

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : Génie - Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

**PROJET DE FIN D'ETUDES**  
En Vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état

**SUJET**

\* ETUDE DYNAMIQUE DU CHASSIS

DU CAMION K 120

Par la Méthode des éléments finis

Proposé Par :

Etudié par :

Dirigé par :

Le laboratoire de  
mécanique du solide

H. BENZEKRI

M. TAZI

PROMOTION : janvier 1988

\*\*\*-- REMERCIEMENTS --\*\*\*

Je tiens à remercier vivement mon promoteur monsieur TAZI.Mohammed pour l'aide précieuse et les conseils qu'il m'a prodigué tout au long de mon étude et l'assure de ma profonde reconnaissance.

Je remercie également tous les enseignants qui ont contribué à ma formation et tout particulièrement ceux du département de Génie-Mécanique.

En fin que tous ceux qui de près ou de loin m'ont aidé à élaborer ce modeste travail trouvent à travers ces lignes l'expression de mes remerciements les plus sincères.

H.B

TABLE DES MATIERES .

Page

1/INTRODUCTION

CHAPITRE 1:GENERALITES .....	1
1.1/Description du véhicule .....	1
1.1.1/Suspension du chassis .....	1
1.1.2/Construction du chassis .....	1
1.1.3/Autres caractéristiques du camion .....	2
1.2/Intéret de l'étude dynamique .....	3
1.3/Principe du calcul dynamique .....	3
a/Système conservatif excité .....	3
b/Système dissipatif excité .....	3
1.3.1/Système dissipatif libre .....	4
1.3.2/Système dissipatif excité .....	4
a/Excitation harmonique .....	5
b/Excitation periodique .....	5
c/Excitation quelconque .....	5
1.4/La résonnance et les effets de l'amortissement ....	6
a/Amortissement critique .....	6
b/Système suramorti .....	7
c/Système sous-amorti .....	7
1.5/Méthode de travail utilisée .....	9
CHAPITRE 2:PRINCIPES GENERAUX DE LA METHODE DES ELEMENTS	
FINIS .....	10
2.1/Principe .....	10
2.2/Types d'éléments .....	10
2.3/Formulation des matrices rigidité et masse	
élémentaires. ....	11
2.3.1/Matrice rigidité élémentaire .....	11
2.3.2/Matrice masse élémentaire .....	14
2.4/Changement de repère .....	17
2.5/Assemblage .....	18
CHAPITRE 3:AMORTISSEMENT .....	20
3.1/Introduction .....	20
3.2/Rôle de l'amortissement .....	20
3.3/Sources de l'amortissement .....	20
3.3.1/Amortissement de Coulomb .....	20
3.3.2/Amortissement visqueux .....	20
3.3.3/Amortissement structural .....	21
3.4/Formulation de la matrice amortissement .....	22

CHAPITRE 4:ANALYSE DYNAMIQUE .....	25
4.1/Calcul dynamique en vibration libre .....	25
4.2/Algorithme de Jacobi .....	25
4.3/Méthode d'analyse dynamique .....	26
4.3.1/Méthode de résolution directe .....	26
4.3.2/Méthode de superposition modale .....	26
4.3.3/Principe de la méthode de superposition modale ..	27
4.4/Algorithme du de WILSON .....	27
 CHAPITRE 5:APPLICATION AU CHASSIS DE CAMION K120 .....	 29
5.1/Modélisation .....	29
5.2/Discretisation .....	29
5.2.1/Choix des noeuds .....	29
5.2.2/Numérotation .....	29
5.2.3/Masses concentrées .....	29
5.3/Caractéristiques mécaniques et géométrique du chassis modèle .....	31
5.4/Programmation .....	35
5.5/Résultats et commentaires .....	36
 CHAPITRE 6:CONCLUSION .....	 37
BIBLIOGRAPHIE .....	38
 ANNEXE / Programme et résultats .	

Notations Utilisées.



- (C) :matrice amortissement  
 c :coefficient d'amortissement.  
 E :module d'élasticité d'Young.  
 Ec :énergie cinétique  
 F(t) :vecteur sollicitation extérieure  
 Fd :force d'amortissement  
 G :module d'élasticité transversale  
 g :coefficient d'amortissement structural  
 Iy :moment d'inertie/à la direction Y  
 Iz :moment d'inertie/à la direction Z  
 J :moment d'inertie/à la direction X  
 (K) :matrice de rigidité.  
 L : longueur d'un élément.  
 m :masse ponctuelle /  
 (M) :matrice masse.  
 N :effort normal.  
 (P) :matrice de passage.  
 $\{\vec{q}\}$  :vecteur déplacement généralisé.  
 $\{\dot{q}\}$  :vecteur vitesse généralisée.  
 $\{\ddot{q}\}$  :vecteur accélération généralisée.  
 S :section  
 s :complexe.  
 t :temps/  
 Tp :période d'excitation.  
 U :énergie de déformation.  
 u(x) :fonction de déplacement.  
 $\bar{\omega}$  :pulsation d'excitation  
 w :pulsation propre du système non amorti  
 W :potentiel de déformation.  
 We ;énergie de déformation élémentaire.  
 wo :pulsation propre du système amorti.  
 X1,X2 :abscisses des noeuds.  
 (Xi) :ième vecteur propre.  
 (X) :matrice de transformation.  
 Y1,Y2 :ordonnées des noeuds.  
 Z1,Z2 :coordonnées des noeuds suivant l'axe des z.
- $\alpha^*$  :constante  
 E :déformation.  
 $\mu$  :coefficient.  
 $\alpha$  et  $\beta$  :coefficients de Rayleigh.  
 $\lambda_i$  :ième valeur propre.  
 $\delta_{ij}$  :symbole de Kronecker.  
 $\xi$  :facteur d'amortissement.  
 $\rho$  /MASSE VOLUMIQUE.

TABLE DES FIGURES .

N° FIGURE		PAGE
1.1	Vue de dessus du camion K120 .....	
1.2	Suspension du chassis .....	2
1.3	Section transversale du chassis .....	
1.4	Excitation harmonique .....	5
1.5	Excitation periodique .....	5
1.6	Excitation quelconque .....	6
1.7	Réponse en oscillation libre en présence d'un amortissement critique .....	6
1.8	Réponse en oscillation libre d'un système sous amorti . .....	7
1.9	Variation du F.A dynamique en fonction de l'- amortissement et de la fréquence. ....	8
3.1	Courbe de réponse en fréquence pour un système modérément amorti. ....	21
5.1	Représentation d'une charge répartie .....	29
5.2	Représentation d'une charge concentrée .....	30
5.3	Section transversale d'un élément poutre .....	30
5.4	Modélisation du chassis du camion K120 en éléments finis:poutre. ....	31

---TABLEAUX---

5.1	Coordonnées et masses concentrées des noeuds ....	33
5.2	Moments d'inerties et sections des éléments du chassis .....	34

## I/INTRODUCTION

Toute structure caractérisée par une masse et une élasticité effectue des mouvements sous l'effet des efforts produits par des charges variant rapidement avec le temps.

Ces efforts peuvent résulter par exemple, des accélérations des organes constituant le moteur. Ces organes, animés de mouvements alternatifs subissent des accélérations périodiques qui sont la des forces alternatives causant les vibrations.

Ces vibrations pour un véhicule se présentent généralement sous différentes formes parmi lesquelles on citera:  
les vibrations dues au moteur en tant qu'ensemble, les vibrations dues aux irrégularités de la route etc...

Les vibrations peuvent être nuisibles aux modes de fonctionnement de ces structures comme à la résistance des différents organes mécaniques (par exemple: rupture des organes de liaison du moteur, fissuration ou déformation etc...).

Le châssis qui un de ces éléments mécaniques et de par les charges importantes qu'il aura à supporter sera l'un des éléments qui devra être construit de façon fiable.

A cet effet des études ont été faites ultérieurement au niveau de l'école et pour les besoins de la S.N.V.I de ROUIBA afin de remédier à ces problèmes de vibrations.

Une première étude statique a été faite dans le but de calculer les répartitions des contraintes pour un dimensionnement rigoureux et optimum suivie d'une étude dynamique qui avait elle pour but, la détermination des modes propres de vibration du châssis en vibrations libres non amorties.

Notre étude à nous sera une suite à l'étude déjà faite mais qui se prête le mieux à la réalité, en étudiant un système dissipatif soumis à des excitations extérieures.

Ce système étant excité par une force de fréquence donnée risque de produire un phénomène de résonance qui est dangereux pour la structure.

Notre étude à nous se propose donc de calculer les modes propres du châssis de camion K120 construit par la S.N.V.I de ROUIBA et de s'éloigner du domaine des fréquences de résonance.

De nombreuses méthodes ont été élaborées pour effectuer le calcul des structures, mais la plus puissante d'entre elles est sans conteste la méthode des éléments finis.  
Elle est la plus générale et la plus efficace dans l'analyse (des) des structures de grandes dimensions.

Elle permet aussi de calculer les modes propres des  
différentes structures en considérant tous les degrés  
de liberté qui les constituent.

## CHAPITRE 1: GENERALITES

### 1.1/Description du véhicule

C'est un camion destiné au transport de matière "en sac pour les moyens trajets ayant les spécifications suivantes:

- Poids du châssis et cabine en ordre de marche\_\_\_\_\_4000Kg
- Charge totale:charge utile+(carrosserie,conducteur,roue de secours)est de\_\_\_\_\_8000Kg
- Poids total autorisé en charge du véhicule isolé:
  - maximum sur avant\_\_\_\_\_4200Kg
  - 1200Kg< maximum sur arrière\_\_\_\_\_8400Kg

Les organes du camion qui influent sur le châssis du point de vue charge sont:

- Le moteur du type F6L912 dont les caractéristiques sont
  - \*Puissance=110(ch.dynes)
  - \*Vitesse=2800(tr/mn)
  - \*Couple=33(m.dan)
- La boîte à vitesse est du type BXSL,le poids de la boîte à vitesse et le moteur assemblés avec les huiles\_\_\_\_\_640Kg
- La cabine est fixée sur le châssis avec 4 supports son poids est de\_\_\_\_\_480Kg
- Le poids de la roue de secours est de\_\_\_\_\_120Kg
- Le plateau est fixé sur les deux longerons du châssis, sa charge qui est répartie sur les longerons est de\_\_\_\_\_558Kg
- Le poids du réservoir à combustible avec le combustible-165Kg
- Le poids du coffre à batterie et du réservoir à air\_\_\_\_\_90Kg
- Le poids du conducteur et passagers est estimé à\_\_\_\_\_300Kg

#### 1.1.1/Suspension du châssis

La suspension du châssis est faite avec des ressorts à lames disposés longitudinalement,assemblés rigidement à l'essieu,et articulés au châssis à chaque extrémité;une des articulations est à jumelle et permet leurs libre déformation.Les lames travaillent à la flexion et au flambage dans leurs parties avant tandit qu'à l'arriere,elles ont une tendance au baillement.  
(voir Fig.1.2 )

#### 1.1.2/Construction du châssis

Le châssis à étudier est de conception structurale simple,il est constitué par deux longerons en tole d'acier doux laminés à chaud embouties en forme de U.

Les deux longerons sont reliés par huit traverses en tole d'acier doux,laminés à chaud;la liaison entre les longerons et les

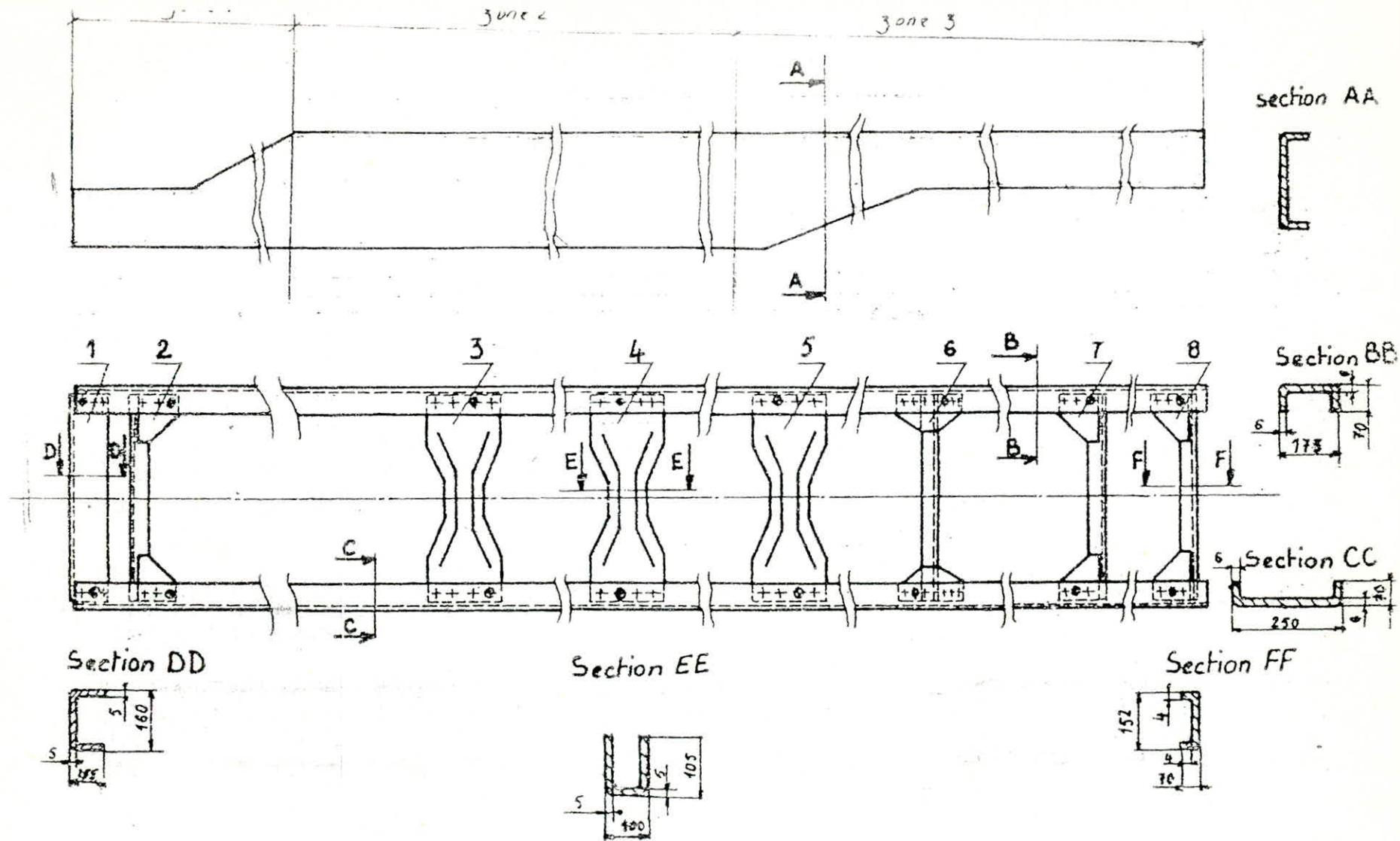


Fig (I3) : Section transversale du chassis

traverses est rigide, assurée par rivetage (Fig: I.3).

### 1.1.3/Autres caracteristiques du camion

\*\*Essieu Avant du type E 4 A2

\*\*Pont arriere type 821 B

type banjo a simple réduction par couple conique, à denture hypoidé et réducteur dans les roues.

