

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Ecole Nationale Polytechnique  
Département d'Automatique  
Laboratoire de Commande des  
Processus



Mémoire de Master en Automatique

**CHAIF Wedi**

Sous la direction de Mr **Dr. Messaoud CHAKIR**

Thème :

**COMMANDE ET OPTIMISATION DES COUPLES  
D'UN ROBOT PARALLELE PLANAIRE A  
QUATRE CABLES**

**Composition du Jury**

Président	Mr. Mohamed BOUCHERIT	Professeur	ENP
Promoteur	Mr. Messaoud CHAKIR	MC/B	ENP
Examineur	Mr. Mohamed TADJINE	Professeur	ENP

ENP 2017



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Ecole Nationale Polytechnique  
Département d'Automatique  
Laboratoire de Commande des  
Processus



Mémoire de Master en Automatique

**CHAIF Wedi**

Sous la direction de Mr **Dr. Messaoud CHAKIR**

Thème :

**COMMANDE ET OPTIMISATION DES COUPLES  
D'UN ROBOT PARALLELE PLANAIRE A  
QUATRE CABLES**

**Composition du Jury**

Président	Mr. Mohamed BOUCHERIT	Professeur	ENP
Promoteur	Mr. Messaoud CHAKIR	MC/B	ENP
Examineur	Mr. Mohamed TADJINE	Professeur	ENP

ENP 2017

# REMERCIEMENTS

*Dieu merci,*

*Le travail est terminé et le moment le plus agréable est arrivé, la rédaction de mes remerciements. Je vais profiter de ces quelques lignes pour exprimer mes sincères reconnaissances à l'ensemble des personnes qui m'ont accompagné de près ou d'un peu plus loin tout au long de ce projet fin d'étude.*

*En premier lieu, je tiens à adresser mes remerciements aux Monsieur **Mesaaoud Chakir** mon encadreur, pour ces conseils précieux et la liberté qu'il m'a laissée tout au long de mes travaux.*

*Ensuite, je remercie très chaleureusement mes professeurs de l'école nationale qui nous ont tant donné tout au long de mon cursus.*

*Je remercie Monsieur M.S. **Bouchrit** de m'avoir fait l'honneur de présider les jurys de soutenance, ainsi que Monsieur l'examineur **M. Tadjine**.*

*Et pour finir, je remercie mes parents qui m'ont toujours soutenu ainsi que mes amis (ils se reconnaîtront) que je n'ai pas pu voir autant que je le souhaitais, mais qui ont su me faire comprendre qu'ils étaient toujours là.*

# Dédicace

Je dédie ce travail :

A mes très chers parents qui ont sacrifié leurs vies pour que je réussisse

dans mes cursus scolaire et universitaire pour réaliser mon rêve d'enfance de

devenir un ingénieur d'état, **Dieu** les bénisse et leurs donne bonne santé.

A mon frère Djaoued et mes sœurs Achouria et Rayhana.

A ma grande famille à tous mes amis et mes collègues avec qui j'ai passé

et je passe les meilleurs moments de ma vie.

A monsieur lamine et madame Samia pour leur aide.

A mon ami et binôme Ahmed Yahia Salah Eddine et toute sa famille.

A tous mes professeurs de parcours scolaire et universitaire

## ملخص:

هذا العمل ينطوي على دراسة الروبوت المستخدم لإعادة تأهيل الأطراف العلوية وهو روبوت مواز مستو مع أربعة كابلات، هذا الروبوت ينفذ المهام على مساحة خريطة من خلال أربعة كابلات وأربعة محركات لتحريك المستجيب في مساحة العمل. نبدأ مع العموميات على الروبوتات ذات الكابلات بهدف تحسين عمل الروبوت، سنقوم بدراسة الروبوت في حلقة مفتوحة، ونسعى لتحكم فيه في حلقة مغلقة مع استخدام تقنيات التحسين لتحسين عزوم الدوران.

**الكلمات المفتاحية:** الروبوت المتوازي مع اربع كابلات, لتحسين عزوم الدوران, التحكم, تأهيل الأطراف العلوية.

## Abstract:

This work consists in studying a robot used for the rehabilitation of the upper limbs, which is the parallel planar cable driven robot with four cables, this robot exerts these spots on a plane space through four cables and four motors or to move the terminal organ in the workspace.

We will start by generality on robotic robots and aim to improve the functioning of this robot we will study the robot in open loop, and we seek to apply the control by feedback closed loop more The use of optimization techniques to optimize the torques of the actuators.

**Keywords:** parallel planar cable driven robot, torques optimization, Feedback control, rehabilitation of the upper limbs

## Résumé :

Ce travail consiste à étudier un robot utilisé pour la réhabilitation des membres supérieurs qui est le robot parallèle planaire à quatre câbles, ce robot exerce ces taches sur un espace plan à travers quatre câbles et quatre moteurs ou pour déplacer l'organe terminal dans l'espace de travail.

On va commencer par généralité sur les robots à câbles et pour but d'améliorer le fonctionnement de ce robot on va faire l'étude du robot en boucle ouverte, et on cherche d'appliquer la commande par retour d'état en boucle fermée plus l'utilisation des techniques d'optimisation pour optimiser les couples des actionneurs.

**Mots-clés:** robot parallèle planaire à quatre câbles, optimisation des couples, commande par retour d'état, réhabilitation des membres supérieurs.

# Table de matière

Liste des figures

<b>Introduction général</b> .....	10
<b>Chapitre 1 : Introduction et modélisation</b> .....	11
<b>1.1 Introduction</b> .....	13
1.1.1 Les Robots parallèles .....	12
Les avantages des robots parallèles .....	12
Les inconvénients des robots parallèles .....	12
1.1.2 Les Robots parallèles à câbles .....	12
Configuration des robots a câbles .....	13
Les avantages des robots à câbles .....	14
Les inconvénients des robots à câbles .....	15
1.1.3 Domaine d'application .....	14
1.1.4 Le robot parallèle planaire a quatre câbles .....	15
<b>1.2 La modélisation</b> .....	16
1.2.1 Modélisation géométrique .....	16
1.2.1.1 Modelé géométrique Inverse .....	17
1.2.1.2 Modèle géométrique Direct .....	17
1.2.2 Modélisation Cinématique.....	18
1.2.2.1 Modèle Cinématique Inverse .....	19
1.2.2.2 Modèle Cinématique Direct .....	19
1.2.3 Modèle Dynamique.....	20
<b>Chapitre 2 : Commande en boucle ouverte et optimisation des couples</b> .....	28
<b>2.1 Commande en boucle ouverte</b> .....	28
2.1.1 Introduction .....	28
2.1.2 La représentation d'état du système .....	28
2.1.3 Simulation du la réponse du robot .....	30

2.1.3.1 La réponse indicielle .....	30
2.1.3.2 La réponse impulsionnelle .....	31
2.1.3.3 Réponse sinusoïdale .....	31
<b>2.2 Optimisation des couples</b> .....	<b>32</b>
2.2.1 Analyse statique des forces .....	32
2.2.2 Calcul des couples optimisés des actionneurs .....	37
2.2.3 Implémentation du l'algorithme d'optimisation des couples sur MATLAB .....	39
2.2.4 Application du l'algorithme d'optimisation sur le robot .....	40
<b>Chapitre 3 : Commande en boucle fermée</b> .....	<b>43</b>
<b>3.1 Introduction à la commande par retour d'état</b> .....	<b>44</b>
<b>3.2 Principe de la commande par retour d'état</b> .....	<b>44</b>
3.2.1 Calcul du gain de retour d'état <b>K</b> .....	45
3.2.2 Calcul de la commande dans le cas général.....	47
3.2.3 Asservissement des sorties.....	44
3.2.4 La commande par retour d'état du robot planaire à 4 câbles (Synthèse de la commande par retour d'état avec gain préprogrammé).....	51
<b>3.3 Simulation de la commande par retour d'état</b> .....	<b>52</b>
Conclusion général.....	58
Bibliographie .....	59



## Liste des figures

<b>Figure 1.1 :</b> Robot parallèle à 8 câbles.....	13
<b>Figure 1.2 :</b> La configuration des robots a câbles dans l'espace tridimensionnelle.....	13
<b>Figure 1.3 :</b> domaine d'agriculture.....	14
<b>Figure 1.4 :</b> Domaine industriel.....	15
<b>Figure 1.5 :</b> Domaine médical.....	15
<b>Figure 1.6:</b> Structure mécanique du robot planaire à 4 câbles.....	16
<b>Figure 1.7:</b> Diagramme du robot planaire a 4 câbles.....	17
<b>Figure 1.8 :</b> Le changement de repère.....	18
<b>Figure 2.1 :</b> Réponse indicielle du robot, Profile de $x(m)$ .....	30
<b>Figure 2.2 :</b> Réponse indicielle du robot, Profile de $y(m)$ .....	30
<b>Figure 2.3 :</b> Réponse impulsionnelle du robot, Profile de $x(m)$ .....	31
<b>Figure 2.4 :</b> Réponse impulsionnelle du robot, Profile de $y(m)$ .....	31
<b>Figure 2.5 :</b> Réponse sinusoïdale du robot, Profile de $x(m)$ .....	31
<b>Figure 2.6 :</b> Réponse sinusoïdale du robot, Profile de $y(m)$ .....	31
<b>Figure 2.7 :</b> diagramme des forces statique.....	32
<b>Figure 2.8 :</b> Secteurs de l'espace de travail du robot a 4 câbles.....	35
<b>Figure 2.9 :</b> L'organigramme pour calculer les couples optimales.....	39
<b>Figure 3.10 :</b> Couples minimum des actionneurs.....	41
<b>Figure 3.11 :</b> Couples optimale des actionneurs.....	41
<b>Figure 3.12 :</b> Tension optimale des câbles.....	42
<b>Figure 3.13 :</b> les forces cartésiennes généralisées virtuelles.....	42
<b>Figure 3.1:</b> Diagramme de commande par retour d'état.....	45
<b>Figure 3.2:</b> Diagramme de commande par retour d'état + pré-compensateur.....	49
<b>Figure 3.3:</b> Diagramme de commande avec un correcteur auto ajustable basé sur le gain préprogrammé.....	51
<b>Figure 3.4:</b> diagramme de commande par retour d'état du robot planaire à 4 câbles.....	53
<b>Figure 3.5 :</b> La position d'effecteur a l'état stable.....	53
<b>Figure 3.8:</b> profil de $x(m)$ par retour d'état pour les pôles $[-50 \quad -60 \quad -50 \quad -60]$ .....	54

<b>Figure 3.9:</b> profil de $y(m)$ par retour d'état pour les pôles $[-50 \quad -60 \quad -50 \quad -60]$ .....	54
<b>Figure 3.10:</b> Profil de $x(m)$ par retour d'état pour les pôles $[-150 \quad -170 \quad -150 \quad -170]$ .....	55
<b>Figure 3.11 :</b> Profil de $y(m)$ par retour d'état pour les pôles $[-150 \quad -170 \quad -150 \quad -170]$ .....	55
<b>Figure 3.12:</b> profil de $x(m)$ par retour d'état pour les pôles $[-1000 \quad -1200 \quad -1000 \quad -1200]$ .....	56
<b>Figure 3.13:</b> profil de $y(m)$ par retour d'état pour les pôles $[-1000 \quad -1200 \quad -1000 \quad -1200]$ .....	56
<b>Figure 3.14:</b> réponse par retour d'état du robot pour une trajectoire de Lissajous.....	57
<b>Figure 3.15:</b> réponse par retour d'état du robot pour une trajectoire spirale pour une trois périodes $(6\pi)$ .....	57

# **Introduction générale**

## **Introduction générale**

Les besoins des différents domaines de la vie ont poussé les chercheurs à développer des techniques et des inventions pour répondre à ces besoins. Parmi les domaines technologiques les plus développés aujourd'hui la robotique cette discipline qui recouvre plusieurs sciences comme la mécanique l'électricité et l'informatique.

Au niveau de ce travail on va étudier un type particulier des robots les robots parallèles à câbles ou les articulations rigides sont remplacées par des câbles pour assurer un espace de travail large et un rapport charge utile/masse élevé.

Donc le premier chapitre de ce document contient une introduction sur les robots parallèles à câbles et les différents types de modélisations du robot parallèle planaire à quatre câbles.

Le deuxième chapitre contient la commande en boucle ouverte du robot et décrit le calcul d'optimisation utilisé au niveau de travail.

Le troisième chapitre exprime la commande en boucle fermée appliquée sur le système qui est la commande par retour d'état.

# **Chapitre 1 :**

# **Introduction et**

# **modélisation**

## 1.1 Introduction

### 1.1.1 Les Robots parallèles

(Chaîne cinématique fermée)

Est un mécanisme en chaîne cinématique fermée, constitué d'un organe terminal à  $n$  degrés de libertés et d'une base fixe, reliés entre eux par des chaînes cinématiques indépendantes [1].

Maintenant au niveau mondial l'industrie utilise un robot parallèle qui est le robot Delta qui assure plus de précision.

#### ➤ Les avantages des robots parallèles

- Un rapport charge utile/masse robot très élevé par rapport aux robots séries.
- La structure parallèle donne la possibilité d'obtenir des mouvements à haute dynamique car les accélérations sont très élevées.

#### ➤ Les inconvénients des robots parallèles

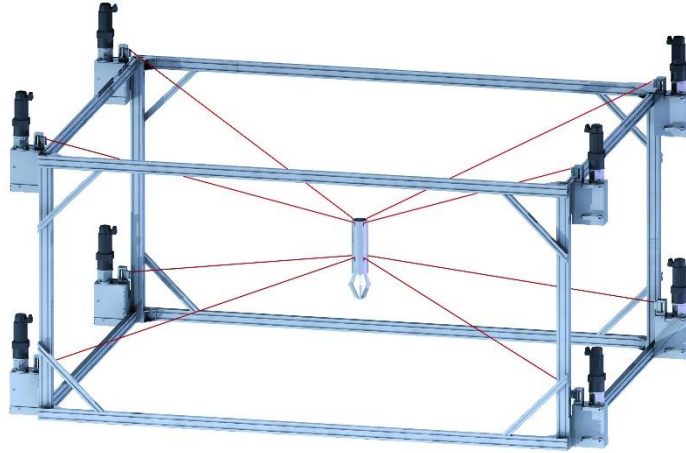
- Limitation de l'espace de travail d'une structure parallèle.
- La présence de singularité peut conduire à une perte de control de la structure mobile.
- Le modèle géométrique est parfois difficile à obtenir [1][2][3].

### 1.1.2 Les Robots parallèles à câbles :

Est un type particulier des robots parallèles, dont les articulations rigides sont remplacés par les câbles, une extrémité de chaque câble est roulée autour d'un rotor tordu par un moteur et l'autre extrémité est reliée à l'effecteur final (la plateforme mobile). Les actionneurs permettent de contrôler les longueurs des câbles qui autorisent la commande de différents mouvements de l'organe terminal [4].

