

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

44/88

1ex

وزارة التعليم و البحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

## ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : Genie Mecanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## PROJET DE FIN D'ETUDES

### SUJET

Elaboration d'un Logiciel de Calcul  
Des Moments d'inertie Des Surfaces  
Et Des Corps Quelconques

Proposé Par :

Etudié par :

Dirigé par :

Mecanique Du Solide

M.SAHNOUN

M.KSIAZEK

PROMOTION :

JUN 88



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

وزارة التعليم و البحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

## ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : Génie Mécanique

# PROJET DE FIN D'ETUDES

### SUJET

Elaboration D'un Logiciel De Calcul  
Des Moments D'inertie Des Surfaces  
Et Des Corps Quelconques

Proposé par :

Mécanique Du Solide

Etudié par :

M.SAHNOUN

Dirigé par : Mr

M.KSIAZEK

PROMOTION

JUIN 88

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



وَأَنْزَلْنَا الْحَدِيدَ فِيهِ بَأْسٌ

شَدِيدٌ وَمَنْفَعٌ لِلنَّاسِ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ



وزارة التعليم العالي  
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole nationale polytechnique  
فرع الهندسة الميكانيكية  
Département de mécanique  
الموجه : مارك كزيزاك  
Promoteur : Marek Ksiazek  
الطالب المهندس : محمد سحنون  
Elève ingénieur : Mohamed Sahnoun  
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHÈQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

الموضوع : إعداد برنامج معلوماتي لحساب عزوم العطالة للسطوح والأجسام المختلفة الأشكال .

الملخص : يستهدف هذا المشروع إستنتاج العلاقات التي تسمح لحساب عزوم العطالة للسطوح وجعلها ذات شكل ثلاثي الأبعاد . وهي العلاقات التي يرتكز عليها البرنامج الذي تم إعدادة لحساب عزوم العطالة المذكورة أعلاه .

Sujet : Elaboration d'un logiciel de calcul des moments d'inertie des surfaces et des corps quelconques .

Resumé : Notre projet a pour objet de démontrer des formules numériques permettant le calcul des caractéristiques géométriques des figures quelconques et de les développer en trois dimensions . Des sous-routines nécessaires ont été établis pour l'élaboration d'un logiciel conversationnel en Basic .

Subject : Elaboration of software of calculation of inertia properties of solid bodies in two and three dimensional space .

Abstract : In this thesis, the general numerical relations allowing to carry out the computer calculation of inertia properties of solid bodies in two and three dimensional space have presented . Appropriate programs alltogether with indispensable subroutines in Basic have been given .

# Remerciements

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Il m'est agréable d'exprimer ici ma profonde reconnaissance à tous ceux qui m'ont aidé à ce que le présent mémoire soit élaboré .

Je tiens particulièrement à remercier:

- Monsieur MAREK KSIASEK qui m'a guidé pendant toute la période qu'a pris ce mémoire pour se réaliser.
- Le personnel du centre de calcul.
- Tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

Enfin tous ceux qui ont m'ont encouragé de près et de loin trouvent ici le témoignage de ma reconnaissance.

# Medicaces

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

C'est:

- A mes grand-mères
- A mes chers parents
- A mes oncles et tantes
- A mes frères et soeurs
- Et à tous mes amis

Que je dédie ce travail .

# Sommaire

## INTRODUCTION

### CHAPITRE 1

#### DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES

##### GEOMETRIQUES DES FIGURES QUELCONQUES

1.1	Idee de calcul .....	4
1.2	Surface .....	4
1.3	Moments statiques.....	5
1.4	Moments quadratiques.....	7
1.5	Produit d'inertie.....	10
1.6	Moment d'inertie polaire.....	12
1.7	Les caracteristiques par rapport aux axes centraux.....	14

### CHAPITRE 2

#### DEVELOPPEMENT DES FORMULES EN TROIS DIMENSIONS

2.1	L 'idée de calcul.....	17
2.2	Volume.....	17
2.3	Produit d'inertie.....	17
2.4	Moments d'inertie .....	22
2.5	Les caracteristiques par rapport aux axes centraux.....	25

### CHAPITRE 3

#### LES DIFFERENTS SOUS PROGRAMMES UTILISES

3.1	Sous programme de calcul d'un contour d'une figure quelconque.....	27
-----	---	----

3.2	Sous programme de calcul des moments de deviation (en deux dimensions).....	27
3.3	Sous programme de calcul des moments de deviations (en trois dimensions).....	29
3.4	Sous programme d'application du theoreme d'HUIGENS.....	32

CHAPITRE 4

LES METHODES EXPERIMENTALES .....	34
-----------------------------------	----

CHAPITRE 5

APPLICATIONS.....	36
-------------------	----

CONCLUSION

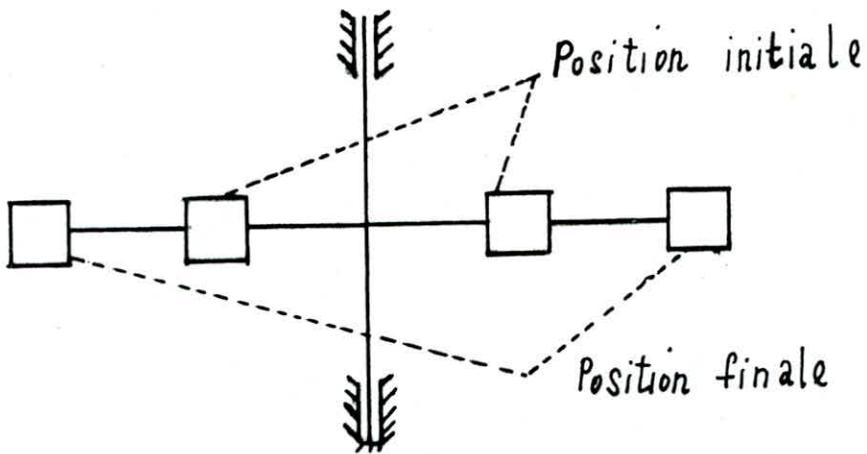
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# Introduction

Le moment d'inertie est une caractéristique géométrique de la distribution des masses du système.

Cette notion a été introduite parce que le centre de gravité ne caractérise pas complètement cette distribution.

Si on augmente par exemple d'une même grandeur la distance séparant deux masses égales par rapport à l'axe  $y$  comme le montre la figure, le centre de gravité reste le même que celui



de la position initiale mais la répartition des masses sera différente, ce qui ne manquera pas d'avoir un effet sur le mouvement de rotation.

Le moment d'inertie joue un rôle capital en dynamique du solide, ce rôle pendant le mouvement de rotation est le même que celui de la masse pendant le mouvement de translation.

Donc le moment d'inertie est la mesure de l'inertie du corps pendant le mouvement de rotation.

Il existe trois types de moment d'inertie :

- Un moment d'inertie par rapport à un point qui est défini par la somme des produits de chaque masse par le carré de la distance au point.

-Un moment d'inertie par rapport à une droite qui représente la somme de chaque masse par le carré de sa distance à la droite.

-Un moment d'inertie par rapport à un plan qui est la somme des produits de chaque masse par le carré de sa distance au plan.

En mécanique le moment d'inertie par rapport à une droite est le plus important.

Le moment d'inertie est une grandeur positive, il n'est jamais négatif, il ne peut être nul que pour une certaine droite particulière et purement théorique où tous les points matériels du système sont situés sur cette droite.

En ce qui concerne l'extension de cette notion, on rencontre des moments d'inertie de volume, de surface et de ligne.

Les définitions restent analogues aux précédentes mais les éléments de masse sont remplacés par des éléments de volume, de surface et de longueur.

Le moment d'inertie d'un volume a pour dimension  $L^5$ , celui d'une surface  $L^4$  et celui d'une ligne  $L^3$ .

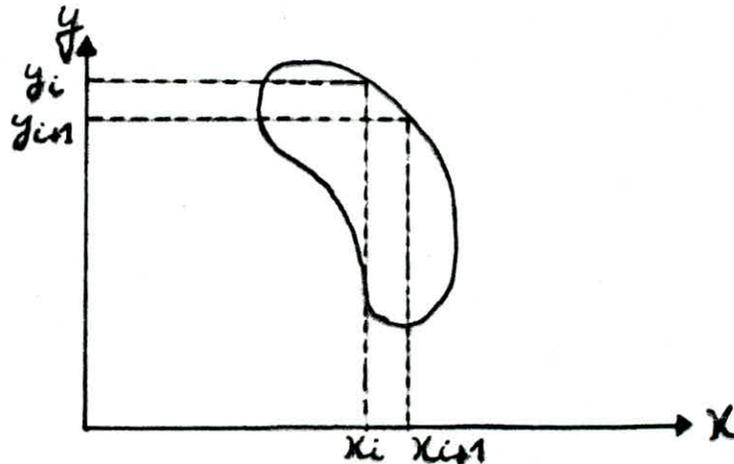
**CHAPITRE**  
**-1-**  
**CARACTERISTIQUES**  
**GEOMETRIQUES**  
**EN DEUX**  
**DIMENSIONS**

### 1.1 IDEE DE CALCUL

Il existe plusieurs méthodes numériques pour le calcul des intégrales doubles parmi lesquelles la méthode des trapèzes, de Simpson, et la méthode de quadrature de Gauss.

La plus pratique est celle des trapèzes, ces trapèzes sont composés d'un rectangle et d'un triangle dont leurs caractéristiques sont faciles à déterminer.

### 1.2 LA SURFACE :



Le contour de la figure est divisé en n parties suivantes :

$[i_1, i_2]$ ,  $[i_2, i_3]$ , .....  $[i_{n-1}, i_n]$  et la méthode des trapèzes est appliquée pour chaque segment.

La surface d'un trapèze pour la division  $i, i+1$  est exprimée par la formule suivante :

$$A = \frac{1}{2} (y_i + y_{i+1}) \cdot h \quad \text{avec } h = x_{i+1} - x_i$$

En faisant la sommation de tous les segments du contour on obtient la surface totale suivante :

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (y_i + y_{i+1}) (x_{i+1} - x_i)$$

avec  $n+1=1$

Cette formule est obtenue lorsque les bases du trapèze sont parallèles à l'axe Y.

Dans le cas où les bases sont parallèles à l'axe X, la surface devient:

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (x_i + x_{i+1})(y_i - y_{i+1})$$

### 1.3 MOMENTS STATIQUES

Les moments statiques s'appliquent principalement dans le domaine des problèmes de flexion.

Reportons-nous à un système de coordonnées X, Y et considérons les deux intégrales suivantes:

$$S_x = \int_F y \cdot dF$$

$$S_y = \int_F x \cdot dF$$

L'indice f signifie que l'intégrale est étendue sur toute la section.

Chacune des intégrales est une somme de produit d'aires élémentaires dF par la distance à l'axe correspondant.

Pour une division de n segments les moments statiques deviennent:

$$S_x = \sum_{i=1}^n A_i \cdot y_c$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n A_i \cdot x_c$$

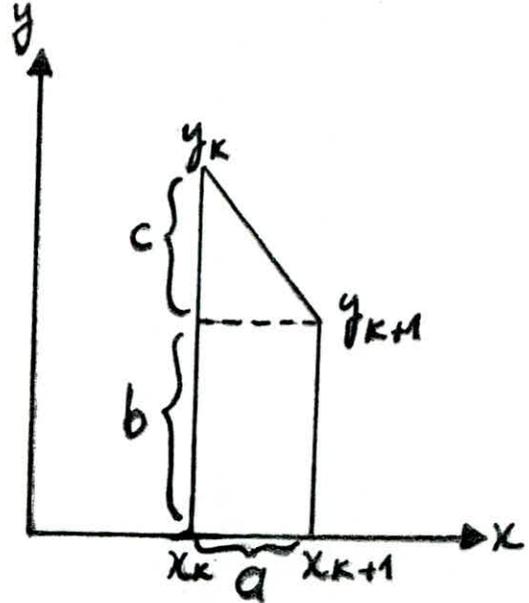
Déterminons le centre de gravité d'un trapèze:

Un trapèze est composé d'un rectangle et d'un triangle.

Les coordonnées de son centre de gravité sont:

$$y_c = \frac{\sum A_i \cdot y_{ci}}{\sum A_i} \quad ; \quad x_c = \frac{\sum A_i \cdot x_{ci}}{\sum A_i}$$

$$\begin{aligned}
 y_c &= \frac{y_{c1} \cdot A_1 + A_2 \cdot y_{c2}}{A_1 + A_2} \\
 &= \frac{(b/2) \cdot b \cdot a + (b + c/3) \cdot c \cdot a/2}{b \cdot a + c \cdot a/2} \\
 &= \frac{b^2 + c(b + \frac{1}{3}c)}{2b + c} \\
 &= \frac{b^2 + cb + \frac{1}{3}c^2}{2b + c}
 \end{aligned}$$



a, b, c étant les valeurs suivantes:

$$a = x_{K+1} - x_K \quad ; \quad b = y_{K+1} \quad ; \quad c = y_K - y_{K+1}$$

En remplaçant a, b, c par leur valeur on obtient:

$$y_c = \frac{y_{K+1}^2 + (y_K - y_{K+1}) + \frac{1}{3}(y_K - y_{K+1})^2}{2y_{K+1} + y_K - y_{K+1}}$$

$$y_c = \frac{y_{K+1}^2 + y_K \cdot y_{K+1} - y_{K+1}^2 + \frac{1}{3}y_K^2 - \frac{2}{3}y_K \cdot y_{K+1} + \frac{1}{3}y_{K+1}^2}{y_{K+1} + y_K}$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{3} \cdot y_{K+1}^2 + \frac{1}{3} \cdot y_K \cdot y_{K+1} + \frac{1}{3} \cdot y_K^2}{y_{K+1} + y_K} = \frac{1}{3} \cdot \frac{y_{K+1}^2 + y_K \cdot y_{K+1} + y_K^2}{y_{K+1} + y_K}$$

Afin d'obtenir un  $X_c$  qui ressemble à  $Y_c$  et qui est facile à retenir on prend le cas où les bases du trapèze sont parallèles à l'axe X et par le même raisonnement on trouve:

$$X_c = \frac{1}{3} \cdot \frac{x_{k+1}^2 + x_{k+1} \cdot x_k + x_k^2}{x_{k+1} + x_k}$$

Les moments statiques deviennent alors:

$$S_x = \sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{ci} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{6} \cdot \frac{(x_{k+1} - x_k)(y_{k+1} - y_k)(y_{k+1}^2 + y_{k+1} \cdot y_k + y_k^2)}{(y_{k+1} + y_k)}$$

$$S_x = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (x_{k+1} - x_k) \cdot (y_{k+1}^2 + y_{k+1} \cdot y_k + y_k^2)$$

Dans le cas d'une surface où ses bases sont parallèles à

l'axe X, le moment statique est exprimé par:  $S_y = \sum_{i=1}^n A_i \cdot x_{ci}$

$$S_y = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \frac{(x_{k+1} + x_k)(y_k - y_{k+1})(x_{k+1}^2 + x_{k+1} \cdot x_k + x_k^2)}{x_{k+1} - x_k}$$

$$S_y = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (y_k - y_{k+1})(x_{k+1}^2 + x_k \cdot x_{k+1} + x_k^2)$$

#### 1.4 MOMENTS D'INERTIE DES SECTIONS PLANES

À titre complémentaire aux moments statiques trois autres intégrales peuvent être considérées.

$$I_x = \int_F y^2 \cdot dF \quad ; \quad I_y = \int_F x^2 \cdot dF \quad ; \quad I_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF$$

Ces relations montrent que les moments quadratiques axiaux sont toujours positifs.

Pour une division de n segments trapézoïdaux, le moment quadratique d'un contour quelconque est la somme des moments quadratiques de ces divisions.

