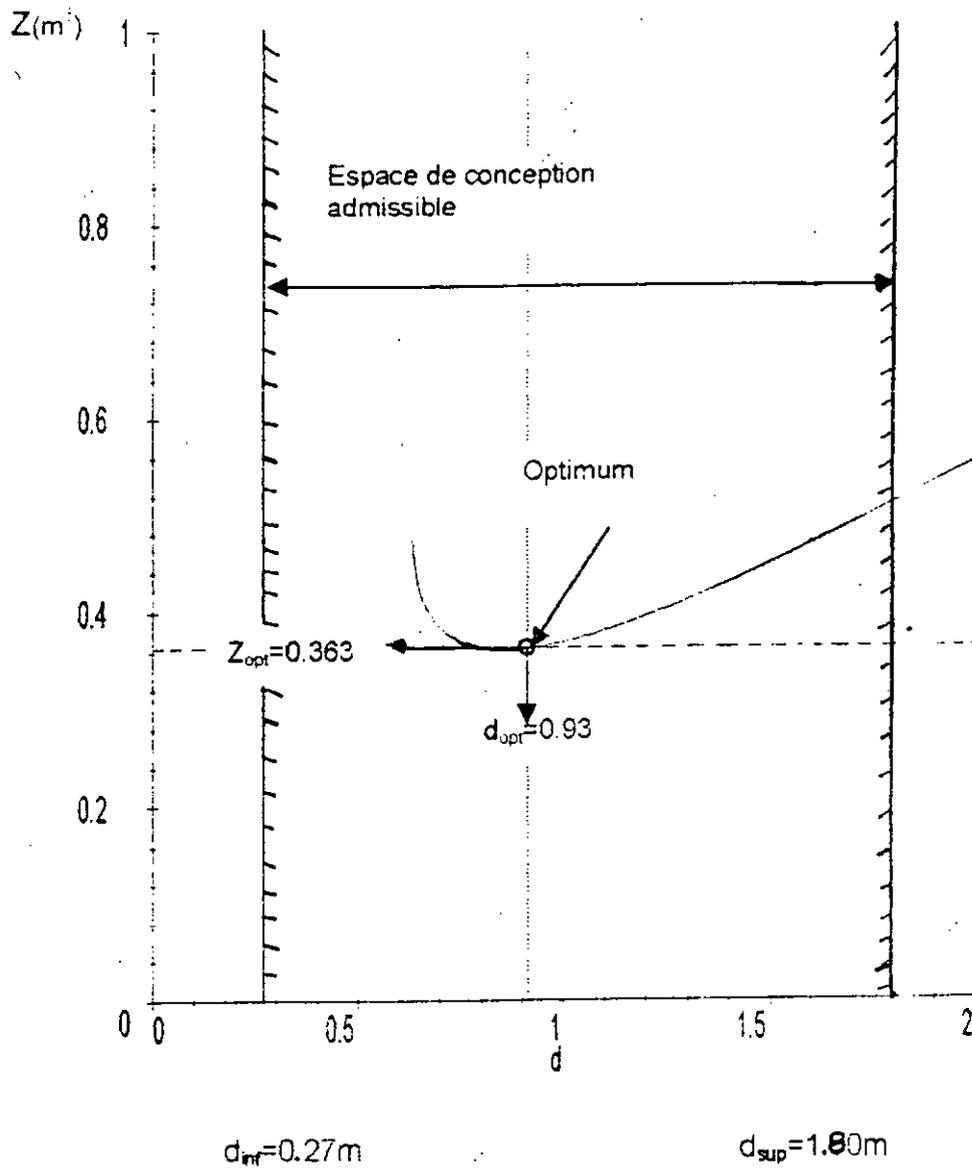


Fig.8 Calcul statique optimal d'une poutre en BA à l'ELU (CBA93)- cas particulier : $b=0.25$ m
 Espace de conception et solution optimale : $d_{opt} = 0.93$ m $Z_{opt} = 0.363$ m³

CHAPITRE IV : CALCUL OPTIMAL DES DALLES EN FLEXION EN BETON ARME AUX ETATS LIMITES

4.1. - INTRODUCTION

La dalle est constituée d'une plaque de béton avec armatures incorporées. Elle peut reposer sur deux ou plusieurs appuis. Ces appuis influent sur le mode de fonctionnement et la disposition des aciers. On distingue les cas suivants :

- ◆ Dalle sur appuis libres.
- ◆ Dalle avec extrémités encastrées,
- ◆ Dalle continue avec encastrement à chaque appui ou reposant sur plusieurs appui.
- ◆ Dalle prenant appui sur 03 côtés ou 04 côtés ou seulement 02 côtés.

La dalle est considérée comme une poutre de grande largeur ($b = 1$ m). Son épaisseur est fonction des paramètres suivants :

1. la résistance à la flexion : dalle reposant sur 02 appuis, 03 ou 04 côtés.
2. l'isolation acoustique : (loi de masse) épaisseur ≥ 16 cm, d'isolation phonique $ht \geq 15$ cm.
3. la rigidité ou limitation de la flèche.
4. la sécurité en matière d'incendie (coupe - feu) .

4.2. - ETUDE D'UNE DALLE EN BA EN FLEXION CONFORMEMENT AU CBA93

4.2.1 - Evaluation des moments forfaitaires pour planchers à charge d'exploitation modérées

Principe général

- La somme du moment moyen sur appuis et du moment en travée doit être supérieure au moment isostatique majoré d'une certaine quantité dépendant de la valeur des charges d'exploitation par rapport aux charges permanentes.
- Les moments en travée ou sur appuis ne peuvent être inférieure à certaines valeurs minimales.

Domaine de validité

Leur emploi est assujéti à quatre conditions :

1. Les charges variables ne dépassent pas le double des charges permanentes où 5 kN/m^2 (planchers dits à charge modérée). $Q \leq \text{Max. } (2G ; 500 \text{ KN/m}^2)$.
2. La fissuration ne compromet pas la tenue des revêtements, ni celle des cloisons (la fissuration du béton est considérée comme non préjudiciable).
3. Les éléments de plancher ont même inertie dans les différentes travées.
4. Les portées successives ont un rapport compris entre 0,8 et 1,25.

Dans le cas où l'une des conditions n'est pas vérifiée se reporter à d'autres méthodes.

Dimensionnement des dalles sur deux appuis

Dalles dites sur deux appuis : portent dans une seule direction.

On doit vérifier alors que les moments sur appuis (M_w ; M_o) et en travée M_t satisfont l'inégalité :

$$M_t + (M_w + M_o)/2 \geq \text{Max. } [(1 + 0,3 \alpha)M_o ; 1,05M_o]$$

N'importe quel choix est possible pour M_t , M_o et M_w à condition que l'inégalité précédente soit vérifiée ainsi que les conditions suivantes :

Valeurs minimales des moments M_t , M_w et M_o :

Pour une poutre à deux travées ; $M_t \geq (1,2 + 0,3 \alpha) M_o/2$;

M_o : Moment fléchissant maximum dans la travée de comparaison.

La valeur absolue de chaque moment sur l'appui intermédiaire doit être au moins égale à $0,6M_o$.

Pour les dalles, on n'oubliera pas que le moment sur appui de rive devra être pris égal à $0,15M_o$.

Détermination de la longueur des chapeaux et arrêt des barres inférieures de second lit :

Lorsque la charge d'exploitation est au plus égale à la charge permanente et lorsque ces charges peuvent être considérées uniformément réparties, on peut se dispenser du tracé des courbes enveloppes sous réserve que les dispositions suivantes soient adoptées.

Si l'on adopte pour les moments sur appuis les valeurs absolues minimales définies ci-dessus, à moins de justifications plus précises, la longueur des chapeaux, à partir du nu des appuis est au moins égale :

- à 1/5 de la plus grande portée des deux travées encadrant l'appui considéré s'il s'agit d'un appui n'appartenant pas à une travée de rive,
- à 1/4 de la plus grande portée des deux travées encadrant l'appui considéré s'il s'agit d'un appui intermédiaire voisin de rive.

Principe de calcul

Cas de charges uniformément réparties sur toute la surface de la dalle

$$\alpha = (l_x/l_y) \leq 0,40. ; l_x \leq l_y$$

L'étude s'effectue sur une bande élémentaire de 1 m de longueur.

La longueur est celle de la plus petite portée.

Les moments de flexion sont obtenus à partir du moment fléchissant d'une poutre reposant simplement sur deux (02) appuis ($M_o = q.l_x^2/8$).

Les barres porteuses sont placées dans le sens de la petite portée l_x .

Les barres dites de répartition sont placées orthogonalement aux barres porteuses.

4.2.2 - Evaluation des moments par la méthode analytique (méthode RDM)

Poutre continue sur trois appuis, chargée uniformément à travées égales

Moments d'appuis : Appui central : $M_{ac} = - 0,1250q.l^2$.

Appui de rive : $M_{ar} = 0,00$.

Moment en travée : $M_t = 0,0703q.l^2$.

Flèche : $f = 0,00521q.l^4/E.I$.

4.3. - FORMULATION MATHÉMATIQUE DE L'OPTIMISATION DES DALLES EN BETON ARME EN FLEXION SUR APPUI SIMPLES

Dans ce cas précis, il est rappelé que le calcul est, en général, effectué pour une bande de largeur unitaire. Il en résulte qu'une procédure de recherche unidimensionnelle dans l'espace de d peut être utilisée dans le calcul des dalles à épaisseurs constantes. La formulation est alors similaire à celle d'une poutre de largeur donnée à l'exception du fait que les contraintes de flexion doivent être considérées pour l'ensemble des n sections potentiellement critiques (voir Fig.9). La contrainte de l'effort tranchant est pratiquement toujours satisfaite et peut être exclue de la formulation du problème d'optimisation.

Selon la philosophie de calcul adoptée, on pourra distinguer les deux formulations mathématiques suivantes :

Formulation du problème de dimensionnement optimal à l'ELU

Trouver les variables de décision d , A_{si} et ω_i ($i = 1, \dots, n$) telles que :

$$Z = C_b \cdot L \cdot d + C_s \sum_{i=1}^n L_i \cdot A_{si} \longrightarrow \text{Min.}$$

sous les contraintes suivantes :

$M_i(d) \leq f_{bc} \cdot d^2 \cdot \omega_i (1 - 0,5\omega_i)$ $\omega_i = (f_s / f_{bc}) (A_{si} / d)$ $(A_{si} / b \cdot d)_{inf} \cdot (f_s / f_{bc}) \leq \omega_i \leq (A_{si} / b \cdot d)_{sup} \cdot (f_s / f_{bc})$ $d_{inf} \leq d \leq d_{sup}$	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> contraintes de comportement en flexion. $i = 1, \dots, n.$ </div>
	contrainte géométrique de coffrage.

où :

- C_b : coût unitaire de béton.
- C_s : coût unitaire de l'acier.
- L : surface de la dalle pour une bande de largeur $b = 1$ m.
- L_i : surface de la dalle associée à la section d'acier A_{si} .
- A_{si} : section d'acier par mètre linéaire associée à la section critique considérée.

La vérification à l'ELS de la solution optimale trouvée, ainsi que les recommandations envisagées dans le cas du dimensionnement optimal des poutres à l'ELU demeurent valables .

Formulation du problème de dimensionnement optimal à l'ELS

Trouver les variables de décision d , A_{si} et ω_i ($i = 1, \dots, n$) telles que :

$$Z = C_b \cdot L \cdot d + C_s \sum_{i=1}^n L_i \cdot A_{si} \longrightarrow \text{Min.}$$

sous les contraintes suivantes :

$\sigma_b \leq \bar{\sigma}_b$ $\sigma_s \leq \bar{\sigma}_s$ $\omega_i = 2 (\bar{\sigma}_s / \bar{\sigma}_b) (A_{si} / d)$ $(A_{si} / b \cdot d)_{inf} \cdot (\bar{\sigma}_s / \bar{\sigma}_b) \leq \omega_i \leq (A_{si} / b \cdot d)_{sup} \cdot (\bar{\sigma}_s / \bar{\sigma}_b)$ $f \leq \bar{f}$ $d_{inf} \leq d \leq d_{sup}$	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> contraintes de comportement en flexion. $i = 1, \dots, n.$ </div>
	contrainte de flèche.
	contrainte géométrique de coffrage.

La vérification à l'ELU de la solution optimale trouvée ainsi que les recommandations envisagées dans le cas du dimensionnement optimal des poutres à l'ELS demeurent valables.

4.4. - CALCUL STATIQUE OPTIMAL D'UNE DALLE EN BA EN FLEXION

A titre illustratif, considérons maintenant le problème de dimensionnement optimal à l'ELU d'une dalle en BA, continue à deux travées identiques (voir figure : Fig.9). Les données du problème sont identiques à celles décrites pour le calcul statique optimal à l'ELU de la poutre en BA à l'exception des pourcentages géométriques minimum et maximum et du rapport des coûts unitaires des matériaux mis en œuvre C_s/C_b , qui varie en fonction de la zone considérée comme suit :

$C_s/C_b = 50$ en Zone Sud.

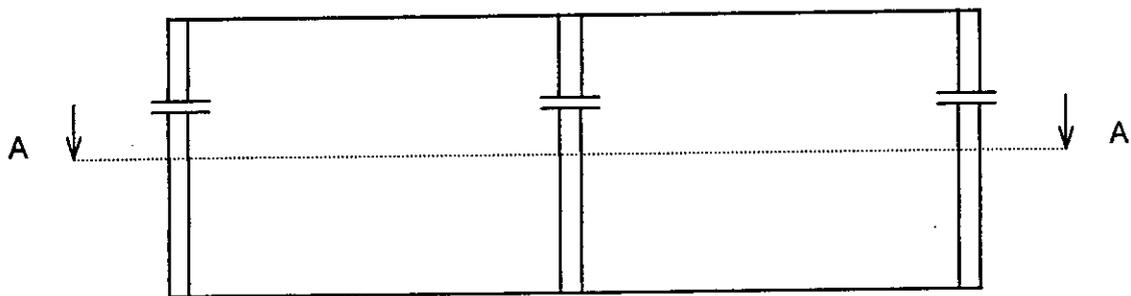
$C_s/C_b = 51$ en Zone Nord.

(voir détails en annexe I).

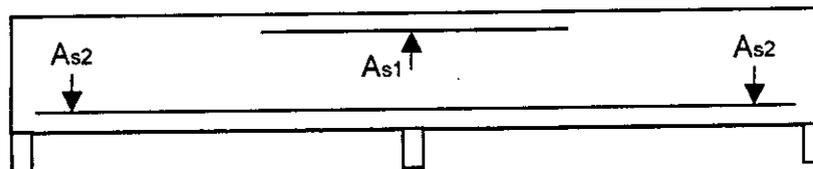
Les sollicitations sont calculées selon deux méthodes :

- Une méthode analytique (les moments fléchissant étant évalués par calcul automatique des structures).
- Une méthode forfaitaire (les moments fléchissant étant estimés forfaitairement d'après le règlement considéré).

La dalle est supposée, sans perte de généralité ne porter que dans un seul sens de sorte que l'étude du problème se ramène à celui d'une poutre continue à deux travées égales (poutre de section rectangulaire avec $b=1\text{m}$ et $d = 0,9h$). L'effet de l'effort tranchant est négligé.



a - Vue en plan



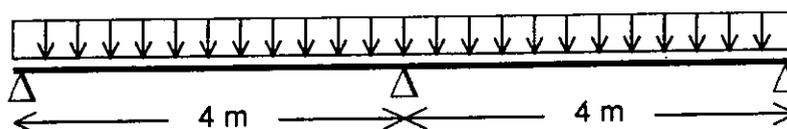
$$\leftarrow L_1 = 2.1 \text{ m}^2 \rightarrow$$

$$\leftarrow L_2 = 8.1 = 8 \text{ m}^2 \rightarrow$$

b - Coupe A - A

$$G = 2,5d \text{ t/m}$$

$$Q = 0,25 \text{ t/ml}$$



c - Poutre continue à deux travées identiques.

Fig.9 - Dalle en flexion à deux travées égales sur appuis multiples.

4.3.1 - Calcul statique optimal d'une dalle en béton armé en flexion à l'ELU selon la méthode analytique

$$Z = 8d + C_s/C_b(2A_{s1} + 8A_{s2}) \longrightarrow \text{Min.}$$

sous les contraintes :

$$3,375d + 0,375 \leq 1417d^2 \cdot \omega_1(1 - 0,5\omega_1).$$

$$3,796d + 0,422 \leq 1417d^2 \cdot \omega_2(1 - 0,5\omega_2).$$

$$\omega_1 = 24,559A_{s1}/d.$$

$$\omega_2 = 24,559A_{s2}/d.$$

$$0,02 \leq \omega_1 \leq 0,98.$$

$$0,02 \leq \omega_2 \leq 0,98.$$

$$0,18 \leq d \leq 0,23.$$

Tab.8 – Solution optimale d'une dalle en flexion en B.A à l'ELU selon la méthode analytique.

Résultats	Méthode analytique / ELU	
	Cs/C _b = 50 : Zone Sud	Cs/C _b = 51 : Zone Nord
d _{opt} [m]	0,18	0,18
A _{s1opt} [m ²]	3,21.10 ⁻⁴	3,21.10 ⁻⁴
A _{s2opt} [m ²]	1,79.10 ⁻⁴	1,79.10 ⁻⁴
ω _{1opt}	0,04	0,04
ω _{2opt}	0,02	0,02
Z _{opt} [m ³]	1,544	1,546

Equations analytiques

$$Z = [8 + 10K/\beta - 2K/\beta[(-2M_a/\alpha \cdot d^2)^{1/2} + 2(1 - 2M_t/\alpha \cdot d^2)^{1/2}]]d.$$

$$K = C_s/C_b = 50 ; 51.$$

$$\alpha = 14170 ; \beta = 24.559.$$

$$M_a = 67,50d + 7,50.$$

$$M_t = 37,96d + 4,22.$$

$$Z_{50} = [28,359 - 4,072((1 - (135d + 15)/14170d^2)^{1/2} + 4 \cdot (1 - (75,92d + 8,44)/14170d^2)^{1/2})]d.$$

$$Z_{51} = [28,766 - 4,153((1 - (135d + 15)/14170d^2)^{1/2} + 4 \cdot (1 - (75,92d + 8,44)/14170d^2)^{1/2})]d.$$

L'espace des solutions admissibles, la solution optimale ainsi que les contraintes du problème sont illustrées graphiquement sur la figure Fig.10.

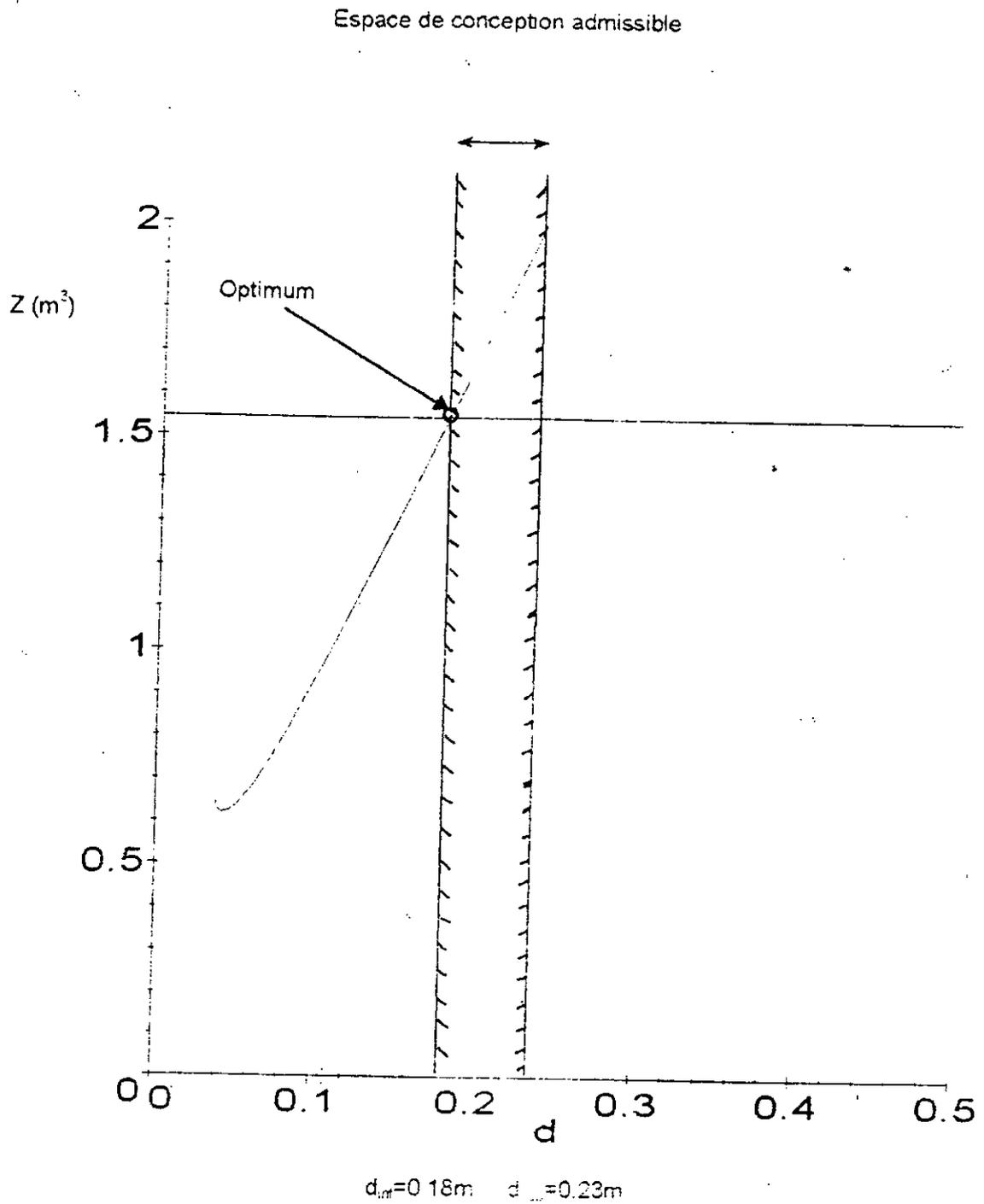


Fig.10. Calcul statique optimal d'une dalle en BA à l'ELU (CBA93 - Méthode analytique)
Espace de conception et solution optimale $d_{\text{opt}} = 0,18\text{ m}$. $Z_{\text{opt}} = 1,546\text{ m}^3$

4.3.2 - Calcul statique optimal d'une dalle en béton armé en flexion à l'ELS selon la méthode analytique

$$Z = 8d + C_s/C_b(2A_{s1} + 8A_{s2}) \longrightarrow \text{Min.}$$

sous les contraintes :

$$5d + 0,5 \leq 1500d^2[\omega_1^2/3 + 0,682(1 - \omega_1)^2].$$

$$2,81d + 0,28 \leq 1500d^2[\omega_2^2/3 + 0,682(1 - \omega_2)^2].$$

$$5d + 0,5 \leq 16500d^2 \cdot \omega_1[\omega_1^2/3 + 0,682(1 - \omega_1)^2]/(1 - \omega_1).$$

$$2,81d + 0,28 \leq 16500d^2 \cdot \omega_2[\omega_2^2/3 + 0,682(1 - \omega_2)^2]/(1 - \omega_2).$$

$$\omega_1 = 22 A_{s1}/d.$$

$$\omega_2 = 22 A_{s2}/d.$$

$$0,02 \leq \omega_1 \leq 0,88.$$

$$0,02 \leq \omega_2 \leq 0,88.$$

$$0,0454 \leq 1000d^3/(25d + 2,5).$$

$$0,18 \leq d \leq 0,23.$$

Tab.9 - Solution optimale d'une dalle en flexion en B.A à l'ELS selon la méthode analytique.