\*\*Direction -type D80 1100

direction à gauche, vis et écrou oscillant, à déplacement sur bille. Rayon de braquage:

	N	L	EL
Hors-tout	7.10	8.1	9.15
Entre trottoire	6.45	7.45	8.50

Sur demande: Direction assistée

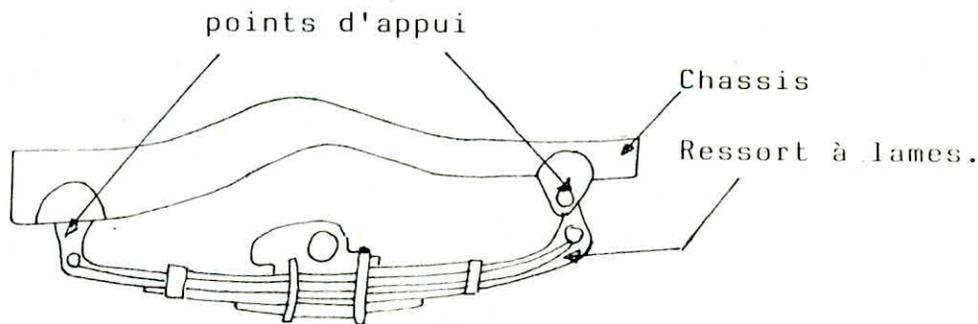
\*\*Freinage:Frein principal:Commande pneumatique assistée conforme aux modalités nationales.

Deux circuits indépendants agissant,

-L'un sur roues AV

-L'autre sur roues AR

Deux cylindres de frein par essieux-deux reservoirs d'air de 30 litres.



( Fig : I.2 ) :Suspension du chassis

### 1.2/Interêt de l'étude dynamique

Pratiquement n'importe quelle structure est susceptible de subir pendant sa durée de vie un changement dynamique sous une forme ou une autre.

En général, à une étude statique succède forcément une étude dynamique et ceci pour deux importantes raisons:

a/De par la nature évolutive du problème dynamique dans le temps (ie: la charge et la réponse varient avec le temps) il est évident qu'un problème dynamique n'a pas qu'un résultat; il faut en effet déterminer une succession de résultats correspondants à tous les instants qui présentent un intérêt dans l'histoire de la réponse.

b/La structure étant chargée par  $p(t)$  appliquée dynamiquement, les déplacements de la structure correspondent à des accélérations qui produisent des forces d'inertie opposées à ces mêmes accélérations. Les contraintes internes de la structure considérée (efforts tranchants, moments fléchissants) doivent équilibrer non seulement la force externe appliquée mais aussi les forces d'inertie qui résultent des accélérations de cette structure.

Ces deux caractères ainsi énoncés constituent les caractéristiques distinctives les plus importantes du problème dynamique des structures.

### 1.3/Principe du calcul dynamique

Le problème de la dynamique se ramène à la résolution des équations régissant les vibrations d'une structure à plusieurs degrés de liberté, en régime forcé et qui sont données par:

a/Système conservatif excité:

C'est le cas où l'amortissement n'est pas considéré ( $C=0$ ).  
les équations qui régissent ce système sont données par:

$$(M)\{\ddot{q}\} + (K)\{q\} = F(t) \tag{1.1}$$

b/Système dissipatif excité

Cette fois on prend en considération l'amortissement ( $C \neq 0$ ).  
Dans ce cas les équations s'écrivent:

$$(M)\{\ddot{q}\} + (C)\{\dot{q}\} + (K)\{q\} = F(t) \tag{1.2}$$

- (M):matrice masse
- (C):matrice amortissement
- (K):matrice rigidité

Le cas de notre étude se limitera à l'étude des systèmes excités amorties.

### 1.3.1/Système dissipatif libre

Dans ce cas la force excitatrice est nulle(  $F(t)=0$  ).  
L'équation (1.2) devient alors:

$$(M)\ddot{q}+(C)\dot{q}+(K)q=0. \quad (1.3)$$

En supposant que le mouvement est harmonique on peut écrire que:

$$\begin{aligned} (q) &= (X)e^{st} \\ \text{il s'en suit: } (\dot{q}) &= s(X)e^{st} \\ (\ddot{q}) &= s^2(X)e^{st} \end{aligned} \quad s: \text{etant un complexe.}$$

En remplaçant le vecteur (q) et ses dérivées dans l'équation(1.2) on trouve:

$$((M)s^2+(C)s+(K)s)(X)=0 \quad (1.4)$$

La résolution de cette équation constitue un problème de valeurs propres.

#### \*Determination des valeurs propres

Il existe autant de valeurs propres que de degrés de liberté, qui satisfont à l'équation(1.4). Si les matrices sont définies positives, les valeurs propres sont positives et nous pouvons les ordonner dans l'ordre croissant ou décroissant.

Il n'existe des vecteurs (X) non nuls qui satisfont à (1.4) que si:

$$((M)s^2+(C)s+(K)) \text{ est singulière (c à d) } \det((M)s^2+(C)s+(K))=0$$

cette expression est un polynome caractéristique d'ordre n, qu'il est difficile de construire explicitement pour de grands systèmes. La recherche des valeurs propres revient à chercher les racines du polynome d'ordre n. Pour cela on utilisera une des méthodes de résolution numérique.

#### \*Determination des vecteurs propres

A chaque valeur de  $\lambda_i$  correspond un vecteur propre  $(X_i)$  solution de

$$((M)s^2+(C)s+(K))(X_i)=0 \quad (15)$$

Les vecteurs propres satisfont les relations d'orthogonalité suivantes:

$$\begin{aligned} \langle X_i \rangle (K) (X_j) &= \lambda_i \delta_{ij} \\ \langle X_i \rangle (M) (X_j) &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (16)$$

Ce calcul a déjà fait l'objet d'une étude précédente pour  $C=0$

### 1.3.2/Système dissipatif excité

Cette fois on considère que la force excitatrice  $F(t) \neq 0$  et l'équation régissant son mouvement est l'équation (1.2).

On peut exciter le système de différentes manières et entre autre par:

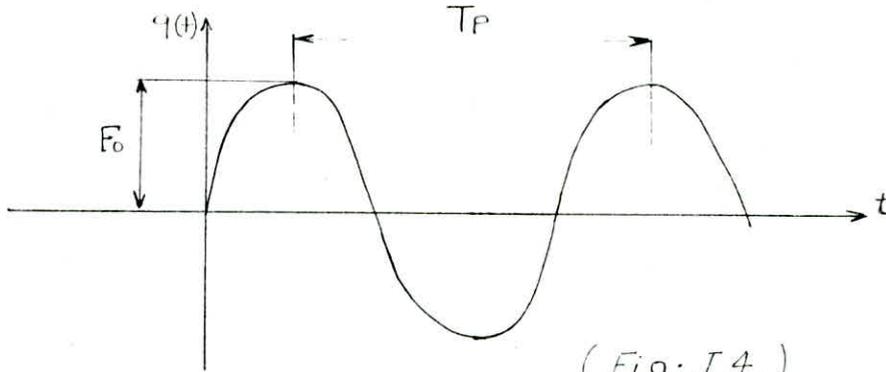
a/Excitation harmonique (Fig: I.4 ).

C'est une excitation sinusoidale et l'équation du mouvement s'écrit alors:

$$(M)\ddot{q} + (C)\dot{q} + (K)q = F_0 \sin(\bar{\omega}t)$$

avec:  $\bar{\omega}$  = fréquence d'excitation

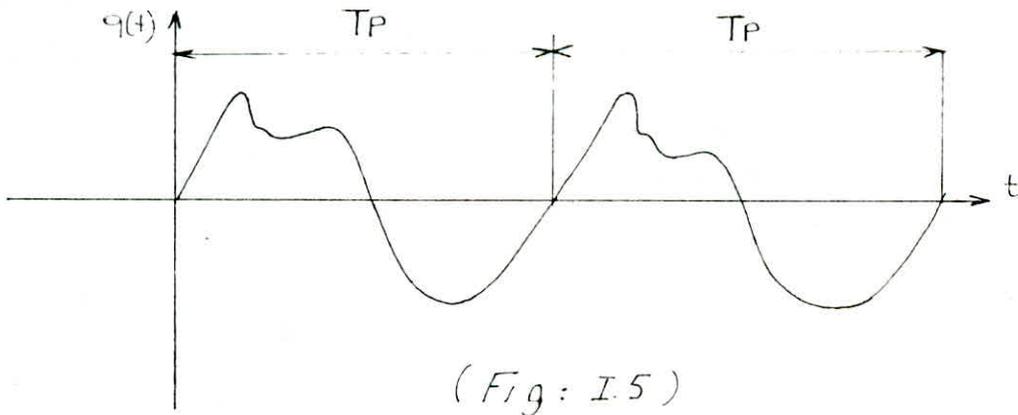
$F_0$  = amplitude maximale d'excitation



$T_P$  = période d'excitation;  $T_P = 2 \times 3.14 / \bar{\omega}$ ;

b/Excitation périodique (Fig: I.5 )

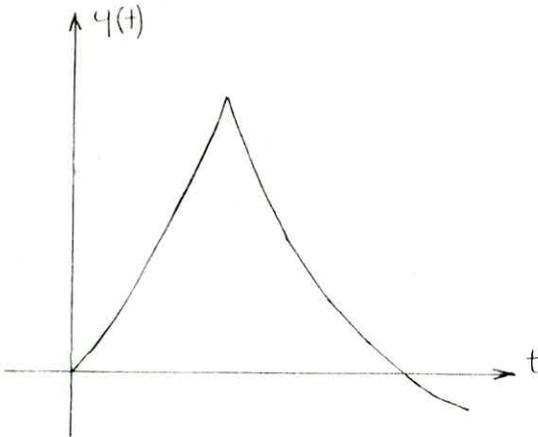
Les excitations périodiques sont constituées de charges répétitives qui conservent la même évolution dans le temps sur un grand nombre de cycles. Ces charges peuvent être représentées sous forme d'une superposition d'harmoniques simples à l'aide de l'analyse de Fourier.



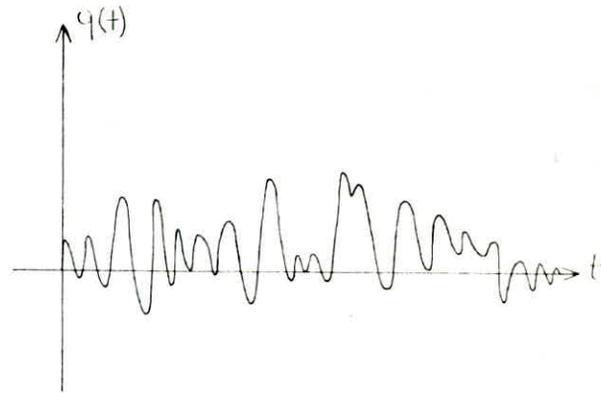
c/Excitation quelconque (Fig: I.6 )

les chargements aperiodes sont soit des impulsions de courte durée, soit des chargements de longue durée et de forme quelconque. Pour les efforts de courte durée, on peut utiliser des formes d'analyse simplifiées; en revanche un chargement quelconque de longue durée ne peut être traité que par des méthodes

d'analyse dynamique complètement générales (voir Figs : 1.6.a-b).



(fig: I.6.a)  
"impulsive"



(fig: I.6.b)  
"de longue durée"

#### 1.4/La résonance et les effets de l'amortissement

Le phénomène de résonance se produit lorsque le rapport entre la fréquence d'excitation et la fréquence propre du système tend vers l'unité.

La valeur infinie que prend à ce moment l'amplitude de vibrations forcées indique que si la force intermitente agit toujours sur le chassis en vibration, à des époques déterminées, et dans une direction donnée, l'amplitude des vibrations croit indéfiniment lorsqu'il n'existe aucune cause d'amortissement.

On distingue en général trois sortes d'amortissement:

##### a/Amortissement Critique ( $C=C_c$ )

On peut définir l'amortissement critique comme la valeur minimum de l'amortissement pour laquelle aucune oscillation libre ne franchit la configuration du système au repos.

Pour un système du premier degré, la valeur de la constante de l'amortissement critique est donnée par:  $C_c = 2m\omega$

$\omega$  = fréquence propre du système non amorti

La réponse dans ce cas d'amortissement ne comporte aucune oscillation autour de la position de déplacement nul, mais tend vers la position zéro en raison du terme de décroissance exponentielle. (voir fig: 1.7).

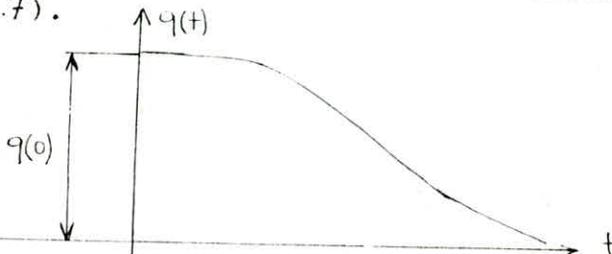


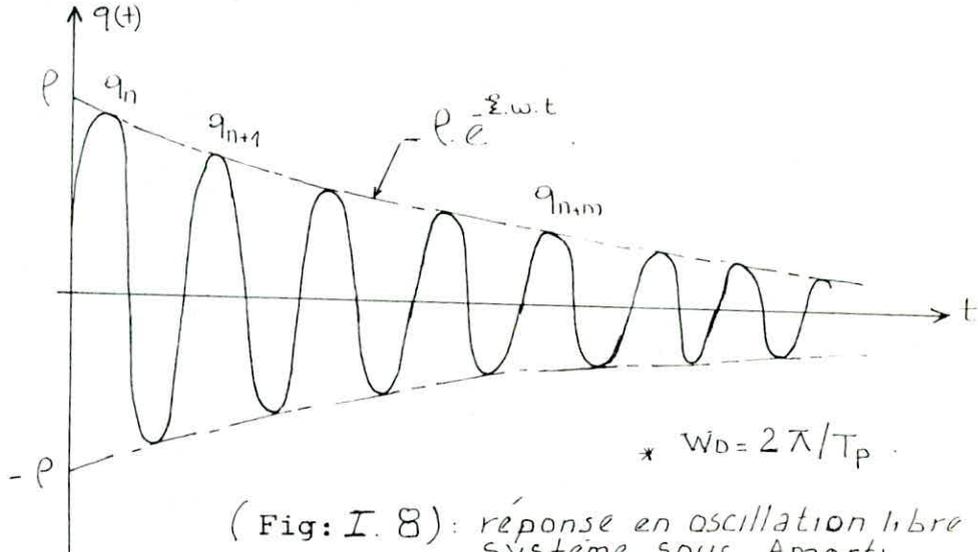
Fig: I.7: Réponse en oscillation libre en présence d'un amortissement critique.

b/Système suramorti(ou amortissement fort:  $C > C_c$  ).

Ce genre d'amortissement ne se rencontre que très rarement dans les structures. La réponse à ce système est analogue à celle de l'amortissement critique sauf que le retour à la position neutre est plus lent en raison du facteur d'amortissement plus important.

c/Système sous amorti(amortissement faible  $C < C_c$  ).

Ce sont les systèmes les plus répandus dans les structures. Ce système oscille de part et d'autre de la position neutre à la pseudo-fréquence circulaire constante  $\omega_D$  comme indiqué sur la figure qui suit (Fig: I.8).