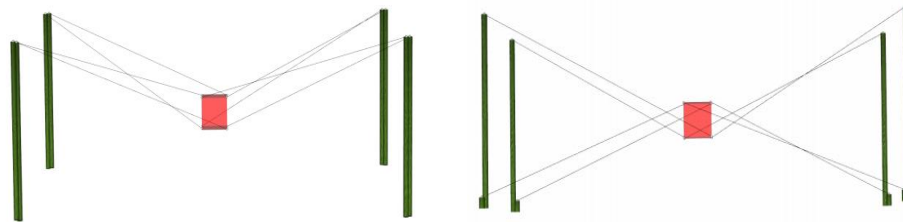
On n'appelle point de sortie le point de contact du câble sur la poulie ou l'œillet avant de s'attacher à la plate-forme. Le point de la plate-forme où est axé le câble est appelé le point d'attache. On nomme également le bâti (ou la base) la partie rigide sur laquelle sont axés les poulies et les actionneurs.

Les études montrent que l'utilisation de plus de câbles résultera dans un espace de travail encore plus grande et une meilleure performance du robot. Cependant, la performance de robot a câbles et le nombre de degré de liberté dépend du nombre de l'agencement géométrique de leur câbles.



**Figure 1.1** Robot parallèle à 8 câbles.

➤ **Configuration des robots a câbles :**



**Figure 1.2** La configuration des robots a câbles dans l'espace tridimensionnelle.

Les robots à câbles ont deux types de structure incomplètement ou complètement restreints. Dans l'ancien qui s'appelle également un robot suspendu par câble, la plateforme mobile est suspendue au plafond par des câbles. Cette catégorie à moins de problèmes avec le volume de l'espace occupé par les câbles. C'est surtout employé sur les chantiers de construction, les chantiers navals et les hangars d'avion. Le dernier peut effectuer des tâches dans n'importe quelle direction quel que soit le sens de la clé déployée sur son plateforme.

➤ **Les avantages des robots à câbles :**

- Un rapport charge utile/masse élevé.
- Grand espace de travail et grande dextérité.
- Simple, légère et faible inertie des pièces mobiles.

- déport possible des actionneurs en dehors de l'espace de travail.
- Pas besoin de joints sphériques.
- Bas coût [5][6][7][8].

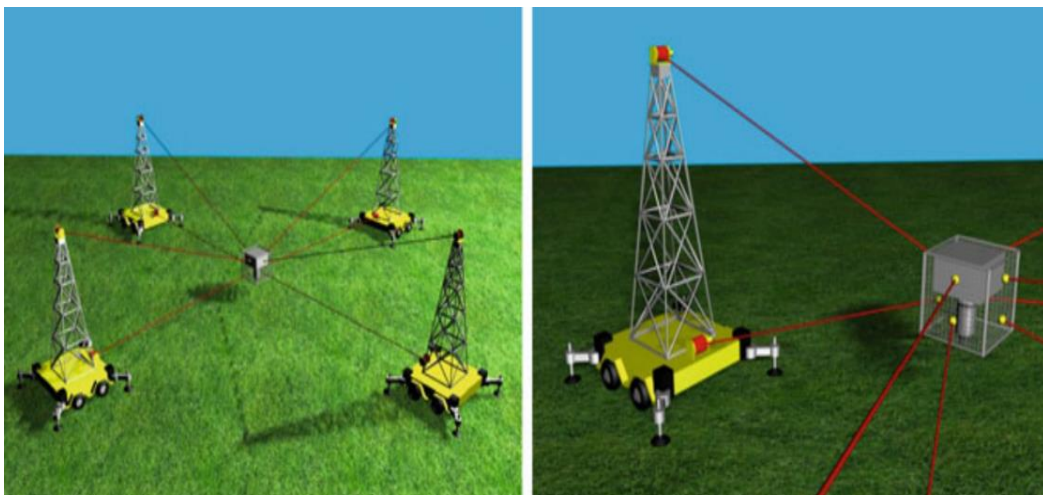
➤ **Les inconvénients des robots à câbles :**

- Limites de tension des câbles.
- Vibrations.
- Collision de câbles entre eux ou avec la pièce dans leur espace de travail.
- Redondance dans des types totalement contraints.
- Faible compacité [5] [6].

**1.1.3 Domaine d'application :**

Les robots parallèle a quatre câbles sont utilisés dans les espaces de travail larges comme en agriculture en industrie et aussi pour la réhabilitation médical :

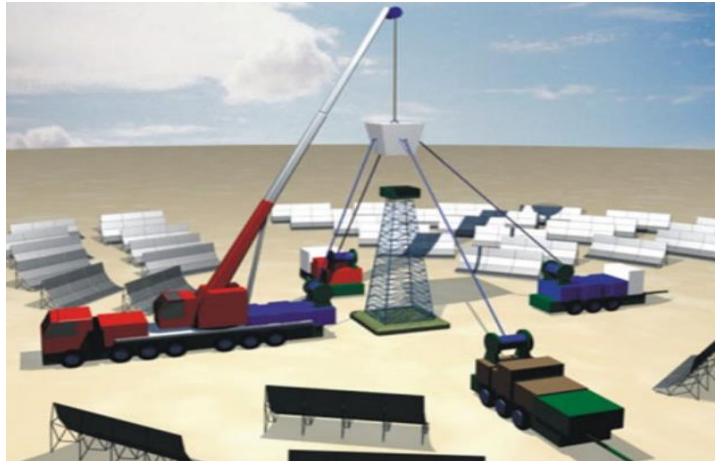
**Domaine d'agriculture :**



**Figure 1.3** domaine d'agriculture.



## Domaine industriel :



**Figure 1.4** Domaine industriel.

## Domaine médical :



**Figure 1.5** Domaine médical.

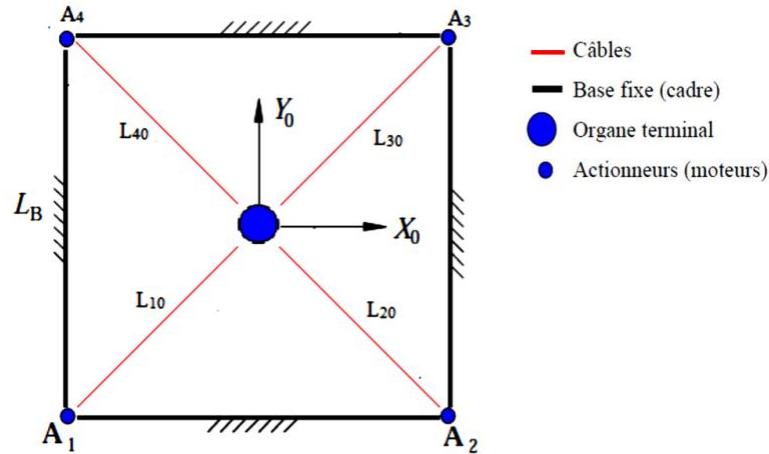
### 1.1.4 Le robot parallèle planaire a quatre câbles :

Un type particulier des robots à car il exécute ces tâches sur un espace bidimensionnel à travers quatre poulies qui tirent des câbles pour pouvoir déplacer l'organe terminal ou l'effecteur sur l'espace opérationnel.

La structure mécanique de ce robot est constituée de :

- Une base (cadre) fixe de forme carrée ; chaque câble est lié à la base par un actionneur (moteurs/poulies).
- Une plateforme mobile, qui porte l'organe terminal.

- La base et la plateforme mobile sont reliées par quatre câbles.
- Chaque câble est lié à la base par un actionneur (moteurs/poulies).



**Figure 1.6:** Structure mécanique du robot planaire à 4 câbles.

## 1.2 La modélisation

La modélisation représente les transformations (ou les relations) entre l'espace opérationnel (dans lequel on définit la situation de l'organe terminal) et l'espace articulaire (dans lequel on définit la configuration des articulations du robot).

Les modèles mathématiques nécessaires sont :

- les modèles géométriques directs et inverses qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction des variables articulaire et inversement.

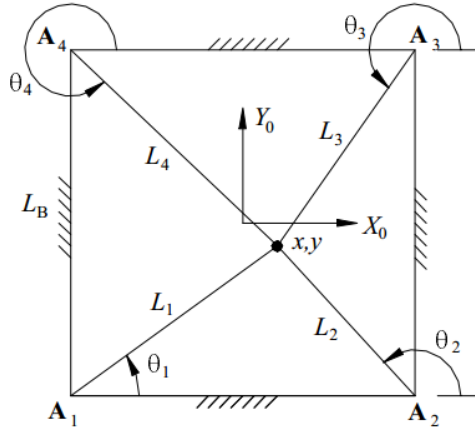
-les modèles cinématiques direct et inverse qui expriment la vitesse de l'effecteur en fonction des vitesses articulaires et inversement.

-les modèles dynamiques définissent les équations du mouvement du robot qui permettent d'établir les relations entre les couples ou les forces exercées par les actionneurs et les positions, vitesses, accélérations des articulations.

### 1.2.1 Modélisation géométrique

Les modèles géométriques direct et inverse qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction des variables articulaires du mécanisme et inversement.

La figure () nous montre l'organe terminal dans la position  $(x, y)$  et les différentes longueurs des câbles ( $L_i$ ) ainsi que les angles que font ces derniers avec l'axe des  $x$  ( $\theta_i$ ).



**Figure 1.7:** Diagramme du robot planaire a 4 câbles [9].

### 1.2.1.1 Modelé géométrique Inverse

Le modèle géométrique Inverse Consiste à calculer les coordonnées articulaires correspondant à une situation donnée de l'organe terminal. Lorsqu'elle existe la forme explicite qui donne toutes les solutions possibles (il y rarement unicité de solution) constitue ce que l'on appelle le modèle géométrique inverse (MGI) [10].

On cherche à trouver les longueurs des câbles ( $L_i$ ) et les angles ( $\theta_i$ ) en fonction des coordonnées de l'effecteur  $(x, y)$ , exprimées par les équations suivantes :

$$L_i = \sqrt{L_{ix}^2 + L_{iy}^2} \quad i = 1,4 \quad (1.1)$$

$$L_{ix} = x - A_{ix} \quad \text{et} \quad L_{iy} = y - A_{iy} \quad i = 1,4 \quad (1.2)$$

On remplace dans l'équation (2.1) on trouve :

$$L_i = \sqrt{(x - A_{ix})^2 + (y - A_{iy})^2} \quad i = 1,4 \quad (1.3)$$

Pour les angles on a :

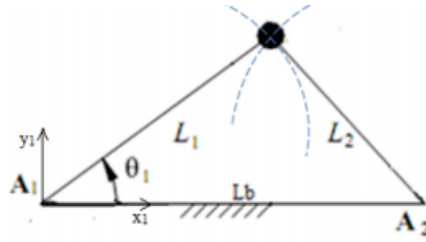
$$\theta_i = \arctang\left(\frac{y - A_{iy}}{x - A_{ix}}\right) \quad i = 1,4 \quad (1.4)$$

### 1.2.1.2 Modèle géométrique Direct

Le modèle géométrique direct d'un robot permet d'obtenir les coordonnées opérationnelles donnant la situation de l'organe terminal en fonction des [10].

Donc on exprime la position de l'effecteur  $(x, y)$  en fonction des longueurs des câbles  $(L_i)$ , le modèle géométrique directe est difficile à résoudre à cause de sa structure fermée (les angles  $(\theta_i)$  sont liés avec les longueurs des câbles  $(L_i)$ ).

Ce problème peut être simplifié en déplaçant le repère  $R(O, X, Y)$  au point  $A_1$  ce qui nous donne de nouvelles coordonnées des points  $A_1 = (0,0)$  et  $A_2 = (L_b, 0)$ [], comme montre la figure (2.2). Alors la solution du modèle géométrique direct est l'intersection de deux cercles, un de centre  $A_1$  avec un rayon  $L_1$ , et l'autre de centre  $A_2$  de rayon  $L_2$  :



**Figure 1.8:** Le changement de repère .

$$x_1^2 + y_1^2 = L_1^2 \quad (1.5a)$$

$$(L_b - x_1)^2 + y_1^2 = L_2^2 \quad (1.5b)$$

$$(L_b - x_1)^2 - x_1^2 = L_1^2 - L_2^2 \quad (1.5c)$$

$$2x_1L_b - L_b^2 = L_1^2 - L_2^2 \quad (1.5d)$$

D'ou:

$$\begin{cases} x = \frac{L_b^2 + L_1^2 - L_2^2}{2L_b} \\ y = \pm \sqrt{L_b^2 - (L_b - x)^2} = \pm \sqrt{L_1^2 - x^2} \end{cases} \quad (1.6)$$

## 1.2.2 Modélisation Cinématique

La modélisation cinématique d'un robot en général permet d'établir les relations entre les vitesses articulaires (généralisées) et les vitesses opérationnelles de l'organe terminal. Dans cette partie nous présentons la modélisation cinématique inverse et directe du robot plan à 4 câbles [10].

### 1.2.2.1 Modèle Cinématique Inverse

Pour calculer le modèle cinématique inverse, nous considérons le  $i^{ème}$  vecteur obtenu des équations (1.2) :

$$x = A_{ix} + L_i \cos(\theta_i) \quad i = 1,4 \quad (1.7a)$$

$$y = A_{iy} + L_i \sin(\theta_i) \quad i = 1,4 \quad (1.7b)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{ix} + L_i \cos(\theta_i) \\ A_{iy} + L_i \sin(\theta_i) \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Si on dérive  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -L_i \sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & L_i \cos(\theta_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{L}_i \\ \dot{\theta}_i \end{pmatrix} \quad i = 1,4 \quad (1.9)$$

En inversant l'équation (1.9) on obtient :

$$\begin{pmatrix} \dot{L}_i \\ \dot{\theta}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) \\ -\frac{\cos(\theta_i)}{L_i} & -\frac{\sin(\theta_i)}{L_i} \end{pmatrix} \quad i = 1,4 \quad (1.10)$$

Comme nous nous intéressons à les vitesses des câbles en fonction de la vitesse de l'effecteur nous pouvons extraire la première ligne de (1.10) pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \\ \dot{L}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \\ \cos(\theta_4) & \sin(\theta_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

On pose :

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \\ \cos(\theta_4) & \sin(\theta_4) \end{pmatrix} \quad \text{M: Jacobéenne inverse} \quad (1.12)$$

### 1.2.2.2 Modèle Cinématique Direct

Le modèle cinématique direct d'un robot manipulateur décrit les vitesses des coordonnées opérationnelles en fonction des vitesses articulaires.

Pour obtenir le modèle cinématique direct, on doit inverser l'équation (1.11) qui nous donne:

$$\dot{X} = M^{-1}\dot{L}. \quad (1.13)$$

Donc la solution exige le calcul de la matrice Jacobienne inverse. En raison de redondance d'actionnement,  $M$  n'est pas carré mais de dimension  $(4 * 2)$  ce qui nous crée un problème de calcul de  $M^{-1}$ . Alors pour résoudre ce problème, nous avons utilisé le pseudo inverse de Moore-Penrose:

$$\dot{X} = M^+\dot{L} \quad \text{Ou} \quad M^+ = (M^T M)^{-1} M^T \quad (1.14)$$

Tel que :

$M^+$  : Pseudo-inverse de la matrice  $M$ .

### 1.2.3 Modèle Dynamique

Les modèles dynamiques définissent les équations du mouvement du robot qui permettent d'établir les relations entre les couples ou les forces exercées par les actionneurs et les positions, vitesses et accélérations des articulations.

L'étude dynamique du système peut se faire par différentes méthodes, On peut citer Newton-Euler, puissances virtuelles et la méthode de Lagrange, on va utiliser 2 méthodes pour établir les équations de mouvement de l'effecteur.