Etats	Méthode analytique / ELS	
	Cs/Cc = 50 Zone Sud	Cs/Cc = 51 Zone Nord
d _{opt} [m]	0,18	0,18
A _{s1opt} [m ²]	1,64.10 ⁻⁴	1,64.10 ⁻⁴
A _{s2opt} [m ²]	1,64.10 ⁻⁴	1,64.10 ⁻⁴
ω _{1opt}	0,02	0,02
ω _{2opt}	0,02	0,02
Z _{opt} [m ³]	1,523	1,523

4.3.3 - Calcul statique optimal d'une dalle en béton armé en flexion à l'ELU selon la méthode forfaitaire

$$Z = 8d + C_s/C_b(2A_{s1} + 8A_{s2} + 2A_{s3}) \longrightarrow \text{Min.}$$

sous les contraintes :

$$1,0125d + 0,1125 \leq 1417d^2 \cdot \omega_1(1 - 0,5\omega_1).$$

$$4,050d + 0,450 \leq 1417d^2 \cdot \omega_2(1 - 0,5\omega_2).$$

$$(6,25d + 0,925)(6,75d + 0,750)/(10d + 1) \leq 1417d^2 \cdot \omega_3(1 - 0,5\omega_3).$$

$$\omega_1 = 24,559A_{s1}/d.$$

$$\omega_2 = 24,559A_{s2}/d.$$

$$\omega_3 = 24,559A_{s3}/d.$$

$$0,02 \leq \omega_1 \leq 0,98.$$

$$0,02 \leq \omega_2 \leq 0,98.$$

$$0,02 \leq \omega_3 \leq 0,98.$$

$$0,18 \leq d \leq 0,23.$$

Tab.10 - Solution optimale d'une dalle en flexion en B.A à l'ELU selon la méthode forfaitaire.

Résultats	Méthode forfaitaire / ELU	
	$C_s/C_b = 50$ Zone Sud	$C_s/C_b = 51$ Zone Nord
d_{opt} [m]	0,18	0,18
A_{s1opt} [m ²]	$2,33 \cdot 10^{-4}$	$2,33 \cdot 10^{-4}$
A_{s2opt} [m ²]	$1,91 \cdot 10^{-4}$	$1,91 \cdot 10^{-4}$
A_{s3opt} [m ²]	$1,47 \cdot 10^{-4}$	$1,47 \cdot 10^{-4}$
ω_{1opt}	0,03	0,03
ω_{2opt}	0,03	0,03
ω_{3opt}	0,02	0,02
Z_{opt} [m ³]	1.567	1.570

Equations analytiques

$$Z = [8 + 12K/\beta - 2K/\beta[(1 - 2M_{ar}/\alpha \cdot d^2)^{1/2} + (1 - 2M_{ac}/\alpha \cdot d^2)^{1/2} + 4(1 - 2M_t/\alpha \cdot d^2)^{1/2}]]d.$$

$$K = C_s/C_b = 50 ; 51.$$

$$\alpha = 14170 ; \beta = 24,559.$$

$$M_{ar} = 10,125d + 1,125.$$

$$M_{ac} = 40,5d + 4,50.$$

$$M_t = (6,25d + 0,925)(6,75d + 7,5)/(10d + 1).$$

$$Z_{50} = [32,431 - 4,072((1 - (20,25d + 2,25)/14170d^2)^{1/2} + (1 - (81d + 9)/14170d^2)^{1/2} + 4(1 - (12,5d + 1,850)(6,75d + 7,5)/(10d + 1)14170d^2)^{1/2})]d.$$

$$Z_{51} = [32,92 - 4,153((1 - (20,25d + 2,25)/14170d^2)^{1/2} + [1 - (81d + 9)/14170d^2]^{1/2} + 4(1 - (12,5d + 1,850)(6,75d + 7,5)/(10d + 1)14170d^2)^{1/2})]d.$$

On voit immédiatement que les rapports des coûts unitaires C_s/C_b sont très proches (51 pour la zone nord et 50 pour la zone sud) de sorte que pour une méthode d'évaluation des sollicitations donnée, la fonction coût relatif est pratiquement constante. En outre, on peut noter que bien que les vecteurs solutions soient différents, les fonctions coûts sont pratiquement similaires.

Reste à signaler qu'un calcul dynamique optimal n'était pas envisagé pour l'élément dalle parce que l'étude de la dalle considérée se ramène finalement à celle d'une poutre continue et le cas dynamique d'une poutre sur appuis simples est déjà traité .

CHAPITRE V : CALCUL OPTIMAL DES POUTRES PAR DIFFERENTS CODES ET ETUDES COMPAREES

5.1. - INTRODUCTION

Trop de paramètres entrent en effet en jeu, que nous rappelons ci -après :

- Les charges d'exploitations et les lois de dégression de ces charges, qui diffèrent d'un pays à l'autre pour des ouvrages de même destination ; il en est parfois aussi de même pour les charges permanentes.
- Pour les aciers, les limites d'élasticité, les idéalisation adoptées pour les diagrammes de traction, les diamètres dans lesquels les barres sont fabriquées.
- Pour le béton, les résistances caractéristiques, leur mesure (sur cubes ou sur cylindres), les règles d'acceptation et de contrôle, la loi de distribution des contraintes dans le béton comprimé, les déformations limites;
- Les principes mêmes d'introduction de la sécurité : coefficients partiels du BAEL, et coefficient ϕ de réduction de la sollicitation résistante pour le code ACI 318-83.
- Les coefficients de sécurité partiels (ou globaux) affectés aux matériaux et aux charges :
 - Les portées effectives ;
 - Les méthodes de calcul des sollicitations et les redistributions permises ;
 - Les méthodes mêmes de calcul des sections (états - limites ou contraintes admissibles) et les simplifications admises ;
 - Les règles de détail (enrobage minimaux, pourcentages minimaux, arrêts des barres, espacements maximaux des étriers,).
 - etc.....

Toutes les comparaisons de codes qui ont été faites sur le plan international ont porté sur des exemples dans lesquels les dimensions géométriques, les charges ou autre actions et les qualités des matériaux constituaient des données de départ uniques pour l'application des différents textes.

5.2. - PRESENTATION DES REGLES FRANCAISE DE BETON ARME ET PARASISMIQUE

5.2.1 - Présentation des règles techniques françaises de conception et de calcul BAEL91

Le règlement du béton armé approuvé en 1968 et appelé CCBA68 est un règlement dit aux "contraintes admissibles".

Lors des travaux de rédaction, il avait été envisagé s'il ne serait pas possible d'adopter, dès cette époque, un règlement "aux états limites". Mais il avait estimé que les ingénieurs y étaient alors insuffisamment préparés et qu'une transition était souhaitable. De là ont écoulé certaines des règles CCBA68.

Toutefois, peu après la parution des règles CCBA68, il a semblé opportun de publier, en 1971, les "Directives communes pour le calcul des constructions" ou DC71. Ce texte donnait l'exposé des principes et des méthodes utilisés à l'époque dans le calcul "aux états - limites" ainsi que la définition des termes employés, et fixait, sous réserve des adaptations particulières à chaque mode de construction, les valeurs de certains coefficient généraux.

Les DC71 ont servi de base :

- * au règlement de construction métallique de 1972 (titre V du fascicule 61 du CPC) ;
- * à l'I.P2 de 1973 (construction provisoire n° 2 relative à l'emploi du béton précontraint).

Ces deux règlements ont permis aux ingénieurs de se familiariser avec les nouvelles méthodes dans des domaines moins répandus que le béton armé.

Parallèlement, la théorie des "Etats - Limites" a fait l'objet de nombreuses études d'approfondissement, tant sur le plan national qu'au niveau international ; des règlements nationaux ou internationaux en font actuellement usage ; elle est enseignée dans les écoles d'ingénieurs.

De nouvelles " Directives communes " ont été publiées en 1979, qui tiennent compte de cette évolution : DC79, fascicule 79-12 bis du bulletin officiel du ministère de l'environnement et du cadre de vie.

D'autre part, l'amélioration des connaissances concernant le béton armé et l'expérience dans le calcul et la conception des structures des modifications ou novations dans le détail des prescriptions des règles CCBA68.

Pour l'ensemble de ces raisons, il est donc apparu opportun d'établir un règlement de calcul du béton armé aux états-limites (BAEL), fondé sur une meilleure analyse des conditions auxquelles doit satisfaire une construction. Par ailleurs, il a été édicté un règlement de calcul du béton précontraint aux Etats-Limites (règles BPEL.) également conforme aux Directives communes de 1979 et qui s'est substitué à l'I.P.2. Enfin, une nouvelle rédaction du fascicule 65 cohérente avec les règles BAEL. et BPEL. a été élaborée. Les règles BAEL91 apportent quelques modifications mineures par rapport aux règles B.AEL83, qui permettent de tenir de l'évolution des techniques.

5.2.2 - Présentation des règles parasismiques français (PS92)

Les progrès des connaissances en matière de construction parasismique ont fait apparaître que certains des concepts retenus dans les règles PS69, maintenant dépassés, devraient être revus. Cela a démontré la nécessité de publier de nouvelles règles, de manière à apporter une amélioration sensible à la fiabilité des constructions.

Les règles PS92 se substituent aux règles PS69 complétées en 1982 par un addendum tiré des leçons des séismes d'El Asnam (Algérie) de 1980. Depuis cette date, la plupart des membres de la commission de révision des règles PS69/82, auxquels se sont joints d'autres experts, ont poursuivi leurs travaux pour tenir compte des progrès du génie parasismique et bénéficier des leçons des séismes récents tels que ceux de Mexico (1985), Spitak (Arménie-1988), Loma Prieta (Californie-1989).

Cet ouvrage énonce les règles de conception, de calcul et de vérification des projets de bâtiment soumis à l'agression sismique, qui viennent compléter les règles générales relatives aux différents types de construction : en béton armé, en acier, en bois, etc.

Ces règles ont pour objet de proportionner la résistance des ouvrages aux secousses qu'ils sont susceptibles de subir, pour leur conférer un comportement global satisfaisant en vue d'assurer la sécurité des personnes. Elles visent également à limiter les dommages matériels. Elles n'envisagent que le cas des constructions nouvelles.

Ces règles PS92 apportent une contribution aux travaux du comité européen de normalisation (CEN) servant de base à la élaboration de l' Eurocode.8 (Résistance des structures aux séismes).

Combinaison d'actions

Les combinaisons d'actions à considérer pour la détermination des déformations et sollicitations de calcul sont les combinaisons accidentelles pour lesquelles le séisme est pondéré par un coefficient $\gamma_Q = 1$:

$$S = G + E + \psi_{1,1} \cdot Q_{k,1} + \sum \psi_{2,i} \cdot Q_{k,i}$$

Avec : G : Poids mort et actions permanentes de longue durée.

E : Action du séisme.

$Q_{k,i}$: Actions variables.

ψ_1, ψ_2 : Facteurs d'accompagnement.

Pour les bâtiments courants où interviennent essentiellement le poids propre G et les charges d'exploitation Q , la combinaison de calcul peut se limiter à : $G + 0,80 Q + 0,1N + E$.

Il n'est pas envisager de combiner l'action du vent N avec celle du séisme E .

5.2.3 - Règlement Américain de béton armé ACI - 318 - 83

Ce code est édité par l'Américain Concrete Institute, Michigan. Des mises à jour périodiques sont prévues, par adjonction ou rectifications. Il s'applique aux bâtiments (au sens large) en béton armé ou en béton précontraint. Il est également applicable à des ouvrages particuliers.

Le règlement ACI (Américain Concrete Institute) se caractérise par :

1. Un calcul aux états limites du type BAEL, où le diagramme contrainte déformation du béton peut être rectangulaire avec une hauteur variable suivant la résistance du béton ; l'allongement de l'acier n'est pas limité.
2. Un principe de vérification du type : sollicitation extérieure pondérée) $\leq \phi$ (sollicitation résistante). Par exemple $V_u \leq \phi V_n$ pour l'effort tranchant. Le facteur ϕ varie de 0,7 à 0,9 suivant le type de sollicitation.

5.2.4 - Présentation du code uniforme de la construction (Uniform Building Code UBC94, United States)

Le code américain UBC est un code complet couvrant pour les types de matériaux les différents aspects de la sécurité et la résistance aux séismes pour différents genres de bâtiments. Ce code qui rend l'utilisation de nouveaux matériaux et nouveaux systèmes de la construction été décrété tout au début par ICBO lors du seizième congrès annuel qui s'est déroulé entre le 18 et le 21 octobre 1927 en Phoenix, Arizona. Ce code est régulièrement réédité tout les trois ans.

La combinaison d'action à prendre en compte est :

$$U = 0,75(1,4G + 1,7Q + 1,87E).$$

Avec :

- G : Charges permanentes.
- Q : Charges variables.
- E : Séisme .

5.3. - ETUDES COMPAREES DE DIVERS CODES, INVESTIGATIONS NUMERIQUES ET DISCUSSION

Les principes développés précédemment sont maintenant appliqués au problème de dimensionnement optimal des poutres et dalles en BA à l'effet de procéder à des études comparées de divers codes de BA et de règles parasismiques en vigueur. Le caractère unificateur et conducteur de l'optimisation est illustré dans cette section sur la base de solutions optimales compatibles avec des contraintes d'égalité et d'inégalités définies à partir :

1. des règlements algériens de béton armé CBA93 et parasismiques RPA99 [4,6].
2. des règlements français de béton armé BAEL91 et parasismiques PS92 [20,21].
3. des règlements américains de béton armé ACI83 et parasismiques UBC94 [22,23].

A des fins de comparaison, le rapport des coûts unitaires des matériaux mis en œuvre C_s/C_b est pris égal à 50 indépendamment des bordereaux des prix unitaires appliqués par les pays concernés.

Tab.11 - Tableau récapitulatif des données de base pour chaque code (BAEL91 / PS92 ; CBA93 / RPA99 ; ACI83 / UBC94).

Données	Codes		
	BAEL91	CBA93	ACI83
Résistance caractéristique du béton à 28 jours : f_{c28}	25 MPa (sur cylindre 16x32 cm)	25 MPa (sur cylindre 16x32 cm)	26,2 MPa (sur cylindre 15x30 cm)
Limite élastique de l'acier : f_e	400 MPa	400 MPa	414 MPa
Contrainte limite du béton à l'ELU : f_{bu}	14,17 MPa	14,17 MPa	22,27 MPa
Contrainte limite du béton à l'ELS : $\bar{\sigma}_b$	15 MPa	15 MPa	11,80 MPa
Contrainte limite de l'acier à l'ELU	348 MPa	348 MPa	Néant
Contrainte limite de l'acier à l'ELS : $\bar{\sigma}_s$ fissuration peu préjudiciable	Néant	Néant	165,5 MPa
Contrainte limite de l'acier à l'ELS : $\bar{\sigma}_s$ fissuration très préjudiciable	265 MPa	165 MPa	165,5 MPa
Contrainte de cisaillement admissible du béton : $\bar{\tau}_b$	3,33 MPa	3,33 MPa	4,25 MPa
Module de déformation longitudinale de l'acier : E_s	200000 MPa	200000 MPa	200000 MPa
Module de déformation longitudinale du béton : E_{ij}	32164 MPa	32164 MPa	24211 MPa
Coefficient d'équivalence : n	15	15	8
Pourcentage géométrique minimal pour la poutre	0,12 %	0,12 %	0,34 %
Pourcentage géométrique maximal pour la poutre	4 %	4 %	1,98 %
Pourcentage géométrique minimal pour la dalle	0,08 %	0,08 %	0,12 %
Pourcentage géométrique maximal pour la dalle	4 %	4 %	2,03 %
Flèche admissible : \bar{f}	$l/1000 + 0,005$ si $l > 5$ m $l/500$ si $l \leq 5$ m	$l/1000 + 0,005$ si $l > 5$ m $l/500$ si $l \leq 5$ m	$l/480$
Coffrage poutre isostatique	$l/15 \leq h \leq l/10$ $h/5 \leq b \leq h/2$	$30 \text{ cm} \leq h$; $20 \text{ cm} \leq b$; $h/b \leq 4$	$l/15 \leq d \leq l/5$ $l/30 \leq b \leq l/12$
Coffrage poutre continue	$l/20 \leq h \leq l/16$	$l/20 \leq h \leq l/16$	$l/24 \leq d \leq l/16$
Combinaison fondamentale de charges à ELU	1,35G + 1,5Q	1,35G + 1,5Q	1,4G + 1,7Q
Combinaison fondamentale de charge à ELS	G + Q	G + Q	G + Q
Combinaison défavorable accidentelle (séisme) Elément poutre	G + 0,80Q + E (PS92)	G + Q + E (RPA99)	0,75(1,4G + 1,7Q + 1,87E) (UBC94)

5.4. - NOUVELLE METHODOLOGIE DE COMPARAISON DES REGLES TECHNIQUE DE CONCEPTION ET DE CALCUL : APPLICATION AUX PROBLEMES DE DIMENSIONNEMENT DE POUTRES EN FLEXION EN BA

Dans cette étude , des études comparées de divers codes de béton armé et de règles parasismiques en vigueur sont effectuées sur la base des solutions optimales obtenues .

5.4.1 - Calcul statique optimal à l'ELU

Données géométriques et de chargement :

Portée de calcul : $L = 8 \text{ m.}$

Charges permanentes : $G = 37,5 \text{ KN/m.}$

Charges d'exploitations : $Q = 25 \text{ KN/m.}$

Sollicitations dues aux charges permanentes G :

$M_G = 0,30 \text{ MNm.}$

$V_G = 0,15 \text{ MN.}$

Sollicitations dues aux charges d'exploitation Q :

$M_Q = 0,20 \text{ MNm.}$

$V_Q = 0,10 \text{ MN.}$

Combinaisons de sollicitations selon différents codes ELU :

BAEL91

$M = 1,35 M_G + 1,50 M_Q = 0,705 \text{ MNm.}$

$V = 1,35 V_G + 1,50 V_Q = 0,352 \text{ MN.}$

CBA93

$M = 1,35 M_G + 1,5 M_Q = 0,705 \text{ MNm.}$

$V = 1,35 V_G + 1,5 V_Q = 0,352 \text{ MN.}$

ACI83

$M = 1,4 M_G + 1,7 M_Q = 0,760 \text{ MNm.}$

$V = 1,4 V_G + 1,7 V_Q = 0,380 \text{ MN.}$

Tab.12 - Sollicitations agissantes combinées selon différents codes à l'ELU.

CAS STATQUE / ELU			
Résultats	Codes		
	BAEL91	CBA93	ACI83
Moment agissant à l'ELU (M)	0,705 MNm	0,705 MNm	0,760 MNm
Effort tranchant à l'ELU (V)	0,352 MN	0,352 MN	0,380 MN

BAEL91

$$Z = b.d + 50A_s \longrightarrow \text{Min.}$$

sous les contraintes :

$$0,0498 \leq b.d^2.\omega(1 - 0,5\omega).$$

$$\omega = 24,559A_s/b.d.$$

$$0,03 \leq \omega \leq 0,98.$$

$$0,106 \leq b.d.$$

$$0,14 \leq b \leq 0,36.$$

$$0,48 \leq d \leq 0,72.$$

CBA93

$$Z = b.d + 50A_s \longrightarrow \text{Min.}$$

sous les contraintes :

$$0,0498 \leq b.d^2.\omega(1 - 0,5\omega).$$

$$\omega = 24,559A_s/b.d.$$

$$0,03 \leq \omega \leq 0,98.$$

$$0,106 \leq b.d.$$

$$0,20 \leq b \leq 0,50.$$

$$0,27 \leq d.$$

$$d/b \leq 3,6.$$

ACI83

$$Z = b.d + 50A_s \longrightarrow \text{Min.}$$

sous les contraintes :

$$0,0379 \leq b.d^2.\omega(1 - 0,5\omega).$$

$$\omega = 18,59A_s/b.d.$$

$$0,06 \leq \omega \leq 0,37.$$

$$0,105 \leq b.d.$$

$$0,27 \leq b \leq 0,67.$$

$$0,53 \leq d \leq 1,6.$$

Tab.13 - Résultats d'un calcul statique optimal à l'ELU pour trois codes de béton armé .

Résultats	Codes		
	BAEL91	CBA93	ACI83
b_{opt} [m]	0,23	0,22	0,27
d_{opt} [m]	0,72	0,80	0,77
A_{sopt} [m ²]	$40,63.10^{-4}$	$35,49.10^{-4}$	$30,48.10^{-4}$
ω_{opt}	0,615	0,445	0,271
Z_{opt} [m ²]	0,365	0,342	0,361

Equations analytiques**BAEL91**

$$d = (1,685/b)^{1/2} ; \omega = 0,03.$$

$$d = (0,100/b)^{1/2} ; \omega = 0,98.$$

$$d = 0,106/b.$$

$$d = [3,036Z - (4,145Z^2 - 2,094b)^{1/2}]/5,072b.$$

$$d = [3,036Z + (4,145Z^2 - 2,094b)^{1/2}]/5,072b.$$

$$0,14 \leq b \leq 0,36.$$

$$0,48 \leq d \leq 0,72.$$

$$Z = 0,365.$$

$$d = [1,108 + (0,552 - 2,094b)^{1/2}]/5,072b.$$

$$d = [1,108 - (0,552 - 2,094b)^{1/2}]/5,072b.$$

$$Z = 0,400.$$

$$d = [1,214 + (0,663 - 2,094b)^{1/2}]/5,072b.$$

$$d = [1,214 - (0,663 - 2,094b)^{1/2}]/5,072b.$$

$$Z = 0,500.$$

$$d = [1,518 + (1,036 - 2,094b)^{1/2}]/5,072b.$$

$$d = [1,518 - (1,036 - 2,094b)^{1/2}]/5,072b.$$

$$Z = 0,600$$

$$d = [1,822 + (1,492 - 2,094b)^{1/2}]/5,072b.$$

$$d = [1,822 - (1,492 - 2,094b)^{1/2}]/5,072b.$$

CBA93

$$d = (1,685/b)^{1/2} ; \omega = 0,03.$$

$$d = (0,100/b)^{1/2} ; \omega = 0,98.$$

$$d = 0,106/b.$$

$$d = [3,036Z - (4,145Z^2 - 2,094b)^{1/2}]/5,072b.$$

$$d = [3,036Z + (4,145Z^2 - 2,094b)^{1/2}]/5,072b.$$

$$0,20 \leq b \leq 0,50.$$

$$0,27 \leq d.$$

$$d/b \leq 3,6.$$

$$Z = 0,342.$$

$$d = [1,038 + (0,485 - 2,094b)^{1/2}]/5,072b.$$

$$d = [1,038 - (0,485 - 2,094b)^{1/2}]/5,072b.$$

$$Z = 0,400.$$

$$d = [1,214 + (0,663 - 2,094b)^{1/2}]/5,072b.$$

$$d = [1,214 - (0,663 - 2,094b)^{1/2}]/5,072b.$$

$$Z = 0,500.$$

$$d = [1,518 + (1,036 - 2,094b)^{1/2}]/5,072b.$$

$$d = [1,518 - (1,036 - 2,094b)^{1/2}]/5,072b.$$

$$Z = 0,600$$

$$d = [1,822 + (1,492 - 2,094b)^{1/2}]/5,072b.$$

$$d = [1,822 - (1,492 - 2,094b)^{1/2}]/5,072b.$$

ACI83

$$d = (0,651/b)^{1/2} ; \omega = 0,06.$$

$$d = (0,126/b)^{1/2} ; \omega = 0,37.$$

$$d = 0,105/b.$$

$$d = [3,69Z - (7,234Z^2 - 3,498b)^{1/2}]/6,379b.$$

$$d = [3,69Z + (7,234Z^2 - 3,498b)^{1/2}]/6,379b.$$

$$0,27 \leq b \leq 0,67.$$

$$0,53 \leq d \leq 1,6.$$

$$Z = 0,361.$$

$$d = [1,332 + (0,943 - 3,498b)^{1/2}]/6,379b.$$

$$d = [1,332 - (0,943 - 3,498b)^{1/2}]/6,379b.$$

$$Z = 0,400.$$

$$d = [1,476 + (1,157 - 3,498b)^{1/2}]/6,379b.$$

$$d = [1,476 - (1,157 - 3,498b)^{1/2}]/6,379b.$$

$$Z = 0,500.$$

$$d = [1,845 + (1,809 - 3,498b)^{1/2}]/6,379b.$$

$$d = [1,845 - (1,809 - 3,498b)^{1/2}]/6,379b.$$

$$Z = 0,600.$$

$$d = [2,214 + (2,604 - 3,498b)^{1/2}]/6,379b.$$

$$d = [2,214 - (2,604 - 3,498b)^{1/2}]/6,379b.$$

L'espace des solutions admissibles , la solution optimale ainsi que les contraintes du problème sont illustrées graphiquement sur les figures Fig.11a,b,c.