$I_x$  d'un trapèze =  $I_x$  d'un rectangle +  $I_x$  d'un triangle

Les moments quadratiques par rapport à leur centre de gravité sont respectivement :

$$I_{x_1} = \frac{a \cdot b^3}{12} \quad ; \quad I_{x_2} = \frac{a \cdot c^3}{36}$$

Le moment quadratique par rapport à l'axe X (voir figure ) est défini par la somme du moment quadratique par rapport au centre de gravité et le produit de la surface par le carré de la position du centre de gravité.

$$I_{xt} = \frac{a \cdot b^3}{12} + a \cdot b \frac{b^2}{4} + \frac{a \cdot c^3}{36} + \frac{1}{2} a \cdot c \left( b + \frac{1}{3} c \right)^2$$

$$I_{xt} = \frac{a b^3}{3} + \frac{a c^3}{36} + \frac{1}{2} a c \left( b^2 + \frac{1}{9} c^2 + \frac{2}{3} b c \right)$$

$$I_{xt} = \frac{a \cdot b^3}{3} + \frac{a c^3}{36} + \frac{1}{2} a c b^2 + \frac{1}{18} a \cdot c^3 + \frac{1}{3} a \cdot b \cdot c^2$$

$$I_{xt} = \frac{a \cdot b^3}{3} + \frac{1}{12} a \cdot c^3 + \frac{1}{2} a c b^2 + \frac{1}{3} a \cdot b \cdot c^2$$

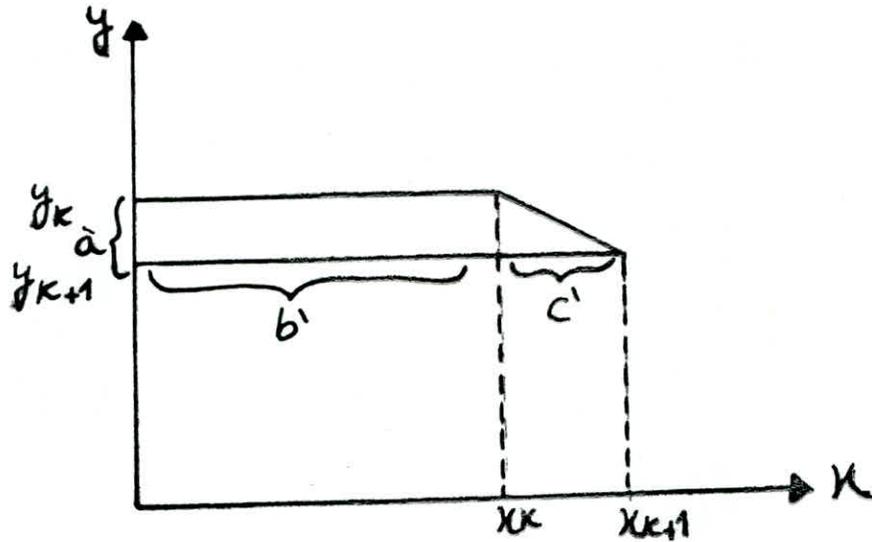
En remplaçant a, b, c par leur valeur on obtient:

$$I_x = \sum_{i=1}^n [x_{k+1} - x_k] \left[ \frac{y_{k+1}^2}{3} + \frac{1}{2} (y_k - y_{k+1}) + \frac{1}{2} (y_k - y_{k+1}) \cdot y_{k+1} + \frac{1}{3} (y_k - y_{k+1})^2 \cdot y_{k+1} \right]$$

$$I_x = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{12} y_k^3 + \frac{1}{12} y_{k+1}^3 + \frac{1}{12} y_k^2 \cdot y_{k+1} + \frac{1}{12} y_{k+1}^2 \cdot y_k \right] [x_{k+1} - x_k]$$

$$I_x = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n (x_{k+1} - x_k) (y_{k+1}^3 + y_{k+1}^2 \cdot y_k + y_{k+1} \cdot y_k^2 + y_k^3)$$

Pour la détermination du moment quadratique par rapport à l'axe y, on suit le même raisonnement que précédemment.



$$I_y = \frac{a' \cdot b'^3}{3} + \frac{1}{12} a' \cdot c'^3 + \frac{1}{2} a' \cdot c' \cdot b'^2 + \frac{1}{3} c'^2 \cdot b' \cdot a'$$

$$I_y = a' \left[ \frac{b'^3}{3} + \frac{1}{12} c'^3 + \frac{1}{12} c' b'^2 + \frac{1}{3} c'^2 b' \right]$$

Après avoir remplacé a, b, c par leurs valeurs respectives le moment quadratique s'exprime par :

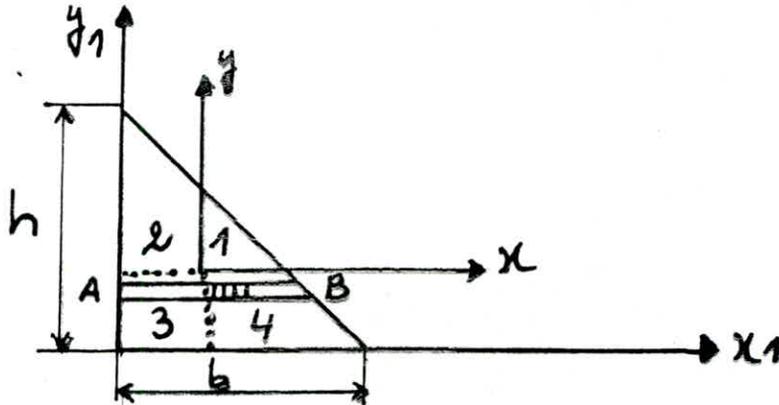
$$I_y = \sum_{i=1}^n (y_k - y_{k+1}) \left[ \frac{x_k^3}{3} + \frac{1}{12} (x_{k+1} - x_k)^3 + \frac{1}{12} (x_{k+1} - x_k) \cdot x_k^2 + \frac{1}{3} (x_{k+1} - x_k) x_k \right]$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n (y_k - y_{k+1}) \left( \frac{1}{12} x_{k+1}^3 + \frac{1}{12} x_k^3 + \frac{1}{12} x_{k+1}^2 \cdot x_k + \frac{1}{12} x_{k+1} \cdot x_k^2 \right)$$

$$I_y = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n (y_k - y_{k+1}) (x_{k+1}^3 + x_{k+1}^2 \cdot x_k + x_{k+1} \cdot x_k^2 + x_k^3)$$

### 1.5 PRODUIT D'INERTIE PAR RAPPORT AUX AXES X,Y

Selon la disposition de la section par rapport aux axes x,y le produit d'inertie peut être aussi bien positif que négatif. Determinons tout d'abord le produit d'inertie d'un triangle rectangle :



Decoupons un element d'aire  $dx_1, dy_1$  et fixant  $y_1$ .

Le produit d'inertie de la bande AB est:

$$I_{x_1, y_1} = y_1 \cdot dy_1 \int_0^c x_1 \cdot dx_1 = y_1 \cdot dy_1 \cdot \frac{c^2}{2}$$

$$\text{OR } c/b = \frac{h - y_1}{h}$$

$$\text{Donc } I_{x_1, y_1} = \frac{b^2}{2h^2} (h - y_1)^2 \cdot y_1 \cdot dy_1$$

Integrons cette expression sur  $y_1$  de 0 a h .

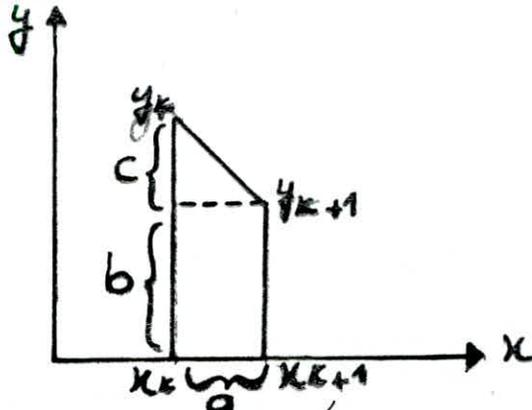
$$I_{x_1, y_1} = \frac{b^2}{2h^2} \int_0^h (h - y_1)^2 \cdot y_1 \cdot dy_1$$

$$I_{x_1, y_1} = \frac{b^2 \cdot h^2}{24}$$

Quand on passe au systeme d'axes centraux, il y a accroissement dans les deuxieme et quatrieme quadrant qui donnent des valeurs negatives au produit d'inertie par consequent :

$$I_{xy} = I_{x_1 y_1} - \frac{h}{3} \cdot \frac{b}{3} \cdot F = - \frac{b^2 \cdot h^2}{72}$$

Pour le trapeze suivant:



Le produit d'inertie est donc composé de trois termes :

- \*  $I_{xy_1} = A_1 \cdot \frac{b}{2} (x_k + \frac{a}{2})$
- \*  $I_{xy_2} = \frac{1}{2} \cdot ca (x_k + \frac{1}{3} a) (b + \frac{1}{3} c)$
- \*  $I_{xy_3} = -a^2 \cdot c^2 / 72$

Le premier terme est un produit d'inertie du rectangle .

Le deuxieme terme represente la variation du produit d'inertie du triangle lors de deplacement des axes .

Ces termes sont developpes comme suit :

$$\begin{aligned} * A_1 \cdot \frac{b}{2} (x_k + \frac{a}{2}) &= \frac{a \cdot b^2}{2} (x_k + \frac{1}{2} a) = (x_{k+1} - x_k) \left[ \frac{y_{k+1}^2}{2} \left( \frac{1}{2} x_k + \frac{1}{2} x_{k+1} \right) \right] \\ &= (x_{k+1} - x_k) \left[ \frac{1}{4} y_{k+1}^2 \cdot x_k + \frac{1}{4} x_{k+1} \cdot y_{k+1}^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \frac{a c^2}{12} &= (x_{k+1} - x_k) \frac{(y_k - y_{k+1})^2}{72} = \frac{(x_{k+1} - x_k)(y_k^2 - 2y_k \cdot y_{k+1} + y_{k+1}^2)}{72} \\
 &= \frac{1}{72} (x_{k+1} \cdot y_k^2 - 2y_k \cdot y_{k+1} \cdot x_{k+1} + x_{k+1} \cdot y_{k+1}^2 - x_k \cdot y_k^2 + 2x_k \cdot y_k \cdot y_{k+1} - \\
 &\quad x_k \cdot y_{k+1}^2).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \frac{1}{2} c (x_k + \frac{1}{3} a) (b + \frac{1}{3} c) &= \frac{1}{2} (y_k - y_{k+1}) \left( \frac{1}{3} x_{k+1} + \frac{2}{3} x_k \right) \left( \frac{1}{3} y_k + \frac{2}{3} y_{k+1} \right) \\
 &= \frac{1}{18} (y_k - y_{k+1}) (x_{k+1} + 2x_k) (y_k + 2y_{k+1}). \\
 &= \frac{1}{18} (y_k^2 \cdot x_{k+1} + 2y_k^2 \cdot x_k - 2y_{k+1}^2 \cdot x_{k+1} - 4y_{k+1}^2 \cdot x_k + y_{k+1} \cdot x_{k+1} \cdot y_k + \\
 &\quad 2x_k \cdot y_{k+1} \cdot y_k).
 \end{aligned}$$

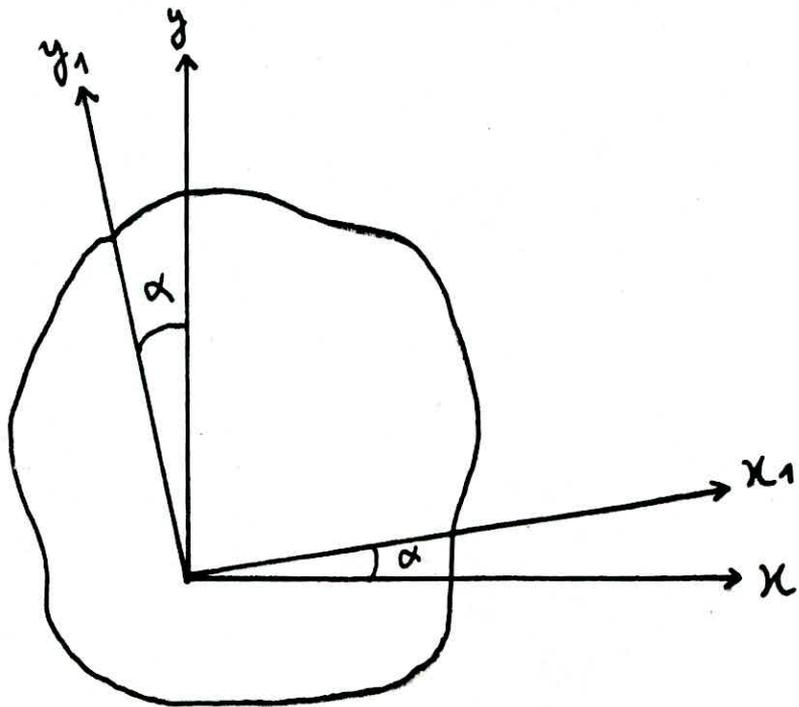
La somme de ces trois termes et pour n divisions le produit d'inertie est alors:

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{24} [x_k (3y_k^2 + y_{k+1}^2 + 2y_k \cdot y_{k+1}) + x_{k+1} (3y_{k+1}^2 + y_k^2 + 2y_k \cdot y_{k+1})]$$

### 1.6 MOMENT QUADRATIQUE POLAIRE

On appelle moment quadratique polaire la somme des moments quadratiques des divers éléments de surface par rapport à un axe perpendiculaire au plan de la surface.

La somme des moments quadratiques axiaux par rapport à deux axes orthogonaux ne dépend pas de l'angle de déviation de ces axes c'est à dire elle est invariante lors de la rotation des axes.



$$\begin{aligned} I_P &= I_x + I_y \\ &= I_{x_1} + I_{y_1} \\ &= \int_s (x^2 + y^2) ds \end{aligned}$$

## 1.6 LES DIFFERENTES CARACTERISTIQUES PAR RAPPORT AUX AXES CENTRAUX

Un axe par rapport auquel le moment statique est nul est appelé axe central et le point d'intersection de ces axes centraux s'appelle centre de gravité de la section.

### 1.6.1 CENTRE DE GRAVITE

Les expressions qui permettent de déterminer le centre de gravité et inversement sont:

$$S_x = A \cdot y_c \Rightarrow y_c = S_x/A \quad (1)$$

$$S_y = A \cdot x_c \Rightarrow x_c = S_y/A \quad (2)$$

### 1.6.2 MOMENTS QUADRATIQUES

Soient  $I_{x_0}$  et  $I_{y_0}$  les moments quadratiques par rapport aux axes principaux.

Pour un repère (X,Y) parallèle au repère principal on a:

$$I_x = I_{x_0} + A \cdot y_c^2$$

$$I_y = I_{y_0} + A \cdot x_c^2$$

En remplaçant  $x_c, y_c$  par (1) et (2)  $I_x$  et  $I_y$  deviennent :

$$I_x = I_{x_0} + A \cdot \frac{S_x^2}{A^2} = I_{x_0} + \frac{S_x^2}{A}$$

$$I_y = I_{y_0} + A \cdot \frac{S_y^2}{A^2} = I_{y_0} + \frac{S_y^2}{A}$$

D'où  $I_{x_0}$ ,  $I_{y_0}$  sont égales à:

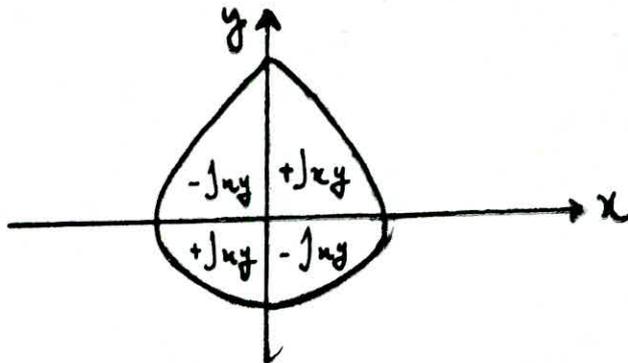
$$I_{x_0} = I_x - \frac{S_x^2}{A} \quad ; \quad I_{y_0} = I_y - \frac{S_y^2}{A}$$

### 1.6.3 PRODUIT D'INERTIE

Si une section a un axe de symétrie, il sera toujours un axe principal.

Le produit d'inertie par rapport à l'axe principal d'un côté est égale à celui de l'autre côté, ce qui donne un produit

d'inertie nul.



Le produit d'inertie par rapport à un repère autre que le repère principal est:

$$I_{xy} = I_{x_0 y_0} + A \cdot x_c \cdot y_c = I_{x_0 y_0} + A \cdot \frac{S_y}{A} \cdot \frac{S_x}{A}$$

$$I_{xy} = I_{x_0 y_0} + \frac{S_x \cdot S_y}{A}$$

Donc

$$I_{x_0 y_0} = I_{xy} - \frac{S_x \cdot S_y}{A}$$

**CHAPITRE**  
**-2-**  
**DEVELOPPEMENT**  
**DES**  
**FORMULES**  
**EN TROIS**  
**DIMENSIONS**

### 2.1 IDÉE DE CALCUL

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe est composé de deux moments d'inertie par rapport aux deux plans orthogonaux qui se coupent suivant cet axe.

Pour le développement des formules en trois dimensions, le corps quelconque est divisé en tranches avec des sections constantes dont les caractéristiques sont déterminées dans le chapitre précédent.

### 2.2 VOLUME

Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n$  les  $n$  sections du corps quelconque et  $L_1, L_2, \dots, L_n$  respectivement leur longueur.

Le volume total de ce corps est exprimé par :

$$V = \sum_{i=1}^n A_i \cdot L_i$$

### 2.3 PRODUITS D'INERTIE

La notion des produits d'inertie a été introduite parce que ces grandeurs sont des termes de l'équation de l'ellipsoïde d'inertie qui permet de calculer le moment d'inertie par rapport à une droite quelconque.

Les produits d'inertie sont définis par les trois sommes suivantes:

$$\int dm \cdot y \cdot z \quad ; \quad \int dm \cdot z \cdot x \quad ; \quad \int x \cdot y \cdot dm$$

- Détermination de  $D_{xy}$

$$D_{xy} = \int x \cdot y \cdot dm \quad \text{avec} \quad dm = \rho \cdot dv$$

L'element de volume peut-être en deux facons:

$$dV = A \cdot dz$$

et

$$dV = l \cdot dA$$

$dz$  etant un element de longueur  $l$ .