Les caractéristiques réelles d'amortissement des structures sont très complexes et délicates à déterminer. Il est cependant courant d'exprimer l'amortissement de ce système au moyen de facteurs d'amortissement visqueux équivalent qui présentent des caractéristiques de décroissance comparable au cas d'oscillations libres.

$$\xi = C/C_c = C/2m\omega \tag{1.7}$$

On définit aussi le décrément logarithmique:

$$\delta = \ln(V_n/V_{n+1}) = 2\pi\xi \left( \frac{\omega}{\omega_D} \right) = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{1.8}$$

( $\omega_D = \omega \sqrt{1-\xi^2}$ ).

Pour les systèmes peu amortis, une meilleure précision peut être obtenue en utilisant des pics séparés par plusieurs cycles, m cycles par exemple, dans ce cas on aura:

$$\delta_m = \ln(V_n/V_{n+m}) = \frac{2m\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \approx 2m\pi\xi \tag{1.9}$$

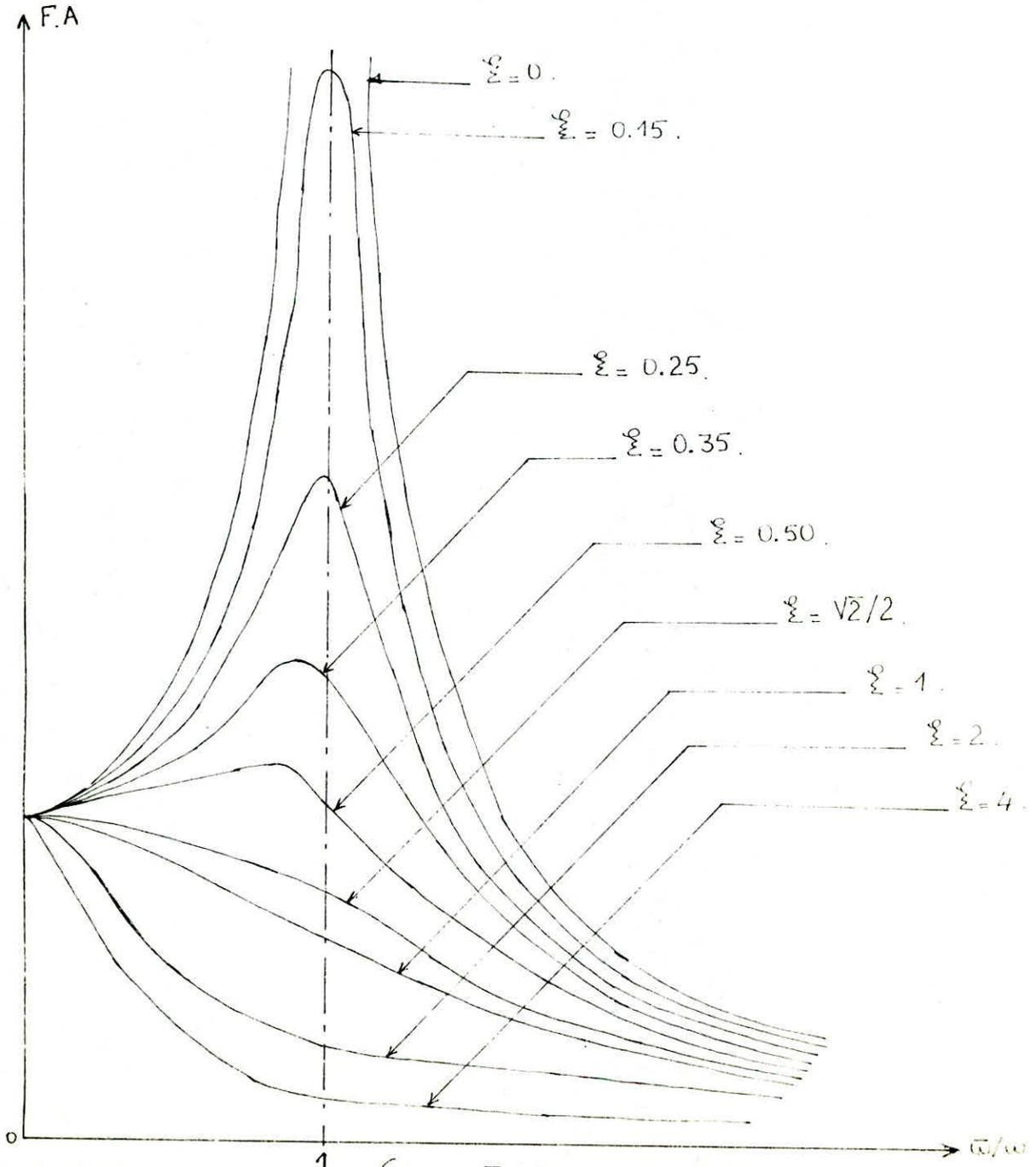
( $\omega_D \approx \omega$ )

La fig: I9 représente le facteur d'amplification (F.A) en fonction du rapport de fréquence ( $\bar{\omega}/\omega$ ) et pour différentes valeurs du facteur d'amortissement

Le facteur d'amplification étant le rapport de l'amplitude de la réponse en mouvement permanent et du déplacement statique qui serait produit par une force appliquée statiquement.

Pour l'exemple d'un système à un seul degré de liberté le facteur d'amplification est définie comme suit/

$$F.A = 1 / \left[ (1 - \bar{\omega}/\bar{\omega})^2 + (2\xi\bar{\omega}/\bar{\omega})^2 \right]^{1/2} \quad (1.10)$$



(Fig: I9): Variation du F.A dynamique en fonction de L'amortissement et de la fréquence.

Remarques sur les courbes de résonance de la fig: I.9 .

\*Quand la fréquence excitatrice est très faible, l'amplitude de la structure est très peu différente de l'élongation statique.

\*Pour  $\bar{\omega}$  (pulsation de l'excitation) =  $\omega$  (pulsation propre):  
=S'il n'y a pas d'amortissement, le maximum d'amplitude tend vers l'infini. C'est le phénomène de résonance avec toutes les conséquences qu'il peut entraîner.

=En présence d'amortissement, l'amplitude est d'autant plus réduite que  $\xi$  est grand, et la résonance se produit pour des fréquences d'excitation inférieures à la fréquence propre du système non amorti. A partir de  $\xi = \sqrt{2}/2$ , il y a disparition du pic de résonance.

=Pour des fréquences d'excitation très supérieures à la fréquence propre du système, l'amplitude de la vibration forcée est très faible.

En résumé on peut dire que dans les problèmes d'ordre pratique, les systèmes sont toujours sous amortis et les effets les plus importants de l'amortissement qu'on peut citer sont:

\*La décroissance exponentielle avec le temps de l'amplitude de vibration.

\*La fréquence angulaire du mouvement se trouve réduite et donc minimise les effets de la résonance.

### 1.5/Méthode de travail utilisée

L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères. Pour donner ces projets, l'ingénieur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement des structures complexes et prévoir l'influence de ces décisions au moment de la conception. La méthode des éléments finis est la méthode la plus utilisée aujourd'hui pour la résolution et l'analyse de nombreuses structures et nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique et elle repose sur les deux formulations qui suivent:

=Formulation énergétique de la mécanique des structures qu'on verra au chapitre suivant, et avec laquelle on pourra calculer les matrices rigidité, masse et amortissement.

=Les méthodes d'approximation qui permettent une discrétisation du milieu qui est l'étape importante de la méthode des éléments finis car c'est sur elle que repose d'appréciables résultats.

## CHAPITRE 2: PRINCIPES GENERAUX DE LA M.E.F

### 2.1/PRINCIPE

La M.E.F est une méthode qui utilise des techniques d'approximation grâce auxquelles nous pouvons remplacer une structure continue par une structure discrétisée équivalente.

Les structures continues sont représentées comme des structures composées d'éléments indépendants définis uniquement par des noeuds.

Chaque élément ainsi obtenu aura ses propres fonctions pour décrire son comportement. L'assemblage représentera au mieux le comportement de toute la structure.

Aussi chaque fonction choisie devra assurer la continuité des comportements dans l'ensemble du milieu continu discrétisé.

La théorie du calcul des structures élastiques débouche sur deux approches différentes:

2.1.1/La méthode des forces qui consiste à effectuer des coupures dans l'élément de manière à la rendre isostatique, puis à déterminer les forces nécessaires pour rétablir la continuité. Cette méthode dans le cas des poutres continues se ramène à une série d'équations dites "équations des trois moments".

2.1.2/La méthode des déplacements qui prend comme inconnues les déplacements d'un certain nombre de points de la poutre et détermine les valeurs de ces déplacements de façon à réaliser l'équilibre de l'ensemble.

Cette méthode permet plus facilement de prendre en compte les diverses particularités de la structure, même si dans certains cas particuliers la méthode des forces est plus efficace.

Elle est utilisée par la majorité des ouvrages qui traitent de méthode des éléments finis, de ce fait on choisira cette formulation pour le cas de notre étude.

Après décomposition de notre structure en un certain nombre d'éléments suivant un maillage adéquat, nous considérons les déplacements aux noeuds de ce maillage comme inconnus du problème et nous approchons au sein de chaque élément le champ de déplacement par des fonctions d'interpolation aussi simples que possible assurant ainsi la continuité des déplacements généralisés qui permettent d'effectuer l'étape d'assemblage et de résolution. Pour la résolution la M.E.F fait appel à des méthodes numériques pour surmonter les problèmes des calculs complexes.

### 2.2/TYPES D'ELEMENTS

La discrétisation des structures se fait en éléments de différents types:

=L'élément poutre qui est à une seule dimension.

=L'élément plaque(triangulaire ou rectangulaire)à 2 dimensions

=L'élément solide à trois dimensions

Notre cas se limite à l'élément poutre qui est le plus approprié à la structure étudiée et qui est le chassis de camion K120.

### 2.3/FORMULATION DES MATRICES RIGIDITE ET MASSE ELEMENTAIRES.

#### 2.3.1/Matrice rigidité élémentaire

On appelle matrice rigidité d'une structure, la matrice(K) qui permet d'exprimer l'énergie de déformation sous une forme quadratique des déplacements nodaux.

$$U = (1/2) \{q\}^T (K) \{q\}. \tag{2.1}$$

avec  $\{q\}$  : vecteur déplacement nodal  
 $\{q\}^T$  : vecteur transposé de  $\{q\}$ .

La matrice rigidité peut être obtenue à partir de l'énergie de déformation. L'énergie de déformation est donnée par:

$$(2.2) \quad U = \int_V W \cdot dv \quad \text{avec } W = \text{potentiel de déformation} \\ dv = \text{élément de volume}$$

Le potentiel de déformation est donné par:

$$(2.3) \quad W = (1/2) \sigma \cdot \epsilon \quad \text{avec } \sigma = \text{contrainte} \\ \epsilon = \text{déformation.}$$

D'après la loi de HOOKE on a:  $\sigma = E \cdot \epsilon$  (2.4)

La relation entre la déformation  $\epsilon$  et le déplacement  $u(x)$  est a/cas de problème d'élasticité plane:

$$\epsilon = \frac{\partial u(x)}{\partial x} \tag{2.5}$$

b/cas de problème de flexion

$$\epsilon = \left( \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \right) \tag{2.6}$$

Après détermination de l'énergie de déformation, on détermine le vecteur charge nodale en fonction du déplacement nodal en utilisant le 2<sup>ème</sup> théorème de Castigliano à savoir:

$$\left( \frac{\partial U}{\partial q} \right) = Q = (K) \{q\}. \tag{2.7}$$

On obtient ainsi la matrice rigidité.

Pour une étude complète et générale, on considèrera 12 degrés de libertes pour chaque élément(6 par noeud). La matrice élémentaire (K) sera donc de dimension(12\*12). A partir des hypothèses de base on calculera la matrice rigidité pour chaque cas de sollicitation suivantes:

- \*Traction-Compression.....\*Torsion autour de OX
- \*Flexion autour de OY.....\*Flexion autour de OZ.

2.3.1.1/Matrice rigidité élémentaire en traction-compression.  
 En considérant que L est la longueur de la poutre, F1 et F2 les sollicitations aux noeuds 1 et 2 respectivement, u1 et u2 les déplacements correspondants, la matrice rigidité s'écrit comme suit:

$$K_e = ES/L \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3.1.2/Matrice rigidité élémentaire en torsion  
 De manière analogue au cas de traction-compression, on obtient pour la matrice rigidité élémentaire en torsion:

$$K_t = GJ/2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

J = moment d'inertie polaire.

2.3.1.3/Matrice rigidité élémentaire en flexion autour de OZ

En passant par une suite d'étapes de calculs et qui sont:

\*Choix de la fonction déplacement

\*Conditions aux limites

\*Relations entre déplacement et déformation

On trouve la matrice rigidité égale à:

$$K_z = EI_z/L^3 \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix}$$

2.3.1.4/Matrice rigidité élémentaire en flexion autour de OY.

En procédant de la même manière que dans le cas de flexion dans le plan xoy, on trouve l'expression de Ky égale à:

$$K_y = EI_y/L^3 \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix}$$

2.3.1.5/Matrice de rigidité élémentaire générale de l'élément.

L'expression de l'énergie de déformation totale est la somme des énergies élémentaires des quatre cas de sollicitations citées, soit:

$$U = (1/2) \{q\}^T (K) \{q\} = (1/2) \left\{ \{q_e\}^T (K_e) \{q_e\} + \{q_t\}^T (K_t) \{q_t\} + \{q_z\}^T (K_z) \{q_z\} + \{q_y\}^T (K_y) \{q_y\} \right\}$$

$$U = (1/2) (q_e \ q_z \ q_y \ q_t) \begin{pmatrix} K_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_e \\ q_z \\ q_y \\ q_t \end{pmatrix} \quad (2.8).$$



2.3.2/Matrice masse élémentaire .

La matrice masse élémentaire, permet d'écrire l'énergie cinétique sous la forme quadratique des vitesses aux noeuds.

$$E_c = (1/2) \{ \dot{q} \}^T (M) \{ \dot{q} \}. \quad (2.9).$$

Avec  $\{ \dot{q} \}$ : vecteur vitesse au noeud.  
 (M): matrice masse élémentaire.

La matrice masse (M) peut être obtenue à partir de l'énergie cinétique. L'énergie cinétique est donnée par:

$$E_c = (1/2) \rho \int_V (\dot{u}(x))^T (\dot{u}(x)) dv. \quad (2.10)$$

Avec:  $u(x)$ : fonction de déplacement :  
 $u(x) = (A) \{ q \} \quad (2.11)$

en remplaçant (2.11) dans l'expression (2.10) on obtient:

$$E_c = (1/2) \rho \cdot S \{ \dot{q} \}^T \left[ \int_0^L (A)^T (A) dx \right] \{ \dot{q} \} \quad (2.12)$$

Par analogie avec l'expression (2.9), on obtient:

$$(M) = \rho \cdot S \int_0^L (A)^T (A) dx. \quad (2.13)$$

On calculera les matrices masses pour chaque cas de sollicitation énoncées pour la matrice rigidité càd :

- \*Traction-compression.....\*torsion autour de OX
- \*Flexion autour de OZ.....\*Flexion autour de OZ.

2.3.2.1/Matrice masse élémentaire en traction-compression.

En déterminant la fonction de déplacement et les conditions aux limites et en utilisant la relation (2.13) on aboutit au résultat suivant:

$$M_e = \rho \cdot SL/6 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.3.2.2/Matrice masse élémentaire en torsion

On établit une correspondance entre les vibrations de torsion et les vibrations de traction-compression, on trouve:

$$M_t = \rho \cdot JL/6 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.3.2.3/Matrice masse élémentaire en flexion autour de OZ.