Tab.14 - Résultats du calcul classique statique d'une poutre à l' ELU (codes : BAEL91, CBA93 et ACI83).

Résultats	Codes		
	BAEL91	CBA93	ACI83
b_{clas} [m]	0,36	0,50	0,50
d_{clas} [m]	0,72	0,73	0,73
A_{sclas} [m ²]	$33,43.10^{-4}$	$30,98.10^{-4}$	$30,35.10^{-4}$
ω_{clas}	0,317	0,208	0,155
Z_{clas} [m ²]	0,426	0,520	0,517
b_{clas} / b_{opt}	1,57	2,27	1,85
d_{clas} / d_{opt}	1,00	0,91	0,95
A_{sclas} / A_{sopt}	0,82	0,95	0,996
$\omega_{clas} / \omega_{opt}$	0,52	0,47	0,57
Z_{clas} / Z_{opt}	1,17	1,52	1,43

D'après les tableaux Tab.13 et Tab.14, on voit immédiatement que les codes BAEL91 et CBA93 sont pratiquement identiques à l'exception des conditions de coffrage que nous avons introduits ici pour le CBA93 à partir des règles RPA99 corrigées pour une formulation rationnelle du problème de dimensionnement. Les contraintes du problème définies à partir du code américain ACI83 sont différentes des deux autres.

On observe aussi, d'après les tableaux Tab.13 et Tab.14, qu'en termes de coût les codes ACI83 et CBA93 paraissent comparables (pour un rapport de coût C_s/C_b constant). Le code BAEL91 semble le moins économique.

Les conclusions tirées sont relatives aux hypothèses faites et élément étudié .

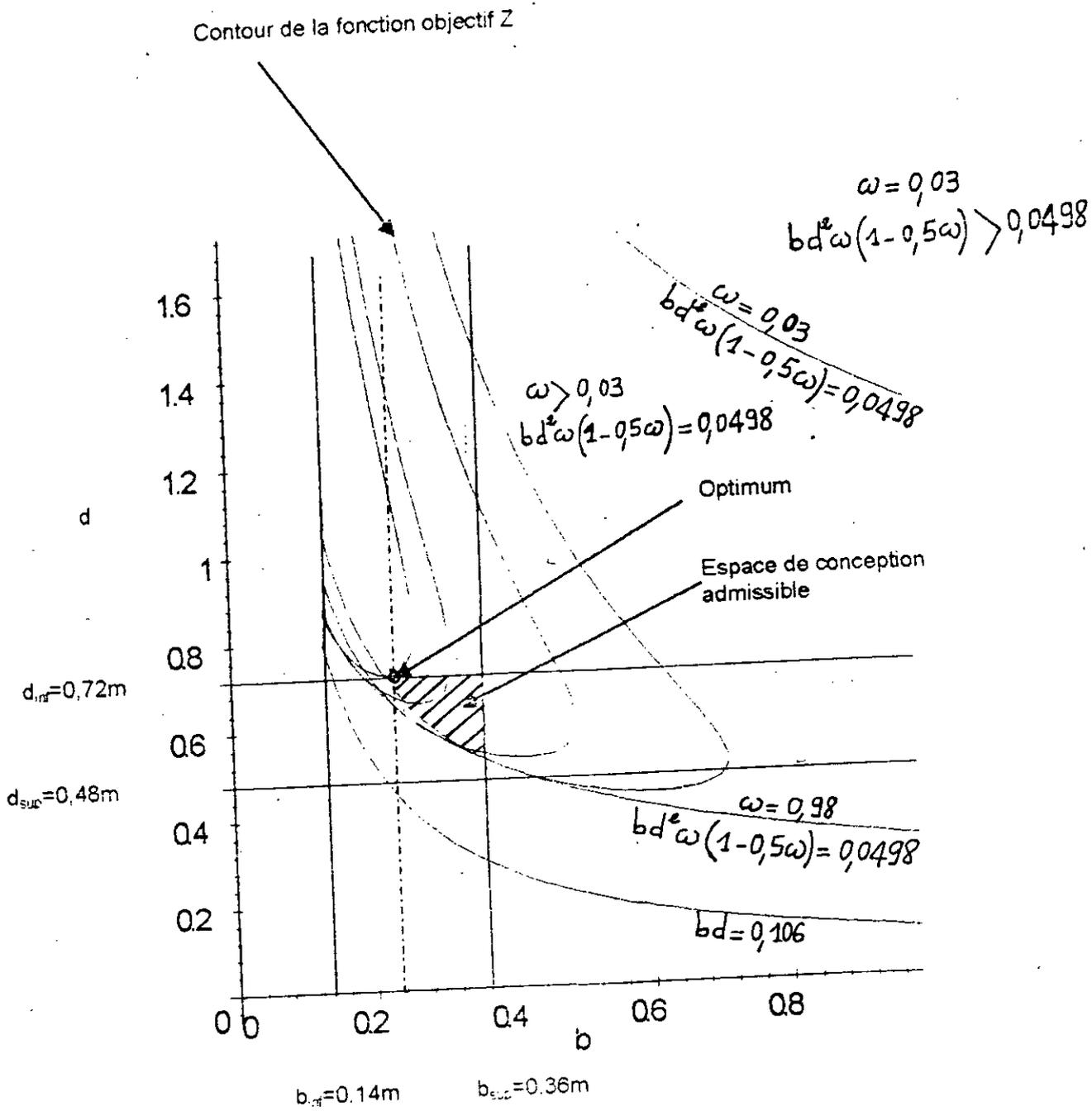


Fig. 11a Calcul statique optimal d'une poutre en BA (BAEL91)
 Espace de conception et solution optimale. $b_{opt} = 0,23m$ $d_{opt} = 0,72m$ $Z_{opt} = 0,365 m^2$

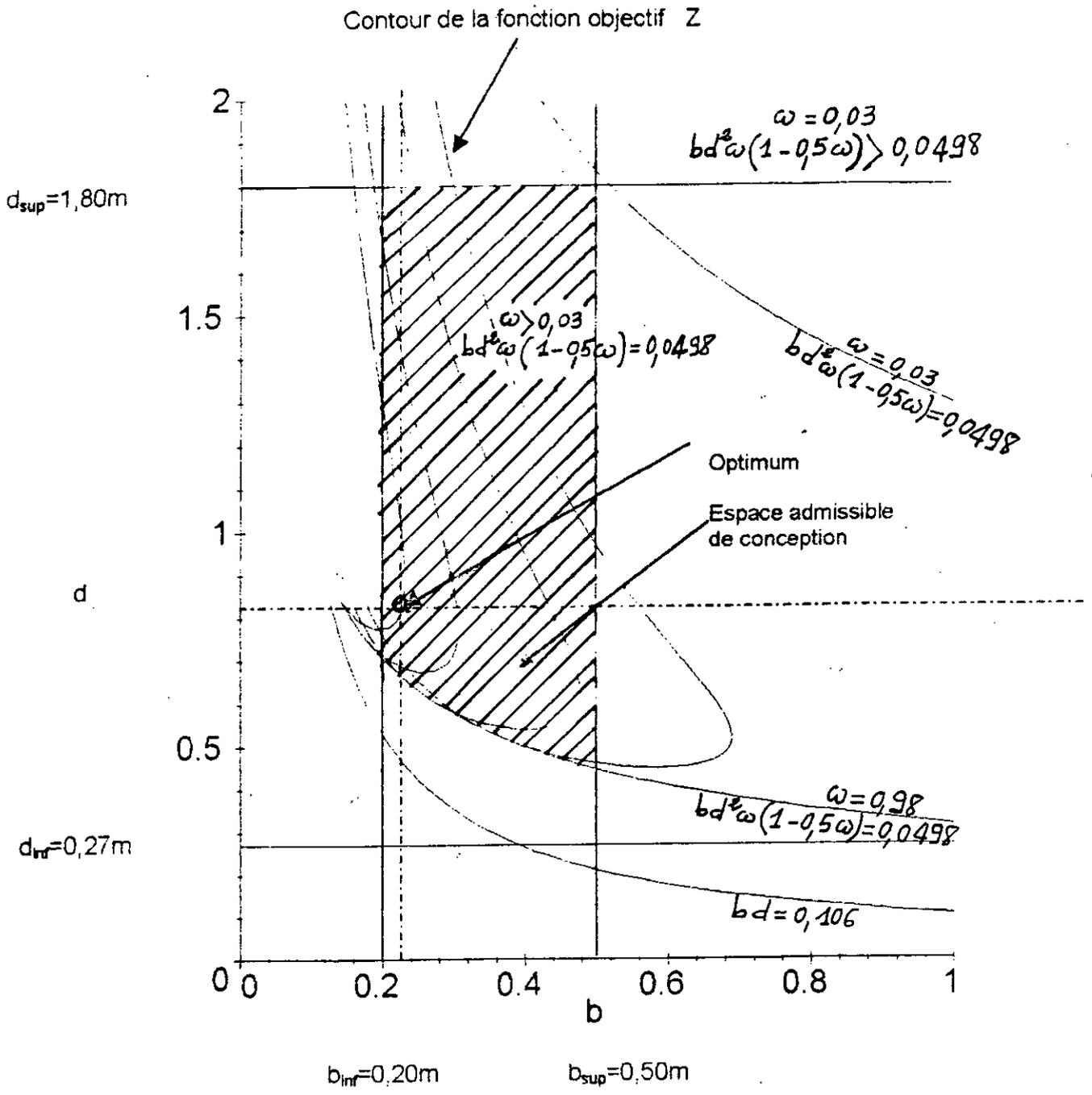


Fig 1b. Calcul statique optimal d'une poutre en BA à l'ELU (CBA93)

Espace de conception et solution optimale $b_{opt} = 0,22m$ $d_{opt} = 0,81m$ $\Sigma_{opt} = 0,342m^2$

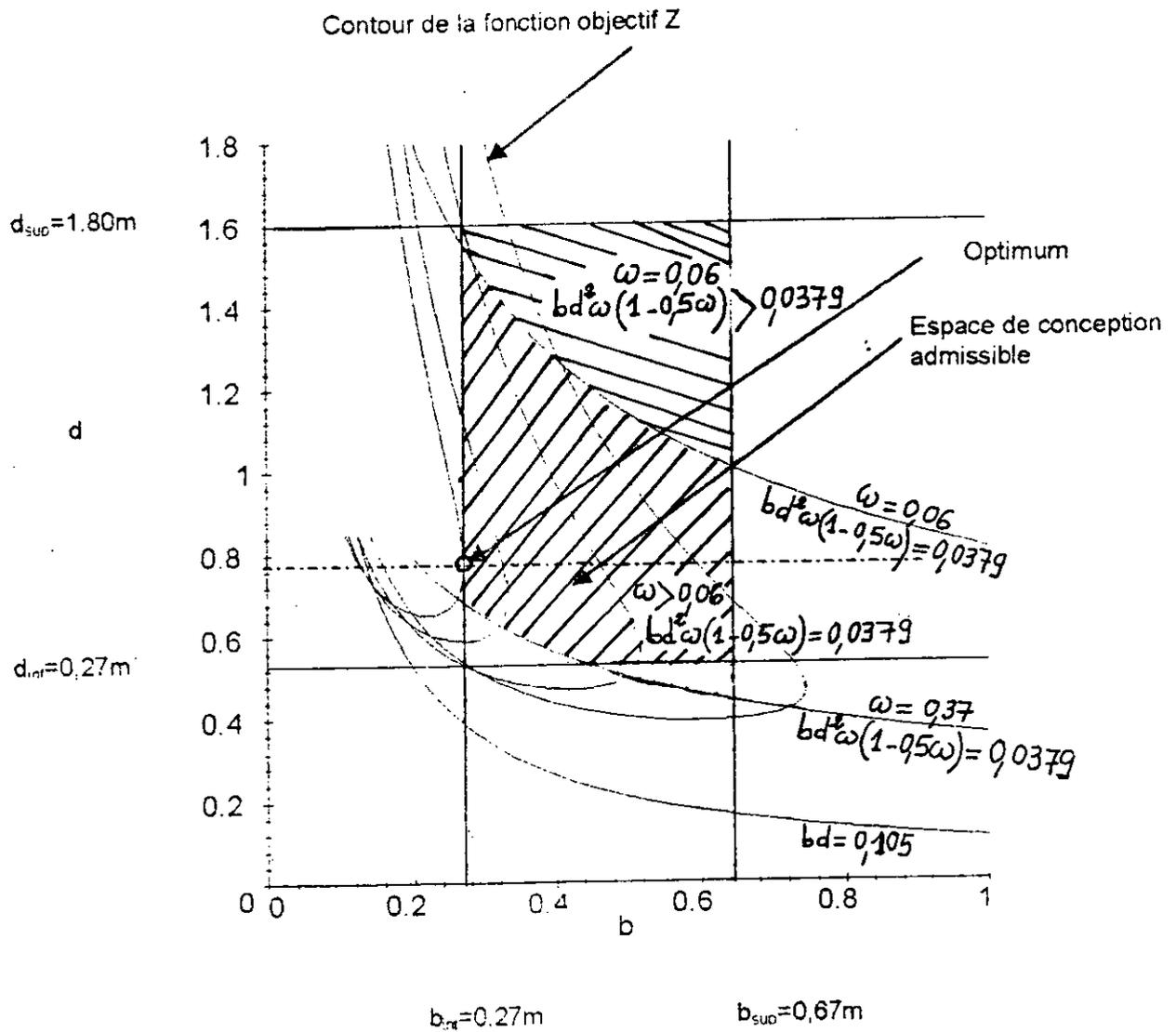


Fig. 5.6 Calcul statique optimal d'une poutre en BA à l'ELU (ACI83)
 Espace de conception et solution optimale : $b_{opt} = 0.27m$ $d_{opt} = 0.77m$ $Z_{opt} = 0.361 m^3$

5.4.2 - Calcul statique optimal à l'ELS

Dans ce qui suit il est considéré une fissuration très préjudiciable.

Combinaisons de sollicitations selon différents codes ELS :

BAEL91

$$M = M_G + M_Q = 0,500 \text{ MNm},$$

CBA93

$$M = M_G + M_Q = 0,500 \text{ MNm}.$$

ACI83

$$M = M_G + M_Q = 0,500 \text{ MNm}.$$

Tab.15 - Sollicitations agissantes combinées selon différents codes à l'ELS.

Cas statique /ELS			
Résultats	Codes		
	BAEL91	CBA93	ACI83
Moment agissant à l'ELS	0,500 MNm	0,500 MNm	0,500 MNm

BAEL91

$$Z = b.d + 50A_s \longrightarrow \text{Min.}$$

sous contraintes :

$$1 \leq 30b.d^2 (\omega^2/3 + 0,682 (1 - \omega)^2).$$

$$1 \leq 330b.d^2 .\omega(\omega^2/3 + 0,682 (1 - \omega)^2) + \omega.$$

$$\omega = 22 A_s/b.d.$$

$$0,02 \leq \omega \leq 0,88.$$

$$0,0697 \leq b.d^3$$

$$0,14 \leq b \leq 0,36.$$

$$0,48 \leq d \leq 0,72.$$

CBA93

$$Z = b.d + 50A_s \longrightarrow \text{Min.}$$

sous contraintes :

$$1 \leq 30b.d^2 (\omega^2/3 + 0,682 (1 - \omega)^2).$$

$$1 \leq 330b.d^2 .\omega(\omega^2/3 + 0,682 (1 - \omega)^2) + \omega.$$

$$\omega = 22A_s/b.d.$$

$$0,02 \leq \omega \leq 0,88.$$

$$0,0697 \leq b.d^3$$

$$0,20 \leq b \leq 0,50.$$

$$0,27 \leq d.$$

$$d/b \leq 3,6.$$

ACI83

$$Z = b.d + 50A_s \longrightarrow \text{Min.}$$

sous contraintes :

$$1 \leq 23,6b.d^2(\omega^2/3 + 0,535(1 - \omega)^2).$$

$$1 \leq 331b.d^2.\omega(\omega^2/3 + 0,535(1 - \omega)^2) + \omega.$$

$$\omega = 28,05A_s/b.d.$$

$$0,1 \leq \omega \leq 0,56.$$

$$0,0071 \leq b.d^3.$$

$$0,27 \leq b \leq 0,67.$$

$$0,53 \leq d \leq 1,6.$$

Tab.16 - Résultats d'un calcul statique optimal à l'ELS pour trois codes de béton armé .

Résultats	Codes		
	BAEL91	CBA93	ACI83
b_{opt} [m]	0,19	0,20	0,27
d_{opt} [m]	0,72	0,70	0,60
A_{sopt} [m ²]	$2,94.10^{-4}$	$3,01.10^{-4}$	$5,77.10^{-4}$
ω_{opt}	0,048	0,047	0,1
Z_{opt} [m ²]	0,149	0,156	0,191

Les résultats obtenus sont pratiquement similaires de sorte que les coûts relatifs optimaux de la fonction objectif demeure comparable avec une économie de l'ordre de 13 % en faveur de codes français BAEL91.

5.4.3 - Calcul dynamique optimal

Une étude préalable a montré que pour le cas d'espèce étudié, les combinaisons de sollicitations les plus défavorables sont les suivantes :

(voir détails en annexe III).

Combinaisons défavorables retenues pour chaque codes :

PS92

$$M = M_G + 0,80M_Q + M_E$$

$$V = V_G + 0,80V_Q + V_E$$

RPA99

$$M = M_G + M_Q + M_E$$

$$V = V_G + V_Q + V_E$$

UBC94

$$M = 0,75(1,4M_G + 1,7M_Q + 1,87M_E)$$

$$V = 0,75(1,4V_G + 1,7V_Q + 1,87V_E)$$

Il en résulte naturellement que la suite des calculs sera effectuée sous ces combinaisons.

PS92**Périodes**

$T_1 = 0,12 \text{ s.}$

$T_2 = 0,03 \text{ s.}$

$T_3 = 0,02 \text{ s.}$

Les vecteurs propres

$$\phi_1 = \begin{vmatrix} 0,141421 \\ 0,200000 \\ 0,141421 \end{vmatrix}$$

$$\phi_2 = \begin{vmatrix} 0,20000 \\ 0,00000 \\ -0,20000 \end{vmatrix}$$

$$\phi_3 = \begin{vmatrix} 0,141421 \\ -0,200000 \\ 0,141421 \end{vmatrix}$$

Les pourcentages de participation des modes

mode 1 : 97,86 %.

mode 2 : 0,00 %.

mode 3 : 2,14 %.

RPA99**Périodes**

$T_1 = 0,12 \text{ s.}$

$T_2 = 0,03 \text{ s.}$

$T_3 = 0,02 \text{ s.}$

Les vecteurs propres

$$\phi_1 = \begin{vmatrix} 0,141421 \\ 0,200000 \\ 0,141421 \end{vmatrix}$$

$$\phi_2 = \begin{vmatrix} 0,20000 \\ 0,00000 \\ -0,20000 \end{vmatrix}$$

$$\phi_3 = \begin{vmatrix} 0,141421 \\ -0,200000 \\ 0,141421 \end{vmatrix}$$

Les pourcentages de participation des modes

mode 1 : 97,86 %.

mode 2 : 0,00 %.

mode 3 : 2,14 %.

UBC94**Périodes**

$T_1 = 0,14 \text{ s.}$

$T_2 = 0,04 \text{ s.}$

$T_3 = 0,02 \text{ s.}$

Les vecteurs propres

$$\phi_1 = \begin{vmatrix} 0,141421 \\ 0,200000 \\ 0,141421 \end{vmatrix}$$

$$\phi_2 = \begin{vmatrix} 0,20000 \\ 0,00000 \\ -0,20000 \end{vmatrix}$$

$$\phi_3 = \begin{vmatrix} 0,141421 \\ -0,200000 \\ 0,141421 \end{vmatrix}$$

Les pourcentages de participation des modes

mode 1 : 97,86 %.

mode 2 : 0,00 %.

mode 3 : 2,14 %.

Sollicitations sismiques E :

PS92

$$M_E = 0,064938432 \text{ MNm.}$$

$$V_E = 0,024775433 \text{ MNm.}$$

RPA99

$$M_E = 0,05503863 \text{ MNm.}$$

$$V_E = 0,020052795 \text{ MNm.}$$

UBC94

$$M_E = 0,002068 \text{ MNm.}$$

$$V_E = 0,0007638 \text{ MNm.}$$

Sollicitations dues aux charges permanentes G :

$$M_G = 0,30 \text{ MNm.}$$

$$V_G = 0,15 \text{ MN.}$$

Sollicitations dues aux charges d'exploitation Q :

$$M_Q = 0,20 \text{ MNm.}$$

$$V_Q = 0,10 \text{ MN.}$$

Combinaisons de sollicitations selon différents codes :

PS92

$$M = M_G + 0,80 M_Q + M_E = 0,525 \text{ MNm.}$$

$$V = V_G + 0,80 V_Q + V_E = 0,255 \text{ MN.}$$

RPA99

$$M = M_G + M_Q + M_E = 0,555 \text{ MNm.}$$

$$V = V_G + V_Q + V_E = 0,270 \text{ MN.}$$

UBC94

$$M = 0,75(1,4M_G + 1,7M_Q + 1,87M_E) = 0,647 \text{ MNm.}$$

$$V = 0,75(1,4V_G + 1,7V_Q + 1,87V_E) = 0,313 \text{ MN.}$$

Tab.17 - Sollicitations agissantes combinées selon différents codes parasismiques.

CAS DYNAMIQUE			
Résultats	Codes		
	PS92	RPA99	UBC94
Moment agissant à l'ELU	0,525 MNm	0,555 MNm	0,647 MNm
Effort tranchant à l'ELU	0,255 MN	0,270 MN	0,313 MN

Tab.18 - Résultats de la résolution du problème aux vibrations propres selon différents codes parasismiques.

Règlements	RPA99/ PS92			UBC94		
	Logiciel SAP90	Méthode de la condensation statique	analytique	Logiciel SAP90	Méthode de la condensation statique	analytique
Mode 1 ω [rad/s]	50,405	51,052	51,093	43,731	44,213	44,329
Mode 2 ω [rad/s]	191,316	202,898	204,375	165,987	176,035	177,317
Mode 3 ω [rad/s]	373,619	430,813	459,845	324,154	374,290	398,963

On constate que les pulsations du mode 1 obtenues par la méthode de la condensation statique sont proches de celles données par la méthode analytique.

PS92

$$Z = b.d + 50A_s \longrightarrow \text{Min.}$$

sous contraintes :

$$0,0284 \leq b.d^2 \omega(1 - 0,5\omega).$$

$$\omega = 21,645A_s/b.d.$$

$$0,03 \leq \omega \leq 0,87.$$

$$0,073 \leq b.d.$$

$$0,14 \leq b \leq 0,36.$$

$$0,48 \leq d \leq 0,72.$$

RPA99

$$Z = b.d + 50A_s \longrightarrow \text{Min.}$$

sous contraintes :

$$0,030 \leq b.d^2 \omega(1 - 0,5\omega).$$

$$\omega = 21,645A_s/b.d.$$

$$0,11 \leq \omega \leq 0,87.$$

$$0,062 \leq b.d.$$

$$0,20 \leq b \leq 0,50.$$

$$0,27 \leq d.$$

$$d/b \leq 3,6.$$

UBC94

$$Z = b.d + 50A_s \longrightarrow \text{Min.}$$

sous contraintes :

$$0,0323 \leq b.d^2 \omega(1 - 0,5\omega).$$

$$\omega = 18,59A_s/b.d.$$

$$0,06 \leq \omega \leq 0,37.$$

$$0,087 \leq b.d.$$

$$0,27 \leq b \leq 0,67.$$

$$0,53 \leq d \leq 1,6.$$

Tab.19 – Résultats d'optimisation d'un calcul dynamique pour trois règlements parasismiques.