En remplaçant  $dv$  par sa valeur le produit d'inertie devient;

soit  $D_{zy} = \int f \cdot A \cdot xy \cdot dz$

ou bien  $D_{xy} = \int f \cdot l \cdot x \cdot y \cdot dA = f \cdot l \int x \cdot y \cdot dA$

On remarque que la deuxieme integrale a un sens physique,

son calcul n'engendre aucune erreur, par consequent

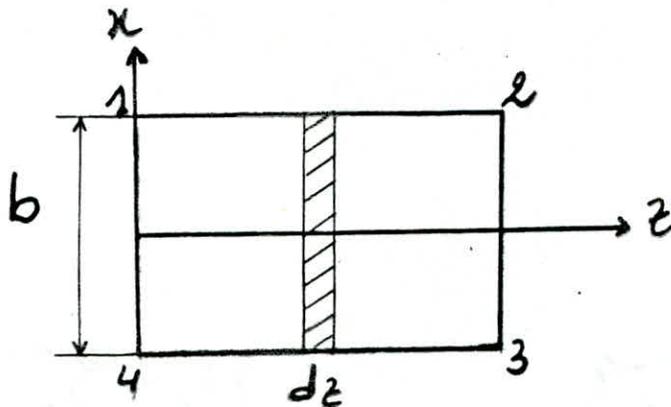
$\int x \cdot y \cdot dA$  est un produit d'inertie en deux dimensions dont la formule numerique a été déterminé.

$$I_{xy_2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{24} [x_k (3y_k^2 + y_{k+1}^2 + 2y_k \cdot y_{k+1}) + x_{k+1} (3y_{k+1}^2 + y_k^2 + 2y_k \cdot y_{k+1})]$$

$D_{xy}$  est alors :

$$D_{xy} = f \cdot l \cdot I_{xy_2}$$

-Determination de  $D_{xz}$



Par definition  $O_{xz} = \int x.z . dm = \int x.z . \rho . dv$

En remplaçant  $dv$  par sa valeur on obtient :

soit  $O_{xz} = \int \rho . A . x . z . dz$

ou bien  $O_{xz} = \int \rho . l . z . dA$

La deuxième integrale parait avoir un sens physique qui est le même que celui du précédent , mais cette fois on est dans la projection  $xz$  et le  $dA$  est un element de surface dans le plan  $xy$ , alors on peut pas utiliser la deuxième integrale. Essayons donc de donner un sens physique à la première integrale.

$$O_{xz} = \int \rho . A . x . z . dx$$

On multiplie et on divise en même temps par une constante quelconque .

$$O_{xz} = \frac{1}{b} \int \rho . A . x . z . b . dz$$

Comme on est dans la projection  $xz$  , on peut prendre cette constante comme étant la largeur de la projection d'une tranche dans ce plan .

Les quatres points  $x_1(I)$  ,  $z(I)$  sont les coordonnées de cette projection .

$$O_{xz} = \frac{1}{b} \rho . A \int x . z . b . dz$$

$b . dz = dA_2$  est un element de surface de cette projection .

$$D_{xz} = \frac{1}{b} \int A \int xz \cdot dA_2$$

$\int xz \cdot dA_2$  est un produit d'inertie de surface dans le plan  $xz$ .

$D_{xz}$  devient alors:

$$D_{xz} = \int A \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{1}{24} (z_{i+1} - z_i) \left[ z_i (x_{i+1}^2 + 2x_{i+1} \cdot x_i + x_i^2) + z_{i+1} (3x_{i+1}^2 + 2x_{i+1} \cdot x_i + x_i^2) \right]$$

-Determination de  $D_{yz}$

Ce produit d'inertie est defini par:

$$D_{yz} = \int y \cdot z \cdot dm = \int y \cdot z \cdot f \cdot dV$$

En remplaçant  $dV$  par sa valeur on obtient:

soit 
$$D_{yz} = \int f \cdot e \cdot y \cdot z \cdot dA$$

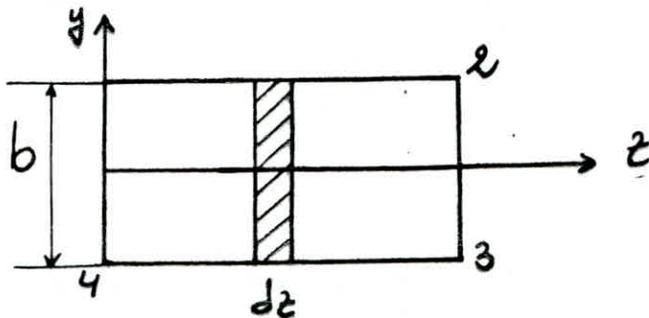
ou bien 
$$D_{yz} = \int f \cdot A \cdot y \cdot z \cdot dz$$

Pour les memes raisons que ceux de  $D_{xz}$ , on peut pas utiliser la premiere integrale.

En multipliant et en divisant par une meme constante, la deuxieme integrale devient:

$$D_{yz} = \frac{1}{b} \int f \cdot A \cdot y \cdot z \cdot b \cdot dz$$

on prend  $b$  cette fois la largeur de la projection dans le plan  $yz$ .



$$D_{yz} = \frac{1}{b} f.A \int y \cdot z \cdot b \cdot dz$$

$b dz$  est un element de surface dans cette projection .

Les quatres points  $Y_i$  ;  $Z_i$  sont les coordonnées de cette surface.

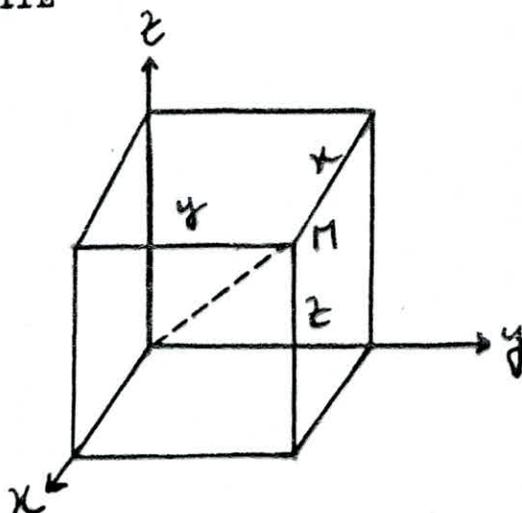
$$D_{yz} = \frac{1}{b} f.A \int y \cdot z \cdot dA_2$$

$\int y \cdot z \cdot dA_2$  est un produit d'inertie de surface dans le plan  $yz$ .

$D_{yz}$  devient alors:

$$D_{yz} = f.A \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{1}{24} (z_{i+1} - z_i) \left[ z_i (y_{i+1}^2 + 2 y_{i+1} \cdot y_i + y_i^2) + z_{i+1} (3 y_{i+1}^2 + 2 y_{i+1} \cdot y_i + y_i^2) \right]$$

## 2.4 MOMENTS D'INERTIE



Pour un trièdre d'axes rectangulaires  $oxyz$ , les coordonnées d'un point du système sont ses distances aux plans de coordonnées.

Les moments d'inertie par rapport aux trois plans sont :

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i^2 \quad ; \quad \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 \quad ; \quad \sum_{i=1}^n m_i z_i^2$$

Les moments d'inertie par rapport aux trois axes sont alors :

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) \quad ; \quad I_y = \sum_{i=1}^n (z_i^2 + x_i^2) m_i \quad ; \quad I_z = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

On peut aussi écrire :

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i z_i^2$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n m_i z_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i x_i^2$$

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i y_i^2$$

CALCUL NUMERIQUE DES DIFFERENTS MOMENTS D'INERTIE

-Plan xy

Par definition 
$$I_{xy} = \int z^2 \cdot dm = \sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i^2$$

$dm = \rho \cdot dV$   $dV$  etant egale soit à

$dV = A \cdot dz$  ou bien  $dV = \rho \cdot dA$

En remplaçant  $dV$  ses valeurs  $I_{xy}$  devient:

soit 
$$I_{xy} = \int \rho \cdot A \cdot dz \cdot z^2 \quad (1)$$

ou bien 
$$I_{xy} = \int \rho \cdot \rho \cdot dA \cdot z^2 = \rho \cdot \rho \int z^2 \cdot dA \quad (2)$$

Essayons donc de donner un sens physique a la premiere integrale puisque la deuxieme n'a pas de sens.

$$I_{xy} = \int \rho \cdot A \cdot z^2 \cdot dz = \rho \cdot A \int z^2 \cdot dz$$

En multipliant et en divisant par une même constante on obtient:

$$I_{xy} = \rho \cdot A \cdot \frac{1}{b} \int z^2 \cdot b \cdot dz$$

Si  $b$  est une largeur dans la projection  $xz$  ou bien  $yz$

$b \cdot dz$  sera un element de surface.

Soit  $b \cdot dz = dA_2$

$$I_{xy} = \rho \cdot A \cdot \frac{1}{b} \int z^2 \cdot dA_2$$

Comme  $z$  et  $dA_2$  se trouvent dans la même projection,

$\int z^2 \cdot dA_2$  a un sens physique qui est un moment quadratique.

soit par rapport a l'axe des  $x$  ou bien par rapport à l'axe des  $y$ .

Numeriquement cette integrale vaut:

$$I_{xz} = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{12} (X_{i+1} - X_i) \cdot (Z_{i+1}^3 + Z_{i+1}^2 \cdot Z_i + Z_{i+1} \cdot Z_i^2 + Z_i^3)$$

et par suite:

$$I_{xy}(k) = \int A(k) \cdot \frac{1}{b} \cdot I_{xz}$$

b est egale a la valeur absolue de  $X_1(2) - X_1(1)$  ou bien  $X_1(4) - X_1(1)$ .

c'est à dire tout depend du point de debut.

$A(k)$  est la section de la tranche k.

-Plan xz

Par definition 
$$I_{xz} = \int y^2 \cdot dm$$

$I_{xz}$  est égale soit à : 
$$I_{xz} = \int y^2 \cdot \rho \cdot dA$$

ou bien: 
$$I_{xz} = \int \rho \cdot A \cdot y^2 \cdot dz$$

On remarque que dans la premiere formule  $\int y^2 \cdot dA$  est deja calculée, c'est une grandeur d'un moment quadratique.

$$I_{xz} = \rho \cdot \int y^2 \cdot dA$$

$$I_{xz} = \rho \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{12} (X_{i+1} - X_i) [y_{i+1}^3 + y_{i+1}^2 \cdot y_i + y_{i+1} \cdot y_i^2 + y_i^3]$$

-Plan yz

De la même façon  $I_{yz}$  est égale:

soit à 
$$I_{yz} = \int x^2 \cdot \rho \cdot dA$$

ou bien 
$$I_{yz} = \int \rho \cdot A \cdot x^2 \cdot dz$$

$\int x^2 \cdot dA$  est déjà calculée d'où

$$I_{yz} = \rho \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{12} (y_i - y_{i+1}) [x_{i+1}^3 + x_{i+1}^2 \cdot x_i + x_{i+1} \cdot x_i^2 + x_i^3]$$

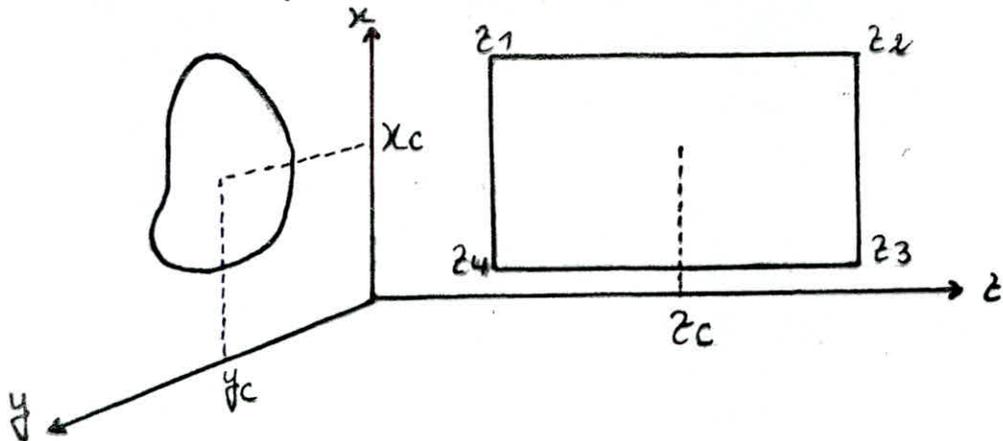
Finalement les trois moments d'inertie sont:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}.$$

$$I_y = I_{xy} + I_{yz}.$$

$$I_z = I_{xz} + I_{yz}.$$

### 2.5 LES CARACTERISTIQUES PAR RAPPORT AUX AXES CENTRAUX



\*Les coordonnées du centre de gravité

les coordonnées  $x_c$  et  $y_c$  d'une tranche sont déterminées dans la projection  $xy$ .

La surface et les moments statiques étant connus  $x_c$  et  $y_c$  sont donnés par :

$$x_c = S_y / A \quad ; \quad y_c = S_x / A$$

\*Les moments d'inertie

$$I_x = I_{xc} + m(z_c^2 + y_c^2) \Rightarrow I_{xc} = I_x - m(z_c^2 + y_c^2).$$

$$I_y = I_{yc} + m(x_c^2 + z_c^2) \Rightarrow I_{yc} = I_y - m(x_c^2 + z_c^2).$$

$$I_z = I_{zc} + m(x_c^2 + y_c^2) \Rightarrow I_{zc} = I_z - m(x_c^2 + y_c^2).$$

**CHAPITRE**  
**-3-**  
**SOUS-**  
**PROGRAMMES**  
**UTILISES**

### 3.1 SOUS-PROGRAMME DU CALCUL D'UN CONTOUR D'UNE FIGURE

#### QUELCONQUE

Le contour d'une figure quelconque est approximé soit par une portion circulaire ou bien elliptique où les coordonnées  $X(I), Y(I)$  se calculent par les équations de ces dernières. Pour les fonctions linéaires il suffit d'introduire les coordonnées du début et la fin de ces droites dans le repère choisi

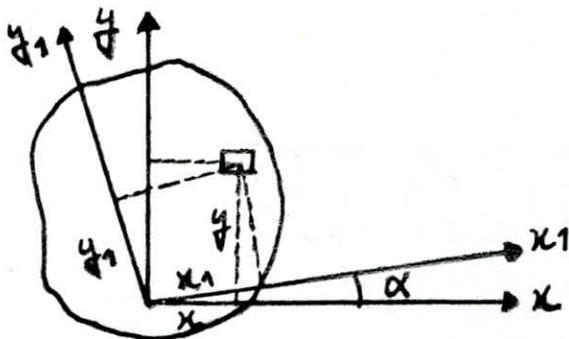
Si la figure est quelconque, le calcul des  $X(I), Y(I)$  est obligatoire et plus la courbe est incurvée plus le nombre des points est intéressant afin de réduire les erreurs. Pour une portion circulaire on introduit le rayon et les angles du début et la fin de la portion et la même chose pour une portion elliptique.

Le calcul ou bien l'introduction des  $X(I), Y(I)$  doit se faire dans le sens d'une aiguille d'une montre parce que les formules sont démontrées à partir de ce sens.

Dans ce sous-programme on peut utiliser deux coordonnées initiales qui représentent l'excentricité de la tranche elliptique ou circulaire.

### 3.2 SOUS-PROGRAMME DE CALCUL DES MOMENTS DE DEVIATION

(EN DEUX DIMENSIONS)



Supposons les moments d'inertie d'une certaine section sont connus relativement aux axes  $x, y$ .

les moments d'inertie par rapport aux axes  $x_1, y_1$  tournés d'un angle  $\alpha$  par rapport au premier système sont déterminés comme

suit:

$$I_{x_1} = \int_S y_1^2 \cdot dS$$
$$I_{y_1} = \int_S x_1^2 \cdot dS$$
$$I_{x_1 y_1} = \int_S x_1 y_1 \cdot dS$$

De la projection des coordonnées  $x, y$  sur le repère  $x_1, y_1$  on trouve:

$$x_1 = y \sin \alpha + x \cdot \cos \alpha$$

$$y_1 = y \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha$$

En éliminant  $x_1, y_1$  on obtient:

$$I_{x_1} = \int_S (y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha)^2 dS$$

$$I_{y_1} = \int_S (y \cdot \sin \alpha + x \cdot \cos \alpha)^2 dS$$

$$I_{x_1 y_1} = \int_S (y \cdot \cos \alpha - x \sin \alpha)(y \sin \alpha + x \cos \alpha) \cdot dS$$

D'où

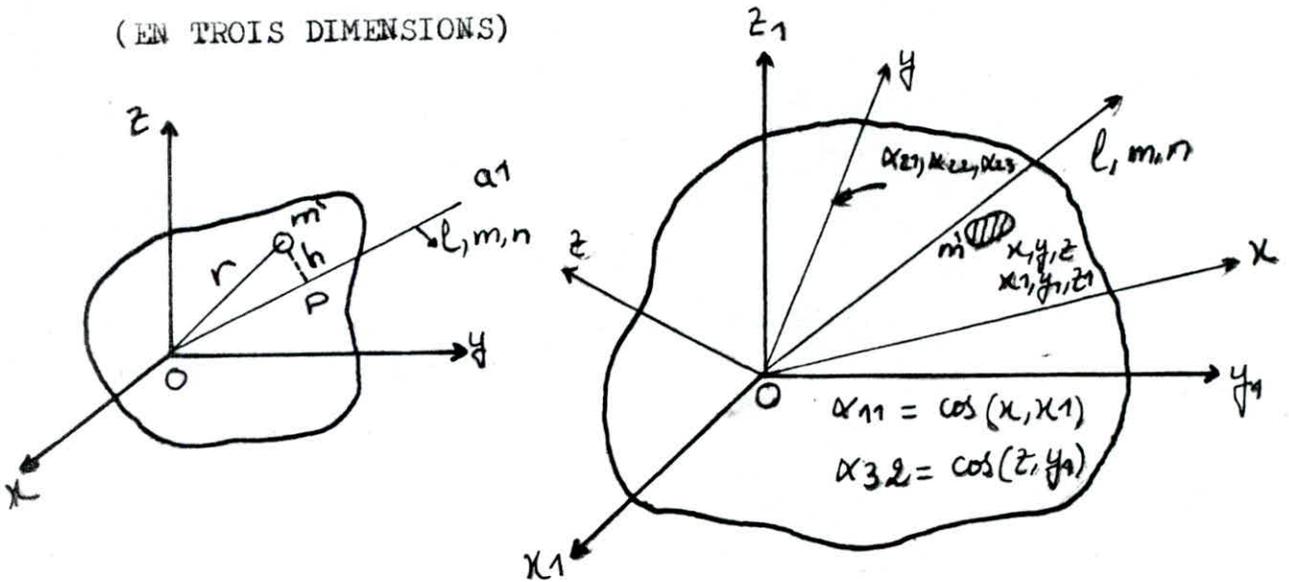
$$I_{x_1} = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha$$

$$I_{y_1} = I_x \cdot \sin^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha$$

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} \cdot \cos 2\alpha + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha$$

### 3.3 SOUS-PROGRAMME DE CALCUL DES MOMENTS DE DEVIATION

(EN TROIS DIMENSIONS)



Le moment d'inertie  $I_{001}$  est égale à :

$$I_{001} = \sum m' h^2$$

D'où on peut remplacer  $h^2$  par :

$$h^2 = r^2 - \overline{OP}^2 \quad \text{avec} \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\overline{OP} = l \cdot x + m \cdot y + n \cdot z \quad \text{avec} \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$l, m, n$  sont les cosinus directeurs de :

$$I_{001} = \sum m' (r^2 - \overline{OP}^2)$$

$$= \sum m' [(x^2 + y^2 + z^2)(l^2 + m^2 + n^2) - (lx + my + nz)^2]$$

$$I_{002} = l^2 \sum m' (y^2 + z^2) + m^2 \sum m' (x^2 + y^2) + n^2 \sum m' (x^2 + y^2)$$

$$- 2lm \sum m' xy - 2ln \sum m' xz - 2mn \sum m' yz.$$

mais  $\sum m' (y^2 + z^2) = I_x$  etc ... et  $\sum m' \cdot x \cdot y = \Delta_{xy}$ .

$$I_{001} = I_x \cdot l^2 + I_y \cdot m^2 + I_z \cdot n^2 - 2 \Delta_{xy} \cdot l \cdot m - 2 \Delta_{xz} \cdot l \cdot n - 2 \Delta_{yz} \cdot m \cdot n \quad (7)$$

Soient  $d_{11}$  ;  $d_{12}$  ;  $d_{13}$  les cosinus directeurs de ox.