Les termes de la matrice masse sont calculés à partir des intégrales suivantes:

$$m_{ij} = \rho_s \int_0^L f_i(x) \cdot f_j(x) \cdot dx$$

on aboutit alors à :

$$M_z = \frac{\rho_s L}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ & & & 4L^2 \end{pmatrix}$$

#### 2.3.2.4/Matrice masse élémentaire en flexion autour de OY

Elle est analogue à la flexion autour de OZ et par analogie on trouve :

$$M_y = \frac{\rho_s L}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ & & & 4L^2 \end{pmatrix}$$

#### 2.3.2.5/Matrice masse élémentaire générale de l'élément

De la même façon que pour la matrice rigidité élémentaire générale on établit la matrice masse élémentaire générale :

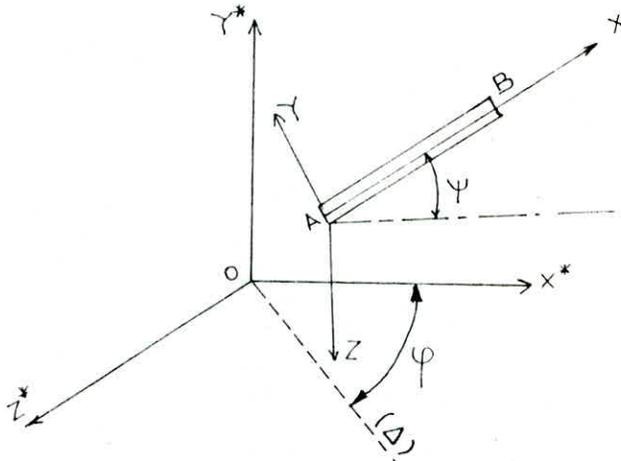
$\frac{P.S.L}{5}$	0	0	0	0	0	$\frac{P.S.L}{6}$	0	0	0	0	0
$\frac{39.P.S.L}{105}$	0	0	0	$\frac{11.P.S.L^2}{210}$	0	$\frac{27.P.S.L}{210}$	0	0	0	0	$\frac{-13.P.S.L^2}{420}$
	$\frac{39.P.S.L}{105}$	0	$\frac{11.P.S.L^2}{210}$	0	0	0	$\frac{27.P.S.L}{210}$	0	$\frac{-13.P.S.L^2}{420}$	0	0
		$\frac{P.J.L}{3}$	0	0	0	0	0	$\frac{P.J.L}{6}$	0	0	0
			$\frac{P.S.L^3}{105}$	0	0	0	$\frac{13.P.S.L^2}{420}$	0	$\frac{-3.P.S.L^3}{420}$	0	0
				$\frac{P.S.L^3}{105}$	0	$\frac{13.P.S.L^2}{420}$	0	0	0	$\frac{-3.P.S.L^3}{420}$	0
					$\frac{P.S.L}{3}$	0	0	0	0	0	0
						$\frac{39.P.S.L}{105}$	0	0	0	0	$\frac{-22.P.S.L^2}{420}$
							$\frac{39.P.S.L}{105}$	0	$\frac{-22.P.S.L^2}{420}$	0	0
								$\frac{P.J.L}{3}$	0	0	0
									$\frac{P.S.L^3}{105}$	0	0
										$\frac{P.S.L^3}{105}$	0

*symétrique*

(M).

2.4/Changement de repère.

Dans le cadre de la M.E.F, les calculs se font au niveau élémentaire puis global d'où la commodité d'analyser chaque élément dans un repère local. L'analyse dans un repère global (repère fixe) se fait en effectuant un changement de repère. Le passage du repère local au repère global peut se formuler matriciellement. On considère l'élément poutre AB suivant:



$\psi$  : angle formé par Ax et un plan // à  $xOz^*$ .

$\varphi$  : angle formé par  $Ox^*$  et la projection  $(\Delta)$  de Ax sur  $xOz^*$ .

Le système suivant formule les déplacements d'un noeud quelconque i dans le repère global:

$$\begin{cases} u_i = \cos\psi \cdot \cos\varphi \cdot u_i^* + \sin\psi \cdot w_i^* + \cos\psi \cdot \sin\varphi \cdot w_i^* \\ v_i = -\sin\psi \cdot \cos\varphi \cdot u_i^* + \cos\psi \cdot v_i^* - \sin\psi \cdot \sin\varphi \cdot w_i^* \\ w_i = -\sin\psi \cdot u_i^* + \cos\psi \cdot w_i^* \end{cases} \quad (2.14)$$

ou bien sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{(P)} \begin{pmatrix} u_1^* \\ v_1^* \\ w_1^* \\ \theta_{x1}^* \\ \theta_{y1}^* \\ \theta_{z1}^* \\ u_2^* \\ v_2^* \\ w_2^* \\ \theta_{x2}^* \\ \theta_{y2}^* \\ \theta_{z2}^* \end{pmatrix} \quad (2.14^*)$$

(P) = matrice de passage.

(P)

Dans la matrice de passage le paramètre  $\lambda$  est défini comme suit:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \cos\psi \cdot \cos\varphi & \sin\psi & \cos\psi \cdot \sin\varphi \\ -\sin\psi \cdot \cos\varphi & \cos\psi & -\sin\psi \cdot \sin\varphi \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

avec:

$$\begin{cases} \cos\psi = \frac{((X2-X1)^2 + (Z2-Z1)^2)^{1/2}}{L} & ; \quad \sin\psi = (Y2-Y1)/L . \\ \cos\varphi = \frac{X2-X1}{((X2-X1)^2 + (Z2-Z1)^2)^{1/2}} & ; \quad \sin\varphi = \frac{Z2-Z1}{((X2-X1)^2 + (Z2-Z1)^2)^{1/2}} \end{cases} \quad (2.15)$$

$$L = ((X2-X1)^2 + (Y2-Y1)^2 + (Z2-Z1)^2)^{1/2} \dots\dots\dots (2.16)$$

Pour le cas du châssis on a:

$$Z1=Z2=\varphi=0 \quad \text{donc} \quad \cos\varphi=1 \quad \text{et} \quad \sin\varphi=0 .$$

La nouvelle matrice de passage peut être réécrite comme suit:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

\*Matrices rigidité et masse dans le repère global.

Les énergies de déformation et cinétique ainsi que le travail des forces élémentaires sont invariants dans toute transformation de coordonnées d'où:

$$2U = \{\dot{q}^T\} (K) \{q\} = \{\dot{q}^{*T}\} (K^*) \{q^*\} \dots\dots\dots (2.17)$$

et

$$2Ec = \{\dot{q}^T\} (M) \{\dot{q}\} = \{\dot{q}^{*T}\} (M^*) \{\dot{q}^*\} \dots\dots\dots (2.18)$$

En utilisant la relation (2.14\*) on obtient:

$$(M^*) = (P)^T (M) (P) \quad (2.19)$$

et

$$(K^*) = (P)^T (K) (P) \quad (2.20)$$

(P): étant la matrice de passage.

2.5/Assemblage.

Lorsqu'on utilise les techniques matricielles, on a amené successivement à s'intéresser à deux niveaux de formulation.

\*\*La formulation élémentaire au niveau de l'élément fini (poutre) qu'on a vu au chapitre précédent et qui nous a permis de calculer les matrices élémentaires masse et rigidité.

## La formulation globale qui consiste à rechercher pour la structure complète l'expression matricielle des énergies (de déformation et cinétique) en fonction des déplacements inconnus en tous les noeuds de la structure. Ceci nécessite l'assemblage des caractéristiques élémentaires (matrices masse et rigidité) pour tous les éléments de la structure. La phase d'assemblage consiste donc à construire les matrices globales de la structure globale à partir des matrices caractéristiques des différents éléments préalablement calculées.

\*Expansion des matrices élémentaires.

C'est la première opération d'assemblage qui consiste à construire  $(\bar{M}_e)$  et  $(\bar{K}_e)$  par expansion des matrices respectives  $(M_e)$  et  $(K_e)$  grâce à des insertions de lignes et de colonnes de Zéro.

$(\bar{M}_e)$  et  $(\bar{K}_e)$  ont pour dimension le nombre de degrés de liberté total de la structure.

Soit  $W_e$  l'énergie de déformation de l'élément ayant I, J numéros des noeuds dans la structure:

$$W_e \text{ s'écrit : } W_e = (U_I \quad U_J) \begin{pmatrix} K_{II} & K_{IJ} \\ K_{JI} & K_{JJ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_I \\ U_J \end{pmatrix}$$

En exprimant l'énergie de déformation  $W_e$  dans le vecteur déplacement global  $(U)$  :  $(U) = (U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4 \quad U_5 \dots U_I \dots U_J \dots U_N)$   
 N étant le nombre de d.d.l total de la structure.

On obtient

$$W_e = (U_1 \quad U_2 \dots U_I \dots U_J \dots U_N) \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & K_{II} & \dots & K_{IJ} & \dots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \dots & K_{JI} & \dots & K_{JJ} & \dots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_I \\ \vdots \\ U_J \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix}$$

Assemblage.

Pour obtenir la matrice de rigidité assemblée globale on utilise le fait que l'énergie de déformation totale de la structure est la somme des énergies de déformations élémentaires:  $W = \sum W_e$ .  
 Ensuite on fait la somme des matrices élémentaires terme à terme après expansion, pour obtenir la matrice de rigidité assemblée.  
 On fait de même pour obtenir la matrice masse assemblée.

## CHAPITRE 3/ AMORTISSEMENT

## 3.1/Introduction.

Les mécanismes de dissipation dans les structures sont nombreux et complexes, et aussi difficiles à estimer.

Il en résulte qu'il n'est généralement pas facile de déterminer une expression de l'amortissement de la même manière que pour les matrices masse et rigidité; pour cette raison, l'amortissement de la plus part des structures doit être mesuré directement au moyen de méthodes expérimentales.

## 3.2/Rôle de l'amortissement.

Le rôle principal de l'amortissement est d'atténuer les effets de la résonance et de ramener dans un temps minimum une masse suspendue à sa position d'équilibre en absorbant l'énergie cinétique qui lui a été communiquée.

## 3.3/Sources de l'amortissement.

Les principales sources d'amortissement qu'on trouve sont:

## 3.3.1/Amortissement de coulomb

Dans ce type d'amortissement, l'énergie est dissipée par frottement sec entre deux surfaces et la force d'amortissement obéit à la loi non linéaire:

$$F_d = -\mu \cdot N \quad (3.1)$$

$\mu$  = Coefficient de frottement.

$N$  = effort normal appliqué sur la liaison.

Ce modèle d'amortissement convient pour représenter les propriétés dissipatives de certaines liaisons.

## 3.3.2/Amortissement visqueux

Ce type d'amortissement correspond à une dissipation d'énergie par écoulement laminaire d'un fluide dans un amortisseur.

La force dissipée est proportionnelle à la vitesse:

$$F_d = -c \dot{q} \quad (3.2)$$

Cet amortissement a donc un caractère essentiellement dynamique il ne modifie pas la position d'équilibre statique.

Ce type d'amortissement conduit généralement à une forme simple des équations de mouvement de la structure, mais les comportements réels correspondent rarement exactement à ce modèle.

Plusieurs méthodes sont utilisées pour la détermination des facteurs d'amortissement visqueux et parmi elles on citera:

a/ Méthode de décroissance des oscillations libres.

C'est la méthode expérimentale la plus simple et la plus utilisée. Le facteur d'amortissement peut être déterminé à partir du rapport des amplitudes des déplacements mesurés à  $m$  cycles d'intervalles. Le facteur d'amortissement sera donné par:

$$\xi = \frac{\delta_m}{2\pi m \cdot (\omega/\omega_d)} \approx \frac{\delta_m}{2\pi m} \quad (3.3)$$

Avec  $\delta_m = \ln(V_n/V_{n+m}) = \text{d\'e}c r\'e m e n t \text{ l o g a r i t h m i q u e}$   
 $\omega_e$  et  $\omega_d$  sont les fr\'e q u e n c e s c i r c u l a i r e s a m o r t i e e t n o n a m o r t i e .

b/M\'e t h o d e d' a m p l i f i c a t i o n r\'e s o n n a n t e .

Cette m\'e t h o d e e s t b a s e e s u r l a c o n s t r u c t i o n d e l a c o u r b e d e r\'e p o n s e e n f r e q u e n c e d e l a s t r u c t u r e e n a p p l i q u a n t d e s c h a r g e m e n t s h a r m o n i q u e s  $P_0 \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t)$  \`a d e s i n t e r v a l l e s d e f r e q u e n c e s e n c a d r a n t l a f r e q u e n c e d e r\'e s o n n a n c e , e t e n t r a c a n t l a c o u r b e r e p r e s e n t a n t l a f r e q u e n c e d e r\'e s o n n a n c e l e s v a r i a t i o n s d e s a m p l i t u d e s d e s d e p l a c e m e n t s r e s u l t a n t s e n f o n c t i o n d e s f r e q u e n c e s a p p l i q u e e s , o n o b t i e n t l a c o u r b e s u i v a n t e :

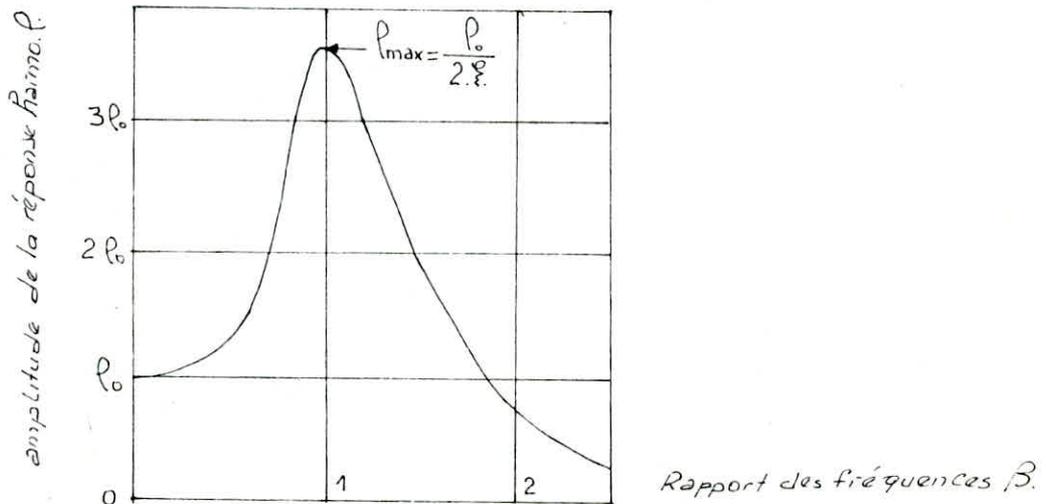


Fig: 3.1: Courbe de réponse en fréquence pour un système modérément amorti.

On montre que le facteur d'amortissement dépend du facteur d'amplification dynamique à la résonance ie:  $D_{\beta=1} = 1/2\xi$ .

Le facteur d'amortissement est donné par:  $\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_0}{P_{\beta=1}}$  (3.4)

Avec  $P_0$  = amplitude de la réponse statique.  
 $P_{\beta=1}$  = amplitude à la résonance.

Comme il est en pratique difficile d'appliquer la fréquence de résonance avec précision, il sera plus commode de déterminer l'amplitude de la réponse maximum  $P_{max}$  qui se produit à une fréquence légèrement inférieure.