Résultats	Codes		
	PS92	RPA99	UBC94
b_{opt} [m]	0,14	0,20	0,27
d_{opt} [m]	0,72	0,72	0,71
A_{sopt} [m ²]	$24,87 \cdot 10^{-4}$	$23,35 \cdot 10^{-4}$	$28,12 \cdot 10^{-4}$
ω_{opt}	0,434	0,351	0,271
Z_{opt} [m ²]	0,225	0,261	0,333

Equations analytiques**PS92**

$$d = (0,961b)^{1/2} ; \omega = 0,03.$$

$$d = (0,058/b)^{1/2} ; \omega = 0,87.$$

$$d = 0,073/b.$$

$$d = [3,310Z - (5,336Z^2 - 1,703b)^{1/2}]/5,62b.$$

$$d = [3,310Z + (5,336Z^2 - 1,703b)^{1/2}]/5,62b.$$

$$0,14 \leq b \leq 0,36.$$

$$0,48 \leq d \leq 0,72.$$

$$Z = 0,225.$$

$$d = [0,745 + (0,270 - 1,703b)^{1/2}]/5,620b.$$

$$d = [0,745 - (0,270 - 1,703b)^{1/2}]/5,620b.$$

$$Z = 0,300.$$

$$d = [0,993 + (0,480 - 1,703b)^{1/2}]/5,620b.$$

$$d = [0,993 - (0,480 - 1,703b)^{1/2}]/5,620b.$$

$$Z = 0,400.$$

$$d = [1,324 + (0,854 - 1,703b)^{1/2}]/5,620b.$$

$$d = [1,324 - (0,854 - 1,703b)^{1/2}]/5,620b.$$

$$Z = 0,500.$$

$$d = [1,655 + (1,334 - 1,703b)^{1/2}]/5,620b.$$

$$d = [1,655 - (1,334 - 1,703b)^{1/2}]/5,620b.$$

RPA99

$$d = (0,289/b)^{1/2} , \omega = 0,11.$$

$$d = (0,061/b)^{1/2} , \omega = 0,87.$$

$$d = 0,062/b.$$

$$d = [3,310Z - (5,336Z^2 - 1,799b)^{1/2}]/5,62b.$$

$$d = [3,310Z + (5,336Z^2 - 1,799b)^{1/2}]/5,62b.$$

$$0,20 \leq b \leq 0,50.$$

$$0,27 \leq d.$$

$$d/b \leq 3,6.$$

$$Z = 0,285.$$

$$d = [0,943 + (0,4331 - 1,799b)^{1/2}]/5,620b.$$

$$d = [0,943 - (0,433 - 1,799b)^{1/2}]/5,620b.$$

$$Z = 0,200.$$

$$d = [0,662 + (0,213 - 1,799b)^{1/2}]/5,620b.$$

$$d = [0,662 - (0,213 - 1,799b)^{1/2}]/5,620b.$$

$$Z = 0,400.$$

$$d = [1,324 + (0,854 - 1,799b)^{1/2}]/5,620b.$$

$$d = [1,324 - (0,854 - 1,799b)^{1/2}]/5,620b.$$

$$Z = 0,500.$$

$$d = [1,655 + (1,334 - 1,799b)^{1/2}]/5,620b.$$

$$d = [1,655 - (1,334 - 1,799b)^{1/2}]/5,620b.$$

UBC94

$$d = (0,555/b)^{1/2} ; \omega = 0,06.$$

$$d = (0,107/b)^{1/2} ; \omega = 0,37.$$

$$d = 0,087/b.$$

$$d = [3,69Z - (7,234Z^2 - 2,981b)^{1/2}]/6,379b.$$

$$d = [3,69Z + (7,234Z^2 - 2,981b)^{1/2}]/6,379b.$$

$$0,27 \leq b \leq 0,67.$$

$$0,53 \leq d \leq 1,6.$$

$$Z = 0,333.$$

$$d = [1,229 + (0,802 - 2,981b)^{1/2}]/6,379b.$$

$$d = [1,229 - (0,802 - 2,981b)^{1/2}]/6,379b.$$

$$Z = 0,200.$$

$$d = [0,738 + (0,289 - 2,981b)^{1/2}]/6,379b.$$

$$d = [0,738 - (0,289 - 2,981b)^{1/2}]/6,379b.$$

$$Z = 0,400.$$

$$d = [1,476 + (1,157 - 2,981b)^{1/2}]/6,379b.$$

$$d = [1,476 - (1,157 - 2,981b)^{1/2}]/6,379b.$$

$$Z = 0,500.$$

$$d = [1,845 + (1,809 - 2,981b)^{1/2}]/6,379b.$$

$$d = [1,845 - (1,809 - 2,981b)^{1/2}]/6,379b.$$

Les résultats montrent que le code américain UBC94 semble le moins économique (pour un rapport de coût unitaire constant pour les trois règlements) reflétant ainsi les niveaux de chargement élevés calculés conformément aux combinaisons de charges et accélérations spectrales de calcul prévues par ce code.

L'espace des solutions admissibles, la solution optimale ainsi que les contraintes du problème sont illustrées graphiquement sur les figures Fig.12a,b,c.

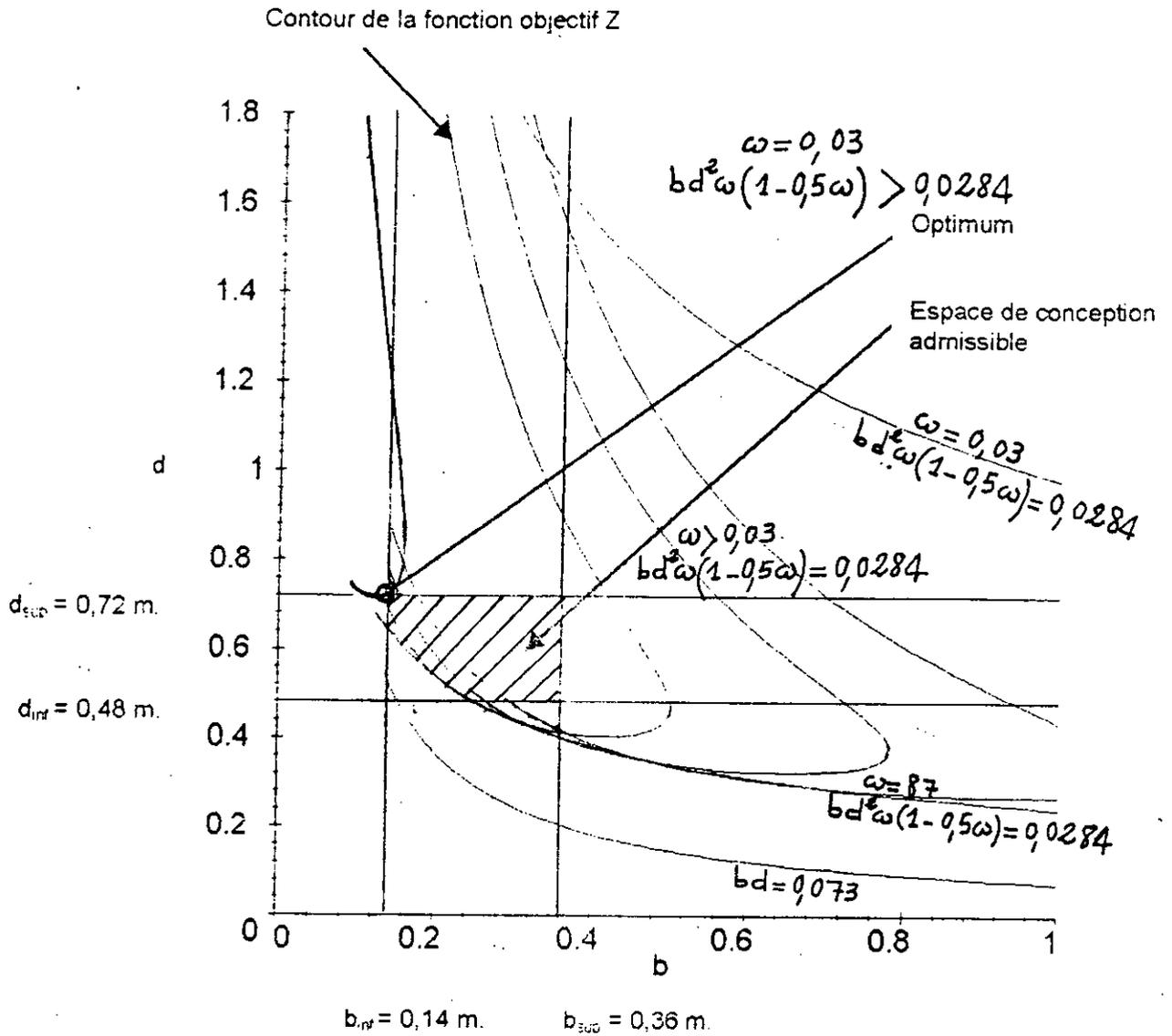


Fig. 12a. Calcul dynamique optimal d'une poutre en BA (PS92)
 Espace de conception et solution optimale : $b_{opt} = 0,14$ m. $d_{opt} = 0,72$ m. $Z_{opt} = 0,225$ m².

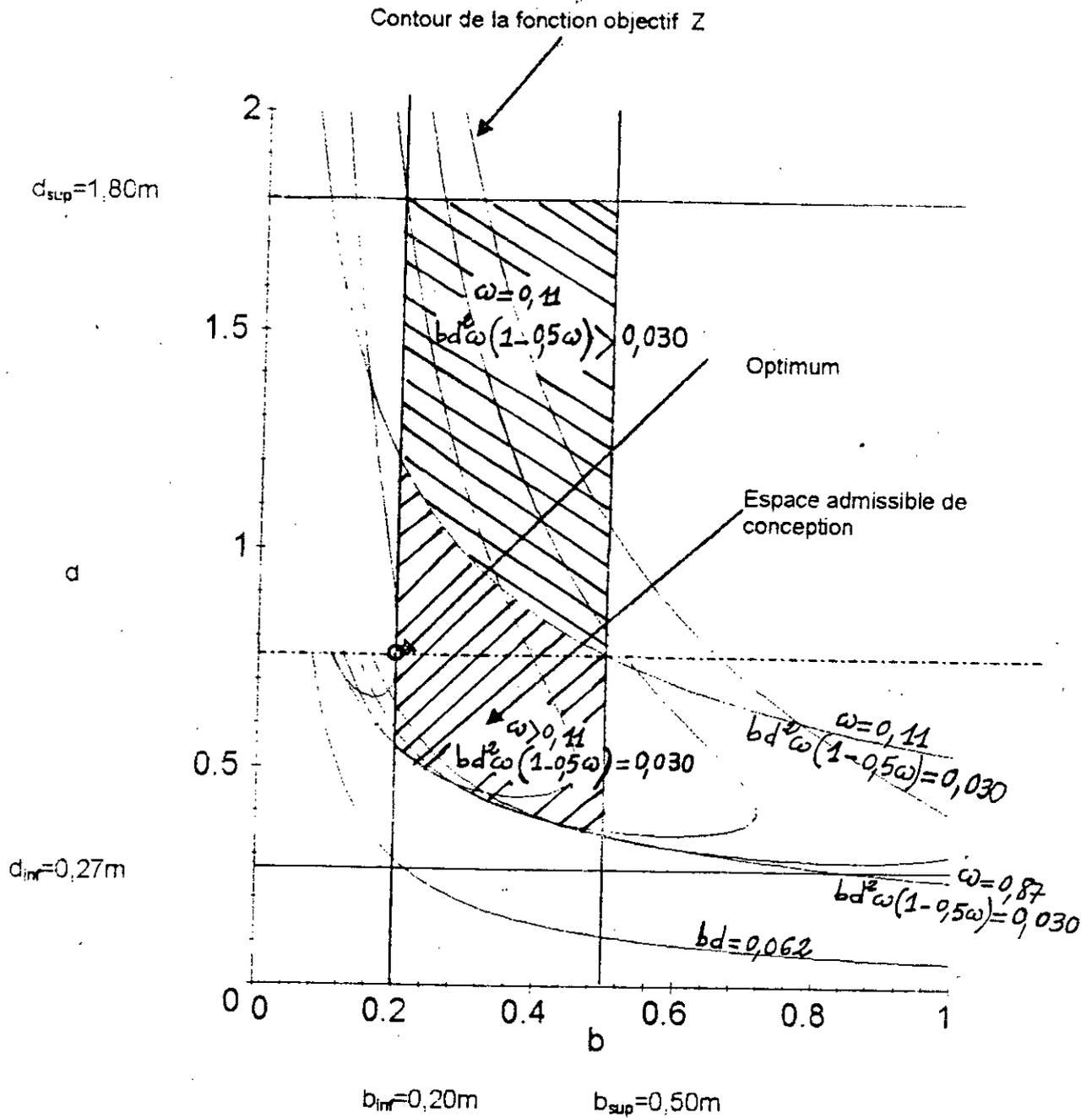


Fig 42b. Calcul dynamique optimal d'une poutre en BA (RPA99)
 Espace de conception et solution optimale: $b_{opt} = 0,20m$ $d_{opt} = 0,72m$ $Z_{opt} = 0,261m^2$.

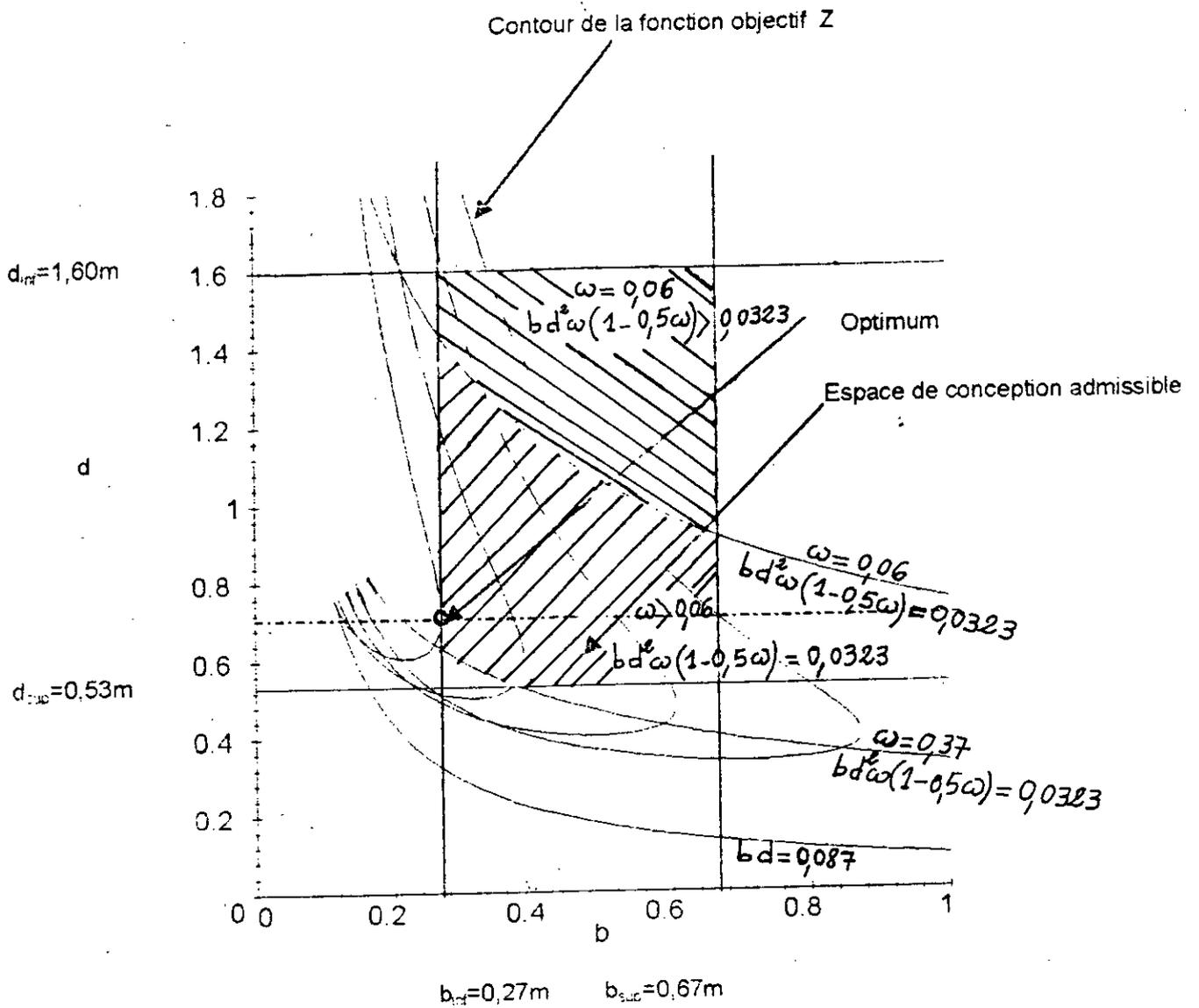


Fig. 4. Calcul dynamique optimal d'une poutre en BA (UBC 94)
 Espace de conception et solution optimale : $b_{opt} = 0,27m$ $d_{opt} = 0,71m$ $Z_{opt} = 0,333 m^3$

5.4.4 - Calcul optimal itératif

Un calcul itératif plus précis est introduit pour la détermination de la solution optimale finale. Le processus itératif consiste alors à ajuster le chargement dû au poids propre de la poutre en BA en fonction de la nouvelle solution optimale obtenue et ce jusqu'à convergence du vecteur solution.

Tab.20 - Calcul statique optimal itératif à l'ELU de la poutre pour différents codes de BA.

Résultats	Codes		
	BAEL91	CBA93	ACI83
b_{opt} [m]	0,2035	0,2625	0,2700
d_{opt} [m]	0,7200	0,7089	0,7453
A_{sopt} [m ²]	$36,6816 \cdot 10^{-4}$	$33,7555 \cdot 10^{-4}$	$29,339 \cdot 10^{-4}$
ω_{opt}	0,615	0,445	0,271
Z_{opt} [m ²]	0,3299	0,3549	0,3479

Les rapports des coûts $\frac{Z_{\text{statique optimal}}}{Z_{\text{statique optimal itératif}}}$ ventilés par règlements obtenus en utilisant un calcul statique optimal sans itération et un calcul statique optimale avec itération sont consignés dans le tableau Tab.21 ci-après :

Tab.21 - Etudes comparées des rapports de coût déduit d'un calcul statique optimal à l'ELU.

Comparaison	Codes		
	BAEL91	CBA93	ACI83
$\frac{Z_{\text{statique optimal}}}{Z_{\text{statique optimal itératif}}}$	1,11	1,07	1,04
$\frac{Z_{\text{statique classique}}}{Z_{\text{statique optimal itératif}}}$	1,30	1,63	1,49

Ce rapport montre que l'économie réalisée en utilisant un calcul itératif peut être appréciable (e.g. de l'ordre de 11% pour le BAEL91).

En outre, les calculs montrent clairement que l'économie finale réalisée en utilisant un dimensionnement optimal basé sur un calcul itératif par rapport à un dimensionnement classique peut être substantielle (e.g. de l'ordre de 63% pour le code algérien).

Tab.22 - Calcul dynamique optimal itératif de la poutre en BA en flexion pour différents codes parasismiques.

Résultats	Codes		
	PS92	RPA99	UBC94
b_{opt} [m]	0,1400	0,2249	0,2700
d_{opt} [m]	0,7200	0,6073	0,6891
A_{sopt} [m ²]	$28,8012 \cdot 10^{-4}$	$26,3459 \cdot 10^{-4}$	$27,1288 \cdot 10^{-4}$
ω_{opt}	0,490	0,417	0,271
Z_{opt} [m ²]	0,2148	0,2683	0,3217
$\frac{Z_{opt} \text{ dynamique optimal}}{Z_{opt} \text{ dynamique optimal itératif}}$	1,05	1,05	1,04

On voit que le calcul itératif du vecteur solution optimale du problème permet de réaliser un gain de l'ordre de 5% indépendamment du règlement considéré.

CHAPITRE VI : CALCUL OPTIMAL DES DALLES PAR DIFFERENTS CODES ET ETUDES COMPAREES

6.1. - EVALUATION DES MOMENTS FORFAITAIRES

6.1.1 - Méthode forfaitaire pour les poutres ou dalles continues dans une direction (règlement français BAEL91 et algérien CBA93)

Principe général

- La somme du moment moyen sur appuis et du moment en travée doit être supérieure au moment isostatique majoré d'une certaine quantité dépendant de la valeur des charges d'exploitation par rapport aux charges permanentes.
- Les moments en travée ou sur appuis ne peuvent être inférieure à certaines valeurs minimales.

Domaine de validité

Leur emploi est assujéti à quatre conditions :

5. Les charges variables ne dépassent pas le double des charges permanentes où 5kN/m^2 (planchers dits à charge modérée). $Q \leq \text{Max. } (2G ; 500 \text{ KN/m}^2)$.
6. La fissuration ne compromet pas la tenue des revêtements, ni celle des cloisons (la fissuration du béton est considérée comme non préjudiciable).
7. Les éléments de plancher ont même inertie dans les différentes travées.
8. Les portées successives ont un rapport compris entre 0,8 et 1,25.

Dans le cas où l'une des conditions n'est pas vérifiée se reporter à d'autres méthodes.

Dimensionnement des dalles sur deux appuis

Dalles dites sur deux appuis : portent dans une seule direction.

On doit vérifier alors que les moments sur appuis ($M_w ; M_o$) et en travée M_t satisfont l'inégalité :

$$M_t + (M_w + M_o)/2 \geq \text{Max. } [(1 + 0,3 \alpha)M_o ; 1,05M_o]$$

N'importe quel choix est possible pour M_t , M_o et M_w à condition que l'inégalité précédente soit vérifiée ainsi que les conditions suivantes :

Valeurs minimales des moments M_t , M_w et M_o :

Pour une poutre à deux travées ; $M_t \geq (1,2 + 0,3 \alpha) M_o/2$;

M_o : Moment fléchissant maximum dans la travée de comparaison.

La valeur absolue de chaque moment sur l'appui intermédiaire doit être au moins égale à $0,6M_o$.

Pour les dalles, on n'oubliera pas que le moment sur appui de rive devra être pris égal à $0,15M_o$.

Détermination de la longueur des chapeaux et arrêt des barres inférieures de second lit :

Lorsque la charge d'exploitation est au plus égale à la charge permanente et lorsque ces charges peuvent être considérées uniformément réparties, on peut se dispenser du tracé des courbes enveloppes sous réserve que les dispositions suivantes soient adoptées.

Si l'on adopte pour les moments sur appuis les valeurs absolues minimales définies ci-dessus, à moins de justifications plus précises, la longueur des chapeaux, à partir du nu des appuis est au moins égale :

- à 1/5 de la plus grande portée des deux travées encadrant l'appui considéré s'il s'agit d'un appui n'appartenant pas à une travée de rive,
- à 1/4 de la plus grande portée des deux travées encadrant l'appui considéré s'il s'agit d'un appui intermédiaire voisin de rive.

Principe de calcul

Cas de charges uniformément réparties sur toute la surface de la dalle

$$\alpha = (l_x/l_y) \leq 0,40. ; l_x \leq l_y$$

L'étude s'effectue sur une bande élémentaire de 1 m de longueur.

La longueur est celle de la plus petite portée.

Les moments de flexion sont obtenus à partir du moment fléchissant d'une poutre reposant simplement sur deux (02) appuis ($M_0 = q \cdot l_x^2/8$).

Les barres porteuses sont placées dans le sens de la petite portée l_x .

Les barres dites de répartition sont placées orthogonalement aux barres porteuses.

Indication pour les dimensions de la section de béton d'après le BAEL91 :

Poutre à section rectangulaire sur appuis simples : $L/15 \leq h \leq L/10$.

Poutre à section rectangulaire continue : $L/20 \leq h \leq L/16$.

Largeur de poutre b : $h/5 \leq b \leq h/2$.

avec $d = 0,9h$; l = portée.

