

P0002/05A

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

*DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL
LABORATOIRE L.G.S.D.S*

PROJET DE FIN D'ETUDES

*EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT
EN GENIE CIVIL*

**Fiabilité des structures
Applications aux
ouvrages de soutènement**

Dirigé par :

Mr : B. ZEGHLACHE

Etudié par :

**BENKHELLAT Hani
HALET Mehdi**

Dédicaces



*Je dédie ce travail à mes très chers parents, pour leurs sacrifices et encouragements
durant toutes ces années d'études, pour leurs conseils et orientations dans ma vie.*

Je le dédie également à mes frères et sœurs.

Je le dédie à tous mes amis et tous ceux qui me sont chers.

Hani

Je dédie ce travail,

A mes très chers parents qui durant toutes ces années d'études ont su me soutenir

A mes frères Lounès et Mézi.

A la mémoire de ma grand mère.

A Lamia.

Mehdi

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire L.G.S.D.S de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger sous la direction de Monsieur B. Zeghlache.

Nous le remercions en sa qualité d'encadreur, pour sa gentillesse, sa bonne humeur, ses précieux conseils et pour la confiance qu'ils nous a témoigné en dirigeant ce travail.

Nous exprimons notre profonde gratitude à Monsieur B. Tiliouine, Professeur à l'ENP, pour l'honneur qu'il nous fait en présidant le jury, ainsi qu'à Monsieur Hammoutène, Madame Cheride et Madame Mohabeddine, pour avoir accepté d'en faire partie.

Nous remercions tous ceux qui ont de près ou de loin contribué à l'aboutissement et l'amélioration de ce travail.

Enfin, nous remercions vivement tous ceux qui ont contribué à notre formation, qui nous ont transmis le savoir et la bonne conduite.

الهدف من هذه الدراسة هو البحث عن المثالية في إنجاز المنشآت، و لهذا حاولنا إيجاد أحسن الطرق لتقدير إمكانية حصول حوادث نادرة، مثل احتمال تقهقر منشأة، نحفظ بالطرق التي تظهر بأنها أكثر فاعلية حسب نوع التقهقر المدروس لتطبيقها بشكل صحيح و مقارنة النتائج المحصل عليها.

مفاتيح: التقهقر، دفع، جر، جدار السند، ...

Résumé :

L'objectif de ce travail est la recherche de la perfection dans la réalisation des ouvrages, et pour cela inventorier les meilleures façons d'estimer l'occurrence d'un évènement rare, tel que la probabilité de défaillance d'un ouvrage. Nous retiendrons celles qui paraissent les plus efficaces suivant le type de défaillance traité, pour les appliquer concrètement et comparer les résultats obtenus.

Mots Clés : défaillance, poussée, butée, mur de soutènement, ...

Abstract:

The objective of this work is the research of the perfection in the realization of works, and for this reason to inventory the best ways of estimating the occurrence of evenement rare, such as the probability of failure of work. We will retain those witch appear more efficacies following the type of failure treated, to apply them concretely and compare the results obtained.

Keys words: failure, pushed, butted, retaining wall...

Table des matières

Introduction générale.....	1
Chapitre I : Approches relatives à la fiabilité des structures	
I.1 Approche déterministe	5
I.1.1 Valeurs caractéristiques - facteur de sécurité	5
I.1.2 Critiques de la méthode déterministe	6
I.2 Approche probabiliste	7
I.2.1 Méthodologie.....	8
I.2.2 Intérêts et limites d'une approche probabiliste.....	9
I.2.3 Incertitudes liées à l'évaluation de la fiabilité des structures	10
I.2.4 Evaluation probabiliste de la fiabilité des structures.....	10
Chapitre II : Méthodes de niveau II	
II.1 Méthodes de calcul de fiabilité du premier ordre FORM	26
II.1.1 Méthode FOSM ou méthode MVFOSM	26
II.1.2 Méthode AFOSM pour des variables normales	27
II.1.3 Méthode FORM 1	32
II.1.4 Méthode FORM 2	34
II.1.5 Analyse de fiabilité de premier ordre avec des variables aléatoires corrélées et non normales.....	38
II.2 Méthode de fiabilité du second ordre SORM.....	40
II.3 Analyse de sensibilité.....	41
Chapitre III : Méthodes de niveau III	
III.1 Description de la méthode de Monté Carlo	46
III.2 Simulation d'une variable aléatoire gaussienne.....	48
III.3 Convergence et limites de la méthode	49
III.3.1 La loi des grands nombres et la méthode de Monté Carlo.....	49
III.3.2 Théorème de la limite centrale et méthode de Monté Carlo.....	49
III.4 Estimation de la variance d'un calcul	51
III.5 Exemples	52
III.6 Méthodes de réduction de variance.....	53
III.6.1 Echantillonnage préférentiel ou fonction d'importance	53
III.6.2 Variables de contrôle	55
III.6.3 Variables antithétiques.....	55

III.7 Adaptation de la méthode Monté Carlo au calcul des faibles probabilités de ruine.....	56
III.7.1 Dissociation des variables de sortie.....	56
III.7.2 Méthodes conditionnelles.....	58
III.7.3 Tirage d'importance.....	61
III.7.4 Tirage d'importance conditionné.....	62

Chapitre IV : Calcul des ouvrages de soutènement

IV.1 Calcul des pressions des terres dans le cas statique.....	67
IV.1.1 Théorie de la pression des terres de Coulomb (1773).....	68
IV.1.2 Poussées des terres de Rankine – équilibre limite.....	74
IV.2 Approche pseudo statique du comportement dynamique des ouvrages de soutènement.....	77
IV.2.1 Analyse pseudo – statique de Mononobé – Okabé.....	77
IV.2.2 Méthode simplifiée de Seed.....	80
IV.3 Stabilité des structures de soutènement.....	82
IV.3.1 Ruine par renversement du mur.....	82
IV.3.2 Ruine par glissement du mur sur sa base.....	83
IV.3.3 Ruine par poinçonnement.....	83

Chapitre V : Application

V.1 Présentation de l'ouvrage.....	93
V.2 Modes de ruine considérés.....	96
V.2.1 Stabilité vis à vis du renversement.....	96
V.2.2 Stabilité vis à vis du glissement.....	98
V.2.3 Stabilité vis à vis du poinçonnement.....	99
V.3 Etude de l'influence des incertitudes sur les différents paramètres.....	102
V.3.1 Renversement.....	102
V.3.2 Glissement.....	112
V.3.3 Poinçonnement.....	122
V.4 Variation de l'indice de fiabilité et du facteur de sécurité déterministe avec la variation les paramètres les plus influents.....	125
V.4.1 Renversement.....	125
V.4.2 Glissement.....	128
V.4.3 Poinçonnement.....	133
V.5 Analyses de sensibilité.....	136
V.5.1 Renversement.....	136
V.5.2 Glissement.....	137
V.5.3 Poinçonnement (modèle de Hansen).....	137
V.6 Méthodes de niveau III.....	138
V.6.1 Application de la simulation Monté Carlo.....	138
V.6.2 Méthodes de réduction de variance.....	139

V.6.3 Comparaison entre les méthodes (niveau II et niveau III).....	145
V.7 Cas de variables aléatoires normales corrélées	147
V.7.1 Cas de corrélation entre deux variables (φ et γ).....	147
V.7.2 Cas de la corrélation entre les trois variables (φ , b_0 et γ)	149
V.8 Stabilité d'un mur de soutènement vis à vis du renversement dans une zone sismique	150
V.8.1 Ouvrage de soutènement considéré	150
V.8.2 Influence des incertitudes sur l'indice de fiabilité	152
V.8.3 Variation de l'indice de fiabilité en fonction du coefficient de variation de φ pour différentes valeurs de k_{li}	156
V.8.4 Etude de sensibilité	158
Conclusion générale	160

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — مكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

« Le hasard c'est l'imprévisible, et cela nous paraît bien loin de la science, qui est la prévision par excellence. Pourtant, le hasard obéit à des lois. Au fil des années, par un travail patient, les physiciens l'on exploré, substituant peu à peu un ordre subtil au désordre apparent des phénomènes naturels ». Cette citation, empruntée à un ancien de l'école normale supérieure de Paris, situe bien le problème de la modélisation en contexte aléatoire [1].

La distribution de la taille des fissures dans un matériau, la variation de la charge d'exploitation sur un ouvrage en service sont des phénomènes aléatoires rencontrés en génie civil. Les concepteurs d'ouvrages, conscients des risques liés au caractère aléatoire de certaines variables, se sont prémunis contre leurs variabilités en surdimensionnant les ouvrages, ce qui donna naissance aux codes de calcul semi probabilistes. Dans ces codes, l'aléa sur les matériaux, sur les éléments structuraux ou sur les charges est pris en compte grâce à des coefficients partiels de sécurité. Initialement, ces coefficients ont été définis empiriquement. Ce n'est que plus tard que la fiabilité des structures est apparue, proposant une approche mathématique pour la calibration des coefficients partiels de sécurité. Cette approche mathématique est basée sur la théorie des probabilités. Elle permet de mesurer la sécurité conventionnelle d'un ouvrage en fonction de l'aléa sur les variables environnementales.

L'approche probabiliste permet alors de calculer des probabilités de défaillance d'éléments structuraux, d'où l'on tire des enseignements pour la réglementation ou pour la maintenance des ouvrages. Pour cela, la fiabilité met en œuvre des outils performants permettant, d'une part, de décrire l'environnement aléatoires d'une structure : charges, matériaux, géométrie..., d'autre part, de calculer des probabilités d'occurrence d'événements divers : états limites ultimes où états limites de service de la structure...

En génie civil, Les grandeurs utilisées pour modéliser le comportement des ouvrages ont des variations spatiales, temporelles et statistiques. Il est donc théoriquement possible qu'elles prennent simultanément des valeurs conduisant à une ruine de l'ouvrage. La probabilité d'occurrence de ce phénomène est dite probabilité de ruine, elle est notée P_f .

Le vent, les charges d'exploitation et la résistance intrinsèque des matériaux interviennent dans les calculs de conception d'ouvrages sous forme de valeurs caractéristiques affectées de coefficients dits coefficients partiels de sécurité. Ce mode de prise en compte de

l'aspect aléatoire des variables de base est dit calcul probabiliste de niveau I [8]. En pratique, le niveau de sécurité atteint par la méthode de niveau I n'est pas homogène.

Les méthodes qui permettent d'estimer la probabilité de défaillance avec précision sont dites "méthodes de niveau III". Il existe également des méthodes plus simplifiées, moins coûteuses en temps de calcul. Ce sont les "méthodes de niveau II".

L'objet du calcul probabiliste est donc de fournir un outil d'aide à la décision permettant de prendre en compte le caractère aléatoire des variables intervenant dans tout modèle mécanique.

Ces variables peuvent être classées en trois familles principales :

- les variables de chargement (charges permanentes, charges d'exploitation, poussées, vent, neige...)
- les variables géométriques (portée, largeur, section, épaisseur...)
- les variables caractérisant les propriétés des matériaux (résistance de matériaux, modules élastiques, angles de frottement interne...).

Ces variables sont dites variables aléatoires de base du problème.

D'un point de vue calculatoire, certaines variables de base peuvent être caractérisées par une distribution statistique issue de sondages, ou par une modélisation théorique.

La probabilité de ruine est une fonction de l'ensemble des variables aléatoires. Elle est largement dépendante de la qualité de modélisation des variables aléatoires et de la fidélité de représentation du modèle mécanique utilisé. Elle ne permet donc qu'une représentation conventionnelle de la sécurité réelle.

Seule une étude des variations de cette probabilité en fonction des caractéristiques aléatoires des variables de base est alors envisageable. La présente étude a donc pour objet l'application de méthodes probabilistes en génie civil. Nous avons choisi de nous intéresser aux ouvrages de soutènement de type cantilever.

Ce travail se divise en cinq chapitres :

Le premier chapitre consiste en une présentation générale des différentes approches relatives au calcul de la fiabilité d'une structure.

Le second, traite des méthodes dites de niveau II, principalement les méthodes FORM (First Order Reliability Method).

Dans le troisième chapitre on présente les méthodes de niveau III, à savoir la méthode de Monté Carlo et son adaptation au calcul des faibles probabilités de ruine.

Le chapitre quatre concerne la stabilité des ouvrages de soutènement vis à vis des modes de ruine conduisant à une éventuelle défaillance. On présente aussi, dans ce chapitre, la théorie des pressions des terres.

Le dernier chapitre concerne l'application des méthodes de calcul de la fiabilité à un mur de soutènement cantilever. Les modes de ruine considérés sont : le renversement, le glissement et le poinçonnement de l'ouvrage. Ce chapitre débute par étude paramétrique de pour estimer l'influence des incertitudes des différents paramètres considérés sur la probabilité de ruine. Vient ensuite l'analyse de sensibilité. Cela constitue un outil de mesure de l'importance des paramètres entrant dans l'estimation de la probabilité de ruine.

Nous clôturerons ce dernier chapitre par l'étude de la stabilité, vis à vis du renversement, d'un ouvrage de soutènement en zone sismique.

CHAPITRE I : FIABILITE DES STRUCTURES

Introduction

Bien que rares, les événements tels que la rupture des structures en génie civil peuvent conduire à des conséquences extrêmement graves. Jusqu'à un passé récent, on se protégeait de ces événements en prenant en compte des marges, des facteurs de sécurité, que l'on cumulait sur l'ensemble des paramètres influents, à l'aide d'une méthodologie uniquement déterministe. Cependant, cette démarche ne permet pas de bien connaître le risque pris. En contre partie arrive l'approche probabiliste, selon laquelle les paramètres les plus influents sont considérés comme des variables aléatoires. A partir d'une équation physique de défaillance dont les variables sont probabilisées, on calcule une probabilité de défaillance qui permet de faire des études de sensibilité et d'optimisation.

Le but de ce chapitre est de donner un état de l'art sur ces deux approches, et particulièrement sur l'approche probabiliste.

I.1 Approche déterministe

Les analyses mécaniques des structures et de leur dimensionnement sont fondées sur une démarche réglementaire et codifiée, essentiellement, déterministe. Afin de conserver des marges importantes entre la résistance mécanique intrinsèque des structures et les chargements qui leurs sont appliqués, des facteurs de sécurité ont été introduits dans les calculs.

Cette démarche est très importante vu qu'elle est encore utilisée à notre époque. Elle est apparue lorsqu'on a commencé à se rendre compte que le procédé empirique de construction s'avérait inefficace, en particulier, quand il s'agit de créer de nouvelles structures avec de nouveaux matériaux. C'est avec l'invention de la construction métallique et de la RDM (Résistance Des Matériaux) que la notion de limite de sécurité a été introduite de manière significative. Elle consiste à rattacher à chaque matériau une contrainte maximale que la contrainte calculée ne doit pas dépasser. Cette limite est ensuite reliée à la résistance du matériau [2].

I.1.1 Valeurs caractéristiques - facteur de sécurité

Dans cette démarche on tient compte de l'ensemble des incertitudes. Ceci permet de simplifier le problème mécanique. Une valeur enveloppe maximale est prise en compte pour caractériser chacune des variables de base utilisées dans le calcul de conception. On

détermine cette enveloppe à l'aide de coefficients de sécurité, ou marges, qui couvrent le caractère aléatoire des variables considérées. Cette valeur est attribuée aux chargements qui s'appliquent sur la structure. Elle est comparée à la plus faible valeur potentielle de la résistance mécanique des matériaux constituant la structure. Ces valeurs sont communément connues sous le nom de valeurs caractéristiques. Celles-ci sont pondérées par un coefficient de sécurité pour se protéger de la méconnaissance des propriétés réelles des matériaux afin d'anticiper un fonctionnement futur très peu probable.

La contrainte maximale calculée susceptible d'affecter la structure est définie par la contrainte maximale S_S appelée contrainte admissible. Cette dernière est comparée à la résistance caractéristique minimale du matériau S_R , moyennant un coefficient de sécurité F_R tel que :

$$F_R = \frac{S_R}{S_S} \Rightarrow S_S = \frac{S_R}{F_R} \quad (I.1)$$

La valeur de F_R dépend des tests expérimentaux effectués précédemment. Les valeurs caractéristiques sont pondérées par la valeur de ce coefficient qui est fixée par avance.

Le choix d'un coefficient de sécurité dépend du caractère de la structure, de sa durée de vie et des conséquences de la rupture. En géotechnique, le coefficient de sécurité est sensiblement rattaché au degré d'exploration du terrain pour déterminer les paramètres du sol.

On admet donc que la sécurité est assurée si les contraintes déduites des charges et actions maximales appliquées à l'ouvrage, et qui s'exercent sur les différents éléments, sont inférieurs à la contrainte admissible :

$$\sum S_i \leq S_S = \frac{S_R}{F_R} \quad (I.2)$$

La fiabilité de la structure s'exprime par la relation

$$\frac{S_S}{\sum S_i} \geq 1 \quad (I.3)$$

I.1.2 Critiques de la méthode déterministe

La démarche déterministe a été couronnée de succès, la preuve en est dans l'existence, à notre époque, d'ouvrages datant de son apparition. C'est grâce à cette approche qu'on a pu introduire la notion de marge de sécurité.

Cependant, en plus du manque de rigueur scientifique dans la détermination des facteurs de sécurité, se basant essentiellement sur l'intuition et l'expérience, cette méthode présente un grand nombre de limites qui tiennent compte des inconvénients ci énumérés :

- Absence d'optimisation : cette démarche ne prend pas en compte l'optimum économique, ce qui conduit souvent à un surdimensionnement des structures[3].
- Elle ne permet pas de définir une valeur implicite de la fiabilité, c'est à dire qu'elle ne donne pas une valeur réelle du risque pris.
- Les incertitudes ne sont pas prises en compte de manière claire : une valeur enveloppe caractérise les paramètres incertains.
- Les facteurs de sécurité seuls ne donnent pas une idée complète sur la fiabilité d'un système, et ne permettent pas de traiter les incertitudes sur les variables de base d'une manière séparée alors que cela est extrêmement important.

I.2 Approche probabiliste

La démarche déterministe (étude de fiabilité de niveau I) n'est généralement pas optimisée sur le plan du dimensionnement des structures. Ceci à cause du manque de rigueur scientifique par rapport à la détermination des facteurs de sécurité. Il semble plus rationnel de caractériser les variables de base du calcul des structures par les premiers moments de leur distribution, au moins les deux premiers, c'est à dire, la moyenne (espérance) et la variance (écart type). Cette dernière caractérise l'incertitude associée à la valeur moyenne.

En considérant le cas élémentaire d'une sollicitation S et d'une résistance mécanique R , ces variables sont indépendantes ou dépendantes et distribuées selon des lois de probabilité quelconques. La probabilité de fonctionnement sans défaillance (fiabilité) est alors égale à la probabilité d'occurrence de l'événement $S \geq R$. S et R sont caractérisées par leurs premiers moments à savoir μ_S et μ_R , σ_S et σ_R , respectivement (très important dans l'évaluation de fiabilité de niveau II).

I.2.1 Méthodologie

On adopte une méthodologie générale qu'on retrouve dans toutes les analyses probabilistes de fiabilité des structures. C'est une démarche qui s'articule en six points :

1. Modélisation déterministe du problème posé (élaboration du modèle de dégradation) ;
2. Identification des paramètres d'influences à probabiliser ;
3. Résolution mathématique du modèle de défaillance ;
4. Intégration de la stratégie d'inspection en service et de maintenance ;
5. Choix d'un algorithme de résolution numérique (simulation ou approximation) ;
6. Implantation informatique, validation et étude de sensibilité.

Il faut noter aussi l'importance des connaissances déterministes c'est à dire le jugement des experts. Concernant les études d'optimisation, il y'a lieu de rajouter un volet supplémentaire : évaluation probabiliste de l'espérance des fonctions d'utilité ou des fonctions de perte associées aux différentes décisions possibles de conception, d'exploitation, d'inspection et de maintenance [3].

I.2.2 Intérêts et limites d'une approche probabiliste

I.2.2.1 Intérêts de la démarche

Cet intérêt apparaît à trois niveaux :

a) Aide au diagnostic : évaluation de la durée de vie résiduelle des structures

Cette démarche permet d'apporter un diagnostic sur le vieillissement ou sur le maintien du niveau de sûreté du composant. La probabilité de défaillance calculée est comparée à une valeur limite qui peut traduire le niveau de dégradation acceptable. Par conséquent, on peut parler de durée de vie résiduelle ou de consommation de durée de vie qui se résume en une durée de vie de service (disponibilité) et une durée de vie limite (sûreté). Ainsi, l'intérêt stratégique pour cette démarche est important du point de vue remplacement des matériels pour les installations industrielles ou des éléments de la structure pour un bâtiment ou un ouvrage d'art.

b) Etude de sensibilité et aide à la décision

C'est à travers ces études qu'apparaissent les paramètres les plus influents sur lesquels il est possible d'agir, dans le but d'optimiser l'utilisation des structures.

Il faut noter que contrairement à l'approche déterministe, l'approche probabiliste permet d'effectuer des études de sensibilité. Elle prend en compte tout le domaine de variation de l'ensemble des paramètres influents en un seul calcul.

c) Amélioration des outils déterministes de conception

On peut appliquer des marges raisonnables aux paramètres influents déjà déterminés. Il est ainsi possible d'établir des dossiers de conception à la fois plus réalistes et tout aussi enveloppes que ceux qui existent dans la démarche déterministe.

La démarche probabiliste donne aussi la possibilité de comparer les codes déterministes de conception et les calculs réglementaires. Ainsi pour un même code, on peut comparer deux règles de dimensionnement proposées et choisir celle qui contribue à la fiabilité la plus grande. Pour deux codes différents, on dispose d'une méthode de comparaison de la fiabilité, que l'on peut toujours comparer à des objectifs de sûreté ou de disponibilité.

Afin d'illustrer ce propos, on peut citer les travaux des laboratoires des ponts et chaussées et de Génie Civil de l'université de Clermont-Ferrand. Ces études ont permis de comparer les réglementations relatives au dimensionnement des bâtiments du code européen Eurocode 3, et celle appartenant au code américain AISC-LRFD. Pour les règles de prise en compte du flambement proposées par ces deux codes, l'approche probabiliste met en évidence que l'Eurocode 3 conduit à une évaluation de fiabilité plus homogène que celle calculée par le code américain [3].

1.2.2.2 Limites de la démarche probabiliste

Les limitations de cette approche tiennent essentiellement à l'absence de modèles satisfaisants pour décrire certains processus complexes de dégradation tels que l'usure, au manque de données requises par les modèles existants et aux difficultés statistiques, algorithmiques et informatiques que pose le traitement d'un grand nombre de variables caractérisant les structures.

Il est important de souligner que le recours à une démarche probabiliste pour traiter un problème mécanique ne fait en aucun cas l'économie de la compréhension des phénomènes mis en jeu. On ne peut résoudre un problème par une approche probabiliste que s'il est posé en termes déterministes.

Aussi, et du fait que la démarche probabiliste soit pluridisciplinaire, l'acquisition des connaissances nécessaires peut s'avérer difficile.

Enfin, il faut noter que les temps de calcul peuvent être prohibitifs. On se limite dans le calcul de certaines structures à certains nœuds pour extrapoler ensuite à l'ensemble, car on ne peut pas calculer la fiabilité de ces structures par simple simulation.

De ce fait, la démarche probabiliste s'appuie sur un modèle de dégradation déterministe, selon lequel les différentes sources d'incertitudes sont modélisées sous forme de variables aléatoires. Elle constitue donc un prolongement de la méthode déterministe.

I.2.3 Incertitudes liées à l'évaluation de la fiabilité des structures

L'évaluation de la fiabilité des structures consiste à estimer un risque de défaillance à partir de la probabilisation d'un modèle physique de dégradation.

On distingue trois grands domaines d'incertitude dans ce type de calcul : les incertitudes physiques, les incertitudes liées aux estimations statistiques, et enfin les incertitudes liées au modèle physique de dégradation [3].

- Les incertitudes physiques dépendent, d'une part, des propriétés des matériaux et des caractéristiques géométriques qui définissent la résistance de la structure. D'autre part, des chargements dépendant de processus stochastiques (incertains), des caractéristiques dimensionnelles, d'une histoire et des différents modes de défaillance possibles ;
- Les incertitudes statistiques concernent la caractérisation des variables aléatoires. Elles dépendent des inférences déduites à partir de l'observation d'échantillons, qui vont permettre d'établir une distribution de probabilité censée représenter l'ensemble de la population de laquelle a été prélevé l'échantillon testé et d'évaluer les valeurs numériques des paramètres de cette distribution ;
- Les incertitudes sur le modèle de dégradation : elles dépendent du degré de simplification que l'on imposera au modèle mécanique pour représenter les phénomènes physiques et aussi afin de résoudre les difficultés mathématiques associées à la combinaison d'un ensemble de variables aléatoires, elles-même déterminées avec un certain degré d'incertitude.

I.2.4 Evaluation probabiliste de la fiabilité des structures

I.2.4.1 Fonction d'état limite

Si le vecteur $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, représente l'ensemble des variables intervenant dans les fonctions résistance mécanique/contrainte d'une structure, on a la fonction $G(X)$ appelée

fonction de défaillance qui permet de diviser l'espace en deux domaines : le domaine de sécurité ou domaine fiable S ou, par définition, $G(X) > 0$ et le domaine défaillant F ou $G(X) \leq 0$ la fonction $G(X) = 0$ définissant la surface d'état limite L (Voir figure I.1). X correspond à un vecteur aléatoire dont une des réalisations possibles est caractérisée par un point dans un espace vectoriel à n dimensions.

Nous avons donc les différentes situations possibles pour le point X :

$$G(X) > 0, X \in S \text{ (domaine sûr)}$$

$$G(X) = 0, X \in L \text{ (surface d'état limite)}$$

$$G(X) < 0, X \in F \text{ (domaine défaillant)}$$

Si on considère à nouveau les deux variables de base : la résistance mécanique R et le chargement S , la fonction d'état limite est $G(R, S) = R - S$. On définit la marge de sécurité correspondante M :

$$M = R - S \tag{I.4}$$

En termes de sûreté, la fiabilité de la structure P_R est représentée par la probabilité $P_R = P(M > 0)$.

Pour calculer cette probabilité, il faut :

- Déterminer la surface d'état limite séparant le domaine de sécurité du domaine de ruine à partir de l'évaluation des propriétés mécaniques des matériaux, et des chargements qu'ils subissent ;
- Calculer la densité jointe des variables de base en effectuant leur produit de convolution ;
- Intégrer la densité jointe $G(X)$ sur l'ensemble du domaine de sûreté ou de défaillance.

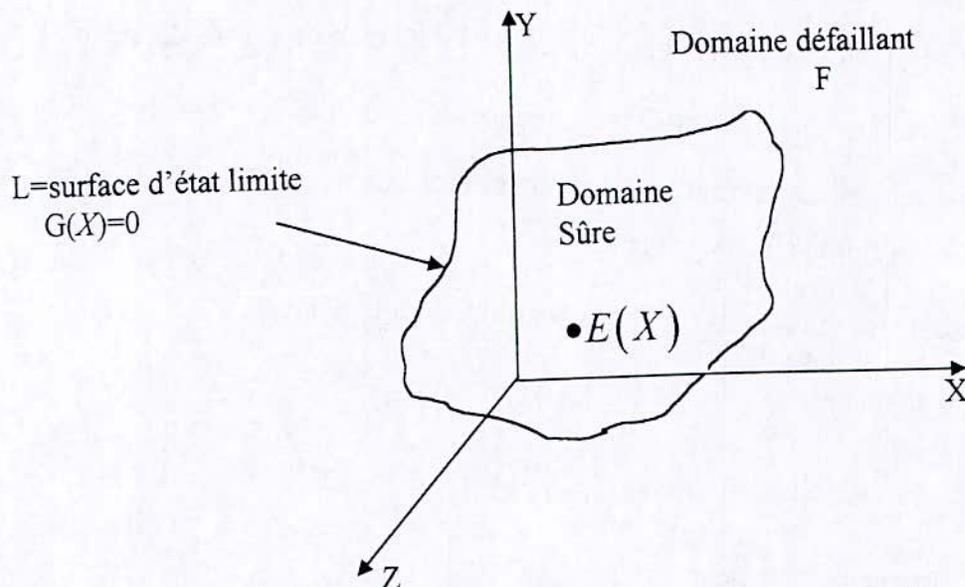


Figure I.1: Espace vectoriel et surface d'état limite[3]

I.2.4.2 Indice de fiabilité de Cornell

Si R et S sont des variables normales indépendantes $N(\mu_R, \sigma_R)$ et $N(\mu_S, \sigma_S)$, l'espérance de la marge M est simplement égale à

$$\mu_M = E(M) = \mu_R - \mu_S \quad (I.5)$$

Et sa variance

$$\sigma_M^2 = \text{var}[M] = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 \quad (I.6)$$

La probabilité de défaillance définie par la différence des deux variables normales jointes $P(R - S < 0)$, est aussi une variable normale : $N[E(M), D(M)]$.

Cornell, en 1969, a défini un indice de fiabilité β_c caractérisé par le rapport entre l'espérance mathématique de la distribution de la marge de sécurité $E[M]$ d'une structure, et la dispersion de cette distribution,

$$\beta_c = \frac{E[M]}{D[M]} \quad (I.7)$$

Puisqu'on a supposé que les variables R et S sont indépendantes, on peut écrire :

$$\beta_c = \frac{E[R] - E[S]}{\sqrt{\text{var}[R] + \text{var}[S]}} \quad (\text{I.8})$$

Cette définition est illustrée sur la figure (I.2), dans ce cas bidimensionnel, la surface d'état limite est représentée simplement par le point $M=0$. Dans ces conditions, la valeur de l'indice de fiabilité correspond à la distance entre l'espérance de la marge et l'origine, exprimée en multiples d'écart types, soit :

$$E(M) = \beta_c D(M) = \beta_c \sqrt{\text{var}[R] + \text{var}[S]} \quad (\text{I.9})$$

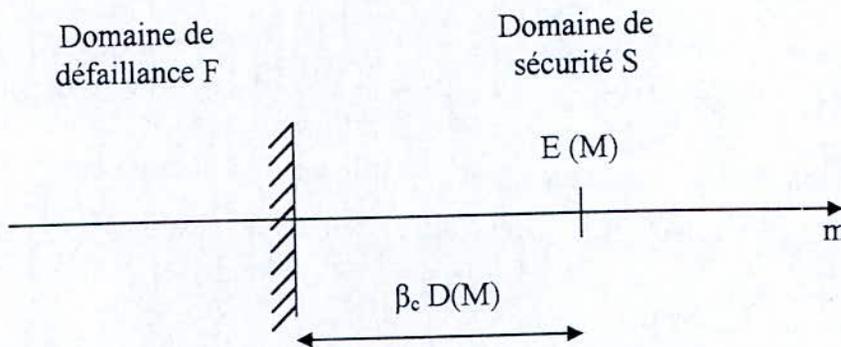


Figure-I.2 – Définition géométrique de l'indice de fiabilité de Cornell [3]

Compte tenu des hypothèses précédentes, β_c est égal à :

$$\beta_c = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (\text{I.10})$$

Et la probabilité de défaillance est :

$$P_f = \text{prob}[M < 0] = \Phi \left[\frac{\mu_S - \mu_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right] = \Phi[-\beta_c] \quad (\text{I.11})$$

L'indice de fiabilité de Cornell est utilisé dans les codes de génie civil. Il permet en particulier de comparer différents choix de conception.

Le principal inconvénient de cet indice est de ne pas être invariant, car sa valeur dépend de l'expression choisie pour définir la fonction d'état limite.

Ainsi, si on prend l'exemple où la marge est définie par $M = \frac{R}{S} - 1$, la probabilité de défaillance est :

$$P_f = \text{prob}\left(\frac{R}{S} \leq 1\right) \quad (\text{I.12})$$

L'indice de fiabilité correspondant, qui est calculé approximativement autour des valeurs moyennes n'est plus le même, en effet on aura :

$$\beta_c = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + (\mu_R / \mu_S)^2 \sigma_S^2}} \quad (\text{I.13})$$

L'indice de fiabilité (β_c) dépend donc du choix fait pour définir la fonction de défaillance.

Enfin, comme on la vu lorsque la fonction d'état limite $G(X)$ est une fonction linéaire des variables de base X , on calcule facilement l'indice de fiabilité à partir des deux premiers moments de X .

Dans le cas où $G(X)$ est une fonction non linéaire, Cornell a suggéré l'approximation de l'équation de la surface d'état limite par un développement en série de Taylor du 1^{er} ordre autour de la valeur moyenne de X , μ

$$G(X)_\mu = M_\mu = g(\mu) + \sum_i g_i(\mu) [X_i - E(X_i)] \quad (\text{I.14})$$

Dans ces conditions, on obtient une approximation raisonnable de l'indice de fiabilité :

$$\beta_\mu = \frac{g(\mu)}{\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_i(\mu) g_j(\mu) \text{cov}[X_i, X_j] \right]^{1/2}} \quad (\text{I.15})$$

La surface d'état limite étant représentée par un hyperplan [3].

I.2.4.3 Evaluation de la probabilité de défaillance

Pour des raisons de simplification, on prend le cas particulier de deux variables aléatoires normales indépendantes, soient elles R et S . Elles représentent, respectivement, la résistance mécanique et le chargement, et on définit la marge de sécurité M par la relation (I.4).

La marge définie ainsi est une valeur arbitraire qui ne donne en fait aucune information sur le degré de sûreté de la structure.

On recherche la probabilité de défaillance qui est égale à

$$P_f = P[M < 0] = \int_{M \leq 0} f_M(m) dm = F_M(0) \quad (I.16)$$

Par hypothèse, R et S ont pour densités de probabilité respectives :

$$f_R(r) = \frac{1}{\sigma_R \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(r - \mu_R)^2}{2\sigma_R^2}\right] \quad (I.17)$$

$$f_S(s) = \frac{1}{\sigma_S \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(s - \mu_S)^2}{2\sigma_S^2}\right] \quad (I.18)$$

La fiabilité de la structure P_R est la probabilité que la marge M soit > 0 , soit, pour toutes les valeurs possibles de M :

$$P_R = \frac{1}{\sigma_M \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{(m - \mu_M)^2}{2\sigma_M^2}\right] dm \quad (I.19)$$

Pour intégrer cette équation, il faut effectuer un changement de variable dans l'espace normale réduit.

$$u = \frac{m - \mu_M}{\sigma_M} \quad (I.20)$$

Les limites de la variable u sont telles que :

- lorsque $M = \infty$, $u = \frac{m - \mu_M}{\sigma_M} = \infty$
- lorsque $M = 0$, $u = \frac{m - \mu_M}{\sigma_M} = \frac{0 - \mu_M}{\sigma_M} = -\frac{\mu_M}{\sigma_M}$

En effectuant un changement de variable, en notant que $dm = \sigma_M dt$, on aura :

$$P_R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\mu_M}{\sigma_M}}^{\infty} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] dt \quad (I.21)$$

On obtient la valeur de la probabilité P_R en effectuant l'intégration précédente.

La valeur numérique de la limite inférieure de u est :

$$u = -\frac{\mu_M}{\sigma_M} = -\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = -(\beta_c) \tag{I.22}$$

On en déduit la probabilité complémentaire de défaillance de la structure $P_f = P(M \leq 0)$

$$P_f = \Phi\left(-\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) = \Phi\left[-\frac{(\mu_R - \mu_S)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right] = \Phi(-\beta_c) \tag{I.23}$$

Φ étant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Φ est tabulée (annexe II).

Comme précédemment, l'indice de fiabilité β_c est mesuré par la distance normalisée (en multiple d'écart type) entre l'origine du système de référence de la surface d'état limite dans l'espace transformé (espace normalisé) (Voir figure-I.3).

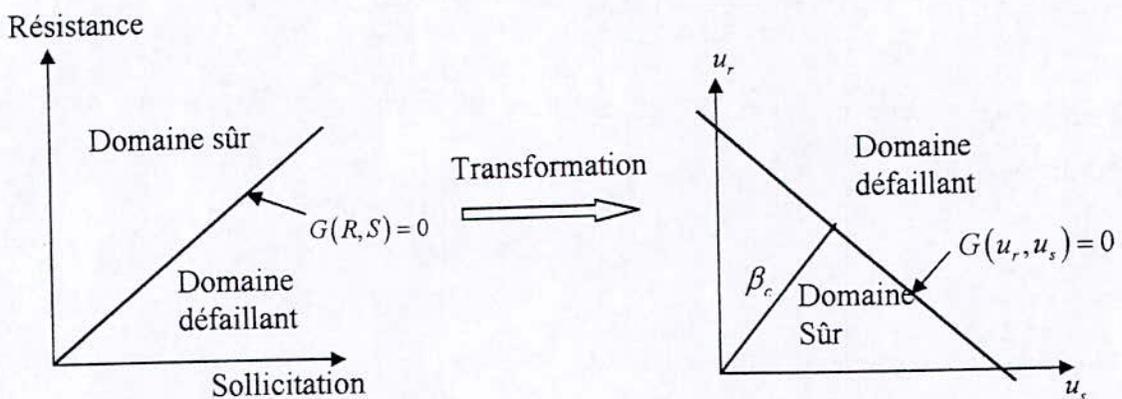


Figure I.3 : Représentation de la fonction linéaire d'état limite dans l'espace réel (R, S) et dans l'espace normal réduit (u_r, u_s)
Indice de fiabilité de Cornell [5]

L'espace normalisé est symétrique en rotation, ce qui va faciliter la recherche du point de défaillance le plus probable. L'indice de fiabilité β est un nombre que l'on peut interpréter comme la mesure de la distance entre la surface d'état limite (où la marge est nulle, $M=0$).

Lorsque la symétrie en rotation est respectée et que deux surfaces d'état limite appartenant à deux hyperplans différents ont le même indice de fiabilité, la probabilité de défaillance est identique pour ces deux modes de ruine. L'indice de fiabilité permet donc de

comparer directement les risques entre plusieurs modes de défaillance d'une même structure, ou entre différentes conceptions.

La distribution de la marge M et la mesure normalisée de l'indice de fiabilité sont représentées sur la figure I.4.

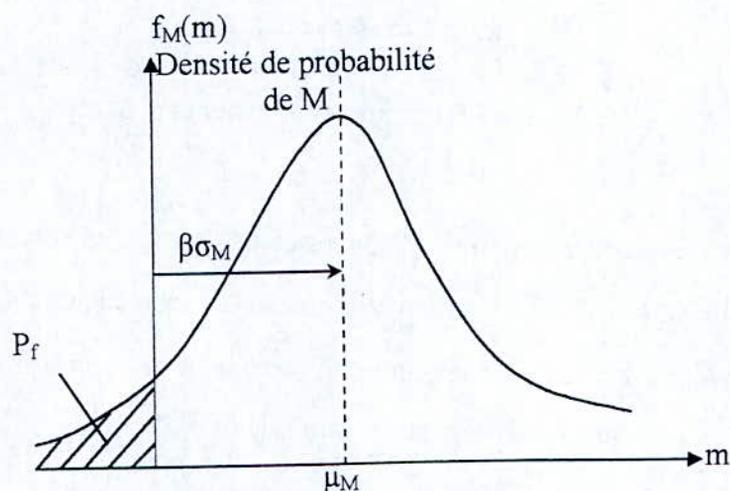


Figure I.4 : Densité de probabilité de la marge de sécurité

I.2.4.4 Correspondance entre indice de fiabilité et probabilité de défaillance

Comme on vient de le voir, $P_f = \Phi(-\beta)$ est la relation directe liant l'indice de fiabilité à la probabilité de défaillance. Le tableau (I.1) donne un ordre de grandeur sur la correspondance entre ces deux derniers.

Tableau I.1 : Correspondance indice de fiabilité - probabilité de ruine.

P_f	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
β	1.28	2.33	3.09	3.72	4.26	4.75	5.20	5.61	6.00

I.2.4.5 Exemple

Pour illustrer la correspondance entre indice de fiabilité et probabilité de défaillance, nous avons choisi le cas d'une poutre chargée en son milieu (figure I.5)

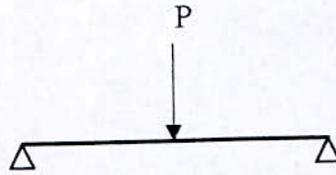


Figure I.5 : Poutre simplement appuyée

Une poutre de longueur $L=3\text{m}$ simplement supportée est chargée en son centre par un poids P de valeur moyenne $\mu_p = 2\text{kN}$, et de variance $\sigma_p^2 = 1\text{kN}^2$. Les caractéristiques de la résistance mécanique de poutres identiques, déterminées lors de tests, correspondent à une valeur moyenne $\mu_R = 8\text{kN}$, et à un coefficient de variation $V_R = 0,10$.

Cherchons la probabilité de défaillance de la poutre, dans ces conditions.

Le moment au centre de la poutre est défini par la relation :

$$S = \frac{PL}{4} = \frac{3P}{4}$$

On en déduit la valeur moyenne du chargement

$$\mu_S = \frac{3}{4} \mu_p = \frac{6}{4} = 1,5\text{kNm}$$

Et l'incertitude sur la résistance mécanique de la poutre (d'après les résultats des tests mécaniques) :

$$\sigma_R = \mu_R V_R = 0,8\text{kN}$$

On évalue successivement la valeur moyenne de la marge :

$$\mu_M = \mu_R - \mu_S = (8 - 1,5) = 6,5\text{kN}$$

Sa variance :

$$\sigma_M^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 = 1,64\text{kN}^2$$

Et son écart type :

$$\sigma_M = 1,3kN$$

D'où la probabilité de défaillance déduite de la table de la loi normale réduite :

$$P_f = \Phi(-\beta_c) = \Phi\left(-\frac{6,5}{1,3}\right) = \Phi(-5) \approx 10^{-7}$$

I.2.4.6 Invariance de l'indice de fiabilité

On a vu que l'indice de fiabilité de Cornell calculé pour des variables normales

$$\beta_c = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (I.24)$$

n'était pas invariant vis-à-vis du choix de la fonction de défaillance. Pour des variables quelconques, l'indice de fiabilité, calculé après transformation des variables dans l'espace normal réduit, dépend d'autre part du point que l'on va choisir sur la surface de défaillance.

Il serait dommage d'obtenir différentes valeurs de mesure de fiabilité pour un même problème mécanique.

Afin d'éviter cet écueil, et pour généraliser le problème à des variables multiples quelconques, non homogènes et dépendantes, Hasofer et Lind ont proposé, en 1974, une nouvelle démarche permettant de déterminer un indice de fiabilité, β_{HL} , qui reste invariant. Pour atteindre cet objectif, il est généralement nécessaire de linéariser la surface d'état limite, $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ par rapport aux variables de base, X_1, X_2, \dots, X_n , pour pouvoir calculer l'indice de fiabilité.

La surface d'état limite peut alors s'exprimer sous la forme :

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n + b, \quad b > 0 \quad ; \quad a_1, a_2, \dots, a_n \text{ et } b \text{ étant des constantes.}$$

Cette surface est une droite si $n=2$, un plan si $n=3$. Et pour toute valeur arbitraire de n , la surface limite correspond à un hyperplan.

Nous verrons par la suite que l'approximation d'une surface d'état limite quelconque par un hyperplan (ou par plusieurs plans dans le cas de modes de défaillance multiples), conduit à l'obtention d'un résultat suffisamment précis pour la plupart des problèmes de fiabilité rencontrés en pratique. Cette méthode d'approximation est appelée FORM (First Order Reliability Method).

I.2.4.7 Variables bidimensionnelles

L'indice de fiabilité de Hasofer-Lind permet de calculer directement la probabilité de défaillance lorsque toutes les variables ont des distributions normales, et que la surface d'état limite est linéaire. Si ce n'est pas le cas, on estime la probabilité de défaillance $P_f = \Phi(-\beta_{HL})$ en effectuant une approximation linéaire de la surface d'état limite (Méthode FORM). Mais comme, en général, les variables physiques ne sont pas normales, l'expression précédente n'est pas correcte. Rackwitz et Fiessler ont proposé de résoudre ce problème grâce à une transformation des variables de base dans l'espace standard.

Compte tenu de ce qui précède, dans l'espace normal, on définit l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind, β_{HL} comme la plus petite distance entre l'origine et la surface d'état limite. Le point u^* , le point le plus proche de l'origine situé sur cette surface, est le point de défaillance le plus probable, appelé aussi le point de conception ou « design point ». Pour déterminer la position de u^* , il faut résoudre un problème de minimisation de distance, avec la contrainte d'égalité traduisant l'appartenance de ce point à la surface d'état limite.

On remarque que l'indice de Hasofer et Lind ayant une définition géométrique ne dépend plus de la formulation choisie pour déterminer la surface d'état limite.

L'indice de fiabilité est donc représenté dans l'espace normal par la distance minimale entre l'origine et la surface de défaillance. Il est mesuré en multiple d'écart types (figure I.6).

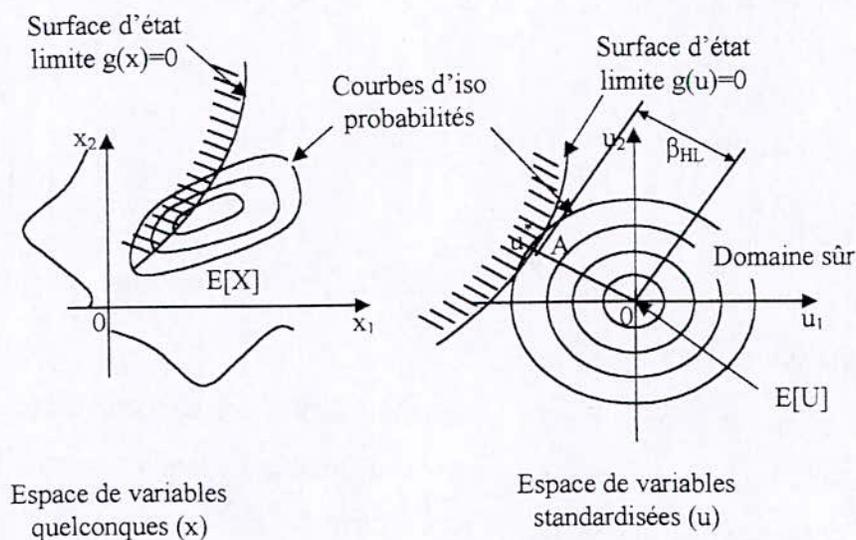


Figure I.6 : Transformation dans l'espace normal réduit.
Indice de fiabilité de Hasofer-Lind (β_{HL}) [4]

I.2.4.8 Variables multidimensionnelles - Analyse multipoints ou multi modes

L'indice de fiabilité géométrique multipoint est une extension de l'indice de fiabilité simple, déterminé à partir d'une surface d'état limite hyperplane, à un ensemble général de surface d'état limite.

Lorsqu'on considère plusieurs modes de défaillance, les fonctions d'état limite des n variables de base caractéristiques de X sont généralement non linéaires. Le calcul de l'indice de fiabilité est complexe et demande l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange.

On a alors :

$$\beta_{HL} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i^* \left(\frac{\partial g}{\partial U_i} \right)^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^* \left(\frac{\partial g}{\partial U_i} \right)^2}} \quad (I.25)$$

Dans cette expression, les dérivées $\partial g / \partial U_i$ sont calculées pour les différents points de conception correspondant à chaque mode de défaillance ($u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*$).

Un point de conception pour un mode de défaillance particulier est défini, tel que (figure I.7)

$$u_i^* = \alpha_i^* \beta_{HL}, \quad i = 1, \dots, n \quad (I.26)$$

Avec pour les vecteurs unitaires respectifs α_i^*

$$\alpha_i^* = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial U_i} \right)^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial U_i} \right)^2}} \quad (I.27)$$

qui représentent les cosinus directeurs du vecteur u_i^* par rapport aux différents axes du système de référence.

Dans l'espace des variables physiques originales, le point de conception correspondant est défini par :

$$X_i^* = \mu_{X_i} - \alpha_i^* \sigma_{X_i} \beta_{HL} \quad (I.28)$$

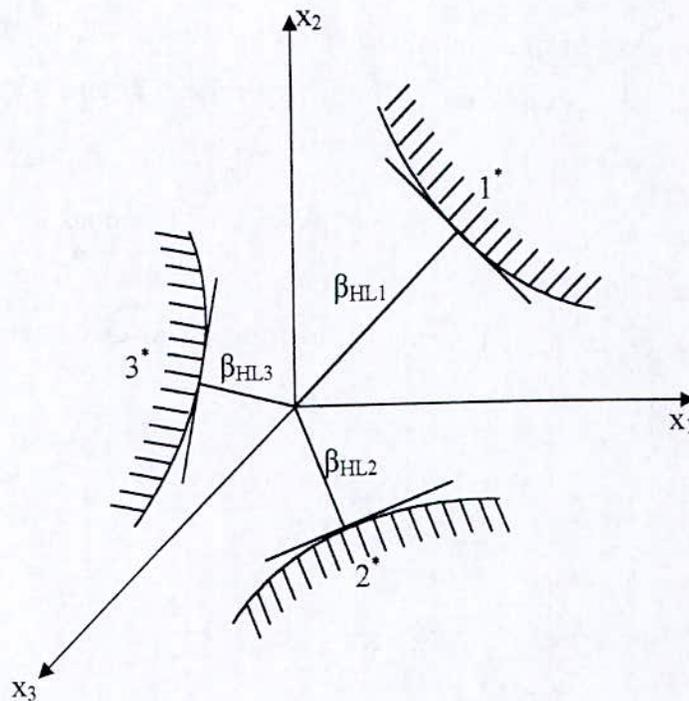


Figure I.7 Analyse multipoints

Conclusion

On a vu que la plupart des problèmes mécaniques peuvent être formulés à partir d'un ensemble de variables aléatoires $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Celles-ci caractérisent les incertitudes et la variabilité des paramètres pris en compte. La fonction d'état limite $G(X)$ qui correspond au modèle déterministe décrit le critère de ruine de la structure.

La fonction d'état limite permet de définir dans l'espace à n dimensions :

- Un domaine de sécurité pour $G(X) > 0$,
- Un domaine de défaillance pour $G(X) < 0$,
- Une hyper surface d'état limite pour $G(X) = 0$, frontière entre les deux domaines précédents.

La probabilité de défaillance de la structure est la probabilité pour qu'une réalisation des variables X_i tombe à l'intérieur du domaine de défaillance. Elle a pour expression :

$$P_f = P[G(X) \leq 0] = \int_{G(x) \leq 0} f_x(x) dx$$

où $f_x(x)dx$ représente la densité de probabilité conjointe des variables aléatoires de base $X = (X_1, \dots, X_n)$.

P_f peut être interprétée comme le poids probabiliste de la partie de l'espace appartenant au domaine de défaillance.

Le calcul de cette intégrale multiple à n dimensions peut se faire :

- De manière exacte (mais qui n'est que rarement possible) ;
- Par des techniques d'intégration numérique (mais qui sont souvent mal adaptées à ce type de problème, et coûteuses en temps de calcul) ;
- Par des techniques de simulation (Monte Carlo) ;
- Par des méthodes analytiques d'approximation (FORM, SORM, first order and second order reliability methods).

Ce qui va faire l'objet des prochains chapitres.