Dans ce cas on aura:

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_0}{P_{max}} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{P_0}{P_{max}} \quad (3.5)$$

### 3.3.3/Amortissement structural.

Cet amortissement correspond à une dissipation d'énergie par divers mécanismes de frottement interne dans les matériaux.

En régime harmonique, la force de dissipation est proportionnelle à la force élastique et donc au déplacement relatif:

$$Fd=j.g.q. \quad (3.6)$$

Avec  $j$ =complexe

$g$ =coefficient d'amortissement structural.  
 $q$ =déplacement relatif.

On peut écrire aussi que l'énergie dissipée par l'amortissement structural est:

$$Wd=\alpha q^2 \quad (3.7)$$

\*  
 $\alpha$  est une constante.

Cas Particulier de notre étude.

Pour le cas de notre étude qui concerne le châssis du camion K120 le type d'amortissement utilisé est l'amortissement structural cet amortissement associé aux ressorts élastiques à lames d'acier forment la suspension du camion. Le rôle de l'amortissement dans ce cas sera de ramener dans un minimum de temps les ressorts à lames à leur position d'équilibre en absorbant l'énergie cinétique transmise au camion .

### 3.4/Formulation de la matrice amortissement.

Vu les difficultés qui se posent pour la détermination des facteurs d'amortissements, plusieurs types de formulation nous ont été proposés ;entre autres:

a/on exprime l'amortissement sous la forme d'un pourcentage d'amortissement critique, pourcentage obtenu par des essais sur maquettes, plutôt que de l'exprimer explicitement par une matrice amortissement (C) .Neamoins si on veut obtenir une matrice amortissement explicite on l'exprimera généralement à partir des pourcentages d'amortissement critique.

b/L'amortissement est choisi de façon à découpler les équations du mouvement amorti,c'est à dire les équations du type:

$$(M)\{\ddot{q}\}+(C)\{\dot{q}\}+(K)\{q\}=F(t). \quad (3.8)$$

On sait que les conditions d'orthogonalités:

$$\begin{aligned} X_m^T(M)X_n &= 0 \\ X_m^T(K)X_n &= 0 \end{aligned} \quad m \neq n \quad (3.9)$$

permettent d'annuler tous les termes,sauf celui qui correspond au  $n^{i\text{ème}}$  mode dans la matrice masse et rigidité.

On supposera donc que la condition d'orthogonalité s'applique aussi à la matrice amortissement,ce qui revient à écrire:

$$X_m^T(C)X_n = 0 \quad (3.10)$$

Il convient à présent d'étudier les conditions sous lesquelles le découplage aura effectivement lieu,c'est à dire déterminer forme de la matrice amortissement à laquelle la condition d'orthogonalité(3.10) s'applique.

Deux méthodes en général sont utilisées pour découpler les équations du mouvement amorti:

### 3.41/Série de Caughey

Cette méthode propose de remplacer la matrice  $(X)(C)(X)^T$  par une matrice diagonale de la forme suivante:

$$(X)(C)(X)^T = \begin{bmatrix} 2\xi_1 \omega_1 & & & \\ & 2\xi_2 \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2\xi_n \omega_n \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \omega_i = \sqrt{\lambda_i} \\ \xi_i = \text{fact. d'amort.} \end{array}$$

Cette méthode permet de découpler les équations du mouvement mais n'a pas de sens physique

### 3.4.2/Amortissement de Rayleigh

Cette méthode a été introduite par Rayleigh et s'exprime comme suit:

$$(C) = \alpha(M) + \beta(K) \quad (3.11)$$

Avec (M): matrice masse

(K): matrice rigidité.

$\alpha$  et  $\beta$  étant les coefficients de Rayleigh.

Le facteur d'amortissement du  $i^{\text{ème}}$  mode est donné par:

$$\xi_i = (C) / (2 \cdot (M) \cdot \omega_i) = (\alpha(M) + \beta(K)) / (2 \cdot (M) \cdot \omega_i) = (\alpha + \beta((K)/(M))) / (2 \cdot \omega_i) \quad (3.12)$$

$$\xi_i = (\alpha + \beta \omega_i^2) / (2 \cdot \omega_i) \quad (3.13)$$

$\omega_i$ : fréquence naturelle du  $i^{\text{ème}}$  mode.

\*\*Détermination des coefficients de RAYLEIGH /  $\alpha$  et  $\beta$ .

On a considéré précédemment que l'amortissement était proportionnel, c'est-à-dire qu'il vérifie la relation (3.11). À partir de cette relation on a déterminé le facteur d'amortissement du  $i^{\text{ème}}$  mode et est exprimé par la relation (3.13).

Pour déterminer  $\alpha$  et  $\beta$ , on considère deux modes de vibration libre de la structure, et on calcule pour chacun d'eux le facteur d'amortissement d'après la relation (3.13), on aura:

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{\alpha}{2 \cdot \omega_1} + \frac{\omega_1 \cdot \beta}{2} \\ \xi_2 = \frac{\alpha}{2 \cdot \omega_2} + \frac{\omega_2 \cdot \beta}{2} \end{cases} \quad \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 \\ \frac{1}{\omega_2} & \omega_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

et comme on a pris le même facteur d'amortissement pour tous les points de la structure on aura:  $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = \xi = 0.05$ .

On peut donc réécrire la relation (3.14) comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \xi \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 \\ -\frac{1}{\omega_2} & \omega_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Finalement on tire de cette dernière relation les coefficients de Rayleigh :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2 \cdot \xi \cdot \omega_1 \cdot \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \\ \beta = \frac{2 \cdot \xi}{\omega_1 + \omega_2} \end{cases} \quad (3.16).$$

· - - - ·

CHAPITRE 4 / ANALYSE DYNAMIQUE.

4.1/Calcul dynamique en vibration libre.

Nousnavons déjà vu que l'analyse dynamique d'une structure peut se ramener à la résolution d'un système d'équations différentielles du second ordre:

$$(M)\{\ddot{q}\}+(C)\{\dot{q}\}+(K)\{q\}=F(t). \quad (4.1)$$

La résolution du système libre revient à résoudre l'équation:

$$(M)\{\ddot{q}\}+(C)\{\dot{q}\}+(K)\{q\}=0. \quad (4.2)$$

Les solutions du système(4.2) sont appelées modes propres; dans le cas générale ces modes au nombre de r d.d.l sont complexes et leur interprétation physique n'est pas évidente. On évite cet inconvénient en étudiant les vibrations libres des structures sans amortissement c'est à dire, en cherchant les solutions du système suivant:

$$(M)\{\ddot{q}\}+(K)\{q\}=0. \quad (4.3)$$

Pour cela on a fait appel à une méthode de résolution numérique, la méthode générale de JACOBI qui est une méthode itérative.

4.2/Algorithme de JACOBI.

8

Définir la précision de convergence requise

```

Pour chaque cycle s
Définir la tolérance dynamique  $\epsilon_s=10^{-5}$ 
Pour chaque ligne  $i=1,2,\dots,n$ .
Pour chaque colonne  $j=i+1,\dots,n$ .
  Calculer les facteurs de couplage:

```

$$F_k = \frac{K_{ij}}{(K_{ii} \cdot K_{jj})^{1/2}} \quad ; \quad F_m = \frac{M_{ij}}{(M_{ii} \cdot M_{jj})^{1/2}}$$

```

Si  $F_k$  ou  $F_m > \epsilon_s$ :
*Calculer a et b
*transformer les matrices (K) et (M).

```

```

  COLONNE i = colonne i + b.colonne j
  COLONNE j = a.colonne i + colonne j

```

```

puis
  LIGNE i = ligne i + b.LIGNE j
  LIGNE j = a.ligne i + ligne j

```

```

*Modifier les vecteurs propres (X).

```

```

  COLONNE i = colonne i + b.colonne j
  COLONNE j = a.colonne i + colonne j.

```

Calculer les valeurs propres:

$$\lambda_i = K_{ii}/M_{ii} \quad ; \quad \text{et} \quad F_A = \max_i \frac{|\lambda_i^s - \lambda_i^{s-1}|}{|\lambda_i^{s-1}|}$$

Calculer les facteurs de couplage:

$$F_k = \max_{i,j} \frac{K_{ij}}{(K_{ii} \cdot K_{jj})^{1/2}} \quad ; \quad F_m = \max_{i,j} \frac{M_{ij}}{(M_{ii} \cdot M_{jj})^{1/2}} .$$

Test de convergence:  $F_k < \epsilon$  et  $F_m < \epsilon$  et  $F_\lambda < \epsilon$  .

8

--FIN--

#### 4.3/Méthodes d'analyse dynamique.

Il y a deux stratégies fondamentales de résolution en dynamique la méthode de superposition modale et la méthode de résolution directe. Le choix entre ces deux méthodes dépend de la nature du problème (linéaire ou non linéaire), du contenu fréquentiel de l'excitation ainsi que de beaucoup d'autres facteurs dont le coût.

##### 4.3.1/Méthode de résolution directe.

Cette méthode est utilisée pour les problèmes non linéaires ou si le contenu fréquentiel de l'excitation est susceptible d'exciter un grand nombre de modes de la structure (ex: propagation d'ondes.). L'analyse directe d'une structure en régime transitoire implique l'intégration pas à pas des équations du mouvement:

$$(M) \{\ddot{q}\} + (C) \{\dot{q}\} + (K) \{q\} = F(t). \quad (4.1).$$

##### 4.3.2/Méthode de superposition modale.

C'est la stratégie de résolution la plus utilisée en dynamique et convient aux structures linéaires dont les premiers modes propres sont susceptibles d'être excités.

Les méthodes de superpositions modales peuvent être subdivisées en deux classes en fonction de la nature des modes propres utilisés pour exprimer les équations du mouvement.

##### 1<sup>er</sup> CAS:

Les structures ont un amortissement élevé et non uniforme; ce cas nécessite l'utilisation comme base de la solution des modes propres complexes, solutions propres du système avec amortissement:

$$((M)s^2 + (C)s + (K)) \{q\} = 0. \quad (4.4)$$

##### 2<sup>e</sup> CAS:

C'est le cas utilisé dans de nombreux problèmes et qui utilise pour les structures un amortissement faible, ceci nous évite le calcul des modes propres complexes, opération toujours longue et coûteuse.

On utilise donc comme base de la solution les modes propres réels solutions du système homogène sans amortissement:

$$((K) - \lambda(M)) \{q\} = 0. \quad (4.5)$$

4.3.3/Principe de la méthode de superposition modale.

Le principe de la méthode de superposition modale sera présenté pour le cas des structures faiblement amorties; l'équation du mouvement étant toujours:

$$(M)\{\ddot{q}\}+(C)\{\dot{q}\}+(K)\{q\}=F(t). \quad (4.1)$$

Le principe de cette méthode est de découpler le système précédent grace d'abord à la transformation suivante:

$$\{q(t)\}=(X)\{v(t)\}. \quad (4.6)$$

Où la matrice de transformation (X) est constituée par les n vecteurs propres  $\{X_i\}$  normalisés, et est définie par:

$$(X)=(\{X_1\}\{X_2\} \dots \{X_n\}).$$

De plus la matrice de transformation satisfait aux relations d'orthogonalités suivantes:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} (X)^T(K)(X) &= (\lambda). \\ (X)^T(M)(X) &= (I). \end{aligned} \quad (\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Après transformation le système (4.1) devient:

$$\{\ddot{v}\} + (X)^T(C)(X)\{\dot{v}\} + (\lambda)\{v\} = (X)^T\{F(t)\}. \quad (4.8)$$

Dans le cas général, les équations modales du mouvement sont couplées par l'amortissement.

Pour le cas de notre étude on utilisera un amortissement de RAYLEIGH qui permet de découpler les équations modales. Lorsque les équations sont découplées, elles s'écrivent pour le i mode sous la forme suivante:

$$\ddot{v}_i(t) + 2\omega_i \xi_i \dot{v}_i(t) + \omega_i^2 v_i(t) = \bar{F}_i(t). \quad (4.9)$$

Une fois les équations découplées, elles seront résolues par la méthode du  $\theta$  de WILSON qui est une procédure d'intégration pas à pas inconditionnellement stable. On utilise pour chacune des équations le meme pas de temps, ce qui permet de simplifier le calcul des composantes de la contrainte à des instants choisis à l'avance.

4.4/Algorithme du  $\theta$  de WILSON.

---

Partie: A

- 1°/Formuler les matrices (M), (K), (C).
- 2°/Initialiser le déplacement, la vitesse et l'accélération.
- 3°/Choisir un pas de temps  $\Delta t$  convenable, prendre  $\theta = 1.4$  et calculer les constantes d'intégration.
- 4°/Formuler la matrice de rigidité effective :  $(\hat{K})/$   
 $(\hat{K}) = (K) + a_0(M) + a_1(C).$

5°/ Diagonaliser  $(\hat{K})$ :  $(\hat{K}) = LDL^T$ .

---

Partie: B

Pour chaque pas de temps:

1°/ Calculer l'effort effectif au temps  $(t + \Delta t)$ .

$$\hat{F}(t + \theta \Delta t) = \bar{F}(t + \theta \Delta t) + (M)(a_0 U(t) + a_2 \dot{U}(t) + 2\ddot{U}(t)) + (C)(a_4 U(t) + 2\dot{U}(t) + a_3 \ddot{U}(t)).$$

$$\text{Avec } \bar{F}(t + \theta \Delta t) = F(t) + (F(t + \Delta t) - F(t)).$$

2°/ Résoudre pour le déplacement au temps  $(t + \theta \Delta t)$ .

$$LDL^T \cdot U(t + \theta \Delta t) = \hat{F}(t + \theta \Delta t).$$

3°/ Calculer: le déplacement, la vitesse et l'accélération au temps  $(t + \Delta t)$ :

$$ACC = \ddot{U}(t + \Delta t) = a_4 (U(t + \theta \Delta t) - U(t)) + a_5 \dot{U}(t) + a_6 \ddot{U}(t).$$

$$VEL = \dot{U}(t + \Delta t) = \dot{U}(t) + a_7 (\ddot{U}(t + \Delta t) + \ddot{U}(t)).$$

$$DISP = U(t + \Delta t) = U(t) + \Delta t \cdot \dot{U}(t) + a_8 (\ddot{U}(t + \Delta t) + 2\ddot{U}(t)).$$

--FIN--

---

5.1/Modélisation

La modélisation est basée sur une subdivision du domaine continu en sous domaines de formes géométriques simples que l'on appellera "éléments finis" interconnectés en des points remarquables appelés "noeuds". Les noeuds et les éléments n'ont pas forcément de signification physique particulière mais sont basés sur des considérations de précision de l'approximation. Les charges statiques appliquées sur la structure seront appliquées directement aux noeuds de cette structure, ceci simplifiera énormément les calculs.

5.2/Discretisation.

5.2.1/Choix des noeuds.

Les noeuds sont choisis de façon à connaître par l'intermédiaire du vecteur déplacement nodal, les différentes déformés dans les sections les plus sollicitées, on citera entre autre:

- \*noeuds correspondant aux changements de section.
- \*points de fixation (pour le cas du châssis: fixation des traverses sur les longerons.).
- \*points d'appuis (exemple des points de fixation des ressorts à lames sur le châssis.).

5.2.2/Numérotation

Pour ne pas encombrer de termes nuls les matrices ou d'une autre façon, pour que les éléments non nuls forment une bande la plus petite possible, il faudra, la programmation y oblige, que la différence des numéros de deux noeuds voisins soit la plus petite possible.