6.1.2 - Méthode forfaitaire pour les poutres ou dalles continues dans une direction (règlement américain ACI83)

Le règlement américain propose, une méthode forfaitaire de calcul des moments sur appuis et en travée qui évite le calcul des moments enveloppes pour les différents cas de chargements et une redistribution des moments calculés par la résistance des matériaux.

L'emploi de la méthode approchée pour poutre ou dalle portant dans une direction pour les bâtiments courants est assujéti aux conditions suivantes :

1. Les portées ne diffèrent pas plus de 20 %.
2. Les charges variables n'excédant pas trois fois les charges permanentes.
3. Charges réparties et membres prismatiques.

Si l'on pose P = charge totale pondérée et l = portée entre nus.

Moment ultime positif :

Travée de rive, appui en béton armé : $M_u = q_u \cdot l^2/14$.

Avec : l représente la portée entre nus des appuis et $q_u = 1,4G + 1,7Q$.

Moment ultime négatif :

Cas de deux travées :

Appui central : $M_u = q_u \cdot l^2/9$.

Appui de rive : $M_u = q_u \cdot l^2/24$.

6.2. - EVALUATION DES MOMENTS ANALYTIQUES

Poutre continue sur trois appuis, chargée uniformément travées égales :

Moments d'appuis

$$\text{Appui central} : M_{ac} = -0,1250q.l^2.$$

$$\text{Appui de rive} : M_{ar} = 0,00.$$

$$\text{Moment en travée} : M_t = 0,0703q.l^2.$$

Flèche :

$$f = 0,00521q.l^4/E.I.$$

6.3. - NOUVELLE METHODOLOGIE DE COMPARAISON DES REGLES TECHNIQUES DE CONCEPTION ET DE CALCUL : APPLICATION AUX PROBLEMES DE DIMENSIONNEMENT DE DALLES EN FLEXION EN BA

A des fins de comparaison, le rapport des coûts unitaires des matériaux mis en œuvre C_a/C_b est pris égal à 50 indépendamment des bordereaux des prix unitaires appliqués par les pays concernés.

6.3.1 - Dimensionnement statique optimal à l'ELU

A. Formulation du problème d'optimisation par les sollicitations analytiques

BAEL91

$$Z = 8d + 50(2A_{s1} + 8A_{s2}) \longrightarrow \text{Min.}$$

sous les contraintes :

$$3,375d + 0,375 \leq 1417d^2 \cdot \omega_1(1 - 0,5\omega_1).$$

$$3,796d + 0,422 \leq 1417d^2 \cdot \omega_2(1 - 0,5\omega_2).$$

$$\omega_1 = 24,559A_{s1}/d.$$

$$\omega_2 = 24,559A_{s2}/d.$$

$$0,02 \leq \omega_1 \leq 0,98.$$

$$0,02 \leq \omega_2 \leq 0,98.$$

$$0,18 \leq d \leq 0,23.$$

CBA93

$$Z = 8d + 50(2A_{s1} + 8A_{s2}) \longrightarrow \text{Min.}$$

sous les contraintes :

$$3,375d + 0,375 \leq 1417d^2 \cdot \omega_1(1 - 0,5\omega_1).$$

$$3,796d + 0,422 \leq 1417d^2 \cdot \omega_2(1 - 0,5\omega_2).$$

$$\omega_1 = 24,559A_{s1}/d.$$

$$\omega_2 = 24,559A_{s2}/d.$$

$$0,02 \leq \omega_1 \leq 0,98.$$

$$0,02 \leq \omega_2 \leq 0,98.$$

$$0,18 \leq d \leq 0,23.$$

ACI83

$$Z = 8d + 50(2A_{s1} + 8A_{s2}) \longrightarrow \text{Min.}$$

sous les contraintes :

$$7d + 0,850 \leq 2004,3d^2 \cdot \omega_1(1 - 0,5\omega_1).$$

$$3,937d + 0,478 \leq 2004,3d^2 \cdot \omega_2(1 - 0,5\omega_2).$$

$$\omega_1 = 18,59A_{s1}/b.d.$$

$$\omega_2 = 18,59A_{s2}/b.d.$$

$$0,02 \leq \omega_1 \leq 0,37.$$

$$0,02 \leq \omega_2 \leq 0,37.$$

$$0,17 \leq d \leq 0,25.$$

Tab.23 - Résultats obtenus d'un dimensionnement statique optimal à l'ELU d'une dalle continue en BA pour les trois de BA – méthode analytique.

Résultats	Règlements		
	BAEL91	CBA93	ACI83
d_{opt} [m]	0,18	0,18	0,17
A_{s1opt} [m ²]	$3,21 \cdot 10^{-4}$	$3,21 \cdot 10^{-4}$	$3,280 \cdot 10^{-4}$
A_{s2opt} [m ²]	$1,79 \cdot 10^{-4}$	$1,79 \cdot 10^{-4}$	$1,830 \cdot 10^{-4}$
ω_{1opt}	0,04	0,04	0,04
ω_{2opt}	0,02	0,02	0,02
Z_{opt} [m ³]	1,544	1,544	1,466

Equations analytiques**BAEL91**

$$Z = [8 + 10K/\beta - 2K/\beta((1 - 2M_a/\alpha \cdot d^2)^{1/2} + 2(1 - 2M_t/\alpha \cdot d^2)^{1/2})]d.$$

$$K = C_s/C_b = 50.$$

$$\alpha = 14170 ; \beta = 24,559.$$

$$M_a = 67,50d + 7,50.$$

$$M_t = 37,96d + 4,22.$$

$$Z_{50} = [28,359 - 4,072((1 - (135d + 15)/14170d^2)^{1/2} + 4(1 - (75,92d + 8,44)/14170d^2)^{1/2})]d.$$

CBA93

$$Z = [8 + 10K/\beta - 2K/\beta((1 - 2M_a/\alpha \cdot d^2)^{1/2} + 2(1 - 2M_t/\alpha \cdot d^2)^{1/2})]d.$$

$$K = C_s/C_b = 50.$$

$$\alpha = 14170 ; \beta = 24,559.$$

$$M_a = 67,50d + 7,50.$$

$$M_t = 37,96d + 4,22.$$

$$Z_{50} = [28,359 - 4,072((1 - (135d + 15)/14170d^2)^{1/2} + 4(1 - (75,92d + 8,44)/14170d^2)^{1/2})]d.$$

ACI83

$$Z = [8 + 10K/\beta - 2K/\beta((1 - 2M_a/\alpha.d^2)^{1/2} + 2(1 - 2M_t/\alpha.d^2)^{1/2})]d.$$

$$K = C_g/C_b = 50.$$

$$\alpha = 20043 ; \beta = 18,59.$$

$$M_a = 70d + 8,50.$$

$$M_t = 39,37d + 4,78.$$

$$Z_{50} = [34,896 - 5,379((1 - (140d + 17)/20043d^2)^{1/2} + 4(1 - (78,74d + 9,56)/20043d^2)^{1/2})]d.$$

L'espace des solutions admissibles , la solution optimale ainsi que les contraintes du problème sont illustrées graphiquement sur les figures Fig.13a,b,c.

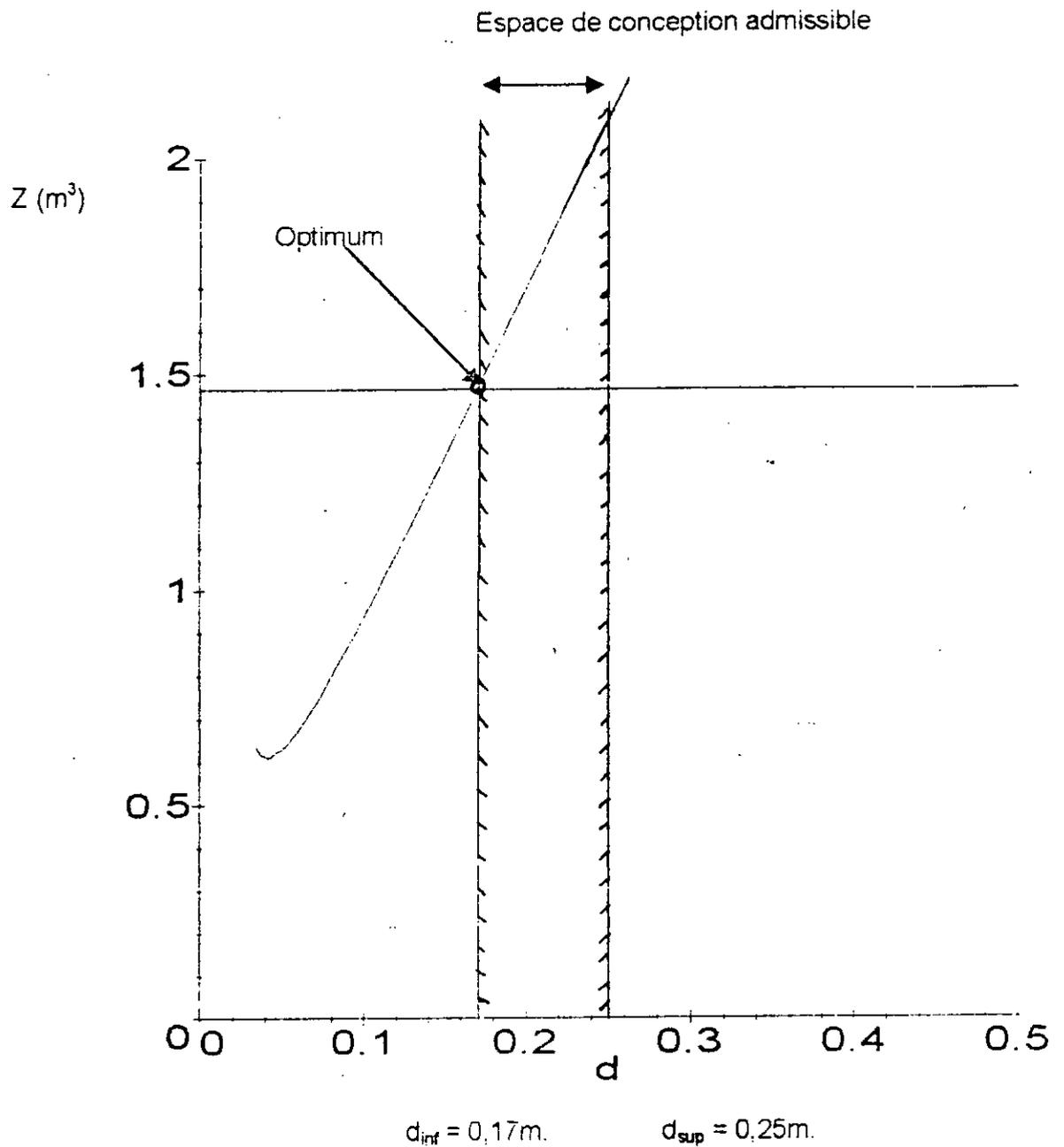


Fig.12. Calcul statique optimal d'une dalle en BA à l'ELU (ACI83 - Méthode analytique)
 Espace de conception et solution optimale : $d_{\text{opt}} = 0,17\text{m}$ $Z_{\text{opt}} = 1,466 \text{ m}^3$

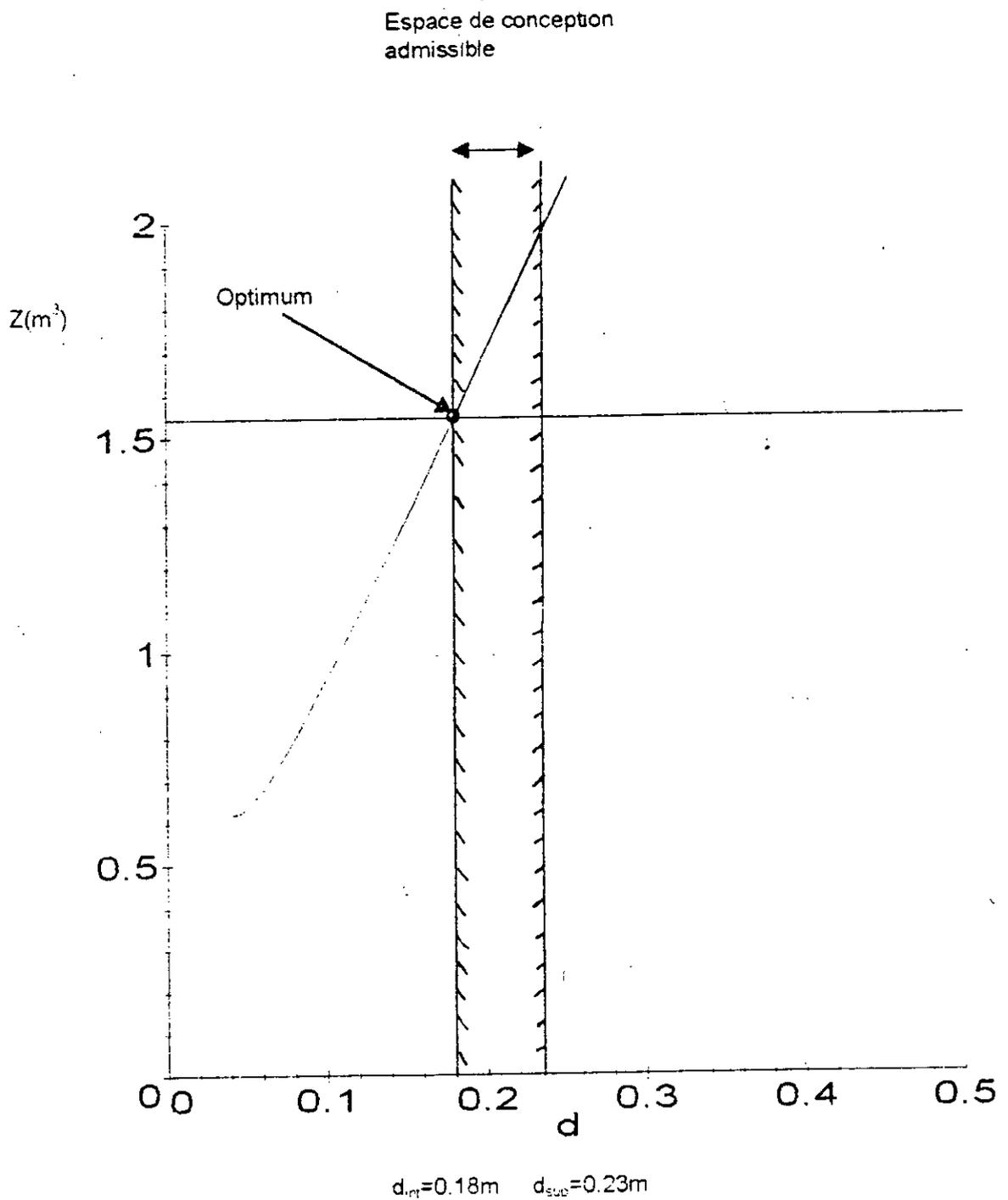


Fig.13a. Calcul statique optimal d'une dalle en BA à l'ELU (BAEL91 - Méthode analytique)
 Espace de conception et solution optimale $d_{\text{opt}} = 0,18 \text{ m}$. $Z_{\text{opt}} = 1,544 \text{ m}^3$.

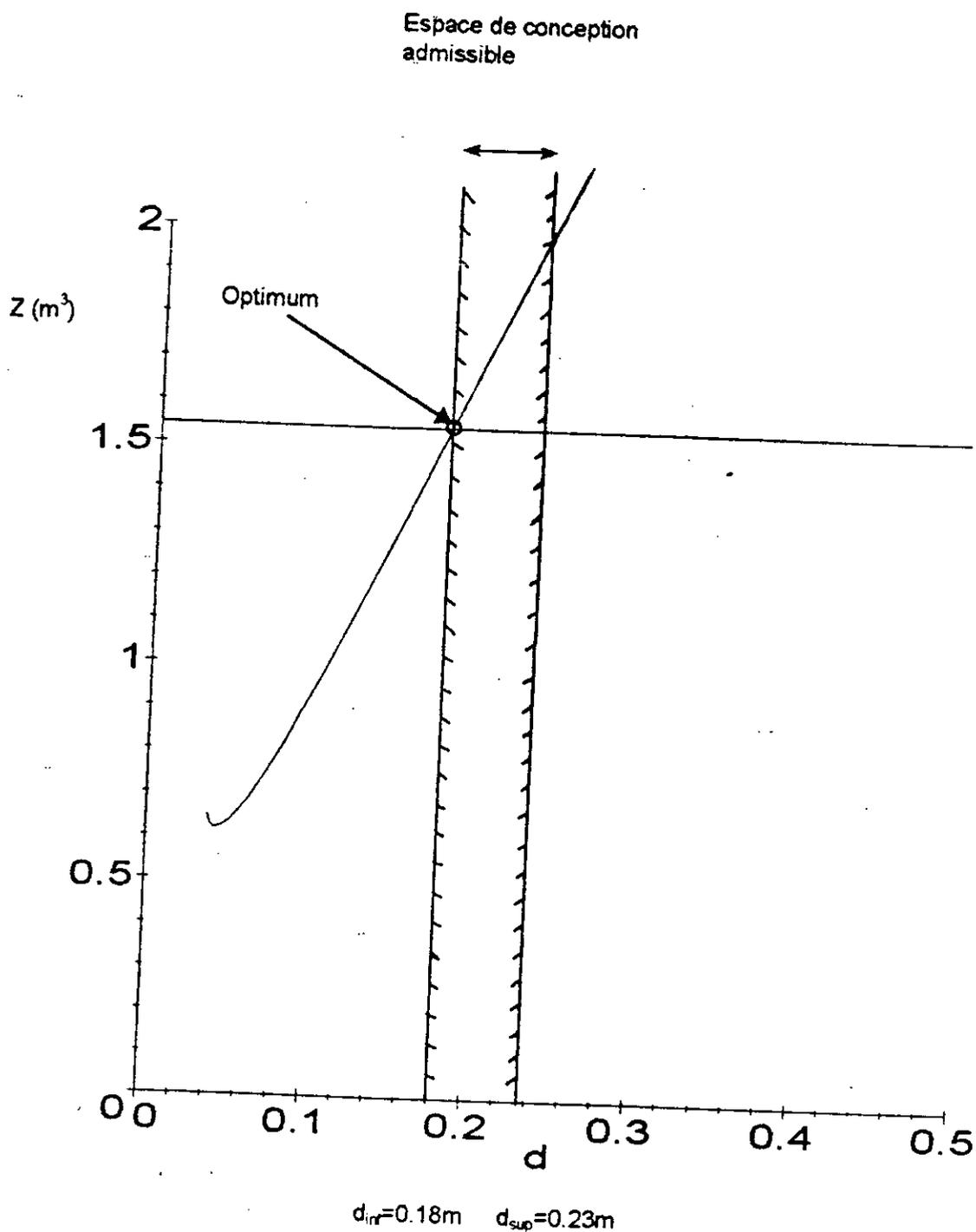


Fig.13 b. Calcul statique optimal d'une dalle en BA à l'ELU (CBA93 - Méthode analytique)
Espace de conception et solution optimale : $d_{\text{opt}} = 0,18\text{ m}$. $Z_{\text{opt}} = 1,544\text{ m}^3$.

B. Formulation du problème d'optimisation par les sollicitations forfaitaires

Dans ce qui suit, les résultats d'optimisation du problème de dimensionnement des dalles en flexion en BA ventilés par méthode de calcul des sollicitations sont consignés dans le tableau Tab25 ci-après pour les trois codes considérés : français, algérien et américain. Bien que le code CBA93 ne précise pas les conditions de coffrage limites à adopter pour les dalles en BA, ces conditions ont été introduites pour le CBA93 à partir des règles BAEL pour une formulation rationnelle du problème de dimensionnement. Il est également rappelé que les sollicitations sont déterminées selon deux méthodes différentes : la méthode forfaitaire (utilisant les prescriptions réglementaires propres à chaque code en vigueur) et la méthode analytique (fondée sur les principes du calcul automatique des structures). Les résultats présentés sont obtenus sur la base d'une hypothèse de fissuration peu préjudiciable .

BAEL91

$$Z = 8d + 50(2A_{s1} + 8A_{s2} + 2A_{s3}) \longrightarrow \text{Min}$$

sous les contraintes :

$$(6,25d + 0,925)(6,75d + 0,75)/(10d + 1) \leq 1417d^2 \omega_1(1 - 0,5\omega_1).$$

$$4,05d + 0,45 \leq 1417d^2 \omega_2(1 - 0,5\omega_2)$$

$$1,0125d + 0,1125 \leq 1417d^2 \omega_3(1 - 0,5\omega_3).$$

$$\omega_1 = 24,559A_{s1}/d.$$

$$\omega_2 = 24,559A_{s2}/d.$$

$$\omega_3 = 24,559A_{s3}/d.$$

$$0,02 \leq \omega_1 \leq 0,98.$$

$$0,02 \leq \omega_2 \leq 0,98.$$

$$0,02 \leq \omega_3 \leq 0,98.$$

$$0,18 \leq d \leq 0,23.$$

CBA93

$$Z = 8d + 50(2A_{s1} + 8A_{s2} + 2A_{s3}) \longrightarrow \text{Min.}$$

sous les contraintes :

$$(6,25d + 0,925)(6,75d + 0,75)/(10d + 1) \leq 1417d^2 \omega_1(1 - 0,5\omega_1).$$

$$4,05d + 0,45 \leq 1417d^2 \omega_2(1 - 0,5\omega_2).$$

$$1,0125d + 0,1125 \leq 1417d^2 \omega_3(1 - 0,5\omega_3).$$

$$\omega_1 = 24,559A_{s1}/d.$$

$$\omega_2 = 24,559A_{s2}/d.$$

$$\omega_3 = 24,559A_{s3}/d.$$

$$0,02 \leq \omega_1 \leq 0,98.$$

$$0,02 \leq \omega_2 \leq 0,98.$$

$$0,02 \leq \omega_3 \leq 0,98.$$

$$0,18 \leq d \leq 0,23.$$

ACI83

$$Z = 8d + 50(2A_{s1} + 8A_{s2} + 2A_{s3}) \longrightarrow \text{Min.}$$

sous les contraintes :

$$4d + 0,486 \leq 2004,3d^2 \cdot \omega_1 (1 - 0,5\omega_1).$$

$$6,222d + 0,756 \leq 2004,3d^2 \cdot \omega_2 (1 - 0,5\omega_2).$$

$$2,333d + 0,283 \leq 2004,3d^2 \cdot \omega_3 (1 - 0,5\omega_3).$$

$$\omega_1 = 18,59A_{s1}/d.$$

$$\omega_2 = 18,59A_{s2}/d.$$

$$\omega_3 = 18,59A_{s3}/d.$$

$$0,02 \leq \omega_1 \leq 0,98.$$

$$0,02 \leq \omega_2 \leq 0,98.$$

$$0,02 \leq \omega_3 \leq 0,98.$$

$$0,17 \leq d \leq 0,25.$$

Tab.24 - Résultats d'optimisation d'un dimensionnement statique optimal d'une dalle continue en BA à l'ELU pour les trois codes du BA – méthode forfaitaire.