#### La méthode de Lagrange

Pour le modèle de dynamique dérivé dans cette section, nous supposons que les câbles du robot parallèle planaire à 4 câbles sont sans masse et parfaitement rigides, de sorte que nous ne considérons pas leurs inerties ou leurs élasticités. Nous ignorons encore la friction de Coulomb et, à la place, modélisons un frottement visqueux linéaire pour tenir compte des pertes par frottement. Malgré ces simplifications, le modèle résultant est couplé et non linéaire. Nous présentons maintenant les modèles cartésiens, actuateurs et dynamiques globaux du système.

Le formalisme de Lagrange décrit les équations du mouvement en termes de travail et d'énergie du système, ce qui se traduit, lorsque l'effort extérieur sur l'organe terminal est supposé nul, par l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = Q_d \quad (1.15)$$

Ou :

$L$  :Est le lagrangien du système défini par :

$$L = T - U \quad (1.16)$$

$T$ : Énergie cinétique totale du système.

$U$ : Énergie potentielle totale du système.

$D$ : Énergie de dissipation totale du système.

$Q_d$  : Est le vecteur des forces données lie aux couples des moteurs.

### Calcul des vitesses et accélérations angulaires des poulies

Pour calculer les énergies cinétiques et énergies de dissipations du système on doit d'abord connaitre les vitesses et accélérations angulaire des poulies. L'équation (1.17) donne les angles de rotation  $\beta_i$  des poulies :

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} L_{10} - L_1 \\ L_{20} - L_2 \\ L_{30} - L_3 \\ L_{40} - L_4 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

En dérivant par rapport au temps l'équation on obtient les vitesses angulaires des poulies :

$$\dot{\beta} = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \\ \dot{L}_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \\ \cos(\theta_4) & \sin(\theta_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

En dérivant par rapport au temps l'équation (1.18) on obtient les accélérations angulaires des poulies :

$$\ddot{\beta} = \frac{1}{r} \left[ \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ -\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ -\dot{\theta}_3 \sin(\theta_3) & \sin(\theta_3) \\ -\dot{\theta}_4 \sin(\theta_4) & \sin(\theta_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \\ \cos(\theta_4) & \sin(\theta_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} \right] \quad (1.19)$$

### L'énergie cinétique du système

C'est ensembles de l'énergie cinétique de l'effecteur et l'énergie cinétique des poulies, et qui s'exprime comme suit :

$$T = \frac{1}{2}mV_e^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{\beta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\beta}_2^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\beta}_3^2 + \frac{1}{2}J_4\dot{\beta}_4^2 \quad (1.20)$$

Tel que :

$V_e$  : est la vitesse de l'effecteur exprimé par :

$$V_e^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad (1.21)$$

$m$  : Est la masse de l'effecteur.

$J_1, J_2, J_3, J_4$  : sont les inerties des poulies.

$\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3, \dot{\beta}_4$  : sont les vitesses angulaires des poulies exprimées avec l'expression(1.18).

En remplace c'est équations dans l'équation (2.20) on trouve :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2r^2}J_1(\cos(\theta_1)\dot{x} + \sin(\theta_1)\dot{y})^2 + \frac{1}{2r^2}J_2(\cos(\theta_2)\dot{x} + \sin(\theta_2)\dot{y})^2 + \frac{1}{2r^2}J_3(\cos(\theta_3)\dot{x} + \sin(\theta_3)\dot{y})^2 + \frac{1}{2r^2}J_4(\cos(\theta_4)\dot{x} + \sin(\theta_4)\dot{y})^2 \quad (1.22)$$

### L'énergie potentielle du système

On sait que l'effecteur se déplace dans un plan horizontal et les poulies sont fixes, et la masse des fils sont négligeable, donc l'énergie potentielle du système est nulle ; alors :

$$U = 0 \quad \text{et} \quad L = T \quad (1.23)$$

### L'énergie de dissipation du système

Elle définit comme suit :

$$D = \frac{1}{2}C_1\dot{\beta}_1^2 + \frac{1}{2}C_2\dot{\beta}_2^2 + \frac{1}{2}C_3\dot{\beta}_3^2 + \frac{1}{2}C_4\dot{\beta}_4^2 \quad (1.24)$$

On remplace  $\dot{\beta}_i$  par leurs expressions et on obtient :

$$D = \frac{1}{2}C_1(\cos(\theta_1)\dot{x} + \sin(\theta_1)\dot{y})^2 + \frac{1}{2}C_2(\cos(\theta_2)\dot{x} + \sin(\theta_2)\dot{y})^2 + \frac{1}{2}C_3(\cos(\theta_3)\dot{x} + \sin(\theta_3)\dot{y})^2 + \frac{1}{2}C_4(\cos(\theta_4)\dot{x} + \sin(\theta_4)\dot{y})^2 \quad (1.25)$$



### Calcul des dérivées

En dérivant l'équation de l'énergie cinétique (1.22) par rapporte  $\dot{x}$  on trouve :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{1}{r^2}J_1 \cos(\theta_1)(\cos(\theta_1)\dot{x} + \sin(\theta_1)\dot{y}) + \frac{1}{r^2}J_2 \cos(\theta_2)(\cos(\theta_2)\dot{x} + \sin(\theta_2)\dot{y}) + \frac{1}{r^2}J_3 \cos(\theta_3)(\cos(\theta_3)\dot{x} + \sin(\theta_3)\dot{y}) + \frac{1}{r^2}J_4 \cos(\theta_4)(\cos(\theta_4)\dot{x} + \sin(\theta_4)\dot{y}) \quad (1.26)$$

On dérive cette dernière équation (1.26) par rapporte le temps en obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) &= m\ddot{x} + \frac{J_1}{r^2} [\cos^2(\theta_1)\ddot{x} + \cos(\theta_1)\sin(\theta_1)\ddot{y} - 2\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1)\sin(\theta_1)\dot{x} + \\ &\dot{\theta}_1(2\cos^2(\theta_1) - 1)\dot{y}] + \frac{J_2}{r^2} [\cos^2(\theta_2)\ddot{x} + \cos(\theta_2)\sin(\theta_2)\ddot{y} - 2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2)\sin(\theta_2)\dot{x} + \\ &\dot{\theta}_2(2\cos^2(\theta_2) - 1)\dot{y}] + \frac{J_3}{r^2} [\cos^2(\theta_3)\ddot{x} + \cos(\theta_3)\sin(\theta_3)\ddot{y} - 2\dot{\theta}_3 \cos(\theta_3)\sin(\theta_3)\dot{x} + \\ &\dot{\theta}_3(2\cos^2(\theta_3) - 1)\dot{y}] + \frac{J_4}{r^2} [\cos^2(\theta_4)\ddot{x} + \cos(\theta_4)\sin(\theta_4)\ddot{y} - 2\dot{\theta}_4 \cos(\theta_4)\sin(\theta_4)\dot{x} + \\ &\dot{\theta}_4(2\cos^2(\theta_4) - 1)\dot{y}] \end{aligned} \quad (1.27)$$

On dérive l'équation de l'énergie dissipation (2.25) par rapporte  $\dot{x}$  on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} &= \frac{1}{r^2} C_1 \cos(\theta_1)(\cos(\theta_1)\dot{x} + \sin(\theta_1)\dot{y}) + \frac{1}{r^2} C_2 \cos(\theta_2)(\cos(\theta_2)\dot{x} + \sin(\theta_2)\dot{y}) + \\ &\frac{1}{r^2} C_3 \cos(\theta_3)(\cos(\theta_3)\dot{x} + \sin(\theta_3)\dot{y}) + \frac{1}{r^2} C_4 \cos(\theta_4)(\cos(\theta_4)\dot{x} + \sin(\theta_4)\dot{y}) \end{aligned} \quad (1.28)$$

On a aussi :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (1.29)$$

En dérivant l'équation de l'énergie cinétique (2.22) par rapporte  $\dot{y}$  on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= m\dot{y} + \frac{1}{r^2}J_1 \sin(\theta_1)(\cos(\theta_1)\dot{x} + \sin(\theta_1)\dot{y}) + \frac{1}{r^2}J_2 \sin(\theta_2)(\cos(\theta_2)\dot{x} + \sin(\theta_2)\dot{y}) + \\ &\frac{1}{r^2}J_3 \sin(\theta_3)(\cos(\theta_3)\dot{x} + \sin(\theta_3)\dot{y}) + \frac{1}{r^2}J_4 \sin(\theta_4)(\cos(\theta_4)\dot{x} + \sin(\theta_4)\dot{y}) \end{aligned} \quad (1.30)$$

On dérive ce dernier équation (2.30) par rapporte le temps en obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) &= m\ddot{y} + \frac{J_1}{r^2} [\sin^2(\theta_1)\ddot{y} + \cos(\theta_1)\sin(\theta_1)\ddot{x} + 2\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1)\sin(\theta_1)\dot{y} + \dot{\theta}_1 \cos^2(\theta_1) - \\ &\sin^2(\theta_1)\dot{x}] + \frac{J_2}{r^2} [\sin^2(\theta_2)\ddot{y} + \cos(\theta_2)\sin(\theta_2)\ddot{x} + 2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2)\sin(\theta_2)\dot{y} + \dot{\theta}_2 \cos^2(\theta_2) - \\ &\sin^2(\theta_2)\dot{x}] + \frac{J_3}{r^2} [\sin^2(\theta_3)\ddot{y} + \cos(\theta_3)\sin(\theta_3)\ddot{x} + 2\dot{\theta}_3 \cos(\theta_3)\sin(\theta_3)\dot{y} + \dot{\theta}_3 \cos^2(\theta_3) - \end{aligned}$$

$$\sin^2(\theta_3)\dot{x}] + \frac{J_4}{r^2} [\sin^2(\theta_4)\ddot{y} + \cos(\theta_4) \sin(\theta_4)\ddot{x} + 2\dot{\theta}_4 \cos(\theta_4)\sin(\theta_4)\dot{y} + \dot{\theta}_4 \cos^2(\theta_4) - \sin^2(\theta_4)\dot{x}] \quad (1.31)$$

On dérive l'équation de dissipation (1.25) par rapporte  $\dot{y}$  on trouve :

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{r^2} C_1 \sin(\theta_1)(\cos(\theta_1) \dot{x} + \sin(\theta_1)\dot{y}) + \frac{1}{r^2} C_2 \sin(\theta_2)(\cos(\theta_2) \dot{x} + \sin(\theta_2)\dot{y}) + \frac{1}{r^2} C_3 \sin(\theta_3)(\cos(\theta_3) \dot{x} + \sin(\theta_3)\dot{y}) + \frac{1}{r^2} C_4 \sin(\theta_4)(\cos(\theta_4) \dot{x} + \sin(\theta_4)\dot{y}) \quad (1.32)$$

On a aussi :

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (1.33)$$

### Calcul des coefficients $Q_d$

On les détermine à partir de la puissance virtuelle développée par les 4 moteurs et qui est donnée par la relation (les  $\tau_i$  désignent les couples sur les poulies) :

$$P^* = \tau_1 \dot{\beta}_1^* + \tau_2 \dot{\beta}_2^* + \tau_3 \dot{\beta}_3^* + \tau_4 \dot{\beta}_4^* \quad (1.34)$$

Tel que :

$$\dot{\beta}^* = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \\ \cos(\theta_4) & \sin(\theta_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}^* \\ \dot{y}^* \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

En remplace équation (1.34) dans (1.35) on obtient :

$$P^* = -\frac{1}{r} (\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad \tau_4) \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \\ \cos(\theta_4) & \sin(\theta_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}^* \\ \dot{y}^* \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

De l'équation (1.36) on tire les expressions des forces données suivant x et y :

$$Q_{dx} = -\frac{1}{r} (\tau_1 \cos(\theta_1) + \tau_2 \cos(\theta_2) + \tau_3 \cos(\theta_3) + \tau_4 \cos(\theta_4)) \quad (1.37a)$$

$$Q_{dy} = -\frac{1}{r} (\tau_1 \sin(\theta_1) + \tau_2 \sin(\theta_2) + \tau_3 \sin(\theta_3) + \tau_4 \sin(\theta_4)) \quad (1.37b)$$

On peut écrire :

$$Q_d = \frac{1}{r} S(X)\tau \quad (1.38)$$

Tel que :

$$S(X) = \begin{pmatrix} -\cos(\theta_1) & -\cos(\theta_2) & -\cos(\theta_3) & -\cos(\theta_4) \\ -\sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2) & -\sin(\theta_3) & -\sin(\theta_4) \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

Et :

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

### Equations de Lagrange sous forme matricielle

Après le remplacement des équations des dérivées de l'énergie cinétique et énergie de dissipation dans la formule de la Lagrange, et après des manipulations de ces équations on obtient la forme matricielle suivante :

$$M(X)\ddot{X} + N(X, \dot{X})\dot{X} = S(X)\tau \quad (1.41)$$

Avec :

$$Q = rQ_d = S(X)\tau \quad (1.42)$$

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Tel que :

$$M_{11} = r * m + \frac{1}{r}(J_1 \cos^2(\theta_1) + J_2 \cos^2(\theta_2) + J_3 \cos^2(\theta_3) + J_4 \cos^2(\theta_4)) \quad (1.44a)$$

$$M_{12} = \frac{1}{r}(J_1 \cos(\theta_1) \sin(\theta_1) + J_2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_2) + J_3 \cos(\theta_3) \sin(\theta_3) + J_4 \cos(\theta_4) \sin(\theta_4)) \quad (2.44b)$$

$$M_{22} = r * m + \frac{1}{r}(J_1 \sin^2(\theta_1) + J_2 \sin^2(\theta_2) + J_3 \sin^2(\theta_3) + J_4 \sin^2(\theta_4)) \quad (1.44c)$$

$$N_{11} = \frac{1}{r} [\cos(\theta_1) (C_1 \cos(\theta_1) - 2J_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1)) + \cos(\theta_2) (C_2 \cos(\theta_2) - 2J_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2)) + \cos(\theta_3) (C_3 \cos(\theta_3) - 2J_3 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_3)) + \cos(\theta_4) (C_4 \cos(\theta_4) - 2J_4 \dot{\theta}_4 \sin(\theta_4))] \quad (2.44d)$$

$$\begin{aligned}
N_{12} = \frac{1}{r} & \left[ C_1 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + J_1 \dot{\theta}_1 (\cos^2(\theta_1) - \sin^2(\theta_1)) + C_2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) + \right. \\
& J_2 \dot{\theta}_2 (\cos^2(\theta_2) - \sin^2(\theta_2)) + C_3 \sin(\theta_3) \cos(\theta_3) + J_3 \dot{\theta}_3 (\cos^2(\theta_3) - \sin^2(\theta_3)) + \\
& \left. C_4 \sin(\theta_4) \cos(\theta_4) + J_4 \dot{\theta}_4 (\cos^2(\theta_4) - \sin^2(\theta_4)) \right] \tag{1.44e}
\end{aligned}$$

$$N_{21} = N_{12} \tag{1.44f}$$

$$\begin{aligned}
N_{22} = \frac{1}{r} & \left[ \sin(\theta_1) (C_1 \cos(\theta_1) - 2J_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1)) + \sin(\theta_2) (C_2 \cos(\theta_2) - \right. \\
& 2J_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2)) + \sin(\theta_3) (C_3 \cos(\theta_3) - 2J_3 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_3)) + \sin(\theta_4) (C_4 \cos(\theta_4) - \\
& \left. 2J_4 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_4)) \right]
\end{aligned}$$

# **Chapitre 2 : Commande en boucle ouverte et optimisation des couples**

## 2.1 Commande en boucle ouverte

### 2.1.1 Introduction

Dans ce chapitre on représente le système sous la forme d'une représentation d'état pour valider le modèle dynamique et étudier la stabilité du robot planaire a 4 câbles avec la simulation des différentes réponses (impulsionnelle et indicielle) du système en boucle ouverte, ensuite on essaie de faire une étude d'optimisation des couples fournies par chaque moteur de ce robot pour utiliser dans la commande en boucle fermée.