5.2.3/Masses concentrées.

On distingue deux types de charges qui agissent sur le châssis:

a/Charges réparties

Les charges dues au poids du plateau et à la matière transportée sont présentées par des masses concentrées appliquées aux noeuds déjà choisis, chacune de ces masses est calculée de la façon suivante:

Soit l'élément (m) chargé par  $Q(N/m)$ . Cet élément sera remplacé par l'élément (m) chargé cette fois-ci par deux forces concentrées:

$F_i = Q.L/2$  au noeud  $i$  et  $F_j = Q.L/2$  au noeud  $j$ .

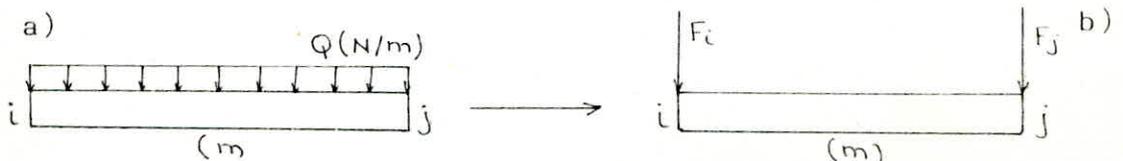


Fig:5.1:représentation d'une charge répartie.

b/Charges concentrées.

Ces charges sont dues aux organes du camion(réservoir,moteur...), et elles sont elles aussi représentées par des masses concentrées aux noeuds.

L'élément (m) de noeuds i et j chargé par F en un point quelconque est équivalent au meme élément chargé par deux efforts,l'un au noeud i de valeur:  $F_i=b.F/L$  ;l'autre au noeud j de valeur  $F_j=a.F/L$ .

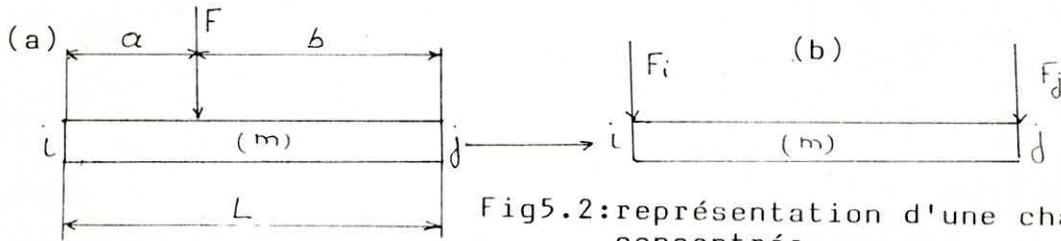


Fig5.2:représentation d'une charge concentrée.

5.3/Caractéristiques mécaniques et géométriques du châssis modèle.

a/Construction du châssis.

Le châssis est un droit et plat, constitué de deux longerons en tôle d'acier, emboutis en forme de U entretoisés par des traverses en tôle d'acier.

D'après les manuels de construction mécanique on trouve pour le matériau du châssis les caractéristiques suivantes:

E:module d'YOUNG =  $2.E+10(N/m^2)$

$\rho$ :masse volumique =  $7980.(Kg/m)$

G:module d'élasticité transversal =  $8.E+10(N/m^2)$

b/Moments d'inerties et sections.

d'après les dimensions données à la fig(4.3)et connaissant les formes des éléments,on calcul les moments d'inerties et les sections de la façon suivante:

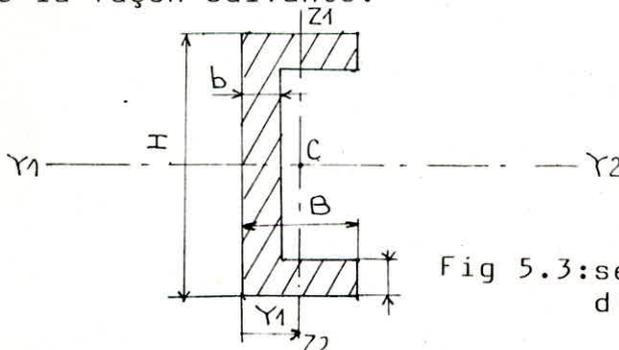


Fig 5.3:section transversale d'un élément .

Y1Y2 et Z1Z2 étant les axes principaux de l'élément.

C:le centre de gravité.

Jp:moment polaire.

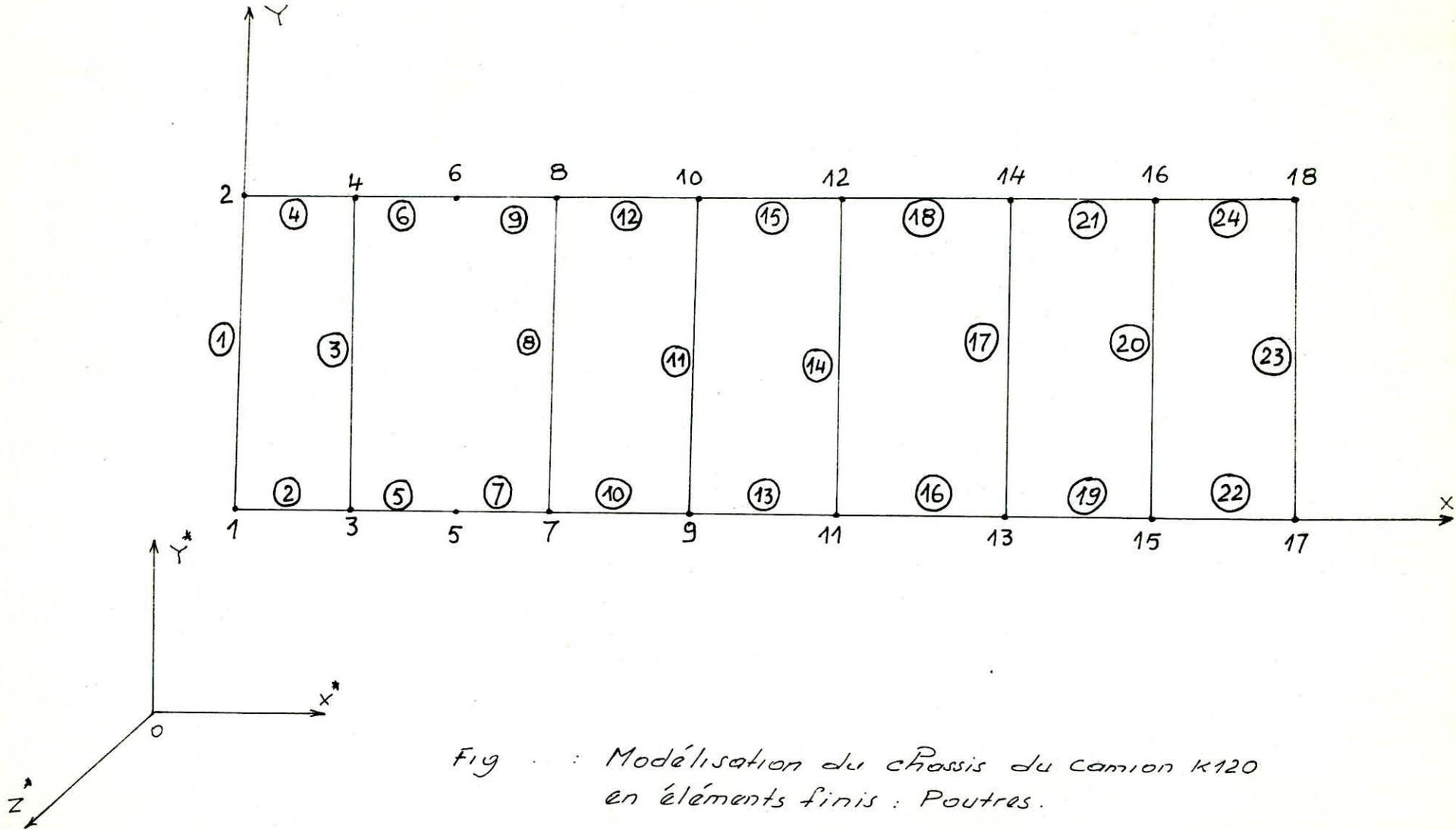


Fig . : Modélisation du châssis du camion K120 en éléments finis : Poutres.

$$\left. \begin{aligned}
 Y1 &= \frac{Hb^2 + 2h(B^2 - b^2)}{2(Hb + 2h(B-b))} \\
 Iy &= \frac{HB^3 - (B-b)(H-2h)^3}{12} \\
 Iz &= \frac{Hb^3 + 2h(B-b)^3}{12} + Hb(Y1 - b/2)^2 + 2h(B-b)((B-b)/2 + b - Y1)^2 \\
 Jp &= Iy + Iz.
 \end{aligned} \right\} (5.1).$$

c/Cas des traverses.

Les traverses comme on l'a indiqué précédemment sont au nombre de huit(8) et sont reliées aux deux longerons par des rivets. Mais il se trouve que ces traverses n'ont pas toutes la même forme et ne sont pas toutes reliées de la même façon aux deux longerons. Pour atténuer les erreurs qu'engendreraient les valeurs numériques des inerties dans les résultats finaux, on a apporté les corrections suivantes:

Pour la 1ère traverse (N°1: fig:1.3) le calcul se fait en utilisant seulement les relations (5.1) avec les dimensions indiquées sur la fig:1.3.

\*Pour les traverses 2,6,7,8 (fig:1.3) des plaquettes d'acier sont rapportées à leurs extrémités pour renforcer les liaisons. Ne connaissant pas exactement les formes et dimensions de ces plaquettes; on a majoré nos calculs de 10%.

\*Pour les traverses 3,4,5 (fig:1.3) on a majoré nos calculs de 20% à cause de leurs formes complexes qui ne nous permettent pas de prendre en considération seulement les valeurs données par les relations (5.1).

Dans le tableau (5.1) on donne les coordonnées ainsi que les masses concentrées de tous les noeuds de la structure.

Les valeurs des inerties et sections de tous les éléments sont données dans le tableau (5.2).

Noeuds	Coordonnées		Masses Concentrées
	X (mm)	Y (mm)	m (kg)
1	0.00	0.00	69.857
2	0.00	800.00	69.857
3	420.00	0.00	69.857
4	420.00	800.00	69.857
5	1500.00	0.00	39.857
6	1500.00	800.00	39.857
7	2485.00	0.00	39.857
8	2485.00	800.00	39.857
9	3480.00	0.00	39.857
10	3480.00	800.00	39.857
11	4910.00	0.00	146.107
12	4910.00	800.00	164.857
13	6425.00	0.00	453.607
14	6425.00	800.00	359.857
15	7290.00	0.00	225
16	7290.00	800.00	225
17	7960.00	0.00	130
18	7960.00	800.00	130

Tableau: 5.1. Coordonnées et masses Concentrées des noeuds.

elem <sup>t</sup>	1	3_ 17_ 20_ 23_	8_ 11_ 14_	2_ 21_ 22_ 24_ 4_ 19_	7_ 9_ 13_ 10_ 12_ 15_	5_ 6_ 16_ 18_
$I_Y (m^4)$	$1071.9167 \cdot 10^{-8}$	$446.8899 \cdot 10^{-8}$	$1201.1758 \cdot 10^{-8}$	$794.5851 \cdot 10^{-8}$	$1924.5716 \cdot 10^{-8}$	$1327.1547 \cdot 10^{-8}$
$I_Z (m^4)$	$594.7862 \cdot 10^{-8}$	$59.2514 \cdot 10^{-8}$	$294.2500 \cdot 10^{-8}$	$65.0592 \cdot 10^{-8}$	$68.3106 \cdot 10^{-8}$	$66.7520 \cdot 10^{-8}$
$J (m^4)$	$1666.7029 \cdot 10^{-8}$	$506.1413 \cdot 10^{-8}$	$1495.4258 \cdot 10^{-8}$	$859.6443 \cdot 10^{-8}$	$1992.8821 \cdot 10^{-8}$	$1393.9067 \cdot 10^{-8}$
$S (m^2)$	$2.300 \cdot 10^{-3}$	$1.250 \cdot 10^{-3}$	$1.650 \cdot 10^{-3}$	$1.806 \cdot 10^{-3}$	$2.268 \cdot 10^{-3}$	$2.074 \cdot 10^{-3}$

Tableau 5.2: Moments d'inerties et sections des éléments du châssis

## 5.4/Programmation

Au centre de calcul de l'E.N.P, on a réalisé un programme en langage FORTRAN qui nous permet de faire l'ensemble des calculs par éléments finis des structures constituées d'éléments poutres tels que développés dans ce polycopie.

Ce logiciel est constitué essentiellement de 3 parties:

1ere partie: Formulation des matrices masse et rigidité dans le repère global.

2eme partie: La résolution du système libre  $((K) - (M))\{q\} = 0$ , qui nous permet de déterminer les fréquences propres de vibration du châssis.

3eme partie: La détermination du déplacement, de la vitesse et de l'accélération en chacun des degrés de liberté du châssis

Les parties du programme dans l'ordre d'exécution sont

- \*Entrée des données.
- \*Lecture des coordonnées des noeuds et leurs D.D.L.
- \*Tableau des éléments donnant les noeuds de l'élément et les caractéristiques mécaniques.
- \*Calcul du nombre de D.D.L total.
- \*Table de localisation.
- \*Matrice de rigidité dans le repère local.
- \*Matrice masse dans le repère local.
- \*Matrice de passage du repère local au repère global.
- \*Assemblage.
- \*Calcul des valeurs et vecteurs propres .
- \*Formulation de la matrice amortissement.
- \*Calcul du déplacement, de la vitesse et de l'accélération en chacun des D.D.D de la structure .

## 5.5/Résultats et commentaires.

Dans le cas du système libre, on calculé d'abord les valeurs propres ensuite les fréquences propres correspondantes. On remarque que les valeurs de ces fréquences sont assez bonnes et sont dans la plage des fréquences trouvées dans certains manuels, aussi les déplacements des noeuds résultants sont corrects. On remarque aussi qu'à part ~~de~~ déplacement linéaire suivant l'axe des Y (↓ au plan du châssis) et la rotation autour de l'axe des Z, tous les autres déplacements sont nuls; ceci semble logique du fait de la constitution rigide du châssis.

Pour le cas du système excité, on remarque aussi que dans ce cas les déplacements trouvés sont corrects; néanmoins il aurait fallu faire plusieurs applications qui revêtent un aspect réel et faire un calcul de contraintes par la suite pour conclure définitivement sur ces résultats.

Une chose importante aussi à signaler, c'est que la méthode par accélération linéaire est seulement conditionnellement stable et donnera des solutions divergentes si l'incrément de temps est plus grand qu'environ la moitié de la période de vibration.

La précision donc de cette méthode dépendra de la durée de l'incrément du temps.

L'incrément de temps devra être choisi suivant trois considérations;

1°/Rapidité de variation du chargement appliqué.

2°/Complexité des caractéristiques non linéaire de l'amortissement et de la rigidité.

3°/La période T de vibration libre de la structure.

## CHAPITRE 6 : CONCLUSION

Cette étude a été faite dans le souci principal de montrer si les fissurations rencontrées au niveau du châssis du camion K120 construit par la SNVI de Rouiba résultaient des forces dynamiques.

On a élaboré un logiciel général qui permet une étude dynamique assez complète pour les structures en poutre.