La formule (7) peut s'écrire sous la forme :

$$I_x = I_{x_1} \cdot d_{11}^2 + I_{y_1} \cdot d_{12}^2 + I_{z_1} \cdot d_{13}^2 - 2 D_{x_1 y_1} \cdot d_{11} \cdot d_{12} - 2 D_{x_1 z_1} \cdot d_{11} \cdot d_{13} - 2 D_{y_1 z_1} \cdot d_{12} \cdot d_{13}.$$

$I_y$  et  $I_z$  sont donnés de la même façon.

$$I_y = I_{x_1} \cdot d_{21}^2 + I_{y_1} \cdot d_{22}^2 + I_{z_1} \cdot d_{23}^2 - 2 D_{x_1 y_1} \cdot d_{21} \cdot d_{22} - 2 D_{x_1 z_1} \cdot d_{21} \cdot d_{23} - 2 D_{y_1 z_1} \cdot d_{22} \cdot d_{23}$$

$$I_z = I_{x_1} \cdot d_{31}^2 + I_{y_1} \cdot d_{32}^2 + I_{z_1} \cdot d_{33}^2 - 2 D_{x_1 y_1} \cdot d_{31} \cdot d_{32} - 2 D_{x_1 z_1} \cdot d_{31} \cdot d_{33} - 2 D_{y_1 z_1} \cdot d_{32} \cdot d_{33}.$$

Pour déterminer  $D_{xy}$  on revient à la définition:

$$D_{xy} = \sum m' \cdot x \cdot y.$$

$$x = d_{11} \cdot x_1 + d_{12} \cdot y_1 + d_{13} \cdot z_1 ; \quad y = d_{21} \cdot x_1 + d_{22} \cdot y_1 + d_{23} \cdot z_1.$$

$$D_{xy} = \sum m' (d_{11} \cdot x_1 + d_{12} \cdot y_1 + d_{13} \cdot z_1) (d_{21} \cdot x_1 + d_{22} \cdot y_1 + d_{23} \cdot z_1).$$

$$\begin{aligned} \text{mais } \sum m' (d_{11} \cdot d_{21} \cdot x_1^2 + d_{12} \cdot d_{22} \cdot y_1^2 + d_{13} \cdot d_{23} \cdot z_1^2 \\ = - (d_{11} \cdot d_{21} D_{x_1} + d_{12} \cdot d_{22} \cdot D_{y_1} + d_{13} \cdot d_{23} \cdot D_{z_1}) \end{aligned}$$

$$\text{Parce que } (d_{11} \cdot d_{21} + d_{12} \cdot d_{22} + d_{13} \cdot d_{23})(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = 0$$

(produit scalaire des cos directeurs)

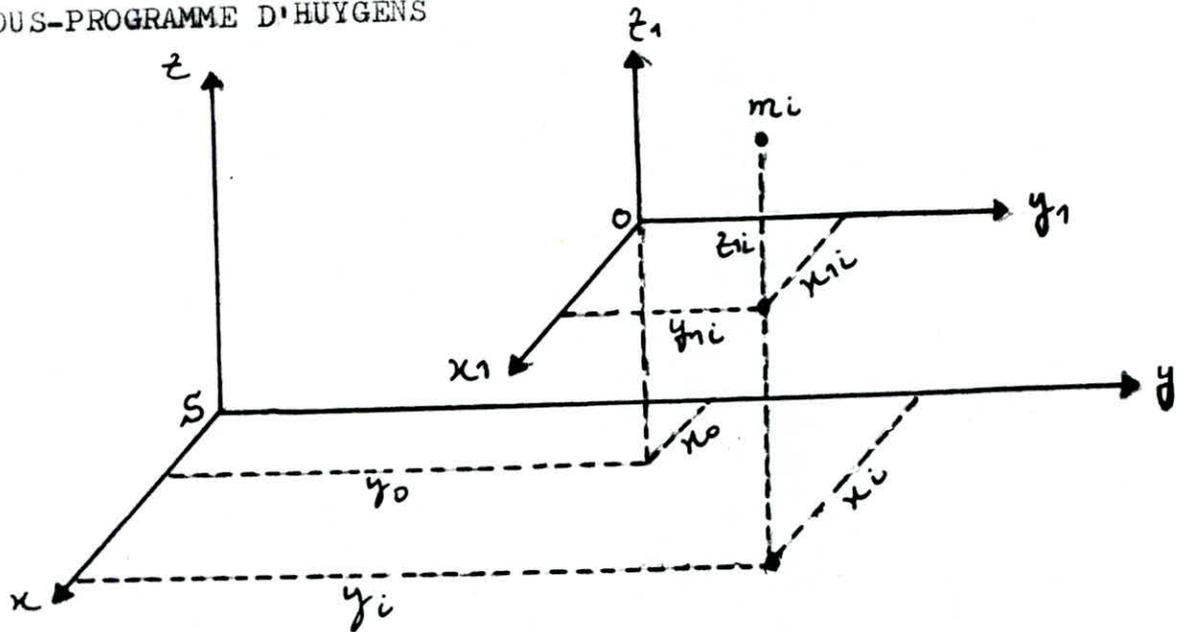
$$D_{xy} = (d_{11} \cdot d_{22} + d_{12} \cdot d_{21}) D_{x_1, y_1} + (d_{11} \cdot d_{23} + d_{13} \cdot d_{21}) D_{x_1, z_1} + \\ (d_{12} \cdot d_{23} + d_{13} \cdot d_{22}) D_{y_1, z_1} - (d_{11} \cdot d_{21} \cdot D_{x_1} + d_{12} \cdot d_{22} \cdot D_{y_1} + d_{13} \cdot d_{23} \cdot D_{z_1})$$

Par analogie on trouve:

$$D_{xz} = (d_{11} \cdot d_{32} + d_{12} \cdot d_{31}) D_{x_1, y_1} + (d_{11} \cdot d_{33} + d_{13} \cdot d_{31}) D_{x_1, z_1} + \\ (d_{12} \cdot d_{33} + d_{13} \cdot d_{32}) D_{y_1, z_1} - (d_{11} \cdot d_{31} \cdot D_{x_1} + d_{12} \cdot d_{32} \cdot D_{y_1} + d_{13} \cdot d_{33} \cdot D_{z_1})$$

$$D_{yz} = (d_{21} \cdot d_{32} + d_{22} \cdot d_{31}) D_{x_1, y_1} + (d_{21} \cdot d_{33} + d_{23} \cdot d_{31}) D_{x_1, z_1} + \\ (d_{22} \cdot d_{33} + d_{23} \cdot d_{32}) D_{y_1, z_1} - (d_{21} \cdot d_{31} \cdot D_{x_1} + d_{22} \cdot d_{32} \cdot D_{y_1} + d_{23} \cdot d_{33} \cdot D_{z_1})$$

3.4 SOUS-PROGRAMME D'HUYGENS



Soient

$$Sx_1 \parallel Ox_1 \quad ; \quad Sy_1 \parallel Oy_1 \quad ; \quad Sz_1 \parallel Oz_1.$$

De la figure on peut écrire:

$$x_{1i} = x_i - x_0 \quad ; \quad y_{1i} = y_i - y_0$$

Le moment d'inertie  $I_{z_1}$  est égale à:

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= \sum_{i=1}^n m_i (x_{1i}^2 + y_{1i}^2) = \sum_{i=1}^n m_i [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2] \\ &= \sum_{i=1}^n m_i [x_i^2 - 2x_0 x_i + x_0^2 + y_i^2 - 2y_0 y_i + y_0^2] \\ &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2x_0 \sum_{i=1}^n m_i x_i - 2y_0 \sum_{i=1}^n m_i y_i + (x_0^2 + y_0^2) \sum_{i=1}^n m_i \end{aligned}$$

Mais

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^n m_i y_i = 0$$

parce que  $S$  est le centre de masse.

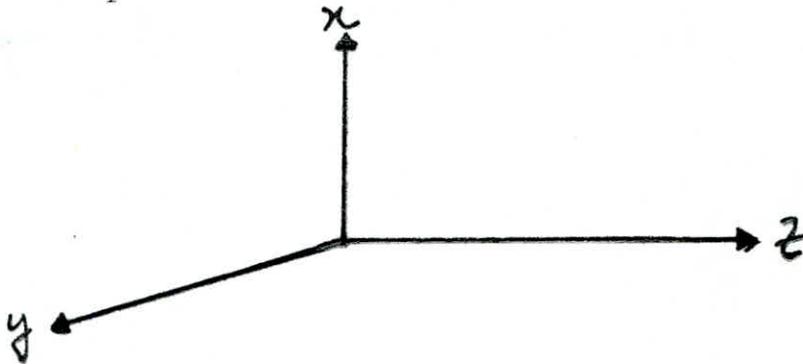
Le moment d'inertie devient alors:

$$I_{z_1} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) + (x_0^2 + y_0^2) \sum_{i=1}^n m_i$$

$$\text{Soit } d^2 = x_0^2 + y_0^2 \Rightarrow I_{z_1} = I_z + m \cdot d^2$$

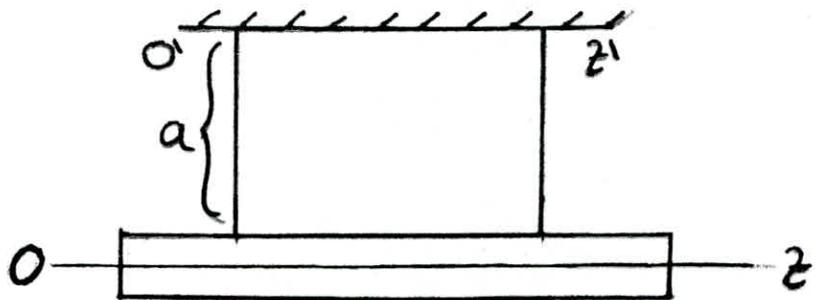
**CHAPITRE**  
**-4-**  
**METHODES**  
**EXPERIMENTALES**

Soit le repère de trois dimensions suivant:



#### 4.1 DETERMINATION DU MOMENT D'INERTIE PAR RAPPORT A L'AXE Z

Pour déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe oz de cette figure.



on suspend le corps à deux tiges ou bien deux cordes de masse négligeable de telle façon que l'axe oz soit horizontal et à l'aide d'un chronomètre la période de ses petites oscillations est lue.

L'équation de mouvement est:

$$J_{Oz'} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -P \cdot a \cdot \sin\varphi$$

Pour les petites oscillations

$$\sin\varphi \approx \varphi$$

$$J_{Oz'} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + P \cdot a \cdot \varphi = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{P \cdot a}{J_{Oz'}}$$

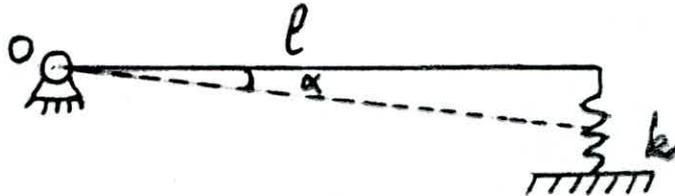
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_{O'z'}}{P \cdot a}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{J_{O'z'}}{P a} \Rightarrow J_{O'z'} = \frac{T^2 P a}{4\pi^2}$$

Ensuite le moment d'inertie par rapport à OZ se calcule par le théorème de Huygens.

$$J_{Oz} = J_{O'z'} - \frac{P}{g} \cdot a^2$$

#### 4.2 DETERMINATION DU MOMENT D'INERTIE PAR RAPPORT A L'AXE Y



On utilise un ressort avec une raideur connue et on calcule la période de ses petites oscillations

Appliquons le lagrangien pour déterminer l'équation du mouvement.

A l'équilibre on peut écrire :

$$F \cdot l - P l/2 = 0 \Rightarrow F = P/2$$

$$F = kx_0 \Rightarrow kx_0 = P/2$$

L'énergie cinétique est  $T = \frac{1}{2} I \cdot \dot{\alpha}^2$

L'énergie potentielle est  $U = \frac{1}{2} k (x + x_0)^2 - mg \frac{x}{2}$

$$U = \frac{1}{2} k (x^2 + x_0^2) + k x x_0 - mg \frac{x}{2}$$

$$U = \frac{1}{2} k (x^2 + x_0^2) + \underbrace{x \left( kx_0 - \frac{mg}{2} \right)}_{\downarrow 0}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} k (x^2 - x_0^2)$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} k (\alpha^2 + \alpha_0^2) l^2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow I_0 \ddot{\alpha} + k l^2 \alpha = 0$$

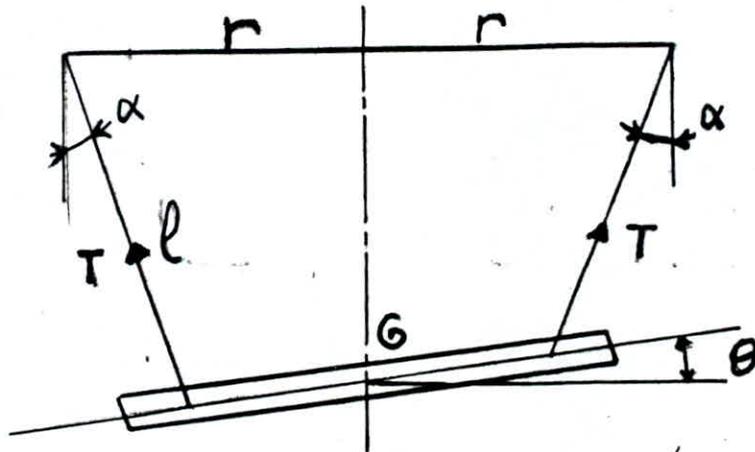
$$\ddot{\alpha} + \frac{k l^2}{I} \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{k l^2}{I} \Rightarrow I = \frac{k l^2}{\omega^2} = \frac{k l^2}{(2\pi/T)^2}$$

$$I_0 = (T/2\pi)^2 \cdot k \cdot l^2$$

#### 4.3 DETERMINATION DU MOMENT D'INERTIE PAR RAPPORT A L'AXE X

La barre est suspendue en deux points equidistants par deux fils identiques comme le montre la figure.