### 2.1.2 La représentation d'état du système

Comme on a déjà vu l'équation dynamique du robot planaire a 4 câbles donnée par :

$$M(X)\ddot{X} + N(X, \dot{X})\dot{X} = S(X)\tau \quad (2.1)$$

Tel que :

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$S(X) = \begin{pmatrix} -\cos(\theta_1) & -\cos(\theta_2) & -\cos(\theta_3) & -\cos(\theta_4) \\ -\sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2) & -\sin(\theta_3) & -\sin(\theta_4) \end{pmatrix} \tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Alors on pose les variables d'état suivantes :

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t) \\ x_2(t) = \dot{x}(t) \\ x_3(t) = y(t) \\ x_4(t) = \dot{y}(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

On dérive les variables d'état par rapport au temps:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{x}(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{x}(t) \\ \dot{x}_3(t) = \dot{y}(t) \\ \dot{x}_4(t) = \ddot{y}(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

On utilise l'équation dynamique du robot on trouve :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ M_{11}\dot{x}_2(t) + M_{12}\dot{x}_4(t) + N_{11}x_2(t) + N_{12}x_4(t) = u_1(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ M_{21}\dot{x}_2(t) + M_{22}\dot{x}_4(t) + N_{21}x_2(t) + N_{22}x_4(t) = u_2(t) \end{cases} \quad (2.6)$$

Tel que :

$$U(t) = F_R = S(X)\tau = \begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\theta_1)\tau_1 - \cos(\theta_2)\tau_2 - \cos(\theta_3)\tau_3 - \cos(\theta_4)\tau_4 \\ -\sin(\theta_1)\tau_1 - \sin(\theta_2)\tau_2 - \sin(\theta_3)\tau_3 - \sin(\theta_4)\tau_4 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Donc on peut écrire la représentation d'état du robot comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{11} & 0 & M_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & M_{21} & 0 & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -N_{11} & 0 & -N_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -N_{21} & 0 & -N_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

On pose :

$$M_{2d} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{11} & 0 & M_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & M_{21} & 0 & M_{22} \end{pmatrix} N_{2d} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -N_{11} & 0 & -N_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -N_{21} & 0 & -N_{22} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{pmatrix} X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Alors la représentation d'état s'écrit comme suit :

$$\dot{X}(t) = M_{2d}^{-1}N_{2d}X(t) + M_{2d}^{-1}BU(t) \quad (2.12)$$

Donc :

$$\dot{X}(t) = f(X) + g(X) * U(t) \quad (2.13)$$

Tel que :

$\dot{X}(t)$  : est le vecteur d'état du système.

$f(X)$  et  $g(X)$  : sont des fonctions non linéaire.

$U(t)$  : est le vecteur de commande du système.

### 2.1.3 Simulation du la réponse du robot

Dans ce paragraphe on essaie de simuler la réponse du robot planaire à 4 câbles en utilisant l'environnement Simulink sur MATLAB, avec les conditions suivantes :

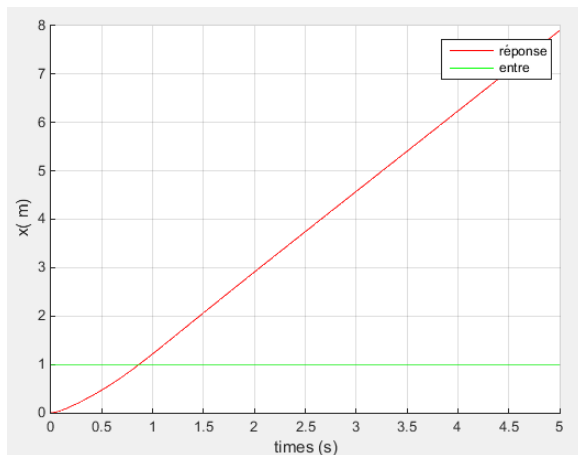
- Les inerties du rotor et de la poulie de chaque moteur  $J_i = 0.0008 \text{ kg.m}^2 \quad i = 1:4$ .
- Les coefficients d'amortissement visqueux de chaque arbre du moteur

$$C_i = 0.001 \text{ N.m.s} \quad i = 1:4$$

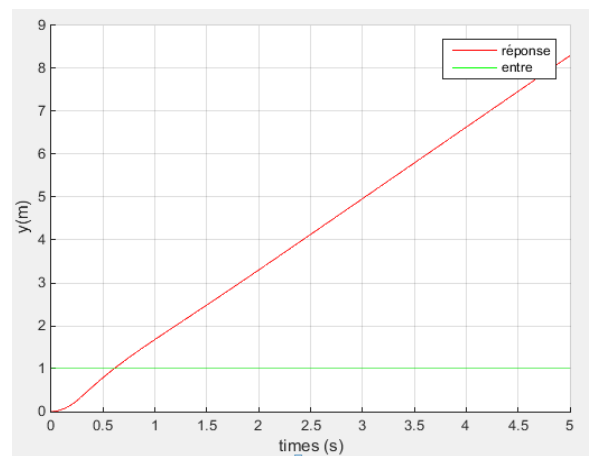
- La masse de l'organe terminale  $m = 1 \text{ kg}$ .
- Le rayon de la poulie de chaque moteur  $r_i = 0.05 \text{ m} \quad i = 1:4$ .

#### 2.1.3.1 La réponse indicielle

On simule la réponse indicielle du robot avec une entrée du système fixe ( $u_1 = 1 \text{ N}$  et  $u_2 = 1 \text{ N}$ ), les figures (2.1) et (2.2) représente les profils de position du robot en boucle ouvert :



**Figure 2.1 : Réponse indicielle du robot, Profil de  $x(m)$ .**

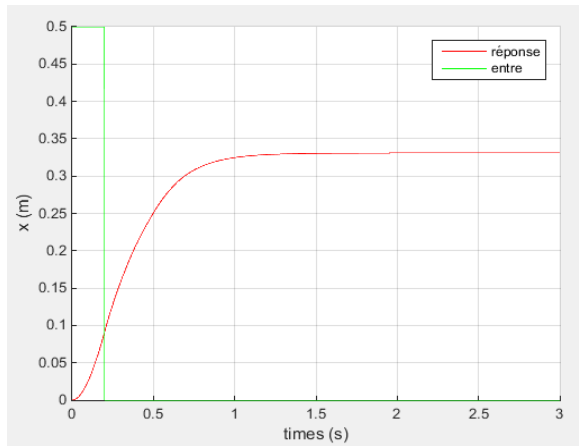


**Figure 2.2 : Réponse indicielle du robot, Profil de  $y(m)$ .**

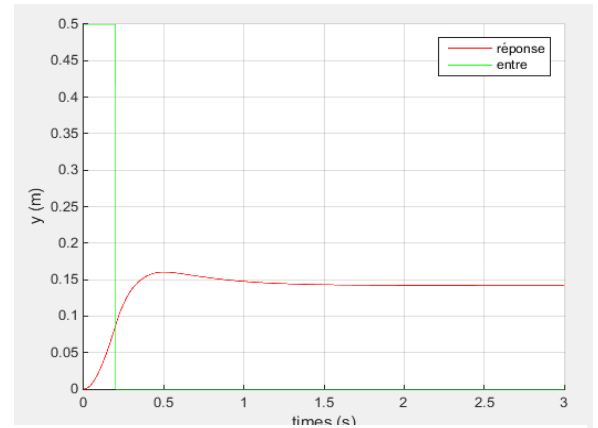


### 2.1.3.2 La réponse impulsionnelle

On simule la réponse impulsionnelle du robot avec une entrée du système fixe ( $u_1 = 1N$  et  $u_2 = 1N$ ) pour une durée très court, les figures (2.3) et (2.4) représentent les profils de position du robot en boucle ouverte :



**Figure 2.3 : Réponse impulsionnelle du robot, Profile de  $x(m)$ .**



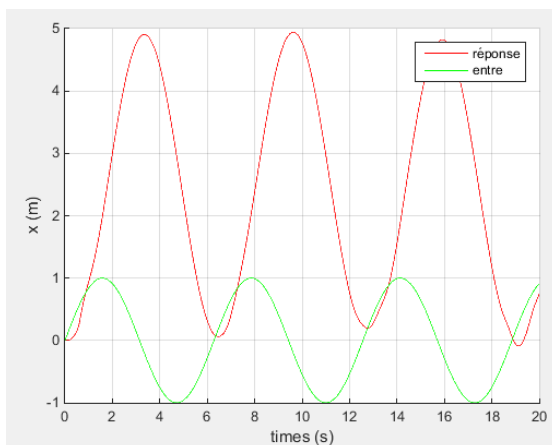
**Figure 2.4 : Réponse impulsionnelle du robot, Profile de  $y(m)$ .**

### 2.1.3.3 Réponse sinusoïdale

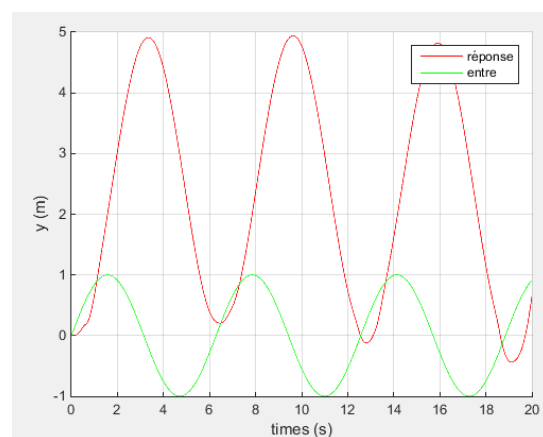
La simulation de la réponse sinusoïdale du robot avec une entrée du système :

$$(u_1 = \sin(t) \text{ et } u_2 = \sin(t))$$

Pour une durée très courte, les figures (2.5) et (2.6) représentent les profils de position du robot en boucle ouverte :



**Figure 2.5 : Réponse sinusoïdale du robot, Profile de  $x(m)$ .**



**Figure 2.6 : Réponse sinusoïdale du robot, Profile de  $y(m)$ .**

D'après la simulation de différentes réponses du robot planaire à 4 câbles le système est instable, et qu'il est un système avec doubles intégrateur.

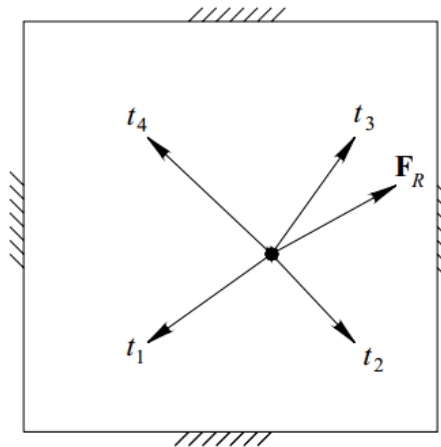
## 2.2 Optimisation des couples

### 2.2.1 Analyse statique des forces

L'espace de travail dans lequel tous les câbles sont sous tension positive tout en exerçant toutes les forces cartésiennes possibles est appelé l'espace de travail statique. La modélisation statique et la tentative de maintenir une tension positive du câble sont présentés dans cette section. Nous utilisons une méthode simple pour déterminer l'étendue de l'espace de travail statique, c'est-à-dire l'espace de travail dans lequel toutes les forces possibles peuvent être appliquées avec des tensions de câble positives.

Pour l'équilibre statique, la somme des forces exercées sur le point de déplacement par les câbles doit être égale à la force externe résultante exercée sur l'environnement [11].

La figure (2.7) montre le diagramme de corps libre de statique pour le robot planaire à 4 câbles. Les équations statiques sont:



**Figure 2.7 :** diagramme des forces statique [11].

$$\sum_{i=1}^4 t_i = -\sum_{i=1}^4 t_i L_i = F_R \quad (2.14)$$

A cause de l'élimination de la force de gravité on peut écrire l'équation de la force résultante comme suit :

$$F_R = S * T \quad (2.15)$$

Tel que :

$$L_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{pmatrix} \text{Et } S = (-L_1 \quad -L_2 \quad -L_3 \quad -L_4) \quad (2.16)$$

Alors

$$S = \begin{pmatrix} -\cos(\theta_1) & -\cos(\theta_2) & -\cos(\theta_3) & -\cos(\theta_4) \\ -\sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2) & -\sin(\theta_3) & -\sin(\theta_4) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Alors on peut écrire :

$$F_R = \begin{pmatrix} -\cos(\theta_1) & -\cos(\theta_2) & -\cos(\theta_3) & -\cos(\theta_4) \\ -\sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2) & -\sin(\theta_3) & -\sin(\theta_4) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$\text{Avec : } T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} \text{ et } F_R = \begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

$$\text{Donc : } \begin{pmatrix} -\cos(\theta_1) & -\cos(\theta_2) & -\cos(\theta_3) & -\cos(\theta_4) \\ -\sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2) & -\sin(\theta_3) & -\sin(\theta_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Pour les robots planaire à 4 câbles avec redondance d'actionnement, est sous contrainte, ce qui signifie qu'il existe des solutions infinies au vecteur  $T$  de tension de câble pour exercer la force cartésienne donnée  $F_R$ . Pour inverser équation (2.15) (Résolution des tensions de câble requises  $T$  donnée par la force souhaitée  $F_R$ ), Nous adaptons la solution particulière et homogène [11]:

$$T = S^+ F_R + (I_n - S^+ S) Z \quad (2.21)$$

Avec :

$I_n$ : Est la matrice d'identité (4 \* 4).

$Z$  : est un vecteur arbitraire de dimension 4

$S^+$  : est le pseudo-inverse de  $S$  par la méthode de Moore-Penrose de dimension  $(4 * 2)$ .

$$S^+ = S^T(SS^T)^{-1} \quad (2.22)$$

Le premier terme de (3.21) est la solution particulière  $(S^+F_R)$  pour atteindre la force souhaitée, et le second terme est la solution homogène  $((I_n - S^+S)Z)$ .

Pour les robots a câble avec deux ou plusieurs degrés de redondance d'actionnement (le cas planaire à 4 câbles), la détermination de l'espace de travail statique et la méthode pour maintenir les tensions positives des câbles sont plus compliquées [11].

Pour la redondance d'actionnement du degré deux, une expression équivalente pour (3.21) est:

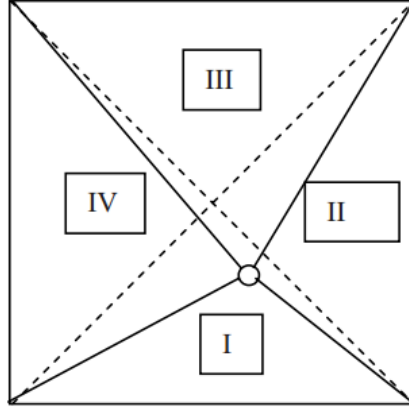
$$T = \begin{pmatrix} t_{p1} \\ t_{p2} \\ t_{p3} \\ t_{p4} \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Où la solution particulière  $(S^+F_R)$  est à nouveau le premier terme dans (2.23) et la solution homogène est exprimée comme les deux vecteurs de noyau de  $S$  ( $N = (n_1 \ n_2 \ n_3 \ n_4)^T$  et  $P = (p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4)^T$ ) multiplié par des scalaires arbitraires  $a$  et  $b$ .