CHAPITRE II : METHODES DE NIVEAU II

Introduction

Afin d'estimer la probabilité de ruine, différentes méthodes sont employées. L'information des modèles sur lesquels l'analyse de la fiabilité est basée est généralement incomplète. Par conséquent, la fiabilité estimée devrait être considérée comme une mesure nominale de la fiabilité et non pas comme un nombre absolu. Cependant, si la fiabilité est estimée pour un certain nombre de structures en utilisant le même niveau d'information et les mêmes modèles mathématiques, alors des comparaisons utiles peuvent être faites au niveau de la fiabilité de ces structures. De nombreuses conceptions de nouvelles structures peuvent être exécutées par des méthodes probabilistes. On se base sur des modèles et une information similaire à des structures existantes connues et dont l'exécution est satisfaisante. En employant les méthodes probabilistes, le concepteur doit faire très attention quant à la non disponibilité de structures similaires à celles qu'il conçoit. Il doit vérifier les modèles utilisés à cet effet autant de fois que possible[7].

Le plus bas niveau de fiabilité peut être obtenu en analysant des structures semblables conçues après une conception pratique courante. C'est aussi le niveau donnant la plus grande utilité (avantages- coûts) en résolvant un problème de décision où l'on prend en considération tous les coûts et avantages possibles dans la vie prévue d'une structure.

On présentera dans ce chapitre les méthodes FORM et on donnera un aperçu sur la méthode SORM.

- **Méthode FORM** : Dans les méthodes de fiabilité de premier ordre, la fonction d'état limite (fonction de défaillance) est approximée par un hyperplan et la fiabilité est estimée en utilisant le niveau II des méthodes, Le résultat est un indice de fiabilité qui donne une estimation de la probabilité de ruine.
- **Méthode SORM** : Dans les méthodes de fiabilité du second degré, une approximation quadratique de la fonction de défaillance est déterminée. On estime la probabilité de ruine pour la surface quadratique en question.

II.1 Méthodes de calcul de fiabilité du premier ordre FORM (*First Order Reliability Methods*)

Le développement des méthodes FORM peut être comparée historiquement aux méthodes des deux premiers moments, celles ci ont employé l'information du premier et second moment des variables aléatoires. Ce sont les méthodes de premier ordre du second moment (FOSM (*First Order Second Moment*)) et les méthodes avancées de premier ordre du second moment (AFOSM (*Advanced First Order Second Moment*)). Dans les méthodes FOSM, l'information sur la distribution des variables aléatoires est ignorée contrairement aux méthodes AFOSM où l'information distributionnelle est convenablement employée.

II.1.1 Méthode FOSM ou méthode MVFOSM

La méthode FOSM est désignée également, dans la littérature, sous le nom de la méthode MVFOSM (*Mean Value First Order Second Moment*). La méthode MVFOSM dérive son nom du fait qu'elle soit basée sur une approximation de premier ordre de séries de Taylor de la fonction de défaillance linéarisée aux valeurs moyennes des variables aléatoires, et parce qu'elle emploie seulement des statistiques du premier et second moment (les moyennes et covariances) des variables aléatoires [5]. La formulation originale de Cornell (1969) emploie l'approche de deux variables simples. Une fonction de défaillance dans ce cas-ci peut être définie, comme on l'a déjà illustré, par :

$$Z=R-S \quad (II.1)$$

Supposons que R et S sont statistiquement des variables aléatoires indépendantes normalement distribuées. La variable Z est également une variable aléatoire normale. L'événement de défaillance est $R<S$ ou $Z<0$. Nous pouvons évaluer la probabilité de défaillance comme suit:

$$p_f=P(Z<0) \quad (II.2)$$

Ou

$$p_f=\Phi\left(\frac{0-(\mu_R-\mu_S)}{\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2}}\right) \quad (II.3)$$

Ou

$$p_f=1-\Phi\left(\frac{\mu_R-\mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2}}\right) \quad (II.4)$$

Où Φ est la distribution normale standard de la variable aléatoire normale centrée réduite.

La probabilité de défaillance dépend du rapport de la valeur moyenne de Z à son écart type. Ce rapport, comme nous l'avons défini précédemment, est généralement connu sous le nom d'*indice de sûreté* ou *indice de fiabilité* et est noté β

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (\text{II.5})$$

La probabilité de défaillance en termes d'indice de fiabilité peut être obtenue par:

$$p_f = 1 - \Phi(\beta) \quad (\text{II.6})$$

II.1.2 Méthode AFOSM pour des variables normales (méthode de Hasofer-Lind [5])

La méthode de Hasofer-Lind définit d'abord les variables réduites par :

$$U_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad i=1,2,\dots,n \quad (\text{II.7})$$

Où U_i est une variable aléatoire de valeur moyenne nulle et d'écart type égal à l'unité. L'équation (II.7) est employée pour transformer l'état limite original $g(X)=0$ à celui d'état limite réduit, $g(U)=0$. Le système de coordonnées X est désigné sous le nom du *système de coordonnées originales*. Le système de coordonnées U est désigné sous le nom du *système du même rang transformé ou réduit*. On note que si X_i est normale, U_i est normale centrée réduite. Nous utiliserons ces notations pour désigner différents systèmes du même rang. L'indice de fiabilité β_{HL} est défini comme étant la distance minimale de l'origine des axes dans le système réduit du même rang à la surface d'état limite (surface de défaillance). Il peut être exprimé par :

$$\beta_{H-L} = \sqrt{(u^*)^T (u^*)} \quad (\text{II.8})$$

Le point de distance minimale à la surface d'état limite est appelé *point de conception*. Il est désigné par le vecteur X^* dans le système original du même rang et par le vecteur U^* dans le système réduit du même rang. Ces vecteurs représentent les valeurs de toutes les variables aléatoires, c.-à-d., X_1, X_2, \dots, X_n au point de conception correspondant au système du même rang employé[5].

Cette méthode peut être expliquée à l'aide du schéma (Figure II.1). On considère l'équation d'état limite linéaire pour deux variables

$$Z = R - S = 0 \tag{II.9}$$

R et S doivent être des variables normales. Un ensemble de variables réduites est défini par :

$$R' = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \tag{II.10}$$

$$S' = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \tag{II.11}$$

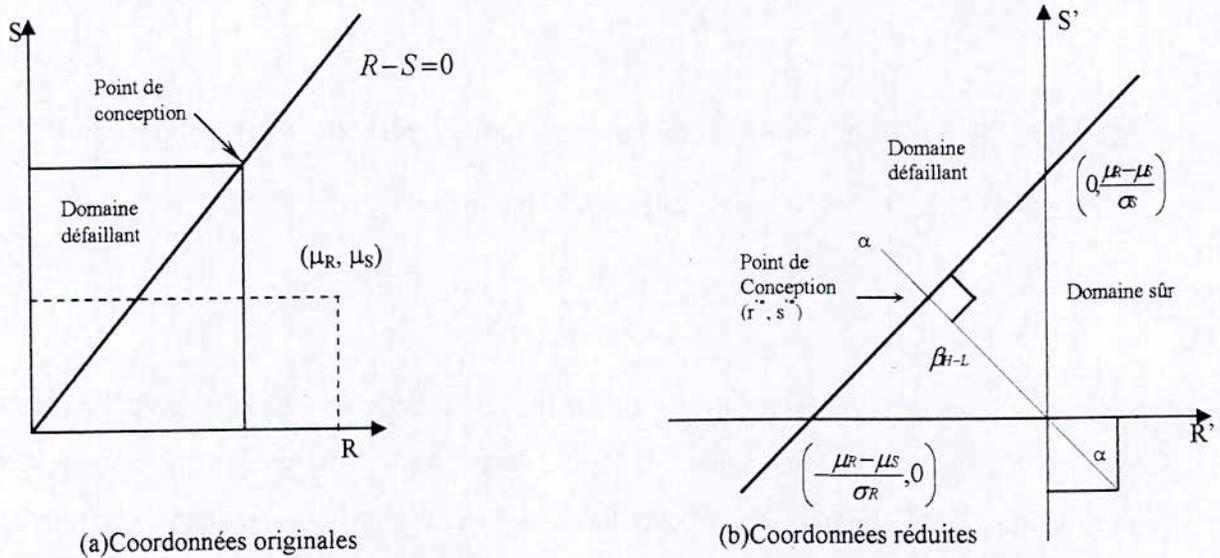


Figure II.1 : Indice de fiabilité de Hasofer-Lind : fonction d'état limite linéaire [5]

Si nous substituons ces dernières dans l'équation (II.9), l'équation d'état limite dans le système du même rang réduit devient

$$g() = \sigma_R R' - \sigma_S S' + \mu_R - \mu_S = 0 \tag{II.12}$$

La transformation de l'équation d'état limite du système original au système du même rang réduit est montrée dans la figure II.1(b). Les domaines sûrs et défaillants y sont également montrés. De la figure II.1(b), il est évident que si la ligne de défaillance (frontière d'état limite) est proche de l'origine, le domaine défaillant est plus grand, et inversement. Ainsi, la position de la surface d'état limite relativement à l'origine, dans le système du même rang, constitue une mesure de la fiabilité. Les coordonnées des interceptions de l'équation (II.12) sur les axes de R' et de S' sont $\left[-\frac{(\mu_R - \mu_S)}{\sigma_R}, 0 \right]$ et $\left[0, \frac{(\mu_R - \mu_S)}{\sigma_S} \right]$, respectivement. En

utilisant la trigonométrie simple, nous pouvons calculer la distance de la frontière d'état limite (équation II.12) à l'origine par

$$\beta_{HL} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (\text{II.13})$$

Cette distance est désignée sous le nom de *l'indice de fiabilité ou de l'indice de sûreté*. C'est le même indice de fiabilité défini dans la méthode MVFOSM dans l'équation II.5 si R et S sont des variables normales. Cependant, il est obtenu d'une manière complètement différente en se basant sur la géométrie. Il indique que si l'état limite est linéaire, et si les variables aléatoires sont normales, les deux méthodes donneront un indice de fiabilité identique. Ceci peut ne pas être vrai pour d'autres cas.

En général, pour beaucoup de variables aléatoires représentées par le vecteur $X = (X_1, \dots, X_n)$ dans le système original et $U = (U_1, \dots, U_n)$ dans le système réduit du même rang, l'état limite $g(U)=0$ est une fonction non linéaire comme c'est le cas dans les coordonnées réduites pour deux variables (figure II.2). A ce stade, on suppose que les U_i ne sont pas corrélées. Ici, $g(U)>0$ désigne l'état sûr et $g(U)<0$ l'état défaillant. De plus, l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind β_{HL} est défini comme étant la distance minimale de l'origine au point de conception sur l'état limite dans les coordonnées réduites, et peut être exprimé par l'équation (II.8), où \mathbf{u}^* représente les coordonnées du point de conception ou du point de la distance minimale de l'origine à l'état limite. Dans cette définition, l'indice de fiabilité est invariable, parce qu'indépendamment de la forme dans laquelle l'équation d'état limite est écrite, sa forme géométrique et la distance de l'origine demeurent constantes. Pour la surface d'état limite, où le domaine défaillant est une partie de l'origine, il est facile de voir du schéma (figure II.2) que \mathbf{u}^* est le point de défaillance le plus probable. L'indice de fiabilité de Hasofer-Lind peut être employé pour calculer une approximation de premier ordre de la probabilité de défaillance par $p_f = \Phi(-\beta_{HL})$. C'est l'intégrale de la fonction densité normale centrée réduite le long du rayon joignant l'origine et \mathbf{u}^* . Il est évident que plus le point \mathbf{u}^* est proche de l'origine, plus la probabilité de défaillance sera grande. Le point de la distance minimale de l'origine à la surface d'état limite \mathbf{u}^* , représente la plus mauvaise combinaison des variables aléatoires. Il est convenablement appelé *le point de conception ou le point le plus probable de défaillance (design point)* [5,6].

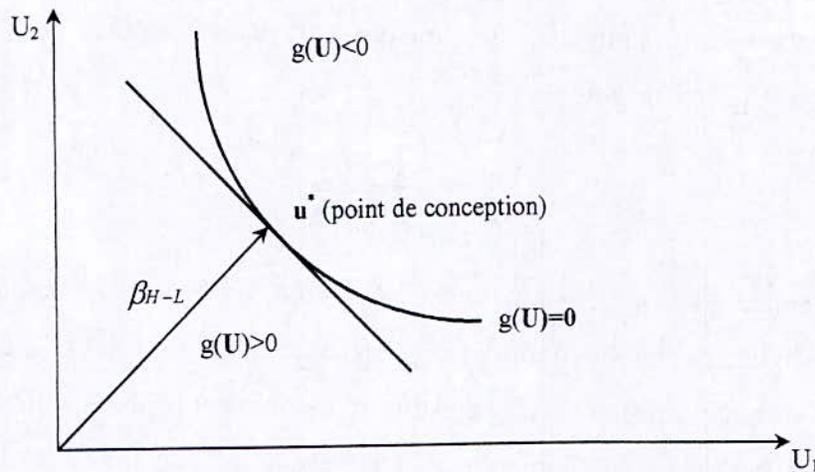


Figure II.2 -Indice de fiabilité de Hasofer-Lind : fonction d'état limite non linéaire[3]

Pour les états limites non linéaires, le calcul de la distance minimale devient un problème d'optimisation:

Chercher un minimum $D = \min \sqrt{\mathbf{u}^t \mathbf{u}}$

Sous la contrainte d'égalité $g(\mathbf{U})=0$ (II.14)

Là où \mathbf{u} représente les coordonnées du point de conception sur l'équation d'état limite dans les coordonnées réduites à estimer. En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, nous pouvons obtenir la distance minimale par

$$\beta_{HL} = - \frac{\sum_{i=1}^n u_i^* \left(\frac{\partial g}{\partial U_i} \right)^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial U_i} \right)^{2*}}} \tag{II.15}$$

Où $(\partial g / \partial U_i^*)$ est la ième dérivée partielle évaluée au point de conception avec les coordonnées $(u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$ Le point de conception dans les coordonnées réduites est indiqué par

$$u_i^* = -\alpha_i \beta_{HL} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{III.16}$$

Où

$$\alpha_i = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial U_i} \right)^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial U_i} \right)^{2*}}} \tag{II.17}$$

sont les cosinus directeurs le long des axes de coordonnée U_i . Dans l'espace des coordonnées originales et utilisant l'équation (II.7), nous pourrions déterminer le point de conception

$$u_i^* = \mu_{x_i} - \alpha_i \sigma_{x_i} \beta_{HL} \quad (\text{II.18})$$

Un algorithme a été formulé par Rackwitz (1976) pour calculer β_{HL} et u_i^* comme suit:

Étape 1: Définir l'équation appropriée d'état limite.

Étape 2: Supposer les valeurs initiales du point de conception u_i^* $i = 1, 2, \dots, n$. Le point initial de conception est supposé être les valeurs moyennes des variables aléatoires.

Obtenir ensuite les variables aléatoires réduites $u_i^* = (x_i^* - \mu_{x_i}) / \sigma_{x_i}$

Étape 3: Évaluer $(\partial g / \partial U_i)^*$ et α_i à u_i^*

Étape 4: Obtenir le nouveau point de conception u_i^* en fonction de β_{HL} comme dans l'équation (II.16).

Étape 5: Substituer le nouveau u_i^* dans l'équation d'état limite $g(u^*)=0$ et la résoudre pour obtenir β_{HL} .

Étape 6: En utilisant la valeur β_{HL} obtenue dans l'étape 5, réévaluer $u_i^* = -\alpha \beta_{HL}$

Étape 7: Répéter les étapes 3 à 6 jusqu'à ce que β_{HL} converge.

Cet algorithme est montré géométriquement sur la figure II.3. L'algorithme construit une approximation linéaire de la surface d'état limite en chaque point que l'on recherche, et trouve la distance de l'origine à l'état limite. Sur la figure II.3, le point B représente le point initial de conception, habituellement supposé être la valeur moyenne de la variable aléatoire, comme c'est le cas dans l'étape 2. Il est à noter que B n'est pas sur l'équation d'état limite $g(U)=0$. La tangente à l'état limite en B est représentée par la ligne BC. Alors AD donnera une évaluation de la valeur β_{HL} dans la première itération, comme c'est le cas dans l'étape 5. Pendant que l'itération continue, la valeur de β_{HL} converge. C'est une approche de premier ordre, semblable à la méthode MVFOSM, avec la différence importante que l'état limite est linéarisé au point de défaillance le plus probable plutôt qu'aux valeurs moyennes des variables aléatoires.

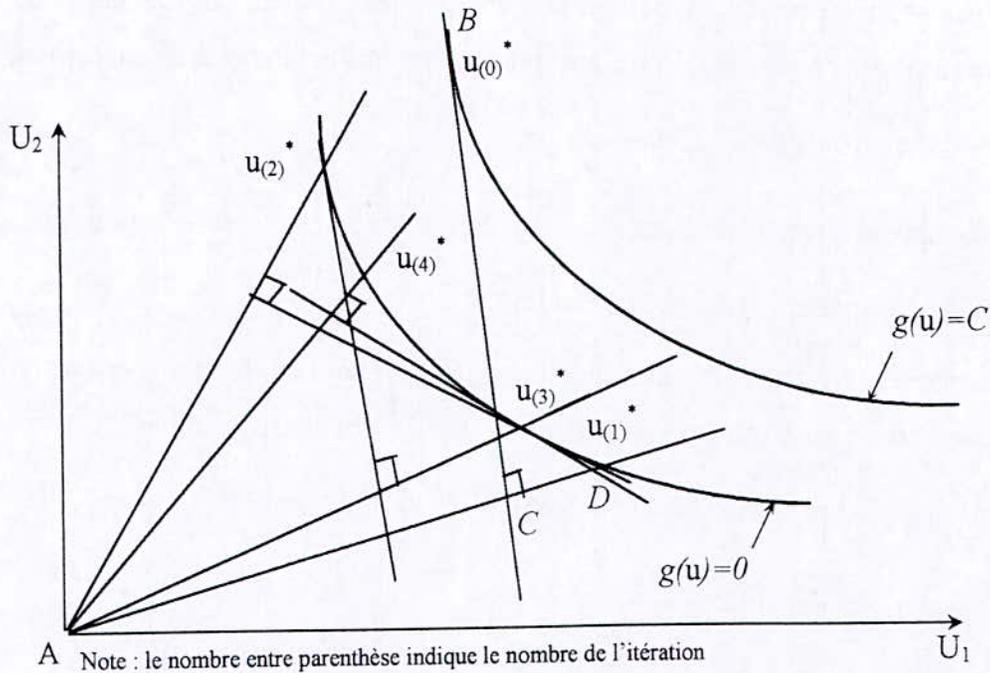


Figure II.3 – Méthode FORM 1 : surface d'état limite non linéaire[5]

Deux algorithmes d'optimisation sont généralement utilisés pour obtenir le point de conception et l'indice de fiabilité correspondant. Le premier (Rackwitz et Fiessler, 1976) qui requiert la solution de l'équation d'état limite pendant les itérations et désigné sous le nom de la méthode FORM 1. La deuxième méthode (Rackwitz et Fiessler, 1978) ne requiert pas la solution de l'équation d'état limite. Au lieu de cela, elle emploie une formule récursive de type Newton-Raphson pour trouver le point de conception. Cette méthode est désignée sous le nom de la méthode FORM 2.

II.1.3 Méthode FORM 1

Les étapes dans cette méthode pour estimer l'indice de fiabilité ou de sûreté seront expliquées plus tard, y compris le calcul des paramètres pour des variables normales équivalentes. Quelques améliorations de l'algorithme suggéré par Ayyub et Haldar (1984) sont incluses dans ces étapes [5].

Étape 1: Définir l'équation appropriée d'état limite.

Étape 2: Supposer une valeur initiale de l'indice de fiabilité β . N'importe quelle valeur β peut être supposée; si elle est choisie intelligemment, l'algorithme convergera dans très peu d'étapes. Une valeur initiale β de 3,0 est raisonnable.

Étape 3: supposer les valeurs initiales du point de conception x_i^* $i = 1, 2, \dots, n$. En l'absence d'autres informations, on peut supposer que le point initial de conception est la valeur moyenne des variables aléatoires.

Étape 4: Calculer l'écart type au point de conception de la distribution normale équivalente pour les variables qui ne sont pas normales.

Étape 5: Calculer les dérivées partielles $\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)^*$ évaluées au point de conception x_i^* .

Étape 6: Calculer les cosinus directeurs α_i au point de conception par l'équation:

$$\alpha_{X_i} = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)^* \sigma_{X_i}^N}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)^* \sigma_{X_i}^N}^2} \quad (\text{II.19})$$

Si les variables aléatoires sont normales, alors leurs écarts type peuvent être employés directement; autrement, on devra employer les écarts types équivalents au point de conception.

Étape 7: Calculer les nouvelles valeurs pour le point de contrôle x_i^* par :

$$x_i^* = \mu_{X_i}^N - \alpha_i \beta \sigma_{X_i}^N \quad (\text{II.20})$$

Si c'est nécessaire, répéter les étapes 4 à 7 jusqu'à ce que les évaluations des α_i convergent avec une tolérance prédéterminée. Un niveau de tolérance de 0,005 est commun. Une fois que les cosinus directeurs convergent, le nouveau point de contrôle peut être estimé, conservant β comme paramètre inconnu. Ce calcul additionnel peut améliorer la robustesse de l'algorithme. On note que l'acceptation d'une valeur initiale pour β dans l'étape 2 est nécessaire seulement pour ce calcul additionnel. Autrement, l'étape 2 peut être omise.

Étape 8: Calculer une valeur de mise à jour pour β utilisant la condition que l'équation d'état limite doit être satisfaite au nouveau point de contrôle.

Étape 9: Répéter les étapes 3 à 8 jusqu'à ce que β converge à un niveau de tolérance prédéterminé. Un niveau de tolérance de 0,001 peut être employé en particulier si l'algorithme est développé dans une configuration matricielle.

L'algorithme converge très rapidement, la majeure partie du temps à moins de 5 à 10 cycles, selon la non linéarité dans l'équation d'état limite. Le calcul nécessaire peut-être effectué par un programme informatique.

II 1.4 Méthode FORM 2

Nous noterons que dans l'étape 8 de la méthode FORM 1, l'équation d'état limite doit être résolue pour trouver le nouveau point de conception. Ceci peut être difficile dans le cas des fonctions g non linéaires. En outre, dans beaucoup de problèmes pratiques, la fonction g peut même ne pas être disponible sous une forme fermée. Dans ce cas, il est impossible d'exécuter l'étape 8, de ce fait on constate la limitation de la méthode FORM 1. Par conséquent, un algorithme alternatif est présenté par Newton-Raphson pour trouver le point de conception [5].

Cet algorithme, suggéré par Rackwitz et Fiessler (1978), est semblable à celui de la méthode FORM 1 car il linéarise la fonction de défaillance à chaque point d'itération. Cependant, au lieu de résoudre l'équation d'état limite explicitement pour β , il emploie les dérivées partielles pour trouver le prochain point d'itération. L'algorithme peut être mieux expliqué à l'aide du schéma (figure II.4). Nous considérerons la fonction d'état limite linéaire représentée sur ce schéma. Puisque l'état limite n'est pas disponible sous la forme fermée, le point de départ \mathbf{u}_0^* (le vecteur des valeurs moyennes des variables aléatoires) peut ne pas être sur l'état limite $g(U_1, U_2) = 0$ mais sur une ligne parallèle $g(U_1, U_2) = k$. Par conséquent, l'algorithme d'optimisation doit commencer à partir du point \mathbf{u}_0^* qui peut ne pas être sur l'état limite, et converger au point de distance minimum \mathbf{u}^* de l'état limite.

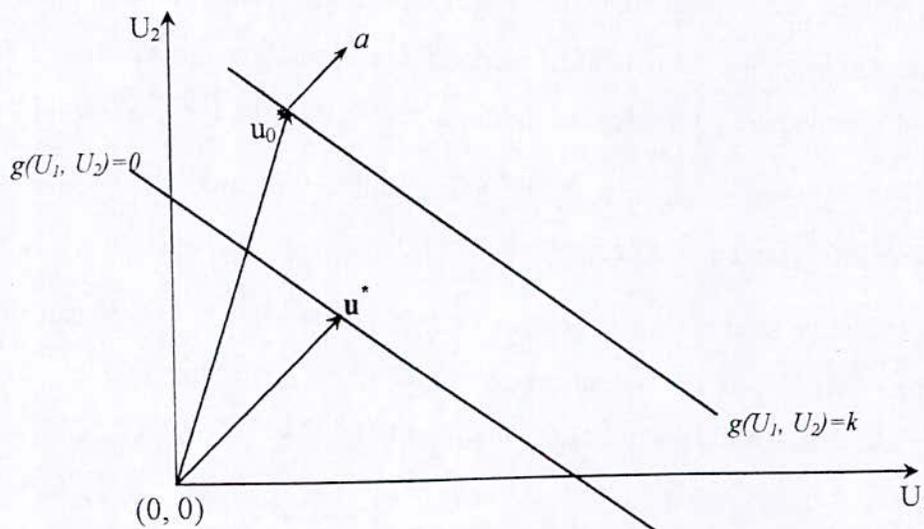


Figure II.4 - Méthode FORM 2 pour une fonction de défaillance linéaire [5]

La fonction linéaire de défaillance $g(x)$ peut être exprimé par :

$$g(u) = b + a^t u$$

$$g(u) = b + a_1 u_1 + a_2 u_2 \tag{II.21}$$

Ici $a^t = (a_1, a_2)$ est la transposition du vecteur gradient (c.-à-d., vecteur des premières dérivées partielles) de la fonction de défaillance. Les importances des vecteurs u_0^* et u^* indiquent la distance de l'origine au point de départ à l'état limite $g(U)=0$, respectivement. Géométriquement, u^* peut être exprimé en termes de u_0^* par :

$$u^* = \left[\frac{1}{|a|^2} a^t u_0^* - g(u_0^*) \right] \{a\} \tag{II.22}$$

La réécriture de cette équation en termes de composantes de tous les vecteurs donne :

$$\begin{Bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{Bmatrix} = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} [a_1 u_{01}^* + a_2 u_{02}^* - g(u_{01}^*, u_{02}^*)] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \tag{II.23}$$

Puisque la fonction d'état limite est linéaire, donc son gradient est constant. Par conséquent, la distance à l'état limite de l'origine est obtenue en une étape. Cette équation peut être généralisée pour une fonction de défaillance non linéaire telle que :

$$u_{k+1}^* = \frac{1}{|\nabla g(u_k^*)|^2} [\nabla g(u_k^*)^t u_k^* - g(u_k^*)] \nabla g(u_k^*) \tag{II.24}$$

Où $\nabla g(u_k^*)$ est le vecteur gradient de la fonction d'état limite à u_k^* , Le point de la k ème itération. Le vecteur u_k^* a pour composantes $\{u_{1k}^*, u_{2k}^*, \dots, u_{nk}^*\}^t$, où n est le nombre de variables aléatoires.

Si la fonction d'état limite n'est pas linéaire, le gradient n'est pas constant mais varie d'un point à un autre. Donc, au lieu d'une solution d'une étape, comme dans le cas d'une fonction linéaire, le point de distance minimale sera recherché en utilisant une formule récursive donnée en équation II.24. Cette formule peut-être illustrée par la figure II.5. A chaque itération, la fonction d'état limite est approximée par une tangente en ce point. La fonction d'état limite est linéarisée avec $g(u_k^*)$ et $\nabla g(u_k^*)$ correspondant à u_0^* et a , respectivement, dans l'équation II.22. Le point de l'itération suivante, u_{k+1}^* , est calculé de la même manière que pour le cas d'une fonction d'état limite linéaire. Si la fonction de défaillance est linéaire, u_{k+1}^* correspondra exactement à u_k^* , pour $k > 0$. Cependant si la fonction d'état limite n'est pas

linéaire, le gradient à \mathbf{u}^*_{k+1} est différent pour \mathbf{u}^*_k . Donc, on linéarise encore à \mathbf{u}^*_{k+1} et un autre point \mathbf{u}^*_{k+2} est calculé.

On répète l'algorithme jusqu'à la convergence, en satisfaisant ces deux critères :

1. Si $|\mathbf{u}^*_k - \mathbf{u}^*_{k-1}| \leq \delta$, stop.
2. Si $|g(\mathbf{u}^*_k)| \leq \varepsilon$, stop.

Où δ et ε sont très petit, environ 0,001.

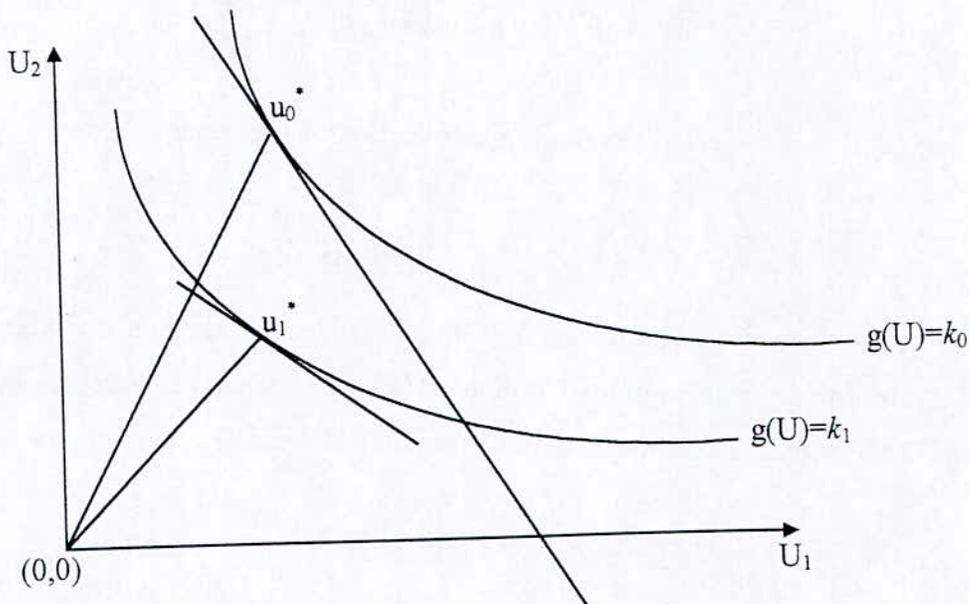


Figure II.5 –Méthode FORM 2 : fonction d'état limite non linéaire [5]

Semblable à la méthode FORM 1, la méthode FORM 2 peut être décrite comme suit : Les systèmes originaux du même rang, normaux standards ou réduits et équivalents sont employés dans cette méthode [5].

Étape 1: Définir la fonction de défaillance appropriée.

Étape 2: Supposer les valeurs initiales du point de conception x_i^* $i=1, 2, \dots, n$, et calculer la valeur correspondante de la fonction d'exécution $g()$. En l'absence d'autres informations, le point initial de conception peut avoir comme valeurs les valeurs moyennes des variables aléatoires.

Étape 3: Calculer l'écart type et la valeur moyenne au point de conception de la distribution normale équivalente pour ces variables qui ne sont pas normales. Les coordonnées du point de conception dans l'espace normal standard équivalent sont

$$u_i^* = \frac{x_i^* - \mu_{x_i}^N}{\sigma_{x_i}^N} \quad (\text{II.25})$$

Étape 4: Calculer la dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial X_i}$ évaluée au point de conception x_i^* .

Étape 5: Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial U_i}$ dans l'espace normal standard équivalent par la règle à chaînes de la différentiation par

$$\frac{\partial g}{\partial U_i} = \frac{\partial g}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial U_i} = \frac{\partial g}{\partial X_i} \sigma_{X_i}^N \quad (\text{II.26})$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial U_i}$ sont les composantes du vecteur gradient de la fonction de défaillance dans l'espace normal standard équivalent. Les composantes du vecteur unité correspondant sont les cosinus directeurs de la fonction de défaillance, calculés par

$$\alpha_i = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial U_i} \right)^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial U_i} \right)^{2*}}} = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^* \sigma_{X_i}^N}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \sigma_{X_i}^N \right)^{2*}}} \quad (\text{II.27})$$

On notera que c'est exactement la même formule que dans l'équation II.19.

Étape 6: Calculer les nouvelles valeurs u_i^* pour le point de conception dans l'espace normal standard équivalent.

Étape 7: Calculer la distance à ce nouveau point de conception de l'origine par

$$\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i^*)^2} \quad (\text{II.28})$$

Vérifier le critère de convergence pour β (c.-à-d., le changement de la valeur β entre deux itérations consécutives est plus petit qu'un niveau de tolérance prédéterminé.

Étape 8: calculer les nouvelles valeurs pour le point de conception dans l'espace original (x_i^*) par

$$x_i^* = \mu_{X_i}^N + \sigma_{X_i}^N u_i^* \quad (\text{II.29})$$

Calculer la valeur de la fonction de défaillance $g()$ pour ce nouveau point de conception, et vérifier le critère de convergence pour $g()$; c'est-à-dire, vérifier que la valeur $g()$ est très proche de zéro, moins de 0,001.

Si les deux critères de convergence sont satisfaits, arrêter. Autrement, répéter les étapes 3 à 8 jusqu'à la convergence.

II.1.5 Analyse de fiabilité de premier ordre avec des variables aléatoires corrélées et non normales

On a vu précédemment l'exécution d'une analyse de fiabilité de premier ordre pour des variables non corrélées et normalement distribuées. Dans ce qui suit il est décrit comment un indice de fiabilité β peut être déterminé quand les variables aléatoires sont corrélées et leur distribution n'est pas normale.

II.1.5.1 Indice de fiabilité dans le cas de variables corrélées normalement distribuées

Soit les variables aléatoires normalement distribuées $X_i, i = 1, \dots, n$ ayant pour valeurs moyennes $\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}$ et écarts type $\sigma_{X_1}, \dots, \sigma_{X_n}$ et avec des coefficients de corrélation $\rho_{ij}, i, j = 1, \dots, n$. Soit une fonction d'état limite $g(x)$ donné. Afin de déterminer un indice de fiabilité pour ce mode de ruine, une transformation des variables aléatoires corrélées en variables non corrélées est ajoutée au procédé décrit précédemment. Cette transformation peut être exécutée de plusieurs manières, par exemple par la détermination des valeurs propres et des vecteurs propres [7]. Le procédé suivant exige que la matrice de corrélation ρ soit définie positive.

On définit un vecteur de variables aléatoires corrélées X ayant pour matrice de covariance C_X et une matrice coefficient de corrélation ρ_X .

$$C_X = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & Cov(X_1, X_2) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & Cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_1) & \cdots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix}$$

$$\rho_X = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{X_1, X_2} & \cdots & \rho_{X_1, X_n} \\ \rho_{X_2, X_1} & 1 & \cdots & \rho_{X_2, X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{X_n, X_1} & \rho_{X_n, X_2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

La première étape consiste en la transformation des variables normales corrélées en variables non corrélées $Y_i, i = 1, \dots, n$ telle que :

$$Y = AX \quad (\text{II.30})$$

Cette transformation doit rendre la matrice de covariance du vecteur aléatoire Y purement diagonal :

$$\begin{aligned} C_Y &= \text{cov}(Y, Y) = \text{cov}(Y, Y^T) \\ &= \text{cov}(AX, X^T A^T) \\ &= A \text{cov}(X, X^T) A^T \\ C_Y &= A C_X A^T \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

On montre mathématiquement qu'une transformation de telle sorte implique que A est composée est la matrice des vecteurs propres de la matrice de corrélation C_X , et C_Y est composée des valeurs propres respectives[6].

Connaissant C_X il est alors possible de déterminer A et C_Y par n'importe quelle méthode proposée dans la littérature telle que la méthode de Jacobi pour obtenir les vecteurs propres de la matrice corrélation C_X et les valeurs propres associées.

A étant connu, les vecteurs non corrélé Y est défini par l'équation II.30 avec $E(Y) = AE(X)$ et $C_Y = AC_X A^T$.

Il faut ensuite écrire la fonction d'état en termes de Y à partir de la transformation II.30 et exprimer le vecteur gradient par rapport à Y . Les algorithmes précédemment élaborés peuvent alors être appliqués au vecteur aléatoire Y .

II.1.5.2 Indice de fiabilité dans le cas de variables indépendantes non normales

Généralement les variables aléatoires ne sont pas normalement distribuées. Afin de déterminer une mesure de la fiabilité d'un composant (mode de défaillance) avec des variables qui ne sont pas normalement distribuées, il est nécessaire d'établir, comme pour des variables normalement distribuées, une transformation dans l'espace réduit (non corrélé et normal) de ces variables afin de déterminer l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind [7].

Une transformation simple de X_1 à U_1 peut être définie par l'identité.

$$\Phi(U_i) = F_{X_i}(X_i) \quad (\text{II.32})$$

Où F est la fonction de répartition de X_i . En donnant une réalisation u de U , une réalisation x

$$\begin{aligned} \text{de } X \text{ peut être obtenue par : } & \quad \begin{aligned} x_1 &= F_{X_1}^{-1}(\Phi(u_1)) \\ &\vdots \\ x_n &= F_{X_n}^{-1}(\Phi(u_n)) \end{aligned} \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

Et la surface d'état limite peut être écrite :

$$g(x_1, \dots, x_n) = g(F_{X_1}^{-1}(\Phi(u_1)), \dots, F_{X_n}^{-1}(\Phi(u_n))) = 0 \quad (\text{II.34})$$

Dans l'algorithme servant à la détermination de β (voir section II.1.2) On a besoin du vecteur gradient de la fonction de défaillance en fonction des coordonnées u_i . De l'équation précédente on obtient :

$$\frac{\partial g}{\partial u_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot \frac{\varphi(\Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i)))}{f_{X_i}(x_i)} \quad (\text{II.35})$$

Avec $f_{X_i}(x_i) = \frac{dF_{X_i}(x_i)}{dx_i}$ la densité de probabilité de X_i [7].

II.1.5.3 Indice de fiabilité dans le cas de variables dépendantes non normales

Deux techniques peuvent être employées pour déterminer un indice de fiabilité quand les variables aléatoires sont dépendantes et leur distribution n'est pas normale, c'est des méthodes basées sur la transformation de Rosenblatt et la transformation de Nataf [6].

II.2 Méthode de fiabilité du second ordre SORM (*Second Order Reliability Method*)

Comparé à une évaluation FORM de la fiabilité d'un composant (ou d'un mode de défaillance), une évaluation améliorée peut être obtenue en employant une approximation du second degré de la surface d'état limite [3,5].

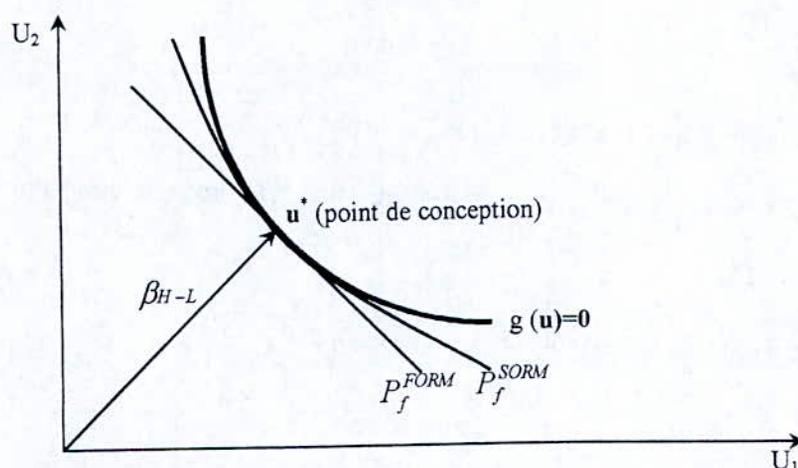


Figure II.7 : Illustration de l'approximation de premier et de second ordre de la surface d'état limite [7].

II.3 Analyse de sensibilité

Rappelons que le principal avantage de l'analyse probabiliste de la fiabilité des structures est la possibilité d'effectuer des analyses de sensibilité. Pour cela, on doit utiliser le second élément important donné par la méthode FORM, indépendamment de l'indice de fiabilité à savoir les « valeurs alpha » appelés facteurs de sensibilité :

$$\alpha_i = \frac{1}{\beta} u_i^* \quad (\text{II.36})$$

Ces dernières vont permettre de discriminer les variables influentes sur le calcul de l'indice de fiabilité, des variables peu importantes que l'on pourra fixer à une valeur déterministe (la valeur moyenne en général) [3].

Facteur de sensibilité - Facteur d'importance

On mesure ici l'importance globale d'une variable sur la probabilité calculée, et non seulement l'importance d'un paramètre isolé. Cette technique est typiquement fiabiliste, et permet d'identifier les notions de facteur de sensibilité, et de facteur d'importance.

On notera, toutefois, que cette démarche ne concerne que les variables probabilisées.

Les variable U_i désignent les transformées respectives des n variables de base X_i par la méthode de Rosenblatt [6].

On a :

$$u^* = \beta \alpha^* \quad (\text{II.37})$$

α^* est un vecteur normé dont les coordonnées α_i^* sont les cosinus directeurs. Il faut noter que le sens du vecteur α^* est défini par convention (on peut trouver ainsi dans la littérature $u^* = -\alpha\beta$).

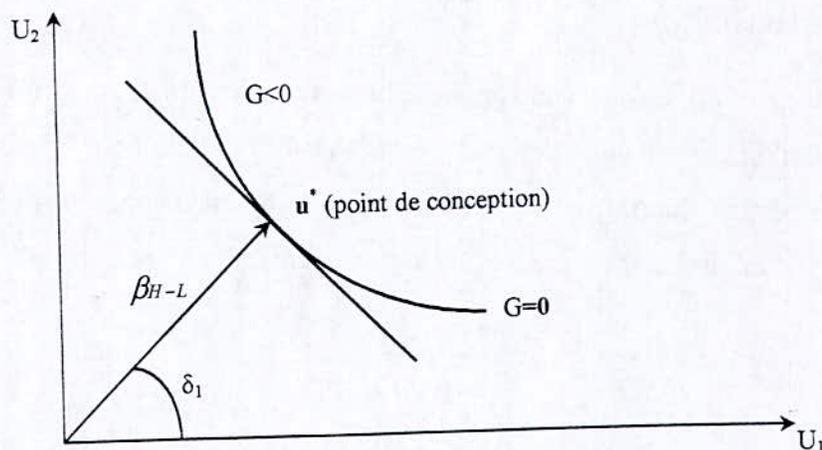
Le facteur de sensibilité de la variable X_i est défini par :

$$\alpha_i^* = \cos \delta_i \quad (\text{II.38})$$

α_i représente le facteur de sensibilité de β par rapport à la valeur moyenne de la variable.

Comme :

$$\beta = \left[\sum_{i=1}^n u_i^* \right]^{1/2} \quad (\text{II.39})$$



On a

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial u_i} \right|_{u^*} = \alpha_i \quad (\text{II.40})$$

Le facteur d'importance f_i de la variable X_i est défini comme le carré du facteur de sensibilité.

$$f_i = \alpha_i^2 \quad (\text{II.41})$$

Il mesure l'importance stochastique de la variable X_i . On remarque que la somme des facteurs d'importance est égale à 1.

De plus, on montre que le facteur d'importance α_i^2 peut être interprété comme la part de l'incertitude due à la variable X_i qui affecte la fonction d'état limite linéaire au point de conception. C'est une mesure de l'importance relative qu'il y a à modéliser une variable sous forme aléatoire, plutôt que de la prendre égale à sa valeur moyenne.

Ces notions sont définies dans l'espace transformé. Mais, elles ne dépendent pas de la transformation utilisée et, de ce fait, caractérisent bien les variables de base.

Elles sont définies à partir de grandeurs approchées (indice de fiabilité et point de conception) et sont asymptotiquement exactes pour les vrais probabilités.

On a :

$$\frac{\partial \beta}{\partial U_i}(\bar{z}^*) = \alpha_i \text{ ce qui montre bien que } \alpha_i \text{ correspond à un facteur de sensibilité.}$$

Si α_i^2 tend vers 0, alors la variable X_i peut être remplacée dans l'analyse probabiliste par sa valeur moyenne[3], et peut être ainsi considérée comme une variable déterminée.

Au contraire, si α_i^2 tend vers 1, on ne peut pas considérer que X_i est fixe sous peine de modifier profondément la probabilité calculée. Il convient de bien définir précisément l'incertitude qui l'affecte[3].

Le calcul des facteurs d'importance est restreint aux variables probabilisées ainsi que méthode utilisant une transformation d'espace, à savoir les méthodes FORM et SORM.

Conclusion

Soulignons qu'un point fondamental pour la mise en œuvre des méthodes de fiabilité FORM et SORM est la nécessité de pouvoir définir une fonction d'état limite $G(X)$ explicite des variables aléatoires X retenues.

Notons également que :

- Ces méthodes sont particulièrement efficaces lorsque la probabilité de défaillance est faible (généralement de 10^{-2} à 10^{-10}),
- Il n'y a pas de contrôle des erreurs d'approximation. Pour cela on compare les résultats obtenus par FORM et SORM. On vérifie généralement la pertinence des méthodes d'approximation utilisées par comparaison également avec d'autres méthodes (simulation Monté Carlo (chapitre III)),

- Ces méthodes fournissent directement des mesures de sensibilité aux paramètres contrôlés sur l'indice de fiabilité,
- La fonction d'état limite doit être différentiable (deux fois pour SORM). Les variables aléatoires doivent être continues.

CHAPITRE III : METHODES DE NIVEAU III

Introduction

Les méthodes de niveau III permettent d'estimer la probabilité de ruine de façon précise. En génie civil, compte tenu du nombre important de variables aléatoires et de la complexité des modèles mécaniques, ces méthodes sont souvent basées sur le principe des simulations de Monte Carlo, car l'intégration directe est impossible à effectuer [14].

Pour donner une première idée de la méthode de Monté Carlo, considérons le problème de l'intégration numérique. On sait qu'il existe de très nombreuses méthodes d'approximation numérique de l'intégrale :

$$\int_{[0,1]} f(x) dx \quad (\text{III.1})$$

Par des formules du type $\sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i)$, avec les ω_i qui sont des nombres positifs de somme 1 et x_i qui sont des points de l'intervalle $[0, 1]$. Par exemple, lorsque $\omega_0 = \omega_n = 1/(2n)$, $\omega_i = 1/n$ sinon, les points $x_i = i/n$ étant régulièrement répartis, on a affaire à la méthode de Gauss ou Simpson [12,13]. Une méthode de Monté Carlo est du même type : on choisit $\omega_i = 1/n$ et l'on tire les x_i au hasard (mais pas n'importe comment, il faut tirer les points selon la loi uniforme sur $[0, 1]$). Cette méthode converge avec une vitesse de l'ordre de K/\sqrt{n} .
 2Evidemment cette vitesse de convergence peut paraître faible si on la compare aux autres méthodes d'intégration en dimension 1. Mais toutes ces méthodes numériques s'effondrent lorsque la dimension augmente (il faut typiquement avoir n^d points, où d est la dimension, pour avoir une erreur constante). Le gros avantage de la méthode de Monté Carlo est d'être absolument insensible à la dimension [13].

III.1. Description de la méthode de Monté Carlo

On considère une variable aléatoire X telle une fonction définie dans un ensemble Ω qui prend ses valeurs dans un autre ensemble E . On note par ω un élément générique de Ω et la variable aléatoire X telle que:

$$X : \Omega \rightarrow E.$$

Pour utiliser la méthode de Monté Carlo on doit tout d'abord mettre sous forme d'une espérance la quantité que l'on cherche à calculer. C'est souvent simple, comme pour le cas

d'un calcul d'intégrale, mais cela peut être plus compliqué, comme lorsque l'on cherche à résoudre une équation parabolique, elliptique ou même un système linéaire.

A l'issue de cette étape, il reste à calculer une quantité de la forme $E(X)$, où X est une variable aléatoire. Pour pouvoir calculer $E(X)$ il convient de savoir simuler une variable aléatoire selon la loi de X . Mathématiquement, cela signifie que l'on suppose que l'on dispose de la réalisation d'une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_i, i \geq 1)$ suivant toutes la loi de X .

Informatiquement, on ramène la simulation d'une loi arbitraire à celle d'une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Il ne reste plus alors qu'à approximer $E(X)$ par :

$$E(X) \approx \frac{1}{N}(X_1 + X_2 + \dots + X_N) \quad (\text{III.2})$$

On va donner un exemple d'application de la méthode de Monté Carlo, au cas du calcul d'une intégrale, en détaillant les deux étapes citées : mise sous forme d'espérance et simulation de la variable aléatoire.

On cherche, par exemple, à calculer une intégrale de la forme :

$$I = \int_{[0,1]^d} f(u_1, \dots, u_d) du_1 \dots du_d \quad (\text{III.3})$$

On pose $X = f(U_1, \dots, U_d)$, où les U_1, \dots, U_d sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On a :

$$E(X) = E(f(U_1, \dots, U_d)) = \int_{[0,1]^d} f(u_1, \dots, u_d) du_1 \dots du_d,$$

Par définition des n-uplet, (U_1, \dots, U_d) . On vient de réaliser la première étape (mise sous forme d'espérance).

Pour la simulation, supposons que $(U_i, i \geq 1)$ soit une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ (obtenue par des appels successifs à une loi random) et posons $X_1 = f(U_1, \dots, U_d)$, $X_2 = f(U_{d+1}, \dots, U_{2d})$, etc. Alors la suite $(X_i, i \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de X et une bonne approximation de I est donnée par :

$$\frac{1}{N}(X_1 + X_2 + \dots + X_N) \quad (\text{III.4})$$

Une remarque importante est la très grande facilité de programmation de la méthode. Il est à noter aussi que l'applicabilité de cette méthode ne dépend pas de la régularité de f , qui peut être simplement mesurable.

Souvent, on cherche à évaluer une intégrale dans \mathbb{R}^d , plus générale, du type :

$$I = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(x_1, \dots, x_d)f(x_1, \dots, x_d)dx_1 \dots dx_d, \quad (\text{III.5})$$

Avec $f(x)$ positive et $\int f(x)dx = 1$. Alors I s'écrit sous la forme $E(g(X))$ si X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d de loi $f(x)dx$. On peut donc approcher I par :

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X_i), \quad (\text{III.6})$$

Dans notre cas, on cherche à estimer le nombre de fois qu'une variable aléatoire X est à valeurs dans un domaine de défaillance noté D^f , c'est-à-dire là où la fonction d'état limite $G(X)$ est inférieure à 0 ($G(X) \leq 0$). Ceci revient à calculer $E(G(X))$ et à évaluer la probabilité de ruine par :

$$P_f = \iiint \dots \int_{D^f} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (\text{III.7})$$

Donc si X est une variable aléatoire à valeurs dans D^f , on peut écrire :

$$P_f = \iiint \dots \int I(G(X) \leq 0) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (\text{III.8})$$

Ceci revient à exprimer la probabilité de ruine par :

$$P_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n I(G(X_i) \leq 0) \quad (\text{III.9})$$

Si $(X_i, i \geq 1)$ est un échantillon tiré selon la loi $f(x)dx$. Le problème est alors de savoir comment simuler une variable aléatoire selon cette loi. Ensuite, nous allons montrer quand et comment cet algorithme converge en employant les théorèmes de convergence, et l'idée que l'on peut se faire de la précision de l'approximation.