En negligant le mouvement du centre de gravité en translation par rapport au mouvement de rotation autour de G, les théorèmes fondamentaux de la mécanique nous donnent:

$$0 = Mg - 2T$$

$$\frac{d}{dt} (I\omega) = 2Trd$$

D'où l'équation différentielle est:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + Mg \cdot \frac{r^2\theta}{L} = 0 \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mg \frac{r^2}{L}}}$$

**CHAPITRE**

**-5-**

**APPLICATIONS**

## 5.1 APPLICATIONS EN DEUX DIMENSIONS

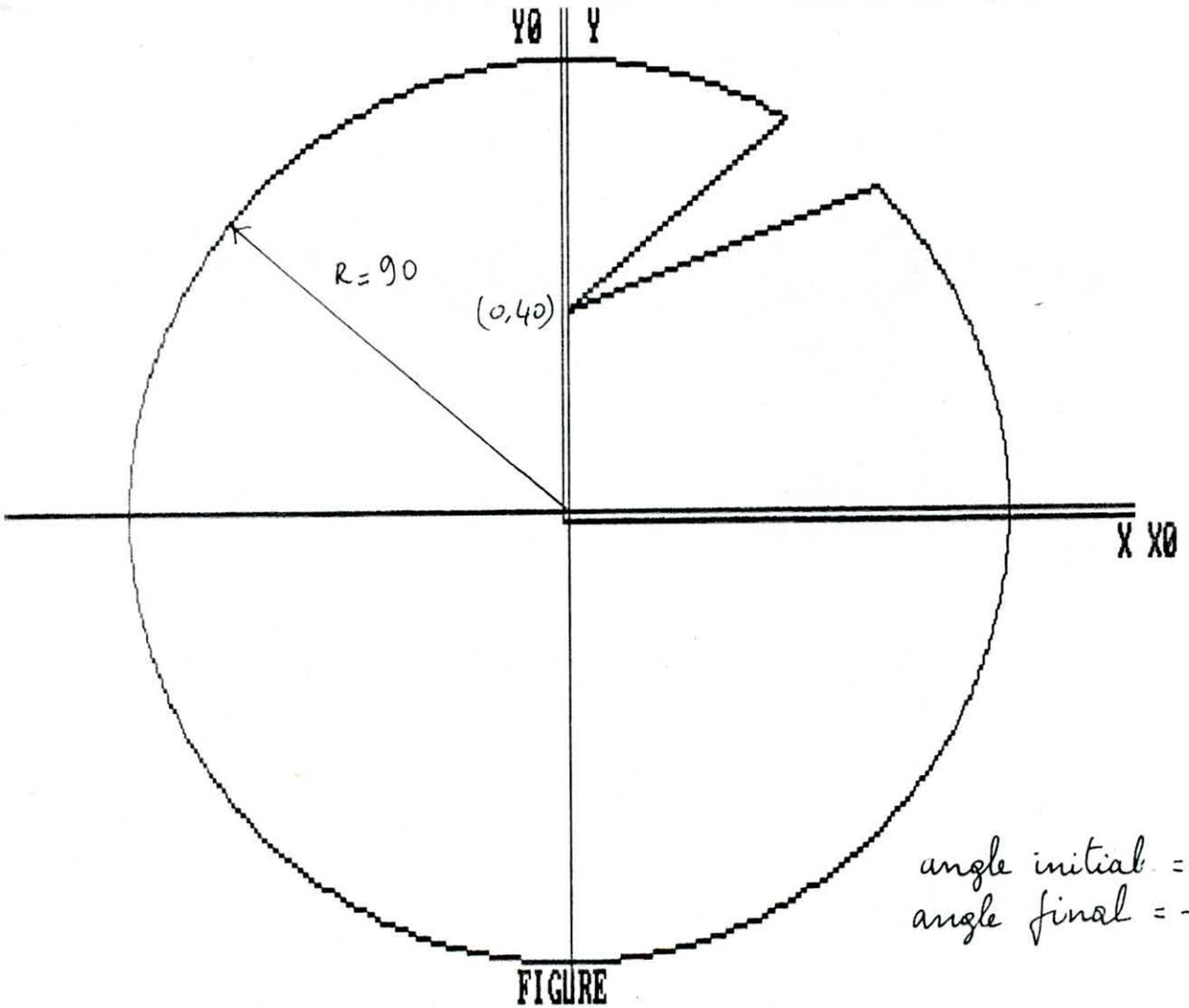
On a choisi plusieurs figures pour l'application du programme, certaines existent dans la pratique et d'autres sont quelconques.

Les données et les résultats sont indiqués dans chaque exemple.

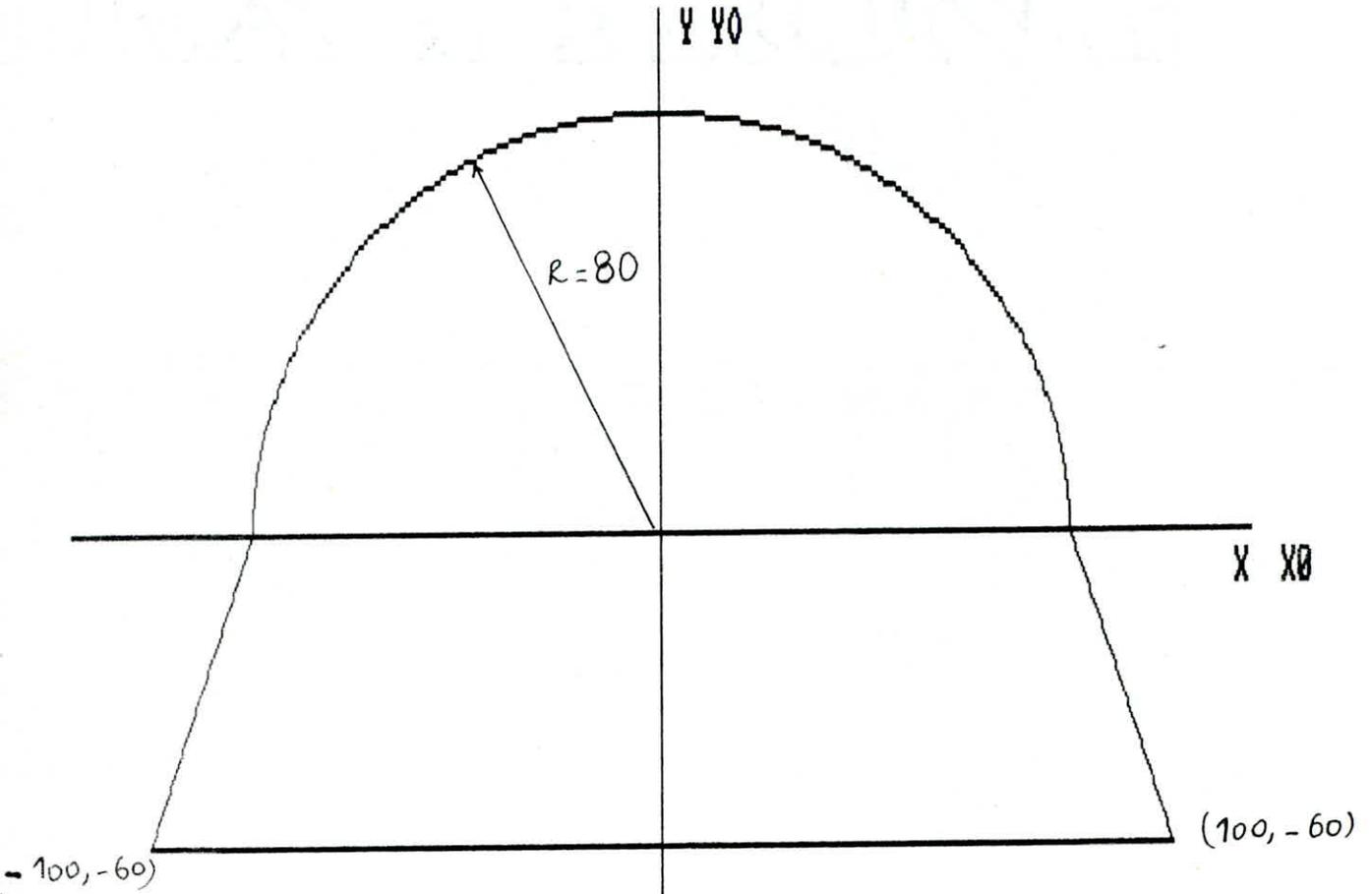
## 5.2 APPLICATIONS EN TROIS DIMENSIONS

Le calcul numérique des moments d'inertie des corps quelconques nécessite l'introduction de plusieurs données, pour cela on s'est limité à un seul exemple qui est le vilebrequin du moteur F8L413.

Afin de connaître les ordres de grandeur des moments d'inertie de ce vilebrequin on a fait un calcul expérimental par rapport à deux axes.

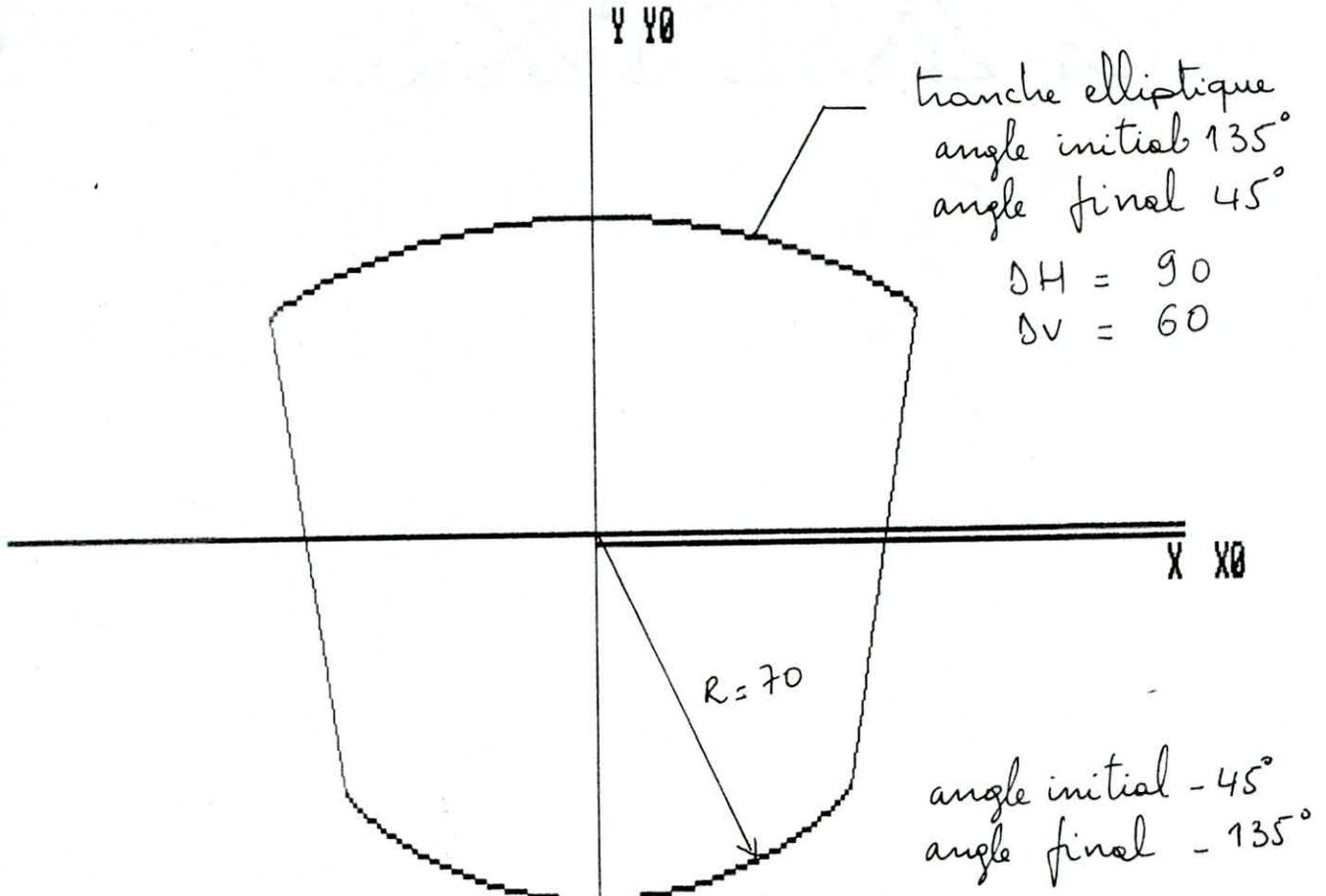


LA SURFACE-----	-A( 1 )=	24758.17
LE MOMENT STATIQUE-----	-Sx( 1 )=	-41734.81
LE MOMENT STATIQUE-----	-Sy( 1 )=	-25114.41
LE MOMENT D'INERTIE-----	-Ix( 1 )=	4.894819E+07
LE MOMENT D'INERTIE-----	-Iy( 1 )=	5.048261E+07
LE PRODUIT D'INERTIE-----	-Ixy2( 1 )=	-1582074
LE MOMENT D'INERTIE-----	-Ix0( 1 )=	4.887784E+07
LE MOMENT D'INERTIE-----	-Iy0( 1 )=	5.045713E+07
LE PRODUIT D'INERTIE-----	-Ixy0( 1 )=	-1624409
LA COORDONNEE CG-----	-Xc( 1 )=	-1.014389
LA COORDONNEE CG-----	-Yc( 1 )=	-1.685698



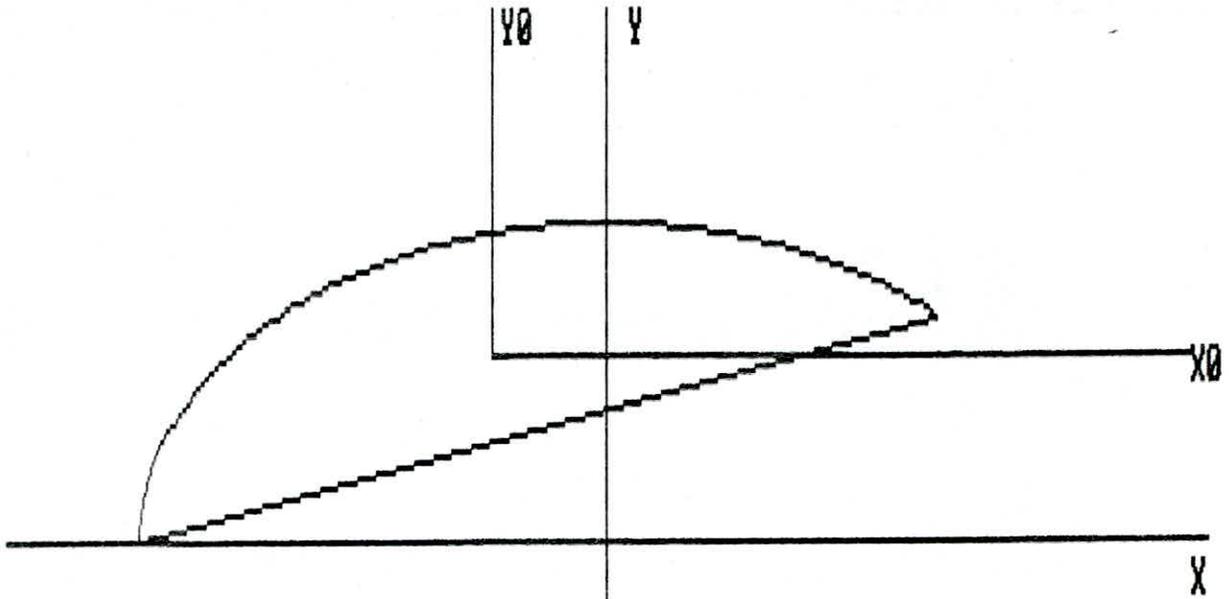
FIGURE

LA SURFACE-----	-----A( 1 )=	20852.59
LE MOMENT STATIQUE-----	-----Sx( 1 )=	5307.691
LE MOMENT STATIQUE-----	-----Sy( 1 )=	.296875
LE MOMENT D'INERTIE-----	-----Ix( 1 )=	2.976333E+07
LE MOMENT D'INERTIE-----	-----Iy( 1 )=	4.560334E+07
LE PRODUIT D'INERTIE-----	-----Ixy2( 1 )=	3
LE MOMENT D'INERTIE-----	-----Ix0( 1 )=	2.976198E+07
LE MOMENT D'INERTIE-----	-----Iy0( 1 )=	4.560334E+07
LE PRODUIT D'INERTIE-----	-----Ixy0( 1 )=	2.924435
LA COORDONNEE CG-----	-----Xc( 1 )=	1.423684E-05
LA COORDONNEE CG-----	-----Yc( 1 )=	.2545339



FIGURE

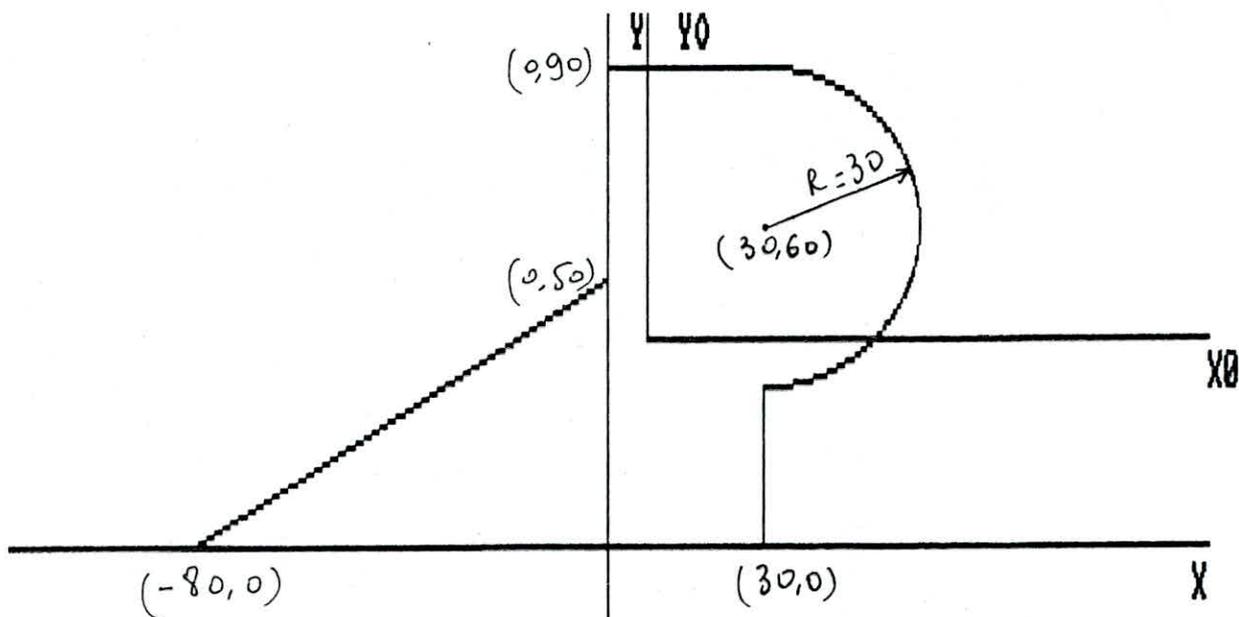
LA SURFACE-----	-A( 1 )=	13339.19
LE MOMENT STATIQUE-----	-Sx( 1 )=	-21330.46
LE MOMENT STATIQUE-----	-Sy( 1 )=	-.0625
LE MOMENT D'INERTIE-----	-Ix( 1 )=	1.584248E+07
LE MOMENT D'INERTIE-----	-Iy( 1 )=	1.32772E+07
LE PRODUIT D'INERTIE-----	-Ixy( 1 )=	.46875
LE MOMENT D'INERTIE-----	-Ix0( 1 )=	1.580837E+07
LE MOMENT D'INERTIE-----	-Iy0( 1 )=	1.32772E+07
LE PRODUIT D'INERTIE-----	-Ixy0( 1 )=	.3688074
LA COORDONNEE CG-----	-Xc( 1 )=	-4.68544E-06
LA COORDONNEE CG-----	-Yc( 1 )=	-1.599082



tranche elliptique  
 angle initial 180°  
 angle final 45°  
 ΔH = 90  
 ΔV = 60