La condition pour qu'une configuration de robot planaire a câble se situe dans l'espace de travail statique soit:

$$a \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Divisez l'espace de travail en quatre secteurs comme dans la figure (2.8) ; nous pouvons construire une base d'espace nulle différente pour chaque secteur. Ceci est nécessaire pour démontrer que l'espace de travail entier se trouve dans l'espace de travail statique [11].



**Figure 2.8** : Secteurs de l'espace de travail du robot a 4 câbles [11].

Cas I : Supposons que le point de l'effecteur soit dans le premier secteur. Une base possible pour le noyau de  $S$  est:

$$N = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\theta_4 - \theta_2)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \\ \frac{\sin(\theta_1 - \theta_4)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\theta_3 - \theta_2)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \\ \frac{\sin(\theta_1 - \theta_3)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Si l'effecteur se trouve dans la zone I, les plages d'angle admissibles du câble sont :

$$0^\circ \leq \theta_1 \leq 45^\circ \quad 135^\circ \leq \theta_2 \leq 180^\circ \quad 225^\circ \leq \theta_3 \leq 270^\circ \quad 270^\circ \leq \theta_4 \leq 315^\circ$$

Les éventuelles gammes d'angle delta sont :

$$90^\circ \leq \theta_4 - \theta_2 \leq 135^\circ \quad 90^\circ \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 180^\circ \quad -270^\circ \leq \theta_1 - \theta_3 \leq -180^\circ \\ -315^\circ \leq \theta_1 - \theta_4 \leq -225^\circ \quad 45^\circ \leq \theta_3 - \theta_2 \leq 135^\circ$$

Par conséquent, toutes les fonctions sinusoïdales dans (2.25) sont positives ou nulles et toute combinaison de  $N$  et  $P$  (avec les coefficients positifs  $a$  et  $b$ ) a toujours des composants positifs comme requis dans (2.24). En conclusion, le premier secteur appartient à l'espace de travail statique.

Cas II : Supposons que le point de l'effecteur soit dans le second secteur. Une base possible pour le noyau de  $S$  est:

$$N = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sin(\theta_4 - \theta_3)}{\sin(\theta_3 - \theta_2)} \\ \frac{\sin(\theta_2 - \theta_4)}{\sin(\theta_3 - \theta_2)} \\ 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sin(\theta_1 - \theta_3)}{\sin(\theta_3 - \theta_2)} \\ \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_3 - \theta_2)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Si l'effecteur se trouve dans le secteur II, les plages d'angle admissibles du câble sont :

$$0^\circ \leq \theta_1 \leq 45^\circ \quad 90^\circ \leq \theta_2 \leq 135^\circ \quad 225^\circ \leq \theta_3 \leq 270^\circ \quad 315^\circ \leq \theta_4 \leq 360^\circ$$

Les éventuelles gammes d'angle delta sont :

$$45^\circ \leq \theta_4 - \theta_3 \leq 135^\circ - 225^\circ \leq \theta_2 - \theta_4 \leq -180^\circ - 270^\circ \leq \theta_1 - \theta_3 \leq -180^\circ$$

$$45^\circ \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 135^\circ \quad 90^\circ \leq \theta_3 - \theta_2 \leq 180^\circ$$

Par conséquent, toutes les fonctions sinusoïdales dans (2.27) sont positives ou nulles et toute combinaison de N et P (avec les coefficients positifs a et b) a toujours des composants positifs comme requis dans (2.24). En conclusion, le second secteur appartient à l'espace de travail statique.

Les deux derniers cas sont similaires, comme les deux premiers, donc on peut choisir une base possible pour le noyau de S appropriée pour le secteur III:

$$N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\sin(\theta_2 - \theta_4)}{\sin(\theta_4 - \theta_3)} \\ \frac{\sin(\theta_3 - \theta_2)}{\sin(\theta_4 - \theta_3)} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sin(\theta_1 - \theta_4)}{\sin(\theta_4 - \theta_3)} \\ \frac{\sin(\theta_3 - \theta_1)}{\sin(\theta_4 - \theta_3)} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Et pour le secteur IV :

$$N = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\theta_3 - \theta_4)}{\sin(\theta_4 - \theta_1)} \\ 0 \\ 1 \\ \frac{\sin(\theta_1 - \theta_3)}{\sin(\theta_4 - \theta_1)} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\theta_2 - \theta_4)}{\sin(\theta_4 - \theta_1)} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_4 - \theta_1)} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

La conclusion pour chaque cas est identique, c'est-à-dire que les troisième et quatrième secteurs appartiennent également à l'espace de travail statique, y compris tous les arêtes triangulaires internes ; Le seul point que nous n'avons pas pris en compte est le centre du carré, mais dans ce cas, le noyau ne comporte qu'un seul vecteur  $N = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^T$  Parce que le rang de S dégénère en un seul. De toute évidence, ce cas spécial se trouve dans l'espace de travail statique car il satisfait facilement (2.24).

Par conséquent, nous avons montré que l'espace de travail cinématique entièrement autorisé du carré de base est également l'espace de travail statique, Le bord du carré de base

(qui correspond à des singularités cinématiques) et tous les points en dehors du carré de base sont en dehors de l'espace de travail statique.

### 2.2.2 Calcul des couples optimisés des actionneurs

Cette partie présente une méthode pour déterminer les couples d'actionnement optimal pour l'architecture du contrôleur, pour le robot planaire à 4 câbles avec deux degrés de redondance d'actionnement, le travail concerne également un algorithme pour l'estimation des couples minimaux d'actionnement nécessaires pour maintenir les tensions positives du câble.

Pour le contrôle, nous devons calculer les couples des actionneurs réels  $\tau_i$  compte tenu des forces virtuelles  $F_V$ , La solution du système sous contraintes  $F_V = S(X)\tau$  est similaire à (2.23) de la section (2.4), la différence par rapport à (2.23) est que nous ne pouvons plus faire l'hypothèse pseudo statique  $\tau_i = r t_i$  ( $\tau_i$  est le  $i$ ème couple de l'actionneur,  $r$  est le rayon de la poulie du câble et  $t_i$  est la  $i$ ème tension du câble), en raison de la dynamique, cette hypothèse ne tient plus; Nous devons calculer les couples d'actionnement requis pour la commande, tout en essayant de maintenir dynamiquement les tensions positives des câbles [11].

$$\tau = \begin{pmatrix} t_{p1} \\ t_{p2} \\ t_{p3} \\ t_{p4} \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

La solution particulière  $S^+ F_V$  est le premier terme dans (3.33), et la solution homogène est exprimée comme les deux vecteurs de noyau de  $S$  ( $N = (n_1 \ n_2 \ n_3 \ n_4)^T$  et  $P = (p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4)^T$ ) multiplié par des scalaires arbitraires  $a$  et  $b$ .

Le but du calcul du couple consiste à trouver une solution optimale  $\tau_{opt}$  avec les caractéristiques suivantes:

1. Chaque composant de  $\tau_{opt}$ , doit être supérieur ou égal à un couple minimum spécifié  $\tau_{min}$ .
2. La norme de  $\tau$  doit être minimisée.

La première condition assure que le couple dans chaque moteur est toujours positif, en fait toujours supérieur à  $\tau_{min}$ , Si nous ne considérons pas les effets dynamiques, la tension dans chaque câble s'avère supérieure à  $r \tau_i$ , Sous cette condition pseudo-statique, si  $\tau_{min}$  est suffisamment élevé, les câbles ne vont jamais mouiller.

Malheureusement, lorsqu'une vitesse élevée est utilisée, en raison des effets dynamiques, un ou plusieurs câbles peuvent être lâches malgré un positif  $\tau_{min}$  dans ce cas

dynamique, la valeur minimale pour  $\tau_{min}$  doit être estimée en ligne pour chaque câble en temps réel.

L'algorithme d'estimation de tension de câble en ligne provient de forcer chaque composant de tension à être positif en tout temps dans le modèle de dynamique :

$$T_i = \frac{1}{r}(\tau_i - J_i\ddot{\beta}_i - C_i\dot{\beta}_i) \geq 0 \quad (2.31)$$

La solution de couple estimée pour chaque actionneur de (3.34) pour maintenir la tension du câble positive est:

$$\tau_{min_i} = \max\{J_i\ddot{\beta}_i + C_i\dot{\beta}_i; 0\} \quad (2.32)$$

La raison de la fonction maximale dans (3.35) est que lorsque la dynamique est prise en compte, le couple minimum nécessaire pour garantir le risque de tension du câble peut être négatif pour un ou plusieurs composants [11]. Dans(3.35), nous forçons tous les composants de couple à être zéro au minimum. Pour la solution de couple optimale, la norme est définie comme la somme simple car aucun composant ne peut être négatif:

$$\|\tau(a, b)\| = \sum_{i=1}^4 \tau_i \quad (2.33)$$

La forme de solution (3.33) donne un système d'inégalités linéaires non homogènes dans les inconnues scalaires  $a$  et  $b$ .

$$\tau_{pi} + an_i + bp_i \geq \tau_{min_i} \quad (2.34)$$

Compte tenu de cette forme, nous avons un problème typique dans la programmation linéaire, où la fonction objectif (2.33), la norme de couple, doit être minimisée par une contrainte d'inégalité définie donnée par(2.34).

Dans l'espace de solution  $\langle a, b \rangle$ , chaque équation de (2.32) représente un semi plan dont la bordure est donnée par la ligne :

$$\tau_{pi} + an_i + bp_i = \tau_{min_i} \quad (2.35)$$

Lorsque les  $n$  lignes se croisent, nous obtenons jusqu'à  $ni$  points d'intersection  $\langle a_l, b_l \rangle, l = 1, \dots, ni$  nous désignons cet ensemble de points par  $\Theta$  Notez que le nombre maximum d'intersections est  $ni = \sum_{j=0}^3 j$ (dans notre cas  $ni = 6$ ), On peut prouver que la solution optimale est l'une de ces intersections  $\langle a, b \rangle$  [11].



C'est  $\tau_{opt} \in \{\tau(a_l, b_l), l = 1, \dots, ni\}$  Le sous-ensemble des points de  $\Theta$  qui satisfait l'exigence minimale de couple (36) est donné par:

$$\Theta_{pos} = \{(a, b) \in \Theta \mid \tau(a, b)_i \geq \tau_{min_i} \forall i = 1, \dots, 4\}$$

(2.36)

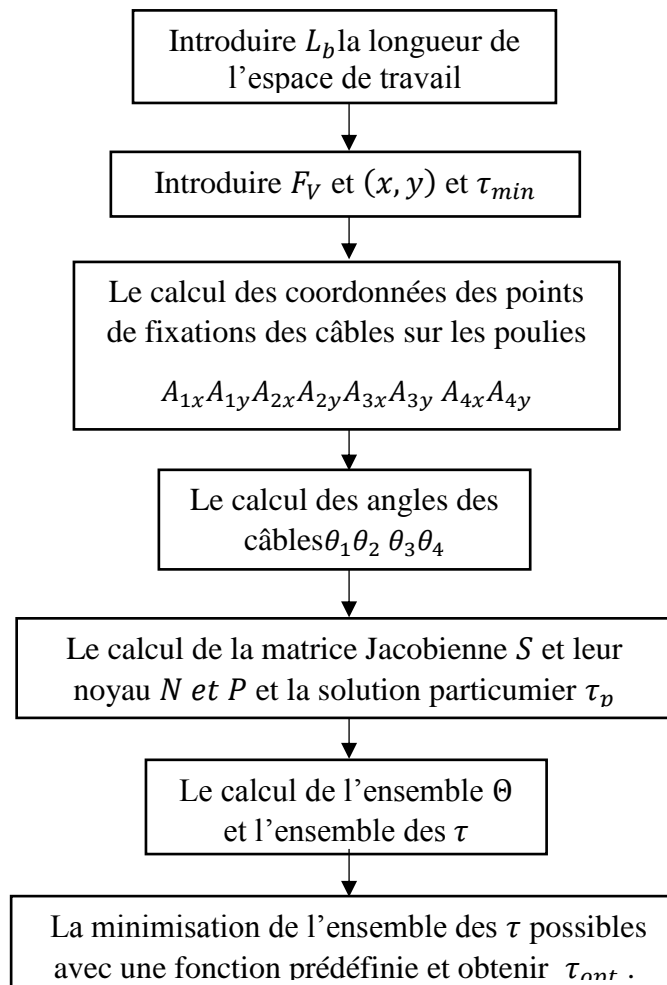
Nous choisissons le  $(a, b) \in \Theta_{pos}$  qui donne la norme minimale de couple.

En conclusion, on choisit les points d'intersection qui vérifient :

1. Tous les couples supérieurs ou égaux à  $\tau_{min_i}$  (construire le sous-ensemble  $\Theta_{pos}$ ).
2. la plus petite norme des vecteurs couple ( $\|\tau(a, b)\| = \sum_{i=1}^4 \tau_i$  est la plus petite).

### 2.2.3 Implémentation du l'algorithme d'optimisation des couples sur MATLAB

Pour valider cet algorithme d'optimisation des couples des actionneurs nous utilisons MATLAB, la figure (2.9) montrer l'organigramme du déroulement de l'algorithme pour calcule les couples optimale pour une force virtuelle  $F_V$  appliqué sur l'effecteur et cordonnée du point de l'effecteur  $(x, y)$  :



**Figure 2.9 :** L'organigramme pour calculer les couples optimales.

La fonction qui minimise l'ensemble des  $\tau$  possibles définie par les deux conditions suivantes :

1. Tous les couples supérieurs ou égaux à  $\tau_{min_i}$ .
2. La norme la plus petite des vecteurs couples.

**Exemple :**

On reprend l'exemple donnée dans [11] « Robert L. Williams II 2003 Université de l'Ohio » pour le comparer avec nos résultats. Les résultats de calcul sont :

$$F_V = (-1.3 N; 1.05N)^T(x; y) = (0.04; -0.23)m\tau_{min} = (0.1N \quad 0.1N \quad 0.1N \quad 0.1N)^T$$

Alors :

$$S(X) = \begin{pmatrix} -0.9658 & 0.9460 & 0.4592 & -0.5509 \\ -0.2591 & -0.3241 & 0.8883 & 0.8346 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7339 \\ 0.3859 \\ 0.5278 \\ -0.1841 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0853 \\ 0.6492 \\ -0.3618 \\ 0.6636 \end{pmatrix} \tau_p = \begin{pmatrix} \tau_{p1} \\ \tau_{p2} \\ \tau_{p3} \\ \tau_{p4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3541 \\ -0.6930 \\ 0.2899 \\ 0.7904 \end{pmatrix}$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5246 & -0.3482 & -0.2183 & 0.3393 & 2.5947 & -1.3247 \\ 1.5334 & 0.0168 & -1.1009 & 1.0199 & -0.3206 & -1.4078 \end{pmatrix}$$

Après la minimisation on trouve le vecteur des couples optimaux  $\tau_{opt}$  des actionneurs :

$$\tau_{opt} = \begin{pmatrix} \tau_{opt1} \\ \tau_{opt2} \\ \tau_{opt3} \\ \tau_{opt4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6902 \\ 0.1000 \\ 0.1000 \\ 1.4048 \end{pmatrix} N$$

Nous remarquons qu'on a obtenu le même résultat final des couples d'actionneurs optimaux que celle de la référence mais une différence dans les résultats des différentes grandeurs ; alors on peut dire que l'algorithme d'optimisation des couples des actionneurs est valide.