Résultats	Règlements		
	BAEL91	CBA93	ACI83
d_{opt} [m]	0,18	0,18	0,17
A_{s1opt} [m ²]	$2,33 \cdot 10^{-4}$	$2,33 \cdot 10^{-4}$	$1,86 \cdot 10^{-4}$
A_{s2opt} [m ²]	$1,91 \cdot 10^{-4}$	$1,91 \cdot 10^{-4}$	$2,91 \cdot 10^{-4}$
A_{s3opt} [m ²]	$1,47 \cdot 10^{-4}$	$1,47 \cdot 10^{-4}$	$1,83 \cdot 10^{-4}$
ω_{1opt}	0,03	0,03	0,03
ω_{2opt}	0,03	0,03	0,03
ω_{3opt}	0,02	0,02	0,02
Z_{opt} [m ³]	1,554	1,554	1,513

Equations analytiques**BAEL91**

$$Z = [8 + 12K/\beta - 2K/\beta ((1 - 2M_{ar}/\alpha \cdot d^2)^{1/2} + ((1 - 2M_{ac}/\alpha \cdot d^2)^{1/2} + 4(1 - 2M_t/\alpha \cdot d^2)^{1/2})]d.$$

$$K = C_g/C_b = 50.$$

$$\alpha = 14170 ; \beta = 24,559.$$

$$M_{ar} = 10,125d + 1,125.$$

$$M_{ac} = 40,5d + 4,50.$$

$$M_t = (6,25d + 0,925)(67,5d + 7,5)/(10d + 1).$$

$$Z_{50} = [32,431 - 4,072((1 - (20,25d + 2,25)/14170d^2)^{1/2} + (1 - (81d + 9)/14170d^2)^{1/2} + 4(1 - (12,5d + 1,850)(67,5d + 7,5)/(10d + 1)14170d^2)^{1/2})]d.$$

CBA93

$$Z = [8 + 12K/\beta - 2 K/\beta ((1 - 2M_{ar}/\alpha.d^2)^{1/2} + ((1 - 2M_{ac}/\alpha.d^2)^{1/2} + 4(1 - 2M_t/\alpha.d^2)^{1/2}))]d.$$

$$K = C_s/C_b = 50.$$

$$\alpha = 14170 ; \beta = 24,559.$$

$$M_{ar} = 10,125d + 1,125.$$

$$M_{ac} = 40,5d + 4,50.$$

$$M_t = (6,25d + 0,925)(67,5d + 7,5)/(10d + 1).$$

$$Z_{50} = [32,431 - 4,072((1 - (20,25d + 2,25)/14170d^2)^{1/2} + (1 - (81d + 9)/14170d^2)^{1/2} + 4(1 - (12,5d + 1,850)(67,5d + 7,5)/(10d + 1)14170d^2)^{1/2})]d.$$

ACI83

$$Z = [8 + 12K/\beta - 2 K/\beta ((1 - 2M_{ar}/\alpha.d^2)^{1/2} + ((1 - 2M_{ac}/\alpha.d^2)^{1/2} + 4(1 - 2M_t/\alpha.d^2)^{1/2}))]d.$$

$$K = C_s/C_b = 50.$$

$$\alpha = 20043 ; \beta = 18,590.$$

$$M_{ar} = 23,33d + 2,83.$$

$$M_{ac} = 62,22d + 7,56.$$

$$M_t = 40d + 4,86.$$

$$Z_{50} = [40,275 - 5,379((1 - (46,66d + 5,66)/20043d^2)^{1/2} + (1 - (124,44d + 15,12)/20043d^2)^{1/2} + 4(1 - (80d + 9,72)/20043d^2)^{1/2})]d.$$

Tab.25 - Récapitulatif des résultats d'optimisation d'un dimensionnement statique optimal d'une dalle en BA en flexion pour les trois codes et les deux méthodes considérées..

Résultats	Méthode forfaitaire		Méthode analytique	
	BAEL 91/ CBA 93	ACI83	BAEL 91/ CBA 93	ACI83
d_{opt} [m]	0,18.	0,17	0,18	0,17
A_{s1opt} [m ²]	$2,33 \cdot 10^{-4}$	$1,86 \cdot 10^{-4}$	$3,21 \cdot 10^{-4}$	$3,28 \cdot 10^{-4}$
A_{s2opt} [m ²]	$1,91 \cdot 10^{-4}$	$2,91 \cdot 10^{-4}$	$1,79 \cdot 10^{-4}$	$1,83 \cdot 10^{-4}$
A_{s3opt} [m ²]	$1,47 \cdot 10^{-4}$	$1,83 \cdot 10^{-4}$	/	/
ω_{1opt}	0,03	0,02	0,04	0,04
ω_{2opt}	0,03	0,03	0,02	0,02
ω_{3opt}	0,02	0,02	/	/
Z_{opt} [m ³]	1,554	1,513	1,544	1,466
$Z_{classique}/Z_{opt}$	1.09	1.15	1.10	1.16

On peut remarquer pour le calcul statique optimal des dalles à l'ELU que le code américain ACI83 est plus économique (gain de l'ordre de 16% par rapport à un calcul classique ; ce gain n'étant que de l'ordre de 10% pour le code algérien CBA93 confondu avec le code français BAEL91). Ces observations sont pratiquement indépendantes de la méthode utilisée (forfaitaire ou analytique). A partir du tableau Tab25 on peut aussi observer que les méthodes forfaitaires et analytiques fournissent des résultats similaires ce qui justifie du reste l'emploi fréquent (voire obligatoire) des méthodes forfaitaires pour le calcul des sollicitations.

6.3.2 - Dimensionnement statique optimal à l'ELS

BAEL91

$$Z = 8d + 50(2A_{s1} + 8A_{s2}) \longrightarrow \text{Min.}$$

sous les contraintes :

$$5d + 0,5 \leq 1500d^2[\omega_1^2/3 + 0,682(1 - \omega_1)^2].$$

$$2,81d + 0,28 \leq 1500d^2[\omega_2^2/3 + 0,682(1 - \omega_2)^2].$$

$$5d + 0,5 \leq 16500d^2 \cdot \omega_1 [\omega_1^2/3 + 0,682(1 - \omega_1)^2] / (1 - \omega_1).$$

$$2,81d + 0,28 \leq 16500d^2 \cdot \omega_2 [\omega_2^2/3 + 0,682(1 - \omega_2)^2] / (1 - \omega_2).$$

$$\omega_1 = 22A_{s1}/d.$$

$$\omega_2 = 22A_{s2}/d.$$

$$0,02 \leq \omega_1 \leq 0,88.$$

$$0,02 \leq \omega_2 \leq 0,88.$$

$$0,0454 \leq 1000d^3/(25d + 2,5).$$

$$0,18 \leq d \leq 0,23.$$

CBA93

$$Z = 8d + 50(2A_{s1} + 8A_{s2}) \longrightarrow \text{Min.}$$

sous les contraintes :

$$5d + 0,5 \leq 1500d^2[\omega_1^2/3 + 0,682(1 - \omega_1)^2].$$

$$2,81d + 0,28 \leq 1500d^2[\omega_2^2/3 + 0,682(1 - \omega_2)^2].$$

$$5d + 0,5 \leq 16500d^2 \cdot \omega_1 [\omega_1^2/3 + 0,682(1 - \omega_1)^2] / (1 - \omega_1).$$

$$2,81d + 0,28 \leq 16500d^2 \cdot \omega_2 [\omega_2^2/3 + 0,682(1 - \omega_2)^2] / (1 - \omega_2).$$

$$\omega_1 = 22A_{s1}/d.$$

$$\omega_2 = 22A_{s2}/d.$$

$$0,02 \leq \omega_1 \leq 0,88.$$

$$0,02 \leq \omega_2 \leq 0,88.$$

$$0,0454 \leq 1000d^3/(25d + 2,5).$$

$$0,18 \leq d \leq 0,23.$$

ACI83

$$Z = 8d + 50(2A_{s1} + 8A_{s2}) \longrightarrow \text{Min.}$$

sous les contraintes:

$$5d + 0,5 \leq 1180d^2[\omega_1^2/3 + 0,535(1 - \omega_1)^2].$$

$$2,81d + 0,28 \leq 1180d^2[\omega_2^2/3 + 0,535(1 - \omega_2)^2].$$

$$5d + 0,5 \leq 16550d^2 \cdot \omega_1 [\omega_1^2/3 + 0,535(1 - \omega_1)^2] / (1 - \omega_1).$$

$$2,81d + 0,28 \leq 16550d^2 \cdot \omega_2 [\omega_2^2/3 + 0,535(1 - \omega_2)^2] / (1 - \omega_2).$$

$$\omega_1 = 28,05A_{s1}/d.$$

$$\omega_2 = 28,05A_{s2}/d.$$

$$0,034 \leq \omega_1 \leq 0,56.$$

$$0,034 \leq \omega_2 \leq 0,56.$$

$$0,0578 \leq 1000d^3/(25d + 2,5).$$

$$0,17 \leq d \leq 0,25.$$

Tab.26 - Résultats d'optimisation d'un dimensionnement statique optimal à l'ELS d'une dalle continue en BA pour codes de BA – méthode analytique.

Résultats	Règlements		
	BAEL91	CBA93	ACI83
d_{opt} [m]	0,18	0,18	0,17
A_{s1opt} [m ²]	$1,64 \cdot 10^{-4}$	$1,64 \cdot 10^{-4}$	$2,06 \cdot 10^{-4}$
A_{s2opt} [m ²]	$1,64 \cdot 10^{-4}$	$1,64 \cdot 10^{-4}$	$2,06 \cdot 10^{-4}$
ω_{1opt}	0,02	0,02	0,034
ω_{2opt}	0,02	0,02	0,034
Z_{opt} [m ³]	1,522	1,522	1,463

Les résultats montrent que malgré la différence des formulations, les coffrages optimaux sont pratiquement identiques. Les quantités optimales d'acier par mètre de largeur sont similaires de sorte que les coûts relatifs optimaux de la fonction objectif demeurent comparables avec une économie légèrement plus importante de l'ordre de 4% en faveur du code américain ACI83.

CONCLUSIONS

L'objet de la présente recherche concerne essentiellement le développement de formulations mathématiques du problème de dimensionnement optimal d'éléments de structures en BA. Les formulations basées sur des techniques de la programmation mathématique, les illustrations graphiques, les investigations numériques, ainsi que les résultats principaux de diverses applications d'une nouvelle méthodologie de comparaison de règles techniques de conception et calcul de BA et règlements parasismiques sont soulignés.

A la lumière des nombreux résultats obtenus, il est possible de tirer les conclusions principales suivantes :

- ◆ La formulation mathématique du problème de dimensionnement optimal des éléments de structures en BA peut être ramener à la recherche de la solution optimale d'un problème de programmation mathématique non-linéaire. Les résultats montrent entre autres, que la solution du problème peut être appréhendée de manière efficiente en utilisant les méthodes de résolution directes (dites aussi méthodes primales) d'un problème d'optimisation non linéaire avec contraintes.
- ◆ Dans le cadre d'un dimensionnement optimal à l'ELU, l'espace des solutions admissibles ainsi que la détermination des solutions optimales peuvent être définies en utilisant essentiellement un nombre réduit de variables de décision (paramètres de coffrage et pourcentages mécaniques). En revanche, des difficultés d'ordre analytiques surgissent quand à la représentation graphique d'un tel espace en utilisant une philosophie de calcul basée sur l'ELS.
- ◆ L'examen des solutions optimales obtenues dans le cas du problème de dimensionnement optimale des poutres courantes et dalles en BA montre que la contrainte mathématique liée à l'effort tranchant maximal peut être exclue des formulations.
- ◆ Les valeurs optimales des variables de décision relatives à la largeur b_{opt} d'une poutre et de l'épaisseur d_{opt} d'une dalle sont relativement proches des bornes inférieures des contraintes géométriques de coffrage indépendamment de l'état limite considéré (ELU ou ELS). Ceci souligne l'importance d'une délimitation adéquate des bornes inférieures de coffrage préconisées dans les règlements.
- ◆ En termes de coût, la recherche de solutions optimales montre que les valeurs absolues du coût affectent la valeur finale de la fonction objectif et non pas les valeurs optimales des variables de décision.
- ◆ L'introduction d'une technique itérative de résolution de problème de dimensionnement des structures en BA en analyse statique et dynamique montre que le processus itératif converge rapidement (3 à 4 itérations successives au plus). Les études comparées des rapports de coût montrent clairement que l'économie finale réalisée en utilisant un dimensionnement de poutre en BA basé sur un calcul optimal itératif par rapport à un dimensionnement classique peut être substantielle et varie en fonction des règlements ou codes considérés (e.g. de l'ordre de 63% pour le code algérien).
- ◆ Les résultats d'optimisation déduits des études comparées des rapports de coût montrent clairement que l'économie finale réalisée en utilisant un dimensionnement optimal de dalles en BA par rapport à un dimensionnement classique peut être appréciable et varie en fonction des règlements considérés (e.g. de l'ordre de 16% pour le code américain et de 10% pour le code algérien confondu avec le code français). Les méthodes analytiques et forfaitaires utilisées pour l'évaluation des contraintes limites d'optimisation fournissent des résultats similaires ce qui justifie du reste l'emploi fréquent (voire obligatoire) de la méthode forfaitaire pour le calcul des sollicitations.

- ◆ Pour l'ensemble des investigations numériques envisagées, le code américain (ACI83) est le plus économique en calcul statique optimal, indépendamment de la philosophie de calcul considérée. Les solutions optimales compatibles avec les contraintes définies à partir des règles algériennes RPA99 semblent intermédiaires entre celles obtenues en utilisant les règles PS92 et le code UBC94 (pour un rapport de coûts unitaires C_s/C_b supposé constant). Ces observations peuvent être corroborées par les degrés de séismicité, les combinaisons des charges et accélérations spectrales de calcul, prévus par ces deux derniers codes .

RECOMMANDATIONS

Au terme de cette étude, les recommandations qui peuvent être adoptées concernent les volets cités ci-dessous :

- ◆ Une optimisation multicritère pour les projets de grande ampleur (grand édifice...).
- ◆ Une généralisation de la méthodologie développée pour mener une optimisation dans d'autres disciplines (éléments en béton précontraint, charpente métallique...).
- ◆ Elaboration d'un programme d'optimisation non-linéaire.
- ◆ Suivi annuel de l'évolution du rapport des coûts des matériaux mis en œuvre et élaboration d'un calcul optimal selon la courbe obtenue.
- ◆ Procédé à un calcul optimal à la rupture (théorie de la plasticité).
- ◆ Limitation de l'espace de conception par des bornes géométriques explicites.
- ◆ Optimisation d'une structure dans son ensemble et le projet dans ses différentes phases .
- ◆ Elaboration d'un document de base qui sert de guide pour conduire un calcul optimal des structures en Génie civil .

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE

- [1] - H. Hyengar, *Calcul préliminaire et optimisation des systèmes d'ossatures métalliques de grands immeubles*, Associate Partner skidmore, Owings and Merrill Chicago III, USA, 1966
- [2] - J. Brodka et J. Wilbik, *Optimisation des éléments métalliques de construction de bâtiments*, Varsovie, Pologne, 1972
- [3] - R.C Johnson, *Optimum Design of Mechanical Elements*, John Wiley, New York, 1961
- [4] - E. Torroja, *Les structures Architecturales leur conception et leur réalisation*, AELAIN, Elbeuf-Paris, 1969
- [5] - *Règles de conception et de calcul des structures en béton armé CBA93*, Edition CGS, 1994
- [6] - *Règles parasismiques algériennes RPA99*, Edition CGS, 2000
- [7] - G.B. Dantzig, *Programming in a linear structure*, Econometrica, vol. 17, 1949
- [8] - H.W. Kuhn et A.W. Tucker, *Nonlinear programming*, Econometrica, vol. 19, 1951
- [9] - B.H.V. Topping, *Mathematical programming techniques for shape optimisation of skeletal structures*, United Kingdom, 1984
- [10] - G.G Pope et L. A. Schmit (eds.), *Structural Design Applications of Mathematical Programming*, AGARDograph N°. 149, AGARD-NATO, 1972
- [11] - U. Kirsh et Moses, *Formulation of Optimal Design in the Behavior Variables Space*, J. Struct. Mech, vol. 4, n° 4, 1976
- [12] - R. Flecher, *Mathematical programming methods : A Critical Review*, in R.H. Gallagher and O.C. Zienkiewicz (eds.), Optimum Structural Design, John Wiley and sons, 1973
- [13] - M. Avriel, *Non linear programming : analysis and methods*, Prentice -Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1976
- [14] - M. Minoux, *Programmation mathématique : théorie et algorithmes*, Tome 1, Dunod, 1983
- [15] - J. Sobieszczanski-Sbeiksi, *Multidisciplinary design optimisation*, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, 1992
- [16] - H. J. Kelley, *The cutting plane method for solving complex programs*, SIAM J., vol.8, 1960
- [17] - *Bordereau des prix unitaires de la construction BPU Nord/Sud*, Edition CNAT/CSC, 1999.
- [18] - R.W. Clough et J. Penzien, *Dynamics of structures*, Mc Graw-Hill Inc. Second Edition, 1993
- [19] - B. Tiliouine, *Dynamique des structures - Tome 1 : aspects vibratoires*, Edition GECOTEC, 2000
- [20] - J. Perchat et J. Roux, *Pratique du BAEL91*, Edition Eyrolles, 1995
- [21] - *Règles PS françaises applicables aux bâtiments*, Edition PS92 AFNOR 1995, 1995
- [22] - *Règlement Américain de béton armé ACI318-83*, Edition American Concrete Institute, 1983
- [23] - *Uniform Building Code UBC*, Edition ICBO-USA, 1994
- [24] - R. Lacroix et A. Fuentes et H. Thonier, *Traité de béton armé*, Edition Eyrolles 1982
- [25] - J.P. Mougin, *Cours de béton armé BAEL91*, Edition Eyrolles, 1994.
- [26] - J.M Bouchard et G.C Georges de Haros, *Initiation au béton armé règles BAEL83*, Edition Eyrolles 1985.
- [27] - P. Dinnequin, *Cours supérieur de béton armé règles BAEL80*, Edition Eyrolles 1983
- [28] - H. Renaud et J. Lamirault, *Précis de calcul de béton armé*, Dunod, 1990

- [29] - J. Perchat, *Règlements étrangers de béton armé*, Edition Eyrolles, 1982
- [30] - R. Walther et M. Miehlebradt, *Dimensionnement des structures en béton Bases et technologie*, Presse Polytechniques et Universitaire la Romandes, 1990
- [31] - H. Thinier, *Annales de l'ITBTP* : Mai 1982 série béton 207, Septembre 1983 série béton 217, Septembre 1984 série béton 223, Février 1982 série béton 204, Juillet/Août 1982 série béton 209
- [32] - S. Lakhal, *Contribution à l'étude du dimensionnement des fondations dans un contexte probabiliste*, Thèse de magistère, Génie Civil, ENP, Juin 2000
- [33] - M.Z.Cohn, *Optimisation des structures en béton*, Waterloo Canada
- [34] - J. Saleçon, *Optimisation des structures par le calcul aux états limites*, Paris France
- [35] - A. Capra et V. Davidovici, *Calcul dynamique des structures en zone sismique*, collection UTI Eyrolles 1982
- [36] - K. Arbenz et O. Bachmann, *Elements d'analyse numérique et appliquée*, Volume 7, Presse Polytechnique et universitaire Romandes 1985
- [37] - W.S. Hemp, *Optimum Structures*, Clarendon Press, Oxford, United Kingdom, 1973
- [39] - F. Moses, *Design for reliability concept and applications*, Chap 13 Optimum Structural Design, John Wiley and sons, 1973
- [40] - A. Chouchaa, *Formulaire pour bâtiment et travaux publics*, ENL, 1990

ANNEXES

ANNEXE I

**CALCUL DES COUTS UNITAIRES DES MATERIAUX ACIER
ET BETON**

ANNEXE II

**CALCUL STATIQUE CLASSIQUE DE LA POUTRE ET DE LA
DALLE A L'ELU**

ANNEXE III

**CALCUL DYNAMIQUE OPTIMAL SOUS SEISME VERTICAL D'UNE
POUTRE EN FLEXION SUR APPUIS SIMPLES SELON DIFFERENTS
CODES PAR LA METHODE DES SPECTRES DE REPONSE AVEC
SUPPERPOSITION QUADRATIQUE DES EFFORTS**

ANNEXE IV

**LA METHODE DES PLANS SECANTS DE KELLY
RRINCIPE ET APPLICATION**

ANNEXE I

CALCUL DES COUTS UNITAIRES DES MATERIAUX ACIER ET BETON

Bordereaux des prix unitaires de la construction BPU Nord/Sud 1999/2000 CNAT/CSC

Tab.a - Acier : cour ouvrages en élévation comprenant : fourniture, façonnage, coupes, fils de ligature, manutentions et toutes sujétions d'exécution.

Elément	Prix en DA/m ³ (hors TVA)		
	Zone Nord	Zone Sud	Zone Sud/Zone Nord
Poutre	63	72	1,14
Poteau	63	72	1,14
Dalle	62	70	1,13

Tab.b - Coffrage en bois : coffrage plan ordinaire en bois, y compris étais, pointes, huile de décoffrage et toutes sujétions de décoffrage.

Elément	Prix en DA/m ³ (hors TVA)		
	Zone Nord	Zone Sud	Zone Sud/Zone Nord
Poutre	339	347	1,02
Poteau	347	380	1,10
Dalle	369	380	1,03

Tab.c - Béton : confection, coulage, vibration, manutention, fourniture et toutes sujétions (fabrication et mise en œuvre).

Elément	Prix en DA/m ³ (hors TVA)		
	Zone Nord	Zone Sud	Zone Sud/Zone Nord
Poutre	5464	6388	1,17
Poteau	5502	6388	1,16
Dalle	5464	6388	1,17

Calcul des coûts acier (C_s) et béton (C_b)**Acier C_s** **Zone nord**

Poutre : $C_s = 63 \cdot 7850 = 4944550$ DA.

Dalle : $C_s = 62 \cdot 7850 = 486700$ DA.

Poteau : $C_s = 72 \cdot 7850 = 565200$ DA.

Zone sud

Poutre : $C_s = 72 \cdot 7850 = 565200$ DA.

Dalle : $C_s = 70 \cdot 7850 = 549500$ DA.

Béton C_b

Béton coffrage compris C_c . (un mètre cube de béton consomme 12 m^2 de coffrage bois)

Zone nord

Poutre : $C_b = 339 \cdot 5464 = 9532$ DA.

Dalle : $C_b = 347 \cdot 12 + 5464 = 9628$ DA.

Poteau : $C_b = 347 \cdot 12 + 5502 = 9666$ DA.

Zone sud

Poutre : $C_b = 369 \cdot 12 + 6388 = 10816$ DA.

Dalle : $C_b = 380 \cdot 12 + 6388 = 10948$ DA.

Tab.d – Valeurs des rapports des coûts des matériaux par élément pour chaque zone

Rapport des coûts	Zone Nord		Zone Sud		Zone Nord
	Poutre	Dalle	Poutre	Dalle	Poteau
C_s / C_b	52	51	52	50	58

ANNEXE II

CALCUL STATIQUE CLASSIQUE DE LA POUTRE ET DE LA DALLE A L'ELU

A. Calcul statique classique d'une poutre à l'ELU

BAEL91

$$G = 0,0375 \text{ MN/m.}$$

$$Q = 0,025 \text{ MN/m.}$$

$$M_G = 0,300 \text{ MN/m.}$$

$$M_Q = 0,200 \text{ MN/m.}$$

$$M_u = 1,35M_G + 1,50M_Q.$$

$$M_u = 0,705 \text{ MNm.}$$

$$\mu_{bu} = M_u / b \cdot d^2 \cdot f_{bu} = 0,705 / 0,36(0,72)^2 14,17 = 0,267.$$

$$\alpha = 1,25[1 - (1 - 2\mu_{bu})^{1/2}] = 0,397.$$

$$z_b = d(1 - 0,4\alpha) = 0,606 \text{ m.}$$

$$A_u = M_u / z_b \sigma_s = 0,705 / (0,606 \cdot 348) = 33,43 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

$$Z = b \cdot d + 50A_u.$$

$$Z = 0,36 \cdot 0,72 + 50 \cdot 33,43 \cdot 10^{-4} = 0,426 \text{ m}^2.$$

CBA93

$$G = 0,0375 \text{ MN/m.}$$

$$Q = 0,025 \text{ MN/m.}$$

$$M_G = 0,300 \text{ MN/m.}$$

$$M_Q = 0,200 \text{ MN/m.}$$

$$M_u = 1,35M_G + 1,50M_Q.$$

$$M_u = 0,705 \text{ MNm.}$$

$$\mu_{bu} = M_u / b \cdot d^2 \cdot f_{bu} = 0,705 / (0,50 \cdot 0,73^2 \cdot 14,17) = 0,187$$

$$\alpha = 1,25[1 - (1 - 2\mu_{bu})^{1/2}] = 0,261.$$

$$z_b = d(1 - 0,4\alpha) = 0,654 \text{ m.}$$

$$A_u = M_u / z_b \sigma_s = 0,705 / (0,654 \cdot 348) = 30,98 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

$$Z = b \cdot d + 50A_u$$

$$Z = 0,50 \cdot 0,73 + 50 \cdot 30,98 \cdot 10^{-4} = 0,520 \text{ m}^2.$$

ACI83

$$G = 0,0375 \text{ MN/m.}$$

$$Q = 0,025 \text{ MN/m.}$$

$$M_G = 0,300 \text{ MN/m.}$$

$$M_Q = 0,200 \text{ MN/m.}$$

$$M_u = 1,4M_G + 1,7M_Q.$$

$$M_u = 0,760 \text{ MNm.}$$

$$Z = 0,9d = 0,9 \cdot 0,73 = 0,657 \text{ m.}$$

$$A_s = M_u / (\phi \cdot z \cdot f_c) = 0,760 / (0,9 \cdot 0,657 \cdot 414) = 31,05 \text{ cm}^2.$$

$$a = A_s \cdot f_c / (0,85 f_{c28} \cdot b) = 0,1154 \text{ m}.$$

$$z = d - a/2 = 0,672 \text{ m}.$$

$$A_s = M_u / (\phi \cdot z \cdot f_y) = 0,760 / (0,9 \cdot 0,672 \cdot 414) = 30,35 \text{ cm}^2.$$

$$Z = b \cdot d + 50 A_u.$$

$$Z = 0,50 \cdot 0,73 + 50 \cdot 30,35 \cdot 10^{-4} = 0,517 \text{ m}^2.$$

Tab.e - Calcul statique classique d'une poutre à l'ELU pour les trois codes considérés.