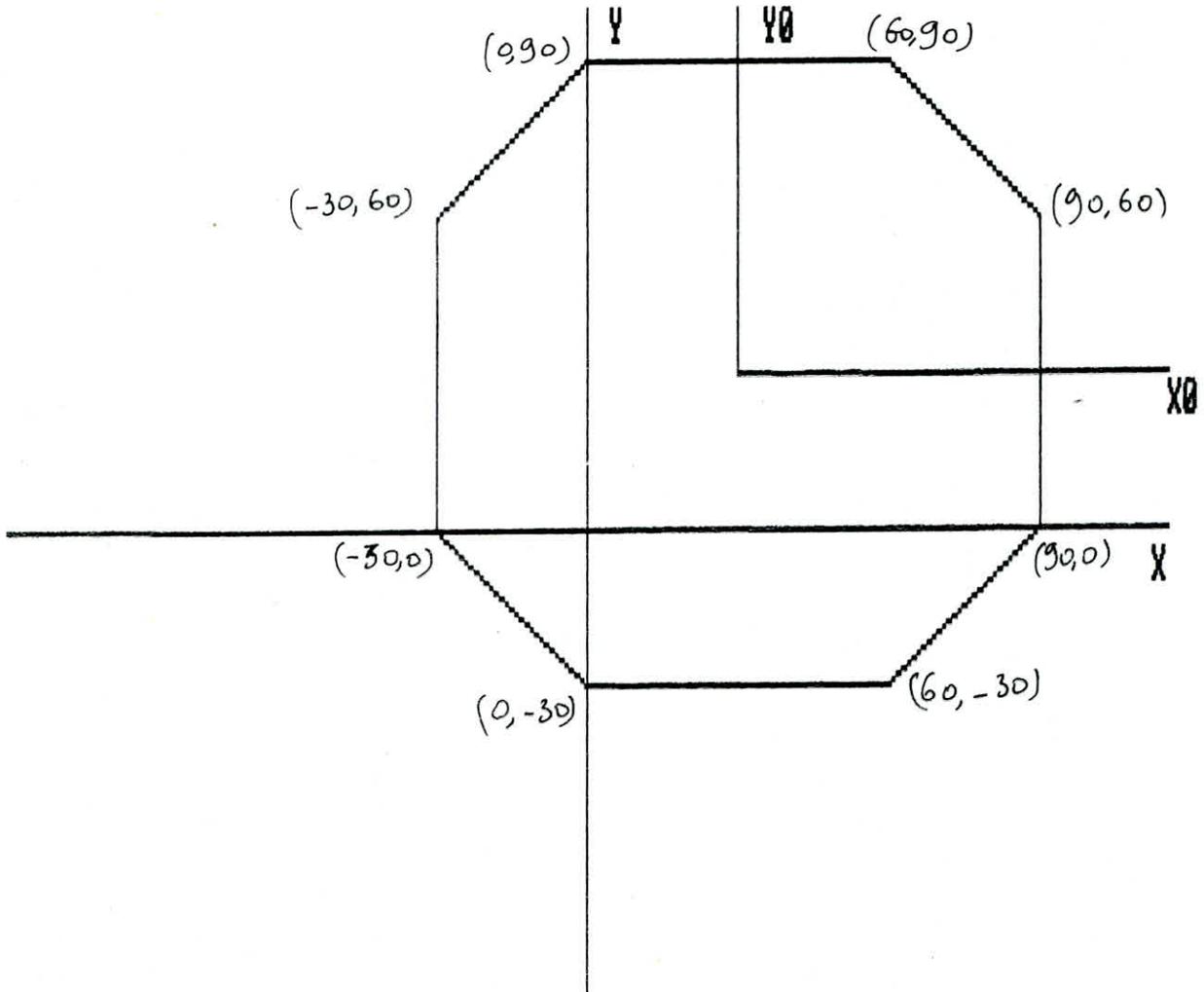
FIGURE

LA SURFACE-----	A( 1 ) = 4452.214
LE MOMENT STATIQUE-----	Sx( 1 ) = 157353.5
LE MOMENT STATIQUE-----	Sy( 1 ) = -97766.86
LE MOMENT D'INERTIE-----	Ix( 1 ) = 6367092
LE MOMENT D'INERTIE-----	Iy( 1 ) = 8104107
LE PRODUIT D'INERTIE-----	Ixy2( 1 ) = -2073949
LE MOMENT D'INERTIE-----	Ix0( 1 ) = 805787
LE MOMENT D'INERTIE-----	Iy0( 1 ) = 5957229
LE PRODUIT D'INERTIE-----	Ixy0( 1 ) = 1381401
LA COORDONNEE CG-----	Xc( 1 ) = -21.95916
LA COORDONNEE CG-----	Yc( 1 ) = 35.34275



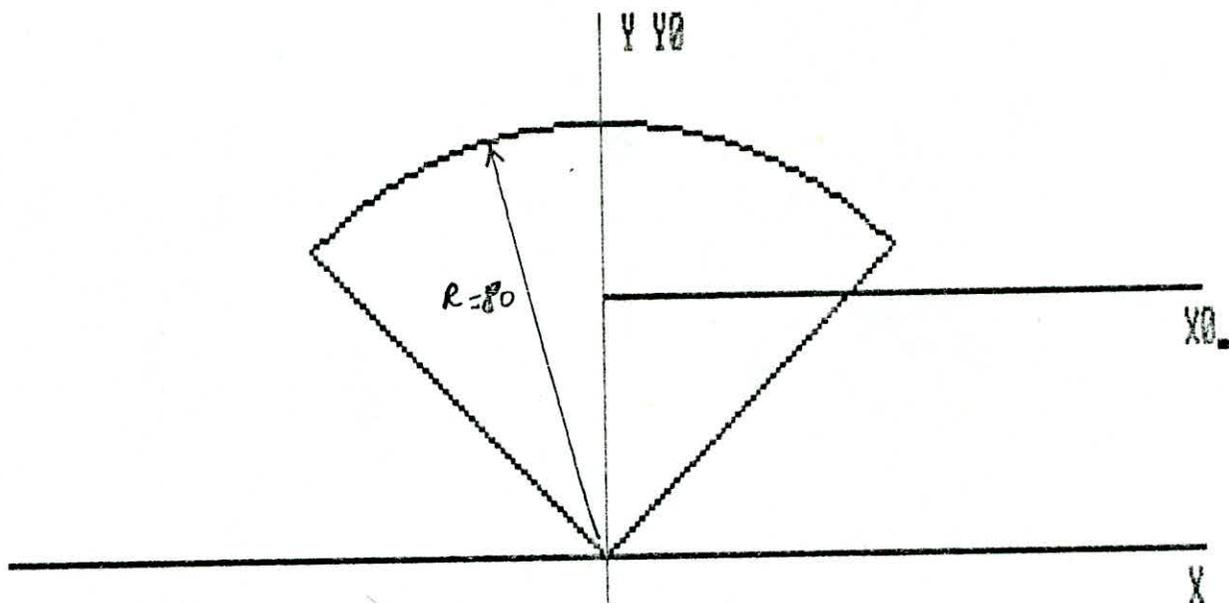
FIGURE

LA SURFACE-----	-A( 1 ) =	6113.639
LE MOMENT STATIQUE-----	Sx( 1 ) =	239651.9
LE MOMENT STATIQUE-----	Sy( 1 ) =	47574.68
LE MOMENT D'INERTIE-----	Ix( 1 ) =	1.35305E+07
LE MOMENT D'INERTIE-----	Iy( 1 ) =	5613588
LE PRODUIT D'INERTIE-----	Ixy2( 1 ) =	4780313
LE MOMENT D'INERTIE-----	Ix0( 1 ) =	4136258
LE MOMENT D'INERTIE-----	Iy0( 1 ) =	5243375
LE PRODUIT D'INERTIE-----	Ixy0( 1 ) =	2915407
LA COORDONNEE CG-----	XC( 1 ) =	7.781729
LA COORDONNEE CG-----	Yc( 1 ) =	39.19955



FIGURE

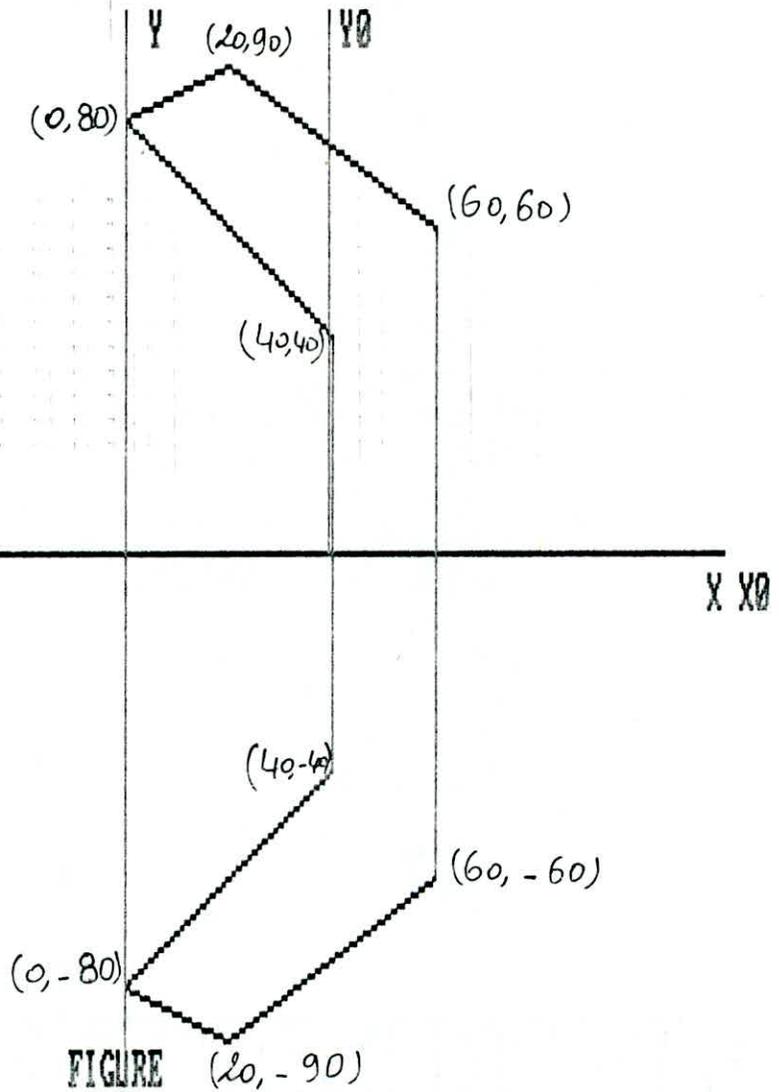
LA SURFACE	-----A( 1 )	= 12600
LE MOMENT STATIQUE	-----Sx( 1 )	= 378000
LE MOMENT STATIQUE	-----Sy( 1 )	= 378000
LE MOMENT D'INERTIE	-----Ix( 1 )	= 2.403E+07
LE MOMENT D'INERTIE	-----Iy( 1 )	= 2.403E+07
LE PRODUIT D'INERTIE	-----Ixy2( 1 )	= 1.134E+07
LE MOMENT D'INERTIE	-----Ix0( 1 )	= 1.269E+07
LE MOMENT D'INERTIE	-----Iy0( 1 )	= 1.269E+07
LE PRODUIT D'INERTIE	-----Ixy0( 1 )	= 0
LA COORDONNEE CG	-----Xc( 1 )	= 30
LA COORDONNEE CG	-----Yc( 1 )	= 30



angle initial = 135  
 angle final = 45

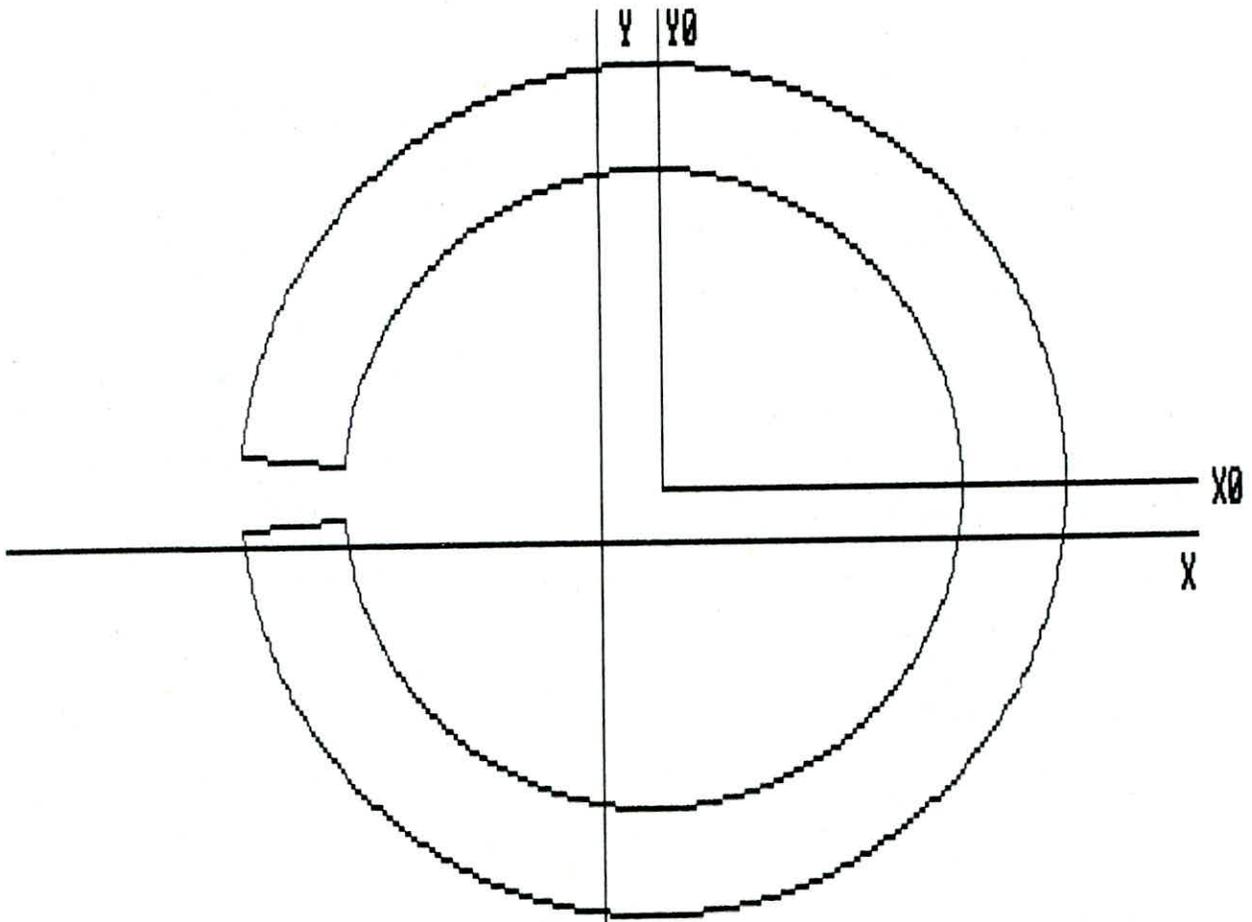
FIGURE

LA SURFACE-----	-A( 1 ) =	5026.293
LE MOMENT STATIQUE-----	-Sx( 1 ) =	241340.8
LE MOMENT STATIQUE-----	-Sy( 1 ) =	.0078125
LE MOMENT D'INERTIE-----	-Ix( 1 ) =	1.316114E+07
LE MOMENT D'INERTIE-----	-Iy( 1 ) =	2922181
LE PRODUIT D'INERTIE-----	-Ixy( 1 ) =	.875
LE MOMENT D'INERTIE-----	-Ix0( 1 ) =	1573004
LE MOMENT D'INERTIE-----	-Iy0( 1 ) =	2922181
LE PRODUIT D'INERTIE-----	-Ixy0( 1 ) =	.4998777
LA COORDONNEE CG-----	-Xc( 1 ) =	1.554327E-06
LA COORDONNEE CG-----	-Yc( 1 ) =	48.01566