**2.2.4 Application du l'algorithme d'optimisation sur le robot**

Dans cette partie nous essayons de visualiser les Couples optimaux des actionneurs (pour un couple minimal donné égale a 0.05N), les tensions optimales des câbles et les forces cartésiennes généralisées virtuelles; pour cette simulation en utilisant l'algorithme précédant mais on génère une trajectoire circulaire et on calcule les forces cartésiennes généralisées virtuelles par :

$$F_V = M(X_r)\ddot{X}_r + N(X_r, \dot{X}_r)\dot{X}_r \quad (2.37)$$

Pour la trajectoire circulaire on essaye de générer par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x_r = R \cos(\varphi) \\ y_r = R \sin(\varphi) \end{cases} \quad (2.38)$$

Tel que :

$$\varphi = 2\pi \left[ 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right] \quad (2.39)$$

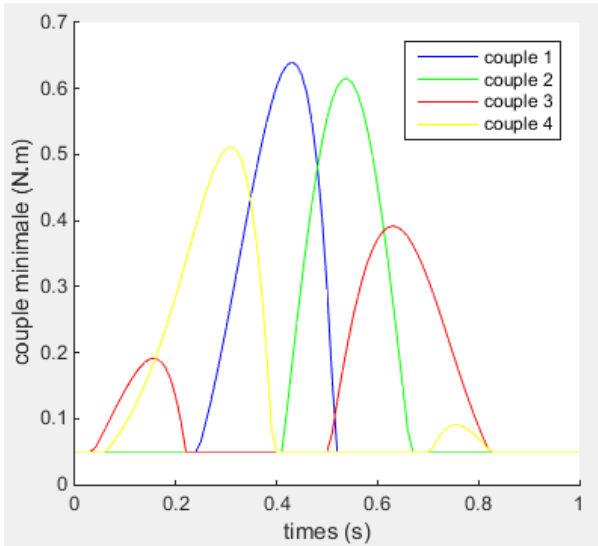
Pour cet exemple de simulation on essaye de générer un cercle du centre  $O(0,0)$  et d'un rayon  $R = 0.2165$  m et pendant un  $t_f = 1$  s.

Avec les conditions suivantes :

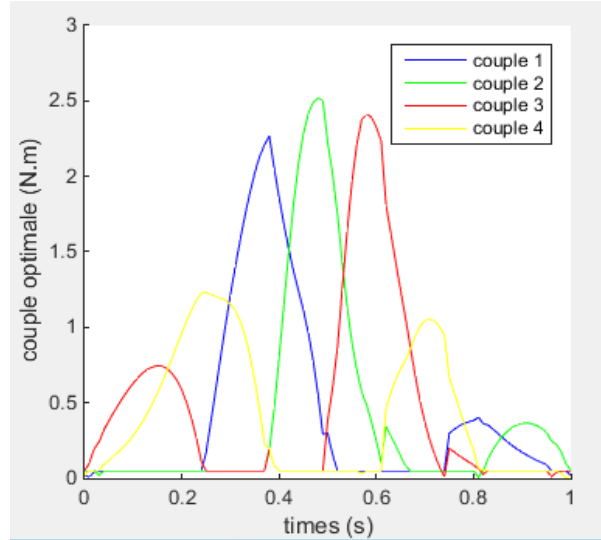
- Les inerties du rotor et de la poulie de chaque moteur  $J_i = 0.0008 \text{ kg.m}^2 \quad i = 1:4$ .
- Les coefficients d'amortissement visqueux de chaque arbre du moteur

$$C_i = 0.001 \text{ N.m.s} \quad i = 1:4$$

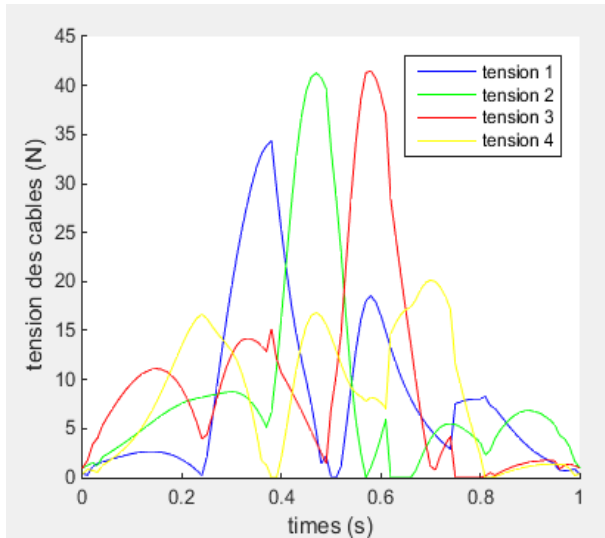
- La masse de l'organe terminale  $m = 1 \text{ kg}$ .
- Le rayon de la poulie de chaque moteur  $r_i = 0.05 \text{ m} \quad i = 1:4$ .



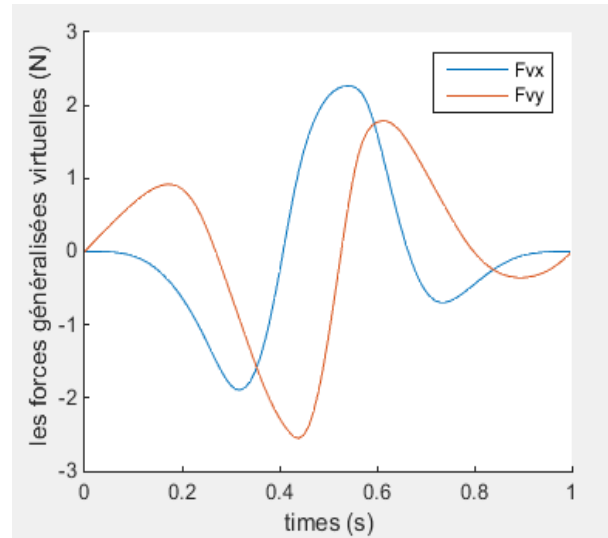
**Figure 3.10 :** Couples minimum des actionneurs.



**Figure 3.11 :** Couples optimale des actionneurs.



**Figure 3.12 :** Tension optimale des câbles.



**Figure 3.13 :** les forces cartésiennes généralisées virtuelles.

### Commentaire :

Pendant le mouvement, les quatre couples donnent des valeurs négatives dans le calcul virtuel au réel, mais ceux-ci sont limités à une valeur positive, qui est le couple minimal. Les tensions réelles des câbles associées résultantes du mouvement simulé en fonction du modèle de dynamique sont représentées dans la figure (3.11). Pour ce mouvement simulé, les composantes  $x$  et  $y$  des forces cartésiennes généralisées virtuelles sont représentées sur la figure (3.12); Ceux-ci ne sont pas limités à être positifs.

Sans l'algorithme d'estimation de la tension minimale dynamique, chaque tension convertible devient négative et donc relâchée à différents moments pendant le mouvement simulé, de toute évidence, cela est inacceptable car le contrôle serait perdu dans ces plages de mouvement. Ainsi, la spécification de tension minimale constante ne convient que pour les mouvements pseudo -statiques, pas pour les mouvements dynamiques avec des vitesses et des accélérations élevées.

# **Chapitre 3 :**

# **Commande en**

# **boucle fermée**

### 3.1 Introduction à la commande par retour d'état

La commande par retour d'état est à la commande des systèmes modélisés par leurs représentations d'état, ce que la boucle fermée est aux systèmes représentés par une fonction de transfert. L'idée consiste toujours à piloter le système par un signal de consigne et à générer automatiquement le signal de commande en confrontant en permanence la valeur de la consigne et le comportement réel du système. L'écart entre consigne et comportement réel sert de base au signal de commande du système. Dans la commande par retour d'état, nous n'allons pas mesurer le signal de sortie pour le boucler sur l'entrée, mais nous allons nous servir du vecteur d'état complet pour prendre connaissance du comportement du système.

### 3.2 Principe de la commande par retour d'état

Le principe est de déterminer une commande telle que les pôles du système bouclé soient convenablement placés dans le plan complexe et satisfasse des spécifications d'amortissement, de rapidité...

Les pôles de la fonction de transfert étant les valeurs propres de la matrice d'état, le but est donc de réaliser un asservissement modifiant convenablement la matrice d'état du système.

Soit un système décrit par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

On considère une commande linéaire du type :

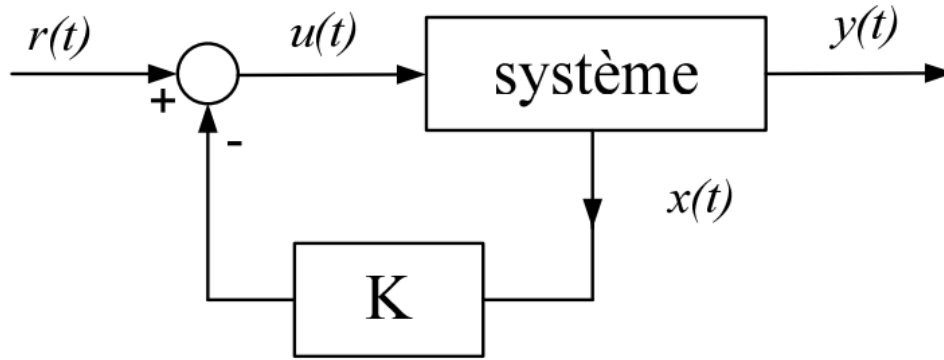
$$u(t) = r(t) - Kx(t) \quad (3.2)$$

Le signal de commande du système (autrement dit l'écart) doit être construit en soustrayant au signal de consigne un signal qui dépend du vecteur d'état. Ce vecteur d'état étant composé de  $n$  signaux  $x_1(t), x_2(t) \dots \dots \dots x_n(t)$ , on le multiplie par un vecteur ligne  $K$  appelé vecteur de gain pour pouvoir effectuer cette soustraction. On a alors :

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad k_n] \quad (3.3)$$

Et

$$u(t) = r(t) - Kx(t) = r(t) - [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.4)$$



**Figure 3.1:** Diagramme de commande par retour d'état [12].

Les équations du système en boucle fermée sont :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ u(t) = r(t) - Kx(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3.5)$$

L'équation d'état du système en boucle fermée s'écrit :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = Ax(t) + B(r(t) - Kx(t)) \quad (3.6)$$

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) - Br(t) \quad (3.7)$$

Par conséquent, la matrice d'état du système en boucle fermée vaut :

$$A_{BF} = (A - BK) \quad (3.8)$$

La dynamique du système bouclé est donc fixée par les valeurs propres de la matrice  $A_{BF}$ ; ces valeurs propres sont les racines de l'équation caractéristique, obtenu avec :

$$|\lambda I_n - A_{BF}| = 0 \quad (3.9)$$

### 3.2.1 Calcul du gain de retour d'état $K$

#### Calcul de la commande dans le cas d'un système sous forme compagne pour la commande

Soit le système défini par le triplet  $(A, B, C)$  et l'état  $x(t)$ . On suppose que le système soit commandable, c'est-à-dire Que la commandabilité de matrice ( $com = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$ ) est de rang plein ( $rang(com) = n$ ). Soit le nouvel état  $x_c(t)$  associé au système mis sous forme commandable représente par le triplet  $(A_c, B_c, C_c)$ .

L'état  $x_c(t)$  ainsi que les matrices  $(A_c, B_c, C_c)$  sont déterminées par la matrice de passage  $P_c$  [13], avec:

$$x(t) = P_c x_c(t) \quad (3.10)$$

$$A_c = P_c^{-1} A P_c B_c = P_c^{-1} B \quad C_c = C P_c \quad (3.11)$$

La loi de commande par retour d'état s'écrit donc sous la forme :

$$u(t) = r(t) - Kx(t) = r(t) - K P_c x_c(t) \quad (3.12)$$

Alors on pose :

$$K_c = K P_c \quad (3.13)$$

Où  $K_c$  est un gain du retour d'état dans la base commandable.

Une fois  $K_c$  est déterminé, un simple calcul  $K = K_c P_c^{-1}$  permet de calculer le retour d'état dans la base initiale. Dans la base commandable, les matrices  $A_c$  et  $B_c$  s'écrivent ainsi :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Où les coefficients  $a_i$ , ( $i \in [0, n - 1]$ ) sont les coefficients du polynôme caractéristique associé à la matrice  $A_c$  :

$$P_{A_c}(\lambda) = |\lambda I_n - A_c| = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (3.15)$$

La matrice dynamique du système bouclé par le retour d'état est :

$$A_c - B_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 - k_{c1} & -a_1 - k_{c2} & -a_2 - k_{c3} & \cdots & -a_{n-1} - k_{cn} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

La matrice  $A_c - B_c K_c$  est sous forme commandable, donc on peut aisément calculer le polynôme caractéristique du système en boucle fermée :

$$P_{A_c - B_c K_c}(\lambda) = |\lambda I_n - A_c + B_c K_c| = \lambda^n + (a_{n-1} + k_{cn}) \lambda^{n-1} + \cdots + (a_0 + k_{c1}) \quad (3.17)$$



Or, nous voulons placer les pôles de la boucle fermée en  $(p_1, \dots, p_n)$ . Le polynôme caractéristique de la boucle fermée est donc uniquement déterminé par le choix des pôles désirés et nous avons donc la relation suivante:

$$P_{des}(\lambda) = (\lambda - p_1)(\lambda - p_2) \cdots (\lambda - p_n) = \lambda^n + f_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + f_0 = P_{A_c - B_c K_c}(\lambda) \quad (3.18)$$

Nous déterminons donc les valeurs du gain  $K_c$  permettant d'obtenir le polynôme désiré et de placer les pôles en  $(p_1, \dots, p_n)$ :

$$\begin{cases} k_{c1} = -a_0 + f_0 \\ k_{c2} = -a_1 + f_1 \\ \vdots \\ k_{cn} = -a_{n-1} + f_{n-1} \end{cases} \quad (3.19)$$

Le gain du correcteur  $K$  dans la base initiale s'écrit alors :

$$K = [k_{c1} \quad \cdots \quad k_{cn}] P_c^{-1} \quad (3.20)$$

### 3.2.2 Calcul de la commande dans le cas général

Dans le cas général, le retour d'état peut modifier notablement la forme de la matrice d'état et le calcul n'est pas aussi simple que dans le cas de la forme compagne pour la commande. Les étapes du calcul de la commande sont alors les suivantes [13] :

1. Le calcul de la matrice  $A_{BF} = (A - BK)$ .
2. Le calcul du polynôme caractéristique de  $A_{BF}$  Il vaut  $|\lambda I_n - A_{BF}|$ .
3. L'identification du polynôme caractéristique de  $A_{BF}$  avec le polynôme caractéristique désirée :  $P_{des}(\lambda) = (\lambda - p_1)(\lambda - p_2) \cdots (\lambda - p_n)$  ( $p_1, \dots, p_n$ ) sont les pôles que l'on veut imposer.