III.2 Simulation d'une variable aléatoire gaussienne

Une méthode classique pour simuler les variables aléatoires gaussiennes repose sur la constatation que, si (U_1, U_2) sont deux variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$ indépendantes :

$$(\sqrt{-2\log(U_1)} \cos(2\pi U_2), \sqrt{-2\log(U_1)} \sin(2\pi U_2)) \quad (\text{III.10})$$

est un couple de variables aléatoires indépendantes suivant des lois gaussiennes centrées réduites (i.e de moyenne nulle et de variance 1).

Pour simuler des gaussiennes de moyenne μ et de variance σ il suffit de poser $X = \mu + \sigma g$, où g est une gaussienne centrée réduite.

III.3 Convergence et limites de la méthode

On justifie la convergence de la méthode par la loi forte des grands nombres et l'on précise la vitesse de convergence par le théorème de la limite centrale.

III.3.1 La loi des grands nombres et la méthode de Monté Carlo

Théorème 1

Soit $(X_i, i \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi qu'une variable aléatoire X . On suppose que $E(|X|) < +\infty$. Alors, pour presque tout ω cela signifie qu'il existe $N \subset \Omega$, avec $P(N) = 0$ et que si $\omega \notin N$:

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} (X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)) \quad (\text{III.11})$$

Ce théorème impose une limite théorique aux méthodes de Monté Carlo : on ne peut l'utiliser que pour des variables aléatoires intégrables.

III.3.2 Théorème de la limite centrale et méthode de Monté Carlo

Pour avoir une idée de l'intérêt de la méthode il faut être en mesure d'évaluer l'erreur :

$$\varepsilon_n = E(X) - \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n) \quad (\text{III.12})$$

Le théorème de la limite centrale donne un asymptotique de l'erreur ε_n mais de nature aléatoire. Il dit que la loi de ε_n finit par ressembler à une loi gaussienne centrée.

Théorème 2

Soit $(X_i, i \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi qu'une variable aléatoire X . On suppose que $E(X^2) < +\infty$. On note σ^2 la variance de X :

$$\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 = E((X - E(X))^2) \quad (\text{III.13})$$

Alors :

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \varepsilon_n \text{ Converge vers } G$$

Où G est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Cela signifie que G est une variable aléatoire de loi $e^{-x^2/2} (dx/2\pi)$ et que si f est une fonction continue bornée,

$$E\left(f\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \varepsilon_n\right)\right) \text{ converge vers } E(f(G)).$$

Remarques

On peut déduire du théorème précédent que pour $c_1 < c_2$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} c_1 \leq \varepsilon_n \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} c_2\right) = \int_{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} c_1}^{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} c_2} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \quad (\text{III.14})$$

Dans les applications pratiques on « oublie le passage à la limite » et on remplace ε_n par une gaussienne centrée de variance σ^2/n .

Notons que le théorème de la limite centrale ne permet jamais de borner l'erreur, puisque le support de la gaussienne est égal à \mathbf{R} en entier. On présente souvent l'erreur de la méthode de Monté Carlo soit en donnant l'écart type de ε_n , c'est-à-dire σ/\sqrt{n} , soit en donnant un intervalle de confiance de 95% pour le résultat. Ceci signifie que le résultat cherché se trouve avec 95% de chance dans l'intervalle donné (et avec 5% de chance en dehors). Evidemment, la valeur de 95% peut être remplacée par n'importe quelle autre valeur proche de 1. Comme :

$$P(|G| \leq 1.96) \approx 0.95$$

On est conduit à un intervalle de confiance du type :

$$\left[\mu - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Il faut aussi noter la vitesse de convergence de l'erreur en $1/\sqrt{n}$, qui n'est pas dans l'absolu excellente. Cependant, il existe des cas où cette méthode lente est malgré tout la mieux accessible (intégration en dimension grande de l'ordre de 100, équation parabolique en dimension 50, ...). Il est aussi remarquable que la vitesse de convergence de la méthode, pour des calculs d'intégrales, ne dépende pas de la régularité de f .

III.4 Estimation de la variance d'un calcul

Le résultat précédent montre qu'il est important de connaître l'ordre de grandeur de la variance σ^2 de la variable aléatoire que l'on calcule à l'aide d'une méthode de Monté Carlo, puisque cela donne une idée de l'erreur de calcul. Il est facile d'estimer cette variance. On verra, plus loin, qu'il existe de nombreuses techniques de réduction de variance (dans certains cas, la mise en œuvre de ces techniques est indispensable si on veut obtenir un résultat fiable sans avoir à effectuer un nombre prohibitifs de réalisation).

Soit X_i des réalisations indépendantes selon la loi de X , on peut donc approcher I par \bar{I}_N avec :

$$\bar{I}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (\text{III.14})$$

Quand $N \rightarrow \infty$. Il est bien connu que l'on peut, aussi, obtenir un estimateur sans biais de la variance de X grâce à la formule :

$$V = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{I}_N)^2 \quad (\text{III.15})$$

V est souvent appelée la variance empirique de l'échantillon. On peut alors obtenir un intervalle de confiance à 95% en posant $\bar{\sigma} = \sqrt{V}$ et en remplaçant dans l'intervalle de confiance donné par le théorème de la limite centrale σ par $\bar{\sigma}$. On obtient ainsi un intervalle de confiance pour I :

$$\left[\bar{I}_N - \frac{2\bar{\sigma}}{\sqrt{N}}, \bar{I}_N + \frac{2\bar{\sigma}}{\sqrt{N}} \right]$$

On voit donc que, sans pratiquement aucun calcul supplémentaire, (simplement en évaluant $\bar{\sigma}$ sur l'échantillon déjà tiré), on a ainsi pu donner une estimation très souvent fiable de l'erreur d'approximation de I par \bar{I}_N . C'est une des grandes forces de la méthode de Monté Carlo que de donner une estimation réaliste de l'erreur à un coût minime.

III.5 Exemples

Exemple 1

Soit f une fonction mesurable définie sur $[0,1]$ et supposons que l'on cherche à calculer $p = \int_{\{f(x) \geq \lambda\}} dx$ pour une constante donnée λ . Introduisons la variable aléatoire $X = 1_{\{f(U) \geq \lambda\}}$ (où U est une variable aléatoire équadistribuée à valeurs dans $[0,1]$).

Alors $p = E(X)$, et $\sigma^2 = \text{Var}(X) = p(1-p)$. Donc, à l'issue de n tirages indépendants selon la loi de X , X_1, \dots, X_n on a :

$$p_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \approx p \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} G$$

Comme $p(1-p) \leq 1/4$, si l'on veut que l'écart type de l'erreur $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ soit majoré par 0.01, il convient de prendre n de l'ordre de 2500. Si l'on choisit, $n=2500$, l'intervalle de confiance à 95% pour p est alors, en utilisant le théorème de la limite centrale $[p_n - 1.96 \times 0.01, p_n + 1.96 \times 0.01]$. Si la valeur de p à estimer est de l'ordre de 0.50 ceci conduit à une erreur acceptable.

Par contre lorsque la valeur de p à estimer est très faible, le nombre de tirages précédent est très nettement insuffisant pour évaluer son ordre de grandeur par simulation. On doit prendre un nombre de tirages nettement supérieur à $1/p$.

Exemple 2

On cherche à calculer $E(\exp(\beta G))$, où G est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. Il est facile de vérifier que :

$$E = E(e^{\beta G}) = e^{\frac{\beta^2}{2}}$$

Si l'on applique dans ce cas une méthode de Monté Carlo, on pose $X = e^{\beta G}$. La variance de X vaut $\sigma^2 = e^{2\beta^2} - e^{\beta^2}$. Au bout de n tirages selon la loi de X , X_1, \dots, X_n on a :

$$E_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \approx E \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} G$$

La variable aléatoire G' suivant une loi normale centrée réduite. L'erreur relative moyenne est de l'ordre de $\frac{\sigma}{E\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{e^{\beta^2} - 1}{n}}$. Si l'on se fixe un ordre de grandeur de l'erreur ε à respecter, on voit qu'il convient de choisir $n \approx \frac{e^{\beta^2} - 1}{\varepsilon^2}$. Si $\varepsilon = 1$ et $\beta = 5$, cela donne $n = 7 \times 10^{10}$, ce qui est beaucoup (et même trop !). Voici, par exemple, le résultat donné par un programme qui cherche à estimer cette valeur dans le cas de $\beta=5$.

Valeur exacte	Valeur estimée ($n=100000$)	Intervalle de confiance estimé à 95%
268337	854267	[-467647 ; 2176181]

On constate que l'approximation est très décevante. Mais, et c'est important de le noter, l'intervalle de confiance calculé contient bien la valeur exacte. C'est le côté rassurant de la méthode de Monté Carlo : l'approximation est médiocre, mais on est au courant de sa qualité ! Cet exemple montre une des limites pratiques de la méthode de Monté Carlo lorsqu'on utilise des variables aléatoires de grande variance.

III.6 Méthodes de réduction de variance

Nous venons de voir que la vitesse de convergence de la méthode de Monté Carlo est de l'ordre de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Pour améliorer cette méthode il existe de nombreuses techniques, dites de réduction de variance, qui cherchent à diminuer la valeur de σ^2 . L'idée générale est de donner une autre représentation sous forme d'espérance de la quantité à calculer :

$$E(X) = E(Y), \quad (\text{III.16})$$

en cherchant à diminuer la variance. Nous allons passer en revue quelques unes de ces méthodes qui sont applicables dans pratiquement tous les cas de simulations.

III.6.1 Echantillonnage préférentiel ou fonction d'importance

Supposons que l'on cherche à calculer :

$$E(g(X)),$$

et que la loi de X soit $f(x)dx$ sur \mathbf{R} . La quantité que l'on cherche à évaluer vaut donc :

$$E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx \quad (\text{III.17})$$

Soit maintenant, \bar{f} la densité de probabilité d'une autre loi telle que $\bar{f} > 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x)dx = 1$, il est clair que $E(g(X))$ peut aussi s'écrire :

$$E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} \frac{g(x)f(x)}{\bar{f}(x)} \bar{f}(x)dx \quad (\text{III.18})$$

Cela signifie que $E(g(X)) = E\left(\frac{g(Y)f(Y)}{\bar{f}(Y)}\right)$, si Y suit la loi $\bar{f}(x)dx$ sous \mathbf{P} . On a donc une autre méthode de calcul $E(g(X))$ en utilisant n tirages de Y, Y_1, \dots, Y_n et approximant $E(g(X))$ par :

$$\frac{1}{n} \left(\frac{g(Y_1)f(Y_1)}{\bar{f}(Y_1)} + \dots + \frac{g(Y_n)f(Y_n)}{\bar{f}(Y_n)} \right) \quad (\text{III.19})$$

Si l'on pose $Z = g(Y)f(Y)/\bar{f}(Y)$, on aura amélioré l'algorithme si $\text{Var}(Z) < \text{Var}(g(X))$. Il est facile de calculer la variance de Z :

$$\text{Var}(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{g^2(x)f^2(x)}{\bar{f}(x)} dx - E(g(X))^2 \quad (\text{III.20})$$

Si $g(x) > 0$, on peut vérifier que, en prenant $\bar{f}(x) = (g(x)f(x))/(E(g(X)))$ on annule $\text{Var}(Z)$! Il ne faut pas trop donner d'importance à ce résultat car il repose sur le fait que l'on connaît $E(g(X))$, et c'est justement la quantité que l'on cherche à calculer.

Cela permet, cependant, de justifier l'heuristique suivante : prendre $\bar{f}(x)$ aussi proche que possible de $|g(x)f(x)|$ puis la normaliser (diviser par $\int \bar{f}(x)dx$) de façon à obtenir une densité dont la loi est facilement simulable. Evidemment, les contraintes que l'on s'impose sont largement contradictoires et rendent cet exercice souvent délicat.

Pour fixer les idées, donnons un exemple. Supposons que l'on veuille calculer :

$$\int_0^1 \cos(\pi x / 2) dx$$

Cela correspond à $g(x) = \cos(x)$ et $f(x) = 1_{[0,1]}(x)$. On peut alors approcher le cos par un polynôme du second degré. Comme le cos est pair, vaut 0 en $x=1$ et 1 en $x=0$, il est naturel de

prendre $\bar{f}(x)$ de la forme $\lambda(1-x^2)$. En normalisant on obtient $\bar{f}(x) = (1-x^2)/3$. En calculant les variances, on peut constater que cette méthode a réduit la variance d'un facteur 100.

III.6.2 Variables de contrôle

Dans sa version la plus simple, il s'agit d'écrire $E(f(X))$ sous la forme :

$$E(f(X)) = E(f(X) - h(X)) + E(h(X)) \quad (\text{III.21})$$

Avec $E(h(X))$ qui peut se calculer explicitement et $\text{Var}(f(X) - h(X))$ sensiblement plus petit que $\text{Var}(f(X))$. On utilise alors une méthode de Monté Carlo pour évaluer $E(f(X) - h(X))$ et le calcul direct pour $E(h(X))$.

Par exemple, supposons que l'on veuille calculer $\int_0^1 e^x dx$. Comme au voisinage de 0, $e^x \approx 1+x$ on peut écrire

$$\int_0^1 e^x dx = \int_0^1 (e^x - 1 - x) dx + \frac{3}{2}$$

Il est facile de vérifier que la variance de la méthode diminue alors sensiblement.

III.6.3 Variables antithétiques

Supposons que l'on cherche à calculer :

$$I = \int_0^1 f(x) dx \quad (\text{III.22})$$

Comme $x \rightarrow 1-x$ laisse invariante la mesure dx , on a aussi :

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 (f(x) + f(1-x)) dx \quad (\text{III.23})$$

On peut donc calculer I de la façon suivante. On tire n variables aléatoires U_1, \dots, U_n suivant une loi uniforme sur $[0,1]$ et indépendantes, et on approxime I par :

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} (f(U_1) + f(1-U_1)) + \dots + \frac{1}{2} (f(U_n) + f(1-U_n)) \right) \\ &= \frac{1}{2n} (f(U_1) + f(1-U_1) + \dots + f(U_n) + f(1-U_n)) \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Lorsque l'on compare cette méthode à une méthode de Monté Carlo directe à l'issue de $2n$ tirages, on peut montrer que si la fonction f est continue monotone, la qualité de l'approximation s'améliore.

On peut généraliser ce genre d'idée en dimension supérieure et à d'autres transformations préservant la loi de la variable aléatoire.

III.7 Adaptation de la méthode Monté Carlo au calcul des faibles probabilités de ruine

La méthode de Monté Carlo est très peu performante pour l'estimation des faibles probabilités ; nous allons étudier les diverses améliorations apportées à cette méthode, en plus de celles citées dans la section (III.6), en vue de son application en Génie Civil.

Les règlements actuellement en vigueur, conduisent à dimensionner des ouvrages dont la probabilité d'atteinte d'un état limite est de l'ordre de 10^{-3} pour un état limite de service, à 10^{-6} pour un état limite ultime [1].

Les probabilités à calculer sont donc très faibles. Or la méthode de Monté Carlo classique est basée sur un comptage des structures ayant franchi l'état limite. Une probabilité de 10^{-6} ne peut donc être estimée qu'avec plus de 10^8 simulations ; compte tenu du temps de calcul actuel d'une structure, un tel nombre de simulations n'est pas envisageable.

Notre but sera donc de réduire le nombre de simulations lors de l'évaluation de la probabilité de ruine d'une structure. Plusieurs techniques vont être présentées afin d'atteindre cet objectif.

III.7.1 Dissociation des variables de sortie

Dans la plupart des cas, il n'existe pas de corrélations entre les variables de base intervenant dans la résistance de la structure et celles intervenant dans la sollicitation []. La densité de probabilité $f_X(X)$ peut alors être écrite en tout point de l'espace en fonction des variables de sortie du modèle :

$$f_X(x) = f_R(R) \times f_S(S) \quad (\text{III.25})$$

R est la variable représentant la résistance de densité de probabilité $f_R(r)$

S est la variable représentant la sollicitation de densité de probabilité $f_S(s)$

Il est alors possible d'écrire [1] :

$$P(X \in D_f) = P(R < S) = \int_{D_f} f_R(r) f_S(s) dR dS = \int_{R \min}^{R \max} f_R(R) \underbrace{\int_{S \min}^R f_S(s) dS}_{[1-F_S(R)]} dR \quad (\text{III.26})$$

Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_f = \int_{R \min}^{R \max} f_R(R) [1 - F_S(R)] dR \\ \text{ou bien} \\ P_f = \int_{S \min}^{S \max} f_S(S) [F_R(S)] dS \end{array} \right. \quad (\text{III.27})$$

De ces dernières équations, on voit que la probabilité de ruine apparaît comme l'intégrale d'un produit de densités de probabilité. Si la probabilité de ruine est faible, cela vient du fait que ces densités sont faibles, donc difficiles à obtenir par simulation de Monté Carlo. Chacune de ces densités est toutefois moins faible que le produit des deux ; donc les densités individuelles sont plus faciles à tracer que la densité jointe. De plus, le tracé des densités de résistance est souvent plus lourd que celui des sollicitations [1]. En effet, les modèles de résistance des matériaux sont souvent beaucoup plus complexes que les modèles de sollicitation. Il est donc plus facile de faire des simulations sur S que sur R .

Le principe de dissociation consiste alors à effectuer plus de simulations sur S que sur R , ce qui permet de tracer les densités de S de façon précise et de chercher une convergence de l'estimateur de P_f en faisant le moins de simulation sur R .

Parfois, la fonction de répartition des sollicitations a une forme analytique, les simulations ne concernent alors que la variable R et l'estimateur s'écrit [1] :

$$\hat{P}_f = \frac{1}{n \text{sim}_R} \sum_{i=1}^{n \text{sim}_R} 1_R [1 - F_S(R)] \quad (\text{III.28})$$

Dans cette expression, $n \text{sim}$ représente le nombre de simulations sur la variable R , 1_R est l'indicateur de ruine de la structure.

La principale limite d'application de cette méthode est liée à la vérification de l'hypothèse d'indépendance statistique des variables R et S .

Lorsqu'elle est applicable, cette méthode permet de diminuer le nombre de simulation sur les résistances dans un rapport de 1 à $\frac{1}{\sqrt{P_f}}$, soit environ 1000 simulations pour estimer une probabilité de l'ordre de 10^{-6} [1].

III.7.2 Les méthodes conditionnelles

Ces méthodes sont basées pour la plupart sur les résultats obtenus par FORM et SORM. Ceci dans le but d'avoir les avantages des tirages de Monté Carlo en convergeant vers un résultat exact, mais avec un nombre de simulation moins important. A travers une recherche bibliographique nous pourrions trouver plusieurs méthodes à travers la multitude qui se trouvent dans les ouvrages. Parmi celles-ci nous choisirons trois que nous programmerons afin de les tester.

III.7.2.1 Principe du conditionnement probabiliste

On considère B_n un sous domaine de R_n tel que B_n et D_f n'aient aucun élément en commun. P_f peut alors s'écrire comme étant le produit d'une probabilité conditionnelle et d'une probabilité d'appartenir à ce sous domaine [1,9] (voir figure III.1)

On note

$$B_n^c = R_n - B_n \quad (\text{III.29})$$

On aura :

$$P(X \in D_f) = P(X \in D_f \cap X \in B_n^c) = \underbrace{P(X \in D_f / X \in B_n^c)}_{P1} \times \underbrace{P(X \in B_n^c)}_{P2} \quad (\text{III.30})$$

« / » est l'opérateur probabiliste des événements conditionnels.

Ainsi on peut écrire :

$$P_f = P1 * P2 \quad (\text{III.31})$$

Calcul de P1

$$P1 = P(X \in D_f / X \in B_n^c) \quad (\text{III.32})$$

$P1$ est alors obtenue par simulation de Monté Carlo. Ces simulations seront conditionnées par l'appartenance de X à B_n^c . Elles seront alors forcément moins nombreuses que lors d'un calcul par simulations directes, puisque $P1 < P_f$.

Calcul de P2

P2 est obtenue analytiquement moyennant certains calculs préliminaires que l'on va développer ci-après.

L'hypersphère B_n, centrée en 0 de rayon β (indice de fiabilité) satisfait à la définition de B_n.

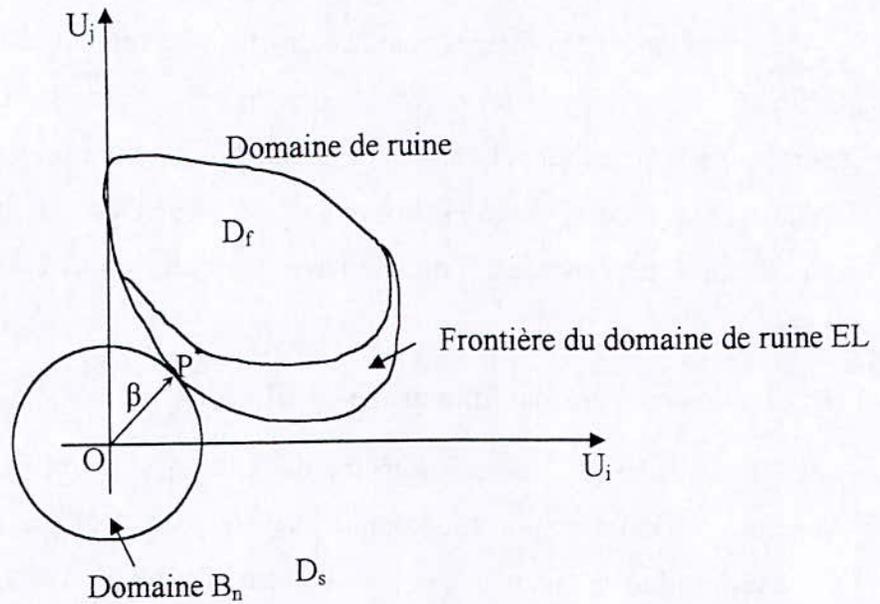


Figure III.1 : Schéma du domaine B_n []

La probabilité de trouver X à l'intérieur du domaine B_n est égale à la probabilité pour que la norme de U soit inférieure à l'indice de fiabilité β :

$$P2 = P(\|U\|^2 < \beta^2) \quad (III.33)$$

La détermination de P2 est donc immédiate dès lors que l'on connaît β.

La détermination de P_f se fait donc en trois étapes :

1. Recherche de l'indice de sûreté β et calcul de P2.
2. Simulation de Monté Carlo conditionnées pour le calcul de P1,
3. Calcul de P_f = P1 * P2

$$(III.34)$$

Les simulations conditionnées sont faites par simulation de vecteurs aléatoires. On ne retient que ceux dont la norme est supérieure à l'indice de fiabilité. C'est la méthode de réjection.

Le conditionnement repose sur le fait qu'il supprime les tirages inutiles dans une zone où le nombre de tirages aurait été important.

L'efficacité du conditionnement est d'autant plus grande que la probabilité $P2$ est petite car $P1$ est alors grande.

De plus, l'utilisation du conditionnement sera liée au temps de calcul de β . En effet le conditionnement n'est intéressant que si la quantité de calcul nécessaire pour déterminer β reste raisonnable en regard du nombre de simulations gagnées par le conditionnement.

III.7.2.2 Optimisation par conditionnement probabiliste

La méthode du conditionnement permet de diminuer le nombre de simulations aléatoires grâce au calcul préalable de l'indice de fiabilité β de la structure considérée. Il est également possible d'utiliser le conditionnement en tant que méthode de recherche de β :

Supposons que l'hyper sphère de conditionnement est inférieure à β (figure III.2), la valeur de P_f reste exacte car le domaine de ruine est correctement mesuré par la probabilité $P1$. Par contre, si le rayon de la sphère de conditionnement est supérieur à β , alors la mesure du domaine de ruine est incomplète puisqu'il manque l'intersection $Err = D_f \cap B_n$. La probabilité de ruine $P_f = P1 * P2$ est alors sous estimée [1]. La figure III.3 qui trace $P1.P2$ illustre cette constatation.

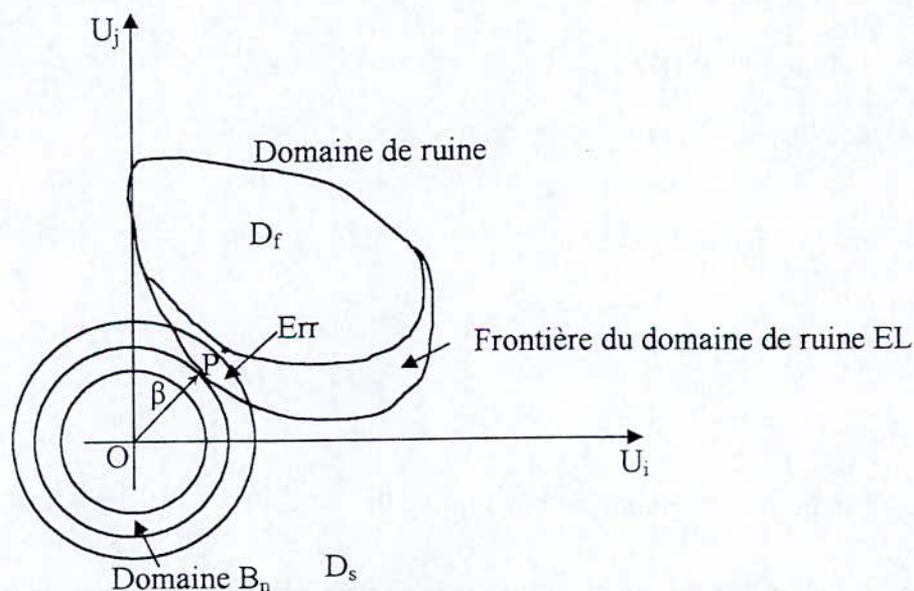


Figure III.2 : Variation du rayon de la sphère de conditionnement [9]

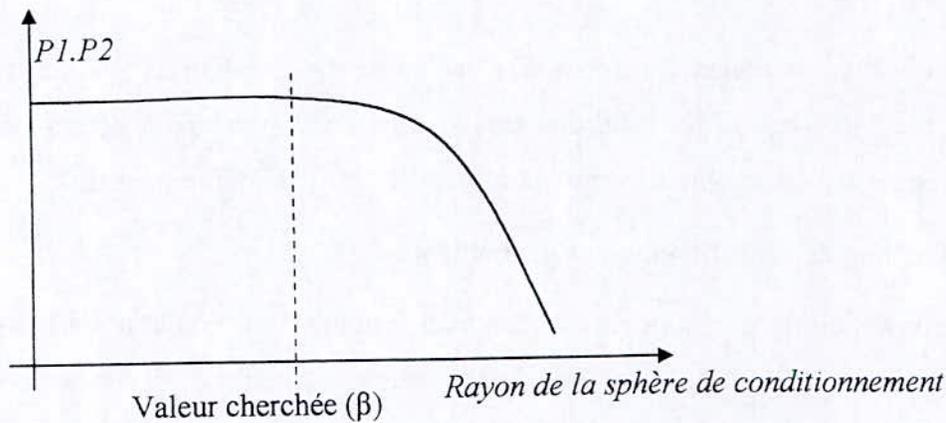


Figure III.3 : Optimisation par tirage conditionné [1]

Le tracé de $P1.P2$ en fonction du rayon de la sphère de conditionnement est donc une méthode d'optimisation adaptée à la résolution des problèmes de minimisation sous contrainte d'égalité. Elle peut être utilisée pour la vérification de l'indice de sûreté ou pour tout autre problème de d'optimisation de ce type [1].

III.7.3 Tirage d'importance

C'est une méthode classique de réduction de variance par tirage d'importance.

Pour cela écrivons l'intégrale P_f comme suit :

$$P_f = \int_{R^n} 1_{H(D_f)} f_u(u) du = \int_{R^n} 1_{H(D_f)} \frac{f_u(u)}{f_{\bar{u}}(u)} f_{\bar{u}}(u) du = \int_{R^n} \left\{ 1_{H(D_f)} \frac{f_u(u)}{f_{\bar{u}}(u)} \right\} f_{\bar{u}}(u) du \quad (\text{III.35})$$

$f_{\bar{u}}(u)$ est la densité du tirage de U.

$f_u(u)$ est la densité réelle de U.

$1_{H(D_f)}$ est l'indicateur d'atteinte de l'état limite de ruine, il vaut 1 s'il y a ruine sinon 0.

La densité de U est représentée par des iso - densités coaxiales. La densité de tirage, quant à elle peut être choisie arbitrairement. Nous la choisissons telle qu'elle augmente les densités de tirages de façon importante autour de P^* (point de conception) [1,6]. On utilise une densité de tirage gaussienne à composantes indépendantes centrées sur P^* et réduite, soit :

$$f_{\bar{u}}(u) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{-(u - u^*)'(u - u^*)}{2}\right) \quad (\text{III.36})$$

Avec $u^* = OP^*$

Pratiquement, simuler des vecteurs aléatoires u suivant cette densité, revient à construire des vecteurs \tilde{u} , de densité normales indépendantes centrées réduites, et à déduire :

$$u = u^* + \tilde{u} \quad (\text{III.37})$$

Dans cette expression u^* est le vecteur OP^* de norme β .

Le choix de cette densité de tirage conduit à :

$$P_f = \int_{R^n} 1_{H(D_f)} \frac{f_u(u)}{f_{\tilde{u}}(u)} f_{\tilde{u}}(u) du \quad (\text{III.38})$$

$$P_f = \int_{R^n} 1_{H(D_f)} \exp(u \times u^* - \frac{\beta^2}{2}) f_{\tilde{u}}(u) du$$

Un estimateur de P_f est alors :

$$P_f = \frac{1}{nsim} \sum_{i=1}^{nsim} 1_{H(D_f)} \exp(-u_i' \times u^* - \frac{\beta^2}{2}) \quad (\text{III.39})$$

Où $1_{H(D_f)}$ est l'indicateur de ruine [1,6,9].

Cette expression fait intervenir les coordonnées du point de conception ainsi que l'indice de Hasofer Lind, u_i est la i ème simulation du vecteur U .

Cette méthode, tout comme la méthode du tirage conditionné, nécessite la détermination préalable du point de conception.

En pratique, le point de conception est systématiquement calculé car l'indice de fiabilité β est la mesure de sécurité la plus utilisée en fiabilité des structures. La méthode proposée ici constitue alors un complément aux méthodes de niveau II. En effet, partant des résultats de niveau II, elle permet d'atteindre, pour quelques simulations complémentaires, un niveau de précision de type III.

III.7.4 Tirage d'importance conditionné

Les méthodes que nous venons d'exposer peuvent être couplées pour déterminer P_f . Elles sont couplées de façon à bénéficier simultanément de leur effet accélérateur de convergence. Nous avons vu qu'il est possible de coupler la méthode de dissociation et la méthode du tirage conditionné. La méthode obtenue permet de coupler la méthode de dissociation et la méthode du tirage conditionné. La méthode obtenue permet une accélération de convergence, mais elle n'est applicable que dans le cas où les variables aléatoires de sortie du modèle (R, S), sont

indépendantes. Dans le cas où cette hypothèse n'est pas vérifiée, seuls le conditionnement et le tirage d'importance sont utilisables [1,9]. Il est alors possible de coupler ces deux méthodes de façon à accélérer la convergence de l'estimateur P_f .

On Obtient une méthode qui consiste à n'effectuer des tirages aléatoires qu'en dehors de l'hypersphère de rayon β et à favoriser les tirages au voisinage du point de conception P^* , figure III.4.

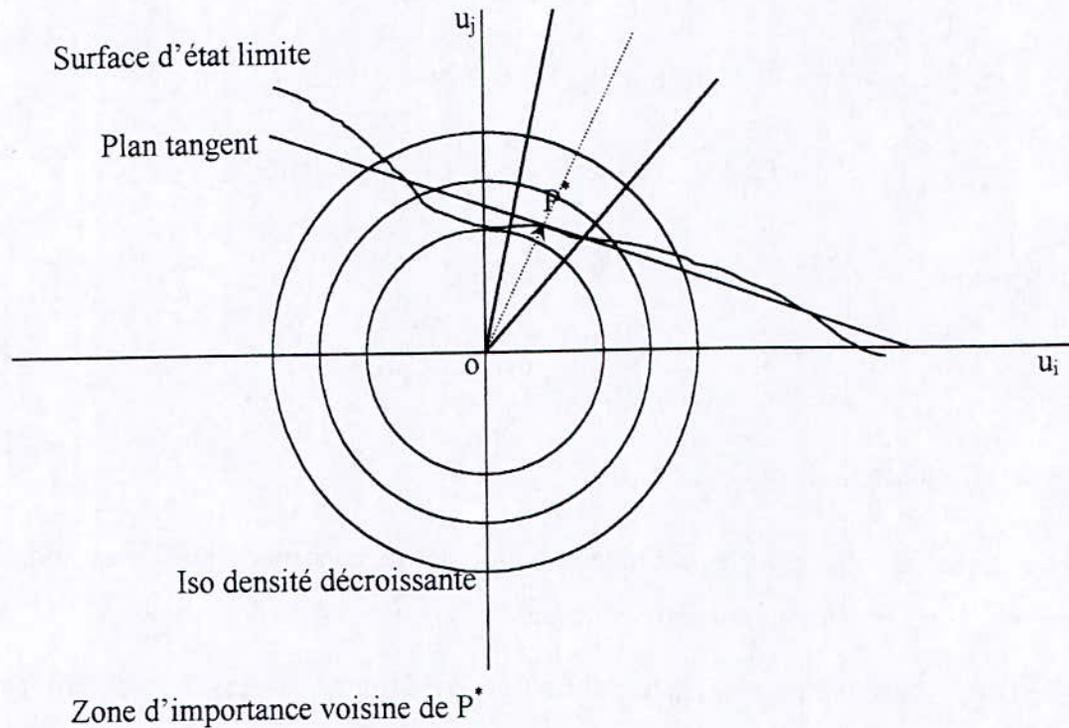


Figure III.4 : Zone d'importance pour le calcul de P_f [1]

La probabilité de ruine s'écrit :

$$P_f = P1.P2 \text{ (Conditionnement)}$$

Avec :

$$P1 = P(u \in H(D_f) / u \in B_n^c(\beta)) \tag{III.41}$$

Notons :

$$\hat{u} = (u \in B_n^c(\beta)) \text{ C'est à dire conditionné.}$$

Alors :

$$P1 = P(\hat{u} \in H(D_f)) \quad (\text{III.42})$$

Soit :

$$P1 = \int_{R^n} 1_{(\hat{u} \in H(D_f))} f_{\hat{u}}(\hat{u}) d\hat{u} = \int_{R^n} 1_{(\hat{u} \in H(D_f))} \frac{f_{\hat{u}}(\hat{u})}{f_{\bar{u}}(\hat{u})} f_{\bar{u}}(\hat{u}) d\hat{u} \quad (\text{III.43})$$

Dans cette dernière expression, $P1$ est une probabilité de ruine conditionnée. Elle est estimée par :

$$\hat{P}1 = \frac{1}{nsim} \sum_{i=1}^{nsim} 1_{(\hat{u} \in H(D_f))} \exp(-\hat{u}' \times u^* - \frac{\beta^2}{2}) \quad (\text{III.44})$$

$P2$ est la probabilité pour qu'un point soit à l'extérieur de l'hypersphère de rayon β . Dans le cas où le conditionnement est effectué par une méthode de rejection, il vient :

$$P2 = P(u \in B_n^c(\beta)) \quad (\text{III.45})$$

Estimé par :

$$P2 = 1 - \frac{1}{nsim} \sum_{i=1}^{nsim} 1_{\text{si } u \in B_n(\beta)} \quad (\text{III.46})$$

Le couplage bénéficie donc de l'effet accélérateur de convergence du conditionnement puisque $P1 > P_f$, mais aussi de celui du tirage d'importance puisque la procédure de tirage favorise les réalisations au voisinage de P^* . Ces deux facteurs accélérateurs de convergence font tout deux appel à la détermination préalable de P^* , ce qui rentabilise au mieux les calculs nécessaires pour déterminer l'indice de fiabilité de Hasofer Lind.

Une illustration du tirage d'importance est donnée en figure III.5.

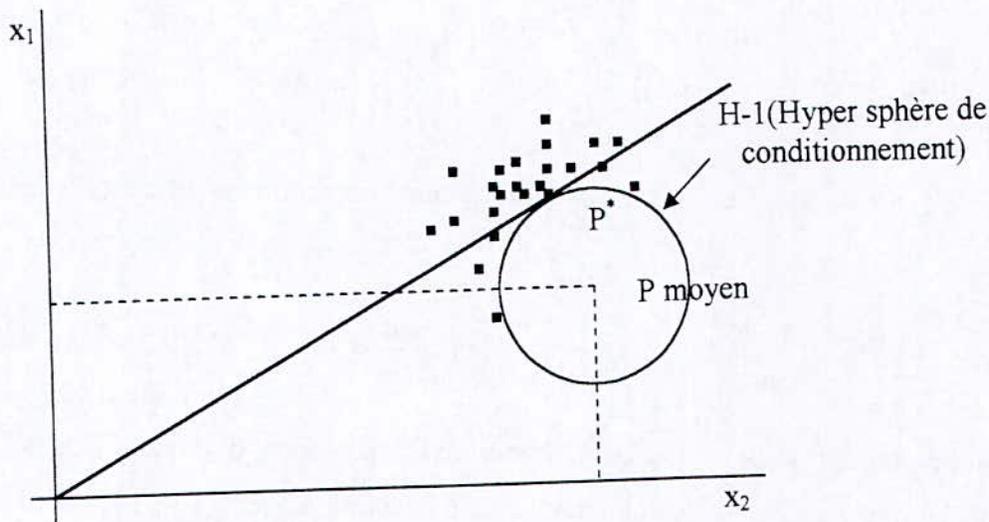


Figure III.5 : Tirage d'importance conditionné dans R^2

Le gain en terme de vitesse de convergence est le produit des gains dus au conditionnement d'une part et au tirage d'importance d'autre part. Le gain dû au conditionnement a déjà été présenté. Le gain dû au tirage d'importance est quant à lui étroitement lié à la courbure de la frontière du domaine de ruine au voisinage de P^* , la convergence la plus lente étant obtenue avec des frontières fortement concaves.

La mise en évidence de la convergence est faite à partir de la courbe de convergence de l'estimateur de P_f .

Conclusion

La méthode de Monté Carlo peut se révéler intéressante lorsque la probabilité de ruine n'est pas trop faible. Elle reste souvent le seul moyen de vérification de la pertinence des méthodes d'approximation. Son principal inconvénient est qu'elle soit coûteuse en temps de calcul et ne peut être utilisée lorsque le nombre de variables aléatoires est trop important. C'est à ce niveau qu'apparaît l'intérêt des méthodes conditionnelles. Celles-ci contribuent à la réduction de variance en utilisant un nombre de simulation raisonnable.

**CHAPITRE IV : CALCUL DES OUVRAGES DE
SOUTÈNEMENT**

Introduction

Le calcul des ouvrages de soutènement découle de l'étude de la rupture du terrain situé derrière l'ouvrage. Les murs de soutènement sont conçus pour reprendre les efforts dus à la pression latérale des terres. Ces structures peuvent être retrouvées dans plusieurs ouvrages de génie civil (structures hydrauliques, chemins de fer, autoroutes...). On distingue plusieurs sortes d'ouvrages tel que les murs poids (structure très lourde), les ouvrages en béton armé (murs cantilevers), les murs consoles, les murs chaises,....

Les forces latérales sur le mur sont engendrées par la pression latérale des terres. L'intensité et la distribution des pressions latérales sont évaluées par « la théorie des pressions latérales des terres ».

IV.1 Calcul des pressions des terres dans le cas statique

L'intensité et la pression latérale des terres varient considérablement avec le déplacement du mur et la nature du sol.

Si le mur est rigide, ce qui implique une très petite déformation, la pression des terres est appelée « pression des terres au repos » F_{repos} .

Si on écarte le mur du massif sol, l'action du massif sur le mur diminue suite à la décompression. Cette action est appelée « poussée ou pression active des terres » notée F_a . A un certain déplacement le sol n'est plus susceptible de se décompresser d'avantage. Il y a apparition de zones de rupture, une masse de sol suit le déplacement du mur. La pression active des terres indique la magnitude de la force qui peut être développée par un éloignement du mur de la masse sol qu'il est supposé retenir.

Si on déplace le mur contre la masse sol, la réaction du sol est appelée butée ou « pression passive des terres » notée F_p . Celle-ci indique la valeur maximale de la force que l'on peut développer par un mouvement de l'écran contre la masse sol.

On peut écrire l'inéquation suivante :

$$F_a < F_{repos} < F_p$$

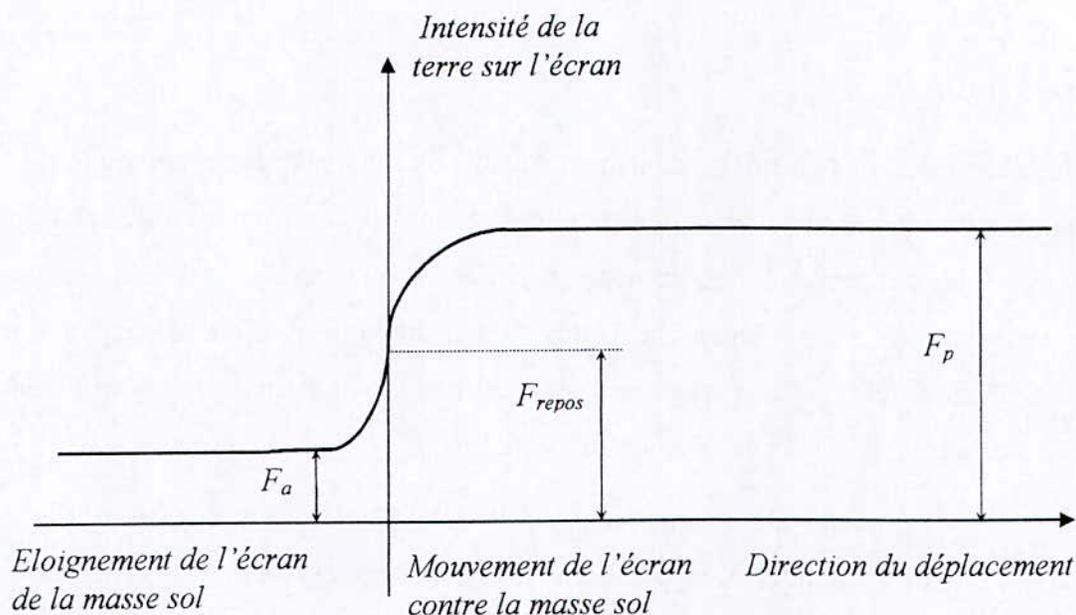


Figure IV.1 : Variation de la pression latérale des terres [15]

IV.1.1 Théorie de la pression des terres de Coulomb (1773)

L'expérience courante montre que les murs de soutènement gravitaires peuvent se déplacer, soit en translation, soit par rotation autour d'un axe situé sous leur base. Dans ces conditions, on constate qu'à la rupture, une fissure sensiblement rectiligne partage le massif en deux à partir du pied du mur. On a donné le nom de coin de glissement à la fraction du massif comprise entre le mur et la fissure. Ce coin accompagne le mur dans son déplacement.

C'est Coulomb, le premier à avoir mis au point une méthode de calcul des murs de soutènement. La méthode est basée sur l'étude de l'équilibre global du coin de glissement. Poncelet puis Culmann, au XIX^e siècle, ont développé cette théorie et proposé des constructions graphiques pour la détermination de la poussée.

Vu sa simplicité théorique et pratique, la méthode de Coulomb est considérée comme la plus utilisée actuellement.

La théorie de Coulomb est très célèbre dans le domaine ; son champ d'application dépasse nettement, sous certains traits, celui du schéma de Boussinesq. On peut même dire que dans certains cas, cette méthode est le seul procédé utilisable. Elle met en œuvre un procédé de raisonnement que l'on retrouve dans bien d'autres problèmes de mécanique des sols.

L'étude de Coulomb portant sur la pression latérale des terres repose sur un certain nombre d'hypothèses qui sont [15,16] :

1. Le sol derrière le mur est supposé sec, homogène, isotrope, non déformable et non cohésif ;
2. Si le mur se déplace, il y aura rupture de la masse sol derrière le mur. Cette masse de sol glisse comme un corps rigide le long de la surface de rupture sous l'action de la pesanteur ;
3. La surface de rupture est plane et passe par le point d'intersection de la face interne et de la base du mur ;
4. La masse de sol en mouvement est supposée rigide ;
5. Le long de la surface de rupture, la loi de frottement Newtonienne est valable $f = \frac{T}{N}$ avec $f = \tan \varphi$ est le coefficient de frottement ;
6. Le frottement est distribué uniformément le long de la surface du mur.

IV.1.1.1 Force active dans le cas d'un mur vertical

Pour le cas d'un mur vertical de hauteur H , retenant un sol sec de poids volumique γ et possédant un angle de frottement interne φ , le poids W du prisme de sol est :

$$W = \frac{1}{2} \frac{\gamma H^2}{\tan \rho} \quad (\text{IV.1})$$

Où ρ représente l'inclinaison de la surface de rupture relativement à l'horizontale (figure IV.2).

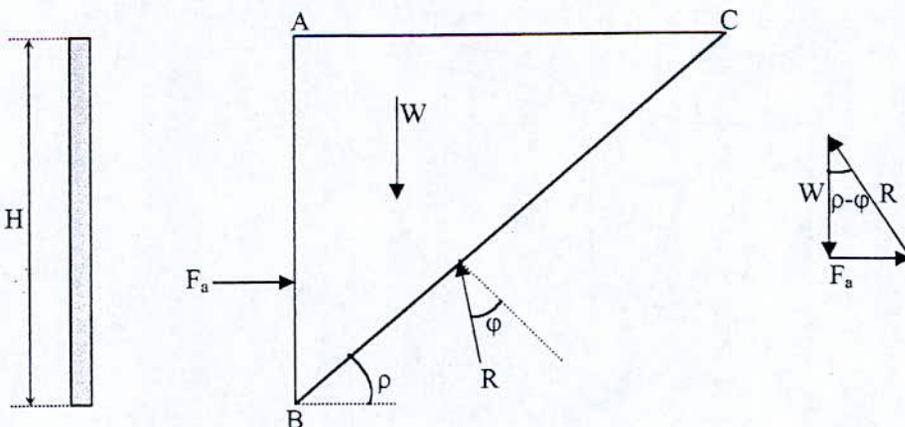


Figure IV.2 Coin de Coulomb

L'équilibre statique est vérifié, on a alors

$$R.W.\sin(\rho - \varphi) = R.F_a.\sin(\pi/2 - \rho + \varphi) \quad (\text{IV.2})$$

$$F_a = W \frac{\sin(\rho - \varphi)}{\cos(\rho - \varphi)} = \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{\text{tg}(\rho - \varphi)}{\text{tg} \rho} \quad (\text{IV.3})$$

L'extremum est obtenu lorsque $\frac{\partial F_a}{\partial \rho} = 0$

La valeur extrême de la force active F_a est obtenue lorsque $\rho = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$

$$F_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{\text{tg}\left(\frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{\pi + \varphi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{1}{2} \gamma H^2 \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_a \quad (\text{IV.4})$$

La théorie de Coulomb a permis d'estimer l'intensité de la force active. Toutefois, le point d'application de la force reste indéterminé. On admettra que cette force résulte d'actions élémentaires croissantes proportionnelles à la pesanteur. La force active des terres passe alors par le tiers inférieur[15].

IV.1.1.2 Cas générale

La théorie des pressions de Coulomb peut être généralisée pour inclure les inclinaisons du mur ou la surface libre et le frottement mur-sol.

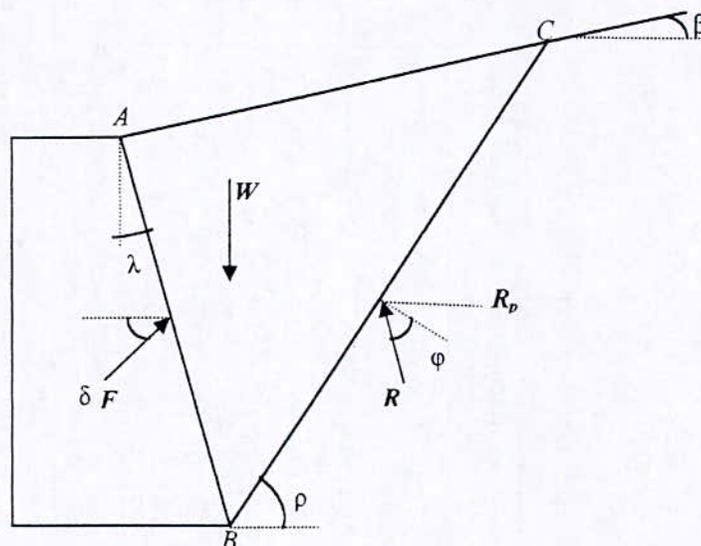


Figure IV.3 : Coin de Coulomb-Cas général[15]

La surface du triangle ABC est donnée par :

$$\text{Aire (ABC)} = \frac{H^2}{2} \frac{\cos(\beta - \lambda) \cdot \cos(\rho - \lambda)}{\cos^2 \lambda \cdot \sin(\rho - \beta)} \quad (\text{IV.5})$$

Le poids du W du prisme de sol délimité par ABC et par une épaisseur unitaire est donné par :

$$W = \frac{\gamma H^2}{2} \frac{\cos(\beta - \lambda) \cdot \cos(\rho - \lambda)}{\cos^2 \lambda \cdot \sin(\rho - \beta)} \quad (\text{IV.6})$$

L'intensité de la force résultante des pressions des terres qui s'exercent sur la structure de soutènement est évaluée à partir de l'équilibre statique des forces. On distingue deux équilibres selon que la structure de soutènement s'éloigne, ou bute, contre la masse sol. Ces deux équilibres permettent d'évaluer respectivement la force F_a de poussée ou les pressions actives des terres (la masse sol est active) et la force F_p de butée ou les pressions passives (la masse sol est passive).

L'équilibre statique limite permet d'exprimer la force active ou passive, résultante des pressions des terres sur la structure de soutènement en fonction de l'inclinaison ρ relativement à l'horizontale du plan de rupture dans la masse sol par :

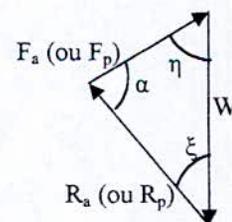
$$F_{a,p} = W \frac{\sin \xi}{\sin \alpha} = \frac{\gamma H^2}{2} \frac{\cos(\beta - \lambda) \cos(\rho - \lambda) \sin \xi}{\cos^2 \lambda \sin(\rho - \beta) \sin \alpha} \quad (\text{IV.7})$$

Dans le cas d'équilibre actif :

$$\xi = \rho - \varphi ; \text{ et } \alpha = \frac{\pi}{2} + \lambda + \delta + \varphi - \rho$$

Dans le cas d'équilibre passif :

$$\xi = \rho + \varphi ; \text{ Et } \alpha = \frac{\pi}{2} + \lambda - \delta - \varphi - \rho$$



L'intensité de la force active (ou passive) est obtenue à partir de la condition d'extremum

$$\frac{\partial F_a}{\partial \rho} = 0 \quad (\text{ou } \frac{\partial F_p}{\partial \rho} = 0). \text{ Cette dernière permet de localiser la surface de rupture dans la masse}$$

sol. Les forces actives et passives sont, respectivement, exprimées par [15]:

$$F_a = \frac{\gamma H^2}{2} K_a \quad (\text{IV.8})$$

Et :

$$F_p = \frac{\gamma H^2}{2} K_p \quad (\text{IV.9})$$

Où K_a et K_p sont des constantes dépendantes de la géométrie du mur et des propriétés mécaniques du sol et de l'interface mur sol. Ces constantes sont évaluées par :

$$K_a = \frac{\cos^2(\lambda - \varphi)}{\cos^2 \lambda \cos(\lambda + \delta) \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - \beta)}{\cos(\lambda + \delta) \cos(\beta - \lambda)}} \right]^2} \quad (\text{IV.10})$$

$$K_p = \frac{\cos^2(\lambda + \varphi)}{\cos^2 \lambda \cos(\lambda - \delta) \left[1 - \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi + \beta)}{\cos(\lambda - \delta) \cos(\beta - \lambda)}} \right]^2} \quad (\text{IV.11})$$

La théorie de Coulomb permet d'évaluer l'intensité de la force de poussée ou de butée sur la structure de soutènement. Le point d'application de la force reste indéterminé.