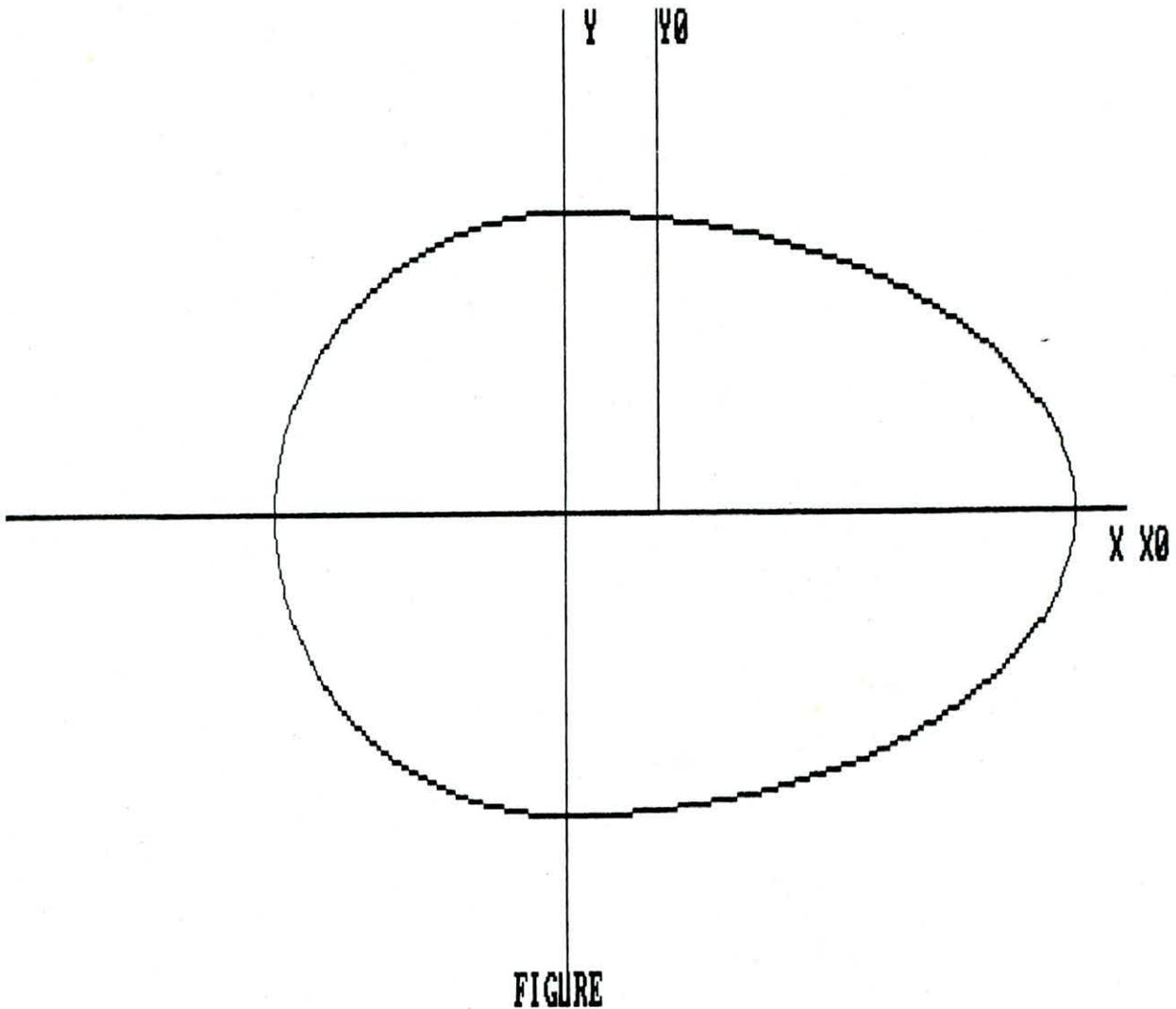
```

LA SURFACE-----A( 1 ) = 4600
LE MOMENT STATIQUE-----Sx( 1 ) = 0
LE MOMENT STATIQUE-----Sy( 1 ) = 181333.3
LE MOMENT DIENERTIE-----Ix( 1 ) = 1.351667E+07
LE MOMENT D'INERTIE-----Iy( 1 ) = 8093333
LE PRODUIT D'INERTIE-----Ixy2( 1 ) = -.1875
LE MOMENT D'INERTIE-----Ix0( 1 ) = 1.351667E+07
LE MOMENT D'INERTIE-----Iy0( 1 ) = 945120.5
LE PRODUIT D'INERTIE-----Ixy0( 1 ) = -.1875
LA COORDONNEE CG-----Xc( 1 ) = 39.42029
LA COORDONNEE CG-----Yc( 1 ) = 0
    
```

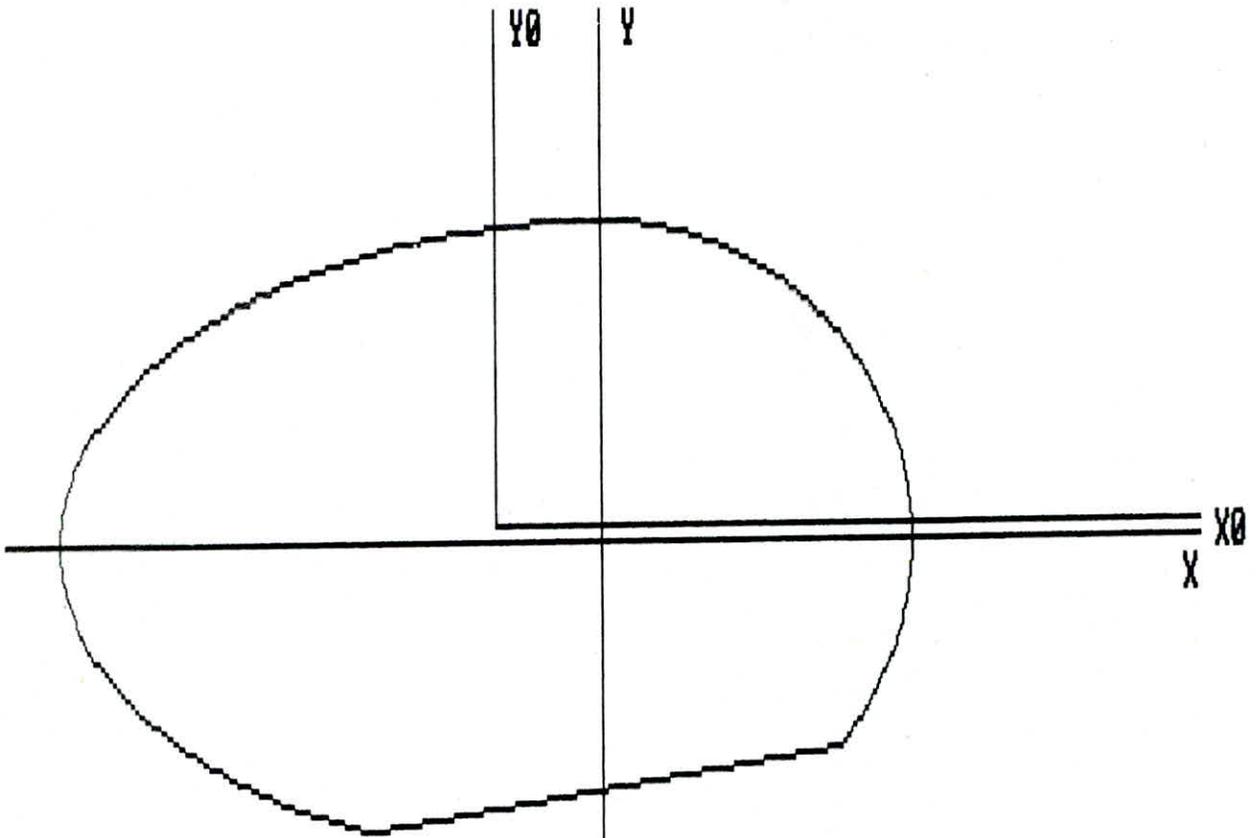


FIGURE

LA SURFACE-----	A( 1 )= 8551.618
LE MOMENT STATIQUE-----	Sx( 1 )= 85515.52
LE MOMENT STATIQUE-----	Sy( 1 )= 102713.5
LE MOMENT DIENERTIE-----	Ix( 1 )= 2.28409E+07
LE MOMENT D'INERTIE-----	Iy( 1 )= 2.196945E+07
LE PRODUIT D'INERTIE-----	Ixy2( 1 )= 1027138
LE MOMENT D'INERTIE-----	Ix0( 1 )= 2.198576E+07
LE MOMENT D'INERTIE-----	Iy0( 1 )= 2.073576E+07
LE PRODUIT D'INERTIE-----	Ixy0( 1 )= 10.75
LA COORDONNEE CG-----	Xc( 1 )= 12.011
LA COORDONNEE CG-----	Yc( 1 )= 9.999922



LA SURFACE-----A( 1 )= 15550.1  
LE MOMENT STATIQUE-----Sx( 1 )=-7.840356E-03  
LE MOMENT STATIQUE-----Sy( 1 )= 296976.8  
LE MOMENT DIENERTIE-----Ix( 1 )= 1.399438E+07  
LE MOMENT D'INERTIE-----Iy( 1 )= 3.236198E+07  
LE PRODUIT D'INERTIE-----Ixy2( 1 )=-5.398987  
LE MOMENT D'INERTIE-----Ix0( 1 )= 1.399438E+07  
LE MOMENT D'INERTIE-----Iy0( 1 )= 2.669029E+07  
LE PRODUIT D'INERTIE-----Ixy0( 1 )=-5.249252  
LA COORDONNEE CG-----Xc( 1 )= 19.09807  
LA COORDONNEE CG-----Yc( 1 )=-5.041999E-07



FIGURE

LA SURFACE	-----A( 1 )=	14710.4
LE MOMENT STATIQUE	-----Sx( 1 )=	43167.45
LE MOMENT STATIQUE	-----Sy( 1 )=	-300922.8
LE MOMENT DIENERTIE	-----Ix( 1 )=	1.175603E+07
LE MOMENT D'INERTIE	-----Iy( 1 )=	3.199981E+07
LE PRODUIT D'INERTIE	-----Ixy2( 1 )=	151001.5
LE MOMENT D'INERTIE	-----Ix0( 1 )=	1.162936E+07
LE MOMENT D'INERTIE	-----Iy0( 1 )=	2.5844E+07
LE PRODUIT D'INERTIE	-----Ixy0( 1 )=	1034055
LA COORDONNEE CG	-----Xc( 1 )=	-20.45646
LA COORDONNEE CG	-----Yc( 1 )=	2.934484

CALCUL DES ERREURS RELATIVES DES PORTIONS ELLIPTIQUE  
ET CIRCULAIRE

\*CERCLE

On a pris un rayon  $R=80$  et on a calcule les moments  
quadratiques avec des differents pas.

Pour un pas de 0.25 degre l'erreur relative est 0.0000062

Pour un pas de 0.5 degre l'erreur relative est 0.0000258

Pour un pas de 1 degre l'erreur relative est 0.0001013

Pour un pas de 2 degres l'erreur relative est 0.0004059

\*ELLIPSE

On a pris un demi axe horizontal  $DH=80$  et un demi axe  
vertical  $DV=60$  ,les erreurs obtenues sont:

Pour un pas de 0.25 degre l'erreur relative est 0.0000066

Pour un pas de 0.5 degre l'erreur relative est 0.0000251

Pour un pas de 1 degre l'erreur relative est 0.0001016

Pour un pas de 2 degres l'erreur relative est 0.0004058

**TABLEAUX DES  
DONNEES DU  
VILEBREQUIN  
-F8L413-**

## CORPS QUELCONQUE N° 1

## PLAN XY

TRANCHE	ANGLE INITIAL	ANGLE FINAL	APPROXIMATION
1	75 ° 0 °	0 ° -220 °	CERCLR R= 6 cm ELLIPSE DH= 6 cm; DV= 6,5 cm
2	75 ° 0 °	0 ° -220 °	CERCLE R= 6 cm ELLIPSE DH= 6 cm; DV= 7,5 cm
3	75 ° 0 °	0 ° -220 °	CERCLE R= 6 cm ELLIPSE DH= 6 cm; DV= 8,5 cm
4	75 ° 0 °	0 ° -220 °	CERCLE R= 6 cm ELLIPSE DH= 6 cm; DV= 9,5 cm
5	75 ° 0 °	0 ° -220 °	CERCLE R= 6 cm ELLIPSE DH= 6 cm; DV= 10,5 cm

## PLAN XZ

TRANCHE	Z1	Z2	Z3	Z4	X1	X2	X3	X4 [cm]
1	-30,5	-30	-30	-30,5	5,8	5,8	-6,5	-6,5
2	-30	-29,5	-29,5	-30	5,8	5,8	-7,5	-7,5
3	-29,5	-29	-29	-29,5	5,8	5,8	-8,5	-8,5
4	-29	-28,5	-28,5	-29	5,8	5,8	-9,5	-9,5
5	-28,5	-28	-28	-28,5	5,8	5,8	-10,5	-10,5

## CORPS QUELCONQUE N° 2

## PLAN XY

TRANCHE	ANGLE INITIAL	ANGLE FINAL	APPROXIMATION
1	75 ° 0 °	0 ° -110 °	CERCLR R= 6 cm ELLIPSE DH= 6 cm; DV= 10,5 cm
2	75 ° 0 °	0 ° -110 °	CERCLE R= 6 cm ELLIPSE DH= 6 cm; DV= 9,5 cm
3	75 ° 0 °	0 ° -110 °	CERCLE R= 6 cm ELLIPSE DH= 6 cm; DV= 8,5 cm
4	75 ° 0 °	0 ° -110 °	CERCLE R= 6 cm ELLIPSE DH= 6 cm; DV= 7,8 cm
5	75 ° 0 °	0 ° -110 °	CERCLE R= 6 cm ELLIPSE DH= 6 cm; DV= 6,5 cm

## PLAN XZ

TRANCHE	Z1	Z2	Z3	Z4	X1	X2	X3	X4 [cm]
1	-21,2	-20,7	-20,7	-21,2	5,8	5,8	-10,5	-10,5
2	-20,7	-20,2	-20,2	-20,7	5,8	5,8	-9,5	-9,5
3	-20,2	-19,7	-19,7	-20,2	5,8	5,8	-8,5	-8,5
4	-19,7	-19,2	-19,2	-19,7	5,8	5,8	-7,5	-7,5
5	-19,2	-18,7	-18,7	-19,2	5,8	5,8	-6,5	-6,5

## CORPS QUELCONQUE N° 3

## PLAN XY

TRANCHE	ANGLE INITIAL	ANGLE FINAL	APPROXIMATION
1	90° -90°	-90° -270°	ELLIPSE DH= 6,5 cm; DV= 6 cm CERCLE R= 6 cm
2	90° -90°	-90° -270°	ELLIPSE DH= 7,5 cm; DV= 6 cm CERCLE R= 6 cm
3	90° -90°	-90° -270°	ELLIPSE DH= 8,5 cm; DV= 6 cm CERCLE R= 6 cm
4	90° -90°	-90° -270°	ELLIPSE DH= 9,5 cm; DV= 6 cm CERCLE R= 6 cm
5	90° -90°	-90° -270°	ELLIPSE DH= 10,5 cm; DV= 6 cm CERCLE R= 6 cm

## PLAN XZ

TRANCHE	Z1	Z2	Z3	Z4	X1	X2	X3	X4 [cm]
1	-14,5	-14	-14	-14,5	6	6	-6	-6
2	-14	-13,5	-13,5	-14	6	6	-6	-6
3	-13,5	-13	-13	-13,5	6	6	-6	-6
4	-13	-12,5	-12,5	-13	6	6	-6	-6
5	-12,5	-12	-12	-12,5	6	6	-6	-6

CORPS QUELCONQUE N° 4

PLAN XY

TRANCHE	ANGLE INITIAL	ANGLE FINAL	APPROXIMATION
1	90° -90°	-90° -270°	ELLIPSE DH= 10,5 cm; DV= 6 cm CERCLE R= 6 cm
2	90° -90°	-90° -270°	ELLIPSE DH= 9,5 cm; DV= 6 cm CERCLE R= 6 cm
3	90° -90°	-90° -270°	ELLIPSE DH= 8,5 cm; DV= 6 cm CERCLE R= 6 cm
4	90° -90°	-90° -270°	ELLIPSE DH= 7,5 cm; DV= 6 cm CERCLE R= 6 cm
5	90° -90°	-90° -270°	ELLIPSE DH= 6,5 cm; DV= 6 cm CERCLE R= 6 cm

PLAN XZ

TRANCHE	Z1	Z2	Z3	Z4	X1	X2	X3	X4 [cm]
1	-4,7	-4,2	-4,2	-4,7	6	6	-6	-6
2	-4,2	-3,7	-3,7	-4,2	6	6	-6	-6
3	-3,7	-3,2	-3,2	-3,7	6	6	-6	-6
4	-3,2	-2,7	-2,7	-3,2	6	6	-6	-6
5	-2,7	-2,2	-2,2	-2,7	6	6	-6	-6

## CORPS QUELCONQUE N°5

## PLAN XY

TRANCHE	ANGLE INITIAL	ANGLE FINAL	APPROXIMATION
1	245 ° 90 °	90 ° -40 °	ELLIPSE DH= 6,5 cm; DV= 6 cm CERCLE R= 6 cm
2	245 ° 90 °	90 ° -40 °	ELLIPSE DH= 7,5 cm; DV= 6 cm CERCLE R= 6 cm
3	245 ° 90 °	90 ° -40 °	ELLIPSE DH= 8,5 cm; DV= 6 cm CERCLE R= 6 cm
4	245 ° 90 °	90 ° -40 °	ELLIPSE DH= 9,5 cm; DV= 6 cm CERCLE R= 6 cm
5	245 ° 90 °	90 ° -40 °	ELLIPSE DH= 19,5 cm; DV= 6 cm CERCLE R= 6 cm

## PLAN XZ

TRANCHE	Z1	Z2	Z3	Z4	X1	X2	X3	X4 [cm]
1	2,2	2,7	2,7	2,2	6	6	-6	-6
2	2,7	3,2	3,2	2,7	6	6	-6	-6
3	3,2	3,7	3,7	3,2	6	6	-6	-6
4	3,7	4,2	4,2	3,7	6	6	-6	-6
5	4,2	4,7	4,7	4,2	6	6	-6	-6