Résultats	Codes		
	BAEL91	CBA93	ACI83
b_{clas} [m]	0,36	0,50	0,50
d_{clas} [m]	0,72	0,73	0,73
A_{sclas} [m ²]	$33,43 \cdot 10^{-4}$	$30,98 \cdot 10^{-4}$	$30,35 \cdot 10^{-4}$
Z_{clas} [m ²]	0,426	0,520	0,517

B. Calcul classique statique d'une dalle à l'ELU

BAEL91 / CBA93

$$G = 0,005 \text{ MN/m}.$$

$$Q = 0,0250 \text{ MN/m}.$$

$$d = 0,20 \text{ m}.$$

Méthode Forfaitaire

$$M_{\text{appui rive}} = 10,125d + 1,125 = 0,00315 \text{ MN/m}.$$

$$\mu_{\text{bu}} = M_a / (b \cdot d^2 \cdot f_{\text{bu}}) = 0,00315 / (1 \cdot (0,20)^2 \cdot 14,17) = 0,0056.$$

$$\alpha = 1,25 [1 - (1 - 2\mu_{\text{bu}})^{1/2}] = 0,0070.$$

$$z_b = d(1 - 0,4\alpha) = 0,199 \text{ m}.$$

$$A_u = M_u / (z_b \cdot \sigma_s) = 0,00315 / (0,199 \cdot 348) = 0,455 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

$$M_{\text{appui inter}} = 40,50d + 4,50 = 0,0126 \text{ MN/m}.$$

$$\mu_{\text{bu}} = M_a / (b \cdot d^2 \cdot f_{\text{bu}}) = 0,0126 / (1 \cdot 0,20^2 \cdot 14,17) = 0,02223.$$

$$\alpha = 1,25 [1 - (1 - 2\mu_{\text{bu}})^{1/2}] = 0,0281.$$

$$z_b = d(1 - 0,4\alpha) = 0,198 \text{ m}.$$

$$A_u = M_u / (z_b \cdot \sigma_s) = 0,0126 / (0,198 \cdot 348) = 1,829 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

$$M_{\text{travée}} = (6,25d + 0,925)(67,50d + 7,50) / (10d + 1) = 0,015225 \text{ MNm}.$$

$$\mu_{\text{bu}} = M_a / (b \cdot d^2 \cdot f_{\text{bu}}) = 0,015225 / (1 \cdot 0,20^2 \cdot 14,17) = 0,02686.$$

$$\alpha = 1,25 [1 - (1 - 2\mu_{\text{bu}})^{1/2}] = 0,0340.$$

$$z_b = d(1 - 0,4\alpha) = 0,197 \text{ m}.$$

$$A_u = M_u / (z_b \cdot \sigma_s) = 0,015225 / (0,197 \cdot 348) = 2,221 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

$$Z = 8d + 50(2A_{s1} + 8A_{s2} + 2A_{s3}).$$

Méthode analytique

$$M_{\text{appui inter}} = 67,50d + 7,50 = 0,021 \text{ MN/m.}$$

$$\mu_{\text{bu}} = M_a / b \cdot d^2 \cdot f_{\text{bu}} = 0,021 / 1 \cdot (0,20)^2 \cdot 14,17 = 0,0371.$$

$$\alpha = 1,25 [1 - (1 - 2\mu_{\text{bu}})^{1/2}] = 0,0473.$$

$$z_b = d(1 - 0,4\alpha) = 0,196 \text{ m.}$$

$$A_u = M_u / z_b \cdot \sigma_s = 0,021 / (0,198 \cdot 348) = 3,079 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

$$M_{\text{travée}} = 37,96d + 4,22 = 0,0118 \text{ MN/m.}$$

$$\mu_{\text{bu}} = M_a / b d^2 f_{\text{bu}} = 0,0118 / 1 \cdot (0,20)^2 \cdot 14,17 = 0,0208$$

$$\alpha = 1,25 [1 - (1 - 2\mu_{\text{bu}})^{1/2}] = 0,0263.$$

$$z_b = d(1 - 0,4\alpha) = 0,198 \text{ m.}$$

$$A_u = M_u / z_b \cdot \sigma_s = 0,0118 / (0,198 \cdot 348) = 1,713 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

$$Z = 8d + 50(2A_{s1} + 8A_{s2}).$$

ACI83

$$G = 0,0475 \text{ MN/m.}$$

$$Q = 0,0250 \text{ MN/m.}$$

$$d = 0,20 \text{ m.}$$

Méthode Forfaitaire

$$M_{\text{appui rive}} = 23,33d + 2,86 = 0,007496 \text{ MN/m.}$$

$$\mu_{\text{bu}} = M_a / 0,85 \phi \cdot d^2 \cdot f_{c28} = 0,007496 / (0,85 \cdot 0,9 \cdot 0,20^2 \cdot 26,2) = 0,00935.$$

$$\alpha = [1 - (1 - 2\mu_{\text{bu}})^{1/2}] / 0,85 = 0,01110.$$

$$z_b = d(1 - 0,4\alpha) = 0,199 \text{ m.}$$

$$A_u = M_u / (0,9 z_b \cdot \sigma_s) = 0,007496 / (0,9 \cdot 0,199 \cdot 414) = 1,011 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

$$M_{\text{appui inter}} = 62,22d + 7,56 = 0,020004 \text{ MN/m.}$$

$$\mu_{\text{bu}} = M_a / (0,85 \phi \cdot d^2 \cdot f_{c28}) = 0,020004 / (0,9 \cdot 0,20^2 \cdot 0,85 \cdot 26,2) = 0,02495.$$

$$\alpha = [1 - (1 - 2\mu_{\text{bu}})^{1/2}] / 0,85 = 0,0297.$$

$$z_b = d(1 - 0,4\alpha) = 0,198 \text{ m.}$$

$$A_u = M_u / (0,9 z_b \cdot \sigma_s) = 0,020004 / (0,9 \cdot 0,199 \cdot 414) = 2,711 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

$$M_{\text{travée}} = 40d + 4,86 = 0,01286 \text{ MN/m.}$$

$$\mu_{\text{bu}} = M_a / (0,85 \phi \cdot d^2 \cdot f_{c28}) = 0,01286 / (0,9 \cdot 0,20^2 \cdot 0,85 \cdot 26,2) = 0,016041.$$

$$\alpha = [1 - (1 - 2\mu_{\text{bu}})^{1/2}] / 0,85 = 0,01902.$$

$$z_b = d(1 - 0,4\alpha) = 0,198 \text{ m.}$$

$$A_u = M_u / (0,9 z_b \cdot \sigma_s) = 0,01286 / (0,9 \cdot 0,198 \cdot 414) = 1,743 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

$$Z = 8d + 50(2A_{s1} + 8A_{s2} + 2A_{s3}).$$

Méthode analytique

$$M_{\text{appui inter}} = 70d + 8,50 = 0,0225 \text{ OMN/m.}$$

$$\mu_{\text{bu}} = M_u / (0,85 \cdot \phi \cdot d^2 \cdot f_{c28}) = 0,02250 / (0,9 \cdot 0,20^2 \cdot 0,85 \cdot 26,2) = 0,02806.$$

$$\alpha = [1 - (1 - 2\mu_{\text{bu}})^{1/2}] / 0,85 = 0,033488.$$

$$z_b = d(1 - 0,4\alpha) = 0,197 \text{ m.}$$

$$A_u = M_u / (0,9z_b \cdot \sigma_s) = 0,02250 / (0,9 \cdot 0,197 \cdot 414) = 3,065 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

$$M_{\text{travée}} = 37,96d + 4,22 = 0,011812 \text{ MN/m.}$$

$$\mu_{\text{bu}} = M_u / (0,85 \phi \cdot d^2 \cdot f_{c28}) = 0,011812 / (0,9 \cdot 0,20^2 \cdot 0,85 \cdot 26,2) = 0,014733.$$

$$\alpha = [1 - (1 - 2\mu_{\text{bu}})^{1/2}] / 0,85 = 0,01746.$$

$$z_b = d(1 - 0,4\alpha) = 0,199 \text{ m.}$$

$$A_u = M_u / (0,9z_b \cdot \sigma_s) = 0,011812 / (0,9 \cdot 0,199 \cdot 414) = 1,593 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

$$Z = 8d + 50(2A_{s1} + 8A_{s2}).$$

Tab.f - Résultats récapitulatif du calcul statique classique de la dalle à ELU.

Méthode	Méthode forfaitaire		Méthode analytique	
	BAEL 91 / CBA 93	ACI83	BAEL 91 / CBA 93	ACI83
d_{clas} [m]	0,20	0,20	0,20	0,20
$A_{s1\text{clas}}$ [m ²]	$2,221 \cdot 10^{-4}$	$1,743 \cdot 10^{-4}$	$3,079 \cdot 10^{-4}$	$3,065 \cdot 10^{-4}$
$A_{s2\text{clas}}$ [m ²]	$1,829 \cdot 10^{-4}$	$2,711 \cdot 10^{-4}$	$1,713 \cdot 10^{-4}$	$1,593 \cdot 10^{-4}$
$A_{s3\text{clas}}$ [m ²]	$0,455 \cdot 10^{-4}$	$1,011 \cdot 10^{-4}$	-	-
Z_{clas} [m ³]	1,7024	1,73598	1,6992	1,6943

ANNEXE III

**CALCUL DYNAMIQUE OPTIMAL SOUS SEISME VERTICAL D'UNE
POUTRE EN FLEXION SUR APPUIS SIMPLES SELON DIFFERENTS
CODES PAR LA METHODE DES SPECTRES DE REPONSE AVEC
SUPPERPOSITION QUADRATIQUE DES EFFORTS**

Données :

Portée de calcul : $L = 8 \text{ m}$.

Charges permanentes : $G = 37,5 \text{ KN/m}$.

Charges d'exploitations : $Q = 25 \text{ KN/m}$.

Sollicitations dues aux charges permanentes G : $M_G = 0,30 \text{ MNm}$; $V_G = 0,15 \text{ MN}$.

Sollicitations dues aux charges d'exploitations Q : $M_Q = 0,20 \text{ MNm}$; $V_Q = 0,10 \text{ MN}$.

Hypothèses générales :

1. *Site d'implantation retenu pour la construction : sites rocheux quelque soit le code parasismique considéré .*
2. *Les coefficients liés à la structure et qui apparaissent dans les différentes expressions des accélérations spectrales sont supposés égaux à l'unité .*
3. *L'accélération spectrale varie selon le code parasismique considéré.*
4. *Dans l'exemple traité à titre illustratif du calcul dynamique optimal sous séisme vertical , l'accélération du sol varie selon le pays considéré.*
5. *L'évaluation des efforts est effectuée en utilisant la méthode modalo-spectrale soumise aux diverses combinaisons de chargement prévues par les différentes règles parasismiques.*
6. *La poutre est soumise aux effets d'un séisme dont la composante verticale est déduite par le spectre d'accélération horizontale défini par chaque règle parasismique pondéré par un coefficient égal à 2/3.*

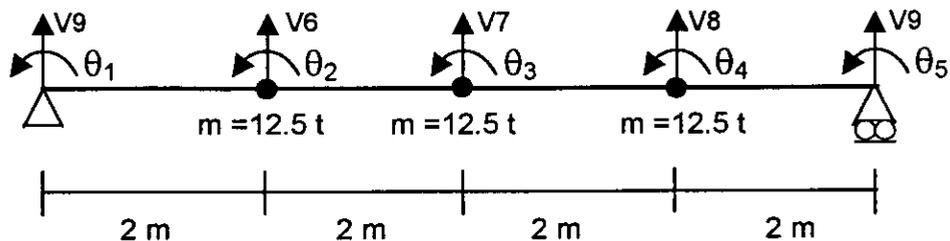


Fig.a - Poutre en BA en flexion sous actions sismiques verticales

Les pulsations sont obtenues par trois méthodes :

- 1- méthode de la condensation statique,
- 2- exploitation du logiciel SAP90,
- 3- méthode analytique.

1. Calcul des pulsations par la méthode de la condensation statique

Matrice de rigidité élémentaire d'un élément de poutre soumis à la flexion simple (deux degrés de liberté par nœuds, une translation V et une rotation θ).

Matrice de rigidité élémentaire K_e :

$$\begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & -4EI/L \end{bmatrix}$$

$$EI \cdot \begin{bmatrix} 12/L^3 & 6/L^2 & -12/L^3 & 6/L^2 \\ 6/L^2 & 4/L & -6/L^2 & 2/L \\ -12/L^3 & -6/L^2 & -12/L^3 & -6/L^2 \\ 6/L^2 & 2/L & -6/L^2 & -4/L \end{bmatrix}$$

$$L = 2 \text{ m.}$$

$$EI \cdot \begin{bmatrix} 15 & 15 & -15 & 15 \\ 15 & 2 & -15 & 1 \\ -15 & -15 & 15 & -15 \\ 15 & 1 & -15 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité globale avant la prise en considération des conditions aux limites

V9	θ_1	V6	θ_2	V7	θ_3	V8	θ_4	V9	θ_5
1,5	1,5	-1,5	1,5	0	0	0	0	0	0
1,5	2	-1,5	1	0	0	0	0	0	0
-1,5	-1,5	3	0	-1,5	1,5	0	0	0	0
1,5	1	0	4	-1,5	1	0	0	0	0
0	0	-1,5	-1,5	3	0	-1,5	1,5	0	0
0	0	1,5	1	0	4	-1,5	1	0	0
0	0	0	0	-1,5	-1,5	3	0	-1,5	1,5
0	0	0	0	1,5	1	0	4	-1,5	1
0	0	0	0	0	0	-1,5	-1,5	1,5	-1,5
0	0	0	0	0	0	1,5	1	-1,5	2

Matrice de rigidité globale avec la prise en considération des conditions aux limites

θ_1	V6	θ_2	V7	θ_3	V8	θ_4	θ_5
2	-1,5	1	0	0	0	0	0
-1,5	3	0	-1,5	1,5	0	0	0
1	0	4	-1,5	1	0	0	0
0	-1,5	-1,5	3	0	-1,5	1,5	0
0	1,5	1	0	4	-1,5	1	0
0	0	0	-1,5	-1,5	3	0	1,5
0	0	0	1,5	1	0	4	1
0	0	0	0	0	1,5	1	2

Première permutation de la colonne V3 avec la colonne lignes 03

$$\begin{array}{cccccccc}
 \theta 1 & \theta 3 & \theta 2 & V 7 & V 6 & V 8 & \theta 4 & \theta 5 \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 2 & 1 & 0 & 0 & -1,5 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 4 & 1 & -1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 4 & 0 & 1,5 & -1,5 & 1 & 0 \\
 0 & -1,5 & 0 & 3 & -1,5 & -1,5 & 1,5 & 0 \\
 -1,5 & 0 & 1,5 & -1,5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1,5 & -1,5 & 0 & 3 & 0 & 1,5 \\
 0 & 0 & 0 & 1,5 & 1 & 0 & 4 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & 1 & 2
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Matrice de rigidité finale après avoir effectuer une série de permutation de lignes et de colonnes

$$\begin{array}{cccccccc}
 \theta 1 & \theta 2 & \theta 3 & \theta 4 & \theta 5 & V 6 & V 7 & V 8 \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1,5 & 0 & 0 \\
 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1,5 & 0 \\
 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1,5 & 0 & -1,5 \\
 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1,5 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1,5 \\
 -1,5 & 0 & 1,5 & 0 & 0 & 3 & -1,5 & 0 \\
 0 & -1,5 & 0 & 1,5 & 0 & -1,5 & 3 & -1,5 \\
 0 & 0 & -1,5 & 0 & 1,5 & 0 & -1,5 & 3
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Décomposition de la matrice de rigidité globale en 04 sous matrices A, B, C et D avec :

$$A = E \cdot \left[\begin{array}{cccc}
 2 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 4 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 4 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 4 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right]$$

Matrice inverse de A

$$A^{-1} = E \cdot \left[\begin{array}{ccccc}
 97/168 & -13/84 & 1/24 & -1/84 & 1/168 \\
 -13/84 & 13/84 & -1/12 & 1/42 & -1/84 \\
 1/24 & -1/12 & 7/24 & -1/12 & 1/42 \\
 -1/84 & 1/42 & -1/12 & 13/42 & -13/84 \\
 1/168 & -1/84 & 1/24 & -13/84 & 97/168
 \end{array} \right]$$

$$C = \left[\begin{array}{ccccc}
 -1,5 & 0 & 1,5 & 0 & 0 \\
 0 & -1,5 & 0 & 1,5 & 0 \\
 0 & 0 & -1,5 & 0 & 1,5
 \end{array} \right]$$

$$B = \begin{bmatrix} -1,5 & 0 & 0 \\ 0 & -1,5 & 0 \\ 1,5 & 0 & -1,5 \\ 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1,5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -1,5 & 0 \\ -1,5 & 3 & -1,5 \\ 0 & -1,5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{K} = D - C.A^{-1}.B$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 1,2321 & -1,1786 & 0,48214 \\ -1,1786 & 1,7143 & -1,1786 \\ 0,48214 & -1,1786 & 1,2321 \end{bmatrix}$$

Déterminant $|\bar{K} - \lambda.I| = 0$; $\lambda = \omega_i m/E.I$.

$$\Leftrightarrow 0,12039 - 2,7318\lambda + 4,1785\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

RPA99 / PS92

$$\lambda_1 = 4,7479.10^{-2} = \omega_1.m/E.I \Rightarrow \omega_1 = 51,052 \text{ rad/s.}$$

$$\lambda_2 = 0,74996 = \omega_2.m/E.I \Rightarrow \omega_2 = 202,898 \text{ rad/s.}$$

$$\lambda_3 = 3,3811 = \omega_3.m/E.I \Rightarrow \omega_3 = 430,813 \text{ rad/s.}$$

UBC94

$$\lambda_1 = 4,7479.10^{-2} = \omega_1.m/E.I \Rightarrow \omega_1 = 44,293 \text{ rad/s.}$$

$$\lambda_2 = 0,74996 = \omega_2.m/E.I \Rightarrow \omega_2 = 176,035 \text{ rad/s.}$$

$$\lambda_3 = 3,3811 = \omega_3.m/E.I \Rightarrow \omega_3 = 374,290 \text{ rad/s.}$$

2. Calcul des pulsations par le logiciel SAP90

Données relatives aux règles RPA99 / PS92

Poutre à trois (03) masses concentrées

RPA99 / PS92

system

$$n = 5 ; v = 3.$$

Joints

$$1 \quad x = 0,00 ; y = 0,00 ; z = 0,00.$$

$$5 \quad x = 8,00 ; y = 0,00 ; z = 0,00 ; g = 1, 5, 1.$$

Restreints

$$1 \quad r = 1, 1, 1, 1, 0, 1.$$

$$5 \quad r = 0, 1, 1, 1, 0, 1.$$

$$2, 4, 1 \quad r = 0, 0, 0, 0, 0, 0.$$

Masses

2, 4, 1 ; m = 0, 0, 12,50.

Frame

nm = 1

1 b = 0,50 ; d = 0,80 ; E = 3,2164 E7.

1 1 2 G = 3, 1, 1, 1, 1 ; m = 1 ; Ip = 2.

Résultats obtenus (RPA99/PS92)

$\omega_1 = 50,405 \text{ rad/s.}$

$\omega_2 = 191,316 \text{ rad/s.}$

$\omega_3 = 373,619 \text{ rad/s.}$

Données relatives aux règles UBC94**system**

n = 5 ; v = 3.

Joints

1 x = 0,00 ; y = 0,00 ; z = 0,00.

5 x = 8,00 ; y = 0,00 ; z = 0,00 ; g = 1, 5, 1.

Restreints

1 r = 1, 1, 1, 1, 0, 1.

5 r = 0, 1, 1, 1, 0, 1.

2, 4, 1 r = 0, 0, 0, 0, 0, 0.

Masses

2, 4, 1 m = 0, 0, 12,50.

Frame

nm = 1.

1 b = 0,50 ; d = 0,80 ; E = 2,4211 ; E7.

1, 1, 2 G = 3, 1, 1, 1, 1 ; m = 1 ; Ip = 2.

Résultats obtenus (UBC79)

$\omega_1 = 43,731 \text{ rad/s.}$

$\omega_2 = 165,987 \text{ rad/s.}$

$\omega_3 = 324,154 \text{ rad/s.}$

3. Calcul des pulsations par la méthode analytique

$$\omega_i = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{L^2} \cdot \left(\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A} \right)^{1/2} ; \text{ Avec } n : \text{ Le rang du mode et } \bar{m} = \rho \cdot A = 6,25 \text{ t/ml.}$$

RPA99 / PS92

$\omega_1 = 51,093 \text{ rad/s.}$

$\omega_2 = 204,375 \text{ rad/s.}$

$\omega_3 = 459,845 \text{ rad/s.}$

UBC94

$\omega_1 = 44,329 \text{ rad/s.}$

$\omega_2 = 177,317 \text{ rad/s.}$

$\omega_3 = 398,963 \text{ rad/s.}$

Tab.g - Résultats obtenus (RPA99 / PS92 / UBC94).

Chargement dynamique initial $\bar{m} = 6,25 \text{ t/ml}$ (pour un coffrage initial de l'élément de poutre)

Règlement	RPA99/ PS92			UBC94		
	Logiciel SAP90	Méthode de la condensation statique	Méthode analytique	Logiciel SAP90	Méthode de la condensation statique	Méthode analytique
Mode 1 ω [rad/s]	50,405	51,052	51,093	43,731	44,213	44,329
Mode 2 ω [rad/s]	191,316	202,898	204,375	165,987	176,035	177,317
Mode 3 ω [rad/s]	373,619	430,813	459,845	324,154	374,290	398,963

4. Calcul des forces sismiques**PS92****Périodes**

$$T_1 = 0,12 \text{ s.} \quad T_2 = 0,03 \text{ s.} \quad T_3 = 0,02 \text{ s.}$$

Accélération horizontales spectrales

$a_N = 4,5 \text{ m/s}^2$: Accélération nominale (zone III, ouvrage D).

$\rho = 1$: Coefficient correctif d'amortissement.

$\tau = 1$: Coefficient topographique.