On admet que cette force résulte d'actions élémentaires croissantes avec la pesanteur. En conséquence, cette force passe par tiers inférieur.

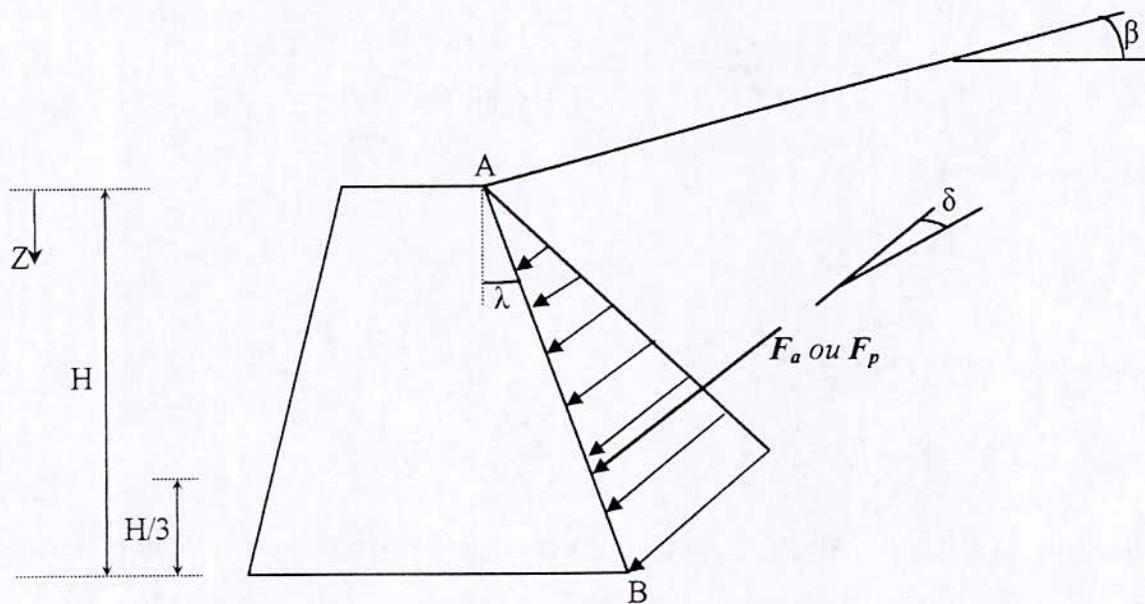


Figure IV.4 : Point d'application de la poussée (butée)[16]

IV.1.1.3 Effet de la surcharge uniforme

L'application d'une surcharge uniforme d'intensité q sur la surface libre résulte en un accroissement des pressions latérales des terres. Dans la théorie de Coulomb, l'effet de la surcharge est pris en considération à travers l'usage d'un poids volumique modifié du prisme de Coulomb [15].

Le poids modifié dw d'un élément infinitésimal de section dA est :

$$dw = \gamma dA + q ds \cos \beta \tag{IV.12}$$

β : Inclinaison de la surface libre

γ : Poids volumique du sol

$$dA = \frac{1}{2} h ds \rightarrow ds = 2 \frac{dA}{h} \tag{IV.13}$$

$$dw = \left(\gamma + 2q \frac{\cos \beta}{h} \right) dA = \gamma_1 dA \tag{IV.14}$$

γ_1 : Poids volumique modifié

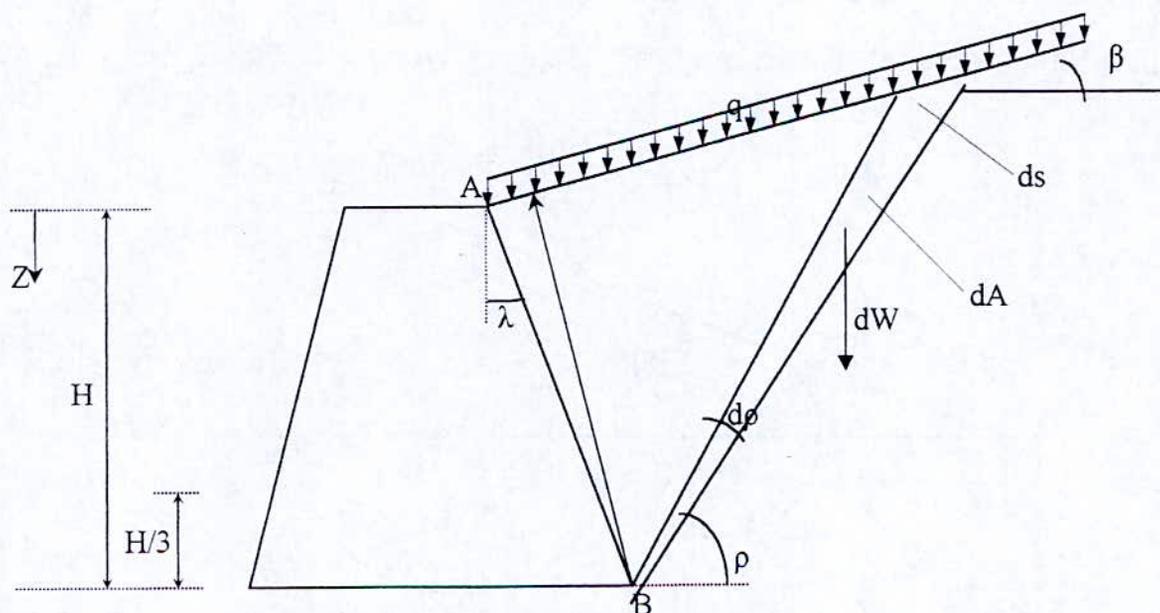


Figure IV.5 : Effet de la surcharge[15]

Dans le cas d'une surface libre plane d'inclinaison β relativement à l'horizontale :

$$h = H \frac{\cos(\beta - \lambda)}{\cos \lambda} \quad (\text{IV.15})$$

Le poids volumique modifié γ_1 est alors une constante :

$$\gamma_1 = \gamma + \frac{2q \cos \beta \cos \lambda}{H \cos(\beta - \lambda)} \quad (\text{IV.16})$$

La force active sur le mur s'exprime par :

$$F_a = \frac{1}{2} \gamma_1 H^2 K_a \quad (\text{IV.17})$$

IV.1.1.4 Effet de la nappe phréatique

De même que la surcharge, l'effet de la nappe phréatique est introduit à travers le poids volumique déjaugé. La théorie des pressions des terres permet l'évaluation de la force effective active ou passive. La force totale sur la structure est obtenue en rajoutant l'action de l'eau.

IV.1.2 Poussées des terres de Rankine-équilibre limite

IV.1.2.1 Cas d'une surface libre horizontale

L'état des contraintes au repos en un point à une profondeur z est représenté par le cercle de Mohr N°1. Cet état est caractérisé par une contrainte verticale $\sigma_z = \gamma z$ et une contrainte horizontale $\sigma_{x0} = K_0 \sigma_z$ représentant la pression latérale au repos (figure IV.5).

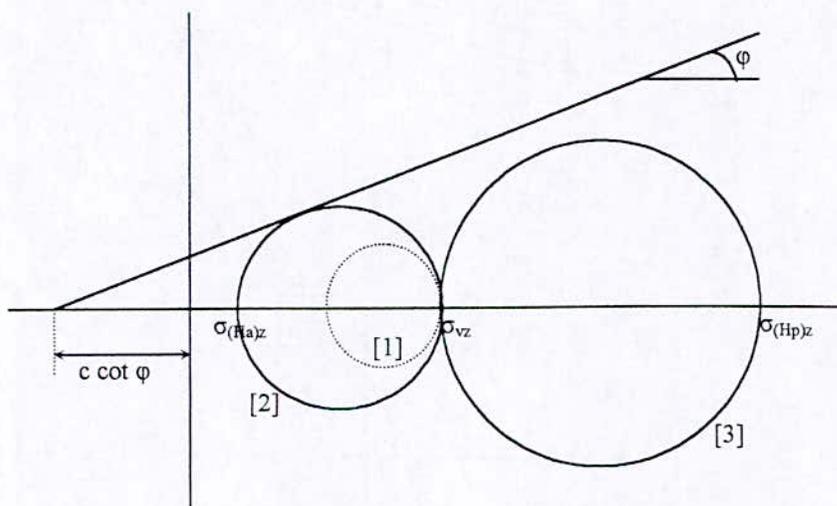


Figure IV.6 : Etat des contraintes dans le sol [15]

L'expansion latérale sous une contrainte verticale constante mobilise graduellement la résistance au cisaillement induisant par la même occasion une réduction de la pression latérale. Une mobilisation continue de la résistance au cisaillement tend à promouvoir un état d'équilibre limite - équilibre plastique. A l'état d'équilibre limite, la condition de rupture est satisfaite en tout point de la masse sol. Dans le cas d'une expansion latérale (état actif), la pression latérale des terres (pression active) à l'état d'équilibre limite est déduite du cercle de Mohr N°2 et s'exprime par [15] :

$$\sigma_{xa} = K_A \sigma_z - 2c\sqrt{K_A} \quad (\text{IV.18})$$

Où :

$K_A = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ est le coefficient des pressions actives des terres.

La surface de glissement pour laquelle la condition de rupture (critère de Coulomb-Mohr) est satisfaite fait un angle de $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$ avec le plan principal majeur (dans ce cas le plan horizontal). Le critère de Coulomb prévoit en tout point deux surfaces de glissement à $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ l'une de l'autre.

Une compression latérale sous une contrainte verticale constante mobilise aussi la résistance au cisaillement induisant par la même occasion une augmentation de la pression latérale susceptible d'induire un état d'équilibre limite dans la masse sol. Dans le cas d'une compression latérale (état passif), la pression latérale des terres (pression passive) à l'état d'équilibre limite est déduite du cercle de Mohr N°3 et s'exprime par :

$$\sigma_{xp} = K_p \sigma_z + 2c\sqrt{K_p} \quad (\text{IV.19})$$

Où :

$K_p = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$ est le coefficient des pressions passives des terres.

IV.1.2.2 Cas d'une surface libre inclinée d'un angle β

Il est admis que les points situés sur un plan parallèle à la surface libre soient dans un même état d'équilibre des contraintes. La contrainte verticale, induite par le poids propre de la masse sol en un point A situé à une profondeur z de la surface libre est donnée par :

$$\sigma_v = \frac{W}{dA / \cos \beta} = \frac{\gamma z dA}{dA / \cos \beta} = \gamma z \cos \beta \quad (\text{IV.20})$$

Dans le plan de Mohr, l'état des contraintes au point A sur une facette parallèle à la surface libre est donné par $A(\sigma_A, \tau_A)$, où :

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \gamma z \cos^2 \beta \\ \tau_A &= \gamma z \cos \beta \sin \beta \end{aligned} \quad (\text{VI.21})$$

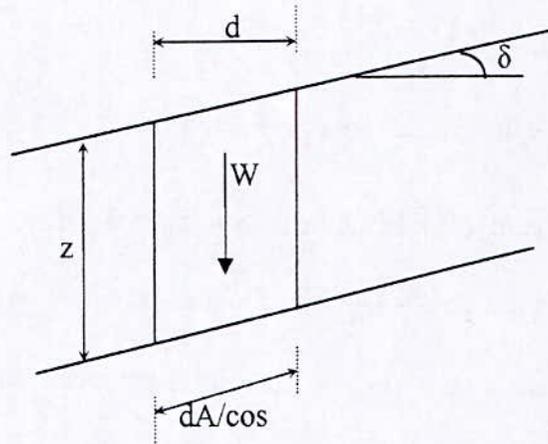


Figure IV.7 : Etat des contraintes sur une surface inclinée

Il est admis que l'état de rupture de la masse sol est obtenu par déformations latérales de compression ou d'extension en maintenant la contrainte verticale constante. Seule la contrainte sur la facette verticale varie. L'état d'équilibre limite est atteint lorsque le critère de Coulomb -Mohr est vérifié, le cercle de Mohr est tangent à l'enveloppe de Coulomb-Mohr.

Les contraintes de poussées (équilibre inférieur de Rankine) sont données par [15,16] :

$$\sigma_{xA} = K_{AR} \sigma_{vz} = K_{AR} \gamma z \cos \beta \quad (\text{IV.22})$$

Les contraintes de butées (équilibre supérieur de Rankine) sont données par :

$$\sigma_{xp} = K_{AP} \sigma_{vz} = K_{AP} \gamma z \cos \beta \quad (\text{IV.23})$$

Les coefficients de poussée K_{AR} et de butée K_{AP} sont respectivement donnés par :

$$K_{AR} = \frac{\cos \beta - \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \varphi}}{\cos \beta + \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \varphi}} \quad (\text{IV.24})$$

Et :

$$K_{PR} = \frac{\cos \beta + \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \varphi}}{\cos \beta - \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \varphi}} \quad (\text{IV.25})$$

Les pressions des terres de Rankine ont une variation linéaire avec la profondeur z et ont une direction parallèle à la surface libre.

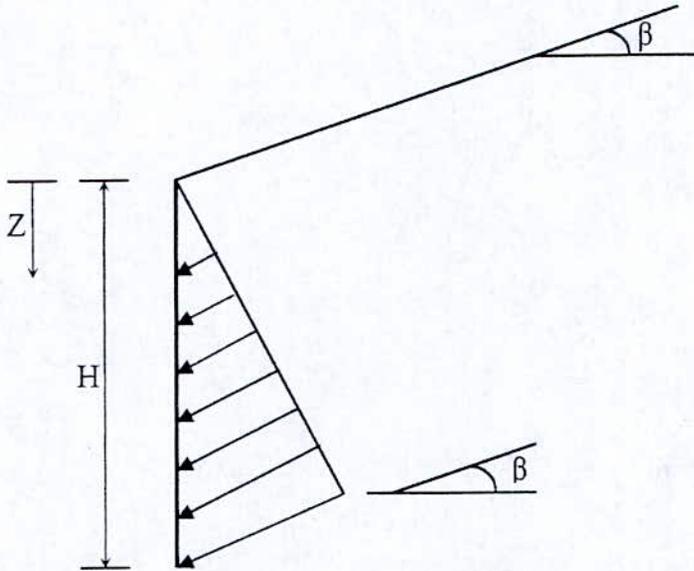


Figure IV.8 : Répartition de la poussée (butée) le long de l'écran.

IV.2 Approche pseudo statique du comportement dynamique des ouvrages de soutènement

IV.2.1 Analyse pseudo-statique de Mononobé-Okabé

Cette méthode est l'extension directe de la méthode de Coulomb vue précédemment. Mononobé et Okabé ont adapté les hypothèses de Coulomb, à savoir [17] :

- Le sol est homogène, sans cohésion et sec ;
- Le mur se déplace suffisamment pour créer dans le massif amont un état d'équilibre limite ;
- Une surface de glissement se développe dans le massif amont. Cette surface de glissement est plane passant par la base du mur ;

L'inclinaison de la surface de rupture est déterminée de façon à maximiser la pression des terres sur le mur, comme dans la théorie de Coulomb, lorsque le sol se trouve dans un état d'équilibre de poussée active. Elle est déterminée à minimiser ces mêmes pressions lorsque le sol se trouve dans un état d'équilibre de butée.

L'étude de l'équilibre des forces s'exerçant sur le prisme ABC (voir figure IV.9a) lorsque le sol se trouve dans un état d'équilibre actif permet de déterminer la poussée dynamique totale F_{ad} , exercée par le sol sur un mur de hauteur H , soumis à des accélérations homogènes horizontales $K_h g$ et verticales $K_v g$. On obtient :

$$F_{ad} = \frac{1}{2} \gamma H^2 (1 - K_v) K_{ad} \quad (\text{IV.26})$$

Avec :

$$K_{ad} = \frac{\cos^2(\varphi - \lambda - \theta)}{\cos(\delta + \lambda + \theta)} \cdot \frac{1}{\left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - \beta - \theta)}{\cos(\delta + \lambda + \theta) \cos(\beta - \lambda)}} \right]^2} \quad (\text{IV.27})$$

L'étude de l'équilibre des forces s'exerçant sur ce même prisme ABC lorsque le sol se trouve dans un état passif (butée : figure IV.9b) permet de déterminer, de la même manière, la pression dynamique totale. On obtient [17,24] :

$$F_{pd} = \frac{1}{2} \gamma H^2 (1 - K_v) K_{pd} \quad (\text{IV.28})$$

Avec :

$$K_{pd} = \frac{\cos^2(\varphi + \lambda - \theta)}{\cos(\delta - \lambda + \theta)} \cdot \frac{1}{\left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi + \beta - \theta)}{\cos(\delta - \lambda + \theta) \cos(\beta - \lambda)}} \right]^2} \quad (\text{IV.29})$$

K_h = coefficient d'accélération horizontale

K_v = coefficient d'accélération verticale

K_{ad} = coefficient de poussée dynamique à l'état actif

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{K_h}{1 - K_v} \right)$$

F_{ad} = Module de la poussée dynamique exercée par le sol sur le mur à l'état actif

F_{ps} = Module de la poussée dynamique exercée par le sol sur le mur à l'état passif

W = Poids du massif de sol susceptible de glisser ABC

R = Réaction sol - sol sur BC due au frottement interne

C = Réaction sol - sol due à la cohésion seule

$K_h W$ représente la composante horizontale de la force d'inertie

$K_v W$ représente la composante verticale de la force d'inertie

La méthode de Mononobé - Okabé ne permet de préciser (comme dans la méthode de Coulomb), que l'intensité de la force totale dynamique F_{ad} ou F_{pd} . La direction est supposée connue par choix adéquat de l'angle d'obliquité ' δ '. Mais cette méthode ne donne pas le point d'application de cette force. Elle ne permet pas de déterminer la distribution des contraintes sur le parement du mur.

Mononobé et Okabé considèrent que la pression totale dynamique a une distribution hydrostatique et donc, que le point d'application de la résultante se situe à une hauteur égale à $H/3$ par rapport à la base du mur.

Il convient d'être prudent dans l'évaluation de l'angle de frottement mur - sol, en tout cas de prendre des valeurs égales à celles prises en analyse statique. Dans la pratique courante, on prend $\delta = \frac{\varphi}{3}$ voir $\delta = 0$.

La position du point d'application a fait et fait encore l'objet d'un certain intérêt lors de nombreuses recherches théoriques et expérimentales. Les essais effectués sur table vibrante notamment, montrent que sous l'action des excitations harmoniques la résultante des efforts s'exerce beaucoup plus haut.

IV.2.2 Méthode simplifiée de Seed

La méthode de Mononobé-Okabé s'est très vite largement répandue dans le monde. Elle a fait l'objet d'un nombre important d'études, recherches et extensions.

Seed H.B et Whitman R.V ont fait l'étude paramétrique la plus approfondie à partir de la formule de Mononobé-Okabé. Leurs principales conclusions sont les suivantes :

L'angle de frottement mur-sol ou la rugosité du mur a peu d'influence sur le coefficient K_{ad} et sur la composante horizontale de la pression dynamique totale $F_{ad} \cos \delta$. Ils recommandent de faire les calculs en pratique avec $\delta = \frac{\varphi}{2}$.

L'angle de frottement interne ' φ ' a une influence non négligeable. Dans un calcul de dimensionnement, une sous estimation de ' φ ' dans le calcul du coefficient de poussée dynamique K_{ad} donne une valeur majorée des efforts dynamiques F_{ad} .

L'inclinaison du remblai ' β ' est un facteur important. Pour des valeurs croissantes de ce facteur, le coefficient de poussée K_{ad} augmente plus rapidement en fonction de l'accélération horizontale $K_h g$.

L'accélération verticale $K_v g$ peut être négligée tant que celle-ci reste très inférieure à l'accélération horizontale $K_h g$. Ils recommandent de faire les calculs en pratique avec K_v nul.

Considérant la décomposition[17,24] :

$$K_{ad} = K_{as} + \Delta K_{ad} \quad (\text{IV.30})$$

Avec K_{as} représentant le coefficient de poussée des terres au repos, Seed et Whitman montrent en effet que l'on peut estimer le coefficient de l'incrément dynamique de poussée ΔK_{ad} par :

$$\Delta K_{ad} = \frac{3}{4} K_h \quad (\text{IV.31})$$

Avec le signe + si l'accélération est dirigée vers le massif de sol ;

Avec le signe - si l'accélération est dirigée vers l'extérieur du massif pour un mur vertical avec un remblai horizontal en négligeant l'accélération verticale.

En pratique, ils recommandent de considérer que le point d'application de la poussée statique F_{as} soit situé à une hauteur égale à $H/3$ par rapport à la base du mur, et que celui de l'incrément de poussée dynamique ΔF_{ad} soit situé à une hauteur égale à $0.6 H$ par rapport à la base du mur[17,24].

Il y a aussi une version simplifiée de l'équation de Mononobé-Okabé pour des conditions passives. Une accélération dirigée vers l'extérieur du massif agit de telle sorte à

réduire la force passive sous sa valeur statique. Une estimation approximative de cette réduction de la force par rapport à la poussée passive statique proposée par les auteurs est :

$$\Delta F_{pd} = 2.125 \gamma H^2 A \quad (\text{IV.32})$$

L'accélération horizontale étant $A g$ avec A positif si l'accélération est dirigée vers l'extérieur du massif et négatif dans le cas contraire.

IV.3 Stabilité des structures de soutènement

Les efforts qui s'exercent sur les structures de soutènement sont de natures diverses : le poids propre de la structure et des terres, les pressions des terres (poussée et butée), les pressions interstitielles, la réaction du sol, les surcharges dynamiques, etc.

L'intérêt de cette étude est l'évaluation de la stabilité d'un ouvrage de soutènement. Les étapes de calcul de la stabilité externe du mur considéré vont consister à vérifier la stabilité vis à vis du renversement, du glissement et du poinçonnement.

On peut entreprendre la vérification de la stabilité des ouvrages de soutènement par l'approche probabiliste ou déterministe.

IV.3.1 Ruine par renversement du mur

La sécurité vis à vis du renversement sera assurée si le moment des forces stabilisantes est supérieur au moment des forces de renversement (forces qui tendent à renverser le mur autour de son arête extérieure), ce qui revient à comparer entre le moment stabilisant et le moment renversant. La fonction d'état limite aura pour expression :

$$Z = M_S - M_R \quad (\text{IV.33})$$

Où :

M_S : représente le moment stabilisant

M_R : le moment renversant

Le facteur de sécurité déterministe est le rapport entre ces moments. On a :

$$F_{sr} = \frac{M_S}{M_R} \quad (\text{IV.34})$$

Ce facteur ne doit pas descendre en dessous de 1,5 (ELU dans l'état de la réglementation actuelle).

IV.3.2 Ruine par glissement du mur sur sa base

Il faut envisager l'éventualité d'un déplacement du mur par glissement sur sa base. Dans ce cas on compare entre :

- La composante T de la résultante R dans le plan de la fondation (composante tangentielle de la réaction exercée sur la base du mur) ;
- La force résistante de cisaillement T_r , c'est à dire la résistance que le terrain de fondation est capable d'opposer au glissement avec $T_r = aB + N \tan \delta_1$.

Où :

B : la largeur de la fondation

N : la composante de R normale au plan de cette fondation

a et δ_1 sont les caractéristiques d'adhérence et de frottement au contact du terrain de fondation.

La fonction d'état limite aura pour expression :

$$Z = T_r - T \quad (\text{IV.35})$$

Le facteur de sécurité déterministe est :

$$F_{sg} = \frac{T_r}{T} \quad (\text{IV.36})$$

Si l'on néglige l'action des terres à la gauche du mur, ce qui est généralement le cas, le facteur F_{sg} doit être au moins égal à 1,5 sinon il faut exiger un facteur au moins égal à 2.

On peut admettre que les caractéristiques d'adhérence et de frottement à prendre en compte sont la cohésion et l'angle de frottement interne du terrain de fondation. On peut expliquer cette hypothèse par le fait que lors de la rupture d'un mur par glissement, on constate fréquemment que la partie inférieure de la fondation entraîne avec elle une couche de terre. Par conséquent, la rupture se produit au sein du massif et non dans le plan même de la base de la fondation[16].

IV.3.3 Ruine par poinçonnement

Avant d'entamer la vérification vis à vis du poinçonnement, nous allons montrer comment déterminer la capacité portante ultime d'une fondation, et les différentes approches

et modèles utilisés à cet effet. On considère les fondations superficielles et la répartition des contraintes linéaire.

La fondation est la composante d'un ouvrage qui transmet au sol les efforts provenant de celui-ci. Ces derniers ont, en général, une composante verticale prédominante, mais la composante horizontale est souvent non négligeable ; les efforts appliqués au sol sont donc inclinés et parfois excentrés.

Si les efforts sont reportés à la surface du sol, les fondations sont dites superficielles sinon il s'agira de fondations profondes.

Pour pouvoir servir de support de fondation, le terrain doit présenter une « capacité portante suffisante », c'est à dire supporter la charge qui lui est transmise.

Avant de traiter directement la stabilité de la fondation de notre ouvrage de soutènement, on va tout d'abord évoquer la théorie de la capacité portante des fondations superficielles d'une manière générale, et citer les différents modèles qui traitent de cette dernière.

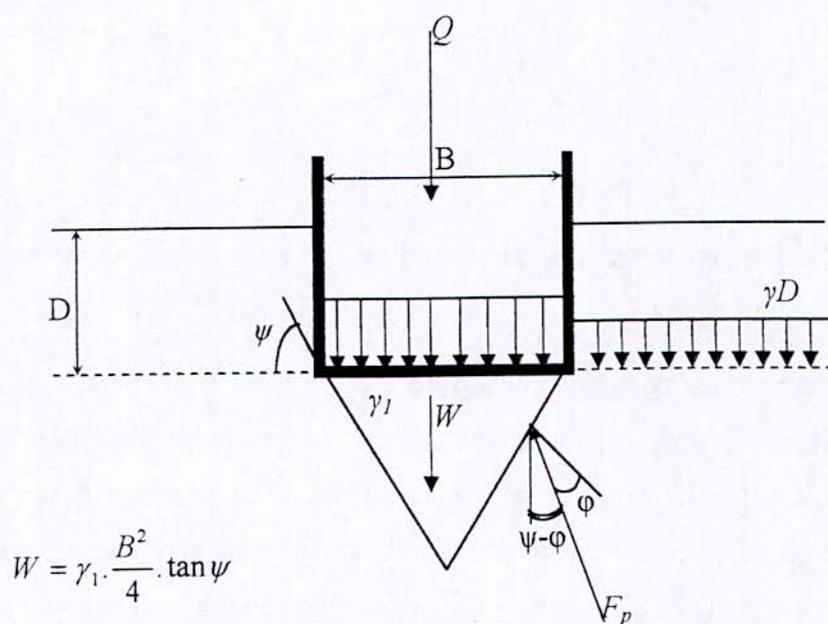


Figure IV.11 : Equilibre des terres sous la fondation[16]

L'équation générale de la capacité portante d'une fondation superficielle est de la forme[18] :

$$qu = \frac{1}{2} \cdot B^1 \cdot \gamma_H^1 \cdot N_\gamma \cdot \xi_\gamma + Q'_D \cdot N_q \cdot \xi_q + c \cdot N_c \cdot \xi_c \quad (IV.37)$$

Avec

q_u : Capacité portante ultime

c : Terme de cohésion du sol

B' : Largeur réduite de la fondation ($B' = B - 2|e_b|$)

e_B : Excentricité parallèle à la largeur de la fondation B ($e_B = \frac{M_B}{Q}$)

M_B : Moment fléchissant parallèle à B

Q : La charge verticale appliquée à la fondation

γ'_H : Poids volumique du sol au dessous de la fondation (Poids volumique déjaugé)

Q'_D : Surcharge due à la profondeur d'ancrage D ($Q'_D = \gamma'_D D$)

γ'_D : Poids volumique du sol de la surface libre jusqu'à la profondeur D

D : La profondeur d'encrage de la fondation

N_c, N_γ, N_q : Facteurs de capacité portante, de cohésion, de surface et de surcharge, respectivement.

ξ_c, ξ_γ, ξ_q : Coefficients correcteurs de la capacité portante, de cohésion, de surface et de surcharge, respectivement.

Les facteurs N_c, N_γ et N_q sont fonction de l'angle de frottement interne effectif φ' du sol et dépendent du modèle choisi pour déterminer la capacité portante de la fondation. Les modèles que nous allons exposer sont : le modèle de Meyerhof et celui de Hansen.

Les facteurs de correction ξ_c, ξ_γ et ξ_q sont sans dimension et considèrent une variété d'options pour modéliser les états réels du sol, ils dépendent aussi du modèle choisi pour la solution de l'équation de la capacité portante finale, ces options sont la forme de la fondation avec l'excentricité de la charge et son inclinaison, la profondeur d'encrage et l'inclinaison de la base de la fondation.

IV.3.3.1 Le modèle de Meyerhof

Cette solution considère des facteurs de correction sur l'excentricité, l'inclinaison de la charge et la profondeur d'encrage de la fondation. L'influence de la force de cisaillement du sol au dessus de la fondation est aussi prise en compte.

Par conséquent, des effets bénéfiques de la profondeur d'encrage peuvent être inclus dans cette analyse. Les suppositions incluses sont l'utilisation d'un facteur de forme ξ_q sur la surcharge, le sol est en équilibre plastique, la surface de rupture par cisaillement du sol au dessous de la fondation est une spirale. L'angle $\psi = 45 + \frac{\varphi}{2}$ a été employé pour la détermination de N_y [18].

a) Facteurs de capacité portante

Les facteurs N_c, N_y et N_q sont fonction de l'angle de frottement interne effectif φ' du sol, leurs expressions sont données dans le tableau (annexe III).

b) Facteurs de correction

Les facteurs de correction sont un produit de sous facteurs et sont employés comme suit :

$$\text{Cohésion} \quad \xi_c = \xi_{cs} \cdot \xi_{ci} \cdot \xi_{cd} \cdot$$

$$\text{Coin du sol} \quad \xi_y = \xi_{ys} \cdot \xi_{yi} \cdot \xi_{yd} \cdot$$

$$\text{Surcharge} \quad \xi_q = \xi_{qs} \cdot \xi_{qi} \cdot \xi_{qd} \cdot$$

Où l'indice : s indique la forme avec l'excentricité, i : indique l'inclinaison de la charge, d : la profondeur d'encrage.

Les expressions des facteurs de correction sont données dans le tableau (annexe III).

c) Excentricité

L'influence de l'excentricité due au moment fléchissant sur la capacité portante peut être estimée en convertissant ce dernier en une excentricité équivalente (e).

Les dimensions de la fondation seront réduites et on aura les dimensions suivantes :

$$B' = B - 2e_B$$

$$W' = W - 2e_W$$

$$e_B = \frac{M_B}{Q}$$

$$e_W = \frac{M_W}{Q}$$

Avec :

M_B : Moment fléchissant parallèle à la largeur de la fondation B

M_W : Moment fléchissant parallèle à la longueur de la fondation W

La surcharge ultime appliquée à la fondation qui peut causer une rupture par poinçonnement est de la forme :

$$Q_u = q_u \cdot A_e \quad (\text{IV.38})$$

Où :

q_u : représente la capacité portante de l'équation (IV.37) prenant en compte l'excentricité dans le facteur de correction de la forme de la fondation.

A_e : la surface effective de la fondation égale à $B' \cdot W'$

IV.3.3.2 Modèle de Hansen

Le modèle de Hansen prend en considération la pente de la base, la forme de la fondation avec l'excentricité, l'inclinaison de la charge et la profondeur d'ancrage de la fondation. Ce modèle est basé sur un prolongement du travail de Meyerhof en incluant l'inclinaison de la base pour une construction sur pente. N'importe quel rapport de D/B peut être utilisé pour le calcul de la capacité portante des fondations superficielles et profondes[18].

a) Facteurs de capacité portante

Les facteurs de capacité portante N_c et N_q sont identiques à ceux de Meyerhof. N_γ est calculé en supposant $\psi = (45 + \frac{\phi}{2})$. Ces valeurs de N_γ sont les plus petites de toutes les valeurs obtenues par les autres méthodes.

b) Facteurs correcteurs

Les facteurs de correction ξ_c, ξ_γ et ξ_q dans l'équation générale de la capacité portante (IV.37) sont :

$$\text{Cohésion} \quad \xi_c = \xi_{cs} \cdot \xi_{ci} \cdot \xi_{cd} \cdot$$

$$\text{Coin du sol} \quad \xi_\gamma = \xi_{\gamma s} \cdot \xi_{\gamma i} \cdot \xi_{\gamma d} \cdot$$

$$\text{Surcharge} \quad \xi_q = \xi_{qs} \cdot \xi_{qi} \cdot \xi_{qd} \cdot$$

Où les indices s, i, β et δ indiquent la forme avec l'excentricité, l'inclinaison de la charge, la profondeur d'ancrage, la pente du sol et l'inclinaison de la semelle, respectivement.

c) Excentricité

L'influence des moments fléchissant est évaluée de la même manière que dans le modèle de Meyerhof.

d) Charges inclinées

Le composant B dans l'équation (IV.37) devrait être la largeur B si la charge horizontale T est parallèle avec B, ou devrait être W si T est parallèle avec la longueur W. Dans notre cas, W est pris égal à l'unité et par conséquent, on ne doit considérer que le cas où T est parallèle à la largeur B.

IV.3.3.3 Cas de l'ouvrage de soutènement**a) Capacité portante ultime**

La capacité portante ultime d'un ouvrage de soutènement peut être estimée par l'équation (IV.37) avec des facteurs de sécurité déterminés à partir des méthodes de Meyerhof ou Hansen.

Dans le cas des ouvrages de soutènement, les facteurs correcteurs ne considèrent que la profondeur d'ancrage de la fondation et l'inclinaison de la charge appliquée. L'équation (IV.37) peut être réécrite [18] :

$$qu = \frac{1}{2} \cdot B' \cdot \gamma_H' \cdot N_\gamma \cdot \xi_{\gamma i} \cdot \xi_{\gamma d} + Q' \cdot D' \cdot N_q \cdot \xi_{qi} \cdot \xi_{qd} + c \cdot N_c \cdot \xi_{ci} \cdot \xi_{cd} \quad (\text{IV.39})$$

Où les facteurs $N_c, N_q, N_\gamma, \xi_c, \xi_\gamma$ et ξ_q sont donnés dans les tableaux (annexe III). Si on se réfère au modèle de Hansen, les exposants de ξ_γ et ξ_q doivent être modifiés en remplaçant 5 par 2.

b) Capacité portante admise (Vérification de la stabilité)

L'évaluation de la sécurité vis à vis du poinçonnement se fait en comparant entre la contrainte maximale σ_{max} appliquée à la base de la fondation, et la capacité portante qu de cette fondation, évaluée par l'une des méthodes citées supra.

Dans ce cas la fonction d'état limite est :

$$Z = qu - \sigma_{max} \tag{IV.40}$$

Avec :

$$\sigma_{max} = \frac{Q}{B'} \tag{IV.41}$$

B' est la largeur réduite de la fondation (*largeur fictive*). C'est Meyerhof qui a proposé en 1953 d'attribuer à la semelle cette largeur fictive centrée sur la charge.

$$B' = B - 2E$$

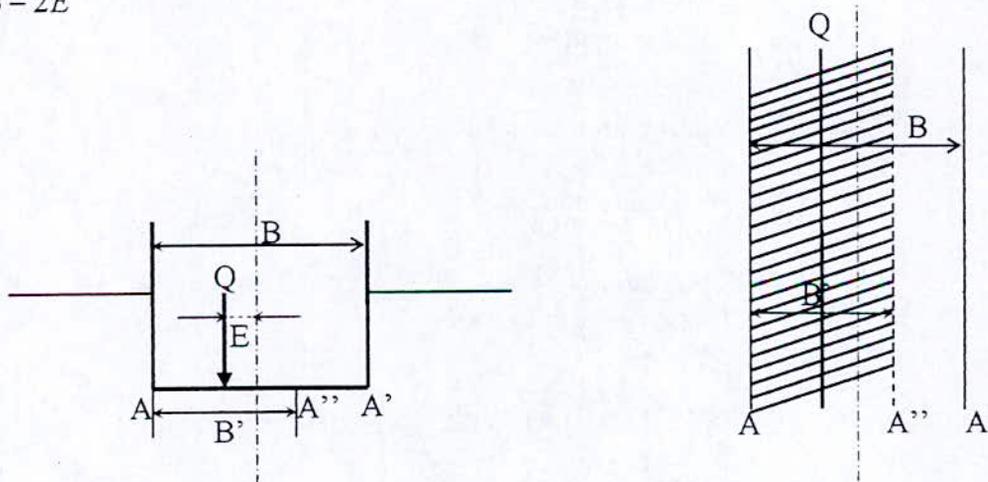


Figure IV.12 Charge excentrée[16]

Le facteur de sécurité déterministe au poinçonnement est :

$$F_{sp} = \frac{qu}{\sigma_{max}} \tag{IV.42}$$

Avec : $2 \leq F_{sp} \leq 4$

Conclusion

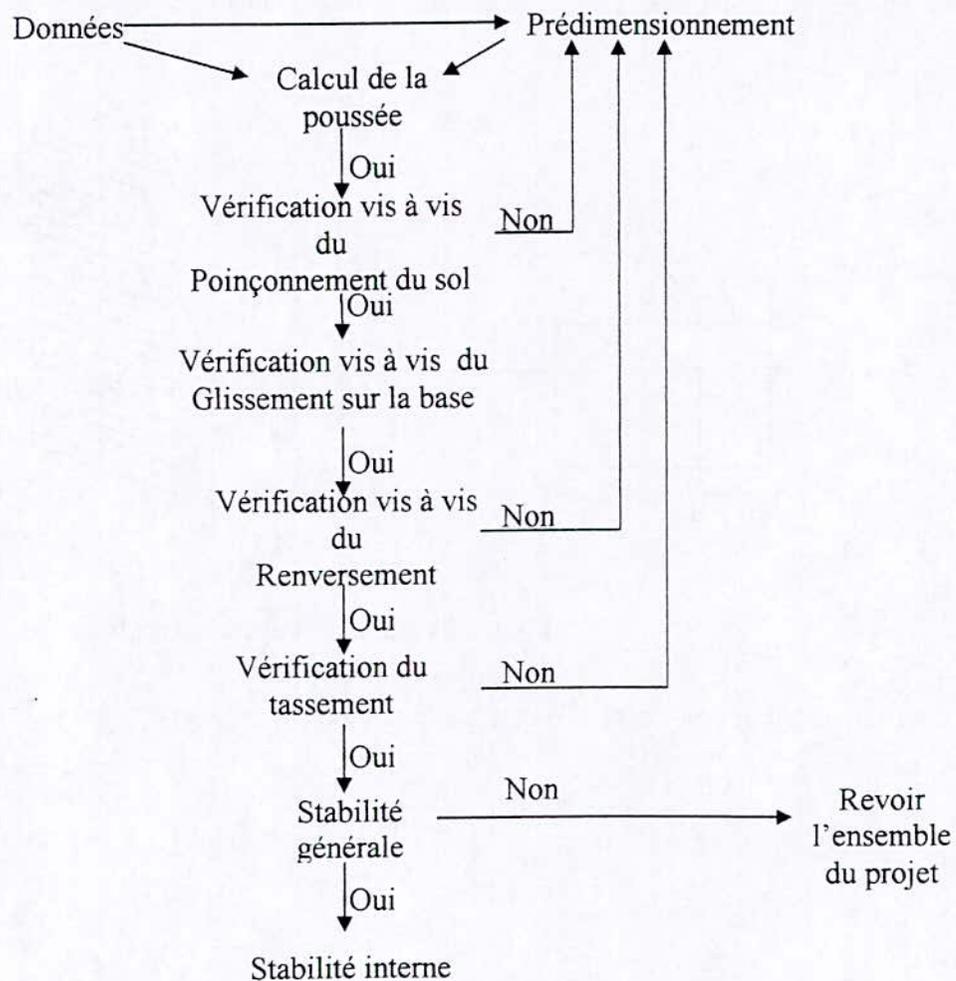
Comme on vient de le voir, le calcul des ouvrages de soutènement passe par la détermination de la poussée des terres derrière le mur.

Les théories des pressions des terres de Coulomb et Rankine dans le cas statique ainsi que celle de Mononobé-Okabé dans le cas dynamique, nous permettent d'estimer l'intensité des poussées (butées), respectivement, statique et dynamique.

On considère trois modes de ruine pour la vérification de la stabilité externe de la structure de soutènement à savoir, ruine par renversement, ruine par glissement et ruine par poinçonnement.

En plus de la stabilité d'ensemble, il faut s'assurer de la stabilité interne du mur, c'est à dire qu'il faut vérifier, du point de vue déterministe, que les contraintes dans la maçonnerie restent inférieures aux contraintes admissibles.

On résume les différentes étapes d'évaluation de la stabilité d'un mur de soutènement dans l'organigramme suivant [19] :



CHAPITRE V : APPLICATION

Introduction

Ce chapitre portera sur des études paramétriques se basant essentiellement la démarche probabiliste. Celle ci présente l'avantage de s'appuyer sur un modèle mécano fiabiliste permettant de prendre en considération différentes sources d'incertitudes. Tel que nous l'avons illustrer dans les chapitres précédents, cette approche permet d'évaluer le risque sous forme d'une probabilité de rupture de l'ouvrage. Par contre, la démarche déterministe ne permet pas d'appréhender la valeur réelle de la fiabilité d'un ouvrage, elle donne tout au plus une marge volontairement pessimiste vis-à-vis des modes de ruine par l'introduction de facteurs de sécurité.

Les informations existantes contiennent un degré d'incertitude qui peut parfois être important en géotechnique. Le problème de l'analyse du degré d'incertitude des informations et de l'incidence qu'il a sur la probabilité de ruine reste un sujet d'actualité. Ainsi, l'objectif de ce présent travail est d'estimer, d'une part, les effets des incertitudes et d'autre part, l'importance de ces incertitudes sur la probabilité de ruine ou de l'indice de fiabilité d'une structure de soutènement.

Les incertitudes considérées sont les données relatives aux caractéristiques physiques et mécaniques du sol, à savoir l'angle de frottement interne, le poids volumique et la cohésion du sol de fondation, les données relatives aux caractéristiques géométriques de l'ouvrage (ses dimensions) ainsi que les incertitudes liées à la surcharge, à l'angle d'inclinaison de la surface libre du sol, à l'angle d'inclinaison de la poussée et son point d'application.

Des programmes de calcul basés sur les méthodes FORM sont développés en vue de l'évaluation de l'indice de fiabilité (indice de Hasofer-Lind) ainsi que de la probabilité de ruine. La fonction d'état limite pour les modes de ruine considérées étant fortement non linéaire, nous avons opté pour la méthode présentée dans [5]. Les modes de ruine considérés sont successivement les ruines engendrées par glissement, par renversement ou par poinçonnement de l'ouvrage.

On fera une étude complémentaire d'un ouvrage de soutènement en zone sismique en considérant le mode de ruine par renversement. L'incrément de poussée dynamique, résultant de l'accélération sismique imposée à la base du modèle mur-sol, est évalué en utilisant la théorie de Mononobé Okabé, d'une part, et la théorie simplifiée de Seed, d'autre part.

Une analyse de sensibilité sera faite en vue d'estimer l'importance des incertitudes sur les paramètres considérés sur la probabilité de ruine.

Enfin, la simulation Monté Carlo nous permettra de donner un résultat précis de la probabilité de ruine. C'est aussi un outil efficace de vérification des résultats obtenus par les méthodes analytiques.

V.1 Présentation de l'ouvrage

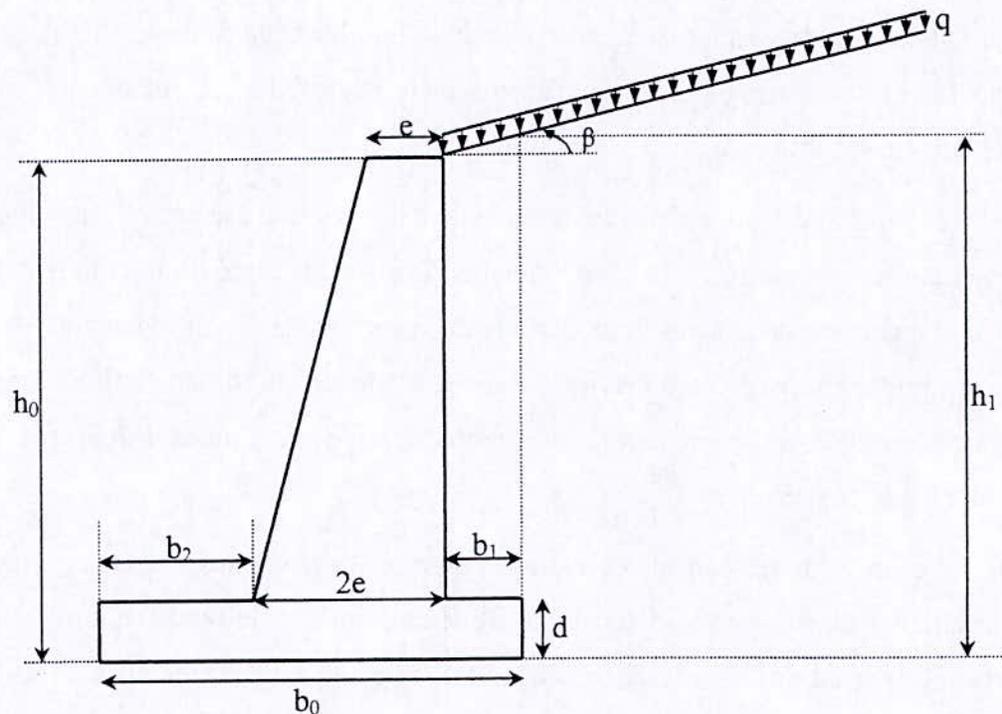


Figure V.1. Mur de soutènement cantilever

Caractéristiques du mur

Poids volumique du mur

$$\gamma_{mur} = 25 (kN / m^3)$$

Dimensions du mur

$$h_0 = 5 \text{ (m)}$$

$$b_0 = 3 \text{ (m)}$$

$$d = \frac{h_0}{12} \text{ (m)}$$

$$e = \frac{h_0}{24} \text{ (m)}$$

$$b_1 = 2 \cdot \frac{b_0}{3} - d \text{ (m)}$$

$$h_1 = h_0 + b_1 \tan \beta \text{ (m)}$$

Angle du mur avec la verticale

$$\lambda = 0^\circ \text{ (degré)}$$

Caractéristiques du sol derrière le mur :

Angle de frottement interne

$$\varphi = 35^\circ$$

Poids volumique

$$\gamma_{sol} = 18 \text{ kN/m}^3$$

Angle de la surface libre avec l'horizontale

$$\beta = 15^\circ$$

Angle de frottement mur sol

$$\delta = 15^\circ$$

Caractéristiques du sol de fondation

Poids volumique du sol

$$\gamma_1 = 18 \text{ kN/m}^3$$

Angle de frottement interne du sol

$$\varphi_a = 35^\circ$$

Terme de cohésion

$$c_a = 40 \text{ kN/m}^2$$

4) Surcharge :

$$q = 100 \text{ kN/m}^2$$

Variables aléatoires

Suivant le cas étudié, on considère 2, 3, ..., 10 variables aléatoires possibles.

Coefficients de poussée des terres statiques

$$\text{Selon Coulomb : } K_a = \frac{\cos^2(\varphi - \lambda)}{\cos(\lambda + \delta)} \cdot \frac{1}{\left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - \beta)}{\cos(\lambda + \delta) \cos(\beta - \lambda)}} \right]^2}$$

$$\text{Selon Rankine : } K_{aR} = \frac{\cos^2(\varphi - \lambda)}{\cos^2 \lambda \cos(\lambda + \delta) \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - \beta)}{\cos(\lambda + \delta) \cos(\beta - \lambda)}} \right]^2}$$

Forces en présence

La poussée :

$$F_a = F_{a1} + F_{a2}$$

$$F_{a1} = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{sol} \cdot h_1^2 \cdot K_a$$

$$F_{a2} = q \cdot h_1 \cdot \frac{K_a}{\cos \beta}$$

$$F_{ah} = F_a \cos \delta$$

Poids du mur :

$$P_b = \gamma_{mur} \cdot \left(b_0 d + 3 \cdot e \cdot \frac{(h_0 - d)}{2} \right)$$

Poids du sol :

$$P_s = \gamma_{sol} \cdot \left((h_0 - d) \cdot b_1 + \frac{b_1^2}{2} \tan \beta \right)$$

Poids de la surcharge :

$$Q_s = q \cdot \frac{b_1}{\cos \beta}$$

Résultante des forces verticales :

$$R_v = P_b + P_s + Q_s$$

$$R_v = \gamma_{mur} \cdot \left(b_0 d + 3.e \cdot \frac{(h_0 - d)}{2} \right) + \gamma_{sol} \cdot \left((h_0 - d) \cdot b_1 + \frac{b_1^2}{2} \tan \beta \right) + q \cdot \frac{b_1}{\cos \beta}$$

Résultante des forces horizontales :

$$R_h = F_{ah} = F_a \cos \delta$$

$$R_h = \left(\frac{1}{2} \cdot \gamma_{sol} \cdot h_1^2 \cdot K_a + q \cdot h_1 \cdot \frac{K_a}{\cos \beta} \right) \cdot \cos \delta$$

V.2 Modes de ruine considérés

V.2.1 Stabilité vis à vis du renversement

Dans ce cas la fonction d'état est la différence entre le moment stabilisant et le moment de renversement.