On a exécuté ce programme pour les cas des vibrations libre et forcée et on a obtenu des résultats assez corrects; ne<sup>n</sup>anmoins par manque de données et en particulier celles relatives aux irrégularités de la route, on n'a pas varié nos applications; la seule application que nous avons faite étant purement théorique.

Je propose donc à ceux qui auront à utiliser ce programme, d'essayer de faire le maximum d'application revêtant un aspect réel, de revoir les formes des éléments de la structure ainsi que leurs caractéristiques mécaniques, d'approfondir l'étude sur l'amortissement et en fin améliorer la discrétisation du châssis en particulier au niveau des points de fixation du moteur.

Pour conclure, je souhaite que cette étude sera d'un appo<sup>nt</sup>t appréciable aux étudiants qui travailleront sur les structures en poutre.



# PROGRAMME



```

*****
----- ENTREE DES DONNEES -----
*****
CHARACTER *20 FICH
WRITE(*,*)'NOM DU FICHIER DE DONNEES'
READ(*,2) FICH
FORMAT(A20)
OPEN(unit=5,file=FICH,STATUS='OLD')
WRITE(*,*)'NOM DU FICHIER RESULTATS'
READ(*,2) FICH
OPEN(unit=6,FILE=FICH,STATUS='NEW')
WRITE(6,2000)
2000 FORMAT(15X,'-- R E S U L T A T S --',/)

```

```

*****
-- LECTURE DES COORDONEES DES NOEUDS ET LEURS D.D.L --
*****
READ(5,11)NN,NEL,IFPR,NVP
11 FORMAT(4I3)
WRITE(6,12)NN,NEL
12 FORMAT(/5X,'-NOMBRE DE NOEUDS=>',I3//5X,'-NOMBRE DES ELEMENTS=>',
1 I3/)
WRITE(6,21)
21 FORMAT(/3X,7H NOEUDS,3X,' D.D.L
1 COORDONEES'/)
WRITE(6,22)
22 FORMAT(/5X,2H N,7H 1,4H 2,4H 3,4H 4,4H 5,4H 6,6X,
1 7H X,6X,6H Y,6X,6H Z/)
DO 30 I=1,NN
READ(5,23)N,IDDN(1,1),IDDN(1,2),IDDN(1,3),IDDN(1,4),
1 IDDN(1,5),IDDN(1,6),XNN(1),YNN(1),ZNN(1),CMA(1,3)
23 FORMAT(I3,6I2,4E10.3)
WRITE(6,24)N,IDDN(1,1),IDDN(1,2),IDDN(1,3),IDDN(1,4),
1 IDDN(1,5),IDDN(1,6),XNN(1),YNN(1),ZNN(1)
24 FORMAT(4X,I3,3X,6(2X,I2),5X,3(2X,E10.3))
30 CONTINUE

```

```

*****
-- TABLEAU DES ELEMENTS DONNANT LES NOEUDS DE L'ELEMENT --
-- ET LES CARACTERISTIQUES MECANQUES --
*****
WRITE(6,34)
34 FORMAT(/5X,' TABLE DE CONNECTIONS'/)
WRITE(6,31)
31 FORMAT(/X,6H ELEME,9X,1HS,9X,5H IY,8X,6H IZ,8X,5H J/)
DO 40 I=1,NEL
READ(5,32)N,NBN(1,1),NBN(1,2),SI(1),Ym(1),Zm(1),Pm(1)
32 FORMAT(I3,2I2,4E14.4)
WRITE(6,32)N,NBN(1,1),NBN(1,2),SI(1),Ym(1),Zm(1),Pm(1)
33 FORMAT(3X,I3,X,2(I2,X),4(E14.4,X))

```

```

*****
--- ***** CALCUL DU NOMBRE DE D.D.L TOTAL ***** ---
*****

```

```

H=0
DO 50 I=1,NN
DO 50 J=1,6
K=IDUN(I,J)
IF(K.EQ.0) GO TO 50
H=H+1
IDDN(I,J)=H
CONTINUE
NDLT=H
WRITE(6,51)NDLT
FORMAT(/5X,'-NOMBRE DE D.D.L TOTAL=>',I3/)

```

```

*****
--- ***** TABLE DE LOCALISATION ***** ---
*****

```

```

DO 60 I=1,NEL
I1=NBNI(I,1)
I2=NBNI(I,2)
DO 60 J=1,6
TI(I,J)=IDDN(I1,J)
TI(I,J+6)=IDDN(I2,J)
CONTINUE
WRITE(6,61)
FORMAT(/2X,7HELEMENT,6X,21HTABLE DE LOCALISATION/)
WRITE(6,63)
WRITE(6,62)
FORMAT(4X,'N ! 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12')
WRITE(6,63)
FORMAT(4X,'-----')
DO 70 I=1,NEL
WRITE(6,71)I,TI(I,1),TI(I,2),TI(I,3),TI(I,4),TI(I,5),TI(I,6),
1 TI(I,7),TI(I,8),TI(I,9),TI(I,10),TI(I,11),TI(I,12)
71 FORMAT(2X,I3,' !',12(I3,X))
70 CONTINUE
WRITE(6,63)

```

```

*****
---INITIALISATION DES MATRICES MASSE ET RIGIDITE ASSEMBLES---
*****

```

```

DO 80 I=1,NDLT
DO 80 J=1,NDLT

```

30  
90

```

AKE(I,J)=0.
AMG(I,J)=0.
DO 1000 I3=1,NEL
DO 90 I=1,12
DO 90 J=1,12
FKE(I,J)=0
EME(I,J)=0
T(I,J)=0
I1=NBN(I3,1)
I2=NBN(I3,2)
X1=XNN(I1)
X2=XNN(I2)
Y1=YNN(I1)
Y2=YNN(I2)
Z1=ZNN(I1)
Z2=ZNN(I2)
L=SQRT((X2-X1)**2+(Y2-Y1)**2+(Z2-Z1)**2)
AL=SQRT((X2-X1)**2+(Y2-Y1)**2)
CF=(X2-X1)/AL
SF=(Z2-Z1)/AL
SK=(Y2-Y1)/L
CK=AL/L
IY=YM(I3)
IZ=ZM(I3)
IX=PM(I3)
E(I3)=2.E+10
G1(I3)=8.E+10
RO(I3)=7980.
E1=E(I3)
G=G1(I3)
S=S1(I3)
RO1=RO(I3)

```

C  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*  
 --- MATRICE RIGIDITE DANS LE REPERE LOCAL ---  
 \*\*\*\*\*

```

FKE(1,1)=E1*S/L
FKE(1,7)=-(FKE(1,1))
FKE(2,2)=12.*E1*IZ/(L**3)
FKE(2,6)=6.*E1*IZ/(L**2)
FKE(2,8)=-12.*E1*IZ/(L**3)
FKE(2,12)=6.*E1*IZ/(L**2)
FKE(3,3)=12.*E1*IY/(L**3)
FKE(3,5)=6.*E1*IY/(L**2)
FKE(3,9)=-12.*E1*IY/(L**3)
FKE(3,11)=6.*E1*IY/(L**2)
FKE(4,4)=G*IX/L
FKE(4,10)=-FKE(4,4)
FKE(5,5)=4.*E1*IY/L
FKE(5,9)=-6.*E1*IY/(L**2)
FKE(5,11)=2.*E1*IY/L
FKE(6,6)=4.*E1*IZ/L
FKE(6,8)=-6.*E1*IZ/(L**2)
FKE(6,12)=2.*E1*IZ/L

```

```

FKE(7,7)=E1*5/L
FKE(8,8)=12.*E1*IZ/(L**3)
FKE(8,12)=-6.*E1*IZ/(L**2)
FKE(9,9)=12.*E1*IY/(L**3)
FKE(9,11)=-6.*E1*IY/(L**2)
FKE(10,10)=G*IX/L
FKE(11,11)=4.*E1*IY/L
FKE(12,12)=4.*E1*IZ/L

```

```

*****
---  MATRICE MASSE DANS LE REPERE LOCAL  ---
*****

```

```

FME(1,1)=R01*S*L/3.
FME(1,7)=R01*S*L/6.
FME(2,2)=39.*R01*S*L/105.
FME(2,6)=11.*R01*S*L*L/210.
FME(2,8)=27.*R01*S*L/210.
FME(2,12)=-13.*R01*S*L*L/420.
FME(3,3)=39.*R01*S*L/105.
FME(3,5)=11.*R01*S*L*L/210.
FME(3,9)=27.*R01*S*L/210.
FME(3,11)=-13.*R01*S*L*L/420.
FME(4,4)=R01*IX*L/3.
FME(4,10)=R01*IX*L/6.
FME(5,5)=R01*S*L*L*L/105.
FME(5,9)=13.*R01*S*L*L*L/420.
FME(5,11)=-R01*S*L*L*L/140.
FME(6,6)=FME(5,5)
FME(6,8)=FME(5,9)
FME(6,12)=FME(5,11)
FME(7,7)=R01*S*L/3
FME(8,8)=39.*R01*S*L/105.
FME(8,12)=-11.*R01*S*L*L/210.
FME(9,9)=39.*R01*S*L/105.
FME(9,11)=-11.*R01*S*L*L/210.
FME(10,10)=FME(4,4)
FME(11,11)=R01*S*L*L*L/105.
FME(12,12)=R01*S*L*L*L/105.
DO 110 I=1,12
  I4=I+1
DO 110 J=I4,12
  FKE(J,I)=FKE(I,J)
  FME(J,I)=FME(I,J)
CONTINUE

```

110  
C  
C  
C  
C  
C  
C

```

*****
---  MATRICE DE PASSAGE DU REPERE LOCAL AU REPERE GLOBAL  ---
*****
T(1,1)=CK*CF
T(1,2)=SK
T(1,3)=CK*SF
T(2,1)=-SK*CF

```

```

T(2,2)=-CR
T(2,3)=-SK*SE
T(3,1)=-SF
T(3,3)=CF
T(4,4)=T(1,1)
T(4,5)=T(1,2)
T(4,6)=T(1,3)
T(5,4)=T(2,1)
T(5,5)=T(2,2)
T(5,6)=T(2,3)
T(6,4)=T(3,1)
T(6,6)=T(3,3)
T(7,7)=T(4,4)
T(7,8)=T(4,5)
T(7,9)=T(4,6)
T(8,7)=T(5,4)
T(8,8)=T(5,5)
T(8,9)=T(5,6)
T(9,7)=T(6,4)
T(9,9)=T(6,6)
T(10,10)=T(7,7)
T(10,11)=T(7,8)
T(10,12)=T(7,9)
T(11,10)=T(8,7)
T(11,11)=T(8,8)
T(11,12)=T(8,9)
T(12,10)=T(9,7)
T(12,12)=T(9,9)
DO 120 I=1,12
DO 120 J=1,12
TT(I,J)=T(J,I)
CONTINUE
DO 130 I=1,12
DO 130 J=1,12
C(I,J)=0.
D(I,J)=0.
DO 130 K=1,12
C(I,J)=C(I,J)+TT(I,K)*FKE(K,J)
D(I,J)=D(I,J)+TT(I,K)*FME(K,J)
DO 140 I=1,12
DO 140 J=1,12
FKG(I,J)=0.
FMG(I,J)=0.
DO 140 K=1,12
FKG(I,J)=FKG(I,J)+C(I,K)*T(K,J)
FMG(I,J)=FMG(I,J)+D(I,K)*T(K,J)
CONTINUE

```

120

130

140

C  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*  
---ASSEMBLAGE---

```

DO 150 I=1,12
DO 150 J=1,12
K=TI(I3,I)

```

```

M=TI(13,J)
IF(KAM.EQ.0)GO TO 150
AKG(K,M)=AKG(K,M)+FKG(I,J)
AMG(K,M)=AMG(K,M)+FMG(I,J)
50 CONTINUE
-000 CONTINUE
DO 1100 I=1,NN
DO 1100 J=1,6
K=IDDN(I,J)
IF(K.EQ.0)GO TO 1100
AMG(K,K)=AMG(K,K)+CMA(I,J)
100 CONTINUE

```

\*\*\*\*\*  
 C A C U L    D E S    V A L E U R S    E T    V E C T E U R S  
 P R O P R E S  
 \*\*\*\*\*

```

GO TO 5000
-----CLASSEMENT DES VALEURS PROPRES DANS UN ORDRE CROISSANT-----
5010 DO 5020 I=1,NDLT
DO 5020 J=1,NDLT
AKG(J,I)=AKG(I,J)
5020 AMG(J,I)=AMG(I,J)
DO I=1,NDLT
DO J=1+1,NDLT
IF(EIGV(I).LT.EIGV(J))GO TO 5030
GR=EIGV(I)
EIGV(I)=EIGV(J)
EIGV(J)=GR

```

-----CLASSEMENT DES VECTEURS PROPRES-----

```

DO K=1,NDLT
VCP(K)=VEC(K,I)
VEC(K,I)=VEC(K,J)
VEC(K,J)=VCP(K)
END DO
5030 END DO
END DO
WRITE(6,15)
15 FORMAT(' *****')
WRITE(6,3400)(EIGV(K),K=1,8)
3400 FORMAT(6X,4(E10.4,3X)/6X,4(E10.4,3X))
WRITE(6,16)
16 FORMAT(' *****')
DO 5040 J=1,NDLT
DO 5040 I=1,NDLT
W(I,J)=VEC(I,J)/VEC(1,J)
5040 CONTINUE

```

-----CALCUL DES DEPLACEMENTS ET ROTATIONS AUX NOEUDS-----

```

DO 6070 J=1,NVP
OMEG(J)=SQRT(EIGV(J))/(2*3.1415927)
WRITE(6,5060)J,EIGV(J),OMEG(J)
-060 FORMAT(/2X,I3,'>VALEUR PROPRE=',E10.4,5X,'FREQUENCL=',E10.4)
WRITE(6,3620)
620 FORMAT(/3X,'NOEUD',6X,'U',8X,'V',8X,'W',8X,'TETA X',6X,'TETA Y',
1 5X,'TETA Z')
DO 3800 I2=1,NN
DO 3700 M=1,6
VCP(M)=0.
N1=IDDN(I2,M)
IF(N1.EQ.0)GO TO 3700
VCP(M)=VEC(N1,J)
-0700 CONTINUE
WRITE(6,3630)I2,(VCP(I4),I4=1,6)
-0630 FORMAT(4X,I3,2X,6(E9.3,X))
-0800 CONTINUE
-0070 CONTINUE
GO TO 9000

```

-----DEBUT DE CALCUL DES VALEURS PROPRES-----

```

5000 NSMAX=6
RTCL=1.D-19
DO 2010 I=1,NDLT
IF((AKG(I,I).GT.0).AND.(AMG(I,I).GT.0)) GO TO 4
WRITE(6,*)I,AKG(I,J),AMG(I,J)
STOP
4 VALP(I)=AKG(I,I)/AMG(I,I)
EIGV(I)=VALP(I)
2010 CONTINUE

```

-----INITIALISATION DES VECTEURS PROPRES-----

```

DO 2030 I=1,NDLT
DO 2020 J=1,NDLT
2020 VEC(I,J)=0.
2030 VEC(I,I)=1.