S_0 : sites rocheux

$R_D(T) = 2,5$: ordonnée du spectre de dimensionnement normalisé dépendant des formations géologiques du site et de la période T de chaque mode .

$$T_1 = 0,12 \text{ s.} \quad \gamma_{1H} = 1,125 \text{ g.}$$

$$T_2 = 0,03 \text{ s.} \quad \gamma_{2H} = 1,125 \text{ g.}$$

$$T_3 = 0,02 \text{ s.} \quad \gamma_{3H} = 1,125 \text{ g.}$$

Les vecteurs propres

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0,141421 \\ 0,200000 \\ 0,141421 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0,200000 \\ 0,000000 \\ -0,200000 \end{pmatrix} \quad \phi_3 = \begin{pmatrix} 0,141421 \\ -0,200000 \\ 0,141421 \end{pmatrix}$$

Les pourcentages de participation des modes

mode 1 : 97,86 %.

mode 2 : 0,00 %.

mode 3 : 2,14 %.

Les accélérations verticales des masses

mode 1 : $\gamma_{1V} = 0,75 \text{ g.}$

mode 2 : $\gamma_{2V} = 0,75 \text{ g.}$

mode 3 : $\gamma_{3V} = 0,75 \text{ g.}$

Les forces statiques équivalentes en daN

$$m = 12,5 \text{ t.}$$

$$\text{mode 1 : } F_1 = m \cdot \gamma_{1V} \cdot \phi_1 = \begin{vmatrix} 1325,82 \\ 1875,00 \\ 1325,82 \end{vmatrix}$$

$$\text{mode 2 : } F_2 = m \cdot \gamma_{2V} \cdot \phi_2 = \begin{vmatrix} 1875,00 \\ 0,00 \\ -1875,00 \end{vmatrix}$$

$$\text{mode 3 : } F_3 = m \cdot \gamma_{3V} \cdot \phi_3 = \begin{vmatrix} 1325,82 \\ -1875,00 \\ 1325,82 \end{vmatrix}$$

Sollicitations obtenues pour chaque mode

$$\text{mode 1 : } M = 6400 \text{ daNm.} \quad V = 2260 \text{ daN.}$$

$$\text{mode 2 : } M = 0,00 \text{ daNm.} \quad V = 938 \text{ daN.}$$

$$\text{mode 3 : } M = 1100 \text{ daNm.} \quad V = 388,3 \text{ daN.}$$

Par superposition quadratique :

$$M_E = (6400^2 + 1100^2)^{1/2} = 6493,8432 \text{ daNm} = 0,064938432 \text{ MNm.}$$

$$V_E = (2260^2 + 938^2 + 388,3^2)^{1/2} = 2477,5433 \text{ daN} = 0,024775433 \text{ MN.}$$

RPA99**Périodes**

$$T_1 = 0,12 \text{ s.}$$

$$T_2 = 0,03 \text{ s.}$$

$$T_3 = 0,02 \text{ s.}$$

Accélération horizontales spectrales :

$A = 0,35$; coefficient d'accélération de zone (groupe 1A, zone III).

$\eta = 1$; Facteur correctif d'amortissement ($\zeta \neq 5\%$) .

$R = 1$; Coefficient de comportement de la structure.

$T_1 = 0,15 \text{ s}$; période caractéristique associée aux sites S_1

$T_2 = 0,30 \text{ s}$; période caractéristique associée aux sites S_1

$Q = 1$; facteur de qualité .

S_1 : sites rocheux .

$$T_1 = 0,12 \text{ s.} \quad \gamma_{1H} = 0,962610 \text{ g.}$$

$$T_2 = 0,03 \text{ s.} \quad \gamma_{2H} = 0,568815 \text{ g.}$$

$$T_3 = 0,02 \text{ s.} \quad \gamma_{3H} = 0,052506 \text{ g.}$$

Les vecteurs propres

$$\phi_1 = \begin{vmatrix} 0,141421 \\ 0,200000 \\ 0,141421 \end{vmatrix} \quad \phi_2 = \begin{vmatrix} 0,20000 \\ 0,00000 \\ -0,20000 \end{vmatrix} \quad \phi_3 = \begin{vmatrix} 0,141421 \\ -0,200000 \\ 0,141421 \end{vmatrix}$$

Les pourcentages de participation des modes

mode 1 : 97,86 % mode 2 : 0,00 % mode 3 : 2,14 %.

Les accélérations verticales des masses

mode 1 : $\gamma_{1V} = 0,64174$ g mode 2 : $\gamma_{2V} = 0,37921$ g mode 3 : $\gamma_{3V} = 0,35004$ g.

Les forces statiques équivalentes en daN

$m = 12,5$ t.

$$\text{mode 1 : } F_1 = m \cdot \gamma_{1V} \cdot \phi_1 = \begin{vmatrix} 1134,44 \\ 1604,35 \\ 1134,44 \end{vmatrix}$$

$$\text{mode 2 : } F_2 = m \cdot \gamma_{2V} \cdot \phi_2 = \begin{vmatrix} 948,03 \\ 0,00 \\ -948,03 \end{vmatrix}$$

$$\text{mode 3 : } F_3 = m \cdot \gamma_{3V} \cdot \phi_3 = \begin{vmatrix} 618,88 \\ -675,10 \\ 618,88 \end{vmatrix}$$

Sollicitations obtenues pour chaque mode

mode 1 : $M = 5480$ daNm. $V = 1940$ daN.

mode 2 : $M = 0,000$ daNm. $V = 474$ daN.

mode 3 : $M = 512$ daNm. $V = 181,30$ daN.

Par superposition quadratique :

$$M_E = (5480^2 + 512^2)^{1/2} = 5503,8763 \text{ daNm} = 0,055038763 \text{ MNm.}$$

$$V_E = (1940^2 + 474^2 + 181,3^2)^{1/2} = 2005,2795 \text{ daN} = 0,020052795 \text{ MN.}$$

UBC94**Périodes**

$T_1 = 0,14$ s. $T_2 = 0,04$ s. $T_3 = 0,02$ s.

Accélérations horizontales spectrales

$Z = 0,4$; facteur de zone (zone 4).

S_1 : sites rocheux.

$T_1 = 0,14$ s. $\gamma_{1H} = 0,96$ g.

$T_2 = 0,04$ s. $\gamma_{2H} = 0,56$ g.

$T_3 = 0,02$ s. $\gamma_{3H} = 0,48$ g.

Les vecteurs propres

$$\phi_1 = \begin{vmatrix} 0,141421 \\ 0,200000 \\ 0,141421 \end{vmatrix} \quad \phi_2 = \begin{vmatrix} 0,20000 \\ 0,00000 \\ -0,20000 \end{vmatrix} \quad \phi_3 = \begin{vmatrix} 0,141421 \\ -0,200000 \\ 0,141421 \end{vmatrix}$$

Les pourcentages de participation des modes

mode 1 : 97,86 %.

mode 2 : 0,00 %.

mode 3 : 2,14 %.

Les accélérations verticales des massesmode 1 : $\gamma_{1V} = 0,64$ g.mode 2 : $\gamma_{2V} = 0,37$ g.mode 3 : $\gamma_{3V} = 0,32$ g.**Les forces statiques équivalentes en daN :**

m = 12,5 t.

$$\text{mode 1 : } F_1 = m \cdot \gamma_{1V} \cdot \phi_1 = \begin{vmatrix} 113137 \\ 1600,00 \\ 113137 \end{vmatrix}$$

$$\text{mode 2 : } F_2 = m \cdot \gamma_{2V} \cdot \phi_2 = \begin{vmatrix} 932,50 \\ 0,00 \\ -932,50 \end{vmatrix}$$

$$\text{mode 3 : } F_3 = m \cdot \gamma_{3V} \cdot \phi_3 = \begin{vmatrix} 665,68 \\ -800,00 \\ 565,68 \end{vmatrix}$$

Sollicitations obtenues pour chaque mode

mode 1 : M = 5460 daNm.

V = 1930 daN.

mode 2 : M = 0,00 daNm.

V = 466 daN.

mode 3 : M = 469 daNm.

V = 165,7 daN.

Par superposition quadratique :

$$M_E = (5460^2 + 469^2)^{1/2} = 5480,1059 \text{ daNm} = 0,054801059 \text{ MNm.}$$

$$V_E = (1930^2 + 466^2 + 165,7^2)^{1/2} = 1992,3635 \text{ daN} = 0,019923635 \text{ MN.}$$

Tab.h - Sollicitations sismiques obtenues par superposition quadratique pour chaque code parasismique.

Résultats	Code		
	PS92	RPA99	UBC94
Moment M_E [MNm]	0,064938432	0,05503863	0,054801059
Effort tranchant V_E [MN]	0,024775433	0,020052795	0,019923635

ANNEXE IV

LA METHODE DES PLANS SECANTS DE KELLY PRINCIPE ET APPLICATION

Méthode des plans sécants:

La méthode des plans sécants qui a été développée par Cheney et Goldstein et par Kelly est basée sur la propriété utile que les contraintes linéarisées dans les problèmes convexes se trouvent toujours entièrement à l'extérieur de la région faisable. En conséquence, nous pouvons approcher la région par une enveloppe de contraintes linéarisées, et résoudre un problème de programmation linéaire, dans les cas de fonctions objectifs linéaires. Si la solution n'est pas suffisamment précise, les contraintes doivent être mieux représentées en ajoutant un nombre additionnel d'hyperplans. En utilisant la méthode des plans sécants, les contraintes doivent être linéarisées en premier lieu au voisinage d'un point initial $\{X^*\}$. En supposant une fonction objectif linéaire, nous résolvons le problème de programmation linéaire résultant. La solution est substituée dans les contraintes non-linéaires originales, et la contrainte la plus violée est linéarisée au voisinage du point optimum du problème de programmation linéaire précédent. Cette contrainte linéarisée est ajoutée au problème de programmation linéaire qui est de nouveau résolu. Les étapes des contraintes linéarisées additionnelles et de résolution du problème de programmation linéaire modifié sont ainsi répétées jusqu'à ce que toutes les contraintes non-linéaires soient satisfaites à un degré de précision souhaité.

Nous notons que le problème de programmation linéaire augmente progressivement. Pour réduire la taille du programme linéaire induit par l'application de cette méthode, la possibilité d'écartier les contraintes inactives a été étudiée. Il a été constaté cependant, que les calculs requis pour identifier les contraintes pouvant être omises est trop long en général. La méthode des plans sécants est efficace pour la résolution des problèmes convexes presque linéaires. Un avantage numérique considérable est exploité du fait que le problème de programmation linéaire change très peu d'une étape à une autre.

Méthode du Simplexe pour la résolution des programmes linéarisés :

La méthode classique pour résoudre le problème est l'algorithme du simplexe qui a été développé par G. B. Dantzig aux Etats-Unis d'Amérique en 1947. Cet algorithme est basé sur le fait que parmi les solutions optimales du problème de programmation linéaire, il existe une solution de base. L'idée de base de l'algorithme du simplexe consiste à procéder d'une solution de base à une autre pour laquelle la valeur de la fonction objectif est meilleure jusqu'à ce qu'on ait une solution de base optimale.

EXEMPLE D'ILLUSTRATION DE LA METHODE DES PLANS SECANTS:

Problème de programmation non linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = X_1^2 + X_2^2 \longrightarrow \text{Min} \\ \text{sous les contraintes :} \\ g_1 = X_1^2/20 - X_2 + 1 \leq 0 \\ g_2 = X_2^2/20 - X_1 + 1 \leq 0 \end{array} \right.$$

Approximation par une série de problèmes de programmation linéaire et résolution par la méthode du Simplexe:

Problème de programmation linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = -(X_1^{*2} + X_2^{*2}) + 2(X_1^* \cdot X_1 + X_2^* \cdot X_2) \longrightarrow \text{Min} \\ \text{sous les contraintes :} \\ g_1 = X_1^* \cdot X_1/10 - X_2 + (1 - X_1^{*2}/20) \leq 0 \\ g_2 = X_2^* \cdot X_2/10 - X_1 + (1 - X_2^{*2}/20) \leq 0 \end{array} \right.$$

Première approximation :

$$\{X_1^* ; X_2^*\} = \{6 ; 3\} \quad \text{VALEUR INITIALE}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = -45 + 12X_1 + 6X_2 \longrightarrow \text{Min} \\ \text{sous les contraintes :} \\ 0.6X_1 - X_2 - 0.8 \leq 0 \\ -X_1 - 0.3X_2 + 0.55 \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\{X_1 ; X_2\} = \{0,378 ; -0,573\} \quad \text{SOLUTION OBTENUE}$$

Vérification des contraintes originales

$$g_1(0,378 ; -0,573) = 1,580 \leq 0 \quad ?$$

$$g_2(0,378 ; -0,573) = 0,629 \leq 0 \quad ?$$

g_1 et g_2 : sont violées

Deuxième approximation :

$$\{X_1^* ; X_2^*\} = \{0,378 ; -0,573\} \quad \text{NOUVELLE VALEUR}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = -45 + 12X_1 + 6X_2 \longrightarrow \text{Min} \\ \text{sous les contraintes :} \\ 0.6X_1 - X_2 - 0.8 \leq 0 \\ -X_1 - 0.3X_2 + 0.55 \leq 0 \\ 0.0378X_1 - X_2 + 0.993 \leq 0 \\ -X_1 - 0.0573X_2 + 0.9845 \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\{X_1 ; X_2\} = \{0,9251 ; 1,028\} \quad \text{SOLUTION OBTENUE}$$

Vérification des contraintes originales :

$$g_1(0.9251 ; 1.028) = 0.147905 \leq 0 \quad ?$$

$$g_2(0.9251 ; 1.028) = 0.1277392 \leq 0 \quad ?$$

g_1 et g_2 : sont violées

Troisième approximation :

$$\{X^*_1 ; X^*_2\} = \{0.9251 ; 1.028\} \quad \text{NOUVELLE VALEUR}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = -45 + 12X_1 + 6X_2 \longrightarrow \text{Min} \\ \text{sous les contraintes :} \\ 0.6X_1 - X_2 - 0.8 \leq 0 \\ -X_1 - 0.3X_2 + 0.55 \leq 0 \\ 0.0378X_1 - X_2 + 0.993 \leq 0 \\ -X_1 - 0.0573X_2 + 0.9845 \leq 0 \\ 0.09251X_1 - X_2 + 0.957 \leq 0 \\ -X_1 + 0.1028X_2 + 0.947 \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\{X_1 ; X_2\} = \{1.055 ; 1.055\} \quad \text{SOLUTION OBTENUE}$$

Vérification des contraintes originales

$$g_1(1.055 ; 1.055) = 6.5 \times 10^{-4} \leq 0$$

$$g_2(1.055 ; 1.055) = 6.5 \times 10^{-4} \leq 0$$

g_1 et g_2 : sont approximativement respectées

Quatrième approximation :

$$\{X^*_1 ; X^*_2\} = \{1.055 ; 1.055\} \quad \text{NOUVELLE VALEUR}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = -45 + 12X_1 + 6X_2 \longrightarrow \text{Min} \\ \text{sous les contraintes :} \\ 0.6X_1 - X_2 - 0.8 \leq 0 \\ -X_1 - 0.3X_2 + 0.55 \leq 0 \\ 0.0378X_1 - X_2 + 0.993 \leq 0 \\ -X_1 - 0.0573X_2 + 0.9845 \leq 0 \\ 0.09251X_1 - X_2 + 0.957 \leq 0 \\ -X_1 + 0.1028X_2 + 0.947 \leq 0 \\ 0.1055X_1 - X_2 + 0.944 \leq 0 \\ -X_1 + 0.1055X_2 + 0.944 \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\{X_1 ; X_2\} = \{1.055 ; 1.055\} \quad \text{SOLUTION RETENUE}$$

La solution optimale du problème original :

$$X_{1 \text{ opt}} = X_{2 \text{ opt}} = 1.055 \quad \text{et} \quad Z_{\text{opt}} = 2.226$$

Résultats :

Cycle q

 $\{X_q^*\}$

1

 $\{6; 3\}$

2

 $\{0,378; -0,573\}$

3

 $\{0,924; 1,028\}$

4

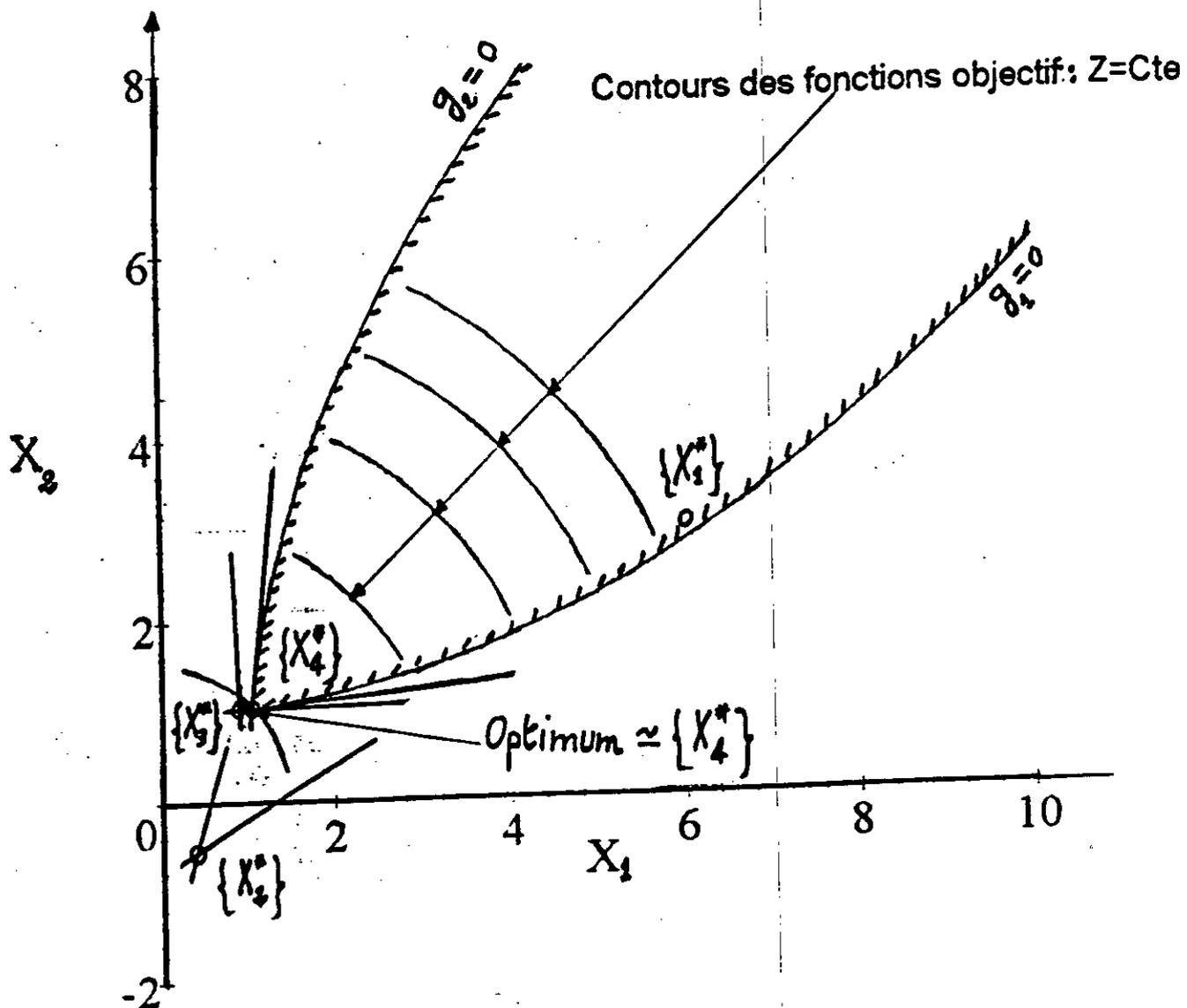
 $\{1,055; 1,055\}$ 

Fig. 6 - Solution du problème de programmation non linéaire par une séquence de problèmes de programmation linéaire (linéarisation séquentielle).

Application de l'algorithme du Simplexe pour la résolution d'un problème de programmation linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = 100X_1 + 120X_2 + 150X_3 \\ \text{sous les contraintes :} \\ X_1 + 0.6 X_2 + 0.2 X_3 \leq 400 \\ \quad 0.4 X_2 + 0.8 X_3 \leq 250 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{array} \right. \longrightarrow \text{Max.}$$

Faire introduire **deux variables d'écart** Y_1, Y_2 (dites aussi variables auxiliaires)

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = 100X_1 + 120X_2 + 150X_3 \\ \text{sous les contraintes :} \\ X_1 + 0.6 X_2 + 0.2 X_3 + Y_1 = 400 \\ \quad 0.4 X_2 + 0.8 X_3 + Y_2 = 250 \\ X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2 \geq 0 \end{array} \right. \longrightarrow \text{Max.}$$

Les données du problème sont rangées dans un tableau

	X_1	X_2	X_3	1
Y_1	-1	-0.6	-0.2	400
Y_2	0	-0.4	-0.8	250
Z	100	120	150	0

Notre but est de maximiser la fonction linéaire objectif Z sous les contraintes :

$$X_1, X_2, X_3, Y_1 \text{ et } Y_2 \geq 0$$

En utilisant l'algorithme du Simplexe basé sur l'algorithme de pivotage utilisé pour résoudre les systèmes d'équations linéaires.

Opération de pivotage :

Détermination du **pivot** a_{pq} par application des deux règles suivantes :

1. Choisir **la colonne -pivot q** telle que $c_q > 0$ (coefficients de la ligne Z positifs)
2. Pour tous les coefficient $a_{iq} < 0$ de la colonne-pivot, déterminer le quotient b_i / b_{iq} .

La ligne-pivot p est celle pour laquelle la valeur de ce quotient est maximum.

Les nouveaux éléments s'expriment en fonction des anciens de la manière suivante :

$$\text{pour } i = p \quad d_{pq} = 1 / a_{pq} \quad \text{et} \quad d_{pj} = -a_{pj} / a_{pq} \quad j \neq q$$

$$\text{pour } i \neq p \quad d_{ip} = a_{iq} / a_{pq} \quad \text{et} \quad d_{ij} = a_{ij} - a_{iq} / a_{pq} \quad j \neq q$$

La nouvelle valeur δ^* de Z doit être meilleure (ou au moins bonne) que l'ancienne valeur δ

$\delta = 0$ pour le tableau initial

$$\delta^* = \delta - c_q b_p / a_{pq} \geq \delta$$

Les nouveaux éléments b^* sont non négatifs :

$$b_p^* = -b_p / a_{pq} \geq 0 \quad \text{et} \quad b_i^* = b_i - a_{iq} b_p / a_{pq} \geq 0 \quad i \neq p$$

Comme le premier coefficient de la ligne Z est $C_1 = 100 > 0$

On choisie le pivot dans la colonne de X_1 et on applique les deux règles précédentes :

a_{11} : est le pivot qui correspond à la première ligne et la première colonne .

Tableau initial

	X_1	X_2	X_3	1
Y_1	-1	-0.6	-0.2	400
Y_2	0	-0.4	-0.8	250
Z	100	120	150	0

Le pivot est le terme -1 qui correspond à la première ligne et la première colonne

$C_1 = 100 > 0$.

Deuxième tableau

	Y_1	X_2	X_3	1
X_1	-1	-0.6	-0.2	400
Y_2	0	-0.4	-0.8	250
Z	-100	60	130	40000

Ce tableau correspond à la solution de base : $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_1 = 400$

$C_2 = 60 > 0$

Le deuxième pivot choisi est le terme -0.4 qui correspond à la deuxième ligne et la deuxième colonne

Troisième tableau

	Y_1	Y_2	X_3	1
X_1	-1	1.5	1	25
X_2	0	-2.5	-2	625
Z	-100	-150	10	77500

Ce tableau correspond à la solution de base : $X_3 = 0$, $X_1 = 25$, $X_2 = 625$

$C_3 = 10 > 0$

Le troisième pivot choisi est le terme -2 qui correspond à la deuxième ligne et la troisième colonne

Quatrième tableau

	Y_1	Y_2	X_3	1
X_1	-1	0.25	-0.5	337.5
X_2	0	-1.25	-0.5	312.5
Z	-100	-162.5	-5	80625

Comme tous les coefficients de la ligne Z (sauf le dernier) sont négatifs, ce tableau correspond à la solution optimale :

$X_{2opt} = 0$, $X_{1opt} = 337.5$, $X_{3opt} = 312.50$, $Z_{opt} = 80625$.