Soit :

$$z(\varphi, \beta, \delta, q, \gamma, h_a, b_0, h_0, b_1) = M_S - M_R$$

M_R est le moment de renversement du mur par rapport au point A. C'est celui de la poussée par rapport au talon du mur. M_S étant le moment stabilisant.

$$M_R = F_{ah} \cdot e_{fah}$$

$$M_S = M_{Pb} + M_{Ps} + M_{Qs}$$

Avec respectivement M_{Pb} , M_{Ps} , M_{Qs} , les moments par rapport au point A du poids du mur, du poids du sol, de la surcharge et de la résultante de la poussée verticale.

$$M_{Pb} = P_b \cdot e_b$$

$$M_{Ps} = P_s \cdot e_s$$

$$M_{Qs} = Q_s \cdot e_{qs}$$

On désigne par e_b , e_s , e_{qs} , e_{fah} et les excentricités des efforts P_b , P_s , Q_s , et F_{ah} respectivement, avec :

$$e_b = \frac{\gamma_{mur}}{P_b} \cdot \left[\frac{b_0^2 \cdot d}{2} + 3 \cdot \frac{e}{2} \cdot \left(b_0 - b_1 - \frac{7}{9} \cdot e \right) \right]$$

$$e_s = \frac{\gamma_{sol}}{P_s} \left[b_1 \cdot (h_0 - d) \cdot \left(b_0 - \frac{b_1}{2} \right) + \left(\frac{b_1^2}{2} \cdot \tan \beta \right) \cdot \left(b_0 - \frac{1}{3} \cdot b_1 \right) \right]$$

$$e_{qs} = b_0 - \frac{b_1}{2}$$

$$e_{fah} = h_a$$

On considère un vecteur aléatoire à neuf degrés de liberté :

$$X = [\varphi, \beta, \delta, q, \gamma, h_a, b_0, h_0, b_1]$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} z(\varphi, \beta, \delta, q, \gamma, h_a, b_0, h_0, b_1) &= \frac{\gamma_{mur}^2}{P_b} \cdot \left(b_0 d + 3 \cdot e \cdot \frac{(h_0 - d)}{2} \right) \left[\frac{b_0^2 \cdot d}{2} + 3 \cdot \frac{e}{2} \cdot \left(b_0 - b_1 - \frac{7}{9} \cdot e \right) \right] \\ &+ \frac{\gamma_{sol}^2}{P_s} \cdot \left((h_0 - d) \cdot b_1 + \frac{b_1^2}{2} \tan \beta \right) \left[b_1 \cdot (h_0 - d) \cdot \left(b_0 - \frac{b_1}{2} \right) + \left(\frac{b_1^2}{2} \cdot \tan \beta \right) \cdot \left(b_0 - \frac{1}{3} \cdot b_1 \right) \right] \\ &+ q \cdot \frac{b_1}{\cos \beta} \cdot \left(b_0 - \frac{b_1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \gamma_{sol} \cdot h_1^2 \cdot K_a + q \cdot h_1 \cdot \frac{K_a}{\cos \beta} \right) \cdot \cos \delta \cdot h_a \end{aligned}$$

Les études de sensibilité, mesurées plus loin, montrent que parmi les variables aléatoires considérées, les plus prépondérantes sont φ et b_0 . Si on ne retient que ces deux dernières, la surface d'état limite dans l'espace standard (U_1, U_2) la fonction $z(\varphi, b_0) = 0$.

$$U_1 = \frac{\varphi - \mu_\varphi}{\sigma_\varphi}, U_2 = \frac{b_0 - \mu_{b_0}}{\sigma_{b_0}}$$

La variable φ est un paramètre de sollicitation et b_0 un paramètre de résistance. On obtient la figure V.2.

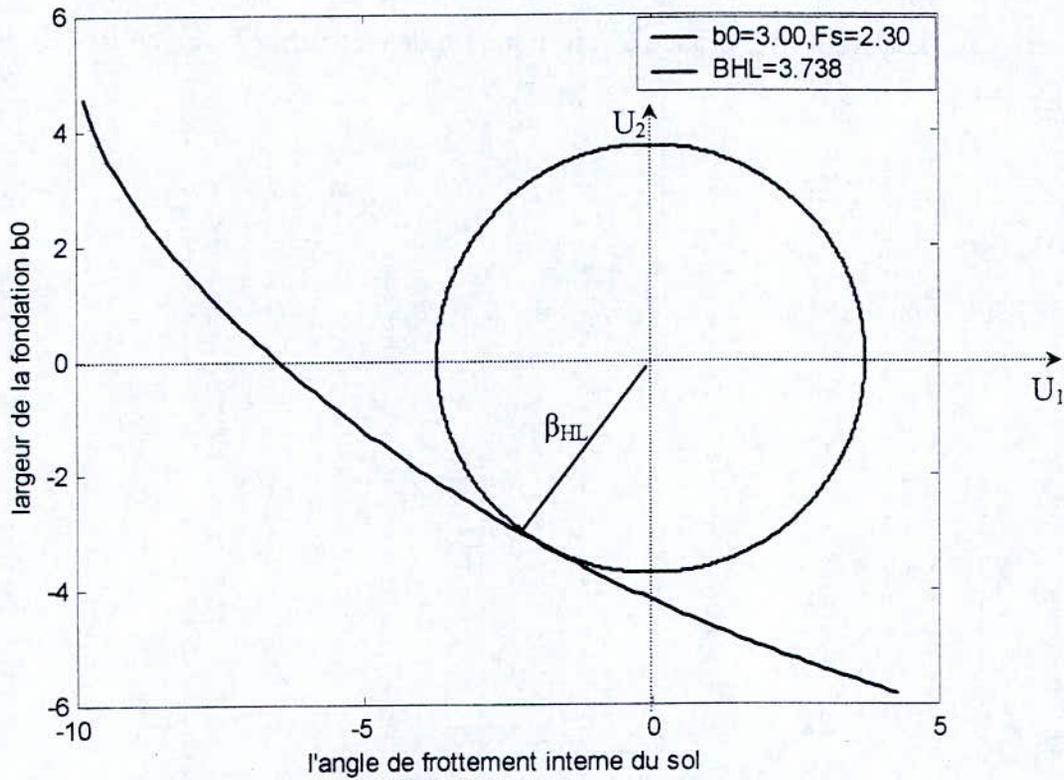


Figure V.2 : Surface d'état limite et indice de fiabilité

V.2.2 Stabilité vis à vis du glissement

On compare la force qui tend à faire glisser le mur sur sa base T , avec la résistance au glissement mobilisable par le terrain d'assise. On aura :

$$z(\varphi, \beta, \delta, q, \gamma, b_0, h_0, b_1, \varphi_a, c_a) = T_r - T$$

$$T = R_h$$

$$T_r = b_0 \cdot c_a + R_v \cdot \tan \varphi_a$$

D'où :

$$z(\varphi, \beta, \delta, q, \gamma, h_a, b_0, h_0, b_1, \varphi_a, c_a) = b_0 \cdot c_a + \left[\gamma_{mur} \cdot \left(b_0 d + 3 \cdot e \cdot \frac{(h_0 - d)}{2} \right) + \gamma_{sol} \cdot \left((h_0 - d) \cdot b_1 + \frac{b_1^2}{2} \tan \beta \right) + q \cdot \frac{b_1}{\cos \beta} \right] \cdot \tan \varphi_a + \left(\frac{1}{2} \cdot \gamma_{sol} \cdot h_1^2 \cdot K_a + q \cdot h_1 \cdot \frac{K_a}{\cos \beta} \right) \cdot \cos \delta$$

De même que pour le renversement, l'étude de sensibilité montre que φ et b_0 sont les deux paramètres prépondérants. La surface d'état limite est donnée par la figure ci dessous dans le repère standard.

$$U_1 = \frac{\varphi - \mu_\varphi}{\sigma_\varphi}, U_2 = \frac{b_0 - \mu_{b_0}}{\sigma_{b_0}}$$

On trace la fonction d'état limite pour $z(\varphi, b_0) = 0$. On obtient :

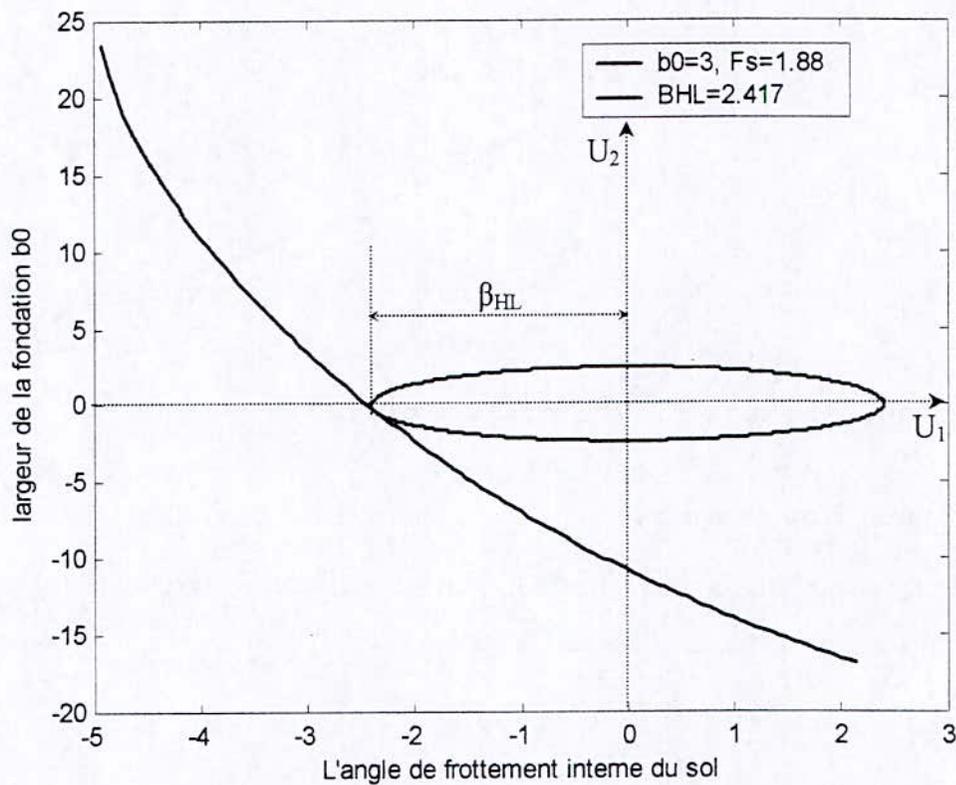


Figure V.3 : Surface d'état limite et indice de fiabilité

V.2.3 Stabilité vis à vis du poinçonnement

La fonction d'état limite a pour expression :

$$z(\varphi, b_0, \varphi_a) = q_u - q_{app}$$

Où q_{app} représente la contrainte maximale appliquée à la base de la semelle et q_u la capacité portante d'une fondation continue sous mur soumise à un chargement excentré et incliné. Les modèles de Hansen et Meyerhof nous permettent de déterminer cette dernière.

On aura :

$$q_u = \frac{1}{2} \cdot \gamma_a \cdot N_\gamma \cdot \xi_\gamma + q \cdot N_q \cdot \xi_q + c_a \cdot N_c \cdot \xi_{ca}$$

$$\xi_\gamma = \xi_{\gamma i} \cdot \xi_{\gamma d}$$

$$\xi_q = \xi_{qi} \cdot \xi_{qd}$$

$$\xi_{ca} = \xi_{cai} \cdot \xi_{cad}$$

Les expressions des facteurs correcteurs $\xi_{\gamma i}$, $\xi_{\gamma d}$, ξ_{qi} , ξ_{qd} , ξ_{cai} et ξ_{cad} et celles des facteurs de portance sont dans les tableaux en annexe III.

$$q_{app} = \frac{R_y}{B'}$$

B' est la largeur réduite de la fondation.

$$B' = b_0 - 2|e_0|$$

Avec

$$e_0 = \frac{M_O}{R_y} - \frac{b_0}{2}$$

$$M_O = M_{ps} + M_{pb} + M_{Qs} - F_{ah} \cdot e_{fah}$$

On considère le vecteur aléatoire à trois degrés de liberté :

$$X = \begin{bmatrix} \varphi \\ b_0 \\ \varphi_a \end{bmatrix}$$

On obtient finalement dans le cas de trois variables :

$$z(\varphi, b_0, \varphi_a) = \frac{1}{2} \cdot \gamma_a \cdot B' \cdot N_\gamma \cdot \xi_\gamma + q \cdot N_q \cdot \xi_q + c_a \cdot N_c \cdot \xi_{ca} - \frac{\left[\gamma_{mur} \cdot \left(b_0 d + 3 \cdot e \cdot \frac{(h_0 - d)}{2} \right) + \gamma_{sol} \cdot \left((h_0 - d) \cdot b_1 + \frac{b_1^2}{2} \tan \beta \right) + q \cdot \frac{b_1}{\cos \beta} \right]}{B'}$$

Pour les deux modèles, on présente l'influence des coefficients de variation des variables aléatoires considérées sur la variation de l'indice de fiabilité.

En considérant que les paramètres φ et b_0 , lesquelles, dans ce cas, ne sont plus les plus prépondérants.

En considérant les paramètres φ et b_0 , on trace la surface d'état limite pour la fonction $z(\varphi, b_0) = 0$.

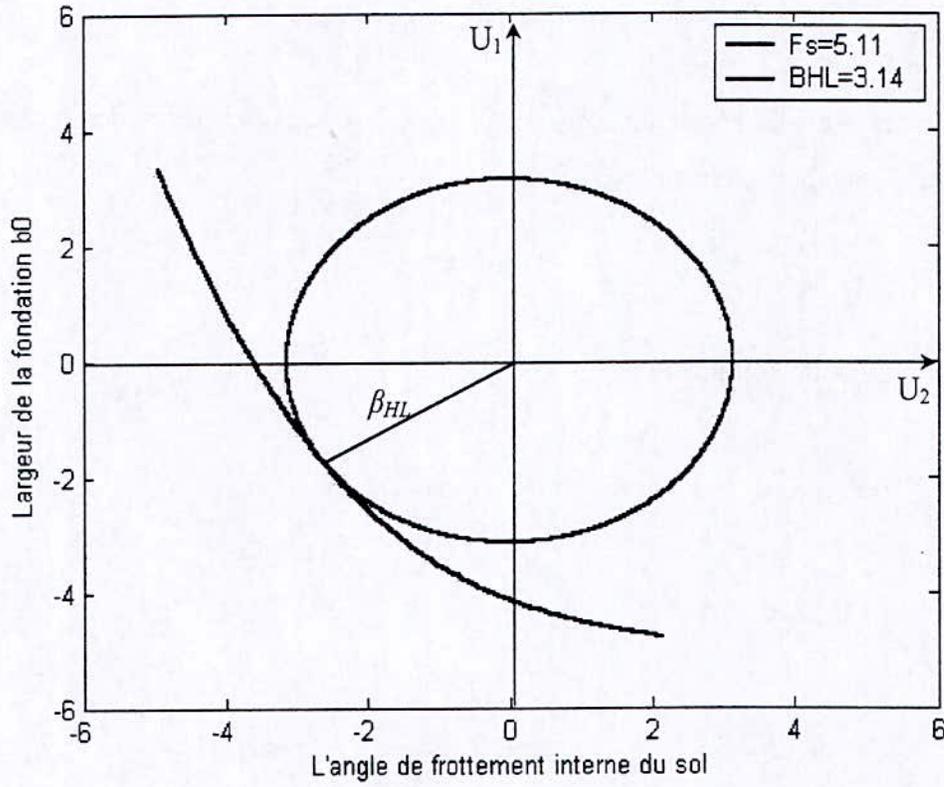


Figure V.4 : Surface d'état limite (modèle de Hansen)

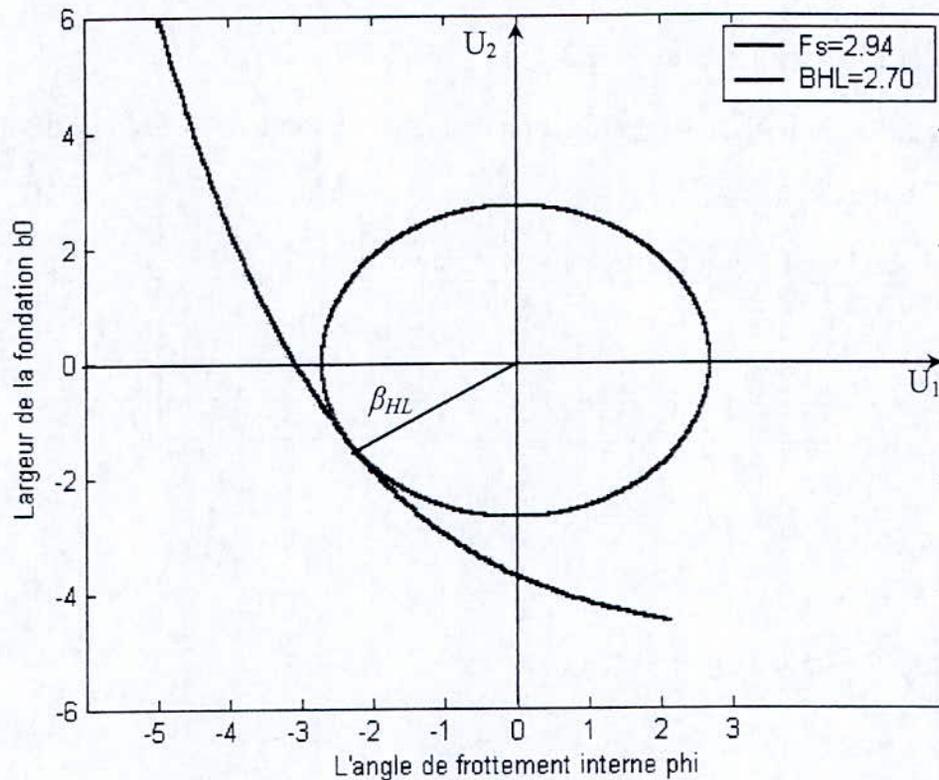


Figure V.5 : Surface d'état limite (modèle de Meyerhof)

V.3 Etude de l'influence des incertitudes sur les différents paramètres

L'objectif de cette étude sera de déterminer l'influence des incertitudes sur les paramètres pris en compte dans l'évaluation de la probabilité de ruine de l'ouvrage. La procédure consiste à faire varier le coefficient de variation d'une variable donnée, et d'estimer son influence par rapport à l'indice de fiabilité, les autres coefficients étant arbitrairement fixés à 10%. On considère que l'importance des incertitudes liées aux paramètres considérés sont représentées par leurs coefficients de variation. En effet, plus l'incertitude sur un paramètre est forte, plus son coefficient de variation est grand.

V.3.1 Renversement

Le facteur de sécurité déterministe est $F_s=2.21$.

1. Effet de la variation du coefficient de variation de l'angle de frottement interne du sol (φ) sur l'indice de fiabilité (β_{HL})

Tableau V.1 Indices de fiabilité et coefficients de variation de φ

Coefficient de variation de φ en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Coulomb	3.695	3.414	3.021	2.604	2.215	1.879	1.618
β_{HL} Rankine	3.757	3.529	3.163	2.707	2.326	1.960	1.621

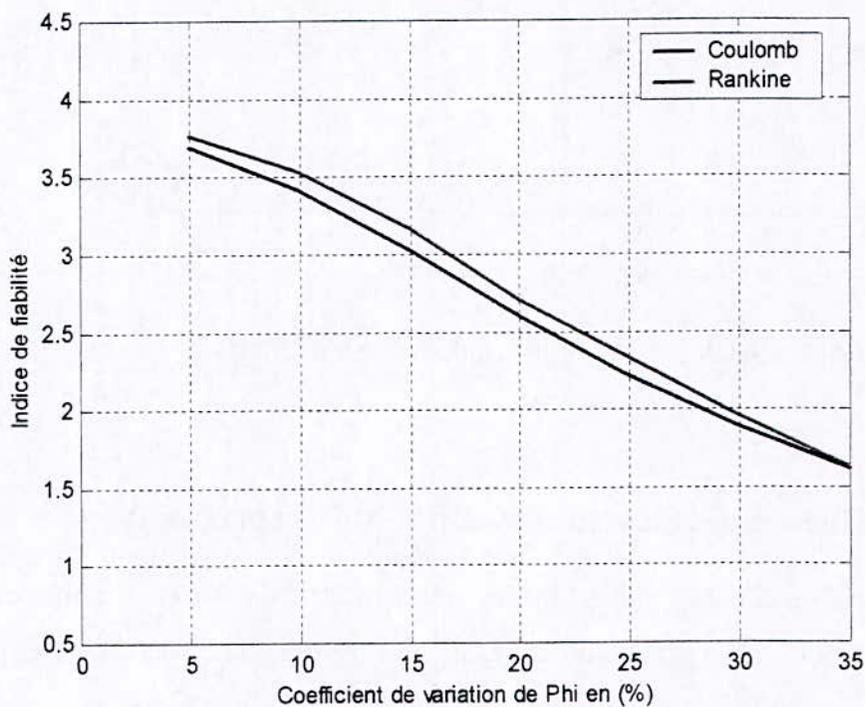


Figure V.6 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de φ

Les deux courbes sont fortement décroissantes, faiblement non linéaires.

La variation du coefficient de variation de φ a une très grande influence sur l'indice de fiabilité.

Ceci s'explique par le fait que l'angle de frottement intervient directement dans l'expression des coefficients de poussée.

2. Effet de la variation du coefficient de variation de la largeur de la fondation (b_0) sur l'indice de fiabilité (β_{HL}) :

Tableau V.2 Indices de fiabilité et coefficients de variation de b_0

Coefficient de variation de b_0 en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Coulomb	4.392	3.414	2.524	1.957	1.589	1.335	1.149
β_{HL} Rankine	4.735	3.529	2.559	1.972	1.596	1.339	1.152

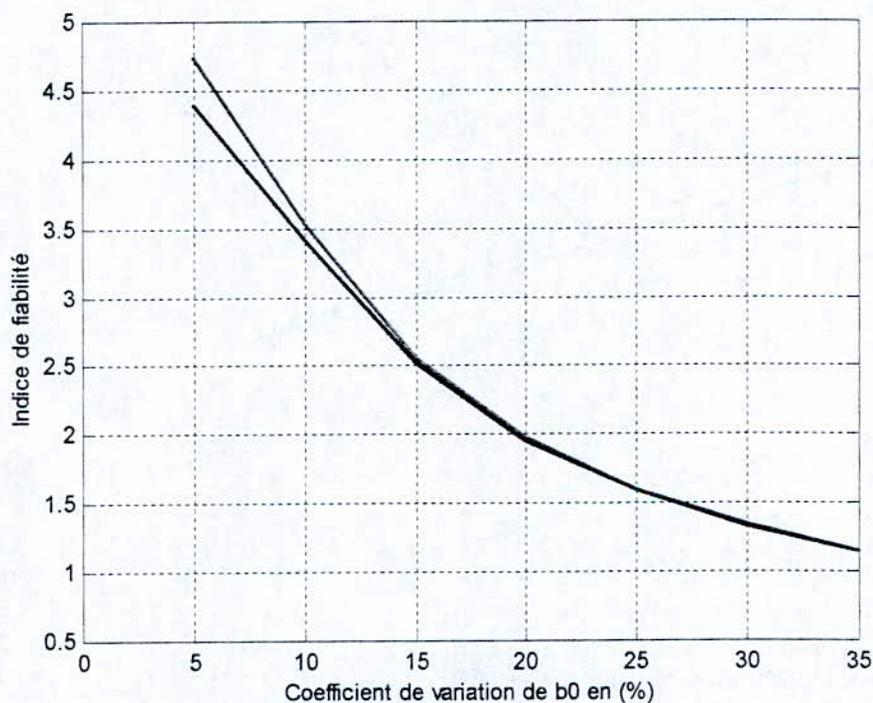


Figure V.7 : Variation β_{HL} en fonction du coefficient de variation de b_0

Les deux courbes sont fortement décroissantes, quasi linéaires.

L'influence de la variation du coefficient de variation de b_0 sur l'indice de fiabilité est très importante. Pour d'importantes valeurs du coefficient de variation, les deux courbes se rejoignent, c'est-à-dire que les modèles mécaniques considérés sont équivalents.

3. Effet de la variation du coefficient de variation du point d'application de la poussée des terres (ha) sur l'indice de fiabilité (β_{HL})

Tableau V.3 Indices de fiabilité et coefficients de variation de ha

Coefficient de variation de ha en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Coulomb	3.587	3.414	3.189	2.954	2.729	2.524	2.339
β_{HL} Rankine	3.707	3.529	3.294	3.046	2.808	2.591	2.396

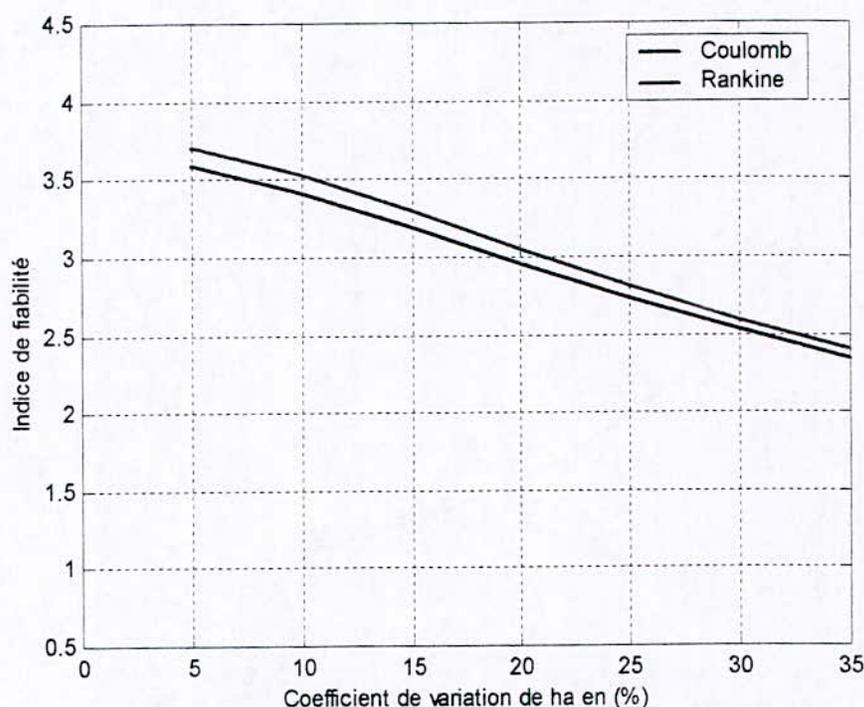


Figure V.8 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de ha

Les deux courbes sont décroissantes, quasi linéaires. L'influence du coefficient de variation de ha sur l'indice de fiabilité est importante.

On peut porter un certain intérêt quant à l'influence de la variable ha . Les résultats des études théoriques et expérimentales ont conduit à considérer la position du point d'application de la poussée à $h/3$. Cependant, cette distance n'est pas fixe, et ha peut prendre une autre valeur autre que $h/3$ ce qui explique la sensibilité de ce paramètre aux incertitudes.

4. Effet de la variation du coefficient de variation de la largeur de la fondation sous le remblai (b1) sur l'indice de fiabilité (β_{HL})

Tableau V.4 Indices de fiabilité et coefficients de variation de b1

Coefficient de variation de b1 en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Coulomb	3.418	3.414	3.406	3.371	3.117	2.740	2.408
β_{HL} Rankine	3.530	3.529	3.521	3.449	3.196	2.776	2.428

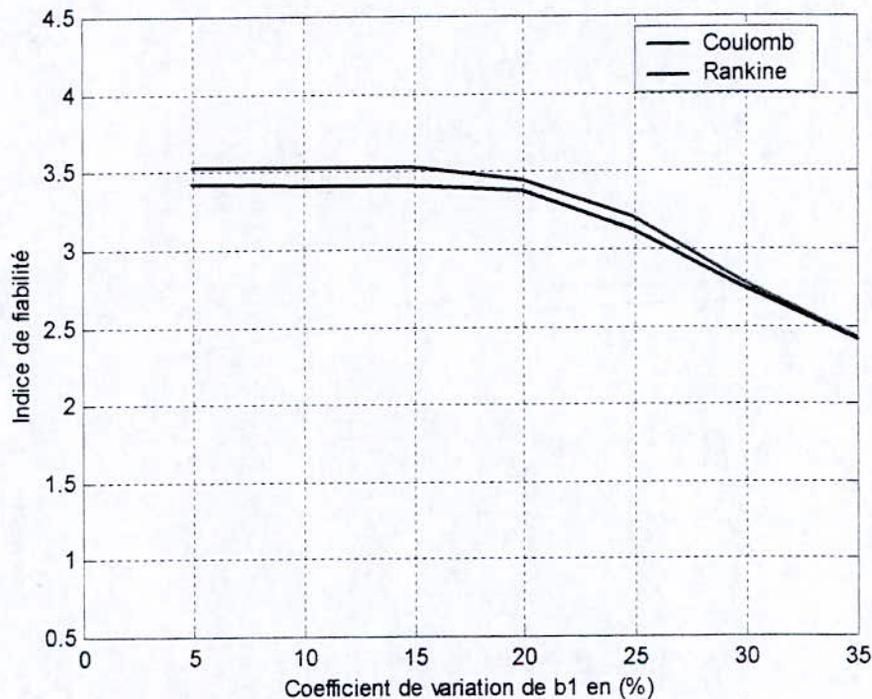


Figure V.9 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de b1

Les deux courbes comportent deux parties :

Partie (a) : Courbes presque constantes sur l'intervalle où le coefficient de variation est $\leq 15\%$

- Pas d'influence sur l'indice de fiabilité dans cette partie.

Partie (b) : Courbes décroissantes faiblement linéaires sur l'intervalle où le coefficient de variation est $> 15\%$

L'influence du coefficient de variation de b1, dans cette dernière partie, sur l'indice de fiabilité est importante. Ceci s'explique par le fait que b1 joue un rôle purement favorable du fait que le poids des terres qui le surmonte stabilise l'ouvrage.

5. Effet de la variation du coefficient de variation de la hauteur du mur (h_0) sur l'indice de fiabilité (β_{HL})

Tableau V.5 Indices de fiabilité et coefficients de variation de h_0

Coefficient de variation de h_0 en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Coulomb	3.437	3.414	3.374	3.315	3.235	3.129	2.996
β_{HL} Rankine	3.553	3.529	3.487	3.426	3.340	3.225	3.078

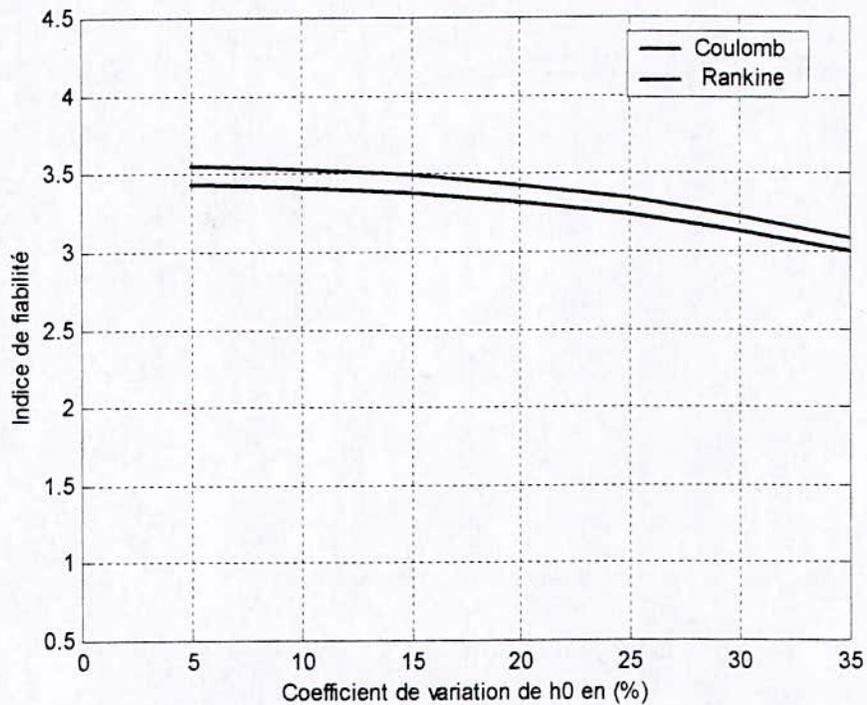


Figure V.10 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de h_0

Les deux courbes sont faiblement décroissantes, non linéaires. L'influence du coefficient de variation de h_0 sur l'indice de fiabilité commence à prendre part dès que l'on dépasse les 15%, mais il reste faible.

6. Effet de la variation du coefficient de variation de (δ) sur l'indice de fiabilité (β_{HL}) :

Tableau V.6 Indices de fiabilité et coefficients de variation de δ

Coefficient de variation de δ en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Coulomb	3.422	3.414	3.369	3.306	3.227	3.134	3.029
β_{HL} Rankine	3.529	3.529	3.529	3.529	3.529	3.529	3.529

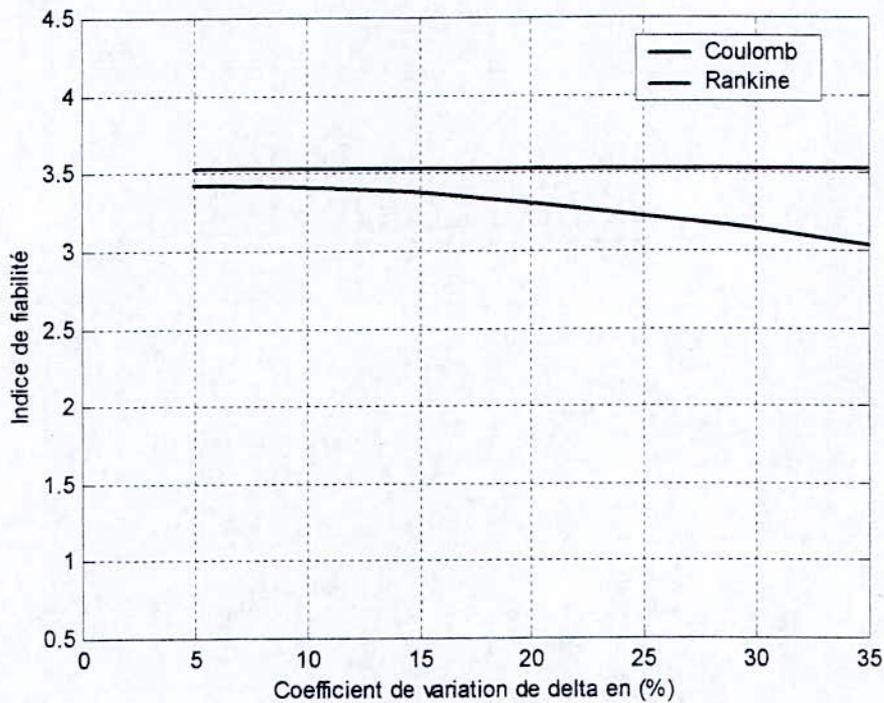


Figure V.11 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de δ

La courbe de Coulomb est faiblement décroissante, non linéaire.

On constate que selon la méthode de Rankine, il n'y a aucune variation. Dans cette approche, l'angle δ n'intervient pas ce qui explique la différence avec la méthode de Coulomb.

7. Effet de la variation du coefficient de variation de l'inclinaison de la surface libre du sol (β) sur l'indice de fiabilité (β_{HL})

Tableau V.7 Indices de fiabilité et coefficients de variation de β

Coefficient de variation de β en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Coulomb	3.442	3.414	3.400	3.380	3.351	3.310	3.249
β_{HL} Rankine	3.538	3.529	3.501	3.470	3.450	3.411	3.348

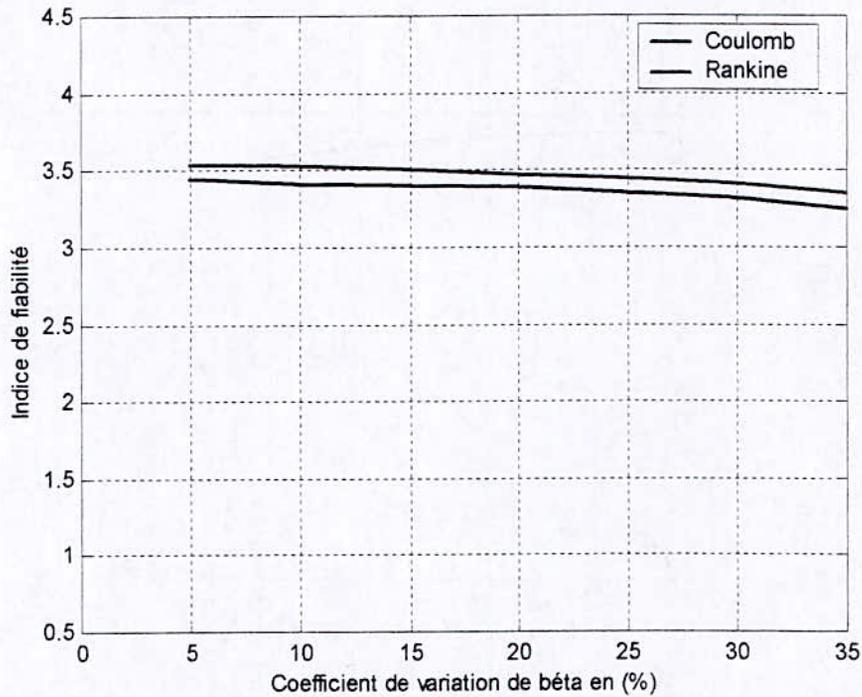


Figure V.12 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de β

Les deux courbes sont faiblement décroissantes. La variation du coefficient de variation de β n'a qu'une faible influence sur l'indice de fiabilité et cela pour des valeurs dépassant les 20%.

8. Effet de la variation du coefficient de variation du poids volumique du sol (γ) sur l'indice de fiabilité (β_{HL})

Tableau V.8 Indices de fiabilité et coefficients de variation de γ

Coefficient de variation de γ en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Coulomb	3.415	3.414	3.413	3.411	3.409	3.407	3.403
β_{HL} Rankine	3.530	3.529	3.528	3.526	3.524	3.521	3.518

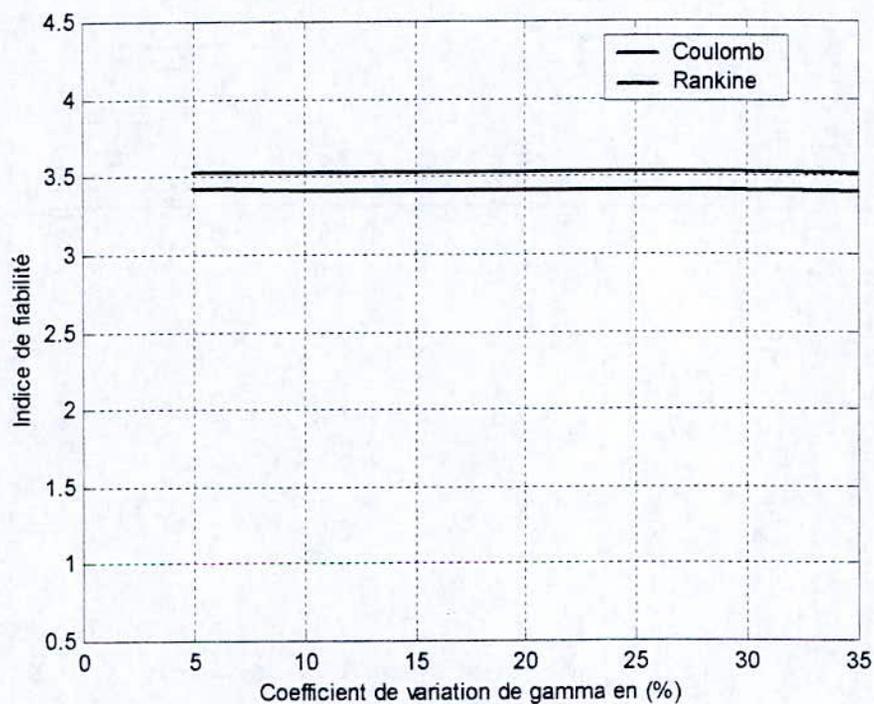


Figure V.13 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de γ

Les deux courbes sont pratiquement constantes. La variation du coefficient de variation de γ n'a pas d'influence sur l'indice de fiabilité.

9. Effet de la variation du coefficient de variation de la surcharge (q) sur l'indice de fiabilité (β_{HL})

Tableau V.9 Indices de fiabilité et coefficients de variation de q

Coefficient de variation de q en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Coulomb	3.417	3.414	3.409	3.402	3.394	3.385	3.375
β_{HL} Rankine	3.532	3.529	3.524	3.517	3.509	3.499	3.489

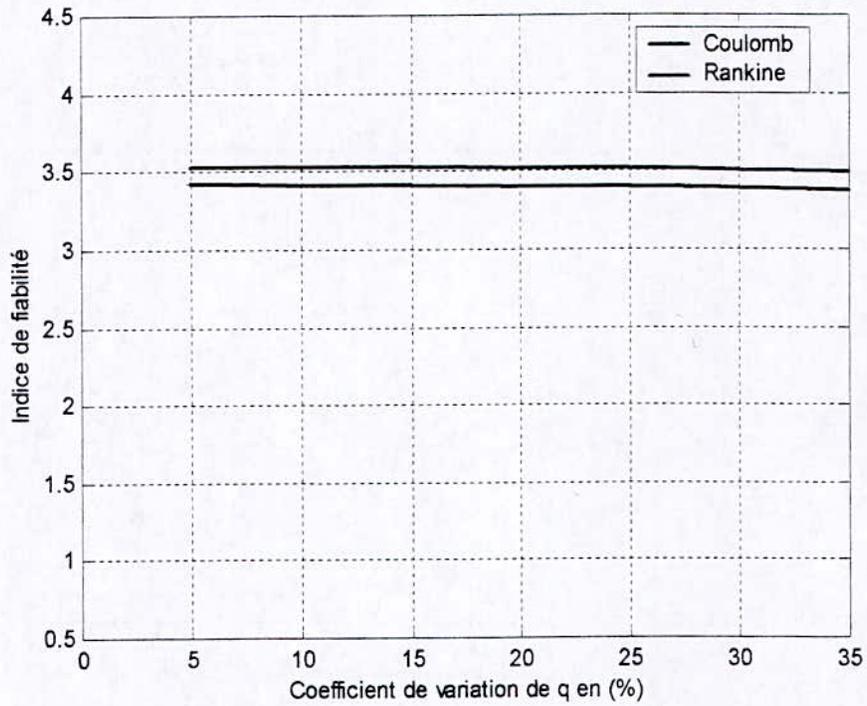


Figure V.14 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de q

Les deux courbes sont pratiquement constantes. La variation du coefficient de variation de q n'a pas d'influence sur l'indice de fiabilité.

V.3.2 Glissement

Le facteur de sécurité déterministe est $F_s=1.59$.

1. Effet de la variation du coefficient de variation de l'angle de frottement interne du sol (φ) sur l'indice de fiabilité (β_{HL})

Tableau V.10 Indices de fiabilité et coefficients de variation de φ

Coefficient de variation de φ en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Coulomb	2.990	2.242	1.699	1.344	1.104	0.933	0.807
β_{HL} Rankine	3.092	2.339	1.753	1.372	1.119	0.943	0.813

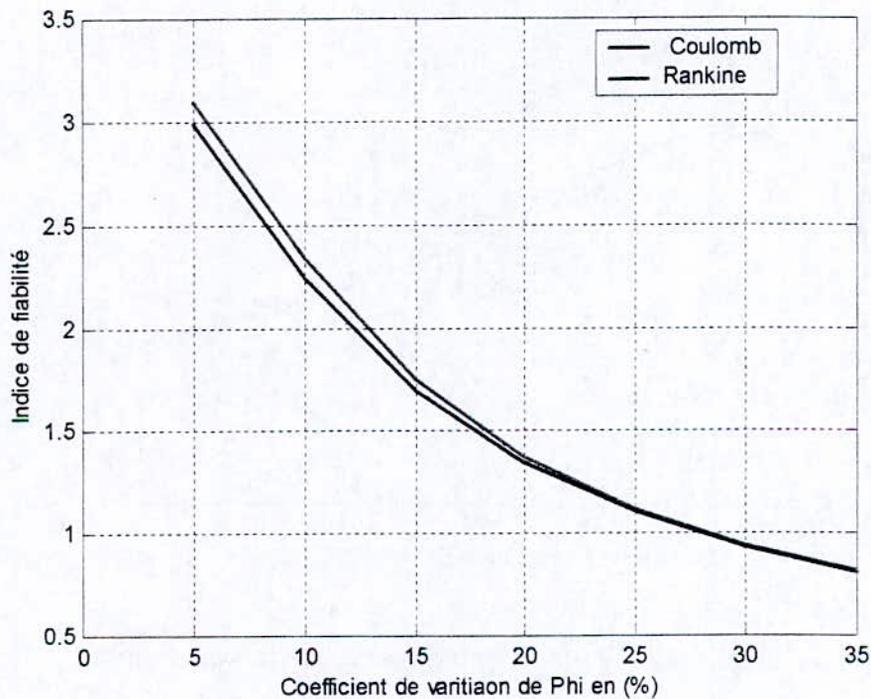


Figure V.15 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de φ

Les deux courbes sont fortement décroissantes, non linéaires. La variation du coefficient de variation de φ a une influence capitale sur l'indice de fiabilité.

Cette importance s'explique par le fait que le coefficient de la poussée des terres, responsable du glissement de l'ouvrage sur le sol, dépend que de φ .

2. Effet de la variation du coefficient de variation de l'angle de frottement interne du sol (φ_a) sur l'indice de fiabilité (β_{HL})

Tableau V.11 Indices de fiabilité et coefficients de variation de φ_a

Coefficient de variation de φ_a en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Coulomb	2.413	2.242	2.017	1.787	1.578	1.398	1.248
β_{HL} Rankine	2.510	2.339	2.102	1.851	1.624	1.431	1.271

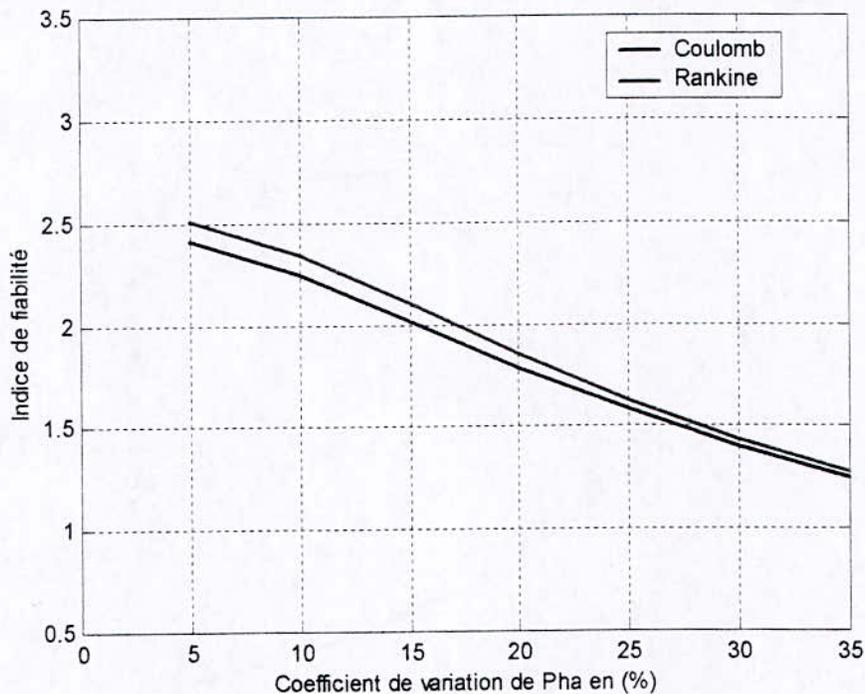


Figure V.16 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de φ_a

Les deux courbes sont fortement décroissantes, non linéaires. L'influence du coefficient de variation de φ_a sur l'indice de fiabilité est très importante. Pour d'importantes valeurs du coefficient de variation, les deux courbes se rejoignent.

Contrairement au cas précédent, la résistance au glissement mobilisée par la surface d'assise de l'ouvrage, dépend essentiellement :

- Des charges verticales
- Des paramètres d'adhérence du sol de fondation φ_a et C_a .

C'est ce qui explique l'allure des courbes obtenues.

3. Effet de la variation du coefficient de variation de la largeur de la fondation (b_0) sur l'indice de fiabilité (β_{HL})

Tableau V.12 Indices de fiabilité et coefficients de variation de b_0

Coefficient de variation de b_0 en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Coulomb	2.275	2.242	2.188	2.117	2.031	1.936	1.836
β_{HL} Rankine	2.372	2.339	2.284	2.209	2.117	2.013	1.902

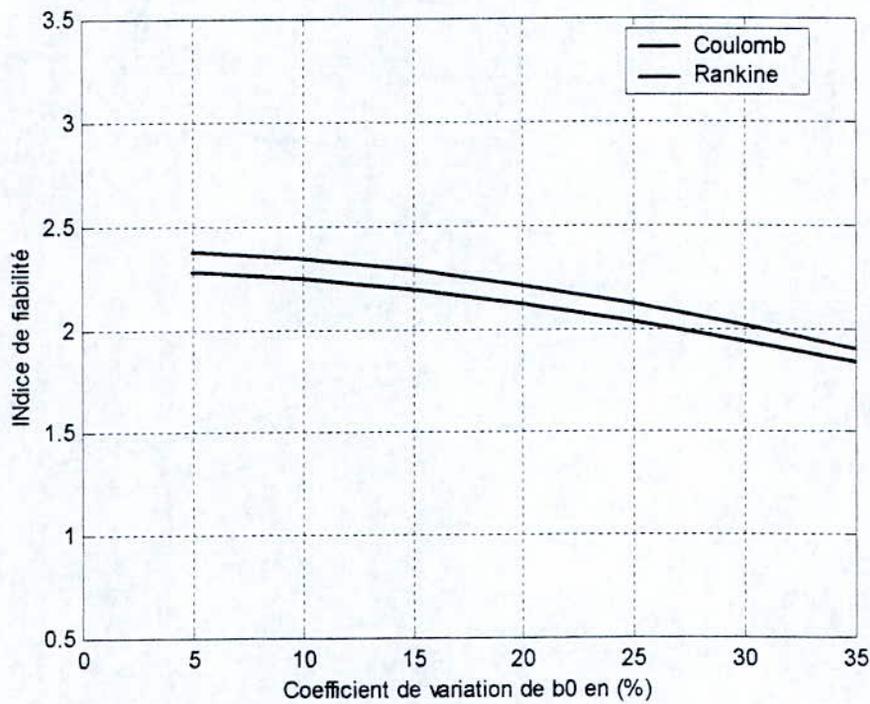


Figure V.17 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de b_0

Les deux courbes sont décroissantes non linéaires. La variation du coefficient de variation de b_0 a une influence moyenne sur l'indice de fiabilité.