La commande par retour d'état permet de stabiliser le système et satisfaire les contraintes dynamiques mais là n'assure pas la poursuite d'une référence pour ça on essaie de développer une autre technique pour assurer la poursuite.

### 3.2.3 Asservissement des sorties

#### Solution directe (par pré-compensateur)

Dans le cas où le système ne subit à aucune perturbation extérieure, l'objectif de la commande est d'amener le système (et notamment ses sorties) à un nouveau point d'équilibre.

Le placement des pôles permet de satisfaire les contraintes dynamiques imposées au système. Les contraintes statiques doivent être traitées séparément.

On veut que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_c \quad (3.21)$$

Les équations d'état et de sortie en régime statique s'écrivent :

$$\begin{cases} 0 = (A - BK)x(t) + Br(t) \dots \dots \dots (a) \\ y = y_c = Cx(t) \dots \dots \dots (b) \end{cases} \quad (3.22)$$

Alors de (a) de l'équation (3.22) on peut tirer l'expression de  $x$  :

$$x(t) = -[A - BK]^{-1}Br(t) \quad (3.23)$$

On remplace (3.23) dans (b) de l'équation (3.22) on trouve :

$$y_c = C(-[A - BK]^{-1}B)r(t) \quad (3.24)$$

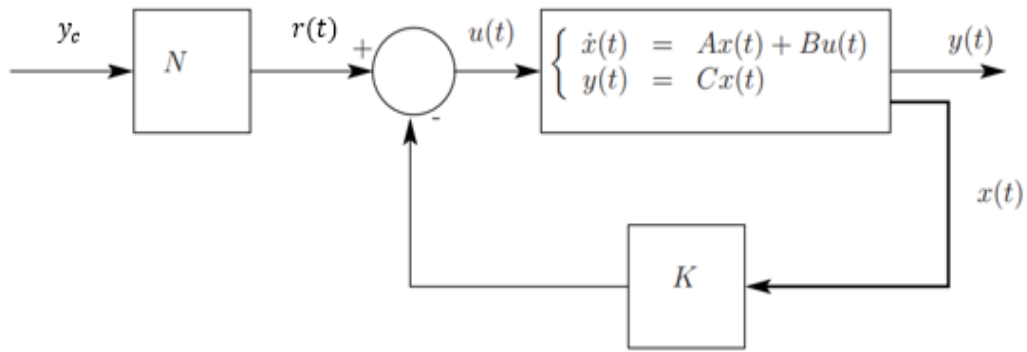
L'entrée  $r(t)$  a appliqué au système vaut donc :

$$r(t) = [C(-[A - BK]^{-1}B)]^{-1}y_c \quad (3.25)$$

On pose le pré-compensateur suivant :

$$N = [C(-[A - BK]^{-1}B)]^{-1} \quad (3.26)$$

La structure complète de l'asservissement est donnée par la figure (3.2) :



**Figure 3.2:** Diagramme de commande par retour d'état + pré-compensateur.

### Solution avec la commande intégrale

Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, la commande par retour d'état permet de modifier les pôles du système en boucle fermée. Cependant, cette dernière ne permet pas d'assurer une erreur de position nulle. Une première possibilité pour résoudre le problème et d'ajouter un gain pré-compensateur pour assurer un gain statique unitaire pour la boucle fermée. Une deuxième possibilité réside dans l'ajout d'un intégrateur dans la chaîne directe [13]. La commande intégrale est plus généralement utilisée dans le cas où des perturbations affectent l'évolution du système ; elle permet en effet de limiter l'influence de ces perturbations sur la sortie.

On considère toujours une contrainte en échelon sur la sortie  $y(t)$  du système : on veut :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_c \quad (3.27)$$

Cette consigne est considérée comme une perturbation sur la sortie du système.

On note

$$\dot{z} = y(t) - y_c \quad (3.28)$$

On veut donc  $\dot{z} = 0$  en régime statique.

La loi de commande implantée est définie par:

$$u(t) = -k_i z(t) - Kx(t) \quad (3.29)$$

C'est donc une commande par retour d'état pour le système augmenté suivant:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} y_c \quad (3.30)$$

L'objectif de la commande est double:

1. Assurer la stabilité du système augmenté (et donc plus particulièrement le système original) en boucle fermée.
2. Assurer une erreur nulle en régime permanent.

En boucle fermée on a :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -Bk_i \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t) \\ y_c \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Pour que le système augmenté tende vers un état d'équilibre il faut et il suffit que la matrice de commande  $A_{BF}$  soit stable.

$$A_{BF} = \begin{bmatrix} A - BK & -Bk_i \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Alors le calcul de  $K$  et  $k_i$  se fait par le calcul de la commande a retour d'état.

### **Application de la commande par retour d'état sur les systèmes non linéaire**

Si on considère le système non linéaire suivant :

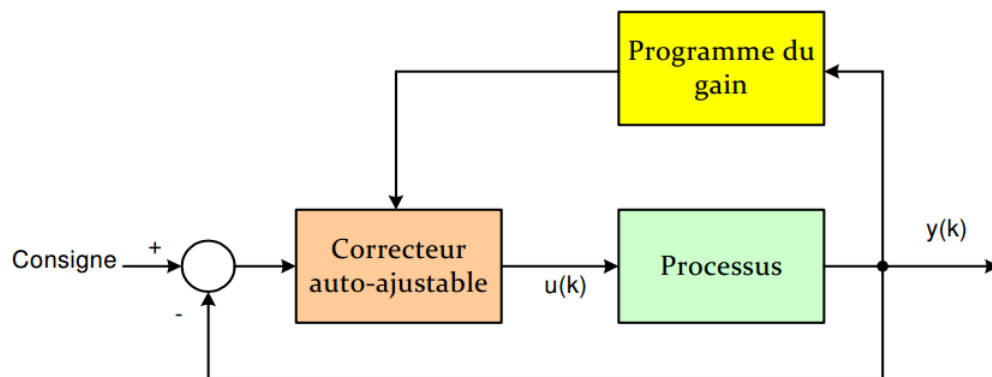
$$\dot{X}(t) = f(X) + g(X)U \quad (3.33)$$

Tel que  $f(X)$  et  $g(X)$  sont deux fonctions non linéaires.

L'application de la commande par retour d'état sur les systèmes non linéaire passe par les étapes suivant :

1. Linéarisation du système autour d'un point d'équilibre en utilisant le développement en série de Taylor.
2. Synthèses la commande par retour d'état en utilisant le modèle linéaire.
3. L'application de la commande précédant sur le système non linéaire.

Cette méthode de synthèse de commande non linéaire s'applique seulement autour du point d'équilibre; alors le domaine d'attractivité de cette commande est petit donc on peut utiliser une autre méthode de commande non linéaire par retour d'état cette méthode s'appelle la méthode de gain préprogrammé (gain scheduling contrôle) cette méthode peut s'appliquer dans n'importe quelle méthode de commande qui utilise les gains (commande par un PID), cette méthode entre dans les méthodes de commande robustes et adaptatives, la figure (3.3) montre le diagramme de commande par gain préprogrammée.



**Figure 3.3:** Diagramme de commande avec un correcteur auto ajustable basé sur le gain préprogrammé.

### 3.2.4 La commande par retour d'état du robot planaire à 4 câbles

#### Synthèse de la commande par retour d'état avec gain préprogrammé

Dans cette partie on essaie d'appliquer la commande par retour d'état à robot planaire à 4 câbles, A la lumière de ce qu'on a vu dans la partie précédant, nous faisons une synthèse d'un régulateur par retour d'état avec un gain préprogrammé car la non linéarité de notre systèmes est très compliqué et on peut utiliser le gain préprogrammée de la manière suivante :

On a vu dans la section () que la représentation d'état s'écrite sous la forme suivant :

$$\dot{X}(t) = M_{2d}^{-1}N_{2d}X(t) + M_{2d}^{-1}B_1U(t) \quad (3.34)$$

Tel que :

$$M_{2d} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{11} & 0 & M_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & M_{21} & 0 & M_{22} \end{pmatrix} N_{2d} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -N_{11} & 0 & -N_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -N_{21} & 0 & -N_{22} \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{pmatrix} X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Si on pose le changement suivant :

$$A = M_{2d}^{-1} N_{2d} \quad \text{et} \quad B = M_{2d}^{-1} B_1 \quad (3.37)$$

On peut écrire la représentation d'état comme suit:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ y(t) = CX(t) \end{cases} \quad (3.38)$$

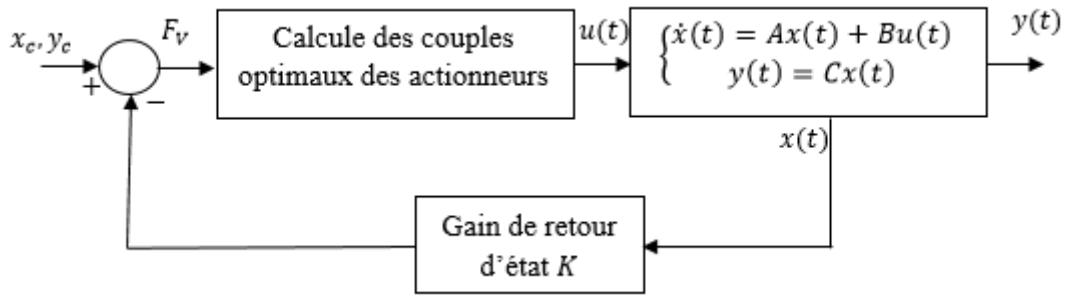
D'après l'étude dynamique du robot planaire à 4 câbles, on tire que les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont dépend du paramètre  $\theta$  ( $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4]^T$ ) qui est les angles de rotation des câbles de robot, ce paramètre dépend du temps, alors il faut que notre gain de retour d'état dépend de temps aussi pour assurer les performances dynamique de robot.

Donc le gain de retour d'état sera calculé à chaque retour pour assurer la commande non linéaire du robot planaire à 4 câbles.

### 3.3 Simulation de la commande par retour d'état

Cette commande par retour d'état avec gain préprogrammée assure la stabilité du système et l'ajoute un pré-compensateur assura l'asservissement des sorties ; aussi on ajoute un bloc qui permette de calculer les couples optimaux des actionneurs (voire la section (3.5)) pour garantir des tensions positives des câbles.

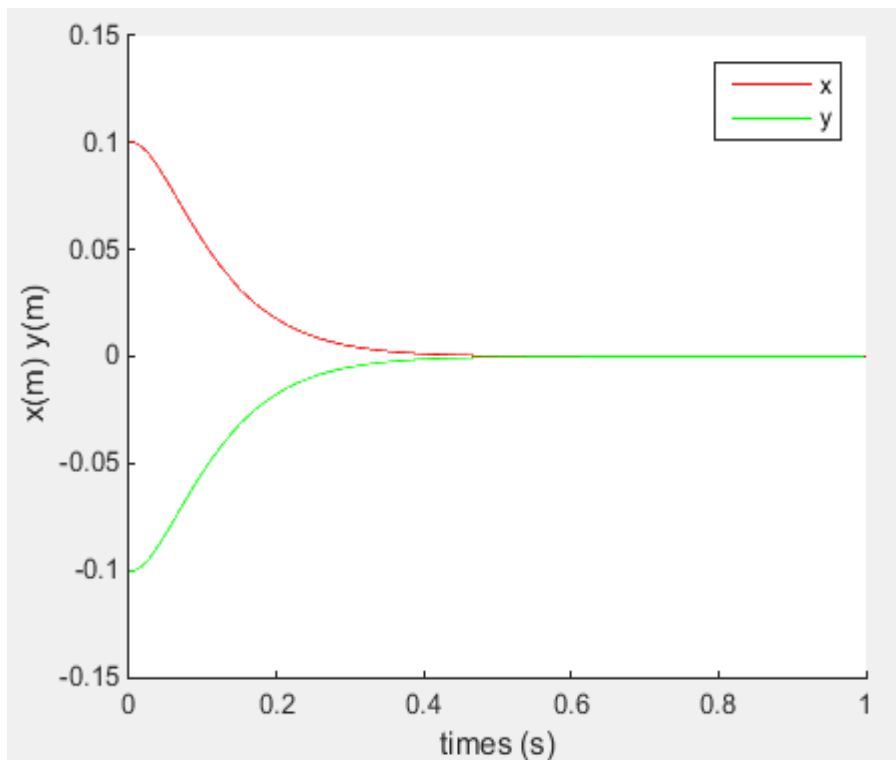
Dans ce partie on calculer le gain  $K$  (matrice  $2 \times 4$ ) par la routine de MATLAB « place » ; et nous qui imposons les pôles du système, pour voir l'influence des pôles imposés sur la dynamique du système ; la figure (3.4) donne le diagramme de commande du système :



**Figure 3.4:** diagramme de commande par retour d'état du robot planaire à 4 câbles.

Pour une première simulation on initialise le vecteur d'état par  $x = [0.1 \ 0.1 \ -0.1 \ -0.1]$ ; et les pôles qui on a imposé au système sont  $p = [-15 \ -17 \ -15 \ -17]$ ; la commande stabilisante par retour d'état dans notre cas s'écrit :

$$u(t) = -KX(t) \quad (3.39)$$



**Figure 3.5 :** La position d'effecteur a l'état stable.

On remarque que les sortie du robot sont stable donc la contrainte dynamique est assurée par la commande par retour d'état, et pour assurer les contraintes statiques (erreur statique nulle) il faut qu'on ajoute un des deux méthodes vu dans la section (4.2.4), dans notre cas on a choisir

l'ajoute d'un pré-compensateur pour asservir les sortie du robot planaire a 4 câbles la formules du pré-compensateur donnée par :

$$N = [C(-[A - BK]^{-1}B)]^{-1} \quad (4.40)$$

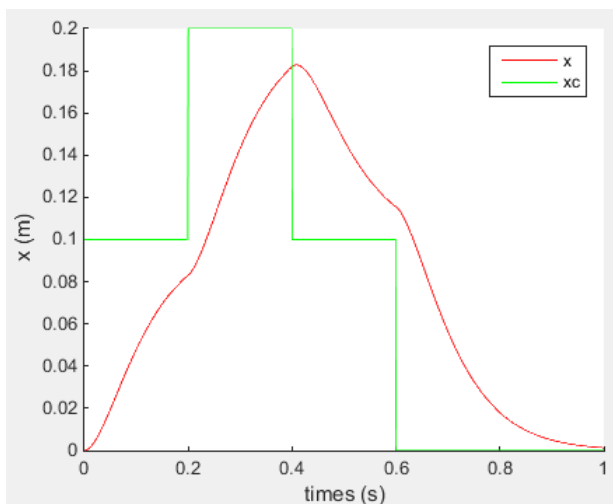
Alors la commande dans ce cas écrire par :

$$u(t) = X_c N - KX(t) \quad (4.41)$$

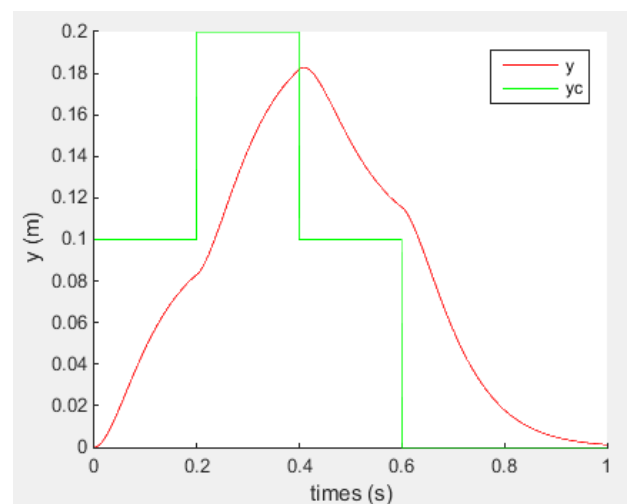
Tel que  $X_c = [x_c \ y_c]^T$  est la consigne sur la sortie du robot.