CORPS QUELCONQUE N° 6

PLAN XY

TRANCHE	ANGLE INITIAL	ANGLE FINAL	APPROXIMATION
1	245 ° 90 °	90 ° -40 °	ELLIPSE DH=10,5 cm; DV= 6 cm CERCLE R= 6 cm
2	245 ° 90 °	90 ° -40 °	ELLIPSE DH= 9,5 cm; DV= 6 cm CERCLE R= 6 cm
3	245 ° 90 °	90 ° -40 °	ELLIPSE DH= 8,5 cm; DV= 6 cm CERCLE R= 6 cm
4	245 ° 90 °	90 ° -40 °	ELLIPSE DH= 7,5 cm; DV= 6 cm CERCLE R= 6 cm
5	245 ° 90 °	90 ° -40 °	ELLIPSE DH= 6,5 cm; DV= 6 cm CERCLE R= 6 cm

PLAN XZ

TRANCHE	Z1	Z2	Z3	Z4	X1	X2	X3	X4 [cm]
1	12	12,5	12,5	12	6	6	-6	-6
2	12,5	13	13	12,5	6	6	-6	-6
3	13	13,5	13,5	13	6	6	-6	-6
4	13,5	14	14	13,5	6	6	-6	-6
5	14	14,5	14,5	14	6	6	-6	-6

CORPS QUELCONQUE N° 7

PLAN XY

TRANCHE	ANGLE INITIAL	ANGLE FINAL	APPROXIMATION
1	180° 255°	-40° 180°	ELLIPSE DH= 6 cm; DV= 6,5 cm CERCLE R= 6 cm
2	180° 255°	-40° 180°	ELLIPSE DH= 6 cm; DV= 7,5 cm CERCLE R= 6 cm
3	180° 255°	-40° 180°	ELLIPSE DH= 6 cm; DV= 8,5 cm CERCLE R= 6 cm
4	180° 255°	-40° 180°	ELLIPSE DH= 6 cm; DV= 9,5 cm CERCLE R= 6 cm
5	180° 255°	-40° 180°	ELLIPSE DH= 6 cm; DV= 10,5 cm CERCLE R= 6 cm

PLAN XZ

TRANCHE	Z1	Z2	Z3	Z4	X1	X2	X3	X4 [cm]
1	18,7	19,2	19,2	18,7	6,5	6,5	-5	-5
2	19,2	19,7	19,7	19,2	7,5	7,5	-5	-5
3	19,7	20,2	20,2	19,7	8,5	8,5	-5	-5
4	20,2	20,7	20,7	20,2	9,5	9,5	-5	-5
5	20,7	21,2	21,2	20,7	10,5	10,5	-5	-5

## CORPS QUELCONQUE N° 8

## PLAN XY

TRANCHE	ANGLE INITIAL	ANGLE FINAL	APPROXIMATION
1	180 ° 255 °	-40 ° 180 °	ELLIPSE DH= 6 cm; DV= 10,5 cm CERCLE R= 6 cm
2	180 ° 255 °	-40 ° 180 °	ELLIPSE DH= 6 cm; DV= 9,5 cm CERCLE R= 6 cm
3	180 ° 255 °	-40 ° 180 °	ELLIPSE DH= 6 cm; DV= 8,5 cm CERCLE R= 6 cm
4	180 ° 255 °	-40 ° 180 °	ELLIPSE DH= 6 cm; DV= 7,5 cm CERCLE R= 6 cm
5	180 ° 255 °	-40 ° 180 °	ELLIPSE DH= 6 cm; DV= 6,5 cm CERCLE R= 6 cm

## PLAN XZ

TRANCHE	Z1	Z2	Z3	Z4	X1	X2	X3	X4 [cm]
1	28	28,5	28,5	28	10,5	10,5	-5	-5
2	28,5	29	29	28,5	9,5	9,5	-5	-5
3	29	29,5	29,5	29	8,5	8,5	-5	-5
4	29,5	30	30	29,5	7,5	7,5	-5	-5
5	30	30,5	30,5	30	6,5	6,5	-5	-5

LES CYLINDRES A AJOUTER

X0,Y0 et Z0 sont les coordonnees du centre  
de gravite par rapport au repère choisi.

CYLINDRE	RAYON cm	LONGUEUR cm	X0  cm	Y0  cm	Z0  cm
1	3.75	7	0	0	40.7
2	4.5	4.1	0	0	33
3	5.9	1.9	0	0	36.3
4	3.75	6.8	5	0	24.8
5	4.5	4.1	0	0	16.5
6	3.75	7	0	6.2	8.2
7	3.75	7	0	6.2	8.2
8	4.5	4.1	0	0	16.5
9	3.75	6.8	5	0	24.8
10	4.5	4.1	0	0	33
11	3.75	7	0	0	0

LES CYLINDRES A DIMINUER

CYLINDRE	RAYON cm	LONGUEUR cm	X0  cm	Y0  cm	Z0  cm
1	1.4	7	7.5	0	33
2	1.4	7	0	7.5	16.5
3	1.4	7	0	7.5	16.5
4	1.4	7	7.5	0	33

**RESULTATS**  
**-EXPERIMENTAL**  
**-NUMERIQUE**

\*RESULTATS DU CALCUL EXPERIMENTAL

-MOMENT D'INERTIE PAR RAPPORT A L'AXE X

Les periodes de dix oscillations sont :

15, 15,2, 15,5, 15,3, 15,6, 15,74, 15,79, 15,9, 15,4, 15,85

Ces periodes ont donne l'intervalle du moment d'inertie  
suivant:

$$J_x \in [2,583946266, 2,903322024]$$

-MOMENT D'INERTIE PAR RAPPORT A L'AXE Z

Les periodes de dix oscillations sont:

21,14, 21,25, 21,39, 21,24, 20,95, 21,11, 21,25, 21,17

21,28, 21,13

ces periodes ont donne l'intervalle du moment d'inertie  
suivant:

$$J_z \in ]0, 0,3989402]$$

\*RESULTATS DU CALCUL NUMERIQUE

Les tableaux de donnees ont permis d'avoir les resultats  
suivants: (avec une masse volumique  $\rho_0 = 8100 \text{ Kg m}^3$ )

$$I_x = 2,4980805 \text{ kg m}^2$$

$$I_y = 2,5056959 \text{ kg m}^2$$

$$I_z = 0,130209 \text{ kg m}^2$$

**QUELQUES  
MOMENTS  
D'INERTIE DE  
LIGNE ,SURFACE  
ET DE VOLUME**

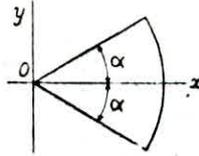
Moments d'inertie de lignes, de surfaces et de volumes usuels.

Lignes

Segment de droite de longueur  $l$  : Par rapport à un axe passant par une extrémité, l'autre extrémité étant à la distance  $r$  de l'axe :

$$I = l \cdot \frac{r^2}{3} = M \cdot \frac{r^2}{3}$$

Arc de circonférence



$$I_0 = 2 \alpha r^3 = M r^3$$

$$I_{Ox} = \frac{r^3}{2} (2 \alpha - \sin 2 \alpha)$$

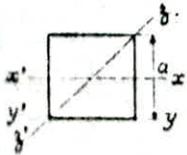
$$= \frac{M r^3}{2} \left( 1 - \frac{\sin 2 \alpha}{2 \alpha} \right)$$

$$I_{Oy} = \frac{r^3}{2} (2 \alpha + \sin 2 \alpha)$$

$$= \frac{M r^3}{2} \left( 1 + \frac{\sin 2 \alpha}{2 \alpha} \right)$$

Aires

Carré.

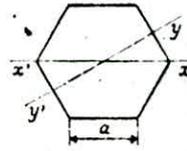


$$I_x = \frac{a^4}{12} = M \frac{a^2}{12}$$

$$I_y = \frac{a^4}{12} = M \frac{a^2}{12}$$

$$I_z = \frac{a^4}{6} = M \frac{a^2}{6}$$

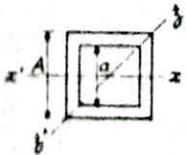
Hexagone régulier.



$$I_x = \frac{5 a^4 \sqrt{3}}{16} = M \frac{5}{24} a^2$$

$$I_y = \frac{5 a^4 \sqrt{3}}{16} = M \frac{5}{24} a^2$$

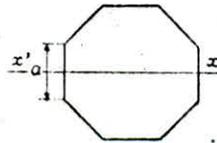
Carré évidé.



$$I_x = \frac{A^4 - a^4}{12} = M \frac{A^2 + a^2}{12}$$

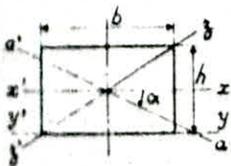
$$I_y = \frac{A^4 - a^4}{12} = M \frac{A^2 + a^2}{12}$$

Octogone régulier.



$$I_x = 1,8677 a^4$$

Rectangle.



$$I_x = \frac{b h^3}{12} = M \frac{h^2}{12}$$

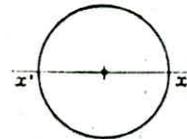
$$I_y = \frac{b^3 h}{12} = M \frac{b^2}{12}$$

$$I_z = \frac{b^2 h^2}{6 (b^2 + h^2)} = M \frac{b^2 h^2}{6 (b^2 + h^2)}$$

$$I_x = \frac{b h}{12} (h^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)$$

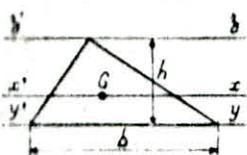
$$= \frac{M}{12} (h^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)$$

Cercle.



$$I_x = \frac{\pi d^4}{64} = M \frac{d^2}{16}$$

Triangle.

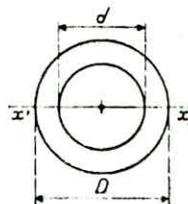


$$I_x = \frac{b h^3}{36} = M \frac{h^2}{18}$$

$$I_y = \frac{b h^3}{12} = M \frac{h^2}{6}$$

$$I_z = \frac{b h^3}{4} = M \frac{h^2}{2}$$

Cercle évidé.

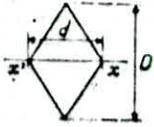


$$I_x = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64} = M \left( \frac{D^2 + d^2}{16} \right)$$

Moments d'inertie de lignes, de surfaces et de volumes usuels

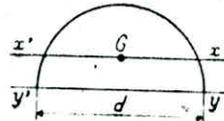
Aires

Losange.



$$I_x = \frac{d D^3}{48} = M \frac{D^2}{24}$$

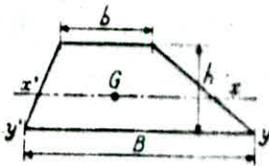
Demi-cercle.



$$I_x = \frac{d^4 (9\pi^2 - 64)}{1152\pi} = 0,00686 d^4$$

$$I_y = \frac{\pi d^4}{144} = M \frac{d^2}{16}$$

Trapèze.



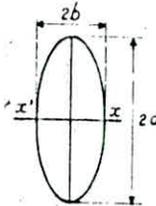
$$I_x = \frac{h^3 (B^2 + 4Bb + b^2)}{36(B+b)}$$

$$= M \frac{h^3 (B^2 + 4Bb + b^2)}{18(B+b)^2}$$

$$I_y = \frac{h^3 (B + 3b)}{12}$$

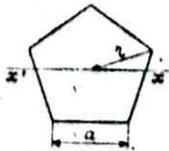
$$= M \frac{h^3 (B + 3b)}{6(B+b)}$$

Ellipse.



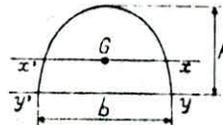
$$I_x = \frac{\pi a^3 b}{4} = M \frac{a^2}{4}$$

Pentagone régulier.



$$I_x = \frac{M}{12} \left( 3r^2 - \frac{a^2}{2} \right)$$

Segment parabolique.

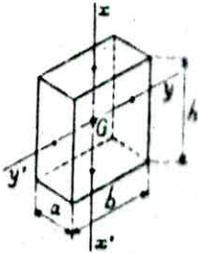


$$I_x = \frac{8bh^3}{175}$$

$$I_y = \frac{32bh^3}{105}$$

Volumes

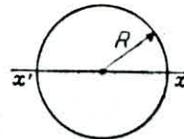
Prisme.



$$I_x = \frac{abh}{12} (a^2 + b^2) = M \frac{a^2 + b^2}{12}$$

$$I_y = \frac{abh}{12} (a^2 + h^2) = M \frac{a^2 + h^2}{12}$$

Sphère.

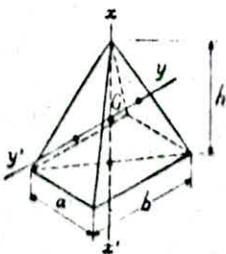


$$I_x = \frac{8}{15} \pi R^5 = \frac{2}{5} MR^2$$

Sphère creuse.

$$I_x = \frac{2}{5} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$$

Pyramide droite à base rectangle.



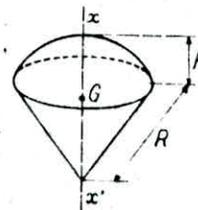
$$I_x = \frac{abh}{60} (a^2 + b^2)$$

$$= \frac{M}{20} (a^2 + b^2)$$

$$I_y = \frac{abh}{3} \left( \frac{3}{80} h^2 + \frac{a^2}{20} \right)$$

$$= M \left( \frac{3}{80} h^2 + \frac{a^2}{20} \right)$$

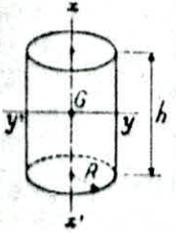
Secteur sphérique.



$$I_x = \frac{M}{5} (3Rh - h^2)$$

Volumes

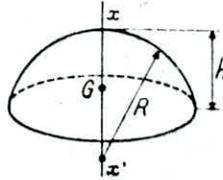
Cylindre droit.



$$I_x = \frac{\pi R^4 h}{4} = M \frac{R^2}{2}$$

$$I_y = \frac{\pi R^2 h}{4} \left( \frac{h^2}{3} + R^2 \right) = \frac{M}{4} \left( \frac{h^2}{3} + R^2 \right)$$

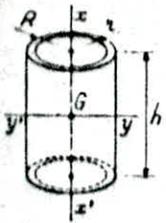
Segment sphérique.  $I_x = M \left( \frac{2h}{3R-h} \right) \left( R^2 - \frac{3Rh}{4} + \frac{3h^2}{20} \right)$



Hémisphère

$$I_x = \frac{2}{5} MR^2$$

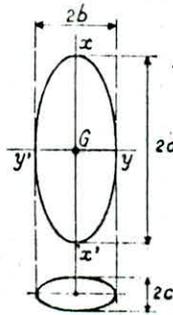
Cylindre creux.



$$I_x = \frac{\pi h (R^4 - r^4)}{4} = \frac{M}{4} (R^2 + r^2)$$

$$I_y = \frac{\pi h (R^2 - r^2)}{4} \left( \frac{h^2}{3} + R^2 + r^2 \right) = \frac{M}{4} \left( \frac{h^2}{3} + R^2 + r^2 \right)$$

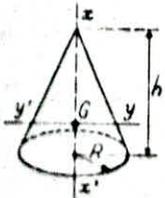
Ellipsoïde à 3 axes.



$$I_x = \frac{M}{5} (b^2 + c^2)$$

$$I_y = \frac{M}{5} (a^2 + c^2)$$

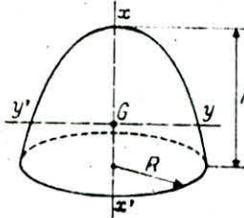
Cône droit.



$$I_x = \frac{\pi R^4 h}{10} = \frac{3}{10} MR^2$$

$$I_y = \frac{\pi R^2 h}{10} \left( R^2 + \frac{h^2}{4} \right) = \frac{3M}{10} \left( R^2 + \frac{h^2}{4} \right)$$

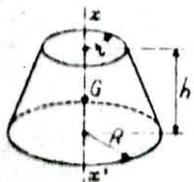
Paraboloïde de révolution.



$$I_x = M \frac{R^2}{3}$$

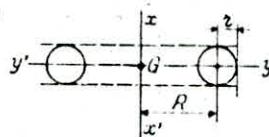
$$I_y = \frac{M}{18} (3R^2 + h^2)$$

Tronc de cône.



$$I_x = \frac{3M}{10} \frac{R^4 - r^4}{R^2 - r^2}$$

Tore.



$$I_x = \frac{M}{4} (4R^2 + 3r^2)$$

$$I_y = \frac{M}{8} (4R^2 + 5r^2)$$

# CONCLUSION

Notre étude nous a essentiellement permis de connaître l'application des méthodes numériques pour le calcul des caractéristiques géométriques des figures et des corps quelconques et de savoir comment se fait l'élaboration des logiciels.

Les résultats obtenus nous ont permis de conclure qu'il existe deux intégrales qu'on peut calculer numériquement par la méthode des trapèzes sans engendrer aucune erreur en donnant à chacune un sens physique.

Ces intégrales sont:

$$\int z^2 dz \quad ; \quad \int z dz$$

Enfin le temps restreint, ne nous a malheureusement pas permis de compléter cette étude par l'introduction des autres fonctions d'approximation, ainsi que les moments d'inertie d'autres corps connus et ce, afin de gagner un peu de temps sur ordinateur.

Par conséquent, il nous serait possible de calculer n'importe quelle caractéristique en deux ou trois dimensions et de rendre ce logiciel plus conversationnel.