4. Effet de la variation du coefficient de variation de la largeur de la fondation sous le remblai (b1) sur l'indice de fiabilité (β_{HL})

Tableau V.13 Indices de fiabilité et coefficients de variation de b1

Coefficient de variation de b1 en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Coulomb	2.308	2.242	2.136	2.00	1.848	1.694	1.548
β_{HL} Rankine	2.407	2.339	2.229	2.084	1.917	1.748	1.589

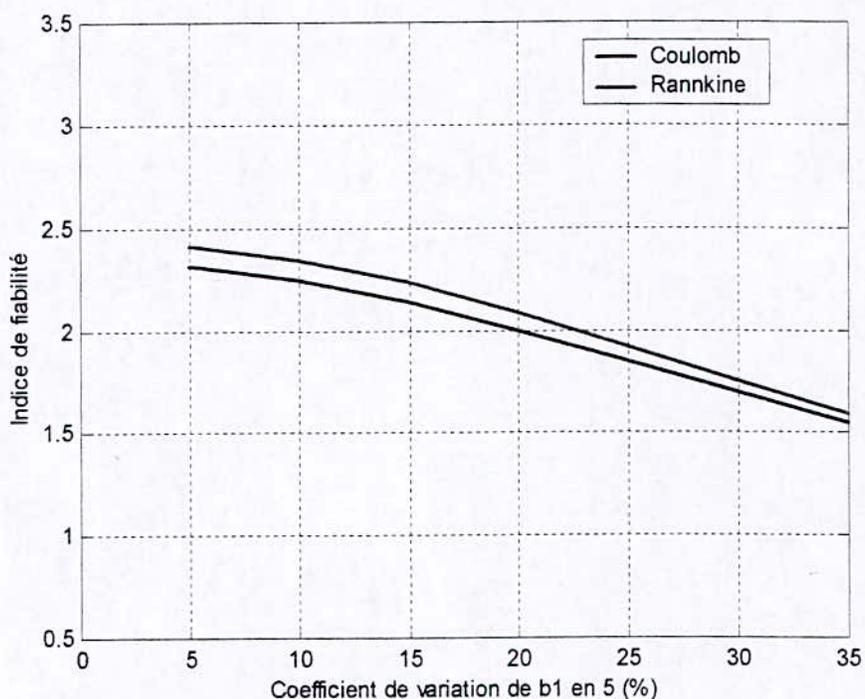


Figure V.18 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de b1

Les deux courbes sont décroissantes, non linéaires. L'influence de la variation du coefficient de variation de **b1** sur l'indice de fiabilité est considérable.

Comme nous l'avons déjà souligné, ceci est dû au fait que la résistance au glissement mobilisable à l'interface sol - fondation, dépend des charges verticales qui proviennent essentiellement du poids des terres qui surmonte **b1**.

5. Effet de la variation du coefficient de variation de la hauteur du mur (h_0) sur l'indice de fiabilité (β_{HL})

Tableau V.14 Indices de fiabilité et coefficients de variation de h_0

Coefficient de variation de h_0 en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Coulomb	2.262	2.242	2.208	2.160	2.101	2.031	1.952
β_{HL} Rankine	2.360	2.339	2.303	2.253	2.191	2.116	2.031

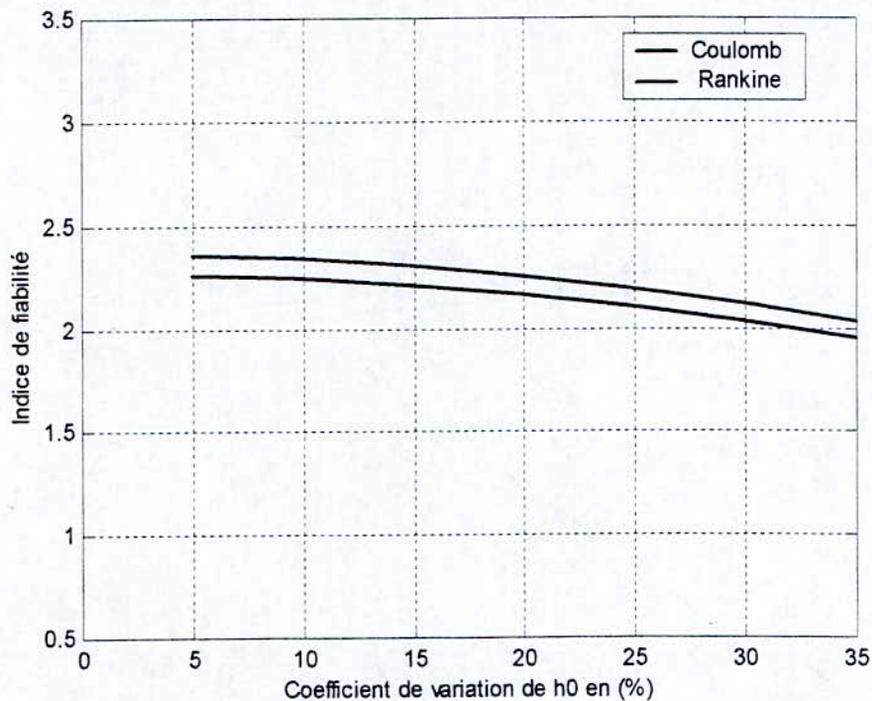


Figure V.19 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de h_0

Les deux courbes sont faiblement décroissantes, quasi linéaires. L'influence de la variation du coefficient de variation de h_0 sur l'indice de fiabilité n'a qu'une moindre importance.

6. Effet de la variation du coefficient de variation du terme de cohésion du sol de fondation (C_a) sur l'indice de fiabilité (β_{HL})

Tableau V.15 Indices de fiabilité et coefficients de variation de C_a

Coefficient de variation de C_a en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Coulomb	2.266	2.242	2.203	2.150	2.085	2.011	1.931
β_{HL} Rankine	2.363	2.339	2.299	2.244	2.176	2.096	2.007

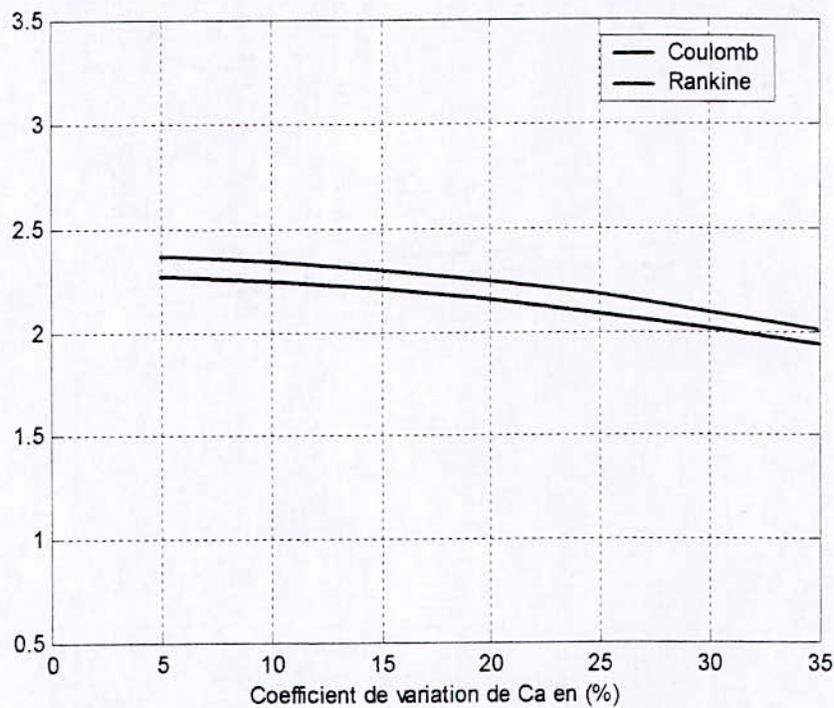


Figure V.20 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de C_a

Les deux courbes sont faiblement décroissantes, quasi linéaires. L'influence de la variation du coefficient de variation de C_a sur l'indice de fiabilité n'a qu'une petite importance, du fait que la valeur considérée est assez faible.

7. Effet de la variation du coefficient de variation de l'inclinaison de la surface libre du sol (β) sur l'indice de fiabilité (β_{HL})

Tableau V.16 Indices de fiabilité et coefficients de variation de β

Coefficient de variation de β en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Coulomb	2.261	2.242	2.210	2.165	2.109	2.041	1.965
β_{HL} Rankine	2.354	2.339	2.313	2.276	2.219	2.172	2.104

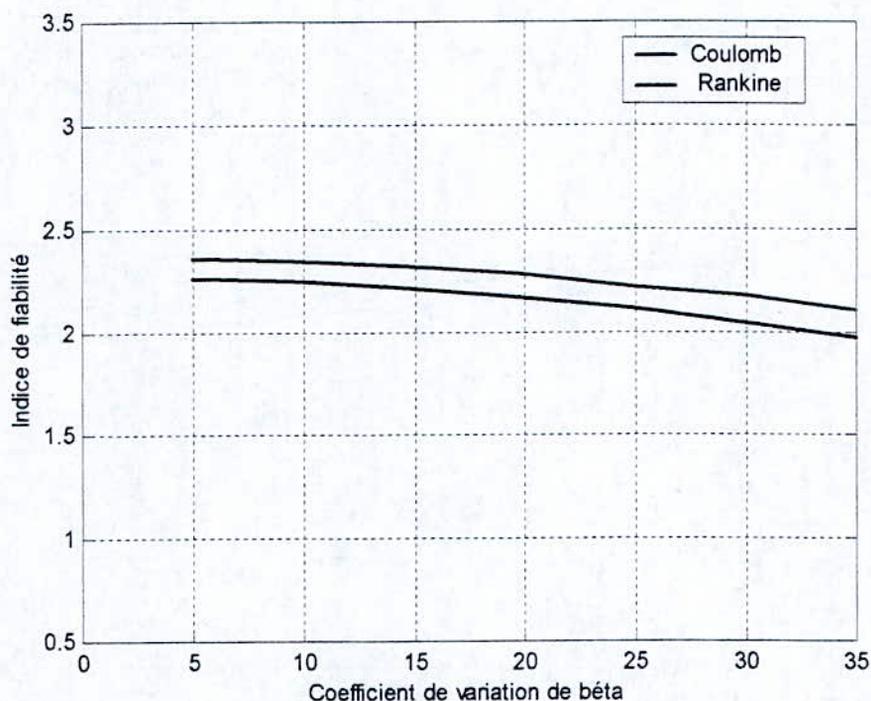


Figure V.21 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de β

Les deux courbes sont faiblement décroissantes, non linéaires. L'influence de la variation du coefficient de variation de β sur l'indice de fiabilité n'a qu'une petite importance, du fait de la valeur considérée pour β .

8. Effet de la variation du coefficient de variation de la surcharge (q) sur l'indice de fiabilité (β_{HL})

Tableau V.17 Indices de fiabilité et coefficients de variation de q

Coefficient de variation de q en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Coulomb	2.269	2.242	2.201	2.152	2.098	2.043	1.987
β_{HL} Rankine	2.367	2.339	2.296	2.245	2.187	2.128	2.068

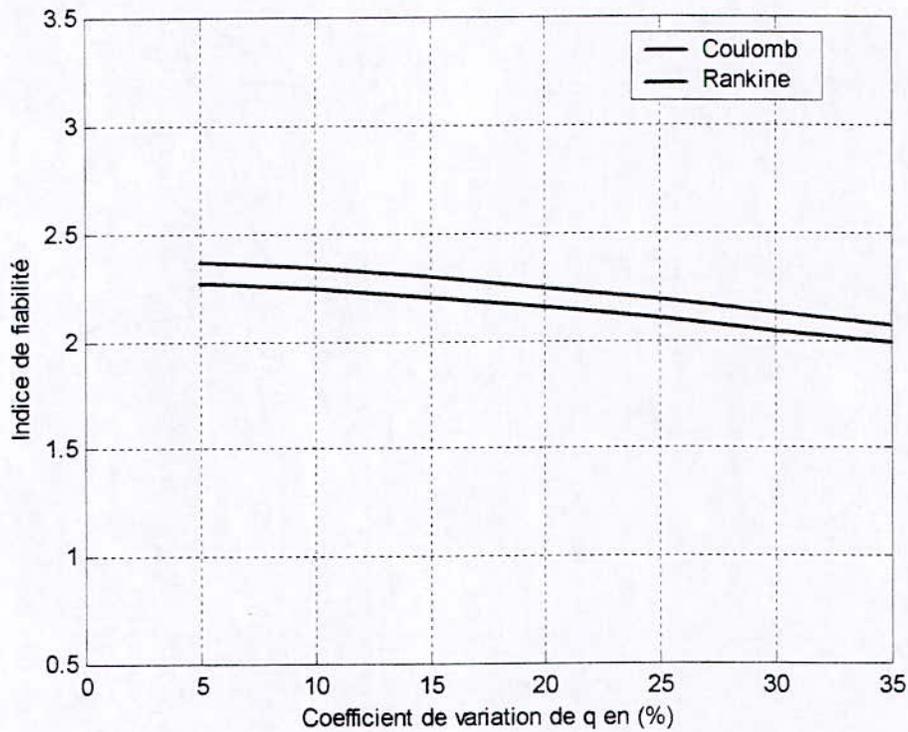
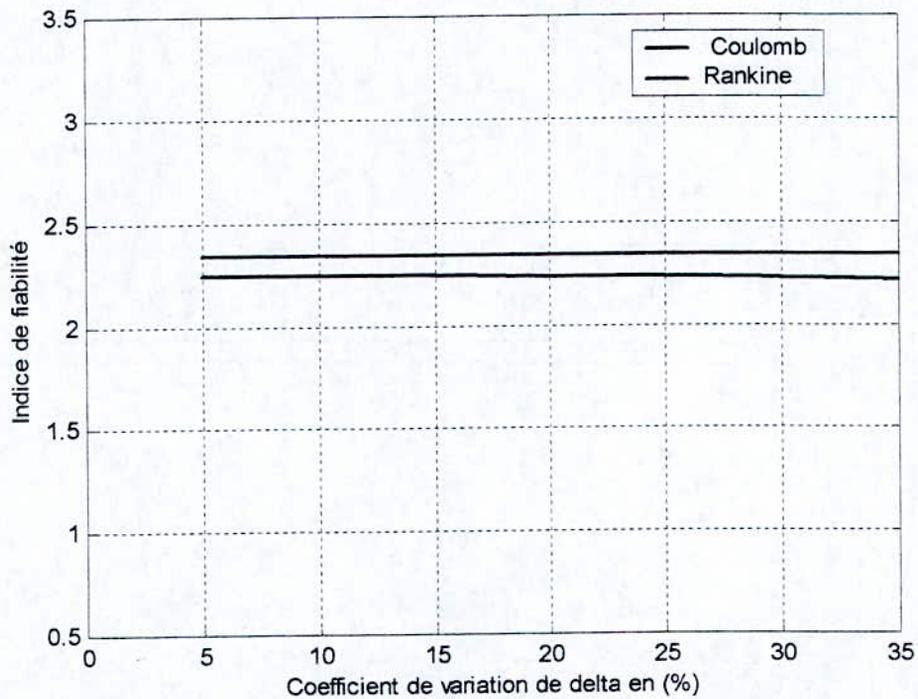


Figure V.22 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de q

Les deux courbes sont faiblement décroissantes, quasi linéaires. L'influence du coefficient de variation de q sur l'indice de fiabilité n'a qu'une petite importance.

9. Effet de la variation du coefficient de variation de delta (δ) sur l'indice de fiabilité (β_{HL})**Tableau V.18** Indices de fiabilité et coefficients de variation de δ

Coefficient de variation de δ en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Coulomb	2.243	2.242	2.239	2.235	2.230	2.224	2.217
β_{HL} Rankine	2.339	2.339	2.339	2.339	2.339	2.339	2.339

**Figure V.23** : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de δ

Les deux courbes sont des droites parallèles à l'axe des abscisses. La variation du coefficient de variation de δ n'a aucune influence sur l'indice de fiabilité.

10. Effet de la variation du coefficient de variation du poids volumique du sol (γ) sur l'indice de fiabilité (β_{HL})

Tableau V.19 Indices de fiabilité et coefficients de variation de γ

Coefficient de variation de γ en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Coulomb	2.243	2.242	2.240	2.237	2.234	2.230	2.226
β_{HL} Rankine	2.340	2.339	2.337	2.334	2.331	2.327	2.332

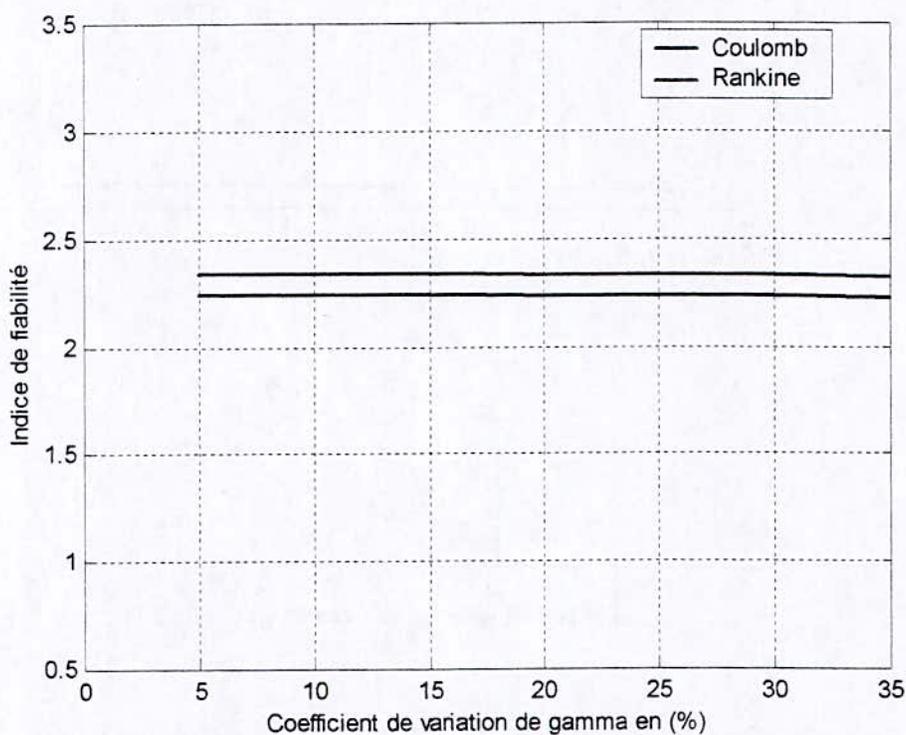


Figure V.24 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de γ

Les deux courbes sont des droites parallèles à l'axe des abscisses. La variation du coefficient de variation de γ n'a aucune influence sur l'indice fiabilité.

Ceci est peut être du au fait que γ intervient aussi bien de façon favorable (poids des terres au dessus de la fondation) que défavorable (poussée des terres sur l'ouvrage).

V.3.3 Poinçonnement

Les facteurs de sécurité déterministes sont :

$$F_s (\text{Hansen})=8.68 ; F_s (\text{Meyerhof})=5.44$$

1. Effet de la variation du coefficient de variation de l'angle de frottement interne du sol (φ) sur l'indice de fiabilité (β_{HL})

Tableau V.20 Indices de fiabilité et coefficients de variation de φ

Coefficient de variation de φ en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Hansen	2.519	2.124	1.694	1.361	1.125	0.954	0.826
β_{HL} Meyerhof	2.410	2.031	1.625	1.311	1.086	0.922	0.799

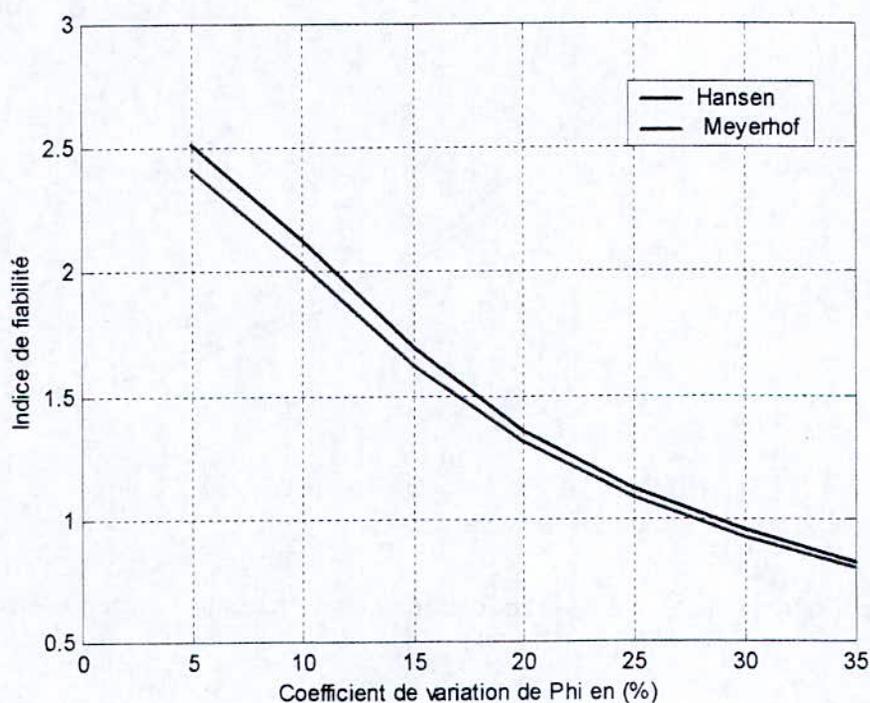


Figure V.25 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de φ

Les deux courbes sont fortement décroissantes, faiblement non linéaires. La variation du coefficient de variation de φ a une grande influence sur l'indice de fiabilité.

Pour d'importantes valeurs du coefficient de variation, les deux courbes se rejoignent.

Pour les mêmes raisons que les autres modes de ruine, ceci s'explique par le fait que le coefficient de poussée dépend fortement de φ .

3. Effet de la variation du coefficient de variation de la largeur de la fondation (b_0) sur l'indice de fiabilité (β_{HL})

Tableau V.21 Indices de fiabilité et coefficients de variation de b_0

Coefficient de variation de b_0 en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Hansen	2.678	2.124	1.616	1.272	1.041	0.878	0.758
β_{HL} Meyerhof	2.549	2.031	1.533	1.225	1.004	0.847	0.732

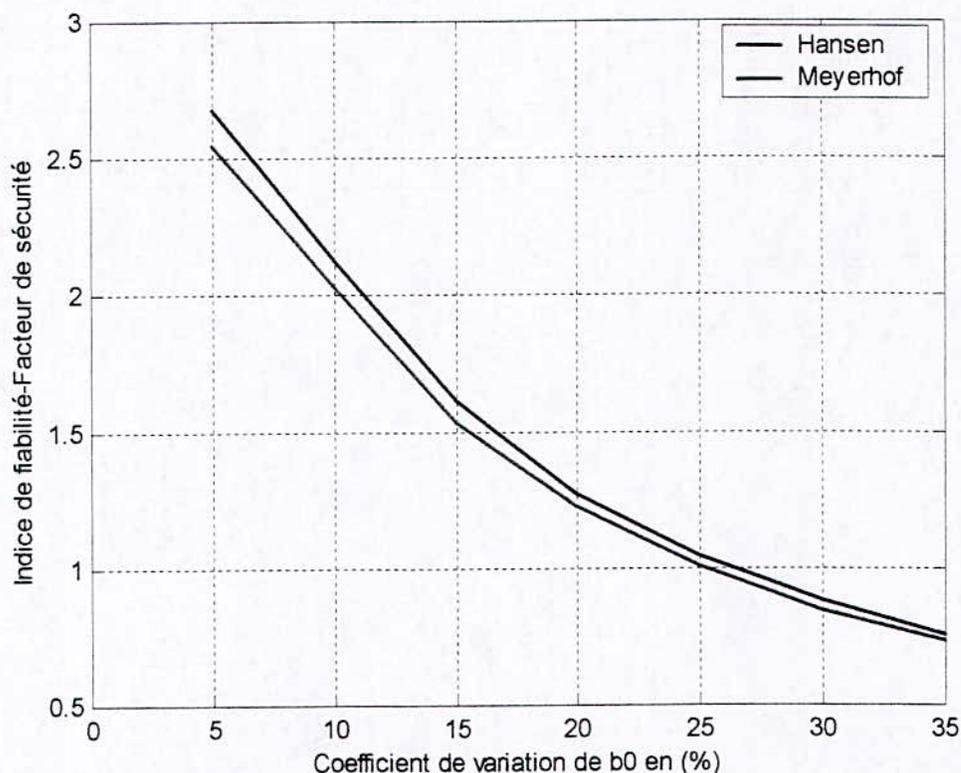


Figure V.26 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de b_0

Les deux courbes sont fortement décroissantes, non linéaires. La variation du coefficient de variation de b_0 a une grande influence sur l'indice de fiabilité.

Pour d'importantes valeurs du coefficient de variation, les deux courbes se rejoignent.

Ceci s'explique par le fait que la portance du sol d'assise est fortement liée à ce paramètre.

2. Effet de la variation du coefficient de variation de l'angle de frottement interne du sol de fondation (φ_a)

Tableau V.22 Indices de fiabilité et coefficients de variation de φ_a

Coefficient de variation de φ_a en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Hansen	2.143	2.124	2.090	2.036	1.958	1.857	1.740
β_{HL} Meyerhof	2.061	2.031	1.974	1.886	1.764	1.625	1.485

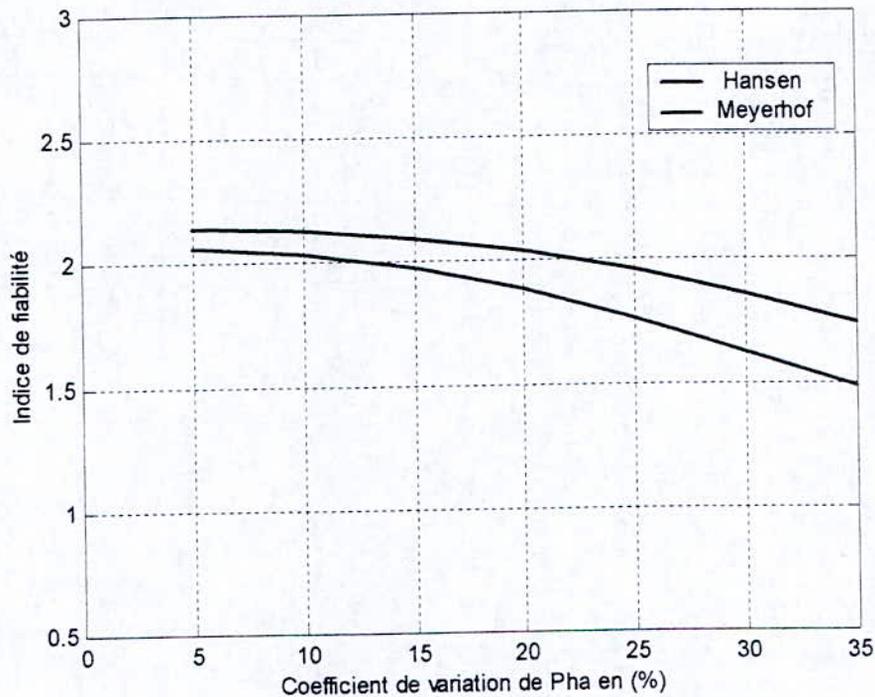


Figure V.27 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de φ_a

Les deux courbes sont décroissantes, non linéaires. La variation du coefficient de variation de φ_a a une influence sur l'indice de fiabilité.

Remarques

Le modèle de Hansen donne un facteur de sécurité plus grand que celui du modèle de Meyerhof. Pourtant, les valeurs des indices de fiabilité sont assez proches.

Les valeurs prises par les facteurs de sécurité sont très grandes, alors que celles des indices de fiabilité ne donnent que des probabilités de ruine de l'ordre de 10^{-3} .

V.4 Variation de l'indice de fiabilité et du facteur de sécurité déterministe avec la variation des paramètres les plus influents

V.4.1 Renversement

1. Effet de la variation de l'angle de frottement interne du sol derrière le mur (φ)

Tableau V.23 Indices de fiabilité et facteurs de sécurité pour différentes valeurs de φ

φ en ($^{\circ}$)	20	25	30	35	40
Indice de fiabilité (β_{HL})	1.138	1.907	2.603	3.227	3.784
Facteur de sécurité (F_s)	1.26	1.51	1.83	2.23	2.77

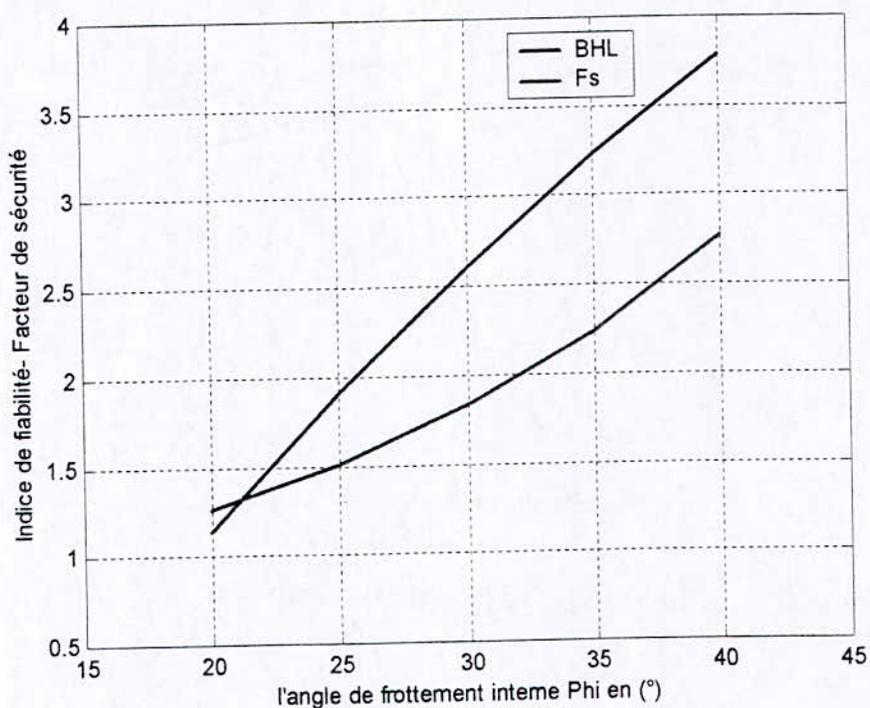


Figure V.28 – Variation de β_{HL} et F_s en fonction de φ

Comme attendu, l'augmentation de la valeur de φ s'accompagne d'une augmentation quasi linéaire de la valeur de l'indice de fiabilité et de celle du facteur de sécurité.

Les variations sont quasi linéaires.

2. Effet de la variation de la largeur de la fondation (b_0)

Tableau V.24 Indices de fiabilité et facteurs de sécurité pour différentes valeurs de b_0

b_0 (m)	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00	3.20
Indice de fiabilité (β_{HL})	0.742	1.478	2.133	2.714	3.227	3.676
Facteur de sécurité (F_s)	1.192	1.42	1.67	1.947	2.23	2.54

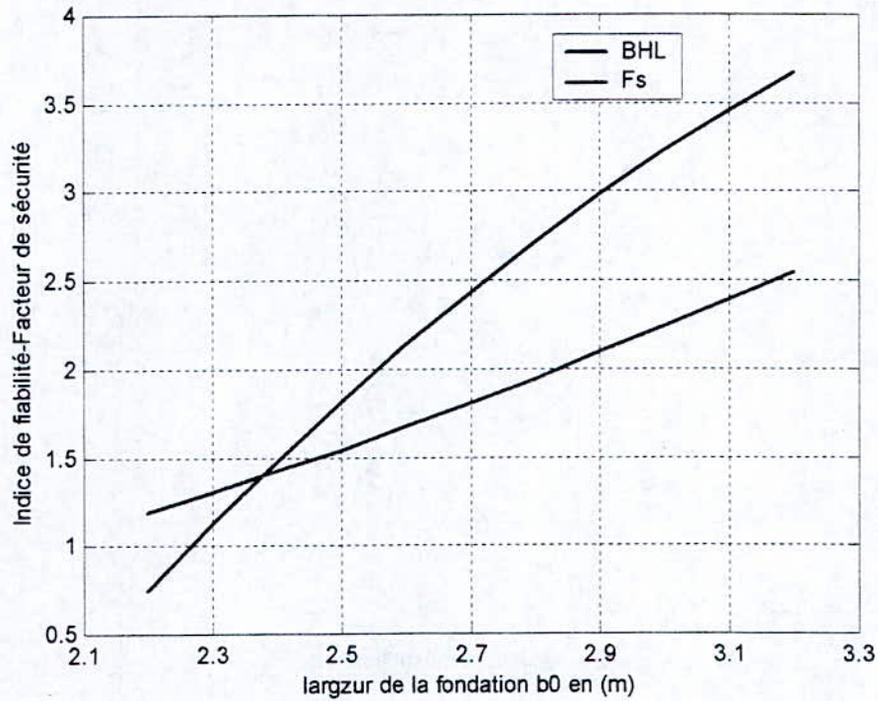
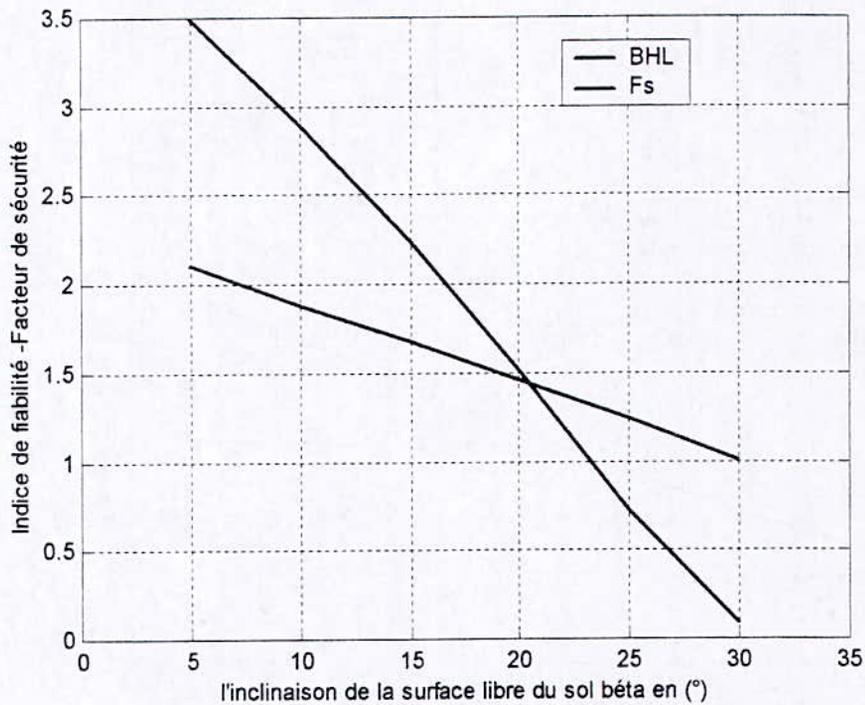


Figure V.29 : Variation de β_{HL} et F_s en fonction de b_0

L'augmentation de la valeur de b_0 s'accompagne d'une augmentation quasi linéaire de la valeur de l'indice de fiabilité et de celle du facteur de sécurité.

3. Effet de la variation de l'inclinaison de la surface libre du sol (β)**Tableau V.25** Indices de fiabilité et facteurs de sécurité pour différentes valeurs de β

β en ($^{\circ}$)	5	10	15	20	25	30
Indice de fiabilité (β_{HL})	2.984	2.543	2.043	1.469	0.804	0.042
Facteur de sécurité (F_s)	2.102	1.88	1.67	1.46	1.24	1.01

**Figure V.30** : Variation de β_{HL} et F_s en fonction de β

L'augmentation de la valeur de l'angle β s'accompagne d'une diminution quasi linéaire des valeurs de l'indice de fiabilité et du facteur de sécurité.

V.4.2 Glissement

1. Effet de la variation de l'angle de frottement interne du sol derrière le mur (φ)

Tableau V.26 Indices de fiabilité et facteurs de sécurité pour différentes valeurs de φ

φ en ($^{\circ}$)	20	25	30	35	40
Indice de fiabilité (β_{HL})	0.211	1.380	2.386	3.246	3.960
Facteur de sécurité (F_s)	1.03	1.24	1.51	1.86	2.32

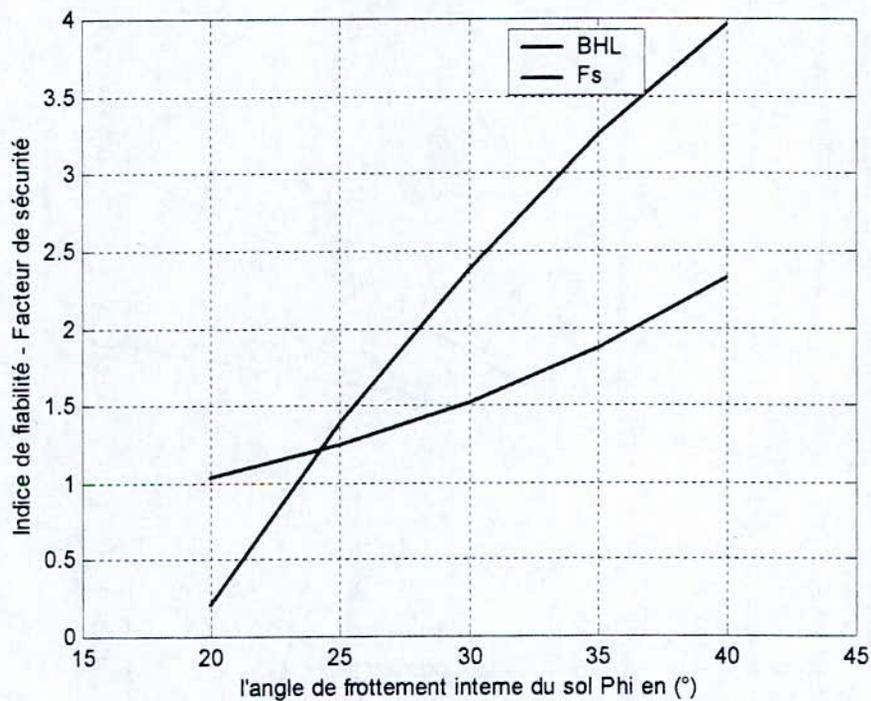


Figure V.31 : Variation de β_{HL} et F_s en fonction de φ

L'augmentation de la valeur de φ s'accompagne d'une augmentation faiblement non linéaire de la valeur de l'indice de fiabilité et de celle du facteur de sécurité de façon quasi linéaire.

2. Effet de la variation de la largeur de la fondation (b_0) sur l'indice de fiabilité

Tableau V.27 Indices de fiabilité et facteurs de sécurité pour différentes valeurs de b_0

b_0 (m)	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00	3.20
Indice de fiabilité (β_{HL})	0.763	1.190	1.575	1.923	2.242	2.534
Facteur de sécurité (Fs)	1.17	1.27	1.38	1.43	1.59	1.69

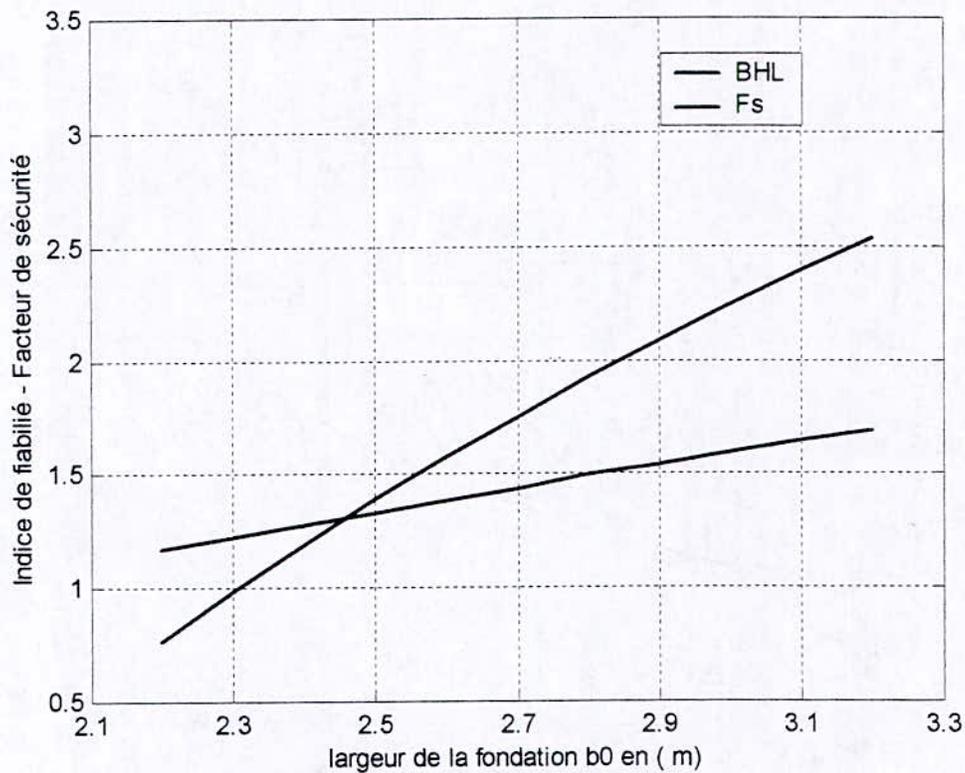


Figure V.32 : Variation de β_{HL} et F_s en fonction de b_0

L'augmentation de la valeur de b_0 s'accompagne d'une augmentation quasi linéaire de la valeur de l'indice de fiabilité et de celle du facteur de sécurité.

3. Effet de la variation de l'angle de frottement interne du sol de fondation (φ_a)

Tableau V.28 Indices de fiabilité et facteurs de sécurité pour différentes valeurs de φ_a

φ_a en ($^\circ$)	10	15	20	25	30	35	40
Indice de fiabilité (β_{HL})	0.412	0.852	1.248	1.975	2.638	3.243	3.790
Facteur de sécurité (Fs)	0.92	1.08	1.26	1.44	1.64	1.86	2.11

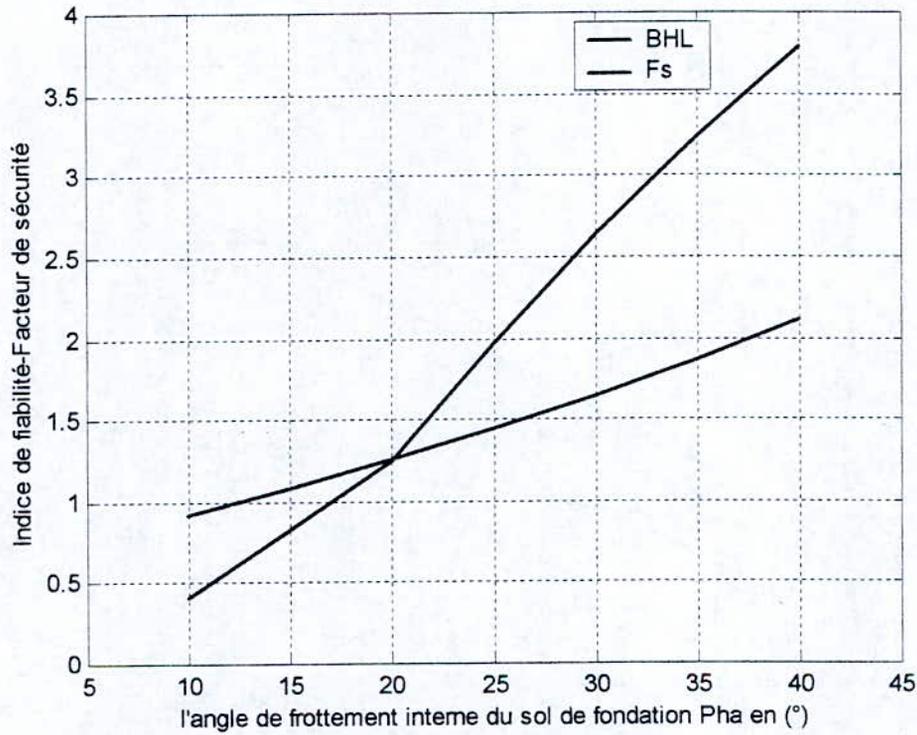
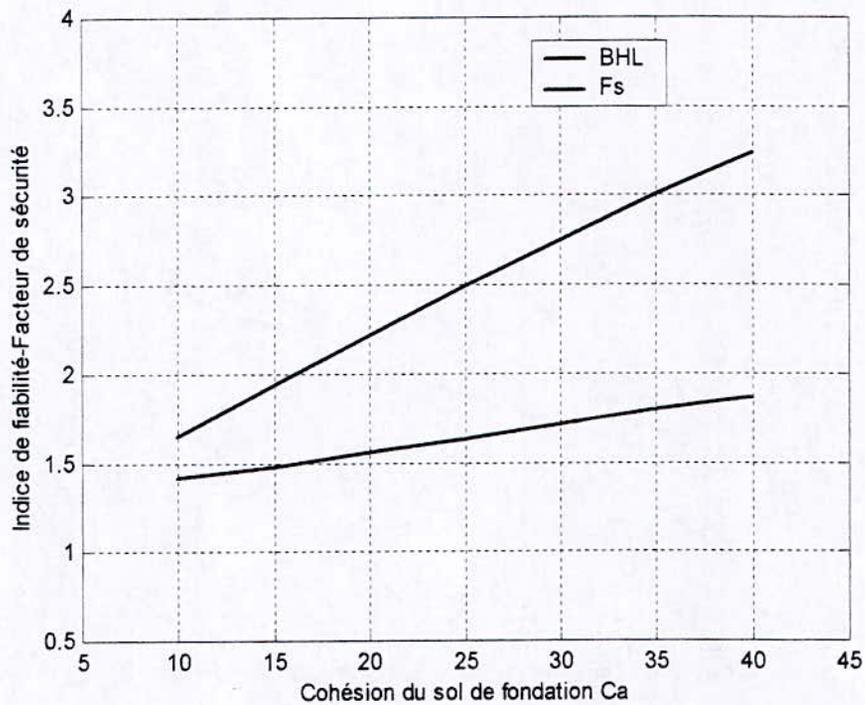


Figure V.33 : Variation de β_{HL} et F_s en fonction de (φ_a)

L'augmentation de la valeur de φ_a s'accompagne d'une augmentation quasi linéaire de la valeur de l'indice de fiabilité et de celle du facteur de sécurité.

4. Effet de la variation du terme de cohésion du sol de fondation (C_a)**Tableau V.29** Indices de fiabilité et facteurs de sécurité pour différentes valeurs de C_a

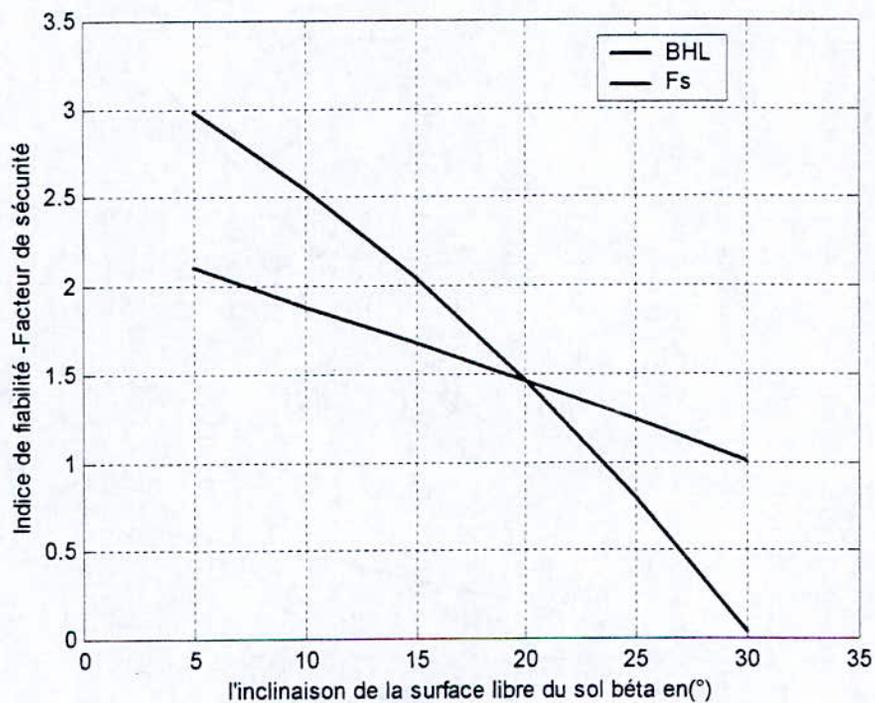
C_a en (KN/m^2)	10	15	20	25	30	35	40
Indice de fiabilité (β_{HL})	1.645	1.936	2.210	2.490	2.752	3.002	3.242
Facteur de sécurité (F_s)	1.41	1.48	1.56	1.63	1.71	1.79	1.86

**Figure V.34** : Variation de β_{HL} et F_s en fonction de (C_a)

L'augmentation de la valeur de C_a s'accompagne d'une augmentation de la valeur de l'indice de fiabilité et de celle du facteur de sécurité.

5. Effet de la variation de l'inclinaison de la surface libre du sol (β)**Tableau V.30** Indices de fiabilité et facteurs de sécurité pour différentes valeurs de β

β en ($^\circ$)	5	10	15	20	25	30
Indice de fiabilité (β_{HL})	3.491	2.898	2.242	1.517	0.73	0.093
Facteur de sécurité (F_s)	2.102	1.88	1.67	1.46	1.24	1.01

**Figure V.35** : Variation de β_{HL} et F_s en fonction de β

L'augmentation de la valeur de l'angle β s'accompagne d'une diminution des valeurs de l'indice de fiabilité et du facteur de sécurité.

V.4.3 Poinçonnement

1. Effet de la variation de l'angle de frottement du sol derrière le mur (φ)

Tableau V.31 Indices de fiabilité et facteurs de sécurité pour différentes valeurs de φ

φ en ($^{\circ}$)	25	30	35	40
Indice de fiabilité (β_{HL})	0.106	1.232	2.124	2.858
Facteur de sécurité (Fs)	1.201	4.45	8.68	13.37

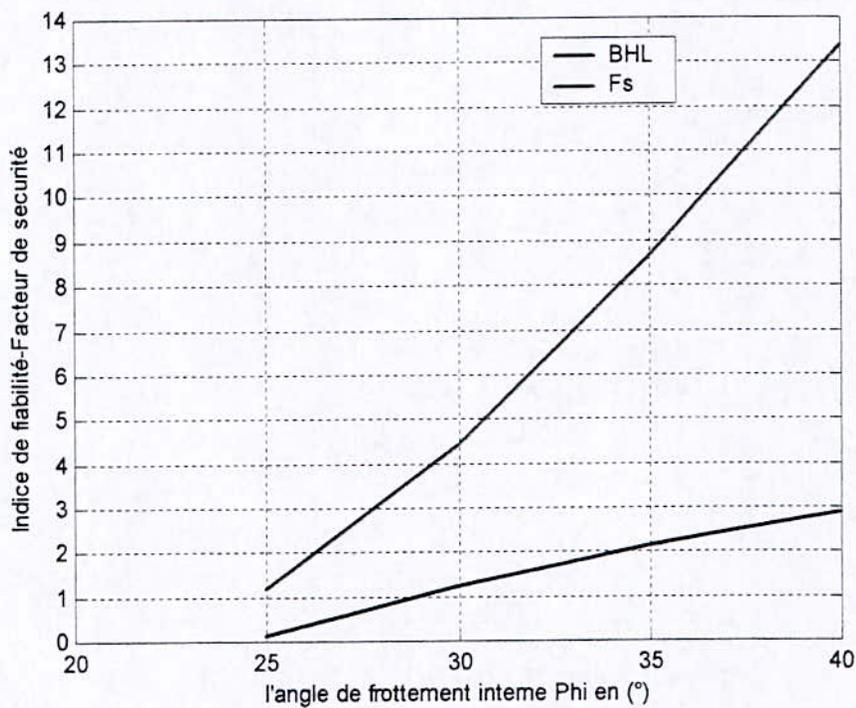


Figure V.36 : Variation de β_{HL} et F_s en fonction de φ

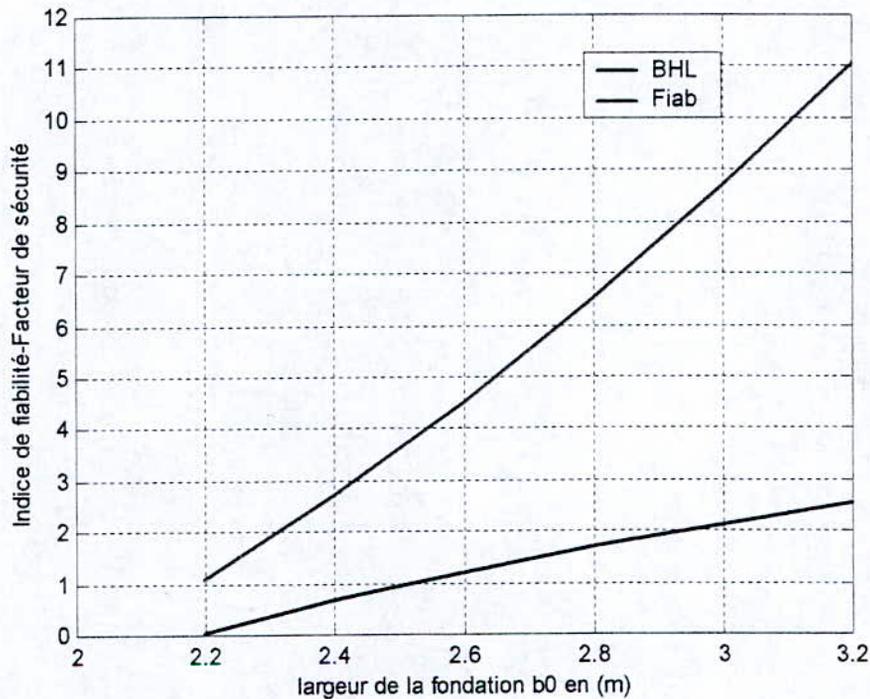
L'augmentation de la valeur de φ s'accompagne d'une augmentation de la valeur de l'indice de fiabilité et de celle du facteur de sécurité.