```

-----DEBUT DU CYCLE ITERATIF-----

```

NSWEEP=0
NR=NDLT-1
2040 NSWEEP=NSWEEP+1
IF(IFPK.EQ.1)WRITE(6,2980)NSWEEP

```

-----TOLERANCE DYNAMIQUE-----

EPS=(.1\*ANSWEEP)

-----CALCUL DES FACTEURS DE COUPLAGE-----

DO 2210 J=1, NR  
JJ=J+1  
DO 2210 K=JJ, NDLT  
EPTOLA=(AKG(J,K)\*AKG(J,K))/(AKG(J,J)\*AKG(K,K))  
IF(ABS(EPTOLA).LE.1.D-10)EPTOLA=0  
EPTOLB=(AMG(J,K)\*AMG(J,K))/(AMG(J,J)\*AMG(K,K))  
IF(ABS(EPTOLB).LT.1.D-10)EPTOLB=0  
IF((EPTOLA.LT.EPS).AND.(EPTOLB.LT.EPS))GO TO 2210

-----CALCUL DES COEFFICIENTS DE LA TRANSFORMATION-----

AKK=AKG(K,K)\*AMG(J,K)-AMG(K,K)\*AKG(J,K)  
AJJ=AKG(J,J)\*AMG(J,K)-AMG(J,J)\*AKG(J,K)  
AB=AKG(J,J)\*AMG(K,K)-AKG(K,K)\*AMG(J,J)  
CHECK=(AB\*AB)/4.+(AKK\*AJJ)  
IF(CHECK)2050,2060,2060  
2050 WRITE(6,\*)CHECK  
STOP  
2060 SQCH=SQRT(CHECK)  
D1=AB/2.+SQCH  
D2=AB/2.-SQCH  
DEN=D1  
IF(ABS(D2).GT.ABS(D1))DEN=D2  
IF(DEN)2080,2070,2080  
2070 CA=0.  
CG=-AKG(J,K)/AKG(K,K)  
GO TO 2090  
2080 CA=AKK/DEN  
CG=-AJJ/DEN

-----MODIFICATION DES ELEMENTS DE AKG ET DE AMG-----

2090 IF(NDLT-2)2100,2190,2100  
2100 JPI=J+1  
JMI=J-1  
KPI=K+1  
KMI=K-1  
IF(JMI-1)2130,2110,2110  
2110 DO 2120 I=1, JMI  
AJ=AKG(I,J)  
BJ=AMG(I,J)  
AK=AKG(I,K)  
BK=AMG(I,K)  
AKG(I,J)=AJ+CG\*AK

```

AMG(I,J)=BJ+CG*ABK
AKG(I,K)=AK+CA*AJ
AMG(I,K)=BK+CA*BJ
2120 CONTINUE
2130 IF(KP1-NDLT)2140,2140,2160
2140 DO 2150 I=KP1,NDLT
      AJ=AKG(J,I)
      BJ=AMG(J,I)
      AK=AKG(K,I)
      BK=AMG(K,I)
      AKG(J,I)=AJ+CG*AK
      AMG(J,I)=BJ+CG*BK
      AKG(K,I)=AK+CA*AJ
      AMG(K,I)=BK+CA*BJ
2150 CONTINUE
2160 IF(JP1-KM1)2170,2170,2190
2170 DO 2180 I=JP1,KM1
      AJ=AKG(J,I)
      BJ=AMG(J,I)
      AK=AKG(I,K)
      BK=AMG(I,K)
      AKG(J,I)=AJ+CG*AK
      AMG(J,I)=BJ+CG*BK
      AKG(I,K)=AK+CA*AJ
      AMG(I,K)=BK+CA*BJ
2180 CONTINUE
2190 AK=AKG(K,K)
      BK=AMG(K,K)
      AKG(K,K)=AK+2.*CA*AKG(J,K)+CA*CA*AKG(J,J)
      AMG(K,K)=BK+2.*CA*AMG(J,K)+CA*CA*AMG(J,J)
      AKG(J,J)=AKG(J,J)+2.*CG*AKG(J,K)+CG*CG*AK
      AMG(J,J)=AMG(J,J)+2.*CG*AMG(J,K)+CG*CG*BK
      AKG(J,K)=0
      AMG(J,K)=0
C
C
C
C-----CALCUL DES VECTEURS PROPRES-----
C
      DO 2200 I=1,NDLT
        XJ=VEC(I,J)
        XK=VEC(I,K)
        VEC(I,J)=XJ+CG*XK
        VEC(I,K)=XK+CA*XJ
2200 CONTINUE
2210 CONTINUE
C
C
C
C-----CALCUL DES VALEURS PROPRES-----
C
      DO 2220 I=1,NDLT
        IF((AKG(I,I).GT.0).AND.(AMG(I,I).GT.0))GO TO 2220
        WRITE(6,*)I,AKG(I,I),AMG(I,I)
        STOP
2220 EIGV(I)=AKG(I,I)/AMG(I,I)

```

```

IF(IFPR.EQ.0)GO TO 2230
WRITE(6,3010)(EIGV(I),I=1,NDLT)

```

-----TEST DE CONVERGENCE DES VALEURS PROPRES-----

```

2230 DO 2240 I=1,NDLT
      TOL=RTCL*VALP(I)
      DIF=ABS(EIGV(I)-VALP(I))
      IF(DIF.GT.TOL)GO TO 2280
2240 CONTINUE

```

----- TEST DE CONVERGENCE SUR LES TERMES NON DIAGONAUX-----

```

      EPS=RTCL**2
      DO 2250 J=1,NR
        JJ=J+1
        DO 2250 K=JJ,NDLT
          EPSA=(AKG(J,K)*AKG(J,K))/(AKG(J,J)*AKG(K,K))
          EPSB=(AMG(J,K)*AMG(J,K))/(AMG(J,J)*AMG(K,K))
          IF((EPSA.LT.EPS).AND.(EPSB.LT.EPS))GO TO 2250
        GO TO 2280
2250 CONTINUE

```

-----NORMALISATION DES VECTEURS PROPRES-----

```

6080 DO 2260 I=1,NDLT
      DO 2260 J=1,NDLT
        AKG(J,I)=AKG(I,J)
        AMG(J,I)=AMG(I,J)
2260 CONTINUE
      DO 2270 J=1,NDLT
        BB=SQRT(AMG(J,J))
        DO 2270 K=1,NDLT
          VEC(K,J)=VEC(K,J)/BB
2270 CONTINUE
      GO TO 5010
2280 DO 2290 I=1,NDLT
      VALP(I)=EIGV(I)
2290 CONTINUE
      IF(NSWEEP.LT.NSMAX)GO TO 2040
      GO TO 6080
2980 FORMAT(/,' ITERATIONS=',I2)
3010 FORMAT(1H0,5X,4E14.5/)

```

```

*****
---- (((FORMULATION DE LA MATRICE))) ----
---- (((((((AMORTISSEMENT))))))))) ----

```

## -----CALCUL DES COEFFICIENTS DE RAYLEIGH-----

```

000 AKSI=.05
      OMEG1=.2445E+02
      OMEG2=.2845E+02
      ALFA=2.*AKSI*OMEG1*OMEG2/(OMEG1+OMEG2)
      BETA=2.*AKSI/(OMEG1+OMEG2)

```

## -----INITIALISATION DE LA MATRICE AMORTISSEMENT-----

```

DO 4020 I=1,NDLT
DO 4020 J=1,NDLT
ACG(I,J)=0
020 CONTINUE

```

## -----CALCUL DE LA MATRICE AMORTISSEMENT-----

```

DO 4030 I=1,NDLT
DO 4030 J=1,NDLT
AMG(I,J)=AMG(I,J)*ALFA
AKG(I,J)=AKG(I,J)*BETA
4030 ACG(I,J)=ACG(I,J)+AMG(I,J)+AKG(I,J)

```

```

C
C
C
C*****
C***** PROGRAMME POUR RESOUDRE PAS A PAS LE SYSTEME *****
C***** [M]q"+[C]q'+[K]q=F(t) *****
C***** PAR LA METHODE DE "WILSON-TETA" *****
C*****
C Cette partie du programme nous permet de determiner, l'accélération,
C la vitesse et le déplacement en chacun des degrés de liberté de la
C structure, pour différentes excitations extérieures.
C
C .....
C VARIABLES UTILISEES DANS CETTE PARTIE DU PROGRAMME
C .....
C
C T0 : instant initial
C T3 : instant final
C DELT : incrément de temps
C TETA : facteur de stabilité de la solution.
C .....
C DX0 : déplacement à l'instant t=T0
C DV0 : vitesse à l'instant t=T0
C DG0 : accélération à l'instant t=T0.
C .....
C F0 : effort à l'instant t=T0
C F1 : effort à l'instant t=T0+DELT
C F2 : effort effectif.
C .....

```



```

DO 9020 I=1,M
TU=TU+RK1(K,1)*PG(I)
-020 CONTINUE
EE=RK1(K,K)-TU
RK1(K,K)=1.0/EE
DO 9030 I=1,M
RK1(I,K)=-PG(I)*RK1(K,K)
-030 CONTINUE
DO 9040 J=1,M
PH(J)=0
DO 9040 I=1,M
PH(J)=PH(J)+RK1(K,I)*RK1(I,J)
-040 CONTINUE
DO 9050 J=1,M
RK1(K,J)=-PH(J)*RK1(K,K)
9050 CONTINUE
DO 9060 I=1,M
DO 9060 J=1,M
RK1(I,J)=RK1(I,J)-PG(I)*RK1(K,J)
9060 CONTINUE
9070 CONTINUE
C-----FIN DE L INVERSION DE RK1-----
WRITE(6,699)
699 FORMAT(/5X,' DEPLACEMENTS, VITESSES ET ACCELERATIONS AUX D.D.L'//)
READ(5,779) (F(I),I=1,10)
779 FORMAT(/3(5F10.3,/)
DO I=1,NDLT
F1(I)=0.
END DO
DO 776 ILJ=1,10
T1=T0+DELT
F1(N01)=F(ILJ)
F1(N02)=F(ILJ)
F1(N03)=F(ILJ)
F1(N04)=F(ILJ)
DO I=1,NDLT
F2(I)=0.
END DO
DO 8051 I=1,NDLT
DO 8051 J=1,NDLT
F2(I)=F2(I)+F0(I)+TETA*(F1(I)-F0(I))+AMG(I,J)*(A0*DXO(I)+
1A2*DV0(I)+2.*ADG0(I))+ACG(I,J)*(A1*DXO(J)+2.*DV0(J)+A3*DG0(J))
8051 CONTINUE
C
C
C----- RESOLUTION POUR LE DEPLACEMENT A T=T0+TETA*DELT-----
DO 8052 I=1,NDLT
DX2(I)=0.
8052 CONTINUE
DO I=1,NDLT
DO J=1,NDLT
DX2(I)=DX2(I)+RK1(I,J)*F2(J)
END DO
END DO
DO 8140 I=1,NDLT
DG1(I)=A4*(DX2(I)-DXO(I))+A5*DV0(I)+A6*DG0(I)
DV1(I)=DV0(I)+A7*(DG1(I)+DG0(I))
DX1(I)=DXO(I)+DELT*DV0(I)+A8*(DG1(I)+2.*DG0(I))

```

```
140 CONTINUE
    WRITE(6,700)
00  FORMAT(/7X,6H  IDDN,5X,11HDEPLACEMENT,8X,7HVITESSE,12X,12HACCEL
+ERATION)
    DO I=1,NDLT
    WRITE(6,701)I,DX1(I),DV1(I),DG1(I)
01  FORMAT(10X,12,6X,3(E9.3,10X))
    END DO
    DO I=1,NDLT
    DXO(I)=DX1(I)
    DVO(I)=DV1(I)
    DGO(I)=DG1(I)
    END DO
    IF(T1.GT.T3)GO TO 1141
776 CONTINUE
1141 END
```

**FICHER DE DONNEES**

18 24 1 6					
1 1 1 1 1 1 1	.000	.000	.000	69.857	
2 1 1 1 1 1 1	.000	.800	.000	69.857	
3 0 0 0 0 1 0	.420	.000	.000	69.857	
4 0 0 0 0 1 0	.420	.800	.000	69.857	
5 1 0 1 0 1 0	1.500	.000	.000	39.857	
6 1 0 1 0 1 0	1.500	.800	.000	39.857	
7 1 1 1 1 1 1	2.485	.000	.000	39.857	
8 1 1 1 1 1 1	2.485	.800	.000	39.857	
9 1 1 1 1 1 1	3.480	.000	.000	39.857	
10 1 1 1 1 1 1	3.480	.800	.000	39.857	
11 0 0 0 0 1 0	4.910	.000	.000	146.107	
12 0 0 0 0 1 0	4.910	.800	.000	164.857	
13 1 0 1 0 1 0	6.425	.000	.000	453.607	
14 1 0 1 0 1 0	6.425	.800	.000	359.857	
15 1 1 1 1 1 1	7.290	.000	.000	225.000	
16 1 1 1 1 1 1	7.290	.800	.000	225.000	
17 1 1 1 1 1 1	7.960	.000	.000	130.000	
18 1 1 1 1 1 1	7.960	.800	.000	130.000	

1 1 2	2.3000E-03	1071.9167E-08	594.7862E-08	1666.7026E-08
2 1 3	1.8060E-03	794.5851E-08	65.0590E-08	859.6443E-08
3 3 4	1.2500E-03	446.8899E-08	59.2514E-08	506.1413E-08
4 2 4	1.8060E-03	794.5851E-08	65.0590E-08	859.6443E-08
5 3 5	2.0340E-03	1327.1548E-08	66.7520E-08	1393.9067E-08
6 4 6	2.0340E-03	1327.1548E-08	66.7520E-08	1393.9067E-08
7 5 7	2.2680E-03	1924.5716E-08	68.3106E-08	1992.8822E-08
8 7 8	1.6500E-03	1201.1758E-08	294.2500E-08	1495.4258E-08
9 6 8	2.2680E-03	1924.5716E-08	68.3106E-08	1992.8822E-08
10 7 9	2.2680E-03	1924.5716E-08	68.3106E-08	1992.8822E-08
11 910	1.6500E-03	1201.1758E-08	294.2500E-08	1495.4258E-08
12 810	2.2680E-03	1924.5716E-08	68.3106E-08	1992.8822E-08
13 911	2.2680E-03	1924.5716E-08	68.3106E-08	1992.8822E-08
141112	1.6500E-03	1201.1758E-08	294.2500E-08	1495.4258E-08
151012	2.2680E-03	1924.5716E-08	68.3106E-08	1992.8822E-08
161113	2.0340E-03	1327.1548E-08	66.7520E-08	1393.9067E-08
171314	1.2500E-03	446.8899E-08	59.2514E-08	506.1413E-08
181214	2.0340E-03	1327.1548E-08	66.7520E-08	1393.9067E-08
191315	1.8060E-03	794.5851E-08	65.0590E-08	859.6443E-08
201516	1.2500E-03	446.8899E-08	59.2514E-08	506.1413E-08
211416	1.8060E-03	794.5851E-08	65.0590E-08	859.6443E-08
221517	1.8060E-03	794.5851E-08	65.0590E-08	859.6443E-08
231718	1.2500E-03	446.8899E-08	59.2514E-08	506.1413E-08
241618	1.8060E-03	794.5851E-08	65.0590E-08	859.6443E-08

INSTANT INITIAL, INSTANT FINAL, INCREMENT, TETA

0.000 0.4 0.04 1.4

COMPOSANTES DES FORCES

13 14 51 48

VALEURS DES FORCES INITIALES

113.682 113.682 113.682 113.682

FORCES D EXCITATION

1809.904 2514.250 1686.348 135.394 9.284

12.641 22.524 295.874 1138.820 2481.120