Nous faisons des simulations par des différentes pôles du système pour choisir les pôles qui donnent des performances acceptables au robot les figures (3.6), (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) (3.11) donnent les résultats de la simulation du robot :

Remarque : les figures suivantes montre l'avantage de la commande par gain préprogrammé par rapport à la commande par retour d'état

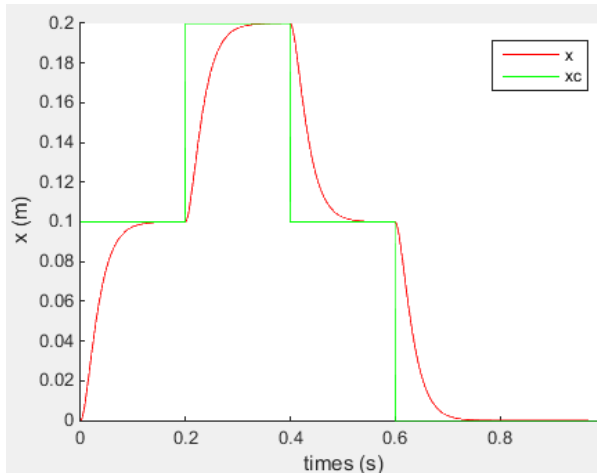


**Figure 3.6:** réponse du robot a une entre du type échelon profil de  $x$  (m) pour les pôles  $[-15 \ -17 \ -15 \ -17]$ .

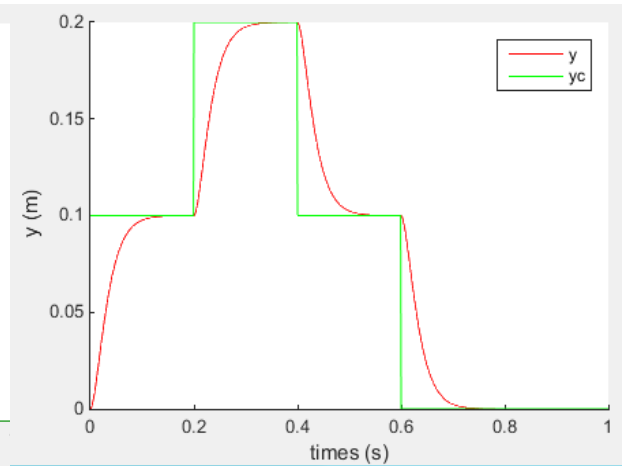


**Figure 3.7:** réponse du robot a une entre du type échelon profil de  $y$  (m) pour les pôles  $[-15 \ -17 \ -15 \ -17]$ .

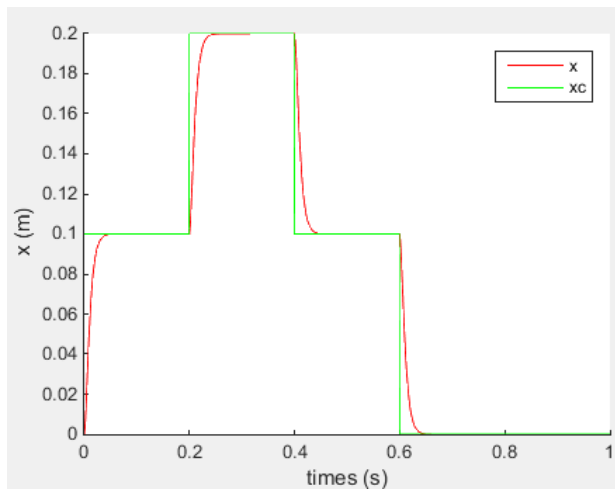




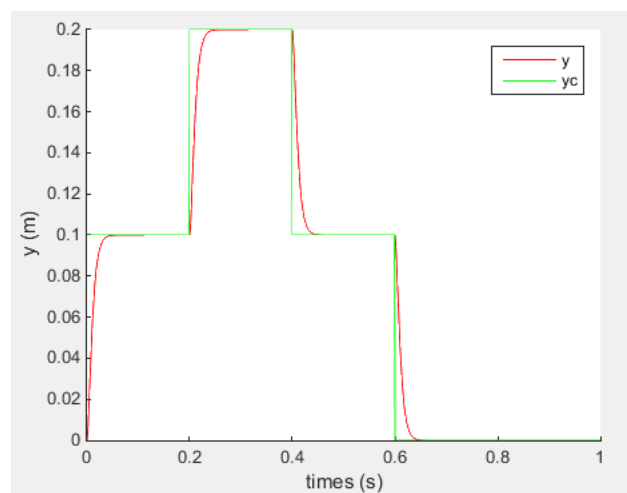
**Figure 3.8:** profil de  $x$  (m) par retour d'état pour les pôles  $[-50 \ -60 \ -50 \ -60]$ .



**Figure 3.9:** profil de  $y$  (m) par retour d'état pour les pôles  $[-50 \ -60 \ -50 \ -60]$



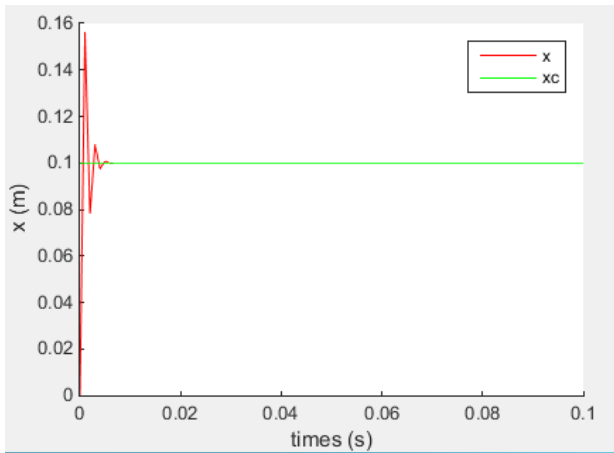
**Figure 3.10:** Profil de  $x$  (m) par retour d'état pour les pôles  $[-150 \ -170 \ -150 \ -170]$ .



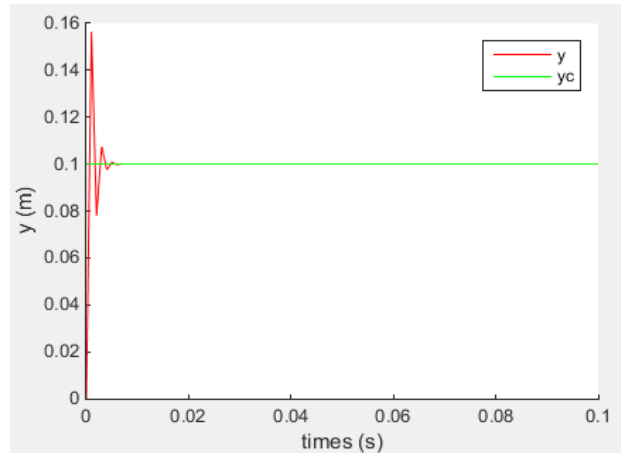
**Figure 3.11 :** Profil de  $y$  (m) par retour d'état pour les pôles  $[-150 \ -170 \ -150 \ -170]$ .

### Commentaire :

1. On remarque que les sorties du robot reste toujours stables à cause de la commande par retour d'état.
2. Le régime du robot est un régime apériodique.
3. On remarque aussi que les contraintes statiques sont satisfaisantes car dans tous les cas les sorties suivent leurs consignes sauf le 1<sup>er</sup> cas car les pôles qu'on a choisi donné un temps de réponse grand par apporte les deux autres cas, alors on peut conclure que les performances du robot (temps de réponse précisément) augmentent quand les pôles du système augmentent , mais si on utilise des valeurs des pôles trop élevés on sorte du régime apériodique et on rentre dans un régime oscillatoire.



**Figure 3.12:** profil de  $x$  (m) par retour d'état pour les pôles  $[-1000 \quad -1200 \quad -1000 \quad -1200]$



**Figure 3.13:** profil de  $y$  (m) par retour d'état pour les pôles  $[-1000 \quad -1200 \quad -1000 \quad -1200]$

Alors on peut conclure que les pôles du système doit être inclus dans le domaine  $[-100; -1500]$  car si on éloigné beaucoup de ce domaine on perde la stabilité du robot, donc on prend les valeurs propres suivantes pour la suite  $p = [-150 \quad -170 \quad -150 \quad -170]^T$ .

**1. Trajectoire de Lissajous :** les équations paramétriques sont :

$$\begin{cases} x_c = R \sin(2\varphi) \\ y_c = R \cos(\varphi) \end{cases} \quad (4.48)$$

Tel que :

$$R = 0.2 \text{ m} \quad \varphi = D * r(t) \quad t_f = 1 \text{ s} \quad D = 2\pi \quad (4.49)$$

**2. Trajectoire spirale :** les équations paramétriques sont :

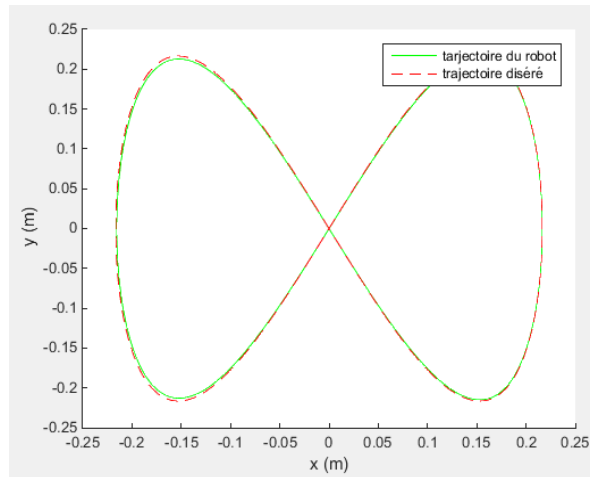
$$\begin{cases} x_c = R \sin(\varphi) \\ y_c = R \cos(\varphi) \end{cases} \quad (4.50)$$

Tel que :

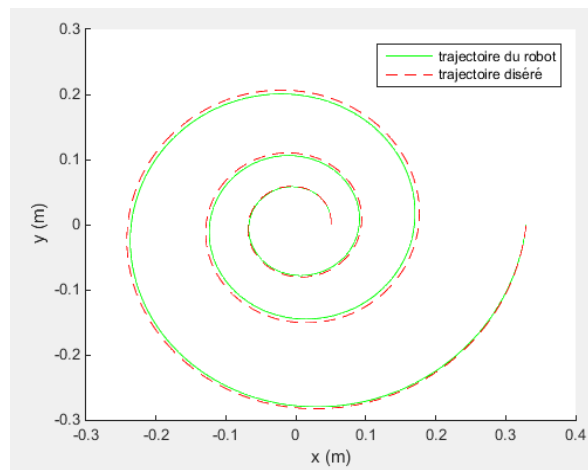
$$R = ae^{bt} \quad a = 0.05 \quad b = 0.1 \quad \varphi = D * r(t) \quad t_f = 1 \text{ s} \quad (4.51)$$

Pour cette trajectoire on prend deux cas pour  $D$  :

$$D_1 = 2\pi \quad \text{et} \quad D_2 = 6\pi$$



**Figure 3.14:** réponse par retour d'état du robot pour une trajectoire de Lissajous.



**Figure 3.15:** réponse par retour d'état du robot pour une trajectoire spirale pour une trois périodes ( $6\pi$ ) .

D'après les simulations l'effecteur de robot planaire à 4 câbles suit les trajectoires désirées donc on conclut qu'on peut appliquer la commande par retour d'état sur ces types des robots. et elle donne des bonnes résultats.

## **Conclusion général**

Au niveau de ce travail on a décrit les particularités des robots parallèles à câbles ces structures ces avantages et ces inconvénients, aussi on étudier un robot utilisé au niveau de domaine médical le robot parallèle planaire a quatre câbles commençant par la modélisation du robot puis la commande en boucle ouverte qui montre que le système est instable, donc c'est la raison pour laquelle on a appliqué le régulateur par retour d'état plus un pré compensateur pour assurer la stabilité et la poursuite.

L'optimisation des couples et utilisé pour protéger les actionneurs et pour consommer moins d'énergie.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.P. Merlet. Les robots parallèles. Hermes Science Publishing, 1997. (Cité en pages 6, 8 et 65.)
- [2] Baofu Feng, Quanfang Gai, Quanzhong Zhang, and Guangqi Cai. Development and investigation of a parallel robot with three horizontal sliders for steel snagging. In international Workshop on Intelligent Systems and Applications ISA, pages 1–4, Wuhan, China, May 2009.
- [3] Yangmin Li and Qingsong Xu. Kinematic analysis of 3-prs parallel manipulator. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 23(4):395–408, 2007
- [4] J.P. Merlet. Kinematics of the wire-driven parallel robot MARIONET using linear actuators. In IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Pasadena, 2008. (Cité en pages 9, 12, 15 et 63.)
- [5] Guilin Yang, Cong Bang Pham, and Song Huat Yeo. Workspace performance optimization of fully restrained cable-driven parallel manipulators. In Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pages 85–90, Beijing, China, October 2006
- [6] Satoshi Tadokoro, Yoshio Murao, Manfred Hiller, Rie Murata, Hideaki Kohkawa, and Toshiyuki Matsushima. A motion base with 6-dof by parallel cable drive architecture. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 7(2):115–123, 2002.
- [7] Simon Perreault and Clement M. Gosselin. Cable-driven parallel mechanisms-application to a locomotion interface. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 130(10): 1023011–8, 2008.
- [8] Guilin Yang, Wei Lin, Mustafa Shabbir Kurbanhusen, Cong Bang Pham, and Song Huat Yeo. Kinematic design of a 7-dof cable-driven humanoid arm: A solution-in-nature approach. In Proceedings of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, pages 444–449, Monterey, California, USA, July 2005.
- [9] Robert L. Williams II and Paolo Gallina. "Planar Cable-Direct-Driven Robots, Part I: Kinematics and Statics". 2001 ASME Design Technical Conferences 27th Design Automation Conference September 9-12, 2001, Pittsburgh, PA.
- [10] Wisama KHALIL, Etienne DOMBRE, Bases de la modélisation et des robots de la manipulateurs de type série commande, 2012.
- [11] Robert L. Williams II and Paolo Gallina . "Planar Cable-Direct-Driven Robots". *Journal of Robotic Systems* Vol. 37, pp. 69-96, 2003.
- [12] Merabet Boulouiha, TECHNIQUES DE COMMANDE AVANCÉE, Centre universitaire de Rélizane Ahmed Zabana. Algérie
- [13] Corinne Vachier , REPRESENTATION D'ETAT ET COMMANDE DANS L'ESPACE D'ETAT, MAITRISE EEA - IUP GEII, Université Paris XII-Val de Marne , France.