Le facteur de sécurité est plus affecté que l'indice de fiabilité.

Pour de fortes valeurs du facteur de sécurité, on s'attend à obtenir des probabilités de ruines très faibles. Ceci n'est pas vérifié dans notre cas. Pour $F_s=8,68$ on a $\beta_{HL}=2,12$ qui donne une probabilité de ruine $P_f=0,017$ ce qui n'est pas assez faible.

2. Effet de la variation de la largeur de la fondation (b_0)**Tableau V.32** Indices de fiabilité et facteurs de sécurité pour différentes valeurs de b_0

b_0 (m)	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00	3.20
Indice de fiabilité (β_{HL})	0.042	0.665	1.199	1.686	2.124	2.52
Facteur de sécurité (F_s)	1.095	2.696	4.497	6.494	8.681	11.056

**Figure V.37** : Variation de β_{HL} et F_s en fonction de b_0

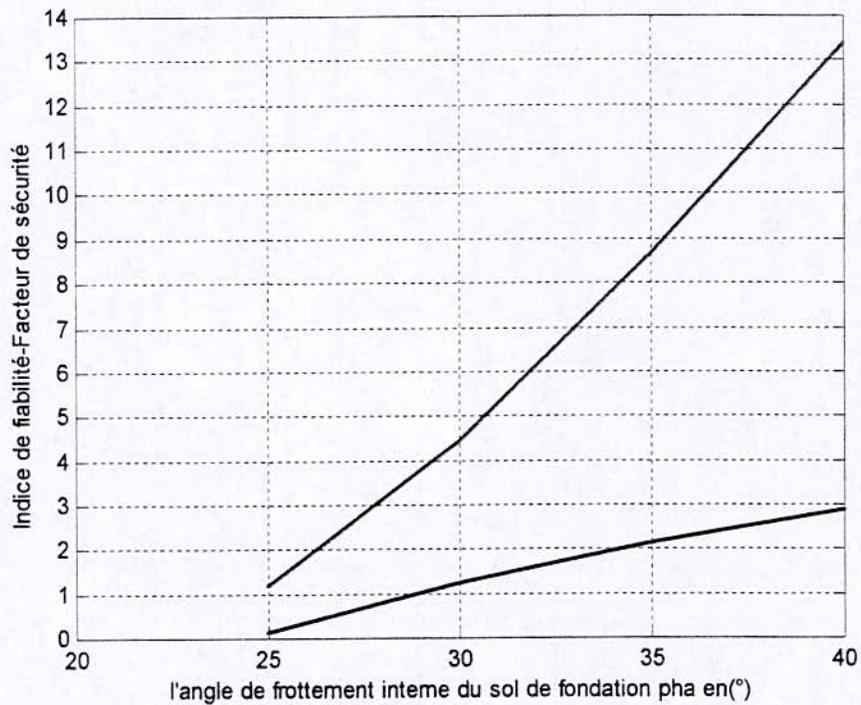
L'augmentation de la valeur de b_0 s'accompagne d'une augmentation de la valeur de l'indice de fiabilité et de celle du facteur de sécurité.

Le facteur de sécurité est plus affecté que l'indice de fiabilité.

On peut faire les mêmes remarques que pour le cas précédent, c'est à dire que pour $F_s=8,68$, l'indice de fiabilité est de l'ordre de 2,12.

3. Effet de la variation de l'angle de frottement interne du sol de fondation (φ_a)**Tableau V.33** Indices de fiabilité et facteurs de sécurité pour différentes valeurs de φ_a

φ_a en ($^\circ$)	25	30	35	40
Indice de fiabilité (β_{HL})	0.106	1.232	2.124	2.858
Facteur de sécurité (Fs)	1.201	4.45	8.68	13.37

**Figure V.38** : Variation de β_{HL} et F_s en fonction de φ_a

L'augmentation de la valeur de φ_a s'accompagne d'une augmentation de la valeur de l'indice de fiabilité et de celle du facteur de sécurité.

L'augmentation de la valeur du facteur de sécurité est plus importante que celle de l'indice de fiabilité.

V.5 Analyses de sensibilité

Le but de cette analyse est de mesurer l'importance des différents paramètres à travers les facteurs de sensibilité « valeurs α_i » obtenus à partir des méthodes FORM.

Nous nous intéressons aux valeurs des α_i^2 qui représentent les facteurs d'influences.

Comme nous l'avons déjà cité (chapitre II), si α_i^2 d'une variable donnée tend vers 0, celle-ci peut être remplacée dans l'analyse probabiliste par sa valeur moyenne. C'est une variable déterminée. Par contre, si α_i^2 tend vers 1, il convient de déterminer précisément l'incertitude qui l'affecte.

V.5.1 Renversement

Tableau V.34 : Coefficients d'influence en fonction des coefficients de variation des paramètres considérés (les autres étant fixé à 10%)

Coefficients de variation	5	10	15	20	25	30	35
α_φ^2	0.0536	0.2054	0.4108	0.6233	0.8238	0.9562	0.9810
α_β^2	0.0015	0.0062	0.0148	0.0286	0.0505	0.0875	0.1649
α_δ^2	0.0046	0.0186	0.0424	0.0762	0.1202	0.1735	0.2345
α_q^2	0.0046	0.0186	0.0424	0.0762	0.1202	0.1735	0.2345
α_γ^2	0.0046	0.0186	0.0424	0.0762	0.1202	0.1735	0.2345
$\alpha_{h_a}^2$	0.0339	0.1153	0.2101	0.2992	0.3775	0.4452	0.5035
$\alpha_{b_0}^2$	0.1584	0.6030	0.8354	0.9132	0.9464	0.9635	0.9735
$\alpha_{h_0}^2$	0.0044	0.0182	0.0431	0.0825	0.1416	0.2269	0.3413
$\alpha_{b_1}^2$	0.0061	0.0302	0.1049	0.3734	0.7259	0.8545	0.9076

Lorsque les valeurs des coefficients de variations atteignent 35%, c'est à dire que les incertitudes sont assez importantes, on constate que les coefficients d'influence des paramètres φ , b_0 et b_1 tendent vers 1.

Le coefficient d'importance du paramètre h_a ne tend pas vers 1 mais elle est significative.

De ce fait, les paramètres φ , b_0 , b_1 ainsi que h_a doivent être considérées comme étant des variables aléatoires dans une étude probabiliste.

V.5.2 Glissement

Tableau V.35 : Coefficients d'influence en fonction des coefficients de variation des paramètres considérés (les autres étant fixé à 10%)

Coefficient de variation	5	10	15	20	25	30	35
α_{φ}^2	0.2559	0.5897	0.7689	0.8574	0.9046	0.9321	0.9494
α_{β}^2	0.0057	0.0228	0.0519	0.0935	0.1478	0.2135	0.2882
α_{δ}^2	0.0002	0.0008	0.0018	0.0033	0.0053	0.0079	0.0112
α_q^2	0.0083	0.0308	0.0621	0.0968	0.1317	0.1649	0.1958
α_{γ}^2	0.0003	0.0014	0.0030	0.0053	0.0081	0.0114	0.0151
$\alpha_{b_0}^2$	0.0098	0.0389	0.0864	0.1499	0.2250	0.3058	0.3862
$\alpha_{h_0}^2$	0.0061	0.0245	0.0556	0.0992	0.1552	0.2217	0.2959
$\alpha_{b_1}^2$	0.0195	0.0778	0.1724	0.2930	0.4204	0.5360	0.6304
$\alpha_{\varphi_a}^2$	0.0521	0.1851	0.3481	0.4981	0.6170	0.7050	0.7688
$\alpha_{C_a}^2$	0.0071	0.0282	0.0629	0.1101	0.1676	0.2323	0.3005

Les facteurs de sensibilité des paramètres φ , φ_a et b_1 tendent vers 1 pour de fortes valeurs des coefficients de variation.

Pour ce mode de ruine φ , φ_a et b_1 doivent être considérées comme étant des variables aléatoires et les autres comme des variables déterminées.

V.5.3 Poinçonnement (modèle de Hansen)

Tableau V.36: Coefficients d'influence en fonction des coefficients de variation des paramètres considérés (les deux autres étant fixé à 10%)

Coefficient de variation	5	10	15	20	25	30	35
α_{φ}^2	0.1011	0.3717	0.6309	0.7791	0.8569	0.9005	0.9270
$\alpha_{b_0}^2$	0.2034	0.6071	0.8114	0.8933	0.9319	0.9528	0.9654
$\alpha_{\varphi_a}^2$	0.0049	0.0212	0.0537	0.1108	0.2003	0.3175	0.4413

La sensibilité des paramètres φ et b_0 est plus importante que φ_a . En effet, leurs coefficients d'influence tendent vers 1 pour les valeurs des coefficients de variation dépassant 15%.

V.6 Méthodes de niveau III

Pour cette étude, nous avons considéré pour chaque mode de ruine un vecteur aléatoire X à trois degrés de liberté :

- Renversement $\longrightarrow X = [\varphi, b_0, ha]$
- Glissement $\longrightarrow X = [\varphi, b_0, \varphi_a]$
- Poinçonnement $\longrightarrow X = [\varphi, b_0, \varphi_a]$

Toutes les programmations découlent des formules explicitées dans le chapitre III. Les programmes ont été validés à partir d'exemples tirés de la littérature [1,6, 23]. Pour les trois méthodes de réduction de variance, le calcul d'erreur s'effectue de la manière suivante : nous réaliserons à chaque simulation 10 tirages (voir annexe IV). Pour chaque tirage nous calculerons P_f et nous en déduirons β . La valeur finale estimée de β correspondra donc à la valeur moyenne et l'erreur à son écart-type.

V.6.1 Application de la simulation Monté Carlo

Comme nous l'avons vu précédemment, la programmation est très simple. Nous choisirons de simuler les variables aléatoires après avoir effectué la transformation dans l'espace standard.

1/ Renversement

Tableau V.37 : Résultats de la simulation Monté Carlo

Nombre d'appel à la fonction d'état limite	β estimé à partir de P_f pour 10 tirages	Erreur sur β $Err(\beta)$	Coefficient de variation
1000	2,44103838	0,11491309	0,0470755
10000	2,45298635	0,03517584	0,01434001
100000	2,43345359	0,00992259	0,00407758
1000000	2,431424599	0,003048204	0,00125367

2/ Glissement

Tableau V.38 : Résultats de la simulation Monté Carlo

Nombre d'appel à la fonction d'état limite	β estimé à partir de P_f pour 10 tirages	Erreur sur β $Err(\beta)$	Coefficient de variation
1000	2,66438587	0,2476708	0,09295606
10000	2,65996584	0,06366119	0,02393309
100000	2,61532646	0,01363774	0,00521455
1000000	2,62132831	0,00612421	0,0023363

3/ Poinçonnement (modèle de Hansen)

Tableau V.39 : Résultats de la simulation Monté Carlo

Nombre d'appel à la fonction d'état limite	β estimé à partir de P_f pour 10 tirages	Erreur sur β $Err(\beta)$	Coefficient de variation
1000	2,094889	0,12193191	0,05820447
10000	2,06615502	0,02752548	0,01332208
100000	2,06714625	0,01504035	0,0072759
1000000	2,07120649	0,00268841	0,00129799

Les résultats commencent à présenter de l'intérêt pour un tirage minimal de 10 000 simulations. En effet nous obtenons alors une incertitude sur le troisième chiffre significatif.

Nous constatons donc facilement que la faiblesse de la vitesse de convergence reste tout de même un handicap.

V.6.2 Méthodes de réduction de variance

V.6.2.1 Tirage conditionné

Les simulations conditionnées sont faites par réjection : on simule des vecteurs aléatoires et on ne retient que ceux dont la norme est supérieure à l'indice de fiabilité.

1/ Renversement

Tableau V.40 : Résultats du tirage conditionné

Nombre d'appel à la fonction d'état limite	β estimé à partir de P_f pour 10 tirages	Erreur sur β $Err(\beta)$	Coefficient de variation
100	2,489088946	0,144424543	0,058023054
1000	2,483043016	0,187236926	0,075406235
10000	2,46836144	0,02524012	0,01022546
100000	2,47855923	0,01440061	0,00581007

2/ Glissement

Tableau V.41 : Résultats du tirage conditionné

Nombre d'appel à la fonction d'état limite	β estimé à partir de P_f pour 10 tirages	Erreur sur β $Err(\beta)$	Coefficient de variation
100			
1000	2,66824485	0,20978962	0,07862457
10000	2,67411689	0,05639028	0,02108744
100000	2,6556414	0,0121365	0,00457008

3/ Poinçonnement (modèle de Hansen)

Tableau V.42 : Résultats du tirage conditionné

Nombre d'appel à la fonction d'état limite	β estimé à partir de P_f pour 10 tirages	Erreur sur β $Err(\beta)$	Coefficient de variation
100	2,06789041	0,23734962	0,11477863
1000	2,1368852	0,07022542	0,03286345
10000	2,13661298	0,03414215	0,01597957
100000	2,13653278	0,0072521	0,00339433

Pour le renversement et le glissement, de même que pour la méthode de Monté Carlo, les résultats présentent de l'intérêt à partir de 10 000 simulations puisque là aussi nous obtenons une incertitude sur le troisième chiffre significatif. Cependant, le conditionnement apporte une amélioration puisque à ce stade l'écart type est réduit.

Le nombre de simulations pour lequel les résultats sont intéressants est le même que pour la méthode de Monté Carlo classique, ceci est dû au fait que la sphère de conditionnement est petite.

Puisque le rayon de la sphère de conditionnement n'est pas trop grand, il était prévisible de ne pas obtenir d'améliorations avec cette méthode. Il aurait été plus intéressant de l'appliquer pour de très faibles probabilités de ruines.

V.6.2.2 Tirage d'importance

On se place dans l'espace réduit normé et on dirige la simulation vers le point le plus probable u^* . Nous simulerons les vecteurs aléatoires en u^* au lieu de les simuler à l'origine.

1/ Renversement

Tableau V.43 : Résultats du tirage d'importance

Nombre d'appel à la fonction d'état limite	β estimé à partir de P_f pour 10 tirages	Erreur sur β $Err(\beta)$	Coefficient de variation
100	2,43571652	0,06268705	0,02573659
1000	2,42935284	0,01764071	0,00726149
10000	2,43629947	0,00596382	0,0024479
100000	2,43094439	0,00322475	0,00132654

2/ Glissement

Tableau V.44 : Résultats du tirage d'importance

Nombre d'appel à la fonction d'état limite	β estimé à partir de P_f pour 10 tirages	Erreur sur β $Err(\beta)$	Coefficient de variation
100	2,62332595	0,04865831	0,01854833
1000	2,63563601	0,0275858	0,01046647
10000	2,62534266	0,01116746	0,00425372
100000	2,62140512	0,01008883	0,00384864

3/ Poinçonnement (modèle de Hansen)

Tableau V.45 : Résultats du tirage d'importance

Nombre d'appel à la fonction d'état limite	β estimé à partir de P_f pour 10 tirages	Erreur sur β $Err(\beta)$	Coefficient de variation
100	2,09626659	0,03118771	0,01487774
1000	2,06593296	0,01694796	0,00820354
10000	2,07110889	0,01154458	0,0055741
100000	2,06949397	0,00207501	0,00100266

Dans ce cas, on constate que le gain en nombre de simulations est très important par rapport à la méthode de Monté Carlo classique et celle du conditionnement probabiliste. En effet, les résultats obtenus sont intéressants avec 100 simulations où l'on obtient une incertitude sur le troisième chiffre significatif.

Ces résultats nous indiquent qu'avec 100 tirages nous obtenons 3 chiffres significatifs sur β alors qu'il est nécessaire de faire 10 000 simulations avec Monté Carlo.

V.6.2.3 Tirage d'importance conditionné

La convergence est accélérée par le fait que l'on combine les deux méthodes : le conditionnement et le tirage d'importance.

1/ Renversement

Tableau V.45 : Résultats du tirage d'importance conditionné

Nombre d'appel à la fonction d'état limite	β estimé à partir de P_f pour 10 tirages	Erreur sur β $Err(\beta)$	Coefficient de variation
100	2,42371167	0,05040448	0,0207964
1000	2,43734289	0,02337904	0,00959202
10000	2,4345672	0,01529146	0,00628098
100000	2,43532904	0,00329479	0,00256656

2/ Glissement

Tableau V.46 : Résultats du tirage d'importance conditionné

Nombre d'appel à la fonction d'état limite	β estimé à partir de P_f pour 10 tirages	Erreur sur β $Err(\beta)$	Coefficient de variation
100	2,64260839	0,09800494	0,03708644
1000	2,62414664	0,02101199	0,00800717
10000	2,63275684	0,01886453	0,00716532
100000	2,62214362	0,00826121	0,00315056

3/ Poinçonnement (modèle de Hansen)

Tableau V.47 : Résultats du tirage d'importance conditionné

Nombre d'appel à la fonction d'état limite	β estimé à partir de P_f pour 10 tirages	Erreur sur β $Err(\beta)$	Coefficient de variation
100	2,05843713	0,05112572	0,02483716
1000	2,07524104	0,01357559	0,00654169
10000	2,07122822	0,00552282	0,00266645
100000	2,07034642	0,00157735	0,00076188

Les améliorations sont similaires que celles obtenues avec la méthode des tirages d'importance. L'effet du conditionnement n'est pas perceptible à cause des raisons que nous avons su-cité (II.1).

V.6.3 Comparaison entre les méthodes (niveau II et niveau III)

Nous dressons le bilan des différents résultats pour chaque mode de ruine.

V.6.3.1 Renversement

Tableau V.48 : Comparaison entre les différentes méthodes

Méthodes de calcul	Estimation de β	Erreur sur β
FORM	2.4546	
Monté Carlo (1000 000 tirages)	2.4314	0.0030
Tirage conditionné (100 000 tirages)	2.4785	0.0144
Tirage d'importance (100 000 tirages)	2.4309	0.0032
Tirage d'importance conditionné (100 000 tirages)	2.4353	0.0033

V.6.3.2 Glissement

Tableau V.49 : Comparaison entre les différentes méthodes

Méthodes de calcul	Estimation de β	Erreur sur β
FORM	2.6350	
Monté Carlo (1000 000 tirages)	2.6213	0.0061
Tirage conditionné (100 000 tirages)	2.6556	0.0121
Tirage d'importance (100 000 tirages)	2.6214	0.010
Tirage d'importance conditionné (100 000 tirages)	2.6221	0.0082

V.6.3.3 Poinçonnement (modèle de Hansen)

Tableau V.50 : Comparaison entre les différentes méthodes

Méthodes de calcul	Estimation de β	Erreur sur β
FORM	2.1219	
Monté Carlo (1000 000 tirages)	2.0712	0.0026
Tirage conditionné (100 000 tirages)	2.1365	0.0072
Tirage d'importance (100 000 tirages)	2.0694	0.0020
Tirage d'importance conditionné (100 000 tirages)	2.0703	0.00157

La méthode FORM n'est pas très satisfaisante à cause des courbures qui ne sont pas négligeables, de plus il est impossible d'effectuer un calcul d'erreur.

On constate une amélioration des résultats obtenus avec les méthodes de tirage d'importance et de tirage d'importance conditionné. En effet, pour 100 000 simulations on obtient des écarts types de l'ordre de ceux obtenus avec la méthode de Monté Carlo pour 1000 000 de simulations.

V.7 Cas de variables aléatoires normales corrélées

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés au cas de variables aléatoires normalement distribuées et indépendantes. Cependant, parmi les paramètres physiques et mécaniques qui décrivent les propriétés des sols, certains sont reliés par des expressions mathématiques intangibles. Pour d'autres paramètres il n'existe pas de telles relations fonctionnelles. Pourtant, on sent bien que les valeurs des paramètres d'un sol ne sont pas totalement indépendantes : plus un sable est dense, plus sa résistance est grande c'est-à-dire que la valeur de son angle de frottement interne est élevée [21].

L'objectif de cette étude sera de montrer le rôle que peut avoir la corrélation entre variables sur l'indice de fiabilité.

On considère le vecteur aléatoire à trois degrés de liberté :

$$X = [\varphi, b_0, \gamma], \text{ et on étudie le cas de ruine par renversement.}$$

ρ_{ij} : représentent les coefficients de corrélation.

c_i : représentent les coefficients de variation des paramètres considérés.

V.7.1 Cas de corrélation entre deux variables (φ et γ)

a/ Premier cas :

$$\varphi = 25^\circ$$

$$\gamma = 18 \text{ KN/m}^3$$

La valeur de b_0 étant ajustée de façon à obtenir un facteur de sécurité supérieur ou égal à 1,5.

Tableau V.51: Valeurs des indices de fiabilité en fonction des coefficients de corrélation et des coefficients de variation

$\rho_{\varphi\gamma}$		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
c_φ	c_γ											
10	10	2.605	2.612	2.621	2.632	2.644	2.658	2.674	2.691	2.710	2.731	2.753
10	30	2.599	2.662	2.734	2.813	2.903	3.001	3.110	3.228			
30	10	1.141	1.145	1.155	1.172	1.195	1.225	1.265	1.313	1.374	1.449	1.541
30	30	0.869	0.870	0.873	0.879	0.885	0.893	0.903	0.914	0.926	0.939	0.952

b/ Deuxième cas :

$$\varphi = 35^\circ$$

$$\gamma = 18 \text{ KN/m}^3$$

La valeur de b_0 étant ajustée de façon à obtenir un facteur de sécurité supérieur ou égal à 1,5.

Tableau V.52 : Valeurs des indices de fiabilité en fonction des coefficients de corrélation et des coefficients de variation

$\rho_{\varphi\gamma}$		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
c_φ	c_γ											
10	10	2.293	2.302	2.313	2.326	2.343	2.362	2.383	2.408	2.435	2.465	2.498
10	30	2.286	2.359	2.444	2.544	2.661	2.798	2.957	3.1285			
30	10	1.017	1.021	1.306	1.057	1.088	1.128	1.181	1.249	1.335	1.445	1.587
20	20	1.453	1.475	1.509	1.558	1.626	1.716	1.836	1.996	2.210	2.501	2.689
30	30	1.016	1.045	1.098	1.186	1.375	1.563					

L'influence du coefficient de variation de γ sur l'indice de fiabilité est fonction du coefficient de variation de φ . Les exemples traités montrent que cette influence est d'autant plus grande que le coefficient de variation de φ est grand.

Pour $c_\varphi=10\%$, l'effet de la variation de c_γ sur l'indice de fiabilité est faible.

Pour $c_\varphi=30\%$, l'effet de la variation de c_γ sur l'indice de fiabilité est plus important.

Dans la littérature les auteurs préconisent un coefficient de corrélation de 0.6 [HAAR].

Les exemples traités (Tableaux...) montrent clairement que l'effet de la corrélation entre φ et γ influence l'indice de fiabilité :

- Faiblement, lorsque les coefficients de variation respectifs de φ et γ sont faibles.
- Moyennement, lorsque ces coefficients sont importants.

De plus, l'incidence de γ c'est-à-dire son coefficient de variation, sur la fiabilité est quasiment négligeable, lorsque on n'a pas de corrélation. Mais, cette incidence n'est plus négligeable lorsque on a une forte corrélation, comme l'ont confirmé les résultats des essais [21].

Dans tous les cas, la probabilité la plus faible est obtenue lorsqu'on n'a pas de corrélation et est quasiment indépendante de γ .

L'analyse des résultats obtenus pour $\varphi=35^\circ$ et $\varphi=25^\circ$, montre que l'incidence du coefficient de corrélation n'est que légèrement augmentée lorsque φ est fortement augmenté.

V.7.2 Cas de la corrélation entre les trois variables (φ , b_0 et γ)

Etant donné que b_0 découle directement d'un calcul de stabilité obtenu pour un coefficient de sécurité supérieur à 1.5, il s'en suit qu'on peut, d'une certaine manière, considérer que φ , b_0 et γ sont fortement corrélés. Le tableau ci-dessous montre les variations de l'indice de fiabilité pour diverses situations possibles suivant des valeurs du coefficient de variation d'une part, et des coefficients de corrélation d'autre part.

Données :

$$\varphi = 30^\circ$$

$$\gamma = 18 \text{ KN/m}^3$$

La valeur de b_0 étant ajustée de façon à obtenir un facteur de sécurité supérieur ou égal à 1,5.

Tableau V.53: Valeurs des indices de fiabilité en fonction des coefficients de corrélation et des coefficients de variation

$\rho_{\varphi\gamma}$			0.0	0.6						
$\rho_{\varphi\gamma}$			0.0	0.0	0.5			1		
$\rho_{\gamma b_0}$			0.0	0.0	0.0	0.5	0.8	0.0	0.5	0.8
c_φ	c_{b_0}	c_γ								
10	10	10	2.406	2.484	2.781	2.883	3.288	3.172	3.249	3.543
20	10	10	1.558	1.686	1.927	1.753	1.837	2.382	1.954	1.872
10	20	10	1.408	1.421	1.605	2.459		1.828	2.977	
10	10	20	2.404	2.658	2.997			3.439		
20	20	20	1.203	1.318	1.699			2.297		

La non monotonie des résultats obtenus lorsqu'une corrélation entre φ , γ et b_0 est simultanément envisagée ($\rho_{ij} \neq 0$), provient du fait que si φ intervient principalement dans la partie sollicitation, et b_0 intervient dans la partie résistance γ lui intervient dans les deux parties (sollicitation et résistance).

V.8 Stabilité d'un mur de soutènement vis à vis du renversement dans une zone sismique

On considère le cas simple d'un remblai horizontal sans surcharge (figure V.39). Le mode de ruine considéré étant le renversement.

V.8.1 Ouvrage de soutènement considéré

Les dimensions du mur ainsi que les caractéristiques du sol considérées sont les mêmes que celle de l'exemple précédent.

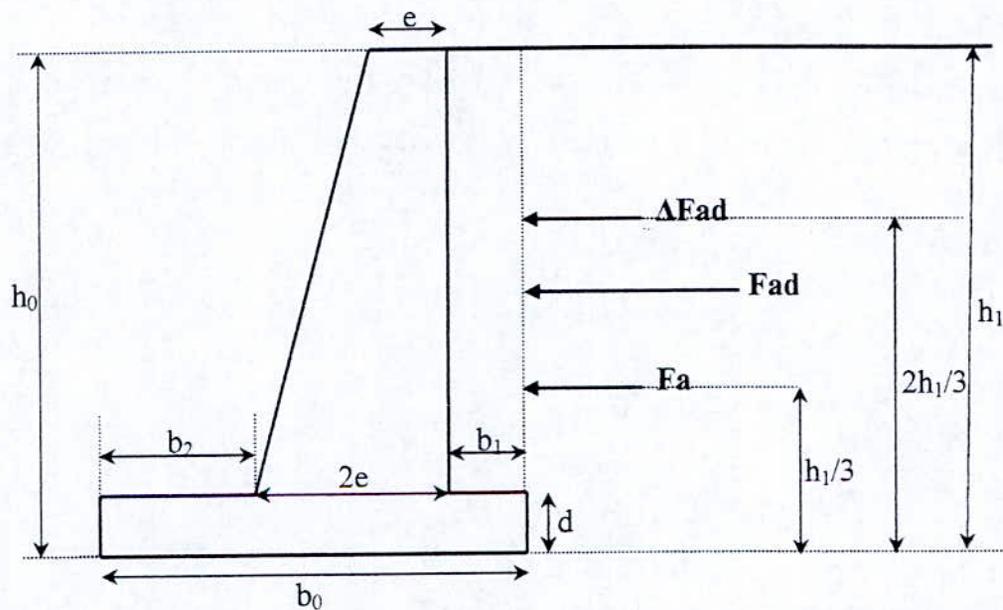


Figure V.39 : Mur de soutènement cantilever

Coefficient de poussée des terres dans le cas dynamique selon Mononobé Okabé

$$K_{ad} = \frac{\cos^2(\varphi - \lambda - \theta)}{\cos(\delta + \lambda + \theta)} \cdot \frac{1}{\left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - \beta - \theta)}{\cos(\delta + \lambda + \theta) \cos(\beta - \lambda)}} \right]^2}$$

θ est appelé angle apparent

$$\theta = \arctan \frac{k_h}{1 - k_v}$$

k_h : coefficient d'accélération horizontale en (%) de la gravité g .

k_v : coefficient d'accélération verticale en (%) de la gravité g .

Fonction d'état limite

Pour cette étude on considère un vecteur aléatoire à quatre degrés de liberté $X = [\varphi, b_0, h_{ad}, k_h]$

Avec

φ : l'angle de frottement interne du sol derrière le mur.

b_0 : la largeur de la fondation du mur.

$h_{ad} = e_{\Delta F_{ad}}$: excentricité de l'incrément sismique par rapport à la base du mur.

k_h : coefficient d'accélération horizontale.

$$z(\varphi, b_0, h_{ad}, k_h) = M_S - M_R$$

Avec M_R le moment de renversement du mur par rapport au point A. C'est celui de la poussée dynamique par rapport au talon du mur. M_S est le moment stabilisant.

$$M_R = \Delta F_{ad} \cdot e_{\Delta F_{ad}} + F_a \cdot \frac{h_1}{3}$$

$$M_S = M_{pb} + M_{ps}$$

$$\Delta F_{ad} = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{sol} \cdot h_1^2 \cdot \Delta K_{ad}$$

$$\Delta K_{ad} = K_{ad} - K_a$$

En utilisant la méthode simplifiée de Seed, on écrit :

$$\Delta K_{ad} = \frac{3}{4} k_h$$

On obtient finalement

$$z(\varphi, b_0, h_{ad}, k_h) = \frac{\gamma_{mur}^2}{P_b} \cdot \left(b_0 d + 3 \cdot e \cdot \frac{(h_0 - d)}{2} \right) \left[\frac{b_0^2 \cdot d}{2} + 3 \cdot \frac{e}{2} \cdot (b_0 - b_1 - \frac{7}{9} \cdot e) \right] + \\ + \frac{\gamma_{sol}^2}{P_s} \cdot (h_0 - d) \cdot b_1 \cdot \left[b_1 \cdot (h_0 - d) \cdot (b_0 - \frac{b_1}{2}) \right] - \left(\frac{1}{2} \cdot \gamma_{sol} \cdot h_1^2 \right) \cdot \left(K_a \cdot \frac{h_1}{3} + \Delta K_{ad} \cdot \frac{2h_1}{3} \right)$$

V.8.2 Influence des incertitudes sur l'indice de fiabilité

$$k_h=0.3$$

$$F_s(\text{Seed})=1.24$$

$$F_s(\text{Mononobé Okabé})=1.53$$

1. Effet de variation du coefficient de variation du coefficient d'accélération horizontale k_h sur l'indice de fiabilité β_{HL}

Tableau V.54 : Indices de fiabilité et coefficients de variation

Coefficient de variation de k_h en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Mononobé Okabé	1.9606	1.9206	1.8634	1.7978	1.7307	1.6646	1.5906
β_{HL} Seed	1.1365	1.1020	1.0514	0.9915	0.9282	0.8657	0.8063

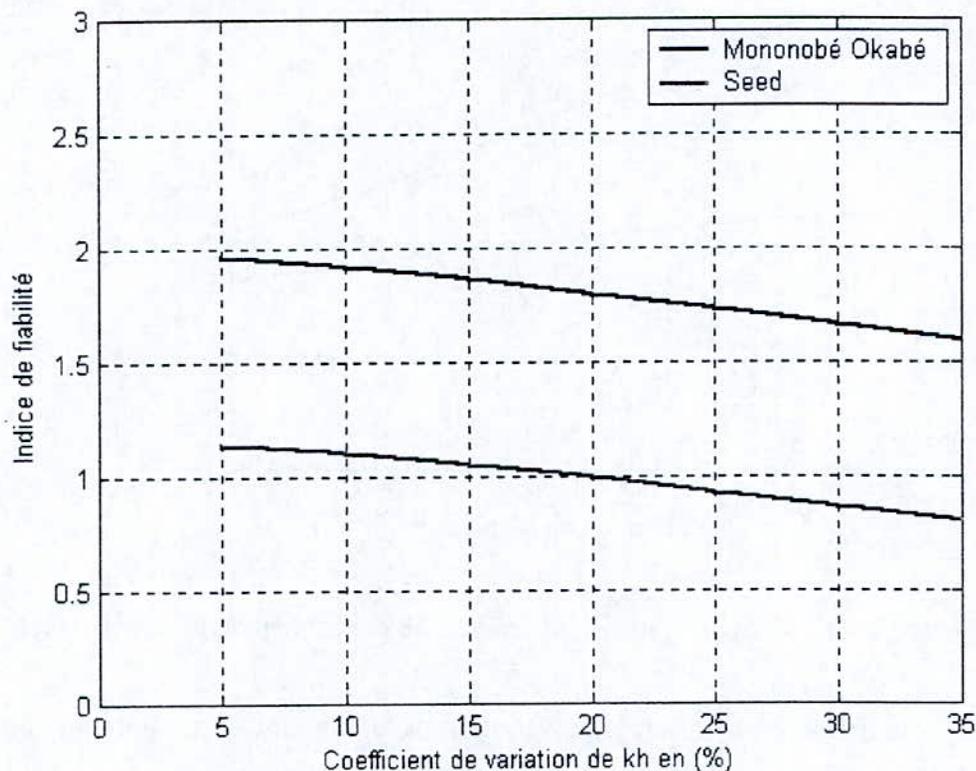


Figure V.40 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de k_h

Les deux courbes sont décroissantes, presque linéaires. La variation du coefficient de variation de k_h n'influe pas beaucoup sur la variation de l'indice de fiabilité.

Les valeurs de l'indice de fiabilité obtenues avec l'approche de Mononobé Okabé sont plus grandes que celles obtenues avec la méthode de Seed.

2. Effet de variation du coefficient de variation de l'angle de frottement interne du sol φ sur l'indice de fiabilité β_{HL}

Tableau V.55 : Indices de fiabilité et coefficients de variation

Coefficient de variation de φ en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Mononobé Okabé	2.0687	1.9206	1.7062	1.4678	1.2496	1.0720	0.9326
β_{HL} Seed	1.1356	1.1020	1.0496	0.9836	0.9109	0.8377	0.7685

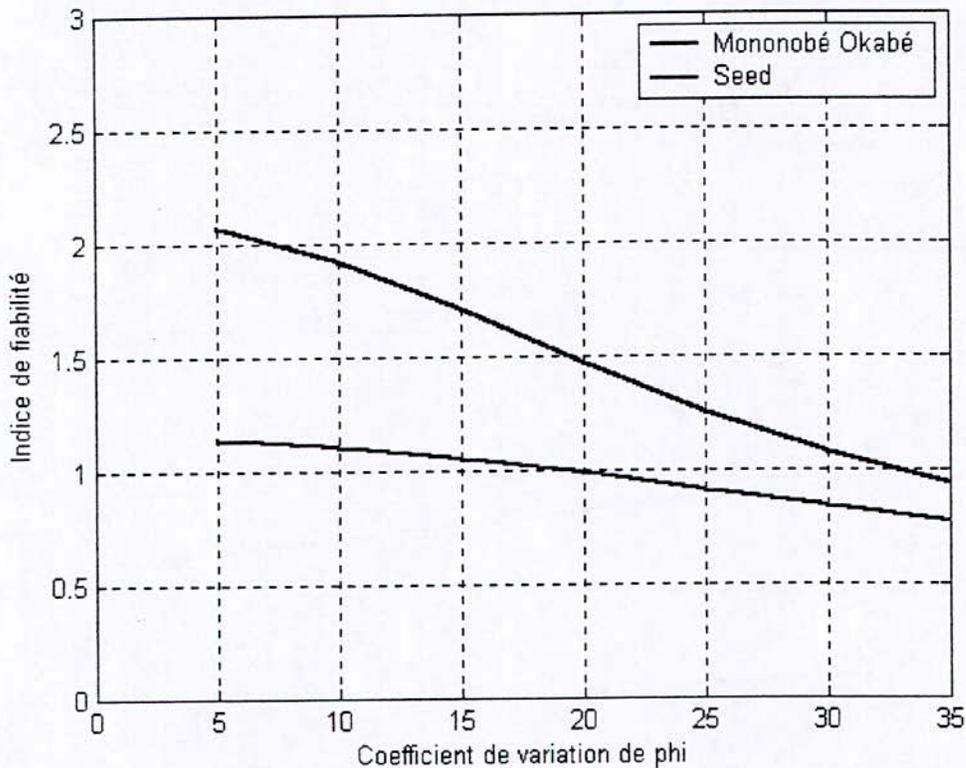


Figure V.41 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de φ

L'influence de la variation du coefficient de variation de φ sur l'indice de fiabilité apparaît beaucoup plus avec l'approche de Mononobé Okabé. En effet, le paramètre φ intervient dans la formulation du coefficient de poussée des terres statique et dynamique (K_a et K_{ad}). Avec l'approche de Seed, il n'intervient que dans le coefficient de poussée des terres statique K_a . Les valeurs de l'indice de fiabilité obtenues avec l'approche de Mononobé Okabé sont plus grandes que celles obtenues avec la méthode de Seed.

3. Effet de variation du coefficient de variation de la largeur de la fondation b_0 sur l'indice de fiabilité β_{HL}

Tableau V.56 : Indices de fiabilité et coefficients de variation

Coefficient de variation de b_0 en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Mononobé Okabé	2.8640	1.9206	1.3970	1.0835	0.8808	0.7405	0.6381
β_{HL} Seed	1.6741	1.1020	0.7881	0.6070	0.4918	0.4128	0.3553

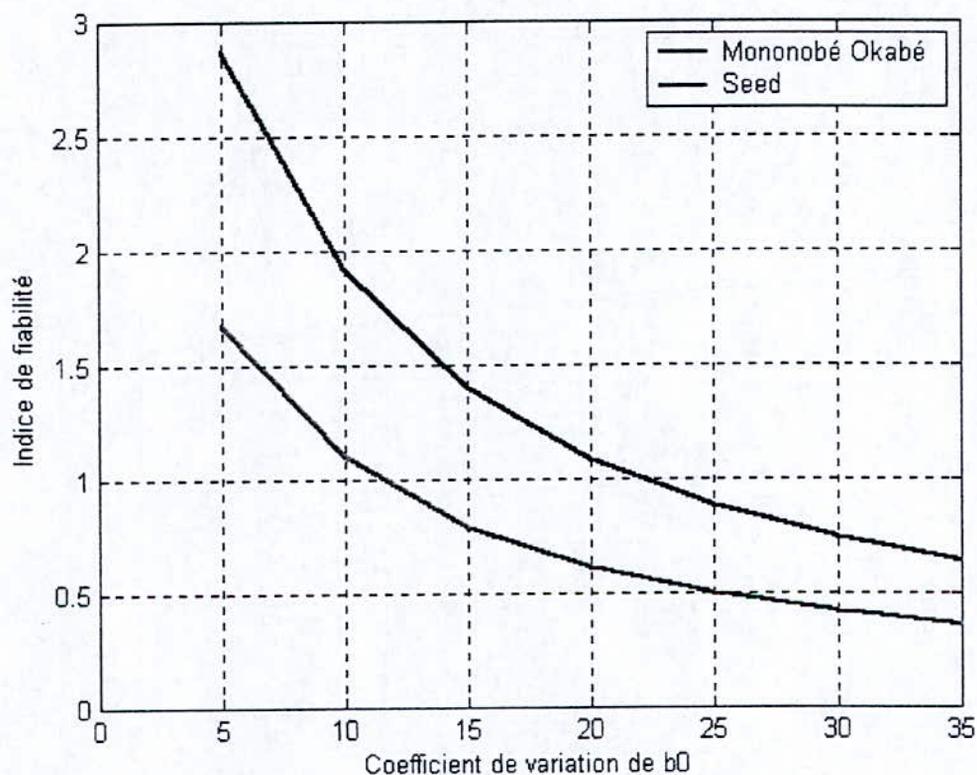


Figure V.42 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de b_0

Les deux courbes sont décroissantes, fortement non linéaires. L'influence de la variation du coefficient de variation de la largeur de la fondation b_0 sur l'indice de fiabilité est très importante.

Les valeurs de l'indice de fiabilité obtenues avec l'approche de Mononobé Okabé sont plus grandes que celles obtenues avec la méthode de Seed.

4. Effet de variation du coefficient de variation du point d'application de l'incrément sismique h_{ad} sur l'indice de fiabilité β_{HL}

Tableau V.57 : Indices de fiabilité et coefficients de variation

Coefficient de variation de h_{ad} en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} Mononobé Okabé	1.9516	1.9206	1.8727	1.8124	1.7441	1.6718	1.5984
β_{HL} Seed	1.1365	1.1020	1.0514	0.9915	0.9282	0.8657	0.8063

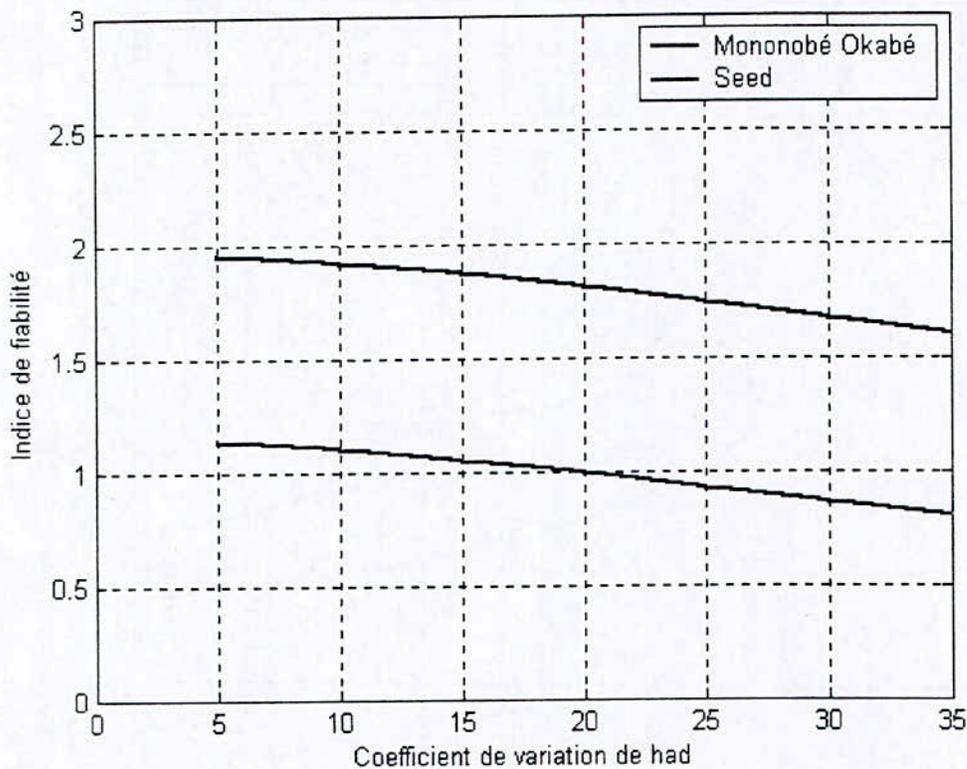


Figure V.43 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de h_{ad}

Les deux courbes sont décroissantes, presque linéaires. La variation du coefficient de variation de h_{ad} n'influe pas beaucoup sur la variation de l'indice de fiabilité.

Les valeurs de l'indice de fiabilité obtenues avec l'approche de Mononobé Okabé sont plus grandes que celles obtenues avec la méthode de Seed.

V.7.2 Variation de l'indice de fiabilité en fonction du coefficient de variation de φ pour différentes valeurs de k_h ($k_h=0.1$, $k_h=0.2$, $k_h=0.3$)

1. Approche de Mononobé Okabé

Tableau V.58 : Indices de fiabilité et coefficients de variation

Coefficient de variation de φ en (%)	5	10	15	20	25	30	35
β_{HL} ($k_h=0.1$)	3.7903	3.6004	3.2902	2.9101	2.5371	2.2150	1.9504
β_{HL} ($k_h=0.2$)	3.0078	2.8321	2.5633	2.2507	1.9500	1.6925	1.4831
β_{HL} ($k_h=0.3$)	2.0687	1.9206	1.7062	1.4678	1.2496	1.0720	0.9326

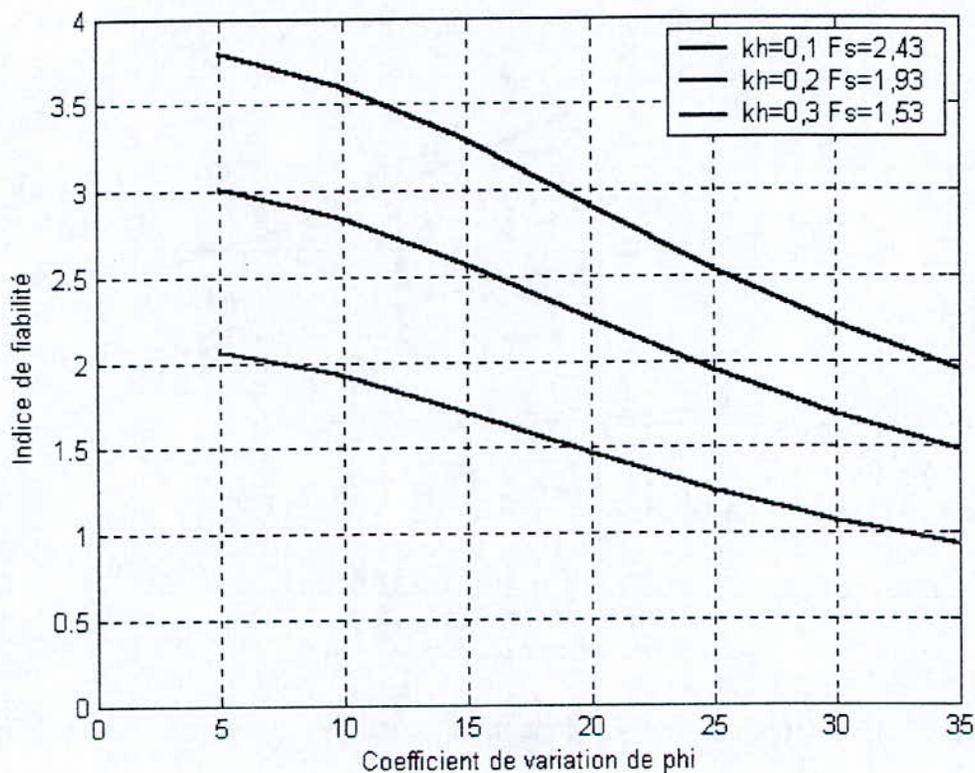


Figure V.44 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de φ

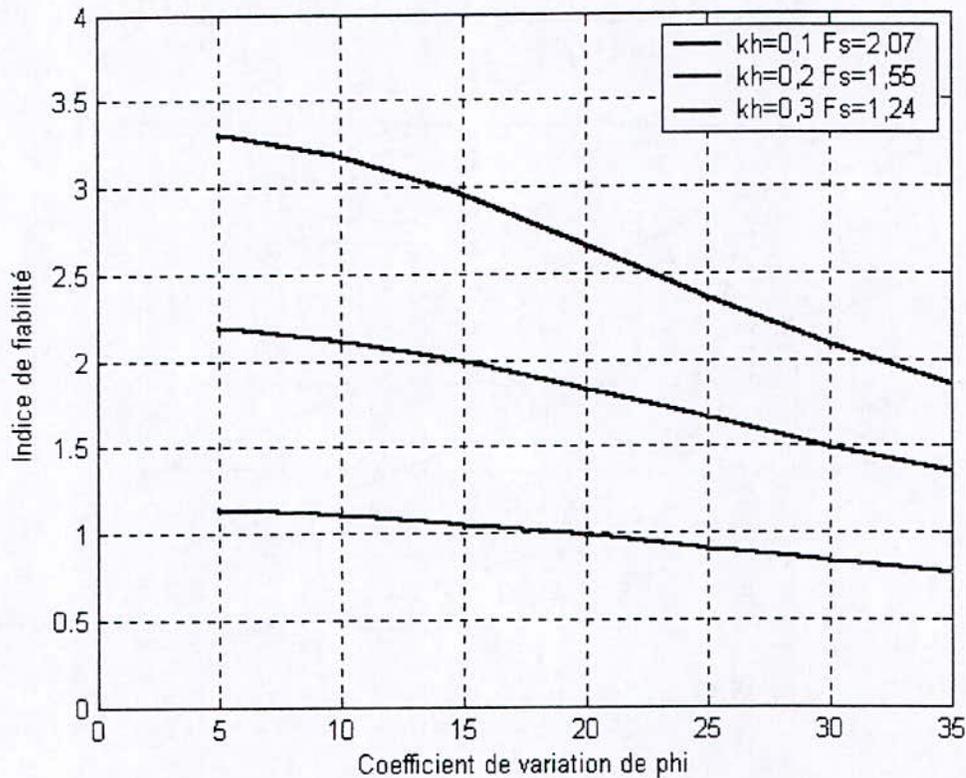
Comme on l'a vu précédemment, le coefficient de variation de l'angle de frottement interne du sol a une influence sur l'indice de fiabilité vu que les courbes sont décroissantes et non linéaires.

On constate que la sécurité de l'ouvrage vis à vis du renversement est fortement influencée par la valeur du coefficient d'accélération horizontale k_h . L'augmentation de celui-ci conduit à une chute de la valeur du facteur de sécurité déterministe ainsi que celle de l'indice de fiabilité.

2. Approche de Seed

Tableau V.59 : Indices de fiabilité et coefficients de variation

Coefficient de variation de φ en (%)	5	10	15	20	25	30	35
$\beta_{HL} (k_h=0.1)$	3.3076	3.1747	2.9516	2.6627	2.3606	2.0867	1.8540
$\beta_{HL} (k_h=0.2)$	2.1877	2.1118	1.9891	1.8319	1.6611	1.4964	1.3484
$\beta_{HL} (k_h=0.3)$	1.1356	1.1020	1.0496	0.9836	0.9109	0.8377	0.7685

Figure V.45 : Variation de β_{HL} en fonction du coefficient de variation de φ

Le coefficient de variation de l'angle de frottement interne du sol a une influence sur l'indice de fiabilité. Dans l'approche de Seed, l'influence du coefficient de variation de l'angle de frottement interne du sol n'est pas aussi importante que celle dans l'approche de Mononobé Okabé.

On constate une diminution de la valeur du facteur de sécurité et celle de l'indice de fiabilité lorsque la valeur du coefficient d'accélération horizontale k_h augmente.

V.8.3 Etude de sensibilité

1/ Approche de Mononobé Okabé

Tableau V.60 : Coefficients d'influence en fonction des coefficients de variation des paramètres considérés (les autres étant fixé à 10%)

Coefficient de variation	5	10	15	20	25	30	35
$\alpha_{k_h}^2$	0.0024	0.0086	0.0167	0.0246	0.0313	0.0360	0.0421
α_{φ}^2	0.0589	0.2318	0.4736	0.6804	0.8038	0.8705	0.9084
$\alpha_{b_0}^2$	0.2880	0.7184	0.8672	0.9241	0.9512	0.9660	0.9750
$\alpha_{h_{ad}}^2$	0.0107	0.0411	0.0869	0.1426	0.2030	0.2644	0.3239

Le degré d'importance des variables b_0 et φ est considérable. En effet, les facteurs d'influence de ces deux paramètres sont pratiquement égaux à 1 pour de fortes valeurs des coefficients de variation.

2/ Approche simplifiée de Seed

Tableau V.61 : Coefficients d'influence en fonction des coefficients de variation des paramètres considérés (les autres étant fixé à 10%)

Coefficient de variation	5	10	15	20	25	30	35
$\alpha_{k_h}^2$	0.0213	0.0794	0.1609	0.2518	0.3416	0.4245	0.4981
α_{φ}^2	0.0201	0.0793	0.1723	0.2868	0.4055	0.5137	0.6042
$\alpha_{b_0}^2$	0.4273	0.7620	0.8809	0.9300	0.9543	0.9679	0.9763
$\alpha_{h_{ad}}^2$	0.0213	0.0794	0.1604	0.2518	0.3116	0.4245	0.4981

Le paramètre b_0 est toujours aussi important que dans l'approche de Mononobé Okabé, tandis que le facteur d'influence de φ ne l'est plus de manière aussi significative. Cette différence est justifiée par la prise en compte de ce paramètre dans la formulation de l'incrément sismique. Contrairement à l'angle de frottement interne du sol, le facteur d'influence de k_h prend des valeurs plus grandes avec la méthode de Seed. Ceci est dû aux mêmes raisons que pour φ .

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

Ce travail a permis de mettre en évidence le rôle essentiel des incertitudes liées aux paramètres entrant dans l'étude de la stabilité d'un ouvrage de soutènement. L'importance de ces incertitudes réside dans le fait qu'elles influent directement sur la probabilité de ruine de l'ouvrage. Cette dernière est évaluée par des méthodes probabilistes du calcul de la fiabilité des structures. A travers ces méthodes, on a pu introduire les principales notions d'une approche probabiliste pour évaluer l'indice de fiabilité, et donc la probabilité de défaillance de l'ouvrage considéré.

Cette étude de fiabilité sur un ouvrage de soutènement a permis de montrer que la probabilité de survie estimée de la structure est fortement influencée par :

- L'estimation des paramètres aléatoires considérés à savoir :
 - o Les paramètres mécaniques du massif de sol et du sol de fondation
 - o Les caractéristiques géométriques de l'ouvrage de soutènement
 - o Les paramètres hypothétiques intervenant dans les modèles mécaniques tels que l'angle d'inclinaison de la poussée, le point d'application de la poussée.
- Les distributions aléatoires des variables aléatoires considérées.
- Les corrélations entre variables aléatoires du problème.
- Le modèle mécanique considéré :
 - o Rankine ou Coulomb pour l'évaluation de l'effort de poussée
 - o Hansen ou Meyerhof pour l'évaluation de la capacité portante
 - o Seed ou Mononbé-Okabé pour l'évaluation de l'incrément sismique

L'analyse de sensibilité a permis de révéler que certaines de ces variables comme :

- la largeur de la fondation
- l'angle de frottement interne du sol
- Les paramètres mécaniques du sol de fondations
- L'accélération sismique

ont un rôle déterminant, pour l'ensemble des modes de ruine considérés.

Il est donc nécessaire d'apporter un certain soin quant à l'évaluation expérimentale de des paramètres de résistance et de sollicitation ainsi que leurs distributions statistiques. Une sous ou sur estimation de ces fonctions affectent de façon plus au moins importante, suivant le paramètre considéré, la probabilité de ruine.

Il est à noter que l'élaboration du modèle mécanique constitue une étape importante dans l'évaluation de la probabilité de ruine. Il faut porter un certain intérêt à l'écart constaté entre les résultats obtenus par la méthode déterministe et ceux de la méthode probabiliste, concernant la vérification de la stabilité vis à vis du poinçonnement. En effet, les facteurs de sécurité doivent être important (modèle de Hansen) pour avoir un indice de fiabilité acceptable (de l'ordre de 3).

Nous avons pu constater aussi que l'indice de fiabilité est moins sensible au modèle mécanique considéré que le facteur de sécurité.

De plus, la position du centre de poussée des pressions dynamiques s'exerçant sur un ouvrage de soutènement, qui fait l'objet de beaucoup d'essai expérimentaux (centrifugeuses) à un effet moins prépondérant que celui du centre de poussée des pressions statiques qui est généralement pris égal au tiers de la hauteur du mur sans tenir compte d'une fluctuation possible de ce dernier due à diverses causes possibles.

L'utilisation des différentes méthodes pour le calcul de la probabilité de ruine de l'ouvrage et la comparaison des résultats obtenus nous permettent de faire les constatations suivantes :

- **Les méthodes FORM** donnent un résultat exact lorsque la surface d'état limite est linéaire. Sinon, elles donnent une approximation acceptable de la probabilité de défaillance. L'un de ses inconvénients majeurs est l'impossibilité de l'évaluation d'un calcul d'erreur. Néanmoins, la simplicité des calculs permet un temps de calcul minimal. De plus, cette méthode permet de faire une étude de sensibilité.
- **La simulation Monté Carlo** permet de donner un résultat assez précis lorsque le nombre de variables aléatoires n'est pas trop élevé, mais avec de très faibles vitesses de convergence.
- **Les méthodes conditionnelles et les méthodes d'échantillonnage d'importance** permettent d'obtenir de très bons résultats avec un nombre de tirages raisonnable. Cependant, Le conditionnement probabiliste n'est pas efficace pour de faibles valeurs de

l'indice de fiabilité. Dans ces conditions, la méthode la mieux adaptée reste le tirage d'importance.

Nous concluons avec la remarque qui nous semble la plus importante et la plus prometteuse. En effet, notre étude montre que dans beaucoup de cas examinés, on a des variations quasi linéaire entre l'indice de fiabilité et :

- le coefficient de variation de certains paramètres
- la variable aléatoire elle-même

Ceci peut être une première motivation vers la recherche de modèles simplifiés pour estimer la probabilité de ruine via un indice de fiabilité d'un ouvrage de soutènement de type cantilever.

Il est bien évident que d'autres influences telles que la présence d'un massif présentant une certaine cohésion, la présence d'une nappe phréatique (avec ou sans écoulement), d'eau en aval...doivent aussi être envisagées.

L'absence, dans la littérature, de modèles statistiques élaborés relatifs aux paramètres géotechniques est un inconvénient majeur pour une meilleure maîtrise de ce type d'approche notamment en ce qui concerne les corrélations entre ces paramètres.

La priorité semblerait aller vers une banque de donnée plus fructueuse.

Comme notre étude l'a montré ce type d'information pourrait conduire à une certaine économie, notamment lorsque les paramètres sont positivement corrélés.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. SELLIER, « Modélisations probabilistes du comportement de matériaux et de structures en Génie civil », thèse de doctorat , de L'Ecole Normale Supérieure de Cachan, (1994).
- [2] R. L'HERMITE, « La sécurité des construction », Edition Eyrolles, Paris , (1976)
- [3] H. PROCACCIA, P.MORILHAT, « Fiabilité des structures des installations industrielles », Editions Eyrolles , Paris, (1996).
- [4] J. GOYET, A. BUREAU, « Sécurité probabiliste des structures évaluation de coefficients partiels de sécurité pour l'élaboration des nouveaux règlements », Construction Métallique, n°1-(1990)
- [5] A .HALDAR, « Reiability Assessment Using Stochastic Finite Element Analysis », John Wiley & Son, inc 2000 USA
- [6] R E. MELCHERS, « Structural reliability analysis and prediction » , Second Edition ,John Wiley & Son (1999).
- [7] J. DALSGAARD,SORENSEN, « STUCTURAL REIABILITY », Institute of Building Technology and Structural Engineering Aalborg University Sohngaardsholmsvej 57, DK-9000 Aalborg, Denmark
- [8] A. SELLIER, « Fiabilité des structures utilisation et optimisation des méthodes de calcul », thèse de DEA. I.N.S.A Toulouse. (1990).
- [9] M. LEFORT, « Méthodes de Calcul pour aborder la Probabilité de Défaillance » thèse de DEA, Laboratoire de Recherches et Applications en mécanique Avancée,(1994)
- [10] AS NOUAK, KR. Collins, « Reliability of Structures », Library of congres Cataloging in Publication Data,(2000).
- [11] JR. BENJAMIN, C. ALLIN CORNELL, « Probability, Statistics and decision for Civil engineers », Library of Congress catalog Card Number 79-97116,(1970)

- [12] B. LAEYRE, E. PARADOUX, R. SENTIS « Introduction aux Méthodes de Monte-Carlo »
- [13] B. EGGER , « Entre réel et virtuel la simulation en statistique », IREM Strasbourg (2001).
- [14] W. KRAUTHI , « Introduction To Monte Carlo Algorithms », CNRS-Laboratoire de Physique Statistique, Ecole Normale Supérieure F-75231 Paris Cedex 05, France October 28, (1998)
- [15] BELKACEMI, « capacité portante », cours 4^{ème} année, Ecole Nationale Polytechnique (2005).
- [16] J. COSTET. G .SANGLERAT, « Cours pratique de mécanique des sols »,Edition Dunod ,Paris (1975).
- [17] N. MONONOBE, H. MATSU, « On determination of Earth Pressures During Earthquakes », Proc. World Eng. Conf., p.176 vol. 9,(1929)
- [18] , « Shallow foundations », (1992)
- [19] V. MERRIEN-SOUKATCHOUFF, D. AMITRANOD , J.P .PIGUETP, « Eléments de Géotechnique », MINES NANCY, Département Sciences de la Terre et Environnement, (2004).
- [20] JP MAGNAN, « Les méthodes statistiques et probabilistes en mécanique des sols », Press de l'Ecole des Ponts et Chaussées,(1982).
- [21] ME. HARR, « Mécanique des milieux formés de particules » Press Polytechniques Romandes,(1966).
- [22] A. AISSANI, « Modèles stochastiques de la théorie de fiabilité »,Office des publications universitaires,(1992).
- [23] A.H-S.ANG , W.H.TANG « Probability concepts in engineering planing design », John Wiley & Son, inc,(1981).

[24] V. DAVIDOVICI, « La construction en zone sismique », Edition Le Moniteur, Paris (1999)

[25] <http://www.elsevier.com/locate/probengmech> , Probabilistic Engineering Mechanics 19,

« A new directional simulation method for system reliability », (2004).

ANNEXE I

Lois de probabilité

La fonction densité de probabilité et la fonction de répartition de la variable aléatoire X sont respectivement notées $f_X(x)$ et $F_X(x)$. Leur support est désigné par la lettre D .

1. Loi Normale (ou de Laplace-Gauss)

1.1 Notation

$$N(\mu, \sigma)$$

1.2 Support

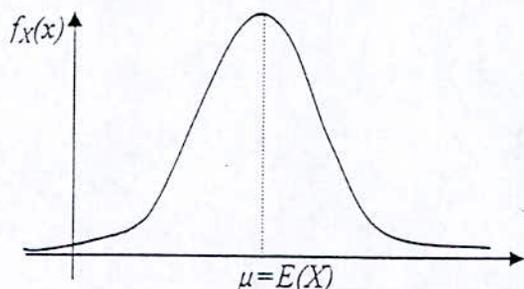
$$D = \mathbb{R}$$

1.3 Densité de probabilité et fonction de répartition

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

1.4 Graphe de $f_X(X)$



1.5 Caractéristiques principales

Moyenne : $E(X) = \mu$

Ecart-type : $\sigma(X) = \sigma$

Coefficient de variation $c = \frac{\sigma}{\mu}$

1.6 Loi réduite

Si la variable aléatoire X suit la loi $N(\mu, \sigma)$, alors la variable T définie par

$T = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi réduite $N(0,1)$.

Dans ces conditions, il vient :

$$P(X < x) = P(\mu + \sigma T < x) = P\left(T < \frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Avec $t_0 = \frac{x - \mu}{\sigma}$

2. Loi log-normale (ou de Galton)

2.1 Notation

$$LN(m, s)$$

2.2 Support

$$D = \mathbb{R}_+^*$$

2.3 Densité de probabilité et fonction de répartition

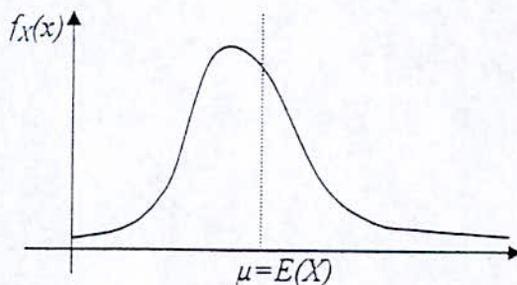
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{x} \cdot \exp\left(-\frac{(\text{Log}x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{(\text{Log}t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

Où μ et σ^2 sont la moyenne et la variance de la variable aléatoire

$Z = \text{Log}X$ distribuée suivant la loi normale.

2.4 Graphe de $f_X(X)$



2.5 Caractéristiques principales

Moyenne :

$$m = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad (1)$$

Ecart type :

$$s = e^{m + \sigma^2} \cdot \sqrt{1 - e^{-\sigma^2}} \quad (2)$$

2.6 Remarque

Pour simuler une variable aléatoire X de moyenne m et d'écart type s , distribuée suivant une loi log-normale, il suffit de simuler la variable aléatoire Z gaussienne de moyenne μ et d'écart type σ en remarquant que $X = e^Z$ et en utilisant les formules de transformation tirées de (1) et (2) :

$$\mu = \text{Log} \left(\frac{m}{\sqrt{1+c^2}} \right)$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Log}(1+c^2)}$$

Où $c = \frac{s}{m} = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$ est le coefficient de variation de la variable X .

ANNEXE II

Tableaux des lois de probabilité

1. Loi normale centrée réduite

β	$\Phi(-\beta)$						
0	0,4999999998	0,45	0,3263552412	0,92	0,1787863537	1,39	0,0822644926
0,01	0,4960106211	0,46	0,3227581259	0,93	0,1761855202	1,4	0,0807567113
0,02	0,4920216462	0,47	0,3191775190	0,94	0,1736087623	1,41	0,0792698915
0,03	0,4880334735	0,48	0,3156137013	0,95	0,1710561122	1,42	0,0778038884
0,04	0,4840465011	0,49	0,3120669487	0,96	0,1685275974	1,43	0,0763585552
0,05	0,4800611267	0,5	0,3085375326	0,97	0,1660232400	1,44	0,0749337428
0,06	0,4760777474	0,51	0,3050257194	0,98	0,1635430573	1,45	0,0735293005
0,07	0,4720967599	0,52	0,3015317708	0,99	0,1610870614	1,46	0,0721450753
0,08	0,4681185603	0,53	0,2980559435	1	0,1586552598	1,47	0,0707809127
0,09	0,4641435437	0,54	0,2945984893	1,01	0,1562476547	1,48	0,0694366564
0,1	0,4601721045	0,55	0,2911596550	1,02	0,1538642439	1,49	0,0681121483
0,11	0,4562046358	0,56	0,2877396824	1,03	0,1515050200	1,5	0,0668072288
0,12	0,4522415297	0,57	0,2843388082	1,04	0,1491699712	1,51	0,0655217368
0,13	0,4482831771	0,58	0,2809572638	1,05	0,1468590808	1,52	0,0642555096
0,14	0,4443299674	0,59	0,2775952757	1,06	0,1445723276	1,53	0,0630083833
0,15	0,4403822885	0,6	0,2742530649	1,07	0,1423096856	1,54	0,0617801926
0,16	0,4364405267	0,61	0,2709308475	1,08	0,1400711246	1,55	0,0605707709
0,17	0,4325050665	0,62	0,2676288340	1,09	0,1378566096	1,56	0,0593799505
0,18	0,4285762907	0,63	0,2643472298	1,1	0,1356661015	1,57	0,0582075625
0,19	0,4246545799	0,64	0,2610862348	1,11	0,1334995566	1,58	0,0570534371
0,2	0,4207403128	0,65	0,2578460437	1,12	0,1313569271	1,59	0,0559174033
0,21	0,4168338659	0,66	0,2546268456	1,13	0,1292381608	1,6	0,0547992895
0,22	0,4129356133	0,67	0,2514288244	1,14	0,1271432015	1,61	0,0536989229
0,23	0,4090459268	0,68	0,2482521584	1,15	0,1250719888	1,62	0,0526161302
0,24	0,4051651756	0,69	0,2450970206	1,16	0,1230244582	1,63	0,0515507373
0,25	0,4012937262	0,7	0,2419635785	1,17	0,1210005414	1,64	0,0505025693
0,26	0,3974319427	0,71	0,2388519940	1,18	0,1190001661	1,65	0,0494714509
0,27	0,3935801859	0,72	0,2357624236	1,19	0,1170232562	1,66	0,0484572063
0,28	0,3897388141	0,73	0,2326950183	1,2	0,1150697317	1,67	0,0474596590
0,29	0,3859081823	0,74	0,2296499237	1,21	0,1131395091	1,68	0,0464786323
0,3	0,3820886425	0,75	0,2266272797	1,22	0,1112325011	1,69	0,0455139490
0,31	0,3782805434	0,76	0,2236272209	1,23	0,1093486168	1,7	0,0445654318
0,32	0,3744842304	0,77	0,2206498761	1,24	0,1074877621	1,71	0,0436329029
0,33	0,3707000455	0,78	0,2176953690	1,25	0,1056498391	1,72	0,0427161847
0,34	0,3669283271	0,79	0,2147638174	1,26	0,1038347468	1,73	0,0418150990
0,35	0,3631694101	0,8	0,2118553339	1,27	0,1020423808	1,74	0,0409294680
0,36	0,3594236256	0,81	0,2089700255	1,28	0,1002726336	1,75	0,0400591136
0,37	0,3556913012	0,82	0,2061079938	1,29	0,0985253944	1,76	0,0392038578
0,38	0,3519727603	0,83	0,2032693348	1,3	0,0968005495	1,77	0,0383635227
0,39	0,3482683225	0,84	0,2004541391	1,31	0,0950979821	1,78	0,0375379306
0,4	0,3445783034	0,85	0,1976624920	1,32	0,0934175725	1,79	0,0367269040
0,41	0,3409030144	0,86	0,1948944734	1,33	0,0917591982	1,8	0,0359302655
0,42	0,3372427629	0,87	0,1921501576	1,34	0,0901227340	1,81	0,0351478382
0,43	0,3335978518	0,88	0,1894296138	1,35	0,0885080517	1,82	0,0343794454
0,44	0,3299685798	0,89	0,1867329057	1,36	0,0869150208	1,83	0,0336249108
		0,9	0,1840600917	1,37	0,0853435082	1,84	0,0328840585
		0,91	0,1814112251	1,38	0,0837933781	1,85	0,0321567132

1,86	0,0314427001	2,4	0,0081975289	2,94	0,0016411295	3,48	0,0002507526
1,87	0,0307418449	2,41	0,0079762554	2,95	0,0015889381	3,49	0,0002415553
1,88	0,0300539739	2,42	0,0077602509	2,96	0,0015382639	3,5	0,0002326734
1,89	0,0293789140	2,43	0,0075494110	2,97	0,0014890676	3,51	0,0002240969
1,9	0,0287164929	2,44	0,0073436327	2,98	0,0014413109	3,52	0,0002158162
1,91	0,0280665389	2,45	0,0071428147	2,99	0,0013949564	3,53	0,0002078219
1,92	0,0274288813	2,46	0,0069468569	3	0,0013499672	3,54	0,0002001049
1,93	0,0268033499	2,47	0,0067556608	3,01	0,0013063077	3,55	0,0001926562
1,94	0,0261897756	2,48	0,0065691295	3,02	0,0012639426	3,56	0,0001854674
1,95	0,0255879898	2,49	0,0063871672	3,03	0,0012228379	3,57	0,0001785299
1,96	0,0249978252	2,5	0,0062096799	3,04	0,0011829598	3,58	0,0001718356
1,97	0,0244191152	2,51	0,0060365747	3,05	0,0011442758	3,59	0,0001653768
1,98	0,0238516942	2,52	0,0058677603	3,06	0,0011067538	3,6	0,0001591457
1,99	0,0232953977	2,53	0,0057031470	3,07	0,0010703626	3,61	0,0001531349
2	0,0227500620	2,54	0,0055426460	3,08	0,0010350715	3,62	0,0001473372
2,01	0,0222155248	2,55	0,0053861705	3,09	0,0010008508	3,63	0,0001417457
2,02	0,0216916245	2,56	0,0052336346	3,1	0,0009676712	3,64	0,0001363534
2,03	0,0211782008	2,57	0,0050849541	3,11	0,0009355045	3,65	0,0001311538
2,04	0,0206750946	2,58	0,0049400459	3,12	0,0009043226	3,66	0,0001261406
2,05	0,0201821478	2,59	0,0047988286	3,13	0,0008740986	3,67	0,0001213076
2,06	0,0196992035	2,6	0,0046612218	3,14	0,0008448059	3,68	0,0001166487
2,07	0,0192261061	2,61	0,0045271466	3,15	0,0008164187	3,69	0,0001121581
2,08	0,0187627012	2,62	0,0043965255	3,16	0,0007889117	3,7	0,0001078301
2,09	0,0183088356	2,63	0,0042692823	3,17	0,0007622602	3,71	0,0001036594
2,1	0,0178643574	2,64	0,0041453418	3,18	0,0007364404	3,72	0,0000996405
2,11	0,0174291159	2,65	0,0040246306	3,19	0,0007114286	3,73	0,0000957684
2,12	0,0170029619	2,66	0,0039070761	3,2	0,0006872021	3,74	0,0000920380
2,13	0,0165857472	2,67	0,0037926074	3,21	0,0006637385	3,75	0,0000884446
2,14	0,0161773253	2,68	0,0036811545	3,22	0,0006410161	3,76	0,0000849834
2,15	0,0157775507	2,69	0,0035726488	3,23	0,0006190137	3,77	0,0000816499
2,16	0,0153862796	2,7	0,0034670231	3,24	0,0005977105	3,78	0,0000784397
2,17	0,0150033693	2,71	0,0033642110	3,25	0,0005770865	3,79	0,0000753486
2,18	0,0146286788	2,72	0,0032641476	3,26	0,0005571219	3,8	0,0000723724
2,19	0,0142620681	2,73	0,0031667693	3,27	0,0005377977	3,81	0,0000695072
2,2	0,0139033989	2,74	0,0030720134	3,28	0,0005190951	3,82	0,0000667491
2,21	0,0135525343	2,75	0,0029798186	3,29	0,0005009959	3,83	0,0000640944
2,22	0,0132093388	2,76	0,0028901245	3,3	0,0004834825	3,84	0,0000615394
2,23	0,0128736783	2,77	0,0028028721	3,31	0,0004665376	3,85	0,0000590806
2,24	0,0125454202	2,78	0,0027180034	3,32	0,0004501443	3,86	0,0000567147
2,25	0,0122244334	2,79	0,0026354615	3,33	0,0004342863	3,87	0,0000544383
2,26	0,0119105882	2,8	0,0025551906	3,34	0,0004189477	3,88	0,0000522484
2,27	0,0116037563	2,81	0,0024771362	3,35	0,0004041129	3,89	0,0000501418
2,28	0,0113038111	2,82	0,0024012444	3,36	0,0003897667	3,9	0,0000481155
2,29	0,0110106273	2,83	0,0023274629	3,37	0,0003758946	3,91	0,0000461668
2,3	0,0107240811	2,84	0,0022557401	3,38	0,0003624821	3,92	0,0000442927
2,31	0,0104440502	2,85	0,0021860256	3,39	0,0003495154	3,93	0,0000424907
2,32	0,0101704140	2,86	0,0021182698	3,4	0,0003369808	3,94	0,0000407581
2,33	0,0099030531	2,87	0,0020524243	3,41	0,0003248652	3,95	0,0000390925
2,34	0,0096418496	2,88	0,0019884417	3,42	0,0003131558	3,96	0,0000374913
2,35	0,0093866874	2,89	0,0019262755	3,43	0,0003018400	3,97	0,0000359523
2,36	0,0091374516	2,9	0,0018658801	3,44	0,0002909058	3,98	0,0000344732
2,37	0,0088940289	2,91	0,0018072110	3,45	0,0002803412	3,99	0,0000330518
2,38	0,0086563075	2,92	0,0017502246	3,46	0,0002701349	4	0,0000316860
2,39	0,0084241771	2,93	0,0016948780	3,47	0,0002602757	4,01	0,0000303738

4,02	0,0000291131	4,56	0,0000025602	5,1	0,0000001701	5,64	0,0000000085
4,03	0,0000279021	4,57	0,0000024411	5,11	0,0000001614	5,65	0,0000000080
4,04	0,0000267389	4,58	0,0000023272	5,12	0,0000001530	5,66	0,0000000076
4,05	0,0000256217	4,59	0,0000022185	5,13	0,0000001451	5,67	0,0000000072
4,06	0,0000245489	4,6	0,0000021146	5,14	0,0000001376	5,68	0,0000000068
4,07	0,0000235188	4,61	0,0000020155	5,15	0,0000001305	5,69	0,0000000064
4,08	0,0000225297	4,62	0,0000019207	5,16	0,0000001237	5,7	0,0000000060
4,09	0,0000215802	4,63	0,0000018303	5,17	0,0000001173	5,71	0,0000000057
4,1	0,0000206687	4,64	0,0000017439	5,18	0,0000001112	5,72	0,0000000053
4,11	0,0000197938	4,65	0,0000016615	5,19	0,0000001053	5,73	0,0000000050
4,12	0,0000189542	4,66	0,0000015828	5,2	0,0000000998	5,74	0,0000000047
4,13	0,0000181484	4,67	0,0000015077	5,21	0,0000000946	5,75	0,0000000045
4,14	0,0000173753	4,68	0,0000014360	5,22	0,0000000896	5,76	0,0000000042
4,15	0,0000166335	4,69	0,0000013676	5,23	0,0000000849	5,77	0,0000000040
4,16	0,0000159218	4,7	0,0000013023	5,24	0,0000000804	5,78	0,0000000037
4,17	0,0000152391	4,71	0,0000012400	5,25	0,0000000762	5,79	0,0000000035
4,18	0,0000145843	4,72	0,0000011806	5,26	0,0000000722	5,8	0,0000000033
4,19	0,0000139563	4,73	0,0000011239	5,27	0,0000000684	5,81	0,0000000031
4,2	0,0000133541	4,74	0,0000010699	5,28	0,0000000647	5,82	0,0000000030
4,21	0,0000127766	4,75	0,0000010183	5,29	0,0000000613	5,83	0,0000000028
4,22	0,0000122230	4,76	0,0000009692	5,3	0,0000000580	5,84	0,0000000026
4,23	0,0000116922	4,77	0,0000009223	5,31	0,0000000549	5,85	0,0000000025
4,24	0,0000111834	4,78	0,0000008776	5,32	0,0000000520	5,86	0,0000000023
4,25	0,0000106957	4,79	0,0000008350	5,33	0,0000000492	5,87	0,0000000022
4,26	0,0000102283	4,8	0,0000007944	5,34	0,0000000466	5,88	0,0000000021
4,27	0,0000097804	4,81	0,0000007556	5,35	0,0000000441	5,89	0,0000000019
4,28	0,0000093512	4,82	0,0000007187	5,36	0,0000000417	5,9	0,0000000018
4,29	0,0000089400	4,83	0,0000006836	5,37	0,0000000395	5,91	0,0000000017
4,3	0,0000085460	4,84	0,0000006501	5,38	0,0000000373	5,92	0,0000000016
4,31	0,0000081687	4,85	0,0000006181	5,39	0,0000000353	5,93	0,0000000015
4,32	0,0000078072	4,86	0,0000005877	5,4	0,0000000334	5,94	0,0000000014
4,33	0,0000074610	4,87	0,0000005588	5,41	0,0000000316	5,95	0,0000000013
4,34	0,0000071295	4,88	0,0000005312	5,42	0,0000000299	5,96	0,0000000013
4,35	0,0000068121	4,89	0,0000005049	5,43	0,0000000282	5,97	0,0000000012
4,36	0,0000065082	4,9	0,0000004799	5,44	0,0000000267	5,98	0,0000000011
4,37	0,0000062172	4,91	0,0000004560	5,45	0,0000000252	5,99	0,0000000011
4,38	0,0000059387	4,92	0,0000004334	5,46	0,0000000239		
4,39	0,0000056721	4,93	0,0000004118	5,47	0,0000000226		
4,4	0,0000054170	4,94	0,0000003912	5,48	0,0000000213		
4,41	0,0000051728	4,95	0,0000003716	5,49	0,0000000201		
4,42	0,0000049392	4,96	0,0000003530	5,5	0,0000000190		
4,43	0,0000047156	4,97	0,0000003353	5,51	0,0000000180		
4,44	0,0000045018	4,98	0,0000003184	5,52	0,0000000170		
4,45	0,0000042972	4,99	0,0000003024	5,53	0,0000000161		
4,46	0,0000041016	5	0,0000002871	5,54	0,0000000152		
4,47	0,0000039145	5,01	0,0000002726	5,55	0,0000000143		
4,48	0,0000037355	5,02	0,0000002588	5,56	0,0000000135		
4,49	0,0000035644	5,03	0,0000002456	5,57	0,0000000128		
4,5	0,0000034008	5,04	0,0000002331	5,58	0,0000000121		
4,51	0,0000032444	5,05	0,0000002213	5,59	0,0000000114		
4,52	0,0000030949	5,06	0,0000002100	5,6	0,0000000107		
4,53	0,0000029520	5,07	0,0000001992	5,61	0,0000000101		
4,54	0,0000028154	5,08	0,0000001890	5,62	0,0000000096		
4,55	0,0000026849	5,09	0,0000001793	5,63	0,0000000090		

ANNEXE III

EM 1110-1-1905
30 Oct 92

TABLE 4-5

Hansen Dimensionless Bearing Capacity and
Correction Factors (Data from Hansen 1970)

FACTOR		COHESION (c)	WEDGE (γ)	SURCHARGE (q)	DIAGRAM
BEARING CAPACITY		N_c	$N_γ$	N_q	
	N	$\phi = 0$ 5.14 $\phi > 0$ $(N_q - 1) \cot \phi$	0.00 $1.5(N_q - 1) \tan \phi$	1.00 $N_q e^{\gamma \tan \phi}$	
CORRECTION	FOUNDATION SHAPE WITH ECCENTRICITY s	f_{cs}	$f_{\gamma s}$	f_{qs}	
		Strip: 1.0 $\phi = 0$ $0.2 \frac{B'}{W'}$ $\phi > 0$ $1 + \frac{N_q B'}{N_c W'}$	1.0 $1 - 0.4 \frac{B'}{W'}$	1.0 $1 + \frac{B'}{D} \tan \phi$	
	INCLINED LOADING i	f_{ci}	$f_{\gamma i}$	f_{qi}	
		$\phi = 0$ $1 - \frac{[1 - \frac{\gamma}{A_e c_a}]^2}{2}$ $\phi > 0$ $f_{qi} - \frac{1 - f_{qi}}{N_q - 1}$	$\phi = 0$ $[1 - \frac{0.7T}{Q + A_e c_a \cot \phi}]^5$ $\phi > 0$ $[1 - \frac{(0.7 - \delta/450)T}{Q + A_e c_a \cot \phi}]^5$	$[1 - \frac{0.5T}{Q + A_e c_a \cot \phi}]^5$	
	FOUNDATION DEPTH d	f_{cd}	$f_{\gamma d}$	f_{qd}	
		$\phi = 0$ 0.4k $\phi > 0$ $1 + 0.4k$	1.0 1.0	1.0 $1 + 2 \tan \phi (1 - \sin \phi)^2 k$	
BASE ON SLOPE beta	f_{cb}	$f_{\gamma b}$	f_{qb}		
	$\phi = 0$ $1 - \frac{\beta}{147.3}$ $\phi > 0$ $f_{qb} - \frac{1 - f_{qb}}{147.3}$	$(1 - 0.5 \tan \phi)^5$	$(1 - 0.5 \tan \phi)^5$		
TILTED BASE delta	f_{cd}	$f_{\gamma d}$	f_{qd}		
	$\phi = 0$ $1 - \frac{\delta}{147}$ $\phi > 0$ $f_{qd} - \frac{1 - f_{qd}}{147.3}$	$e^{-0.047 \delta \tan \phi}$	$e^{-0.035 \delta \tan \phi}$		

Note: Eccentricity and inclined loading correction factors may not be used simultaneously; factors not used are unity
Nomenclature:

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> ϕ = angle of internal friction, degrees N_q = $\tan^2(45 + \phi/2)$ B' = effective width of foundation, $B - 2e_B$, ft W' = effective length of foundation, $W - 2e_W$, ft B = foundation width, ft W = foundation length, ft e_B = eccentricity parallel with B, M_B/Q e_W = eccentricity parallel with W, M_W/Q M_B = bending moment parallel with B, kips-ft M_W = bending moment parallel with W, kips-ft | <ul style="list-style-type: none"> ϕ_a = friction angle between base and soil = ϕ, degrees c_a = adhesion of soil to base $\leq c$, ksf c = soil cohesion or undrained shear strength C_u, ksf ϵ = base tilt from horizontal, upward +, degrees β = slope of ground from base, downward +, degrees k = D/B if $D/B \leq 1$ OR $\tan^{-1}(D/B)$ if $D/B > 1$ (in radians) D = foundation depth, ft Q = vertical load on foundation, kips T = horizontal load $\leq D \tan \phi + A_e c_a$, right +, kips A_e = effective area of foundation $B'W'$, ft² |
|--|--|

ANNEXE III

EM 1110-1-1905
30 Oct 92

TABLE 4-3

Meyerhof Dimensionless Bearing Capacity and Correction Factors (Data from Meyerhof 1953; Meyerhof 1963)

FACTOR		COHESION (c)	WEDGE (γ)	SURCHARGE (q)	DIAGRAM	
BEARING CAPACITY		K_c	N_γ	K_q		
	$\phi = 0$	5.14	0.00	1.00		
K	$\phi > 0$	$(N_c - 1) \cot \phi$	$(N_\gamma - 1) \tan(1.4\phi)$	$N_q e^{\pi \tan \phi}$		
CORRECTION	FOUNDATION SHAPE WITH ECCENTRICITY e	$\phi = 0$	C_{cs}	$C_{\gamma s}$	C_{qs}	
		$\phi > 10$	$1 + 0.2 N_\phi \frac{B'}{W}$	1.0	1.0	
		$0 < \phi \leq 10$	"	$1 + 0.1 N_\phi \frac{B'}{W}$	$1 + 0.1 N_\phi \frac{B'}{W}$	
	INCLINED LOADING i	$\phi = 0$	C_{ci}	$C_{\gamma i}$	C_{qi}	
		$\phi > 0$	$\left[1 - \frac{\theta}{90}\right]^2$	$\cos \theta \left[1 - \frac{\theta}{90}\right]^2$	$\left[1 - \frac{\theta}{90}\right]^2$	
				$\theta > \phi$	0.0	
FOUNDATION DEPTH d	$\phi = 0$	C_{cd}	$C_{\gamma d}$	C_{qd}		
	$\phi > 0$	$1 + 0.2(N_\phi)^{1/2} \frac{D}{B}$	1.0	1.0		
	$0 < \phi \leq 10$	"	$1 + 0.1(N_\phi)^{1/2} \frac{D}{B}$	$1 + 0.1(N_\phi)^{1/2} \frac{D}{B}$		Linear Interpolation Between $\phi = 0$ and $\phi = 10$ Degrees

Note: Eccentricity and inclined loading correction factors may not be used simultaneously; factors not used are unity

- Nomenclature:
- ϕ = angle of internal friction, degrees
 - $N_\phi = \tan^2(45 + \phi/2)$
 - B' = effective width of foundation, $B - 2e_B$, ft
 - W' = effective lateral length of foundation, $W - 2e_W$, ft
 - B = foundation width, ft
 - W = foundation lateral length, ft
 - D = foundation depth, ft
 - Q = vertical load on foundation, qBW, kips
 - q = bearing pressure on foundations, ksf
 - T = horizontal load on foundation, right \pm , kips
 - R = resultant load on foundation, $(Q^2 + T^2)^{1/2}$
 - θ = angle of resultant load with vertical axis, $\cos^{-1}(Q/R)$, degrees
 - e_B = eccentricity parallel with B , M_B/Q
 - e_W = eccentricity parallel with W , M_W/Q
 - M_B = bending moment parallel with B , kips-ft
 - M_W = bending moment parallel with W , kips-ft

ANNEXE IV

- 1/ Tirage Monté Carlo
- 2/ Tirage d'importance
- 3/ Tirage conditionné
- 4/ Tirage d'importance conditionné

	nr=1000000	nr=100000	nr=10000	nr=1000	ng=1000000	ng=100000	ng=10000	ng=1000	nh=1000000	nh=100000	nh=10000	nh=1000
Pf	0,0075	0,0077	0,0074	0,008	0,0043	0,0046	0,0039	0,003	0,0192	0,0199	0,0201	0,018
	0,0076	0,0076	0,007	0,005	0,0044	0,0043	0,0036	0,004	0,0192	0,0192	0,0207	0,025
	0,0075	0,0076	0,0063	0,009	0,0043	0,0046	0,0039	0,001	0,0192	0,0187	0,0183	0,015
	0,0076	0,0075	0,0072	0,005	0,0043	0,0046	0,0045	0,006	0,0192	0,02	0,0174	0,015
	0,0075	0,0071	0,0057	0,009	0,0045	0,0044	0,004	0,005	0,0189	0,0199	0,0212	0,021
	0,0075	0,0078	0,0078	0,01	0,0044	0,0042	0,0024	0,004	0,0192	0,0182	0,0192	0,02
	0,0076	0,0074	0,007	0,009	0,0043	0,0047	0,0044	0,007	0,0193	0,0185	0,02	0,022
	0,0075	0,0074	0,0075	0,008	0,0045	0,0043	0,0049	0,008	0,0192	0,0195	0,0188	0,014
	0,0075	0,0074	0,0074	0,004	0,0044	0,0046	0,004	0,007	0,019	0,0195	0,0207	0,027
	0,0074	0,0073	0,0078	0,009	0,0044	0,0043	0,004	0,001	0,0193	0,0203	0,018	0,01
	0,00752	0,00748	0,00711	0,0076 μ	0,00438	0,00446	0,00396	0,0046 μ	0,01917	0,01937	0,01944	0,0187 μ
	6,32456E-05	0,000204396	0,000662403	0,0021187 σ	7,88811E-05	0,000177639	0,000661984	0,002458545 σ	0,000125167	0,000704036	0,001292027	0,005292552 σ
β	2,432379063	2,422833007	2,437236464	2,408915314	2,627561752	2,604533938	2,660610508	2,747787409	2,070557877	2,055817252	2,051686546	2,096925995
	2,427578383	2,427578383	2,457263672	2,575831338	2,619730589	2,627561752	2,687453858	2,652073383	2,070557877	2,070557877	2,039500146	1,959962787
	2,432379063	2,427578383	2,494880007	2,365617523	2,627561752	2,604533938	2,660610508	3,090252582	2,070557877	2,08136915	2,090196761	2,170088962
	2,427578383	2,432379063	2,447127387	2,575831338	2,627561752	2,604533938	2,612056864	2,512145329	2,070557877	2,053747519	2,110676539	2,170088962
	2,432379063	2,452164037	2,530193656	2,365617523	2,612056864	2,619730589	2,652073383	2,575831338	2,077015475	2,055817252	2,02957127	2,033518789
	2,432379063	2,418141571	2,418141571	2,326347	2,619730589	2,63555745	2,820166347	2,652073383	2,070557877	2,092429324	2,070557877	2,053747519
	2,427578383	2,437236464	2,457263672	2,365617523	2,627561752	2,597155589	2,619730589	2,457263672	2,068424403	2,085762639	2,053747519	2,014089488
	2,432379063	2,437236464	2,432379063	2,408915314	2,612056864	2,627561752	2,582809613	2,408915314	2,070557877	2,064185485	2,079187387	2,197285001
	2,432379063	2,437236464	2,437236464	2,652073383	2,619730589	2,604533938	2,652073383	2,457263672	2,074853318	2,064185485	2,039500146	1,92683547
	2,437236464	2,442152061	2,418141571	2,365617523	2,619730589	2,627561752	2,652073383	3,090252582	2,068424403	2,047590555	2,096925995	2,326347
	2,431424599	2,43345359	2,452986353	2,441038378 μ	2,621328309	2,615326464	2,659965843	2,664385866 μ	2,071206486	2,067146254	2,066155019	2,094888997 μ
	0,003048204	0,00992259	0,035175844	0,114913094 σ	0,006124209	0,013637738	0,063661192	0,2476708 σ	0,002688409	0,015040352	0,027525483	0,121931913 σ
	0,00125367	0,004077575	0,014340008	0,047075497 c	0,0023363	0,005214545	0,023933086	0,092956055 c	0,001297992	0,007275901	0,01332208	0,058204474 c

	nr=100000	nr=10000	nr=1000	nr=100	ng=100000	ng=10000	ng=1000	ng=100	nh=100000	nh=10000	nh=1000	nh=100
Pf												
	0,0075	0,0075	0,0076	0,006	0,0044	0,0045	0,0041	0,0038	0,0193	0,0193	0,0206	0,0159
	0,0075	0,0072	0,007	0,0064	0,0044	0,0042	0,0045	0,0048	0,0193	0,0189	0,0189	0,0176
	0,0075	0,0074	0,0077	0,009	0,0047	0,0045	0,0045	0,0054	0,0193	0,0198	0,0191	0,0192
	0,0075	0,0074	0,0071	0,0089	0,0044	0,0043	0,0042	0,004	0,0194	0,0192	0,0205	0,019
	0,0075	0,0074	0,0074	0,0073	0,0043	0,0041	0,0041	0,0038	0,0192	0,0179	0,0184	0,0167
	0,0075	0,0074	0,0074	0,0066	0,0044	0,0044	0,0035	0,0038	0,0193	0,0195	0,0193	0,0171
	0,0076	0,0074	0,0076	0,0078	0,0044	0,0045	0,0046	0,0038	0,0191	0,0195	0,0187	0,0207
	0,0075	0,0074	0,008	0,0095	0,0043	0,0042	0,0045	0,0052	0,0192	0,0196	0,0205	0,0187
	0,0077	0,0074	0,0077	0,0059	0,0043	0,0043	0,004	0,0049	0,0193	0,019	0,0193	0,0182
	0,0075	0,0077	0,0082	0,0078	0,0042	0,0043	0,0041	0,0044	0,0191	0,0191	0,019	0,0176
	0,00753	0,00742	0,00757	0,00752 μ	0,00438	0,00433	0,00421	0,00439 μ	0,01925	0,01918	0,01943	0,01807 μ
	6,7495E-05	0,00012293	0,00036633	0,00130196 σ	0,00013166	0,00014181	0,00033149	0,00063675 σ	9,7183E-05	0,00053083	0,00080698	0,00139208 σ
β												
	2,43237906	2,43237906	2,42757838	2,51214533	2,61973059	2,61205686	2,64372528	2,66934606	2,0684244	2,0684244	2,04151025	2,14691418
	2,43237906	2,44712739	2,45726367	2,48928655	2,61973059	2,63555745	2,61205686	2,58991598	2,0684244	2,07701548	2,07701548	2,10604867
	2,43237906	2,43723646	2,42283301	2,36561752	2,59715559	2,61205686	2,61205686	2,54910586	2,0684244	2,05789583	2,07270082	2,07055788
	2,43237906	2,43723646	2,45216404	2,36975185	2,61973059	2,62756175	2,63555745	2,65207338	2,0663003	2,07055788	2,04352863	2,07485332
	2,43237906	2,43723646	2,43723646	2,44215206	2,62756175	2,64372528	2,64372528	2,66934606	2,07055788	2,09919033	2,08797457	2,12724033
	2,43237906	2,43723646	2,43723646	2,47832783	2,61973059	2,61973059	2,69684891	2,66934606	2,0684244	2,06418549	2,0684244	2,11770426
	2,42757838	2,43723646	2,42757838	2,41814157	2,61973059	2,61205686	2,60453394	2,66934606	2,07270082	2,06418549	2,08136915	2,03950015
	2,43237906	2,43723646	2,40891531	2,34553022	2,62756175	2,63555745	2,61205686	2,56223987	2,07055788	2,06207986	2,04352863	2,08136915
	2,42283301	2,43723646	2,42283301	2,51807069	2,62756175	2,62756175	2,65207338	2,58280961	2,0684244	2,07485332	2,0684244	2,09242932
	2,43237906	2,42283301	2,39988967	2,41814157	2,63555745	2,62756175	2,64372528	2,61973059	2,07270082	2,07270082	2,07485332	2,10604867
	2,43094439	2,43629947	2,42935284	2,43571652 μ	2,62140512	2,62534266	2,63563601	2,62332595 μ	2,06949397	2,07110889	2,06593296	2,09626659 μ
	0,00322475	0,00596382	0,01764071	0,06268705 σ	0,01008883	0,01116746	0,0275858	0,04865831 σ	0,00207501	0,01154458	0,01694796	0,03118771 σ
	0,00132654	0,0024479	0,00726149	0,02573659 c	0,00384864	0,00425372	0,01046647	0,01854833 c	0,00100266	0,0055741	0,00820354	0,01487774 c

Pf

nr=100000	nr=10000	nr=1000	nr=100	ng=100000	ng=10000	ng=1000	ng=100	nh=100000	nh=10000	nh=1000	nh=100
0,0066	0,0075	0,003	0,005	0,0039	0,003	0,0027		0,0168	0,0178	0,0143	0,0212
0,0066	0,0069	0,0039	0,0099	0,004	0,0036	0,007		0,0164	0,0155	0,0165	0,009
0,0062	0,007	0,0096	0,0049	0,0038	0,0033	0,006		0,0165	0,0143	0,0177	0,036
0,0064	0,0065	0,0127	0,0051	0,0038	0,0041	0,0027		0,0157	0,0163	0,018	0,0116
0,0069	0,0067	0,0108	0,0088	0,0042	0,0032	0,0009485		0,0164	0,0183	0,0132	0,0343
0,0069	0,0074	0,0071	0,0075	0,0041	0,005	0,005		0,0164	0,0143	0,0199	0,0257
0,0065	0,0067	0,0027	0,0088	0,0039	0,0034	0,0033		0,016	0,0159	0,0113	0,0284
0,0066	0,0064	0,0069	0,0025	0,0038	0,0042	0,0025		0,0163	0,0167	0,0177	0,0322
0,0063	0,0059	0,0073	0,0079	0,004	0,0046	0,0061		0,0163	0,0173	0,0179	0,0095
0,007	0,007	0,008	0,0075	0,0041	0,0035	0,0074		0,0164	0,0172	0,0184	0,0095

0,0066	0,0068	0,0072	μ	0,00396	0,00379	0,00136485	μ	0,01632	0,01636	0,01649	0,02174	μ
0,00026667	0,000473756	0,00330824	σ	0,00014298	0,00065566	0,00221285	σ	0,00029364	0,00137372	0,00268802	0,0110333	σ

 β

2,47832783	2,432379063	2,747787409	2,575831338	2,66061051	2,74778741	2,78215751		2,12483815	2,10146547	2,18895514	2,02957127	
2,47832783	2,462428025	2,660610508	2,330115547	2,65207338	2,68745386	2,45726367		2,13452147	2,15707128	2,13208185	2,36561752	
2,50055263	2,457263672	2,741924134	2,582809613	2,66934606	2,71638574	2,51214533		2,13208185	2,18895514	2,10375155	1,79911743	
2,48928855	2,433700001	2,285200052	2,560070286	2,66934606	2,64372528	2,78215751		2,15106498	2,13697387	2,096926	2,27012384	
2,46242802	2,472958179	2,297328116	2,373927085	2,63555745	2,72655674	3,10592249		2,13452147	2,09019676	2,22027524	1,82104436	
2,46242802	2,437236464	2,452164037	2,432379063	2,64372528	2,57583134	2,57583134		2,13452147	2,18895514	2,05581725	1,9481239	
2,4837699	2,472958179	2,782157506	2,373927085	2,66061051	2,70648821	2,71638574		2,14440918	2,14691418	2,28012854	1,90484567	
2,47832783	2,489286548	2,462428025	2,807041618	2,66934606	2,63555745	2,80704162		2,13697387	2,12724033	2,10375155	1,84939967	
2,49488001	2,518070692	2,442152061	2,413502762	2,65207338	2,60453394	2,50630688		2,13697387	2,11300753	2,09919033	2,34553022	
2,45726367	2,457263672	2,408915314	2,432379063	2,64372528	2,69684891	2,43723646		2,13452147	2,11535006	2,08797457	2,34553022	
2,47855923	2,46836144	2,483043016	2,489088946	μ	2,6556414	2,67411689	2,66824485	μ	2,13653278	2,13661298	2,1368852	2,06789041
0,01440061	0,025240119	0,187236926	0,144424543	σ	0,0121365	0,05639028	0,20978962	σ	0,0072521	0,03414215	0,07022542	0,23734962
0,00581007	0,010225455	0,075406235	0,058023054	c	0,00457008	0,02108744	0,07862457	c	0,00339433	0,01597957	0,03286345	0,11477863